Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era
Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr Moniki Fabijańczyk, dr. Mariana Liskowskiego i dr hab. Anny Cegieły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)
Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5091-5

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel
Współpraca redakcyjna: Aleksandra Jankowska, Marcin Minda
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski
Redakcja językowa: Marta Zuchowicz, Paulina Szulim
Korekta językowa: Anna Wesołowska
Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak
Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło
Opracowanie graficzne stron działowych: Maciej Galiński
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo
Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Julian Tatang/EyeEm.
Fotografie: Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 403; BE&W: AKG IMAGES Gmbh s. 429, Alamy Stock Photo - Art World s. 374, GL Archive s. 425 (Blaise Pascal), BEW NEWS/cienki s. 222, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 161 (Apoloniusz z Pergi); Getty Images: Bongarts/Alexander Hassenstein s. 337, De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 425 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 424, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 160 (statki), E+/simonbradfield s. 377, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 114; Indigo: Alamy Stock Photo - PA Images s. 336, Pictorial Press Ltd s. 425 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 205; Shutterstock: Aaron Amat s. 213, Abundance s. 204 (ananas), Alexander Raths s. 439, Amatveev s. 189, Artens s. 218, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 237, Fotokostic s. 239, KeepWatch s. 105, KELENY s. 233, maxtar s. 405, Mikbiz s. 387, Mimadeo s. 204 (szyszki), MM_photos s. 160, 161 (stara kartka), Nguyen Thai s. 204 (szyszka), Sergielev s. 388, Targn Pleiades s. 371, wavebreakmedia s. 190; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - Liufuyu s. 267, Roob s. 434, Photodisc/James Woodson s. 449, Zoonar/J.Wachala s. 443.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp 5

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych 6

Dział 1. Trygonometria

1. Twierdzenie sinusów 8
2. Twierdzenie cosinusów 17
3. Związki miarowe w wielokątach 24
4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta 34
5. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta 47
6. Miara łukowa kąta 58
7. Wykresy funkcji trygonometrycznych 66
8. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów 80
9. Równania i nierówności trygonometryczne 89
10. Powtórzenie 98

Dział 2. Geometria analityczna

1. Warto powtórzyć – równanie prostej, wektory 106
2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej 114
3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej 124
4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło 137
5. Okrąg i prosta. Dwa okręgi 147
6. Symetria środkowa 162
7. Symetria osiowa 171
8. Powtórzenie 180

Dział 3. Ciągi

1. Określenie i własności ciągu liczbowego 190
2. Ciąg arytmetyczny 206
3. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 216
4. Ciąg geometryczny 225
5. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 235
6. Oszczędzanie i kredyty w bankach 242
7. Powtórzenie 257

Dział 4. Analiza matematyczna

1. Granica ciągu 268
2. Szereg geometryczny zbieżny i jego suma 282

3. Granica funkcji w punkcie 288
4. Granice niewłaściwe 298
5. Funkcje ciągłe 307
6. Pochodna funkcji w punkcie 315
7. Pochodna jako funkcja 325
8. Pochodna funkcji złożonej 338
9. Monotoniczność i ekstrema funkcji różniczkowalnej 344
10. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji 356
11. Powtórzenie 365

Dział 5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa 372
2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa 375
3. Reguła mnożenia 383
4. Obliczanie prawdopodobieństwa 394
5. Własności prawdopodobieństwa 406
6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych 418
7. Wstęp do statystyki 426
8. Mediana, średnia i dominanta 432
9. Miary rozproszenia 447
10. Powtórzenie 460

Odpowiedzi 467
Skorowidz 492
Wybrane wzory trygonometryczne 494
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych 496

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy trzeciej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera ponad półtora tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są * lub **, zadania typu „Wykaż…" poprzedzono znakiem D, natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Po omówieniu każdego rozdziału uczniowie powinni rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to dla nich sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A;\ x \notin A$	x należy do zbioru A; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}; \emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c; zbiór pusty
$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b\rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b); (a; b\rangle$	przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty
$\|a\|$	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
$D; ZW$	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$o(S, r); k(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r; koło o środku S i promieniu r
$P; obw$	pole figury; obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
$AB; \|AB\|$	odcinek o końcach A i B; długość odcinka AB
$a \parallel b; a \perp b$	prosta a jest równoległa do prostej b; prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
$\sin\alpha$	sinus kąta α
$\cos\alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg}\alpha$	tangens kąta α
$(a_n); a_n$	ciąg; n-ty wyraz ciągu (a_n)
$S_n; S$	suma n początkowych wyrazów ciągu; suma szeregu geometrycznego
$\lim_{n\to\infty} a_n$	granica ciągu (a_n)
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	granica funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)$	granica lewostronna, prawostronna funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to\infty} f(x)$	granica funkcji f w $-\infty$, w ∞
$f'(x)$	pochodna funkcji f
$\overrightarrow{AB}; \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	wektor o początku A i końcu B; długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a, b
$\Omega; \overline{\overline{\Omega}}$	zbiór zdarzeń elementarnych; liczba zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω
$\overline{\overline{A}}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
EX	wartość oczekiwana
$\overline{x}; \overline{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
σ^2	wariancja
σ	odchylenie standardowe

Trygonometria

1

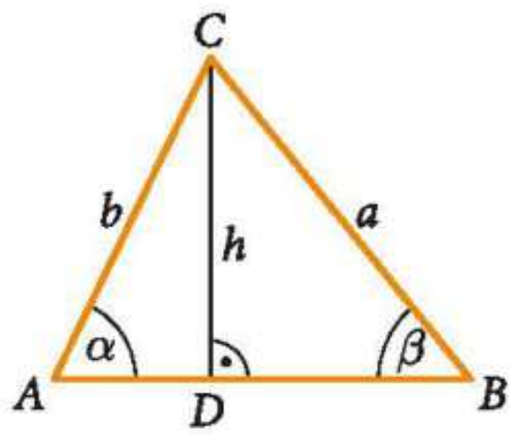
1. Twierdzenie sinusów

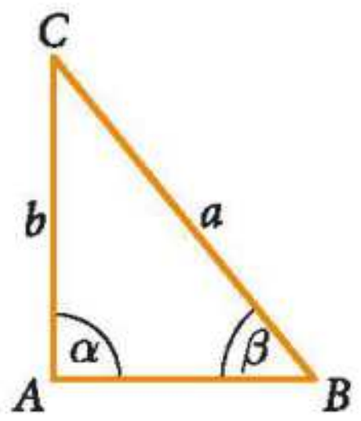
Umiejętności:

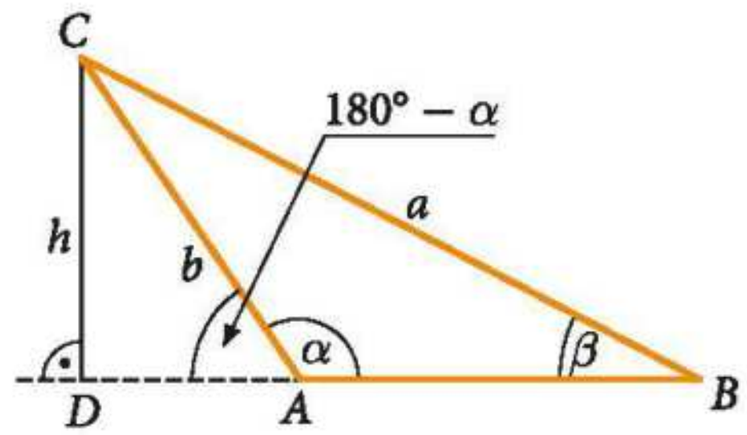
- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów

Zadanie polegające na wyznaczeniu wszystkich nieznanych długości boków oraz miar kątów w trójkącie nazywamy krótko **rozwiązywaniem trójkąta**. W kolejnych tematach zajmiemy się tym zagadnieniem. W tym celu będziemy stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi zachodzące w trójkątach.

Pokażemy, że w każdym trójkącie wysokość można wyrazić w postaci iloczynu długości boku, na który ta wysokość nie jest opuszczona, i sinusa odpowiedniego kąta tego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.







Zauważmy, że:

- jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin\alpha$,
- jeżeli α jest kątem prostym, to $h = b$, czyli $h = b \cdot \sin\alpha$, ponieważ $\sin 90^\circ = 1$,
- jeżeli α jest kątem rozwartym, to $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \cdot \sin\alpha$.

Niezależnie od miary kąta mamy więc równość:

$$h = b \cdot \sin\alpha$$

W identyczny sposób możemy poprowadzić rozumowanie dla boku a i kąta β. Otrzymamy wówczas równość:

$$h = a \cdot \sin\beta$$

Zatem:

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

Równość tę możemy zapisać w postaci:

$$(1) \qquad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad \longleftarrow \sin\alpha \neq 0 \text{ i } \sin\beta \neq 0$$

Przypominamy: w tych podręcznikach często zamiast pisać „kąt ABC o mierze α” używamy krótszej formy „kąt ABC równy α” albo „$\sphericalangle ABC = \alpha$”. Podobnie – „wysokość równa 5”, a nie „długość wysokości równa 5”, „trójkąt ma równe przyprostokątne” zamiast „trójkąt ma przyprostokątne równej długości” itd.

Oznaczmy trzeci bok trójkąta literą c oraz kąt leżący naprzeciwko niego literą γ. Gdy poprowadzimy wysokość z wierzchołka A i będziemy rozumować podobnie jak wyżej, otrzymamy $b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$ lub inaczej:

(2) $$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ $\longleftarrow \sin\gamma \neq 0$

Z równości (1) i (2) wynika, że:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Otrzymaną równość nazywamy **wzorem sinusów**.

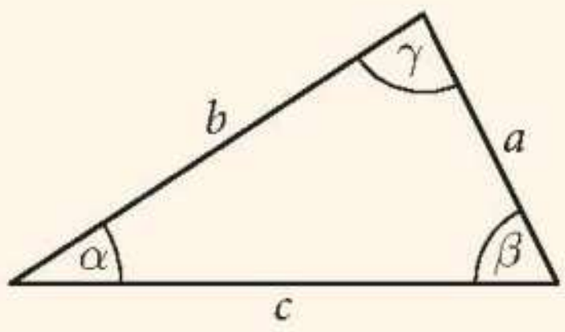
Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Wzór sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Twierdzenie to stosujemy na przykład do obliczania długości boków trójkąta, jeżeli dana jest jedna z nich oraz dane są kąty trójkąta.

Przykład 1 ◀ zad. 1.5

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle BCA = 30°$. Obliczymy długość boku AC.

Rozwiązanie

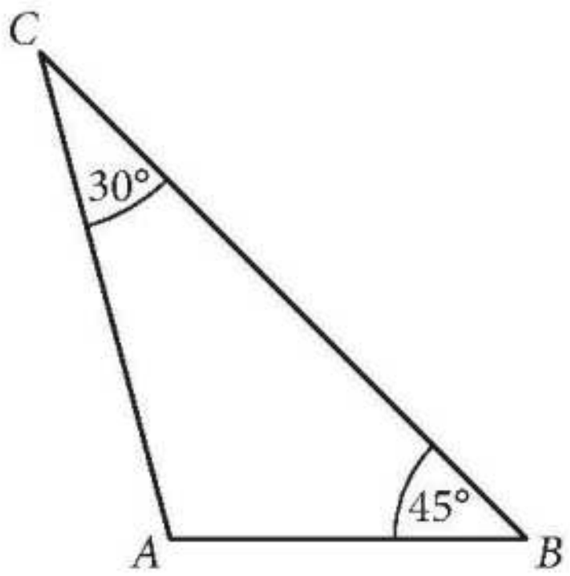
Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{|AB|}{\sin\sphericalangle BCA} = \frac{|AC|}{\sin\sphericalangle ABC}$$

$$\frac{12}{\sin 30°} = \frac{|AC|}{\sin 45°}$$

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$|AC| = 12\sqrt{2}$$



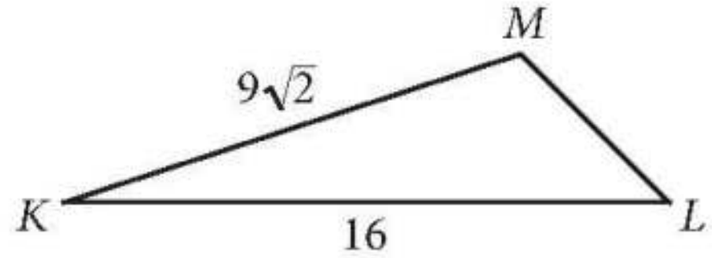
Odp.: Bok AC ma długość $12\sqrt{2}$.

Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M. Dane są: $|KL| = 16$, $|KM| = 9\sqrt{2}$, $\sin\sphericalangle LMK = \frac{8}{9}$. Obliczymy miarę kąta KLM.

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:



$$\frac{|KL|}{\sin\sphericalangle LMK} = \frac{|KM|}{\sin\sphericalangle KLM}$$

$$\frac{16}{\frac{8}{9}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sin\sphericalangle KLM}, \text{ stąd } \sin\sphericalangle KLM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

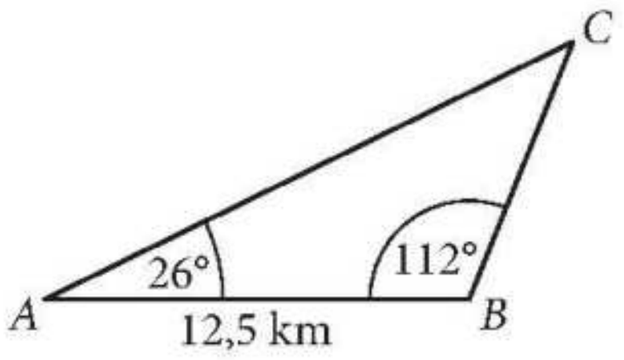
$\sphericalangle KLM = 45°$ lub $\sphericalangle KLM = 135°$ ⟵ $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

Wiemy, że trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M, zatem tylko kąt 45° spełnia warunki zadania.

Odp.: Kąt KLM ma miarę 45°.

Przykład 3 ◀ zad. 1.8

W górzystym terenie stoją dwie wieże triangulacyjne A i B. Odległość między nimi jest równa 12,5 km. Najwyższym w okolicy wierzchołkiem jest Góra Czarownic (oznaczona na rysunku literą C). Geodeta zmierzył dwa kąty: z wieży A kąt BAC o mierze 26° i z wieży B kąt ABC o mierze 112°. Obliczymy przybliżone odległości między Górą Czarownic a wieżami (mierzone w linii prostej i z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



Rozwiązanie

Zastosujemy dwa razy wzór sinusów. Miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB znajdujemy jako dopełnienie do 180°:

$$\gamma = 180° - 26° - 112° = 42°, \text{ zatem } \frac{|AB|}{\sin 42°} = \frac{|AC|}{\sin 112°}$$

$$|AC| = \frac{12{,}5 \cdot \sin 112°}{\sin 42°} = \frac{12{,}5 \cdot \sin(180° - 68°)}{\sin 42°} = \frac{12{,}5 \cdot \sin 68°}{\sin 42°}$$

Odczytujemy z tablic matematycznych przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku:

$$\sin 68° \approx 0{,}93, \quad \sin 42° \approx 0{,}67$$

Zatem $|AC| \approx \frac{12{,}5 \cdot 0{,}93}{0{,}67} \approx 17{,}4$.

Do obliczenia odległości $|BC|$ wybieramy inną proporcję ze wzoru sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 26^\circ} \qquad \longleftarrow \sin 26^\circ \approx 0{,}44$$

$$\text{czyli } |BC| = \frac{12{,}5 \cdot \sin 26^\circ}{\sin 42^\circ} \approx \frac{12{,}5 \cdot 0{,}44}{0{,}67} \approx 8{,}2$$

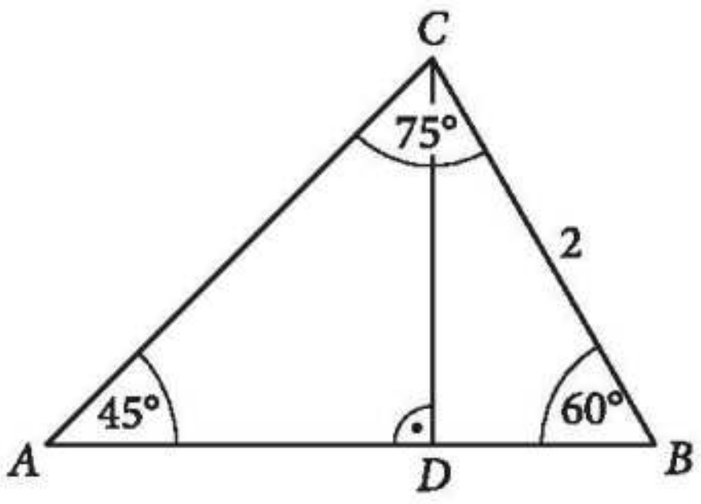
Odp.: Góra Czarownic jest oddalona od wieży A o ok. 17,4 km, a od wieży B o ok. 8,2 km.

D Przykład 4 ◂ zad. 1.18

Kąty trójkąta ABC mają miary 45°, 60°, 75°, a bok BC ma długość 2. Skorzystamy ze wzoru sinusów i wykażemy, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Dowód

Zauważmy najpierw, że istnieje dokładnie jeden trójkąt spełniający warunki zadania – możemy go skonstruować, gdy określimy odcinek jednostkowy. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zgodnie z nimi CD jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta o mierze 75°.



$$|DB| = 1 \text{ i } |DC| = \sqrt{3} \qquad \longleftarrow \triangle DBC \text{ jest połową trójkąta równobocznego o boku 2}$$

$$|AD| = \sqrt{3} \text{ i } |AC| = \sqrt{6} \qquad \longleftarrow \triangle ADC \text{ jest połową kwadratu o boku } |DC| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{|AB|}{\sin 75^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ} \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie sinusów dla trójkąta } ABC$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ stąd } \sin 75^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Koniec dowodu

Zauważmy, że jeśli w trójkącie ABC poprowadzimy wysokość BE z wierzchołka kąta o mierze 60°, to możemy w podobny sposób wykazać, że:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Spotyka się również następujące zależności:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Za pomocą odpowiednich przekształceń można wykazać, że:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Wzór sinusów stosujemy również do wyznaczania promienia okręgu opisanego na trójkącie.

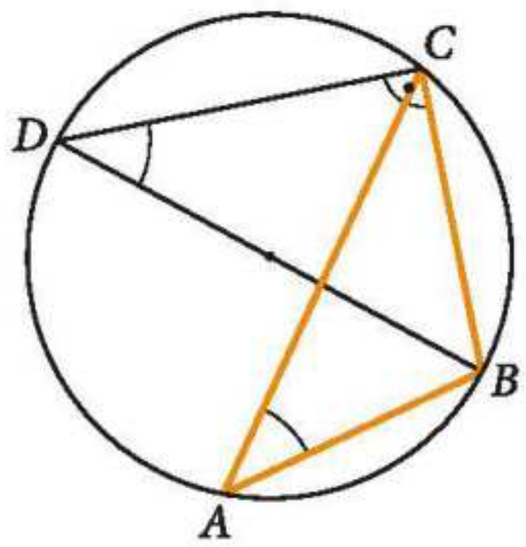
Twierdzenie

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.



Teza

Stosunek długości boku trójkąta ABC do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości $2R$, czyli średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód

Zgodnie ze wzorem sinusów dowód wystarczy przeprowadzić dla jednego kąta. Któryś z kątów trójkąta jest kątem ostrym; oznaczmy jego wierzchołek literą A. Z innego wierzchołka (np. B) prowadzimy średnicę BD.

$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ ⟵ kąty wpisane oparte na tym samym łuku

$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{|BD|}$ ⟵ trójkąt BDC jest prostokątny

$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{2R}$ ⟵ R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC

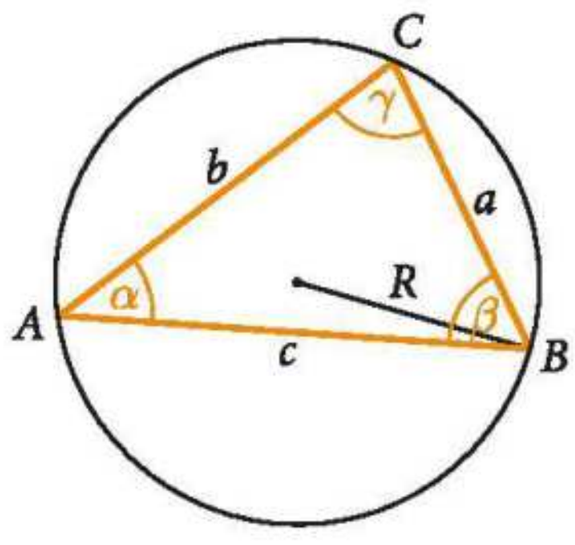
Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy:

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BDC}$$

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC} \quad \longleftarrow \sin \sphericalangle BDC = \sin \sphericalangle BAC$$

Koniec dowodu

Korzystając z oznaczeń przedstawionych na rysunku, możemy treść twierdzenia, łącznie ze wzorem sinusów, zapisać krótko:



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

R

Przykład 5 ◂ zad. 1.19

Na trójkącie, którego dwa boki mają długości 9 i $3\sqrt{6}$, opisano okrąg o promieniu $3\sqrt{3}$. Obliczymy miary kątów i długość trzeciego boku trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy:
α, β, γ – kąty leżące odpowiednio naprzeciwko boków a, b, c trójkąta,
R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przyjmijmy, że $a = 9,\ b = 3\sqrt{6}$.

- $\dfrac{9}{\sin\alpha} = 6\sqrt{3}$ ⟵ zgodnie ze wzorem $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

  $\sin\alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $\alpha = 60°$ lub $\alpha = 120°$ ⟵ $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

- $\dfrac{3\sqrt{6}}{\sin\beta} = 6\sqrt{3}$

  $\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $\beta = 45°$ lub $\beta = 135°$ ⟵ $\sin\beta = \sin(180° - \beta)$

Suma kątów trójkąta wynosi 180°, zatem $\alpha + \beta < 180°$ i $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Nie istnieje trójkąt o kątach $\alpha = 60°$ i $\beta = 135°$ ani trójkąt o kątach $\alpha = 120°$ i $\beta = 135°$.

Możliwe są więc dwa rozwiązania:

I. trójkąt o kątach $\alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 75°$

II. trójkąt o kątach $\alpha = 120°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 15°$

Długość trzeciego boku trójkąta obliczamy ze wzoru $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, czyli:

$c = 2R\sin\gamma$

$c = 6\sqrt{3}\sin 75° = 6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$ ⟵ dla I trójkąta

$c = 6\sqrt{3}\sin 15° = 6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}$ ⟵ dla II trójkąta

Odp.: $\alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 75°,\ c = \dfrac{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$

lub $\alpha = 120°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 15°,\ c = \dfrac{9\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}$

R

Zadania

W poniższych zadaniach odczytuj wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku, a miary kątów z dokładnością do 1°. Możesz wykorzystywać podane w przykładzie 4 dokładne wartości sin 75° i sin 15°.

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6\sqrt{3}$, $\sphericalangle BCA = 120°$. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 6 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 12

1.2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $|BC| = 16$, $\sphericalangle BCA = 60°$. Wskaż wartość $\sin\sphericalangle CAB$.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

1.3. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 18$, $\sphericalangle CAB = 45°$, $\sin\sphericalangle BCA = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Wskaż długość boku AB.

A. $4\sqrt{6}$ **B.** 12 **C.** $12\sqrt{2}$ **D.** 27

1.4. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 8$, $\sphericalangle CAB = 45°$, $\sphericalangle BCA = 120°$. Oblicz długość boku AC.

1.5. Kąty trójkąta ABC oznaczono α, β, γ, a literami a, b, c – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

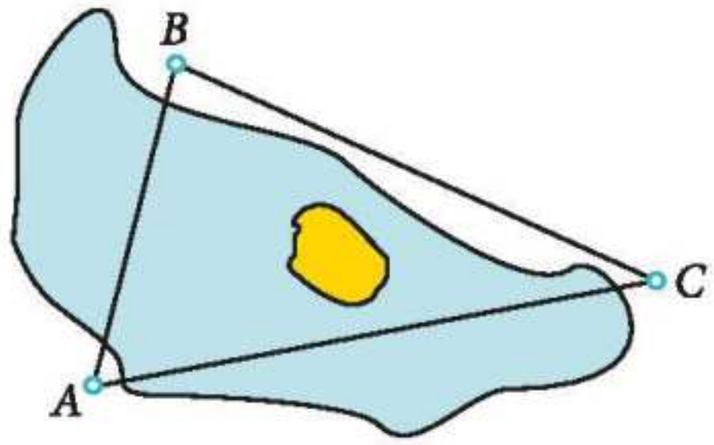
a) $\sin\beta$ dla $a = 20$, $b = 24$, $\alpha = 45°$.
b) b dla $c = 36$, $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$.
c) $\sin\alpha$ dla $a = 11$, $c = 17$, $\gamma = 71°$.
d) c dla $a = 16$, $\beta = 26°$, $\gamma = 48°$.

1.6. Trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku A. Dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\sin\sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$. Oblicz miarę kąta ACB.

1.7. Oblicz brakujące miary kątów (z dokładnością do 1°) i długości boków (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) trójkąta ABC, w którym α, β, γ są kątami wewnętrznymi oraz a, b, c – bokami odpowiednio przeciwległymi.

a) $a = 7$ cm, $\alpha = 37°$, $\beta = 100°$
b) $b = 12{,}7$ cm, $\alpha = 78°$, $\beta = 45°$
c) $c = 11{,}3$ cm, $\gamma = 27°$, $\beta = 120°$

1.8. Gospodarstwa A, B, C są położone nad stawem, jak na rysunku obok. Zmierzono, że $|BC| = 300$ m, $\sphericalangle C = 35°$, $\sphericalangle B = 80°$. Wyznacz odległość między gospodarstwami A i B z dokładnością do 1 metra.



1.9. Przekątna równoległoboku ma długość 24 cm i dzieli kąt rozwarty równoległoboku na kąty o miarach 45° i 75°. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

1.10. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, przekątna AC ma długość 8 cm, $\sphericalangle CAB = 22°$ i $\sphericalangle ACB = 113°$. Oblicz miary kątów i długości boków trapezu z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

1.11. Na brzegu jeziora znajdują się dwie przystanie, oznaczone jako A i B, oddalone w linii prostej o 1,6 km. Z każdej z nich widoczna jest ta sama mała wyspa – oznaczmy ją W. Za pomocą kompasu zmierzono kąty: $\sphericalangle WAB = 54°$ i $\sphericalangle ABW = 48°$. Oblicz odległość wyspy od każdej z tych przystani (z dokładnością do 0,01 km).

1.12. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym
a) $\sphericalangle A = 14°$, $|BC| = 10$ cm. b) $\sphericalangle B = 124°$, $|AC| = 9$ cm.

1.13. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S, $|AB| = 8$, $\sphericalangle ASC = 140°$ i $\sphericalangle CSB = 100°$. Oblicz długości boków BC oraz AC (z dokładnością do 0,01).

1.14. W trójkącie kąt o mierze 74° przylega do boku długości 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6 cm. Rozwiąż ten trójkąt.

1.15. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość $7\sqrt{3}$, a kąty przyległe do tego boku mają miary 80° i 40°.

1.16. Okrąg o promieniu 18 cm jest opisany na trójkącie, którego kąty pozostają w stosunku 3 : 4 : 5. Oblicz długości boków tego trójkąta.

1.17. W trapezie równoramiennym przekątna o długości $3\sqrt{2}$ tworzy z krótszą podstawą kąt 45°, a z ramieniem kąt 75°. Oblicz obwód trapezu oraz długość okręgu na nim opisanego.

D **1.18.** Wykaż, że $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

1.19. Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

D **1.20.** Punkt M jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC, różnym od jego wierzchołków. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABM, BMC, ACM i ABC mają równe promienie.

D * **1.21.** Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC zachodzi związek $\frac{|AB|}{\cos \sphericalangle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \sphericalangle CAB}$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

* **1.22.** Po tej samej orbicie okołoziemskiej o promieniu 11 tys. km krążą trzy satelity: A, B i C. Kąt BAC ma miarę 57°.
a) Wyznacz odległość między satelitami B i C.
b) Sprawdź, czy satelita C jest widoczny z kamery umieszczonej w satelicie B. Przyjmij, że promień Ziemi jest równy 6300 km.

* **1.23.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{2}$, $\sphericalangle BCA = 30°$. Oblicz długość boku BC.

* **1.24.** W pewnym czworokącie jedna z przekątnych ma długość równą promieniowi okręgu opisanego na tym czworokącie. Iloczyn sinusów wszystkich kątów tego czworokąta jest równy $\frac{1}{8}$. Oblicz miary kątów czworokąta.

Prosto do matury

1. Niech α, β, γ będą kątami trójkąta ABC, a, b, c – bokami odpowiednio przeciwległymi oraz $\alpha = 30°$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ **B.** $\frac{a}{c} = \frac{\sin \gamma}{2}$

C. Długość jednego z boków trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $\sphericalangle CAB = 50°$, $\sphericalangle ABC = 75°$. Wyznacz długość boku BC z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

3. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 32$, $|BC| = 26$, $\sphericalangle BCA = 42°$. Wyznacz miarę kąta CAB z dokładnością do 1°.

4. Przekątna równoległoboku ma długość d i dzieli jego kąt na dwa kąty o miarach α oraz β. Wyznacz długości boków tego równoległoboku.

D **5.** Wykaż, że pole trójkąta o kątach α, β, γ wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem $P = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

2. Twierdzenie cosinusów

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów

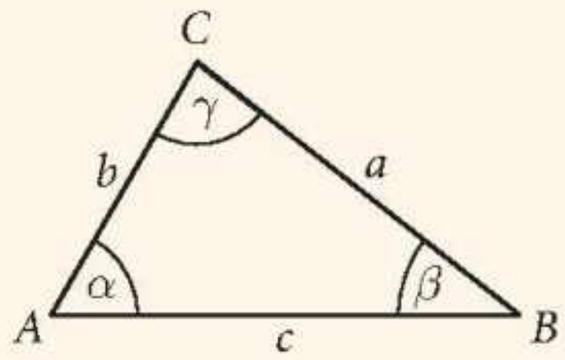
Trójkąt jest jednoznacznie określony, gdy dane są długości jego dwóch boków i kąt między nimi zawarty. Aby wyznaczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkata o bokach a, b, c i kątach α, β, γ leżących odpowiednio naprzeciw tych boków zachodzą równości:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$



Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w twierdzeniu.

Teza

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$

Twierdzenie cosinusów nazywane jest **uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa**.

Dowód

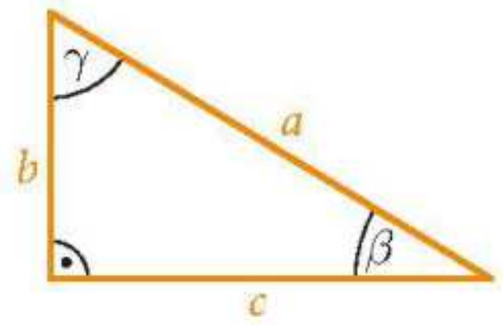
Wyznaczymy a w zależności od b, c oraz kąta α.

Zauważmy, że gdy α jest kątem prostym, to teza twierdzenia wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ i } \cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$$

więc:

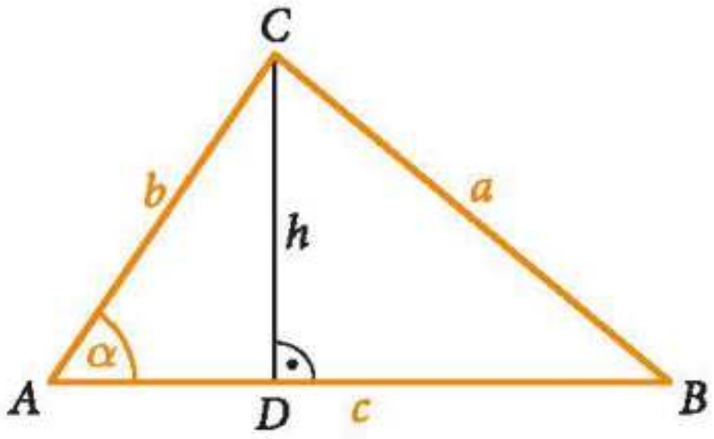
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



Rozważmy pozostałe dwie sytuacje – gdy α jest kątem ostrym oraz gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadzimy wysokość CD.

(1) $a^2 = |CD|^2 + |DB|^2$ ⟵ w $\triangle DBC$ na mocy twierdzenia Pitagorasa



Jeżeli $\alpha < 90°$, to:

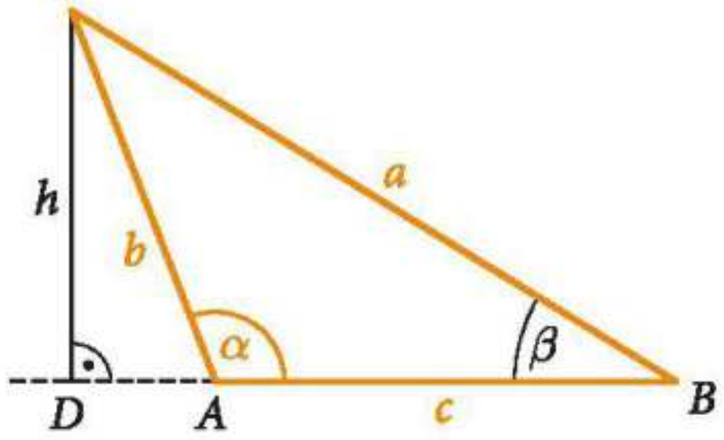
$$\frac{|CD|}{b} = \sin\alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos\alpha$$

więc:

$$|CD| = b\sin\alpha$$

$$|DB| = c - |AD| = c - b\cos\alpha$$



Jeżeli $\alpha > 90°$, to:

$$\frac{|CD|}{b} = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

więc:

$$|CD| = b\sin\alpha$$

$$|DB| = c + |AD| = c - b\cos\alpha$$

Niezależnie od rozwartości kąta α mamy więc:

$$|CD|^2 + |DB|^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 =$$
$$= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha =$$
$$= b^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Zatem, po podstawieniu do równości (1), mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Wyprowadzenie pozostałych dwóch równości przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

Wniosek

Jeżeli oznaczymy długości boków trójkąta a, b, c oraz kąty leżące naprzeciwko nich odpowiednio α, β, γ, to prawdziwe są wzory:

- $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
- $\cos\gamma = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$

Przykład 1 ◀ zad. 2.5

Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC: $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ oraz $\sphericalangle ABC = 76°$. Obliczymy $|AC|$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

$$|AC|^2 = 36 + 16 - 48\cos 76° \approx 40{,}39 \qquad \longleftarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$|AC| \approx \sqrt{40{,}39} \approx 6{,}36$$

Odp.: $|AC| \approx 6{,}36$

Przykład 2 ◀ zad. 2.8

Wyznaczymy (z dokładnością do 1°) kąty trójkąta o bokach długości 7, 8 i 3.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 9 - 49}{48} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \alpha = 60°$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 9 - 64}{42} \approx -0{,}1429$$
$$0{,}1429 \approx \cos 82°$$
$$-0{,}1429 \approx -\cos 82° = \cos(180° - 82°) \qquad \longleftarrow \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\beta \approx 180° - 82° = 98°$$
$$\gamma \approx 22° \qquad \longleftarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Odp.: 60°, 98°, 22°

Przykład 3 ◀ zad. 2.9

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+2$, $\sqrt{2}+3$ jest rozwartokątny.

Rozwiązanie

Największy kąt trójkąta leży naprzeciwko najdłuższego boku. Najdłuższy bok badanego trójkąta to $a = \sqrt{2}+3$. Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zbadamy znak cosinusa tego kąta.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ gdzie } b = \sqrt{2} \text{ i } c = \sqrt{2} + 2$$

Ponieważ $2bc > 0$, wystarczy zbadać znak wyrażenia w liczniku ułamka.

$$b^2 + c^2 - a^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}+2\right)^2 - \left(\sqrt{2}+3\right)^2 = -3 - 2\sqrt{2} < 0$$

Zatem $\cos\alpha < 0$, czyli α jest kątem rozwartym.

Odp.: Badany trójkąt jest rozwartokątny.

Przykład 4 ◀ zad. 2.11

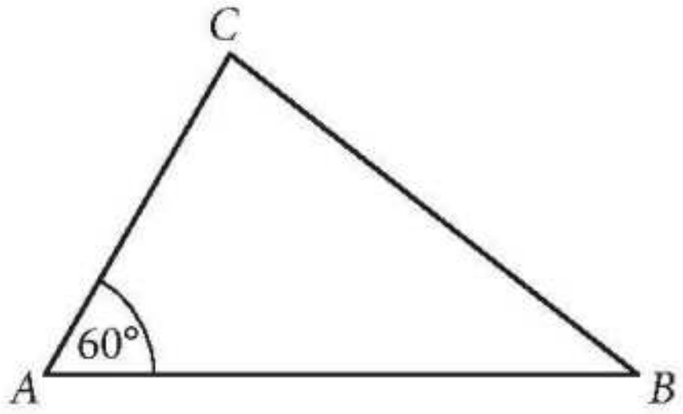
W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle BAC = 60°$. Ponadto zachodzą warunki $|AB| = 2|AC| - 4$ i $|BC| = |AC| + 4$. Wyznaczymy długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $|AC| = x$. Wówczas $|AB| = 2x - 4$ i $|BC| = x + 4$. Zauważmy, że aby spełniony był warunek $|AB| > 0$, musimy założyć, że $x > 2$.

Na mocy twierdzenia cosinusów:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \sphericalangle BAC$$
$$(x+4)^2 = x^2 + (2x-4)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x-4) \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 2x^2 + 4x$$
$$2x^2 - 20x = 0, \text{ stąd } 2x(x-10) = 0$$

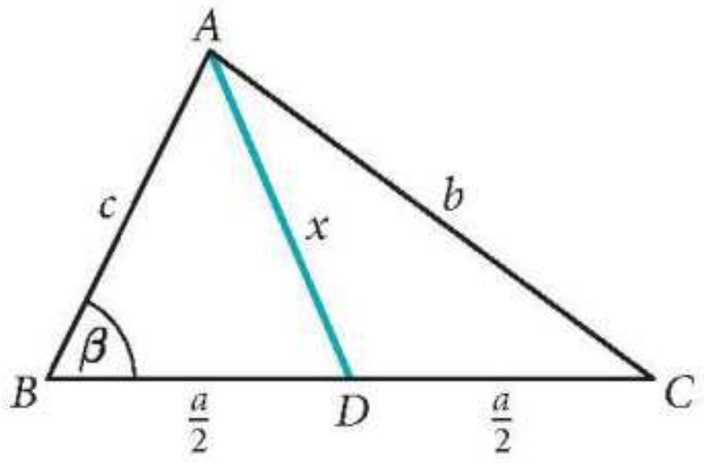


Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy $x = 10$.

Odp.: Boki trójkąta mają długości: $|AC| = 10$, $|BC| = 14$ i $|AB| = 16$.

Przykład 5 ◀ zad. 2.21

W trójkącie ABC dane są długości boków a, b i c. Wyznaczymy długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkt D jest środkiem boku BC. Szukamy $x = |AD|$.

$$x^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \cos\beta \quad \longleftarrow \text{twierdzenie cosinusów w trójkącie } ABD$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \longleftarrow \text{twierdzenie cosinusów w trójkącie } ABC$$

$$x^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$4x^2 = 4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2$$
$$4x^2 = 2c^2 - a^2 + 2b^2$$
$$x^2 = \frac{1}{4}\left(2c^2 - a^2 + 2b^2\right), \text{ więc } x = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Zauważmy, że w podobny sposób możemy wyznaczyć długości pozostałych środkowych. Wynoszą one odpowiednio – dla środkowej z wierzchołka B: $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, a z wierzchołka C: $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Odp.: Środkowa poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 4, a kąt między nimi ma miarę 120°. Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

A. $\sqrt{21}$ **B.** $\sqrt{61}$ **C.** $\sqrt{41-20\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{41+20\sqrt{3}}$

2.2. Trójkąt o bokach $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$

A. jest ostrokątny.
B. jest prostokątny.
C. jest rozwartokątny.
D. nie istnieje.

2.3. Wskaż wartość cosinusa kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o podstawie 4 cm i ramionach 5 cm.

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $\frac{17}{25}$ **D.** $\frac{2\sqrt{21}}{5}$

2.4. Oblicz cosinusy kątów trójkąta o danych długościach boków.

a) 5, 14, 15 b) 9, 10, 7 c) 7, 13, 16 d) $1+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 2

2.5. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 54°$, $|BC| = 10$, $|AC| = 8$. Oblicz długość boku AB z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

2.6. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle A = 120°$, $|AC| = 6$, $|AB| = 12$. Oblicz długość boku BC oraz miary kątów trójkąta ABC z dokładnością do 1°.

2.7. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i $3\sqrt{2}$, a kąt między nimi ma miarę 45°. Oblicz długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów trójkąta z dokładnością do 1°.

2.8. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do 1°.

a) 8, 7, 10 b) 3, 5, 6 c) 24, 11, 18 d) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 3

2.9. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

a) 5, 9, 13 b) 8, 15, 17 c) $3\sqrt{2}$, 4, $1+\sqrt{2}$ d) 7, 8, 9

2.10. Oblicz miarę największego kąta w trójkącie, którego boki mają długości $a = \left(3-\sqrt{3}\right)$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm, $c = 3\sqrt{2}$ cm.

2.11. W trójkącie ABC dane są: $\cos\sphericalangle BAC = \frac{25}{32}$, $|BC| = |AB| - 3$, $|AC| = |AB| - 2$. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

2.12. Kąt trójkąta zawarty między dwoma bokami o długościach 14 cm i $7\sqrt{3}$ cm ma miarę 30°. Oblicz obwód trójkąta i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

2.13. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 5\sqrt{7}$, $\sphericalangle A = 60°$ oraz $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Oblicz długości boków AC i AB.

2.14. W trójkącie ABC boki a, b, c są przeciwległe odpowiednio do kątów α, β, γ. Przerysuj tabelę i zastąp znaki ? odpowiednimi wartościami.

	a	b	c	α	β	γ
a)	$\sqrt{6}$	?	?	60°	45°	?
b)	?	$3\sqrt{2}$	?	?	60°	105°
c)	?	?	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	15°	?	45°
d)	$\sqrt{8}$	4	$2\sqrt{3}+2$	?	?	?
e)	$2\sqrt{2}$	?	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$	?	?	75°
f)	$2\sqrt{3}-2$	?	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	?	105°	?

2.15. W równoległoboku krótsza przekątna i bok o długościach odpowiednio 12 cm i 8 cm tworzą kąt 60°. Oblicz długość drugiego boku i dłuższej przekątnej oraz miary kątów równoległoboku.

2.16. Dwa boki trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg o promieniu r mają długości $r\sqrt{3}$ i $r\sqrt{2}$. Oblicz miary kątów trójkąta.

2.17. Romb, którego kąt rozwarty ma miarę 150°, opisany jest na okręgu o promieniu 20 cm. Oblicz długości przekątnych rombu.

2.18. W czworokącie wypukłym kolejne boki mają długości: 2 cm, 5 cm, 7 cm i $2\sqrt{13}$ cm. Jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej tego czworokąta z dokładnością do 0,1 cm.

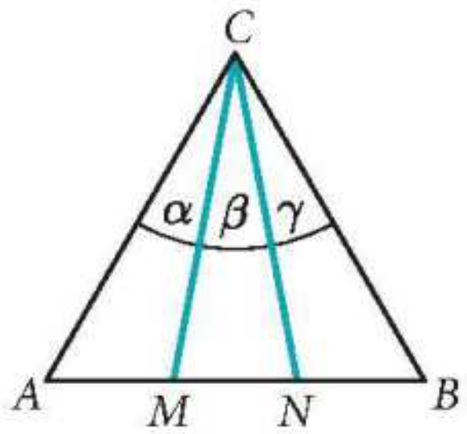
2.19. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano taki punkt M, że $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$. Wyznacz sinus kąta CAM.

2.20. Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC| = 14$ i kąt między ramionami ma miarę 120°. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

2.21. Wyznacz długości środkowych poprowadzonych w trójkącie o bokach długości 10, 12 oraz 9.

2.22. Środkowe AE i BF trójkąta ABC mają długości odpowiednio 15 oraz 18 i przecinają się pod kątem 120°. Oblicz długość trzeciej środkowej tego trójkąta.

D **2.23.** W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 6 cm, bok AB podzielono punktami M i N na trzy równe części, jak na rysunku. Wykaż, że $\beta > \alpha = \gamma$.



D * **2.24.** Udowodnij, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

D * **2.25.** Sinusy kątów pewnego trójkąta mają się do siebie jak 2 : 3 : 4. Udowodnij, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

2.26. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R mają długości R i $\frac{3}{2}R$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta.

D * **2.27.** W trójkącie o kątach α, β, γ spełniona jest nierówność $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma < 0$. Wykaż, że $\cos\gamma < 0$.

* **2.28.** W trójkąt prostokątny ABC, w którym bok AB jest przeciwprostokątną i $\sphericalangle CAB = 60°$, wpisano okrąg styczny do przeciwprostokątnej w punkcie D. Odcinek AD ma długość 3. Oblicz $|CD|$.

Prosto do matury

1. W trójkącie o bokach a, b, c kąt α leżący naprzeciwko boku a jest rozwarty. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a^2 + b^2 > c^2$ **B.** $b^2 + c^2 > a^2$ **C.** $c^2 + a^2 > b^2$

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 2$, $|AC| = 4$. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów tego trójkąta.

3. Stosunek boków trójkąta wynosi 3 : 5 : 6. Wyznacz cosinus największego kąta w tym trójkącie.

4. Punkty K i L dzielą przekątną AC kwadratu $ABCD$ o boku a na trzy równe części. Oblicz długość boku rombu $BLDK$.

D **5.** Wykaż, że w równoramiennym trójkącie prostokątnym tangens kąta ostrego między środkowymi poprowadzonymi z wierzchołków kątów ostrych jest równy 0,75.

3. Związki miarowe w wielokątach

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w wielokątach z użyciem trygonometrii

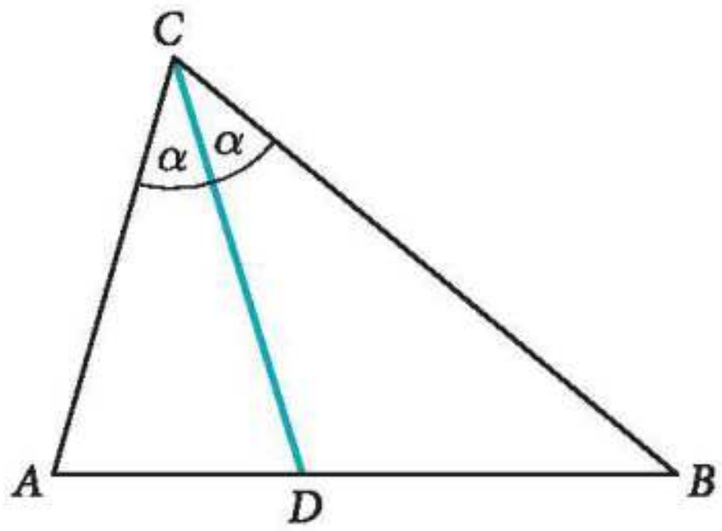
Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Twierdzenie o dwusiecznej

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Założenie

CD jest dwusieczną kąta ACB.

Teza

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Dowód

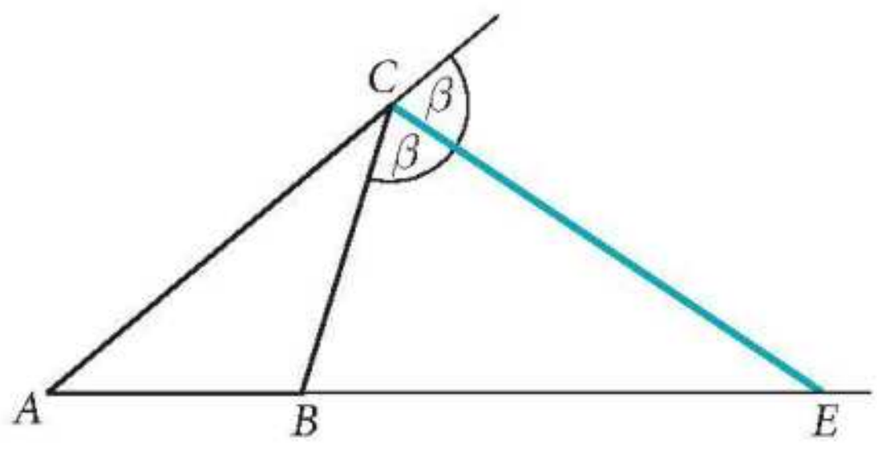
$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AD|}{|DB|}$$ ⟵ trójkąty ADC i DBC mają wspólną wysokość

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AC| \cdot |DC| \cdot \sin\alpha}{|CB| \cdot |DC| \cdot \sin\alpha} = \frac{|AC|}{|CB|}$$ ⟵ pole trójkąta jest równe $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$

Zatem $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

Koniec dowodu

Zachodzi też twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego, czyli przyległego do kąta wewnętrznego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wtedy twierdzenie to przyjmuje następującą postać:

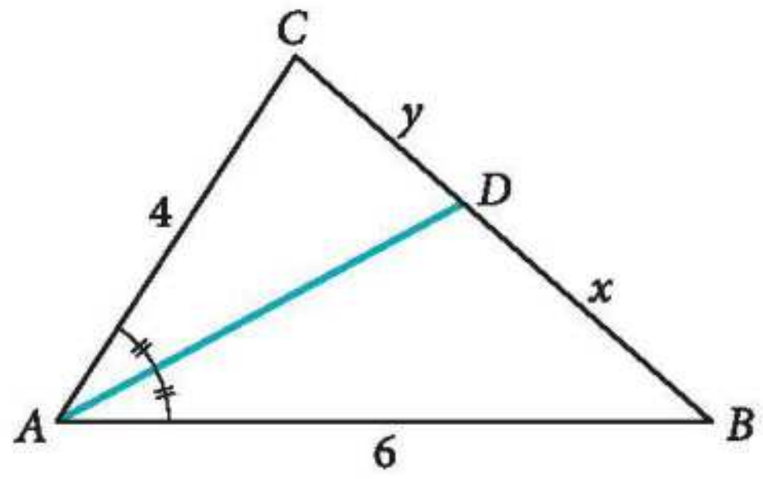


Jeżeli prosta zawierająca dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC przecina prostą AB w punkcie E, to $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Przykład 1 ◂ zad. 3.5

Boki trójkąta mają długości $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 4$. Obliczymy długości odcinków, na które dwusieczna AD dzieli bok BC.



Rozwiązanie

Oznaczmy $|BD| = x$, $|DC| = y$.

$$\frac{x}{y} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \longleftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

$$x + y = 5 \quad \longleftarrow \text{z warunków zadania}$$

Rozwiązujemy układ równań:

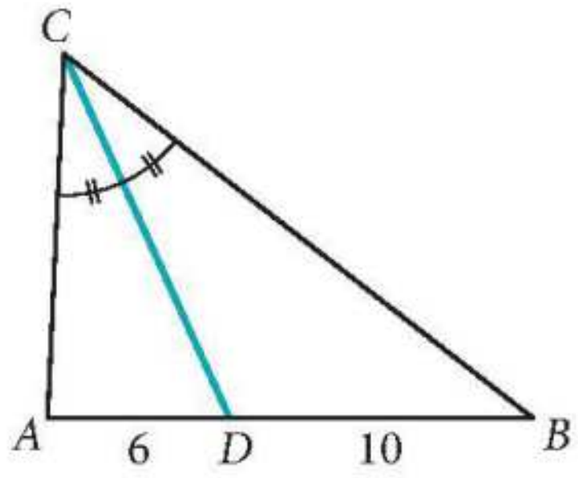
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{4} \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Odp.: $|BD| = 3$, $|DC| = 2$

Przykład 2 ◂ zad. 3.7

Obwód trójkąta ABC jest równy 40, a dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 6$ i $|DB| = 10$. Obliczymy długości boków trójkąta ABC.

Rozwiązanie



$$|AB| = |AD| + |DB| = 16$$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \longleftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

Zatem:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{6}{10}, \text{ stąd } |AC| = \frac{3}{5}|CB|$$

$$16 + |CB| + \frac{3}{5}|CB| = 40 \quad \longleftarrow \text{obwód trójkąta } ABC \text{ jest równy } 40$$

$$\frac{8}{5}|CB| = 24$$

$$|CB| = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15, \quad |AC| = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$$

Odp.: $|AB| = 16$, $|AC| = 9$, $|CB| = 15$

Wyprowadzimy teraz wzory łączące długości boków trójkąta i jego pole z promieniami okręgów: wpisanego w ten trójkąt i opisanego na nim.

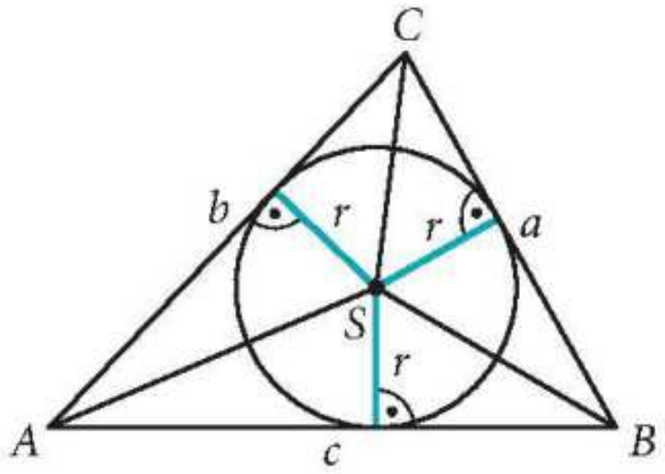
Twierdzenie

Pole P trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu trójkąta i promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$P = pr$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
$2p$ oznacza obwód trójkąta,
r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Teza

Pole P trójkąta jest równe $P = pr$.

Dowód

Wyznaczymy pole tego trójkąta.

$$P = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BCS} + P_{\triangle CAS}$$

$$P = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \quad \longleftarrow r \text{ jest wysokością każdego z trójkątów: } ABS, BCS, CAS$$

$$P = \frac{1}{2}r(c + a + b)$$

$$P = pr$$

Koniec dowodu

Twierdzenie

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Teza

Pole P trójkąta jest równe $P = \frac{abc}{4R}$.

Dowód

Niech α oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości a. Mamy:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \qquad \longleftarrow \text{z twierdzenia sinusów } \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Koniec dowodu

Podamy jeszcze wzór (jego wyprowadzenie pominiemy), za pomocą którego można obliczyć pole trójkąta, gdy dane są tylko długości jego boków.

Twierdzenie

Wzór Herona

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Zauważmy, że w podanym wzorze niezależnie od rodzaju trójkąta wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc spełniają nierówność trójkąta:

$$a+b>c, \qquad a+c>b, \qquad b+c>a,$$

a stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$p-c>0, \qquad p-b>0, \qquad p-a>0.$$

Przykład 3 ◂ zad. 3.10, 3.11

Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 5 i 7. Obliczymy promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

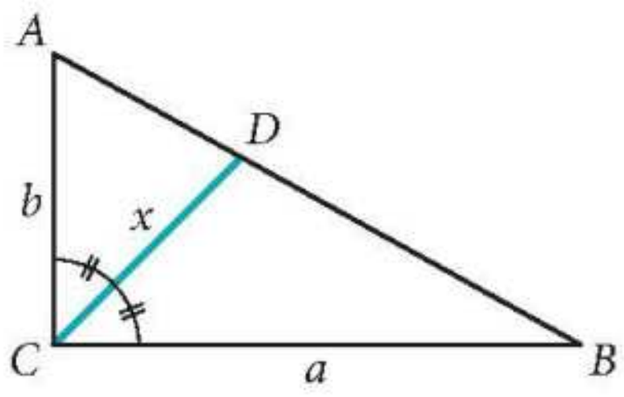
Niech p oznacza połowę obwodu, a P – pole tego trójkąta. Wówczas:

$$p = 9,\ P = \sqrt{9\cdot 3\cdot 4\cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{6\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \qquad r = \frac{P}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Odp.: $R = \frac{35\sqrt{6}}{24},\ r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

D Przykład 4 ◀ zad. 3.15



W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Wykażemy, że zawarty w trójkącie odcinek tej dwusiecznej ma długość $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$P_{BDC} = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{ax\sqrt{2}}{4}, \quad P_{ADC} = \frac{1}{2}b \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

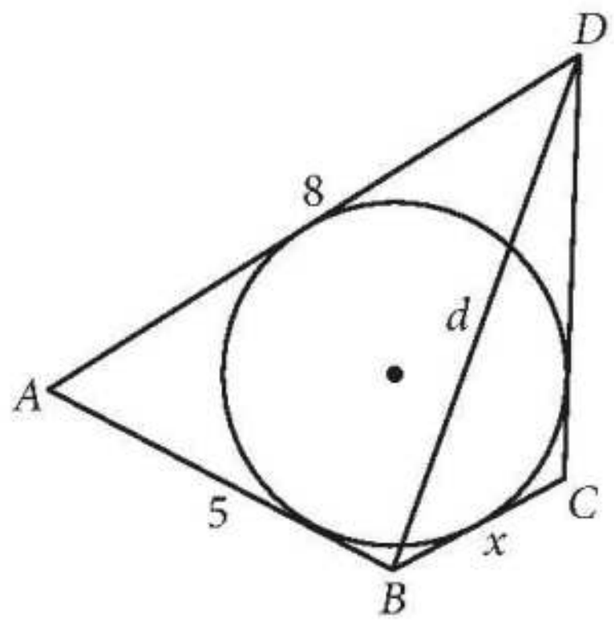
Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów BDC i ADC. Zatem:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ax\sqrt{2}}{4} + \frac{bx\sqrt{2}}{4}, \text{ czyli } 2ab = x\sqrt{2}(a+b)$$

$$x\sqrt{2} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ stąd } x = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$$

Koniec dowodu

Przykład 5 ◀ zad. 3.23



Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu oraz $|AB| = 5$, $|AD| = 8$, $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ i $\sphericalangle BCD = 120^\circ$. Obliczymy długości boków BC i CD tego czworokąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc:

$$|CD| + 5 = x + 8, \text{ czyli } |CD| = x + 3$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkątów ABD i CBD.

$$d^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \quad \longleftarrow \text{w } \triangle ABD$$

$$d^2 = x^2 + (x+3)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+3) \cdot \cos 120^\circ \quad \longleftarrow \text{w } \triangle CBD$$

Zatem:

$$25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = x^2 + x^2 + 6x + 9 - 2x(x+3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$3x^2 + 9x - 40 = 0$$

$$\Delta = 561, \quad x_1 = \frac{-9 - \sqrt{561}}{6}, \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{561}}{6}$$

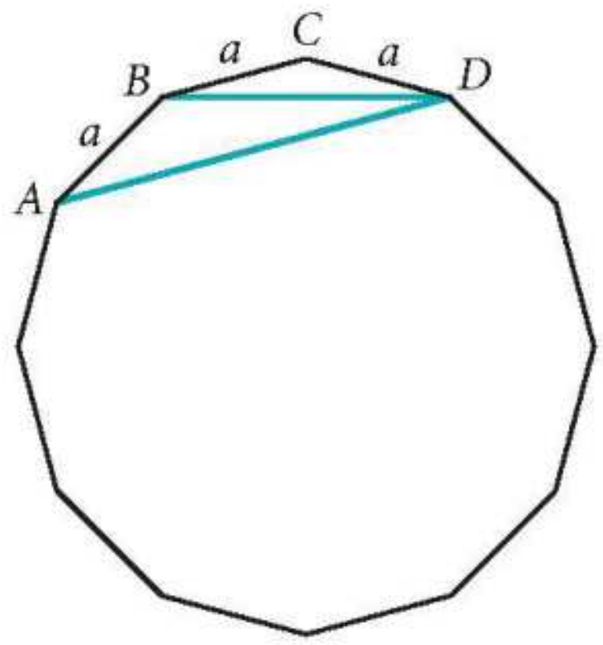
Tylko druga z otrzymanych liczb jest dodatnia, czyli:

$$|BC| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6}, \qquad |CD| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6} + 3 = \frac{\sqrt{561} + 9}{6}$$

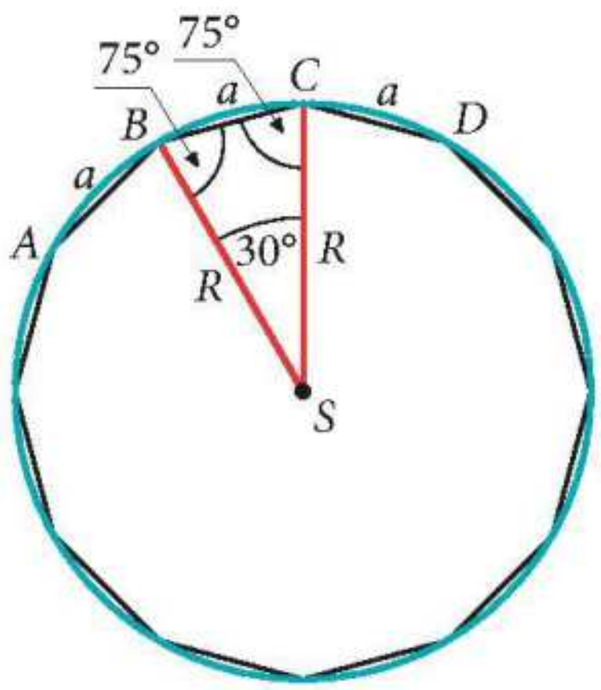
Odp.: $|BC| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6}$, $|CD| = \frac{\sqrt{561} + 9}{6}$

Przykład 6 ◀ zad. 3.27

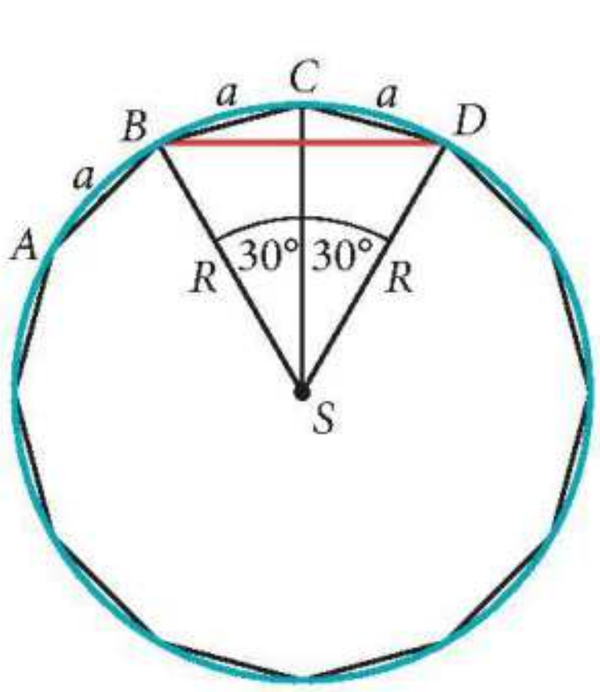
Dany jest dwunastokąt foremny o boku a. Obliczymy
a) promień okręgu opisanego na tym dwunastokącie.
b) długość przekątnej BD.
c) długość przekątnej AD.



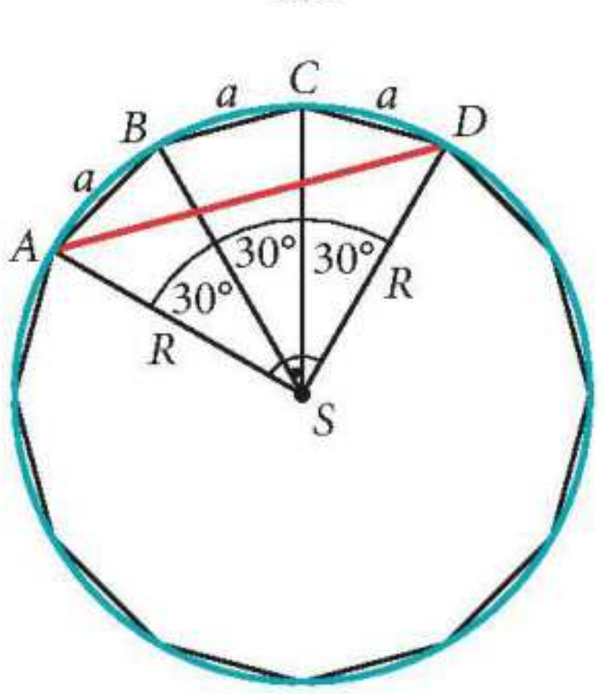
Rozwiązanie



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

a) Zauważmy, że środek S okręgu opisanego na dwunastokącie leży na symetralnej boku BC tego wielokąta. Niech R będzie promieniem tego okręgu (rys. 1). Dwunastokąt ma wszystkie boki tej samej długości, zatem kąt BSC ma miarę $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Trójkąt BCS jest równoramienny o kącie przy podstawie 75°, więc:

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \cos 75^\circ$$

$$R = \frac{a}{2\cos 75^\circ} \qquad \longleftarrow \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$R = \frac{2a}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $R = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$

b) Trójkąty BCS i CDS są przystające, więc trójkąt BSD jest równoboczny (rys. 2) i $|BD| = R$, czyli:

$$|BD| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $|BD| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$

c) Trójkąt ASD jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, czyli jest połową kwadratu (rys. 3). Zatem:

$$|AD| = R\sqrt{2}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}a\sqrt{2} = a\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Odp.: $|AD| = a\left(1+\sqrt{3}\right)$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm.

A. 3 cm **B.** 2 cm **C.** 4 cm **D.** 1 cm

3.2. Ile wynosi pole trójkąta o bokach 4, 5, 7?

A. $4\sqrt{6}$ **B.** $6\sqrt{6}$ **C.** 4 **D.** $3\sqrt{6}$

3.3. W trójkącie ABC o boku $|AC| = 18$ dwusieczna CD dzieli bok AB w stosunku $|BD| : |DA| = 1 : 6$. Wskaż długość boku CB.

A. 1 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 3 **D.** 5

3.4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną.

3.5. Boki trójkąta mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.

3.6. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a ramiona po 12 cm. Dwusieczne kątów przy podstawie przecinają ramiona w punktach M i N. Oblicz długość odcinka MN.

3.7. W trójkącie ABC dana jest suma długości boków: $|AB| + |AC| = 33$. Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A dzieli bok BC na odcinki o długościach $|BD| = 12$ i $|DC| = 10$. Oblicz długości boków AB i AC.

3.8. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 2a$, $|BC| = a$ i $\sphericalangle ACB = 120°$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz długość odcinka AD.

3.9. Oblicz pole trójkąta o bokach podanej długości.
a) 4, 6, 8 b) 8, 11, 13 c) 6, 10, 11 d) 4, 6, 7

3.10. Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.11. Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.12. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 32°. Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.13. Na boku BC równobocznego trójkąta ABC wybrano taki punkt D, że stosunek pola trójkąta ADB do pola trójkąta ADC wynosi 1 : 2. Wyznacz tangens kąta DAB.

3.14. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu $\sqrt{3}$ jest równa 120°. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

3.15. Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę 60°. Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.16. Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 5 cm. Jego pole jest równe 8 cm^2. Oblicz długość x trzeciego boku trójkąta oraz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.17. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku 2 : 3. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

3.18. Dany jest trójkąt ABC, w którym: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ i $\sphericalangle ABC = 56°$. Oblicz długość dwusiecznej BD w tym trójkącie. Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

3.19. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 4$ cm, $|BC| = \sqrt{3}$ cm, $|AC| = 3$ cm. Oblicz pole trójkąta ABC oraz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.20. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy mniejszy od drugiego. Długość okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 2π cm. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie.

3.21. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 4$ cm, $|AC| = |BC| = 8$ cm.
a) Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.
b) Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC.

* **3.22.** W rombie $ABCD$ dana jest miara α kąta ostrego i promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Oblicz pole rombu.

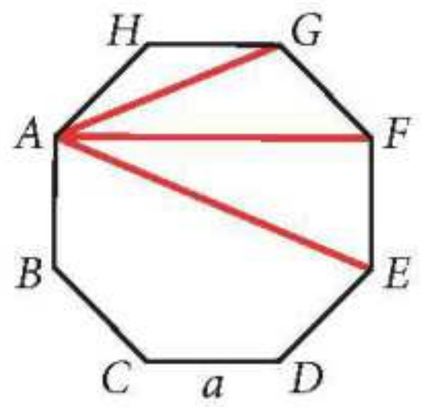
3.23. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu oraz $|AB| = 6$, $|AD| = 4$, $\cos\sphericalangle BAD = \frac{2}{3}$ i $\cos\sphericalangle BCD = -\frac{1}{3}$. Oblicz długości boków BC i CD tego czworokąta.

3.24. Długości boków czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg są równe: $|AB| = 3$, $|BC| = |CD| = 2$, $|DA| = 4$. Oblicz długość przekątnej BD tego czworokąta.

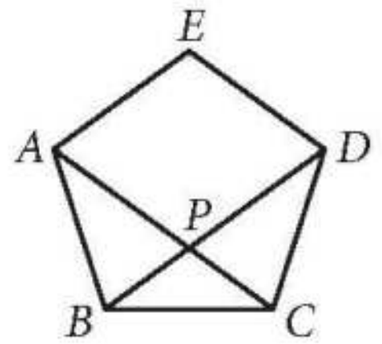
3.25. W trapez równoramienny $ABCD$, w którym $|AB| > |DC|$, wpisano okrąg o promieniu r. Punkt styczności P dzieli ramię AD na odcinki AP i PD w stosunku $5 : 1$. Oblicz cosinus kąta CBD.

* **3.26.** Tangens kąta zawartego między dłuższą przekątną rombu a jego bokiem jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb.

3.27. Bok ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ ma długość a (zob. rysunek). Wyznacz długość
a) przekątnej AG.
b) przekątnej AF.
c) przekątnej AE.



D **3.28.** W pięciokącie foremnym $ABCDE$ punkt P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD, jak na rysunku. Udowodnij, że czworokąt $APDE$ jest rombem.



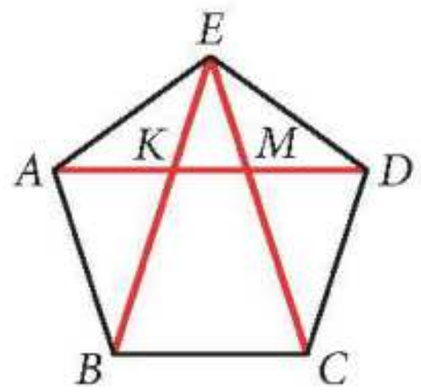
D * **3.29.** W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

* **3.30.** W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę dwa razy większą niż kąt CAB. Dane są długości dwóch boków tego trójkąta: $|BC| = 9$ i $|AC| = 7$. Oblicz długość boku AB.

D **3.31.** W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną AD. Wykaż, że $|BD| < |AB|$.

3.32. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD dzieli przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach 4 cm i 16 cm. Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ADC i CDB oraz odległość między środkami tych okręgów.

D **3.33.** W pięciokącie foremnym $ABCDE$ o boku 1 przekątne EB i EC przecinają przekątną AD odpowiednio w punktach K i M, jak na rysunku. Wykaż, że $|KM| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



3.34. Dwa boki trójkąta o polu P mają długości a i b. Wyznacz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Prosto do matury

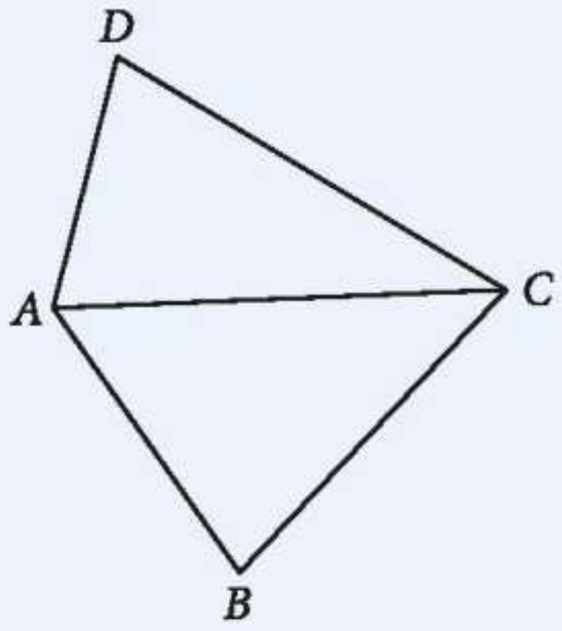
1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy mniejszy od drugiego kąta ostrego.

B. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy krótszy od drugiego.

C. Stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $1 + \sqrt{3}$.

2. W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$, $|DA| = 4$, $|AC| = 7$. Oblicz pole tego czworokąta.



3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 1 + \sqrt{3}$ i $\sphericalangle ACB = 120°$. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię tego trójkąta.

4. Boki prostokąta $ABCD$ mają długości $|AB| = 20$, $|BC| = 25$. Oblicz odległość między środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i CDA.

5. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono dwie proste, które podzieliły ten kąt na trzy równe kąty. Wyznacz długości odcinków, na które te proste dzielą przeciwprostokątną o długości c.

4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Umiejętności:

- wykorzystywanie definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach
- stosowanie wzorów redukcyjnych

Rozszerzymy definicje funkcji trygonometrycznych tak, aby dotyczyły nie tylko kątów wypukłych.

Do tej pory definiowaliśmy kąt jako część płaszczyzny wyznaczoną przez dwie półproste o wspólnym początku. Zgodnie z taką definicją miara dowolnego kąta α spełnia nierówność $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$. W niektórych zastosowaniach matematyki potrzebne są jednak kąty o miarach większych od 360° oraz kąty o ujemnych miarach. Jest tak na przykład w sytuacji, w której kąt rozumiemy jako **miarę obrotu**. Jeżeli na przykład wykonamy dwa pełne obroty klucza w zamku, to powiemy, że obróciliśmy go o 720°. W tej sytuacji trzeba jeszcze ustalić, w którą stronę wykonujemy obrót, bo przekręcenie klucza o 720° w jedną stronę przyniesie zupełnie inny efekt niż przekręcenie go w drugą stronę. Umieszczenie kąta w układzie współrzędnych pozwala to jednoznacznie określić:

- kąty odkładane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara mają miarę dodatnią,
- kąty odkładane zgodnie z ruchem wskazówek zegara mają miarę ujemną.

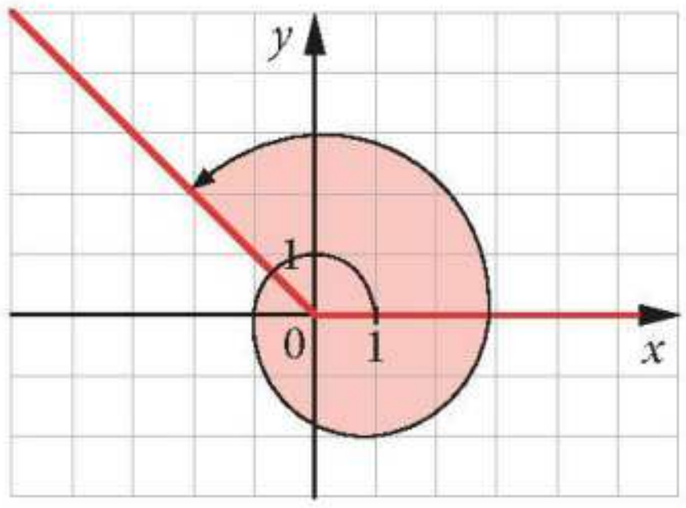
Przykład 1

Narysujemy w układzie współrzędnych dane kąty.

a) $\alpha = 495°$

$495° = 360° + 135°$

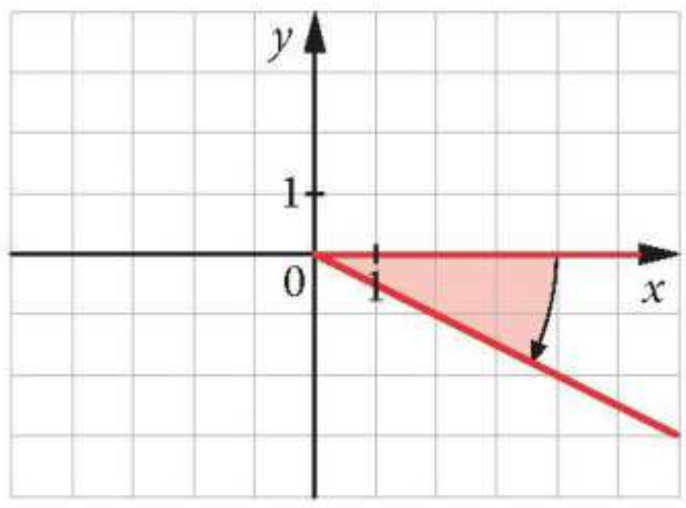
Mówiąc obrazowo, końcowe ramię kąta zatoczyło pełny obrót, a następnie pokryło się z końcowym ramieniem kąta 135°.



b) $\beta = -30°$

Kąt ujemny odkładamy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Końcowe ramię kąta −30° pokrywa się z końcowym ramieniem kąta 330°. Jednak te kąty nie są równe. Obrót o 30° w jedną stronę oznacza co innego niż obrót o 330° w drugą stronę.



Mówimy, że kąt α **należy do I (II, III, IV) ćwiartki układu współrzędnych**, jeżeli jego ramię wodzące zawiera się w I (odpowiednio II, III, IV) ćwiartce układu. Ramiona kątów o miarach będących wielokrotnościami 90° (czyli np. 0°, 90°, 180°, 270°, 360°) pokrywają się z półosiami układu, zatem kąty te nie należą do żadnej z ćwiartek układu.

Zauważmy, że po wykonaniu każdego pełnego obrotu o 360° lub o −360° ramię końcowe kąta α wróci do położenia, w którym było poprzednio.

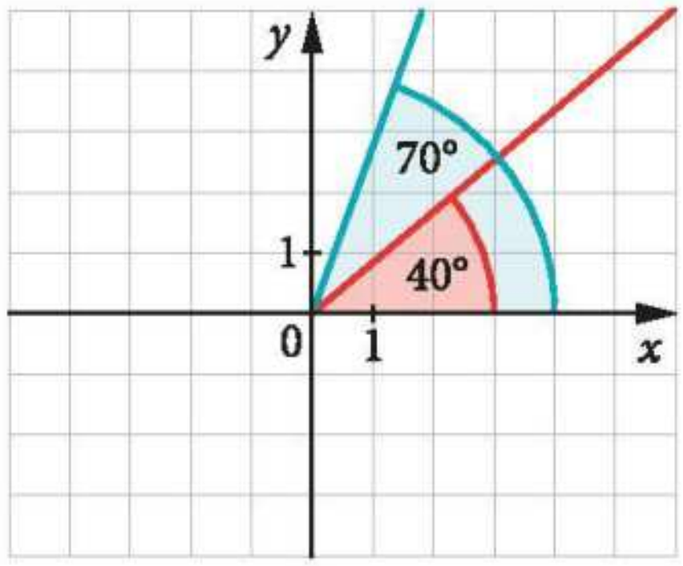
Wniosek

Dla każdego $k \in \mathbf{Z}$ ramiona końcowe kątów α i $\beta = \alpha + k \cdot 360°$ pokrywają się.

Przykład 2

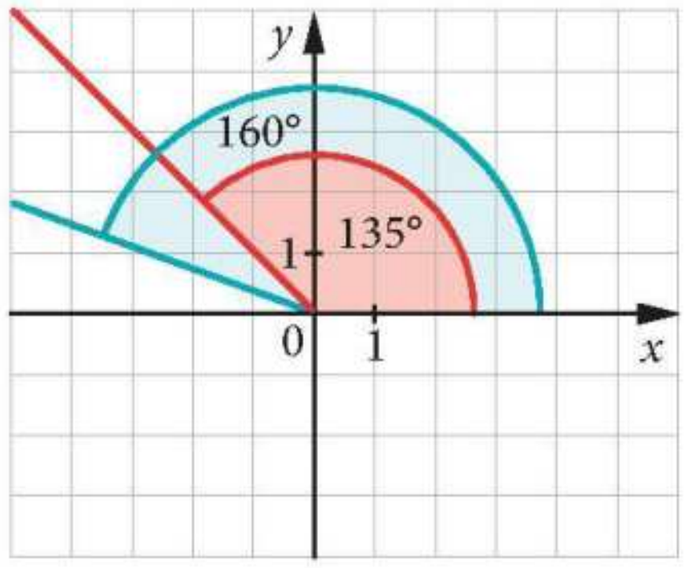
Napiszemy, jaki warunek spełniają kąty $\alpha \in \langle 0°; 360° \rangle$ należące do kolejnych ćwiartek układu współrzędnych i zaznaczymy po dwa przykładowe kąty.

I ćwiartka układu



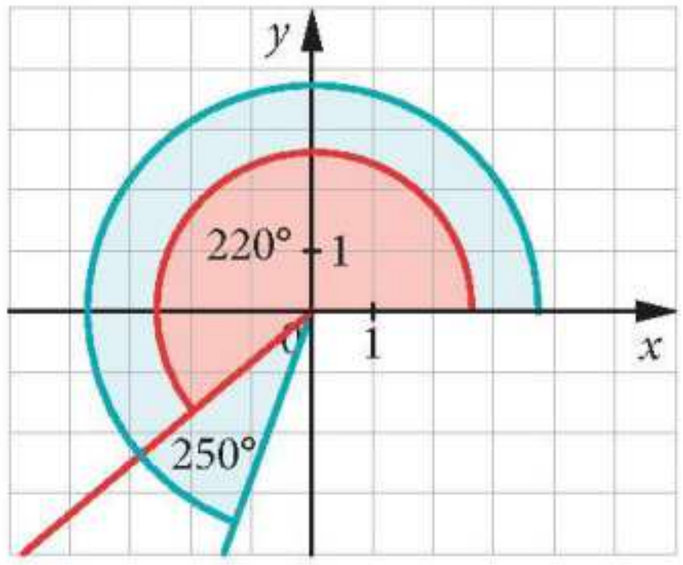
$0° < \alpha < 90°$

II ćwiartka układu



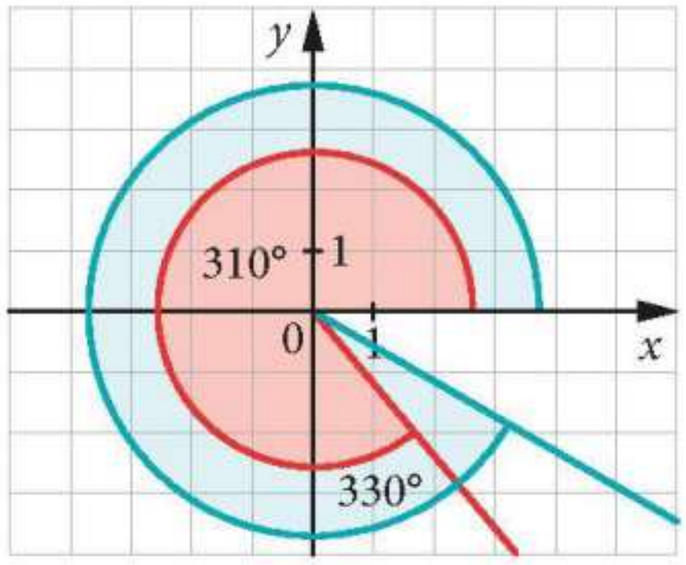
$90° < \alpha < 180°$

III ćwiartka układu



$180° < \alpha < 270°$

IV ćwiartka układu



$270° < \alpha < 360°$

Przykład 3 ◂ zad. 4.4

Obliczymy, do której ćwiartki układu współrzędnych należą podane kąty.

Rozwiązanie

a) $500°$

$500° = 360° + 140°$

Kąt $360°$ stanowi pełen obrót, a kąt $140°$ należy do drugiej ćwiartki.

Odp.: Kąt $500°$ należy do drugiej ćwiartki układu współrzędnych.

b) $2015°$

$2015° = 5 \cdot 360° + 215°$

Kąt $5 \cdot 360°$ stanowi 5 pełnych obrotów, a kąt $215°$ należy do trzeciej ćwiartki.

Odp.: Kąt $2015°$ należy do trzeciej ćwiartki układu współrzędnych.

c) $-1410°$

I sposób

$-1410° = -3 \cdot 360° - 330° = -3 \cdot 360° - 270° - 60°$

Kąt $-3 \cdot 360°$ stanowi 3 pełne obroty, a kąt $-270° - 60°$ (odkładamy go w ujemnym kierunku) należy do pierwszej ćwiartki.

II sposób

$-1410° = -4 \cdot 360° + 30°$

Kąt $-4 \cdot 360°$ stanowi 4 pełne obroty, a kąt $30°$ (odkładamy go w dodatnim kierunku) należy do pierwszej ćwiartki.

Odp.: Kąt $-1410°$ należy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta są takie same jak wprowadzone wcześniej definicje dla kątów wypukłych.

Definicja

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

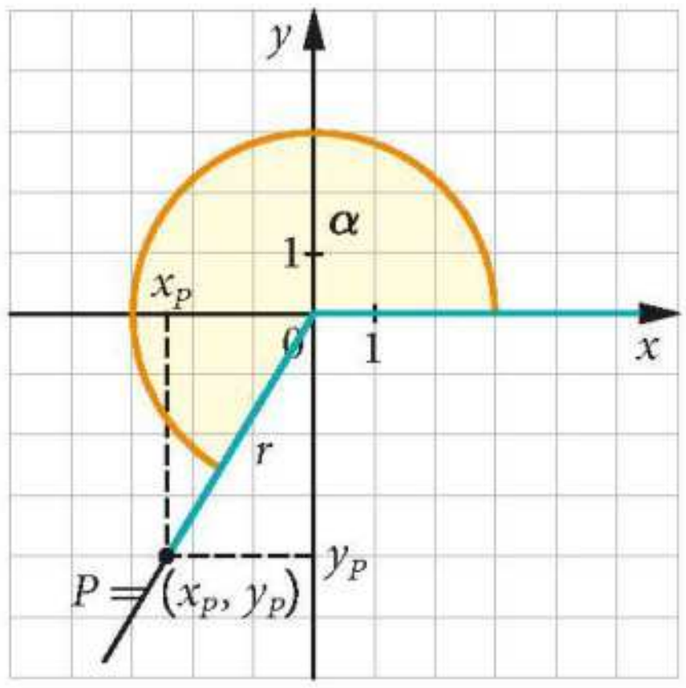
Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu; zakładamy, że ta odcięta jest różna od zera.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta α, a r jest promieniem wodzącym tego punktu, to:

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x_P}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

Ponadto, skoro $P = (x_P, y_P)$, to:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$



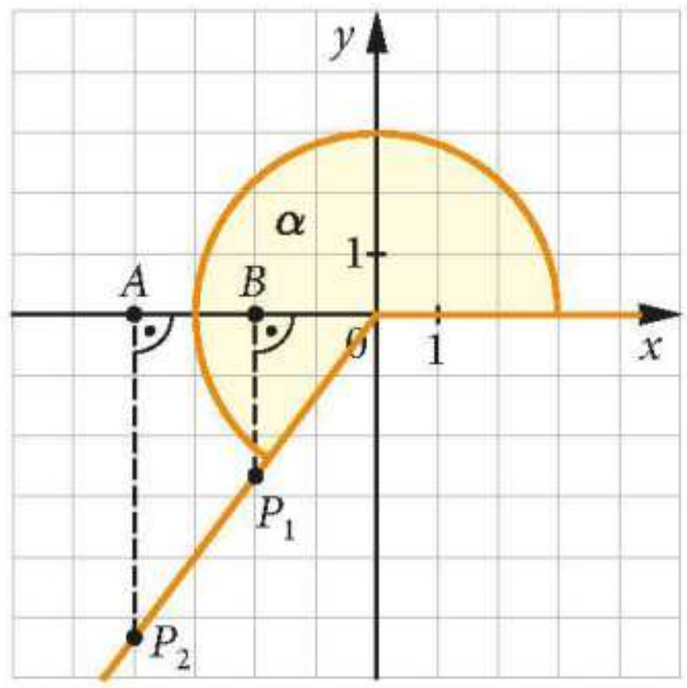
Zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne za pomocą stosunków liczb związanych z punktem wybranym na ramieniu wodzącym. Wykażemy, że wartości tych stosunków nie zależą od wyboru punktu.

Twierdzenie

Jeżeli $P = (x_P, y_P)$ jest punktem na ramieniu wodzącym kąta α, a r jest promieniem wodzącym punktu P, to wartości stosunków $\frac{x_P}{r}$, $\frac{y_P}{r}$, $\frac{y_P}{x_P}$ nie zależą od wyboru punktu P.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Niech $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $B = (x_1, 0)$, $A = (x_2, 0)$, $|OP_1| = r_1$, $|OP_2| = r_2$.



Teza

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Dowód

Jeżeli miara kąta α jest wielokrotnością 90°, to:

- albo ramię wodzące zawiera się w osi y i wtedy $x_1 = x_2 = 0$, $|y_1| = r_1$, $|y_2| = r_2$,
- albo ramię wodzące zawiera się w osi x i wtedy $y_1 = y_2 = 0$, $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2$.

W pierwszym przypadku prawdziwe są pierwsze dwie z powyższych proporcji, a trzecia jest nieokreślona. W drugim – wszystkie są prawdziwe.

Załóżmy, że miara kąta α nie jest wielokrotnością 90°. Wtedy $BP_1 \parallel AP_2$, więc na mocy twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|OB|}{|OP_1|} = \frac{|OA|}{|OP_2|}, \quad \frac{|BP_1|}{|OP_1|} = \frac{|AP_2|}{|OP_2|}, \quad \frac{|BP_1|}{|OB|} = \frac{|AP_2|}{|OA|}$$

Wyraźmy długości odcinków za pomocą współrzędnych punktów:

$$|OB| = |x_1|,\ |OA| = |x_2|,\ |BP_1| = |y_1|,\ |AP_2| = |y_2|$$

Zatem: $\frac{|x_1|}{r_1} = \frac{|x_2|}{r_2}$, $\frac{|y_1|}{r_1} = \frac{|y_2|}{r_2}$, $\frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|y_2|}{|x_2|}$.

Niezależnie od tego, w której ćwiartce znajduje się ramię wodzące kąta, odpowiednie współrzędne punktów P_1 i P_2 mają ten sam znak (tzn. ten sam znak mają liczby x_1 i x_2 oraz ten sam znak mają liczby y_1 i y_2). W powyższych proporcjach możemy więc pominąć znaki wartości bezwzględnych:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2},\quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2},\quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Koniec dowodu

W zależności od znaków współrzędnych punktów na ramieniu końcowym kąta wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta są dodatnie lub ujemne.

α	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−

Przykład 4 ◂ zad. 4.8

Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in (0°; 360°)$. Skonstruujmy ten kąt.

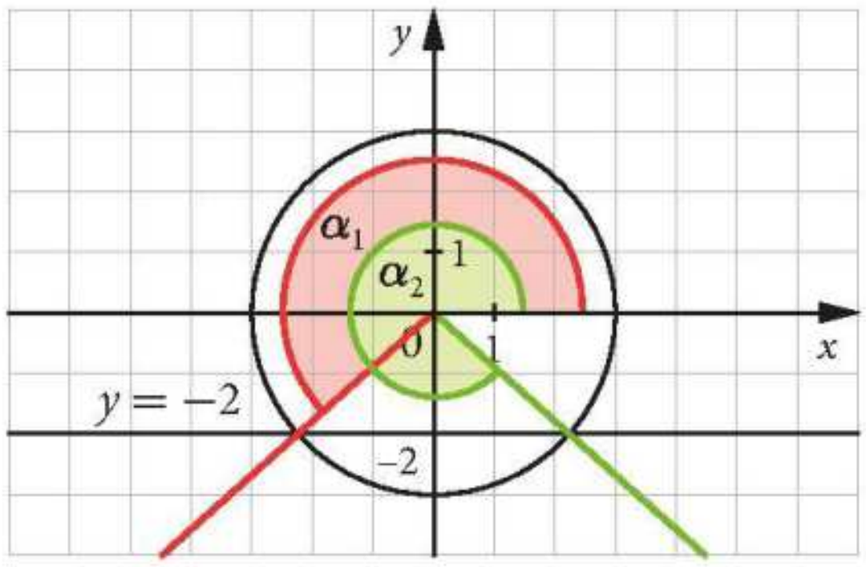
Rozwiązanie

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$

$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}$, więc przyjmujemy, że $y = -2$ i $r = 3$.

Konstrukcja przebiega następująco:

- rysujemy okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 3$,
- rysujemy prostą k: $y = -2$,
- z punktu $(0, 0)$ prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej k z okręgiem – jest ona drugim ramieniem kąta (pierwszym jest dodatnia półoś x).



Prosta k przecina okrąg w dwóch punktach, więc otrzymujemy dwa rozwiązania zadania: kąt α_1 oraz kąt α_2.

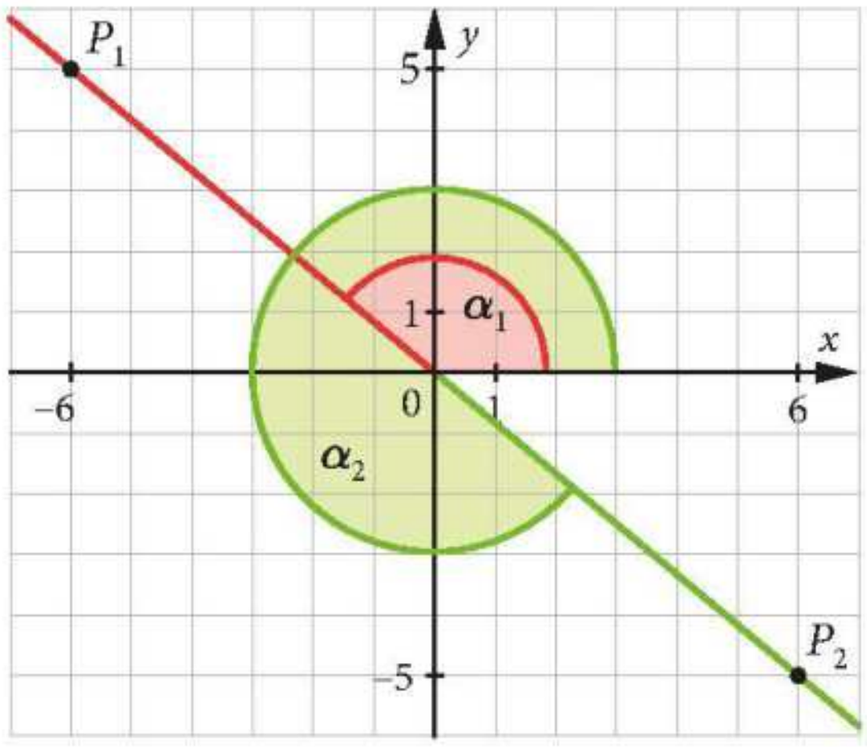
b) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}2$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}$, możemy zatem przyjąć, że

$P_1 = (-6, 5)$ oraz $P_2 = (6, -5)$.

Zadanie ma dwa rozwiązania: kąt α_1 i kąt α_2, a ich ramionami końcowymi są odpowiednio półproste OP_1 i OP_2.

Zauważmy, że te półproste uzupełniają się do prostej, a punkty P_1 i P_2 są symetryczne względem początku układu współrzędnych.



Przykład 5 ◀ zad. 4.10

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego drugie ramię przechodzi przez punkt P.

a) $P = (-2, -2)$ b) $P = (8, -6)$

Rozwiązanie

a) $P = (-2, -2)$

Obliczamy promień wodzący punktu P:

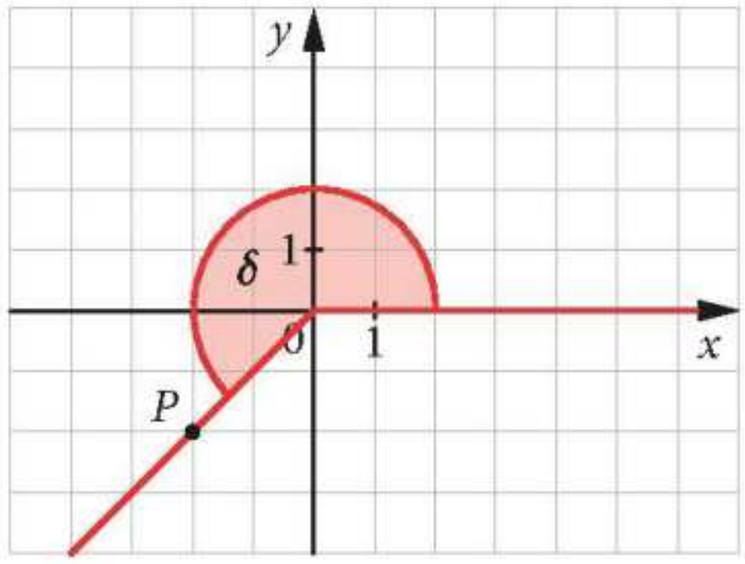
$r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

Zatem:

$$\sin\delta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\delta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{-2}{-2} = 1$$



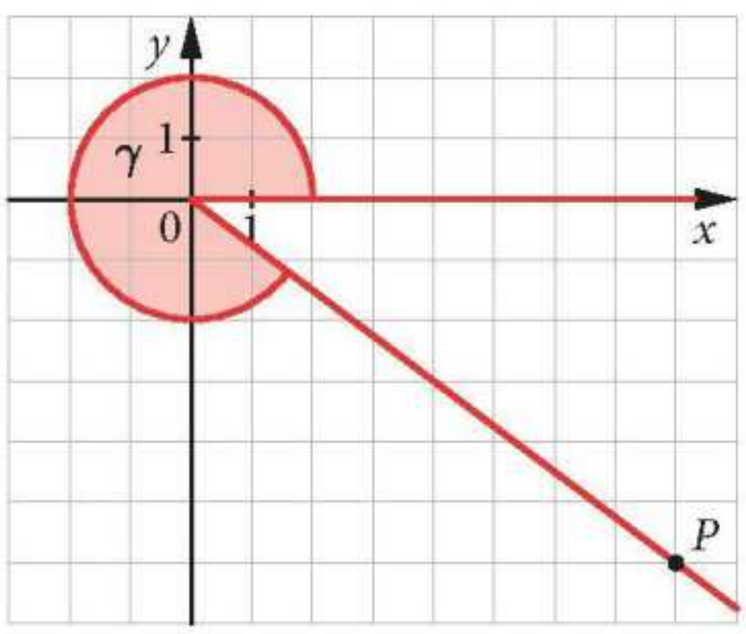
b) $P = (8, -6)$

$r = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$$\sin\gamma = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$



Przykład 6

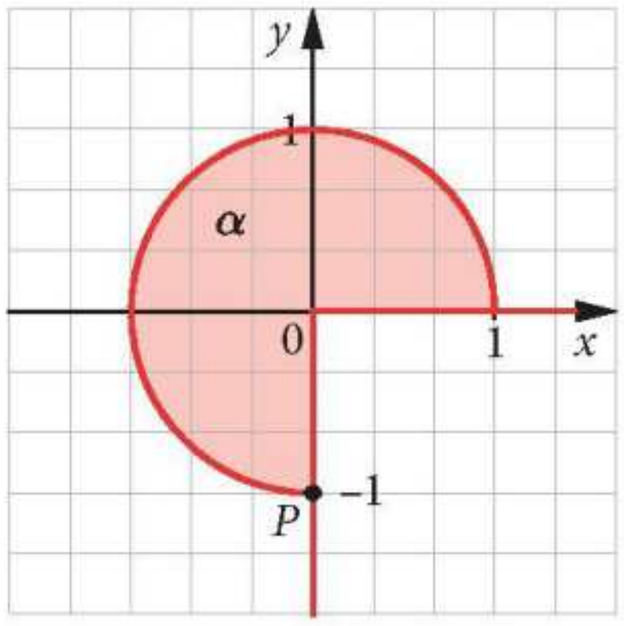
Niech $P = (x_P, y_P)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wodzącym kąta α oraz $r = |OP| = 1$. Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha = 270°$.

Jeżeli promień wodzący punktu P jest równy 1, to $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Rozwiązanie

Ramię wodzące kąta pokrywa się z ujemną półosią y, zatem $x_P = 0$, $y_P = -1$. Nie istnieje tangens kąta 270° (nie jest wykonalne dzielenie przez 0), natomiast:

$$\sin 270° = -1, \quad \cos 270° = 0$$



Podobnie obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych innych kątów będących wielokrotnościami 90°. Zauważmy, że ramię końcowe kąta 360°, podobnie jak kąta 0°, pokrywa się z ramieniem początkowym. Zatem $\sin 360° = \sin 0°$, $\cos 360° = \cos 0°$, $\operatorname{tg} 360° = \operatorname{tg} 0°$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów będących wielokrotnościami 90° przedstawiono w tabeli.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	nie istnieje	0	nie istnieje	0

Z wniosku zapisanego na s. 35 wynika prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Dla dowolnego kąta α i dowolnego $k \in \mathbf{Z}$ prawdziwe są wzory:

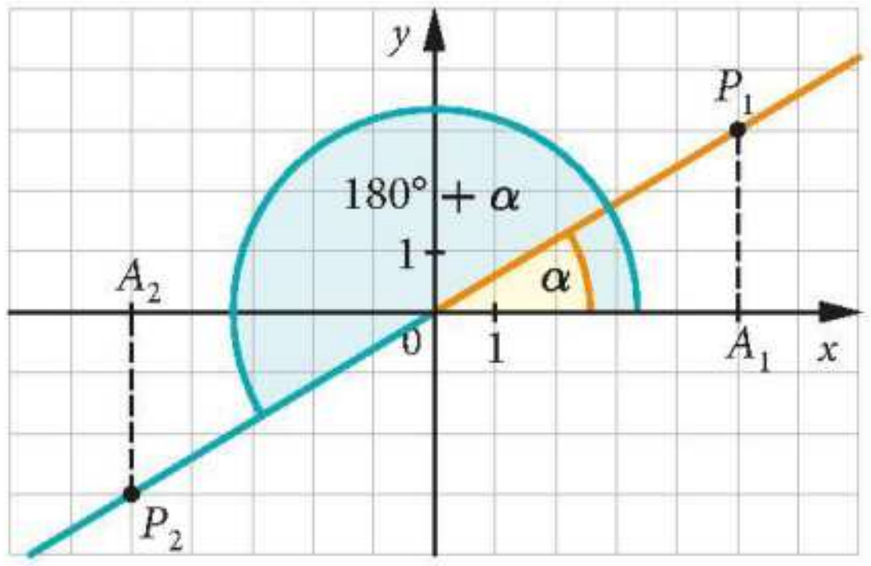
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360°)$ dla $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbf{Z}$

Wzory redukcyjne

Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można obliczyć za pomocą wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Służą do tego tzw. **wzory redukcyjne**. W klasie drugiej poznaliście takie wzory dla kątów z drugiej ćwiartki. Teraz wyprowadzimy analogiczne wzory dla kolejnych ćwiartek.

III ćwiartka

Każdy kąt $\beta \in (180°; 270°)$ możemy zapisać w postaci $180° + \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym.



Na przykład:

- $220° = 180° + 40°$ $\quad \alpha = 40°$
- $260° = 180° + 80°$ $\quad \alpha = 80°$
- $185° = 180° + 5°$ $\quad \alpha = 5°$

Ramiona wodzące kątów $\beta = 180° + \alpha$ oraz α tworzą w układzie współrzędnych prostą ($\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$, $\sphericalangle P_1OP_2$ jest kątem półpełnym). Punkty P_1 i P_2 wybrane tak, aby $|OP_1| = |OP_2|$, są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (-a, -b)$. $|OP_1| = |OP_2| = r$, zatem:

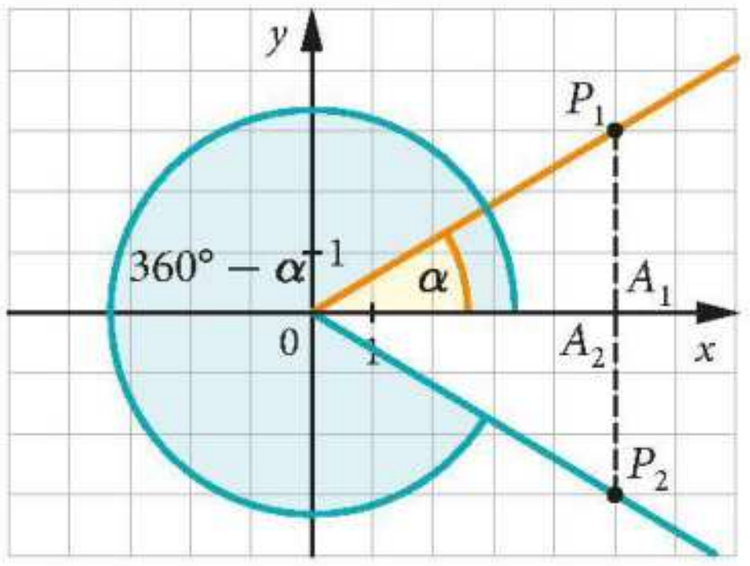
$$\sin(180° + \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin\alpha$$

$$\cos(180° + \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$$

IV ćwiartka

Każdy kąt $\beta \in (270°; 360°)$ możemy zapisać w postaci $360° - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym (czyli należącym do pierwszej ćwiartki).



Na przykład:

- $320° = 360° - 40°$ $\quad \alpha = 40°$
- $280° = 360° - 80°$ $\quad \alpha = 80°$
- $355° = 360° - 5°$ $\quad \alpha = 5°$

Ramiona wodzące kątów $\beta = 360° - \alpha$ oraz α są w układzie współrzędnych symetryczne względem osi x. Wynika to z przystawania odpowiednich trójkątów prostokątnych. Wystarczy wybrać punkty P_1 i P_2 tak, aby $|OP_1| = |OP_2|$, jak na rysunku. Wtedy $\triangle OA_1P_1 \equiv \triangle OA_2P_2$ na mocy cechy kbk ($\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$), a stąd $|OA_1| = |OA_2|$. Jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (a, -b)$. $|OP_1| = |OP_2| = r$, zatem:

$$\sin(360° - \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin\alpha$$

$$\cos(360° - \alpha) = \frac{a}{r} = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Zauważmy, że ramię wodzące kąta $360° - \alpha$ jest jednocześnie ramieniem wodzącym kąta $-\alpha$. Zatem wzory wyprowadzone powyżej można zapisać w postaci:

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Wyprowadzone wzory redukcyjne zapiszemy w tabeli.

	II ćwiartka	III ćwiartka	IV ćwiartka
β	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

W przykładzie 3 (s. 36) pokazaliśmy, że każdy kąt α można zapisać w postaci $\alpha = k \cdot 360° + \beta$, gdzie $0 \leqslant \beta \leqslant 360°$ i $k \in \mathbf{Z}$. Końcowe ramiona kątów α i β pokrywają się. Zatem podane wzory redukcyjne umożliwiają obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Tablice z przybliżonymi wartościami tych funkcji dla kątów ostrych, których miara stopniowa jest liczbą całkowitą, znajdują się na końcu podręcznika.

Przykład 7 ◂ zad. 4.11, 4.12

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych podanych kątów.

a) $260°$ b) $330°$ c) $945°$ d) $-301°$

Rozwiązanie

a) $\sin 260° = \sin(180° + 80°) = -\sin 80° \approx -0{,}9848$ ⟵ $260° = 180° + 80°$
$\cos 260° = \cos(180° + 80°) = -\cos 80° \approx -0{,}1736$
$\operatorname{tg} 260° = \operatorname{tg}(180° + 80°) = \operatorname{tg} 80° \approx 5{,}6713$

b) $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -0{,}5$ ⟵ $330° = 360° - 30°$
$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} 330° = \operatorname{tg}(360° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin 945° = \sin(2 \cdot 360° + 225°) = \sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 945° = \cos(2 \cdot 360° + 225°) = \cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} 945° = \operatorname{tg}(2 \cdot 360° + 225°) = \operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1$

d) $\sin(-301)° = -\sin 301° = -\sin(360° - 59°) = -(-\sin 59°) \approx 0{,}8572$
$\cos(-301)° = \cos 301° = \cos(360° - 59°) = \cos 59° \approx 0{,}515$
$\operatorname{tg}(-301)° = -\operatorname{tg} 301° = -\operatorname{tg}(360° - 59°) = -(-\operatorname{tg} 59°) \approx 1{,}6643$

Przykład 8 ◀ zad. 4.14

Wyznaczymy z dokładnością do 1° kąt β $(0° \leqslant \beta < 360°)$ spełniający podany warunek.

a) $\operatorname{tg}\beta = -0{,}3839$ b) $\sin\beta = -0{,}9816$

Rozwiązanie

a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3839$ ⟵ α – pomocniczy kąt ostry

$\alpha \approx 21°$ ⟵ wartość kąta α odczytana z tablic

$\beta = 180° - \alpha$ lub $\beta = 360° - \alpha$ ⟵ $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha$

Odp.: $\beta = 159°$ lub $\beta = 339°$

b) $\sin\alpha = 0{,}9816$ ⟵ α – pomocniczy kąt ostry

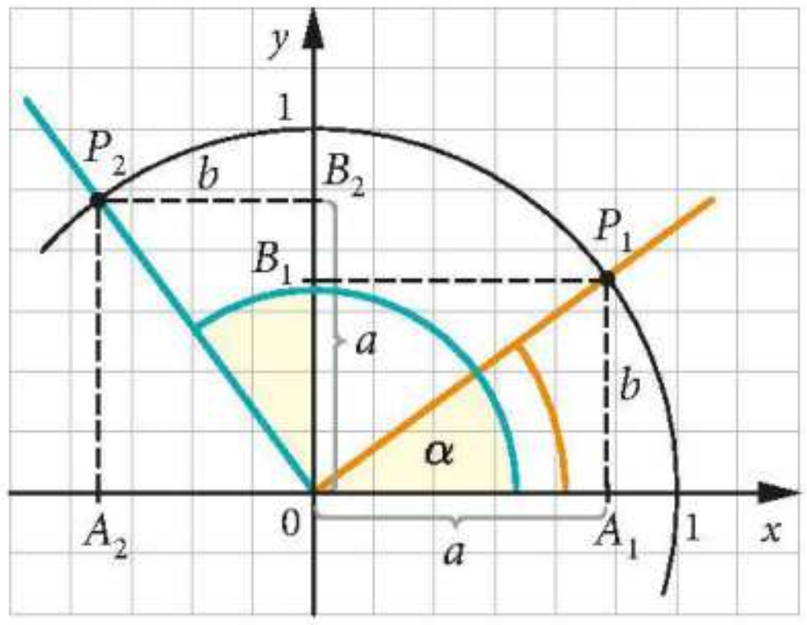
$\alpha \approx 79°$ ⟵ wartość kąta α odczytana z tablic

$\beta = 180° + \alpha$ lub $\beta = 360° - \alpha$ ⟵ $\sin\beta = -\sin\alpha$

Odp.: $\beta = 259°$ lub $\beta = 281°$

Wyprowadzimy jeszcze wzory redukcyjne wiążące sinus z cosinusem. Będziemy z nich później korzystać podczas rysowania wykresów.

Przyjmijmy, że α jest kątem ostrym umieszczonym w układzie współrzędnych. Ramię wodzące kąta $90° + \alpha$ jest wtedy zawarte w II ćwiartce układu. Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku i wybieramy punkty P_1 i P_2 takie, że $|OP_1| = |OP_2| = 1$.
$\sphericalangle A_1OP_2 = 90° + \alpha$, więc $\sphericalangle B_2OP_2 = \alpha$.



Prostokątny trójkąt OA_1P_1 jest przystający do prostokątnego trójkąta OB_2P_2 (na mocy cechy przystawania kbk), więc jest również przystający do trójkąta P_2A_2O. W takim razie, jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (-b, a)$.
$|OP_1| = |OP_2| = 1$, zatem:

$$\cos\alpha = a$$
$$\sin(90° + \alpha) = a$$

czyli:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

W taki sam sposób wykazujemy, że $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$.

Do wyprowadzenia każdego z powyższych wzorów redukcyjnych zostały wykorzystane własności figur geometrycznych. Istotne znaczenie miało tu założenie, że α jest kątem ostrym. Tymczasem można udowodnić (ten dowód pominiemy), że podane wzory redukcyjne są prawdziwe dla dowolnego kąta α (jedyne zastrzeżenia dotyczą dziedziny tangensa).

Twierdzenie

Wzory redukcyjne

Dla dowolnego kąta α prawdziwe są następujące równości:

- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Można również wyprowadzić wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych kątów postaci $270^\circ \pm \alpha$ (zob. zadanie 4.18 oraz tablice na końcu podręcznika). Ponieważ jednak każdy kąt III lub IV ćwiartki można zapisać w jednej w wymienionych wyżej postaci, z tych wzorów nie będziemy korzystać.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt 625°?

A. do pierwszej **B.** do drugiej **C.** do trzeciej **D.** do czwartej

4.2. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt P i $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. Jakie współrzędne może mieć punkt P?

A. $(-12, -5)$ **B.** $(-12, -13)$ **C.** $(-13, -12)$ **D.** $(-5, -12)$

4.3. Jaka jest wartość $\cos\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$?

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $-\frac{4}{5}$ **D.** Nie można tego jednoznacznie określić.

4.4. Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$, $k \in \mathbf{Z}$, oraz określ, do której ćwiartki należy ten kąt.

a) 966° b) 1383° c) 1791° d) 1918° e) -480° f) -753°

4.5. Wskaż pary kątów, których ramiona wodzące przechodzą przez te same punkty.

A. 123°	**D.** 770°	**G.** −108°	**J.** −310°
B. 525°	**E.** 1000°	**H.** −140°	**K.** −597°
C. 612°	**F.** 1300°	**I.** −195°	**L.** −800°

4.6. W tabeli przedstawiono przybliżone czasy obrotu wybranych planet wokół własnej osi. Oblicz, o ile stopni obróci się każda z tych planet w ciągu 24 godzin.

Planeta	Okres obrotu
Merkury	180 dni
Jowisz	10 godzin
Neptun	18 godzin

4.7. Do której ćwiartki należy końcowe ramię kąta α spełniającego podane warunki?

a) $\cos\alpha > 0$ i $\sin\alpha < 0$

b) $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$

c) $\sin\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$

4.8. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α spełniający podane warunki.

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ i $180° \leqslant \alpha \leqslant 270°$

c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ i $270° < \alpha \leqslant 360°$

d) $\sin\alpha = -0{,}2$ i $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$

e) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ i $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$

f) $\operatorname{tg}\alpha = -4$ i $90° < \alpha \leqslant 180°$

4.9. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α $(0° \leqslant \alpha < 360°)$ o podanej wartości jednej z jego funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$

d) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$

e) $\cos\alpha = -1$

f) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$

4.10. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

a) (6, 8) b) (−2, 6) c) (−4, −2) d) (12, −5) e) (−11, 0) f) (8, −15)

4.11. Oblicz. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\cos 210°$ b) $\sin 135°$ c) $\operatorname{tg} 225°$ d) $\sin(-300°)$ e) $\operatorname{tg}(-150°)$ f) $\cos(-315°)$

4.12. Oblicz. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 100°$ b) $\cos 325°$ c) $\operatorname{tg} 200°$ d) $\sin(-296°)$ e) $\cos(-95°)$ f) $\operatorname{tg}(-179°)$

4.13. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α o podanych własnościach. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}9325$ i $90° < \alpha < 180°$

b) $\sin\alpha = -0{,}342$ i $180° < \alpha < 270°$

c) $\cos\alpha = 0{,}1$ i $270° < \alpha < 360°$

d) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}51$ i $180° < \alpha < 270°$

e) $\sin\alpha = -0{,}809$ i $270° < \alpha < 360°$

f) $\cos\alpha = -0{,}97$ i $180° < \alpha < 270°$

4.14. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α ($0° \leqslant \alpha < 360°$) spełniającego podany warunek.

a) $\cos\alpha = 0{,}848$
b) $\sin\alpha = -0{,}9135$
c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}404$
d) $\cos\alpha = -0{,}97$
e) $\sin\alpha = 0{,}6$
f) $\operatorname{tg}\alpha = -14$

4.15. Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 150° \operatorname{tg} 135° + \cos 210° \operatorname{tg} 330°$
b) $\sin 90° \operatorname{tg} 180° - \cos 0° \operatorname{tg} 180°$
c) $2 \sin 120° \sin 135° + \sqrt{2} \cos 150° \operatorname{tg} 225°$
d) $2 \operatorname{tg} 240° + 9 \operatorname{tg} 150° \operatorname{tg} 210°$

4.16. Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\dfrac{2 \sin 120° \cos 135° + 3 \sin 150° \operatorname{tg} 135°}{\cos 135° \operatorname{tg} 150° - \operatorname{tg} 210° \cos 210°}$

b) $\left[\dfrac{\operatorname{tg} 120° \cos 120° \sin 120° + \operatorname{tg} 120° \sin 150° \cos 210°}{3 \operatorname{tg} 300° \left(\operatorname{tg} 210° - \operatorname{tg} 150°\right)}\right]^{-1}$

c) $\dfrac{(\cos 210° \sin 330° - \sin 210° \cos 315°)^2}{0{,}25\left(5 \sin^2 150° + 2 \cos 150° \sin 225°\right)}$

d) $\dfrac{\sin 120° \cos 135° \cos 150° + \cos 300° \sin 315° \sin 330°}{\operatorname{tg} 210° \operatorname{tg} 120° \cos 315° \sin 330°}$

D **4.17.** Udowodnij, że liczba $\sin(-403°) + \cos(-503°) - \sin 223° + \cos 323°$ jest całkowita.

D **4.18.** Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwy jest wzór redukcyjny $\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Liczba $\sin 250°$ równa jest liczbie
A. $\sin 70°$. **B.** $-\sin 70°$. **C.** $-\cos 70°$.

2. Wyznacz wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta α, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt $(-8, -15)$.

3. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α spełniającego podane warunki. Skorzystaj z tablic matematycznych.
a) $\cos\alpha = -0{,}848$ i $90° < \alpha < 180°$
b) $\operatorname{tg}\alpha = -19$ i $270° < \alpha < 360°$

4. Oblicz $\cos(-150°) \cdot \operatorname{tg} 330° \cdot \sin 585°$.

D **5.** Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwy jest wzór redukcyjny $\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$.

5. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Umiejętności:
- opisywanie własności funkcji trygonometrycznych
- wykorzystywanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi

Funkcje okresowe

Jedną z ważniejszych własności funkcji trygonometrycznych jest ich **okresowość**, czyli powtarzalność. Wykres takiej funkcji możemy podzielić na przystające fragmenty, a do opisania jej własności wystarczy zbadać je w pewnym podzbiorze dziedziny. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 1 ◂ zad. 5.4

W zbiorze liczb całkowitych możemy w następujący sposób określić **dzielenie z resztą**.

Jeżeli liczbę całkowitą p podzielimy z resztą przez dodatnią liczbę naturalną n, to liczbę p możemy zapisać w postaci $p = k \cdot n + r$, gdzie k jest liczbą całkowitą, reszta r – liczbą naturalną i $0 \leqslant r < n$.

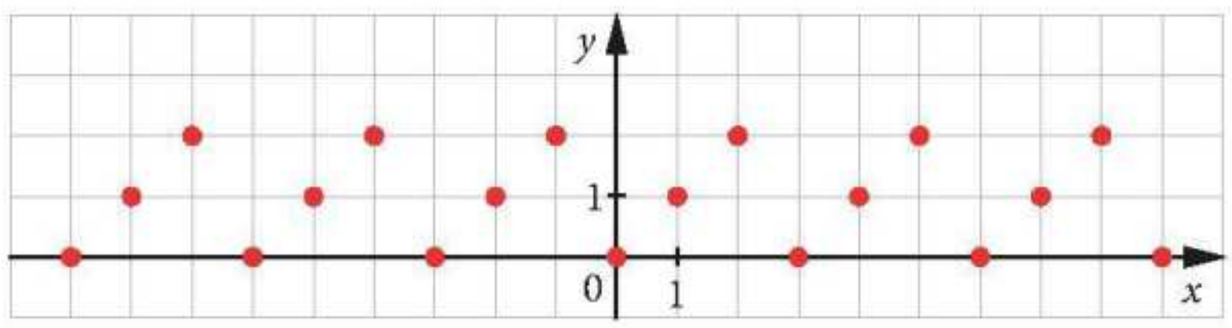
Na przykład:
$10 = 3 \cdot 3 + 1$, zatem reszta z dzielenia liczby 10 przez liczbę 3 jest równa 1.
$-7 = (-3) \cdot 3 + 2$, zatem reszta z dzielenia liczby -7 przez liczbę 3 jest równa 2.
$-27 = (-9) \cdot 3 + 0$, zatem reszta z dzielenia liczby -27 przez liczbę 3 jest równa 0.

Narysujemy wykres funkcji f, która każdej liczbie całkowitej x przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby x przez 3 i opiszemy własności tej funkcji.

Rozwiązanie

Sporządźmy częściową tabelę funkcji f.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0



Własności funkcji f.

- Funkcja jest określona dla każdej liczby całkowitej – jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{Z}$.
- Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\{0, 1, 2\}$.
- Wartość najmniejszą równą 0 funkcja przyjmuje dla wszystkich liczb podzielnych przez 3, czyli dla $x = 3k,\ k \in \mathbf{Z}$. Są to jednocześnie miejsca zerowe tej funkcji.
- Wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla $x = 3k + 2,\ k \in \mathbf{Z}$.

Dla argumentów różniących się o 3 funkcja przyjmuje takie same wartości, zatem dla każdej liczby całkowitej x prawdziwa jest równość:

$$f(x + 3) = f(x)$$

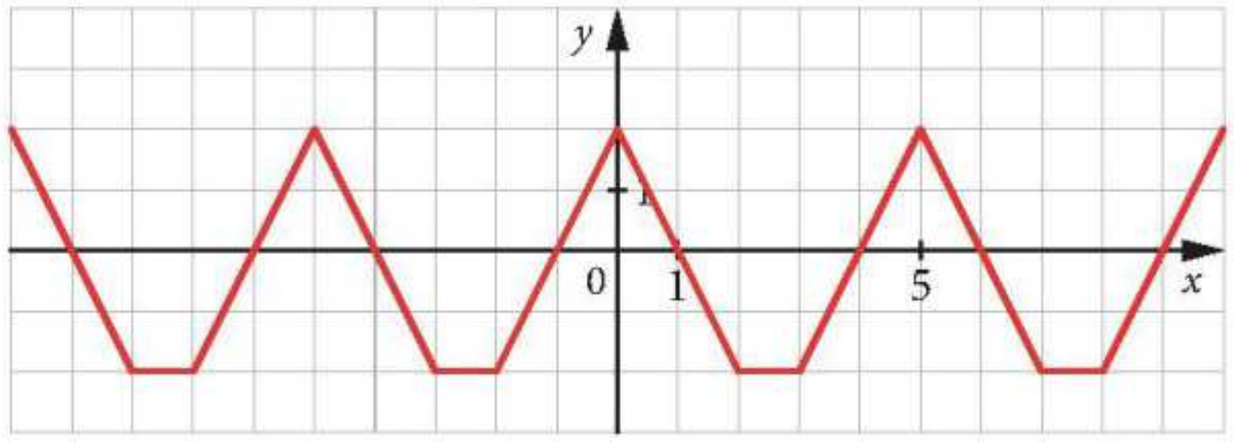
Liczbę 3 nazywamy **okresem funkcji** f. Każda z wielokrotności liczby 3 też jest okresem tej funkcji, ale 3 jest najmniejszą liczbą dodatnią o tej własności. Nazywamy ją **okresem zasadniczym** lub **podstawowym**.

Odpowiadający okresowi fragment wykresu powtarza się wzdłuż osi liczbowej x nieskończenie wiele razy.

Przykład 2

zad. 5.5, 5.6

Funkcja f, której wykres znajduje się poniżej, ma okres zasadniczy równy 5.



Opiszemy własności tej funkcji.

Rozwiązanie

- $D = \mathbf{R},\ ZW = \langle -2;\ 2\rangle$
- Wartość największa: 2, dla argumentów postaci $x = 5k,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Wartość najmniejsza: -2, dla wszystkich argumentów z przedziałów $\langle 5k + 2;\ 5k + 3\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Miejsca zerowe: argumenty postaci $x = 5k + 1$ lub $x = 5k + 4,\ k \in \mathbf{Z}$.
- $f(x) > 0$ dla $x \in (5k - 1;\ 5k + 1),\ k \in \mathbf{Z}$.
- $f(x) < 0$ dla $x \in (5k + 1;\ 5k + 4),\ k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle 5k - 2;\ 5k\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $\langle 5k;\ 5k + 2\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja jest stała w każdym z przedziałów $\langle 5k + 2;\ 5k + 3\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.

Zapis $\langle 5k + 2;\ 5k + 3\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$ oznacza rodzinę przedziałów. Jeżeli $k = 0$, mamy przedział $\langle 2;\ 3\rangle$, dla $k = 1$ przedział $\langle 7;\ 8\rangle$, dla $k = -1$ przedział $\langle -3;\ -2\rangle$ itd.

Definicja

Funkcję f określoną na dziedzinie D nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdej liczby $x \in D$ spełnione są dwa warunki:

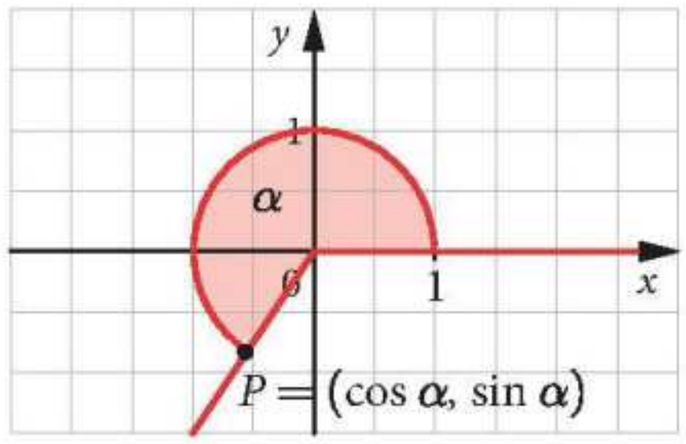
- $x + T \in D$ i $x - T \in D$,
- $f(x + T) = f(x)$.

Każdą z liczb T nazywamy **okresem** funkcji f, a jeżeli wśród nich istnieje najmniejsza dodatnia liczba T_0, to nazywamy ją **okresem zasadniczym** funkcji f.

Przykładem funkcji okresowej, która nie ma okresu zasadniczego, jest funkcja stała. Jej okresem jest każda liczba rzeczywista różna od 0.

Załóżmy, że promień wodzący r punktu $P = (x_P, y_P)$ jest równy 1, czyli:

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$



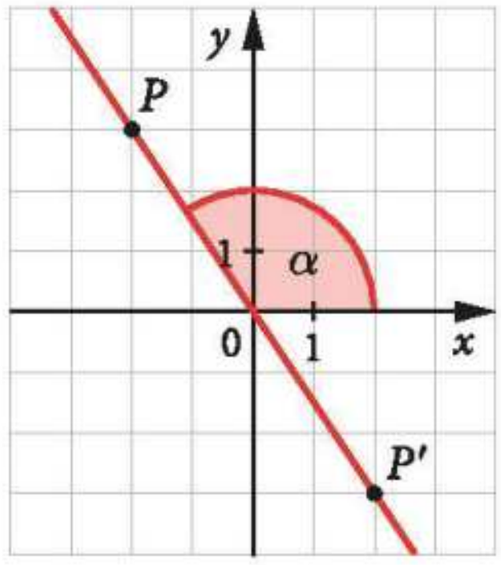
Własności funkcji $f(\alpha) = \sin\alpha$

- Funkcja sinus jest określona dla każdego kąta α.
  Zatem jej dziedziną jest zbiór wszystkich kątów.
- Zmiana kąta o $360°$ nie zmienia wartości y_P i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności, zatem funkcja sinus jest okresowa o okresie zasadniczym $360°$.
- $-1 \leqslant y_P \leqslant 1$, więc $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$. Ponadto, każda liczba z przedziału $\langle -1; 1\rangle$ jest wartością y_P pewnego punktu P na okręgu o środku O i promieniu 1, zatem przedział $\langle -1; 1\rangle$ jest zbiorem wartości funkcji sinus.
- Wartość największą równą 1 funkcja sinus przyjmuje dla kątów $\alpha = 90°$, $\alpha = 450°$, $\alpha = 810°$, ... oraz $\alpha = -270°$, $\alpha = -630°$, ..., czyli dla kątów, które można zapisać w postaci $\alpha = 90° + k \cdot 360°$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Wartość najmniejsza: -1, dla kątów $\alpha = 270° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbf{Z}$.
- $\sin\alpha = 0$, gdy $y_P = 0$, czyli gdy ramię wodzące kąta zawiera się w osi x. Miejscami zerowymi funkcji sinus są zatem kąty $\alpha = k \cdot 180°$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Dla każdego $k \in \mathbf{Z}$ mamy:
  $\sin\alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \cdot 360° < \alpha < 180° + k \cdot 360°$,
  $\sin\alpha < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $180° + k \cdot 360° < \alpha < 360° + k \cdot 360°$.

Własności funkcji $g(\alpha) = \cos\alpha$

- Funkcja cosinus jest określona dla każdego kąta α. Zatem jej dziedziną jest zbiór wszystkich kątów α.
- Zmiana kąta o 360° nie zmienia wartości x_P i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności – funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie zasadniczym 360°.
- $-1 \leqslant x_P \leqslant 1$, więc $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$. Ponadto, każda liczba z przedziału $\langle -1; 1\rangle$ jest wartością x_P pewnego punktu P na okręgu o środku O i promieniu 1, zatem przedział $\langle -1; 1\rangle$ jest zbiorem wartości funkcji cosinus.
- Wartość największą równą 1 funkcja cosinus przyjmuje dla kątów $\alpha = 0° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Wartość najmniejsza: -1, dla kątów $\alpha = 180° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}$.
- $\cos\alpha = 0$, gdy $x_P = 0$, czyli gdy ramię wodzące kąta zawiera się w osi y. Miejscami zerowymi funkcji cosinus są więc kąty $\alpha = 90° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Dla każdego $k \in \mathbf{Z}$ mamy:
  $\cos\alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-90° + k \cdot 360° < \alpha < 90° + k \cdot 360°$,
  $\cos\alpha < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $90° + k \cdot 360° < \alpha < 270° + k \cdot 360°$.

Własności funkcji $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$



- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$, zatem funkcja tangens jest określona, gdy $x_P \neq 0$, czyli dla kątów $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Jeżeli na ramieniu wodzącym kąta α umieścimy punkt $P = (x_P, y_P)$, to punkt $P' = (-x_P, -y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta $180° + \alpha$. Zgodnie z definicją mamy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{-y_P}{-x_P} = \operatorname{tg}(180° + \alpha)$ dla $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}$. Kąty różniące się o 180° mają takie same tangensy i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności – tangens jest funkcją okresową o okresie zasadniczym 180°.
- Jeżeli przyjmiemy $x_P = 1$, to $\operatorname{tg}\alpha = y_P$. Dowolna liczba rzeczywista jest współrzędną y_P pewnego punktu $P = (1, y_P)$, zatem zbiorem wartości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych.
- $\operatorname{tg}\alpha = 0$, gdy $y_P = 0$. Miejscami zerowymi funkcji tangens są więc kąty $\alpha = k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja tangens przyjmuje wartości dodatnie, gdy x_P oraz y_P mają ten sam znak, a wartości ujemne, gdy x_P oraz y_P mają znaki przeciwne. Dla każdego $k \in \mathbf{Z}$ mamy:
  $\operatorname{tg}\alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0° + k \cdot 180° < \alpha < 90° + k \cdot 180°$,
  $\operatorname{tg}\alpha < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $90° + k \cdot 180° < \alpha < 180° + k \cdot 180°$.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta są takie same jak w przypadku kątów wypukłych.

Twierdzenie

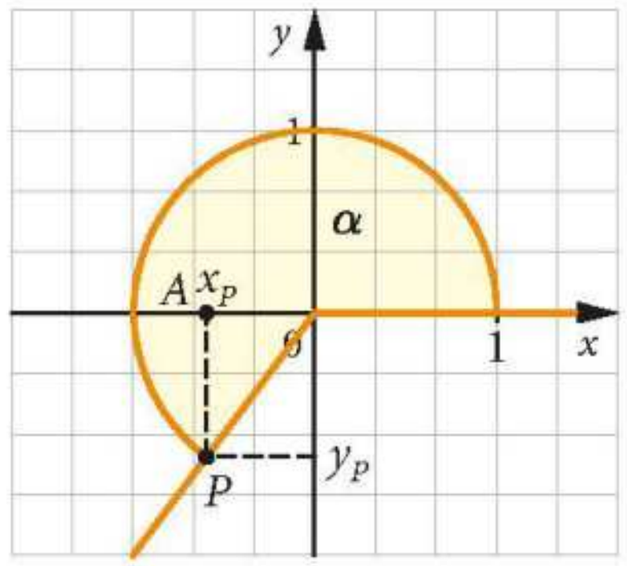
Jedynka trygonometryczna

Dla każdego kąta α prawdziwa jest równość:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i załóżmy, że promień wodzący punktu $P = (x_P, y_P)$ jest równy 1. Wtedy $y_P = \sin\alpha$ i $x_P = \cos\alpha$.



- Jeżeli ramię wodzące kąta pokrywa się z jedną z półosi układu współrzędnych, to $|\sin\alpha| = 1$ i $\cos\alpha = 0$ lub $|\cos\alpha| = 1$ i $\sin\alpha = 0$.
  W obu przypadkach $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- Jeżeli ramię wodzące kąta nie pokrywa się z żadną z półosi układu współrzędnych, to mamy:

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2 \quad \longleftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$
$$|x_P|^2 + |y_P|^2 = 1$$
$$x_P^2 + y_P^2 = 1 \quad \longleftarrow |m|^2 = m^2$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \longleftarrow x_P = \cos\alpha \text{ i } y_P = \sin\alpha$$

Koniec dowodu

Wykorzystajmy ponownie oznaczenia przyjęte w definicjach funkcji trygonometrycznych. Jeżeli $\cos\alpha \neq 0$, to:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y_P}{r}}{\frac{x_P}{r}} = \frac{y_P}{x_P} = \operatorname{tg}\alpha$$

Wniosek

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ dla } \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Przykład 3 ◀ zad. 5.10

Kąt α spełnia warunki: $180^\circ \leqslant \alpha \leqslant 270^\circ$ i $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$. Obliczymy $\cos\alpha$.

Rozwiązanie

I sposób

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ ⟵ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$, stąd $\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$

To równanie ma dwa rozwiązania: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ lub $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Kąt α należy do III ćwiartki układu współrzędnych, więc wartość cosinusa tego kąta jest ujemna. Zatem tylko drugie rozwiązanie spełnia wszystkie warunki zadania.

II sposób

Niech $P = (x, y)$ oznacza punkt na ramieniu końcowym kąta α, a r – promień wodzący tego punktu. Ponieważ $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ i α należy do III ćwiartki układu współrzędnych, możemy przyjąć, że $y = -2$ oraz $r = 3$. Wtedy:

$x^2 + 4 = 9$ ⟵ $x^2 + y^2 = r^2$ (twierdzenie Pitagorasa)

$x^2 = 5$, stąd $x = \sqrt{5}$ lub $x = -\sqrt{5}$

$P = \left(-\sqrt{5}, -2\right)$ ⟵ $x < 0$, ponieważ P jest punktem III ćwiartki

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⟵ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$

Odp.: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Przykład 4 ◀ zad. 5.11

Obliczymy wartość cosinusa kąta α takiego, że $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

Rozwiązanie

$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ ⟵ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{24}{25}$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}}$ lub $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{24}{25}}$

Odp.: $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ lub $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Przykład 5

Obliczymy wartości sinusa oraz cosinusa kąta α takiego, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Rozwiązanie

Niech $P = (x, y)$ oznacza punkt na ramieniu końcowym kąta α, a r – promień wodzący tego punktu.

$\operatorname{tg}\alpha > 0$, więc α jest kątem należącym do I lub III ćwiartki układu współrzędnych.

- Dla $0° < \alpha < 90°$ przyjmujemy, że $x = 3$ i $y = 4$. Wtedy:

$r^2 = 25$ $\longleftarrow x^2 + y^2 = r^2$

$r = 5$ $\longleftarrow r > 0$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

- Dla $180° < \alpha < 270°$ przyjmujemy, że $x = -3$ i $y = -4$. Wtedy:

$\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

Odp.: Zadanie ma dwa rozwiązania: $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \sin\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$.

D **Przykład 6** ◀ zad. 5.14

Wykażemy, że dla każdego kąta $270° < \alpha < 360°$ prawdziwa jest tożsamość:

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

Dowód

Sprawdzamy najpierw, czy warunek ograniczający miarę kąta α wystarczy, aby wszystkie wyrażenia podane w zadaniu były określone. Wypisujemy założenia:

$1 - \sin^2\alpha > 0$ i $1 - \cos^2\alpha > 0$ i $\sin\alpha \neq 0$ i $\cos\alpha \neq 0$

Wszystkie powyższe warunki są spełnione dla $270° < \alpha < 360°$.

Przekształcamy lewą stronę podanej równości.

$$\mathrm{L} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}} = \quad \longleftarrow \text{korzystamy z jedynki trygonometrycznej}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|} - \frac{\cos\alpha}{|\sin\alpha|} = \quad \longleftarrow \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \quad \longleftarrow \text{uwzględniamy znaki funkcji trygonometrycznych w IV ćwiartce}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \mathrm{P}$$

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Liczba 6 jest okresem funkcji f. Wskaż liczbę, która również jest okresem tej funkcji.

A. 3 **B.** 9 **C.** 15 **D.** 18

5.2. Wiadomo, że $270° < \alpha < 360°$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Ile jest równy $\operatorname{tg}\alpha$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

5.3. Wskaż wartość, której nie może przyjąć wyrażenie $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

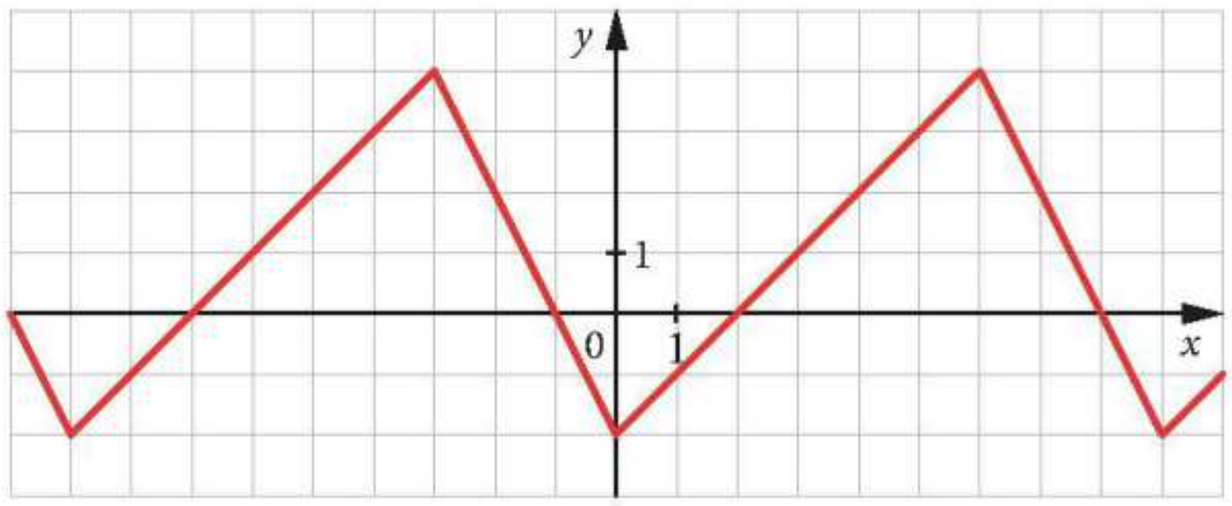
5.4. Funkcja f każdej liczbie całkowitej x przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby x przez 5.

a) Narysuj wykres funkcji f dla $x \in \langle -8; 8\rangle \cap \mathbf{Z}$.

b) Opisz następujące własności funkcji f:

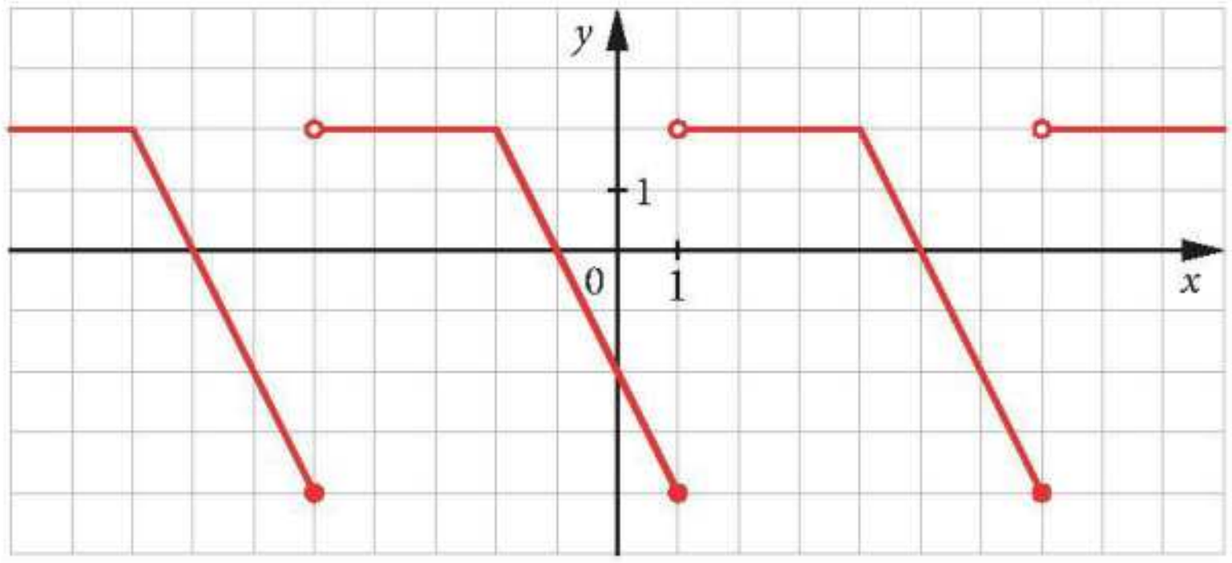
- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

5.5. Na wykresie przedstawiona jest funkcja okresowa f o dziedzinie $\mathbf{R}$ i okresie zasadniczym równym 9.



Na podstawie wykresu opisz następujące własności funkcji f: zbiór wartości, wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, miejsca zerowe oraz przedziały, w których funkcja ma stały znak.

5.6. Na wykresie przedstawiona jest funkcja okresowa f o dziedzinie $\mathbf{R}$ i okresie zasadniczym równym 6.



Na podstawie wykresu opisz następujące własności funkcji f: miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, oraz przedziały monotoniczności.

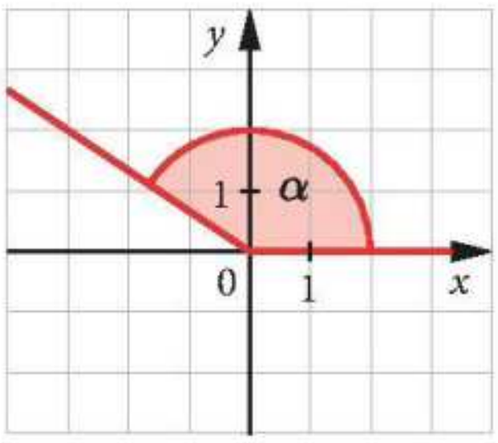
5.7. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji okresowej, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 2\rangle$, a miejscami zerowymi są wszystkie liczby postaci $x = 5k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.8. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji okresowej f o następujących własnościach:

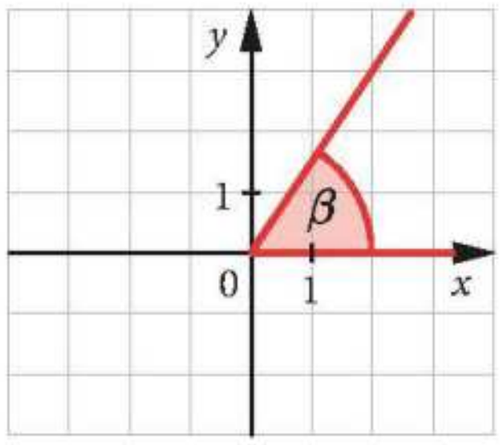
- dziedziną f jest zbiór $\{x \in \mathbf{R}: x \neq 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$,
- zbiorem wartości jest przedział $(-1; 1)$,
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle 4k; 4k + 1\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.9. Na podstawie rysunku porównaj sinus danego kąta z jego cosinusem.

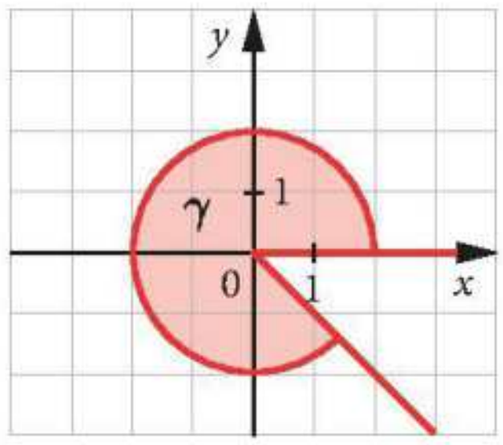
a)



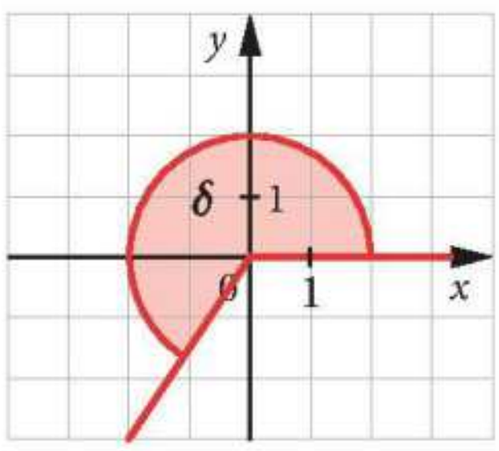
c)



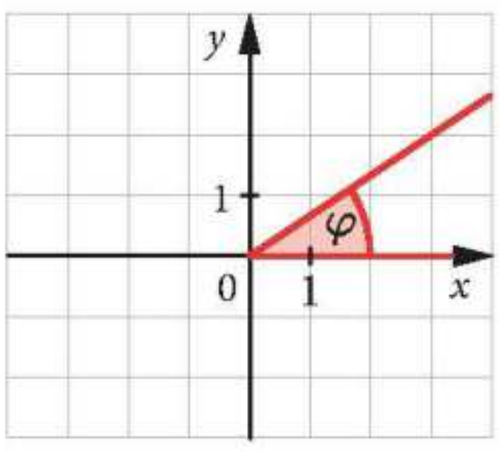
e)



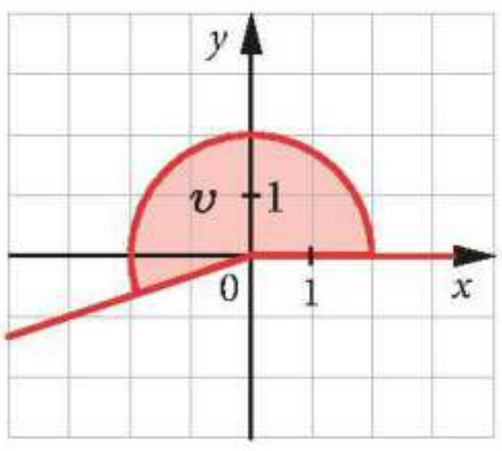
b)



d)



f)



5.10. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, który spełnia podane warunki.

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $90° < \alpha < 180°$

b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ i $270° < \alpha < 360°$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$ i $90° < \alpha < 180°$

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $180° < \alpha < 270°$

5.11. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta α. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\sin\alpha = 0{,}6$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$

5.12. Dana jest wartość tangensa kąta α. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = 4$

d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

5.13. Sprawdź, czy istnieje kąt α spełniający podane warunki.

a) $\sin\alpha = \frac{1}{7}$ i $\cos\alpha < 0$

b) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2$

c) $\sin\alpha + \cos\alpha = 2$

d) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

e) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ i $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$

f) $\operatorname{tg}\alpha = -100$ i $\cos\alpha > 0$

D **5.14.** Udowodnij, że dla każdego kąta $180° < \alpha < 270°$ podana równość jest tożsamością.

$$\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\cos\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

D **5.15.** Udowodnij tożsamość. Podaj konieczne założenia.

a) $\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 3\sin^2\alpha - 2$

b) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - 1\right)(\operatorname{tg}\alpha + 1)$

c) $\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) = 1$

d) $\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

D **5.16.** Udowodnij tożsamość. Podaj założenia.

a) $\left[\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}+\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}\right]\cdot\left(\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-2\right)^{-1}=1$

b) $\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)^2=\frac{4}{1-\cos^2\alpha}$

* **5.17.** Oblicz $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Istnieje kąt α spełniający warunki

A. $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$ i $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

B. $\operatorname{tg}\alpha=-3$ i $\cos\alpha=\sin\alpha$.

C. $\operatorname{tg}\alpha=-5$ i $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, i $\sin\alpha=-\frac{5}{7}$.

2. Oblicz wartość tangensa kąta α, wiedząc, że $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{17}}{9}$.

3. Kąt α należy do III ćwiartki układu współrzędnych i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{7}$. Oblicz wartości sinusa i cosinusa kąta α.

D **4.** Wykaż, że podana równość jest tożsamością.

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$$

Podaj założenia, które musi spełniać kąt α.

D **5.** Wykaż, że dla każdego kąta $\alpha\neq k\cdot 90^\circ$, $k\in\mathbf{Z}$, podane wyrażenie przyjmuje wartość całkowitą.

$$\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^{-1}+\left(1+\operatorname{tg}^{-2}\alpha\right)^{-1}$$

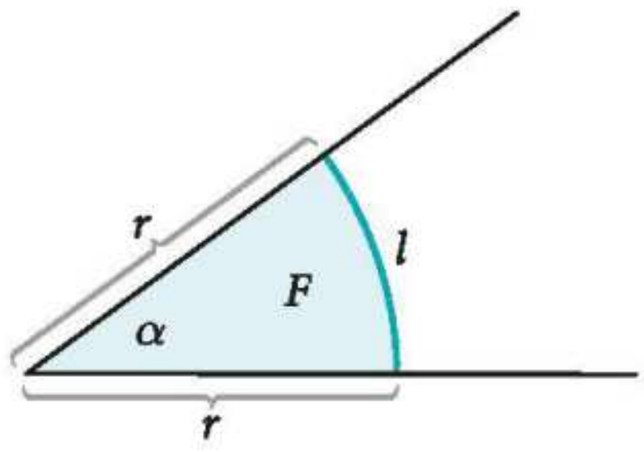
6. Miara łukowa kąta

Umiejętności:

- stosowanie miary łukowej
- zamiana miary łukowej kąta na stopniową i odwrotnie
- operowanie funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej

Wprowadzimy teraz inny sposób mierzenia kątów. Z wielu powodów miara stopniowa jest niewygodna. Podział $1°$ na $60'$ odbiega od powszechnie stosowanego systemu dziesiętnego. Jeżeli chcemy zaznaczać miary kątów na osi liczbowej, to potrzebny jest przelicznik, pozwalający wyrazić np. $137° 20' 15''$ jedną liczbą rzeczywistą.

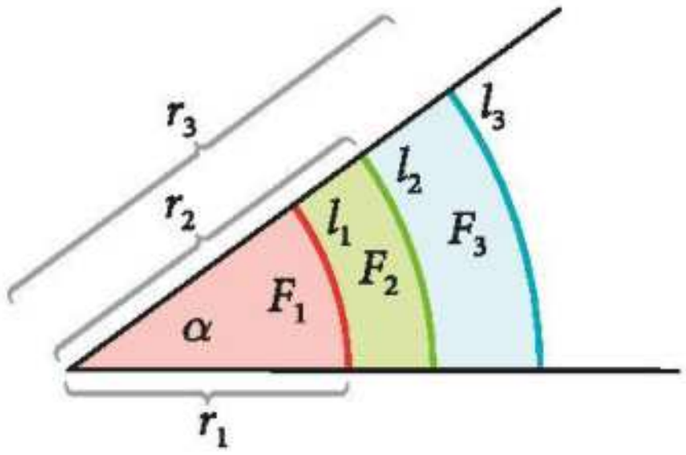
Przyjrzyjmy się rysunkowi kąta α. Jeśli poprowadzimy okrąg o środku w wierzchołku kąta, otrzymamy figurę oznaczoną literą F – jest to wycinek koła o promieniu r i długości łuku l.



Jeżeli zaznaczymy łuki o różnych promieniach i wspólnym środku w wierzchołku kąta, to odpowiednie wycinki kołowe są figurami podobnymi, zatem równe są stosunki:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} \text{ itd.}$$

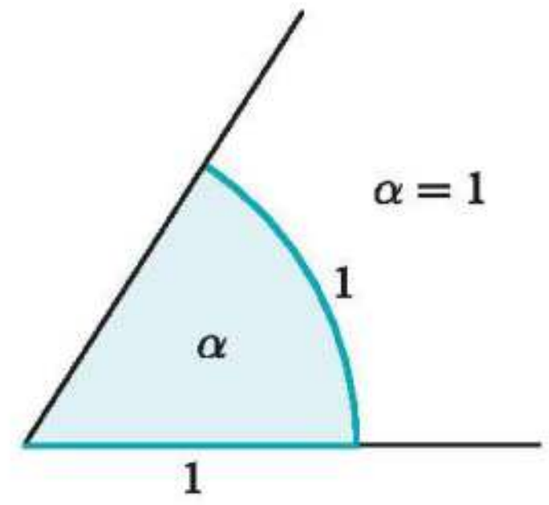
Każdemu kątowi można zatem jednoznacznie przyporządkować liczbę, która jest stosunkiem długości odpowiedniego łuku do promienia tego łuku. Tę liczbę przyjęto jako miarę kąta.



Definicja

Miarą łukową kąta jest stosunek długości zawartego w kącie łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta do promienia tego okręgu.

Kąt, w którym łuk ma długość równą promieniowi ($l = r$), ma w przybliżeniu $57° 17' 45''$ i jest **kątem jednostkowym** w mierze łukowej.



Definicja

Jednostką miary łukowej jest **radian**. Kąt środkowy w okręgu oparty na łuku o długości promienia tego okręgu ma miarę 1 radiana.

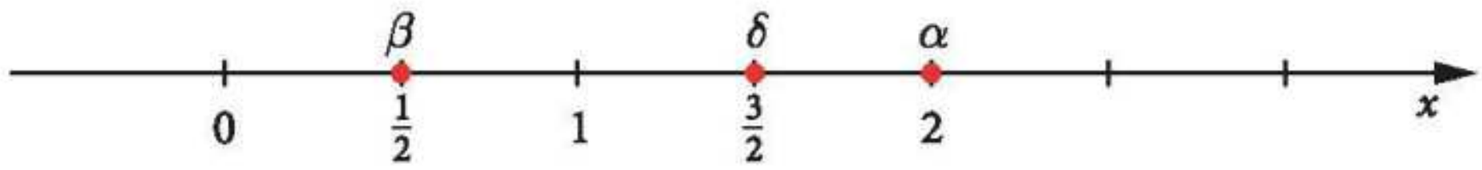
Miarą łukową danego kąta jest liczba zawartych w nim radianów.

Miara łukowa łączy pomiar rozwartości kąta z mierzeniem długości.

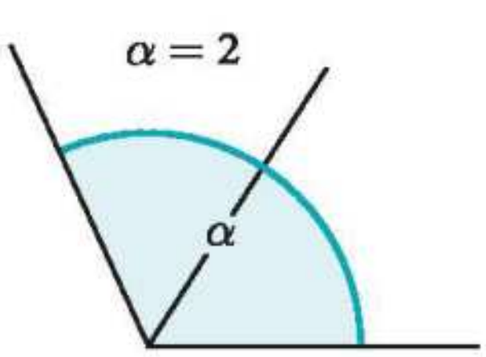
Podawanie miary stopniowej kąta wymaga używania zapisu mianowanego, tzn. symboli °, ′, ″ (np. $\alpha = 27° 13' 20''$). Nie ma takiej potrzeby przy zapisie miary łukowej, która jest ilorazem długości, na przykład „$\alpha = 2$ radiany” zapiszemy krótko $\alpha = 2$.

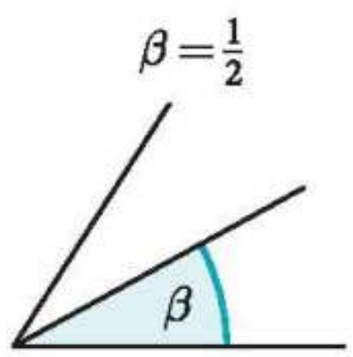
Przykład 1

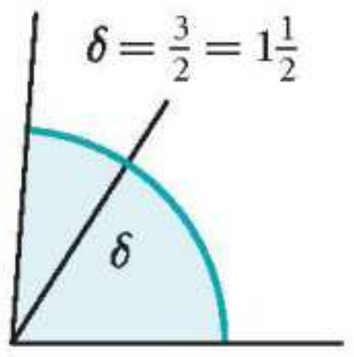
Na osi liczbowej zaznaczone są liczby: $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{3}{2}$.



Narysujemy kąty o tych miarach, odkładając kąt jednostkowy.







Przykład 2

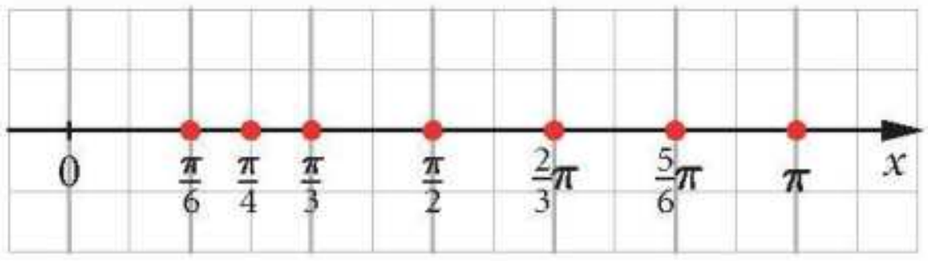
Wyznaczymy miary łukowe kątów, które często występują w zadaniach.

Jeżeli $r = 1$, to długość okręgu jest równa 2π. Zatem kąt pełny ma miarę 2π.

$30° = \frac{\pi}{6}$ $\quad 45° = \frac{\pi}{4}$ $\quad 60° = \frac{\pi}{3}$ $\quad 90° = \frac{\pi}{2}$ $\quad 120° = \frac{2}{3}\pi$

$135° = \frac{3}{4}\pi$ $\quad 150° = \frac{5}{6}\pi$ $\quad 180° = \pi$ $\quad 270° = \frac{3}{2}\pi$ $\quad 360° = 2\pi$

Zaznaczymy teraz niektóre z tych miar na osi liczbowej.



Zauważmy, że $\pi \approx 3{,}14 \approx 3$. Dlatego na osi x będziemy zaznaczać $180° = \pi \approx 3$.

Jeżeli α oznacza miarę stopniową kąta, a x – jego miarę łukową, to na podstawie proporcji $\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{x}$ w prosty sposób możemy zamienić miarę stopniową na łukową i na odwrót.

Wniosek

Jeżeli α oznacza miarę stopniową kąta, a x jest jego miarą łukową, to:

- $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$
- $\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Każdemu kątowi α $(0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ)$ odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista będąca jego miarą łukową i na odwrót – dowolnej liczbie rzeczywistej $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ możemy przyporządkować kąt, którego miarą łukową jest t. Ponieważ przyporządkowanie to jest jednoznaczne, możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne tak, aby ich argumentami były liczby.

Jeżeli liczba rzeczywista $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ jest miarą łukową kąta α $(0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ)$, to przyjmujemy, że:

- $\sin t = \sin \alpha$
- $\cos t = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \alpha$ dla $t \neq \frac{\pi}{2}$ i $t \neq \frac{3}{2}\pi$

Dowolną liczbę rzeczywistą x możemy zapisać w postaci $x = t + n \cdot 2\pi$, gdzie $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ i $n \in \mathbf{Z}$, więc:

- $\sin x = \sin t$
- $\cos x = \cos t$
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Poznane wcześniej wzory i zależności możemy teraz zapisać dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej. Na przykład:

- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ dla $x \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{Z}$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ dla $x \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $k \in \mathbf{Z}$
- **jedynka trygonometryczna:** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla $x \in \mathbf{R}$

Przykład 3 ◀ zad. 6.5

Wyznaczymy miarę łukową albo stopniową podanego kąta.

Rozwiązanie

a) $\alpha = 37°$

$$x = \frac{37° \cdot \pi}{180°}$$

$$x = \frac{37}{180}\pi$$

b) $\alpha = 240°$

$$x = \frac{240 \cdot \pi}{180}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi$$

c) $x = 14{,}5$

$$\alpha = \frac{14{,}5 \cdot 180°}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{2610°}{\pi} \approx 831°$$

Przykład 4 ◀ zad. 6.7

Miarę x kąta podaną w radianach zapiszemy w postaci $\alpha + k \cdot 360°$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$ i $0° \leqslant \alpha < 360°$.

Rozwiązanie

a) $x = \frac{31}{6}\pi$

$$\frac{31}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 5\pi = \frac{\pi}{6} + \pi + 4\pi$$

$$x = 30° + 180° + 2 \cdot 360° = 210° + 2 \cdot 360°$$

b) $x = -\frac{83}{4}\pi$

$$-\frac{83}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi - 20\pi$$

$$x = -135° - 10 \cdot 360° = 225° - 11 \cdot 360°$$

Wyrazimy poznane wcześniej wzory redukcyjne w mierze łukowej.

Twierdzenie

Wzory redukcyjne

Dla dowolnego kąta o mierze łukowej x zachodzą równości:

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

Przykład 5 ◀ zad. 6.10

Skorzystamy ze wzorów redukcyjnych i obliczymy wartość podanego wyrażenia.

$$\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{11\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{5\pi}{18}}$$

Rozwiązanie

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{4}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{5\pi}{18}=\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{18}\right)=\sin^2\frac{2\pi}{9}+\cos^2\frac{2\pi}{9}=1$$

$$\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{11\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{5\pi}{18}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}{1}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

D **Przykład 6** ◀ zad. 6.18

Udowodnimy podaną tożsamość.

$$\cos(3\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos 5\pi=\operatorname{tg}^2(\pi+x)\cdot\cos^2(\pi-x)$$

Rozwiązanie

Zaczynamy od wypisania założeń.

Wyrażenie $\operatorname{tg}(\pi+x)$ jest określone, jeśli $\pi+x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, czyli $x\neq-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Pozostałe wyrażenia są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Dowód

Przekształcamy najpierw lewą stronę podanej równości.

$$\mathrm{L}=\cos(3\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos 5\pi=\cos(\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\pi=$$
$$=-\cos x\cdot\cos x-\cos\pi=-\cos^2 x+1=\sin^2 x$$

Teraz przekształcamy prawą stronę podanej równości.

$$\mathrm{P}=\operatorname{tg}^2(\pi+x)\cdot\cos^2(\pi-x)=\operatorname{tg}^2 x\cdot(-\cos x)^2=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x=\sin^2 x$$

L = P, czyli podana równość jest tożsamością dla wszystkich $x\neq-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Koniec dowodu

Przykład 7 ◀ zad. 6.19

Obliczymy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej x, wiedząc, że $\cos x = -\frac{2}{3}$ oraz $\operatorname{tg} x > 0$.

Rozwiązanie

$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ $\longleftarrow \cos x < 0$ i $\operatorname{tg} x > 0$

$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9}$ $\longleftarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\longleftarrow \sin x < 0$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\longleftarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Odp.: $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż miarę łukową kąta 15°.

A. $\frac{\pi}{9}$ **B.** $\frac{\pi}{12}$ **C.** $\frac{\pi}{15}$ **D.** $\frac{\pi}{24}$

6.2. Wskaż wartość $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{6}$.

A. 1 **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

6.3. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt o mierze 3,5?

A. do pierwszej **B.** do drugiej **C.** do trzeciej **D.** do czwartej

6.4. Oblicz.

a) $23^\circ 20' + 46^\circ 40'$

b) $75^\circ 14' - 21^\circ 39'$

c) $137^\circ 27' - 15^\circ 19' + 27^\circ 52'$

d) $89^\circ 17' + 2 \cdot 35^\circ 14' - 109^\circ 15'$

6.5. Zamień miarę stopniową na miarę łukową.

a) 20°, 15°, 42°, 1°

b) 630°, 100°, 300°

6.6. Zamień miarę łukową na miarę stopniową.

a) $\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\pi, \frac{23}{18}\pi$ b) $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{5}, \frac{10\pi}{3}$ c) 2; 1,5; 0,7 d) 102; 1,25; 7,5

6.7. Zapisz podaną miarę kąta w postaci $\alpha + k \cdot 360°$, $k \in \mathbf{Z}$ i $0° \leqslant \alpha < 360°$.

a) $\frac{33\pi}{4}, \frac{51\pi}{9}, \frac{19\pi}{6}$ b) $-\frac{35\pi}{9}, -\frac{32\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$

6.8. Zapisz podaną miarę kąta w postaci $x + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ i $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) 405°, 1020°, 520° b) −405°, −30°, −780°

6.9. Oblicz: $\sin\frac{5\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{3\pi}{4}$.

6.10. Oblicz.

a) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{3}$

b) $\dfrac{4\sin\frac{4\pi}{3}\cos^2\frac{7\pi}{4} + 2\cos\frac{17\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}}$

c) $\dfrac{2\sin\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}}$

d) $\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)^2 - \left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)^2}{2\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{4} - 4\cos\frac{17\pi}{6}\sin\frac{4\pi}{3}}$

6.11. Narysuj w układzie współrzędnych kąty o miarach: $\pi, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$.

6.12. Porównaj kąty α i β.

a) $\alpha = \frac{\pi}{12}$, $\beta = 18°$

b) $\alpha = \frac{\pi}{16}$, $\beta = 14°$

c) $\alpha = \frac{\pi}{10}$, $\beta = 18°$

d) $\alpha = \frac{\pi}{7}$, $\beta = 20°$

6.13. Porównaj kąty α i β.

a) $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\beta = 40°$

b) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$, $\beta = 200°$

c) $\alpha = 0{,}6\pi$, $\beta = 108°$

d) $\alpha = \frac{3\pi}{11}$, $\beta = 50°$

6.14. Które z podanych kątów są ostre: $\alpha = 1$, $\beta = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}6\pi$, $\delta = \frac{37}{75}\pi$?

6.15. Określ, do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt o podanej mierze.

a) $\frac{4\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{6}$

b) $2\frac{1}{2}$, 0,7, $\frac{5\pi}{7}, \frac{9\pi}{8}$

6.16. Oblicz miarę łukową kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o podanej godzinie.

a) 6^{00} b) 13^{00} c) 16^{10} d) 9^{12}

6.17. Uporządkuj rosnąco podane kąty.

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = 0{,}24$, $\gamma = 10^\circ 32'$, $\delta = \frac{\pi}{22}$, $\nu = 1^\circ 12'$, $\varphi = 0{,}13$

D **6.18.** Udowodnij tożsamość $\frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$. Podaj konieczne założenia.

6.19. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej x spełniającej podane warunki.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x < 0$

b) $\cos x = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} x < 0$

c) $\operatorname{tg} x = 2$ i $\sin x < 0$

d) $\operatorname{tg} x = -1$ i $\sin x > 0$

6.20. W kole o promieniu 3,5 cm kąt środkowy oparty jest na łuku długości 2,8 cm. Oblicz miarę stopniową tego kąta z dokładnością do 1°.

6.21. Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 15 cm odpowiadającego kątowi środkowemu o podanej mierze.

a) 3,1 b) 2,4 c) 160° d) 300°

Prosto do matury

1. Dane są kąty $\alpha = 1{,}75$ oraz $\beta = 100^\circ$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\alpha < \beta$ **B.** $\alpha > \beta$ **C.** $\alpha \geqslant \beta$

2. Podaj miary łukowe kątów: 36°, 200°, 280°.

3. Zapisz kąt o mierze −1044° w postaci $x + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ i $0 \leqslant x < 2\pi$.

4. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych: $\sin\frac{16\pi}{3}$, $\cos\frac{53\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$.

D **5.** Udowodnij tożsamość. Podaj odpowiednie założenia.

$$\cos(\pi - x)\cos(\pi + x) - \sin(2\pi - x)\sin(2\pi + x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

7. Wykresy funkcji trygonometrycznych

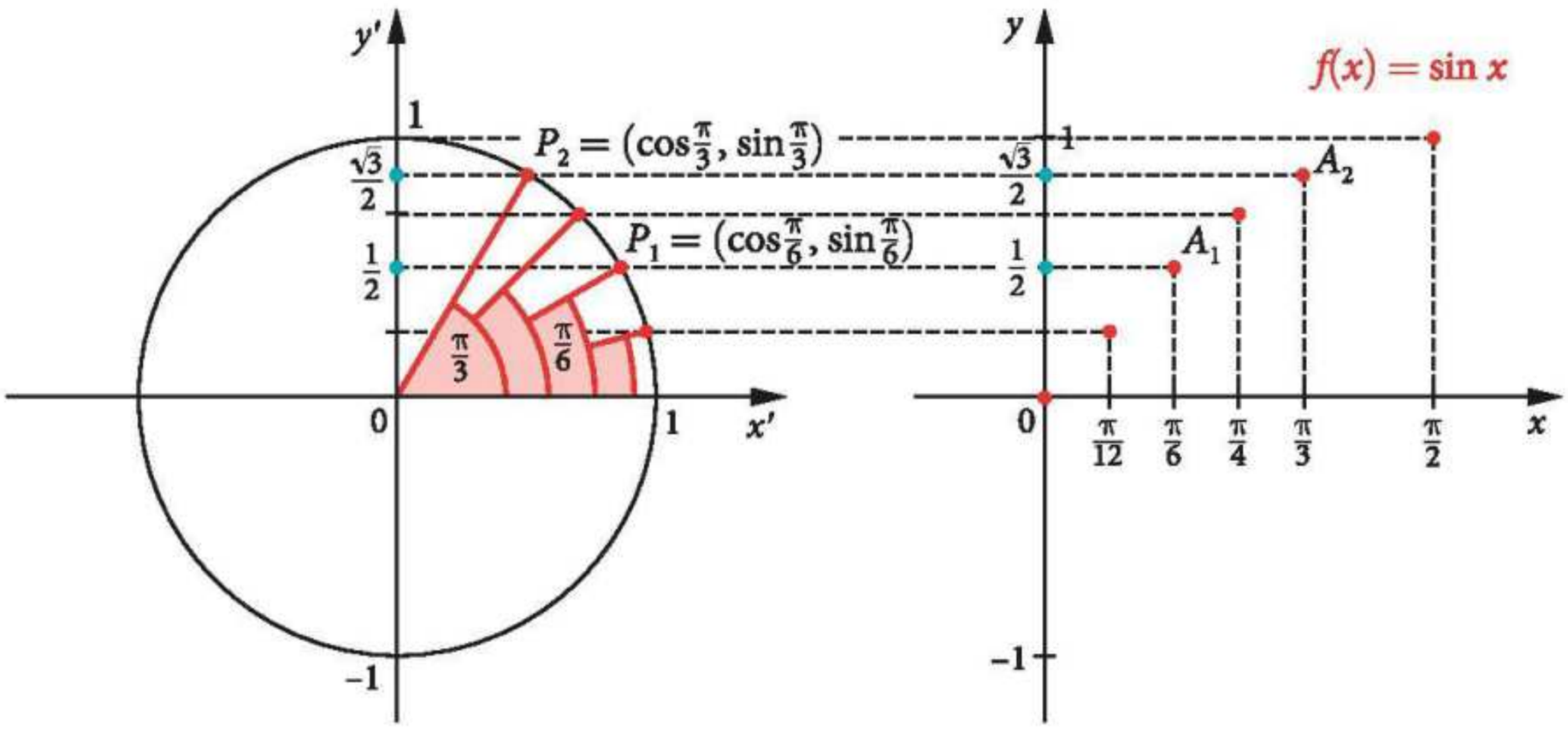
Umiejętności:

- rysowanie wykresów funkcji sinus, cosinus i tangens
- przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych
- rozwiązywanie elementarnych równań i nierówności trygonometrycznych

Wykres funkcji $f(x) = \sin(x)$

Przyjrzyjmy się rysunkowi. W układzie współrzędnych $x'Oy'$ zaznaczamy kąty, a w układzie xOy punkty wykresu funkcji $f(x) = \sin x$.

Przyjęliśmy zaokrąglenie $\pi \approx 3$, zatem $\frac{\pi}{3} \approx 1$, $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3}{2}$ itd.

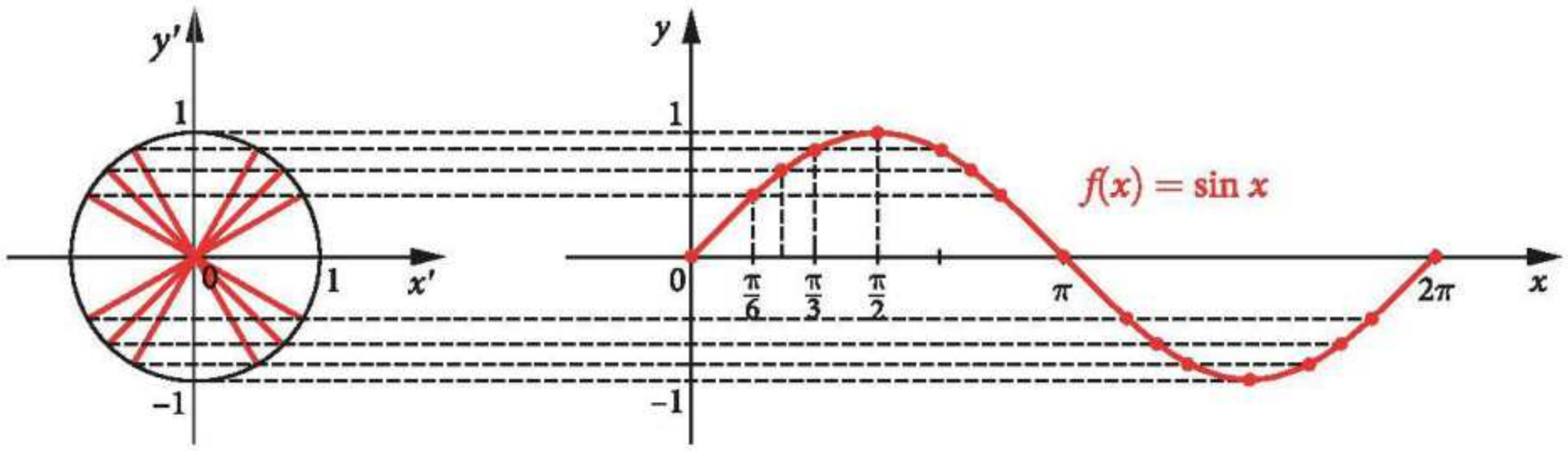


Punkt $A_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, ponieważ jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu P_1 wybranego na ramieniu końcowym kąta $\frac{\pi}{6}$ (układ $x'Oy'$, $|OP_1| = 1$).

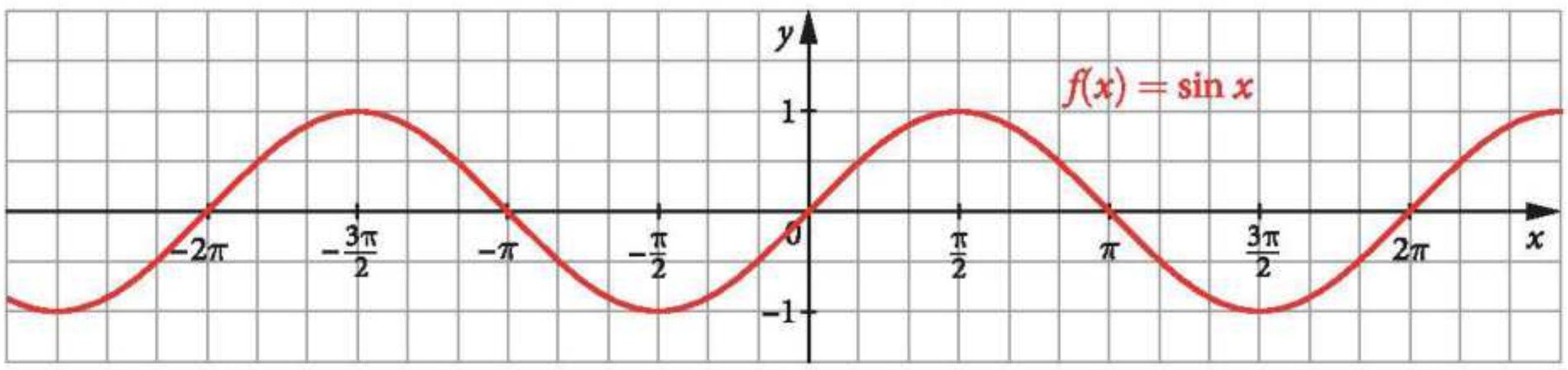
Podobnie – punkt $A_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, bo jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu P_2 wybranego na ramieniu końcowym kąta $\frac{\pi}{3}$.

Im więcej kątów odłożymy w układzie $x'Oy'$, tym więcej punktów należących do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ można zaznaczyć w układzie xOy.

Poniżej prezentujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla kątów z przedziału $\langle 0;\ 2\pi\rangle$.



Funkcja $f(x) = \sin x\ (x \in \mathbf{R})$ jest funkcją okresową o okresie zasadniczym 2π, zatem narysowany fragment wykresu będzie się powtarzał nieskończenie wiele razy.



Krzywą będącą wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ nazywamy **sinusoidą**.

Zamiast zwrotu: krzywa, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$, często używamy krótszego: krzywa o równaniu $y = f(x)$.

Opiszemy własności funkcji $f(x) = \sin x$.

- $D = \mathbf{R},\ ZW = \langle -1;\ 1\rangle$
- Funkcja ma wartość największą równą 1 dla każdego $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

  Funkcja ma wartość najmniejszą równą -1 dla każdego $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(2k\pi;\ \pi + 2k\pi)$ oraz ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$.

Przypomnijmy:
Zapis $(2k\pi;\ \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$ oznacza rodzinę przedziałów.

- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest:

  rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$,

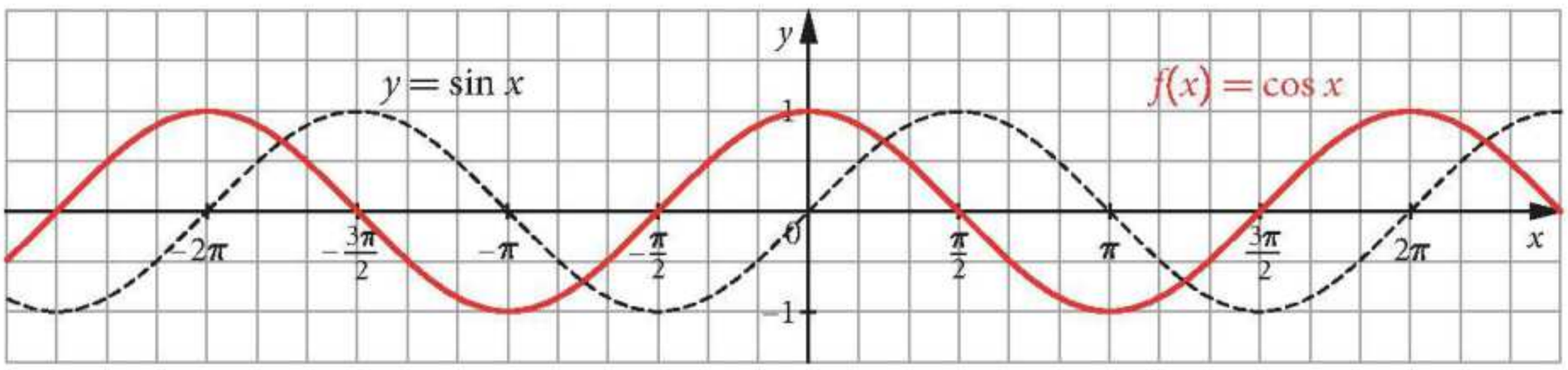
  malejąca w każdym z przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Równanie $\sin x = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \langle -1;\ 1\rangle$, a dla $m \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty)$ nie ma rozwiązań.

Wykres funkcji $f(x) = \cos(x)$

Do narysowania wykresu funkcji $f(x) = \cos x$ skorzystamy ze wzoru redukcyjnego:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Wykres funkcji $f(x) = \cos x$, tzw. **cosinusoidę**, otrzymamy zatem po przesunięciu sinusoidy $y = \sin x$ o wektor $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, czyli o $\frac{\pi}{2}$ w lewo wzdłuż osi x.

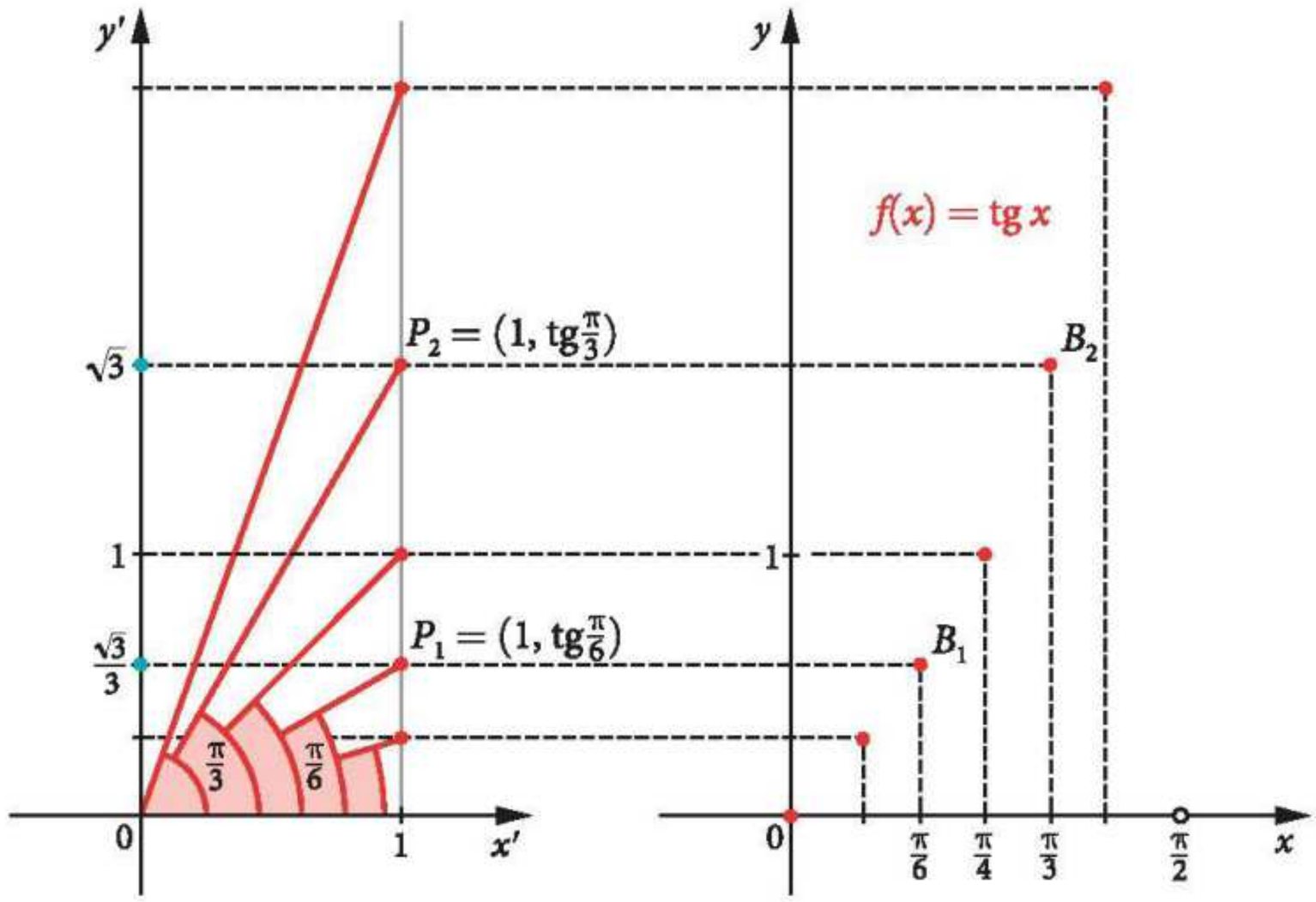


Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \cos x$ opiszemy jej własności.

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -1; 1\rangle$
- Funkcja ma wartość największą równą 1 dla każdego $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
  Funkcja ma wartość najmniejszą równą -1 dla każdego $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ oraz ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest:
  rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$,
  malejąca w każdym z przedziałów postaci $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Równanie $\cos x = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \langle -1; 1\rangle$, a dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ nie ma rozwiązań.

Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

Ponownie umieszczamy obok siebie dwa układy współrzędnych. W układzie współrzędnych $x'Oy'$ zaznaczamy kąty, a w układzie xOy punkty wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$. Tym razem skorzystamy z tego, że jeżeli wybierzemy punkt P na ramieniu końcowym kąta α tak, aby jego pierwsza współrzędna była równa 1, to jego druga współrzędna jest równa tangensowi kąta α.

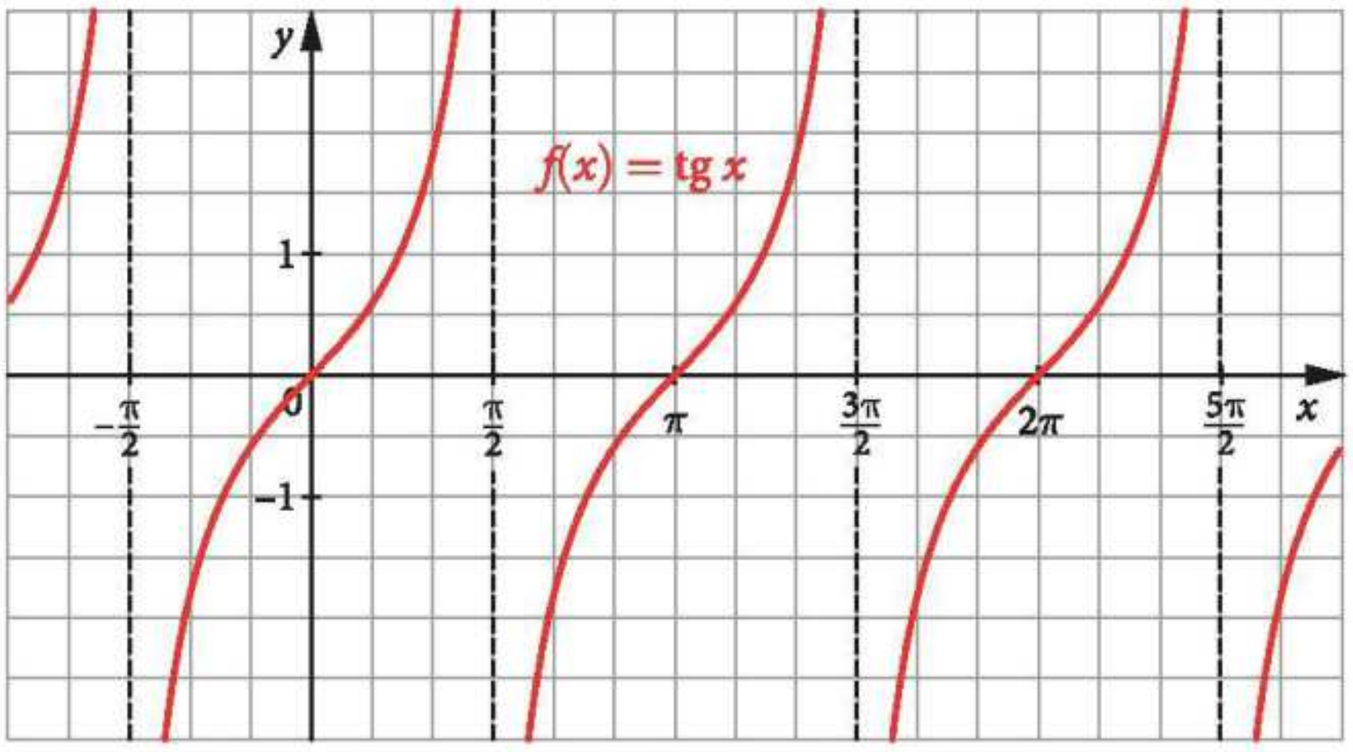


Punkt $B_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$, ponieważ jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu P_1 na ramieniu końcowym kąta $\frac{\pi}{6}$. Podobnie $B_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$.

Na rysunku zaznaczyliśmy kilka punktów dla kątów z I ćwiartki. Wartości tangensa dla coraz większych kątów ostrych są coraz większe. Im bardziej do dodatniej półosi y' zbliżają się ramiona wodzące kątów, tym bliżej prostej o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$ znajdują się odpowiadające tym kątom punkty wykresu. Tę prostą będziemy nazywać **asymptotą pionową** wykresu.

Do narysowania następnego fragmentu wykresu można wykorzystać kąty z IV ćwiartki i fakt, że kąty te są przyporządkowane liczbom z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest π, zatem otrzymany dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ wykres powtarzamy w pozostałych przedziałach.



Krzywą będącą wykresem funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ nazywamy **tangensoidą**.
Opiszemy własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.

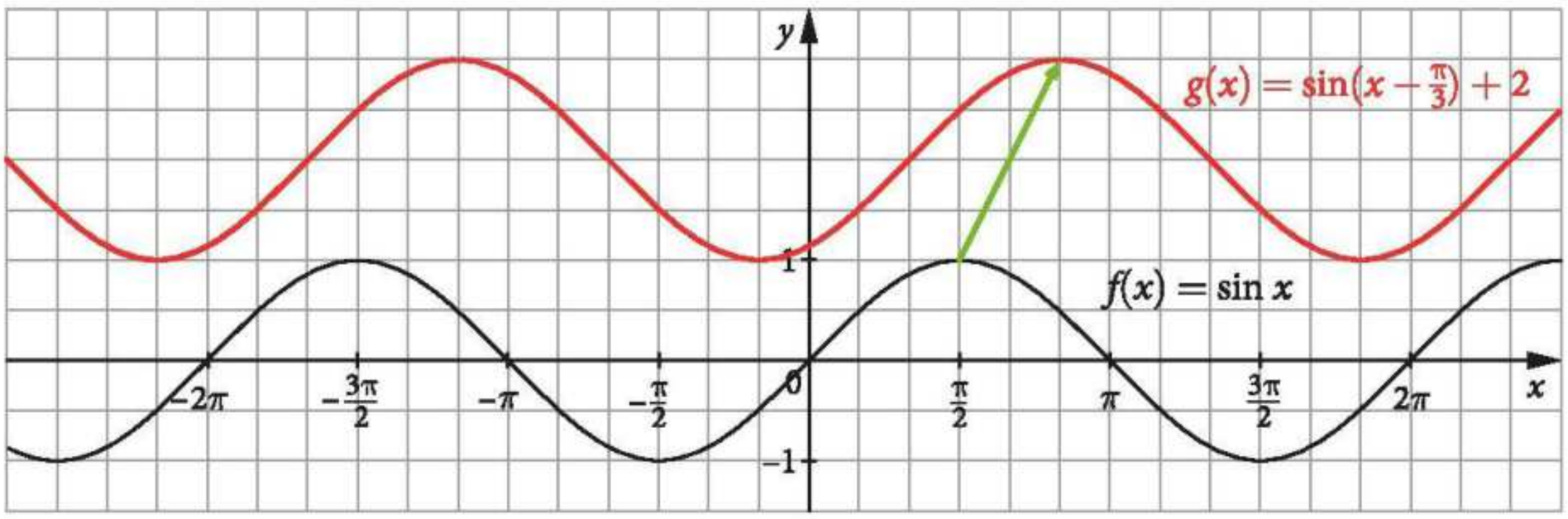
- Dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Zbiorem wartości jest zbiór $\mathbf{R}$.
- Proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, są asymptotami pionowymi wykresu.
- Funkcja nie ma wartości największej i nie ma wartości najmniejszej.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Równanie $\operatorname{tg} x = m$ ma dla dowolnego $m \in \mathbf{R}$ nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 1 ◀ zad. 7.4, 7.5

Narysujemy wykres funkcji $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji g otrzymamy w wyniku przesunięcia sinusoidy o równaniu $y = \sin x$ o wektor $\left[\frac{\pi}{3}, 2\right]$, czyli o $\frac{\pi}{3}$ w prawo wzdłuż osi x i o 2 w górę wzdłuż osi y.



Przykład 2 ◀ zad. 7.12

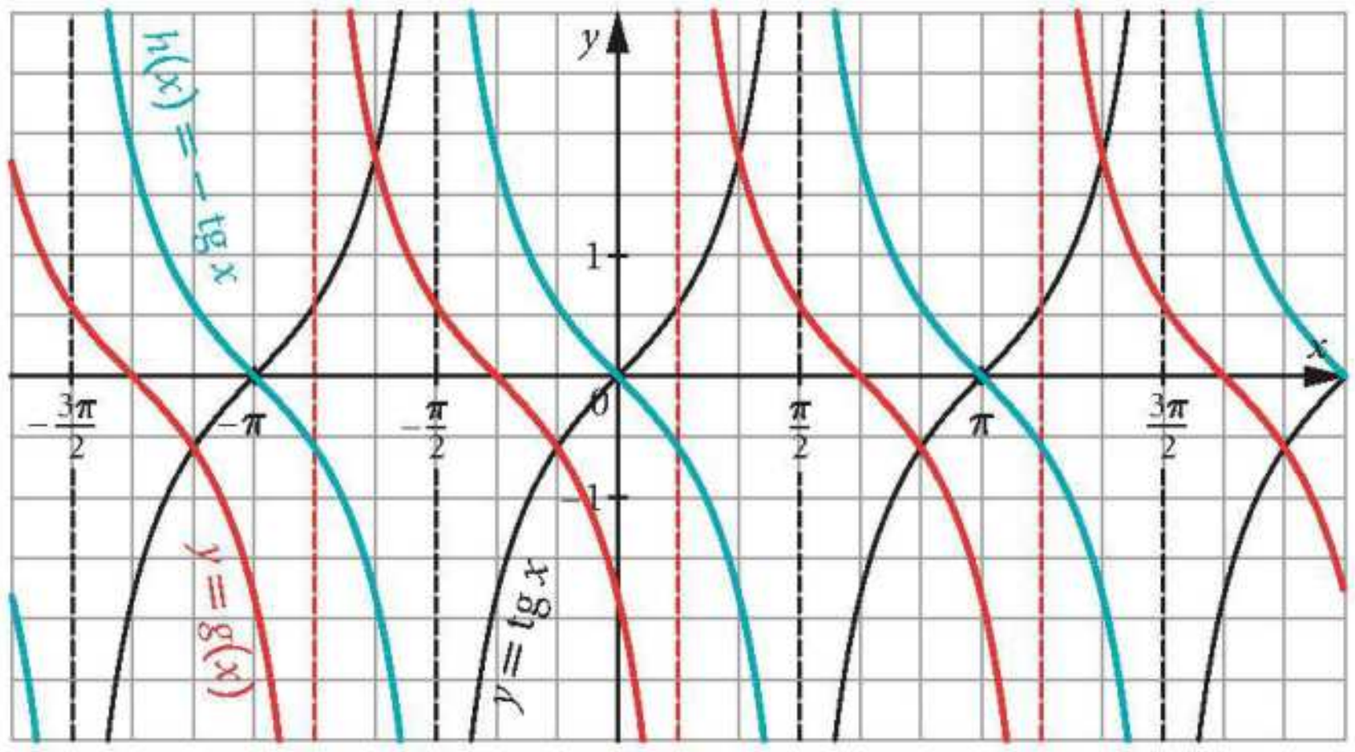
Narysujemy wykres funkcji $g(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ i wyznaczymy jej miejsca zerowe oraz równania asymptot pionowych wykresu.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy zadanie w dwóch krokach.

Krok 1: Rysujemy wykres funkcji $h(x) = -\operatorname{tg} x$ (obraz wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w symetrii względem osi x).

Krok 2: Przesuwamy otrzymany w poprzednim kroku wykres o wektor $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, czyli o $\frac{\pi}{3}$ w lewo wzdłuż osi x.



Z wykresu odczytujemy, że dla funkcji $g(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$:

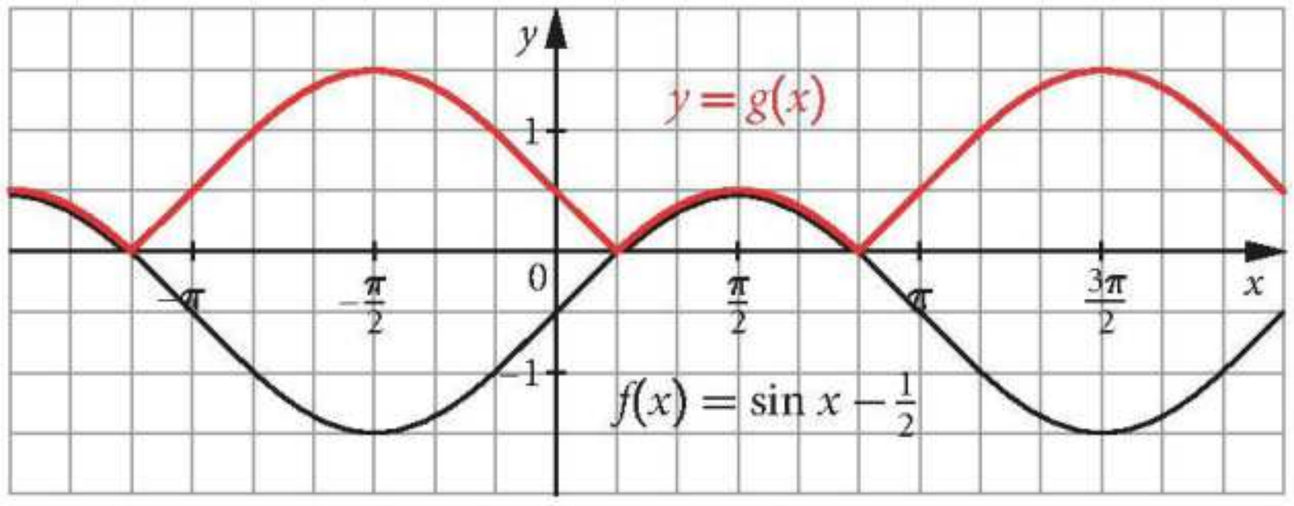
- miejscami zerowymi są liczby postaci $-\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$,
- asymptoty pionowe wykresu mają równania postaci $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Przykład 3 ◀ zad. 7.13

Narysujemy wykres funkcji $g(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$.

Rozwiązanie

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$. Aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$, przekształcamy przez symetrię względem osi x te fragmenty krzywej o równaniu $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$, które leżą poniżej osi x.



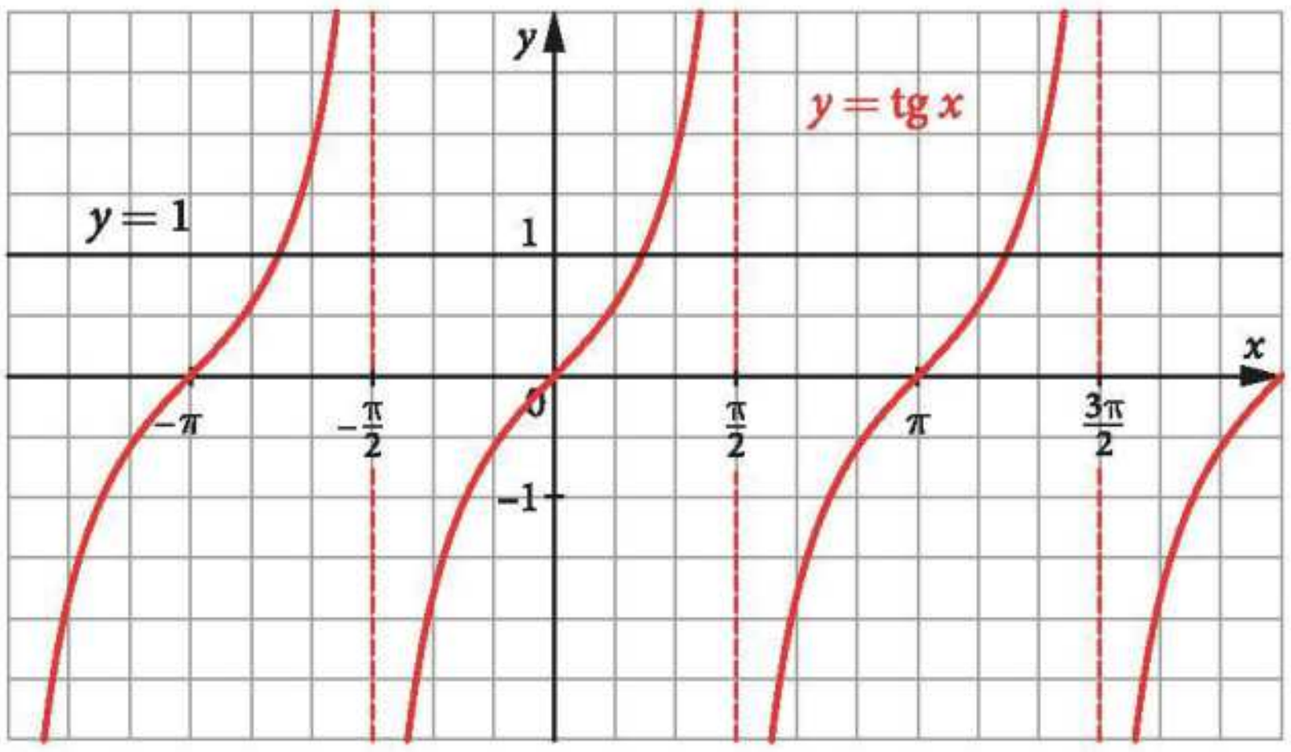
Elementarne równania i nierówności trygonometryczne

Równanie, w którym niewiadoma występuje tylko jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy **równaniem trygonometrycznym**. Analogicznie – nierówność, w której niewiadoma występuje tylko jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy **nierównością trygonometryczną**.

Przykład 4

Odczytamy z wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = 1$.

Rozwiązanie



← prowadzimy prostą k o równaniu $y = 1$

← odczytujemy pierwsze współrzędne punktów przecięcia prostej k z wykresem

Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Z rysunku możemy odczytać trzy z nich: $x = -\frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$ oraz $x = \frac{5}{4}\pi$.

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Wystarczy więc odczytać jedno rozwiązanie w którymś z tych przedziałów, np. w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, bo pozostałe rozwiązania będą się różniły o wielokrotność okresu zasadniczego tangensa.

Wykres funkcji rosnącej (malejącej) może mieć z prostą równoległą do osi x co najwyżej jeden punkt wspólny.

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby postaci $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

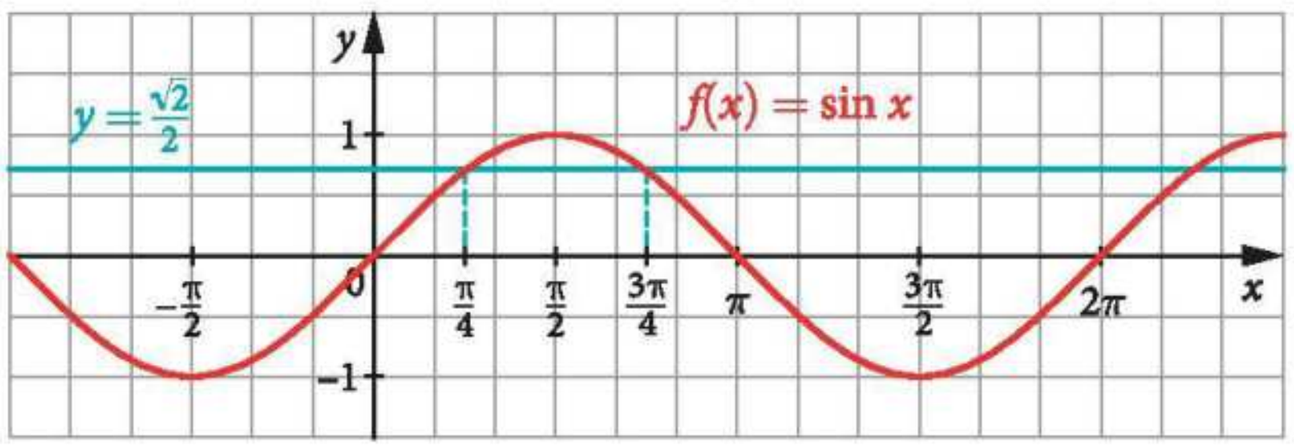
Każda funkcja trygonometryczna jest okresowa, zatem jeżeli ograniczymy się do rozwiązania równania trygonometrycznego w przedziale o długości okresu zasadniczego, to wyznaczymy również pozostałe pierwiastki równania – będą się one różniły o wielokrotność okresu zasadniczego.

Wniosek

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = a$ są liczby postaci $x = x_0 + k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbf{Z}$.

Przykład 5

Odczytamy z wykresu funkcji $y = \sin x$ rozwiązania równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



⟵ prowadzimy prostą o równaniu $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

W przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ rozwiązaniami równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ są liczby $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{3}{4}\pi$.

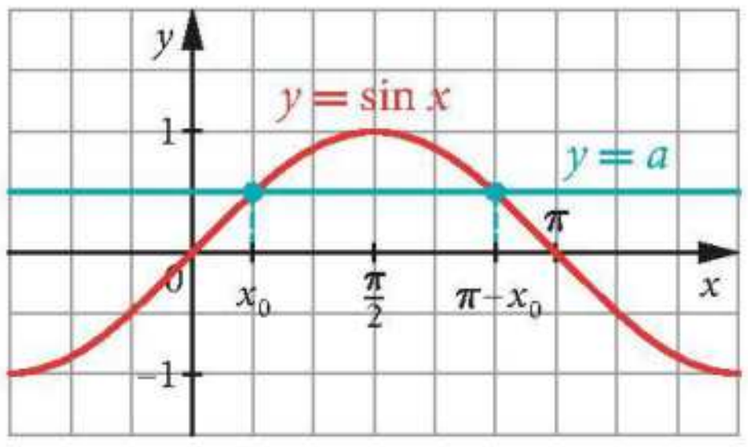
Zatem wszystkie rozwiązania tego równania są postaci $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Odp.: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

Podsumujmy:

- Równanie $\sin x = a$ ma rozwiązania pod warunkiem, że $-1 \leqslant a \leqslant 1$.
- Rozwiązania równań: $\sin x = -1$, $\sin x = 1$, $\sin x = 0$ zostały już odczytane wcześniej (odpowiednio: argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości najmniejsze, wartości największe oraz miejsca zerowe funkcji).
- Dla $a \in (-1; 1) - \{0\}$ równanie $\sin x = a$ ma w przedziale o długości okresu zasadniczego dwa rozwiązania.

Przyjrzyjmy się wykresowi sinusa w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.



Dla $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ równanie $\sin x = a$ (gdzie $a \in \langle -1; 1 \rangle$) ma jedno rozwiązanie (sinus jest w tym przedziale funkcją rosnącą), dla $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ również jedno (sinus jest w tym przedziale funkcją malejącą). Jeżeli pierwsze z tych rozwiązań oznaczymy x_0, to drugie jest równe $\pi - x_0$.

Wniosek

Rozwiązaniami równania $\sin x = a$ przy założeniu, że $-1 \leqslant a \leqslant 1$, są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbf{Z}$.

Cosinusoidę otrzymujemy po przesunięciu sinusoidy w lewo wzdłuż osi x o $\frac{\pi}{2}$, zatem rozwiązania równania $\cos x = a$ odczytamy z przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$.

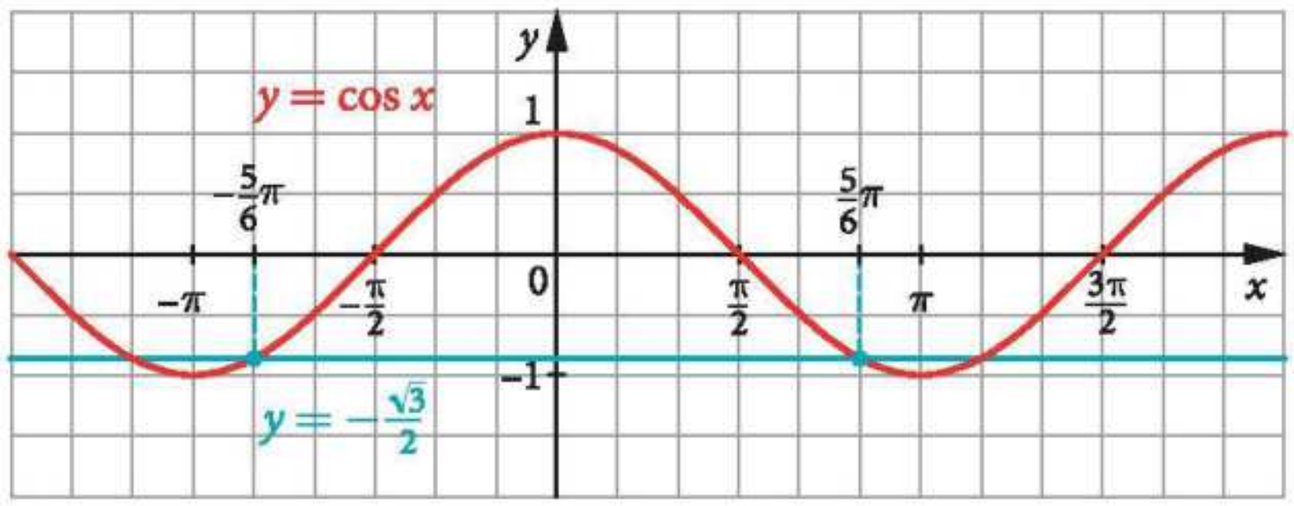
Wniosek

Rozwiązaniami równania $\cos x = a$ przy założeniu, że $-1 \leqslant a \leqslant 1$, są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbf{Z}$.

Przykład 6 ◂ zad. 7.21

Rozwiążemy równanie $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie



W przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ rozwiązaniami równania są liczby $\frac{5}{6}\pi$ i $-\frac{5}{6}\pi$. Zatem wszystkie rozwiązania tego równania są postaci $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Odp.: $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Przykład 7 ◀ zad. 7.22

Rozwiążemy równanie $\sin x = 0{,}4384$.

Rozwiązanie

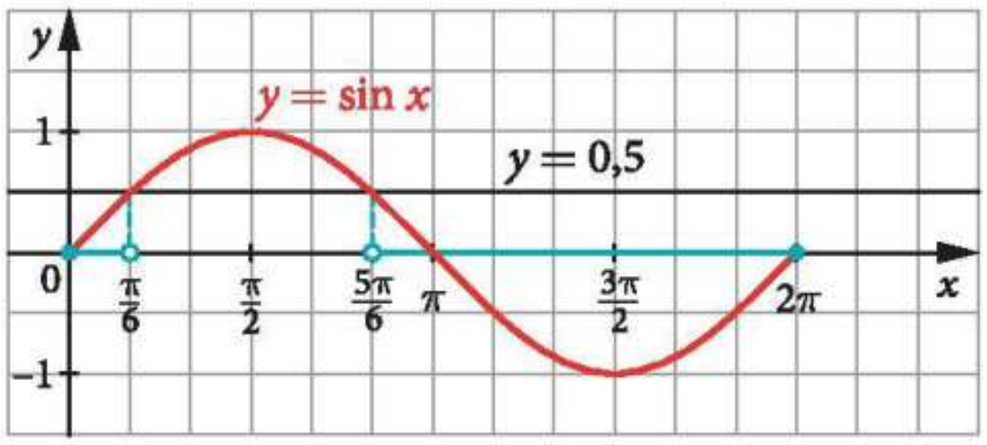
$0{,}4384 \approx \sin 26^\circ$ i $26^\circ = \frac{13\pi}{90}$

Odp.: $x \approx \frac{13}{90}\pi + 2k\pi$ lub $x \approx \frac{77}{90}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

Przykład 8 ◀ zad. 7.23

Narysujemy wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ i odczytamy z niego, które argumenty z tego przedziału spełniają nierówność $\sin x < 0{,}5$.

Rozwiązanie



⟵ prowadzimy prostą o równaniu $y = 0{,}5$
⟵ wyznaczamy rozwiązania równania $\sin x = 0{,}5$

Poprowadzona prosta przecina ten fragment sinusoidy w dwóch punktach – dla $x = \frac{\pi}{6}$ oraz $x = \frac{5\pi}{6}$. Z wykresu odczytujemy, że $\sin x < 0{,}5$ dla $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right\rangle$.

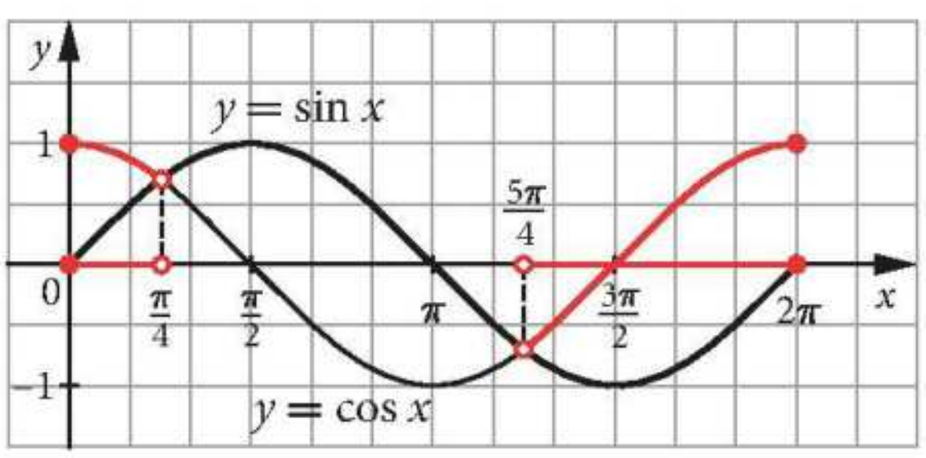
Odp.: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right\rangle$

Przykład 9 ◀ zad. 7.24

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos x$. Odczytamy, które argumenty z przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$ spełniają nierówność $\cos x > \sin x$.

Rozwiązanie

Fragmenty cosinusoidy leżące w rozpatrywanym przedziale powyżej sinusoidy zaznaczone są na rysunku kolorem czerwonym. Na osi x odczytujemy argumenty spełniające żądaną nierówność.

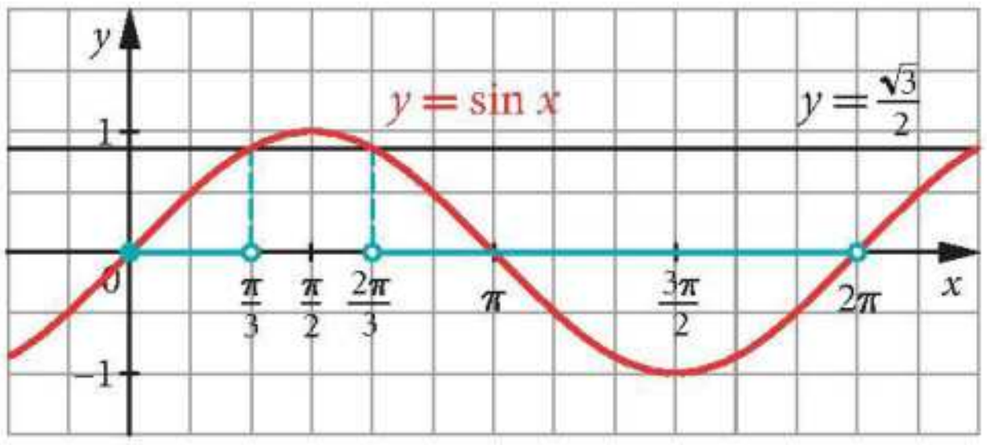


Odp.: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right\rangle$

Przykład 10 ◀ zad. 7.25

Rozwiążemy nierówność $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

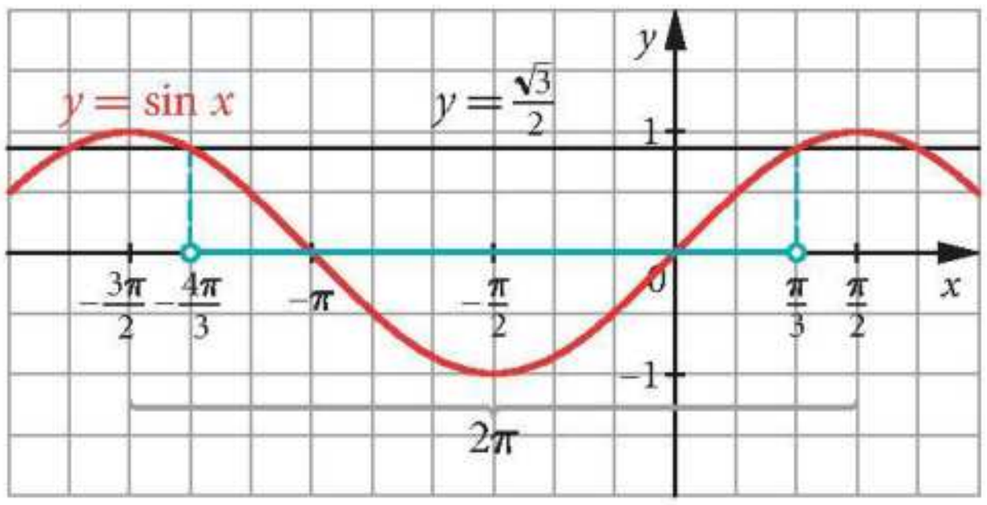
Rozwiązanie



← opisujemy najpierw rozwiązania nierówności np. w przedziale $\langle 0;\ 2\pi)$ lub jakimkolwiek innym przedziale o długości równej okresowi zasadniczemu funkcji

W przedziale $\langle 0;\ 2\pi)$ rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby należące do sumy przedziałów $\left\langle 0;\ \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi;\ 2\pi\right\rangle$. Zatem wszystkie rozwiązania tej nierówności można zapisać w postaci $\left\langle 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi\right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.

Rozwiązania tej nierówności można zapisać na wiele sposobów. Gdybyśmy na przykład rozwiązali na początku nierówność w przedziale $\left\langle -\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, otrzymalibyśmy rozwiązania zapisane w postaci $x \in \left(-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$.



Odp.: $x \in \left(-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż funkcję, która jest rosnąca w przedziale $\langle \pi;\ 2\pi\rangle$.

A. $y = \sin x$ **C.** $y = \sin(x - \pi)$

B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **D.** $y = \sin(x + 2\pi)$

7.2. Wskaż okres zasadniczy funkcji $y = |\cos x|$.

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** π **C.** 2π **D.** 4π

7.3. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

7.4. Narysuj wykres funkcji dla $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.

a) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $y = \cos x - \frac{1}{2}$

c) $y = \operatorname{tg} x + 1$

d) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7.5. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = -\cos x + \frac{1}{2}$

b) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 3 - \cos x$

d) $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

7.6. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

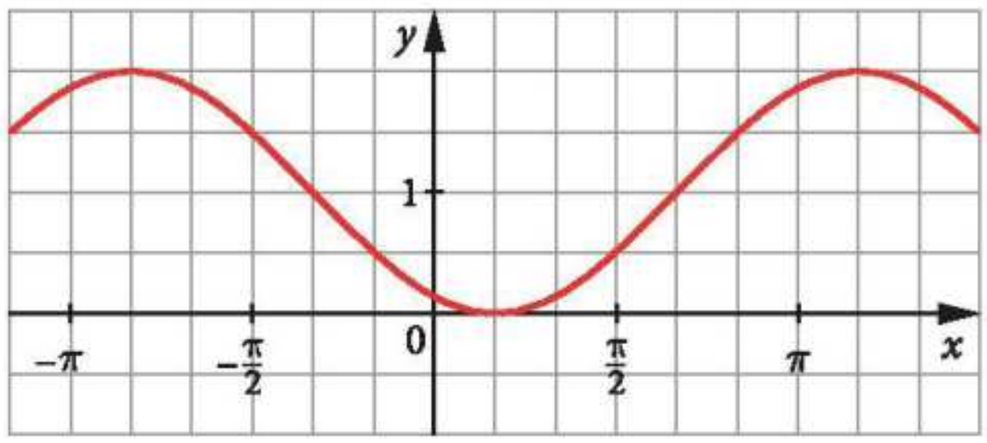
a) $f(x) = \sin x + 1$

b) $f(x) = -\sin x$

c) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x) = \sin(x + \pi) - 1$

7.7. Funkcja trygonometryczna przedstawiona na wykresie ma okres zasadniczy 2π. Podaj przykładowy wzór tej funkcji.



7.8. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

7.9. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale. Dla których argumentów są przyjmowane te wartości?

a) $f(x) = \sin x \qquad x \in \left\langle 0; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$

b) $f(x) = \sin x \qquad x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{7}{4}\pi \right\rangle$

c) $f(x) = \cos x \qquad x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\rangle$

7.10. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w podanym przedziale. Dla których argumentów są przyjmowane te wartości?

a) $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2} \qquad x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$

b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \qquad x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \pi \right\rangle$

7.11. Narysuj wykres funkcji i odczytaj jej miejsca zerowe.

a) $y = \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

b) $y = \cos x + \frac{1}{2}$

c) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$

7.12. Narysuj wykres funkcji i podaj równania asymptot pionowych wykresu.

a) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

7.13. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = -|\sin x|$

b) $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right|$

c) $y = |\operatorname{tg} x - 1|$

d) $y = 1 - |\cos x|$

* **7.14.** Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos^2 x - |\cos x|}{\cos x}$ w przedziale $\langle -\pi;\ 3\pi\rangle$ i podaj argumenty, dla których wartości tej funkcji są równe $\frac{1}{2}$.

7.15. Na podstawie odpowiednich wykresów ustal znak różnicy.

a) $\sin 2{,}5 - \sin 3$

b) $\cos 4 - \cos 3$

c) $\sin(-4) - \sin(-1)$

d) $\cos(-5) - \cos(-2)$

e) $\cos 7 - \cos(-0{,}5)$

f) $\sin 8{,}5 - \sin 1{,}5$

7.16. Na podstawie odpowiednich wykresów ustal znak liczby.

a) $\sin 2 - \cos 4$

b) $\cos(-3) - \sin(-4)$

c) $\cos 8 - \sin 4{,}5$

d) $\sin 2{,}5 + \cos(-2{,}5)$

e) $\cos(-5) + \cos(-2{,}5)$

f) $\cos 1 - \sin 7$

7.17. Skorzystaj z odpowiedniego wykresu funkcji i ustaw podane liczby od najmniejszej do największej.

a) $\sin 3,\ \sin(-4),\ \sin 5,\ \sin\frac{1}{2}$

b) $\cos 2,\ \cos 6,\ \cos 3,\ \cos(-1)$

* **7.18.** Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - |\sin x|)$

D **7.19.** Czy funkcja $f(x) = \sin x + \cos x + 2$ ma miejsca zerowe? Odpowiedź uzasadnij.

7.20. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = 1$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.21. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ e) $2\cos x + 1 = 0$

b) $\cos x = -1$ d) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ f) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

7.22. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = 0{,}829$ c) $\operatorname{tg} x = 1{,}327$ e) $\cos x = -0{,}515$

b) $\cos x = 0{,}342$ d) $\sin x = -0{,}6428$ f) $\operatorname{tg} x = -11{,}43$

7.23. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ b) $2\cos x < \sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x > 1$ d) $6\cos x + 3\sqrt{2} \leqslant 0$

7.24. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = -\cos x$ i odczytaj, dla jakich argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ prawdziwa jest nierówność $\sin x + \cos x \leqslant 0$.

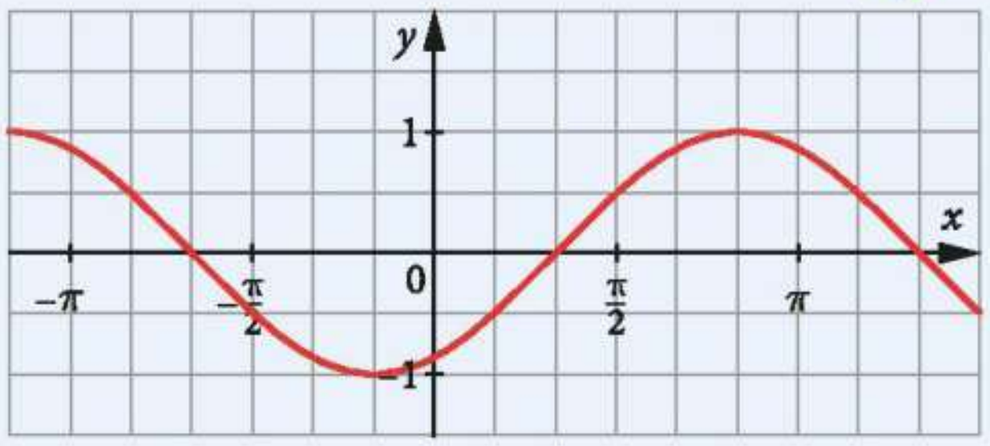
7.25. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x + 1 > 0$ b) $\sqrt{2}\cos x \leqslant 1$ c) $\operatorname{tg} x > -1$ d) $2\cos x + 1 > 0$

* **7.26.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0; m \rangle$ dokładnie jedno rozwiązanie?

Prosto do matury

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji trygonometrycznej f o okresie zasadniczym 2π.
Oceń prawdziwość podanych zdań.



Funkcja f może być opisana za pomocą wzoru

A. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. **C.** $f(x) = \cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$.

2. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2}$ w przedziale $\left\langle \frac{7\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$. Podaj argumenty, dla których są przyjmowane te wartości.

3. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x = -0{,}7265$ dla $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.

4. Rozwiąż nierówność $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

5. Rozwiąż równanie $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

8. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Umiejętności:

- stosowanie wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów
- stosowanie wzorów na sinus, cosinus i tangens kąta podwojonego

Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów

Wzory podane w twierdzeniu wyrażają związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta $\alpha + \beta$ lub kąta $\alpha - \beta$ a funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β.

Twierdzenie

Dla dowolnych kątów α i β prawdziwe są wzory:

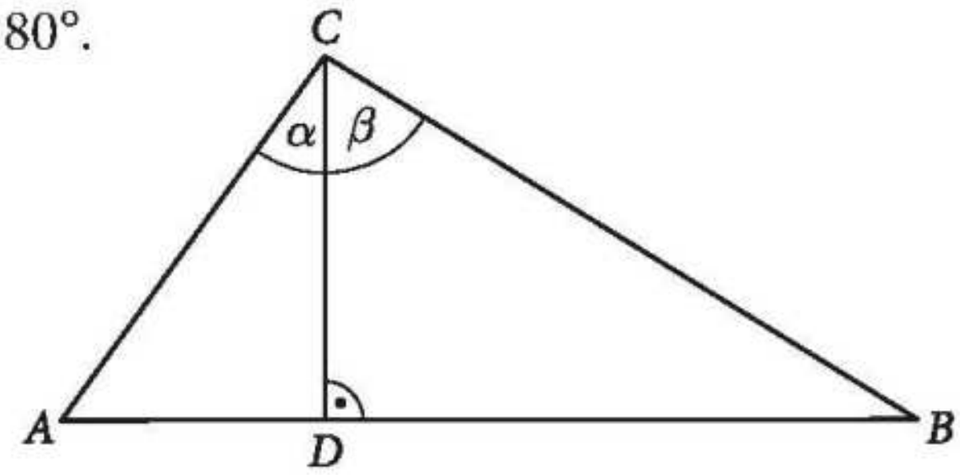
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Dowód

Wzory redukcyjne umożliwiają wyrażenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą funkcji trygonometrycznych odpowiednich kątów ostrych. Wyprowadzenie wzorów podanych w twierdzeniu ograniczymy więc do sytuacji, w której kąty α i β są ostre. Ponadto będziemy korzystać z własności trójkąta na płaszczyźnie, zatem kąty α i β przedstawimy w mierze stopniowej.

Skoro α i β są kątami ostrymi, to $\alpha + \beta < 180°$.

Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, w których jeden z kątów ma miarę $\alpha + \beta$. Rozważmy trójkąt ABC przedstawiony na rysunku. Obliczymy jego pole dwoma sposobami.



(1) $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\alpha + \beta)$

(2) $P_{ABC} = P_{ADC} + P_{BDC} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |DC| + \frac{1}{2}|DB| \cdot |DC|$

Zauważmy, że:

$|AD| = |AC|\sin\alpha$ $\qquad$ $|DB| = |BC|\sin\beta$

$|DC| = |BC|\cos\beta$ $\qquad$ $|DC| = |AC|\cos\alpha$

Zatem, ze wzoru (2), $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \sin\alpha \cdot |BC| \cos\beta + \frac{1}{2}|BC| \sin\beta \cdot |AC| \cos\alpha$. Stąd:

(3) $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$

Porównujemy równości (1) i (3), i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$$

czyli

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzór na **sinus sumy dwóch kątów**. Skorzystamy z niego przy dowodzeniu następnych wzorów.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\big(\alpha + (-\beta)\big) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \qquad \longleftarrow \sin(-\beta) = -\sin\beta,\ \cos(-\beta) = \cos\beta$$

Zatem:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

Otrzymaliśmy wzór na **sinus różnicy dwóch kątów**.

Podobnie wyprowadzamy wzór na **cosinus sumy dwóch kątów**.

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\big(90^\circ - (\alpha + \beta)\big) = \qquad \longleftarrow \sin(90^\circ - \gamma) = \cos\gamma$$
$$= \sin\big((90^\circ - \alpha) - \beta\big) = \qquad \longleftarrow \sin(\delta - \beta) = \sin\delta \cos\beta - \cos\delta \sin\beta$$
$$= \sin(90^\circ - \alpha)\cos\beta - \cos(90^\circ - \alpha)\sin\beta = \qquad \longleftarrow \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Zatem:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Wyprowadzenie wzoru na **cosinus różnicy dwóch kątów** pozostawiamy jako zadanie.

Koniec dowodu

Przykład 1

Obliczymy wartości funkcji sinus oraz cosinus kątów 75° i 15°.

Rozwiązanie

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$
$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Odp.: $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Przykład 2 ◂ zad. 8.5, 8.6

Obliczymy $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$ dla α i β takich, że $0° < \alpha < 90°$, $180° < \beta < 270°$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ i $\sin\beta = -\frac{3}{5}$.

Rozwiązanie

Obliczamy wartości $\sin\alpha$ oraz $\cos\beta$ występujące w potrzebnych nam wzorach.

- $\sin^2\alpha + \frac{1}{16} = 1$ ⟵ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

  $\sin^2\alpha = \frac{15}{16}$, stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ⟵ $0° < \alpha < 90°$, więc $\sin\alpha > 0$

- $\frac{9}{25} + \cos^2\beta = 1$

  $\cos^2\beta = \frac{16}{25}$, stąd $\cos\beta = -\frac{4}{5}$ ⟵ $180° < \beta < 270°$, więc $\cos\beta < 0$

Zatem:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-3-4\sqrt{15}}{20}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-4+3\sqrt{15}}{20}$$

Odp.: $\sin(\alpha+\beta) = \frac{-3-4\sqrt{15}}{20}$, $\cos(\alpha+\beta) = \frac{-4+3\sqrt{15}}{20}$

Tangens sumy i tangens różnicy kątów

Korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, można wyprowadzić wzory na tangens sumy i tangens różnicy kątów.

Twierdzenie

Dla dowolnych kątów α i β prawdziwe są wzory:

- $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Udowodnimy pierwszy z tych wzorów.

Dowód

Lewa strona wzoru jest określona, gdy $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Prawa strona jest określona, gdy $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ i $1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta \neq 0$.

Zastanówmy się, dla jakich kątów spełniony jest ostatni z wymienionych warunków.

Zauważmy, że gdy $\operatorname{tg}\alpha = 0$ lub $\operatorname{tg}\beta = 0$, to $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \neq 0$.

Przyjmijmy, że $\operatorname{tg}\beta \neq 0$, czyli $\beta \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Warunek $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \neq 0$ można teraz zapisać w postaci $\operatorname{tg}\alpha \neq \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Stąd:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \neq \frac{\cos\beta}{\sin\beta}, \text{ czyli } \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \neq 0, \text{ więc } \cos(\alpha+\beta) \neq 0$$

Zatem $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ten warunek został już uwzględniony jako założenie dotyczące lewej strony wzoru.

Ostatecznie wszystkie założenia konieczne w tym wzorze tworzą następujący układ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbf{Z} \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad l \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Przekształcamy lewą stronę wzoru.

$$\mathrm{L} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \quad \longleftarrow \text{stosujemy wzory na sinus i cosinus sumy kątów}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \quad \longleftarrow \cos\alpha\cos\beta \neq 0, \text{ więc dzielimy każdy składnik przez } \cos\alpha\cos\beta$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Koniec dowodu

Wyprowadzenie wzoru na **tangens różnicy dwóch kątów** pozostawiamy jako zadanie do samodzielnego wykonania.

Przykład 3 ◂ zad. 8.7

Dane są kąty α i β takie, że $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$ i $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{2}$. Obliczymy wartość funkcji tangens kąta $\alpha - \beta$.

Rozwiązanie

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{5} - (-\sqrt{2})}{1 + \sqrt{5}\cdot(-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(1+\sqrt{10})}{(1-\sqrt{10})(1+\sqrt{10})} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+5\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{1-10} = -\frac{3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{9} = -\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$$

Odp.: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

Za pomocą wzorów na funkcje trygonometryczne sumy kątów możemy wyprowadzić wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\ 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Twierdzenie

Dla dowolnego kąta α prawdziwe są wzory:

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Dla kątów $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ prawdziwy jest wzór:

- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Można skorzystać z jedynki trygonometrycznej i wyrazić $\cos 2\alpha$ za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej zmiennej α:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

lub

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Przykład 4 ◀ zad. 8.7

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{7}{25}$. Obliczymy $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

Rozwiązanie

Obliczamy wartość $\cos\alpha$.

$$\frac{49}{625} + \cos^2\alpha = 1 \qquad \longleftarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{576}{625},\ \text{stąd}\ \cos\alpha = \frac{24}{25} \qquad \longleftarrow \cos\alpha > 0$$

Zatem:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{7}{25}\cdot\frac{24}{25} = \frac{336}{625}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{576}{625} - \frac{49}{625} = \frac{527}{625}$$

Odp.: $\sin 2\alpha = \frac{336}{625}$, $\cos 2\alpha = \frac{527}{625}$

Przykład 5 ◀ zad. 8.18

Obliczymy dokładną wartość tangensa kąta 22,5°.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru na tangens kąta podwojonego: $\operatorname{tg}(2 \cdot 22{,}5°) = \dfrac{2\operatorname{tg} 22{,}5°}{1 - \operatorname{tg}^2 22{,}5°}$.

Niech $\operatorname{tg} 22{,}5° = x$. Otrzymujemy równanie:

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{2x}{1 - x^2}, \text{ stąd } 1 - x^2 = 2x \qquad \longleftarrow \operatorname{tg} 45° = 1$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad \Delta = 8,\ x = -1 - \sqrt{2} \text{ lub } x = -1 + \sqrt{2}$$

Tangens kąta 22,5° jest liczbą dodatnią, więc rozwiązaniem równania jest druga z otrzymanych liczb.

Odp.: $\operatorname{tg} 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$

Przykład 6 ◀ zad. 8.19

Udowodnimy tożsamość $1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\cos x}$.

Dowód

Zbadamy najpierw, dla jakich argumentów wyrażenia po obu stronach znaku równości mają sens.

Aby określone były funkcje $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, muszą być spełnione następujące warunki:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \text{ oraz } \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ czyli } x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Aby określona była prawa strona równania, należy założyć, że:

$$\cos x \neq 0, \text{ czyli } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Ostatecznie $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Przekształcamy lewą stronę równania.

$$\mathrm{L} = 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \qquad \longleftarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \qquad \longleftarrow \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$$

$$= \frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x} = \mathrm{P}$$

Otrzymaliśmy prawą stronę równania. Zatem dla wszystkich kątów spełniających założenia $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, podana równość jest prawdziwa.

Koniec dowodu

Przykład 7 ◀ zad. 8.20

Uprościmy wyrażenie $\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x}$.

Rozwiązanie

Zapiszemy najpierw konieczne założenia.

Wyrażenie $\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x}$ jest określone, gdy $1 - \cos 4x \neq 0$.

$$\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - 1 + 2\sin^2 2x} = \qquad \longleftarrow \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2\sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2 \cdot 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{8} \qquad \longleftarrow \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Odp.: Dla każdego kąta x spełniającego założenie $1 - \cos 4x \neq 0$, wartość podanego wyrażenia jest równa $\frac{1}{8}$.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Wiadomo, że α jest kątem rozwartym i $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Wskaż wartość $\sin 2\alpha$.

A. $\frac{10}{13}$ **B.** $-\frac{10}{13}$ **C.** $\frac{120}{169}$ **D.** $-\frac{120}{169}$

8.2. Wskaż wartość $\operatorname{tg} 75°$.

A. $\sqrt{3} - 1$ **B.** $\sqrt{3} + 2$ **C.** $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

8.3. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

A. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ **B.** $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ **C.** $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ **D.** $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

8.4. Kąt α jest rozwarty i $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$. Oblicz $\sin(120° + \alpha)$.

8.5. Kąty α i β spełniają warunki: $0° < \alpha < 90°$, $90° < \beta < 180°$, $\sin\alpha = \frac{5}{6}$, $\cos\beta = -\frac{3}{4}$. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta $\alpha + \beta$.

8.6. Kąty α i β spełniają warunki: $90° < \alpha < 180°$, $270° < \beta < 360°$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = -\frac{1}{3}$. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta $\alpha - \beta$.

8.7. Dane są: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}$. Oblicz wartości tangensa kątów $\alpha+\beta$ oraz $\alpha-\beta$.

8.8. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\sin 2\alpha$.

8.9. Kąt α spełnia warunki: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $180° < \alpha < 270°$. Oblicz $\cos 3\alpha$.

8.10. Dany jest $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Oblicz $\operatorname{tg} 4\alpha$.

8.11. Oblicz wartość wyrażenia bez użycia tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 20° \cdot \cos 40° + \cos 20° \cdot \sin 40°$

b) $\sin 80° \cdot \cos 50° - \cos 80° \cdot \sin 50°$

c) $\cos 15° \cdot \cos 30° - \sin 15° \cdot \sin 30°$

d) $\cos 70° \cdot \cos 40° + \sin 70° \cdot \sin 40°$

8.12. Oblicz wartość wyrażenia bez użycia tablic trygonometrycznych.

a) $\dfrac{2\sin 75° \cdot \cos 75°}{\cos^2 75° - \sin^2 75°}$

b) $\dfrac{\cos^2 67°\,30' - \sin^2 67°\,30'}{\sin 112°\,30' \cdot \cos 112°\,30'}$

c) $\dfrac{\sin 44° \cdot \cos 44°}{\cos(90° - 88°)}$

d) $\dfrac{\sin^2 12° - \cos^2 12°}{\sin 12° \cdot \sin 78° \cdot \operatorname{tg} 66°}$

D **8.13.** Udowodnij wzór $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Skorzystaj ze wzoru na cosinus sumy kątów.

D **8.14.** Udowodnij, że $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$. Zapisz konieczne założenia. Skorzystaj ze wzoru na tangens sumy kątów.

8.15. Oblicz wartość wyrażenia. Zapisz konieczne założenia.

$$1 - 2\cos x + \cos 2x + 4\cos x \cdot \sin^2\frac{x}{2}$$

8.16. Oblicz $\log(\cos 2x + \sin 2x \operatorname{tg} x)$. Podaj konieczne założenia.

8.17. Zapisz podane wyrażenie w postaci funkcji trygonometrycznej sumy lub różnicy kątów.

a) $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

D **8.18.** Wykaż, że $\sin 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

D **8.19.** Wykaż, że podane równanie jest tożsamością. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

b) $\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \sin\alpha$

c) $\frac{1+2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

d) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

e) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$

f) $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$

8.20. Uprość wyrażenie $\frac{4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}$.

D **8.21.** Udowodnij równość $\cos\frac{180^\circ}{5} \cdot \cos\frac{360^\circ}{5} = \frac{1}{4}$.

Prosto do matury

1. Wiadomo, że α i β są kątami ostrymi oraz $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\sin\beta = \frac{1}{3}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\sin(\alpha+\beta) = 1$ **B.** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\cos(\alpha-\beta) = \frac{2\sqrt{10}+2}{9}$

2. Dane są kąty α i β takie, że $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $\sin\alpha = -0{,}4$, $\cos\beta = -0{,}2$. Oblicz $\cos(\alpha-\beta)$.

3. Dany jest $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos\frac{\alpha}{2}$.

D **4.** Wykaż, że równanie $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ jest tożsamością.

D **5.** Udowodnij tożsamość. Zapisz konieczne założenia.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}^3\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$$

9. Równania i nierówności trygonometryczne

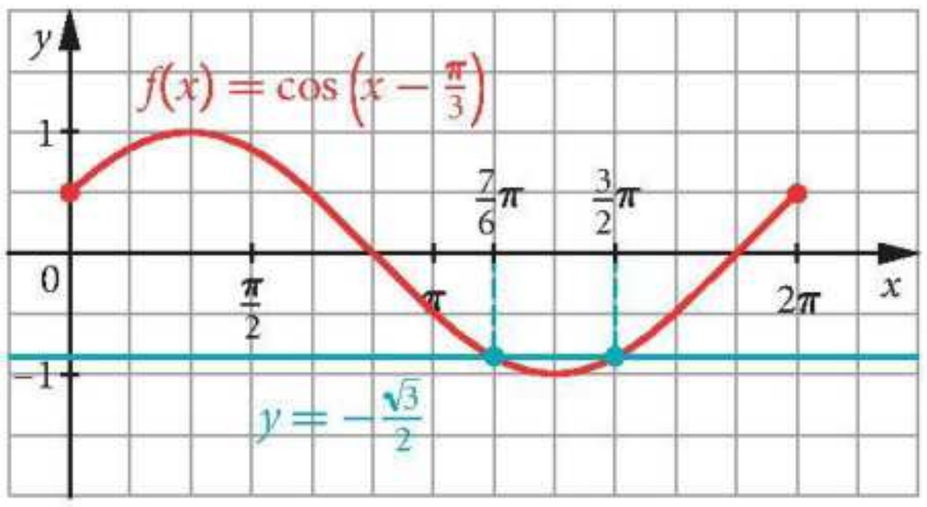
Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych

Przykład 1 ◂ zad. 9.4

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ w przedziale $\langle 0;\ 2\pi\rangle$ i odczytamy z niego, dla jakich $x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$ spełnione jest równanie $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie



⟵ prowadzimy prostą k o równaniu $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

⟵ odczytujemy pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f i prostej k

Z wykresu odczytujemy, że $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $x = \frac{7}{6}\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$.

Odp.: $x = \frac{7}{6}\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$

Z własności funkcji trygonometrycznych wynika, że:

- $\sin x = \sin t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = t + 2k\pi$ lub $x = \pi - t + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
- $\cos x = \cos t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = t + 2k\pi$ lub $x = -t + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = t + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; zakładamy, że x i t należą do dziedziny funkcji tangens.

Przykład 2 ◂ zad. 9.5

Skorzystamy z powyższych faktów i rozwiążemy dane równanie.

Rozwiązanie

a) $\sin 3x = \sin 2x$

$3x = 2x + 2k\pi$ lub $3x = \pi - 2x + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

$x = 2k\pi$ lub $5x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Odp.: $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{5}(2k + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $\operatorname{tg}(x-2) = \operatorname{tg} 6x$

To równanie wymaga zapisania założeń związanych z dziedziną funkcji tangens:

Dziedziną równania (nierówności) nazywamy zbiór wszystkich liczb, dla których równanie (nierówność) ma sens.

$$\begin{cases} x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z}, \text{ zatem } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z}$$

Teraz rozwiązujemy równanie.

$$x - 2 = 6x + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$
$$-5x = 2 + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$
$$x = -\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5}, \ k \in \mathbf{Z}$$

Sprawdzenie, czy wszystkie znalezione rozwiązania należą do dziedziny równania, jest na ogół skomplikowane, gdyż dotyczy zbiorów liczb. Dlatego pokażemy takie rozumowanie tylko dla jednego przykładu. Zastosujemy dowód nie wprost.
Załóżmy, że istnieją pewne liczby całkowite k oraz m, dla których prawdziwa jest równość:

$$-\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2 + m\pi, \text{ stąd } -\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2} + m\pi + \frac{k\pi}{5}, \text{ czyli } -24 = \pi(5 + 10m + 2k)$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ dla dowolnych liczb całkowitych k oraz m prawa strona równości jest liczbą niewymierną, a lewa liczbą wymierną. Zatem każde rozwiązanie x_0 równania spełnia pierwsze założenie: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

Podobnie można wykazać, że otrzymane rozwiązania spełniają drugie założenie.

Odp.: $x = -\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5}, \ k \in \mathbf{Z}$

c) $\cos\frac{1}{2}x = \sin\frac{1}{3}x$

Korzystamy z odpowiedniego wzoru redukcyjnego i doprowadzamy najpierw równanie do takiej postaci, w której porównywane będą te same funkcje trygonometryczne.

$$\cos\frac{1}{2}x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x\right) \qquad \longleftarrow \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Otrzymujemy dwie serie zależności:

$$\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x + 2k\pi \text{ lub } \frac{1}{2}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}x + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$
$$\frac{5}{6}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } \frac{1}{6}x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$

Odp.: $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{12}{5}k\pi$ lub $x = -3\pi + 12k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$

Przykład 3 ◀ zad. 9.6

Rozwiążemy równanie $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t=2x-\frac{\pi}{3}$. Wtedy równanie ma postać:

$$\sin t=-\frac{1}{2}$$

Z wykresu funkcji $y=\sin t$ odczytujemy, że $\sin t=-\frac{1}{2}$, gdy:

$$t=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } t=-\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

Zatem:

$$2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$2x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ lub } 2x=-\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

Odp.: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ lub } x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$

Przykład 4 ◀ zad. 9.7

Rozwiążemy równanie $\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle-\pi;\ 2\pi\rangle$.

Rozwiązanie

Rozwiążemy najpierw to równanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t=\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}$. Wtedy równanie ma postać:

$$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } t=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

Zatem:

$$\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

$$x=-\frac{\pi}{9}+\frac{4}{3}k\pi \text{ lub } x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

Teraz uwzględniamy fakt, że rozwiązania mają należeć do przedziału $\langle -\pi;\ 2\pi\rangle$. Podstawiamy w miejsce k kolejne liczby całkowite.

- Dla $k = 0$ mamy $x = -\frac{\pi}{9} \in \langle -\pi;\ 2\pi\rangle$ lub $x = -\frac{\pi}{3} \in \langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.
- Dla $k = 1$ mamy $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}\pi = \frac{11}{9}\pi \in \langle -\pi;\ 2\pi\rangle$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \pi \in \langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.

Można sprawdzić, że po podstawieniu w miejsce k innych liczb całkowitych otrzymamy wartości x spoza przedziału $\langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.

Odp.: $x \in \left\{-\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{9},\ \pi,\ \frac{11}{9}\pi\right\}$

Przykład 5 ◂ zad. 9.8

Rozwiążemy nierówność $\sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}$. Wtedy nierówność ma postać:

$$\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z wykresu funkcji $y = \sin t$ odczytujemy, że rozwiązaniami tej nierówności są wszystkie liczby t spełniające warunek $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Zapisujemy tę podwójną nierówność w postaci układu.

$$\begin{cases} t > \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ t < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Wracamy do naszego podstawienia. Mamy do rozwiązania następujący układ nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} > \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x > \pi + 2k\pi \\ \frac{1}{3}x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3\pi + 6k\pi \\ x < 4\pi + 6k\pi \end{cases}$$

Odp.: $x \in (3\pi + 6k\pi;\ 4\pi + 6k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$

Przykład 6 ◀ zad. 9.9

Rozwiążemy równanie $\sin 2x - \cos x = 0$.

Rozwiązanie

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynu.

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \qquad \longleftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0, \text{ stąd } \cos x = 0 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}$$

Z odpowiednich wykresów odczytujemy rozwiązania równań.

Odp.: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

Przykład 7 ◀ zad. 9.10

Rozwiążemy równanie $\cos 2x + 4 \sin^2 x = 3 \sin x$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie tak, aby występowała w nim tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$1 - 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 x = 3 \sin x \qquad \longleftarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = \sin x$. Zatem $t \in \langle -1; 1 \rangle$.
Wtedy równanie ma postać:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, \quad \Delta = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1$$

Oba rozwiązania spełniają warunek $t \in \langle -1; 1 \rangle$, zatem $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = 1$.

Odp.: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Przykład 8 ◀ zad. 9.12

Rozwiążemy równanie $\cos 10x + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli przedstawimy $10x$ jako $7x + 3x$ i skorzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów, to otrzymamy wyłącznie funkcje trygonometryczne argumentów $7x$ albo $3x$.

$$\cos(7x + 3x) + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\cos(7x - 3x) = \frac{1}{2} \qquad \longleftarrow \text{korzystamy ze wzoru na cosinus różnicy kątów}$$

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Odp.: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$

Przykład 9 ◂ zad. 9.26

Sprawdzimy, dla jakich wartości parametru m równanie $\sin x \cos x = 2m^2 - 4m + 2$ ma rozwiązanie.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie tak, aby skorzystać ze wzoru na sinus kąta podwojonego.

$$2 \sin x \cos x = 4m^2 - 8m + 4$$

$$\sin 2x = 4m^2 - 8m + 4 \qquad \longleftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Wyrażenie po lewej stronie tego równania przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$. Zatem dane równanie będzie miało rozwiązanie, jeżeli spełniona będzie nierówność podwójna:

$$-1 \leqslant 4m^2 - 8m + 4 \leqslant 1$$

którą zapiszemy w postaci układu nierówności:

$$\begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 \geqslant -1 \\ 4m^2 - 8m + 4 \leqslant 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy kolejno obie powyższe nierówności.

$$4m^2 - 8m + 4 \geqslant -1$$

$$4m^2 - 8m + 5 \geqslant 0$$

$$\Delta = -16$$

Wyrażenie $4m^2 - 8m + 5$ jest zawsze dodatnie, więc pierwsza nierówność jest prawdziwa dla każdej rzeczywistej wartości m.

$$4m^2 - 8m + 4 \leqslant 1$$

$$4m^2 - 8m + 3 \leqslant 0$$

$$\Delta = 16, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{3}{2}$$

Druga nierówność jest prawdziwa dla $m \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$. Zatem przedział $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$ jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

Odp.: Równanie ma rozwiązania dla $m \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg}^2 x = 1$ można zapisać w postaci

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

9.2. Wszystkie rozwiązania równania $\cos\frac{1}{2}x = -1$ można zapisać w postaci

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

C. $x = 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

D. $x = 3\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

9.3. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\sin 2x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0;\ 2\pi\rangle$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

9.4. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$.

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9.5. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg}(x - 1) = \operatorname{tg} 2x$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$

c) $\sin 4x = \sin\frac{1}{2}x$

d) $\sin 3x = \cos x$

9.6. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 5x = 0$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

d) $2\sin\frac{x - \pi}{4} + \sqrt{2} = 0$

9.7. Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

a) $\cos 3x = 0,\ x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$

b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \langle -\pi;\ \pi\rangle$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1,\ x \in \langle -\pi;\ 5\pi\rangle$

d) $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$

9.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin\frac{x}{3} \leqslant 0$

b) $\cos 2x < -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$

d) $2\cos\frac{x+3\pi}{4} \geqslant \sqrt{3}$

9.9. Rozwiąż równanie.

a) $4\sin^2 x - 1 = 0$

b) $2\cos^2 x - 1 = 0$

c) $(\sin x + 2)^2 = 1$

d) $3\cos^2 x - 6\cos x = 0$

e) $3\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0$

f) $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$

9.10. Rozwiąż równanie.

a) $4\cos^2 x - 4\cos x = 3$

b) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

c) $2\cos^2 x + 5\cos x = 3$

d) $2\cos^2 x + 5\cos x = -2$

e) $\sin^3 x - 6\sin^2 x - \sin x + 6 = 0$

f) $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin^2 x$

9.11. Rozwiąż nierówność w podanym przedziale.

a) $(1 - \sin x)^2 + \cos^2 x \geqslant 1$ i $x \in \left\langle 0;\ 2\frac{1}{2}\pi \right\rangle$

b) $(\sin x - \cos x)^2 - 2\sin x(1 - \cos x) \leqslant \sqrt{2} + 1$ i $x \in \langle -2\pi;\ 2\pi \rangle$

c) $2\sin^2 x + \cos^2 x \leqslant 1$ i $x \in \langle -\pi;\ 2\pi \rangle$

d) $2(\sin x - \cos x)^2 + \sin x(4\cos x - 1) > 3\sin x + 2$ i $x \in \langle -\pi;\ 3\pi \rangle$

9.12. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 5x - \cos 3x \sin 2x = 0$

b) $\sin 5x + 2\cos 6x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $4\cos x \cos 4x = 2\cos 5x + 1$

d) $\cos 9x + 4\sin 7x \sin x \cos x = 1$

9.13. Rozwiąż równanie $\sin x \cdot \sin 2x - \cos x = 0,\ x \in \langle 0;\ \pi \rangle$.

9.14. Rozwiąż równanie $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 2,\ x \in (0;\ 3\pi)$.

9.15. Rozwiąż równanie $\sin 4x + \cos 2x = 2\sin 2x + 1,\ x \in \langle 0;\ \pi \rangle$.

9.16. Rozwiąż równanie $4\cos^2 x - 4\cos^2 x \cdot \sin x + 3\sin x = 3,\ x \in (0;\ 2\pi)$.

9.17. Rozwiąż równanie $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$.

9.18. Rozwiąż równanie $\sin x \cdot \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\cos x$.

9.19. Rozwiąż nierówność $2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$ dla $0 < x < \pi$.

9.20. Rozwiąż nierówność $\cos^2 x - 3\sin x + \frac{3}{4} > 0$ dla $0 < x < 2\pi$.

9.21. Rozwiąż nierówność $\frac{1 - 2\sin x}{\cos 2x} > 0$ dla $0 < x < \pi$.

D **9.22.** Wykaż, że jeżeli $\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$, to albo $x - y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, albo $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

9.23. Rozwiąż równanie $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + 1 = \cos x$.

9.24. Rozwiąż równanie $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$.

9.25. Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$.

9.26. Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązanie?

a) $2\cos x = 4m^2 - 2$

b) $\operatorname{tg} x = 5m^2 - 7m + 11$

c) $\sin x = m^2 - 2m$

d) $\sin^2 x - \cos^2 x = m^2 - 6m + 10$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Do zbioru rozwiązań równania $3\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ należą liczby postaci

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **B.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Rozwiąż równanie $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ w przedziale $\langle -\pi; 2\pi\rangle$.

3. Rozwiąż nierówność $\cos 3x \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

5. Dla jakich wartości parametru m równanie $\cos x = m^2 + 4m + 4$ ma rozwiązanie?

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–12 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 17. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 78°. Do którego przedziału należy długość boku leżącego naprzeciw tego kąta?

A. $\langle 30; 31)$ **B.** $\langle 31; 32)$ **C.** $\langle 32; 33)$ **D.** $\langle 33; 34)$

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle CAB = 75°$. Zatem

A. $|AC| = 8\sqrt{3}$. **B.** $|AC| = 8\sqrt{6}$. **C.** $|AC| = 12\sqrt{6}$. **D.** $|AC| = 24\sqrt{3}$.

3. Boki trójkąta mają długości 7, 12 i 13. Ile wynosi pole tego trójkąta?

A. $12\sqrt{3}$ **B.** $24\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{273}$ **D.** $8\sqrt{273}$

4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 12 i 16. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

5. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 15$, $|AC| = 12$, $|BC| = 18$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D. Wskaż długość odcinka CD.

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

6. Który z podanych kątów nie jest kątem wypukłym?

A. $\alpha = \frac{3\pi}{7}$ **B.** $\beta = 2{,}5$ **C.** $\gamma = 3{,}5$ **D.** $\delta = \frac{3}{2}$

7. Niech α oznacza miarę stopniową kąta $\frac{3}{8}\pi$. Wskaż prawdziwą zależność.

A. $\alpha < 65°$ **B.** $65° < \alpha < 67°$ **C.** $67° < \alpha < 68°$ **D.** $\alpha > 68°$

8. Ile jest równa liczba $\sin 240°$?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sin 2x \cdot \cos 4x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$. Ile jest równa wartość $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

A. 0 **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{3 + \sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{\pi}{12}$ nie należy do dziedziny tej funkcji.

10. Wskaż zbiór rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} \cos x + \frac{1}{2} \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$.

A. $\left\langle 0; \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$ **B.** $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **C.** $\left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$ **D.** $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

11. Dla której z podanych funkcji oś y nie jest osią symetrii jej wykresu?

A. $y = \cos x$ **B.** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **C.** $y = \sin(x + \pi)$ **D.** $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

12. Wskaż największą wartość przyjmowaną przez funkcję $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$ w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$.

A. $1 - \sqrt{3}$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$ **C.** $\sqrt{3} + 1$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

W zadaniach 13–27 oceń prawdziwość podanych zdań.

13. Boki trójkąta mają się do siebie jak $3 : 5 : 6$. Wynika stąd, że

A. trójkąt ten jest rozwartokątny.

B. cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy $-\frac{1}{15}$.

C. cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy $\frac{13}{15}$.

14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\sphericalangle ABC = 30°$. Zatem

A. pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ac$.

B. promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy b.

C. $\sin \sphericalangle CAB = \frac{a}{2b}$.

15. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{6}$, $|AC| = \sqrt{7}$. Zatem

A. $\cos \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{30}}{15}$. **B.** $\cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{\sqrt{35}}$. **C.** $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$.

16. Miara łukowa kąta α jest równa 6.

A. Miara stopniowa kąta α jest równa $\frac{1080}{\pi}$. **B.** $\sin \alpha < 0$ **C.** Kąt α jest ostry.

17. Do zbioru rozwiązań równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ należą liczby postaci

A. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. **B.** $x = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

18. Dla dowolnych kątów α i β prawdziwy jest wzór

A. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$. **B.** $\sin 2\alpha=2\sin\alpha$. **C.** $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$.

19. Wiadomo, że kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Zatem

A. $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$. **B.** $\sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\cos 2\alpha=\frac{7}{9}$.

20. Liczba $a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ spełnia warunek $\cos 2a=\frac{1}{4}$. Zatem

A. $\sin^2 a=\frac{3}{8}$. **B.** $a<\frac{\pi}{4}$. **C.** $a=\frac{\pi}{6}$.

21. Równanie $\sin x=ax$ może mieć dla pewnej liczby rzeczywistej a

A. dokładnie jedno rozwiązanie.

B. dokładnie dwa rozwiązania.

C. dokładnie trzy rozwiązania.

22. Dla dowolnego kąta α prawdziwy jest wzór

A. $\sin 12\alpha=2\sin 6\alpha\cos(-6\alpha)$.

B. $\sin 12\alpha=\sin 4\alpha\cos 8\alpha-\cos 4\alpha\sin(-8\alpha)$.

C. $\sin 12\alpha=\sin 3\alpha\cos 9\alpha+\cos 5\alpha\sin 7\alpha$.

23. Dany jest taki kąt ostry α, że $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Wtedy

A. $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$. **B.** $\cos 2\alpha=\frac{7}{8}$. **C.** $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8}$.

24. Do zbioru rozwiązań równania $2\sin x+1=0$ należą liczby postaci

A. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. **C.** $x=\frac{19}{6}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

25. Zbiór rozwiązań równania $\cos x=0$ jest równy zbiorowi rozwiązań równania

A. $\cos 2x=0$. **B.** $2\cos\frac{x}{2}=0$. **C.** $\frac{1}{\operatorname{tg}x}=0$.

26. Wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x=1$ można zapisać w postaci

A. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ lub $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ lub $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

27. Zbiór rozwiązań nierówności $\cos 3x < \frac{1}{2}$ można zapisać w postaci

A. $(\pi + 6k\pi;\ 5\pi + 6k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$.

B. $\left(\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi;\ \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

C. $\left(-\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi;\ \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

28. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $\sphericalangle ABC = 35°$, $\sphericalangle BCA = 74°$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

29. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 20, $\sphericalangle CAB = 40°$ i $\sphericalangle ABC = 22°$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do 0,1.

30. Bok BC trójkąta ABC ma długość $16\sqrt{3}$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 16. Wyznacz miarę $\sphericalangle CAB$.

31. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt $(5, -4)$.

32. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α taki, że $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

33. Oblicz wartość sinusa oraz cosinusa kąta α, wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}6$.

34. Przyporządkuj podane kąty do odpowiednich ćwiartek układu współrzędnych.

$1299°,\ \frac{11\pi}{7},\ -1,\ 2,\ -541°,\ -\frac{9\pi}{5},\ 4,\ \frac{14\pi}{3},\ 3{,}14\pi$

35. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

a) $\operatorname{tg}210°\operatorname{tg}405° + \sin(-300°)\cos 1080°$

b) $\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}\cos\frac{13\pi}{3}$

D **36.** Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos 100°\operatorname{tg}260°\sin 80° + \cos 440°\cos 620°$ jest liczbą całkowitą.

37. Kąt α jest rozwarty i $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$. Oblicz $\cos 2\alpha$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

38. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 7$, $|BC| = 9$, $|CA| = 10$. Wyznacz długość środkowej BD.

39. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = 11$, $|BC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 60°$. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

D **40.** Wykaż, że nie istnieje trójkąt, w którym sinusy kątów są równe $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ i $\frac{5}{7}$.

41. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D, że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz

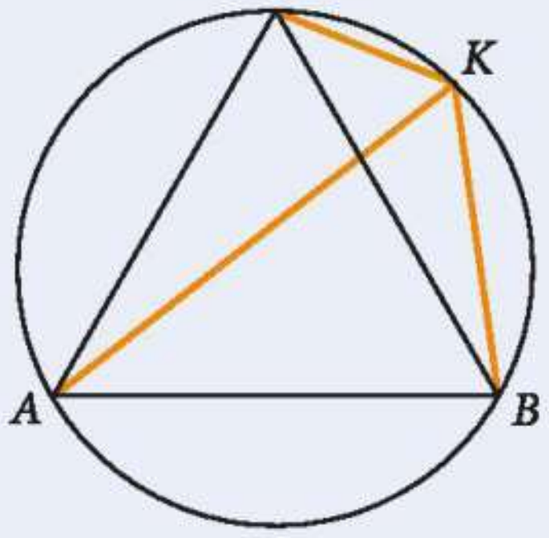
a) miary kątów CAD i DAB z dokładnością do $1°$.

b) stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD.

42. W trójkącie rozwartokątnym ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku B dane są $|AB| = 4\sqrt{2}$ i $|AC| = 4\left(1 + \sqrt{3}\right)$. Poprowadzono wysokość BD i otrzymano trójkąt równoramienny ABD. Wyznacz kąty trójkąta ABC oraz pole P koła opisanego na tym trójkącie.

D **43.** W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CD| = 4$, $|DA| = 9$, $|AC| = 8$. Wykaż, że na tym czworokącie nie można opisać okręgu.

44. W trójkącie równoramiennym ABC miara kąta BAC jest równa $30°$, a podstawa AB ma długość 8. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.



D **45.** Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku BC obrano punkt K, jak na rysunku obok. Wykaż, że $|CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|$.

46. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz $\cos\sphericalangle CDB$.

D **47.** Boki trójkąta mają długości $2a$, $3a$, $4a$. Wykaż, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{8\sqrt{15}}{15}a$.

48. Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

c) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

49. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle ABC = 60°$. Wyznacz długości odcinków, na które dwusieczna kąta ABC dzieli bok CA.

50. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach $2 + \sqrt{3}$ i $3 + 2\sqrt{3}$. Wyznacz miary kątów trójkąta.

D **51.** Wykaż, że równość $\left(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^{-1}\alpha\right)^2 = (\sin\alpha \cdot \cos\alpha)^{-2}$ jest tożsamością. Podaj założenia, które musi spełniać kąt α.

D **52.** Udowodnij tożsamość $4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1$.

D **53.** Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ jest funkcją stałą.

54. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x$.

55. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f.

56. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| - 2$.

57. Ustal znak liczby $\cos 4{,}5 - \cos 5$ na podstawie odpowiedniego wykresu funkcji.

58. Rozwiąż równanie $\cos\frac{2}{3}x = \sin\frac{3}{2}x$.

59. Rozwiąż nierówność $\cos\frac{1}{3}x < \sin\frac{13}{3}\pi$.

60. Rozwiąż równanie $(2\sin x + 1)^2 + 4\cos^2 x = 3$.

61. Rozwiąż nierówność $\sqrt{2}\cos x + 1 \geqslant 0$ w przedziale $\langle -\pi;\ 3\pi\rangle$.

62. Rozwiąż równanie.

a) $4\cos 2x = 2\cos x - 1$

b) $2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos x$

c) $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 = \cos 2x$

63. Rozwiąż równanie $4\sin^2 x + 4\cos x = 1,\ x \in \langle -\pi;\ \pi\rangle$.

64. Rozwiąż równanie $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x,\ x \in \langle -\pi;\ 2\pi\rangle$.

65. Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4\cos^2 x + 1 = 0,\ x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$.

66. Rozwiąż równanie $\cos 2x + 5\cos x = 2$.

67. Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\sin x = \cos x + \sqrt{3},\ x \in \langle 0;\ 2\pi\rangle$.

68. Rozwiąż równanie $\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

69. Rozwiąż nierówność dla $0 < x < \pi$.

a) $\frac{\cos 2x}{\cos x} < 1$

b) $\frac{1 + 2\cos x}{\sin x} < 0$

70. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin x + \cos x = 2m - 1$ ma rozwiązanie?

71. Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1)\cdot(\cos x + p + 1) = 0$ z parametrem p.

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0;\ 5\rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ trzy różne rozwiązania.

72. Dana jest funkcja $f(x) = 1 + \frac{2\sin 2x + 3\sin 3x}{\sin x}$.

D a) Wykaż, że jeżeli $\sin x \neq 0$, to $f(x) = 2\left(6\cos^2 x + 2\cos x - 1\right)$.

b) Znajdź zbiór wartości funkcji f.

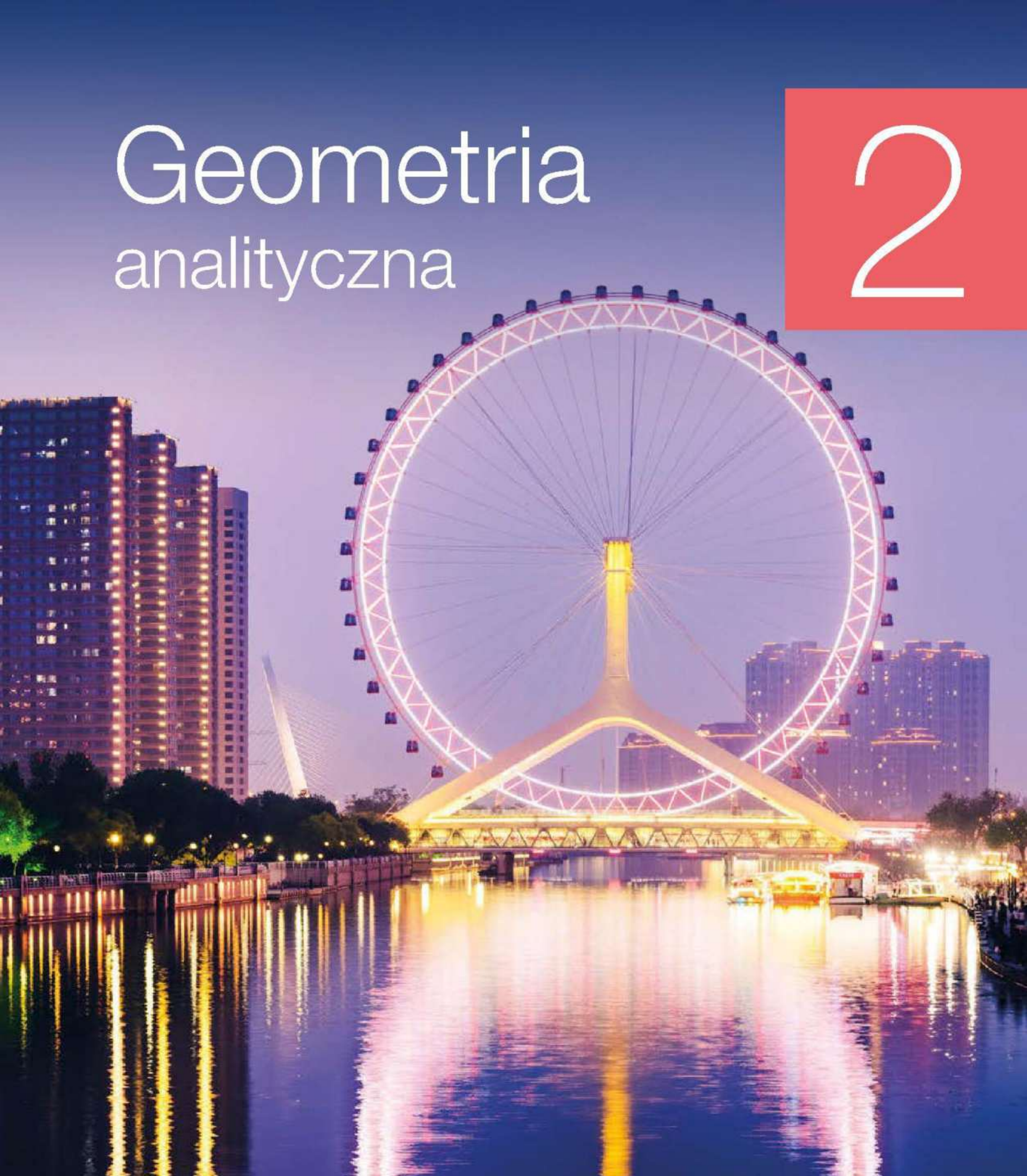
73. Dla jakich wartości parametru m równanie $m^2(1 - \sin x) - 4m + 1 + \sin x = 0$ ma rozwiązanie?

74. Dla jakich wartości parametru α suma sześcianów pierwiastków równania $x^2 - 2x\cdot\sin\alpha - \cos^2\alpha = 0$ jest równa 0?

75. Dla jakich wartości parametru α najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x + \cos 2\alpha + \sin\alpha + 3$ wynosi 2?

Geometria analityczna

2



1. Warto powtórzyć – równanie prostej, wektory

Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie $ax + by + c = 0$ o zmiennych x i y opisuje:

- całą płaszczyznę, gdy $a = b = c = 0$,
- zbiór pusty, gdy $a = b = 0$ i $c \neq 0$,
- prostą, gdy a i b nie są jednocześnie równe 0.

Każdą prostą na płaszczyźnie możemy opisać za pomocą równania:

$$ax + by + c = 0, \text{ gdzie } a^2 + b^2 \neq 0$$

- Warunek $a^2 + b^2 \neq 0$ oznacza, że a i b nie mogą być **jednocześnie** równe 0.
- Warunek $ab \neq 0$ oznacza, że **żadna** z liczb a, b nie może być równa 0.

- Jeżeli $b \neq 0$, to równanie $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ jest wzorem funkcji liniowej zmiennej x i opisuje na płaszczyźnie prostą, która jest wykresem tej funkcji.
- Jeżeli $b = 0$ i $a \neq 0$, to równanie $x = -\frac{c}{a}$ opisuje na płaszczyźnie prostą prostopadłą do osi x, która nie jest wykresem żadnej funkcji.

Równanie $ax + by + c = 0$, w którym a i b nie są jednocześnie równe zero, czyli równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**, natomiast równanie $y = mx + n$ **równaniem kierunkowym prostej o współczynniku kierunkowym m i wyrazie wolnym n.**

Przykład 1 ◂ zad. 1.6

Przekształcimy dane równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie

a) $3x - y - 5 = 0$
$-y = -3x + 5$
$y = 3x - 5$

b) $x + 4y - 7 = 0$
$4y = -x + 7$
$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

Jeżeli prosta ma równanie w postaci kierunkowej, to jest ono tylko jedno.

Przykład 2 ◂ zad. 1.8

Przekształcimy dane równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

a) $y = \sqrt{11}x - 6$
$-\sqrt{11}x + y + 6 = 0$

⟵ wystarczy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę i uporządkować je

b) $y = -\frac{6}{7}x + \frac{3}{2}$

Równanie danej prostej w postaci ogólnej można zapisać na nieskończenie wiele sposobów (jedne równania powstają z innych przez pomnożenie przez liczbę różną od zera).

$\frac{6}{7}x + y - \frac{3}{2} = 0$ ⟵ jeżeli zależy nam na współczynnikach całkowitych, to obydwie strony równania mnożymy przez 14

$12x + 14y - 21 = 0$

Przykład 3 ◀ zad. 1.10

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez dane punkty.

a) $(-1, 1)$ i $(-1, 12)$ b) $(-1, -4)$ i $(7, 12)$

Rozwiązanie

a) Pierwsze współrzędne obu punktów są takie same, zatem prosta przechodząca przez te punkty jest prostopadła do osi x i ma równanie $x = -1$.

b) Pierwsze współrzędne obu punktów są różne, zatem do rozwiązania zadania korzystamy z równania kierunkowego prostej $y = mx + n$.

$\begin{cases} -4 = -m + n \\ 12 = 7m + n \end{cases}$ $\begin{cases} 4 = m - n \\ 12 = 7m + n \end{cases}$ $\begin{cases} 4 = m - n \\ 16 = 8m \end{cases}$ $\begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}$

Odp.: a) $x = -1$ b) $y = 2x - 2$

Przykład 4 ◀ zad. 1.11

Wyznaczymy punkty przecięcia prostej o równaniu $2x - 5y + 10 = 0$ z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią x, rozwiązujemy układ równań:

$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ⟵ każdy punkt osi x ma współrzędną $y = 0$

$\begin{cases} 2x + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$

Punkt przecięcia prostej z osią x ma współrzędne $(-5, 0)$.

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią y, rozwiązujemy układ równań:

$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ⟵ każdy punkt osi y ma współrzędną $x = 0$

$\begin{cases} -5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$

Punkt przecięcia prostej z osią y ma współrzędne $(0, 2)$.

Odp.: Punkty przecięcia prostej z osiami to $(-5, 0)$ i $(0, 2)$.

Punkt $A = (x_A, y_A)$ jest punktem wspólnym prostej $k: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i prostej $l: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równania obu prostych, czyli gdy para liczb (x_A, y_A) należy do zbioru rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Równania prostych równoległych i prostopadłych

Przypomnijmy zależności między równaniami prostych równoległych i prostych prostopadłych.

Prosta k	Prosta l taka, że $l \parallel k$	Prosta p taka, że $p \perp k$
$y = mx + n,\ m \neq 0$	$y = mx + n_1$	$y = -\frac{1}{m}x + n_2$
$x = a$	$x = a_1$	$y = a_2$
$y = b$	$y = b_1$	$x = b_2$

Przykład 5 ◂ zad. 1.20, 1.21

Dana jest prosta $l: y = -3x + 2$. Przez punkt $A = (4, 3)$ poprowadzono prostą k równoległą do prostej l oraz prostą h prostopadłą do l. Napiszemy równania prostej k i prostej h.

Rozwiązanie

- $k: y = -3x + n$ ⟵ każda prosta równoległa do l ma równanie tej postaci
  $3 = -3 \cdot 4 + n$ ⟵ $A = (4, 3) \in k$
  $n = 15$
  $k: y = -3x + 15$

- $h: y = \frac{1}{3}x + c$ ⟵ każda prosta prostopadła do l ma równanie tej postaci
  $3 = \frac{4}{3} + c$ ⟵ $A = (4, 3) \in h$
  $c = \frac{5}{3}$
  $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Odp.: $k: y = -3x + 15$, $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Wektory w układzie współrzędnych

Definicja

Współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ o początku $A = (x_A, y_A)$ i końcu $B = (x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Dwa wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Twierdzenie

Dane są wektory $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$. Wtedy:

- $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$
- $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$
- $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$

Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Przykład 6 ◂ zad. 1.27

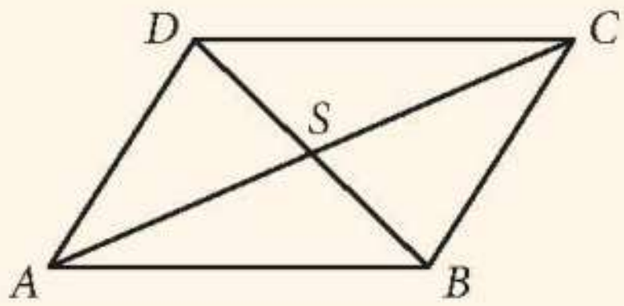
Punkty $A = (-3, 12)$ i $B = (5, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (4, 7)$ jest punktem przecięcia jego przekątnych. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków C i D tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Niech $C = (x_C, y_C)$. Punkt S jest środkiem odcinka AC, więc:

$$\left(\frac{-3 + x_C}{2}, \frac{12 + y_C}{2} \right) = (4, 7)$$

$$\begin{cases} \frac{-3 + x_C}{2} = 4 \\ \frac{12 + y_C}{2} = 7 \end{cases} \qquad x_C = 11,\ y_C = 2$$



Niech $D = (x_D, y_D)$. Wówczas $\overrightarrow{DC} = [11 - x_D, 2 - y_D]$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ⟵ $ABCD$ jest równoległobokiem

$[8, -12] = [11 - x_D, 2 - y_D]$ ⟵ $\overrightarrow{AB} = [8, -12]$

$$\begin{cases} 8 = 11 - x_D \\ -12 = 2 - y_D \end{cases} \qquad x_D = 3,\ y_D = 14$$

Odp.: $C = (11, 2)$, $D = (3, 14)$

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ **są równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \neq 0$ taka, że $\vec{u} = k \cdot \vec{w}$.

Przykład 7 ◀ zad. 1.28

Zbadamy, czy punkty $A = (-3, 6)$, $B = (-2, 2)$ i $C = (0, -6)$ są współliniowe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy sprawdzić równoległość wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [1, -4], \quad \overrightarrow{AC} = [3, -12]$$

Zatem:

$$\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Odp.: Punkty A, B, C są współliniowe.

Aby zbadać współliniowość punktów A, B, C, możemy sprawdzać równoległość różnych par wektorów, np. pary $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ albo pary $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ itd.

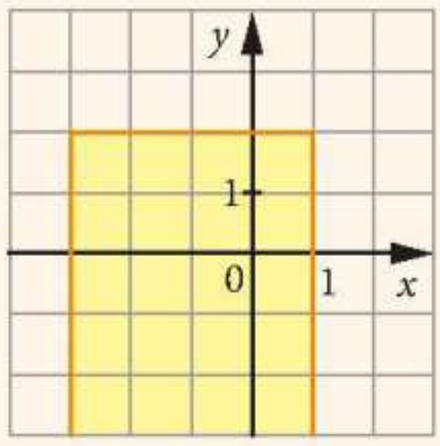
Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż równanie, za pomocą którego można opisać wykres funkcji $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$.

A. $-9x + 15y + 10 = 0$
B. $9x - 15y - 10 = 0$
C. $-9x - 15y + 10 = 0$
D. $9x + 15y + 10 = 0$

1.2. Wskaż zbiór, którego ilustracją jest figura przedstawiona na rysunku.



A. $D = \{(x, y): -3 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } y < 2\}$
B. $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -3 \leqslant x \leqslant 2\}$
C. $D = \{(x, y): -3 < x < 1 \text{ i } y \leqslant 2\}$
D. $D = \{(x, y): -3 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } y \leqslant 2\}$

1.3. Wskaż punkt przecięcia prostej $18x - 4y - 3 = 0$ z osią x.

A. $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ **D.** $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

1.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $x + 3y - 2 = 0$ jest równaniem prostej przechodzącej przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

B. Prosta o równaniu $5x - 7 = 0$ jest równoległa do osi y.

C. Prosta o równaniu $3y - 3\pi = 0$ nie jest wykresem funkcji.

1.5. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

a) $A = \{(x, y): -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

b) $B = \left\{(x, y): x \in \langle -2; 4\rangle \text{ i } y = -\frac{1}{2}x\right\}$

c) $C = \{(x, y): x < 0 \text{ i } 1 < y < 3\}$

d) $D = \{(x, y): x \in \mathbf{Z} \text{ i } y = 2\}$

e) $E = \{(x, y): x \in \langle -1; 2\rangle \text{ i } y = 1 - 2x\}$

f) $F = \{(x, y): x \in \langle 0; 3\rangle \text{ i } y \in \langle -3; 0\rangle\}$

g) $G = \{(x, y): |x| < 5 \text{ i } y = |x| + 1\}$

h) $H = \left\{(x, y): |x| < 4 \text{ i } y = \sqrt{|-x|}\right\}$

1.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

a) $2x - y = 0$

b) $\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$

c) $2y - 8 = 0$

d) $3x - 5 = 0$

e) $-6x - 2y + 1 = 0$

f) $x - 3y - 4 = 0$

1.7. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej o podanym równaniu.

a) $5x + y + 1 = 0$

b) $x - y + 9 = 0$

c) $3x - 4y + 2 = 0$

d) $\pi x - 2y + 3 = 0$

1.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3x + 1$

b) $y = \frac{1}{5}x - 3$

c) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$

d) $y = -5x$

e) $y = \frac{3}{4}x - 5$

f) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

1.9. Sprawdź, czy oba równania przedstawiają tę samą prostą.

a) $x - y + \frac{5}{2} = 0,\ -x + y - 2\frac{1}{2} = 0$

b) $-2x + y = 0,\ 2x - y = 0$

c) $-3x + 5y - 1 = 0,\ 3x + 5y - 1 = 0$

d) $4x - 2y + 1 = 0,\ -2x + y - 1 = 0$

e) $7x - 5 = 0,\ 7y - 5 = 0$

f) $1\frac{1}{2}x + 3y - 4 = 0,\ 3x + 6y - 8 = 0$

1.10. Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

a) $A = (4, -5)$ i $B = (2, 3)$

b) $A = (-9, -1)$ i $B = (3, 3)$

c) $A = (2, 6)$ i $B = \left(7, 3\frac{1}{2}\right)$

d) $A = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ i $B = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

1.11. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a) $x + 2y - 4 = 0$

b) $3x - y + 6 = 0$

c) $-2x + 4y - 1 = 0$

d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$

1.12. Napisz pięć par liczb spełniających podane równanie.

a) $x + 3y - 6 = 0$

b) $7x + 14y + 2 = 0$

1.13. Wyznacz punkt wspólny prostych k i l.

a) k: $2x - 3y + 6 = 0$ l: $x + 2y - 4 = 0$

b) k: $-\frac{2}{3}x - y + 1 = 0$ l: $x - y - 4 = 0$

c) k: $4x - y - 8 = 0$ l: $x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$

d) k: $-3x + y - 2 = 0$ l: $1{,}5x - 0{,}5y + 2 = 0$

e) k: $3x + 0{,}6y + 1{,}2 = 0$ l: $2x - 3y - 6 = 0$

f) k: $5x + 3y - 6 = 0$ l: $2x + 1{,}2y - 2{,}4 = 0$

1.14. Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów opisany danym równaniem.

a) $(x - 7)y = 0$

b) $(x + 3)(x - y) = 0$

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$

e) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 0$

f) $(x + 3)^2 = 0$

g) $|x + 7| + |y - 1| = 0$

h) $y^2 + 10y + 25 = 0$

1.15. Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach: $y = -x + 5$, $y = 2x - 8$, $y = -x - 4$ oraz $y = 2x + 2$. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

1.16. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = -|x| + m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z równoległobokiem o wierzchołkach $(0, -4)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(-2, 0)$?

1.17. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = mx + m + 4$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(3, 3)$, $(-3, 3)$, $(-3, -1)$, $(3, -1)$?

1.18. Dobierz m tak, aby prosta o równaniu $(m + 2)x + y = m - 1$ nie miała punktów wspólnych z podaną ćwiartką układu współrzędnych.

a) I b) II c) III d) IV

1.19. Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu przechodzi przez pierwszą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych?

a) $(m + 3)x - y + m + 1 = 0$

b) $(1 - m)x - y + m + 5 = 0$

1.20. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej l.

a) $A = (2, 3)$ l: $y = 5x - 2$
b) $A = (-3, -1)$ l: $y = \frac{2}{3}x - 2$
c) $A = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ l: $y = -4x + 1\frac{2}{3}$
d) $A = (3, -2)$ l: $x = -2$
e) $A = (-4, 5)$ l: $y = -\frac{1}{2}x + 3$
f) $A = \left(\sqrt{2}, 4\right)$ l: $y = 2\sqrt{2}x + 3$

1.21. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l.

a) $A = (6, 5)$ l: $y = -3x + 1$
b) $A = (0, -4)$ l: $y = 7x + 1$
c) $A = \left(\sqrt{12}, 4\right)$ l: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$
d) $A = (-1, -7)$ l: $y = -0{,}2x + 5{,}6$
e) $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ l: $x = 1\frac{1}{2}$
f) $A = \left(-3, 1+\sqrt{2}\right)$ l: $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 13$

1.22. Oblicz współrzędne środka odcinka AB.

a) $A = (2, 3)$, $B = (8, 5)$
b) $A = (-1, 4)$, $B = (-3, -2)$
c) $A = (0, -1)$, $B = (-5, 3)$
d) $A = (1, -7)$, $B = (-8, 0)$

1.23. Punkt M jest środkiem odcinka AB o danym końcu A. Wyznacz współrzędne punktu B.

a) $A = (3, 4)$, $M = (1, 7)$
b) $A = (-1, 5)$, $M = (0, 1)$
c) $A = (4, -16)$, $M = (-3, -8)$
d) $A = (-7, -2)$, $M = (-1, 3)$

1.24. Punkty $M = (2, 0)$ i $N = (5, -2)$ dzielą odcinek AB na trzy równe części. Znajdź współrzędne końców tego odcinka.

1.25. Wyznacz współrzędne środków boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (3, 1)$, $B = (-5, 5)$, $C = (2, -3)$.

1.26. Dane są współrzędne trzech wierzchołków równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

a) $A = (-4, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 8)$
b) $B = (-3, 0)$, $C = (4, -3)$, $D = (2, 3)$

1.27. Punkty $A = (-8, -5)$ i $B = (4, -1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $P = (0, 3)$ jest środkiem boku CD. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D oraz oblicz długości boków tego równoległoboku.

1.28. Zbadaj współliniowość punktów $A = (2, 5)$, $B = (-3, 9)$ i $C = (22, -11)$.

2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej

Umiejętności:

- obliczanie odległości między dwoma punktami
- wyznaczanie współrzędnych środka odcinka

Planimetria jest częścią geometrii zajmującą się badaniem własności figur na płaszczyźnie, a jej początki sięgają czasów przed naszą erą. Około 300 lat p.n.e. w dziele *Elementy* Euklides zawarł znane wówczas twierdzenia planimetrii w formie teorii aksjomatycznej.

W pierwszej i drugiej klasie prezentowaliśmy fragmenty geometrii euklidesowej. Tutaj przedstawimy inny sposób opisywania własności figur na płaszczyźnie, nazywany **geometrią analityczną**. Jej twórcy, żyjącemu w XVII w. Kartezjuszowi, matematyka zawdzięcza m.in. wprowadzenie pojęcia układu współrzędnych. W geometrii analitycznej badanie figur sprowadza się do badania opisujących je liczb i funkcji.

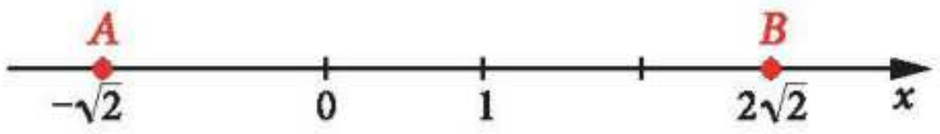


René Descartes, Kartezjusz (1596–1650) – matematyk, fizyk i filozof francuski. Autor licznych dzieł naukowych, m.in. *Rozprawy o metodzie*. W tym traktacie filozoficzno-matematycznym znalazł się pierwszy opis układu współrzędnych na płaszczyźnie; stamtąd pochodzi też słynna maksyma „Myślę, więc jestem" (*Cogito ergo sum*). Kartezjusz wprowadził m.in. pojęcia zmiennej i funkcji, sformułował prawa odbicia i załamania światła oraz zależność między masą a prędkością ciała, zbliżoną do obecnej zasady zachowania pędu.

Odległość między punktami

Przypomnijmy:

- Płaszczyzną kartezjańską nazywamy płaszczyznę z wprowadzonym na niej prostokątnym układem współrzędnych.
- Odległość między punktami A i B, czyli długość odcinka AB, oznaczamy $|AB|$.
- Odległość między punktami $A = (a)$ i $B = (b)$ na osi liczbowej jest równa $|AB| = |a - b|$.



Zatem gdy $A = \left(-\sqrt{2}\right)$ i $B = \left(2\sqrt{2}\right)$, to $|AB| = \left|-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right| = \left|-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$.

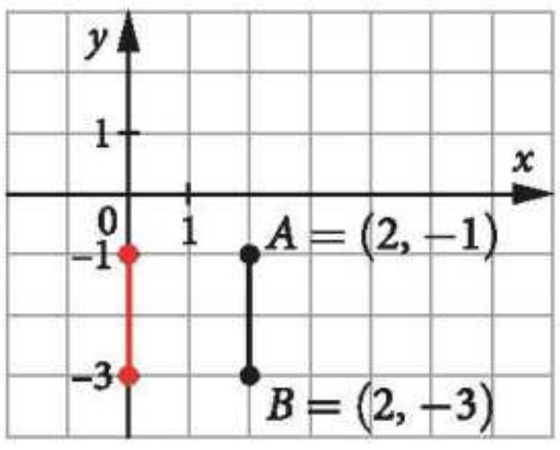
Pokażemy teraz, jak mierzy się odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej. Przeanalizujmy najpierw sytuację, gdy pierwsze lub drugie współrzędne punktów są takie same.

Do obliczania odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej musimy mieć identyczne jednostki na obydwu osiach.

Przykład 1

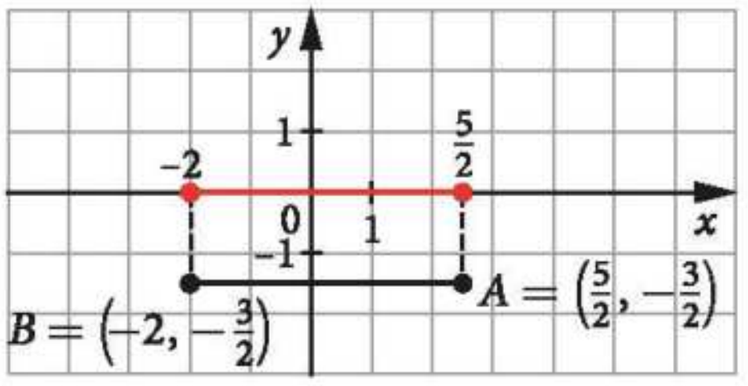
a) Długość odcinka AB jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom -1 i -3 na osi y, czyli:

$|AB| = |-1-(-3)| = |2| = 2$



b) Długość odcinka AB jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom $\frac{5}{2}$ i -2 na osi x, czyli:

$|AB| = \left|\frac{5}{2}-(-2)\right| = 4\frac{1}{2}$



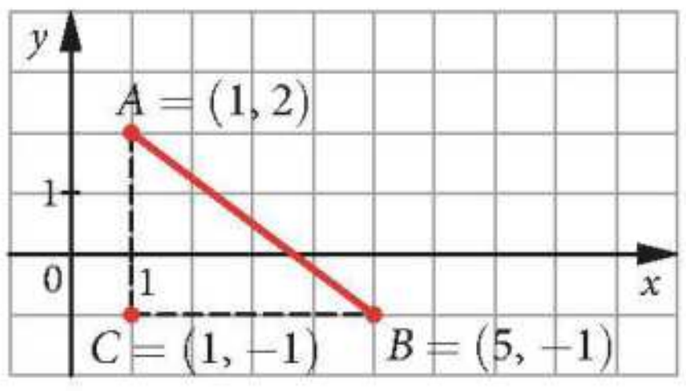
Przykład 2

Obliczymy odległość między punktami $A = (1, 2)$ i $B = (5, -1)$.

Rozwiązanie

Odcinek AB jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$$|AC| = |2-(-1)| = 3, \quad |BC| = |5-1| = 4$$



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

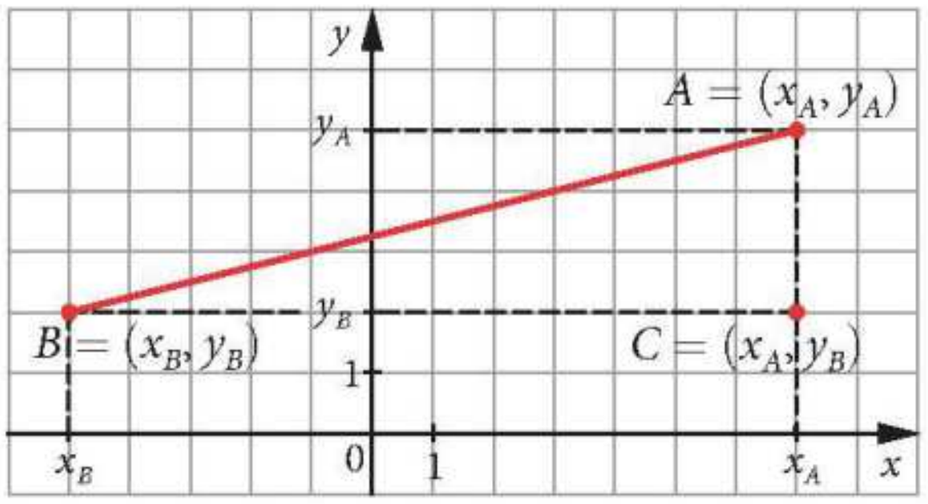
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2, \quad |AB|^2 = 3^2 + 4^2, \text{ czyli } |AB|^2 = 25$$

Odp.: $|AB| = 5$

Powtórzmy rozumowanie z przykładu 2 dla dwóch dowolnych punktów. Przyjmijmy, że na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są dwa punkty o współrzędnych:

$$A = (x_A, y_A) \text{ i } B = (x_B, y_B)$$

Wprowadzony pomocniczo punkt C ma współrzędne $C = (x_A, y_B)$.



Odcinek AB jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$|BC| = |x_A - x_B|$ ⟵ drugie współrzędne punktów B i C są równe

$|AC| = |y_A - y_B|$ ⟵ pierwsze współrzędne punktów A i C są równe

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$$

$$|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2, \text{ stąd } |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Dla dowolnej liczby $a \in \mathbf{R}$: $|a|^2 = a^2$.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są punkty o współrzędnych $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to odległość między nimi jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Ponieważ $|a - b| = |b - a|$ oraz $(a - b)^2 = (b - a)^2$, otrzymany wzór można zapisać w postaci:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład 3 ◂ zad. 2.4, 2.5

Obliczymy odległość między punktami A i B o podanych współrzędnych.

Rozwiązanie

a) $A = (3, 1)$, $B = (5, 3)$

$$|AB| = \sqrt{(3 - 5)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

b) $A = (-7, -3)$, $B = (17, -13)$

$$|AB| = \sqrt{[17 - (-7)]^2 + [-13 - (-3)]^2} = \sqrt{24^2 + (-10)^2} = \sqrt{576 + 100} =$$
$$= \sqrt{676} = 26$$

c) $A = \left(-\sqrt{3}, 7\right)$, $B = \left(\sqrt{2}, 3 - \sqrt{5}\right)$

$$|AB| = \sqrt{\left(-\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + \left[7 - \left(3 - \sqrt{5}\right)\right]^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{6} + 2 + \left(4 + \sqrt{5}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{5 + 2\sqrt{6} + 16 + 8\sqrt{5} + 5} = \sqrt{26 + 2\sqrt{6} + 8\sqrt{5}}$$

Przykład 4 ◀ zad. 2.7

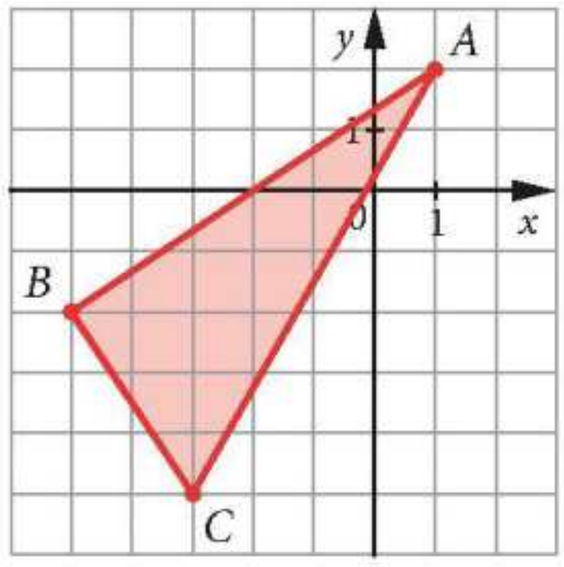
Obliczymy obwód i pole trójkąta o wierzchołkach:
$A = (1, 2),\ B = (-5, -2),\ C = (-3, -5)$.

Rozwiązanie

$$|AB| = \sqrt{(1+5)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$|BC| = \sqrt{(-5+3)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{13}$$

$$|AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{65}$$



Obwód trójkąta jest równy:

$$|AB| + |CB| + |CA| = 2\sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{65} =$$
$$= 3\sqrt{13} + \sqrt{65}$$

Na podstawie rysunku można przypuszczać, że trójkąt ABC jest prostokątny. Sprawdźmy rachunkowo, czy rzeczywiście tak jest:

$$|AB|^2 + |CB|^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 52 + 13 = 65 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = |CA|^2$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt ABC jest prostokątny, z kątem prostym przy wierzchołku B. Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

Odp.: Obwód trójkąta jest równy $3\sqrt{13} + \sqrt{65}$, a jego pole wynosi 13.

Przykład 5 ◀ zad. 2.10

Dane są równania boków trójkąta:
$AB\colon 3x - y + 7 = 0,\ AC\colon x - y - 1 = 0$
i $BC\colon x + y - 3 = 0$.
Obliczymy jego obwód.

Zgodnie z przyjętą w naszych podręcznikach zasadą „równanie boku trójkąta" oznacza skrót określenia „równanie prostej, w której zawiera się bok trójkąta". Podobnie należy rozumieć „równanie wysokości trójkąta", „równanie dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta" itp.

Rozwiązanie

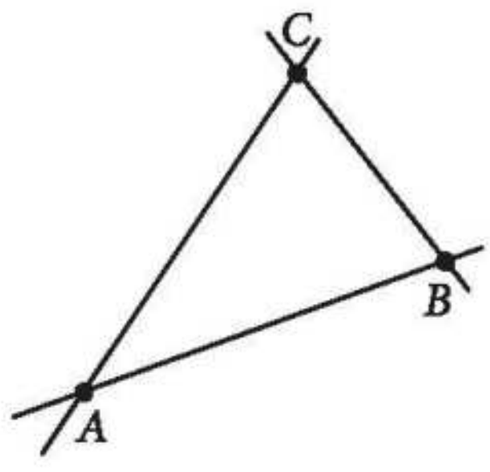
Do obliczenia długości boków trójkąta potrzebne są współrzędne jego wierzchołków. Aby je znaleźć, należy rozwiązać odpowiednie układy równań (rachunki zostawiamy do samodzielnego wykonania).

- $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ ⟵ punkt przecięcia prostych AB i AC jest wierzchołkiem A trójkąta

  $A = (-4, -5)$

- $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ ⟵ punkt przecięcia prostych AB i BC jest wierzchołkiem B trójkąta

  $B = (-1, 4)$



- $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ ⟵ punkt przecięcia prostych AC i BC jest wierzchołkiem C trójkąta

$C = (2, 1)$

Obliczamy długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(-1+4)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$
$$|AC| = \sqrt{(2+4)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$
$$|BC| = \sqrt{(2+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

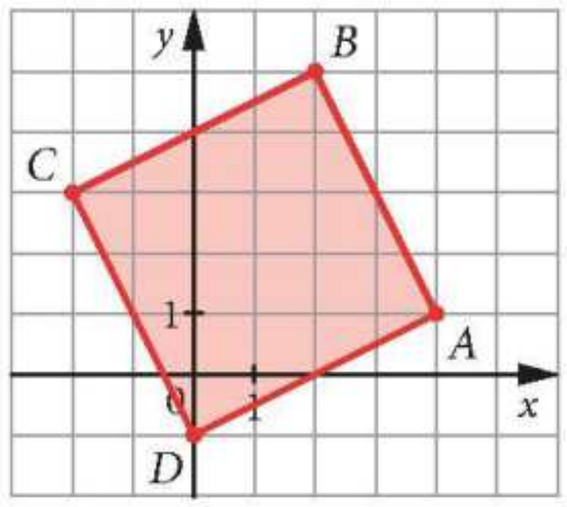
Odp.: Trójkąt ABC ma obwód równy $3\sqrt{10} + 9\sqrt{2}$.

Przykład 6

Obliczymy obwód i pole czworokąta $ABCD$, w którym $A = (4, 1)$, $B = (2, 5)$, $C = (-2, 3)$, $D = (0, -1)$.

Rozwiązanie

$$|AB| = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$
$$|CD| = \sqrt{2^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$
$$|DA| = \sqrt{4^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$



Czworokąt $ABCD$ jest rombem, a ponadto:

$$|DB| = \sqrt{2^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$
$$|DB|^2 = 40,\ |AB|^2 = 20,\ |DA|^2 = 20$$
$$|DB|^2 = |AB|^2 + |DA|^2$$

Czworokąt $ABCD$ jest rombem o kątach prostych, czyli kwadratem.
Obwód tego kwadratu jest równy $8\sqrt{5}$, a pole 20.

Odp.: Obwód czworokąta $ABCD$ wynosi $8\sqrt{5}$, a jego pole 20.

Środek ciężkości trójkąta

Przykład 7

W trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, 4)$, $B = (0, -2)$ i $C = (6, 4)$ poprowadzono środkową boku AC. Napiszemy równanie tej środkowej.

Środkową boku trójkąta nazywamy **odcinek** łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

Rozwiązanie

Szukana środkowa przechodzi przez środek boku AC oraz wierzchołek B. Środek boku AC ma współrzędne $(2, 4)$, punkt $B = (0, -2)$, zatem środkowa boku AC jest prostą o równaniu kierunkowym $y = ax + b$.

Wyznaczamy współczynniki a i b.

$$\begin{cases} 4 = 2a + b \\ -2 = b \end{cases}$$

Stąd $a = 3$ i $b = -2$.

Odp.: Środkowa boku AC ma równanie $y = 3x - 2$.

Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Przypomnijmy poznane w drugiej klasie twierdzenie o środkowych w trójkącie.

Twierdzenie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2 : 1$ (licząc od wierzchołka).

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$ jest punkt:

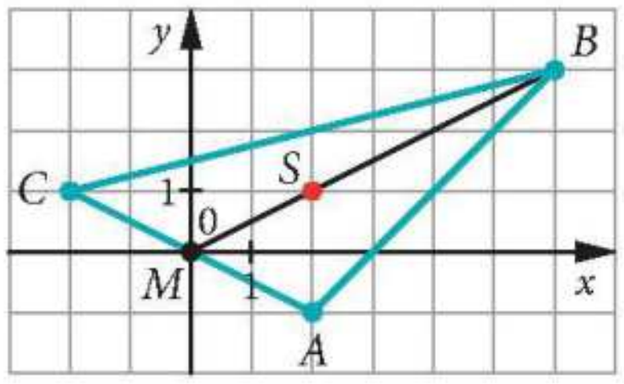
$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Dowód

Niech punkt M oznacza środek boku AC. Zatem:

$$M = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

Niech $S = (x_S, y_S)$ będzie punktem, który dzieli środkową BM tak, że $|BS| : |SM| = 2:1$. Zatem $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.



$$[x_S - x_B, y_S - y_B] = \frac{2}{3}[x_M - x_B, y_M - y_B]$$

$$\begin{cases} x_S - x_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_A + x_C}{2} - \frac{2}{3}x_B \\ y_S - y_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_A + y_C}{2} - \frac{2}{3}y_B \end{cases}$$

Przekształcamy układ równań i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_S - x_B = \frac{x_A + x_C}{3} - \frac{2}{3}x_B \\ y_S - y_B = \frac{y_A + y_C}{3} - \frac{2}{3}y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_S - 3x_B = x_A + x_C - 2x_B \\ 3y_S - 3y_B = y_A + y_C - 2y_B \end{cases} \qquad \begin{cases} x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC i $S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Koniec dowodu

Współrzędne środka ciężkości trójkąta są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków tego trójkąta.

Przykład 8 ◀ zad. 2.14

Wyznaczymy środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, 8)$, $B = (-1, -2)$ i $C = (4, 5)$.

Rozwiązanie

Niech S oznacza środek ciężkości tego trójkąta. Zatem:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{-5 - 1 + 4}{3}, \frac{8 - 2 + 5}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Odp.: $S = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

Przykład 9 ◀ zad. 2.19

W trójkącie ABC dane są: punkt $A = (-5, 2)$, $\overrightarrow{AB} = [11, -10]$ i środek ciężkości $S = (1, 0)$. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Rozwiązanie

Niech $B = (x_B, y_B)$.

$$[11, -10] = [x_B + 5, y_B - 2]$$

$$\begin{cases} 11 = x_B + 5 \\ -10 = y_B - 2 \end{cases}$$

Stąd $x_B = 6$ i $y_B = -8$, czyli $B = (6, -8)$.

Do obliczenia współrzędnych wierzchołka C zastosujemy wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta.

$$(1,\ 0) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

$$(1,\ 0) = \left(\frac{-5 + 6 + x_C}{3},\ \frac{2 - 8 + y_C}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 3 = 1 + x_C \\ 0 = -6 + y_C \end{cases}$$

Zatem $C = (2,\ 6)$.

Odp.: $B = (6,\ -8)$, $C = (2,\ 6)$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Odległość punktu $A = \left(\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$ od początku układu współrzędnych wynosi

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

2.2. Długość odcinka o końcach $G = \left(2\sqrt{7},\ 0\right)$ oraz $R = \left(\sqrt{7},\ -\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. 3. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $4\sqrt{14}$.

2.3. Obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-1,\ -2)$, $B = (2,\ 2)$, $C = (-2,\ -1)$ wynosi

A. 12. **B.** $12 + \sqrt{2}$. **C.** $10 + \sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{102}$.

2.4. Oblicz odległość punktu P od początku układu współrzędnych.

a) $P = (-4,\ 3)$

b) $P = (2,\ -5)$

c) $P = (-3,\ -9)$

d) $P = \left(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}\right)$

2.5. Oblicz odległość między podanymi punktami.

a) $A = (3,\ 7)$ i $B = (11,\ 7)$

b) $P = (-2,\ 5)$ i $Q = (5,\ 5)$

c) $K = \left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ i $L = \left(-2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

d) $M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i $N = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2.6. Oblicz długość odcinka AB.

a) $A = (1,\ -2)$, $B = (4,\ 2)$

b) $A = (5,\ -3)$, $B = (-1,\ 5)$

c) $A = (-6,\ -1)$, $B = (6,\ 8)$

d) $A = (-35,\ -4)$, $B = (5,\ 5)$

2.7. Oblicz obwód trójkąta o danych wierzchołkach.
a) $A = (3, 1)$, $B = (4, 3)$, $C = (-2, 6)$
b) $A = (-2, -2)$, $B = (-1, -7)$, $C = (2, -5)$
c) $A = (-1, -1)$, $B = (-2, 3)$, $C = (3, 1)$
d) $A = (3, 3)$, $B = (0, 4)$, $C = (0, 0)$

2.8. Oblicz obwód wielokąta, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty.
a) $A = (-3, -2)$, $B = (1, 1)$, $C = (5, -2)$
b) $A = (5, 8)$, $B = (-4, -4)$, $C = (4, 11)$
c) $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 5)$, $D = (-3, 3)$
d) $A = (-2, -2)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 5)$, $D = (-1, 1)$

D **2.9.** Wykaż, że trójkąt PQR jest prostokątny i oblicz jego pole.
a) $P = (5, 0)$, $Q = (3, 6)$, $R = (0, 5)$
b) $P = (-6, -4)$, $Q = (2, -2)$, $R = (-3, 1)$
c) $P = (4, -3)$, $Q = (2, 5)$, $R = (-2, 4)$
d) $P = (-4, -6)$, $Q = (6, -1)$, $R = (-6, -2)$

2.10. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.

a) $7x + y + 16 = 0$	$3x + 4y - 36 = 0$	$4x - 3y + 2 = 0$
b) $x + 2y - 6 = 0$	$x - y - 3 = 0$	$x + 4 = 0$
c) $4x + 3y - 2 = 0$	$3x + 4y + 2 = 0$	$x - y + 3 = 0$
d) $3x - 4y - 15 = 0$	$2x - 5y - 10 = 0$	$4x - 3y - 6 = 0$

2.11. Narysuj trójkąt ograniczony podanymi prostymi i oblicz jego pole.

a) $y = \frac{3}{4}x + 3$	$y = -x + 3$	$y = 0$
b) $y = x + 5$	$y = -3x - 3$	$x = 0$
c) $y = -1$	$y = 2x + 1$	$y = -x + 4$

2.12. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (-3, -3)$, $B = (3, 1)$, $C = (-9, 5)$.

2.13. Dane są współrzędne wierzchołków $A = (-3, 1)$ i $B = (3, 3)$ oraz punktu przecięcia przekątnych $S = (1, 5)$ równoległoboku $ABCD$. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

2.14. Wyznacz środek ciężkości trójkąta ABC.
a) $A = (-1, 2)$, $B = (3, 5)$, $C = (4, -10)$
b) $A = (-5, -6)$, $B = (-2, 4)$, $C = (16, -1)$

2.15. W trójkącie ABC dane są: $B = (6, 3)$, $C = (-7, 10)$ oraz środek ciężkości $S = (-2, 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka A.

2.16. Oblicz długości środkowych w trójkącie ABC.

a) $A = (2, 6)$, $B = (6, -2)$, $C = (-4, -4)$

b) $A = (1, -3)$, $B = (-2, -1)$, $C = (-5, -3)$

c) $A = (2, 4)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-1, 4)$

d) $A = (-2, -4)$, $B = (2, -1)$, $C = (0, -2)$

D **2.17.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (4, -4)$, $B = (6, 2)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-4, 2)$ są wierzchołkami rombu.

D **2.18.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (5, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-3, 1)$, $D = (-1, -3)$ są wierzchołkami kwadratu.

2.19. W trójkącie ABC dane są: punkt $B = (6, 0)$, $\overrightarrow{BC} = [-5, 10]$ i środek ciężkości $S = (1, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i C tego trójkąta.

Prosto do matury

1. Dane są punkty: $A = (-4, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-3, 1)$, $D = (2, -1)$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $|AB| < |CD|$ **B.** $|AB| \geqslant |CD|$ **C.** $|CB| < |AD|$

2. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o równaniach $x + y = 0$, $2x + y - 2 = 0$, $2x - y + 6 = 0$.

3. Punkty $A = (5, 2)$, $B = (0, 7)$ i $D = (5, -5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz obwód i długości przekątnych tego równoległoboku.

D **4.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $G = (4, -3)$, $H = (-1, 2)$, $L = (7, 0)$ jest prostokątny, i oblicz jego pole.

5. W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $C = (2, 7)$, środek $M = (0, 5)$ boku AC i środek $K = (4, 3)$ boku BC. Wyznacz równania środkowych trójkąta ABC.

3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Umiejętności:

- stosowanie geometrycznej interpretacji współczynnika kierunkowego prostej
- opisywanie prostych równoległych i prostopadłych za pomocą równań w postaci ogólnej
- obliczanie odległości punktu od prostej

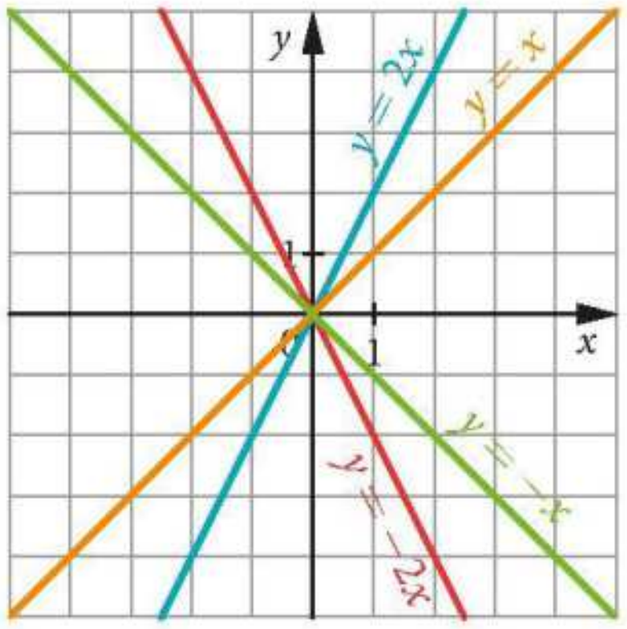
Geometryczna interpretacja współczynnika kierunkowego prostej

Przypomnijmy:

Definicja

Współczynnik a, występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax$ $(D = \mathbf{R})$, nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

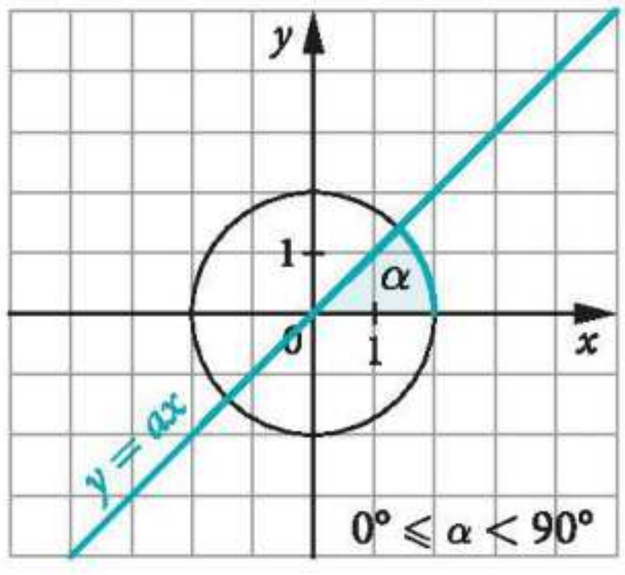
Wykresem funkcji $f(x) = ax$ jest prosta. Zauważmy, że $f(0) = 0$ i $f(1) = a$, zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $(0, 0)$ oraz $(1, a)$.

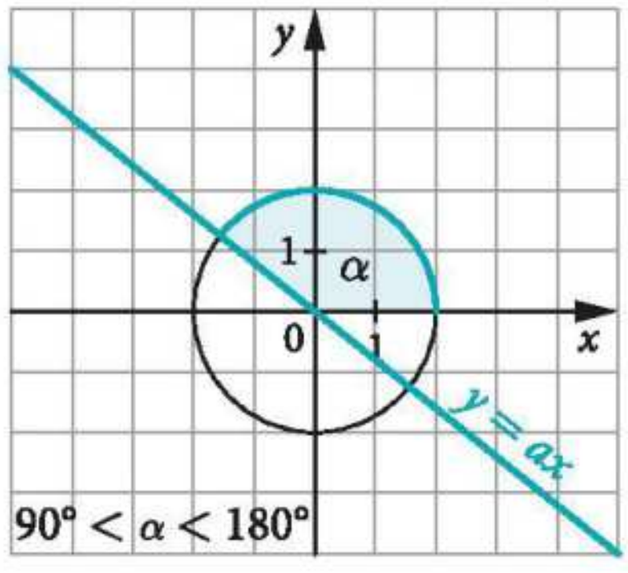


Jeżeli:

- $a = 0$, to wykres funkcji pokrywa się z osią x,
- $a > 0$, to wykres zawiera się w I i III ćwiartce układu współrzędnych,
- $a < 0$, to wykres zawiera się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Prosta o równaniu $y = ax$ wyznacza z osią x cztery kąty wypukłe. Jeden z nich, na poniższych rysunkach oznaczony α, nazywamy **kątem nachylenia prostej do osi** x. Mówimy też, że jest to **kąt, jaki prosta tworzy z osią** x.

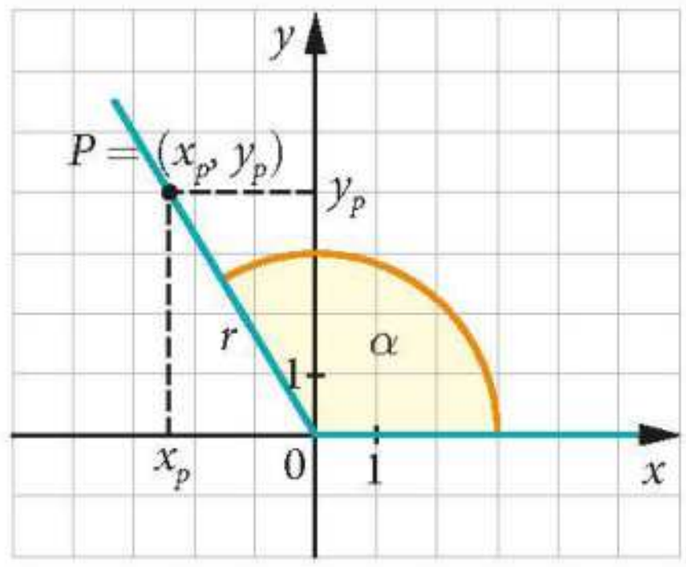




Kąt nachylenia prostej $y = ax$ do osi x spełnia zatem następujące warunki:
- jego wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych,
- dodatnia półoś x jest jego ramieniem początkowym, a ramię końcowe zawiera się w prostej $y = ax$,
- $0° \leqslant \alpha < 180°$ i $\alpha \neq 90°$.

Zauważmy, że jeśli punkt $P \neq (0, 0)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = ax$, to jego współrzędne (x, y) spełniają warunek:

$$\frac{y}{x} = a$$



Z drugiej strony – jeżeli punkt $P = (x, y)$ leży na końcowym ramieniu kąta α, który prosta $y = ax$ tworzy z osią x, to:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Zatem **współczynnik kierunkowy a jest równy tangensowi kąta nachylenia α** wykresu funkcji $f(x) = ax$ do osi x:

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

Kąt nachylenia wykresu funkcji $f(x) = ax$ do osi x jest kątem:
- zerowym, gdy $a = 0$,
- ostrym, gdy $a > 0$,
- rozwartym, gdy $a < 0$.

Przykład 1 ◂ zad. 3.4

Napiszemy równanie prostej postaci $y = ax$, nachylonej do osi x pod kątem
a) $120°$. b) $45°$.

Rozwiązanie

a) $a = \operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) =$
$= -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$
$y = -\sqrt{3}x$

b) $a = \operatorname{tg} 45° = 1$
$y = x$

Odp.: a) $y = -\sqrt{3}x$ b) $y = x$

Przykład 2 ◂ zad. 3.5

Wyznaczymy w przybliżeniu do $1°$ kąt nachylenia podanej prostej do osi x.
a) $y = 0{,}4x$ b) $y = -4x$

Rozwiązanie

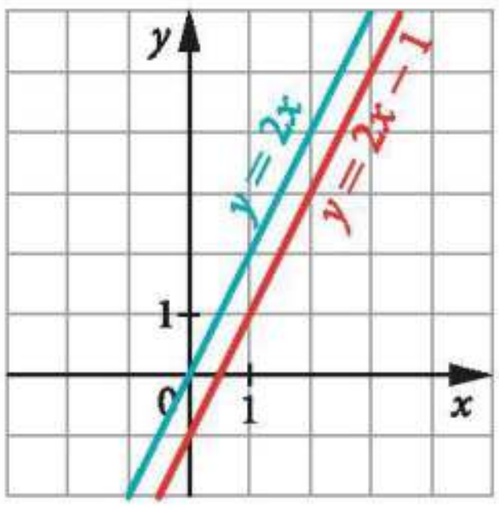
a) $y = 0{,}4x$, zatem α jest takim kątem, że $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$.
Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta, którego tangens jest w przybliżeniu równy 0,4: $\operatorname{tg} 22° \approx 0{,}4$.

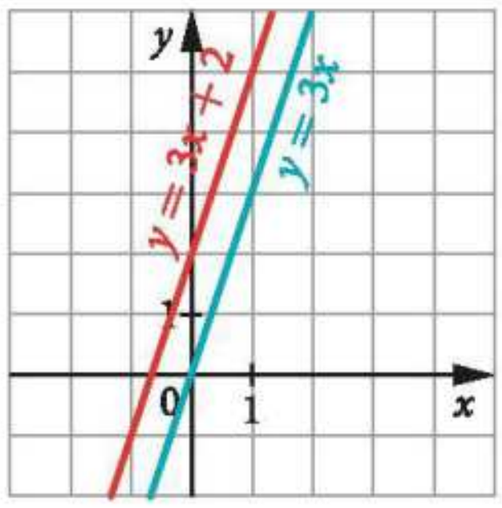
b) $y = -4x$, zatem α jest takim kątem, że $\operatorname{tg}\alpha = -4$.
Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta β, którego tangens jest w przybliżeniu równy 4: $\operatorname{tg} 76^\circ \approx 4$.
Korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta$.
Zatem: $-4 = -\operatorname{tg} 76^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 76^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$, czyli $\alpha = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

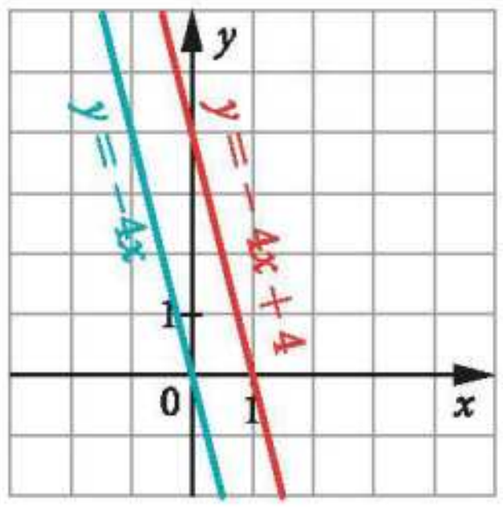
Odp.: a) 22° b) 104°

Równania prostych równoległych na płaszczyźnie

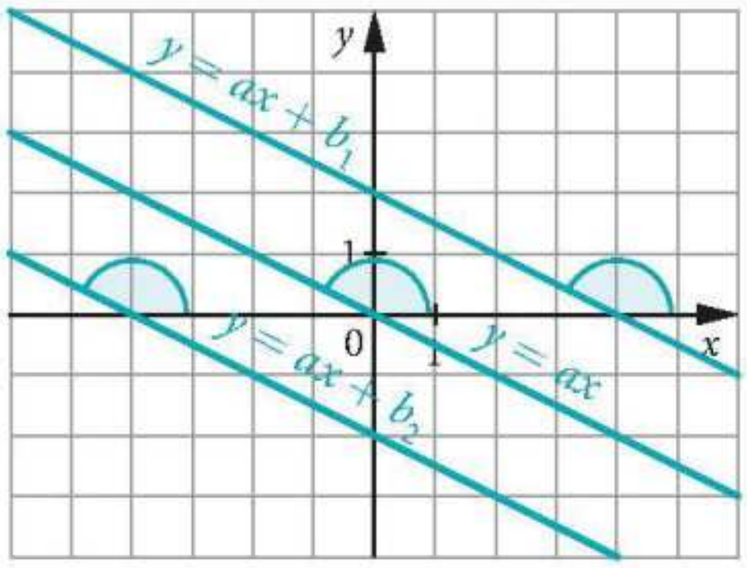
Przypomnijmy: jeżeli wykres funkcji $y = ax$ przesuniemy równolegle o b jednostek wzdłuż osi y, to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = ax + b$.







Inaczej mówiąc, prosta $y = ax + b$, $b \in \mathbf{R}$, jest nachylona do osi x pod takim samym kątem jak prosta $y = ax$.



Proste k i l na płaszczyźnie nazywamy równoległymi, jeżeli nie mają punktu wspólnego albo gdy mają wszystkie punkty wspólne.

Przykład 3 ◂ zad. 3.6

Napiszemy równanie prostej nachylonej do osi x pod kątem 150° i przechodzącej przez punkt $M = (-3, 5)$.

Rozwiązanie

$y = ax + b$ ⟵ szukamy współczynników a i b

$a = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$

$5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + b$ ⟵ podstawiamy współrzędne punktu M

$b = 5 + \sqrt{3}$, więc $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$.

Udowodnimy twierdzenie, które sformułowaliśmy w klasie pierwszej.

Twierdzenie

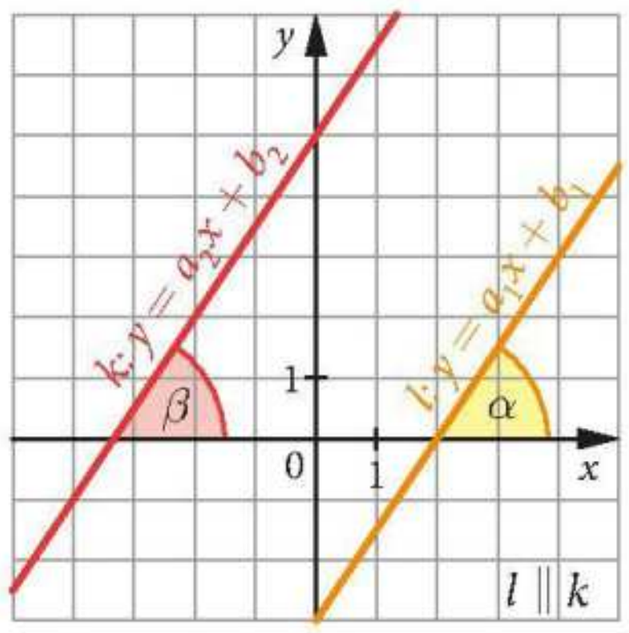
Proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn. gdy $a_1 = a_2$.

Dowód

Dwie proste w układzie współrzędnych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich kąty nachylenia do osi x są równe:

$\alpha = \beta$ ⟵ kąty odpowiadające

Oznaczmy $a_1 = \operatorname{tg}\alpha$ i $a_2 = \operatorname{tg}\beta$.



Mamy więc udowodnić dwa twierdzenia:
1. Jeżeli $\alpha = \beta$, to $a_1 = a_2$.
2. Jeżeli $a_1 = a_2$, to $\alpha = \beta$.

Pierwsze twierdzenie jest oczywiste: jeżeli $\alpha = \beta$, to $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, czyli $a_1 = a_2$.

W drugą stronę: jeżeli $a_1 = a_2$, to $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.
Kąty α i β są kątami nachylenia prostych do osi x, czyli $\alpha, \beta \in \langle 0°; 180°) - \{90°\}$.
Dla takich kątów równość $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ oznacza, że $\alpha = \beta$.

Koniec dowodu

Zbadamy teraz zależność między równaniami ogólnymi prostych równoległych.
Niech $k: ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$.
Zastanówmy się, jaką postać mają równania prostych równoległych do prostej k.
Rozpatrzymy trzy przypadki.

I. Prosta k jest równoległa do osi y (jest prostą pionową, $a \neq 0,\ b = 0$):

$k: ax + c = 0$, czyli $k: x + \frac{c}{a} = 0$, inaczej: $x + c_1 = 0$

Prosta l równoległa do prostej k jest również prostą równoległą do osi y, zatem jej równanie ma postać $x + d = 0$.

II. Prosta k jest równoległa do osi x (jest prostą poziomą, $a = 0,\ b \neq 0$):

$k: by + c = 0$, czyli $k: y + \frac{c}{b} = 0$, inaczej: $y + c_1 = 0$

Prosta l równoległa do prostej k jest również prostą równoległą do osi x, zatem jej równanie ma postać $y + d = 0$.

III. Prosta k nie jest równoległa do żadnej z osi układu współrzędnych $(ab \neq 0)$:

k: $ax + by + c = 0$

Na mocy udowodnionego wcześniej twierdzenia wiemy, że prosta l jest równoległa do k wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe obydwu prostych są równe.

Wyznaczamy równanie kierunkowe prostej k:

$by = -ax - c$, stąd $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Zatem prosta l ma równanie kierunkowe l: $y = -\frac{a}{b}x + c_1$, a po przekształceniu do postaci ogólnej l: $ax + by - bc_1 = 0$, inaczej: $ax + by + d = 0$.

Zauważmy, że w każdym z trzech przypadków równania prostych k i l różnią się tylko wyrazem wolnym. Nasze rozważania zapiszemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie

Prosta l jest równoległa do prostej k: $ax + by + c = 0$ $\left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $ax + by + d = 0$. Ponadto jeżeli $c = d$, to $k = l$, a jeżeli $c \neq d$, to $k \neq l$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.7

Dana jest prosta k: $2x - 5y + 1 = 0$. Wyznaczymy równanie równoległej do niej prostej

a) l przechodzącej przez punkt $A = (-3, 4)$.

b) p przechodzącej przez punkt $B = \left(0, \sqrt{3}\right)$.

Rozwiązanie

Każdą prostą równoległą do prostej k można opisać za pomocą równania postaci $2x - 5y + c = 0$. Zatem:

a) $2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 + c = 0$, stąd $c = 26$, czyli l: $2x - 5y + 26 = 0$

b) $-5 \cdot \sqrt{3} + c = 0$, stąd $c = 5\sqrt{3}$, czyli p: $2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Odp.: a) l: $2x - 5y + 26 = 0$ b) p: $2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Przykład 5 ◀ zad. 3.8

Sprawdzimy, czy proste l: $\frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0$, m: $2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ i p: $-3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$ są równoległe do prostej k: $-3x + 4y - 2 = 0$.

Równanie ogólne prostej możemy zapisać na nieskończenie wiele sposobów (możemy mnożyć obydwie jego strony przez dowolną liczbę różną od zera).

Rozwiązanie

- Prosta l jest równoległa do prostej k: $-3x + 4y - 2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $-3x + 4y + c = 0$, gdzie $c \in \mathbf{R}$.
  Przekształcamy dane równanie prostej l tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3.

$$\frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0 \qquad \longleftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez } -\frac{7}{2}$$

$$-3x + 4y - \frac{7\sqrt{11}}{2} = 0$$

  Zatem $c = -\frac{7\sqrt{11}}{2}$, czyli prosta l jest równoległa do prostej k (i różna od k).

- Postępujemy podobnie jak poprzednio. Przekształcamy dane równanie prostej m tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3.

$$2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \qquad \longleftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez } -\frac{3}{2}$$

$$-3x + 4y - 2 = 0$$

  Zatem $c = -2$, czyli prosta l jest równoległa do prostej k, bo jest z nią identyczna.

- Przekształcamy dane równanie prostej p tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3.

$$-3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0 \qquad \longleftarrow \text{obie strony równania dzielimy przez } \sqrt{5}$$

$$-3x - 4y + 2 = 0$$

  Równania $-3x - 4y + 2 = 0$ nie doprowadzimy do żądanej postaci.

  Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} -3x - 4y + 2 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$ prowadzi do wyznaczenia dokładnie jednego punktu wspólnego prostych p i k: $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Zatem proste p i k nie są równoległe.

Odp.: Proste l oraz m są równoległe do k, prosta p nie jest równoległa do k.

Równania prostych prostopadłych na płaszczyźnie

Twierdzenie

Prosta l jest prostopadła do prostej k: $ax + by + c = 0$ $\left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $bx - ay + c_1 = 0$.

Dowód

Zauważmy, że każde równanie ogólne prostej można przekształcić do postaci, w której przynajmniej jeden ze współczynników przy zmiennych x, y ma wartość 1.

Rozważymy więc trzy możliwe sytuacje.

I. $a = 0$ i $b = 1$

Prosta k ma wtedy równanie $y + c = 0$, czyli jest równoległa do osi x. Każda prosta l prostopadła do k jest więc prostopadła do osi x, czyli ma równanie postaci $x + p = 0$. Zatem teza twierdzenia jest prawdziwa.

II. $a = 1$ i $b = 0$

Prosta k ma równanie $x + c = 0$, czyli jest równoległa do osi y. Każda prosta l prostopadła do k ma więc równanie postaci $y + q = 0$ lub inaczej $-y - q = 0$, czyli teza twierdzenia jest prawdziwa.

III. $ab \neq 0$

Przekształcamy równanie prostej k do postaci kierunkowej: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Korzystamy z twierdzenia udowodnionego w klasie pierwszej: prosta l prostopadła do prostej $k : y = mx + p$ $(m \neq 0)$ ma równanie postaci $y = -\frac{1}{m}x + q$.

Zatem:

$l: y = \frac{b}{a}x + q$ $\qquad$ $l: bx - ay + aq = 0$ $\qquad$ $l: bx - ay + c_1 = 0$ $\qquad$ $\longleftarrow c_1 = aq$

Koniec dowodu

Przykład 6 ◀ zad. 3.10

Napiszemy równanie prostej l prostopadłej do prostej $k: 2x + 7y = 0$ i przechodzącej przez punkt $A = \left(2\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right)$.

Rozwiązanie

$l: 7x - 2y + c = 0$ $\qquad$ $\longleftarrow l \perp k$

$14\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + c = 0$ $\qquad$ $\longleftarrow A = \left(2\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right) \in l$

$c = -16\sqrt{7}$

Odp.: $l: 7x - 2y - 16\sqrt{7} = 0$

Odległość punktu od prostej

Przykład 7

Obliczymy odległość punktu $P = (-2, 3)$ od prostej $l: 3x - 4y + 1 = 0$.

Rozwiązanie

Krok 1: Wyznaczymy równanie prostej $k \perp l$ i przechodzącej przez punkt P.

Krok 2: Wyznaczymy współrzędne punktu Q przecięcia prostych l i k.

Krok 3: Obliczymy długość odcinka PQ, która jest szukaną odległością punktu P od prostej l.

Mamy więc (rachunki pozostawiamy do samodzielnego wykonania):

1. $k\colon 4x + 3y + c = 0$
   $-8 + 9 + c = 0$, stąd $c = -1$
   $k\colon 4x + 3y - 1 = 0$

2. $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$, stąd $Q = \left(\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right)$.

3. $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{1}{25} + 2\right)^2 + \left(\frac{7}{25} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{7225}{25^2}} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5}$

Odp.: Punkt P jest odległy od prostej l o $\frac{17}{5}$.

Jeśli przeprowadzimy powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $P = (x_0, y_0)$ i dowolnej prostej $ax + by + c = 0$, to po rachunkach, których nie będziemy tu podawać, otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Twierdzenie

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$ $\left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$ jest równa:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Przykład 8 ◂ zad. 3.11

Odległość punktu $P = (1, -5)$ od prostej $x + 2y - 3 = 0$ jest równa

$\frac{|1 - 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 9 ◂ zad. 3.15–3.17

Obliczymy pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (-8, 0)$, $B = (5, 1)$, $C = (-2, 2)$.

Rozwiązanie

I sposób

Wykorzystamy wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}a \cdot h$. Jako podstawę przyjmiemy bok AB (więc $a = |AB|$). Wówczas wysokość h poprowadzona z wierzchołka C jest odległością punktu C od prostej AB. Mamy zatem:

$a = |AB| = \sqrt{(5 + 8)^2 + 1^2} = \sqrt{170}$

Równanie prostej AB zapisujemy w postaci $y = mx + n$ i po podstawieniu współrzędnych punktów A i B mamy:

$$\begin{cases} 0 = -8m + n \\ 1 = 5m + n \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{13},\ n = \frac{8}{13}$$

Prosta AB ma równanie: $y = \frac{1}{13}x + \frac{8}{13}$, a w postaci ogólnej: $x - 13y + 8 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB, czyli wysokość trójkąta.

$$h = \frac{|1 \cdot (-2) - 13 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{1^2 + 13^2}} = \frac{20}{\sqrt{170}}$$

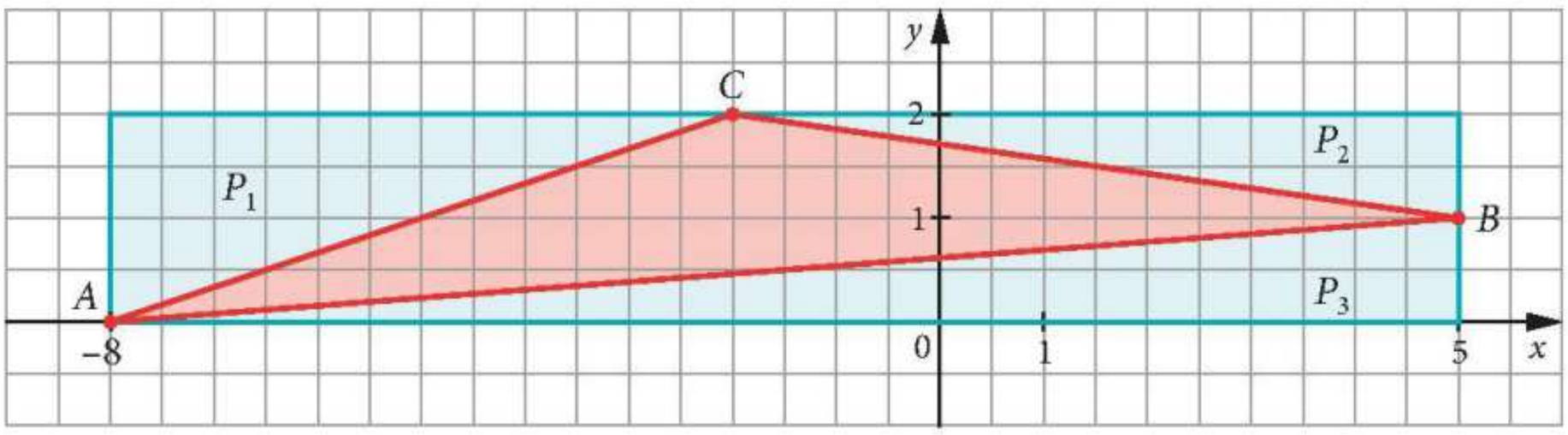
$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{170} \cdot \frac{20}{\sqrt{170}} = 10$$

II sposób

Opisany powyżej sposób rozwiązania jest jedną z ogólnych metod stosowanych w takich zadaniach. Natomiast w tym konkretnym przypadku na pytanie można odpowiedzieć szybciej, ponieważ wierzchołki trójkąta są punktami kratowymi.

Punkt kratowy to punkt, którego współrzędne są liczbami całkowitymi.

Zaznaczamy odpowiednie figury w układzie współrzędnych.



Aby obliczyć pole trójkąta ABC, należy od pola P prostokąta odjąć sumę pól trzech trójkątów (na rysunku oznaczonych P_1, P_2 oraz P_3).

$$P_{ABC} = P - (P_1 + P_2 + P_3) = 13 \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 13\right) = 10$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe 10.

Przykład 10 ◀ zad. 3.19

Obliczymy odległość między prostymi równoległymi $k: x + y - 1 = 0$ i $l: x + y - 3 = 0$.

Mierzenie odległości między prostymi ma sens tylko wtedy, gdy te proste są równoległe.

Rozwiązanie

Wyznaczamy jakikolwiek punkt leżący na jednej z prostych, np. punkt przecięcia prostej k z osią y: $(0, 1)$. Następnie obliczamy odległość tego punktu od drugiej prostej:

$$\frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Odp.: Odległość między prostymi jest równa $\sqrt{2}$.

Przykład 11 ◀ zad. 3.25

Napiszemy równania dwusiecznych kątów utworzonych przez przecinające się proste k: $x - y + 3 = 0$ i m: $7x + y - 5 = 0$.

Rozwiązanie

Punkt $P = (x, y)$ należy do dwusiecznej jednego z tych kątów wtedy i tylko wtedy, gdy jest równo oddalony od obu prostych. Jego współrzędne spełniają zatem równanie $\frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x + y - 5|}{\sqrt{49 + 1}}$.

Mamy zatem:

$$\frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x + y - 5|}{5\sqrt{2}}$$

$5|x - y + 3| = |7x + y - 5|$ ⟵ $|a| = |b|$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $a = -b$

$5(x - y + 3) = 7x + y - 5$ lub $5(x - y + 3) = -7x - y + 5$

$2x + 6y - 20 = 0$ lub $12x - 4y + 10 = 0$

$x + 3y - 10 = 0$ lub $6x - 2y + 5 = 0$

Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe. Zauważmy, że wyznaczone proste spełniają warunek prostopadłości.

Odp.: Szukanymi dwusiecznymi są proste: $x + 3y - 10 = 0$, $6x - 2y + 5 = 0$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż kąt, który przybliża z dokładnością do 1° kąt nachylenia prostej $y = -1{,}6x$ do osi x.

A. 58° **B.** 167° **C.** 122° **D.** −122°

3.2. Wskaż prostą, która tworzy z osią x kąt o mierze 150°.

A. $\sqrt{3}x + y + 3 = 0$ **C.** $\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$

B. $\sqrt{3}x + 3y - 11 = 0$ **D.** $\sqrt{3}x - 3y + 3 = 0$

3.3. Wskaż prostą równoległą do prostej $x - \sqrt{3}y + \sqrt{2} = 0$.

A. $x - y + \sqrt{2} = 0$

B. $x + \sqrt{3}y + \sqrt{7} = 0$

C. $\sqrt{3}x - 3y - 11 = 0$

D. $x - y - 1 = 0$

3.4. Napisz równanie prostej postaci $y = ax$, która tworzy z osią x podany kąt.

a) $150°$

b) $135°$

c) $60°$

d) $30°$

3.5. Wyznacz kąt nachylenia prostej do osi x. Wynik podaj z dokładnością do $1°$.

a) $y = 0{,}6x$

b) $y = -2{,}6x$

c) $y = 9x$

d) $y = -14x$

e) $y = 0{,}06x$

f) $y = -0{,}1x$

3.6. Napisz równanie prostej l nachylonej do osi x pod kątem α i przechodzącej przez punkt P.

a) $\alpha = 45°$ $P = (4, 18)$

b) $\alpha = 60°$ $P = (5, 1)$

c) $\alpha = 30°$ $P = (-5, 0)$

d) $\alpha = 120°$ $P = \left(\sqrt{3}, 2\right)$

e) $\alpha = 0°$ $P = (-3, -2)$

f) $\alpha = 135°$ $P = (0, -7)$

3.7. Napisz równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k\colon 9x - 2y + 1 = 0$, $P = (0, -3)$

b) $k\colon 2x + 3y - 10 = 0$, $P = (1, 1)$

c) $k\colon 7x + y - 18 = 0$, $P = (5, 0)$

d) $k\colon 6x - 5y + 19 = 0$, $P = (-2, -3)$

e) $k\colon x + 11y - 21 = 0$, $P = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

f) $k\colon 5x + \sqrt{3}y - 18 = 0$, $P = \left(2, -\sqrt{3}\right)$

3.8. Sprawdź, czy proste l i p są równoległe do prostej k.

a) $k\colon x - 2y + 9 = 0$ $l\colon 2x - 4y + 7 = 0$ $p\colon 3x + 2y - 1 = 0$

b) $k\colon -3x + y + 7 = 0$ $l\colon 9x + 3y - \sqrt{2} = 0$ $p\colon 6x - 2y + 11 = 0$

c) $k\colon \sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 3\sqrt{7} = 0$ $l\colon -6x - 12y + 7 = 0$ $p\colon 3x + 6y + \sqrt{2} = 0$

d) $k\colon x + y = 0$ $l\colon 3x - 3y + 5 = 0$ $p\colon -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 7 = 0$

3.9. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołek $C = (10, 4)$ oraz równania boków $AB\colon y = 1$ i $AD\colon 3x - 2y - 4 = 0$. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

3.10. Napisz równanie ogólne prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k\colon 8x + 3y - 1 = 0$, $P = (-2, -2)$

b) $k\colon 5x + 11y = 0$, $P = (-1, -5)$

c) $k\colon \sqrt{2}x - 3y + 2\sqrt{2} = 0$, $P = \left(0, \sqrt{2}\right)$

d) $k\colon \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1 = 0$, $P = (0, 0)$

e) $k\colon 6x - 2y + 17 = 0$, $P = (3, -2)$

f) $k\colon 4x + 7y + \sqrt{15} = 0$, $P = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

3.11. Wyznacz odległości punktów $A = (4, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 2)$ od prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$.

3.12. Wyznacz odległości punktów $A = (2, 0)$, $B = (3, -2)$, $C = (-3, -7)$ od prostej o równaniu $y = 2x - 1$.

3.13. Wyznacz odległość punktu przecięcia prostych o równaniach $y = -\frac{5}{2}x + 2$ i $y = x - 5$ od prostej o równaniu $y = -x + 3$.

3.14. Wyznacz odległość punktu $P = (3, 0)$ od prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, -3)$ i $B = (-4, 9)$.

3.15. Oblicz pole trójkąta ABC o podanych wierzchołkach.

a) $A = (5, 5)$ $B = (-2, 4)$ $C = (-1, -3)$

b) $A = (-4, -2)$ $B = (1, 5)$ $C = (-3, 6)$

3.16. Boki trójkąta zawierają się w prostych: $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

3.17. Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt $ABCD$ i oblicz jego obwód oraz pole.

a) $A = (4, -2)$ $B = (2, 1)$ $C = (-3, 2)$ $D = (1, -4)$

b) $A = (7, 2)$ $B = (5, 4)$ $C = (-1, -2)$ $D = (1, -4)$

c) $A = (-1, 0)$ $B = (1, 3)$ $C = (-2, 5)$ $D = (-4, 2)$

d) $A = (-4, 0)$ $B = (1, -5)$ $C = (2, 2)$ $D = (-2, 4)$

3.18. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty oraz $A = (11, 6)$ i $B = (0, 9)$. Przyprostokątna CB zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 9$. Oblicz współrzędne punktu C oraz długości boków tego trójkąta.

3.19. Wyznacz odległość między prostymi k i l.

a) k: $3x + 4y = 0$ l: $3x + 4y + 10 = 0$

b) k: $x - 2y + 1 = 0$ l: $x - 2y - 4 = 0$

c) k: $y = x$ l: $y = x - 3$

d) k: $y = -\frac{1}{3}x + 2$ l: $y = -\frac{1}{3}x - 1$

3.20. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

a) $A = (-3, -1)$, $B = (3, 5)$

b) $A = (0, 2)$, $B = (8, 0)$

c) $A = (1, -1)$, $B = (-2, 5)$

d) $A = (-5, 6)$, $B = (3, 1)$

3.21. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (2, 7)$, $B = (-1, 4)$, $C = (5, 2)$. Wyznacz równanie wysokości AD tego trójkąta.

3.22. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dane są współrzędne wierzchołków $A = (5, 2)$ i $B = (-1, 4)$. Punkt C leży na prostej $k: 2x - 3y + 19 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

* **3.23.** W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są współrzędne wierzchołków $A = (-2, -2)$, $B = (8, 3)$, $C = (3, 8)$. Oblicz pole tego trapezu.

* **3.24.** W trójkącie ABC o kątach $\sphericalangle CAB = 60°$ i $\sphericalangle ABC = 45°$ dane są współrzędne wierzchołków $A = (0, 0)$ i $B = (8, 0)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

3.25. Boki trójkąta są zawarte w prostych: $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

a) Wyznacz wierzchołki tego trójkąta.

b) Napisz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Prosta o równaniu $x - 2y - 1 = 0$ jest

A. równoległa do prostej $2x - y - 1 = 0$.

B. prostopadła do prostej $2x + y + 2 = 0$.

C. oddalona o $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ od prostej $x - 2y - 3 = 0$.

2. Napisz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -4)$.

3. Oblicz pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (1, 2)$, $B = (4, 8)$ i $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$.

4. W trójkącie ABC dane są współrzędne wierzchołka $A = (-4, -2)$ oraz równania wysokości BD: $2x + y - 2 = 0$ i CE: $x - 4y + 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C.

5. Napisz równania dwusiecznych kątów zawartych między prostymi $x + y - 4 = 0$ i $7x - y + 4 = 0$.

4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

Umiejętności:

- opisywanie okręgu za pomocą równania $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ lub $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
- opisywanie koła za pomocą nierówności $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$ lub $x^2+y^2-2ax-2by+c \leqslant 0$

Równanie okręgu

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o r od punktu S. Punkt $P=(x, y)$ należy zatem do okręgu o środku $S=(a, b)$ i promieniu r $(r>0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|SP|=r$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów S i P do wzoru na odległość otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

Obie strony tego równania są liczbami dodatnimi, zatem możemy je podnieść do kwadratu i otrzymamy:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Równania $f(x)=g(x)$ i $f^2(x)=g^2(x)$ nie muszą być równoważne, tzn. najczęściej mają różne zbiory rozwiązań. Na przykład rozwiązaniem równania $x=2$ jest tylko liczba 2, natomiast rozwiązaniami równania $x^2=4$ są dwie liczby: 2 oraz -2.
Jeżeli chcemy podnieść równanie $f(x)=g(x)$ stronami do kwadratu i otrzymać równanie równoważne, to równocześnie musimy założyć, że $f(x)$ i $g(x)$ mają ten sam znak – są albo niedodatnie, albo nieujemne.

Wniosek

Równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $r>0$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **okrąg** o środku $S=(a, b)$ i promieniu r.

Równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $r>0$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

Zapiszemy równanie okręgu o danym środku S i promieniu r.

Rozwiązanie

a) $S = (1, 5),\ r = 3$

Do wzoru $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ podstawiamy $a = 1,\ b = 5,\ r = 3$ i otrzymujemy równanie $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$.

b) $S = (-2, 3),\ r = \sqrt{2}$

Równanie tego okręgu ma postać: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$.

c) $S = (3, 0),\ r = 1$

Równanie okręgu ma postać: $(x-3)^2 + y^2 = 1$.

Przykład 2 ◂ zad. 4.5

Sprawdzimy, czy dane równanie opisuje okrąg. Jeśli tak, odczytamy współrzędne jego środka i promień.

a) $x^2 + (y-4)^2 = 1$

b) $\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + (3-y)^2 = 5$

c) $(x-3)^2 + (2y-3)^2 = 1$

d) $(x-5)^2 + (y+8)^2 = -4$

e) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$

Rozwiązanie

a) Równanie opisuje okrąg o środku $S = (0, 4)$ i promieniu $r = 1$.

b) Równanie można zapisać w postaci $\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, więc opisuje ono okrąg o środku $S = \left(-\sqrt{7}, 3\right)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.

c) Równanie nie opisuje okręgu, ponieważ nie można go zapisać w postaci $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

d) Równanie nie opisuje okręgu. Żadna para liczb (x, y) go nie spełnia. Równanie opisuje zbiór pusty.

e) Równanie opisuje zbiór jednoelementowy. Tylko współrzędne punktu $(5, -3)$ spełniają to równanie.

Przykład 3 ◂ zad. 4.8

Napiszemy równanie okręgu o środku $S = (1, -9)$ przechodzącego przez punkt $A = (0, 2)$.

Rozwiązanie

Szukane równanie ma postać $(x-1)^2 + (y+9)^2 = r^2$.

Promień r tego okręgu jest równy odległości jego środka S od punktu A. Wystarczy obliczyć kwadrat tej odległości:

$$r^2 = (1-0)^2 + (-9-2)^2 = 1^2 + 11^2 = 122$$

Odp.: $(x-1)^2 + (y+9)^2 = 122$

Równanie okręgu jest często zapisywane w innej postaci. Prowadzące do niej przekształcenia zapiszemy równolegle – dla konkretnego okręgu oraz dla ogólnych danych.

Równanie okręgu: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ Środek: $S=(2,-1)$ Promień: $r=5$	Równanie okręgu: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ Środek: $S=(a,b)$ Promień: r
Wykonujemy działania po lewej stronie równania.	
$x^2-4x+4+y^2+2y+1=25$	$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$
Porządkujemy wyrażenie.	
$x^2+y^2-4x+2y-20=0$	$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie $c=a^2+b^2-r^2$, to w prawej kolumnie tabeli otrzymamy równanie postaci:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

Takie równanie opisuje okrąg, o ile promień r niewystępujący bezpośrednio w równaniu jest dodatni. Sprawdźmy, jakie zatem założenia muszą spełnić współczynniki a, b i c. Mamy:

$$c=a^2+b^2-r^2, \text{ stąd } r^2=a^2+b^2-c$$

zatem $r>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2+b^2-c>0$. Wówczas $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Wniosek

Równanie $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, w którym $a, b, c \in \mathbf{R}$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku $S=(a,b)$ i promieniu $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$, o ile spełnione jest założenie $a^2+b^2>c$.

Równanie $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, gdy $a^2+b^2>c$, nazywamy **równaniem okręgu w postaci ogólnej.**

Przykład 4 zad. 4.9

Zbadamy, jaki zbiór jest opisany za pomocą podanego równania.

a) $x^2-2x+y^2+6y+6=0$

b) $x^2+y^2-8y+17=0$

c) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x+2=0$

Rozwiązanie

a) $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$ $\longleftarrow a = 1,\ b = -3,\ c = 6$

Sprawdzamy, czy $a^2 + b^2 > c$:

$1 + 9 > 6$

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = 2$

Odp.: Jest to równanie okręgu o środku $S = (1, -3)$ i promieniu 2.

b) $x^2 + y^2 - 8y + 17 = 0$ $\longleftarrow a = 0,\ b = 4,\ c = 17$

Sprawdzamy warunek $a^2 + b^2 > c$:

$0 + 16 < 17$

Odp.: Podane równanie opisuje zbiór pusty.

c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ $\longleftarrow a = \sqrt{2},\ b = 0,\ c = 2$

Sprawdzamy warunek $a^2 + b^2 > c$:

$2 + 0 = 2$

Równanie nie opisuje okręgu. Można je zapisać w postaci $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 0$.

Odp.: Za pomocą podanego równania opisany jest punkt o współrzędnych $\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

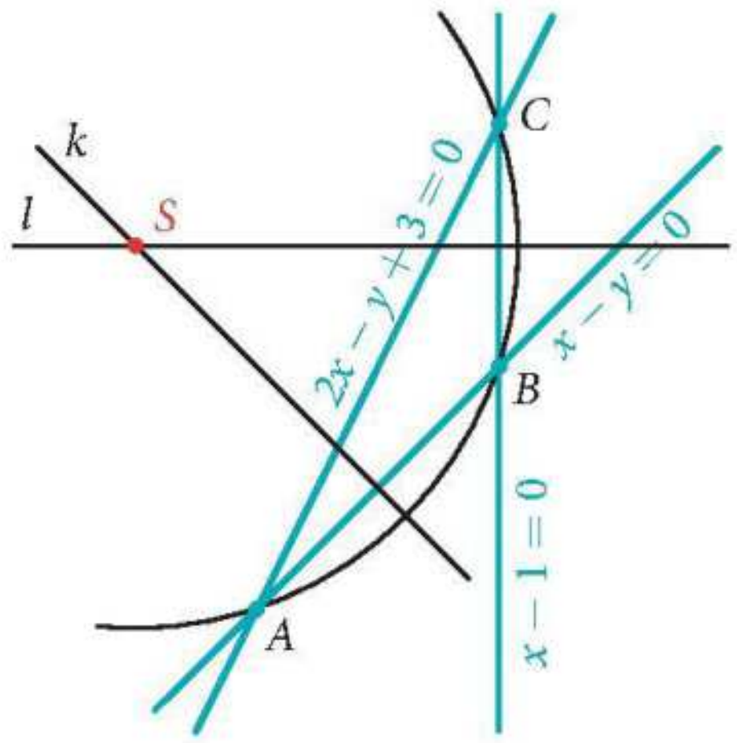
Przykład 5 ◂ zad. 4.20

Napiszemy równanie okręgu opisanego na trójkącie o bokach zawartych w prostych $2x - y + 3 = 0$, $x - y = 0$ oraz $x - 1 = 0$.

Rozwiązanie

I sposób

Na rysunku mamy pomocniczy szkic sytuacji podanej w zadaniu.



Opiszemy etapy konstruowania okręgu opisanego na trójkącie.

Należy wyznaczyć kolejno:

Krok 1: Wierzchołki trójkąta – oznaczmy je A, B i C.

Krok 2: Równania symetralnych k i l dwóch wybranych boków trójkąta ABC.

Krok 3: Punkt S przecięcia tych symetralnych będący środkiem szukanego okręgu.

Krok 4: Odległość punktu S od jednego z wierzchołków trójkąta, będącą promieniem r szukanego okręgu.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:
prosta AC: $2x - y + 3 = 0$, prosta AB: $x - y = 0$, prosta BC: $x - 1 = 0$.

Wykonujemy kolejne kroki.

1. Rozwiązujemy trzy układy równań (przekształcenia rachunkowe zostawiamy do samodzielnego wykonania):

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy: $A = (-3, -3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 5)$.

2. Wyznaczamy równania symetralnych k, l boków AB i BC.

- $(-1, -1)$ ⟵ współrzędne środka boku AB
  $k: x + y + c = 0$ ⟵ $k \perp AB$
  $c = 2$ ⟵ $(-1, -1) \in k$
  $k: x + y + 2 = 0$
- $(1, 3)$ ⟵ współrzędne środka boku BC
  $l: y + c = 0$ ⟵ $l \perp BC$
  $c = -3$ ⟵ $(1, 3) \in l$
  $l: y - 3 = 0$

3. Rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

są współrzędne środka szukanego okręgu: $S = (-5, 3)$.

4. $r^2 = |SC|^2 = 36 + 4 = 40$

Odp.: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

II sposób

Wyznaczamy (jak w I sposobie) współrzędne wierzchołków A, B, C trójkąta.
Niech $S = (a, b)$ będzie środkiem szukanego okręgu, a r – jego promieniem. Okrąg przechodzi przez punkty $A = (-3, -3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 5)$, więc współrzędne każdego z tych punktów spełniają równanie okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Zauważmy, że prawe strony wszystkich równań są identyczne.

Skoro $r^2 = (-3-a)^2 + (-3-b)^2$, możemy zapisać podany układ równań w postaci:

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (1-b)^2 = (-3-a)^2 + (-3-b)^2 \\ (1-a)^2 + (5-b)^2 = (-3-a)^2 + (-3-b)^2 \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} 1-2a+a^2+1-2b+b^2 = 9+6a+a^2+9+6b+b^2 \\ 1-2a+a^2+25-10b+b^2 = 9+6a+a^2+9+6b+b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a-8b=16 \\ -8a-16b=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=-2 \\ a+2b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-5 \\ b=3 \end{cases}$$

Obliczamy r^2:

$r^2 = (-3+5)^2 + (-3-3)^2$, czyli $r^2 = 40$

Zatem $S = (-5, 3)$ i $r^2 = 40$.

Odp.: $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 40$

Nierówność opisująca koło

Przypomnijmy:
Punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r $(r > 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|SP| \leqslant r$.

Wniosek

Nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2$, $r > 0$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło** o środku $S = (a, b)$ i promieniu r.

Nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Po przekształceniach analogicznych do wykonanych z równaniem okręgu otrzymamy kolejno:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 \leqslant 0$$

czyli:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leqslant 0, \text{ gdzie } c = a^2 + b^2 - r^2$$

Ta nierówność opisuje koło o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 - c > 0$. Dla takich a, b, c mamy $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Wniosek

Nierówność $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leqslant 0$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło** o środku $S = (a, b)$ i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 - c > 0$. Wtedy $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, a nierówność $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$ opisuje zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Przykład 6

Sprawdzimy, które z punktów: $A = (-2, 2)$, $B = \left(2, 2 - 2\sqrt{2}\right)$, $C = (3, 5)$, $D = (-1, 0)$ należą do koła o środku $S = (1, 2)$ i promieniu 3.

Rozwiązanie

Nierówność opisująca to koło ma postać $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 9$.
Aby sprawdzić położenie punktu względem koła, podstawiamy współrzędne punktu do lewej strony tej nierówności.

- $(-2 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = (-3)^2 + 0 = 9 \leqslant 9$ $\longleftarrow A = (-2, 2)$

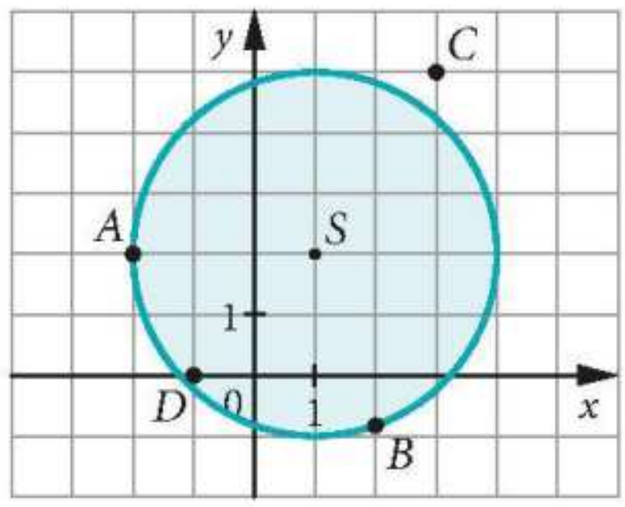
Punkt A należy do okręgu o środku $S = (1, 2)$ i promieniu 3. Okrąg ten jest brzegiem danego koła, więc punkt A należy do tego koła.

- $(2 - 1)^2 + \left(2 - 2\sqrt{2} - 2\right)^2 = 1 + 8 = 9 \leqslant 9$ $\longleftarrow B = \left(2, 2 - 2\sqrt{2}\right)$

Punkt B należy do okręgu, który jest brzegiem danego koła, więc należy do tego koła.

- $(3 - 1)^2 + (5 - 2)^2 = 4 + 9 = 13 > 9$ $\longleftarrow C = (3, 5)$

Punkt C nie należy do koła. Współrzędne punktu C spełniają nierówność $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 3^2$, zatem C leży na zewnątrz koła o środku S i promieniu 3.



- $(-1 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 4 + 4 = 8 < 9$ $\longleftarrow D = (-1, 0)$

Punkt D należy do koła o środku S i promieniu 3.

Obok zamieszczamy ilustrację zadania.

Odp.: Punkty A, B oraz D należą do podanego koła.

D **Przykład 7** ◀ zad. 4.22

Wykażemy, że odcinek AB o końcach $A = (-1, 6)$, $B = (1, 4)$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$.

Dowód

Sprawdzamy położenie końców odcinka względem okręgu. W tym celu podstawiamy ich współrzędne do równania okręgu. Dla punktu A mamy:

$$1 + 36 - 10 - 48 + 16 < 0$$

czyli punkt A leży wewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem.
Dla punktu B mamy:

$$1 + 16 + 10 - 32 + 16 > 0$$

czyli punkt B leży na zewnątrz tego koła.
Zatem odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z danym okręgiem.

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż punkt leżący na okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

A. $(3, 0)$ **B.** $(3, -4)$ **C.** $(-3, -4)$ **D.** $(-3, 0)$

4.2. Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ oraz $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ jest równa

A. $\sqrt{26}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** 8. **D.** $4 + \sqrt{8}$.

4.3. Odcinek o końcach $P = (0, 0)$, $Q = (8, 6)$ jest średnicą okręgu o równaniu

A. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$.
B. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
C. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$.
D. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

4.4. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r.

a) $S = (0, 0)$ $r = 11$
b) $S = (-2, -5)$ $r = 1$
c) $S = (0, 5)$ $r = 3\sqrt{2}$
d) $S = (6, -4)$ $r = 5$

4.5. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 = 2$

4.6. Odczytaj z równania środek i promień okręgu.

a) $(x + 3)^2 + (y + 11)^2 = 5$
b) $x^2 + y^2 = 196$

4.7. Sprawdź, czy punkty A, B należą do okręgu o podanym równaniu.

a) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ $A = (6, 3)$, $B = (2, 5)$
b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ $A = (2, 0)$, $B = (1, 1)$

4.8. Do okręgu o środku $S = (4, 3)$ należy punkt $A = (8, 0)$. Napisz równanie tego okręgu.

4.9. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a) $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$

4.10. Odczytaj z równania środek i promień okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ c) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 8x + 16y + 79 = 0$

4.11. Dane są współrzędne środka S i promień r okręgu. Zapisz równanie tego okręgu w postaci $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

a) $S = (7, -1)$, $r = 3$ b) $S = (-5, -9)$, $r = \sqrt{5}$

4.12. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 5)$ stycznego

a) do osi x. b) do osi y.

4.13. Napisz równanie okręgu o promieniu 4, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych.

4.14. Napisz równanie okręgu, którego promień wynosi 3, środek leży na osi y i który jest styczny do osi x.

4.15. Napisz równanie okręgu stycznego do osi x w punkcie $A = (2, 0)$ i przechodzącego przez punkt

a) $B = (5, 3)$. b) $B = (7, 5)$.

4.16. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (9, 8)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.

4.17. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (-1, 2)$ i współśrodkowego z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

4.18. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (5, 1)$ i $B = (2, -2)$, którego środek leży na prostej $y - 1 = 0$.

4.19. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

a) $A = (5, 1)$, $B = (4, 6)$, $C = (-1, 5)$ b) $A = (1, 0)$, $B = (5, 2)$, $C = (2, 3)$

4.20. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = 3x - 9$, $2x + y - 1 = 0$ i $y = -x + 3$.

4.21. Punkty $P = (1, -1)$ i $Q = (5, 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Napisz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.

D **4.22.** Wykaż, że odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o podanym równaniu.

a) $A = (3, 1),\ B = (-2, 3)$ $\quad (x+1)^2 + (y-6)^2 = 25$

b) $A = (6, 1),\ B = (5, 2)$ $\quad (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

c) $A = (-4, 1),\ B = (-3, -2)$ $\quad x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

d) $A = (0, 4),\ B = (-2, 2)$ $\quad x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$

* **4.23.** Napisz równanie okręgu wpisanego w trójkąt, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $x - 5 = 0,\ 3x - 4y + 21 = 0$ i $4x + 3y + 28 = 0$.

4.24. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 2x + y^2 - 4y + m = 0$ opisuje okrąg o promieniu 1?

4.25. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - 6x + 4y + m = 0$ opisuje okrąg? Jakie są współrzędne środka i promień takiego okręgu?

* **4.26.** Zaznacz zbiór wszystkich punktów płaszczyzny kartezjańskiej, których współrzędne spełniają równanie $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 36$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Okrąg o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$ można opisać za pomocą równania $(x+9)^2 + y^2 = 2$.

B. Punkt $M = \left(\sqrt{2} - 9, 0\right)$ należy do okręgu o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.

C. Punkt $N = \left(\sqrt{2} - 9, -1\right)$ leży na zewnątrz koła o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.

2. Dane są punkty $M = (-5, 8)$ i $N = (3, 2)$. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek MN.

3. Napisz równanie okręgu stycznego do osi y, którego środek jest punktem przecięcia prostych $2x - y + 4 = 0$ i $x - 2y + 2 = 0$.

4. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (0, 2)$, $B = (9, -1),\ C = (8, 6)$.

D **5.** Dane są punkty: $A = (0, 1),\ B = (3, 0),\ C = (4, 3),\ D = (1, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem i napisz równanie opisanego na nim okręgu.

5. Okrąg i prosta. Dwa okręgi

Umiejętności:

- określanie wzajemnego położenia prostej i okręgu (koła) oraz dwóch okręgów
- wyznaczanie punktów wspólnych prostej i okręgu oraz dwóch okręgów
- wyznaczanie równania stycznej do okręgu

Okrąg i prosta

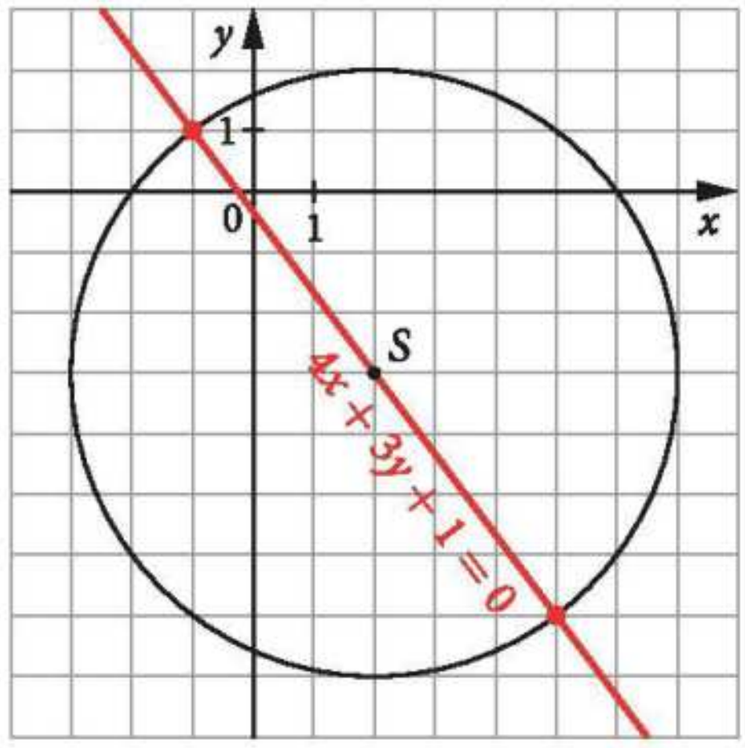
Prostą i okrąg możemy opisać za pomocą równań, zatem wyznaczenie punktów wspólnych tych dwóch figur sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ px+qy+m=0 \end{cases}$$

w którym $r>0$ oraz $p^2+q^2\neq 0$.

Przykład 1 ◂ zad. 5.5

Z wykresu przedstawiającego okrąg o środku $S=(2,-3)$ i promieniu $r=5$ oraz prostą o równaniu $4x+3y+1=0$ możemy odczytać ich punkty wspólne: $A=(-1,1)$ i $B=(5,-7)$. Sprawdzimy rachunkowo, czy współrzędne tych punktów zostały poprawnie odczytane.



Rozwiązanie

Aby sprawdzić, czy współrzędne punktów zostały odczytane poprawnie, podstawiamy je do układu równań opisujących okrąg i prostą.

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2=25 \\ 4x+3y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9+16=25 \\ -4+3+1=0 \end{cases} \longleftarrow A=(-1,1) \qquad \begin{cases} 9+16=25 \\ 20-21+1=0 \end{cases} \longleftarrow B=(5,-7)$$

Dla każdego z punktów obydwie równości są prawdziwe. Zatem współrzędne punktów przecięcia okręgu z prostą zostały poprawnie odczytane z rysunku.

Przykład 2 ◂ zad. 5.6

Wyznaczymy punkty wspólne prostej $2x+y-7=0$ i okręgu $x^2+4x+y^2-2y-15=0$, a następnie wykonamy ilustrację graficzną rozwiązania.

Rozwiązanie

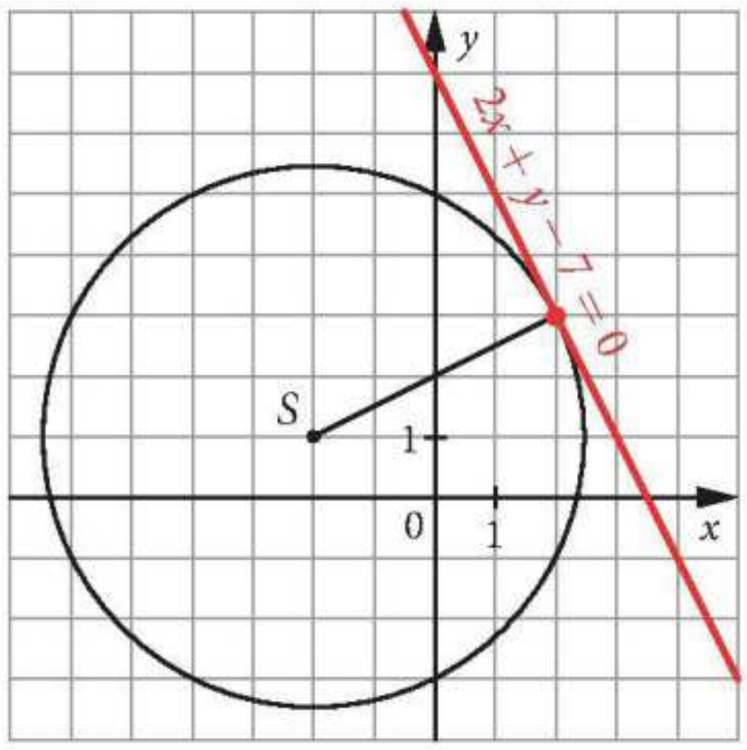
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 + 4x + y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 + 4x + (-2x + 7)^2 - 2(-2x + 7) - 15 = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{podstawiamy } y = -2x + 7$$

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

Jedynym pierwiastkiem drugiego równania jest liczba 2. Zatem rozwiązaniem układu jest jedna para liczb: $x = 2,\ y = 3$.

Prosta i okrąg mają więc jeden punkt wspólny, czyli prosta jest styczna do okręgu w punkcie (2, 3). Żeby zilustrować tę sytuację na płaszczyźnie kartezjańskiej, wyznaczymy środek okręgu.



$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 15 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 15 = 5$$
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

Równanie opisuje okrąg o środku $S = (-2, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{20}$. Rysunek możemy łatwo wykonać bez znajdowania odcinka o długości r, bo wiemy już, że punkt (2, 3) leży na okręgu.

Odp.: Prosta jest styczna do okręgu w punkcie (2, 3).

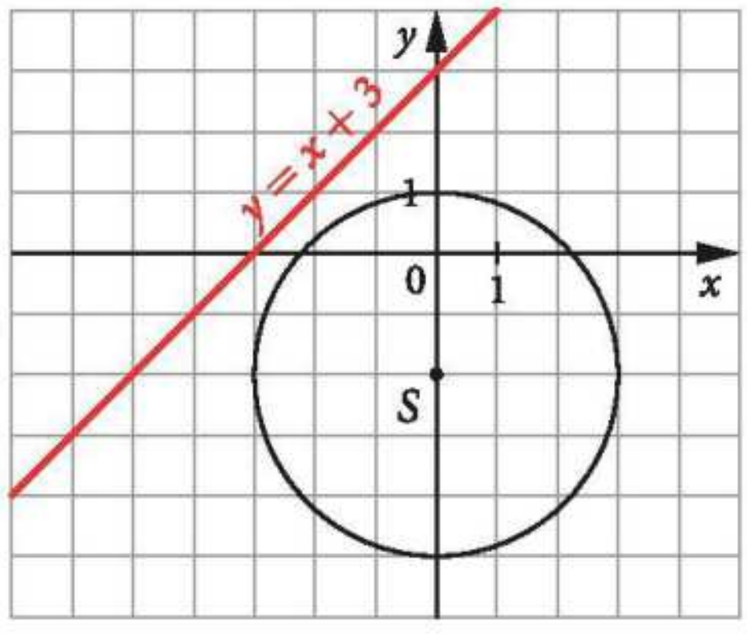
Przykład 3

Zbadamy wzajemne położenie prostej $y = x + 3$ i okręgu $x^2 + (y + 2)^2 = 9$.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + (y + 2)^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + 5x + 8 = 0 \end{cases}$$

Wyróżnik równania kwadratowego jest równy $\Delta = 25 - 32 = -7$, czyli równanie nie ma rozwiązań. Zatem układ równań także ich nie ma. Okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych. Można to również odczytać z rysunku.



Innym sposobem rozwiązania jest obliczenie odległości środka okręgu od prostej i porównanie jej z promieniem.

Odp.: Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

Zbadamy teraz, jaką figurą jest zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

w którym $r > 0$ oraz $p^2 + q^2 \neq 0$.

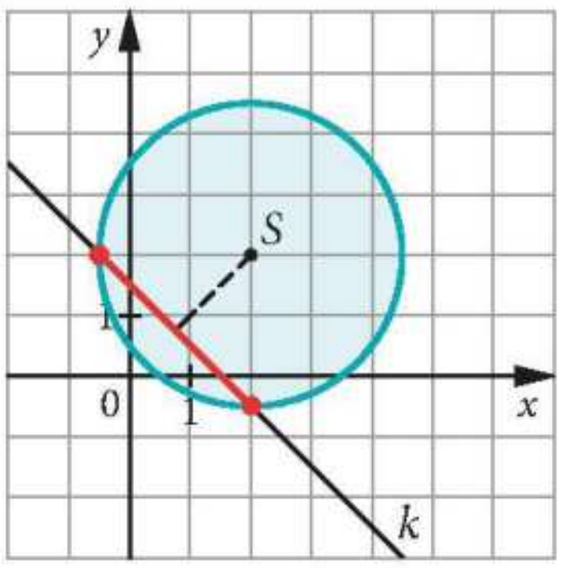
Pierwszy warunek opisuje koło o środku $S = (a, b)$ i promieniu r, drugi jest równaniem prostej, nazwijmy ją k. Punkt (x, y) spełnia podany układ warunków, gdy należy do każdej z tych figur. Są trzy możliwości.

I. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest mniejsza od r:
wtedy prosta k przecina koło, czyli punkty wspólne obu figur tworzą odcinek – opisywany zbiór jest odcinkiem (rys. 1).

II. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest równa r:
wtedy prosta k jest styczna do koła, czyli jedynym punktem wspólnym tych figur jest punkt styczności – opisywany zbiór jest jednoelementowy (rys. 2).

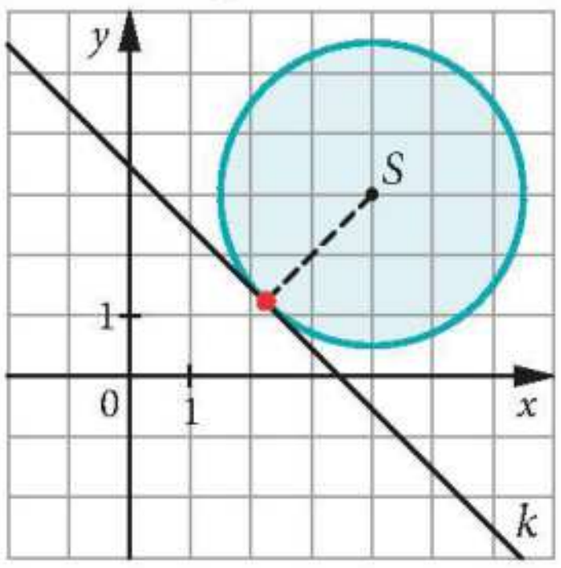
III. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest większa od r:
wtedy prosta k jest rozłączna z kołem, czyli figury nie mają punktów wspólnych – opisywany zbiór jest zbiorem pustym (rys. 3).

odcinek



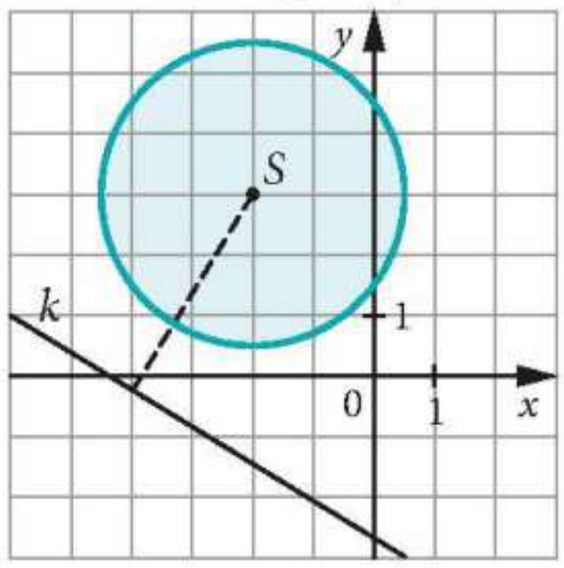
Rys. 1

punkt



Rys. 2

zbiór pusty



Rys. 3

Przykład 4 ◀ zad. 5.13

Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 11 \\ y = 3 - 2{,}5x \end{cases}$?

Rozwiązanie

Nierówność $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 11$ opisuje koło o środku $S = (4, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{11}$. Natomiast $y = 3 - 2{,}5x$ jest równaniem kierunkowym prostej.

Zapiszemy równanie prostej, nazwijmy ją k, w postaci ogólnej:

$k\colon 2{,}5x + y - 3 = 0$

czyli $k\colon 5x + 2y - 6 = 0$.

Sprawdzamy, jaka jest zależność między odległością punktu S od prostej k a promieniem r koła.

$$\frac{|20 + 4 - 6|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29} \approx 3{,}34 \quad \longleftarrow \text{odległość środka } S \text{ od prostej } k$$

Zauważmy, że $\sqrt{11} < 3{,}32$, natomiast $\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3{,}32$. Otrzymaliśmy układ nierówności:

$$\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3{,}32 > \sqrt{11}$$

Zatem prosta o równaniu $y = 3 - 2{,}5x$ nie ma punktów wspólnych z kołem opisanym za pomocą nierówności $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 11$.

Odp.: Opisany zbiór jest zbiorem pustym.

Przykład 5 ◀ zad. 5.15

Okrąg o środku $S = (1, 2)$ przechodzi przez punkt $M = (-2, 1)$. Napiszemy równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M.

Rozwiązanie

Szukana styczna (oznaczmy ją k) jest prostopadła do prostej MS, jej równanie można zapisać w postaci kierunkowej:

$k\colon y = ax + b$

Do wyznaczenia współczynnika a potrzebny jest współczynnik kierunkowy m prostej MS: $y = mx + p$.

$$\begin{cases} 2 = m + p \\ 1 = -2m + p \end{cases} \quad \longleftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktów } S \text{ i } M$$

Stąd $m = \frac{1}{3}$. Zauważmy, że do rozwiązania zadania nie jest potrzebna wartość p.

$$a = -\frac{1}{m} = -3$$

$k\colon y = -3x + b$

$1 = 6 + b \quad \longleftarrow$ szukana styczna przechodzi przez punkt M

$k\colon y = -3x - 5$

Odp.: Styczna ma równanie $y = -3x - 5$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.18

Napiszemy równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ prostopadłych do prostej $l\colon x - 2y = 0$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy trzema sposobami. W pierwszym odwołamy się do konstrukcyjnego wyznaczania stycznych, a w pozostałych pokażemy metodę rachunkową.

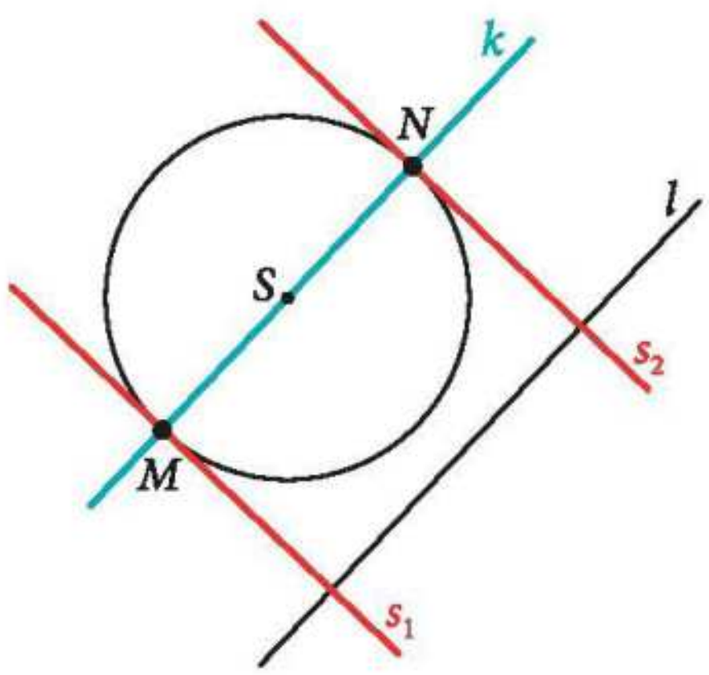
I sposób

Konstrukcja stycznych opisanych w zadaniu przebiega następująco:

Krok 1: Przez środek okręgu prowadzimy prostą k równoległą do l.

Krok 2: Wyznaczamy punkty M i N przecięcia okręgu prostą k. Są to punkty styczności szukanych stycznych (na rysunku oznaczonych s_1, s_2).

Krok 3: Przez punkty M i N prowadzimy proste s_1 i s_2 prostopadłe do l.



Wykonujemy kolejne kroki.

1. Z równania okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ odczytujemy jego środek $S = (1, -3)$. Następnie znajdujemy równanie prostej k, równoległej do prostej l i przechodzącej przez S.

$k\colon x - 2y + c = 0$

$1 + 6 + c = 0$ $\longleftarrow S \in k$

$k\colon x - 2y - 7 = 0$

2. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$.

Zatem $M = (3, -2)$, $N = (-1, -4)$.

3. Znajdujemy równania stycznych s_1 i s_2.

$s_1\colon 2x + y + c = 0$ i $6 - 2 + c = 0$ $\longleftarrow s_1 \perp l$ i $M \in s_1$

$s_1\colon 2x + y - 4 = 0$

$s_2\colon 2x + y + c = 0$ i $-2 - 4 + c = 0$ $\longleftarrow s_2 \perp l$ i $N \in s_2$

$s_2\colon 2x + y + 6 = 0$

II sposób

Prosta jest styczna do okręgu o środku S i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu S od tej prostej jest równa r.

Okrąg dany w zadaniu ma środek $S = (1, -3)$ i promień $\sqrt{5}$.

Każdą prostą prostopadłą do prostej l można opisać za pomocą równania postaci $2x + y + c = 0$. Jeżeli skorzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej, to otrzymamy równanie z niewiadomą c.

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \qquad \longleftarrow S = (1, -3),\ r = \sqrt{5}$$

$$\frac{|c - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|c - 1| = 5$$

$$c - 1 = 5 \text{ lub } c - 1 = -5$$

$$c = 6 \text{ lub } c = -4$$

$|x| = a$ $(a > 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$ lub $x = -a$.

Równania stycznych to $2x + y + 6 = 0$ i $2x + y - 4 = 0$.

III sposób

Każdą prostą prostopadłą do prostej l można opisać za pomocą równania postaci $2x + y + c = 0$. Szukamy wartości parametru c, dla których taka prosta prostopadła ma jeden punkt wspólny z okręgiem, czyli układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ 2x + y + c = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ y = -2x - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (-2x - c)^2 - 2x + 6(-2x - c) + 5 = 0 \\ y = -2x - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + (4c - 14)x + c^2 - 6c + 5 = 0 \\ y = -2x - c \end{cases}$$

Otrzymany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik równania kwadratowego jest równy 0. Rozwiązujemy równanie $\Delta = 0$:

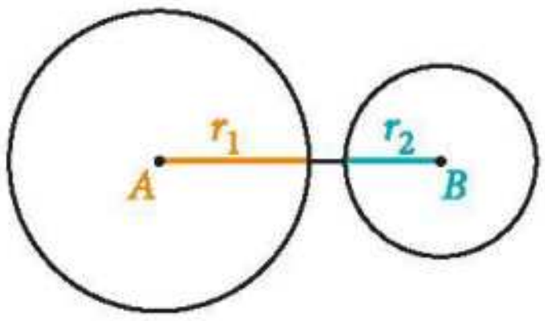
$$(4c - 14)^2 - 20\left(c^2 - 6c + 5\right) = 0 \qquad c^2 - 2c - 24 = 0$$

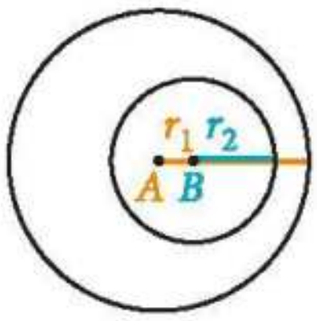
i otrzymujemy $c = -4$ lub $c = 6$. Zatem są dwie proste spełniające warunki zadania: $y = -2x + 4$ oraz $y = -2x - 6$.

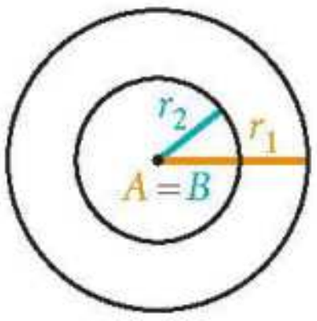
Odp.: Szukane styczne mają równania $y = -2x + 4$, $y = -2x - 6$.

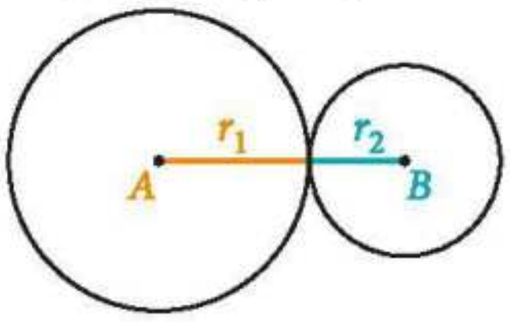
Dwa okręgi

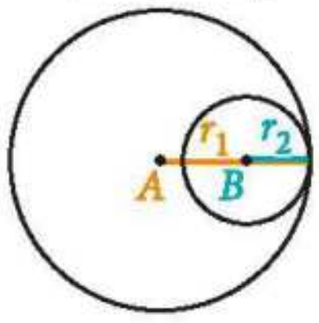
Przypomnijmy warunki, od których zależy liczba punktów wspólnych okręgów $o_1(A, r_1)$ i $o_2(B, r_2)$ takich, że $r_1 \geqslant r_2$.

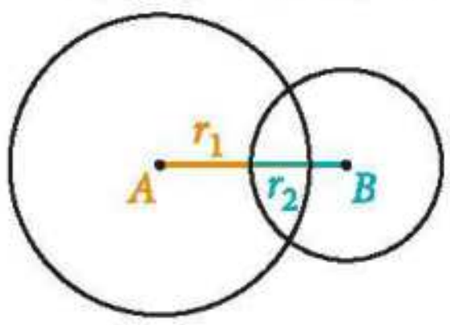
<table>
<tr>
<td>0 punktów wspólnych</td>
<td>
• $|AB| > r_1 + r_2$
 

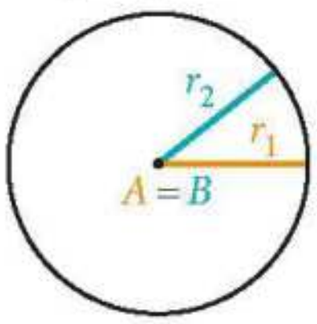
• $|AB| < r_1 - r_2$ i $r_1 \neq r_2$
 

• $|AB| = 0$ i $r_1 \neq r_2$
 

</td>
</tr>
<tr>
<td>1 punkt wspólny</td>
<td>
• $|AB| = r_1 + r_2$
 

• $|AB| = r_1 - r_2$
 

</td>
</tr>
<tr>
<td>2 punkty wspólne</td>
<td>
• $r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$
 

</td>
</tr>
<tr>
<td>wszystkie punkty wspólne</td>
<td>
• $|AB| = 0$ i $r_1 = r_2$
 

</td>
</tr>
</table>

Przykład 7 ◂ zad. 5.25

Dane są równania dwóch okręgów. Zbadamy, ile punktów wspólnych mają te okręgi.

a) $o_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1, \quad o_2: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$

b) $o_1: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0, \quad o_2: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 5 = 0$

Rozwiązanie

a) Okrąg o_1 – środek: $S_1 = (2, -3)$, promień: $r_1 = 1$

Okrąg o_2 – środek: $S_2 = (1, 5)$, promień: $r_2 = 2$

$|S_1S_2| = \sqrt{(1-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{65} > r_1 + r_2 = 3$

Odp.: Brak punktów wspólnych.

b) Okrąg o_1: $(x-2)^2+(y+3)^2=18$, środek: $S_1=(2,-3)$, promień: $r_1=3\sqrt{2}$

Okrąg o_2: $(x+3)^2+(y-2)^2=18$, środek: $S_2=(-3,2)$, promień: $r_2=3\sqrt{2}$

$|S_1S_2|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}<r_1+r_2=6\sqrt{2}$ i $|S_1S_2|>r_1-r_2=0$

Odp.: Okręgi mają dwa punkty wspólne.

Przykład 8 ◀ zad. 5.26

Zbadamy wzajemne położenie okręgów opisanych za pomocą równań $x^2+y^2+8x-4y+11=0$ i $x^2+y^2+2x+4y+1=0$.

Rozwiązanie

Zapisujemy równania okręgów w postaci kanonicznej:

$(x+4)^2+(y-2)^2=3^2$ $\qquad$ $(x+1)^2+(y+2)^2=2^2$

$S_1=(-4,2)$, $r_1=3$ $\qquad$ $S_2=(-1,-2)$, $r_2=2$

$|S_1S_2|=\sqrt{9+16}=5=r_1+r_2$

Odp.: Okręgi są styczne zewnętrznie.

Przykład 9 ◀ zad. 5.27

Dane są dwa okręgi: $x^2+(y+1)^2=20$ i $(x-9)^2+(y-2)^2=50$.
Zbadamy wzajemne położenie tych okręgów, a jeśli się przecinają, wyznaczymy współrzędne ich punktów przecięcia.

Rozwiązanie

Wyznaczymy środki i promienie okręgów, a następnie porównamy odległość między środkami okręgów z sumą i różnicą promieni.

Okrąg $x^2+(y+1)^2=20$ – środek: $S_1=(0,-1)$, promień: $r_1=\sqrt{20}$

Okrąg $(x-9)^2+(y-2)^2=50$ – środek: $S_2=(9,2)$, promień: $r_2=\sqrt{50}$

$|S_1S_2|=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}\approx 9{,}5$

$r_1+r_2=\sqrt{20}+\sqrt{50}\approx 4{,}5+7{,}1=11{,}6$

$r_2-r_1=\sqrt{50}-\sqrt{20}\approx 7{,}1-4{,}5=2{,}6$

Zatem $r_2-r_1<|S_1S_2|<r_1+r_2$, czyli okręgi mają dwa punkty wspólne.

Wyznaczymy współrzędne tych punktów. W tym celu rozwiązujemy układ równań:

$\begin{cases} x^2+(y+1)^2=20 \\ (x-9)^2+(y-2)^2=50 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2+y^2+2y+1=20 \\ x^2-18x+81+y^2-4y+4=50 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \\ x^2 + y^2 - 18x - 4y + 35 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Aby rozwiązać układ $(*)$, odejmujemy równania stronami. Otrzymujemy jedno równanie liniowe z dwiema niewiadomymi (wyrażenia x^2 oraz y^2 redukują się):

$$18x + 6y - 54 = 0 \qquad (1)$$

Wybieramy jedno równanie z układu $(*)$, najlepiej to o prostszych współczynnikach:

$$x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \qquad (2)$$

Równania (1) i (2) tworzą układ równoważny układowi $(*)$, który dalej rozwiązujemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 18x + 6y - 54 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ x^2 + (-3x + 9)^2 + 2(-3x + 9) - 19 = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{wyznaczamy z pierwszego równania } y$$

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ x^2 + 9x^2 - 54x + 81 - 6x + 18 - 19 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ 10x^2 - 60x + 80 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3x + 9 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$$

Stąd $x_1 = 2,\ y_1 = 3$ oraz $x_2 = 4,\ y_2 = -3$.

Odp.: Okręgi przecinają się w punktach o współrzędnych $(2, 3)$ oraz $(4, -3)$.

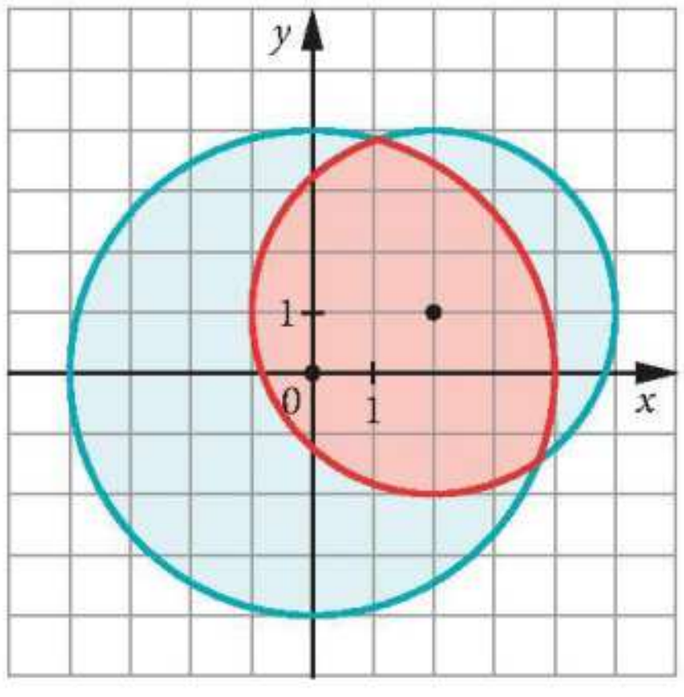
Przykład 10 ◀ zad. 5.30 a, b, c

Narysujemy na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany układ nierówności.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9 \\ x^2 + y^2 \leqslant 16 \end{cases}$$

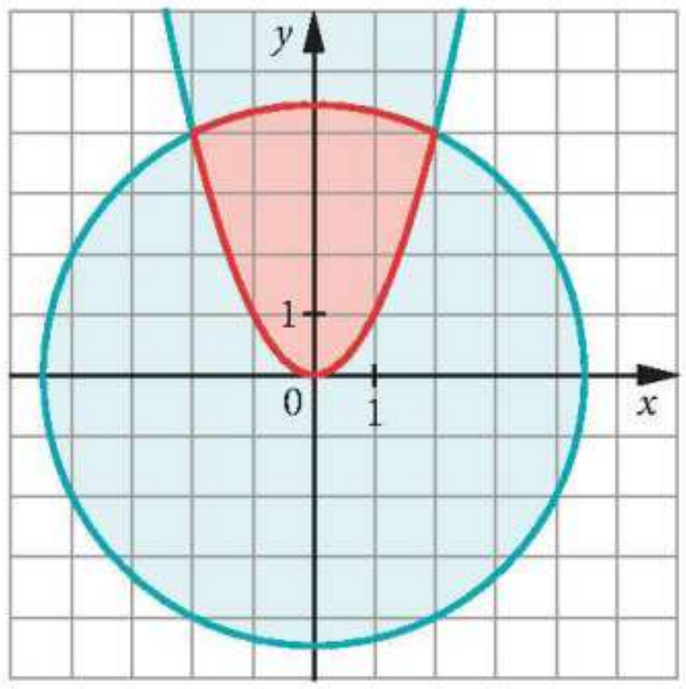
Rozwiązanie

Pierwsza nierówność opisuje koło o środku $S = (2, 1)$ i promieniu 3, a druga koło o środku $(0, 0)$ i promieniu 4. Za pomocą układu nierówności opisana jest część wspólna tych kół, na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym.



Przykład 11 ◀ zad. 5.30 e, f

Narysujemy zbiór punktów opisany za pomocą układu nierówności $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 20 \\ y \geqslant x^2 \end{cases}$.



Rozwiązanie

Z rysunku można odczytać, a następnie sprawdzić rachunkowo współrzędne punktów przecięcia paraboli i okręgu. Są nimi (2, 4) oraz (−2, 4). Szukany zbiór zaznaczony jest kolorem czerwonym.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż styczną do okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

A. $x = 2$ **B.** $x = 7$ **C.** $y = 2$ **D.** $y = 3$

5.2. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$?

A. dwa punkty **B.** punkt **C.** odcinek **D.** zbiór pusty

5.3. Która prosta przecina okrąg $(x-1)^2 + y^2 = 4$ w dwóch punktach?

A. $y = 2$ **B.** $x + y - \sqrt{3} = 0$ **C.** $x - y + 2 = 0$ **D.** $x = 3$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$

A. jest odcinkiem. **B.** ma dokładnie dwie osie symetrii. **C.** jest zbiorem pustym.

5.5. Zbadaj graficznie i rachunkowo wzajemne położenie prostej i okręgu o danych równaniach.

a) $y = x - 1$, $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ b) $y = 2x + 1$, $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

5.6. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ $x - y + 1 = 0$

b) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ $x + y - 8 = 0$

5.7. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$ $\quad x - 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ $\quad 2x - y + 4 = 0$

5.8. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $x^2 + 2x + y^2 + 8y + 7 = 0$ wycina z prostej $y = 2x - 7$.

5.9. Przez środek okręgu $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 8 = 0$ i punkt $P = (1, 6)$ poprowadzono prostą przecinającą ten okrąg w dwóch punktach. Wyznacz te punkty.

5.10. Okrąg $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 12 = 0$ o środku S przecina oś x w punktach A i B. Oblicz pole i obwód trójkąta ABS.

5.11. Punkty $A = (0, -1)$ i $B = (-2, 1)$ należą do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$. Znajdź współrzędne takiego punktu C należącego do tego okręgu, aby $|AC| = |BC|$.

5.12. W okrąg $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$ wpisano prostokąt $ABCD$ w taki sposób, że wierzchołki A i B leżą na prostej $y = 5x - 5$. Wyznacz wierzchołki tego prostokąta i oblicz jego pole.

5.13. Przekątna kwadratu opisanego na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ jest zawarta w prostej $2x - y - 2 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

5.14. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego układu warunków?

a) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 \leqslant 4 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} (x-10)^2 + (y-1)^2 \leqslant 100 \\ x = 19 \end{cases}$

5.15. Okrąg o środku $S = (-1, -2)$ przechodzi przez punkt $M = (0, 3)$. Napisz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M.

5.16. Napisz równanie okręgu o środku $S = (-3, 1)$ stycznego do prostej $2x - y + 1 = 0$.

5.17. Napisz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 18$ równoległych do prostej $y = -x + 2$.

5.18. Napisz równania stycznych do okręgu $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$ prostopadłych do prostej $y = x$.

5.19. Napisz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$ prostopadłych do prostej $x - y = 7$.

R

5.20. Okrąg o środku $S = (6, 3)$ jest styczny do prostej l w punkcie $A = (2, 1)$. Napisz równania okręgu i prostej l.

D **5.21.** Wykaż, że styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ poprowadzone z początku układu współrzędnych są prostopadłe.

D **5.22.** Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m prosta $mx - y = m + 2$ zawiera średnicę okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

5.23. Z punktu $A = (4, -4)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.

R

5.24. Okrąg styczny do osi y w punkcie $P = (0, 5)$ wyznacza na osi x cięciwę o długości $4\sqrt{6}$. Napisz równanie tego okręgu i znajdź jego punkty przecięcia z osią x.

5.25. Podaj liczbę punktów wspólnych okręgów o danych równaniach.

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$
b) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 42 = 0$ $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 30 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$ $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 32 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 70 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

5.26. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o danych równaniach.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 105 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 37 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$ $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 56 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$ $x^2 + y^2 - 14x + 16y + 33 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 31 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$

5.27. Wyznacz, jeśli istnieją, punkty wspólne danych okręgów.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$ $x^2 + y^2 + 10x + 12y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 40 = 0$ $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 26 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 27 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x + 14y - 24 = 0$ $x^2 + y^2 + 4x + 12y - 24 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 41 = 0$ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 4x - 18y = 0$ $x^2 + y^2 - 10x + 6y = 0$

5.28. Dla jakich wartości parametru m okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ ma jeden punkt wspólny z okręgiem $x^2 + y^2 - 2mx - 4y + m^2 - 21 = 0$? Dla wyznaczonych wartości m napisz równania okręgów w postaci kanonicznej. Rozważ wszystkie przypadki.

5.29. Rozwiąż rachunkowo i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} |x| + y = 2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \\ |x-1| - y = 0 \end{cases}$

5.30. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają podany układ warunków.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 \leqslant 16 \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 \geqslant 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 \leqslant 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ y \geqslant 3 - x^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ y \leqslant 4x - x^2 \end{cases}$

Prosto do matury

1. Dany jest okrąg o środku $S = (13, 2)$ i promieniu $r = 4$ oraz prosta $k: x - y = 11$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$.

B. Prosta k przecina okrąg $o(S, r)$.

C. Figura złożona z prostej k i okręgu $o(S, r)$ ma dokładnie jedną oś symetrii.

2. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$ wyznacza na prostej $y = -x + 3$.

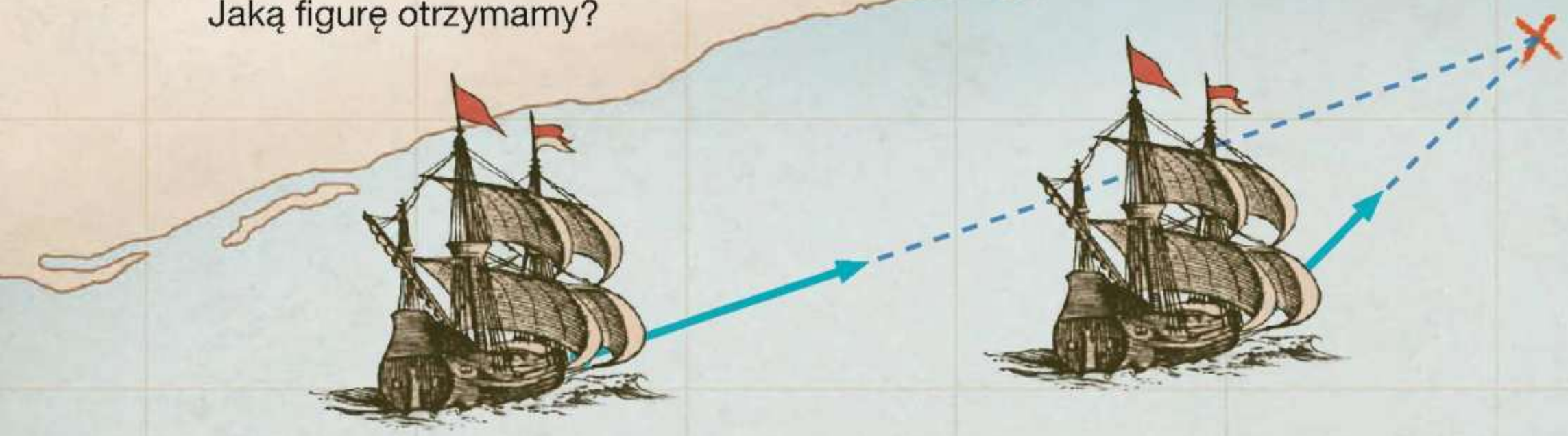
3. Napisz równania stycznych do okręgu $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 1$ prostopadłych do prostej $y - 2 = 0$.

4. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2, 2)$ oraz przez punkty przecięcia okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ z prostą $y + x = 1$.

5. Wyznacz punkty wspólne okręgów $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 50$ i $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 41 = 0$.

Okrąg Apoloniusza

Na kartce zaznaczamy dwa różne punkty. Są to dwa statki. Oba mogą się poruszać tylko po prostej, w dowolnym kierunku, każdy z inną stałą prędkością. Szybszy statek goni wolniejszy. Naszym zadaniem jest zaznaczenie na kartce wszystkich punktów, w których statki mogą się spotkać. Jaką figurę otrzymamy?



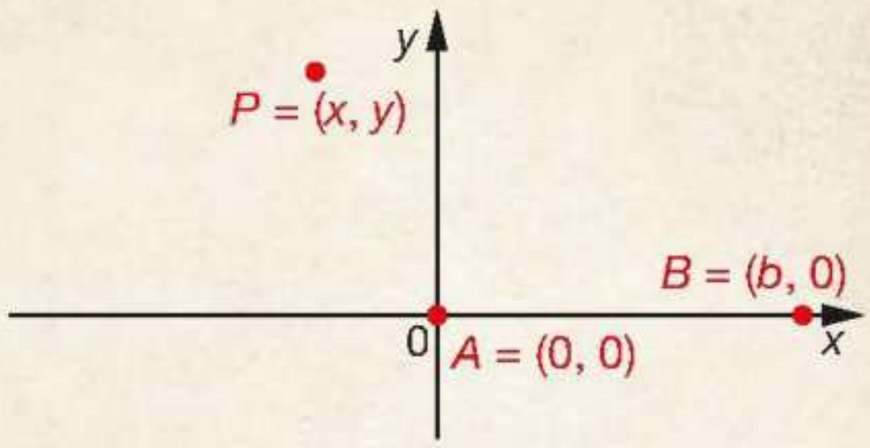
Ta zagadka przedstawia problem matematyczny rozważany przez **Apoloniusza z Pergi**:

Dane są punkty A i B na płaszczyźnie oraz dodatnia stała $k \neq 1$. Jaką figurę na płaszczyźnie tworzą punkty P, których stosunek odległości od A i B jest stały i równy k ($\frac{|AP|}{|BP|} = k$)?

Postawiony problem rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób I (odległość w układzie współrzędnych)

Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku. Oznaczmy $B = (b, 0)$. Szukamy punktów $P = (x, y)$ takich, że $|AP| = k \cdot |BP|$ dla danego $k > 0$, $k \neq 1$.



Mamy:

$$|AP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2},\ |BP| = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

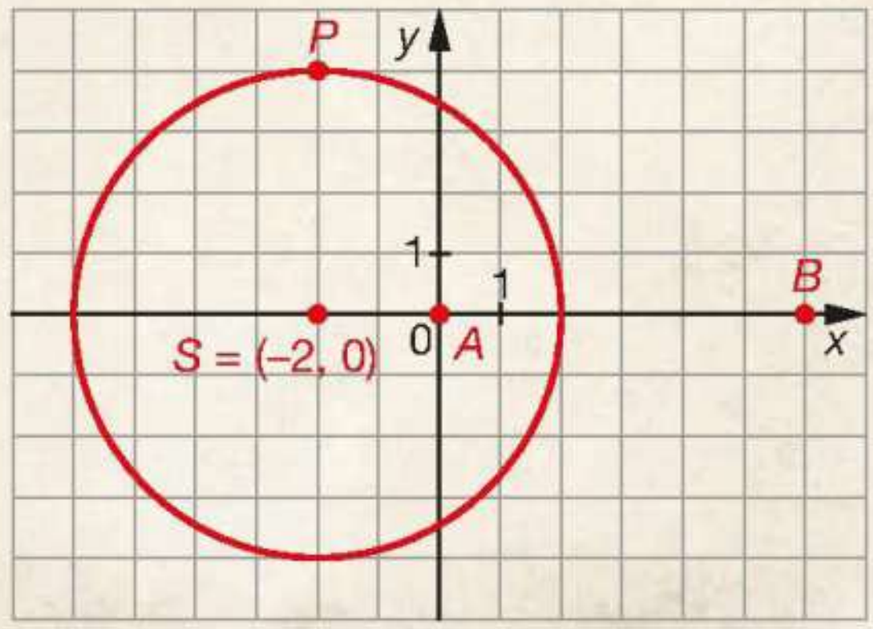
Warunek $|AP| = k \cdot |BP|$ zapisujemy w postaci:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2k^2}{(1-k^2)^2}$$

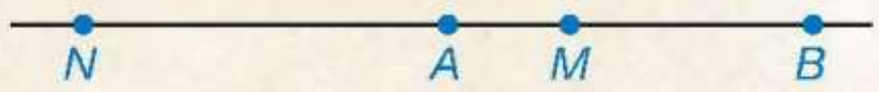
Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $\left(-\frac{bk^2}{1-k^2}, 0\right)$ i promieniu $\left|\frac{bk}{1-k^2}\right|$. Okrąg ten tworzą punkty P spełniające warunek podany w zadaniu. Rozwiązanie dla $k = \frac{1}{2}$, $b = 6$ pokazano na rysunku obok.



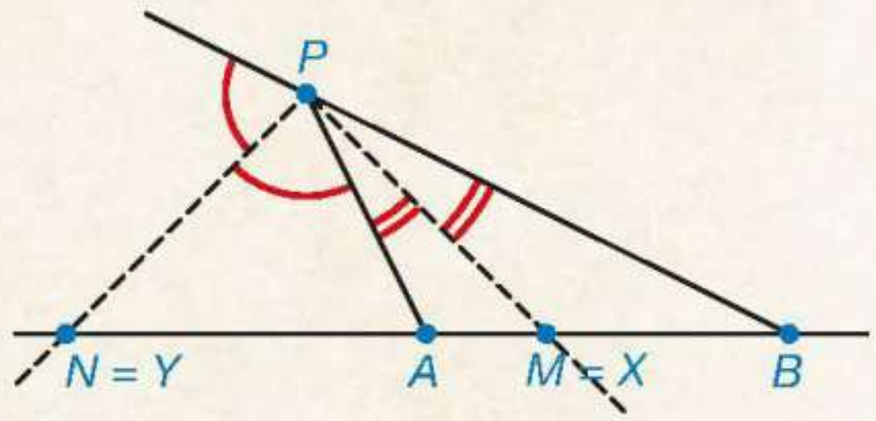
Sposób II (twierdzenie o dwusiecznej)

Zauważmy, że dwa spośród szukanych punktów leżą na prostej AB; na rysunku oznaczono je M i N. Mamy:

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|AN|}{|BN|} = k$$

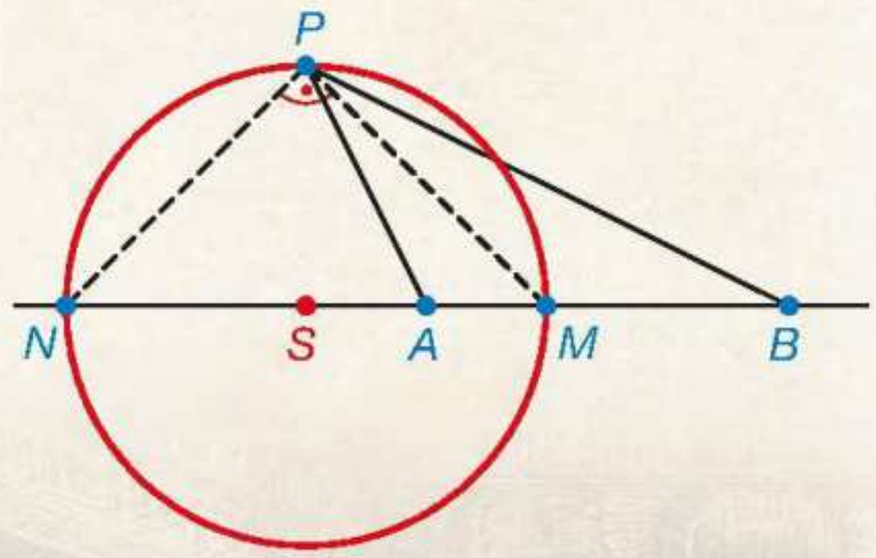


Teraz rozważmy dowolny punkt P leżący poza prostą AB i spełniający warunek $\frac{|AP|}{|BP|} = k$. Prowadzimy dwusieczne PX i PY odpowiednio kąta APB i kąta zewnętrznego przy wierzchołku P. Z twierdzenia o dwusiecznej mamy:



1. $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$. Zatem $X = M$.
2. $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$. Zatem $Y = N$.

Oznacza to, że kąt MPN jest prosty. To z kolei oznacza, że wszystkie punkty P wraz z punktami M i N tworzą okrąg o średnicy MN.



Okrąg Apoloniusza

Okrąg będący rozwiązaniem postawionego problemu jest nazywany **okręgiem Apoloniusza**.

Dla danych punktów A i B i różnych wartości k otrzymamy różne okręgi. Żadne dwa z nich się nie przecinają.



Wróćmy do zagadki ze statkami. Zauważmy, że jeżeli każdy z nich płynie ze stałą prędkością po linii prostej, to stosunek ich prędkości jest równy stosunkowi długości przebytych przez nie dróg, czyli odpowiednich odcinków. Dlatego jako rozwiązanie otrzymamy okrąg Apoloniusza.

6. Symetria środkowa

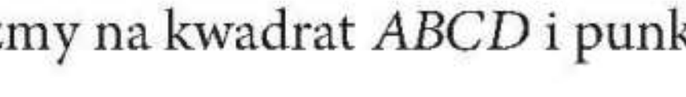
Umiejętności:

- wyznaczanie środka symetrii w figurach środkowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii środkowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

Symetria środkowa była już omawiana w szkole podstawowej. Powtórzymy własności tego przekształcenia, a następnie rozważymy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

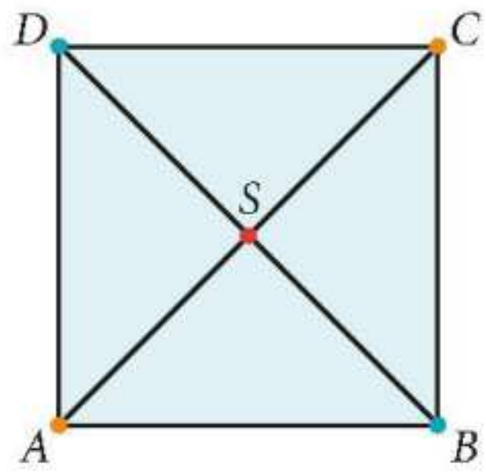
Symetria środkowa na płaszczyźnie

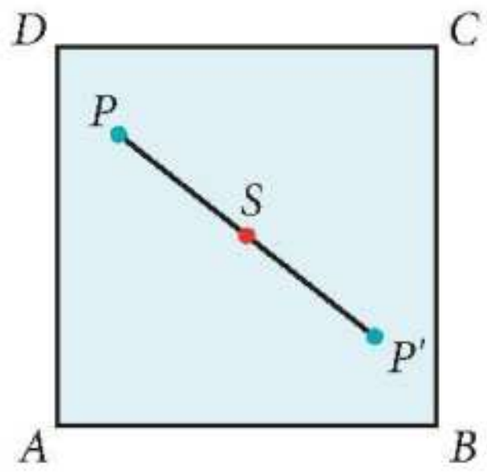
Punkty A i A' **są symetryczne względem punktu** S, gdy S jest środkiem odcinka AA'. Punkt S nazywamy **środkiem symetrii** punktów A i A'.

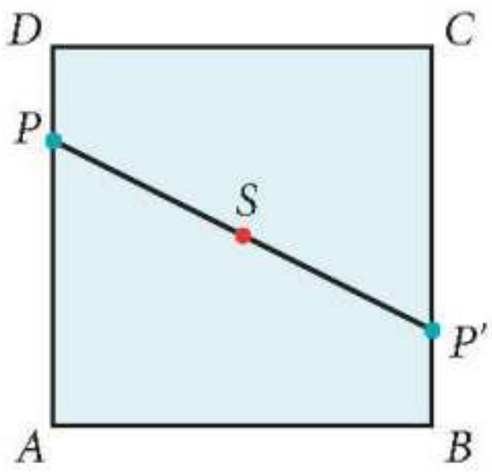


Jeżeli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem punktu S, to również punkt A jest symetryczny do punktu A' względem punktu S. Punkt S jest symetryczny do punktu S względem punktu S.

Popatrzmy na kwadrat $ABCD$ i punkt S przecięcia jego przekątnych.







Punkty A i C są symetryczne względem punktu S. Podobnie punkty B i D są symetryczne względem punktu S.

Wybierzmy dowolny punkt P tego kwadratu. Punkt P' symetryczny do punktu P względem punktu S również należy do kwadratu $ABCD$.

Podobnie – gdy punkt P należy do brzegu kwadratu, symetryczny do niego punkt P' także należy do brzegu kwadratu.

W takiej sytuacji mówimy, że punkt S jest środkiem symetrii kwadratu $ABCD$.

O kwadracie powiemy, że jest figurą środkowosymetryczną.

Definicja

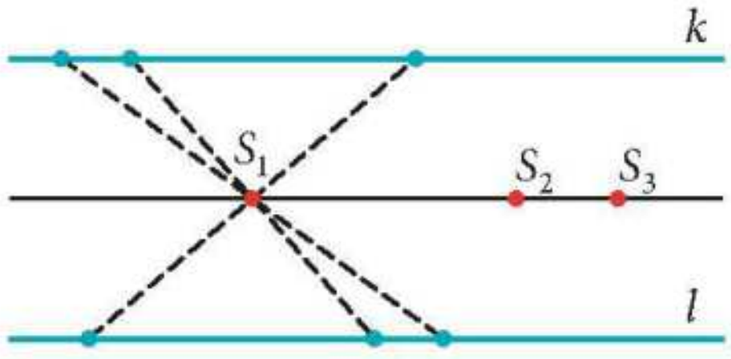
Punkt S nazywamy **środkiem symetrii figury** F, jeżeli dla każdego punktu A należącego do F punkt A' symetryczny do A względem S też należy do F. Figurę F nazywamy **środkowosymetryczną**.

Przykład 1 ◀ zad. 6.4–6.6

a) Odcinek jest figurą środkowosymetryczną. Środkiem symetrii odcinka jest jego środek.

b) Okrąg jest figurą środkowosymetryczną. Środkiem symetrii okręgu jest jego środek.

c) Figura złożona z dwóch prostych równoległych k, l ma nieskończenie wiele środków symetrii. Tworzą one prostą równoległą do k i do l, jednakowo od nich oddaloną.

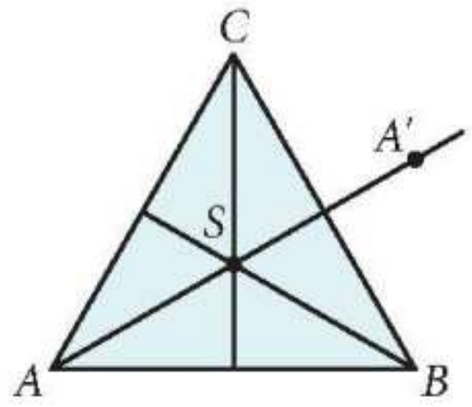


Wśród znanych figur geometrycznych wyróżnimy te, które mają środek symetrii, i te, które go nie mają. Na przykład:

Figury mające środek symetrii	Figury niemające środka symetrii
odcinek prostokąt kwadrat równoległobok romb okrąg koło	półprosta kąt trójkąt trapez niebędący równoległobokiem deltoid niebędący rombem

D Przykład 2

Wykażemy, że punkt S przecięcia wysokości trójkąta równobocznego nie jest jego środkiem symetrii.



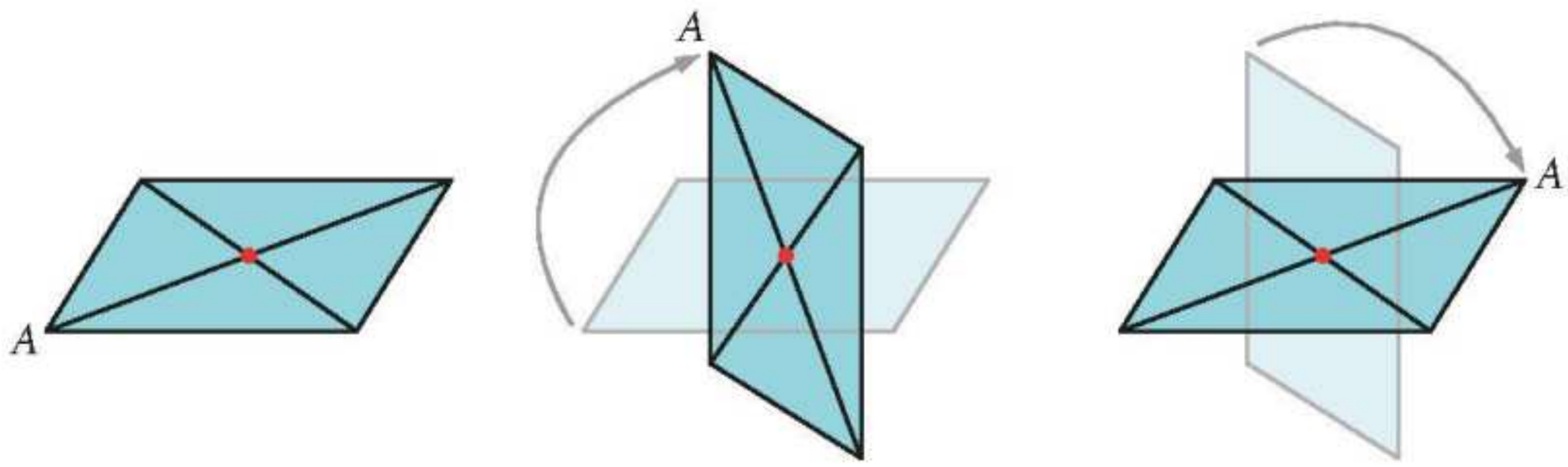
Rozwiązanie

Gdyby tak było, punkt A' symetryczny do wierzchołka A względem S należałby do trójkąta. Tak nie jest, zatem punkt S nie jest środkiem symetrii trójkąta ABC.

Podobnej próby nie przejdzie żaden inny kandydat na środek symetrii trójkąta równobocznego, a tym bardziej żadnego innego.

Trójkąt **nie** ma środka symetrii.

Figura środkowosymetryczna ma tę własność, że gdy obrócimy ją o 180° wokół jej środka symetrii, to figura przed obrotem i figura po obrocie nałożą się na siebie.



Można to sprawdzić dla wymienionych w tabeli figur środkowosymetrycznych. Nie istnieje natomiast punkt o takiej własności dla półprostej, kąta czy trapezu.

Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi P przyporządkowuje punkt P' symetryczny do P względem ustalonego punktu S, nazywamy **symetrią środkową o środku** S.

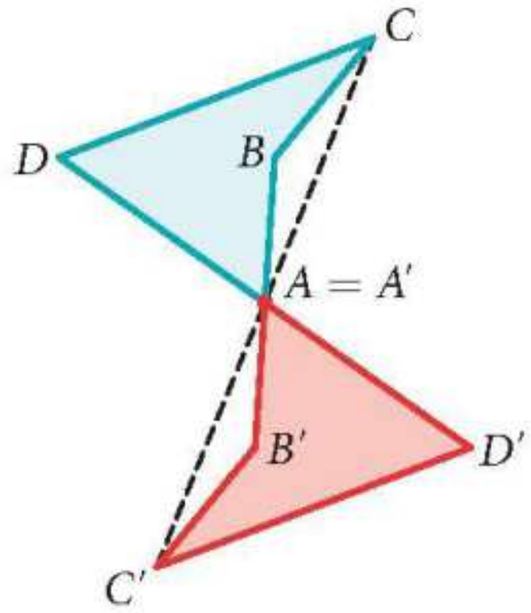
Przykład 3 ◂ zad. 6.8

Narysujemy figurę, która jest obrazem danego czworokąta $ABCD$ w symetrii środkowej o środku A.

Rozwiązanie

Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta $ABCD$ jest wierzchołek czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta $ABCD$ jest punkt należący do brzegu czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu wewnętrznego czworokąta $ABCD$ jest punkt wewnętrzny czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu A jest ten sam punkt.



Jeżeli w jakimś przekształceniu obrazem punktu P jest ten sam punkt P, to nazywamy go **punktem stałym** tego przekształcenia.
Symetria środkowa względem punktu S ma jeden punkt stały – jest nim środek tej symetrii.

Figury: F i jej obraz F' w symetrii środkowej **są przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu r – okrąg o promieniu r, trójkąta ABC – przystający do niego trójkąt $A'B'C'$ itd.

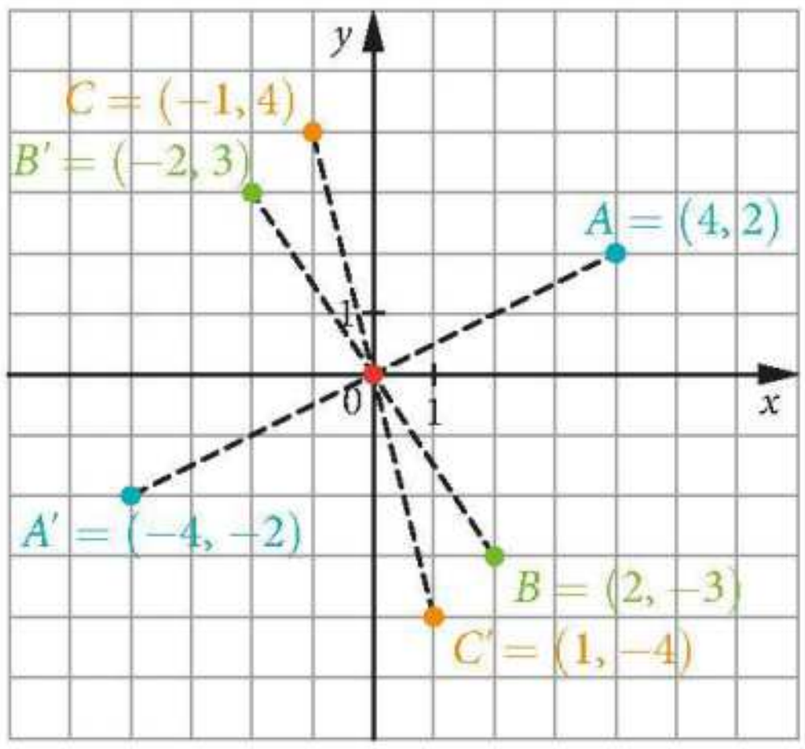
Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię względem dowolnego punktu. Ograniczymy się jednak do omówienia sytuacji, gdy środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.
Jeśli $P'=(x', y')$ jest obrazem punktu $P=(x,y)$ w symetrii względem punktu (0, 0), to:

$$\begin{cases} \dfrac{x'+x}{2}=0 \\ \dfrac{y'+y}{2}=0 \end{cases} \longleftarrow \text{współrzędne środka odcinka}$$

czyli $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$



Przykład 4 ◀ zad. 6.11

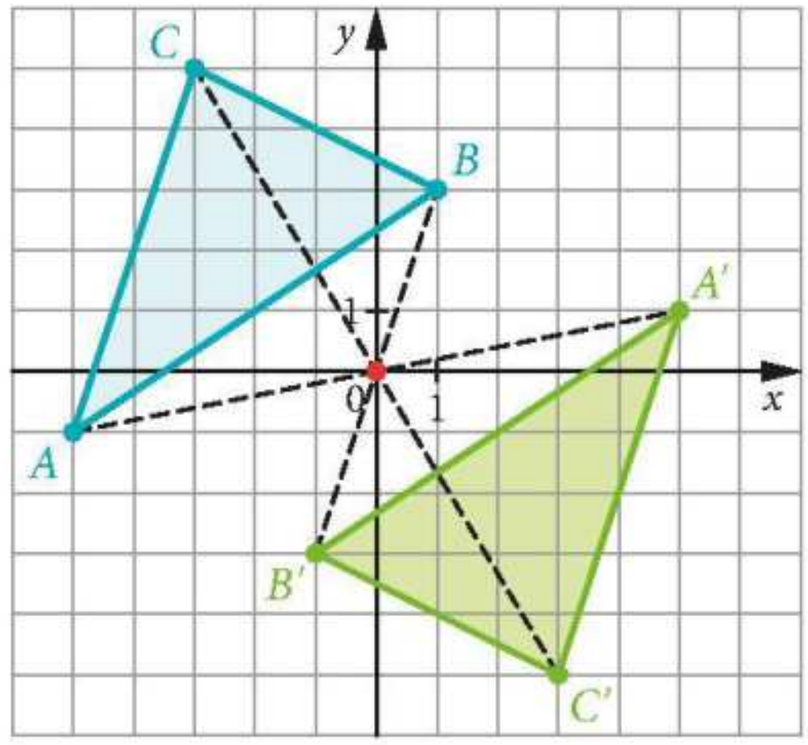
Trójkąt o wierzchołkach $A=(-5,-1)$, $B=(1,3)$, $C=(-3,5)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków obrazu trójkąta ABC w tej symetrii i narysujemy obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

Rozwiązanie

Niech A', B', C' oznaczają odpowiednio wierzchołki obrazu trójkąta ABC w tym przekształceniu. Zatem zgodnie z podanymi wzorami mamy:

$$A'=(5,\ 1),\ B'=(-1,\ -3),\ C'=(3,\ -5)$$

Na rysunku przedstawiamy ilustrację graficzną rozwiązania.



Przykład 5 ◂ zad. 6.14

Wyznaczymy obraz prostej $k\colon y = 2x - 3$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Obrazem prostej jest prosta, zatem należy:

Krok 1: Wybrać dwa dowolne punkty A i B należące do prostej k.

Krok 2: Przekształcić punkty A i B przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$, aby otrzymać punkty A' i B'.

Krok 3: Wyznaczyć równanie prostej k' przechodzącej przez punkty A' i B'.

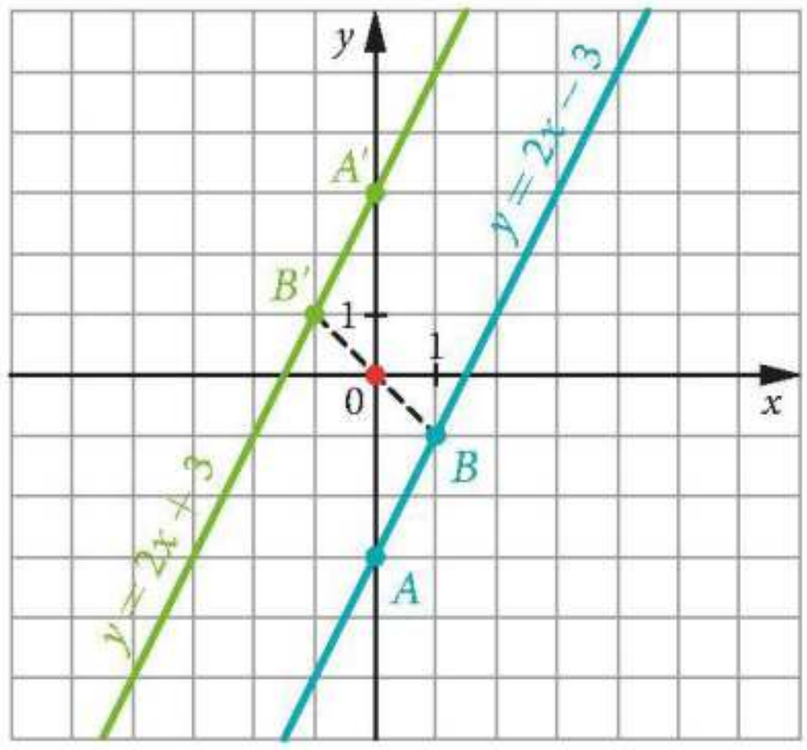
Wykonujemy kolejne kroki.

1. $A = (0, -3) \in k$ i $B = (1, -1) \in k$
2. $A' = (0, 3)$, $B' = (-1, 1)$
3. $k'\colon y = ax + b$, zatem:

$$\begin{cases} 3 = b \\ 1 = -a + b \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{l} A' = (0, 3) \in k' \\ \text{i } B' = (-1, 1) \in k' \end{array}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$k'\colon y = 2x + 3$



Odp.: Obrazem prostej $k\colon y = 2x - 3$ jest prosta $k'\colon y = 2x + 3$.

Zauważmy, że obrazem prostej w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta do niej równoległa.
Zapiszemy to spostrzeżenie w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych obrazem prostej $k\colon y = ax + b$ jest równoległa do niej prosta $k'\colon y = ax - b$.

Przykład 6 ◂ zad. 6.22

a) Przekształcimy punkt $P = (x, y)$ przez symetrię środkową względem punktu $T = (p, q)$.
b) Skorzystamy z wyprowadzonych wzorów i znajdziemy obraz punktu $P = \left(-\sqrt{7}, 6\right)$ w symetrii środkowej względem punktu $T = \left(2, \sqrt{2}\right)$.

Rozwiązanie

a) Jeśli $P' = (x', y')$ oznacza obraz punktu $P = (x, y)$, a punkt $T = (p, q)$ jest środkiem odcinka PP', to:

$$\begin{cases} p = \dfrac{x + x'}{2} \\ q = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \longleftarrow \text{współrzędne środka odcinka}$$

Zauważmy, że szukanie obrazu punktu w symetrii środkowej względem punktu jest tym samym, co znajdowanie końca odcinka, gdy dany jest jego środek i drugi koniec.

Po przekształceniu tych równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$$

b) $P = (-\sqrt{7}, 6)$, $T = (2, \sqrt{2})$, $P' = (x', y')$ jest obrazem punktu P w symetrii względem punktu T:

$$\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x' = 4 + \sqrt{7} \\ y' = 2\sqrt{2} - 6 \end{cases}$$

Odp.: a) $\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$ b) $P' = (4 + \sqrt{7}, 2\sqrt{2} - 6)$

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (2, 6)$, $C = (-2, 4)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

A. $\left(1, -\frac{11}{2}\right)$ **B.** $(1, -3)$ **C.** $(3, -9)$ **D.** $(0, -3)$

6.2. Okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
B. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
C. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$
D. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

6.3. Okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ jest obrazem okręgu F w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie okręgu F.

A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
B. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$
C. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
D. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$

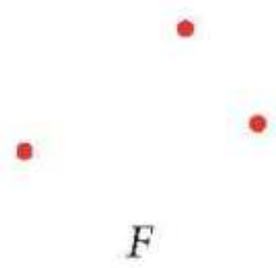
6.4. Narysuj dowolny trójkąt. Przekształć go przez symetrię względem środka jednego z boków. Jaką figurę tworzą oba trójkąty?

6.5. Czy prosta jest figurą środkowosymetryczną? Jeżeli tak, to ile ma środków symetrii?

6.6. Czy dana figura ma środek symetrii?
a) kąt
b) trapez prostokątny
c) suma trzech prostych równoległych
d) suma dwóch odcinków równoległych, rozłącznych i jednakowej długości

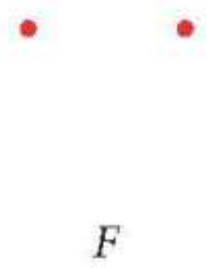
6.7. Przerysuj figurę F, a następnie uzupełnij ją jednym punktem tak, aby otrzymana figura miała środek symetrii. Ile odpowiedzi ma to zadanie?

a)



F

b)



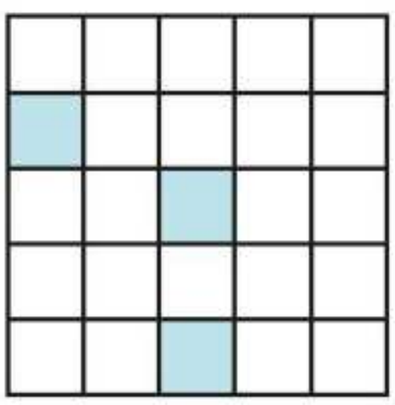
F

6.8. Trójkąt ABC przekształcono symetrycznie względem środka boku BC i otrzymano figurę, która wraz z trójkątem ABC utworzyła kwadrat. Jakim trójkątem jest trójkąt ABC?

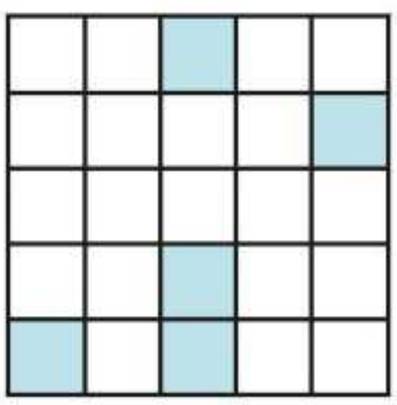
6.9. Dany jest okrąg O_1 i prosta sieczna l nieprzechodząca przez jego środek. Narysuj taki okrąg O_2, aby figura będąca sumą okręgów O_1, O_2 oraz prostej l miała środek symetrii.

6.10. Ile co najmniej kratek trzeba zamalować, żeby otrzymać figurę środkowosymetryczną?

a)



b)



6.11. Wyznacz współrzędne środka symetrii odcinka PQ.

a) $P = (3, -2),\ Q = (-5, 6)$

b) $P = (-3, 7),\ Q = (3, -1)$

c) $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right),\ Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$

d) $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$

6.12. Podaj współrzędne obrazów punktów:

$A = (-5, 4)$, $B = (7, -2)$, $C = \left(-\sqrt{3}, -5\right)$, $D = \left(-6, \sqrt{5}\right)$

w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

6.13. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-6, -2)$, $B = (-1, -4)$, $C = (-4, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta i narysuj obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

6.14. Napisz równanie obrazu danej prostej po przekształceniu jej przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

a) $y = 3x - 4$
b) $y = \sqrt{2}x + 11$
c) $y = -0{,}3x - \sqrt{7}$
d) $x - 15 = 0$
e) $8x - 3y + 5 = 0$
f) $9x + \sqrt{11}y - 3\sqrt{2} = 0$

6.15. Trójkąt, którego boki zawarte są w prostych o równaniach $2x - 5y - 6 = 0$, $3x - y + 4 = 0$ oraz $5x + 7y - 54 = 0$, przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta.

6.16. Na płaszczyźnie kartezjańskiej narysuj okrąg $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 9$, następnie przekształć go przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i napisz równanie otrzymanego okręgu.

6.17. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $S = (-2, 3)$, $r = 5$
b) $S = \left(0, -\sqrt{5}\right)$, $r = 1$
c) $S = (-4, -2)$, $r = \sqrt{2}$
d) $S = (7, -8)$, $r = 3\sqrt{5}$

6.18. Napisz równanie okręgu otrzymanego w wyniku przekształcenia okręgu o podanym równaniu przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$.

a) $\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y + 2)^2 = \sqrt{2}$
b) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 43 = 0$
c) $(x + 11)^2 + (y + 0{,}1)^2 = 9$
d) $x^2 + y^2 - 16x + 8y + 78 = 0$

6.19. Okrąg K_1 jest obrazem okręgu K w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie okręgu K.

a) $K_1: \left(x - \sqrt{7}\right)^2 + (y - 7)^2 = 3$
b) $K_1: x^2 + y^2 + 2x - 22y + 120 = 0$
c) $K_1: (x - 3)^2 + (y + 0{,}2)^2 = 13$
d) $K_1: x^2 + y^2 + 16x + 34y + 348 = 0$

6.20. Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (5, 0)$ i $C = (2, 1)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A', B', C'. Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

D **6.21.** Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 2)$, $B = \left(3, 2\sqrt{3} + 2\right)$, $C = \left(3, 2 - 2\sqrt{3}\right)$ jest równoboczny. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu opisanego na tym trójkącie.

6.22. Wyznacz współrzędne obrazu punktu P w symetrii względem punktu T.

a) $P = (-2, 1)$, $T = (-3, 4)$

b) $P = (-1, 5)$, $T = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

6.23. Wyznacz równanie obrazu prostej k w symetrii względem punktu P.

a) $k\colon x + y - 4 = 0$, $P = (2, -1)$

b) $k\colon 2x - y + 3 = 0$, $P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

D **6.24.** Wykaż, że obrazem prostej $k\colon y = ax + b$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest równoległa do niej prosta $k'\colon y = ax - b$.

D * **6.25.** Wykaż, że obrazem prostej $k\colon y = ax + b$ w symetrii środkowej względem punktu $P = (p, q)$ jest równoległa do niej prosta $k'\colon y = ax + c$.

Prosto do matury

1. Figurę F tworzą: odcinek AB oraz punkty C i D nienależące do tego odcinka. Oceń prawdziwość podanych zdań. Figura F

A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.

B. ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku.

C. może mieć nieskończenie wiele środków symetrii.

2. Napisz równanie obrazu prostej $2x - 4y + 5 = 0$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

3. Punkty $A = (1, -5)$, $B = (3, 1)$ i $C = (-4, 7)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A', B', C'. Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

4. Prosta k jest obrazem prostej $l\colon x - y - 5 = 0$ w symetrii środkowej względem punktu $S = (1, -1)$. Napisz równanie prostej k.

5. Punkt $A = (-5, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt A_1. Punkt $B_1 = (2, 3)$ jest obrazem punktu B w tym samym przekształceniu. Podaj współrzędne punktów A_1 i B oraz oblicz pole czworokąta ABA_1B_1.

7. Symetria osiowa

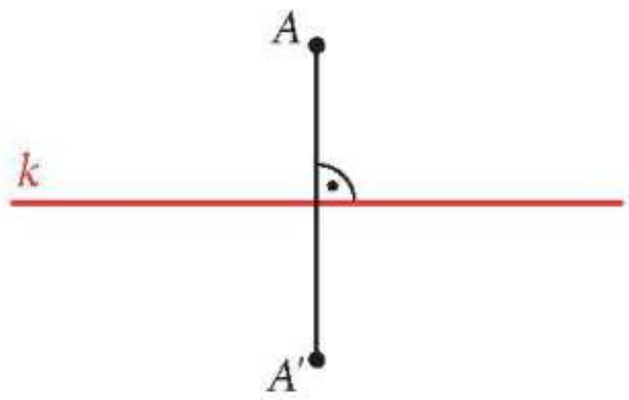
Umiejętności:

- wyznaczanie osi symetrii w figurach osiowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii osiowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

Symetria osiowa, podobnie jak symetria środkowa, była omawiana w szkole podstawowej. Powtórzymy własności tego przekształcenia, a następnie omówimy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

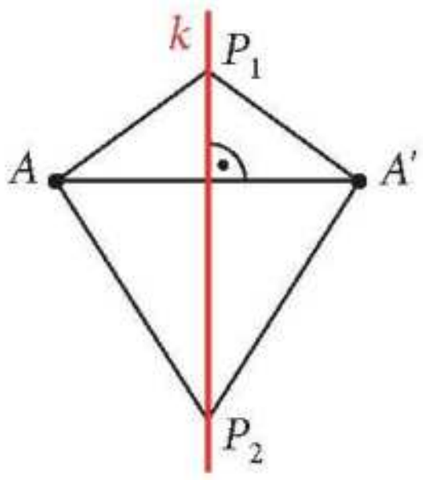
Symetria osiowa na płaszczyźnie

Punkty A i A' są **symetryczne względem prostej** k, gdy odcinek AA' jest prostopadły do k i jego środek należy do k.
Prostą k nazywamy **osią symetrii** punktów A i A'.



Jeżeli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej k, to również punkt A jest symetryczny do punktu A' względem prostej k. Jeżeli punkt A leży na prostej k, to $A' = A$.

Zauważmy, że oś symetrii punktów A i A' jest symetralną odcinka AA'. Jest zatem zbiorem punktów równo oddalonych od jego końców. Tę własność symetralnej wykorzystujemy do konstrukcji punktu A' symetrycznego do punktu A względem prostej k:



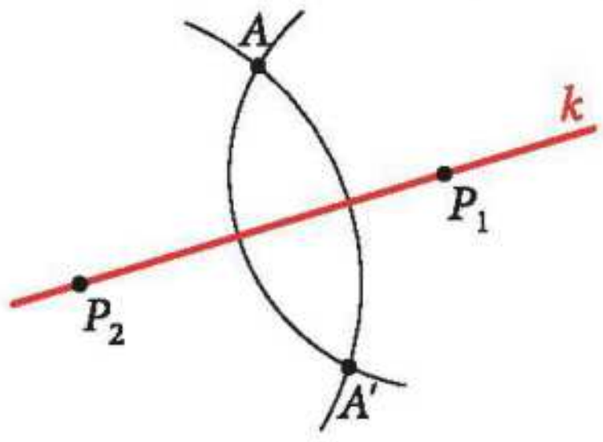
$$|P_1A| = |P_1A'|$$
$$|P_2A| = |P_2A'|$$

Krok 1: Z dowolnego punktu P_1 prostej k zataczamy okrąg o promieniu $|P_1A|$.

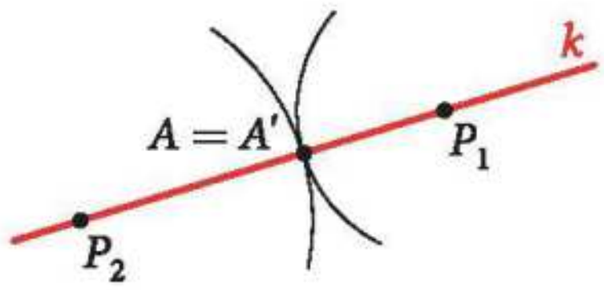
Krok 2: Z dowolnego punktu P_2 $(P_2 \neq P_1)$ prostej k zataczamy okrąg o promieniu $|P_2A|$.

Krok 3: Jeżeli punkt A nie leży na prostej k, to poprowadzone okręgi przecinają się w dwóch punktach. Jednym z nich jest punkt A, a drugim szukany punkt A' (rys. 1). Jeżeli punkt A leży na prostej k, to $A' = A$ (rys. 2).

Rys. 1



Rys. 2

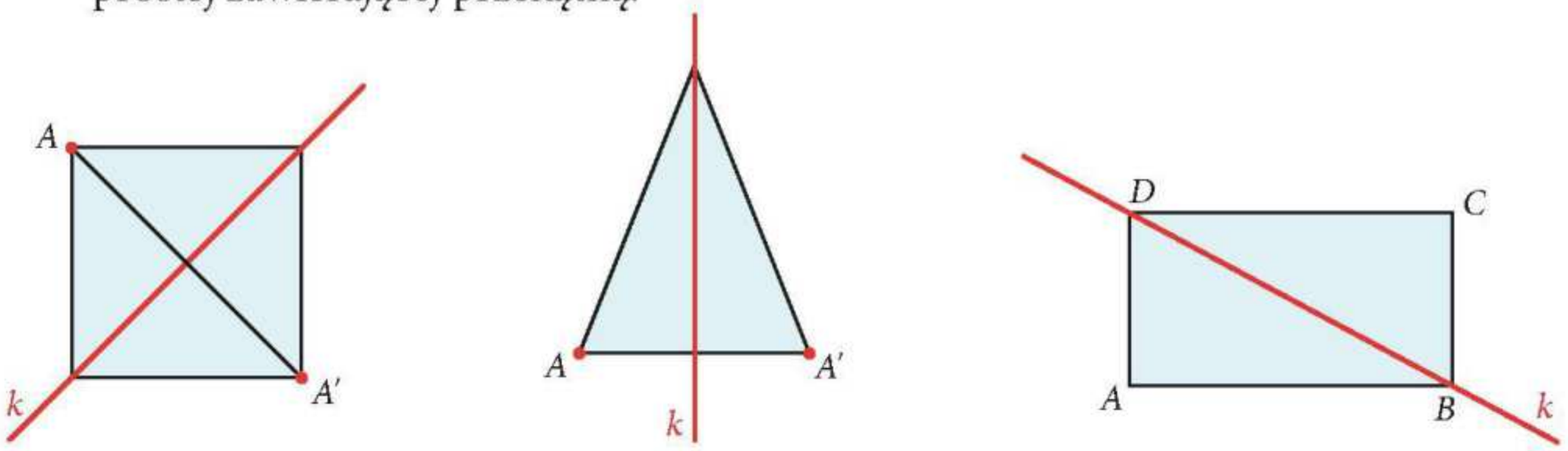


Przykład 1

a) Przeciwległe wierzchołki kwadratu są symetryczne względem prostej zawierającej tę przekątną kwadratu, do której nie należą.

b) Końce podstawy trójkąta równoramiennego są symetryczne względem prostej zawierającej wysokość opuszczoną z trzeciego wierzchołka tego trójkąta.

c) Wierzchołki prostokąta, który nie jest kwadratem, **nie są** symetryczne względem prostej zawierającej przekątną.



W przypadku symetrii środkowej wyróżniliśmy figury mające środek symetrii. Teraz zajmiemy się figurami mającymi oś symetrii.

Definicja

Prostą k nazywamy **osią symetrii figury** F, jeżeli dla każdego punktu A należącego do F punkt A' symetryczny do A względem k też należy do F.
Figurę F nazywamy **osiowosymetryczną**.

Przykład 2

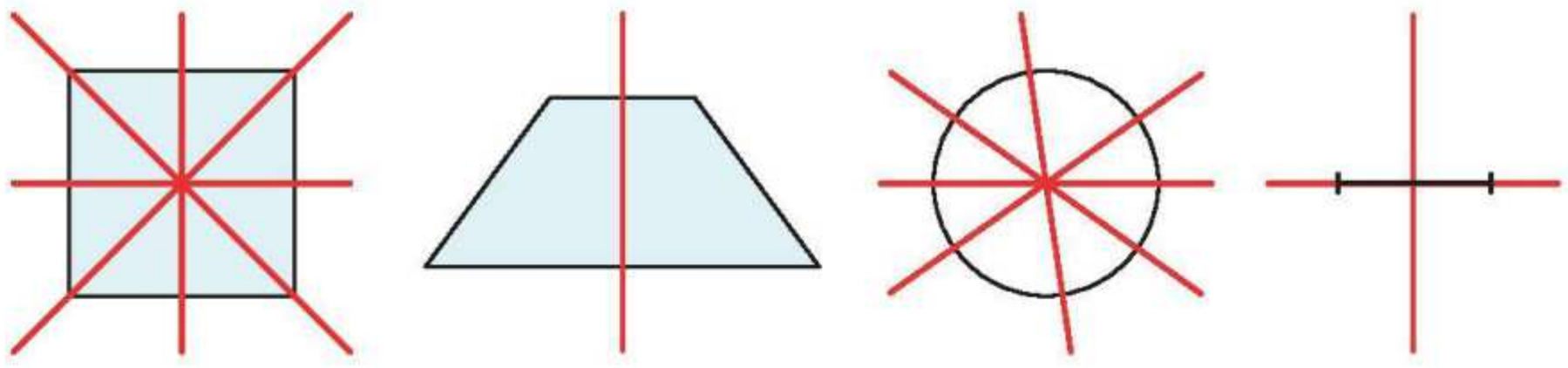
◀ zad. 7.4, 7.5

a) Kwadrat jest figurą osiowosymetryczną. Ma cztery osie symetrii.

b) Trapez równoramienny różny od równoległoboku ma jedną oś symetrii.

c) Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii – jest nią każda prosta przechodząca przez jego środek.

d) Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest prosta, w której ten odcinek się zawiera, a drugą – jego symetralna.

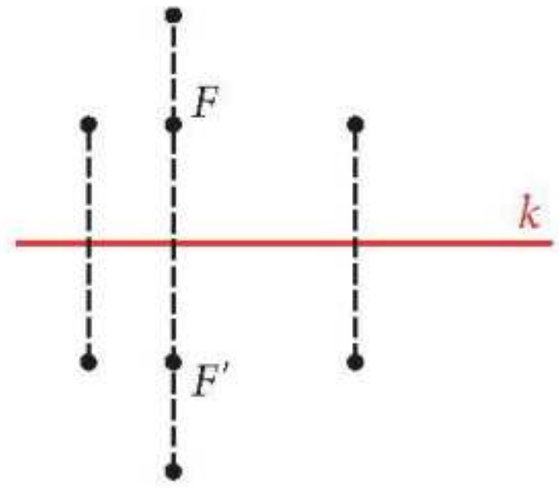


Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi P przyporządkowuje punkt P' symetryczny do P względem ustalonej prostej k, nazywamy **symetrią osiową o osi** k.

Przykład 3 ◂ zad. 7.9

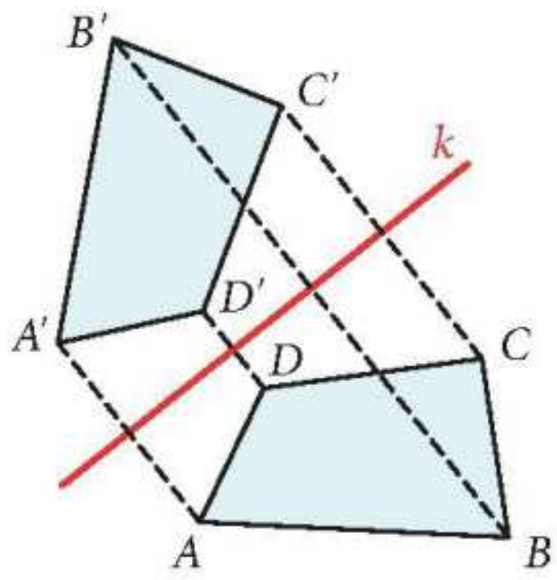
Dana jest figura F i prosta k. Wyznaczymy figurę F', która jest obrazem figury F w symetrii o osi k.

a) Figura F składa się ze skończonej liczby punktów. Aby otrzymać figurę F', przekształcamy przez symetrię względem prostej k każdy z tych punktów.

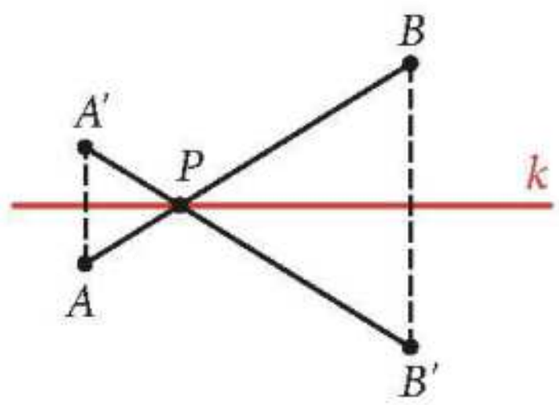


b) Figura F jest czworokątem $ABCD$.
Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta $ABCD$ jest wierzchołek czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta $ABCD$ jest punkt należący do brzegu czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu wewnętrznego czworokąta $ABCD$ jest punkt wewnętrzny czworokąta $A'B'C'D'$.



c) Figura F jest odcinkiem AB przecinającym prostą k. Obrazem odcinka AB jest odcinek $A'B'$. Odcinki AB i $A'B'$ przecinają się w punkcie P leżącym na osi symetrii k. Jest to punkt, który w wyniku symetrii został przekształcony sam na siebie – czyli punkt stały tego przekształcenia.



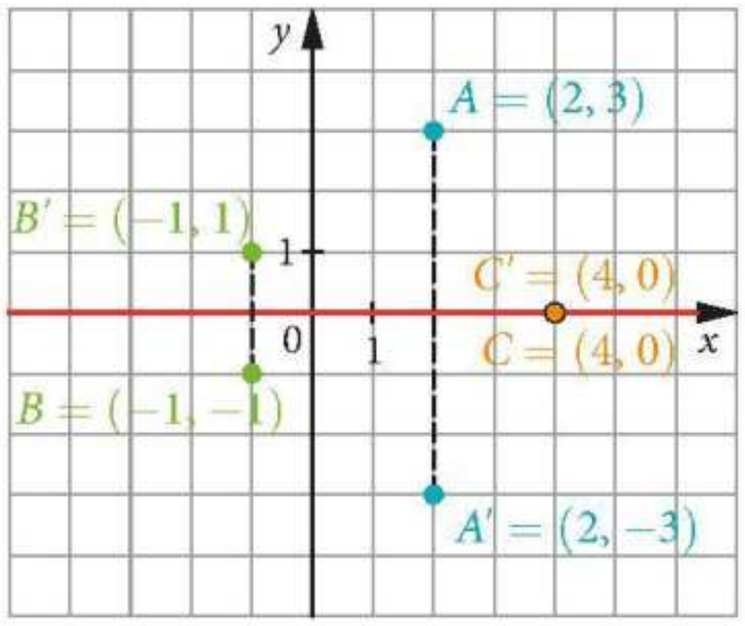
Symetria osiowa względem prostej k ma nieskończenie wiele punktów stałych – każdy punkt prostej k jest punktem stałym tego przekształcenia.

Figury: F i jej obraz F' w symetrii osiowej **są przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu r – okrąg o promieniu r, trójkąta ABC – przystający do niego trójkąt $A'B'C'$ itd.

Symetria osiowa względem osi x

Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię osiową względem dowolnej prostej. Ograniczymy się jednak do omówienia dwóch sytuacji, w których osią symetrii jest jedna z osi układu współrzędnych. Zaczniemy od osi x.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



Punkty położone symetrycznie względem osi x mają identyczne pierwsze współrzędne, natomiast ich drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli $P' = (x', y')$ oznacza obraz punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi x, to:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Przykład 4 ◀ zad. 7.13

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ w symetrii osiowej względem osi x.

Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek $S = (-1, 2)$ i promień $r = 4$. Wiemy, że obrazem okręgu w tym przekształceniu jest figura do niego przystająca, czyli okrąg o takim samym promieniu.

Przyjmijmy, że S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu.

$S' = (-1, -2)$, $r' = r = 4$

Odp.: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Przykład 5

Okrąg o równaniu $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y - 4)^2 = 7$ powstał w wyniku przekształcenia pewnego okręgu przez symetrię względem osi x. Jaki okrąg został przekształcony?

Rozwiązanie

Szukany okrąg ma środek $S = (x, y)$ i promień r.

Jeśli S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu, to:

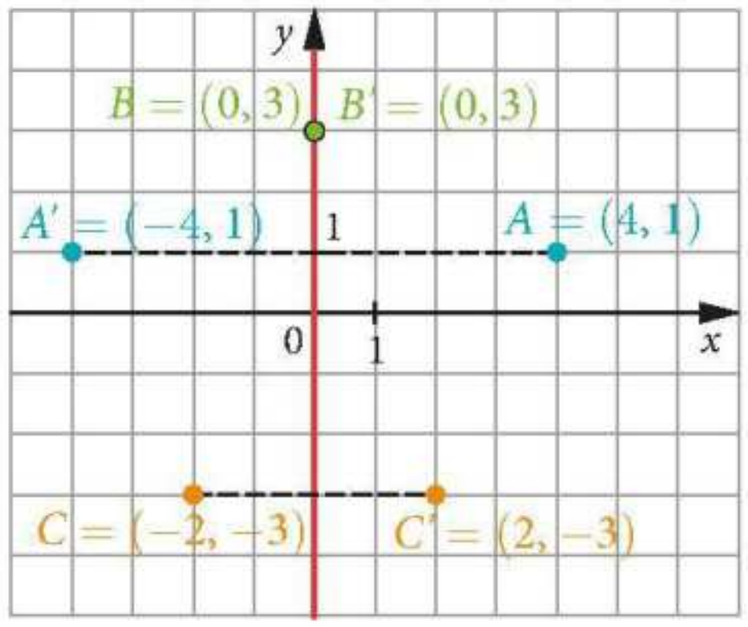
$S' = \left(-\sqrt{3}, 4\right)$, zatem $S = \left(-\sqrt{3}, -4\right)$

$r' = r = \sqrt{7}$

Odp.: $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 7$

Symetria osiowa względem osi y

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



Punkty położone symetrycznie względem osi y mają identyczne drugie współrzędne, natomiast ich pierwsze współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli $P' = (x', y')$ oznacza obraz punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi y, to:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Przykład 6 ◂ zad. 7.14

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ w symetrii osiowej względem osi y.

Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek $S = (3, 1)$ i promień $r = 2$.

Przyjmijmy, że S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu.

$$S' = (-3, 1), \quad r' = r = 2$$

Odp.: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Przykład 7 ◂ zad. 7.20, 7.21

Wyznaczymy obraz punktu $P = (-1, 2)$ w symetrii osiowej względem prostej l: $x - 2y - 5 = 0$.

Rozwiązanie

$P' = (x', y')$ jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l.

Aby konstrukcyjnie wyznaczyć punkt P', najpierw prowadzimy prostą k prostopadłą do l i przechodzącą przez P. Punkt M przecięcia prostych k i l jest środkiem odcinka PP', stąd możemy wyznaczyć punkt P'.

k: $2x + y + c = 0$ $\longleftarrow k \perp l$

$c = 0$ $\longleftarrow P \in k$

k: $2x + y = 0$

$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$, więc $M = (1, -2)$, stąd $\begin{cases} 1 = \frac{-1 + x'}{2} \\ -2 = \frac{2 + y'}{2} \end{cases}$, czyli $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = -6 \end{cases}$.

Odp.: $P' = (3, -6)$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 2)$, $B = (-3, 6)$, $C = (-6, 1)$ w symetrii osiowej względem osi y. Wskaż środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

A. $(-2, 3)$ **B.** $(-2, -3)$ **C.** $(2, -3)$ **D.** $(2, 3)$

7.2. Okrąg o równaniu $(x-1)^2+(y-4)^2 = 9$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
B. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
C. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$
D. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

7.3. Okrąg o równaniu $(x+3)^2+(y-2)^2 = 5$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi y. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
B. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$
C. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
D. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$

7.4. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą

a) prostej i okręgu? b) dwóch okręgów? c) dwóch prostych?

Rozważ różne możliwości.

7.5. Wskaż osie symetrii figury, która jest sumą

a) dwóch trójkątów równobocznych o wspólnym boku.
b) prostej i punktu nieleżącego na niej.
c) dwóch okręgów o różnych promieniach, stycznych zewnętrznie.

7.6. Narysuj dwa punkty: A i B. Wyznacz taki punkt C, aby figura składająca się z punktów A, B, C

a) miała jedną oś symetrii. b) miała dwie osie symetrii. c) nie miała osi symetrii.

7.7. Narysuj trzy niewspółliniowe punkty: A, B, C. Wyznacz taki punkt D, aby figura składająca się z punktów A, B, C, D miała oś symetrii. Przy jakim położeniu punktów A, B, C, D figura $\{A, B, C, D\}$ ma dwie osie symetrii?

7.8. Narysuj dwie proste: a i b spełniające podany warunek, a następnie dorysuj taką prostą c, aby figura będąca sumą tych trzech prostych miała oś symetrii. Ile jest takich prostych?

a) a, b są równoległe b) a, b przecinają się

7.9. Dana jest figura F i prosta k. Wyznacz obraz figury F w symetrii o osi k.

a) F – kwadrat, k – prosta zawierająca jeden z boków tego kwadratu

b) F – równoległobok, k – prosta zawierająca dłuższą przekątną tego równoległoboku

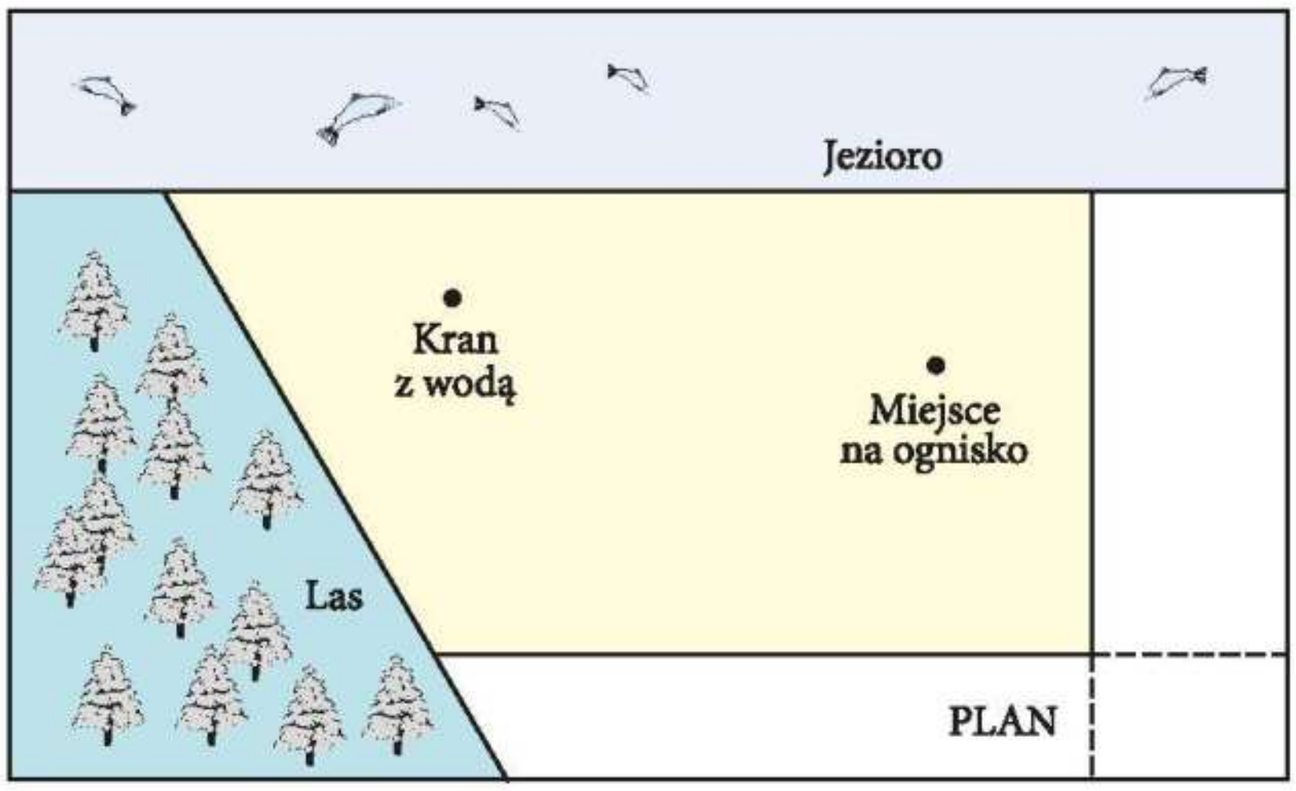
c) F – okrąg, k – prosta zawierająca cięciwę tego okręgu

d) F – suma dwóch prostych równoległych, k – prosta przecinająca te dwie proste

e) F – trapez równoramienny, k – prosta prostopadła do ramienia tego trapezu i przechodząca przez wierzchołek jego kąta rozwartego

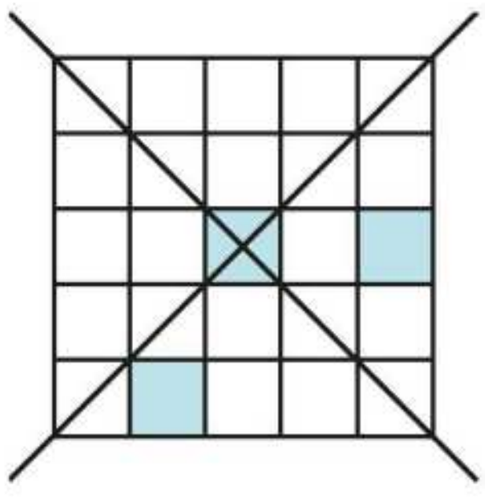
f) F – trójkąt równoramienny, k – prosta przechodząca przez środek podstawy tego trójkąta i prostopadła do jednego z jego ramion

7.10. Poniżej przedstawiony jest plan pola namiotowego na Mazurach. Michał i Bartek chcą rozbić na tym polu namiot. Michał upiera się, by namiot stał w tej samej odległości od kranu z wodą i od ogniska. Bartkowi zależy na tym, by mieć jednakowo blisko do lasu i do jeziora. Gdzie powinni rozbić namiot?

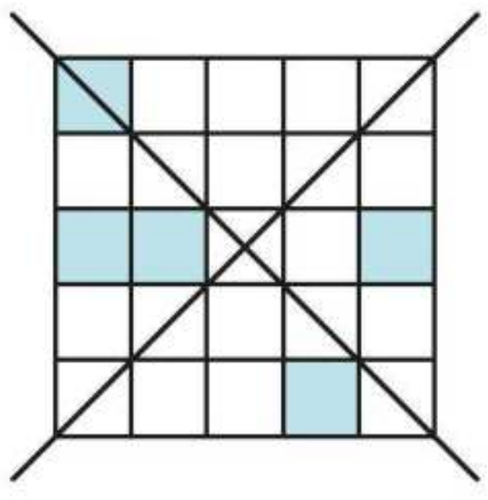


7.11. Ile co najwyżej kratek nie będzie zamalowanych, jeżeli uzupełnimy rysunek tak, aby obydwie przekątne były osiami symetrii otrzymanej figury?

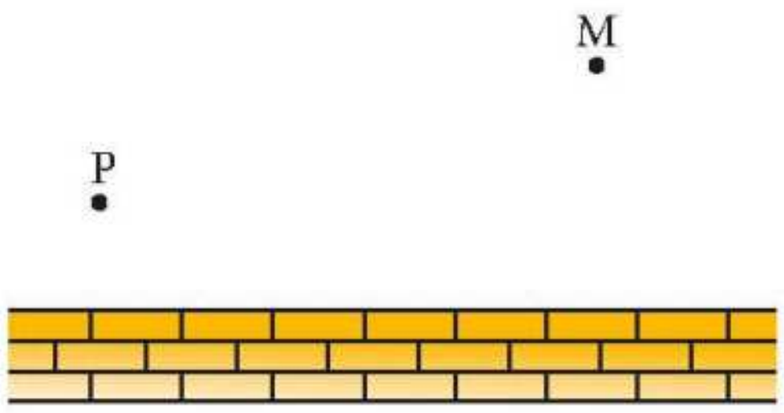
a)



b)



7.12. Paweł chce kopnąć piłkę tak, by odbiła się od muru i trafiła do Marcina. W jakim kierunku powinien ją kopnąć?



7.13. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi x. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x-9)^2+(y+11)^2=1$

b) $\left(x-1+\sqrt{2}\right)^2+y^2=8$

c) $x^2+\left(y-2-\sqrt{5}\right)^2=7$

d) $x^2+\left(y+1-3\sqrt{6}\right)^2=9$

7.14. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi y. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x+3)^2+(y-13)^2=12$

b) $x^2+\left(y-7+\sqrt{11}\right)^2=6$

c) $\left(x+5-\sqrt{3}\right)^2+y^2=18$

d) $(x+0{,}4)^2+\left(y-1-2\sqrt{7}\right)^2=16$

7.15. Obrazem okręgu K w symetrii f jest okrąg K_1. Napisz równanie okręgu K.

a) $K_1\colon (x-3)^2+(y+17)^2=10$, f – symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

b) $K_1\colon (x+13)^2+(y-10)^2=15$, f – symetria osiowa względem osi x

c) $K_1\colon (x-14)^2+(y+16)^2=17$, f – symetria osiowa względem osi y

7.16. Punkty $A'=(2,4)$, $B'=(-6,6)$, $C'=(0,-8)$ są obrazami wierzchołków trójkąta ABC w symetrii osiowej względem osi x.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Punkty $P=(-3,1)$, $Q=(1,2)$, $R=(-2,-5)$ są środkami boków trójkąta ABC.

B. Środkiem ciężkości trójkąta ABC jest punkt $S=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

C. Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\sqrt{17}$.

7.17. Punkty $A=(-3,6)$, $B=(3,-1)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x i otrzymano odpowiednio punkty A_1 i B_1. Oblicz pole czworokąta AA_1BB_1.

7.18. Okrąg o równaniu $(x-4)^2+(y+7)^2=18$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x.

D a) Wykaż, że punkt $A=(1,4)$ leży na otrzymanym okręgu.

b) Napisz równanie stycznej do otrzymanego okręgu poprowadzonej w punkcie A.

7.19. Okręgi o równaniach $(x+1)^2+(y+2)^2=34$ i $(x-11)^2+(y-1)^2=85$ przecinają się w punktach A i B.

a) Wyznacz współrzędne punktów A i B.

b) Znajdź współrzędne obrazów A_1 i B_1 punktów (odpowiednio) A i B w symetrii osiowej względem osi y.

c) Oblicz pole czworokąta A_1ABB_1.

7.20. Wyznacz równanie obrazu okręgu $x^2+y^2+2x-4y-45=0$ w symetrii względem prostej $y=2x-1$.

7.21. Punkt M jest obrazem początku układu współrzędnych w symetrii względem prostej $x-4y+17=0$. Wyznacz współrzędne punktu M.

Prosto do matury

1. Po przekształceniu okręgu F przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych otrzymano okrąg F'. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Figura będąca sumą okręgów F i F'

A. ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.

B. może mieć tylko jedną oś symetrii.

C. może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

2. Punkt $A=(-4,\ 3)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x i otrzymano punkt A_1, a punkt $B=(-1,\ -2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt B_1. Podaj współrzędne punktów A_1 i B_1 oraz oblicz pole czworokąta AA_1BB_1.

3. Trójkąt ABC ograniczony prostymi $2x-y+6=0$, $x-y=0$, $x-2=0$ odbito symetrycznie względem osi y. Wyznacz współrzędne wierzchołków wielokąta będącego częścią wspólną trójkąta ABC i jego obrazu. Oblicz pole tego wielokąta.

4. Okrąg o środku $S=(2,\ -3)$ i promieniu $r=4$ przekształcono symetrycznie względem osi x i otrzymano okrąg o środku S_1. Okręgi o środkach S i S_1 przecinają się w punktach A i B. Oblicz pole czworokąta SAS_1B.

5. W trójkącie o wierzchołkach $A=(0,\ 6)$, $B=(7,\ -1)$ i $C=(8,\ 10)$ poprowadzono wysokość z wierzchołka C. Następnie przekształcono trójkąt ABC przez symetrię osiową względem prostej zawierającej tę wysokość. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu trójkąta ABC.

8. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Odległość między punktami $P = \left(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$ i $Q = \left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ jest równa

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

2. Punkt A leży na osi x, $B = (-5, 6)$, a środek odcinka AB leży na osi y. Wskaż długość odcinka AB.

A. $2\sqrt{17}$ **B.** 8 **C.** 16 **D.** $2\sqrt{34}$

3. W kwadracie $ABCD$ punkty $P = (2, 3)$ i $Q = (7, 4)$ są odpowiednio środkami boków AB i BC. Przekątna kwadratu ma długość

A. $\sqrt{26}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $3\sqrt{26}$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{26}$.

4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 3)$, $B = (6, -1)$, $C = (0, 7)$. Wskaż długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C.

A. $2\sqrt{10}$ **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{15}$ **D.** 8

5. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-3, 5)$ i równoległej do prostej $y = \frac{2}{3}x - 4$.

A. $2x + 3y - 9 = 0$ **C.** $2x - 3y + 21 = 0$

B. $3x - 2y + 19 = 0$ **D.** $3x + 2y - 1 = 0$

6. W trapezie $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej $x - 2y + 10 = 0$, dany jest wierzchołek $D = (6, 6)$. Która prosta zawiera podstawę CD?

A. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ **B.** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **C.** $y = -2x + 3$ **D.** $y = 2x + 3$

7. Wskaż odległość między prostymi $y = 3x - 2$ i $y = 3x + 1$.

A. 3 **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **D.** $\frac{3}{\sqrt{10}}$

8. Dany jest okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$. Wskaż współrzędne środka i promień r tego okręgu.

A. $(3, -2)$, $r = 3$ **B.** $(-3, 2)$, $r = 3$ **C.** $(-3, -2)$, $r = \sqrt{3}$ **D.** $(-3, 2)$, $r = \sqrt{3}$

9. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$ z osiami układu współrzędnych jest równa

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

10. Na okręgu o promieniu 7 leży punkt $A = (0, -4)$. Równanie tego okręgu może mieć postać

A. $(x-7)^2 + y^2 = 7$.
B. $x^2 + (y+4)^2 = 49$.
C. $(x-7)^2 + (y+4)^2 = 49$.
D. $(x-4)^2 + y^2 = 7$.

11. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $(x-3)^2 + (y+1)^2 \leqslant 8$?

A. koło o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$
B. koło o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 8$
C. okrąg o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$
D. półpłaszczyzna

12. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 9 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$?

A. dwa punkty **B.** punkt **C.** odcinek **D.** zbiór pusty

13. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą równania $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 20 = 0$?

A. zbiór pusty **B.** okrąg **C.** dwie proste **D.** płaszczyzna

14. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 \leqslant 0$?

A. koło **B.** zbiór pusty **C.** płaszczyzna **D.** punkt

15. Prosta o równaniu $y = -2x - 9$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (4, 3)$. Wskaż promień tego okręgu.

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{5}$

16. Wskaż równanie prostej, która nie jest styczna do okręgu $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$.

A. $3x + 4y - 20 = 0$
B. $4x + 3y - 16 = 0$
C. $3x - 4y + 12 = 0$
D. $4x - 3y - 10 = 0$

17. Punkty $A = \left(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}\right)$, $B = \left(1 + \sqrt{3}, 5 - 2\sqrt{3}\right)$, $C = \left(5 + 3\sqrt{3}, 7 + 3\sqrt{3}\right)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Środkiem symetrii tego równoległoboku jest punkt

A. $\left(-1, 2 - 1{,}5\sqrt{3}\right)$.
B. $\left(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right)$.
C. $\left(-3 + 2\sqrt{3}, 2 + 5\sqrt{3}\right)$.
D. $\left(3 + 2\sqrt{3}, 6 + 0{,}5\sqrt{3}\right)$.

18. Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $P = (-3, 0)$ i $Q = (0, 3)$.

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$
C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$
B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$
D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$

19. Obrazem okręgu o środku $S = (-3, 5)$ i promieniu 2020 w symetrii względem osi y jest okrąg o środku S_1. Odległość między środkami tych okręgów jest równa

A. 6.
B. 10.
C. 2010.
D. 2020.

20. Okrąg o równaniu $(x-7)^2 + (y+2)^2 = 11$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu (0, 0). Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x+7)^2 + (y+2)^2 = 11$
C. $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 11$
B. $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 11$
D. $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 11$

21. Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (2, 6)$, $C = (-2, 4)$.

A. $\left(-1, \frac{11}{2}\right)$
B. $(-1, 3)$
C. $(-3, 9)$
D. $(0, 3)$

W zadaniach 22–38 oceń prawdziwość podanych zdań.

22.

A. Równanie $2x + 4y + 3 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
B. Prosta o równaniu $-3x\pi = 0$ jest równoległa do osi x.
C. Prosta o równaniu $\sqrt{7}x + \pi y = 2$ jest wykresem funkcji.

23. Okrąg o środku $S = (3, -2)$ i promieniu $r = \sqrt{3}$ można opisać za pomocą równania

A. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 3$.
B. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3$.
C. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$.

24. Dane jest koło opisane za pomocą nierówności $(x+4)^2 + (y+2)^2 \leqslant 9$.

A. Punkt $A = (-1, -1)$ należy do tego koła.
B. Punkt $B = (-7, -3)$ leży na zewnątrz tego koła.
C. Punkt $C = \left(-6, \sqrt{5} - 2\right)$ leży na zewnątrz tego koła.

25. Okrąg o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ jest styczny do

A. osi x.
B. prostej $y = 6$.
C. prostej $x = 1$.

26. Nierówność $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 49 < 0$ opisuje

A. zbiór pusty.

B. koło o środku $S = (7, -1)$ i promieniu $r = 1$.

C. zbiór punktów leżących na zewnątrz koła o środku $S = (7, -1)$ i promieniu $r = 1$.

27. Dany jest okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

A. Punkt $M = (3, -6)$ należy do tego okręgu.

B. Punkt $P = (3, 3)$ należy do tego okręgu.

C. Okrąg ten jest styczny do obydwu osi układu współrzędnych.

28. Figura opisana za pomocą układu nierówności $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 25 \\ 4x + 3y - 10 \leqslant 0 \end{cases}$

A. ma nieskończenie wiele osi symetrii.

B. ma dokładnie jedną oś symetrii.

C. jest środkowosymetryczna.

29. Dany jest okrąg o równaniu $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

A. Prosta $y = -8$ jest styczna do tego okręgu.

B. Prosta $y = x$ nie ma punktów wspólnych z tym okręgiem.

C. Prosta $x = -4$ jest osią symetrii tego okręgu.

30. Dany jest zbiór F opisany za pomocą układu nierówności $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

Do zbioru F należy

A. punkt o współrzędnych $(-1, 1)$.

B. co najmniej pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

C. dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

31. Zbiór opisany za pomocą układu nierówności $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \geqslant 4 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$ ma

A. dokładnie jedną oś symetrii.

B. co najmniej dwie osie symetrii.

C. nieskończenie wiele osi symetrii.

32. Punkt przecięcia prostych o równaniach $3x + 2y - 6 = 0$ i $2x - y - 4 = 0$ należy do zbioru punktów płaszczyzny opisanego za pomocą nierówności

A. $x^2 + y^2 \leqslant 3$. **B.** $x^2 + y^2 \leqslant 4$. **C.** $x^2 + y^2 \leqslant 5$.

33. Odległość punktu $(2, 5)$ od środka okręgu $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ jest

A. równa 3. **B.** równa $\sqrt{21}$. **C.** liczbą wymierną.

34. Okręgi o równaniach $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ i $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 180 = 0$
A. są styczne zewnętrznie.
B. przecinają się.
C. nie mają punktów wspólnych.

35. Dany jest okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 1$.
A. Prosta $7x + 3y = 0$ zawiera średnicę tego okręgu.
B. Prosta $y = x - 10$ jest osią symetrii tego okręgu.
C. Prosta $y = 2x - 9$ jest styczna do tego okręgu.

36. Dany jest okrąg $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$ i prosta k: $x - y - 2 = 0$.
A. Prosta k ma dwa punkty wspólne z tym okręgiem.
B. Prosta k ma dokładnie jeden punkt wspólny z tym okręgiem.
C. Odległość środka tego okręgu od prostej k jest równa $2\sqrt{2}$.

37. Figura będąca sumą zbiorów opisanych za pomocą warunków
$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 \leqslant 0$ i $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
A. ma dokładnie jedną oś symetrii.
B. ma nieskończenie wiele osi symetrii.
C. jest kołem.

38. Dany jest układ równań $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-a)^2 = 1 \\ y = |x-1| \end{cases}$ z parametrem a. Układ ten
A. dla pewnej wartości parametru a ma jedno rozwiązanie.
B. dla nieskończenie wielu wartości parametru a ma cztery rozwiązania.
C. dla pewnej wartości parametru a ma trzy rozwiązania.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

39. Oblicz długość odcinka AB.

a) $A = (1, 7)$, $B = (3, -3)$

b) $A = \left(-1\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right)$, $B = \left(0{,}5, \sqrt{3}\right)$

c) $A = \left(-\frac{11}{100}, 5\frac{1}{2}\right)$, $B = (-0{,}11, -3)$

d) $A = \left(-\sqrt{2}, 7\right)$, $B = \left(2\sqrt{2}, -2\right)$

40. Oblicz odległość punktu A od prostej l.

a) $A = (2, -3)$, l: $x - y + 5 = 0$

b) $A = (-1, 4)$, l: $-3x + 4y + 1 = 0$

c) $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, l: $2x + 3y + 10 = 0$

d) $A = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, l: $-x + 3y + 5 = 0$

41. Napisz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt P.

a) $S = (-2, 1),\ P = (3, 2)$

b) $S = (4, 0),\ P = (-2, 5)$

c) $S = \left(\frac{1}{3}, -3\right),\ P = \left(2\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

d) $S = (-3, 3),\ P = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

42. Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu.

a) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$ $\quad 2x + y - 4 = 0$

b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ $\quad 3x - 2y - 3 = 0$

c) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 45$ $\quad x - 4y + 2 = 0$

d) $(x+7)^2 + y^2 = 34$ $\quad x - y - 2 = 0$

43. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o podanych równaniach.

a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 52$ $\quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

b) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ $\quad (x+6)^2 + (y+8)^2 = 100$

c) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$ $\quad (x+2)^2 + (y+6)^2 = 18$

d) $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 10$ $\quad (x-4)^2 + (y-7)^2 = 90$

44. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o podanych równaniach.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x + 2 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 30 = 0$ $\quad x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 6 = 0$ $\quad x^2 + y^2 + 10x + 2y + 25 = 0$

45. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $3x + \sqrt{5}y = m$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

46. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór:

$A = \{(x, y):\ x \in \langle -2; 4\rangle \text{ i } y \in \langle -4; 3\rangle\}$

Jaką figurą geometryczną jest zbiór A? Ile wynosi jego pole?

47. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2x + y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(1, 3), (-3, 3), (-3, -2), (1, -2)$?

48. Dany jest punkt $P = (6, -4)$. Punkt Q jest obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi x, a punkt R – obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi y. Oblicz długość odcinka QR.

49. Wyznacz równanie tej spośród osi symetrii okręgu o równaniu $(x+3)^2+y^2 = 36$, która przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$.

50. Dana jest prosta k o równaniu $y = 3x-7$. Wyznacz równanie prostej k', która jest obrazem prostej k w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

51. Punkt $B = (12, 6)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $x + 2y - 6 = 0$ i $x - y + 3 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku i oblicz jego obwód.

52. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, ramię BC zawiera się w prostej $y = -\frac{1}{2}x + 6$ i $A = (-6, -1)$. Pole tego trójkąta jest równe 40. Oblicz współrzędne punktu C.

53. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 8)$, $B = (4, -1)$, $C = (5, 4)$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość CD. Wyznacz współrzędne punktu D.

54. Trójkąt ABC jest ograniczony prostymi AB: $x-3y+9 = 0$, BC: $x+2y-16 = 0$, AC: $2x - y + 8 = 0$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
b) Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C.
c) Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka B tego trójkąta.

55. Punkty $A = (-8, -13)$, $C = (0, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie $K = (2, -3)$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.

56. W trójkącie prostokątnym kąt ABC jest prosty. Wierzchołek C leży na prostej $x-2y+6 = 0$ oraz $A = (-3, -4)$ i $B = (6, -1)$. Oblicz współrzędne punktu C oraz pole tego trójkąta.

57. Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (3, 1)$ i $B = (-1, 3)$ należy do prostej $x - y + 3 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

58. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (4, 4)$, $B = (2, 0)$, $C = (-8, 10)$.

59. Prosta $y = -x + 2$ jest styczna do okręgu o środku $A = (5, 3)$. Oblicz współrzędne punktu styczności B oraz napisz równanie tego okręgu.

60. Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ i prostopadłych do prostej $x - 3y + 6 = 0$.

61. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 3)$ jest styczny do obu osi współrzędnych. Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie $P = (2, m)$, $m > 1$. Wyznacz równanie prostej k.

62. Do okręgu $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ poprowadzono styczne z początku układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt przecięcia stycznych.

63. Dany jest okrąg o środku $S = (-2, 5)$. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $9\sqrt{2}$ i jest zawarta w prostej $y = x + 4$. Napisz równanie okręgu.

64. Dane są punkty $A = (-4, -2)$, $B = (7, 9)$ i $C = (6, 2)$. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie C stycznego do prostej AB.

65. Prosta $x - y - 2 = 0$ przecina okrąg $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 18$ w punktach A i B. Napisz równania stycznych do tego okręgu w tych punktach.

66. Punkty $A = (-1, -1)$, $B = (5, 1)$ leżą na okręgu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Wyznacz na okręgu taki punkt C, aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB.

67. Napisz równanie prostej równoległej do prostej $3x - y + 7 = 0$ i przechodzącej przez środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (-2, -4)$, $C = (0, 0)$.

D **68.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-2, -2)$, $B = (6, 2)$, $C = (2, 5)$, $D = (-4, 2)$ jest trapezem prostokątnym. Oblicz

a) obwód czworokąta.

b) pole czworokąta.

c) długości przekątnych czworokąta.

69. Punkty wspólne okręgu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$ i prostej o równaniu $5x + 3y - 36 = 0$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi y. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są te punkty i ich obrazy.

D **70.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-6, 2)$, $B = (2, -7)$, $C = (6, -4)$, $D = (6, 1)$ ma oś symetrii przechodzącą przez wierzchołek A.

71. Punkty $A = (1, -4)$ i $B = (10, -1)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$, a punkt $S = (4, 2)$ jest jego środkiem symetrii. Wyznacz równania osi symetrii tego kwadratu.

72. Napisz równanie okręgu o środku (5, 4) stycznego zewnętrznie do okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

73. Prosta o równaniu $x - 2y + 2 = 0$ przecina okrąg $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ w punktach A i B.
a) Napisz równanie symetralnej odcinka AB.
b) Oblicz pole kwadratu wpisanego w ten okrąg.

74. Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (1, 7)$, $B = (-5, 1)$, $C = (7, -5)$. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie ABC od środka ciężkości tego trójkąta.

75. Prostokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$. Bok AB jest zawarty w prostej $2x + y - 3 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków i oblicz pole prostokąta $ABCD$.

76. Przez punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 5x + 6$ z prostą $x - y + 1 = 0$ poprowadzono okrąg, którego środek leży na prostej $7x + 3y - 9 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

77. Napisz równania stycznych poprowadzonych z punktu $P = (0, -5)$ do okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (4, 2)$, $B = (7, 1)$, $C = (6, -2)$.

78. Okrąg, którego środek leży na prostej $2x - y = 0$, jest styczny do prostych $y = x + 6$ i $y = -x + 2$. Znajdź równanie tego okręgu.

79. Dane są okręgi $x^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$. Napisz równania osi symetrii figury będącej sumą tych dwóch okręgów.

80. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o wierzchołkach $A = (8, 9)$ i $B = (-4, 3)$ oraz wierzchołku C leżącym na osi x. Kąt BCA ma miarę $90°$. Wyznacz współrzędne punktu C oraz napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie ABC w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

81. Punkt $C = (-7, 3)$ jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego ABC, a punkt $S = (1, -1)$ jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B.

Ciągi

3

1. Określenie i własności ciągu liczbowego

Umiejętności:

- wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym lub w wzorem rekurencyjnym
- badanie własności ciągu liczbowego

W życiu codziennym często porządkujemy jakieś zbiory według przyjętych kryteriów – ustawiamy się w kolejki, układamy kolejno książki na półce, siadamy na określonym na bilecie miejscu w teatrze, rezerwujemy numerek do lekarza itp. Takie porządkowanie elementów (ludzi, książek, krzeseł itd.) najczęściej polega na przypisaniu każdemu z nich odpowiedniego miejsca, mówiąc prościej – **ponumerowaniu** wszystkich elementów określonego zbioru. Ujmując rzecz matematycznie – określamy funkcje przyporządkowujące kolejnym liczbom naturalnym elementy takiego zbioru.



Definicja

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych. Ciąg nazywamy **liczbowym**, gdy jego wartości są liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli dziedzinę ciągu ograniczymy do pewnego skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy **ciąg skończony**. Na przykład ciąg numerów domów przy ulicy Grodzkiej w Krakowie jest ciągiem skończonym, a ciąg kolejnych naturalnych potęg liczby 3 – **ciągiem nieskończonym**.

Dalej zajmiemy się wyłącznie ciągami liczbowymi, dlatego najczęściej będziemy pomijać określenie „liczbowy".

Przykład 1

Oto kilka przykładów ciągów:

- 2, 3, 5, 7, 11, ... – kolejne liczby pierwsze,
- 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ... – coraz dokładniejsze przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego liczby π,

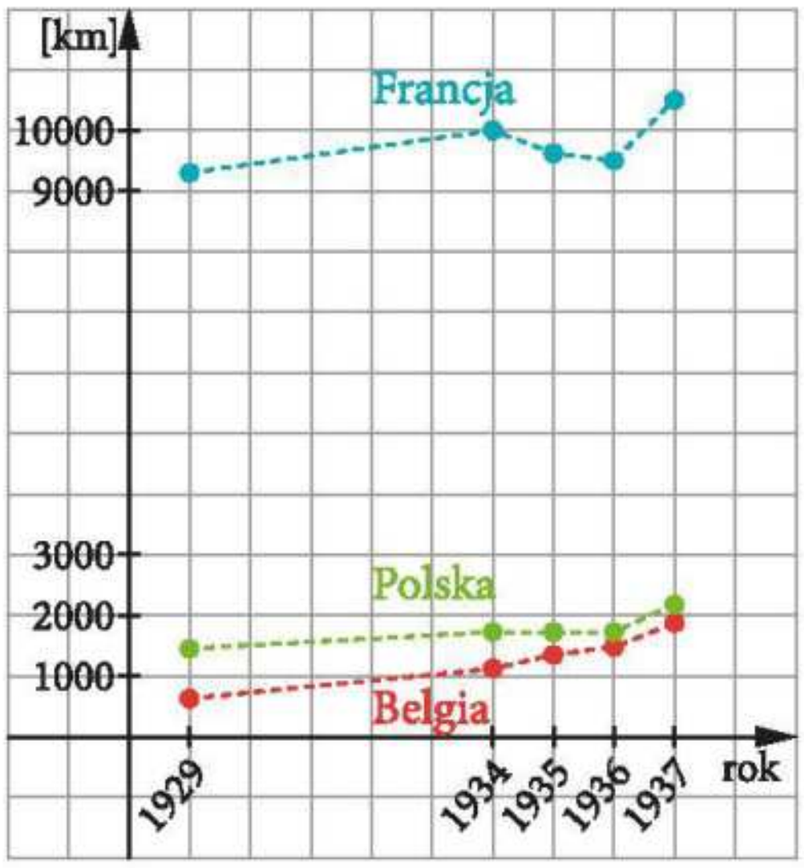
- 100, 99, 98, 97, 96, ... – liczba dni, które pozostały do matury począwszy od studniówki,
- 68,24; 82,60; 56,86; 70,85; 64,32; ... – wysokość (w zł) rachunków telefonicznych w kolejnych miesiącach.

Przykład 2

Narysujemy wykresy trzech funkcji, które są przedstawione poniżej w postaci tabeli. Dane zostały zaokrąglone do dwóch lub trzech cyfr znaczących.

Lotnictwo na liniach pasażerskich w wybranych państwach					
Państwo	Przebyta droga w tys. km				
	1929 r.	1934 r.	1935 r.	1936 r.	1937 r.
Polska	1400	1700	1700	1700	2200
Belgia	600	1100	1300	1500	1900
Francja	9400	10 000	9700	9600	10 500

Źródło: *Mały rocznik statystyczny 1938*, GUS, Warszawa



Rozwiązanie

W tym przykładzie argumentami są liczby naturalne tworzące zbiór
{1929, 1934, 1935, 1936, 1937}.
Wykres każdej z tych funkcji składa się z pięciu punktów. Przerywane linie (tzw. linie trendu) łączące te punkty służą zwiększeniu czytelności wykresu. Łatwiej wtedy zauważyć, że np. funkcja *Belgia* jest rosnąca, funkcja *Polska* niemalejąca, a *Francja* – niemonotoniczna.

Każdy ciąg jest funkcją, zatem można stosować do jego opisywania tę samą symbolikę, co przy opisywaniu innych funkcji. Jednak to, że ciągi mają tak uporządkowaną budowę, zdecydowało, że przyjęto inną terminologię i inny sposób zapisu.

- Ciągi nazywane są zwykle początkowymi lub końcowymi literami alfabetu.
- Zamiast „wartość funkcji dla argumentu n" mówimy „n-ty **wyraz ciągu**".
- Jeżeli wartość ciągu a dla argumentu 1 jest równa 5, to zamiast zapisu:
  $a(1) = 5$ stosujemy zapis $a_1 = 5$
  i czytamy: „pierwszy wyraz ciągu a jest równy 5".

Podczas wypisywania kolejnych wyrazów ciągu korzystamy z podstawowej własności zbioru liczb naturalnych – **po każdej liczbie n następuje bezpośrednio liczba $n+1$.**
Kolejne wyrazy nieskończonego ciągu możemy zatem symbolicznie zapisać:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

Czasami do dziedziny ciągu dołączona jest liczba 0 i wówczas pojawia się wyraz a_0.

Taki ciąg będziemy oznaczać (a_n). Zapis a_n oznacza n-ty wyraz ciągu.

O funkcji, która wszystkim argumentom przyporządkowuje tę samą wartość, mówimy – funkcja stała. Również ciąg liczbowy, którego wszystkie wyrazy są równe, nazywamy **ciągiem stałym**.

Uwaga: W każdym zadaniu polegającym na odgadnięciu reguły tworzenia kolejnych wyrazów ciągu **tylko** na podstawie kilku wyrazów danych możliwa jest więcej niż jedna odpowiedź. Reguł może być wiele, a do każdej odpowiedzi można wymyślić jakąś regułę. Zadania takie możemy więc traktować tylko jako zabawę, a „poprawna" odpowiedź to odgadnięcie, co autor zagadki miał na myśli.

Wzór ogólny ciągu liczbowego

Przykład 3

Rozważamy ciąg liczb o danych własnościach. Podamy kilka początkowych wyrazów oraz tzw. **wzór ogólny** tego ciągu (inaczej mówiąc – wzór funkcji).

a) liczby naturalne parzyste
b) liczby naturalne nieparzyste
c) naturalne potęgi liczby -1
d) liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 8 dają resztę 3

Rozwiązanie

a) Wszystkie liczby naturalne parzyste tworzą ciąg: 0, 2, 4, 6 . . . Ponadto:

$$0 = 2 \cdot 0, \quad 2 = 2 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3 \text{ itd.}$$

zatem najprostszym wzorem funkcji jest $a_n = 2n$. Zauważmy, że w tym ciągu występuje wyraz a_0.

b) Ciąg: 1, 3, 5, 7, . . . Ponadto:

$$1 = 2 \cdot 1 - 1, \quad 3 = 2 \cdot 2 - 1, \quad 5 = 2 \cdot 3 - 1, \quad 7 = 2 \cdot 4 - 1 \text{ itd.}$$

zatem wzór ogólny tego ciągu to $b_n = 2n - 1$.

c) Ciąg: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ Ponadto:

$$c_1 = -1 = (-1)^1, \quad c_2 = 1 = (-1)^2, \quad c_3 = -1 = (-1)^3, \quad c_4 = 1 = (-1)^4 \text{ itd.}$$

zatem wzór ogólny tego ciągu to $c_n = (-1)^n$.

d) Ciąg: 3, 11, 19, 27, 35, ... Ponadto:
$d_0 = 3 = 8 \cdot 0 + 3$, $d_1 = 11 = 8 \cdot 1 + 3$, $d_2 = 19 = 8 \cdot 2 + 3$ itd.
zatem można opisać ten ciąg za pomocą wzoru $d_n = 8n + 3$.

Przykład 4

(c_n) jest ciągiem odwrotności kolejnych liczb nieparzystych:

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{3},\ c_3 = \frac{1}{5},\ c_4 = \frac{1}{7}, \ldots$$

Wyznaczymy setny wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

Jeśli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jaką wartość ma setny wyraz tego ciągu, to musimy albo wypisać sto kolejnych wyrazów (zaczynając od c_1), albo skorzystać ze wzoru ogólnego tego ciągu.

Nie zawsze można podać wzór na n-ty wyraz ciągu. Na przykład nie ma wzoru pozwalającego obliczyć dowolny wyraz ciągu kolejnych liczb pierwszych.

n-tą liczbę nieparzystą można zapisać jako $2n - 1$, więc $c_n = \frac{1}{2n-1}$.

Jest to wzór ogólny ciągu c, więc setny wyraz tego ciągu to $c_{100} = \frac{1}{2 \cdot 100 - 1} = \frac{1}{199}$.

Przykład 5 ◀ zad. 1.5

Ciąg (d_n) określony jest wzorem ogólnym $d_n = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right)$. Zatem:

$$d_1 = \frac{1}{9}\left(10^1 - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1, \qquad d_2 = \frac{1}{9}\left(10^2 - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot 99 = 11,$$

$$d_3 = \frac{1}{9}\left(10^3 - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot 999 = 111 \text{ itd.}$$

Czyli n-ty wyraz tego ciągu to liczba całkowita zapisana za pomocą dokładnie n jedynek.

Przykład 6 ◀ zad. 1.6, 1.7

Dla ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ obliczymy a_{10}, a_{16}, a_{139} oraz a_{m+2}

Często zamiast „ciąg określony wzorem ogólnym" mówimy „ciąg **o wyrazie ogólnym**".

Rozwiązanie

$$a_{10} = \frac{2 \cdot 10 - 3}{10 + 1} = \frac{17}{11} \qquad a_{139} = \frac{2 \cdot 139 - 3}{139 + 1} = \frac{275}{140} = \frac{55}{28}$$

$$a_{16} = \frac{2 \cdot 16 - 3}{16 + 1} = \frac{29}{17} \qquad a_{m+2} = \frac{2(m+2) - 3}{(m+2) + 1} = \frac{2m + 1}{m + 3}$$

Przykład 7

Jeżeli chcemy, aby funkcja $f(n) = \frac{1}{n-2}$ była ciągiem o dziedzinie $\mathbf{N} - \{0\}$, to możemy zapisać jej wzór w inny sposób.

Kolejne wartości tej funkcji dla $n \in \mathbf{N} - \{0, 2\}$ to: $-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Wystarczy przyjąć, że:

$$b_1 = -1,\ b_2 = 1,\ b_3 = \frac{1}{2},\ b_4 = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{1}{4}, \ldots$$

i otrzymujemy ciąg (b_n) o identycznym zbiorze wartości co funkcja f, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{N} - \{0\}$.

Ogólny wzór tego ciągu zapiszemy na przykład w taki sposób:

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ \frac{1}{n-1} & \text{dla } n > 2 \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach w podobnych sytuacjach nie będziemy zmieniać numeracji wyrazów ciągu – będziemy używać sformułowania typu „dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n-2}$ i dziedzinie $\mathbf{N} - \{0, 2\}$".

Podsumujmy:

- Jeżeli ciąg jest skończony i ma k wyrazów, to możemy je ponumerować liczbami $1, 2, 3, \ldots, k$ (czyli przyjąć jako jego dziedzinę zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$).
- Jeżeli ciąg jest nieskończony, to możemy kolejne jego wyrazy numerować kolejnymi liczbami naturalnymi tak, aby jego dziedziną był zbiór $\mathbf{N} - \{0\}$.

Wzór rekurencyjny ciągu liczbowego

Do określenia ciągu może też służyć **wzór rekurencyjny** (inaczej – indukcyjny), który ma następującą postać:

- podany jest pierwszy wyraz lub kilka początkowych wyrazów,
- podana jest informacja, w jaki sposób należy wyznaczyć kolejny wyraz ciągu w zależności od wyrazów go poprzedzających.

Aby obliczyć jakiś wyraz ciągu, musimy więc wyznaczyć najpierw wszystkie wyrazy poprzednie.

Na przykład definiujemy:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = -2a_n + 1 \quad \text{dla } n \in \mathbf{N} - \{0\} \end{cases}$$

Zatem:

$$a_2 = -2a_1 + 1 = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$$
$$a_3 = -2a_2 + 1 = -2 \cdot 5 + 1 = -9$$
$$a_4 = -2a_3 + 1 = -2 \cdot (-9) + 1 = 19 \text{ itd.}$$

Czasem w prosty sposób da się odgadnąć wzór rekurencyjny, którym można zastąpić podany wzór ogólny. Na przykład dla ciągu (d_n) określonego w przykładzie 5 za pomocą wzoru ogólnego $d_n = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right)$ mamy:

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = 10d_n + 1 \quad \text{dla } n \in \mathbf{N} - \{0\} \end{cases}$$

Zastąpienie wzoru rekurencyjnego wzorem ogólnym (i na odwrót) wymaga dowodu. Przeprowadza się go metodą tzw. indukcji matematycznej, która nie wchodzi w zakres aktualnego programu szkoły średniej.

Przykład 8

zad. 1.12–1.14

Jednym z najciekawszych ciągów opisanych rekurencyjnie jest **ciąg Fibonacciego**, zdefiniowany w następujący sposób:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu (poza F_0 i F_1) są sumą dwóch wyrazów poprzednich:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Leonardo Fibonacci (ok. 1175–1250) – włoski matematyk pochodzący z Pizy, jeden z najwybitniejszych uczonych średniowiecza; wprowadził do Europy cyfry arabskie. W 1202 r. wydał słynną *Liber abaci* (*Księga rachunków*), poświęconą arytmetyce i algebrze, a w 1220 r. dzieło *Practica geometriae* o zastosowaniu algebry do geometrii.

Można też spotkać definicję ciągu, w której pominięty jest wyraz F_0 – wówczas zależność rekurencyjna jest definiowana dla $n \geqslant 3$:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Liczby naturalne tworzące taki ciąg, nazywane **liczbami Fibonacciego**, pojawiają się niezwykle często w przyrodzie – zainteresowanych odsyłamy na s. 204 oraz do bogatej literatury dostępnej np. w internecie.

Własności ciągów

Ciągi liczbowe możemy badać tak jak każdą funkcję liczbową – sprawdzać monotoniczność, miejsca zerowe itp. Możemy również rysować na płaszczyźnie kartezjańskiej ich wykresy.

Przykład 9 ◂ zad. 1.18, 1.19

Narysujemy wykres ciągu o podanym wzorze.

a) $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ b) $b_n = \frac{n+1}{n}$

Wykres dowolnego ciągu:
1. jest zbiorem izolowanych punktów,
2. zawiera się w półpłaszczyźnie $x \geqslant 0$.

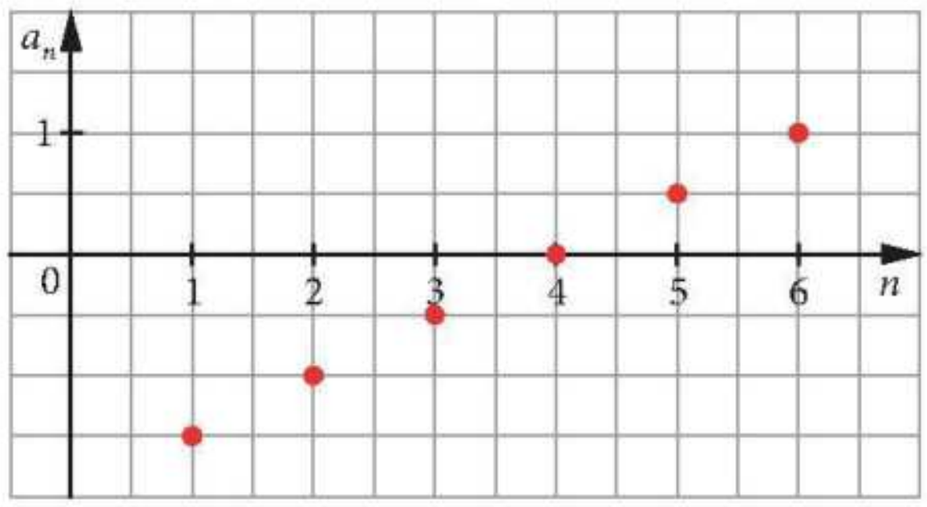
Rozwiązanie

a) Obliczymy kilka początkowych wyrazów ciągu.

$$a_1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{2}, \quad a_6 = 1, \quad \ldots$$

Kolejne wyrazy ciągu pokrywają się z wartościami funkcji

$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ dla $x \in \mathbf{N}$ i $x > 0$.



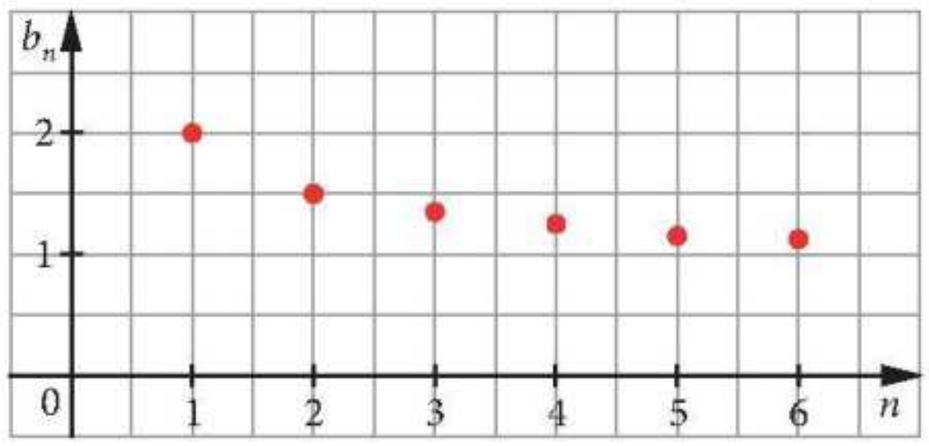
Na podstawie własności tej funkcji możemy wnioskować, że:

- ciąg ten jest rosnący,
- jego jedynym miejscem zerowym jest 4,
- tylko początkowe trzy wyrazy są ujemne,
- najmniejszą wartością jest $-\frac{3}{2}$,
- wartości największej ciąg nie przyjmuje.

b) Wzór ogólny tego ciągu można zapisać w postaci $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Zatem $b_1 = 2, \quad b_2 = 1\frac{1}{2}, \quad b_3 = 1\frac{1}{3},$

$b_4 = 1\frac{1}{4}, \quad b_5 = 1\frac{1}{5}, \quad b_6 = 1\frac{1}{6}, \quad \ldots$



Możemy wykazać, że:

- ciąg ten jest malejący,
- ciąg nie ma miejsc zerowych,
- wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- największą wartością ciągu jest 2,
- wartości najmniejszej ciąg nie przyjmuje.

Przypomnijmy, że funkcja jest rosnąca wtedy, gdy dla dowolnych dwóch argumentów większemu z nich przyporządkowuje większą wartość. Zatem twierdzenie opisujące warunki, jakie musi spełniać nieskończony ciąg liczbowy, aby był monotoniczny, możemy sformułować następująco.

Twierdzenie

Jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:

- $a_{n+1} > a_n$ – to ciąg jest rosnący,
- $a_{n+1} < a_n$ – to ciąg jest malejący,
- $a_{n+1} \geqslant a_n$ – to ciąg jest niemalejący,
- $a_{n+1} \leqslant a_n$ – to ciąg jest nierosnący.

W praktyce, aby zbadać monotoniczność ciągu (a_n), najczęściej badamy znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$, a mianowicie, jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:

- $a_{n+1} - a_n > 0$ – to ciąg jest rosnący,
- $a_{n+1} - a_n < 0$ – to ciąg jest malejący,
- $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ – to ciąg jest niemalejący,
- $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$ – to ciąg jest nierosnący.

Ciąg liczbowy, który spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, jest **ciągiem monotonicznym**, pozostałe ciągi liczbowe są niemonotoniczne.

Przykład 10 ◂ zad. 1.20, 1.21

Zbadamy monotoniczność podanego ciągu.

Rozwiązanie

a) $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \dfrac{n+3}{n+2}$, więc

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+3}{n+2} - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{(n+3)(n+1) - (n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)}$

Wyrażenie $a_{n+1} - a_n$ zawsze ma wartość ujemną (dla dowolnej liczby naturalnej n mianownik tego ułamka jest dodatni, a w liczniku jest liczba ujemna).

Zatem $a_{n+1} - a_n < 0$, co jest równoważne nierówności $a_{n+1} < a_n$.

Odp.: (a_n) jest ciągiem malejącym.

b) $b_n = n^2 - 13n + 40$

$b_{n+1} - b_n = \left[(n+1)^2 - 13(n+1) + 40\right] - \left(n^2 - 13n + 40\right) = 2n - 12 = 2(n-6)$

Dla $n < 6$ różnica ma znak ujemny, a dla $n > 6$ dodatni.

Odp.: Ciąg (b_n) jest niemonotoniczny.

c) $c_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 4n & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$

W tym ciągu trudniej jest opisać różnicę sąsiednich wyrazów. Przyjrzyjmy się kilku początkowym wyrazom.

$c_1 = 1,\ c_2 = 8,\ c_3 = 9,\ c_4 = 16,$
$c_5 = 25,\ c_6 = 24, \ldots$

Zatem $c_5 > c_4$ i $c_6 < c_5$.

Odp.: Ciąg (c_n) jest niemonotoniczny.

Odpowiedź można też uzasadnić, korzystając z własności wykresu ciągu (c_n). Otóż jego wyrazom o nieparzystych numerach odpowiadają punkty na paraboli $y = x^2$, natomiast wyrazom o parzystych numerach – punkty na prostej $y = 4x$. Wykres ciągu „przeskakuje" więc z paraboli na prostą i z prostej na parabolę.

Przykład 11 ◂ zad. 1.22, 1.23

Znajdziemy miejsca zerowe ciągu o wzorze ogólnym $d_n = 3n^2 - 19n + 6$.

Rozwiązanie

Z rozwiązania równania $3n^2 - 19n + 6 = 0$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy $n = 6$ lub $n = \frac{1}{3}$.
Tylko pierwsza z tych liczb spełnia warunki zadania (druga nie jest liczbą naturalną).

Odp.: Miejscem zerowym tego ciągu jest liczba 6.

Przykład 12 ◂ zad. 1.24, 1.25

Sprawdzimy, czy któryś z wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 8n + 11$ jest równy -1.

Rozwiązanie

$n^2 - 8n + 11 = -1$ i $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, czyli $n^2 - 8n + 12 = 0$
$n_1 = 2,\ n_2 = 6$ ⟵ obydwa pierwiastki są dodatnimi liczbami naturalnymi

W tym ciągu są więc dwa wyrazy równe -1: drugi i szósty.

Odp.: $a_2 = -1$ oraz $a_6 = -1$

Jeżeli dwa ciągi liczbowe mają tę samą dziedzinę, to możemy je, tak jak inne funkcje liczbowe, dodawać, odejmować, mnożyć, mnożyć przez liczbę oraz dzielić przy założeniu, że wyrazy dzielnika są różne od zera. W ten sposób otrzymujemy nowe ciągi. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 13 ◂ zad. 1.31

Dane są dwa ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = n + 2$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Wówczas:

- $c_n = a_n + b_n = n + 2 + \frac{1}{n}$
- $d_n = a_n - b_n = n + 2 - \frac{1}{n}$
- $e_n = a_n \cdot b_n = (n + 2) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n}$
- $f_n = \frac{a_n}{b_n} = (n + 2) \cdot n = n^2 + 2n$
- $g_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{(n + 2) \cdot n}$
- $h_n = -3a_n = -3(n + 2) = -3n - 6$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Liczba ujemnych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = (2n - 7)(n + 7)$ dla $n \geqslant 1$ jest równa

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

1.2. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 5?

A. $a_n = 3n - 6$

B. $a_n = 4 - n$

C. $a_n = n^2 - 6n + 5$

D. $a_n = \frac{2n - 5}{n + 1}$

1.3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Zatem

A. $a_2 = 4$. **B.** $a_3 = 14$. **C.** $a_5 = 25$. **D.** $a_7 = 49$.

1.4. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n^2 - 4n - 1$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Drugi wyraz ciągu (a_n) równa się -1.

B. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

C. Istnieje wyraz ciągu (a_n) o wartości równej 0.

1.5. Wyznacz początkowe trzy wyrazy ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 2n + 1$

b) $b_n = 3^n$

c) $c_n = (2n - 1)^3$

d) $d_n = n^n$

e) $e_n = \frac{5n - 3}{n + 1}$

f) $f_n = 6 - n^2$

g) $g_n = \sqrt{2n + 6}$

h) $h_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1}$

i) $i_n = |n + 1| - |n - 1|$

1.6. Wyznacz wyrazy a_9, a_{11}, a_{k+1}, a_{3m}, a_{m+k} ciągu o danym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 2n^2$ b) $a_n = \frac{1}{n}$ c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = \frac{4n - 3}{n + 5}$

1.7. Podaj początkowe pięć wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-2}$

b) $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

d) $a_n = 1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2$

1.8. W którym z podanych ciągów setny wyraz jest równy 1?

$a_n = (-1)^{3n+1}$ $b_n = (-1)^{2n+1}$ $c_n = (-1)^{n-2}$ $d_n = (-1)^n$

1.9. Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) znajdujących się pomiędzy podanymi wyrazami.

a) a_3 i a_7
b) a_{13} i a_{27}
c) a_{20} i a_{35}
d) a_{n-2} i a_n
e) a_{n-1} i a_{n+5}
f) a_{n-7} i a_{n-1}
g) a_{n+2} i a_{n+15}
h) a_{n-k} i a_n
i) a_n i a_{n+k}

1.10. Dany jest ciąg (a_n) określony dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Zapisz symbolicznie
a) sumę dwóch kolejnych wyrazów ciągu.
b) średnią arytmetyczną dwóch kolejnych wyrazów ciągu.
c) iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu.
d) średnią arytmetyczną wyrazu bezpośrednio poprzedzającego wyraz a_n i wyrazu następnego po wyrazie a_n.
e) średnią arytmetyczną pięciu kolejnych wyrazów ciągu, z których środkowym wyrazem jest a_n.
f) sumę trzech kolejnych wyrazów ciągu następujących po wyrazie a_{k-3}.
g) iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu następujących po wyrazie a_{n-k}.

1.11. Zapisz symbolicznie kolejne trzy wyrazy ciągu (a_n) występujące bezpośrednio po podanym wyrazie.

a) a_{n+k-1}
b) a_{2n}
c) $a_{3(n+7)}$
d) $a_{5(n-2)}$

1.12. Wyznacz początkowe pięć wyrazów ciągu o podanym wzorze rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = (b_n)^{-1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = (c_n)^2 - 3c_n + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = 2^{\frac{1}{2}d_n} \end{cases}$

1.13. Wyznacz początkowe sześć wyrazów ciągu o danym wzorze rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 5 \\ b_{n+2} = b_{n+1} - b_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 \\ c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 5 \\ d_{n+2} = \dfrac{d_{n+1}}{d_n} \end{cases}$

1.14. Podaj przykład wzoru rekurencyjnego ciągu na podstawie jego początkowych pięciu wyrazów.

a) $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16,\ a_5 = 32,\ \ldots$

b) $b_1 = 5,\ b_2 = 9,\ b_3 = 17,\ b_4 = 33,\ b_5 = 65,\ \ldots$

c) $c_1 = 13,\ c_2 = -13,\ c_3 = 13,\ c_4 = -13,\ c_5 = 13,\ \ldots$

d) $d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 6,\ d_4 = 24,\ d_5 = 120,\ \ldots$

D **1.15.** Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{a_n - 1} \end{cases}$.

Wykaż, że a_{77} jest liczbą całkowitą.

1.16. Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = |2a_n - 7| \end{cases}$.

Wyznacz wyraz a_{1001}.

1.17. Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \cos(\pi \cdot a_n) \end{cases}$.

Oblicz $a_{100} - a_{99}$.

1.18. Naszkicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $a_n = 3$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = n^2$

d) $a_n = \dfrac{n-2}{n}$

e) $a_n = (-1)^n \cdot n$

f) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$

1.19. Naszkicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $a_n = \begin{cases} 3n - 1 & \text{dla } n = 1 \\ 2n & \text{dla } 1 < n \leqslant 3 \\ n + 3 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} n^2 - 4 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 3 \\ -2n + 11 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

1.20. Zbadaj monotoniczność ciągu.

a) $a_n = n^2 - 1$

b) $a_n = \dfrac{n-3}{n+4}$

c) $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}$

d) $a_n = -n^2 + 17n - 60$

e) $a_n = (-1)^n(2 - 5n)$

f) $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n + 3 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

D **1.21.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest niemonotoniczny.

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = (-1)^n \cdot n$

c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

d) $a_n = |n - 10|$

1.22. Wyznacz miejsca zerowe ciągu.

a) $a_n = 3n - 1$

b) $a_n = n^2 - 11n + 30$

c) $a_n = 2n^2 - 6n - 8$

d) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n - 10}$ dla $n > 1$

1.23. Wyznacz miejsce zerowe ciągu (a_n) określonego podanym wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n - 5 \end{cases}$$

1.24. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy x?

a) $a_n = 5n - 3, \quad x = 32$

b) $a_n = (-2)^n, \quad x = -32$

c) $a_n = n(n-4) - 20, \quad x = 25$

d) $a_n = \left(n^2 - 3\right)\left(n^2 - 9\right)(n + 5), \quad x = 0$

e) $a_n = \sqrt{2n - 1}, \quad x = 5$

f) $a_n = n\left(n^2 - 3n + 2\right), \quad x = 6$

1.25. Dany jest ciąg, którego wyrazem a_n jest liczba przekątnych w n-kącie wypukłym. Czy któryś z wyrazów tego ciągu jest równy 17?

1.26. Ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od m?

a) $a_n = 2(n+1)(n-3), \quad m = 0$

b) $a_n = -2n^2 + 3n, \quad m = -5$

c) $a_n = \sqrt{n}, \quad m = 3$

d) $a_n = \sqrt[3]{n + 3}, \quad m = 7$

1.27. Wyznacz (o ile istnieje) największy wyraz ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $a_n = 3 - 2\sqrt{n}$ b) $a_n = 11 - n$ c) $a_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$ d) $a_n = \dfrac{2n-1}{4n^2-1}$

1.28. Wyznacz największy oraz najmniejszy wyraz skończonego ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$

c) $a_n = n^2 - 3n$, $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

d) $a_n = -n^2 + 10n - 24$, $n \in \{1, 2, \ldots, 20\}$

1.29. Naszkicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

$$a_n = \begin{cases} n + 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n - 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Podaj największy lub najmniejszy wyraz ciągu (o ile istnieje). Czy ten ciąg jest monotoniczny?

1.30. Naszkicuj wykres ciągu (a_n), w którym wyraz a_n jest n-tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego liczby p, tzn. a_1 to pierwsza cyfra po przecinku, a_2 – druga itd.

a) $p = \dfrac{10}{13}$ b) $p = \dfrac{2}{9}$ c) $p = \dfrac{7}{8}$

1.31. Zbadaj monotoniczność każdego z ciągów: $a_n = \frac{3n-1}{n}$, $b_n = \frac{1-n}{n}$. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (c_n) i zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ d) $c_n = a_n \cdot b_n$

1.32. Ciąg (a_n) jest rosnący. Określ monotoniczność ciągu (b_n).

a) $b_n = a_n + 1$ c) $b_n = a_n^2 + 3$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie

b) $b_n = 3a_n$ d) $b_n = -\frac{2}{a_n}$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są ujemne

1.33. Zbadaj monotoniczność ciągu (c_n), o którym wiadomo, że

a) $c_n = a_n + b_n$ oraz ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące.

b) $c_n = a_n - b_n$ oraz (a_n) jest rosnący i (b_n) jest malejący.

c) $c_n = a_n - b_n$ oraz (a_n) jest malejący i (b_n) jest rosnący.

1.34. Podaj przykład takich dwóch nieskończonych ciągów rosnących (a_n) i (b_n), aby ciąg $(a_n \cdot b_n)$ był

a) rosnący. b) malejący. c) niemonotoniczny.

Prosto do matury

1. Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_3 = 2\frac{1}{2}$ oraz $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a_2 = \frac{2}{3}$ **B.** Wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie. **C.** $a_4 = \frac{7}{5}$

2. Oblicz trzeci wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym:

$a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

3. Oblicz, ile wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 2n^2 - 1$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, jest mniejszych od 99.

4. Wyznacz czwarty wyraz ciągu o wzorze rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2} \end{cases}$.

D **5.** Dany jest ciąg kolejnych dodatnich liczb nieparzystych (a_n) oraz ciągi (b_n) i (c_n) określone następująco:

$b_n = a_n + a_{n+1}$, $c_n = b_{n+1} - b_n$.

Wykaż, że (c_n) jest ciągiem stałym.

Ciąg Fibonacciego

Leonardo z Pizy (ok. 1180 – ok. 1250), zwany Fibonaccim, to włoski matematyk, jeden z najwybitniejszych uczonych średniowiecza, który do europejskiej matematyki wprowadził cyfry arabskie. W dziele *Liber abaci* (*Księga rachunków*) z 1202 r. wyjaśnił, jak za ich pomocą zapisywać liczby i wykonywać obliczenia.

Jako prosty sposób przetestowania wprowadzonego przez siebie systemu liczbowego zamieścił w *Księdze* m.in. zadanie dotyczące wzrostu populacji królików:

Ile par będzie liczyła po upływie roku hodowla wywodząca się od jednej pary dorosłych królików, przy założeniu, że każda para co miesiąc wydaje na świat nową parę, a króliki mają potomstwo po dwóch miesiącach od własnych narodzin?

Rozwiązanie prowadzi do tzw. **ciągu Fibonacciego**, którego pierwsze dwa wyrazy są równe 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich:

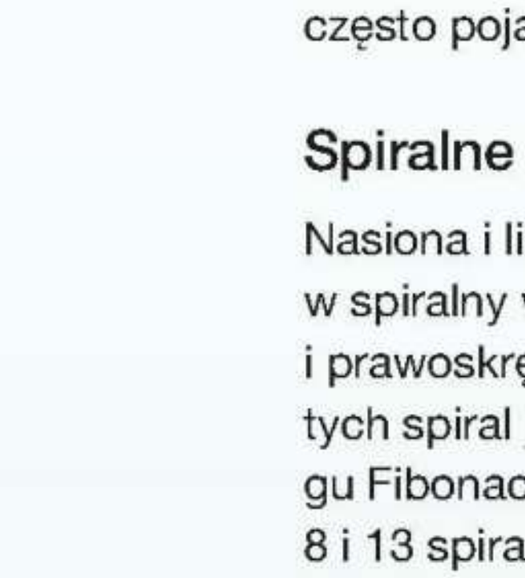
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

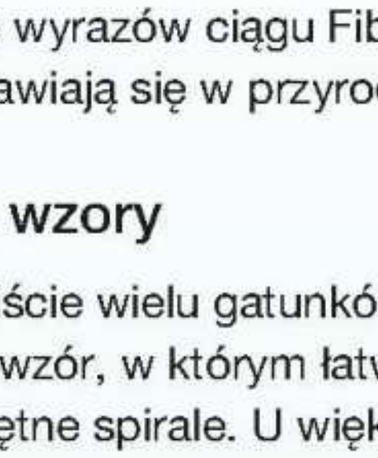
Zauważmy, że przy rozwiązywaniu zadania opuszcza się pierwszy wyraz tego ciągu. Zatem po roku hodowla będzie liczyła 377 par królików.

Sekwencje wyrazów ciągu Fibonacciego niezwykle często pojawiają się w przyrodzie.

Spiralne wzory

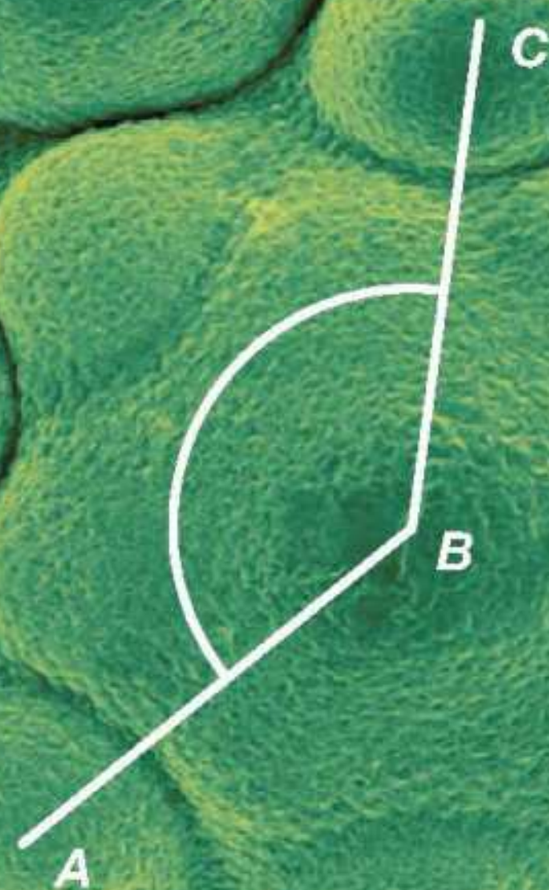
Nasiona i liście wielu gatunków roślin układają się w spiralny wzór, w którym łatwo zauważyć lewo- i prawoskrętne spirale. U większości roślin liczba tych spiral jest równa dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego, np. łuski sosnowej szyszki tworzą 8 i 13 spiral, a nasiona słonecznika – 21 i 34, 34 i 55 lub 55 i 89 spiral.





W ananasie, który ma sześciokątne łuski, można dostrzec aż trzy rodzaje spiral. Jest ich zwykle 5, 8 i 13 lub 8, 13 i 21.

Na zdjęciu pokazano merystem kalafiora wraz z tworzącymi się zawiązkami. Środek merystemu oznaczono literą *B*.
Złoty kąt między zawiązkami *A* i *C* pozwala wywnioskować, że te dwa zawiązki powstawały jeden po drugim.



Merystemy a złota liczba i ciąg Fibonacciego

Rozwój rośliny jest skutkiem nieustannego dzielenia się tzw. merystemów wierzchołkowych, czyli grup komórek znajdujących się na szczytach pędów i korzeni. W miarę przybywania komórek te najbardziej oddalone od środka merystemu tracą zdolność podziału i zaczynają się różnicować w tkanki i organy, a z niektórych, tzw. komórek inicjalnych, powstają zawiązki liści i kwiatów. Okazuje się, że dwa kolejne zawiązki wraz ze środkiem merystemu wyznaczają złoty kąt.

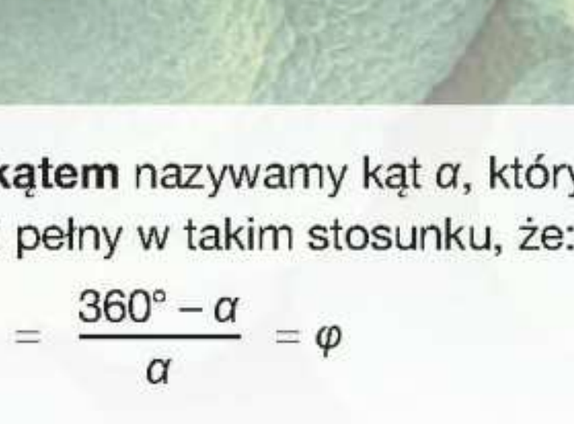
Związek złotego kąta ze złotą liczbą rozwiązuje zagadkę popularności ciągu Fibonacciego w przyrodzie. Ilorazy dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu są bowiem coraz bliższe złotej liczby:

Złotym kątem nazywamy kąt α, który dzieli kąt pełny w takim stosunku, że:

$$\frac{360^\circ}{360^\circ - \alpha} = \frac{360^\circ - \alpha}{\alpha} = \varphi$$

gdzie φ jest **złotą liczbą**:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033...$$



Złoty kąt jest w przybliżeniu równy 137,5°.

$\frac{1}{1} = 1$, $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{5}{3} = 1{,}(6)$, $\frac{8}{5} = 1{,}6$, $\frac{13}{8} = 1{,}625$, $\frac{21}{13} = 1{,}(615384)$, ...

2. Ciąg arytmetyczny

Umiejętności:

- rozpoznawanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny
- stosowanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego

Przedstawimy teraz ciągi, w których kolejne wyrazy powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej liczby, stałej dla danego ciągu. Na przykład:

- $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}, \ldots$
- $10, 7, 4, 1, -2, \ldots$
- $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots$

W każdym z nich określiliśmy podobną regułę wyznaczania następnych wyrazów. W pierwszym różnica między dwoma kolejnymi wyrazami jest równa 3, czyli następnymi wyrazami są $17\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23\frac{1}{2}$ itd. W drugim od każdego wyrazu trzeba odejmować 3 (albo dodawać do niego -3), w trzecim przykładzie – do każdego wyrazu dodawać liczbę $\frac{1}{3}$.

Definicja

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r nazywanej **różnicą** ciągu.

Zatem w nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) o danym wyrazie a_1 i ustalonej liczbie $r \in \mathbf{R}$ mamy następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n + r \text{ dla każdego } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Przykład 1

Sprawdzimy, czy ciąg o wzorze ogólnym $a_n = -4n + 7$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie

$$a_n = -4n + 7$$
$$a_{n+1} = -4(n + 1) + 7 = -4n + 3 \quad \longleftarrow \text{wyznaczamy wyraz } a_{n+1}$$
$$a_{n+1} - a_n = (-4n + 3) - (-4n + 7) = -4 \quad \longleftarrow \text{obliczamy różnicę } a_{n+1} - a_n$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ zachodzi $a_{n+1} = a_n - 4$.

Odp.: (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -4$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.4

Sprawdzimy, czy ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 + 1$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie

Badamy różnicę sąsiednich wyrazów ciągu.

$$a_{n+1} - a_n = \left((n+1)^2 + 1\right) - \left(n^2 + 1\right) =$$
$$= n^2 + 2n + 2 - n^2 - 1 = 2n + 1$$

Różnica między sąsiednimi wyrazami nie jest stała (zależy od zmiennej n), więc badany ciąg nie jest arytmetyczny.

Można szybciej wykazać, że ciąg (a_n) **nie jest** arytmetyczny:
znajdujemy jego trzy kolejne wyrazy, np. $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$, i zauważamy, że $5 - 2 \neq 10 - 5$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Przykład 3 ◀ zad. 2.8

O ciągu arytmetycznym (a_n) wiemy, że: $a_1 = 11$, $r = 6$. Zatem:

$a_2 = a_1 + r = 17$, $a_3 = a_2 + r = 23$, $a_4 = a_3 + r = 29$ itd.

Ile wynosi a_{50}?

Rozwiązanie

Przyjrzyjmy się, jak powstają kolejne wyrazy dowolnego ciągu arytmetycznego.

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$
$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$ itd.

Pięćdziesiąty wyraz tego ciągu powstaje więc przez dodanie do liczby 11 czterdziestu dziewięciu szóstek, czyli $a_{50} = 11 + 49 \cdot 6 = 305$.

Odp.: $a_{50} = 305$

Rozumowanie z przykładu uogólnimy i zapiszemy w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Na przykład w ciągu arytmetycznym, w którym $a_1 = -4$ i $r = \frac{1}{4}$, trzydziesty wyraz jest równy:

$$a_{30} = a_1 + 29r = -4 + 29 \cdot \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Przykład 4

Sprawdzimy, czy w ciągu arytmetycznym (c_n), w którym $c_1 = 1$ i $r = 7$, występuje liczba 232, a jeśli tak, to na którym miejscu.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy istnieje taka naturalna liczba n, dla której $c_n = 232$.

$$232 = 1 + (n-1) \cdot 7 \qquad \longleftarrow c_n = c_1 + (n-1) \cdot r$$
$$7n = 238$$
$$n = 34$$

Zatem $c_{34} = 232$.

Odp.: Liczba 232 występuje w tym ciągu na trzydziestym czwartym miejscu.

Przykład 5 ◀ zad. 2.13

Wyznaczymy ciąg arytmetyczny (a_n), w którym suma wyrazów trzeciego i jedenastego jest równa 128, a suma wyrazów czwartego i ósmego jest równa 106.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} a_3 + a_{11} = 128 \\ a_4 + a_8 = 106 \end{cases} \qquad \longleftarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\begin{cases} a_1 + 2r + a_1 + 10r = 128 \\ a_1 + 3r + a_1 + 7r = 106 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = 11 \end{cases}$$

Odp.: $a_1 = -2$ oraz $r = 11$

Wyznaczenie ciągu arytmetycznego polega na ogół na podaniu jego pierwszego wyrazu i różnicy.

Własności ciągu arytmetycznego

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o co najmniej trzech wyrazach jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Założenie I

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Teza I

Dla każdego $n > 1$ prawdziwa jest równość: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Dowód I

Niech r – różnica ciągu arytmetycznego (a_n). Wówczas trzy kolejne wyrazy ciągu:

$$a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}$$

możemy zapisać również w postaci: $a_n - r,\ a_n,\ a_n + r$.

Średnia arytmetyczna wyrazów a_{n-1} i a_{n+1} jest równa:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Założenie II

Dla każdego $n > 1$ prawdziwa jest równość: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Teza II

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Dowód II

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, ⟵ z założenia

czyli $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$.

To oznacza, że dla każdego $n > 1$ różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest stała. Oznaczmy ją r. Zatem dla $n > 1$ mamy $a_n = a_{n-1} + r$, czyli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Koniec dowodu

Przykład 6 ◂ zad. 2.22, 2.23

Dla jakiej wartości x liczby $x + 4,\ 4x,\ x^2 + 8$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Rozwiązanie

Wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{(x + 4) + \left(x^2 + 8\right)}{2} = 4x$$

Zatem $x + 4 + x^2 + 8 = 8x$, stąd $x_1 = 4,\ x_2 = 3$.

Zadanie ma dwa rozwiązania, a odpowiadające im ciągi to: 8, 16, 24 oraz 7, 12, 17.

Odp.: $x = 4$ lub $x = 3$

Zauważmy, że jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to wyrazy:

$$\ldots,\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ \ldots$$

możemy inaczej zapisać:

$$\ldots,\ a_n - 3r,\ a_n - 2r,\ a_n - r,\ a_n,\ a_n + r,\ a_n + 2r,\ a_n + 3r,\ \ldots$$

Gdy obliczymy średnie arytmetyczne dwóch wyrazów tak samo oddalonych od a_n, otrzymamy wyraz a_n, np.:

$$\frac{(a_n - r) + (a_n + r)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n, \qquad \frac{(a_n - 2r) + (a_n + 2r)}{2} = a_n.$$

i ogólnie: $\frac{(a_n - kr) + (a_n + kr)}{2} = a_n$.

Wniosek

W ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi zależność:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Przykład 7

Obliczymy wyrazy x, y i z ciągu arytmetycznego: $215, x, y, z, -11$.

Rozwiązanie

$$y = \frac{215 - 11}{2} = 102$$

$$x = \frac{215 + y}{2} = \frac{215 + 102}{2} = 158\frac{1}{2} \qquad z = \frac{y - 11}{2} = \frac{102 - 11}{2} = 45\frac{1}{2}$$

Odp.: $x = 158\frac{1}{2}$, $y = 102$, $z = 45\frac{1}{2}$

Przykład 8 ◀ zad. 2.27

Sporządzimy wykres ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 5$, $r = \frac{1}{2}$.

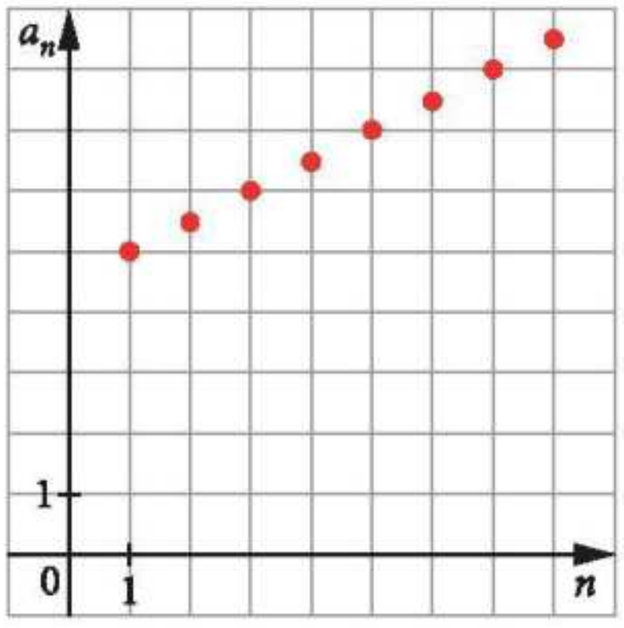
Rozwiązanie

$$a_1 = 5,\ a_2 = 5\frac{1}{2},\ a_3 = 6,\ a_4 = 6\frac{1}{2},\ a_5 = 7 \text{ itd.}$$

Punkty wykresu układają się wzdłuż prostej – wykresu pewnej funkcji liniowej. Aby znaleźć jej równanie, popatrzmy na wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

Po przekształceniu otrzymujemy $a_n = \frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2}$.



Punkty wykresu ciągu (a_n) należą zatem do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.

Powtórzmy rozumowanie z przykładu 8 na ogólnych danych.

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, czyli $a_n = a_1 + n\cdot r - r$, stąd $a_n = r\cdot n + (a_1 - r)$

Jak widać, ciąg arytmetyczny jest ściśle związany z funkcją liniową. Każdy ciąg arytmetyczny jest zatem monotoniczny.

Wniosek

Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 + (n-1)r$ jest:
- rosnący dla $r > 0$,
- malejący dla $r < 0$,
- stały dla $r = 0$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Który z podanych ciągów nie jest ciągiem arytmetycznym?

A. 15, 18, 21, 24 **B.** $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$ **C.** $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}$ **D.** $0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$

2.2. Szósty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy 17, a dziesiąty jest równy 29. Wskaż drugi wyraz tego ciągu.

A. 6 **B.** −3 **C.** 5 **D.** 2

2.3. Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy m, a jedenasty n. Jaką postać ma ósmy wyraz tego ciągu?

A. $\frac{n-m}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}(m+n)$ **C.** $\frac{1}{3}(m+n)$ **D.** $\frac{m-n}{3}$

2.4. Które z ciągów o podanych wzorach ogólnych to ciągi arytmetyczne?

$a_n = \frac{3n+2}{5}$, $b_n = \frac{n-5}{7-n}$, $c_n = (1-2n)^2 + 4\left(1-n^2\right)$, $d_n = (2-3n)^2 + 2(2+n^2)$

2.5. Które z podanych ciągów są ciągami arytmetycznymi?

(a_n): 6, 10, 14, 18, 22 (c_n): 1, −2, 1, −2, 1

(b_n): 1, 2, 4, 7, 11, 16 (d_n): π, π, π, π, π

2.6. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

a) 1, 5 b) 2, −3 c) 4, $2\frac{1}{2}$ d) 7, 7

2.7. Jakie liczby należy wstawić w miejsca ?, aby otrzymany ciąg był arytmetyczny?

a) 3, 5, ?, 9, ?, ?

b) $\frac{1}{2}$, ?, $1\frac{1}{2}$, ?, $2\frac{1}{2}$, ?, $3\frac{1}{2}$

c) 2,1; 2,6; ?; ?; 4,1; ?

d) −5, ?, ?, ?, 3, 5

2.8. Dane są: pierwszy wyraz a_1 i różnica r ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz a_n.

a) $a_1 = 30,\ r = -3,\ n = 25$

b) $a_1 = \frac{2}{3},\ r = \frac{5}{3},\ n = 11$

c) $a_1 = 2,\ r = \sqrt{2} - 1,\ n = 8$

d) $a_1 = \frac{1}{2},\ r = 1\frac{1}{2},\ n = 5$

e) $a_1 = 0{,}4,\ r = 0{,}1,\ n = 11$

f) $a_1 = \sqrt{5},\ r = \sqrt{5},\ n = 6$

2.9. Podaj liczbę wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego.

a) $-1,\ 6,\ \ldots,\ 69$

b) $\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ 5$

c) $1\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{2},\ \ldots,\ 3\frac{1}{2}$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+3\sqrt{2}}{2},\ \ldots,\ \frac{1+15\sqrt{2}}{2}$

2.10. Sprawdź, czy dla podanej funkcji $y = f(x)$ ciąg wartości $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ jest ciągiem arytmetycznym.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$

2.11. Podaj przykład ciągu arytmetycznego

a) nieskończonego o wszystkich wyrazach niewymiernych.

b) czterowyrazowego, którego wyrazy są liczbami pierwszymi.

2.12. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 13, a jego dziesiąty wyraz jest równy 25. Wyznacz piętnasty wyraz tego ciągu.

2.13. Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa −10, a suma wyrazów czwartego i dziewiątego jest równa −22.

2.14. Suma wyrazów szóstego i ósmego pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 40, a iloczyn wyrazów drugiego i trzeciego też jest równy 40. Wyznacz ten ciąg.

2.15. Ostatni wyraz 10-wyrazowego rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 37. Różnica wyrazów piątego i czwartego jest równa 4. Oblicz $a_4 + a_5$.

2.16. Suma początkowych trzech wyrazów 8-elementowego ciągu arytmetycznego jest równa 18, a ostatnich trzech jest równa 78. Oblicz sumę dwóch środkowych wyrazów tego ciągu.

2.17. W skończonym ciągu arytmetycznym pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni jest od niego sześć razy większy. Różnica ciągu wynosi 3. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.18. Suma pierwszego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 2, a iloraz szóstego i pierwszego jest równy -2. Wyznacz ten ciąg.



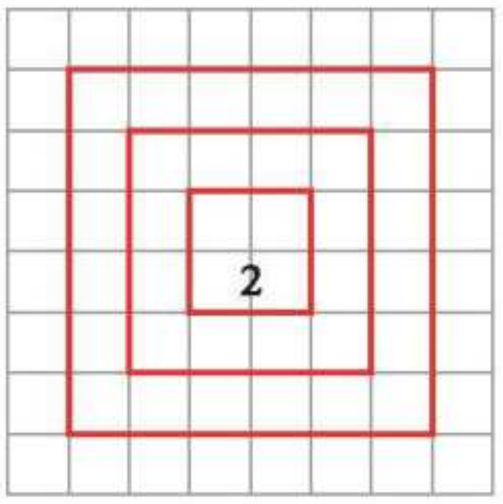
2.19. Rysiek miał ogromne zaległości w czytaniu lektur z języka polskiego. Przyrzekł więc sobie, że w klasie maturalnej każdego dnia poświęci trochę czasu literaturze. Zaczął od pół godziny 1 września i postanowił każdego następnego dnia czytać o 10 minut dłużej niż poprzedniego. Do ilu minut czytania dziennie doszedłby w tym systemie po 3 miesiącach?

2.20. Serial *Myślenie szkodzi* emitowany jest sześć razy w tygodniu. Pan Ferdynand Koliberek może oglądać go tylko w soboty. Obejrzał odcinek pięćdziesiąty siódmy. Czy obejrzy odcinek setny?

2.21. Na rysunku przedstawione są kwadraty o bokach, których długości tworzą ciąg arytmetyczny.

a) Czy obwody tych kwadratów tworzą ciąg arytmetyczny?

b) Czy pola tych kwadratów tworzą ciąg arytmetyczny?



2.22. Wyznacz taką liczbę x, aby ciąg $23, x, 33$ był ciągiem arytmetycznym.

2.23. Wyznacz takie x, aby liczby: $4x^2-1,\ 6x+1,\ x^2+7$ były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

2.24. Pan Ignacy handluje używanym sprzętem elektronicznym. Co miesiąc obniża cenę jednego z modeli komputera o a zł. Jeżeli sprzęt nie znajdzie nabywcy w ciągu 10 miesięcy, jest oddawany bezpłatnie fundacji charytatywnej. Cenę początkową komputera ustalono na 1800 zł. W ostatnim miesiącu pan Ignacy chciałby sprzedać go za 450 zł.

a) Jaka powinna być wielkość a?

b) Za ile można ten komputer kupić w trzecim miesiącu oferty?

c) W którym miesiącu cena komputera jest niższa o 50% od ceny początkowej?

D **2.25.** Wykaż, że dla każdego m ciąg $\left(\frac{2m+3}{2}, \frac{2m+5}{3}, \frac{2m+11}{6}\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

2.26. Długości boków trójkąta prostokątnego są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i spełniają podany warunek. Oblicz długości boków tego trójkąta.
a) obwód trójkąta jest równy 48
b) różnica długości przyprostokątnych jest równa 3

2.27. Podaj równanie prostej zawierającej wykres ciągu arytmetycznego (a_n)
a) o wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = -3$.
b) o wyrazach $a_3 = 4$ i $a_5 = 10$.

2.28. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (2-n)^2$. Czy ciąg $c_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym?

2.29. Wiadomo, że (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi. Zbadaj, czy ciąg o wyrazie ogólnym c_n jest ciągiem arytmetycznym.
a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$

2.30. Sprawdź, czy ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = a_n + b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.
a) $a_n = (n+1)^2$ $b_n = 1 - n^2$
b) $a_n = n^2 + 3n - 1$ $b_n = (1-n)(2+n)$
c) $a_n = (n+2)^2$ $b_n = n^2 - 2$
d) $a_n = 2 + (n+3)^2$ $b_n = 2 - (n+3)^2$

* **2.31.** W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_m = m^2$ oraz $a_k = k^2$ dla pewnych liczb k i m $(m \neq k)$. Oblicz różnicę r tego ciągu.

* **2.32.** W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_m = k$ oraz $a_k = m$ dla pewnych liczb k i m $(m \neq k)$. Oblicz różnicę r tego ciągu oraz wyraz a_p.

2.33. W trójwyrazowym ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest równy 0. Ile wynosi suma wszystkich wyrazów tego ciągu?

2.34. Wypisz wszystkie skończone ciągi arytmetyczne o wyrazach całkowitych, których pierwszym wyrazem jest liczba 5, a ostatnim liczba 17.

D **2.35.** Czy nieskończony ciąg arytmetyczny może mieć
a) dokładnie sto wyrazów dodatnich?
b) dokładnie sto wyrazów równych zero?
Odpowiedź uzasadnij.

2.36. Współczynniki a, b, c równania $ax^2 + bx + c = 0$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Suma tych współczynników jest równa 15. Jednym z rozwiązań równania jest liczba 4. Wyznacz drugie rozwiązanie.

2.37. Trzy liczby wymierne tworzą ciąg arytmetyczny. Suma ich kwadratów jest równa $\frac{7}{3}$, a suma ich odwrotności jest równa $\frac{9}{4}$. Wyznacz te liczby.

2.38. Dla jakich wartości parametru m cztery różne pierwiastki równania $x^4 - \left(m^2 + 1\right)x^2 + m^2 = 0$ tworzą ciąg arytmetyczny?

D **2.39.** Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem arytmetycznym rosnącym, którego wyrazy są liczbami naturalnymi. Wykaż, że zachodzi nierówność $a_{100} + a_{200} \geqslant 298$.

D **2.40.** Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 5n - 3$. Wykaż, że żaden z wyrazów tego ciągu nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Prosto do matury

1. Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n).
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Zachodzi równość $2a_{30} = a_{20} + a_{40}$.
B. Ciąg (b_n) o wzorze ogólnym $b_n = a_n^2$ jest arytmetyczny.
C. Ciąg (c_n) o wzorze ogólnym $c_n = \sqrt{2}a_n - \sqrt{7}$ jest arytmetyczny.

2. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 12, a siódmy wyraz jest równy 32. Wyznacz piąty wyraz tego ciągu.

3. Wyznacz taką wartość x, aby liczby 84, x, 138 były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

4. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) o wyrazach całkowitych pierwszy wyraz $a_1 = 4$, a jeden z wyrazów ciągu jest równy 16. Ile jest ciągów o takich własnościach?

D **5.** Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są liczbami niewymiernymi. Czy z tego wynika, że jego różnica jest liczbą niewymierną? Czy iloraz dwóch dowolnych wyrazów tego ciągu może być liczbą wymierną? Odpowiedź uzasadnij.

3. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Umiejętności:

- stosowanie wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Umiejętność sumowania wyrazów ciągu jest potrzebna w różnych zadaniach, także praktycznych.

Oznaczmy sumę *n* początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Zatem:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ itd.}$$

Twierdzenie

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Założenie

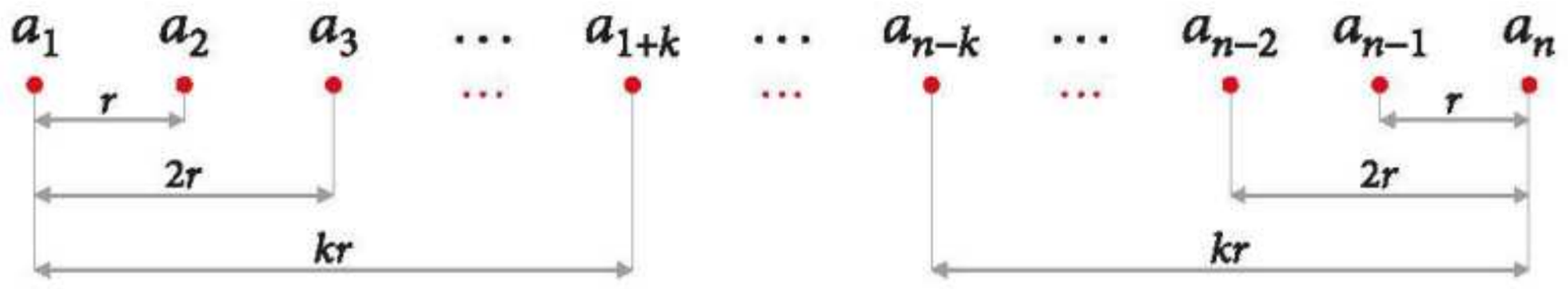
(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r oraz $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Teza

Dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ prawdziwa jest równość: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Dowód

W ciągu arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ o różnicy r mamy:



$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n$$

Ogólnie – dla $k \in \mathbf{N}$ i $1 < k < n$ mamy:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n$$

czyli suma wyrazów jednakowo oddalonych od wyrazu pierwszego i ostatniego jest stała i równa się sumie wyrazu pierwszego i ostatniego.

Zapiszmy na dwa sposoby sumę n wyrazów:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Dodajemy stronami obie równości i otrzymujemy:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Po prawej stronie mamy n składników, z których każdy jest równy $a_1 + a_n$.
Stąd:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Koniec dowodu

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego można zapisać w innej postaci. Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)r)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

i otrzymujemy:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 1 ◂ zad. 3.5

Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Rozwiązanie

Liczby naturalne od 1 do 100 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 1$, różnica $r = 1$ oraz $a_{100} = 100$. Zatem:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$$

Odp.: Szukana suma jest równa 5050.

Przykład 2 ◂ zad. 3.7, 3.8

Obliczymy sumę wyrazów $a_7 + a_8 + \ldots + a_{19} + a_{20}$ ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 14$ i różnica $r = -3$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$a_7 + a_8 + \ldots + a_{19} + a_{20} = S_{20} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_6) = S_{20} - S_6$$

Mamy:

$$a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = -43, \quad a_6 = 14 + 5 \cdot (-3) = -1$$

Zatem:

$$S_{20} = \frac{14 - 43}{2} \cdot 20 = -290, \quad S_6 = \frac{14 - 1}{2} \cdot 6 = 39$$

$$a_7 + a_8 + \ldots + a_{19} + a_{20} = S_{20} - S_6 = -290 - 39 = -329$$

Odp.: Szukana suma jest równa -329.

Przykład 3

Wypożyczalnia rowerów jest czynna od 9^{00} do 20^{00}. Wypożyczenie roweru na godzinę kosztuje 3 zł, a każda następna godzina jest tańsza o 20 gr od poprzedniej. Ile kosztuje wypożyczenie roweru na jeden dzień?



Rozwiązanie

Od 9^{00} do 20^{00} jest 11 godzin. Mamy więc obliczyć sumę jedenastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 3$ i różnica $r = -0{,}2$.

Najpierw wyznaczamy ostatni składnik sumy.

$$a_{11} = a_1 + 10r = 3 + 10 \cdot (-0{,}2) = 1$$

Oznacza to, że za jedenastą godzinę wypożyczenia roweru płacimy złotówkę.

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 1}{2} \cdot 11 = 22$$

Odp.: Za cały dzień musimy zapłacić 22 zł.

Przykład 4 ◀ zad. 3.16

Lewa strona równania $(2x + 3) + (4x + 3) + \ldots + (30x + 3) = 105$, $x \neq 0$, jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiążemy to równanie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $a_1 = 2x + 3$, $a_2 = 4x + 3$.

$$r = (4x + 3) - (2x + 3) = 2x \qquad \longleftarrow \text{różnica } r = a_2 - a_1$$

Należy teraz obliczyć, którym wyrazem rozpatrywanego ciągu jest ostatni składnik sumy.

$$30x + 3 = 2x + 3 + (n-1)\cdot 2x \qquad \longleftarrow a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$30x = 2x + n\cdot 2x - 2x \qquad \longleftarrow x \neq 0$$
$$n = 15$$

Lewa strona równania jest sumą piętnastu wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_{15} = 105$$
$$\frac{a_1 + a_{15}}{2}\cdot 15 = 105$$
$$\frac{(2x+3)+(30x+3)}{2}\cdot 15 = 105, \text{ stąd } x = \frac{1}{4}$$

Odp.: Rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1}{4}$.

Przykład 5 ◂ zad. 3.17, 3.18

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i różnicy $r = 3$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby przekroczyć 100?

Rozwiązanie

Szukamy odpowiedzi na pytanie, dla jakiej najmniejszej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $S_n > 100$.

$$\frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n > 100$$

Ponieważ $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$, otrzymujemy:

$$\frac{3n+1}{2}\cdot n > 100$$
$$3n^2 + n - 200 > 0$$
$$\Delta = 1 + 4\cdot 3\cdot 200 = 2401, \ \sqrt{\Delta} = 49$$
$$n_1 = \frac{-1-49}{6} = -\frac{25}{3}, \ n_2 = \frac{-1+49}{6} = 8$$

Zatem $3n^2 + n - 200 > 0$ dla $n \in \left(-\infty; -\frac{25}{3}\right) \cup (8; \infty)$.

Ponieważ $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, otrzymujemy rozwiązanie: $n \in \{9, 10, 11, \ldots\}$.

Odp.: Trzeba dodać co najmniej 9 wyrazów.

Zauważmy, że przekształcenie wzoru $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$ do postaci $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$ prowadzi do poniższego wniosku.

Wniosek

Średnia arytmetyczna wszystkich wyrazów skończonego n-wyrazowego ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazów: pierwszego i ostatniego.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż wartość sumy $21 + 22 + 23 + \ldots + 49$.

A. 115 **B.** 980 **C.** 1015 **D.** 1050

3.2. Suma pierwszych siedmiu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 35. Wynika z tego, że

A. $a_1 = 5$. **B.** $a_3 = 5$. **C.** $a_4 = 5$. **D.** $a_7 = 5$.

3.3. Wskaż sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n).

A. $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$ **B.** $\frac{a_{n-1} + a_n}{2} \cdot n$ **C.** $\frac{a_2 + a_{n-2}}{2} \cdot n$ **D.** $\frac{a_2 + a_{n-1}}{2} \cdot n$

3.4. Wiadomo, że dla pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) suma $S_{30} = 252$, a suma $S_{31} = 296$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a_{31} = 44$

B. Średnia arytmetyczna początkowych trzydziestu wyrazów tego ciągu wynosi 126.

C. Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

3.5. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r.

a) $a_1 = 3$ $r = 2$ $n = 8$

b) $a_1 = -10$ $r = 3$ $n = 20$

c) $a_1 = 50$ $r = -\frac{1}{2}$ $n = 17$

d) $a_1 = 4{,}35$ $r = 0$ $n = 100$

e) $a_1 = 35$ $r = -2$ $n = 7$

f) $a_1 = \sqrt{2}$ $r = 2\sqrt{2}$ $n = 5$

3.6. Oblicz sumę wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego.

a) $6, 9, 12, \ldots, 138$

b) $2, 6, 10, \ldots, 202$

c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, \ldots, -18\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots, 22\sqrt{3}$

3.7. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = -5$ i różnica $r = 4$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od jedenastego do trzydziestego włącznie.

3.8. Dla ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 1$ oblicz
a) sumę początkowych pięćdziesięciu wyrazów.
b) sumę wyrazów od a_{20} do a_{40}.

3.9. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych
a) trzycyfrowych.
b) mniejszych od 100 i podzielnych przez 9.
c) dwucyfrowych podzielnych przez 4.

3.10. Oblicz średnią arytmetyczną liczb 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

3.11. Oblicz średnią arytmetyczną wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych.

3.12. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 3$ i różnica $r = 8$. Oblicz sumę tych dwunastu spośród początkowych wyrazów tego ciągu, których numery są liczbami nieparzystymi.

3.13. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r, w którym

a) $S_n = -5{,}5$,	$a_1 = -3$,	$a_n = 2$.
b) $S_n = 585$,	$a_1 = 57$,	$a_n = 33$.
c) $S_n = 126$,	$a_1 = 31$,	$r = -4$.
d) $S_n = -228$,	$a_1 = -18$,	$r = -3$.

3.14. W ciągu arytmetycznym (a_n) piąty wyraz jest równy 17, a wyraz dwudziesty czwarty jest od niego $4\frac{6}{17}$ razy większy. Oblicz sumę wyrazów stojących między tymi wyrazami.

3.15. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma 10 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 25, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 15. Wyznacz ten ciąg.

3.16. Lewa strona równania jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.
a) $x + (x + 2) + (x + 4) + \ldots + (x + 24) = 143$
b) $0{,}5 + (0{,}5 + x) + \ldots + (0{,}5 + 19x) = -180$
c) $7 + 9 + 11 + \ldots + x = 432$
d) $x + (x + 3) + \ldots + (x + 54) = 570$
e) $-7 + 1 + 9 + \ldots + (x + 1) = 119$

3.17. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = -10$ i różnica $r = 3$. Zbadaj, czy istnieje liczba naturalna n spełniająca podany warunek. Jeśli tak, to ją podaj.
a) $S_n = 279$ b) $S_n = 510$

3.18. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 5$ i różnica $r = 2$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać 192?

3.19. Między liczby 38 i 26 wstaw pięć liczb tak, aby razem z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny. Oblicz sumę wszystkich siedmiu liczb.

3.20. Ile liczb trzeba wstawić między 6 i −20, aby otrzymać ciąg arytmetyczny, dla którego suma wszystkich wyrazów jest równa −140?

3.21. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 3, a suma kwadratów liczb skrajnych jest równa 20. Wyznacz te liczby.

3.22. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r = 4$ jest równa 78, a suma początkowych $n + 4$ wyrazów tego ciągu jest równa 210. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu oraz n.

3.23. W malejącym pięciowyrazowym ciągu arytmetycznym iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 260, a suma pozostałych wyrazów wynosi 54. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

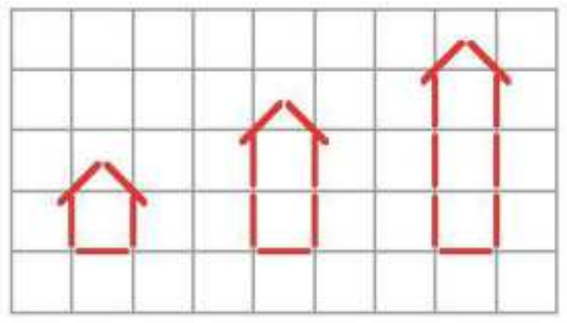
3.24. W oblężonym Zbarażu było 1000 beczek prochu. Pierwszego dnia zużyto ich 100, ale każdego następnego zużywano o 5 beczek mniej. Po ilu dniach zapas prochu się skończył?



3.25. Tomek ma pomalować 36 m^2 ściany. Przez pierwsze 15 minut pomalował 4 m^2, a potem w czasie każdego kolejnego kwadransa malował o 0,2 m^2 mniej niż przez poprzedni kwadrans. Czy zdąży skończyć pracę w ciągu 3 godzin?

3.26. Mateusz uczył się słówek z języka obcego. Zaczął od 40 i każdego następnego dnia zmniejszał liczbę słówek o 2. Czy w ten sposób opanował 330 słówek? Jeśli tak, to po ilu dniach?

3.27. Ola układa z patyczków domki tak, jak na rysunku. Ile patyczków potrzebuje na ułożenie ciągu dziesięciu domków? Ile domków tworzących taki ciąg można ułożyć z 400 patyczków?



3.28. W poniedziałek kioskarz wziął do sprzedaży 20 egzemplarzy nowego dziennika. Każdego następnego dnia (poza niedzielą) zwiększał liczbę egzemplarzy o 5. Po pewnym czasie rozliczył się z siecią kolportażu za pobrane 1470 egzemplarzy gazety. Po ilu dniach od rozpoczęcia sprzedaży nastąpiło rozliczenie?

3.29. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Jakimi liczbami należy zastąpić ?, aby otrzymać prawdziwe zależności?

	a_1	r	n	a_n	S_n
a)	7	−5	10	?	?
b)	?	5	7	27	?
c)	?	?	13	25	91
d)	−5	4	?	451	?
e)	2	−2	?	?	−70

D **3.30.** Wykaż, że suma $k+1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n-1$ jest równa $(k+1)^2$.

3.31. Dopisz trzy następne wyrazy ciągu arytmetycznego i oblicz sumę S_5.

a) $\sqrt{12}+1,\ \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{18},\ \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

c) $\left|1-2\sqrt{5}\right|,\ \frac{5}{\sqrt{5}}$

d) $\left|2-\sqrt{27}\right|,\ \frac{11}{2\sqrt{3}+1}$

* **3.32.** Oblicz $1^2-2^2+3^3-4^2+\ldots+999^2-1000^2$.

D * **3.33.** Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa $2n$, a suma $2n$ początkowych wyrazów tego ciągu jest równa n. Wykaż, że suma $3n$ początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $-3n$.

3.34. Wypisujemy kolejne dodatnie liczby naturalne w kolejnych wierszach w następujący sposób:

1,
2, 3,
4, 5, 6,
7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15,
...

Oblicz sumę liczb zapisanych w n-tym wierszu.

3.35. Wypisujemy liczby naturalne dodatnie w kolejnych wierszach w następujący sposób:

1,	2,	3,	4,	…	n
2,	4,	6,	8,	…	$2n$
3,	6,	9,	12,	…	$3n$
…	…	…	…	…	…
n,	$2n$,	$3n$,	$4n$,	…	n^2

Oblicz sumę wszystkich liczb zapisanych w początkowych n wierszach tej tablicy.

Prosto do matury

1. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = \frac{1}{3}$ i suma $S_{17} = 51$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Różnicą tego ciągu jest $r = \frac{1}{3}$.

B. Średnia arytmetyczna początkowych siedemnastu wyrazów tego ciągu jest liczbą pierwszą.

C. $a_{17} = \frac{17}{3}$

2. W ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz $a_1 = 2$ i różnica $r = \frac{1}{2}$. Oblicz sumę dziewięciu kolejnych wyrazów tego ciągu, z których pierwszym jest wyraz a_3.

3. Lewa strona równania $(x - 2) + (x + 1) + \ldots + (x + 58) = 12(x + 52)$ jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

4. Sklep meblowy oferuje zakup mebli na raty za 8400 zł (w tę kwotę wliczono już odsetki). Spłaty rat można dokonać na dwa sposoby:

- wariant A: pierwsza rata będzie równa 1120 zł, a każda następna będzie o 20 zł niższa od poprzedniej,
- wariant B: wszystkie raty będą równe i wyniosą $8\frac{1}{3}\%$ ceny 8400 zł.

Ile będzie rat w przypadku wariantu A i ile wyniesie najmniejsza rata? Ile będzie równa rata i ile rat trzeba będzie spłacić w przypadku wariantu B?

D **5.** Wykaż, że ciąg (a_n), którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = n^2 + 3n$ dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, jest ciągiem arytmetycznym. Podaj jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r.

4. Ciąg geometryczny

Umiejętności:

- rozpoznawanie, czy dany ciąg jest geometryczny
- stosowanie wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego

Kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej stałej wartości. Jeśli dodawanie zastąpimy mnożeniem, to otrzymamy drugi charakterystyczny rodzaj ciągu – ciąg geometryczny. W tym ciągu zamiast stałej różnicy między wyrazami mamy stały iloraz kolejnych wyrazów.

Definicja

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q nazywaną **ilorazem** ciągu.

Jeżeli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o danym wyrazie a_1 i ustalonej liczbie $q \in \mathbf{R}$, to prawdziwa jest następująca zależność rekurencyjna:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ dla każdego } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Szczególnym przypadkiem ciągu geometrycznego jest ciąg postaci $(a, 0, 0, 0, \ldots)$, czyli taki, w którym iloraz $q = 0$ (a również może być równe 0). W dalszych rozważaniach będziemy się zajmowali przede wszystkim takimi ciągami geometrycznymi, w których wszystkie wyrazy są różne od zera.

Przykład 1 ◂ zad. 4.6

Wypiszemy sześć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q.

Rozwiązanie

a) $a_1 = -7,\ q = 1$ $\quad -7, -7, -7, -7, -7, -7$

b) $a_1 = 2,\ q = -3$ $\quad 2, -6, 18, -54, 162, -486$

c) $a_1 = 1,\ q = 2$ $\quad 1, 2, 4, 8, 16, 32$

d) $a_1 = 80,\ q = \frac{1}{2}$ $\quad 80, 40, 20, 10, 5, \frac{5}{2}$

e) $a_1 = -1,\ q = \frac{1}{3}$ $\quad -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, -\frac{1}{243}$

Przykład 2

W pewnym doświadczeniu bakterie podwajają swoją liczebność co 3 godziny. Jeśli na początku było ich k, to po kolejnych trzygodzinnych okresach ich liczebność będzie równa:

$$2k,\ 4k,\ 8k,\ 16k,\ 32k,\ 64k,\ 128k,\ 256k,\ \ldots$$

Są to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

Przykład 3

Jeżeli ograniczmy dziedzinę funkcji wykładniczej $f(x) = 2^{x-3}$ do zbioru liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy ciąg o wzorze ogólnym:

$$a_n = 2^{n-3}$$

Obliczmy jego początkowe wyrazy.

$$a_1 = \frac{1}{4},\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = 1,\quad a_4 = 2,\quad a_5 = 4$$

Jest to ciąg geometryczny, którego iloraz jest równy 2.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Wzór ogólny ciągu geometrycznego można uzyskać podobnie jak w przypadku ciągu arytmetycznego.

W ciągu arytmetycznym:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + \ \ldots\ + r}_{(n-1)\text{ składników}} = a_1 + (n-1)r$$

W ciągu geometrycznym:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-1)\text{ czynników}} = a_1 q^{n-1}$$

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Na przykład w ciągu geometrycznym:

- (a_n), w którym $a_1 = 3$ i iloraz $q = 4$:
  $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 3 \cdot 4^9 = 786\,432$
- (b_n), w którym $b_1 = 10$ i iloraz $q = -0{,}3$:
  $b_{12} = b_1 q^{11} = 10 \cdot (-0{,}3)^{11} = -0{,}0000177147$
- (c_n), w którym $c_1 = -\frac{1}{2}$ i iloraz $q = 2$:
  $c_{11} = c_1 q^{10} = -\frac{1}{2} \cdot 2^{10} = -512$

Przykład 4 ◂ zad. 4.9

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_2 = -3$ oraz $a_5 = -\frac{3}{8}$. Wyznaczymy wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie

$$a_2 = a_1 \cdot q = -3$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = -\frac{3}{8}$$

Z powyższych równości wynika, że $a_1 \cdot q \neq 0$. Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = -3 \\ a_1 \cdot q^4 = -\frac{3}{8} \end{cases} \longleftarrow \text{dzielimy stronami pierwsze równanie przez drugie}$$

$\frac{1}{q^3} = 8$, stąd $q = \frac{1}{2}$, zatem $a_1 = -6$.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{6}{2^{n-1}}$$

Odp.: $a_n = -\frac{6}{2^{n-1}}$

Przykład 5

Pewien wirus komputerowy przenosi się za pośrednictwem poczty elektronicznej. Jeśli przyjmiemy, że każdy, kto dostał zainfekowaną wiadomość, prześle ją swoim trzem znajomym posiadającym niezainfekowane komputery, to liczba nowych zarażonych komputerów po kolejnych krokach jest równa odpowiednio 3, 9, 27, 81, ... Są to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ i iloraz $q = 3$. Obliczymy dwudziesty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

$$a_{20} = a_1 q^{19} = 1 \cdot 3^{19} \approx 1{,}162 \cdot 10^9$$

Po dwudziestu krokach jeden komputer mógłby więc zarazić ponad miliard innych!

Liczby otrzymane w wyniku takich obliczeń mogą być zaskakująco duże. W takich sytuacjach często mówi się, że jakieś zjawisko szerzy się w **postępie geometrycznym**. Nazwa ta wzięła się od używanego dawniej określenia ciągu – „postęp".

Przykład 6

Sporządzimy wykres ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 9$ i iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

$a_2 = 3,\ a_3 = 1,\ a_4 = \frac{1}{3},\ a_5 = \frac{1}{9}$ itd.

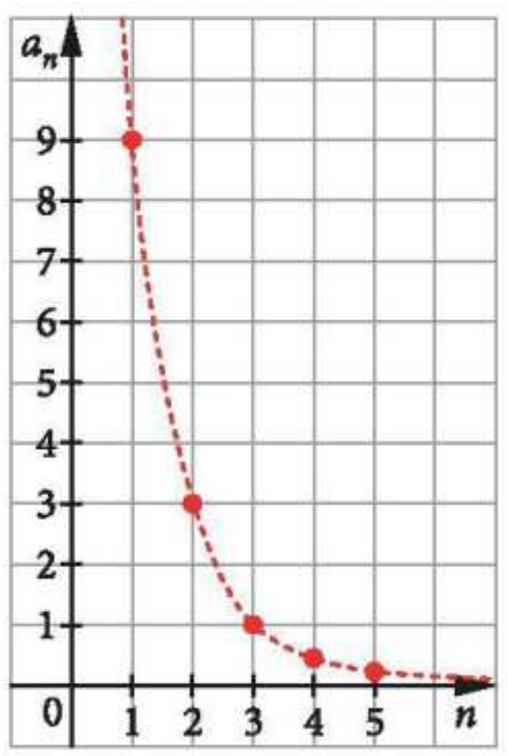
Punkty wykresu układają się wzdłuż charakterystycznej krzywej – wykresu pewnej funkcji wykładniczej. Aby znaleźć jej równanie, popatrzmy na wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

Ciąg geometryczny jest związany z funkcją wykładniczą, podobnie jak ciąg arytmetyczny z funkcją liniową.



Własności ciągu geometrycznego

Zastanówmy się, kiedy ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach różnych od zera jest monotoniczny. Badanie znaku różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q - 1)$$

prowadzi do następującego wniosku.

Ciąg liczbowy, który ma na zmianę wyrazy dodatnie i ujemne, nazywamy **ciągiem naprzemiennym**.

Wniosek

Dany jest ciąg geometryczny o wzorze ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ taki, że $a_1 \cdot q \neq 0$.

- Jeżeli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący dla $a_1 < 0$, rosnący dla $a_1 > 0$.
- Jeżeli $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący dla $a_1 < 0$, malejący dla $a_1 > 0$.
- Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym, czyli monotonicznym.
- Jeżeli $q < 0$, to sąsiednie wyrazy ciągu mają różne znaki i taki ciąg jest niemonotoniczny.

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Charakterystyczną własność mają również wyrazy ciągu geometrycznego. Jeżeli wszystkie wyrazy geometrycznego ciągu (a_n) są różne od zera, to dla dowolnego $n > 1$ (poza numerem ostatniego wyrazu w ciągu skończonym) prawdziwe są równości:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ oraz } \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

czyli:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Powyższa równość jest prawdziwa również w sytuacji, gdy (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wszystkich (lub o wszystkich poza pierwszym) wyrazach równych 0.

Twierdzenie

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), $n > 1$, prawdziwa jest zależność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Jeśli wyrazy ciągu geometrycznego są dodatnie, to każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią geometryczną wyrazów z nim sąsiadujących, czyli $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

Średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{ab}$.

Powyższy wniosek można uogólnić, postępując podobnie jak w wypadku średniej arytmetycznej w ciągu arytmetycznym. Jeżeli wyrazy geometrycznego ciągu (a_n) są dodatnie, to $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Bezpośrednio z definicji wynika również, że jeżeli w zbiorze trzech różnych od 0 liczb $\{a, b, c\}$ kwadrat jednej z nich jest równy iloczynowi dwóch pozostałych, to liczby te tworzą ciąg geometryczny, np.:

- jeżeli $a^2 = b \cdot c$, to geometryczne są ciągi b, a, c oraz c, a, b,
- jeżeli $b^2 = a \cdot c$, to geometryczne są ciągi a, b, c oraz c, b, a itd.

Jeśli w ciągu geometrycznym (a_n) wszystkie wyrazy są różne od 0 oraz jeśli $k < l$, to:

$$\frac{a_l}{a_k} = q^{l-k}$$

Aby udowodnić tę zależność, można skorzystać ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego.

Przykład 7 ◂ zad. 4.12, 4.13

Jaką liczbę należy wstawić pomiędzy 3 i 9, aby otrzymać trójwyrazowy ciąg geometryczny?

Rozwiązanie

Oznaczmy szukaną liczbę x. Ciąg $3,\ x,\ 9$ jest geometryczny, gdy:

$$x^2 = 3 \cdot 9$$

Zatem $x = 3\sqrt{3}$ lub $x = -3\sqrt{3}$.

Odp.: $3\sqrt{3}$ lub $-3\sqrt{3}$

Przykład 8 ◂ zad. 4.14

Wyznaczymy wyrazy ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich: $3,\ x,\ y,\ z,\ 12$. Ile wynosi iloraz tego ciągu?

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy wyraz y.

$$y = \sqrt{3 \cdot 12} = 6 \qquad \longleftarrow a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

Teraz możemy wyznaczyć wyrazy x oraz z.

$$x = \sqrt{3y} = \sqrt{3 \cdot 6} = 3\sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{y \cdot 12} = \sqrt{6 \cdot 12} = 6\sqrt{2}$$

Iloraz tego ciągu jest równy $\frac{x}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

Odp.: wyrazy ciągu: $3,\ 3\sqrt{2},\ 6,\ 6\sqrt{2},\ 12$, iloraz ciągu: $\sqrt{2}$

Przykład 9 ◂ zad. 4.26

Między liczby -5 i 45 wstawimy takie dwie liczby $x,\ y$, aby ciąg $-5,\ x,\ y$ był ciągiem arytmetycznym, a ciąg $x,\ y,\ 45$ – ciągiem geometrycznym.

Rozwiązanie

Ciąg $-5,\ x,\ y$ jest ciągiem arytmetycznym, gdy $x = \frac{-5 + y}{2}$.

Ciąg $x,\ y,\ 45$ jest ciągiem geometrycznym, gdy $y^2 = 45x$.

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} x = \frac{-5 + y}{2} \\ y^2 = 45x \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = \frac{-5 + y}{2} \\ y^2 = 45 \cdot \frac{-5 + y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+y}{2} \\ 2y^2 - 45y + 225 = 0 \end{cases} \qquad \longleftarrow \Delta = 225$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+y}{2} \\ y_1 = \dfrac{15}{2}, \quad y_2 = 15 \end{cases}$$

Odp.: Zadanie ma dwa rozwiązania: $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{15}{2}$ lub $x = 5$, $y = 15$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Dany jest dziewięciowyrazowy ciąg geometryczny o dodatnich wyrazach, w którym pierwszy wyraz jest równy 2, a ostatni wyraz jest równy 162. Szósty wyraz tego ciągu jest równy

A. 36. **B.** $18\sqrt{3}$. **C.** 54. **D.** $36\sqrt{3}$.

4.2. Która liczba nie jest wyrazem ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 6$ i ilorazie $q = -2$?

A. -3 **B.** 24 **C.** 96 **D.** -192

4.3. Która para liczb wyznacza malejący ciąg geometryczny (a_n)?

A. $a_1 = \sqrt{2} - 1$, $q = 2$
B. $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $q = 2$
C. $a_1 = \sqrt{2} - 1$, $q = -2$
D. $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $q = -2$

4.4. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 \neq 0$ i iloraz $q < 0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \cdot a_n < 0$.
B. Jeżeli $q < -1$, to ciąg (a_n) jest malejący.
C. Co najmniej dwa wyrazy tego ciągu są dodatnie.

4.5. Które z podanych ciągów są ciągami geometrycznymi?

(a_n): 1, 2, -4, -8, 16
(b_n): 1, -2, 4, -8, 16, -32
(c_n): $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$
(d_n): $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$

4.6. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

a) 2, 6 b) $5\sqrt{5}$, 5 c) 4, -2 d) $-\frac{27}{16}, -\frac{9}{8}$

4.7. Jakie liczby należy wstawić w miejsca ?, aby otrzymany ciąg był geometryczny?

a) $2,\ 4,\ ?,\ 16,\ 32,\ ?,\ 128$

b) $\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ ?,\ 13\frac{1}{2},\ ?,\ 121\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{5},\ ?,\ 4\sqrt{5},\ ?,\ 16\sqrt{5},\ 32\sqrt{5}$

d) $\sqrt{7},\ 7,\ ?,\ ?,\ 49\sqrt{7}$

4.8. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: wyraz a_1, iloraz q i liczba wyrazów n. Oblicz a_n.

a) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad q = -\sqrt{2}$ $\quad n = 6$

b) $a_1 = 2\sqrt{3}$ $\quad q = \frac{1}{2}$ $\quad n = 4$

c) $a_1 = -100$ $\quad q = 0{,}1$ $\quad n = 3$

d) $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad q = 2\sqrt{5}$ $\quad n = 6$

4.9. Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego (a_n). Podaj wzór ogólny tego ciągu.

a) $a_1 = 3$ $\quad a_6 = 96$

b) $a_2 = 1$ $\quad a_4 = \frac{1}{4}$

c) $a_3 = 3$ $\quad a_5 = 27$

d) $a_4 = -\frac{1}{2}$ $\quad a_6 = -\frac{1}{8}$

4.10. Sprawdź, czy ciąg (a_n) o podanym wzorze ogólnym jest geometryczny.

a) $a_n = \frac{1}{2}n + 1$ $\quad$ b) $a_n = 2^n$ $\quad$ c) $a_n = \left(\sqrt{3}\right)^n$ $\quad$ d) $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$

D **4.11.** Wykaż, że liczby $3 + 2\sqrt{2},\ -1 - \sqrt{2},\ 1$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz q tego ciągu.

4.12. Wstaw między liczby a i b taką dodatnią liczbę x, aby ciąg $a,\ x,\ b$ był geometryczny.

a) $a = 5,\ b = 75$ $\quad$ b) $a = -3,\ b = -12$ $\quad$ c) $a = \sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$

4.13. Wstaw między liczby a i b taką liczbę x, aby ciąg $a,\ x,\ b$ był geometryczny.

a) $a = 3,\ b = 27$ $\quad$ b) $a = -\frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{12}$ $\quad$ c) $a = \sqrt{3},\ b = 3\sqrt{3}$

4.14. Wstaw między liczby -81 i -16 takie liczby ujemne a, b, c, aby ciąg $-81, a, b, c, -16$ był ciągiem geometrycznym.

4.15. Wstaw między liczby 16 i 1024 takie liczby x i y, aby ciąg $16,\ x,\ y,\ 1024$ był ciągiem geometrycznym.

4.16. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 6, a siódmy 96. Wyznacz wyraz a_1 i iloraz q tego ciągu.

4.17. Piąty wyraz ciągu geometrycznego jest równy 5, natomiast wyrazy szósty i siódmy są równe. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu.

4.18. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry tworzą ciąg geometryczny? Ile jest liczb czterocyfrowych o tej własności? Jaka jest odpowiedź na takie pytanie dla liczb n-cyfrowych, gdy $n > 4$?

4.19. Duży arkusz papieru o grubości 0,1 mm został złożony na pół, potem jeszcze raz na pół, ponownie na pół itd. Oblicz hipotetyczną grubość złożonego papieru po 30 złożeniach.

4.20. W salonie samochodowym nowe auto kosztuje 72 342 zł. Od chwili, gdy samochód po zakupie wyjeżdża z salonu, jego wartość systematycznie maleje. Po każdym roku eksploatacji cena spada przeciętnie do 80% ceny poprzedniej. Po ilu latach cena tego samochodu spadnie o ponad 30 000 zł?



4.21. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q $(q \neq 1)$. Sprawdź, czy ciąg o wzorze ogólnym $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest geometryczny, jeżeli tak – wyznacz jego iloraz.

4.22. Ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o wszystkich wyrazach różnych od zera. Sprawdź, czy (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

a) $a_n = \frac{2}{b_n}$

b) $a_n = 3 \cdot b_n^2$

c) $a_n = 2b_n - 1$

d) $a_n = \sqrt{b_n}$ i zakładamy, że $b_n > 0$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$

4.23. Wyznacz wszystkie trójwyrazowe ciągi geometryczne o wyrazach naturalnych, których suma wyrazów jest równa 91.

4.24. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Suma pierwszej i trzeciej z nich jest równa 20, a kwadrat drugiej jest równy 36. Wyznacz te liczby.

4.25. Pierwiastkami równania $x^2 - 6x + k = 0$ są liczby x_1 i x_2, a pierwiastkami równania $x^2 - 24x + m = 0$ są liczby x_3 i x_4. Liczby x_1, x_2, x_3, x_4 tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz k i m.

4.26. Dany jest ciąg 2, x, 18, y. Wyznacz x i y tak, aby liczby 2, x, 18 w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny, a liczby x, 18, y – ciąg arytmetyczny.

4.27. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 24. Jeżeli pierwszą z nich zmniejszymy o 1, trzecią zwiększymy o 5, a drugą pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

4.28. Ciąg składa się z pięciu liczb dodatnich, których suma jest równa 33. Początkowe trzy wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny, trzy środkowe tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Drugą liczbą jest 4. Wyznacz wyrazy tego ciągu.

4.29. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli do ostatniej liczby tego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg znowu będzie geometryczny. Wyznacz te liczby.

4.30. Wyznacz wszystkie ciągi geometryczne, które są równocześnie ciągami arytmetycznymi.

Prosto do matury

1. Ciąg (a_n), w którym $a_1 = 1$ oraz $a_3 = \frac{1}{9}$, jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a_5 = \frac{1}{81}$

B. $q = \frac{1}{3}$

C. Ciąg (a_n) może być ciągiem naprzemiennym.

2. Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy -4, a jego piąty wyraz jest równy $-\frac{1}{2}$. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

3. Czwarty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest cztery razy większy od wyrazu drugiego, który jest o 2 mniejszy od trzeciego. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz q tego ciągu.

4. Trzy liczby, których suma jest równa 39, są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jeżeli pierwszą z nich zwiększymy trzykrotnie, drugą zwiększymy dwukrotnie, a trzecią pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

D **5.** Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby $\log a$, $\log b$, $\log c$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

5. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Umiejętności:

- stosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego
- stosowanie wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Wyprowadzimy teraz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Ponownie korzystamy z oznaczenia sumy n początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$
- $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$

Założenie

(a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q oraz $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Teza

Dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ prawdziwa jest równość: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$ oraz $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$.

Dowód

- Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem geometrycznym stałym. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu są równe a_1 i oczywiście $S_n = n \cdot a_1$.
- Jeżeli $q \neq 1$, to sumy kolejnych wyrazów ciągu (a_n) możemy (korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz) zapisać w postaci:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_1 q$$
$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

Obie strony ostatniej równości mnożymy przez q:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \qquad (2)$$

Po odjęciu stronami równości (2) od równości (1) otrzymamy:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$
$$S_n(1-q) = a_1\left(1-q^n\right)$$

Założyliśmy, że $q \neq 1$, więc:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Koniec dowodu

Na przykład suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 6$ i iloraz $q = -3$, wynosi:

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 6 \cdot \frac{1-(-3)^5}{1-(-3)} = 6 \cdot \frac{1+243}{4} = 366$$

Z kolei suma $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{10}$, czyli suma 10 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 5$ i iloraz $q = 5$, jest równa:

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 5 \cdot \frac{5^{10}-1}{5-1} = 12\,207\,030$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

Przykład 1 ◀ zad. 5.7

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ wyraz $a_1 = -2$, a suma n początkowych wyrazów $S_n = -\frac{80}{27}$. Obliczymy n.

Rozwiązanie

Podstawiamy dane do wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$-\frac{80}{27} = -2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}, \text{ stąd } \frac{40}{27} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{40}{27} \cdot \frac{2}{3} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{80}{81}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81}$$

Odp.: $n = 4$

Przykład 2

Dwaj bracia otworzyli butelkę wody mineralnej. Starszy nalał do kubka połowę zawartości butelki i ją wypił, potem młodszy połowę tego, co zostało, starszy znów połowę tego, co zostało itd. Kiedy młodszy brat po raz piąty dostał butelkę, wypił już wszystko. Jaką część wody wypił każdy z nich?

Rozwiązanie

Obliczmy, jaką część wody wypił kolejno każdy z braci:

- starszy $\frac{1}{2}$ wody, która była w butelce,
- młodszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
- starszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
- młodszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ itd.

Starszy brat wypił więc:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \text{ zawartości butelki}$$

Jest to suma 5 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ i iloraz $q = \frac{1}{4}$. Zatem:

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{341}{512}$$

Ponieważ $\frac{341}{512} \approx 66{,}6\%$, dla młodszego pozostało ok. 33,4% zawartości butelki.

Odp.: Starszy brat wypił ok. 66,6% zawartości butelki, a młodszy resztę, czyli ok. 33,4% zawartości.

Przykład 3

Zgodnie z legendą bramin, który wynalazł szachy, zażądał od szacha perskiego tyle ziaren pszenicy, ile znajdzie się na szachownicy, jeśli zostanie pokryta zgodnie z zasadą: na pierwszym polu jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim cztery itd., czyli na każdym następnym dwa razy więcej niż na poprzednim. Szachownica liczy 64 pola, więc liczba ziaren jest sumą 64 wyrazów ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz $q = 2$.



Zatem:

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$$

Przyjmijmy, że jedno ziarno ma masę ok. 0,03 g. Zgromadzona pszenica ważyłaby więc:

$$0{,}03 \cdot 18 \cdot 10^{18}\ \text{g} = 5{,}4 \cdot 10^{11}\ \text{t} = 540 \text{ miliardów ton}$$

Na świecie zbiera się obecnie co roku ok. 700 milionów ton pszenicy. Na szachownicy powinno się w takim razie zmieścić ponad 700 razy więcej.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż wartość sumy $2 + 4 + 8 + \ldots + 1024$.

A. 2046 **B.** 2047 **C.** 2048 **D.** 2050

5.2. Sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = -2$ i $q = -4$, można zapisać w postaci

A. $\frac{-2 + 2 \cdot 4^n}{5}$. **B.** $\frac{-2 - 2 \cdot 4^n}{5}$. **C.** $\frac{-2 + 2 \cdot (-4)^n}{5}$. **D.** $\frac{-2 - 2 \cdot (-4)^n}{5}$.

5.3. Ciąg $\sqrt{2} - 1,\ \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

A. jest arytmetyczny i nie jest geometryczny.
B. jest geometryczny i nie jest arytmetyczny.
C. jest arytmetyczny i geometryczny.
D. nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.

5.4. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q.

a) $a_1 = -27$ $q = \frac{1}{3}$ $n = 5$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$ $q = -1$ $n = 100$

c) $a_1 = -2$ $q = 1 - \sqrt{2}$ $n = 3$

d) $a_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ $q = \sqrt{2} - 1$ $n = 4$

5.5. Oblicz sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego.

a) $3, 3^2, \ldots, 3^6$

b) $6, 3, \ldots, \frac{3}{16}$

c) $\sqrt{3}, 3, \ldots, 27$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, 8$

e) $3\sqrt{5}, 15, \ldots, 375$

f) $\pi, 2\pi, \ldots, 32\pi$

5.6. Oblicz sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby 1024.

5.7. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Wyznacz n.

a) $a_2 = 3\sqrt{3}$ $\quad q = \sqrt{3}$ $\quad S_n = 3\left(40 + 13\sqrt{3}\right)$

b) $a_3 = \frac{4}{3}$ $\quad q = \frac{1}{3}$ $\quad a_n = \frac{4}{243}$

c) $a_1 = 6$ $\quad q = \sqrt{2}$ $\quad a_n = 24$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_3 = 4$ $\quad a_n = 32$

5.8. W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q dane są trzy spośród wielkości: a_1, q, k, S_k. Oblicz czwartą z nich.

a) $a_1 = -3, \quad q = \frac{1}{2}, \quad k = 5$

b) $a_1 = 10, \quad q = -2, \quad S_k = 430$

c) $a_1 = -1, \quad k = 4, \quad S_4 = -\frac{40}{27}$

d) $q = 3, \quad k = 5, \quad S_5 = \frac{121}{2}$

5.9. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 4(2^n - 1)$.

5.10. Samochód rozpoczął hamowanie. W ciągu pierwszej sekundy przejechał 20 m, a w ciągu każdej następnej przejeżdżał 0,75 odległości przebytej w poprzedniej sekundzie. Jaką drogę przebył po 10 sekundach?

5.11. W ciągu pięciu dni rolnik zaorał 38,75 ha ziemi. Każdego dnia orał kawałek o 50% mniejszy niż powierzchnia zaorana poprzedniego dnia. Jaką powierzchnię zaorał pierwszego dnia?

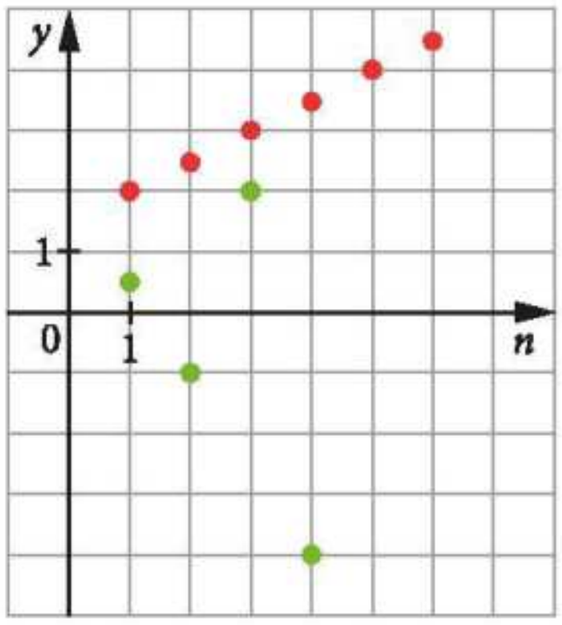


5.12. W każdym z 8 wielkich pudełek jest 8 dużych pudełek. W każdym dużym pudełku jest 8 średnich pudełek. W każdym średnim pudełku jest 8 małych pudełek, a w każdym małym pudełku jest 8 malutkich pudełek. Ile jest wszystkich pudełek?

5.13. Szef firmy postanowił przyznać premie pięciu najlepszym pracownikom. Wysokość nagród była zróżnicowana w taki sposób, że każda z nich, poczynając od drugiej, była równa 80% poprzedniej. Jaka była wysokość każdej z premii, jeżeli okazało się, że kwota przeznaczona na wszystkie wyniosła 18 909 zł?

5.14. W równaniu $x + 3x + 9x + \ldots + 3^{n-1}x = 120$ kolejne współczynniki przy niewiadomej x tworzą ciąg geometryczny. Pierwiastkiem równania jest 3. Wyznacz n.

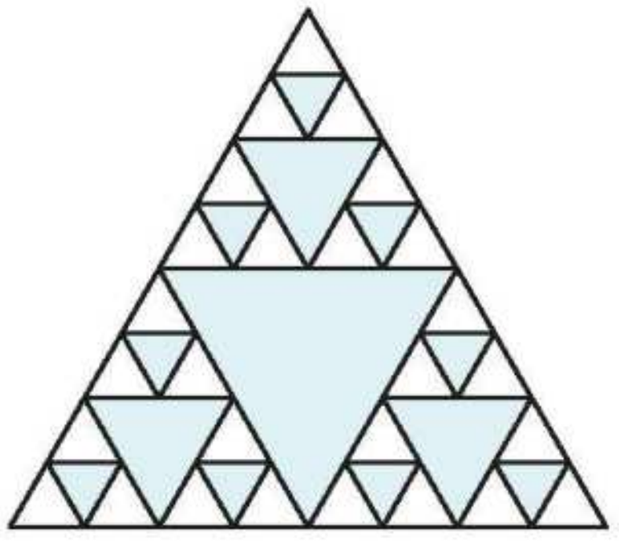
5.15. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów dwóch ciągów: arytmetycznego i geometrycznego. Podaj wzory na wyraz ogólny i sumę n wyrazów S_n każdego z tych ciągów. Czy któreś wyrazy obydwu ciągów są równe?



5.16. Promienie sześciu rozłącznych kół tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2. Promień największego z nich jest równy 32 cm. Ile jest równa suma pól tych kół?

5.17. W redakcji gazety pracuje równocześnie kilka drukarek. Najmniej wydajna z nich drukuje 13 stron w ciągu 10 minut, a najbardziej wydajna drukuje w tym samym czasie 351 stron. Wszystkie razem wydrukowały 520 stron przez 10 minut. Ile drukarek pracowało i ile stron każda z nich wydrukowała, jeżeli okazało się, że liczby stron wydrukowanych przez poszczególne drukarki utworzyły ciąg geometryczny?

5.18. Dany jest trójkąt równoboczny o boku 1. Połączono środki jego boków i otrzymano cztery trójkąty równoboczne. Środkowy z nich został zamalowany, a każdy z trzech pozostałych znów podzielono na cztery trójkąty. Z każdej czwórki zamalowano środkowy i powtórzono podział pozostałych trójkątów. Całą operację powtórzono 6 razy. Na rysunku przedstawiona jest figura otrzymana z trójkątów zamalowanych w trzech krokach.



a) Wyznacz długość boku trójkąta zamalowanego w szóstym kroku.
b) Oblicz pole zamalowanej figury otrzymanej po sześciu krokach.

5.19. Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $2+1+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +x=3\frac{31}{32}$

b) $\frac{1}{2}+1+\ \ldots\ +x=127{,}5$

c) $3-6+\ \ldots\ -x=-63$

d) $2+2\sqrt{2}+\ \ldots\ +x=62+30\sqrt{2}$

5.20. Oblicz sumę $1+11+111+1111+\ \ldots\ +\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ jedynek}}$.

5.21. Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest równa 10, a suma $2n$ początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 100. Wyznacz sumę $3n$ początkowych wyrazów tego ciągu.

Prosto do matury

1. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem $S_n=3\cdot\frac{1-5^n}{4}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 3.

B. Iloraz tego ciągu jest równy 5.

C. Ten ciąg jest rosnący.

2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1=64$ i $q=-\frac{1}{2}$.

3. Zamieszczenie całostronicowej reklamy w lokalnym tygodniku kosztuje 125 zł. Za powtórzenie jej w następnym numerze płaci się 80% stawki obowiązującej w poprzednim numerze. Ile łącznie kosztuje zamieszczenie takiej reklamy w pięciu kolejnych numerach?

4. Iloraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi $6\frac{2}{3}$. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu.

D **5.** Dany jest ciąg geometryczny o wyrazach różnych od zera. Wykaż, że jeżeli podzielimy sumę jego n początkowych wyrazów o numerach parzystych przez sumę n początkowych wyrazów o numerach nieparzystych, to otrzymamy iloraz tego ciągu.

6. Oszczędzanie i kredyty w bankach

Umiejętności:

- obliczanie procentu składanego
- obliczanie podatku
- obliczanie zysku z lokat
- obliczanie wysokości rat oraz kosztu kredytu

Procent składany

Z wprowadzonym w poprzednich tematach ciągiem geometrycznym ściśle wiąże się pojęcie procentu składanego, zgodnie z którym obliczane jest oprocentowanie lokat i kredytów w bankach. Przeanalizujemy jego działanie na przykładzie.

Przykład 1

Pewien bank po każdym roku oszczędzania dopisuje odsetki w wysokości 8%*, obliczane od aktualnego na koniec roku stanu konta (tzw. roczna kapitalizacja). Adela wpłaciła 10 000 zł na konto w tym banku. Po pierwszym roku oszczędzania bank dopisał jej 8% z tej kwoty, czyli 800 zł. Po następnym – doliczono kolejne 8%, liczone już od kwoty 10 800 zł, czyli $8\% \cdot 10\,800 = 864$ [zł]. Po dwóch latach Adela miała więc na koncie 11 664 zł. Bank co roku mnoży jej oszczędności przez 1,08.

Zatem dla wpłaconych 10 000 zł będą to w kolejnych latach kwoty:

- po pierwszym roku: $10\,000 \cdot 1{,}08 = 10\,800$ [zł],
- po drugim roku: $10\,800 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08^2 = 11\,664$ [zł],
- po trzecim roku: $11\,664 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08^2 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08^3 = 12\,597{,}12$ [zł] itd.

Zauważmy, że:
$a + 8\%a = a + 0{,}08a = 1{,}08a$

Sposób obliczania kapitału po każdym roku powoduje, że kolejne liczby tworzą ciąg geometryczny. Łatwo więc możemy zapisać zależność między liczbą lat a stanem konta Adeli. Otóż po n latach oszczędzania będzie to kwota w wysokości $10\,000 \cdot 1{,}08^n$ zł. Ten system naliczania odsetek nazywamy **procentem składanym**.

---

* Wszystkie dane użyte w przykładach oraz zadaniach dotyczące wysokości stóp procentowych itp. są fikcyjne i służą wyłącznie do ćwiczeń.

Banki muszą obliczać odsetki za pomocą procentu składanego. Gdyby zamiast tego proponowały stałą wielkość (np. 10% wpłaconej kwoty) dopisywaną do oszczędności po każdym roku, tylko najbardziej leniwi lub niedouczeni klienci nie ruszaliby swoich oszczędności. Myślący klient podejmowałby kapitał z odsetkami zaraz po ich naliczeniu, od razu wpłacał powiększoną o odsetki kwotę na konto i tym samym wymuszał na banku procent składany! Bankom przybyłoby tylko dużo kosztownej pracy.

Przykład 2 ◀ zad. 6.11

Liczebność populacji pewnego gatunku owadów zmniejsza się co roku o 5%. Obecnie populacja ta liczy około 500 000 osobników. Obliczymy, ile owadów tego gatunku będzie za 100 lat. Zakładamy, że tendencja spadkowa w tym okresie utrzyma się na takim samym poziomie.

Rozwiązanie

Zmniejszenie pewnej wielkości o 5% oznacza pomnożenie jej przez 0,95. Zatem:

$$500\,000 \cdot 0{,}95^{100} \approx 2960$$

Zauważmy, że:
$a - 5\%a = a - 0{,}05a = 0{,}95a$

Przy podanym tempie spadku liczebności po 100 latach gatunek tych owadów praktycznie zaniknie.

Przykład 3

Gdyby Mieszko I, z myślą o potomkach swoich poddanych, założył fundację „Polska 2000", przeznaczył na ten cel 1 grosz i złożył go w banku oferującym 10% rocznie, to wartość takiej lokaty po 1000 latach byłaby równa:

$$1 \cdot 1{,}1^{1000} \approx 2{,}47 \cdot 10^{41}\ [\text{gr}]$$

Każdy z 36 milionów Polaków otrzymałby około $6{,}86 \cdot 10^{31}$ zł. Taka kwota wypłacona w banknotach stuzłotowych nie zmieściłaby się w sześciennej paczce o krawędzi 100 000 km.

Aby obliczyć np. $1{,}1^{1000}$, trzeba zastosować logarytmy albo użyć kalkulatora naukowego lub komputera. Mniejsze potęgi, np. $1{,}08^{10}$, można oczywiście wyznaczyć za pomocą najprostszego kalkulatora, używając kilkakrotnie mnożenia. W większości modeli da się wykonać taką operację, korzystając wielokrotnie z klawisza „=".

Na przykład łatwo można obliczyć tym sposobem, że $1{,}1^{25} \approx 10{,}8$ i oszacować, że:

$$1{,}1^{1000} = \left(1{,}1^{25}\right)^{40} \approx 10{,}8^{40} > 10^{40}$$

Oszczędzanie w bankach

Klient banku spotyka się z takimi pojęciami jak: stopa procentowa, oprocentowanie stałe lub zmienne, oprocentowanie kredytów, lokat – w skali roku lub miesiąca. Wiemy już, że oprocentowanie kont i lokat jest w bankach obliczane zgodnie z zasadami procentu składanego. Na wysokość oprocentowania, inaczej mówiąc – stopy procentowej, mają wpływ różne czynniki, np.: sytuacja gospodarcza kraju, poziom inflacji, stopień zadłużenia państwa. Ponadto od uzyskanych dochodów (czyli doliczonych do kapitału odsetek) musimy zwykle zapłacić podatek. W roku 2020 wynosił on 19%.

Przykład 4

W styczniu 2012 r. Wanda ulokowała 3000 zł na okres jednego roku w banku, w którym oprocentowanie takiej lokaty wynosiło 2%. Od dopisanych odsetek trzeba było zapłacić 19% podatku. Obliczymy, ile pieniędzy miała Wanda z tej lokaty po upływie roku.

Rozwiązanie

Odsetki dopisano jej w wysokości:

$$2\% \cdot 3000 = 60 \text{ [zł]}$$

Podatek od dochodu (najczęściej od razu odprowadzany do urzędu skarbowego przez bank) był równy:

$$19\% \cdot 60 = 11{,}40 \text{ [zł]}$$

Zatem po upływie roku Wanda podjęła z banku kwotę w wysokości:

$$3000 + 60 - 11{,}40 = 3048{,}60 \text{ [zł]}$$

Odp.: 3048,60 zł

Obciążenie zysków z lokat podatkiem 19-procentowym oznacza w praktyce, że tylko 81% odsetek trafia do kieszeni podatnika. Aby zatem obliczyć zyski w 2020 r., trzeba było wszystkie stopy procentowe mnożyć przez współczynnik 0,81. W dalszych rozważaniach pominiemy zupełnie ten współczynnik – na sposób obliczania kapitału nie ma on żadnego wpływu. Ponadto przyjmiemy zasadę zaokrąglania końcowego wyniku z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku zgodnie z obowiązującymi w matematyce regułami.

Czas, po którym doliczane są odsetki, nosi nazwę **okresu rozrachunkowego** lub **okresu kapitalizacji**. W przykładzie 4 okres ten był równy jeden rok. W praktyce często bywa krótszy.

Przykład 5

Porównajmy trzy rodzaje oszczędzania. Zakładamy w trzech różnych bankach konto – w każdym z kwotą początkową 1000 zł. Interesuje nas zysk po roku oszczędzania. W tabeli podajemy dane dotyczące poszczególnych banków.

	I bank	II bank	III bank
Okres kapitalizacji	jeden rok	pół roku	jeden kwartał
Stopa procentowa	8%	4%	2%
Stan konta po roku (w zł)	$1000 \cdot 1{,}08 = 1080$	$1000 \cdot 1{,}04^2 = 1081{,}60$	$1000 \cdot 1{,}02^4 \approx 1082{,}43$
Zysk (w zł)	80,00	81,60	82,43

Banki, chcąc zachęcić klientów, oferują różne okresy kapitalizacji. Często oprocentowanie podawane jest w stosunku rocznym z dodatkową informacją o okresie kapitalizacji. Jeżeli np. stopa procentowa (w stosunku rocznym) jest równa 10% i okres kapitalizacji wynosi 1 kwartał, to bank co kwartał doliczy do oszczędności 2,5% stanu konta. Trzy warianty z przykładu 5 można więc traktować jako trzy sposoby naliczania odsetek przy stopie procentowej 8% w skali roku i trzech różnych okresach kapitalizacji (rocznej, półrocznej i kwartalnej). Jak widać, przy niskiej stopie procentowej różnice nie są duże.

Przykład 6 ◀ zad. 6.15

Ewa wpłaciła do banku 5000 zł. Obliczymy, ile będzie mieć pieniędzy na koncie po trzech latach, przy rocznej stopie procentowej 2% i kapitalizacji kwartalnej (oczywiście, przy założeniu, że nie dokona w tym czasie żadnych wypłat ani wpłat).

Rozwiązanie

Co kwartał zyski wyniosą:

$$\frac{1}{4} \cdot 2\% = 0{,}5\% \text{ wartości kapitału}$$

Trzy lata to dwanaście kwartałów, więc stan konta po tym okresie będzie równy:

$$5000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5308{,}39 \text{ [zł]}$$

Odp.: 5308,39 zł

W powyższych przykładach założyliśmy, że bank oferuje **oprocentowanie stałe**. W praktyce taka sytuacja zachodzi rzadko. Banki zmieniają wysokość oprocentowania (**oprocentowanie zmienne**) w zależności od wielu czynników – najogólniej mówiąc – w zależności od stanu gospodarki i kondycji państwa. Najczęściej podstawą do określenia wysokości oprocentowania są stopy procentowe ogłaszane przez Radę Polityki Pieniężnej.

Przykład 7 ◂ zad. 6.20

Grzegorz wpłacił na roczną lokatę 4000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 2% w skali roku, ale po dziewięciu miesiącach wzrosło do 2,5% w skali roku. Jaką kwotę miał Grzegorz na swojej lokacie po upływie roku?

Rozwiązanie

Po początkowych dziewięciu miesiącach, czyli $\frac{9}{12}$ roku, odsetki wynosiły:

$$\frac{9}{12} \cdot 2\% \cdot 4000 = 60 \text{ [zł]}$$

Po kolejnych trzech miesiącach odsetki wynosiły:

$$\frac{3}{12} \cdot 2{,}5\% \cdot 4000 = 25 \text{ [zł]}$$

Zatem Grzegorz miał łącznie $4000 + 60 + 25 = 4085$ [zł].

Odp.: 4085 zł

Zazwyczaj klienci banków zakładają konta, na które mogą na bieżąco wpłacać pieniądze i w każdej chwili je wypłacać. Przy takich rachunkach – płatnych na każde żądanie (tzw. rachunki a vista) – odsetki naliczane są za każdy dzień oszczędzania, licząc od następnego dnia po dokonaniu wpłaty do dnia poprzedzającego wypłatę. Oprocentowanie takich rachunków jest z reguły bardzo niskie albo zerowe.

Przykład 8

Obliczymy, jaki zysk przyniesie kwota 1000 zł umieszczona przez 20 dni na rachunku a vista oprocentowanym 0,5% w skali roku.

Rozwiązanie

20 dni to $\frac{20}{360}$, czyli $\frac{1}{18}$ roku bankowego

Rok bankowy ma 360 dni.

Zysk będzie więc równy:

$$0{,}5\% \cdot 1000 \cdot \frac{1}{18} \approx 0{,}28 \text{ [zł]}, \text{ czyli } 28 \text{ gr}$$

Odp.: 28 gr

Lokaty w bankach są z reguły oprocentowane niezbyt wysoko. Można również oszczędzać np. w otwartym funduszu emerytalnym. Fundusze takie inwestują powierzone pieniądze i dlatego zyski z wpłaconych pieniędzy mogą (ale nie muszą!) być dość wysokie. Zgromadzony kapitał powinien być wypłacany klientowi po osiągnięciu wieku emerytalnego w postaci comiesięcznej emerytury. Jej wysokość zależy

od wielu czynników – zgromadzonej kwoty, czasu oszczędzania itp., ale i sytuacji gospodarczej kraju. Zatem może się również zdarzyć, że zamiast spodziewanego zysku klient poniesie stratę – warto sobie z tego zdawać sprawę.

Oczywiście trudno jest planować zyski funduszu na wiele lat do przodu, ale przed zawarciem umowy klientowi najczęściej prezentuje się (przy określonych założeniach początkowych) rachunek symulacyjny.

Przykład 9 ◀ zad. 6.21

Jeżeli założymy, że pewien fundusz osiąga zysk w wysokości 5% rocznie, a klient będzie wpłacał 100 zł miesięcznie przez 25 lat, to – przyjmując roczną kapitalizację – zgromadzi on na rachunku kwotę (w zł):

po pierwszym roku: $1200 \cdot 1{,}05$

po drugim roku: $(1200 \cdot 1{,}05 + 1200) \cdot 1{,}05 =$

$= 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$

po trzecim roku: $\left(1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05 + 1200\right) \cdot 1{,}05 =$

$= 1200 \cdot 1{,}05^3 + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$

po czwartym roku: $\left(1200 \cdot 1{,}05^3 + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05 + 1200\right) \cdot 1{,}05 =$

$= 1200 \cdot 1{,}05^4 + 1200 \cdot 1{,}05^3 + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$ itd.

Po 25 latach klient zgromadzi na swoim koncie kwotę (w zł) równą:

$$1200 \cdot 1{,}05^{25} + 1200 \cdot 1{,}05^{24} + \ \ldots \ + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$$

co inaczej możemy zapisać w postaci:

$$1200 \cdot \left(1{,}05^{25} + 1{,}05^{24} + \ldots + 1{,}05^2 + 1{,}05\right) = 1200 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{25}}{1 - 1{,}05} \approx 60\,136{,}14 \ \text{[zł]}$$

Suma ta wystarczy do wypłacania emerytury np. w wysokości 1000 zł przez 60 miesięcy, czyli 5 lat (pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty pozostającej na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki).

Inwestując w fundusze towarzystwa funduszy inwestycyjnych, klient kupuje w biurze maklerskim tzw. jednostki udziałowe. Są to umowne „cegiełki", służące do rozliczeń z funduszem. Podobnie jak w banku, klient otrzymuje (na ogół raz w miesiącu) informację o stanie konta, ale na wyciągu podane jest saldo jednostek uczestnictwa, a nie kwota pieniężna. Cena jednostki zmienia się w zależności od wielu czynników: sytuacji gospodarczej kraju, sytuacji na giełdzie, kondycji finansowej przedsiębiorstw, w które się zainwestowało, umiejętności osób zarządzających funduszem itd.

Oto przykład niektórych pozycji na wydruku stanu konta założonego w funduszu inwestycyjnym:

Data	Transakcja	Kwota [zł]	Cena [zł]	Liczba jednostek
2007–02–11	nabycie	50,00	106,56	0,469
2007–03–11	nabycie	100,00	106,99	0,935
2007–07–11	nabycie	50,00	119,47	0,419
2007–08–12	nabycie	50,00	125,42	0,399
			STAN KONTA	2,222

11 lutego 2007 r. cena jednostki była równa 106,56 zł, więc za 50 zł klient kupił 0,469 jednostki, a np. 12 sierpnia cena jednostki była wyższa, więc za taką samą kwotę 50 zł klient nabył już tylko 0,399 jednostki.
Jeżeli klient chce wycofać z funduszu inwestycyjnego pieniądze, wydaje w biurze maklerskim dyspozycję tzw. umorzenia jednostek. Inaczej mówiąc, odsprzedaje funduszowi jednostki zgromadzone na koncie (wszystkie albo jakąś ich część), ale po cenie obowiązującej w dniu umorzenia. Fundusz inwestycyjny ma na zrealizowanie takiej transakcji kilka (lub kilkanaście) dni, dlatego klient nie zna ceny jednostki w chwili składania dyspozycji.

Przykład 10

Feliks zainwestował w fundusze TFI „Zysk do kwadratu" – nabył 200 jednostek udziałowych funduszu inwestycyjnego agresywnego w cenie 117,30 zł za jednostkę. Zatem zapłacił za nie 23 460 zł. Przez rok nie wykonał żadnych operacji, a po roku umorzył swoje jednostki. Obliczymy wysokość jego kapitału po umorzeniu. Cena jednostki w dniu umorzenia była równa

a) 129,52 zł. b) 103,05 zł.

Rozwiązanie

a) $200 \cdot 129{,}52 = 25\,904$ [zł]

b) W tym wypadku Feliks stracił na każdej jednostce 14,25 zł, a kapitał, jakim dysponował po roku, wynosił $200 \cdot 103{,}05 = 20\,610$ [zł].

Odp.: a) 25 904 zł b) 20 610 zł

Oprocentowanie kredytów

Banki stosują bardzo różne sposoby oprocentowania kredytów. Omówimy na przykładach najczęściej spotykane metody.
Jeżeli kwota kredytu jest nieduża, a okres kredytowania niedługi, bank może zastosować uproszczony sposób spłaty kredytu.

Przykład 11 ◂ zad. 6.22

Bank przyznał klientowi kredyt w wysokości 10 000 zł na jeden rok. Oprocentowanie w wysokości 5% pobierane jest od razu przy udzieleniu kredytu. Bank pobrał zatem od razu:

$$5\% \cdot 10\,000 = 500 \text{ [zł]}$$

Kredyt ma być spłacony w 12 miesięcznych równych ratach. Klient będzie zatem spłacał go w ratach równych:

$$\frac{1}{12} \cdot 10\,000 \approx 833{,}33 \text{ [zł]}$$

Jeżeli okres kredytowania jest dłuższy niż w przykładzie, to oprocentowanie może być wyższe, ale górną granicę określa ustawa**.

Zazwyczaj sposób spłaty kredytu jest znacznie bardziej skomplikowany. Banki doliczają odsetki zgodnie z zasadą procentu składanego. Oprocentowaniu takiemu podlega każda niespłacona część kredytu. Zdarza się, że klient chce spłacać pożyczkę **w równych ratach kapitałowych**. Jak zatem obliczyć wysokość takiej raty?

Prześledźmy proces spłaty kredytu na prostym przykładzie, w którym wszystko można wyliczyć „na piechotę". Później postaramy się nasze rozumowanie uogólnić.

Przykład 12 ◂ zad. 6.23

Karolina zaciągnęła kredyt w wysokości 2000 zł, oprocentowany na 6% w skali roku z miesięczną kapitalizacją. Wyznaczymy wysokość jednej raty i obliczymy kwotę, jaką Karolina odda bankowi, jeżeli spłaci kredyt

a) w pięciu miesięcznych równych ratach.
b) w dziesięciu miesięcznych równych ratach.

Rozwiązanie

a) Gdyby kredyt nie był oprocentowany, to comiesięczna rata równałaby się 400 zł. Bank jednak dolicza odsetki w wysokości 6% w skali roku z miesięczną kapitalizacją. Co miesiąc niespłacona kwota kredytu zwiększa się o 0,5%, jest więc mnożona przez $1 + 0{,}005 = 1{,}005$. Proces naliczania odsetek zaczyna się z chwilą otrzymania kredytu.

Przypomnijmy, że wartość w zwiększona o $p\%$ jest równa $w + \frac{p}{100} \cdot w = w\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

W momencie, gdy Karolina dostała do ręki 2000 zł, do spłacenia miała kwotę:

$$2000 \cdot 1{,}005 \text{ [zł]}$$

** W Polsce obowiązuje tzw. ustawa antylichwiarska, która uzależnia wysokość oprocentowania kredytu od wysokości stóp procentowych NBP.

Po upływie miesiąca Karolina spłaciła pierwszą ratę, oznaczmy ją R. Do zwrotu pozostało jeszcze $(2000 \cdot 1{,}005 - R)$ [zł]. Do tej kwoty bank znów doliczył odsetki w wysokości 0,5%, zatem dług do zwrotu po spłacie pierwszej raty był równy:

$$(2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005$$

Po następnym miesiącu sytuacja się powtórzyła. Karolina płaciła kolejne raty, a bank doliczał odsetki do reszty długu.

$$((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 \quad \longleftarrow \text{po spłacie 2. raty}$$
$$(((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 \quad \longleftarrow \text{po spłacie 3. raty}$$
$$((((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 \quad \longleftarrow \text{po spłacie 4. raty}$$

Po zapłaceniu 5. raty dług Karoliny był równy 0.

$$((((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R = 0$$

Z powyższego równania wyznaczymy wysokość raty R.
Po wykonaniu kolejnych działań otrzymujemy:

$$2000 \cdot 1{,}005^5 - R \cdot 1{,}005^4 - R \cdot 1{,}005^3 - R \cdot 1{,}005^2 - R \cdot 1{,}005 - R = 0 \qquad (1)$$

$$2000 \cdot 1{,}005^5 = R \cdot \left(1{,}005^4 + 1{,}005^3 + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1\right) \qquad (2)$$

$$2000 \cdot 1{,}005^5 = R \cdot \frac{1{,}005^5 - 1}{1{,}005 - 1} \quad \longleftarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},\ n = 5,\ a_1 = 1,\ q = 1{,}005$$

Zatem:

$$R = \frac{2000 \cdot 0{,}005 \cdot 1{,}005^5}{1{,}005^5 - 1} \approx 406{,}02 \text{ [zł]}$$

Karolina odda bankowi $5 \cdot 406{,}02 = 2030{,}10$ [zł].

Odp.: 2030,10 zł

b) Jeśli zwrot kredytu rozłożono na 10 równych rat, zasada postępowania jest identyczna, więc w odpowiedniku równania (1) niewiadoma R pojawi się 10 razy. Równanie (2) będzie teraz miało postać:

$$2000 \cdot 1{,}005^{10} = R \cdot \left(1{,}005^9 + 1{,}005^8 + \ \ldots\ + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1\right)$$

a wyznaczona z niego rata wynosi:

$$R = \frac{2000 \cdot 0{,}005 \cdot 1{,}005^{10}}{1{,}005^{10} - 1} \approx 205{,}54 \text{ [zł]}$$

Pełna kwota spłacona wtedy bankowi to 2055,40 zł.

Odp.: 2055,40 zł

Uogólnienie przykładów zapiszemy w postaci wzoru, którego pełne wyprowadzenie pominiemy.

Jeżeli kredyt w wysokości K złotych ma być spłacany w n równych miesięcznych ratach, z oprocentowaniem (w systemie procentu składanego) z miesięczną stopą procentową $p\%$, to jedna rata jest równa:

$$R = \frac{K \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Jeżeli okres kredytowania jest bardzo długi, to suma, którą trzeba spłacić, może stanowić nawet wielokrotność kwoty pożyczki.

Przykład 13 ◂ zad. 6.24

Sabina wzięła z banku kredyt mieszkaniowy w wysokości 100 000 zł oprocentowany na 7,5% w skali roku (w systemie procentu składanego). Będzie go spłacać w równych ratach przez 25 lat. Obliczymy wysokość comiesięcznej raty oraz łączną kwotę, jaką Sabina wpłaci do banku przez 25 lat.

Rozwiązanie

Miesięczna stopa procentowa wynosi:

$$\frac{1}{12} \cdot 7{,}5\% = 0{,}625\%$$

a liczba wszystkich rat:

$$n = 25 \cdot 12 = 300$$

Wysokość comiesięcznej raty jest zatem równa:

$$R = 100\,000 \cdot \frac{0{,}625}{100} \cdot \frac{1{,}00625^{300}}{1{,}00625^{300} - 1} \approx 739{,}00 \text{ [zł]}$$

Przez 25 lat Sabina wpłaci do banku $300 \cdot 739 = 221\,700$ [zł], czyli ponad 2 razy więcej niż wynosi kwota otrzymanego kredytu.

Odp.: 739 zł, 221 700 zł

Jeszcze inną metodą spłacania kredytu są tzw. **raty malejące**.

Przykład 14 ◂ zad. 6.25

Jeżeli kredyt w wysokości 15 000 zł, zaciągnięty na 4 lata przy oprocentowaniu 13,13% w skali roku, będziemy spłacali w równych ratach miesięcznych, to wysokość jednej raty wyniesie ok. 403 zł. Oddamy zatem bankowi $48 \cdot 403 = 19\,344$ zł.
Inaczej będzie przy ratach malejących. Oto jak oblicza się ich wysokość.

1. Dzieląc kwotę kredytu przez liczbę rat, otrzymujemy „bazę" każdej raty:

$$\frac{15\,000}{48} = 312{,}50 \text{ [zł]}$$

2. Obliczamy miesięczną stopę procentową:

$$\frac{13{,}13\%}{12} \approx 1{,}094\%$$

Stała wysokość odsetek od „bazy" jest więc równa:

$$1{,}094\% \cdot 312{,}50 \approx 3{,}42 \text{ [zł]}$$

3. Ustalamy wysokości kolejnych rat, mnożąc miesięczne odsetki przez liczbę niespłaconych rat i dodając tę kwotę do bazy:

$3{,}42 \cdot 48 + 312{,}50 = 164{,}16 + 312{,}50 = 476{,}66$ [zł] ⟵ pierwsza rata
$3{,}42 \cdot 47 + 312{,}50 = 160{,}74 + 312{,}50 = 473{,}24$ [zł] ⟵ druga rata
$3{,}42 \cdot 46 + 312{,}50 = 157{,}32 + 312{,}50 = 469{,}82$ [zł] ⟵ trzecia rata
...
$3{,}42 \cdot 2 + 312{,}50 = 6{,}84 + 312{,}50 = 319{,}34$ [zł] ⟵ przedostatnia rata
$3{,}42 \cdot 1 + 312{,}50 = 315{,}92$ [zł] ⟵ ostatnia rata

Obliczmy kwotę wpłaconą do banku w tym systemie.
Średnia miesięczna dopłata do bazy jest równa

$$\frac{3{,}42 \cdot 48 + 3{,}42 \cdot 47 + 3{,}42 \cdot 46 + \ldots + 3{,}42 \cdot 2 + 3{,}42 \cdot 1}{48} = \frac{3{,}42 \cdot (48 + 47 + \ldots + 2 + 1)}{48} =$$

$$= \frac{3{,}42 \cdot \frac{1+48}{2} \cdot 48}{48} = 83{,}79 \text{ [zł]} \quad \longleftarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n = 48,\ a_1 = 1,\ a_{48} = 48$$

Średnia miesięczna rata wynosi

$$312{,}50 + 83{,}79 = 396{,}29 \text{ [zł]}$$

i jest niższa niż rata (403 zł) płacona w systemie rat równych. W systemie rat malejących oddamy bankowi w sumie ok. 19 021 zł.

System rat malejących jest (w ostatecznym rachunku) korzystniejszy dla klienta, pod warunkiem, że może on sobie pozwolić na – niekiedy dużo wyższe niż przy ratach równych – raty początkowe.

Nie omówiliśmy wszystkich metod, jakie stosują banki przy spłacaniu kredytów. Podane przykłady powinny zachęcić przyszłych kredytobiorców do wnikliwego analizowania warunków umowy z bankiem przed jej podpisaniem oraz do wybrania najkorzystniejszej oferty.

Banki są ustawowo zobowiązane do podawania oprocentowania realnego (RRSO – rzeczywista roczna stopa oprocentowania). Na jego wysokość składają się (oprócz oprocentowania nominalnego) różne opłaty, np.: opłata za rozpatrzenie wniosku, za obsługę kredytu, ubezpieczenie czy prowizja. Jeżeli bank nie dopełni tego obowiązku i w umowie nie będzie wymaganych informacji, to klient jest zwolniony od płacenia wszelkich dodatkowych odsetek i prowizji.

Zadania

Uwaga: W odpowiedziach do zadań nie uwzględniamy podatku od odsetek. Wszystkie kwoty są zaokrąglane zgodnie z regułami matematyki.

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Cenę telewizora równą 1200 zł obniżono dwukrotnie, za każdym razem o 10%. Ile obecnie kosztuje telewizor?

A. 960 zł **B.** 972 zł **C.** 990 zł **D.** 1180 zł

6.2. Wpłacamy do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, przy oprocentowaniu 4% w skali roku. Przez trzy lata nie dokonujemy żadnych wpłat ani wypłat. Ile złotych będziemy mieli po trzech latach?

A. $1500 \cdot 1{,}04^3$ **B.** $1500 \cdot 1{,}04^{14}$ **C.** $1500 \cdot 1{,}01^4$ **D.** $1500 \cdot 1{,}01^{12}$

6.3. Przez kilka lat produkcja pewnego przedsiębiorstwa systematycznie rosła o 7% w skali roku. Ile wyniósł procentowy wzrost produkcji po trzech latach?

A. 21% **B.** 20,5% **C.** 22,5% **D.** 24%

6.4. Monika wpłaciła do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał z oprocentowaniem 4% w skali roku. Przez dwa lata Monika nie dokonywała żadnych wpłat ani wypłat. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Po roku Monika miała na koncie 1560,91 zł.

B. Po półtora roku Monika miała na koncie 1592,28 zł.

C. Po dwóch latach Monika miała na koncie 1624,29 zł.

6.5. Liczbę 5 zwiększono o 20%. Otrzymaną liczbę ponownie zwiększono o 20% itd. Operację tę wykonano czterokrotnie. Jaką liczbę otrzymano?

6.6. Wpłacamy x zł na lokatę oprocentowaną p% miesięcznie, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Jaka kwota będzie na tej lokacie po upływie roku?

a) $x = 100,\ p = 10$ c) $x = 200,\ p = 5$

b) $x = 100,\ p = 5$ d) $x = 300,\ p = 2$

6.7. Składamy 1000 zł w banku oferującym 4% rocznie z roczną kapitalizacją. Po ilu latach kwota oszczędności przekroczy 2000 zł?

6.8. W pewnym mieście żyje 25 000 mieszkańców. Po ilu latach liczba mieszkańców przekroczy 27 000, jeżeli roczny przyrost będzie przez kilka lat równy 2,1%?

6.9. Po zastosowaniu szczepionki na pewien rodzaj wirusa atakującego drób liczba zachorowań wśród kurcząt zmalała o 72% rocznie. O ile procent zmaleje zachorowalność po czterech latach, jeśli spadek zachorowalności się nie zmieni?

6.10. Liczba klientów supermarketu maleje co kwartał o 5%, ale średnia kwota wydawana przez klienta w tym supermarkecie wzrasta co kwartał o 10%. O ile procent wzrosną wpływy supermarketu po upływie roku?

6.11. Działka leśna zawiera 7000 m^3 masy drzewnej. Z obserwacji wynika, że roczny przyrost masy drzewnej jest równy przeciętnie 2%. Ile m^3 masy drzewnej będzie zawierała ta działka po upływie 10 lat?

6.12. W serialu *Alternatywy 4* kierownik elektrociepłowni otrzymuje informację, że podczas ogrzewania odległego osiedla traci się 50% ciepła przy spalaniu węgla, kolejne 50% przy przesyłaniu go nieszczelnymi rurami i wreszcie 50% z powodu niezamieszkałych lokali. Jak wylicza, straty wynoszą 150% ciepła, więc szybko wyłącza ogrzewanie! Załóżmy, że oszacowanie strat każdego rodzaju jest poprawne. Oblicz, ile procent wynoszą rzeczywiste straty ciepła.

6.13. Adam wpłacił 2000 zł na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 1,2% w skali roku i z roczną kapitalizacją odsetek. Jaki będzie stan jego konta po roku?

6.14. Bogumił wpłacił 4000 zł na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 1,6% w skali roku i z roczną kapitalizacją odsetek. Oblicz stan jego konta

a) po roku. b) po dwóch latach. c) po pięciu latach.

6.15. Cezary wpłacił do banku 3000 zł. Oprocentowanie wynosi 1,2% rocznie, a kapitalizacja odsetek następuje co kwartał. Ile pieniędzy będzie miał Cezary po roku oszczędzania?

6.16. Jaką kwotę otrzymamy po pół roku, jeżeli wpłacimy 8000 zł na lokatę półroczną, której oprocentowanie wynosi 1,4% w skali roku? O ile procent zwiększy się kwota wpłacona na początku?

6.17. Danka założyła lokatę w wysokości 4000 zł ze zmiennym oprocentowaniem. Przez pierwsze dwa lata oprocentowanie lokaty było równe 1,8%, w trzecim roku 1,6%, a w czwartym 1,5%, z roczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy miała Danka na tej lokacie po czterech latach?

6.18. Porównaj wysokości odsetek, jakie otrzyma Edward od kwoty 8000 zł z oprocentowaniem 1,8% w skali roku i kapitalizacją:
I. raz na miesiąc, II. raz na kwartał, III. raz na rok.

6.19. Filip wpłaca co miesiąc 200 zł na tzw. lokatę systematycznego oszczędzania. Oprocentowanie lokaty jest równe 1,3% w skali roku, z roczną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotą będzie dysponował Filip
a) po roku?
b) po dwóch latach?
c) po dwóch latach i czterech miesiącach?

6.20. Grażyna wpłaciła na roczną lokatę 5000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 1,8% w skali roku, ale po czterech miesiącach zostało zmienione na 1,7% w skali roku. Kapitalizacja odsetek wynosiła jeden rok. Jaką kwotę miała Grażyna na swojej lokacie po upływie roku?

6.21. Zaraz po studiach Janusz podpisał umowę z funduszem emerytalnym na wpłacanie kwoty a zł miesięcznie. Fundusz przewiduje, że jego coroczny zysk wyniesie p%. Zakładamy, że Janusz będzie systematycznie oszczędzał przez 40 lat do osiągnięcia wieku emerytalnego. Oblicz, jaką kwotę zgromadzi (przy kapitalizacji rocznej), gdy
a) $a = 200$, $p = 3$. b) $a = 100$, $p = 6$. c) $a = 50$, $p = 5$.

6.22. W pewnym banku zasady udzielania kredytów są następujące:
- oprocentowanie w wysokości 5,4% kwoty kredytu pobierane jest od razu,
- kwotę kredytu spłaca się w równych ratach miesięcznych.

Oblicz, ile pieniędzy wypłaci bank oraz jakiej wysokości będzie każda rata, jeżeli zaciągniemy w tym banku kredyt w wysokości
a) 6000 zł na okres 1 roku.
b) 8200 zł na okres 2 lat.
c) 11 760 zł na okres 2 lat i 4 miesięcy.

6.23. Kredyt na mieszkanie w wysokości 178 000 zł ma być spłacany w równych ratach miesięcznych przez 15 lat z oprocentowaniem 4,8% w skali roku w systemie procentu składanego. Oblicz wysokość jednej raty.

6.24. Leon uzyskał kredyt mieszkaniowy w wysokości 150 000 zł oprocentowany na 6% w skali roku w systemie procentu składanego. Będzie go spłacał w równych ratach kwartalnych przez 30 lat. Oblicz wysokość kwartalnej raty i całą sumę, jaką Leon odda po trzydziestu latach.

6.25. Robert będzie spłacać przez 2 lata kredyt w wysokości 10 000 zł w miesięcznych ratach malejących. Jeżeli pierwsza rata wyniosła 526 zł, to jakie jest oprocentowanie kredytu w skali roku?

6.26. Paweł był klientem banku, w którym kredyt można wziąć z oprocentowaniem 9,5% w skali roku i spłacać go w równych ratach miesięcznych w systemie procentu składanego. Bank Piotra zaproponował kredyt z oprocentowaniem 10% w skali roku ze spłatą w systemie miesięcznych rat malejących. Obaj panowie wzięli kredyty w wysokości 100 000 zł na 4 lata. Który z nich poniósł większe koszty kredytu? Ile wynosiła różnica? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 zł.

6.27. Patrycja wzięła kredyt w wysokości 16 000 zł i spłaca go w miesięcznych ratach malejących. Na ile lat została rozłożona spłata tego kredytu, jeżeli wiemy, że oprocentowanie w skali roku jest równe 10,5%, a ostatnia rata wynosi 538 zł?

Prosto do matury

1. Zakładamy, że liczba mieszkańców pewnego miasta co roku wzrasta o 5%. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Po trzech latach liczba mieszkańców wzrośnie o 15%.

B. Po dziewięciu latach liczba mieszkańców wzrośnie o ponad połowę.

C. Po piętnastu latach liczba mieszkańców wzrośnie o ponad 100%.

2. Liczbę 8 zwiększono o 12%. Otrzymaną liczbę ponownie zwiększono o 12%. Operację tę wykonano pięciokrotnie. Jaką liczbę otrzymano?

3. Komputer taniał trzykrotnie o 10% i obecnie kosztuje 1749,60 zł.

a) Jaka była początkowa cena komputera?

b) O ile procent łącznie staniał ten komputer?

4. Fundusz emerytalny przewiduje coroczny zysk w wysokości 4% z kapitalizacją roczną. Ile oszczędności zgromadzimy po 38 latach, jeśli będziemy wpłacać 120 zł miesięcznie? Przez ile lat można z tych pieniędzy wypłacać miesięcznie kwotę 1000 zł? (Pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki.)

5. Agnieszka zaciągnęła kredyt w wysokości 10 000 zł. Będzie go spłacała w równych ratach miesięcznych przez 1,5 roku. Oprocentowanie kredytu wynosi 7,2% w skali roku (w systemie procentu składanego). Oblicz wysokość jednej raty.

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–17 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_n = \frac{15-2n}{3n}$ dla $n \geqslant 1$. Liczba wszystkich nieujemnych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

2. Czwarty wyraz ciągu (a_n), określonego za pomocą układu warunków: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{1}{3+a_n}$ dla $n \geqslant 1$, jest równy

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{13}{43}$. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $\frac{43}{13}$.

3. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3}$ dla $n \geqslant 1$. W tym ciągu wyraz a_7 jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Dane są wyrazy: $a_1 = 8$ i $a_2 = 13$ ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$. W tym ciągu

A. $a_{14} = 88$. **B.** $a_{15} = 88$. **C.** $a_{16} = 88$. **D.** $a_{17} = 88$.

5. Liczby $5, -2, -9$ są pierwszymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać

A. $a_n = -7n + 12$. **B.** $a_n = -2n + 7$. **C.** $a_n = 7n - 12$. **D.** $a_n = 2n - 7$.

6. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$ jest równy -13, a ósmy 5. Pierwszym wyrazem tego ciągu jest

A. 10. **B.** -10. **C.** 16. **D.** -16.

7. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ prawdziwa jest równość $a_2 + a_5 + a_8 = 18\sqrt{2}$. Wynika stąd, że

A. $a_5 = \frac{8}{\sqrt{2}}$. **B.** $a_5 = \frac{12}{\sqrt{2}}$. **C.** $a_5 = 5\sqrt{2}$. **D.** $a_5 = 7\sqrt{2}$.

8. Wskaż zależność prawdziwą dla każdego ciągu arytmetycznego.

A. $a_4 + a_7 = a_{11}$ **C.** $a_2 + a_7 = 2a_9$

B. $a_4 + a_8 = a_5 + a_6$ **D.** $a_6 + a_{10} = a_2 + a_{14}$

9. W pięciokącie miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 30°. Największy kąt tego pięciokąta ma miarę

A. 168°. **B.** 160°. **C.** 138°. **D.** 170°.

10. Dane są dwa wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$: $a_2 = 9$ i $a_5 = 0$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa

A. 29. **B.** 30. **C.** 12. **D.** 15.

11. Dany jest sześciowyrazowy ciąg geometryczny o ujemnym ilorazie. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\sqrt{3}$, a ostatni jest równy -27. Trzecim wyrazem tego ciągu jest

A. $-3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** -9. **D.** 9.

12. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = 5\sqrt{5}$. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{5}$. **B.** $a_n = \frac{5^n}{\sqrt{5}}$. **C.** $a_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n$. **D.** $a_n = \left(\sqrt{5}\right)^n$.

13. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_5 = 5a_3$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{5}$.

14. Liczby 2, $x - 3$, $\frac{1}{2}$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich. Wskaż wartość x.

A. 4 **B.** -4 **C.** 3 **D.** -1

15. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2(n+2)}{3}$ dla $n \geqslant 1$. Ciąg ten jest

A. arytmetyczny i jego różnica wynosi $r = \frac{3}{2}$.

B. arytmetyczny i jego różnica wynosi $r = \frac{2}{3}$.

C. geometryczny i jego iloraz wynosi $q = \frac{1}{3}$.

D. geometryczny i jego iloraz wynosi $q = \frac{4}{3}$.

16. Monika wpłaciła do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, a oprocentowanie wynosi 4% w skali roku. Jaka kwota będzie na koncie Moniki po dwóch latach?

A. 1624,29 zł **B.** 1662,59 zł **C.** 1650 zł **D.** 1524,30 zł

17. Pożyczka w wysokości 25 000 zł ma być spłacana w równych ratach miesięcznych przez 5 lat z oprocentowaniem 24% w skali roku w systemie procentu składanego. Jaki jest koszt tej pożyczki?

A. 18 152 zł **B.** 13 440 zł **C.** 19 166 zł **D.** 57 025,77 zł

W zadaniach 18–36 oceń prawdziwość podanych zdań.

18. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 3n - 1$. W tym ciągu

A. $a_{n-2} = 3n - 2$. **B.** $a_{n+2} = 3n + 5$. **C.** $a_{n-1} = 3n - 4$.

19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 10n + 18$. Wynika stąd, że

A. (a_n) ma dokładnie pięć wyrazów ujemnych.

B. $a_3 = a_7$ oraz $a_4 = a_6$.

C. (a_n) przyjmuje wartość najmniejszą.

20. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = n^2 - 3n + 2$. Wynika stąd, że

A. $a_{10} = 72$.

B. (a_n) jest ciągiem rosnącym.

C. (a_n) jest ciągiem monotonicznym.

21. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. W tym ciągu

A. $a_4 = 28$. **B.** $a_9 = a_8 + 81$. **C.** $a_6 = 90$.

22. Ciąg (a_n) jest rosnący. Wynika stąd, że

A. ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = -a_n + 15$ jest malejący.

B. ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = a_n - 2$ jest rosnący.

C. ciąg o wyrazie ogólnym $d_n = |a_n|$ jest rosnący.

23. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3^{\log_9 n}$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Zatem

A. ciąg (a_n) nie ma miejsc zerowych.

B. ciąg (a_n) jest rosnący.

C. wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są niewymierne.

24. Liczba r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Zatem

A. $a_8 = a_4 + 4r$. **B.** $a_{12} = a_6 + 6r$. **C.** $a_{n+3} = a_5 + (n-2)r$.

25. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wynika stąd, że

A. $a_{10} - a_8 = a_4 - a_2$. **B.** $\frac{a_1 + a_2 + a_4 + a_5}{4} = a_3$. **C.** $a_5 - a_2 = \frac{1}{2}(a_6 - a_2)$.

26. Suma

A. wszystkich parzystych liczb dwucyfrowych jest równa 2430.

B. wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych mniejszych od 777 jest równa 296 526.

C. $12 + 14 + 16 + \ldots + 52$ jest równa 672.

27. Dane są trzy kolejne wyrazy pewnego ciągu liczbowego: $5p - 1$, $p^2 + 2p - 3$, $2p^2 - p - 5$.

A. Dla pewnego $p \in \mathbf{R}$ wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny.

B. Dla każdego $p \in \mathbf{R}$ wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny.

C. Wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny tylko dla $p = 2$.

28. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od 0 i ilorazie $q \neq 1$.

A. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $a_5 q^5$.

B. Trzynasty wyraz tego ciągu jest równy $a_5 q^7$.

C. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{a_1 a_{100}}{a_{98}}$.

29. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = 8$, $a_2 = 32$. W tym ciągu

A. $a_n = 8 \cdot 4^{n-1}$. **B.** $a_n = 2^{2n+1}$. **C.** $a_n = 2 \cdot 4^n$.

30. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od 0 i ilorazie $q \neq 1$. W tym ciągu

A. $\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$. **B.** $a_7 - a_5 = a_{13} - a_{11}$. **C.** $a_4^2 = a_3 \cdot a_5$.

31. Liczby $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ są kolejnymi wyrazami ciągu

A. arytmetycznego. **B.** geometrycznego. **C.** monotonicznego.

32. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \end{cases}$.

W tym ciągu

A. $a_3 = \frac{11}{14}$. **B.** $a_3 = 4$. **C.** $a_4 > 1$.

33. Liczby $\log a$, $\log b$, $\log c$, gdzie a, b i c są różnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny. Zatem liczby a, b i c tworzą (w podanej kolejności)

A. ciąg arytmetyczny. **B.** ciąg geometryczny. **C.** ciąg monotoniczny.

34. Liczby $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 256$ są

A. kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

B. kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

C. wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

35. Cenę telewizora równą 1200 zł obniżono najpierw o 20%, a potem o 10%. Zatem

A. cena telewizora po obu obniżkach jest niższa od początkowej o 30%.

B. po obu obniżkach telewizor kosztuje 864 zł.

C. końcowa cena telewizora wynosi ponad 70% ceny początkowej.

36. Michał podjął pracę wakacyjną na następujących warunkach: 300 zł za pierwszy tydzień i podwyżka 5% po każdym przepracowanym tygodniu.

A. Wynagrodzenie Michała za trzeci tydzień pracy wynosiło 330,75 zł.

B. Wynagrodzenie Michała za czwarty tydzień pracy wynosiło ponad 350 zł.

C. Po 5 tygodniach pracy Michał zarobił w sumie 1657,69 zł.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

37. Podaj przykład wzoru ogólnego skończonego ciągu (a_n) o danych kolejnych wyrazach.

a) 2, 3, 4, 5, 6, 7

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$

c) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}$

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$

e) 2, 4, 6, 8, 10

f) −3, −4, −5, −6, −7

g) 1, 2, 4, 8, 16

h) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$

38. Ogólny wyraz ciągu dany jest wzorem $a_n = \frac{2n-10}{n+1}$.

a) Ile wyrazów ujemnych ma ten ciąg?

b) Który wyraz ciągu jest równy $1\frac{1}{4}$?

c) Dla jakich wartości n wyrazy ciągu są większe od 1?

39. Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 3,98.

40. Zbadaj monotoniczność ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 3n - 100$ c) $a_n = (-2)^n \cdot n^2$ e) $a_n = 2^{-n}$

b) $a_n = \frac{3n-1}{n}$ d) $a_n = 2 + 4n - n^2$ f) $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

41. Zbadaj monotoniczność ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = \sin(n\pi)$ b) $a_n = \cos(n\pi)$ c) $a_n = n + \operatorname{tg}(n\pi)$

42. Sporządź wykres ciągu (a_n).

a) $a_n = 2n - 3$ c) $a_n = n^2 - 6n + 7$

b) $a_n = \frac{3-n}{n}$ d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

43. Dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n prawdziwy jest wzór:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Można z niego skorzystać, aby przedstawić ułamek postaci $\frac{n}{n+1}$ jako sumę ułamków, z których każdy ma w liczniku 1, a w mianowniku liczbę naturalną, np. $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

a) Ile składników ma suma po prawej stronie wzoru dla: $n = 5$, $n = 7$, $n = 100$?

b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 5$.

c) Przedstaw liczby $\frac{6}{7}$ oraz $\frac{9}{10}$ w postaci sumy ułamków, z których każdy ma w liczniku 1, a w mianowniku liczbę naturalną.

44. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_{13} = 19$ oraz $a_{28} = 64$. Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

45. W pewnym ciągu arytmetycznym wyrazy a_1, a_3, a_5 są odpowiednio równe liczbom $2x - 19$, $3x - 6$, $2x + 33$. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę r tego ciągu.

46. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ dane są $a_1 = 5$ i $S_6 = 60$. Oblicz różnicę $a_{22} - a_{12}$.

47. Skorzystaj z definicji i sprawdź, czy ciąg określony danym wzorem ogólnym jest ciągiem geometrycznym. Jeśli tak – podaj jego wyraz a_1 i iloraz q.

a) $a_n = 3 \cdot 4^n$ b) $a_n = n^4$ c) $a_n = -\pi$ d) $a_n = \frac{3}{(-2)^n}$

D **48.** Wykaż, że liczby $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $a_2 = 10 - 7\sqrt{2}$, $a_3 = 34 - 24\sqrt{2}$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz jego iloraz q.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

D **49.** Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

50. Suma drugiego i szóstego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 8, a wyraz ósmy jest kwadratem wyrazu czwartego. Wyznacz ten ciąg.

51. Czwarty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy -2, a dziesiąty -26. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od wyrazu czwartego do dziesiątego włącznie.

52. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = 4$ i $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

53. Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = (n - 4)(2 + p)$, gdzie $p \in \mathbf{R}$.
a) Sprawdź, czy dla każdego p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
b) Oblicz sumę $a_{16} + a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{25}$ dla $p = 3$.

54. Różnicą ciągu arytmetycznego jest liczba $r = 3$, a średnia arytmetyczna wyrazów $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ jest równa 10. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę k, dla której $a_k = 28$.

55. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ siódmy wyraz jest równy 63, a suma jedenastu początkowych wyrazów ciągu jest równa 308. Oblicz a_1.

56. Składniki po lewej stronie równania

$$(2x + 1) + (2x + 4) + (2x + 7) + \ldots + (2x + 28) = 155$$

są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

57. Liczby x, 6, y są w podanej kolejności pierwszymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego i $y - x = 18$. Oblicz sumę S_8 tego ciągu.

58. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

59. Pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 2$. Suma wszystkich współczynników tego wielomianu jest równa 0. Wyznacz współczynniki a, b, c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

60. Za przejazd taksówką firmy Supertaxi płaci się 8 zł opłaty początkowej oraz 1,80 zł za każdy przejechany kilometr. W firmie Extrataxi opłata początkowa wynosi 6 zł, a koszt jednego kilometra to 2,20 zł.
a) W której firmie zapłacimy mniej za przejazd trasą długości 6 km?
b) Przy jakiej liczbie kilometrów w obu firmach zapłacimy tyle samo?

61. Iloczyn pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 16, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 55. Oblicz sumę dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu.

62. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 81, a suma $n+4$ początkowych wyrazów tego ciągu równa się 124. Różnicą ciągu jest liczba $\frac{1}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz i wartość n.

63. Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy -4, a jego piąty wyraz jest równy $-\frac{1}{2}$. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

64. Suma pierwszego i drugiego wyrazu ciągu geometrycznego wynosi 3, a suma drugiego i trzeciego wyrazu jest równa -6. Wyznacz ten ciąg. Sprawdź, czy jest on monotoniczny.

65. Liczba miłośników twórczości Euzebiusza Pajączka zwiększa się średnio o połowę co trzy lata. Ile razy zwiększy się przez najbliższych 15 lat?

66. Przy kopaniu szybu płaci się 100 zł za pierwszy metr głębokości, a za każdy następny o 50 zł więcej niż za poprzedni. Ponadto, jeżeli głębokość szybu przekracza 5 m, ryczałtowo dopłaca się 1000 zł. Końcowy średni koszt 1 m głębokości wykopu wyniósł 625 zł. Oblicz głębokość szybu.

67. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 76 zł. Najdroższa z tych książek kosztowała o 4 zł mniej niż dwie pozostałe razem. Ile kosztowała każda książka?

68. Na wykonanie modelu prostopadłościanu o objętości 1728 cm^3 zużyto 1008 cm^2 blachy. Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny. Oblicz te długości.

69. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) spełniony jest warunek $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Wyznacz iloraz tego ciągu.

70. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma pierwszej i ostatniej z nich jest równa $-1\frac{3}{4}$, a suma drugiej i trzeciej wynosi $\frac{1}{2}$. Znajdź te liczby.

71. Suma dziesięciu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazach całkowitych jest równa 155. Pierwszy wyraz tego ciągu to iloraz pewnego ciągu geometrycznego (b_n) o wyrazach całkowitych, którego pierwszy wyraz jest różnicą ciągu (a_n). Suma pierwszych dwóch wyrazów ciągu (b_n) jest równa 9. Wyznacz oba ciągi.

72. W geometrycznym ciągu (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ dane są: wyraz ogólny $a_n = 5^{x_n}$ i iloraz $q = 25$. Wiadomo, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 120$. Oblicz x_1.

73. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_5 = 9$, $a_9 = 1$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n).

D b) Wykaż, że ciąg o wyrazach a_5, a_8, a_9 jest ciągiem geometrycznym, i oblicz jego iloraz q.

c) Wyznacz n, dla którego suma S_n ciągu arytmetycznego (a_n) ma największą wartość.

74. Suma dwunastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$ jest równa 42. Średnia arytmetyczna wyrazów: czwartego, ósmego i dziesiątego jest równa 6. Wyrazy a_6, a_8, a_k ciągu (a_n) tworzą w podanej kolejności trójwyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz k.

75. Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Te same liczby są odpowiednio pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz a, b i c.

76. Suma pierwszych pięciu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 10. Wyrazy: trzeci, piąty i trzynasty tego ciągu tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

77. Trójwyrazowy ciąg: $x + y$, $2x + 1$, 9 jest arytmetyczny, a ciąg: 2, $x + 1$, $4y$ jest geometryczny. Wyznacz takie x i y, aby suma wyrazów ciągu arytmetycznego była większa od sumy wyrazów ciągu geometrycznego.

78. Ciąg o wyrazach dodatnich a, $4b$, 11 jest arytmetyczny, a ciąg: b, 8, $6a + b$, c jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

79. Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem rosnącego ciągu geometrycznego. Suma tych liczb jest równa 52. Ciąg o wyrazach $a+2$, b, $c-18$ jest arytmetyczny. Wyznacz liczby a, b, c.

80. Ciąg: $4,\ x,\ x+y,\ z$ jest arytmetyczny, natomiast ciąg: $y,\ z,\ 8x$ jest geometryczny. Oblicz x, y i z.

81. Ciąg a, b, c jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\frac{2}{3a},\ \frac{2}{a+c},\ \frac{2}{a+2b+c}$ jest geometryczny. Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego.

82. Dany jest geometryczny ciąg a, b, c. Jeżeli od ostatniej liczby odejmiemy 27, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. A gdy w otrzymanym ciągu arytmetycznym od drugiej liczby odejmiemy 3 i do trzeciej dodamy 6, to ponownie uzyskamy ciąg geometryczny. Wyznacz ciąg a, b, c.

83. Składamy w banku 3000 zł na lokatę ze stałym oprocentowaniem 5% w stosunku rocznym i roczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy będziemy mieć po trzech latach?

84. Oprocentowanie lokaty trzymiesięcznej wynosi 1,6% w skali roku. Ile zyska pani Anna, która wpłaciła na taką lokatę 5000 zł?

85. Bank A oferuje lokatę oprocentowaną na 2,3% w skali roku, z kapitalizacją kwartalną, a bank B – lokatę oprocentowaną na 2,4% w skali roku, z kapitalizacją półroczną. Która oferta jest korzystniejsza?

86. Marta wpłaca co miesiąc 100 zł na lokatę systematycznego oszczędzania. Oprocentowanie lokaty wynosi 8% w skali roku. Kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku od momentu otworzenia lokaty. Jaką kwotę Marta zgromadzi na koncie po upływie

a) roku? b) trzech lat? c) dziesięciu lat?

87. Kredyt w wysokości 60 000 zł uzyskany w banku, w którym spłat dokonuje się w równych ratach kwartalnych z oprocentowaniem 5,2% w skali roku w systemie procentu składanego, ma być spłacony w ciągu 3 lat. Oblicz wysokość raty.

88. W pewnym banku oprocentowanie kredytów w skali roku wynosi 7%, a ich spłata odbywa się w miesięcznych ratach malejących. Antoni wziął w tym banku kredyt w wysokości 18 000 zł i chce go spłacić w ciągu dwóch lat. Oblicz wysokość pierwszych trzech rat spłaty. Ile wynosi średnia wszystkich rat wpłaconych do banku przez Antoniego?

Analiza matematyczna

4

1. Granica ciągu

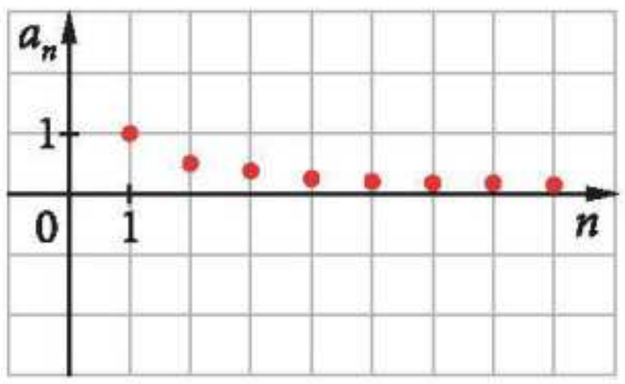
Umiejętności:

- obliczanie granic ciągów z wykorzystaniem granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$
- stosowanie twierdzeń o działaniach na granicach ciągów

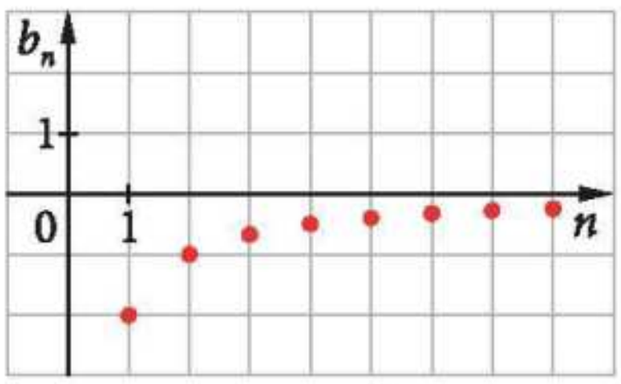
Będziemy badać nieskończone ciągi liczbowe, czyli funkcje, których dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych, a wartościami są liczby rzeczywiste.

Ciągi zbieżne do zera

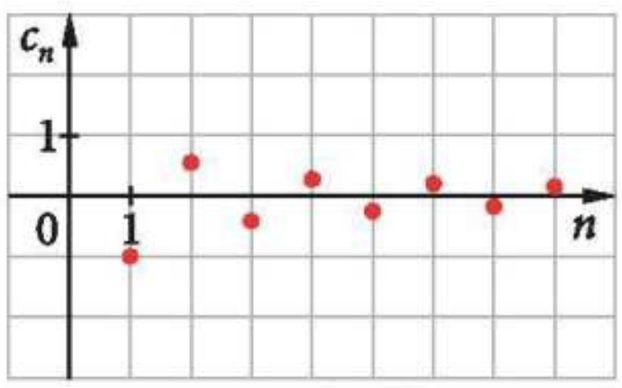
Przyjrzyjmy się wykresom trzech ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{2}{n}$ oraz $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.



$a_n = \frac{1}{n}$



$b_n = -\frac{2}{n}$



$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Jeśli odczytujemy własności tych ciągów tylko z wykresów, możemy przypuszczać, że np. (a_n) jest ciągiem malejącym, (b_n) – rosnącym, (c_n) – niemonotonicznym, (a_n) ma wszystkie wyrazy dodatnie, (c_n) jest ciągiem naprzemiennym itp. Wszystkie trzy ciągi mają też wspólną własność: w miarę wzrostu wartości n punkty wykresu każdego z nich coraz bardziej zbliżają się do osi odciętych – ich wyrazy dążą do zera. Symbolicznie zapisuje się tę własność następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

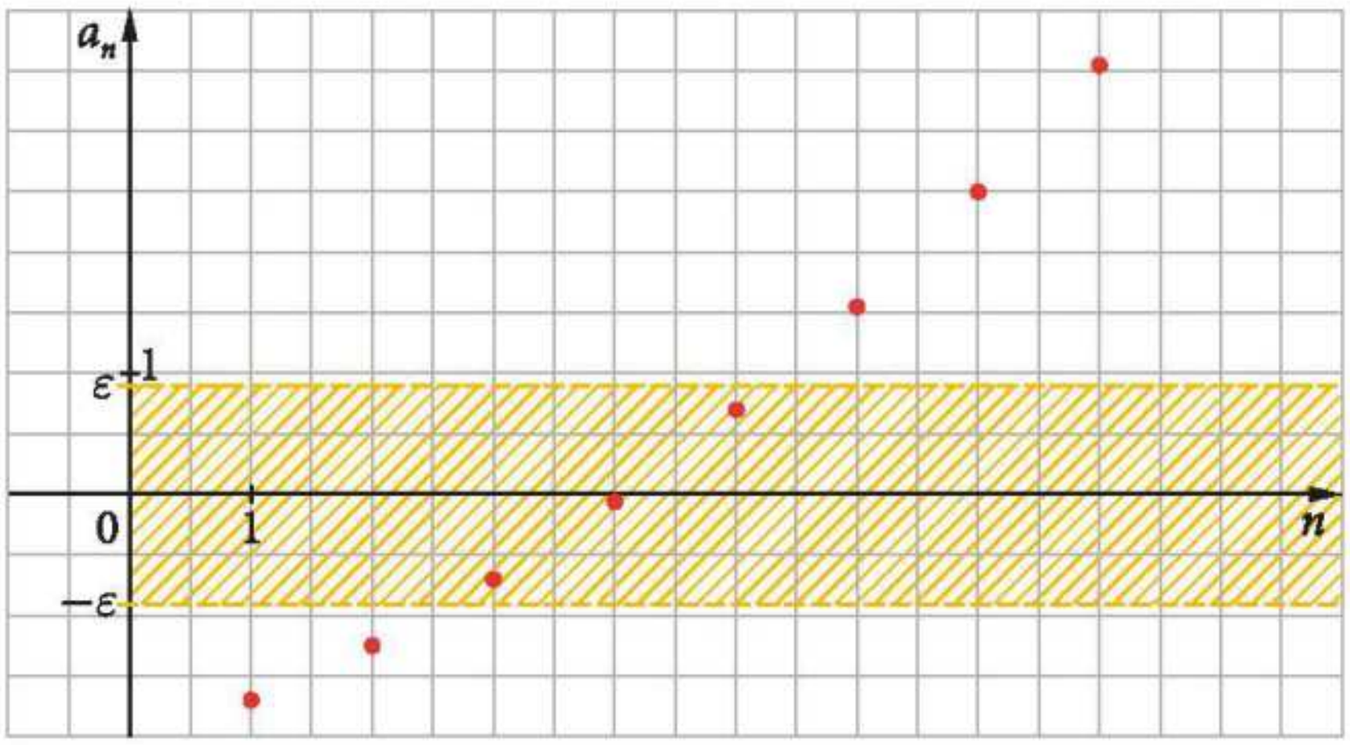
i czyta: „granicą ciągu (a_n) przy n dążącym do nieskończoności jest zero" lub krócej „ciąg (a_n) dąży do zera" albo „ciąg (a_n) jest zbieżny do zera".

Wprowadzimy teraz określenia, które będą użyteczne przy definiowaniu pojęcia zbieżności ciągu do zera.

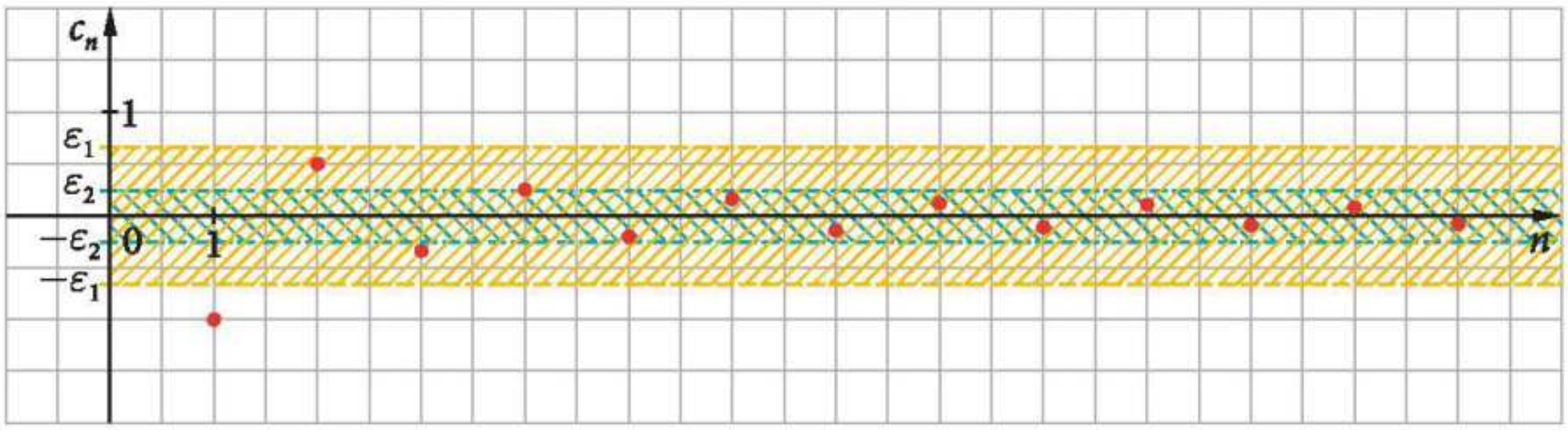
- Zwrot **prawie wszystkie wyrazy ciągu** oznacza wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu liczbowego poza ich skończoną liczbą. Zauważmy, że jeżeli skończona liczba wyrazów ciągu (a_n) nie spełnia pewnego warunku, to wśród nich istnieje wyraz o największym numerze. Oznaczmy go k. Zatem wszystkie wyrazy o numerach większych od k, czyli a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, ..., już ten warunek spełniają.
- **Otoczeniem** o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby g na osi nazywamy przedział $(g-\varepsilon;\ g+\varepsilon)$. W szczególności otoczeniem o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby 0 jest przedział $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$.

Przykład 1

W układzie współrzędnych narysowany jest wykres ciągu $a_n = \frac{n^2 + 6n - 41}{20}$. Na osi a_n wybrane zostało otoczenie liczby 0 o promieniu $\varepsilon = 0{,}9$. W otoczeniu tym znajdują się tylko trzy wyrazy ciągu (a_n): $a_3 = -0{,}7$, $a_4 = -0{,}05$ oraz $a_5 = 0{,}7$. Ciąg jest rosnący i wszystkie wyrazy, poczynając od szóstego, są większe od liczby 0,9. Z kolei wyrazy a_1 i a_2 są mniejsze od liczby $-0{,}9$. Punkty wykresu, które leżą w zaznaczonym kolorem obszarze, nazywanym paskiem epsilonowym, są graficznym rozwiązaniem układu nierówności $-0{,}9 < a_n < 0{,}9$.



Przyjrzyjmy się ponownie wykresowi ciągu $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ z zaznaczonymi na osi c_n dwoma otoczeniami liczby 0 i odpowiednimi paskami w układzie współrzędnych.



Na wykresie:

- wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 1 (czyli c_2, c_3, c_4, ...) należą do otoczenia liczby 0 o promieniu ε_1 (wszystkie punkty wykresu, poczynając od drugiego, mieszczą się w pasku o szerokości $2\varepsilon_1$),
- wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 4 (czyli c_5, c_6, c_7, ...) należą do otoczenia liczby 0 o promieniu ε_2 (wszystkie punkty wykresu, poczynając od piątego, mieszczą się w pasku o szerokości $2\varepsilon_2$).

Gdy badamy zbieżność ciągu do 0, interesuje nas odpowiedź na pytanie, gdzie będą prawie wszystkie wyrazy ciągu, gdy promień ε będzie coraz mniejszy. Poglądowo mówiąc, granicą ciągu jest 0, jeżeli w dowolnie małym otoczeniu liczby 0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Definicja

Granicą ciągu (a_n) jest liczba 0 wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia liczby 0 należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w otoczeniu o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby 0 wtedy i tylko wtedy, gdy należą do przedziału $(-\varepsilon; \varepsilon)$, czyli spełniają podwójną nierówność $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ albo równoważną nierówność $|a_n| < \varepsilon$.

Przykład 2 ◀ zad. 1.4

Dany jest ciąg $a_n = \frac{4}{\sqrt{n}}$. Sprawdzimy, które wyrazy tego ciągu należą do otoczenia liczby 0 o promieniu

a) $\varepsilon = 1$. b) $\varepsilon = 0{,}1$. c) $\varepsilon > 0$.

Rozwiązanie

a) $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4}{\sqrt{n}}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{n}} < 1 \Leftrightarrow 4 < \sqrt{n} \Leftrightarrow 16 < n$

W otoczeniu o promieniu 1 liczby 0, czyli w przedziale $(-1; 1)$, znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż 16, czyli poczynając od a_{17}.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy" zapisujemy za pomocą symbolu $\Leftrightarrow$.

b) $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4}{\sqrt{n}}\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow 40 < \sqrt{n} \Leftrightarrow 1600 < n$

W otoczeniu o promieniu 0,1 liczby 0, czyli w przedziale $(-0{,}1; 0{,}1)$, znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż 1600, czyli poczynając od a_{1601}.

c) $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow 4 < \varepsilon\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{16}{\varepsilon^2} < n$

W otoczeniu o dowolnym promieniu $\varepsilon > 0$ liczby 0, czyli w przedziale $(-\varepsilon; \varepsilon)$, znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż $\frac{16}{\varepsilon^2}$. Na zewnątrz tego przedziału jest ich skończona liczba. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest zbieżny do 0:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0$

D **Przykład 3** ◀ zad. 1.6

Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Założenia

$a_n = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbf{N} - \{0\}$

Teza

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Dowód

Przyjmijmy $\varepsilon > 0$.

$$|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \qquad \longleftarrow \varepsilon > 0,\ n > 0$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych od $\frac{1}{\varepsilon}$ należą do otoczenia o promieniu ε liczby 0.

Koniec dowodu

Własności ciągów zbieżnych do zera

Podamy (bez dowodu) kilka twierdzeń o ciągach zbieżnych do zera.

- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $t \in \mathbf{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (t \cdot a_n) = 0$.

Na przykład:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1004}{27n} = 0, \text{ bo } \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1004}{27n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1004}{27} \cdot \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Na przykład:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^7} = 0$ i ogólnie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t}{n^k} = 0$, gdzie t jest ustaloną liczbą rzeczywistą, k jest ustaloną liczbą naturalną, $n, k \in \mathbf{N} - \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0, \text{ bo } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = 0$.

Na przykład:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 0, \text{ bo } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0$$

Wyróżnimy twierdzenie dotyczące ciągu geometrycznego.

Twierdzenie

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ jest zbieżny do zera.

Przykład 4 ◀ zad. 1.8

Ciąg $b_n = \frac{5}{3^{n-1}}$ jest ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = 5$ i iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Wypiszmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu: $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \frac{5}{243}, \frac{5}{729}, \ldots$.

$|q| < 1$, więc ciąg (b_n) jest zbieżny do zera: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{3^{n-1}} = 0$.

Ciągi zbieżne

Definicja

Granicą ciągu (a_n) jest liczba g wtedy i tylko wtedy, gdy granicą ciągu $(a_n - g)$ jest liczba 0, czyli:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - g) = 0$$

Zauważmy, że powyższą definicję można poglądowo interpretować w następujący sposób:
granicą ciągu jest liczba g, jeżeli w dowolnie małym otoczeniu liczby g znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Oznacza to, że dla danego ciągu może istnieć tylko jedna liczba g będąca granicą tego ciągu.

Każdy ciąg, który ma granicę, nazywamy **ciągiem zbieżnym**. Wszystkie pozostałe ciągi nieskończone nazywamy **ciągami rozbieżnymi**.

Ciągi różniące się skończoną liczbą wyrazów są jednocześnie zbieżne do tej samej granicy lub jednocześnie rozbieżne.

D **Przykład 5**

Wykażemy, że a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 - 3^{n+1}}{3^{n-1}} = -9$.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$, ponieważ: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n} - 2\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1-2n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-3^{n+1}}{3^{n-1}}=-9$, ponieważ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-3^{n+1}}{3^{n-1}}+9\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5-3^{n+1}+9\cdot 3^{n-1}}{3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-3^{n+1}+3^{n+1}}{3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3^{n-1}}=0$$

Twierdzenie

Twierdzenie o działaniach na granicach ciągów zbieżnych

- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ i $t\in\mathbf{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(t\cdot a_n)=t\cdot a$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ i $b\neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ oraz wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n\geqslant 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

Dowód tego twierdzenia pomijamy. Zauważmy tylko, że w punkcie dotyczącym $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ nie musimy zakładać, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0. Jeśli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$, to jedynie skończona liczba wyrazów tego ciągu ma wartość 0. Te wyrazy nie mają więc wpływu na istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

Przykład 6 ◂ zad. 1.9

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{2n^2+n+2}$.

Rozwiązanie

Przekształcimy ułamek do innej, równoważnej postaci.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

← dzielimy licznik i mianownik ułamka przez n^2

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=3$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)=2$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\dfrac{3}{2}$.

Odp.: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3}{2}$

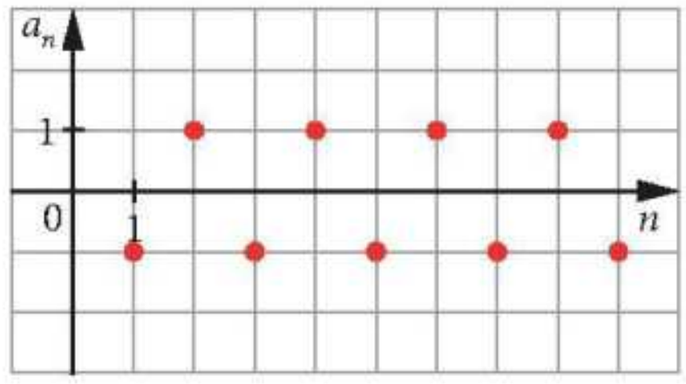
Zauważmy na koniec, że granica ciągu zbieżnego może być równa któremuś wyrazowi tego ciągu. Szczególnym przypadkiem jest ciąg stały, którego wszystkie wyrazy są równe jego granicy.

D **Przykład 7** ◀ zad. 1.14

Wykażemy, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny.

Dowód

Wykres ciągu (a_n) przedstawiono na rysunku. Nietrudno zauważyć, że w tym ciągu wszystkie wyrazy o numerach nieparzystych mają wartość -1, a wszystkie wyrazy o numerach parzystych mają wartość 1, czyli dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$:



$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{ oraz } a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$$

Liczba 1 nie jest granicą ciągu (a_n). Jeśli bowiem weźmiemy np. otoczenie liczby 1 o promieniu $\varepsilon = 0{,}5$, to poza nim znajdują się wszystkie wyrazy o numerach nieparzystych, a jest ich nieskończenie wiele.

Analogicznie dowodzimy, że liczba -1 nie jest granicą ciągu (a_n). Podobnie każda liczba rzeczywista różna od 1 i różna od -1 nie może być granicą tego ciągu. Zatem ciąg (a_n) nie ma granicy, czyli jest rozbieżny.

Koniec dowodu

Prawdziwe jest następujące stwierdzenie: **granicą ciągu o prawie wszystkich wyrazach dodatnich nie może być liczba ujemna**. Poglądowo mówiąc, jeżeli prawie wszystkie punkty wykresu ciągu znajdują się powyżej osi x, to najmniejszą granicą takiego ciągu może być liczba 0. Analogicznie, granicą ciągu o prawie wszystkich wyrazach ujemnych nie może być liczba dodatnia.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

W zbiorze ciągów rozbieżnych wyróżnimy ciągi rozbieżne do nieskończoności.

Definicja

Mówimy, że **ciąg (a_n) jest rozbieżny do nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M.

Zapisujemy to jako:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Zapis $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ czytamy również „ciąg (a_n) dąży do nieskończoności”.

D **Przykład 8** ◀ zad. 1.15

Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-1\right)=\infty$.

Dowód

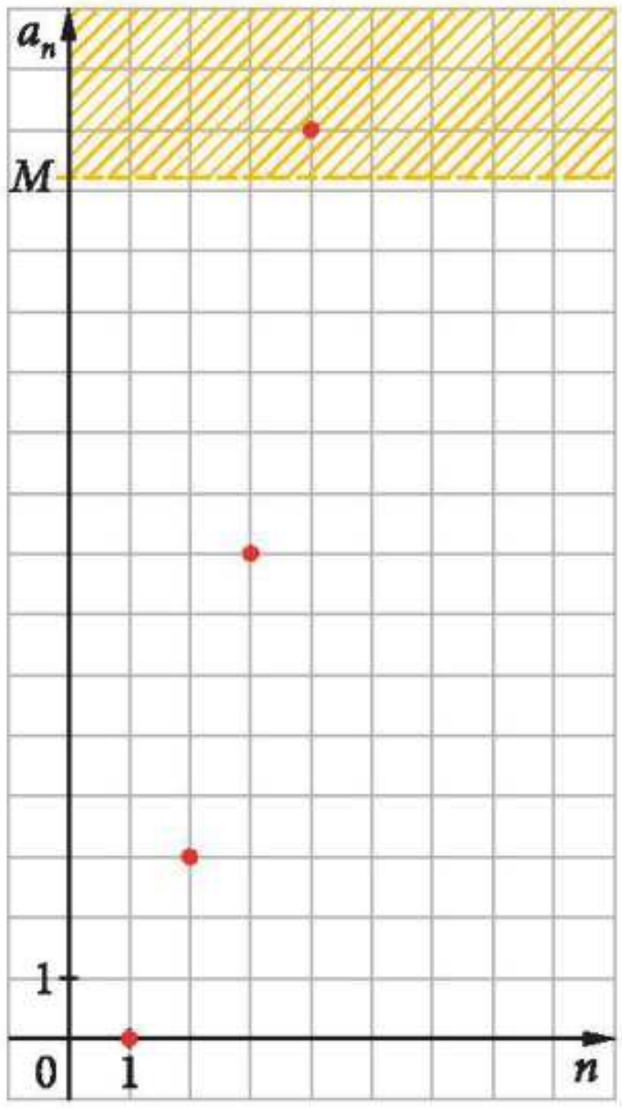
Mamy wykazać, że dla dowolnego M prawie wszystkie wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=n^2-1$ spełniają nierówność $a_n > M$.

$$a_n > M \Leftrightarrow n^2-1 > M \Leftrightarrow n^2 > M+1$$

Zauważmy, że jeżeli $M \leqslant -1$, to wszystkie wyrazy ciągu spełniają żądaną nierówność, bo $n^2 > 0$.

Natomiast jeśli $M > -1$, to żądaną nierówność spełniają wszystkie wyrazy o numerach większych od $k=\sqrt{M+1}$.

Koniec dowodu



Definicja

Mówimy, że **ciąg (a_n) jest rozbieżny do minus nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M.

Zapisujemy to jako:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Zapis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ czytamy również „ciąg (a_n) dąży do minus nieskończoności".

Przykłady ciągów rozbieżnych do minus nieskończoności:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3^n\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{n}\right)=-\infty$

O ciągach rozbieżnych do nieskończoności lub do minus nieskończoności mówimy także, że mają **granice niewłaściwe** równe odpowiednio nieskończoność lub minus nieskończoność.

Przykład 9

Rozważany w przykładzie 7 rozbieżny ciąg $a_n=(-1)^n$ nie ma również granicy niewłaściwej.

Podobne własności ma ciąg o wyrazie ogólnym $b_n=(-2)^n$. Jego kolejne wyrazy to $-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ -128,\ \ldots$. Ciąg (b_n) jest naprzemienny, rozbieżny, nie ma również granicy niewłaściwej.

Twierdzenie

Twierdzenie o własnościach granic niewłaściwych ciągów rozbieżnych

- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $t > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (t \cdot a_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $t < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (t \cdot a_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.

Przykład 10 ◀ zad. 1.16

Wyznaczymy granicę.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - 2n^2\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 2\right)\right) = -\infty$ $\longleftarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 2\right) = -2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3^n + 5^n - 15^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(15^n \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{3^n} - 1\right)\right) = -\infty$

Podamy (bez dowodu) dwa twierdzenia odwołujące się do intuicyjnego rozumienia własności odwrotności liczby.

Twierdzenie

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Przykład 11

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{\sqrt{n}} = 0$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(-2)^n} = 0$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} |(-2)^n| = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Twierdzenie

- Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.
- Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n < 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$.

Pokażemy teraz przykłady obliczania granic ciągów, w których wyrazy ogólne należy przekształcić, bo żadne z powyższych twierdzeń nie mogą być bezpośrednio zastosowane.

Przykład 12 ◀ zad. 1.17

Obliczymy podaną granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}-n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)$

Rozwiązanie

W każdym z podanych przykładów przekształcimy ogólny wyraz ciągu do takiej postaci, w której nie będzie wystepować różnica dwóch wyrazów dążących do nieskończoności.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3}+n}{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3}+n}{n^2+3-n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3}+n}{3} = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(n+\frac{1}{n}-1\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=\infty$

Na koniec podamy (bez dowodu) dwa twierdzenia. Pierwsze opisuje sytuację, w której znajomość granic dwóch ciągów pozwala podać granicę trzeciego ciągu.

Twierdzenie

Twierdzenie o trzech ciągach

Dane są trzy ciągi: (a_n), (b_n), (c_n).
Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) spełniają nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, a ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Drugie twierdzenie ułatwia liczenie granic ciągów pojawiających się, gdy stosujemy twierdzenie o trzech ciągach.

Dla $a > 0$ mamy $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Twierdzenie

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ dla $a>0$

Przykład 13 ◀ zad. 1.20

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $d_n=\sqrt[n]{2^n+4^n+5^n}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.
Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ spełniona jest nierówność:

$5^n < 2^n+4^n+5^n \leqslant 5^n+5^n+5^n$, czyli $5^n < 2^n+4^n+5^n \leqslant 3\cdot 5^n$

Zatem również:

$\sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{2^n+4^n+5^n} \leqslant \sqrt[n]{3\cdot 5^n}$, czyli $5 < \sqrt[n]{2^n+4^n+5^n} \leqslant 5\cdot\sqrt[n]{3}$

Niech $k_n = 5$ i $u_n = 5\cdot\sqrt[n]{3}$. Wtedy:

$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 5$ i $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5\sqrt[n]{3}\right) = 5\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 5\cdot 1 = 5$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 5$.

Odp.: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+5^n}=5$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } 0 < n < 100^{10\,000} \\ 2 & \text{dla } n \geqslant 100^{10\,000} \end{cases}$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ **B.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ **C.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **D.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

1.3. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sin n$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ **B.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ **C.** (a_n) jest rozbieżny. **D.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1.4. Które wyrazy ciągu (a_n) należą do otoczenia o promieniu 0,0001 liczby 0?

a) $a_n = \frac{1}{n+7}$ b) $a_n = \frac{-4}{n+9}$ c) $a_n = \frac{1}{n^2}$ d) $a_n = \frac{3}{n^2+5}$

1.5. Czy prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w otoczeniu o promieniu ε liczby 0? Jeżeli tak, podaj numer M wyrazu, od którego ten warunek jest spełniony.

a) $a_n = \frac{1}{n+3}$ $\varepsilon = 0{,}000001$

b) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0{,}01$

c) $a_n = -\frac{3}{n^2}$ $\varepsilon = \frac{1}{80}$

d) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ $\varepsilon = 0{,}01$

D **1.6.** Skorzystaj z definicji i wykaż, że ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

a) $a_n = \frac{3}{n+10}$ b) $a_n = -\frac{7}{n+2}$ c) $a_n = \frac{6}{n^2+5}$ d) $a_n = -\frac{2}{\sqrt{n+4}}$

1.7. Dane są ciągi geometryczne o następujących wyrazach ogólnych: $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$, $b_n = (-0{,}1)^{n+1}$, $c_n = -\frac{0{,}2}{0{,}1^n}$ oraz $d_n = \frac{0{,}27}{\left(\sqrt{1{,}1}\right)^{n-1}}$. Które z nich są zbieżne?

1.8. Dla jakich wartości x podany nieskończony ciąg geometryczny jest zbieżny?

a) $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$

b) $1, -3x, 9x^2, -27x^3, 81x^4, \ldots$

c) $1, x+4, (x+4)^2, (x+4)^3, \ldots$

d) $1, \frac{x^2}{2}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^6}{8}, \frac{x^8}{16}, \ldots$

e) $1, |x|-1, (|x|-1)^2, (|x|-1)^3, \ldots$

f) $1, x^2-1, \left(x^2-1\right)^2, \left(x^2-1\right)^3, \ldots$

1.9. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{6n-31}{n+5}$

b) $a_n = \dfrac{n-n^2}{n^2+1}$

c) $a_n = \dfrac{7n^3+5n^2-9}{n^2+5n^3}$

d) $a_n = \dfrac{3n^3-1}{n^4-5n+75}$

e) $a_n = \dfrac{2-n^5}{n^2+5n^5}$

f) $a_n = \dfrac{n^4}{n^2+5-8n^4}$

g) $a_n = \dfrac{2n}{n^3+5}$

h) $a_n = \dfrac{n^2-6n+100}{7n^2+5}$

i) $a_n = \dfrac{15-8n^4}{2n^4+n^2+1}$

1.10. Dane są ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ogólnych $a_n = \dfrac{5n}{n+5}$ i $b_n = \dfrac{2n^2}{n^2+5n-1}$.
Wyznacz granice ciągów o wyrazach ogólnych:

$$c_n = a_n + b_n, \quad d_n = a_n - b_n, \quad e_n = a_n \cdot b_n, \quad f_n = \frac{a_n}{b_n}$$

1.11. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ oraz

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -2$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ nie istnieje.

1.12. Ciąg (a_n) ma granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$. Oblicz granicę ciągu o podanym wyrazie ogólnym. Zakładamy, że wszystkie wyrazy ciągu w mianowniku są różne od 0.

a) $b_n = \dfrac{2a_n}{3a_n-1}$

b) $c_n = \dfrac{a_n^2+1}{a_n^2-4a_n+1}$

c) $d_n = a_n - \sqrt{2a_n^2+7}$

d) $e_n = a_n \cdot \sqrt{a_n^2+1}$

1.13. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{1+2+3+\ \ldots\ +n}{n^2}$

b) $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2}{n^3}$

D **1.14.** Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ jest rozbieżny.

D **1.15.** Skorzystaj z definicji i wykaż, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-3\right) = \infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{n}\right) = -\infty$.

1.16. Wyznacz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = n^4 - n^3 - 2n^2 - 6$

b) $a_n = 3n^4 - 2n^2 - 6n^7 + 2$

c) $a_n = \dfrac{3-4n^3}{n+n^2}$

d) $a_n = \dfrac{n^4+5}{n-2} - n^2$

e) $a_n = 3\cdot 2^n + 3^n - 5\cdot 6^n$

f) $a_n = 4\cdot 7^n + 5^n - 5\cdot 35^n$

1.17. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \sqrt{n+7} - \sqrt{n+9}$

b) $a_n = \sqrt{3n^2+n+1} - \sqrt{n^2+4}$

c) $a_n = \sqrt{n^2+5} - n$

d) $a_n = \sqrt{3n^2+n+5} - \sqrt{3n^2-2n+1}$

e) $a_n = \dfrac{5}{\sqrt{n^2+7n} - n}$

f) $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{4n^2-1}$

1.18. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ oraz

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 3.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$

1.19. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ oraz

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 2.$

1.20. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 6^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{5^n + 9^n + 13^n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n}$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Z podanych założeń wynika, że

A. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ nie istnieje.

B. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1.$

2. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{n-13}{\sqrt{2}-n}$

b) $a_n = \dfrac{n^3-2n}{n^5-2}$

c) $a_n = \dfrac{4n^2+2n-1}{8n^2+9n+7}$

3. Ciąg (a_n) spełnia warunki: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ i $a_n^2 + 3a_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2+5}}{a_n^2+3a_n}$.

4. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ oraz

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 1.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$ nie istnieje.

D **5.** Skorzystaj z definicji granicy ciągu i wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+3} = 0.$

2. Szereg geometryczny zbieżny i jego suma

Umiejętności:

- rozpoznawanie szeregów geometrycznych zbieżnych i obliczanie ich sum

Za pomocą danych ciągów możemy tworzyć inne ciągi poprzez ich sumowanie, mnożenie itp. Szczególnym sposobem budowania nowego ciągu jest utworzenie ciągu kolejnych sum częściowych. Załóżmy, że dany jest nieskończony ciąg (a_n). Przypomnijmy, że kolejne wyrazy ciągu (S_n) jego sum częściowych są równe:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

...

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

$S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1}$

...

Zajmiemy się zbadaniem granicy ciągu sum częściowych w sytuacji, gdy (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

Definicja

Szeregiem geometrycznym nazywamy ciąg sum częściowych (S_n) o wyrazie ogólnym $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$, gdzie (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Jeżeli ciąg sum częściowych ma granicę $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, to szereg nazywamy **zbieżnym**, a liczbę S – jego **sumą**.

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy **szeregiem rozbieżnym**.

Uwaga: Zamiast terminu „granica szeregu geometrycznego" używane jest czasem określenie „suma nieskończonego ciągu geometrycznego". Wówczas zamiast stwierdzenia „szereg geometryczny jest zbieżny" powiemy „istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego" (i odpowiednio „rozbieżny" – „nie istnieje suma").

Przykład 1 ◀ zad. 2.4

W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz $a_1 = 2$ i iloraz $q = \frac{1}{2}$. Zbadamy, czy istnieje suma tego ciągu.

Rozwiązanie

Kolejne wyrazy tego ciągu to: $2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-2}},\ \ldots$

Początkowe trzy wyrazy szeregu geometrycznego (S_n) są równe:

$$S_1 = 2, \qquad S_2 = 2 + 1 = 3, \qquad S_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

n-ty wyraz szeregu (S_n):

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ \ldots\ + \frac{1}{2^{n-2}} =$$

$$= \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \qquad \longleftarrow \text{dla ciągu geometrycznego } (a_n):\ S_n = a_1\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4$$

Odp.: Podany ciąg ma sumę równą 4.

Twierdzenie

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$, w którym $a_1 \neq 0$. Jeżeli $|q| < 1$, to szereg geometryczny (S_n) jest zbieżny i ma sumę $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

Założenia

$$a_n = a_1 q^{n-1},\ a_1 \neq 0, \quad S_n = \frac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q},\ |q| < 1$$

Teza

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dowód

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}\right) = \frac{a_1}{1 - q} \qquad \longleftarrow \text{jeżeli } |q| < 1, \text{ to } \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Koniec dowodu

Pozostawiamy do samodzielnego wykazania, że jeśli $|q| \geqslant 1$, to szereg jest rozbieżny.

Często spotykany zapis sumy szeregu geometrycznego zbieżnego, czyli spełniającego warunek $|q| < 1$, to $S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ \ldots\ = \frac{a_1}{1 - q}$.

Zauważmy, że jeżeli w szeregu geometrycznym (S_n) wyraz $S_1 = a_1 = 0$, to $S = 0$.

Przykład 2 ◂ zad. 2.8

Zapiszemy ułamek dziesiętny okresowy 0,(17) w postaci ułamka zwykłego. Zadanie rozwiążemy inną metodą niż w pierwszej klasie.

Rozwiązanie

$$0,(17) = 0,1717171717\ldots = 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + 0,00000017 + \ldots =$$
$$= 0,17 + 0,17 \cdot 0,01 + 0,17 \cdot (0,01)^2 + 0,17 \cdot (0,01)^3 + \ldots$$
$$a_1 = 0,17,\ q = 0,01$$

Zatem 0,(17) jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego i jest to liczba:

$$S = \frac{0,17}{1 - 0,01} = \frac{17}{99}$$

Odp.: $0,(17) = \frac{17}{99}$

Każdy ułamek dziesiętny okresowy jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o dodatnim i mniejszym od jedności ilorazie. Zatem jego sumą jest liczba wymierna.

Przykład 3 ◂ zad. 2.10

Rozwiążemy równanie $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \ldots = \frac{6}{x+5}$, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$, $q = -\frac{2}{x}$.
Taka suma istnieje, czyli równanie (lub w innych przykładach – nierówność) ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy szereg jest zbieżny. Aby wyznaczyć dziedzinę D równania, musimy zatem rozwiązać układ warunków:

$$|q| < 1 \quad \text{i} \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad x + 5 \neq 0$$
$$|q| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{2}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$
$$D = (-\infty; -5) \cup (-5; -2) \cup (2; \infty)$$

Jeżeli $x \in D$, to korzystamy ze wzoru na sumę szeregu i zapisujemy lewą stronę równania jako $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = \frac{x}{x+2}$.

Rozwiązujemy równanie $\frac{x}{x+2} = \frac{6}{x+5}$.

$x(x+5) = 6(x+2)$, stąd $x^2 - x - 12 = 0$, czyli $x = -3 \in D$ lub $x = 4 \in D$.

Odp.: $x = -3$ lub $x = 4$

Przykład 4 ◂ zad. 2.12

Rozwiążemy nierówność $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4} + \ldots < 3x - 2$, której lewa strona jest sumą zbieżnego szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq -1$. Oznaczmy $a_1 = \frac{1}{1+x}$, $q = \frac{1}{1+x}$.

$$|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow |1+x| > 1 \Leftrightarrow (1+x > 1 \text{ lub } 1+x < -1) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ lub } x < -2)$$

Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $D = (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

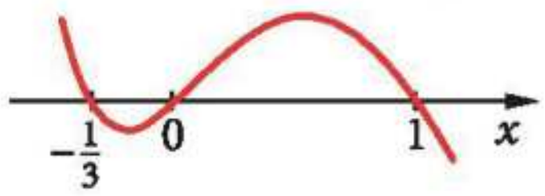
Jeżeli $x \in D$, to lewą stronę nierówności, jako sumę szeregu, zapisujemy w postaci:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

Rozwiązujemy nierówność.

$$\frac{1}{x} < 3x - 2 \qquad \frac{1-3x^2+2x}{x} < 0 \qquad -3x(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0$$

$$x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (1; \infty)$$



Po uwzględnieniu dziedziny nierówności otrzymujemy rozwiązanie: $x \in (1; \infty)$.

Odp.: $x \in (1; \infty)$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż sumę szeregu geometrycznego $7 - \frac{7}{3} + \frac{7}{9} - \frac{7}{27} + \ldots$.

A. $\frac{28}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{21}{3}$ **D.** $5\frac{1}{4}$

2.2. Wskaż ułamek zwykły równy ułamkowi okresowemu 0, (15).

A. $\frac{15}{33}$ **B.** $\frac{5}{33}$ **C.** $\frac{13}{99}$ **D.** $\frac{3}{11}$

2.3. Szereg geometryczny, w którym $a_1 = 1$ i $q = m^2 - 1$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy m należy do zbioru

A. $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$ **B.** $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ **C.** $\left(0; \sqrt{2}\right)$ **D.** $\left(-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right)$

2.4. Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q.

a) $a_1 = -3$, $q = 0{,}01$

b) $a_1 = 0{,}1$, $q = \frac{3}{4}$

c) $a_1 = -1$, $q = -\frac{2}{9}$

d) $a_1 = 10$, $q = -0{,}1$

2.5. Dla jakich wartości m istnieje suma S nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q? Wyznacz tę sumę.

a) $a_1 = 1, \quad q = m - 2$

b) $a_1 = m, \quad q = m^2 + m$

c) $a_1 = \sqrt{m-3}, \quad q = 0{,}5$

d) $a_1 = \sqrt{2 - m^2}, \quad q = \frac{1}{m}$

2.6. Oblicz sumę podanego szeregu geometrycznego (o ile taka suma istnieje).

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots$

c) $3 - 0{,}3 + 0{,}03 - 0{,}003 + \ldots$

d) $21 + 3 + \frac{3}{7} + \frac{3}{49} + \ldots$

e) $\sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - 9 + \ldots$

f) $-5 - \frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \frac{5}{8} - \ldots$

2.7. Liczba S jest sumą szeregu geometrycznego o podanym ilorazie q. Wyznacz wyraz a_1 ciągu geometrycznego.

a) $S = 3\frac{1}{3}, \quad q = 0{,}1$

b) $S = 20, \quad q = \frac{1}{5}$

c) $S = 3\sqrt{3}, \quad q = \frac{2}{3}$

d) $S = -8, \quad q = -0{,}5$

2.8. Dany ułamek okresowy zamień na ułamek zwykły.

a) $0{,}(36)$ b) $0{,}(06)$ c) $1{,}0(45)$ d) $0{,}03(18)$ e) $1{,}2(6)$ f) $2{,}(27)$

2.9. Rozwiąż równanie $x^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\ldots} = 2x^2 + 3x$, w którym wykładnik po lewej stronie równania jest sumą szeregu geometrycznego.

2.10. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = \frac{3x+1}{3}$

b) $2x + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^3}{9} + \frac{16x^4}{27} + \ldots = \frac{9}{4x}$

c) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \ldots = 1 - 2x$

2.11. Rozwiąż równanie, w którym po lewej stronie występują sumy szeregów geometrycznych.

a) $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{x^2} + \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x^3} + \ldots = 0$ b) $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \ldots = 1$

2.12. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $4 - x + \frac{4-x}{x-5} + \frac{4-x}{(x-5)^2} + \ldots > 0$ b) $\cos 2x + \cos^2 2x + \cos^3 2x + \ldots < 1$

2.13. Suma S_3 trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu równa się $\frac{16}{3}$. Dla jakich liczb naturalnych n spełniony jest warunek $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?

2.14. Dla jakich wartości x szereg geometryczny $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \ldots$ ma sumę mniejszą od $\frac{1}{2}$?

2.15. Wyznacz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym $a_1 = 2$, a suma wyrazów jest 3 razy mniejsza od sumy kwadratów wyrazów.

2.16. Koło o promieniu R jest styczne do ramion kąta α. Drugie koło o mniejszym promieniu jest styczne do pierwszego koła i do ramion kąta. Tworzymy nieskończony ciąg takich kół. Oblicz sumę obwodów oraz sumę pól wszystkich kół.

Prosto do matury

1. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$ i ilorazie q. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.

B. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1$

2. Zapisz ułamek 1,(14) w postaci ułamka zwykłego.

3. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4} + \ldots > 3x + 2$$

4. Dla jakich wartości x szereg geometryczny, w którym $a_1 = 1$ i $q = x^2 - x - 1$, jest zbieżny i ma sumę równą 0,8?

5. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano koło, w to koło wpisano znów trójkąt równoboczny, w ten trójkąt wpisano koło itd. nieskończenie wiele razy. Oblicz sumę promieni i sumę pól tych wszystkich kół.

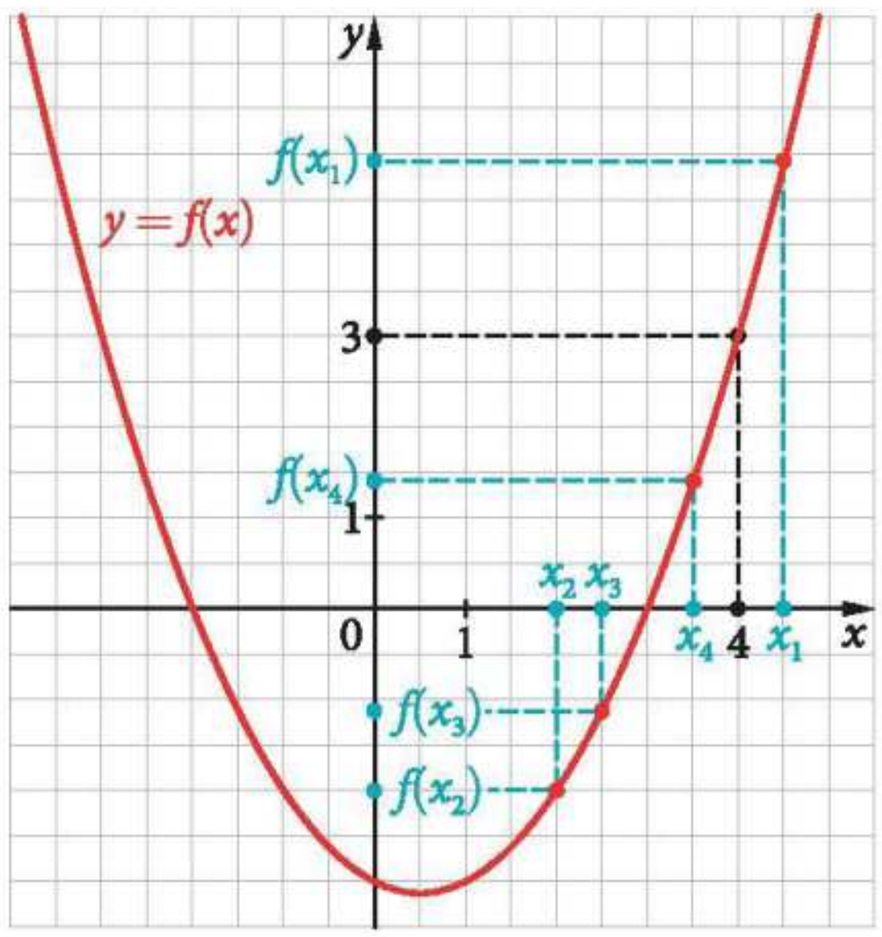
3. Granica funkcji w punkcie

Umiejętności:

- obliczanie granic funkcji z wykorzystaniem twierdzeń o działaniach na granicach
- obliczanie granic jednostronnych funkcji z wykorzystaniem twierdzeń o działaniach na granicach

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$.
Jej dziedziną jest zbiór **R**, a wykresem parabola. Wybierzmy argument $x_0 = 4$.
Istnieje nieskończenie wiele ciągów liczbowych zbieżnych do liczby 4. Są nimi np. ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = 4 + \frac{1}{n}$, $b_n = 4 - \frac{\sqrt{2}}{n^2}$, $c_n = 4 + \frac{\pi}{n^3 + n}$.
Przyjmijmy, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym do $x_0 = 4$. Ciągowi argumentów (x_n) odpowiada ciąg wartości funkcji, który ma postać $\left(f(x_n)\right)$, czyli $\left(\frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 3\right)$.



Skoro $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 3\right) = \frac{1}{2}\cdot 16 - \frac{1}{2}\cdot 4 - 3 = 3$.
Zatem dla dowolnego ciągu argumentów zbieżnego do liczby 4 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 3$ dąży do liczby 3. Mówiąc poglądowo, gdy argumenty dążą na osi x do 4, to odpowiednie wartości funkcji dążą na osi y do 3. W takiej sytuacji mówimy, że funkcja f ma w punkcie 4 granicę równą 3 i zapisujemy to $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right) = 3$.

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną D jest zbiór **R** albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą równą** g wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby g.

Zapisujemy to: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$.

Zauważmy, że zgodnie z definicją:

- <u>każdy wyraz</u> ciągu (x_n) musi spełniać dwa warunki: $x_n \in D$ i $x_n \neq x_0$,
- <u>każdy z rozpatrywanych ciągów</u> (x_n) musi być zbieżny do x_0, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

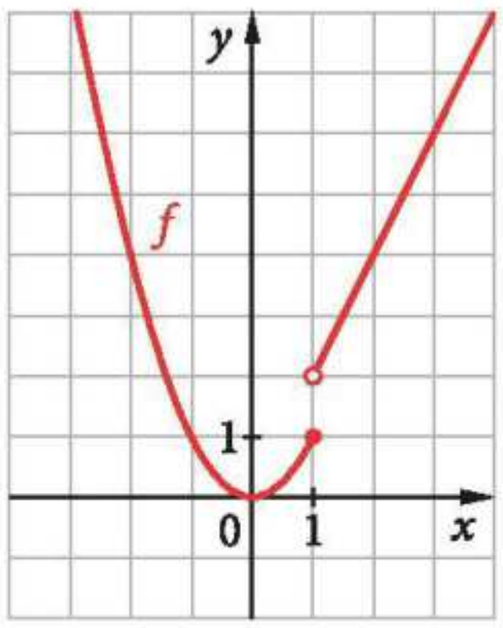
Punkt x_0 **nie musi** należeć do dziedziny funkcji.

D **Przykład 2** ◀ zad. 3.4

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 2x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ nie ma w punkcie $x_0 = 1$ granicy.

Dowód

Aby wykazać, że funkcja **nie ma** granicy w danym punkcie, wystarczy wskazać dwa ciągi spełniające założenia definicji i równocześnie takie, by odpowiadające im ciągi wartości funkcji były zbieżne do różnych liczb. Analizując wzór albo wykres tej funkcji, możemy wskazać takie ciągi:



$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ⟵ ciąg o wszystkich wyrazach mniejszych od 1

$b_n = 1 + \frac{1}{n}$ ⟵ ciąg o wszystkich wyrazach większych od 1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Obliczymy granice odpowiednich ciągów wartości.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1$$ ⟵ wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 1

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 2b_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2$$ ⟵ wyrazy ciągu (b_n) są większe od 1

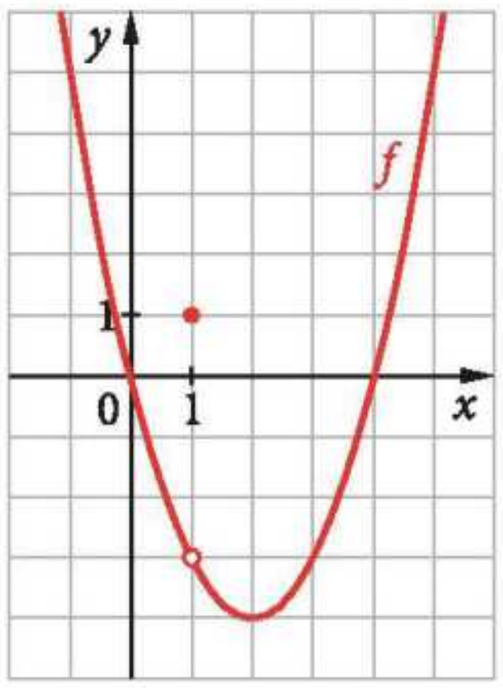
Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

Koniec dowodu

D **Przykład 3** ◀ zad. 3.5

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$



Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -3$.

Dowód

Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżny do 1, którego wszystkie wyrazy są różne od 1.
Odpowiadający mu ciąg wartości funkcji ma wyraz ogólny $f(x_n) = x_n^2 - 4x_n$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(x_n^2 - 4x_n\right) = -3 \qquad \longleftarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

(x_n) jest dowolnym ciągiem spełniającym warunki definicji, zatem $\lim_{x\to 1} f(x) = -3$.

Koniec dowodu

Zauważmy, że w powyższym przykładzie $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1) = 1$.

D Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Wykażemy, że $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Dowód

Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$. Badamy zatem istnienie granicy funkcji w punkcie nienależącym do dziedziny. Zauważmy, że dla $x \in \mathbf{R} - \{2\}$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżny do 2, którego wszystkie wyrazy są różne od 2. Odpowiadający mu ciąg wartości funkcji ma wyraz ogólny $f(x_n) = x_n + 2$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n + 2) = 4 \qquad \longleftarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

(x_n) jest dowolnym ciągiem spełniającym warunki definicji, zatem $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Koniec dowodu

Definicja granicy funkcji w punkcie korzysta bezpośrednio z definicji granicy ciągu. Dlatego prawdziwe jest poniższe twierdzenie dotyczące działań na granicach.

Twierdzenie

Dane są funkcje $f: D \to \mathbf{R}$ i $g: D \to \mathbf{R}$, przy czym D jest zbiorem $\mathbf{R}$ albo przedziałem liczbowym, albo sumą przedziałów. Jeżeli istnieją granice właściwe $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, to:

(1) $\lim_{x\to x_0} c = c$ ⟵ granica funkcji stałej

(2) $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ ⟵ granica sumy funkcji

(3) $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$ ⟵ granica różnicy funkcji

(4) $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$ ⟵ granica iloczynu funkcji

(5) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ ⟵ granica ilorazu funkcji

przy założeniu, że $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Przykład 5 ◀ zad. 3.6

Zastosujemy podane twierdzenie do obliczenia granicy $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x+1\right)$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x+1\right)=\lim_{x\to 3}x^2-\lim_{x\to 3}(2x)+\lim_{x\to 3}1=3\cdot 3-2\cdot 3+1=4$$

Uwaga: Ze wzorów (1) i (4) powyższego twierdzenia wynika, że stałą możemy wyłączyć przed symbol granicy, czyli przy spełnionych założeniach twierdzenia mamy:

$$\lim_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)$$

Twierdzenie

Granicą wielomianu $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ w punkcie $x_0\in\mathbf{R}$ jest $W(x_0)$.

Dowód

Dany jest wielomian $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ i punkt $x_0\in\mathbf{R}$.
Na mocy twierdzenia o działaniach na granicach funkcji:

$$\lim_{x\to x_0}W(x)=\lim_{x\to x_0}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left(a_nx^n\right)+\lim_{x\to x_0}\left(a_{n-1}x^{n-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\left(a_1x\right)+\lim_{x\to x_0}a_0=$$
$$=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=W(x_0)$$

Koniec dowodu

Przykład 6

Obliczymy podane granice.

a) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\left(x^{\overset{\nearrow 2}{2}}+3^{\overset{\nearrow 3}{}}\right)=5$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^{\overset{\nearrow 8}{2}}-x^{\overset{\nearrow 2}{}}+5^{\overset{\nearrow 5}{}}}{x^2-7}=\dfrac{8-2+5}{4-7}=-\dfrac{11}{3}$
($\searrow 4$, $\searrow 7$)

Przykład 7 ◀ zad. 3.7, 3.8

Jeżeli x_0 jest wspólnym miejscem zerowym wielomianu z licznika i wielomianu z mianownika funkcji wymiernej f, to przed obliczeniem granicy $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ obydwa wielomiany rozkładamy na czynniki i upraszczamy wyrażenie.

a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}(x-3)=-6$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-20x+50}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x-5)^2}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}2(x-5)=0$

Podamy jeszcze (bez dowodu) twierdzenie dotyczące granic pewnych funkcji.

Twierdzenie

- Jeżeli $x_0\geqslant 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

  Ogólnie (dla $n\in\mathbf{N}-\{0\}$):
  $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[2n]{x}=\sqrt[2n]{x_0}$ dla $x_0\geqslant 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[2n+1]{x}=\sqrt[2n+1]{x_0}$ dla $x_0\in\mathbf{R}$.
- Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$.
- Jeżeli $x_0\in\mathbf{R}$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.
- Jeżeli $x_0\in\mathbf{R}$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

Przykład 8 ◀ zad. 3.9, 3.10

Obliczymy podaną granicę.

a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{10}$ $\longleftarrow \lim\limits_{x\to -3}\left(x^2+1\right)=10$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$ $\longleftarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2\sin^{\nearrow 1}x=2$ $\longleftarrow \sin 2x=2\sin x\cos x$

Granice jednostronne

Przykład 9

W przykładzie 2 zbadaliśmy zachowanie dwóch konkretnych ciągów i w ten sposób wykazaliśmy, że funkcja $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla } x\leqslant 1\\ 2x & \text{dla } x>1\end{cases}$ nie ma granicy w punkcie $x_0=1$.

Spójrzmy teraz na tę sytuację ogólniej.

Jeżeli weźmiemy dowolny ciąg (a_n) o wyrazach mniejszych od 1, to $f(a_n) = a_n^2$.
Natomiast dla dowolnego ciągu (b_n) o wyrazach większych od 1 mamy $f(b_n) = 2b_n$.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, to:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 2b_n = 2$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie 1 **granice jednostronne** – lewostronną równą 1 i prawostronną równą 2, i zapisujemy to następująco:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną D jest zbiór **R** albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę prawostronną (lewostronną) równą g** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach większych (mniejszych) od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby g.
Zapisujemy to:

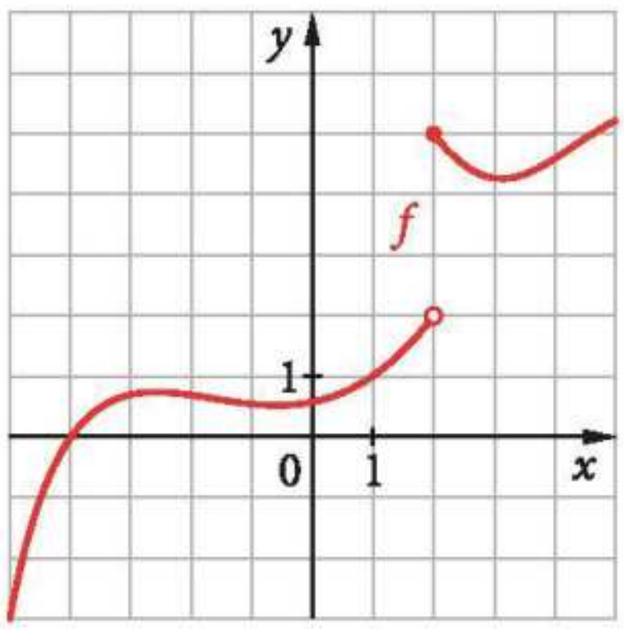
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \qquad \text{(granica prawostronna)}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g \qquad \text{(granica lewostronna)}$$

Podczas obliczania granic jednostronnych stosujemy poznane twierdzenia dotyczące działań na granicach funkcji.

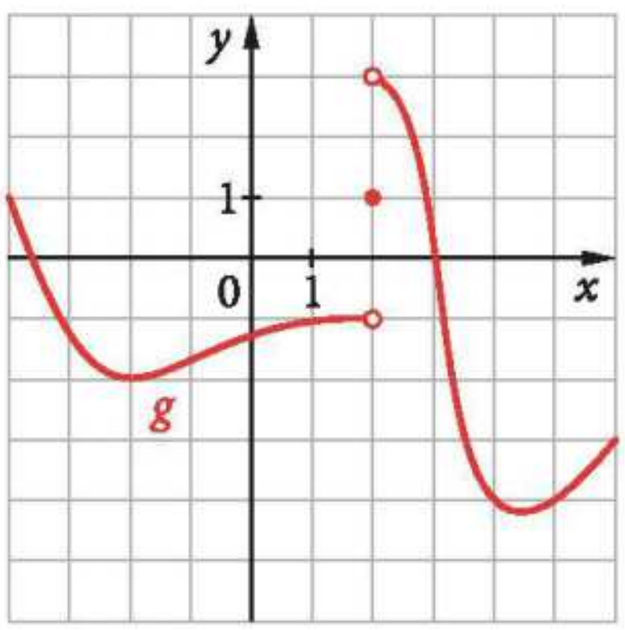
Przykład 10 ◀ zad. 3.12

Odczytamy z wykresów funkcji f, g i h ich granice jednostronne w punkcie $x_0 = 2$.



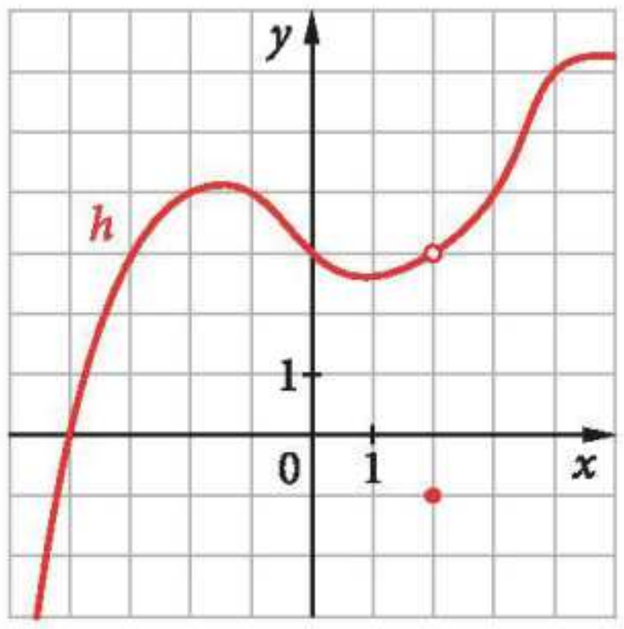
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$$



$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = -1$$



$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = 3$$

Twierdzenie

Granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Zatem:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g$$

Przykład 11 ◀ zad. 3.13

Sprawdzimy, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ x^3 + 6 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

ma granicę w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 5 \text{ i } \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(x^3 + 6\right) = 5$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 5$$

Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 5$.

Odp.: Funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 = -1$ i granica ta jest równa 5.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Granica $\lim\limits_{x\to -2} \left(2 - 2x - x^2\right)$ jest równa

A. 0. **B.** 4. **C.** −2. **D.** 2.

3.2. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x - 3}$. Dla tej funkcji

A. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$.

B. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 15$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 0$.

D. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ nie istnieje.

3.3. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x > \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{dla } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Dla tej funkcji

A. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x)$.

B. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$ nie istnieje.

C. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 1$.

D **3.4.** Skorzystaj z odpowiedniej definicji i wykaż, że funkcja $y = f(x)$ nie ma granicy w punkcie x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{dla } x > -2 \end{cases}$ $\quad x_0 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{dla } x \geqslant 1 \\ x^2 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

D **3.5.** Skorzystaj z odpowiedniej definicji i wykaż, że funkcja $y = f(x)$ ma granicę w punkcie x_0.

a) $f(x) = -3x^3 + 2x + 7,\ x_0 = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x + 7},\ x_0 = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{dla } x \neq -2 \\ 0 & \text{dla } x = -2 \end{cases},\ x_0 = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \neq \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{dla } x = \frac{\pi}{3} \end{cases},\ x_0 = \frac{\pi}{3}$

3.6. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^{23} - 24x^{13} + 11x^7 - 17x + 13\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x^2 + x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^7 - 2\right)^3$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\sqrt{x + 2} + x + 1\right)^2$

3.7. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x - 4}{x + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 11} \frac{x + 4}{x^2 + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{5x^7 - 4x^5 + 3x^4 - 4}{x^6 + 5}$

3.8. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6}$

c) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 4x^2 - 21x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^3 + x^2 + 6x + 3}$

3.9. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4}$ d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

3.10. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin 2x$

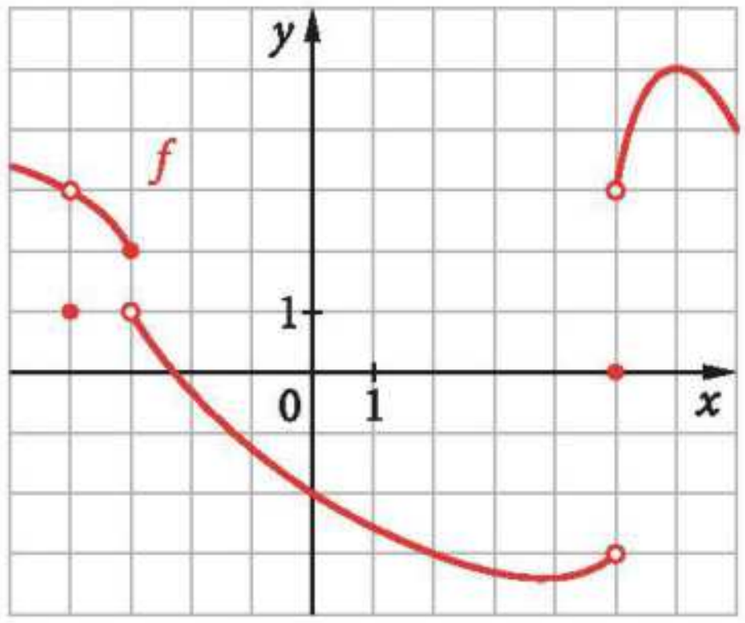
b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin x)$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} (\sin x - 2\cos x)$

3.11. Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, która w żadnym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ nie ma granicy.

3.12. Odczytaj z wykresu granice jednostronne funkcji f w punktach $x = -4$, $x = -3$ i $x = 5$. Zbadaj istnienie granicy funkcji w każdym z tych punktów.



3.13. Naszkicuj wykres funkcji f. Oblicz granice jednostronne tej funkcji w podanym punkcie x_0 i odpowiedz na pytanie, czy istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \\ -x^2+3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x < -1 \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ 3-x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ $x_0 = -1$

e) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \\ -x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \sin x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

3.14. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{3x+\sqrt{2x+6}}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 4^-} \left(\sqrt{4-x}+2x+3\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{2-x}+7x+2}{x-4\sqrt{4-2x}}$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f i g mają granice w punkcie x_0.

B. Funkcja $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

C. Jeżeli $f(x) > 0$ dla $x \in (a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, to $g > 0$.

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-13x^2+47x-35}{x^3-5x^2+4x-20}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{2x-6}$

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{dla } x<1 \\ 1 & \text{dla } x=1 \\ 1-2x & \text{dla } x>1 \end{cases}$.

Oblicz granice jednostronne tej funkcji w punkcie $x_0 = 1$ i odpowiedz na pytanie, czy istnieje $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

D **4.** Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x<\pi \\ \cos x & \text{dla } x\geqslant \pi \end{cases}$$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = \pi$.

D **5.** Skorzystaj z definicji i wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ ma granicę w punkcie $x_0 = -2$.

4. Granice niewłaściwe

Umiejętności:

- obliczanie granic funkcji

Umiemy na podstawie wykresu funkcji podać jej podstawowe własności – wskazać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności itd. Aby precyzyjnie opisać funkcję w niektórych charakterystycznych punktach oraz na końcach przedziałów, w których jest określona, wprowadzimy pojęcie granicy niewłaściwej.

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór **R** albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą nieskończoność (minus nieskończoność)** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do nieskończoności (minus nieskończoności).

Zapisujemy to:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Przykład 1

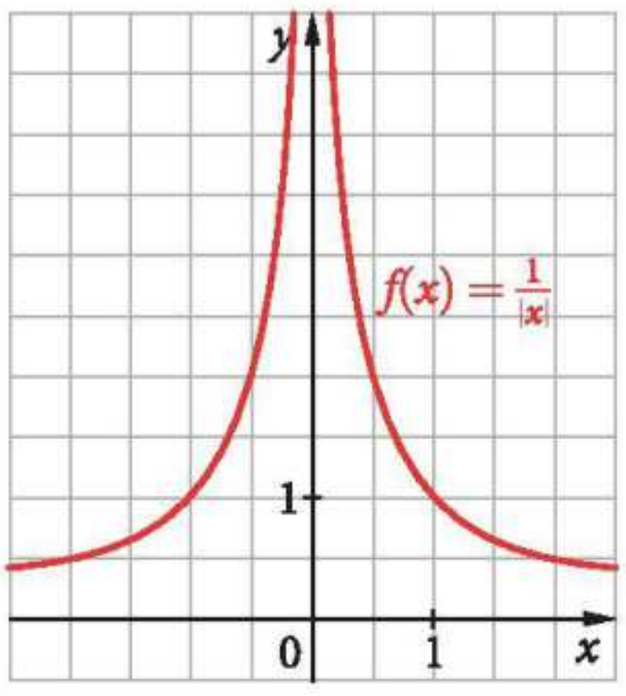
Niech $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \neq 0$, a jej wykres jest przedstawiony obok.

Dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach różnych od zera i zbieżnego do zera odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} = \infty$$ ← dodatni mianownik dąży do 0

Zatem $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

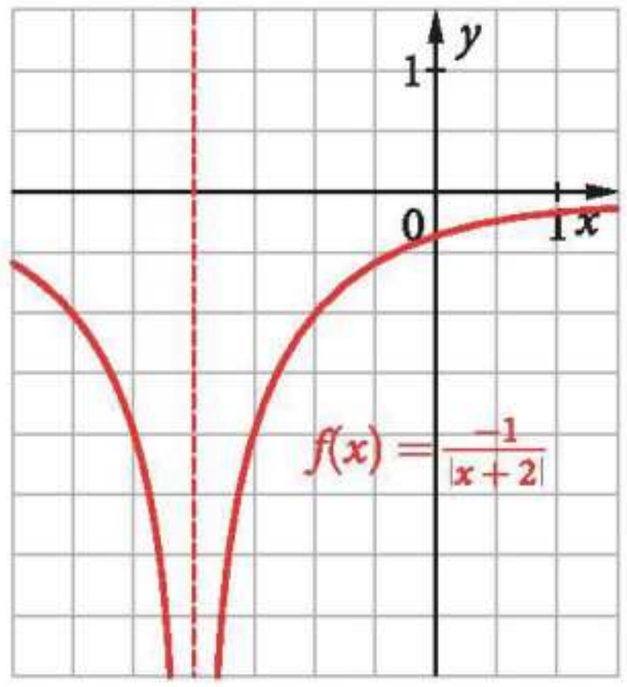


Zauważmy, że jeżeli ciąg (x_n) dąży do 0, to ciąg $\left(\frac{1}{|x_n|}\right)$ jest rozbieżny do ∞. Na przykład:

jeśli $x_n = \frac{1}{n}$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$; jeśli $x_n = -\frac{2}{n^2}$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} = \infty$.

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{-1}{|x+2|}$ jest przedstawiony obok.



Dziedziną f jest $\mathbf{R} - \{-2\}$. Badamy granicę:

$$\lim_{x\to -2} \frac{-1}{|x+2|}$$

W tym wypadku dodatni mianownik dąży do 0, ale licznik ułamka jest ujemny, zatem wartości funkcji dążą do minus nieskończoności.

$$\lim_{x\to -2} \frac{-1}{|x+2|} = -\infty$$

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona na przedziale $(a; b)$. Mówimy, że funkcja f ma **w punkcie a granicę prawostronną niewłaściwą** ∞ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; b)$ i zbieżnego do a odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ $(-\infty)$.

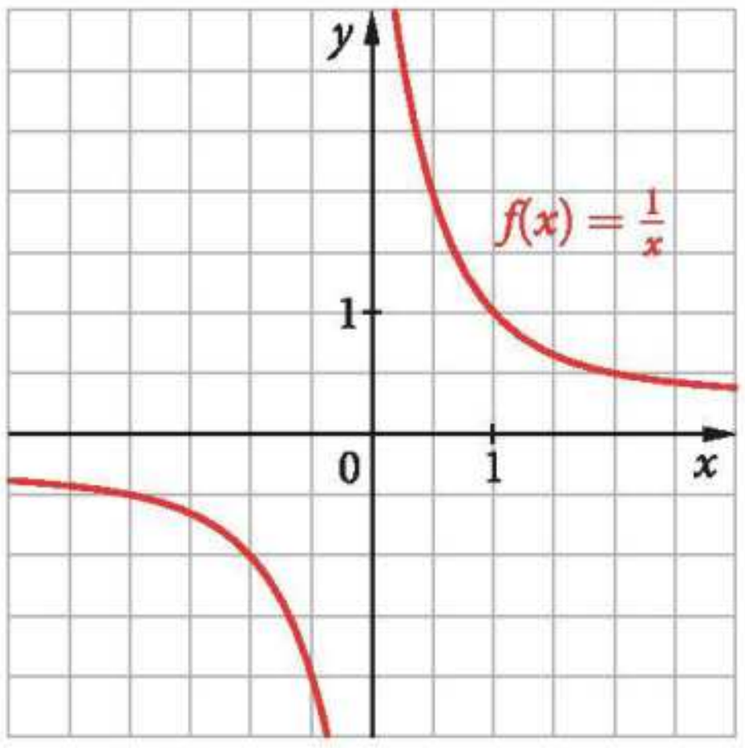
Zapisujemy to:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad (\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty)$$

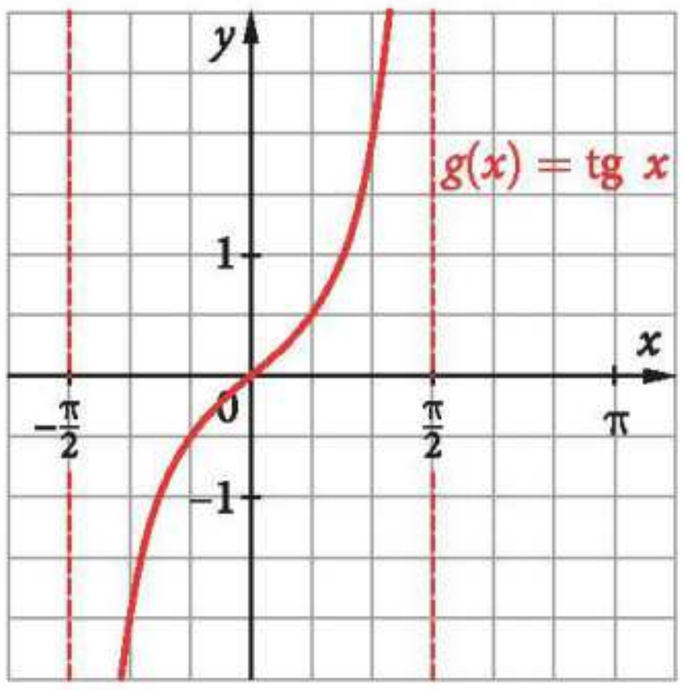
Analogicznie definiujemy granicę **lewostronną niewłaściwą**:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

Przykład 3



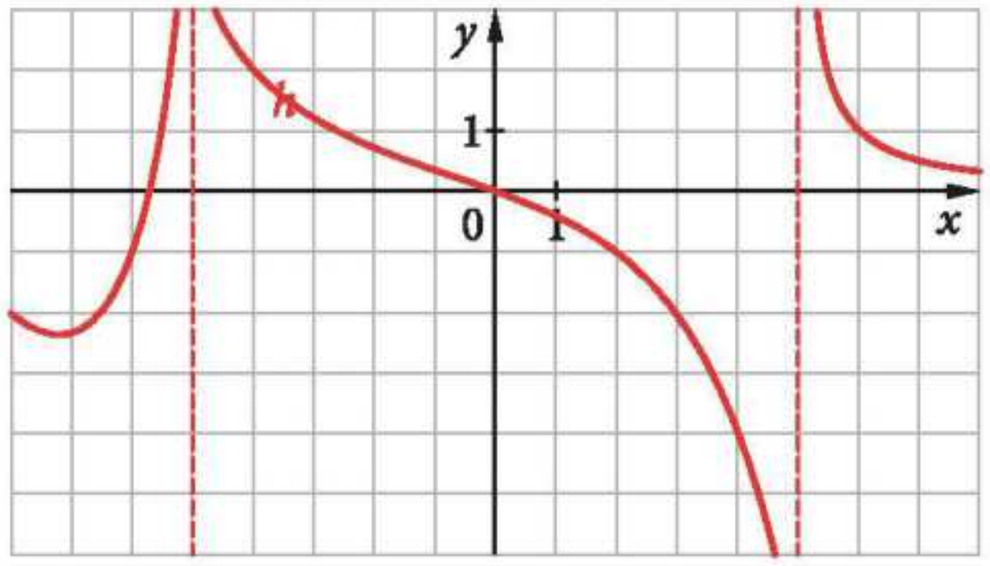
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$$

Przykład 4 ◀ zad. 4.4

Odczytamy z wykresu funkcji h odpowiednie granice niewłaściwe.



$$\lim_{x\to -5} h(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 5^+} h(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 5^-} h(x) = -\infty$$

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę jednostronną niewłaściwą, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową** wykresu funkcji.

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona na przedziale $(a; \infty)$.
Mówimy, że **funkcja f dąży do ∞ $(-\infty)$ przy x dążącym do ∞** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do ∞ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ $(-\infty)$.
Zapisujemy to:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right)$$

Analogicznie formułujemy definicje granic niewłaściwych:

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Przykład 5

Porównamy granice: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 + x + 3\right)$ i $\lim_{x\to -\infty}\left(x^2 + x + 3\right)$.

Rozwiązanie

- $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 + x + 3\right) = \infty$, bo dla każdego ciągu argumentów (x_n) rozbieżnego do ∞ odpowiadający mu ciąg wartości jest rozbieżny do ∞: $\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2 + x_n + 3\right) = \infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+3\right)=?$

O ile w pierwszym przypadku nie ma wątpliwości (suma dąży do ∞), o tyle w drugim sytuacja jest już niejednoznaczna: $x_n^2\to\infty$, ale drugi składnik $x_n\to-\infty$.

Zbadamy to dokładniej.
Niech ciąg argumentów (x_n) będzie rozbieżny do $-\infty$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2+x_n+3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2\left(1+\frac{1}{x_n}+\frac{3}{x_n^2}\right)\right)=\infty \qquad \longleftarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}+\frac{3}{x_n^2}\right)=1$$

Zatem $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right)=\infty$.

W kolejnych przykładach od razu wykorzystamy przekształcenia odwołujące się do twierdzeń o działaniach na granicach.

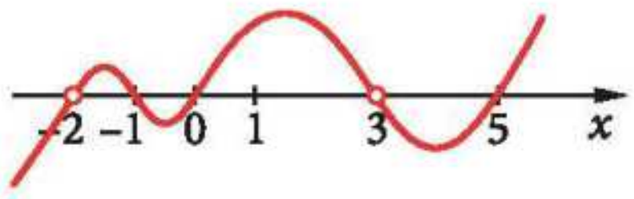
Podczas wyznaczania granic niewłaściwych istotne jest poprawne określenie, czy wyrażenie dąży do plus nieskończoności, czy do minus nieskończoności. Przydatne tu może być badanie znaków wartości funkcji. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 6 ◂ zad. 4.6

Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x(x+1)(x-5)}{(x+2)(x-3)}$. Określimy jej dziedzinę, miejsca zerowe, zrobimy pomocniczy wykres do odczytania znaków wartości funkcji, a następnie wyznaczymy granice funkcji f na końcach przedziałów, w których jest określona.

Rozwiązanie

- $D=\mathbf{R}-\{-2,\ 3\}=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 3)\cup(3;\ \infty)$
- Miejscami zerowymi funkcji są $-1,\ 0,\ 5$.
- Rysujemy wykres znaków wartości funkcji.



- Wyznaczamy granice na końcach przedziałów $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 3)$, $(3;\ \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x+1)(x-5)}{(x+2)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}=-\infty$$

(nad $\frac{1}{x}$ i $\frac{5}{x}$ strzałki $\nearrow 0$; pod $\frac{2}{x}$ i $\frac{3}{x}$ strzałki $\searrow 0$)

Funkcja wymierna ma w nieskończoności granicę niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy stopień wielomianu z licznika jest wyższy od stopnia wielomianu z mianownika. Znak tej granicy zależy od tego, czy, mówiąc poglądowo, wartości funkcji są w badanej nieskończoności dodatnie czy ujemne.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{\overset{\nearrow -2}{x}(\overset{\nearrow -1}{x+1})(\overset{\nearrow -7}{x-5})}{(x+2)(x-3)} = -\infty$$

$\longleftarrow$ mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla $x \to -2^-$ są ujemne

$\searrow 0^-$ $\quad$ $\searrow -5$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$$

$\longleftarrow$ mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla $x \to -2^+$ są dodatnie

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$$

$\longleftarrow$ mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla $x \to 3^-$ są dodatnie

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

$\longleftarrow$ mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla $x \to 3^+$ są ujemne

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$$

$\longleftarrow$ wartości funkcji dla $x \to \infty$ są dodatnie

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona w przedziale $(a;\ \infty)$. Mówimy, że **funkcja f ma granicę równą g przy x dążącym do** ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a;\ \infty)$ i rozbieżnego do ∞ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do g.

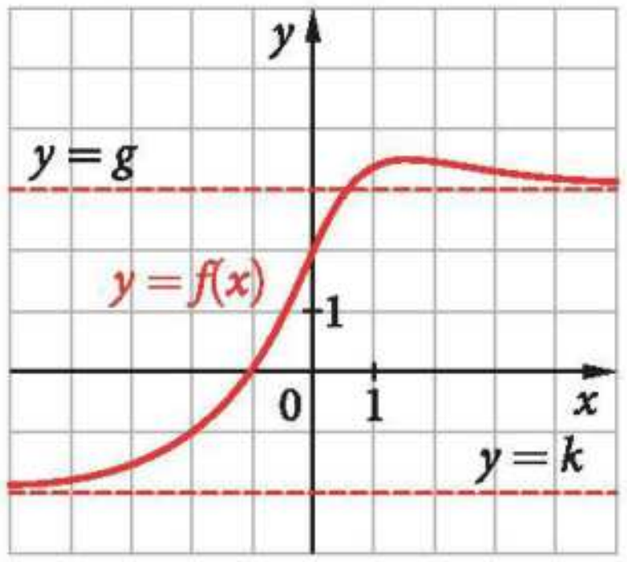
Zapisujemy to:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = g$$

Analogicznie formułujemy definicję $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = k$.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = g$, to prostą $y = g$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w nieskończoności.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w minus nieskończoności.

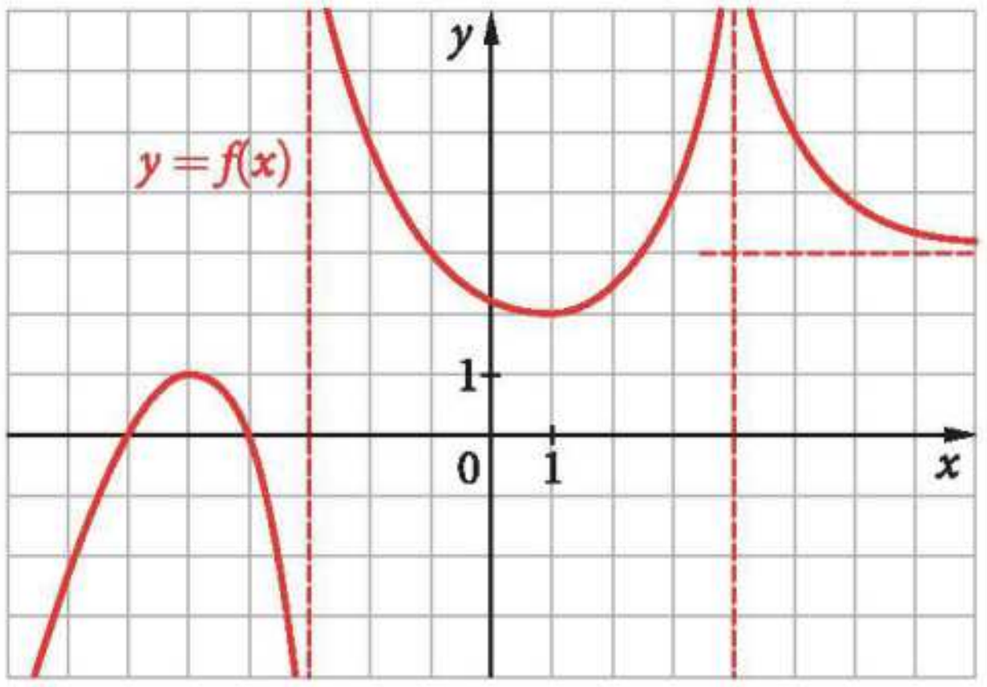


Przykład 7 ◀ zad. 4.12

Opiszemy własności funkcji na podstawie jej wykresu.

Rozwiązanie

- $D = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 4) \cup (4;\ \infty)$
- $ZW = (-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 2;\ \infty)$
- Miejsca zerowe: -6, -4.



- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-6; -4) \cup (-3; 4) \cup (4; \infty)$
  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (-4; -3)$
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest monotoniczna w przedziałach. Będziemy stosować następujący opis: $\searrow$ jako oznaczenie funkcji malejącej i $\nearrow$ dla funkcji rosnącej.

przedziały	$(-\infty; -5\rangle$	$\langle -5; -3)$	$(-3; 1\rangle$	$\langle 1; 4)$	$(4; \infty)$
monotoniczność	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

- Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \infty$,
  $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$
- Asymptoty pionowe wykresu funkcji: $x = -3$, $x = 4$.
- Asymptota pozioma wykresu funkcji w nieskończoności: $y = 3$.
- Równanie $f(x) = m$:
  nie ma rozwiązań dla $m \in (1; 2)$,
  ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{1, 2\}$,
  ma dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; 1) \cup (2; 3\rangle$,
  ma trzy rozwiązania dla $m \in (3; \infty)$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{2x^2}{|x|}$. Dla tej funkcji

A. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

4.2. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+7)(x-4)}$. Wskaż zdanie fałszywe.

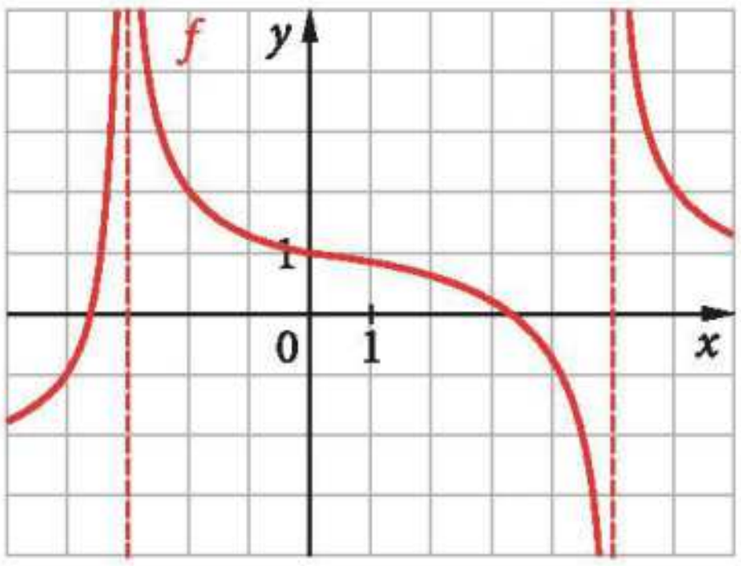
A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ **B.** $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 0$ **C.** $\lim\limits_{x\to-7^+} f(x) = -\infty$ **D.** $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \infty$

4.3. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{dla } x \neq -1 \\ 1 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$. Dla tej funkcji

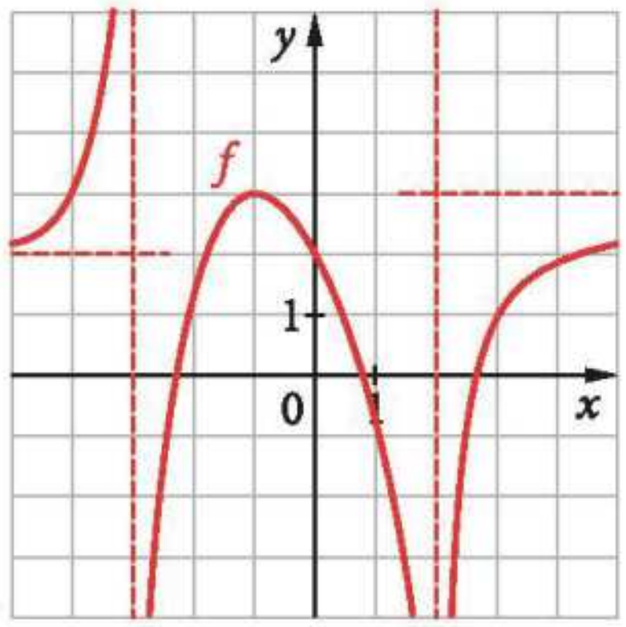
A. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -2$. **B.** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -4$. **C.** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 1$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 0$.

4.4. Odczytaj z podanego wykresu (rys. 1) granice funkcji $y = f(x)$ w punktach $x = -3$ i $x = 5$.

4.5. Odczytaj z podanego wykresu (rys. 2) granice funkcji $y = f(x)$ na końcach przedziałów, w których jest ona określona.



Rys. 1



Rys. 2

4.6. Wyznacz granice funkcji $y = f(x)$ na końcach przedziałów, w których jest ona określona.

a) $f(x) = \dfrac{x+7}{x-11}$

b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-25}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-5x-14}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2\left(x^2-7x-8\right)}{(x+3)(6-x)}$

4.7. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5}{|x-2|}$

b) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{x}{|x+6|}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-2}{|4-x|}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{|x-1|}$

4.8. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $y = f(x)$, o ile istnieją.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-5}$

b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{9-x^2}{x^2-4x-21}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-28}{2x+14}$

4.9. Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji $y = f(x)$, o ile istnieją.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{x^4-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-5x+8}{2x^2+5}$

c) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2-5}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-4x}{2x-5} & \text{dla } x < 1 \\ \dfrac{3x}{x+2} & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

4.10. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}$

4.11. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

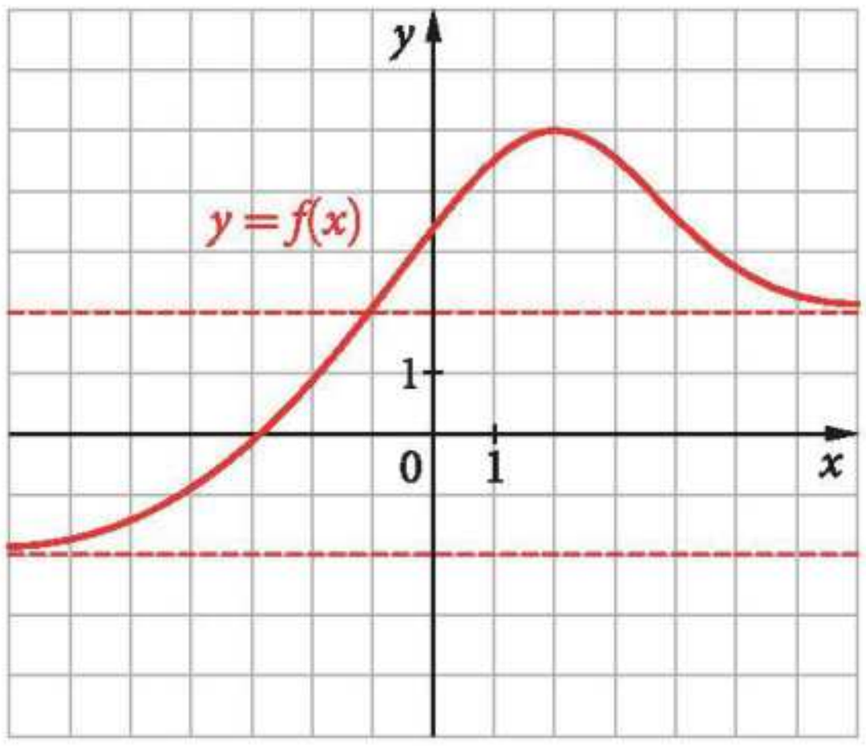
b) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{4-x}{x\sqrt{x^2+7}}$

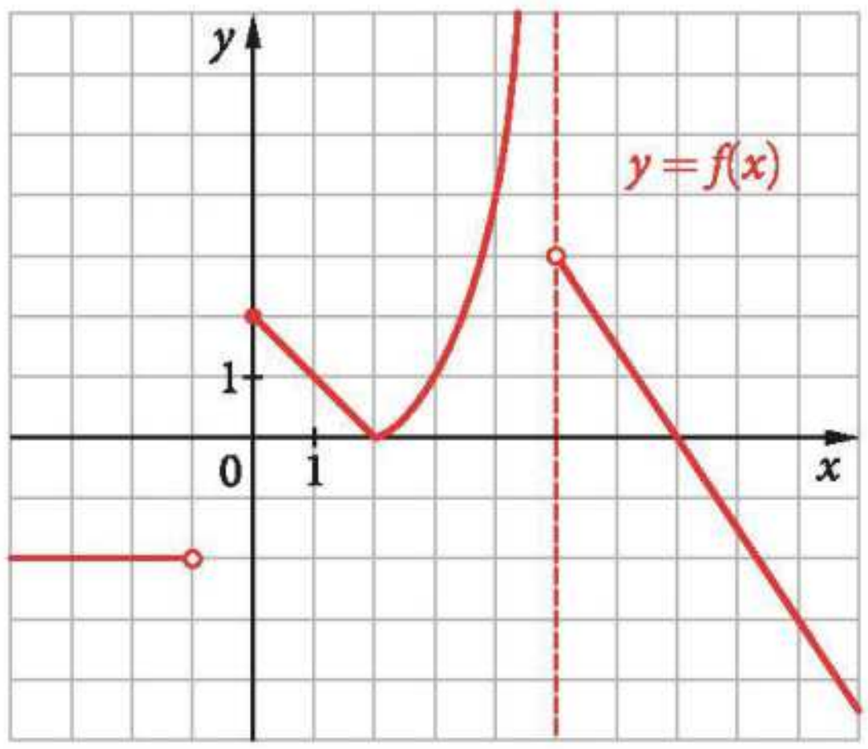
d) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+5}{x\sqrt{x^2+3x+11}}$

4.12. Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ określ: jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), przedziały monotoniczności, granice funkcji na końcach przedziałów określoności, równania asymptot oraz liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$ w zależności od m.

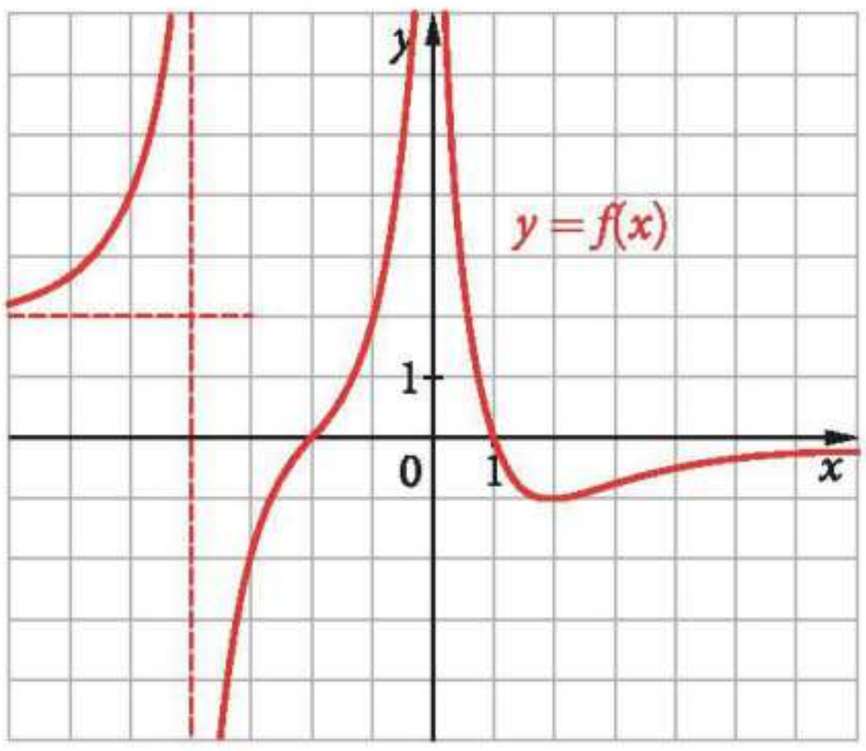
a)



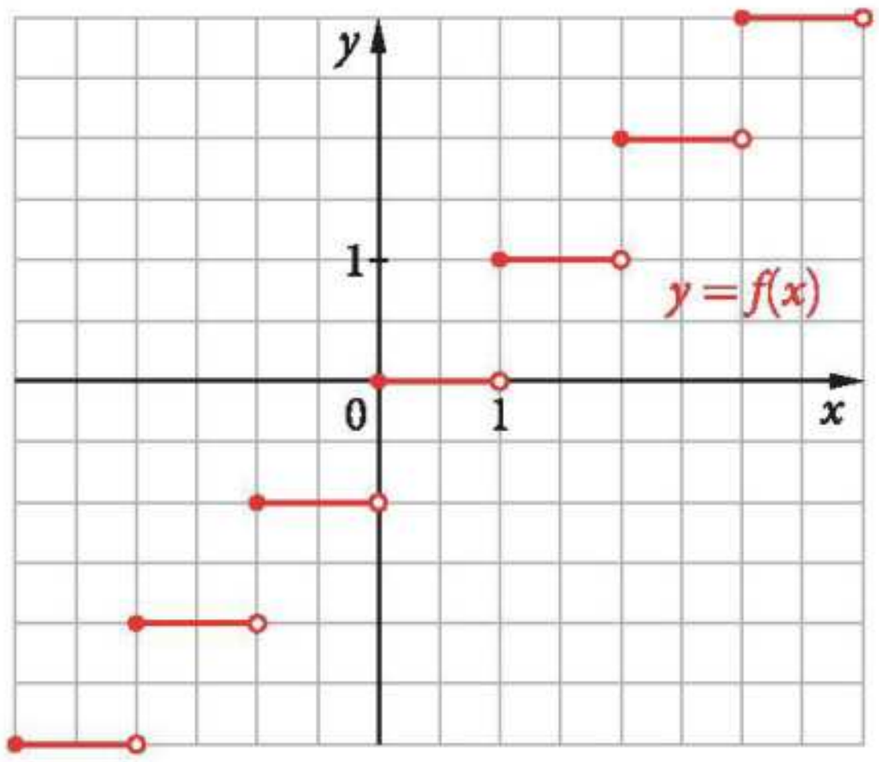
c)



b)



d)



Uwaga: Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Dla każdych dwóch funkcji f, g takich, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, zachodzi równość

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$.

B. $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = -\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$.

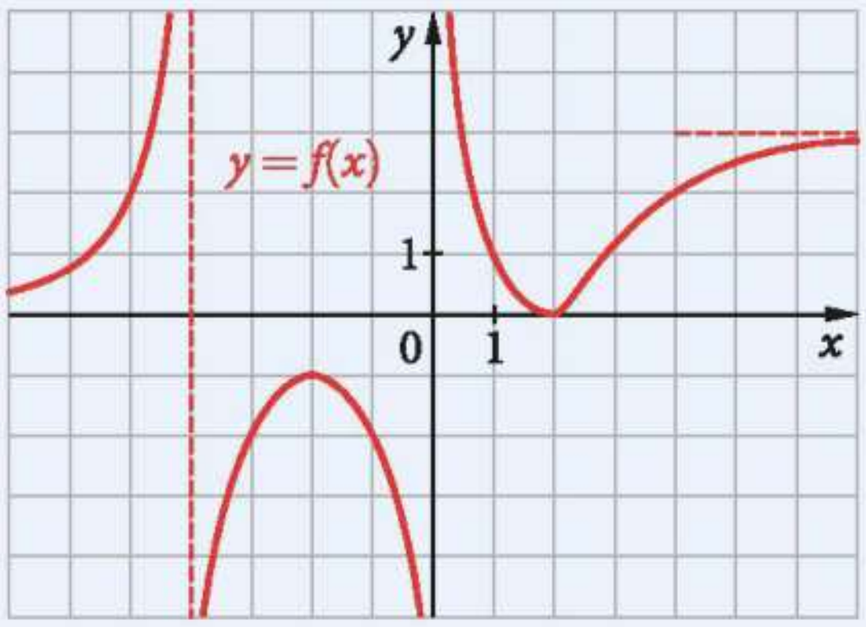
2. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+2}{|x+3|}$ b) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x-1}{4-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2-2x}{x^2+5x+4}$

3. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{11x - 2x^2 - 5}{x^2 + 3x}$.

4. Wyznacz granice funkcji $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 - x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$ na końcach przedziałów, w których jest określona.

5. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ: jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), przedziały monotoniczności, granice funkcji na końcach przedziałów określoności, równania asymptot oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.



5. Funkcje ciągłe

Umiejętności:

- obliczanie granic funkcji
- badanie ciągłości funkcji

Definicja

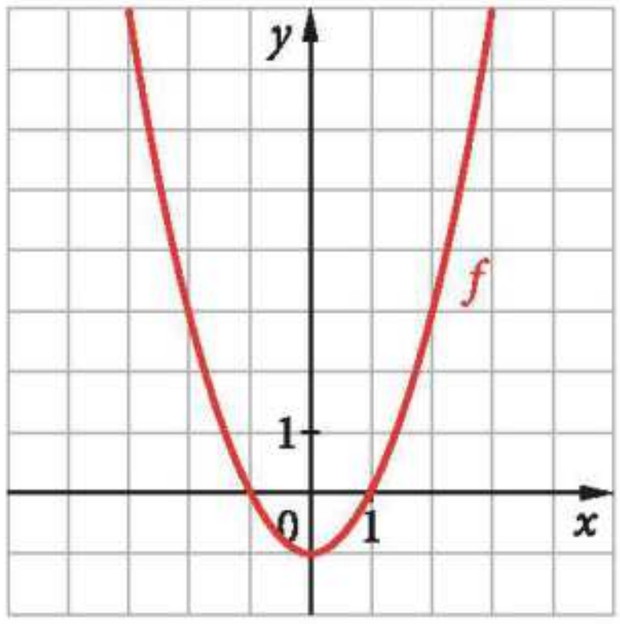
Funkcja $f\colon (a; b) \to \mathbf{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Zauważmy, że zgodnie z definicją ciągłość funkcji możemy badać tylko w punktach **należących do dziedziny** funkcji.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = x^2 - 1$ jest w punkcie $x_0 = 2$ ciągła, ponieważ $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 1\right) = 3 = f(2)$.



Przykład 2 ◀ zad. 5.5

Zbadamy ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x < 1 \\ -(x-2)^2 + 1 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 1$ i naszkicujemy jej wykres.

Rozwiązanie

Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$.

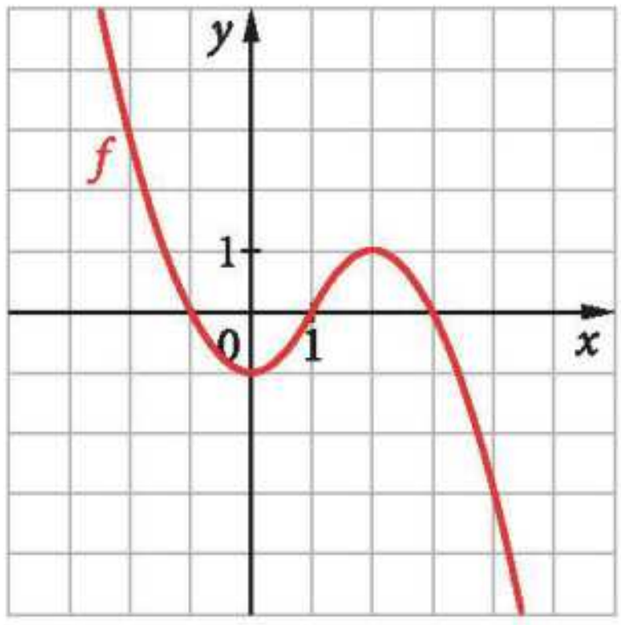
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-(x-2)^2 + 1\right) = 0$$

Zatem $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

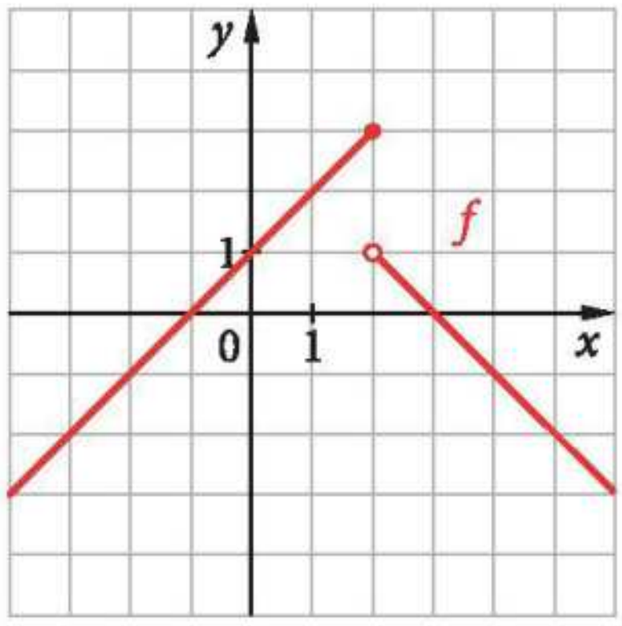
$$f(1) = -(1-2)^2 + 1 = 0 = \lim_{x \to 1} f(x)$$

Odp.: Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.



Przykład 3

Zbadamy ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ 3-x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 2$ i naszkicujemy jej wykres.



Rozwiązanie

Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 2$.

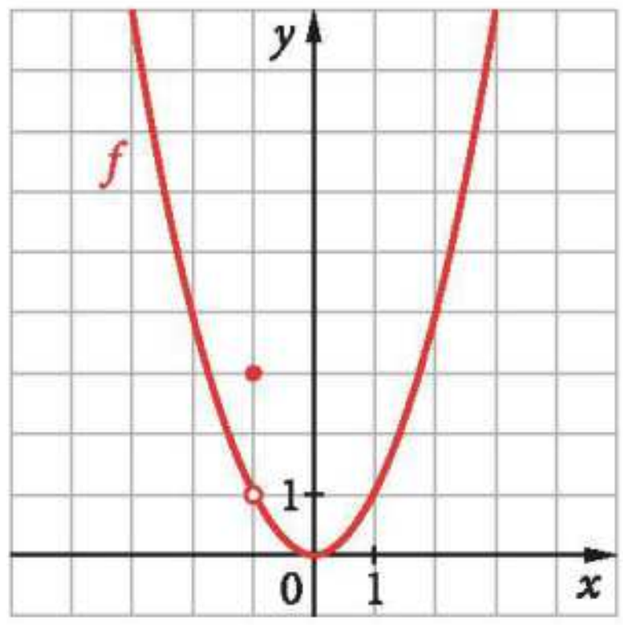
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3-x) = 1$$

Zatem $\lim_{x\to 2} f(x)$ nie istnieje, więc funkcja nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Odp.: Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Przykład 4 ◂ zad. 5.6, 5.7

Zbadamy ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \neq -1 \\ 3 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = -1$ i naszkicujemy jej wykres.



Rozwiązanie

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$
$$f(-1) = 3 \neq \lim_{x\to -1} f(x)$$

Odp.: Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$.

Przykład 5 ◂ zad. 5.11

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} & \text{dla } x \neq -3 \\ m & \text{dla } x = -3 \end{cases}$$ jest ciągła w punkcie $x_0 = -3$.

Rozwiązanie

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = -3$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$m = f(-3) = \lim_{x\to -3} f(x)$$
$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-2) = -5$$

Zatem powinna zachodzić równość $f(-3) = -5$.

Odp.: $m = -5$

Twierdzenie

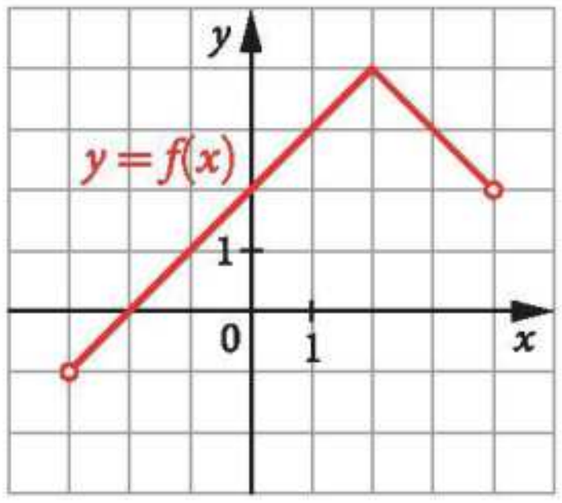
- Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 są ciągłe w punkcie x_0.
- Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzeń tych nie dowodzimy – wynikają one z własności działań na granicach.

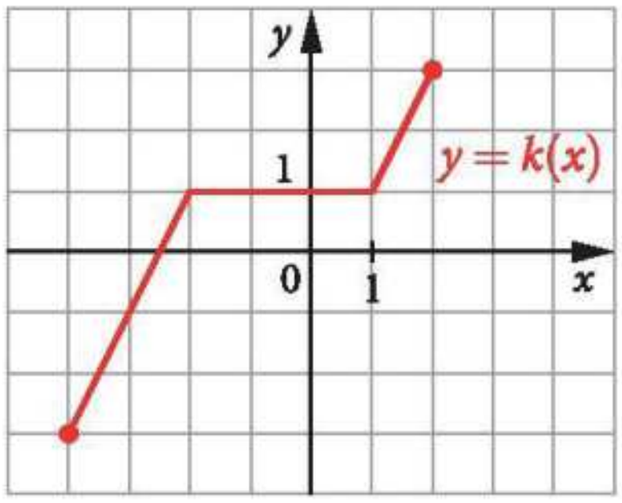
Definicja

Funkcję ciągłą w każdym punkcie jej dziedziny nazywamy **funkcją ciągłą**.

Uwaga: Jeżeli dziedziną funkcji f jest przedział domknięty $\langle a; b\rangle$, to powiemy, że f jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ i $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.



Funkcja f jest ciągła w $(-3; 4)$.



Funkcja k jest ciągła w $\langle -4; 2\rangle$.

Jeżeli funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0 należącym do jej dziedziny, to mówimy też, że x_0 jest **punktem nieciągłości** funkcji f lub że f jest **nieciągła** w punkcie x_0.

Własności funkcji ciągłych

Z poprzednich rozważań wynika, że **wielomiany**, **funkcje wymierne**, **funkcje trygonometryczne** oraz **funkcja** $f(x) = \sqrt[n]{x}$ są funkcjami ciągłymi.

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła, to ciągłe są funkcje:

- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

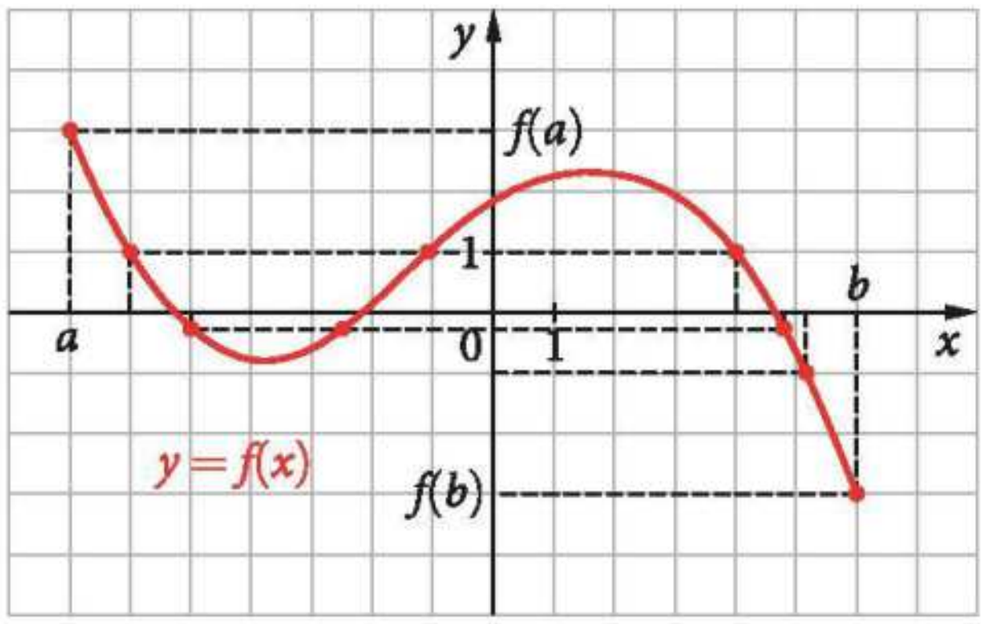
Podamy teraz dwa ważne twierdzenia (bez dowodów), które zilustrujemy odpowiednimi wykresami.

Twierdzenie

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja przyjmuje każdą wartość pośrednią między wartościami przyjmowanymi na końcach przedziału.

Zauważmy, że wartości pośrednie mogą być przyjmowane wielokrotnie.



Prostą konsekwencją tego twierdzenia jest następujący wniosek.

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ i jej wartości na końcach przedziału są liczbami o różnych znakach, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a; b)$, że $f(x_0) = 0$.

D **Przykład 6** ◂ zad. 5.12

Wykażemy, że wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$ ma w przedziale $\langle -1; 0\rangle$ przynajmniej jeden pierwiastek.

Dowód

$W(-1) = -2 - 1 - 4 + 1 < 0$

$W(0) = 1 > 0$

Wielomian jest funkcją ciągłą i na końcach przedziału $\langle -1; 0\rangle$ przyjmuje wartości o przeciwnych znakach. Zatem na mocy wcześniej sformułowanego wniosku ma w przedziale $(-1; 0)$ co najmniej jeden pierwiastek. Mówiąc poglądowo, jego wykres przynajmniej raz musi przeciąć oś x.

Koniec dowodu

Twierdzenie

Twierdzenie Weierstrassa

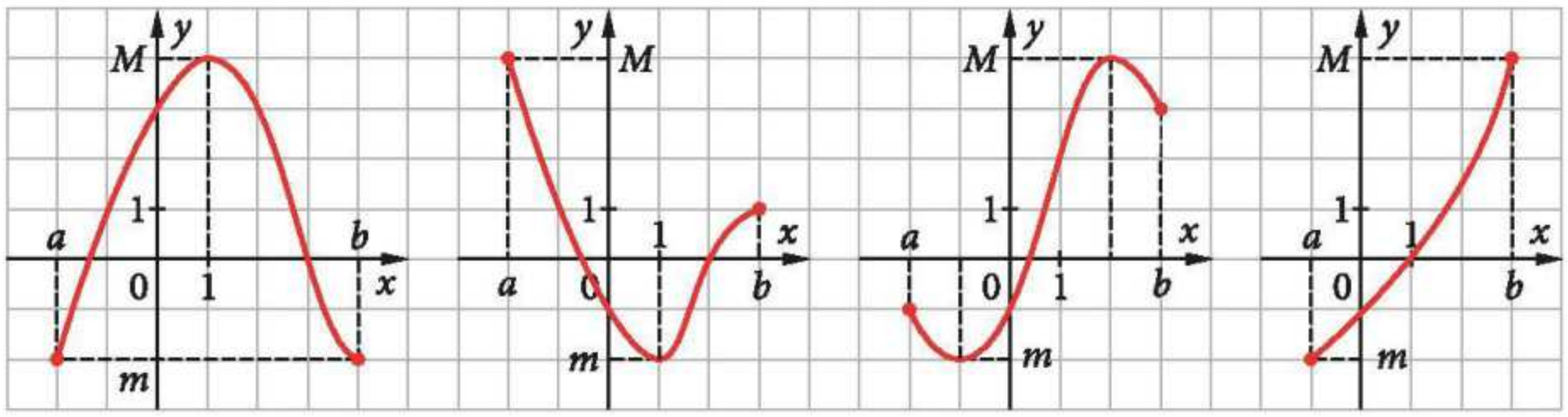
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.

Jeżeli oznaczymy wartość najmniejszą funkcji f literą m i wartość największą literą M, to:

$$f\colon \langle a; b\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle m; M\rangle$$

Symbol $\xrightarrow{\text{na}}$ oznacza, że zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle m; M\rangle$.

Na rysunkach przedstawiono różne przykłady ilustrujące twierdzenie Weierstrassa.

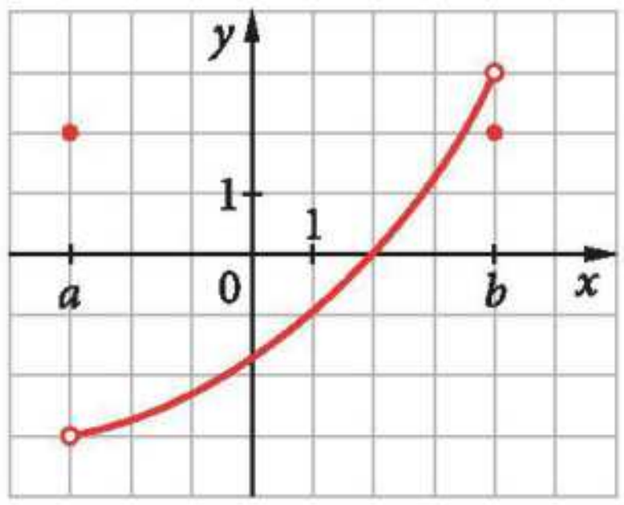


Konsekwencją powyższych twierdzeń jest również następujący wniosek.

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ i jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b\rangle$.

Zauważmy, że założenie ciągłości funkcji w przedziale **domkniętym** jest istotne. Funkcja przedstawiona na rysunku obok jest określona w przedziale $\langle a; b\rangle$, ciągła w $(a; b)$ i rosnąca w $(a; b)$. Nie jest jednak ciągła w $\langle a; b\rangle$ i nie jest rosnąca w $\langle a; b\rangle$.



Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla } x \neq -1 \\ m & \text{dla } x = -1 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$

A. tylko dla $m = 1$.

B. dla $m = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

C. tylko dla $m = -1$.

D. dla $m = 2$ lub $m = -1$.

5.2. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{1, 6\} \\ x + 2 & \text{dla } x \in \{1, 6\} \end{cases}$

A. ma dwa punkty nieciągłości.

B. spełnia warunek $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

C. ma jeden punkt nieciągłości.

D. jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R}$.

5.3. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ ax + b & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ jest ciągła

A. dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

B. dla $a = 0$ i $b \neq 0$.

C. tylko dla $a \neq 0$ i $b = 0$.

D. dla $a \in \mathbf{R}$ i $b = 0$.

5.4. Dziedziną funkcji ciągłej f jest $(-1; 1)$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zbiorem wartości funkcji f może być

A. $\mathbf{R}$.

B. $\langle -3; 5 \rangle$.

C. $(-\infty; 2\rangle$.

5.5. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 4 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \cos x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ \sqrt{x + 3} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

5.6. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} & \text{dla } x \neq 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1} & \text{dla } x \neq -\dfrac{1}{3} \\ -2 & \text{dla } x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$, $x_0 = -\dfrac{1}{3}$

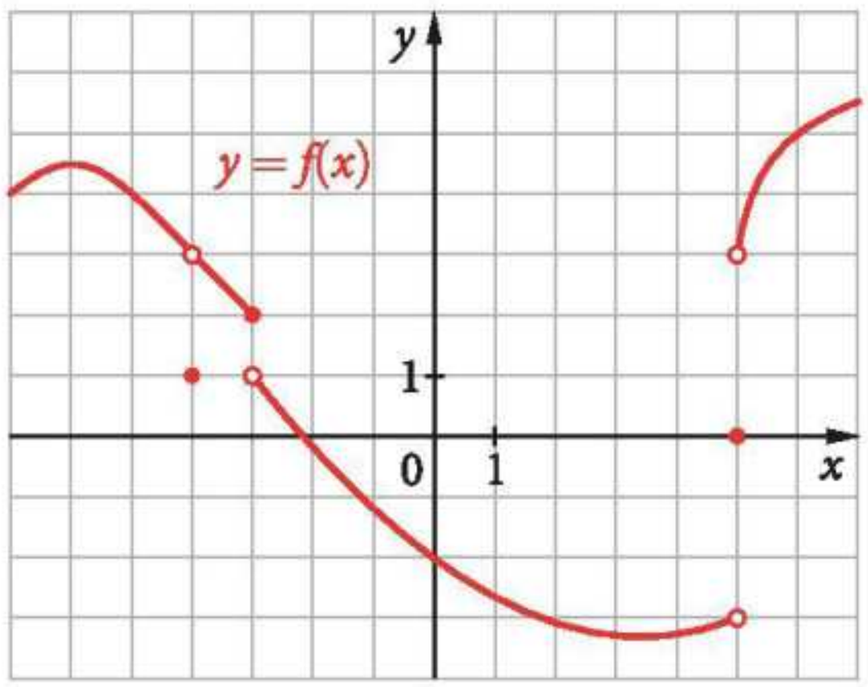
5.7. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 + x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

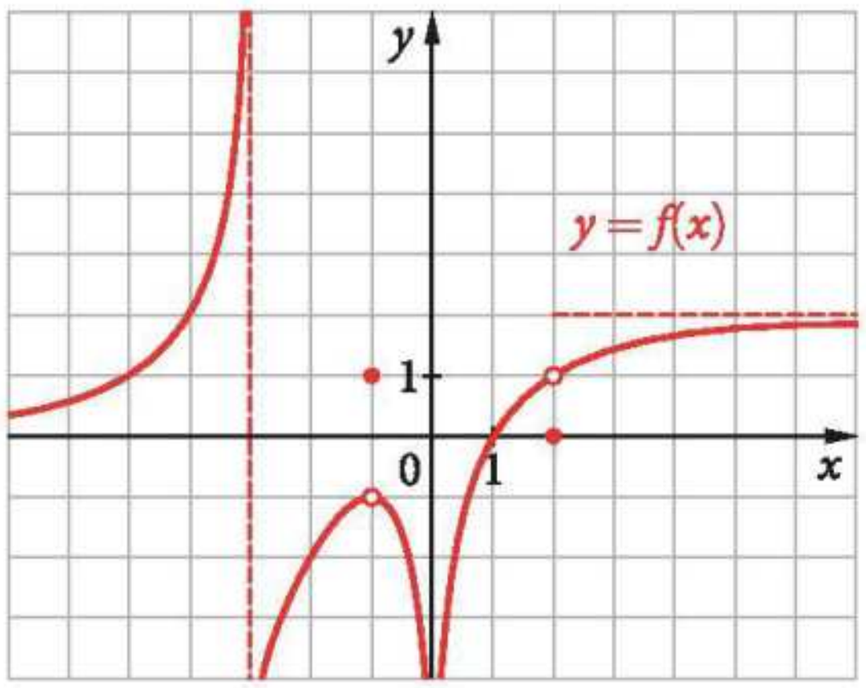
b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3} & \text{dla } x \geqslant 3 \\ x^2 - 9 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$ $\quad x_0 = 3$

5.8. Na podstawie wykresu funkcji określ jej dziedzinę oraz punkty nieciągłości, o ile istnieją.

a)



b)



5.9. Zbadaj ciągłość podanej funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} & \text{dla } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

5.10. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ i zbadaj jej ciągłość.

5.11. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = f(x)$ jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} m - x & \text{dla } x \leqslant -1 \\ 2x + 1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x^2 - 2x - m & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - \sqrt{x + 1}} & \text{dla } x \in \langle -1; 0) \cup (0; \infty) \\ m & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ m & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

D **5.12.** Wykaż, że równanie ma w podanym przedziale co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^2 + \frac{4}{x} = 10$, $\langle 2; 3\rangle$

b) $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, $\langle -1; 0\rangle$

D **5.13.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 - x + 1$ ma trzy pierwiastki $x_1 < x_2 < x_3$ takie, że $x_1 \in \langle -1; 0\rangle$, $x_2 \in \langle 0; 1\rangle$ oraz $x_3 \in \langle 5; 6\rangle$.

5.14. Naszkicuj przykładowy wykres funkcji ciągłej f, która spełnia podany warunek.

a) $f\colon \langle 2; 5\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -1; 1\rangle$

b) $f\colon (-3; 5) \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{R}$

c) $f\colon (-3; 5) \xrightarrow{\text{na}} \langle 2; \infty)$

d) $f\colon (-3; -1) \cup (2; 4) \xrightarrow{\text{na}} \langle -2; 5\rangle$

5.15. Naszkicuj przykładowy wykres funkcji ciągłej określonej w przedziale $(-3; 4)$, której zbiorem wartości jest podany przedział liczbowy.

a) $\langle -2; 5\rangle$

b) $(1; \infty)$

c) $(-\infty; 3\rangle$

d) $(-7; 2\rangle$

e) $(-\infty; 6)$

f) $\langle -4; 5)$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Suma dwóch funkcji nieciągłych

A. może być funkcją nieciągłą.

B. jest zawsze funkcją nieciągłą.

C. może być funkcją ciągłą.

2. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 2$.

3. Naszkicuj przykładowy wykres funkcji ciągłej $f\colon (-2; 1) \cup (3; 6) \xrightarrow{\text{na}} \langle -2; \infty)$, która ma dwa miejsca zerowe: -1, 4.

4. Dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{2x + 4} & \text{dla } x \neq -2 \text{ i } x \geqslant -3 \\ m & \text{dla } x = -2 \end{cases}$$

jest ciągła?

D **5.** Wykaż, że równanie $x^2 - 2x + \frac{4}{x - 2} = 6$ ma w przedziale $\langle -4; -1\rangle$ co najmniej jedno rozwiązanie.

6. Pochodna funkcji w punkcie

Umiejętności:

- stosowanie definicji pochodnej funkcji w punkcie
- korzystanie z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej

Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a; b)$. Wybierzmy punkt $x_0 \in (a; b)$. Oznaczmy literą h taką liczbę dodatnią lub ujemną, że $x_0 + h \in (a; b)$. Liczbę h nazywamy **przyrostem argumentu** funkcji. Przyrostowi argumentu odpowiada **przyrost wartości** funkcji równy różnicy $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Iloraz $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, dla $h \neq 0$, nazywamy **ilorazem różnicowym**.

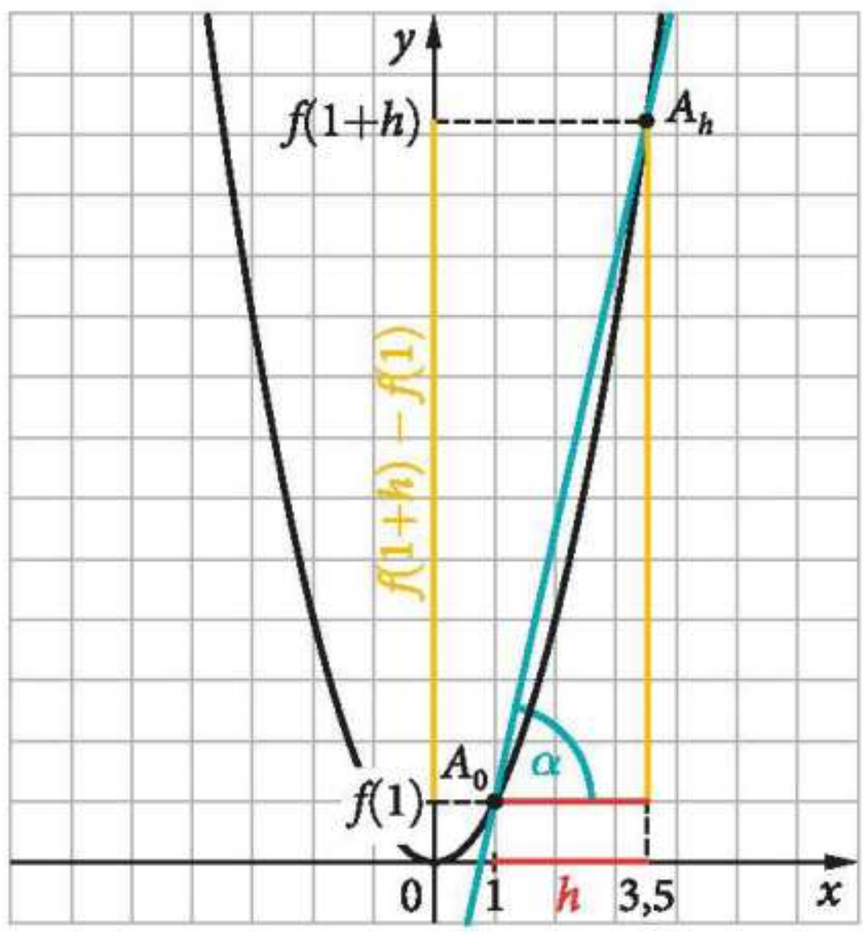
Przykład 1

Niech $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$. Obliczymy wartość ilorazu różnicowego dla $h = 2{,}5$, a następnie podamy geometryczną interpretację otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1 + 2{,}5) - f(1)}{2{,}5} = \frac{3{,}5^2 - 1}{2{,}5} = 4{,}5$$

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



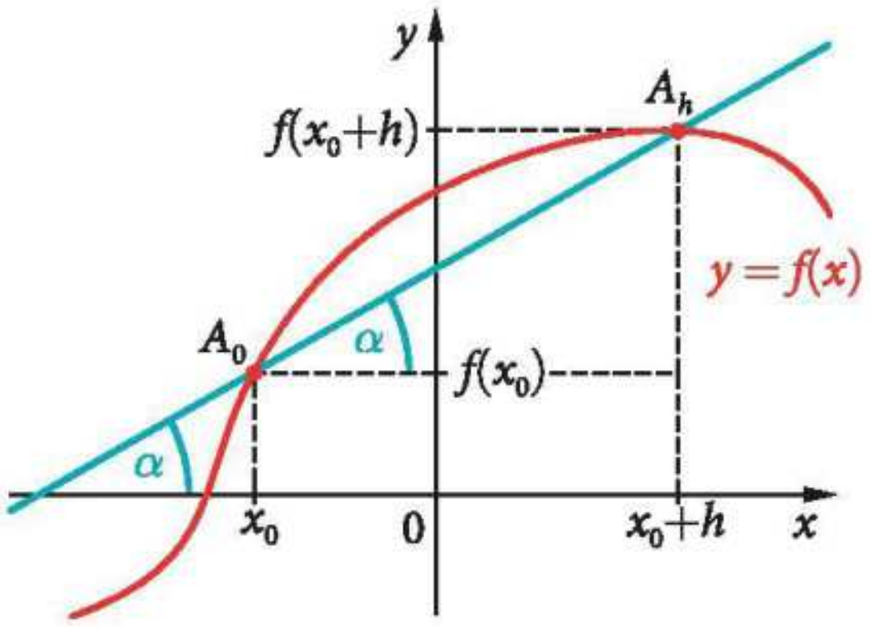
Na wykresie funkcji zaznaczony jest punkt $A_0 = \left(x_0, f(x_0)\right)$, czyli $A_0 = (1, 1)$.

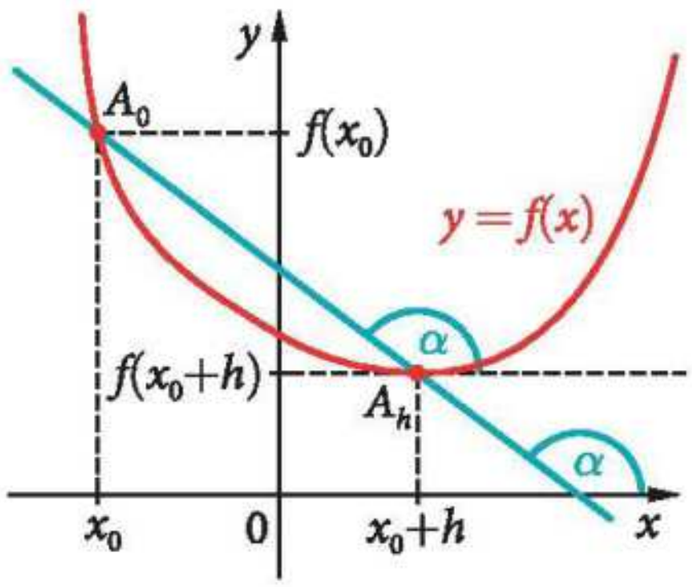
Punkt A_h ma współrzędne $\left(x_0 + h, f(x_0 + h)\right)$, czyli $A_h = \left(3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4}\right)$.

Iloraz różnicowy jest równy tangensowi kąta α, jest zatem współczynnikiem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkty A_0 i A_h.

Sieczna wykresu funkcji

Prostą, która przecina wykres funkcji w co najmniej dwóch punktach, nazywamy **sieczną** wykresu funkcji.
Przyjrzyjmy się rysunkom.





Prosta A_0A_h jest sieczną wykresu funkcji, a iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ jest tangensem kąta nachylenia tej siecznej do osi x. Inaczej mówiąc, **iloraz różnicowy jest współczynnikiem kierunkowym siecznej** A_0A_h.

Przykład 2 ◂ zad. 6.4

Napiszemy równanie siecznej A_0A_h narysowanej w przykładzie 1.

Rozwiązanie

Prosta A_0A_h ma równanie postaci $y = ax + b$, w którym współczynnik kierunkowy $a = 4{,}5$ (korzystamy z obliczeń z przykładu 1). Ponadto sieczna przechodzi przez punkt $A_0 = (1, 1)$, zatem:

$$y = 4{,}5x + b$$
$$1 = 4{,}5 + b$$
$$b = -3{,}5$$

Odp.: Prosta A_0A_h ma równanie: $y = 4{,}5x - 3{,}5$.

Do znalezienia równania siecznej można oczywiście wykorzystać współrzędne obydwu punktów, które ją wyznaczają.

Prędkość średnia

Przyjmijmy, że funkcja $y = s(t)$ opisuje drogę przebytą w czasie t przez poruszające się ciało. Jeśli h oznacza przyrost czasu od chwili t_0, to $s(t_0 + h) - s(t_0)$ oznacza odpowiadający mu przyrost drogi, a **iloraz różnicowy** $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$ **jest prędkością średnią** ciała mierzoną w odpowiednich jednostkach.

Przykład 3

Niech $s(t) = 3t + 2$, gdzie s oznacza drogę w centymetrach, t – czas w sekundach. Obliczymy prędkość średnią $v_{śr}$ od chwili $t_0 = 2$ do chwili $t_0 + 5$.

Rozwiązanie

$$v_{śr} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \frac{s(7) - s(2)}{5} = \frac{23 - 8}{5} = 3$$

Odp.: $v_{śr} = 3$ cm/s

Jeżeli samochód od godziny 9.00 do godziny 11.00 przebył 140 km, to jego średnia prędkość wynosiła 70 km/h. Na tej podstawie nie możemy jednak nic powiedzieć na temat prędkości samochodu np. o godzinie 9.43.00. Aby ją obliczyć, musielibyśmy rozważyć o wiele mniejszy przedział czasu. Jeżeli np. zmierzymy drogę przebytą przez samochód od 9.42.59 do 9.43.01, to uzyskana na tej drodze prędkość średnia będzie już zapewne bliska prędkości chwilowej o godzinie 9.43.00.

Pochodna funkcji, którą teraz zdefiniujemy, odpowiada właśnie prędkości chwilowej.

Definicja

Dane są funkcja f określona na przedziale $(a; b)$ i jej argument x_0.
Jeżeli istnieje granica właściwa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji f w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Funkcję f nazywamy wtedy **różniczkowalną** w punkcie x_0.

Jeżeli granica, o której mowa w definicji, nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że funkcja f **nie jest różniczkowalna** w punkcie x_0 (inaczej – nie ma pochodnej w punkcie x_0).

Granicę właściwą $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazywamy **pochodną lewostronną**, a granicę właściwą $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ – **pochodną prawostronną**.

Zgodnie z twierdzeniem o istnieniu granicy funkcja jest różniczkowalna w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją i są równe pochodne jednostronne w tym punkcie.

Przykład 4 ◂ zad. 6.5

Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = 3x - 2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją pochodnej funkcji w punkcie należy obliczyć granicę odpowiedniego ilorazu różnicowego.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-2-(3\cdot 2-2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Zatem $f'(2) = 3$.

Odp.: Pochodna funkcji $f(x) = 3x - 2$ w punkcie $x_0 = 2$ jest równa 3.

Przykład 5 ◂ zad. 6.5

Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = -3$.

Rozwiązanie

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-3+h)^2-(-3)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9-6h+h^2-9}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-6+h) = -6$$

Odp.: $f'(-3) = -6$

Przykład 6 ◂ zad. 6.8

Wykażemy, że funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Dowód

Mamy wykazać, że nie istnieje granica ilorazu różnicowego w punkcie 0.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Rzeczywiście – obliczamy pochodne jednostronne i mamy:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1 \qquad \longleftarrow h\to 0^-, \text{ więc } h<0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1 \qquad \longleftarrow h\to 0^+, \text{ więc } h>0$$

$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, czyli nie istnieje $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

Zatem funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Koniec dowodu

Przykład 7 ◀ zad. 6.10

Sprawdzimy, czy funkcja $f(x) = 2x|x| + 3$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h|h|+3-3}{h} = \lim_{h\to 0} 2|h| = 0$$

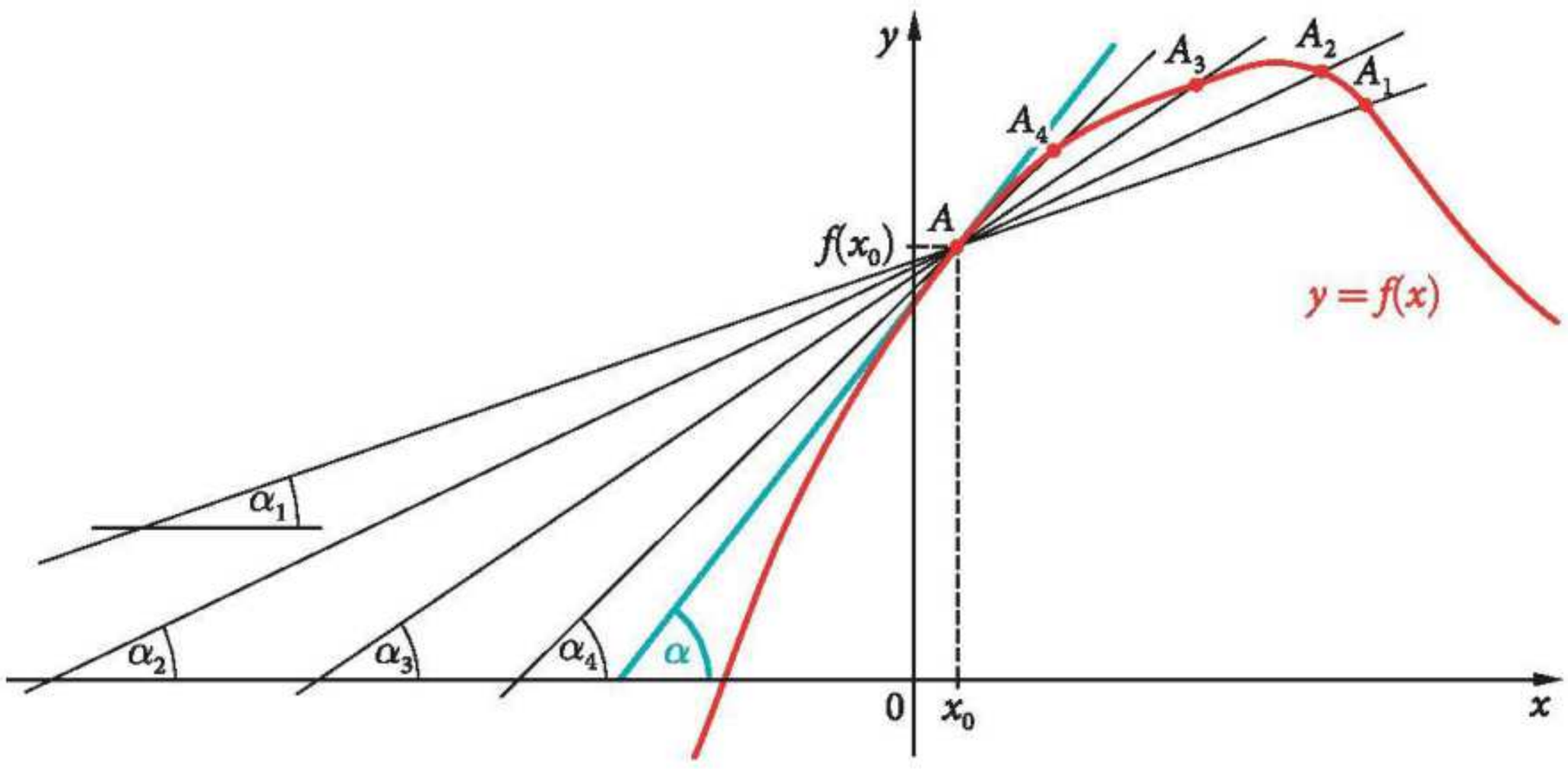
Zatem $f'(0) = 0$.

Odp.: Funkcja $f(x) = 2x|x| + 3$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Uwaga: Można udowodnić, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła. Natomiast twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe – na przykład rozważana wcześniej funkcja $f(x) = |x|$ jest w punkcie $x_0 = 0$ ciągła, ale nie ma w tym punkcie pochodnej.

Geometryczna interpretacja pochodnej

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

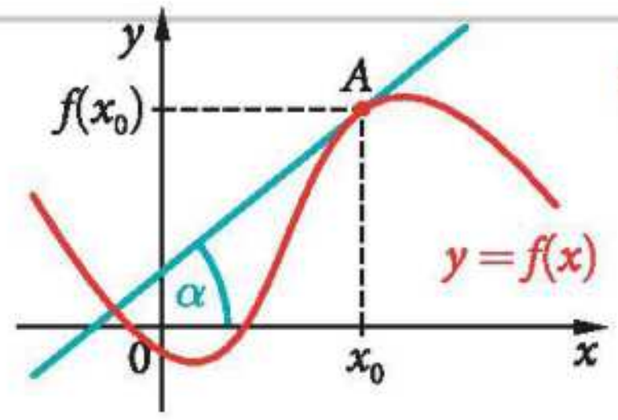


Na wykresie funkcji $y = f(x)$ zaznaczony jest punkt $A = (x_0, f(x_0))$ oraz kilka siecznych: AA_1, AA_2 itd. Aby rysunek był bardziej przejrzysty, punkty A_n $(n = 1, \ldots, 4)$ zaznaczone są po prawej stronie punktu A, zatem odpowiadają one dodatnim przyrostom argumentów. Wiemy, że odpowiednie ilorazy różnicowe są równe współczynnikom kierunkowym siecznych, czyli tangensom zaznaczonych kątów α_n $(n = 1, \ldots, 4)$. Wyobraźmy sobie, że kolejne sieczne prowadzimy przez punkt A i punkty A_n $(n \to \infty)$ „zbiegające" po wykresie do punktu A. Ciąg siecznych będzie wówczas dążył do położenia, które ilustruje prosta zaznaczona kolorem niebieskim. Odpowiednio kąty α_n będą dążyły do kąta α. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Definicja

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to **styczną do wykresu** funkcji w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą przechodzącą przez punkt A taką, że jej współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.

Zauważmy, że definicja stycznej do wykresu funkcji istotnie różni się od definicji stycznej do okręgu – czyli prostej mającej jeden punkt wspólny z tym okręgiem. Styczna do wykresu może mieć z tym wykresem wiele innych punktów wspólnych, a równocześnie prosta mająca z wykresem jeden punkt wspólny nie musi być do niego styczna.



Przykład 8 ◀ zad. 6.11

Napiszemy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie o odciętej $x_0 = -3$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy obliczenia z przykładu 5, czyli informację, że $f'(-3) = -6$.

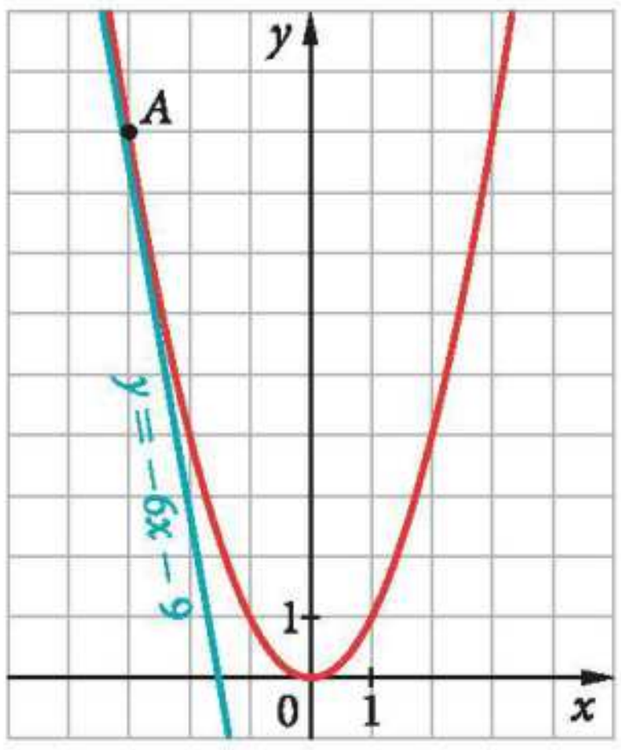
Równanie stycznej:

$$y = ax + b$$
$$a = f'(-3) = -6$$
$$y = -6x + b$$

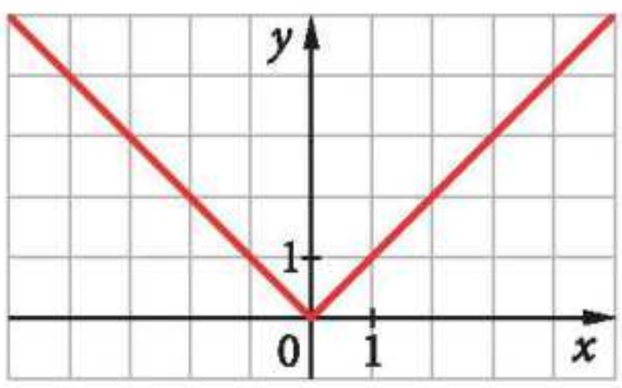
Styczna przechodzi przez punkt $A = (-3, 9)$, zatem:

$$9 = 18 + b$$

Odp.: Równanie stycznej: $y = -6x - 9$.



W przykładzie 6 udowodniliśmy, że funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$. Przyjrzyjmy się wykresowi tej funkcji. Jeśli weźmiemy pod uwagę geometryczną interpretację pochodnej, wykorzystującą sieczne, łatwo sobie wyobrazimy, że wykres w punkcie z takim „ostrym zakończeniem" nie ma stycznej.



Kąt przecięcia wykresów dwóch funkcji

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w x_0, a ich wykresy przecinają się w punkcie $A = (x_0, y_0)$, to kąt ostry lub prosty między stycznymi do wykresów w punkcie A nazywamy **kątem przecięcia** wykresów funkcji f i g.

Przykład 9 ◀ zad. 6.13

Obliczymy (z dokładnością do 1°) kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = x^4$.

Rozwiązanie

Krok 1: Rozwiązujemy równanie $f(x) = g(x)$, aby znaleźć punkt przecięcia wykresów funkcji f i g.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^4 \text{ i } x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie $A = (1, 1)$.

Krok 2: Sprawdzamy, czy funkcje f i g są różniczkowalne w $x_0 = 1$. W tym celu obliczamy granice odpowiednich ilorazów różnicowych.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

Zatem $f'(1) = -1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^4 - 1^4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(4 + 6h + 4h^2 + h^3\right) = 4$$

Zatem $g'(1) = 4$.

Krok 3: Wyznaczamy szukany kąt.

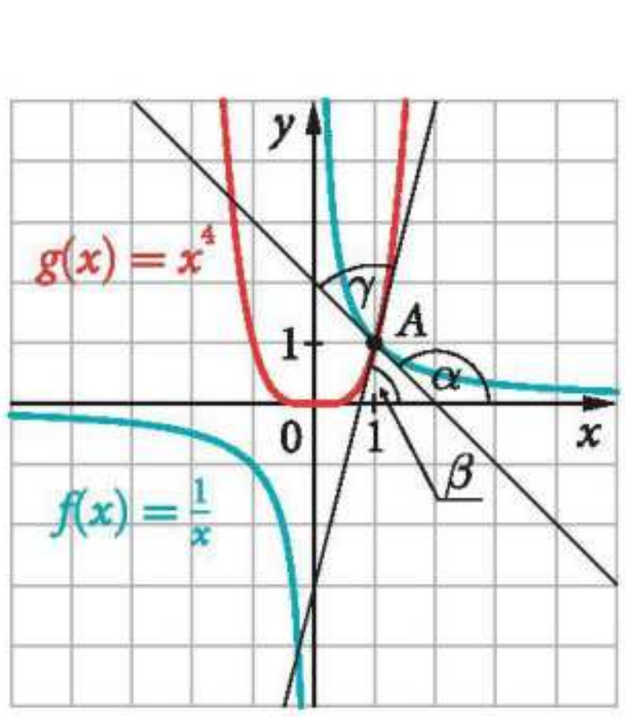
I sposób

Znajdujemy miary kątów, pod jakimi nachylone są do osi x styczne.

$\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = -1$, więc styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest nachylona do osi x pod kątem $\alpha = 135°$.

$\operatorname{tg}\beta = g'(1) = 4$, więc styczna do wykresu funkcji g w punkcie A jest nachylona do osi x pod kątem $\beta = 76°$.

Kąt między stycznymi: $\gamma = \alpha - \beta = 135° - 76° = 59°$.



II sposób

Znamy wartości $\operatorname{tg}\alpha = -1$ oraz $\operatorname{tg}\beta = 4$, więc korzystamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\right| = \left|\frac{-1-4}{1-4}\right| = \frac{5}{3} \approx 1{,}6667$$

Teraz odczytujemy z tablic miarę kąta: $\gamma = 59°$.

Odp.: Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie $A = (1, 1)$ pod kątem $\gamma = 59°$.

Prędkość chwilowa

Przypomnijmy:
Gdy funkcja $y = s(t)$ opisuje drogę przebytą w czasie t przez poruszające się ciało, to iloraz różnicowy $\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ jest prędkością średnią mierzoną w odpowiednich jednostkach, przy czym $h \neq 0$ oznacza przyrost czasu od chwili t_0.

Granicę $\lim\limits_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ nazywamy **prędkością chwilową** $v(t_0)$ w chwili t_0.

Z tego określenia wynika, że prędkość $v(t_0)$ poruszającego się ciała w chwili t_0 jest równa pochodnej funkcji s w punkcie t_0.

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Przykład 10

Droga przebyta przez poruszające się ciało dana jest wzorem $s(t) = 1 + t + t^2$. Droga s mierzona jest w metrach, czas t – w sekundach. Obliczymy prędkość chwilową $v(t_0)$ tego ciała w chwili $t_0 = 3$.

Rozwiązanie

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{s(3 + h) - s(3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3 + h + 9 + 6h + h^2 - 13}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (7 + h) = 7$$

Odp.: $v(t_0) = 7$ m/s

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = -\sqrt{3}x + \sqrt{5}$ w punkcie $x_0 = \sqrt{3}$.

A. 0 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** -3 **D.** $-\sqrt{3}$

6.2. W którym punkcie x_0 pochodna funkcji $f(x) = x^2$ równa się -4?

A. $x_0 = 2$
B. $x_0 = -2$
C. $x_0 = -2$ lub $x_0 = 2$
D. Nie ma takiego punktu.

6.3. Wskaż kąt, pod którym przecinają się wykresy funkcji $f(x) = 3$ oraz $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \pi$.

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** $27°$ **C.** $\frac{\pi}{6}$ **D.** $90°$

6.4. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3$. Naszkicuj jej wykres. Dla danego argumentu x_0 oblicz przyrost wartości funkcji odpowiadający podanemu przyrostowi h argumentu i poprowadź odpowiednią sieczną.

x_0	-1	0	1	2
h	3	-2	2	-3

6.5. Oblicz pochodną funkcji $y = f(x)$ w podanym punkcie x_0.

a) $f(x) = -5x - 1$ $x_0 = 7$
b) $f(x) = 2x^2$ $x_0 = 0$
c) $f(x) = 3\sqrt{x}$ $x_0 = 4$
d) $f(x) = -x^2$ $x_0 = -3$

6.6. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Oblicz pochodną tej funkcji w punkcie $x_0 = 3$.

6.7. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 5}$. Oblicz pochodną tej funkcji w punkcie $x_0 = -2$.

D **6.8.** Wykaż, że funkcja $f(x) = x + |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

D **6.9.** Wykaż, że funkcja $f(x) = |x^3|$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

6.10. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = |x + 1| \cdot x$ w punkcie $x_0 = -1$.

6.11. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

6.12. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 5x$ w punkcie o odciętej $x_0 = -1$.

6.13. Oblicz z dokładnością do 1° kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

a) $f(x) = -x + 8$ $\quad g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = x^2$

6.14. Oblicz kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x$ oraz $g(x) = \frac{1}{|x|}$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

Prosto do matury

1. Funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a; b)$ oraz $f'(x_0) = 0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Styczna do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi x.

B. Styczna do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ może mieć z wykresem funkcji nieskończenie wiele punktów wspólnych.

C. Punkt x_0 jest miejscem zerowym funkcji f.

2. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = -2$.

3. Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 - 3$. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ i narysuj wykres funkcji oraz tę styczną.

4. Oblicz z dokładnością do 1° kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji $f(x) = 2x - 6$ oraz $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

D **5.** Wykaż, że funkcja $f(x) = x + |x - 1|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$.

7. Pochodna jako funkcja

Umiejętności:

- stosowanie twierdzeń o działaniach na pochodnych
- obliczanie pochodnych funkcji wymiernych
- korzystanie z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej

Zdefiniowana wcześniej pochodna funkcji w punkcie jest liczbą rzeczywistą. Załóżmy, że funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny lub pewnego jej podzbioru. Możemy określić funkcję, która każdemu takiemu argumentowi przypisuje odpowiadającą mu wartość pochodnej.

Definicja

Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru A, to funkcję f', która każdemu elementowi $x \in A$ przyporządkowuje liczbę $f'(x)$, nazywamy **funkcją pochodną** (krócej – pochodną) funkcji f w zbiorze A.
Funkcję f nazywamy wtedy **różniczkowalną w zbiorze** A.

Określenia „pochodna" używa się więc w dwóch znaczeniach. Z kontekstu na ogół jasno wynika, czy mamy do czynienia z liczbą rzeczywistą, czy funkcją.

Często stosowanym zapisem funkcji pochodnej jest również $\left(f(x)\right)'$,
np. jeśli $f(x) = 3x + 5$, to $f'(x) = (3x + 5)'$.

Wprowadzimy oznaczenia:
D – dziedzina funkcji f, D' – dziedzina funkcji pochodnej f'.

Twierdzenie

Pochodne funkcji elementarnych

Lp.	Funkcja	Pochodna
1.	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2.	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
3.	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
4.	$f(x) = \frac{1}{x}, \quad D = \mathbf{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad D' = \mathbf{R} - \{0\}$
5.	$f(x) = \sqrt{x}, \quad D = \langle 0; \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D' = (0; \infty)$

Dowód

1. $f(x) = c,\ D = \mathbf{R},\ x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ jest $f'(x_0) = 0$. Zatem $(c)' = 0$.

2. $f(x) = ax + b,\ D = \mathbf{R},\ x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ jest $f'(x_0) = a$. Zatem $(ax+b)' = a$.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c,\ D = \mathbf{R},\ x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c\right]-\left[ax_0^2+bx_0+c\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2ax_0h+ah^2+bh}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax_0+ah+b) = 2ax_0+b$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ jest $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Zatem $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$.

4. $f(x) = \frac{1}{x},\ D = \mathbf{R}-\{0\},\ x_0 \in \mathbf{R}-\{0\}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x_0+h)x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}-\{0\}$ jest $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Zatem $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

5. $f(x) = \sqrt{x},\ D = \langle 0;\infty),\ x_0 \in (0;\infty)$ – funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie 0, bo nie istnieje żadne otoczenie tego punktu zawarte w dziedzinie funkcji.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Dla każdego $x_0 \in (0;\infty)$ jest $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Zatem $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Koniec dowodu

Przykład 1 ◀ zad. 7.4

Obliczymy wartości pochodnej danej funkcji f w punktach należących do zbioru A.

a) $f(x) = 3x^2 + x + \sqrt{6},\ A = \left\{-\sqrt{2},\ \frac{1}{3},\ 4\right\}$

b) $f(x) = \sqrt{x},\ A = \left\{2,\ \frac{1}{2},\ 25\right\}$

Rozwiązanie

a) $f(x) = 3x^2 + x + \sqrt{6}$, więc:

$f'(x) = 6x + 1$

$f'\left(-\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{2} + 1$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + 1 = 3$

$f'(4) = 25$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, więc:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$

W dalszych rozważaniach określenia „pochodna" będziemy zazwyczaj używać w odniesieniu do funkcji. Jeżeli natomiast będzie nam potrzebna wartość pochodnej w pewnym punkcie, wyraźnie to zaznaczymy.

Zwróćmy uwagę na pewną prawidłowość występującą w wyprowadzonych wzorach.

$f(x) = x = x^1$ $\qquad$ $f'(x) = 1$

$g(x) = x^2$ $\qquad$ $g'(x) = 2x$

$h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\qquad$ $h'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

$t(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Obserwacja zależności między funkcjami i ich pochodnymi prowadzi do sformułowania twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dana jest funkcja $f(x) = x^k$, gdzie k jest ustaloną liczbą rzeczywistą.
Dla każdego $k \neq 0$ i $k \neq 1$ pochodna funkcji f jest równa $f'(x) = kx^{k-1}$.

Przykład 2

Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Zapiszmy wzór funkcji w postaci $f(x) = x^k$.

$$f(x) = x\sqrt[3]{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$$

Stosujemy teraz twierdzenie.

$$f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

Twierdzenie

Działania na pochodnych

Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w pewnym zbiorze A. Prawdziwe są wzory:

1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ dla $k \in \mathbf{R}$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, jeżeli $g(x) \neq 0$

Dowód

Udowodnimy trzy z podanych wzorów. Skorzystamy z twierdzeń o działaniach na granicach funkcji podanych w temacie 3 (zobacz: twierdzenie na s. 290).

1. $$(k \cdot f(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) =$$
$$= k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x)$$

2. $$(f(x) + g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

$$5.\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x) - g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)\,g(x) - f(x)\,\big(g(x+h)-g(x)\big)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)\,g(x)}{h} - \frac{f(x)\,\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)\,g(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)\,\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}\big(g(x+h)\cdot g(x)\big)} =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Udowodnienie pozostałych wzorów pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Koniec dowodu

Wniosek

Funkcja wymierna postaci $f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$ (W i Q są wielomianami zmiennej x) jest różniczkowalna w każdym punkcie x takim, że $Q(x) \neq 0$, czyli $D = D'$.

Przykład 3

Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = 3x^6 - 5x^4 + 7$.

Rozwiązanie

Korzystamy kilkakrotnie ze wzorów podanych w twierdzeniu.

$$(3x^6 - 5x^4 + 7)' = \left(3x^6\right)' - \left(5x^4\right)' + 7' = 3\left(x^6\right)' - 5\left(x^4\right)' + 0 =$$

$$= 3\cdot 6x^5 - 5\cdot 4x^3 = 18x^5 - 20x^3$$

Odp.: $f'(x) = 18x^5 - 20x^3$

Przykład 4

Obliczymy pochodne funkcji: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 5$, $h(x) = x^2 + \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie

$f'(x) = 2x$, $g'(x) = 2x$, $h'(x) = 2x$.

Zauważmy, że różne funkcje f, g i h mają tę samą funkcję pochodną.

Przykład 5 ◀ zad. 7.5

Wyznaczymy pochodną funkcji zapisanej w postaci iloczynu.

a) $f(x) = \left(2x^2 + 1\right)(3x - 7)$

b) $f(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)(x - 2)$ dla $x \geqslant 0$

c) $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ dla $x \neq 0$

Rozwiązanie

Możemy albo wykonać mnożenie i potem obliczyć pochodną, albo wykorzystać wzór na pochodną iloczynu. Zastosujemy obydwa sposoby.

a) I sposób

$f(x) = \left(2x^2 + 1\right)(3x - 7) = 6x^3 - 14x^2 + 3x - 7$

$f'(x) = 18x^2 - 28x + 3$

II sposób

$f'(x) = 4x(3x - 7) + 3\left(2x^2 + 1\right) = 12x^2 - 28x + 6x^2 + 3 = 18x^2 - 28x + 3$

b) I sposób

$f(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)(x - 2) = x - 2 + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = x - 2 + x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}$

$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}$ dla $x > 0$

II sposób

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2) + \left(1 + \sqrt{x}\right) = \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + \sqrt{x} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}$ dla $x > 0$

c) I sposób

$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$

II sposób

$f'(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x^2 - 1\right) = 2x + 2 - 1 + \frac{1}{x^2} = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$

Przykład 6 ◀ zad. 7.6–7.8

Obliczymy pochodną funkcji

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{4x - 1}$ dla $x \neq \dfrac{1}{4}$.

b) $g(x) = 2x + \dfrac{5}{(x+3)^2}$ dla $x \neq -3$.

Rozwiązanie

a) Skorzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu.

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 5x + 3}{4x - 1}\right)' = \frac{\left(2x^2 - 5x + 3\right)'(4x - 1) - \left(2x^2 - 5x + 3\right)(4x - 1)'}{(4x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(4x - 5)(4x - 1) - \left(2x^2 - 5x + 3\right) \cdot 4}{(4x - 1)^2} = \frac{16x^2 - 24x + 5 - 8x^2 + 20x - 12}{(4x - 1)^2} = \frac{8x^2 - 4x - 7}{(4x - 1)^2}$$

b) Skorzystamy ze wzorów na pochodną sumy i na pochodną ilorazu.

$$g'(x) = (2x)' + \left(\frac{5}{x^2 + 6x + 9}\right)' = 2 + \frac{0 - 5(2x + 6)}{(x + 3)^4} = 2 - \frac{10}{(x + 3)^3}$$

Odp.: a) $f'(x) = \dfrac{8x^2 - 4x - 7}{(4x - 1)^2}$ b) $g'(x) = 2 - \dfrac{10}{(x + 3)^3}$

Przykład 7 ◀ zad. 7.10

Wyznaczymy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$.

Rozwiązanie

$$D = D' = \mathbf{R} - \{3\}$$

Równanie stycznej ma postać $y = ax + b$. Punktem styczności jest $A = (2,\ f(2)) = (2, -3)$, a współczynnik kierunkowy $a = f'(2)$.

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)'(x - 3) - (2x - 1)(x - 3)'}{(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3) - (2x - 1)}{(x - 3)^2} = \frac{-5}{(x - 3)^2}$$

$$a = f'(2) = \frac{-5}{(2 - 3)^2} = -5$$

$y = -5x + b$

$-3 = -10 + b$ ⟵ $A = (2, -3)$ należy do stycznej

$b = 7$

$y = -5x + 7$

Odp.: Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$ ma równanie $y = -5x + 7$.

Przykład 8 ◂ zad. 7.15

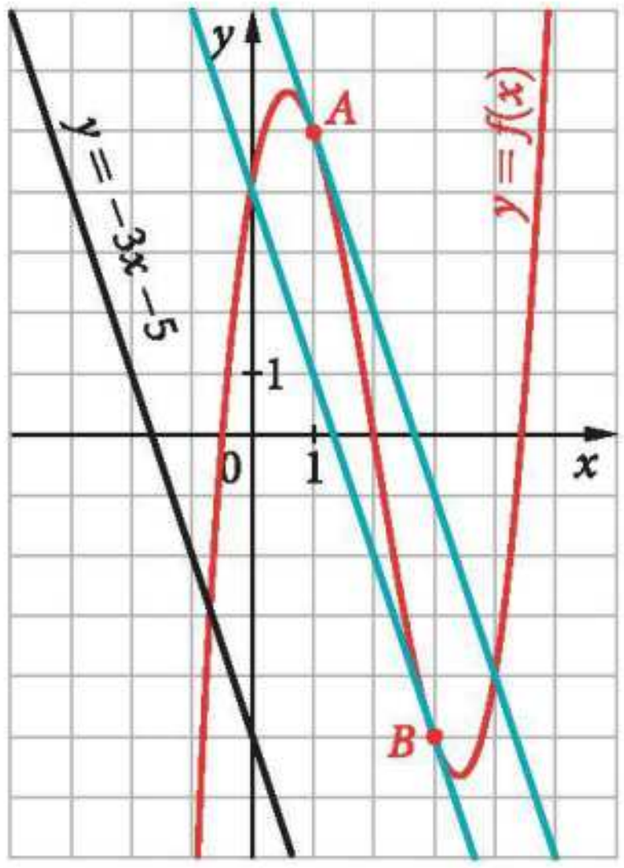
Wyznaczymy równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 4$ równoległych do prostej $y = -3x - 5$.

Rozwiązanie

$$D = D' = \mathbf{R}$$

Styczne mają równania postaci $y = -3x + b$.

Współczynnik b zależy od punktu styczności. Szukamy zatem takich punktów $\big(x_0, f(x_0)\big)$ należących do wykresu funkcji f, dla których spełniony jest warunek $f'(x_0) = -3$.



$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$$

Rozwiązujemy równanie $f'(x) = -3$.

$$3x^2 - 12x + 6 = -3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 3$$

Równanie ma dwa rozwiązania, zatem istnieją dwie styczne spełniające warunki zadania. Obliczamy współrzędne punktów styczności A i B.

$f(1) = 1 - 6 + 6 + 4 = 5$, czyli $A = (1, 5)$

$f(3) = 27 - 54 + 18 + 4 = -5$, czyli $B = (3, -5)$

Do równania $y = -3x + b$ podstawiamy współrzędne wyznaczonych punktów.

Dla punktu A mamy:

$5 = -3 \cdot 1 + b$, stąd $b = 8$, zatem styczna w punkcie A ma równanie $y = -3x + 8$.

Dla punktu B otrzymujemy:

$-5 = -3 \cdot 3 + b$, stąd $b = 4$, zatem styczna w punkcie B ma równanie $y = -3x + 4$.

Odp.: Styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 4$ równoległe do prostej $y = -3x - 5$ mają równania $y = -3x + 8$ i $y = -3x + 4$.

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ w punkcie $x_0 = -2$.

A. 0 **B.** 1 **C.** -4 **D.** 5

7.2. Wskaż liczbę punktów, w których pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 7$ jest równa 0.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** nieskończenie wiele

7.3. Wskaż współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$

7.4. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(-1)$, $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = -\sqrt{3}x$

b) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \sqrt{3}$

d) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \pi$

7.5. Wyznacz pochodną funkcji.

a) $f(x) = 5x^2 - 7x - 2$

b) $f(x) = -3x^4 - \sqrt{7}$

c) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x$

d) $f(x) = \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2}$

e) $f(x) = (2x+3)(x-1)$

f) $f(x) = \left(x^2 - 1\right)(4x+5)$

g) $f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right)\left(x^2 - 3x + 1\right)$

h) $f(x) = \left(9 - x^4\right)\left(x^2 + 6x\right)$

7.6. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

b) $f(x) = -\frac{3}{5x^5}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6}$

d) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - 3 + \frac{3}{2x^2}$

e) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

g) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}}$

i) $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot x^4$

7.7. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x + 3}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^4 + 2x^2 + 5}$

e) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - x - 3}$

f) $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$

g) $f(x) = \frac{x}{2x-3}$

h) $f(x) = -\frac{3-5x}{4x+3}$

7.8. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

a) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+2x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2x^2+x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x-2}{x^2+3x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{(2-x)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{2(4-x^2)}$

h) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-7x+10}$

7.9. Wyznacz dziedzinę i oblicz pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x} + \dfrac{2x}{x-1}$. Zapisz wynik w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

7.10. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o podanej odciętej x_0.

a) $f(x) = x^2 - x - 1$ $\quad x_0 = 3$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{2x^2} - 1\frac{1}{6}$ $\quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2+2}$ $\quad x_0 = 0$

7.11. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$ w punkcie o rzędnej $y_0 = 2$.

7.12. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ w punktach, w których wykres funkcji przecina oś x.

7.13. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$ nachylonej do osi x pod kątem 45°.

7.14. Prosta o równaniu $y = x+5$ przecina parabolę o równaniu $y = 2x^2 + 3x + 1$ w punktach A i B. Wyznacz równania stycznych do tej paraboli poprowadzonych w punktach A i B.

7.15. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x-3}{x}$ prostopadłych do prostej o równaniu $y = -3x - 5$.

7.16. Punkt $P = (-1, 1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + b}$, $b \neq 1$. Styczna do wykresu tej funkcji poprowadzona w punkcie P jest prostopadła do prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Wyznacz a i b.

7.17. Dana jest funkcja $f(x) = 2mx^2 - (m+1)x - 1$. Dla jakiej wartości parametru m styczna do wykresu funkcji f poprowadzona w punkcie o odciętej 1 jest równoległa do prostej o równaniu $y = 8x$?

7.18. Dla jakich wartości parametru k oś x jest styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + kx - 2$?

* **7.19.** Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 + 1$. Wyznacz współrzędne takich punktów A i B należących do wykresu funkcji f, aby styczne do wykresu poprowadzone w tych punktach przecinały się na osi rzędnych pod kątem prostym.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x + 5}{x + 3}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla każdego $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$ zachodzi $f'(x) < 0$.

B. $f'(0) < f'(1)$

C. $f'(0) > f'(-4)$

2. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 1}$.

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$$

w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.

4. Wyznacz równanie stycznej do paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 4x + 3$ równoległej do prostej o równaniu $y = 2x$.

5. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 4$, które przechodzą przez początek układu współrzędnych.

Najszybszy człowiek świata

Jamajczyk Usain Bolt to niekwestionowany król sprinterów – nikt na świecie nie biega tak szybko jak on. Nic więc dziwnego, że jest bohaterem wielu prac naukowych z różnych dziedzin, m.in. biomechaniki, kinematyki, antropometrii. Jak szybko może on biec?



Dane z najszybszego biegu

Rekordową prędkość Bolt osiągnął w 2009 r. na mistrzostwach świata w Berlinie. Ustanowił tam aktualny rekord świata w biegu na 100 m wynikiem 9,58 s.
Oto międzyczasy Bolta po każdym 10-metrowym odcinku:

Droga *s* [m]	Czas *t* [s]
10	1,88
20	2,88
30	3,78
40	4,64
50	5,47
60	6,29
70	7,10
80	7,92
90	8,74
100	9,58

Do wyznaczenia prędkości maksymalnej potrzebowalibyśmy danych z ciągłego pomiaru prędkości, a takimi nie dysponujemy. Spróbujemy więc odtworzyć zależność prędkości od czasu na podstawie tych 10 pomiarów.

Kłopotliwy nadmiar informacji

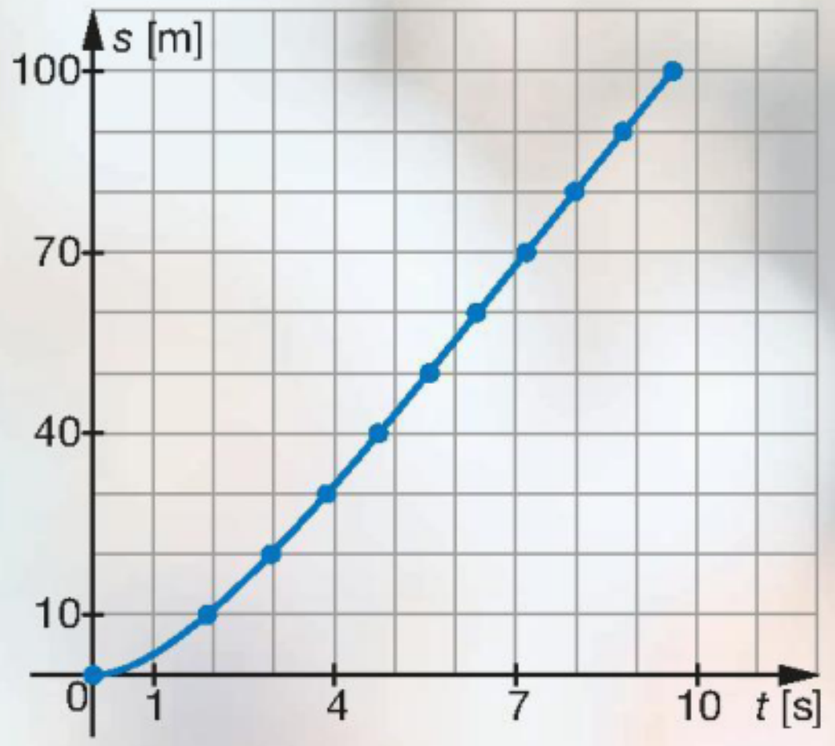
Podczas omawianego biegu laserowy pomiar odległości umożliwił zebranie danych z częstotliwością 100 klatek na sekundę, czyli ok. 1000 pomiarów. Na ich podstawie, wykorzystując rachunek pochodnych, stworzono wykres zależności prędkości Usaina Bolta od przebytej drogi (niebieska krzywa na wykresie). Pomiary były tak precyzyjne, że rejestrowały m.in. zmiany prędkości w różnych fazach kroków stawianych przez biegacza, co utrudniało interpretację wyników. Dlatego naukowcy za pomocą metod statystycznych znaleźli wygładzoną krzywą prędkości, wyczyszczoną z tych wahań (czerwona krzywa na wykresie). Dopiero z takiej krzywej odczytali m.in. maksymalną prędkość Bolta: 12,29 m/s.

Wyznaczanie prędkości maksymalnej

1 Zaczynamy od znalezienia wzoru funkcji, która jak najlepiej pasuje do danych z tabeli. Skorzystamy z narzędzi, które oferuje dział matematyki zwany **modelowaniem statystycznym**.

Poszukiwania zawęzimy do funkcji wielomianowych jak najniższego stopnia, by obliczenia nie były zbyt uciążliwe.

Za pomocą programu komputerowego znajdujemy wielomian szóstego stopnia, który ze wszystkich takich wielomianów jest najlepszym przybliżeniem nieznanej krzywej obrazującej zależność drogi od czasu.

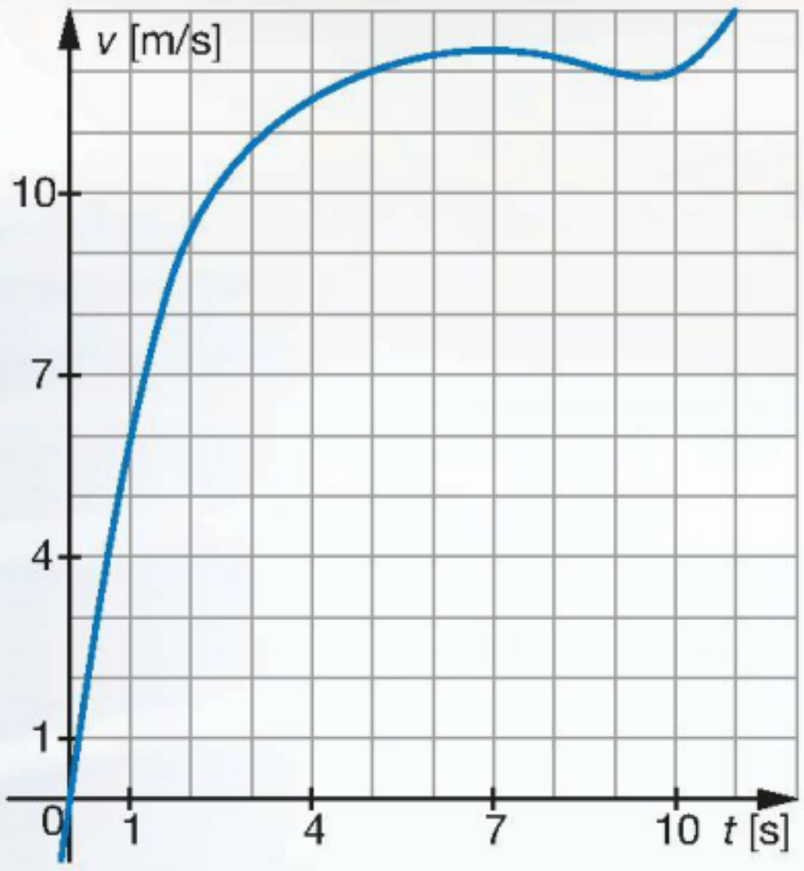


$$s(t) = 2{,}058827322 \cdot 10^{-4}t^6 - 7{,}567145067 \cdot 10^{-3}t^5 + 1{,}133345484 \cdot 10^{-1}t^4 - 9{,}142029249 \cdot 10^{-1}t^3 + \\ + 4{,}406474759t^2 - 3{,}942043457 \cdot 10^{-1}t - 3{,}943176944 \cdot 10^{-4}$$

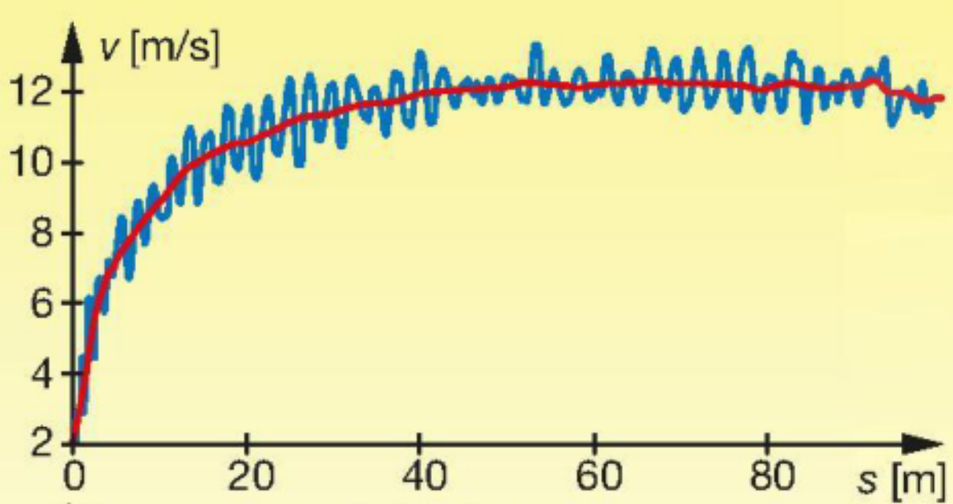
2 Z zależności drogi od czasu wyprowadzamy wzór na prędkość. Pochodna drogi jako funkcji czasu to właśnie prędkość: $v(t) = s'(t)$.

W naszym przypadku:

$$v(t) = s'(t) = 0{,}00123529639321t^5 - 0{,}03783572533501t^4 + \\ + 0{,}45333819360001t^3 - 2{,}74260877470001t^2 + \\ + 8{,}81294951800001t - 0{,}39420434570001$$



3 Teraz wystarczy wyznaczyć maksimum lokalne funkcji v. Program komputerowy podaje, że maksimum lokalne, równe w przybliżeniu 12,32 m/s, funkcja v przyjmuje dla $t \approx 6{,}89$ s. Zgodnie z naszym modelem statystycznym Usain Bolt największą prędkość równą 12,32 m/s osiągnął w siódmej sekundzie biegu.



Źródło: www.worldathletics.org

Uwaga. Oś pozioma to droga, a nie czas (jak w naszym modelu).



8. Pochodna funkcji złożonej

Umiejętności:

- wyznaczanie dziedziny funkcji złożonej
- obliczanie pochodnych funkcji złożonych

Pojęcie funkcji złożonej

Niech $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$.
Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ mamy $x^2 + 2x + 8 > 0$, więc dziedziną funkcji F jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapiszemy, tym razem z wyraźnym wskazaniem funkcji: $D_F = \mathbf{R}$.

Obliczmy wartość funkcji F na przykład dla $x_0 = 2$:

$$F(2) = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 8} = \sqrt{16} = 4$$

Zauważmy, że czynność tę wykonujemy w dwóch krokach.

Krok 1: Wyznaczamy wartość wielomianu $u = f(x) = x^2 + 2x + 8$.

$$u_0 = f(2) = 16$$

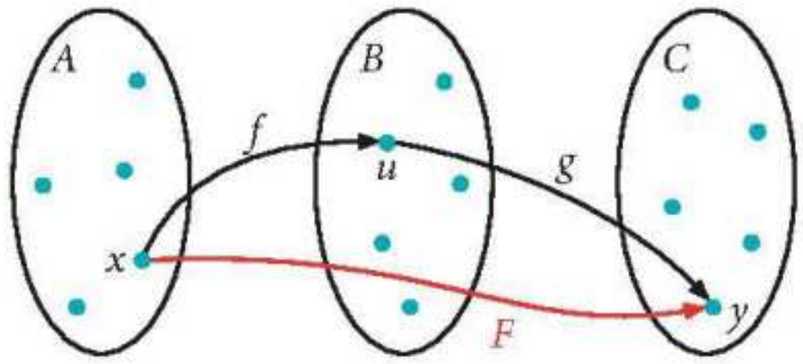
Krok 2: Wyznaczamy wartość pierwiastka zmiennej u, czyli $y = g(u) = \sqrt{u}$.

$$y_0 = g(16) = \sqrt{16} = 4, \text{ inaczej: } y_0 = g(f(2)) = \sqrt{16} = 4$$

Na funkcję F składają się zatem dwie funkcje: f i g o dziedzinach $D_f = \mathbf{R}$ i $D_g = \langle 0; \infty)$.

Opisaną wyżej sytuację przedstawimy teraz ogólnie. Niech dane będą trzy zbiory: A, B i C. Elementy zbioru A nazwiemy x, zbioru B – u, a zbioru C – y.

Na zbiorze A określona jest funkcja f, której wartości należą do zbioru B, a na zbiorze B określona jest z kolei funkcja g, której wartości należą do zbioru C. Funkcje zostały określone w taki sposób, że każdemu $x \in A$ odpowiada element $u = f(x)$ należący do zbioru B, któremu z kolei odpowiada element $y = g(u)$ w zbiorze C.



Zatem każdemu $x \in A$ odpowiada dokładnie jeden element $y = g(f(x)) \in C$. Inaczej mówiąc, na zbiorze A została określona (na rysunku oznaczona kolorem czerwonym) funkcja $F(x) = g(f(x))$.

Funkcję $F(x) = g(f(x))$ nazywamy **funkcją złożoną** z funkcji f i g oraz zapisujemy krótko $F = g \circ f$. Taki zapis oznacza, że, mówiąc potocznie, pierwszą działającą funkcją (nazywaną **funkcją wewnętrzną**) jest funkcja f, a następną (**funkcją zewnętrzną**) – funkcja g.

Omówiliśmy przykład złożenia dwóch funkcji. W podobny sposób można określić złożenie trzech i większej liczby funkcji.

Przykład 1 ◀ zad. 8.4

Określimy dziedzinę podanej funkcji złożonej oraz rozłożymy tę funkcję na funkcje: wewnętrzną f i zewnętrzną g.

a) $F(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

b) $F(x) = \sqrt{4x - x^2 - 6}$

c) $F(x) = \sin^2 x$

d) $F(x) = \sin x^2$

e) $F(x) = \log\left(1 - x^2\right)$

f) $F(x) = \sqrt{\log_2 x}$

Rozwiązanie

a) $F(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

$x^2 - x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$, więc $D_F = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$

$F = g \circ f$, gdzie $u = f(x) = x^2 - x - 6$, $g(u) = \sqrt{u}$

b) $F(x) = \sqrt{4x - x^2 - 6}$

Dla trójmianu $4x - x^2 - 6$ mamy $\Delta < 0$, więc dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $4x - x^2 - 6 < 0$. Zatem dziedzina tak określonej funkcji F jest zbiorem pustym – co oznacza, że taka funkcja nie istnieje.

c) $F(x) = \sin^2 x$

$D_F = \mathbf{R}$, $u = f(x) = \sin x$, $g(u) = u^2$

d) $F(x) = \sin x^2$

$D_F = \mathbf{R}$, $u = f(x) = x^2$, $g(u) = \sin u$

e) $F(x) = \log\left(1 - x^2\right)$

$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)$

$D_F = (-1; 1)$, $u = f(x) = 1 - x^2$, $g(u) = \log u$

f) $F(x) = \sqrt{\log_2 x}$

$x > 0$ i $\log_2 x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; \infty)$

$D_F = \langle 1; \infty)$, $u = f(x) = \log_2 x$, $g(u) = \sqrt{u}$

Podamy jeszcze twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Pochodna funkcji złożonej

Do obliczania pochodnej funkcji złożonej wykorzystamy twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Jeżeli w danej funkcji złożonej $F = g \circ f$ funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną $f'(x_0)$, a funkcja g ma w punkcie $u_0 = f(x_0)$ pochodną $g'(u_0)$, to funkcja złożona ma w punkcie x_0 pochodną $F'(x_0)$ równą iloczynowi $g'(u_0) \cdot f'(x_0)$.

$$F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Twierdzenie to uogólnimy na funkcje pochodne, przy założeniu, że funkcje f i g są różniczkowalne odpowiednio na zbiorach $D_{f'}$ i $D_{g'}$, i zapiszemy w postaci wzoru:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Zatem pochodna funkcji złożonej równa się iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej.

Przykład 2 ◂ zad. 8.5

Obliczymy pochodną danej funkcji złożonej F.

a) $F(x) = \left(x^3 + 2x^2 - 1\right)^{12}$ b) $F(x) = \sqrt{3x^4 + 5}$

Rozwiązanie

Najpierw rozkładamy funkcję F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną. Następnie korzystamy z twierdzenia i wyznaczamy pochodną F'.

a) $F(x) = \left(x^3 + 2x^2 - 1\right)^{12}$, $D_F = \mathbf{R}$

$u = f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, $g(u) = u^{12}$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$, $D_{f'} = \mathbf{R}$ ⟵ funkcja f jest wielomianem i jest różniczkowalna na $\mathbf{R}$

$g'(u) = 12u^{11}$, $D_{g'} = \mathbf{R}$ ⟵ funkcja g jest różniczkowalna na $\mathbf{R}$

Zatem zgodnie z twierdzeniem, $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, czyli:

$F'(x) = 12\left(x^3 + 2x^2 - 1\right)^{11} \cdot \left(3x^2 + 4x\right)$ ⟵ we wzorze $g'(u) = 12u^{11}$ wracamy do zależności $u = x^3 + 2x^2 - 1$

b) $F(x) = \sqrt{3x^4 + 5},\ D_F = \mathbf{R}$ ⟵ $3x^4 + 5 > 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$

$u = f(x) = 3x^4 + 5,\ g(u) = \sqrt{u}$

$f'(x) = 12x^3,\ D_{f'} = \mathbf{R}$ ⟵ funkcja f jest wielomianem i jest różniczkowalna na $\mathbf{R}$

$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}},\ D_{g'} = (0;\ \infty)$ ⟵ funkcja g jest różniczkowalna na $(0;\ \infty)$

Zatem zgodnie z twierdzeniem, $F'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$, czyli:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^4 + 5}} \cdot 12x^3 = \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 + 5}}$$

⟵ we wzorze $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ wracamy do zależności $u = 3x^4 + 5$

Przykład 3 ◂ zad. 8.6, 8.7

Wyznaczymy dziedziny D, D' funkcji f i f', a następnie obliczymy wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

a) $f(x) = \big(x^7 - x^5 + x^2 + 2\big)^3,\ x_0 = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8},\ x_0 = -2$

Rozwiązanie

a) $f(x) = \big(x^7 - x^5 + x^2 + 2\big)^3,\ D = \mathbf{R}$

$f'(x) = 3\big(x^7 - x^5 + x^2 + 2\big)^2 \cdot \big(7x^6 - 5x^4 + 2x\big),\ D' = \mathbf{R}$

$f'(1) = 3 \cdot (1 - 1 + 1 + 2)^2 \cdot (7 - 5 + 2) = 108$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8},\ D = (-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 4;\ \infty)$

$$f'(x) = (2x - 6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}},\ D' = (-\infty;\ 2) \cup (4;\ \infty)$$

$$f'(-2) = \frac{-2 - 3}{\sqrt{4 + 12 + 8}} = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

Przykład 4 ◂ zad. 8.8

Napiszemy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ poprowadzonej w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 1$.

Rozwiązanie

$D = \mathbf{R}$

Funkcja f jest różniczkowalna i $D' = \mathbf{R}$, więc istnieje styczna do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 1$. Styczna ma równanie postaci $y = ax + b$, gdzie $a = f'(1)$. Ponadto styczna przechodzi przez punkt $\big(x_0,\ f(x_0)\big) = (1,\ 2)$.

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$a = f'(1) = \frac{1}{2}$, więc $y = \frac{1}{2}x + b$

$$2 = \frac{1}{2} + b \qquad \longleftarrow \text{punkt } (1, 2) \text{ należy do stycznej}$$

$b = 1\frac{1}{2}$, czyli równanie stycznej: $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ (lub $x - 2y + 3 = 0$).

Odp.: $x - 2y + 3 = 0$

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Wskaż dziedzinę funkcji złożonej $F(x) = \cos(\log x)$.

A. R **B.** $\langle -1; 1\rangle$ **C.** $\langle 0; \infty)$ **D.** $(0; \infty)$

8.2. Wskaż funkcję zewnętrzną funkcji złożonej $F(x) = \log^3 x$.

A. $g(u) = u$ **B.** $g(u) = u^3$ **C.** $g(u) = \log u$ **D.** $g(u) = 3u$

8.3. Wskaż dziedzinę funkcji pochodnej $D_{f'}$ dla funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$.

A. $D_{f'} = \langle -5; 2\rangle$

B. $D_{f'} = (-\infty; -5) \cup (2; \infty)$

C. $D_{f'} = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 2; \infty)$

D. $D_{f'} = (-5; 2)$

8.4. Określ dziedzinę funkcji F, rozłóż F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną.

a) $F(x) = (3x - 1)^5$

b) $F(x) = \sqrt{4x - 3}$

c) $F(x) = \left(2x^2 - 4x + 11\right)^7$

d) $F(x) = \sqrt{6x^2 + 18x}$

e) $F(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 5}$

f) $F(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 15x}$

g) $F(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 14}$

h) $F(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 7x}$

8.5. Rozłóż funkcję F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną, oblicz pochodną F'.

a) $F(x) = \left(x^2 - 8x + 17\right)^{15}$

b) $F(x) = \sqrt{x^2 + 14x}$

c) $F(x) = \sqrt{x^4 - x^3 + 4x^2}$

d) $F(x) = \sqrt{12 + 6x - 4x^2 - 2x^3}$

8.6. Wyznacz dziedziny D i D' funkcji f i f', a następnie oblicz wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

a) $f(x) = \left(x^2 + 2x - 2\right)^4$ $\qquad x_0 = -2$

b) $f(x) = \left(x^5 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1\right)^3$ $\qquad x_0 = -1$

c) $f(x) = \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\right)^5$ $\qquad x_0 = \sqrt{2}$

8.7. Wyznacz dziedziny D i D' funkcji f i f', a następnie oblicz wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$, $x_0 = -3$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x - 2x^2}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$

c) $f(x) = 6\sqrt{x^3 - 4x}$, $x_0 = -1$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x^4}$, $x_0 = \frac{1}{4}$

8.8. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ poprowadzonej w punkcie o pierwszej współrzędnej x_0.

a) $f(x) = (3x + 1)^4$, $x_0 = -\frac{2}{3}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right)^3$, $x_0 = 2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $x_0 = 3$

d) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3}$, $x_0 = 1$

8.9. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 9}$ w punkcie o rzędnej $y_0 = 3$.

8.10. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \left(x^3 - 1\right)^7$ w punktach, w których wykres funkcji przecina oś x.

8.11. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 18}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 3$ i podaj kąt nachylenia tej stycznej do osi x.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $F(x) = \log_2 \sin x$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $D_F = (0; \infty)$

B. Funkcja F jest funkcją złożoną i $f(x) = \sin x$ jest funkcją wewnętrzną funkcji F.

C. Dla każdego $x \in D_F$ zachodzi $F(x) \leqslant 0$.

2. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = 3x\sqrt{x^4 + 1}$.

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \left(x^4 + 1\right)^5$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.

5. Wyznacz z dokładnością do 1° kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $g(x) = x^2$. Podaj współrzędne punktu przecięcia obydwu wykresów.

9. Monotoniczność i ekstrema funkcji różniczkowalnej

Umiejętności:

- korzystanie z własności pochodnej do znajdowania przedziałów monotoniczności funkcji
- wyznaczanie wartości ekstremalnych funkcji

Pochodną funkcji będziemy stosować do badania monotoniczności funkcji. Zaczniemy od wskazania związku między znakiem ilorazu różnicowego a faktem, że funkcja jest rosnąca lub jest malejąca.

Twierdzenie

- Funkcja $f\colon (a; b) \to \mathbf{R}$ jest rosnąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary liczb x_0, $h \neq 0$ takich, że $x_0 \in (a; b)$ i $x_0 + h \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$.
- Funkcja $f\colon (a; b) \to \mathbf{R}$ jest malejąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary liczb x_0, $h \neq 0$ takich, że $x_0 \in (a; b)$ i $x_0 + h \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$.

Dowód

- Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary argumentów należących do tego przedziału większą wartość przyporządkowuje większemu z nich. Oznacza to, że liczby h oraz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mają ten sam znak, czyli spełniona jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$.
- Funkcja f jest malejąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary argumentów należących do $(a; b)$ większą wartość przyporządkowuje mniejszemu z nich. Oznacza to, że liczby h oraz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mają przeciwne znaki, czyli spełniona jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$.

Koniec dowodu

Zauważmy, że dowód twierdzenia nie zmieni się, jeżeli przedział $(a; b)$ zastąpimy przedziałem $(a; \infty)$ lub przedziałem $(-\infty; b)$, lub zbiorem $\mathbf{R}$.

Pochodna $f'(x_0)$ jest granicą ilorazu różnicowego $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Przyjmijmy, że pochodna w punkcie x_0 jest dodatnia. Wynika z tego, że dla dostatecznie małych wartości h iloraz różnicowy też przyjmuje wartości dodatnie. Jeśli nierówność $f'(x_0) > 0$ jest spełniona dla każdego punktu $x_0 \in (a; b)$, to funkcja f jest w przedziale $(a; b)$ rosnąca.

Analogiczne rozumowanie prowadzimy dla ujemnej pochodnej w punkcie x_0 i funkcji malejącej.

Przypomnijmy:
Jeśli granicą ciągu jest liczba dodatnia, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Podobnie – jeśli granicą ciągu jest liczba ujemna, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są ujemne.

Podsumowaniem tych rozważań jest twierdzenie, którego dowód pominiemy.

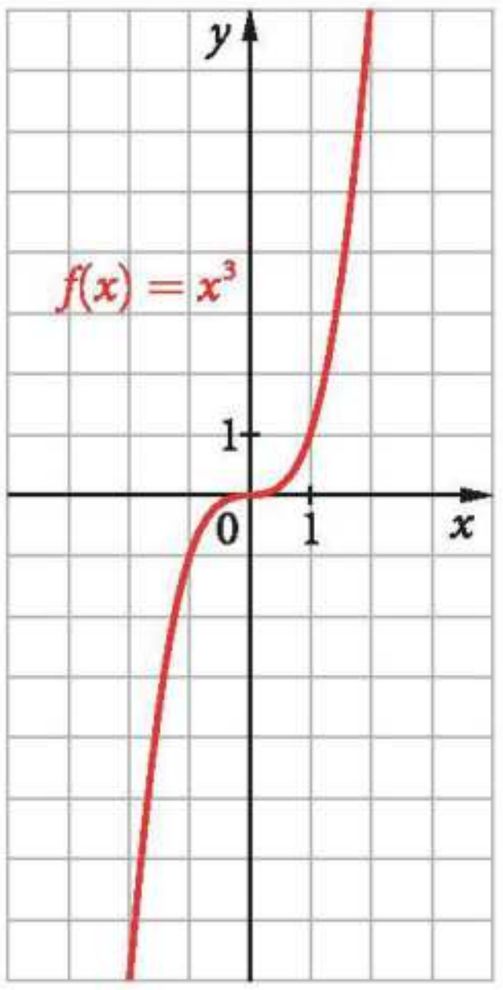
Twierdzenie

Dana jest funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **rosnąca.**
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **malejąca.**

Uwaga: Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych, a jej pochodna $f'(x) = 3x^2$ ma miejsce zerowe równe 0.



Można udowodnić twierdzenia słabsze:

- Jeśli funkcja f jest w przedziale $(a; b)$ rosnąca i różniczkowalna, to dla każdego $x \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) \geqslant 0$.
- Jeśli funkcja f jest w przedziale $(a; b)$ malejąca i różniczkowalna, to dla każdego $x \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) \leqslant 0$.

Przykład 1

Zbadamy monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 11$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $D = D' = \mathbf{R}$.

Badamy znak pochodnej. Rozwiązujemy nierówność $f'(x) > 0$.

$$3x^2 - 2x + 5 > 0, \quad \Delta = -56$$

$f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, zatem funkcja f jest rosnąca w całej dziedzinie.

Odp.: Funkcja $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 11$ jest rosnąca w $\mathbf{R}$.

W temacie 5 omówiliśmy własności funkcji ciągłych. Przypomnijmy niektóre z nich.

- Wielomiany, funkcje wymierne, trygonometryczne oraz $f(x) = \sqrt[n]{x}$ są funkcjami ciągłymi.
- Jeżeli $y = f(x)$ jest ciągła, to ciągłe są funkcje: $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(-x)$.
- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ i jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b\rangle$.

Przykład 2 ◂ zad. 9.4–9.6

Wyznaczymy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Rozwiązanie

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}, \quad D = D' = \mathbf{R}$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow -2(x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (-1; 1)$

Zatem w przedziale $\langle -1; 1\rangle$ funkcja f jest rosnąca.

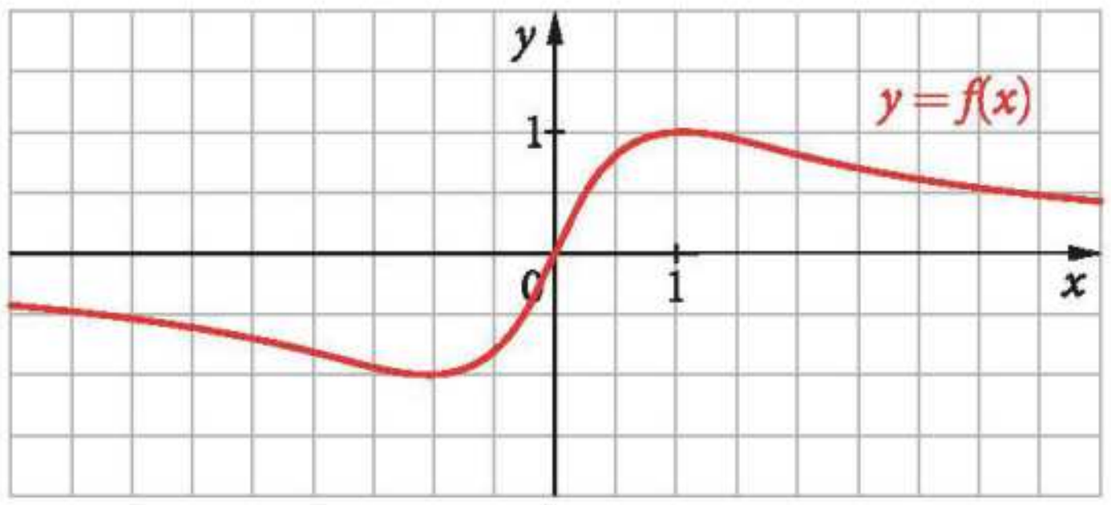
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

W każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$ oraz $\langle 1; \infty)$ funkcja f jest malejąca.

Przypomnijmy: z tego, że funkcja $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$, $\langle 1; \infty)$, **nie wynika**, że jest malejąca w zbiorze $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$.

Można się o tym przekonać, przyglądając się wykresowi tej funkcji, który prezentujemy obok.

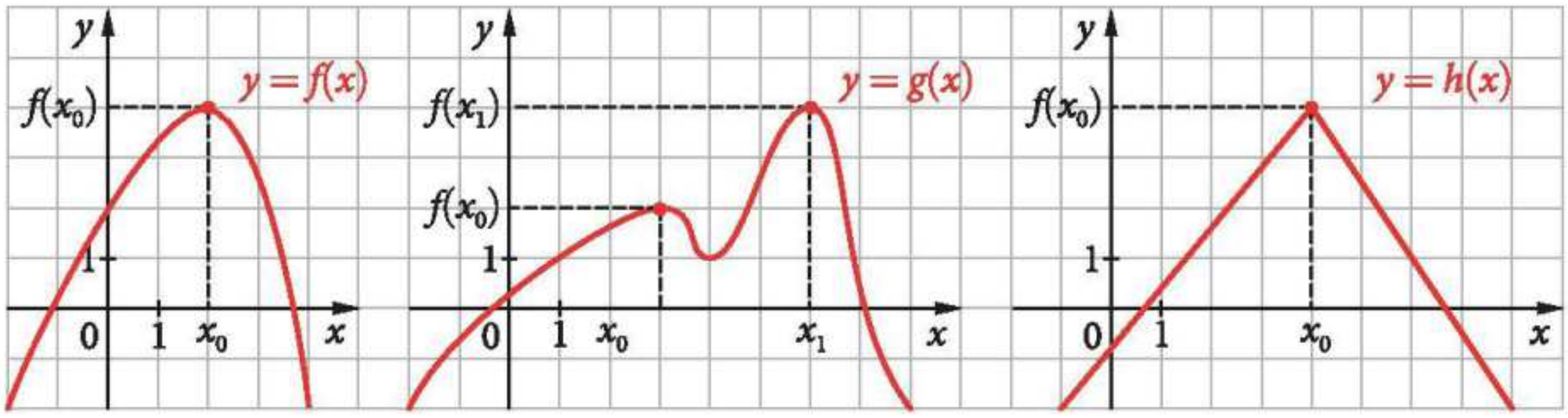
Odp.: Funkcja $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; \infty)$.



Ekstrema funkcji

Kiedy badamy własności różnych funkcji, często szukamy wartości maksymalnych i minimalnych przyjmowanych w określonym przedziale. Zagadnieniem tym dokładniej zajmiemy się w następnym temacie, natomiast teraz zdefiniujemy pojęcia, z których będziemy korzystać.

Przyjrzyjmy się rysunkom.

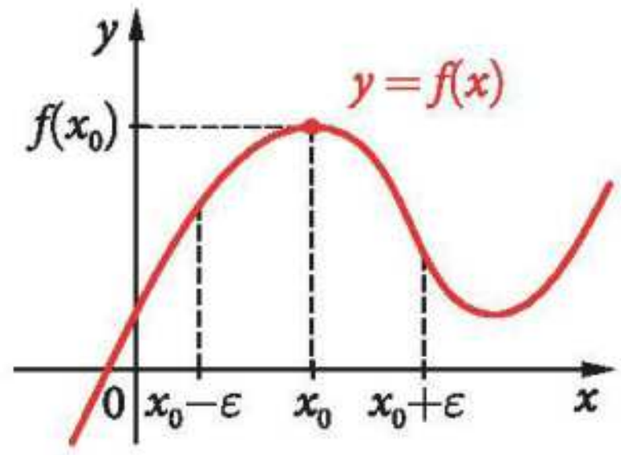


Zwróćmy uwagę na punkt x_0, w którym każda z funkcji f, g i h **lokalnie** przyjmuje wartość największą. Funkcja g również w punkcie x_1 ma lokalnie wartość największą.

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ **maksimum** $f(x_0)$, jeśli istnieje takie otoczenie punktu x_0 zawarte w D, że dla wszystkich $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$f(x) < f(x_0)$$

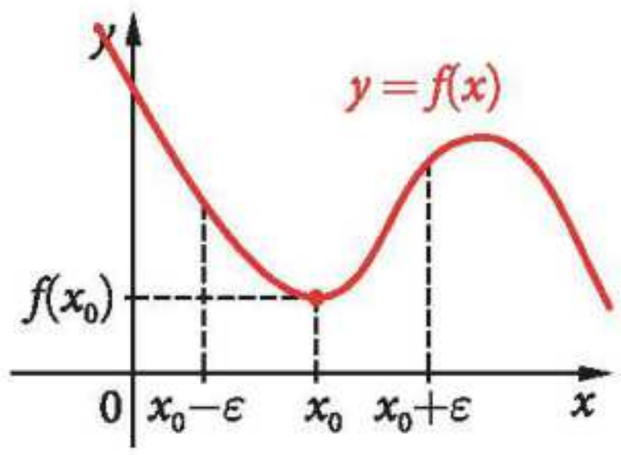


Podobnie określamy minimum funkcji w punkcie.

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ **minimum** $f(x_0)$, jeśli istnieje takie otoczenie punktu x_0 zawarte w D, że dla wszystkich $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$f(x) > f(x_0)$$

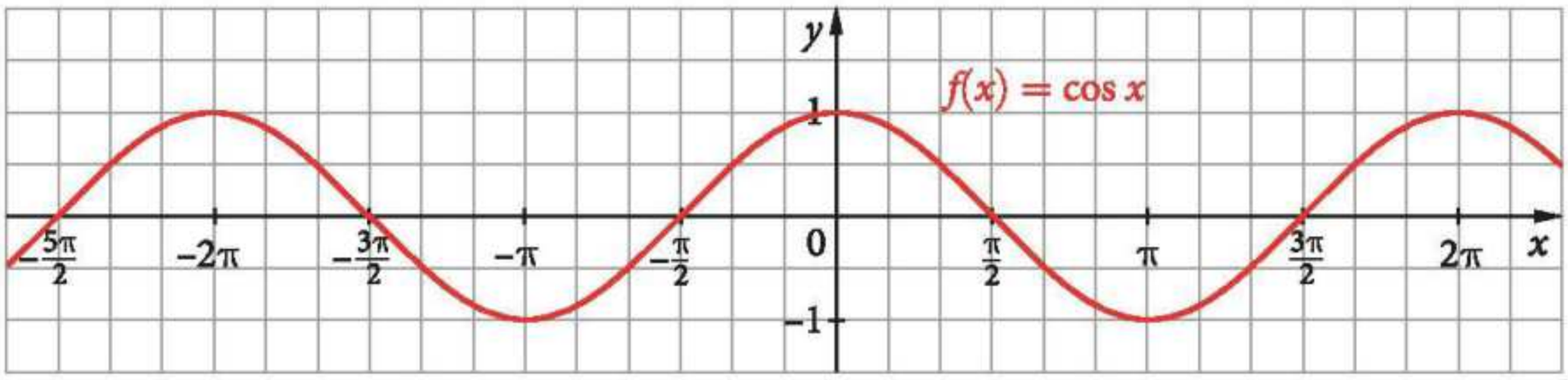


Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 **ekstremum**, jeżeli ma w tym punkcie maksimum lub minimum.

Zauważmy, że funkcja może przyjmować ekstremum w nieskończenie wielu punktach należących do dziedziny.

Na przykład funkcja $f(x) = \cos x$:

- we wszystkich punktach postaci $x_k = 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$ ma maksimum równe 1,
- we wszystkich punktach postaci $x_k = \pi + 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$ ma minimum równe -1.



Funkcja nie musi być różniczkowalna w punkcie, w którym ma ekstremum, np. nieposiadająca w $x_0 = 0$ pochodnej funkcja $f(x) = |x|$ ma w tym punkcie minimum.

Natomiast jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, w którym ma ekstremum, to styczna do wykresu w tym punkcie jest równoległa do osi x. Zachodzi zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ ma ekstremum w punkcie $x_0 \in (a; b)$, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód

Zgodnie z definicją funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a; b)$ maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że dla wszystkich punktów $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi $f(x) < f(x_0)$, a więc $f(x) - f(x_0) < 0$. Aby skorzystać z definicji pochodnej, zapiszemy x w postaci $x = x_0 + h$, gdzie $x_0 + h \in U$ i $h \neq 0$.

Mamy więc $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ dla $h \neq 0$ i $x_0 + h \in U$.

Jeżeli $h < 0$, to $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$, a gdy $h > 0$, to $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$.

Wynika stąd, że:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

Z założenia wiemy, że pochodna $f'(x_0)$ istnieje, więc obydwie pochodne jednostronne muszą być jej równe. Zatem z otrzymanych nierówności $f'(x_0) \geqslant 0$ i $f'(x_0) \leqslant 0$ mamy $f'(x_0) = 0$.

Dowód twierdzenia w przypadku, gdy f ma w punkcie $x_0 \in (a; b)$ minimum, przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

Warunek podany w twierdzeniu jest **warunkiem koniecznym**, ale nie wystarcza, by funkcja miała ekstremum. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ nie ma ekstremum w punkcie 0, chociaż $f'(0) = 0$. Dlatego do wyznaczania ekstremów funkcji stosuje się inne twierdzenie – **warunek wystarczający** do tego, by funkcja różniczkowalna miała ekstremum w punkcie x_0.

Twierdzenie

Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ punktu x_0 i różniczkowalna w punkcie x_0.

Jeżeli spełnione są warunki

- $f'(x_0) = 0$,
- $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$,

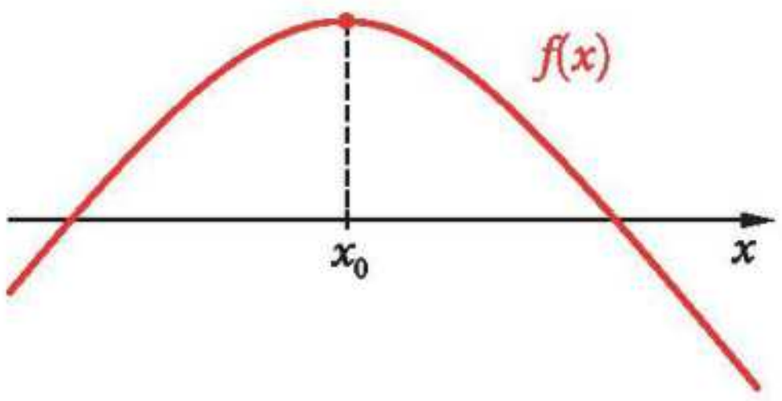
to funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum**.

Jeżeli natomiast spełnione są warunki

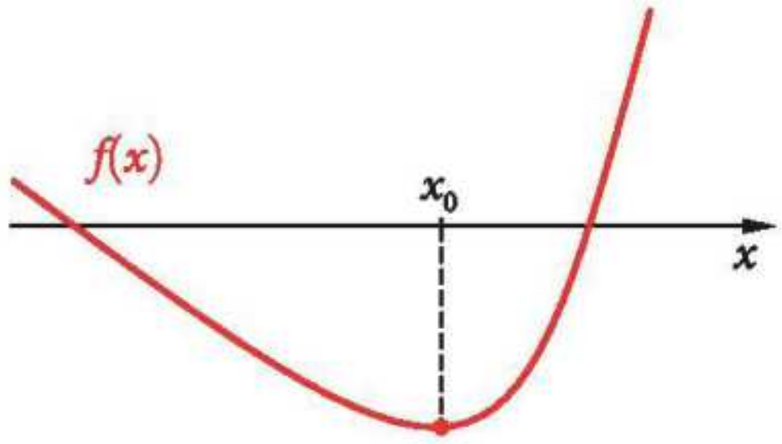
- $f'(x_0) = 0$,
- $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$,

to funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum**.

Warunki podane w twierdzeniu oznaczają, że w punkcie, w którym funkcja różniczkowalna ma ekstremum, pochodna tej funkcji **zmienia znak**.



W punkcie x_0 funkcja f ma maksimum:
dla $x < x_0$ jest $f'(x) > 0$,
dla $x > x_0$ jest $f'(x) < 0$.



W punkcie x_0 funkcja f ma minimum:
dla $x < x_0$ jest $f'(x) < 0$,
dla $x > x_0$ jest $f'(x) > 0$.

Przykład 3 ◂ zad. 9.7

Zbadamy, czy funkcja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ ma w jakimś punkcie ekstremum. Jeśli tak, to określimy, czy jest to minimum, czy maksimum oraz obliczymy jego wartość.

Rozwiązanie

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2), \quad D = D' = \mathbf{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ lub } x = 0, \quad f(-2) = -8 + 12 + 5 = 9, \quad f(0) = 5$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0)$$

Zebrane informacje zestawiamy w tabeli. W drugim wierszu zapisujemy własności pochodnej – jej znak w odpowiednich przedziałach oraz miejsca zerowe. W trzecim – własności funkcji: odpowiedni znak monotoniczności, nazwę ekstremum (o ile wystąpiło) i jego wartość.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	9 maks	↘	5 min	↗

Odp.: W punkcie $x = -2$ funkcja f ma maksimum równe 9, a w punkcie $x = 0$ ma minimum równe 5.

Przykład 4 ◂ zad. 9.8

Wyznaczymy ekstrema funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Rozwiązanie

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}, \quad D = D' = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \text{ i } x \in D' \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	nie istnieje	+	0	−	nie istnieje	−
$f(x)$	↗	nie istnieje	↗	0 maks	↘	nie istnieje	↘

Odp.: W punkcie $x = 0$ funkcja f ma maksimum równe 0.

Przykład 5 ◂ zad. 9.12

Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x) = \dfrac{x^2+mx}{x^2+2}$ ma maksimum w punkcie 2?

Rozwiązanie

$$f'(x) = \frac{(2x+m)\cdot\left(x^2+2\right)-\left(x^2+mx\right)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-mx^2+4x+2m}{(x^2+2)^2}, \quad D = D' = \mathbf{R}$$

Aby funkcja f miała ekstremum w $x = 2$, musi być spełniony warunek $f'(2) = 0$.

$$\frac{-m\cdot 2^2+4\cdot 2+2m}{(2^2+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -2m+8 = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

Jeżeli $m = 4$, to $f'(x) = \dfrac{-4x^2+4x+8}{(x^2+2)^2}$.

Zbadamy znak pochodnej, żeby sprawdzić, czy w punkcie $x = 2$ funkcja f rzeczywiście ma maksimum.

$$f'(x) = \frac{-4x^2+4x+8}{(x^2+2)^2} = \frac{-4\left(x^2-x-2\right)}{(x^2+2)^2} = \frac{-4(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;\, 2)$, $\quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\, -1)\cup(2;\, \infty)$.

x	$(-\infty;\, -1)$	-1	$(-1;\, 2)$	2	$(2;\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	maks	$\searrow$

Odp.: Dla $m = 4$.

Przykład 6 ◂ zad. 9.16

Zbadamy własności funkcji $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$ i naszkicujemy jej wykres.

Takie zadanie nazywamy badaniem przebiegu zmienności funkcji.
Obliczenia zostawiamy do samodzielnego wykonania.

Rozwiązanie

1. $D = D' = \mathbf{R} - \{-3,\, 1\}$ $\longleftarrow x^2+2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ i $x \neq 1$
2. Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $x^2-2x+3 > 0$, zatem:
   - funkcja f nie ma miejsc zerowych,
   - $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\, -3)\cup(1;\, \infty)$, $\quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3;\, 1)$.
3. Wyznaczamy granice funkcji na końcach przedziałów określoności.

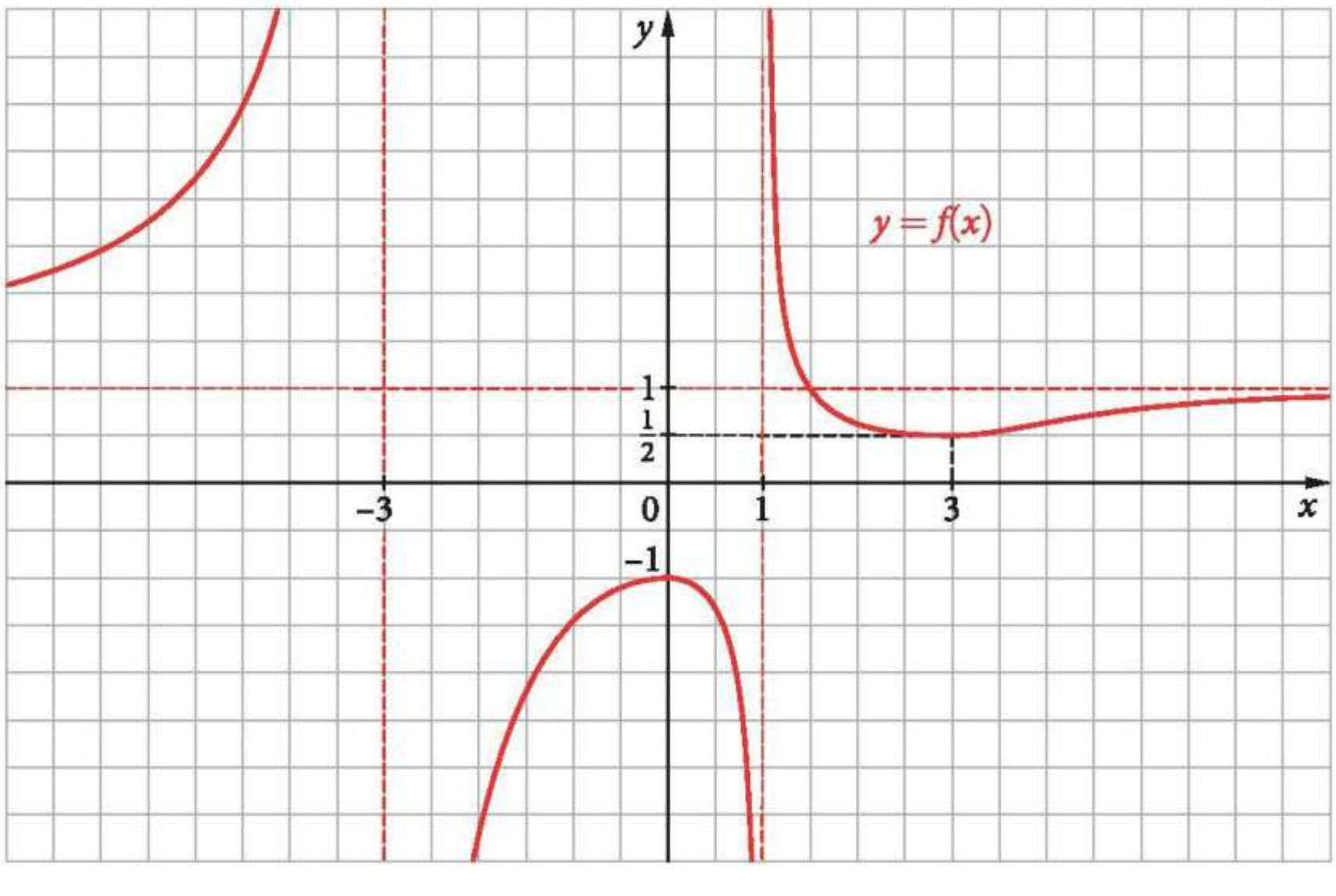
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

4. Asymptotą poziomą w $\pm\infty$ jest prosta $y = 1$, asymptotami pionowymi są proste: $x = -3$, $x = 1$.
5. Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = \dfrac{4x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$.
6. Po uwzględnieniu dziedziny pochodnej mamy:
   - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 3$,
   - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; \infty)$,
   - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 3)$.
7. Zebrane informacje zestawiamy w tabeli.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; \infty)$
$f'(x)$	$+$	nie istnieje	$+$	0	$-$	nie istnieje	$-$	0	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow \infty$	nie istnieje	$-\infty \nearrow$	-1 maks	$\searrow -\infty$	nie istnieje	$\infty \searrow$	$\frac{1}{2}$ min	$\nearrow 1$

8. Wykonujemy szkic wykresu funkcji.



9. Odczytujemy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ zależnie od wartości parametru m: nie ma rozwiązań dla $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$, ma dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$.
10. Zbiorem wartości funkcji jest suma przedziałów $(-\infty; -1\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wskaż punkt, w którym funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1989$ ma maksimum.

A. $x = \frac{1}{6}$ **B.** $x = -1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 0$

9.2. Wskaż punkt, w którym funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ ma minimum.

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 3$

9.3. Wskaż zbiór, w którym funkcja $f(x) = 4 - x^4$ jest malejąca.

A. $\langle -2; 2\rangle$ **B.** $\langle -\sqrt{2}; \infty)$ **C.** $(-\infty; 0\rangle$ **D.** $\langle 0; \infty)$

9.4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

c) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

9.5. Wyznacz przedziały, w których funkcja $f(x) = \frac{x^3}{2(4 - x^2)}$ jest malejąca.

9.6. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$.

D **9.7.** Wykaż, że funkcja $y = f(x)$ jest monotoniczna w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

b) $f(x) = -x^5 - 3x^3 - 5x + 3$

9.8. Wyznacz ekstrema funkcji.

a) $f(x) = \left(x^2 - 8\right)\left(x^2 - 10\right)$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 24$

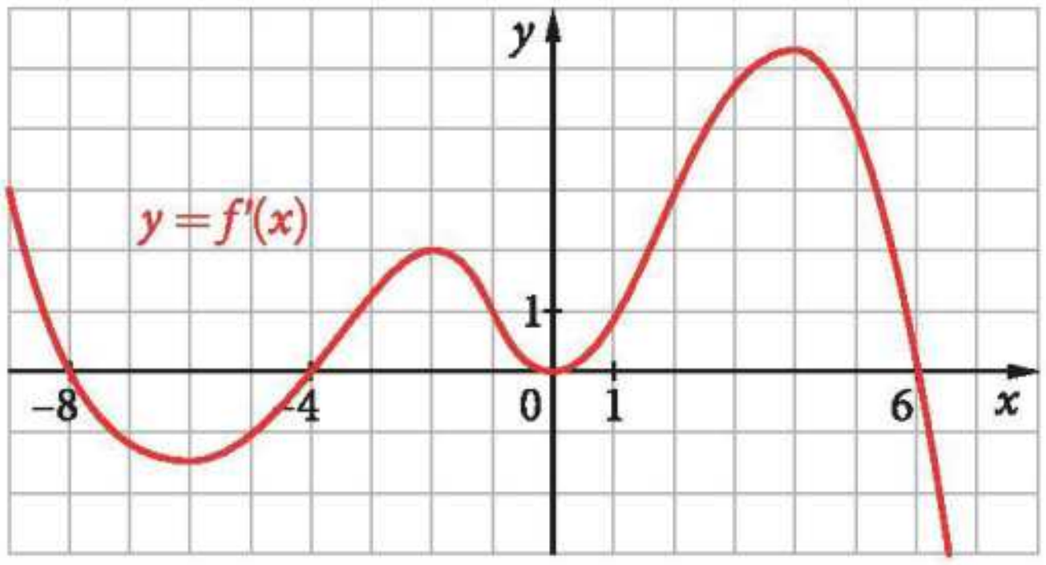
d) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$

e) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{1 - x}$

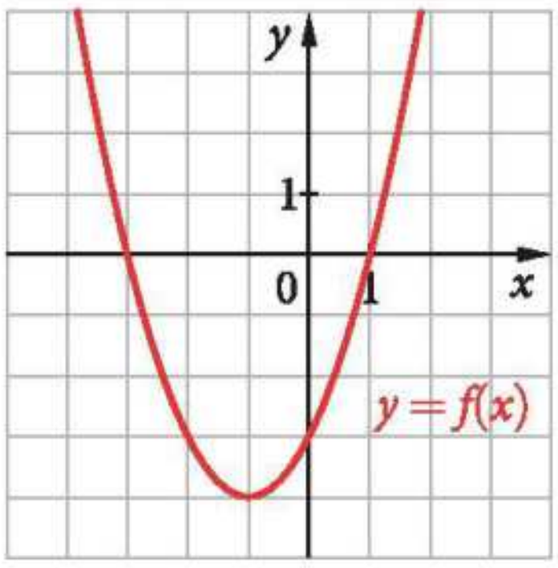
9.9. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \left(x^3 - 3x\right)^2$.

9.10. Na rysunku przedstawiono wykres pochodnej f' funkcji f. Na podstawie tego wykresu wyznacz punkty, w których funkcja f ma ekstremum. Określ rodzaj każdego ekstremum.

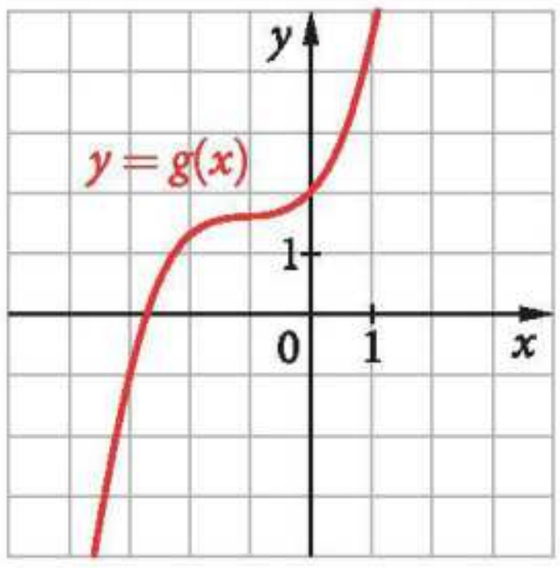


9.11. Na rysunkach I, II i III przedstawiono wykresy funkcji f, g i h, a na rysunkach A, B i C – wykresy ich pochodnych f', g' i h'. Dopasuj wykresy pochodnych do odpowiednich wykresów funkcji.

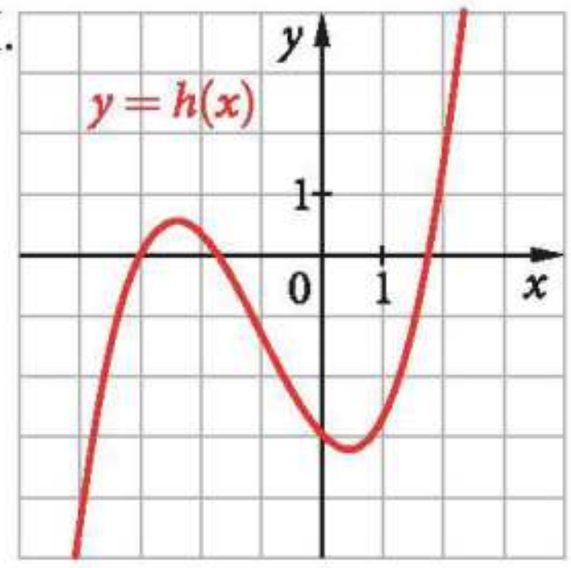
I.



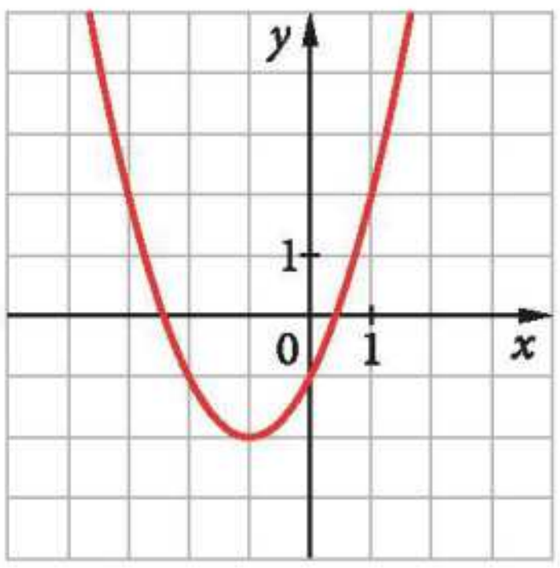
II.



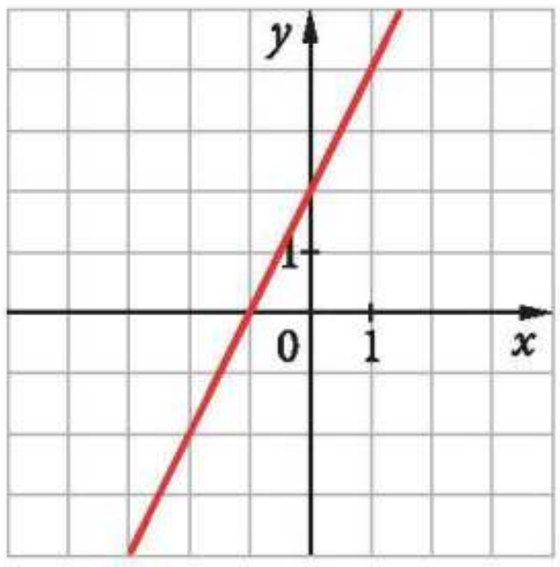
III.



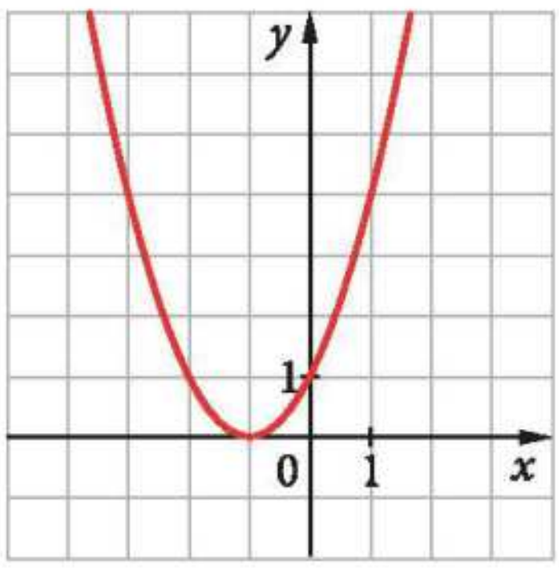
A.



B.



C.



9.12. Funkcja $f(x) = \dfrac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ ma ekstremum w punkcie $x = 2$. Ponadto wiadomo, że $f(2) = -1$. Wyznacz a i b.

9.13. Funkcja $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{(2-x)^2}$ ma ekstremum w punkcie $x = 0$. Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji. Wyznacz a i b.

9.14. Dla jakich wartości parametru m funkcja
$f(x)=\frac{m-2}{3}x^3+(2m-3)x^2+(5m-6)x$ jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}$?

9.15. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{dla } x\leqslant 1\\ 3-x & \text{dla } x>1\end{cases}$.
Zbadaj jej ciągłość i różniczkowalność, wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema. Naszkicuj wykres tej funkcji.

9.16. Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ c) $f(x)=\frac{4}{(x+2)^2}+x-3$ e) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-7x+10}$

b) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$ d) $f(x)=\frac{x^2+4}{(x-2)^2}$ f) $f(x)=\frac{4x^2-8x+3}{x^2-2x}$

Prosto do matury

1. Funkcja $y=f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(a;\ b)$ oraz w pewnym punkcie $x_0\in(a;\ b)$ jej pochodna ma wartość $f'(x_0)=0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Z podanych informacji wynika, że
A. styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest równoległa do osi x.
B. funkcja f może być malejąca w przedziale $(a;\ b)$.
C. funkcja f jest niemonotoniczna w przedziale $(a;\ b)$.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+3}$.

3. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{x}$.

4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x)=\frac{-x^2+mx+3}{x^2-2x}$ ma ekstremum w punkcie $x=1$? Jakie to ekstremum i jaką ma wartość?

D **5.** Funkcja $f(x)=x^3-3x+2$ ma ekstrema w punktach x_1 i x_2. Do wykresu funkcji f poprowadzono styczne w punktach o odciętych -2, 2, x_1 i x_2. Wykaż, że czworokąt ograniczony tymi stycznymi ma środek symetrii. Wyznacz współrzędne tego środka.

10. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji

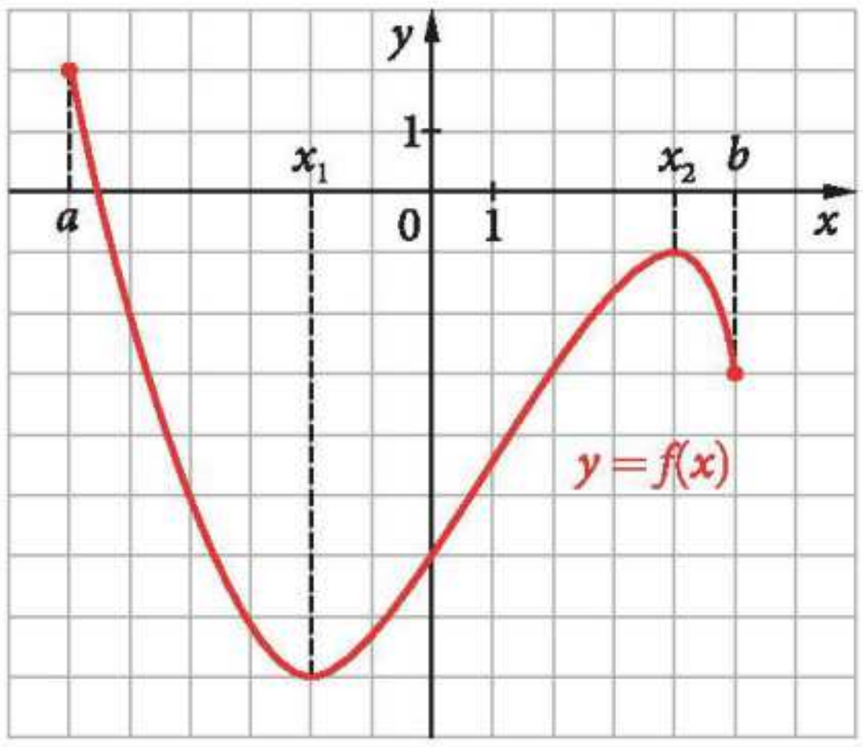
Umiejętności:

- wyznaczanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji w przedziale domkniętym
- stosowanie pochodnych do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych

W pierwszej klasie określaliśmy wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji na podstawie jej wykresu. Rozważaliśmy wtedy funkcję w całej dziedzinie albo w pewnym jej podzbiorze. W drugiej klasie wyznaczaliśmy wartości największe (najmniejsze) funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. To zadanie sprowadzało się do porównania wartości funkcji na końcach tego przedziału oraz w wierzchołku paraboli. Teraz będziemy szukać wartości największej i wartości najmniejszej funkcji wymiernej. Wykorzystamy do tego pochodną.

Zwróćmy uwagę, że maksimum lokalne nie musi być wartością największą funkcji w całej jej dziedzinie. Podobnie minimum lokalne nie musi być wartością najmniejszą.

Przyjrzyjmy się funkcji f, której wykres przedstawiono obok. Jej dziedziną jest przedział $\langle a; b\rangle$. W punkcie x_1 funkcja f ma minimum. Jest ono jednocześnie wartością najmniejszą tej funkcji. W punkcie x_2 funkcja f ma maksimum. Nie jest ono jednak wartością największą tej funkcji. Wartość największą funkcja f przyjmuje w punkcie a.



Wniosek

Dana jest funkcja f ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$ i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$. Aby wyznaczyć wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle a; b\rangle$, musimy porównać wartości funkcji w punktach, w których ma ona ekstrema, oraz jej wartości na końcach przedziału $\langle a; b\rangle$.

Przykład 1 ◀ zad. 10.1

Wyznaczymy wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 3$$

w przedziale $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$.

Rozwiązanie

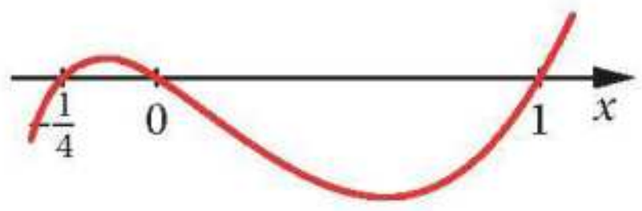
$$f'(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x\left(4x^2 - 3x - 1\right) = 8x\left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{4}, 0, 1\right\}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (1; \infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; 1)$$



W tabeli uwzględniamy tylko przedział $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$, więc obliczamy wartości funkcji tylko dla argumentów z tego przedziału.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{81} + 2 \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 3 = 2\frac{80}{81}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{256} + 2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{16} + 3 = 2\frac{125}{128}$$

$$f(0) = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = 2\frac{5}{8}$$

x	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$2\frac{80}{81}$	$\searrow$	$2\frac{125}{128}$ min	$\nearrow$	3 maks	$\searrow$	$2\frac{5}{8}$

Wartość największą równą 3 funkcja przyjmuje w $x = 0$. Jest to punkt, w którym funkcja ma maksimum.

Wartość najmniejszą równą $2\frac{5}{8}$ funkcja przyjmuje w $x = \frac{1}{2}$. Jest to jeden z końców przedziału $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$.

Odp.: W przedziale $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 3 dla $x = 0$ oraz wartość najmniejszą równą $2\frac{5}{8}$ dla $x = \frac{1}{2}$.

Przykład 2 ◂ zad. 10.3

Liczbę 10 przedstawimy w postaci sumy dwóch nieujemnych składników tak, aby suma sześcianu jednego z nich i kwadratu drugiego z nich była najmniejsza.

Rozwiązanie

Oznaczmy literą x jeden ze składników sumy. Wówczas:

$$10 = x + (10 - x)$$

Z warunków zadania wynika, że $x \in \langle 0;\ 10\rangle$, bo oba składniki muszą być nieujemne.

Określamy funkcję zgodnie z założeniami zadania:

$$f(x) = x^3 + (10 - x)^2 = x^3 + x^2 - 20x + 100, \quad D = \langle 0;\ 10\rangle$$

Szukamy argumentu, dla którego funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 20, \quad D' = (0;\ 10)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 20 = 0 \text{ i } x \in D' \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{61} - 1}{3};\ 10\right)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0;\ \frac{\sqrt{61} - 1}{3}\right)$$

x	$\left(0;\ \frac{\sqrt{61}-1}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{61}-1}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{61}-1}{3};\ 10\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Dla $x = \frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ funkcja osiąga minimum. W przedziale $\left(0;\ \frac{\sqrt{61} - 1}{3}\right)$ funkcja maleje, a w przedziale $\left(\frac{\sqrt{61} - 1}{3};\ 10\right)$ rośnie, więc w punkcie $x = \frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą. Zatem składniki, na jakie należy rozłożyć liczbę 10, są równe $\frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ i $10 - \frac{\sqrt{61} - 1}{3} = \frac{31 - \sqrt{61}}{3}$.

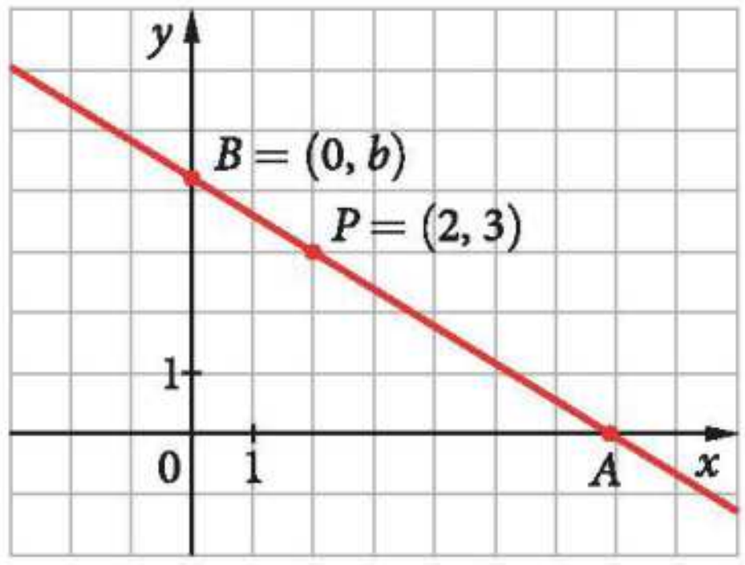
Odp.: Liczbę 10 należy zapisać w postaci sumy składników równych $\frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ i $\frac{31 - \sqrt{61}}{3}$.

Przykład 3 ◂ zad. 10.6

Przez punkt $P = (2,\ 3)$ przechodzą proste, które wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych ograniczają trójkąty o kącie prostym przy wierzchołku $O = (0,\ 0)$. Wyznaczymy równanie tej prostej, dla której pole takiego trójkąta jest najmniejsze.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wyznaczymy najpierw równanie prostej AB w zależności od parametru b.



$$y = ax + b$$
$$3 = 2a + b \qquad \longleftarrow P = (2, 3) \text{ należy do prostej } AB$$
$$a = \frac{3-b}{2}$$
$$y = \frac{3-b}{2}x + b$$

Do obliczenia pola trójkąta potrzebna jest pierwsza współrzędna punktu A.

$$\frac{3-b}{2}x + b = 0, \text{ więc } x = \frac{-2b}{3-b} = \frac{2b}{b-3}, \text{ czyli } A = \left(\frac{2b}{b-3}, 0\right).$$

Z warunków zadania wynika, że $b > 3$, bo w przeciwnym razie prosta PB nie przecinałaby dodatniej półosi x układu współrzędnych.
Wyznaczamy długości odcinków OA i OB.

$$|OA| = \left|\frac{2b}{b-3}\right| = \frac{2b}{b-3} \qquad \longleftarrow b > 3$$
$$|OB| = |b| = b$$

Pole trójkąta OAB zapisujemy jako funkcję zmiennej b:

$$S(b) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{b^2}{b-3}$$

Zatem interesuje nas najmniejsza wartość funkcji $S(b) = \frac{b^2}{b-3}$, $D = D' = (3; \infty)$.

$$S'(b) = \frac{2b(b-3) - b^2}{(b-3)^2} = \frac{b^2 - 6b}{(b-3)^2} = \frac{b(b-6)}{(b-3)^2}$$

$$S'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{b(b-6)}{(b-3)^2} = 0 \text{ i } b \in D' \Leftrightarrow b = 6$$

$$S'(b) < 0 \Leftrightarrow b \in (3; 6); \quad S'(b) > 0 \Leftrightarrow b \in (6; \infty)$$

b	$(3; 6)$	6	$(6; \infty)$
$S'(b)$	$-$	0	$+$
$S(b)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

W $b = 6$ funkcja ma minimum. Jest ono najmniejszą wartością funkcji w dziedzinie.
Zatem $b = 6$, $a = \frac{3-6}{2} = -\frac{3}{2}$ i szukana prosta AB ma równanie $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

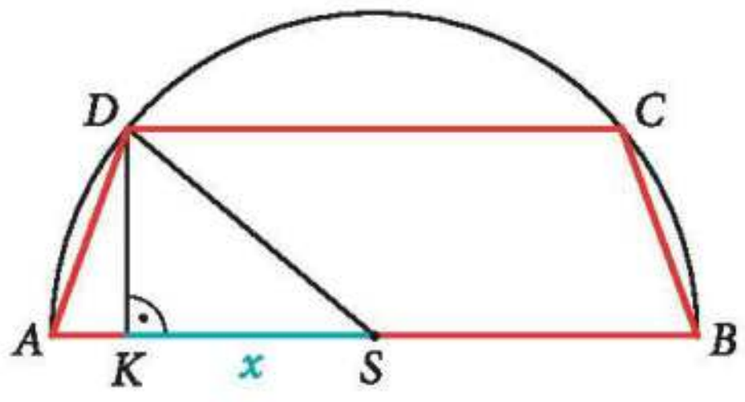
Odp.: Prosta, która wyznacza trójkąt o najmniejszym polu, ma równanie $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

Przykład 4 ◂ zad. 10.8

W półkole o promieniu 1 wpisujemy trapezy, których dłuższa podstawa jest średnicą półkola. Znajdziemy największe możliwe pole takiego trapezu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
S jest środkiem średnicy AB.
Niech $x = |KS| = \frac{1}{2}|CD|$. Z warunków zadania wynika, że $x \in (0;\ 1)$.



Z trójkąta prostokątnego KSD wyznaczamy wysokość trapezu $|KD| = \sqrt{1 - x^2}$.
Zatem pole dowolnego trapezu spełniającego warunki zadania możemy przedstawić jako funkcję zmiennej x:

$$P(x) = \frac{1}{2}(2 + 2x)\sqrt{1 - x^2} = (1 + x)\sqrt{1 - x^2},\ D = (0;\ 1)$$

Szukamy największej wartości funkcji $P(x)$.

I sposób

Do obliczenia pochodnej funkcji $P(x)$ wykorzystamy wzory na pochodną iloczynu oraz pochodną funkcji złożonej.

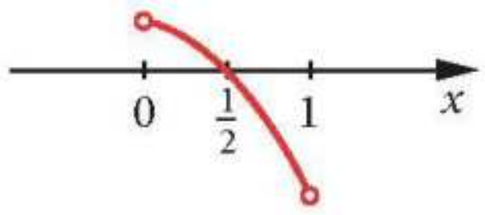
$$P'(x) = \left[(1 + x)\sqrt{1 - x^2}\right]' = (1 + x)' \cdot \sqrt{1 - x^2} + (1 + x) \cdot \left(\sqrt{1 - x^2}\right)' =$$

$$= \sqrt{1 - x^2} + (1 + x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2} + \frac{-x - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x^2 - x - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1 - x^2}},\quad D' = (0;\ 1)$$

Mianownik jest dodatni w każdym punkcie dziedziny, zatem w dalszych rachunkach można go pominąć.

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 = 0 \text{ i } x \in (0;\ 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 > 0 \text{ i } x \in (0;\ 1) \Leftrightarrow x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$$

$$P'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 < 0 \text{ i } x \in (0;\ 1) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right)$$

x	$\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$
$P'(x)$	+	0	−
$P(x)$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ maks	↘

W punkcie $x = \frac{1}{2}$ funkcja P ma maksimum. Jest ono jednocześnie największą wartością funkcji w przedziale $(0;\ 1)$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

II sposób

Zapiszemy wzór funkcji w innej, równoważnej postaci. Dla $x \in (0;\ 1)$ wyrażenie $1 + x > 0$, zatem:

$$P(x) = \sqrt{(1+x)^2(1-x^2)} = \sqrt{(x^2+2x+1)(1-x^2)} = \sqrt{-x^4-2x^3+2x+1}$$

Funkcja $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca, zatem funkcja $P(x) = \sqrt{g(x)}$ przyjmie wartość największą w punkcie, w którym wartość największą osiągnie funkcja $g(x)$.

Zbadamy monotoniczność funkcji $g(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ w przedziale $(0;\ 1)$.

$$g'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2 = -2(x+1)\left(2x^2 + x - 1\right) = -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ i } x \in (0;\ 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \text{ i } x \in (0;\ 1) \Leftrightarrow x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \text{ i } x \in (0;\ 1) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right)$$

x	$\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	maks	$\searrow$
$P(x) = \sqrt{g(x)}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ maks	$\searrow$

W punkcie $x = \frac{1}{2}$ funkcja g ma maksimum. Jest ono jednocześnie największą wartością funkcji g w przedziale $(0;\ 1)$. Taką samą własność ma funkcja $P(x) = \sqrt{g(x)}$.

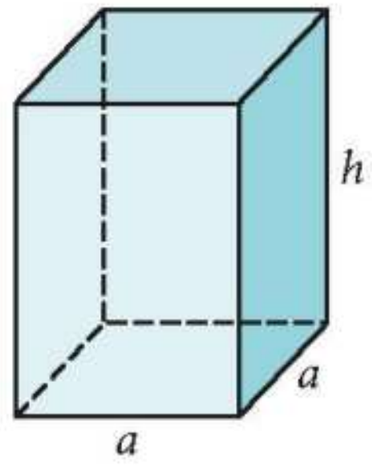
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Odp.: Największe pole trapezu spełniającego warunki zadania jest równe $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Przykład 5 ◂ zad. 10.9

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 84. Jaką wysokość ma prostopadłościan o podanych własnościach i największej możliwej objętości?

Rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: a jest długością krawędzi podstawy, h – długością krawędzi bocznej, czyli wysokością prostopadłościanu.

$$V = a^2 \cdot h \qquad (1)$$ ⟵ objętość prostopadłościanu

Z warunków zadania mamy:

$$8a + 4h = 84$$
$$2a + h = 21$$
$$h = 21 - 2a \qquad (2)$$

Zauważmy, że h i a, jako długości odcinków, przyjmują tylko wartości dodatnie.

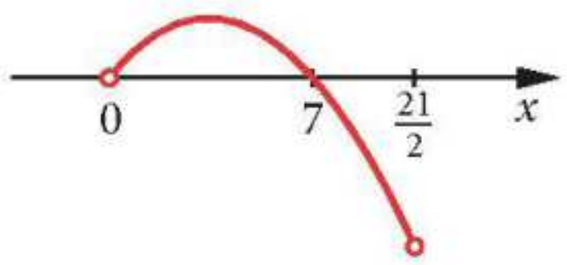
Zatem w szczególności z warunku $h > 0$ wynika, że $a \in \left(0; \frac{21}{2}\right)$.

Wyrażoną zależność wysokości od wartości a podstawiamy do równości (1) i otrzymujemy objętość zależną już tylko od jednej zmiennej:

$$V(a) = a^2 \cdot (21 - 2a), \quad D = \left(0; \frac{21}{2}\right)$$

Zbadamy, dla jakich wartości a funkcja $V(a)$ przyjmuje wartość największą.

$$V(a) = a^2 \cdot (21 - 2a) = -2a^3 + 21a^2$$
$$V'(a) = -6a^2 + 42a = -6a(a - 7)$$
$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 7$$ ⟵ $a = 0$ nie należy do dziedziny funkcji
$$V'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (0; 7)$$
$$V'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(7; \frac{21}{2}\right)$$



a	$(0; 7)$	7	$\left(7; \frac{21}{2}\right)$
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	↗	343 maks	↘

W punkcie $a = 7$ funkcja V ma maksimum. Jest ono jednocześnie największą wartością funkcji w przedziale $\left(0; \frac{21}{2}\right)$.

Pytanie w zadaniu dotyczyło wartości h, zatem $a = 7$ podstawiamy do zależności (2) i stąd:

$h = 21 - 2 \cdot 7 = 7$ ⟵ prostopadłościan jest wówczas sześcianem

$V(7) = 343$

Odp.: Największą objętość ma prostopadłościan o wysokości 7, czyli sześcian.

Zadania

10.1. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

w przedziale $\langle -2;\ 4\rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

10.2. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$ w przedziale $\langle -4;\ -1\rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

10.3. Liczbę 8 przedstaw w postaci sumy dwóch nieujemnych składników tak, aby suma sześcianu jednego z nich i kwadratu drugiego z nich była najmniejsza.

10.4. Wyznacz współrzędne takiego punktu należącego do paraboli $y = x^2$, którego odległość od punktu $P = (-5, -1)$ jest najmniejsza.

10.5. Na hiperboli o równaniu $y = \dfrac{4}{x}$ wybrano punkty $A = (-1, -4)$ i $B = (-2, -2)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu C o dodatniej odciętej należącego do tej hiperboli, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

10.6. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, 4)$ i odcinającej na dodatnich półosiach układu współrzędnych odcinki o wspólnym końcu $(0, 0)$, których suma długości jest najmniejsza.

10.7. W figurę ograniczoną parabolą o równaniu $y = -x^2 - 6x + 27$ i osią odciętych wpisano prostokąt o największym możliwym polu. Oblicz to pole.

10.8. W półkole o promieniu 1 wpisano prostokąt o największym możliwym polu. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

10.9. Jaką największą objętość może mieć prostopadłościan o sumie długości wszystkich krawędzi równej 60, mający w podstawie prostokąt o stosunku długości boków $2 : 1$?

10.10. Na podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego opisano okrąg. Suma wysokości ostrosłupa i promienia tego okręgu jest równa 2. Wyznacz promień okręgu, przy którym objętość ostrosłupa spełniającego podane warunki jest największa.

D **10.11.** Wykaż, że ze wszystkich graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o sumie długości krawędzi równej 12 największą objętość ma sześcian o krawędzi 1.

D * **10.12.** Wykaż, że ze wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości V najmniejsze pole powierzchni całkowitej ma ten, którego krawędź podstawy jest równa $\sqrt[3]{4V}$.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wartość największa funkcji f w przedziale $\langle -1; 2\rangle$ jest równa 7.
B. Wartość największa funkcji f w przedziale $\langle -1; 3\rangle$ jest równa 7.
C. Wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -3; 3\rangle$ jest równa -9.

2. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 10x + 16}$$

w przedziale $\langle -6; 0\rangle$. Podaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

3. Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest mniejsza od 1 i $a_{51} = 1$. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$.

4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (2, 2)$, $B = (-2, 0)$, $C = (0, -2)$. Przez punkt $P = (1, 1)$ poprowadzono prostą k o ujemnym współczynniku kierunkowym. Prosta k przecina bok AB w punkcie M i bok AC w punkcie N. Wyznacz taką wartość współczynnika kierunkowego prostej k, dla której pole trójkąta AMN jest najmniejsze.

5. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 9. Jaką największą objętość może mieć taki graniastosłup?

11. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–15 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż ciąg zbieżny do liczby 3.

A. $a_n = \frac{3n - n}{n^2 + 1}$ **B.** $a_n = \frac{3n^3 - n}{n^2 + 1}$ **C.** $a_n = \frac{n - 3n^2}{n^2 + 1}$ **D.** $a_n = \frac{n - 3n^3}{n^2 - n^3}$

2. Wskaż wartość sumy szeregu geometrycznego $12 - 8 + \frac{16}{3} - \frac{32}{9} + \ldots$

A. 4 **B.** $\frac{36}{5}$ **C.** 20 **D.** 36

3. Wskaż granicę ciągu $a_n = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.

A. 0 **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $\frac{5}{36}$ **D.** ∞

4. Wskaż funkcję, dla której spełniony jest warunek $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$.

A. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ **B.** $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ **C.** $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ **D.** $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$

5. Wskaż wartość $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$.

A. -2 **B.** 0 **C.** 2 **D.** π

6. Wskaż $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x - 1}$.

A. $-\infty$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** 0

7. Wskaż funkcję, dla której spełniony jest warunek $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$.

A. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ **B.** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ **C.** $f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)^2}$ **D.** $f(x) = \frac{x^3}{|x + 1|}$

8. Wskaż wartość m, dla której funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ m & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

A. -2 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

18. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q. Szereg geometryczny $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. Zatem ciąg (a_n)

A. może być zbieżny do 1.
B. może nie być monotoniczny.
C. może być rozbieżny.

19. Funkcja określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

A. jest ciągła w punkcie 0.
B. jest różniczkowalna w punkcie 0.
C. ma minimum lokalne w punkcie 0.

20. Pochodna funkcji $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 7$ może przyjąć wartość

A. 0. **B.** 1. **C.** 2.

21. Prosta k o podanym wzorze jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = 1 - x^2$.

A. k: $y = 2x + 2$ **B.** k: $y = 1$ **C.** k: $y = -4x + 4$

22. Prosta $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji różniczkowalnej $y = f(x)$.

Liczba rozwiązań układu równań $\begin{cases} y = ax + b \\ y = f(x) \end{cases}$ może być równa

A. 0. **B.** 1. **C.** 2.

23. Istnieją takie funkcje $f(x)$ i $g(x)$, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ oraz

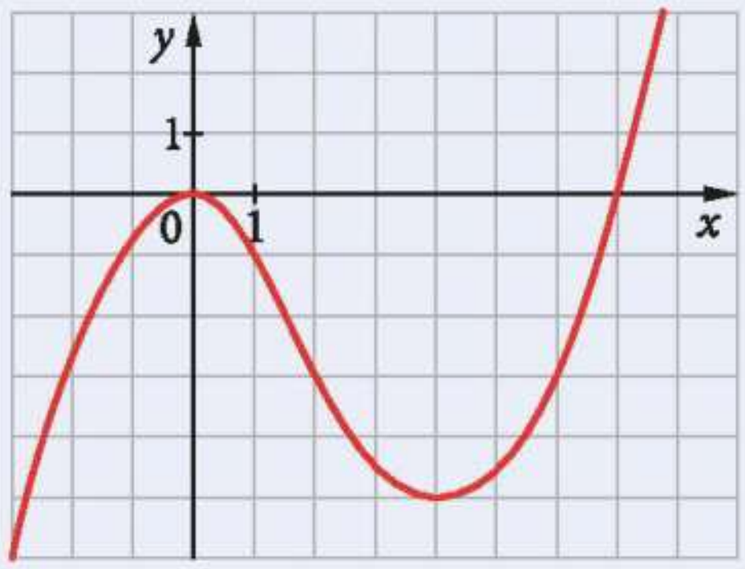
A. $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) \cdot g(x)] = 1$. **B.** $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0$. **C.** $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.

24. Funkcja $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$

A. ma ekstremum w punkcie 0.
B. ma ekstremum w punkcie 1.
C. jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

25. Na rysunku obok przedstawiono wykres pochodnej f' funkcji f. Funkcja f ma ekstremum w punkcie

A. 0. **B.** 4. **C.** 7.



26. Dla pewnej liczby m funkcja $f(x) = x^3 + mx$ ma maksimum w punkcie

A. -1. **B.** 0. **C.** 1.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

35. Rozwiąż równanie $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots=\frac{x}{3}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{12}+\ldots$, w którym obie strony są sumami zbieżnych szeregów geometrycznych.

36. W nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym suma pierwszego i trzeciego wyrazu jest równa 15, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 153. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu.

37. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}$. Podaj granice funkcji na końcach przedziałów, w których jest określona.

38. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m, dla której funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x^2-1} & \text{dla } x\neq -1 \text{ i } x\neq 1\\ -m & \text{dla } x=-1\\ m & \text{dla } x=1\end{cases}$$

jest ciągła w punktach 1 i -1.

D **39.** Wykaż, że równanie $x^4-2x^3-x^2+1=0$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

D **40.** Wykaż, że równanie $16x^5-5x+5=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

D **41.** Wykaż na podstawie definicji, że pochodna funkcji $f(x)=x^3-x+2$ jest równa $f'(x)=3x^2-1$.

42. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x^2+x-6}{(x-5)^2}$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie, w którym wykres przecina dodatnią półoś osi x.

43. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ równoległych do prostej o równaniu $3x-4y=0$.

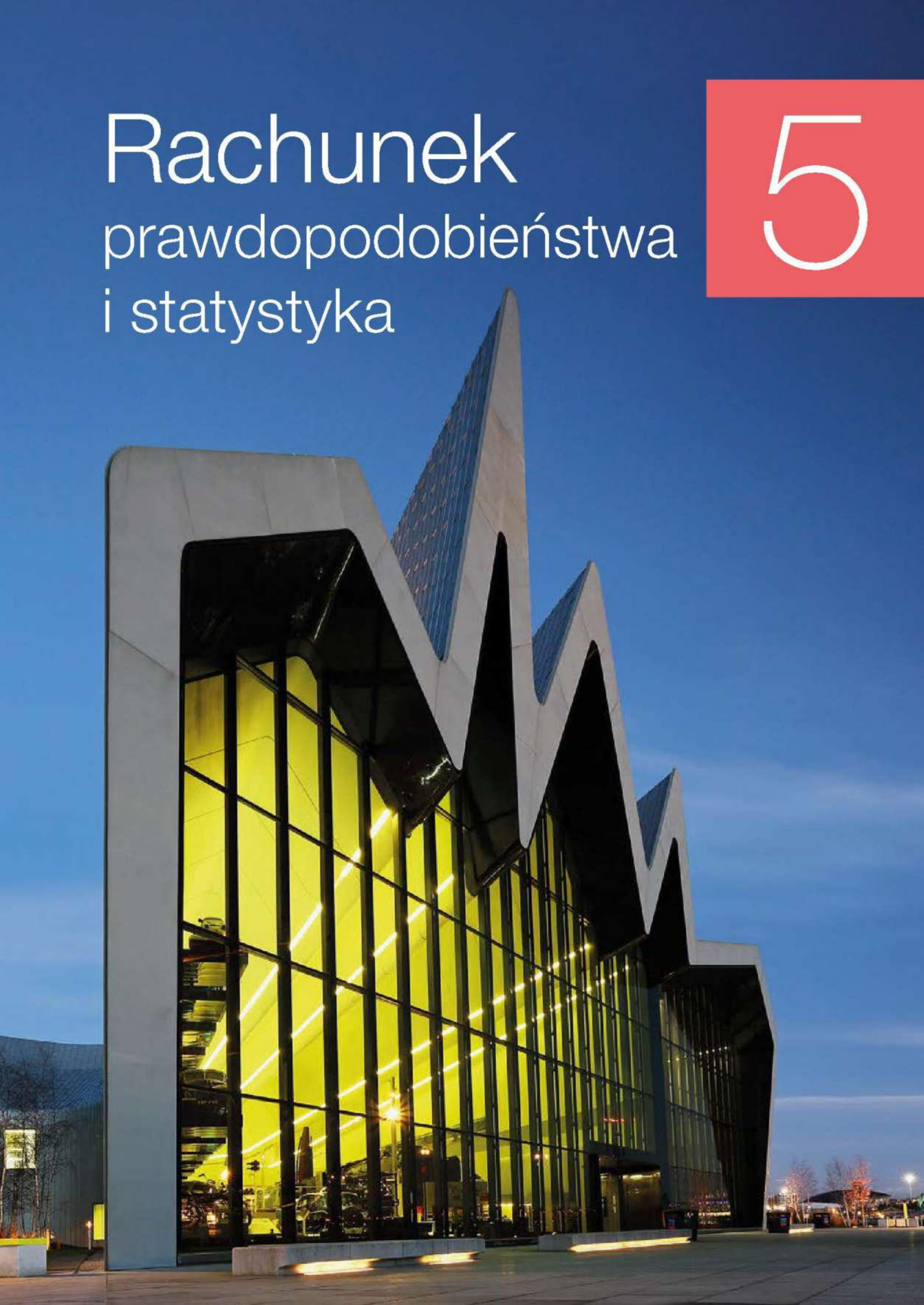
44. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2+1}$.

45. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x+2}+\frac{8}{x^2-4}$ oraz argumenty, dla których są przyjmowane.

46. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=x^4+x^3-5x^2+1$.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

5



1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

Prawdopodobne jest to, co się zwykle zdarza.
Arystoteles

Logika klasyczna, nazywana od nazwiska jej twórcy arystotelesowską, zajmuje się tylko takimi zdaniami, którym można przypisać dokładnie jedną z dwóch wartości – prawdę albo fałsz. Teorie matematyczne przez wiele wieków opierały się na takiej właśnie dwuwartościowej logice. Również obecnie ta metoda rozumowania jest bardzo użyteczna. W pewnym momencie zaistniała jednak potrzeba wymyślenia czegoś, co uwzględniałoby bardziej skomplikowane przypadki. W życiu codziennym spotykamy się bowiem z pytaniami, na które rzadko można udzielić jednoznacznej odpowiedzi. Na przykład:

- Czy wybierać kierunek studiów zgodnie z zainteresowaniami, czy raczej kierować się potrzebami rynku pracy?
- Czy dostanę się na wymarzoną uczelnię?
- Jaką mam szansę na pomyślne zdanie egzaminu?

W życiu mamy na ogół do czynienia ze zdaniami, które nie są ani w pełni prawdziwe, ani w pełni fałszywe. Do poruszania się w takim świecie bardzo przydatna jest **logika probabilistyczna** (łac. *probabilis* – prawdopodobny). Pozwala ona ocenić, na ile dane zdanie jest wiarygodne. Prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zdarzenia logika ta ocenia wartościami z nieskończonego zbioru liczb leżących pomiędzy 0 a 1 (lub w procentach – między 0% a 100%). Można się spotkać np. ze stwierdzeniami typu:

Określenie „prawdopodobny" możemy rozumieć jako „podobny do prawdy".

- Ten pacjent ma ok. 50-procentową szansę na przeżycie operacji.
- Jeżeli będę dzisiaj pytany z matematyki, to na 99% dostanę jedynkę.
- Szansę otrzymania czwórki z egzaminu oceniam na 30%.
- Prawdopodobieństwo zdobycia głównej nagrody w lotto, czyli trafienia „szóstki", wynosi około 1 : 14 000 000.
- Jeżeli założymy na domu piorunochron, to prawdopodobieństwo pożaru od uderzenia pioruna zmaleje do 0,001.

W dalszych tematach pokażemy, w jaki sposób można w pewnych sytuacjach owo „podobieństwo do prawdy" dobrze oszacować. Posłużymy się modelami matema-

tycznymi zjawisk losowych, chociaż oczywiście będą się one odnosiły (jak każdy model) do sytuacji wyidealizowanych. Nie istnieje idealnie jednorodna kostka do gry, ale nietrudno sobie wyobrazić, że właśnie z taką kostką mamy do czynienia. Podobnie zresztą postępowaliśmy np. w geometrii. Cała teoria została wyprowadzona na bazie obiektów w rzeczywistości nieistniejących. Nie da się przecież wykreślić prostej, która nie miałaby grubości, nie narysujemy czegoś takiego jak punkt itd. Mimo to praktyczne zastosowania twierdzeń geometrycznych są kolosalne i trudno sobie wyobrazić dzisiejszą cywilizację bez rozwijania tej dyscypliny nauki. Z bardzo podobną sytuacją mamy do czynienia również w fizyce. Wyjaśnienie jej praw na ogół też wymaga jakichś nierealnych założeń, ale takie doskonałe zjawiska są po prostu dobrymi przybliżeniami rzeczywistych zjawisk fizycznych.

W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy więc zakładać, że mamy do czynienia:

- z idealnymi symetrycznymi monetami, które po podrzuceniu i opadnięciu nie ustawią się na krawędzi,
- z idealnie jednorodnymi kostkami do gry,
- z ponumerowanymi kulkami o identycznej wielkości i masie, różniącymi się co najwyżej kolorem itp.

Ponadto przyjmiemy, że wyniki naszych doświadczeń będą zależały wyłącznie od przypadku i nie wpłyną na nie żadne czynniki zewnętrzne czy wewnętrzne. Na przykład podczas losowania karty z talii nie będziemy podglądać albo nie oznaczymy celowo kart. Jeżeli każde takie losowanie będzie można również wielokrotnie powtórzyć, to nazywać je będziemy **doświadczeniem losowym**.

Przykład 1

W księgarni na półce stoi sześć egzemplarzy powieści. Jeżeli sprzedawca losowo sięgnie po jeden, to może wybrać każdy ze stojących tomów. O takiej sytuacji powiemy, że doświadczeniem losowym jest wybieranie jednego egzemplarza. Wynik tego doświadczenia to wybór konkretnej książki. Wszystkich możliwych wyników jest 6.

Przykład 2

Jaś wytrząsa jedną monetę ze zgromadzonego w skarbonce bilonu. Doświadczeniem losowym jest wypadnięcie monety, wynikiem – otrzymanie konkretnej monety. Wszystkich wyników jest tyle, ile monet w skarbonce.

Przykład 3

Z kolekcji liczącej 113 egzemplarzy Bożenka wyciąga na chybił trafił jedną płytę. Doświadczeniem losowym jest losowanie płyty, wynikiem – otrzymanie konkretnego krążka. Liczba wszystkich wyników jest równa 113.

Przykład 4

Jaś i Zosia umówili się, że po obiedzie zmywa naczynia ta osoba, która wylosuje starszą kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli obydwoje wylosują karty tej samej wartości (np. dwie dziesiątki), zmywa tata, który po namyśle wyraził zgodę na takie rozwiązanie. Doświadczeniem losowym jest więc losowanie dwóch kart, wynikiem – otrzymanie konkretnej pary kart. Wszystkich możliwych wyników jest 2652, czyli tyle, ile można utworzyć par kart z talii. Sposób wyznaczenia liczby takich par zaprezentujemy w dalszych tematach podręcznika.

Przykład 5

Zjawiskiem losowym jest wybór drogi, którą wędruje tornado. Tu jednak mamy do czynienia z nieskończoną liczbą możliwych wyników. Ponadto jedne z nich są bardziej, a inne mniej prawdopodobne.

Matematyczna teoria prawdopodobieństwa, nazywana również probabilistyką, narodziła się we Francji niewiele ponad 350 lat temu. Jej początek dały rozważania kawalera de Méré na temat gier hazardowych, a ściślej – nierównych szans gracza i bankiera. Problem został rozwinięty przez matematyków: Pascala i Fermata. Jedną z pierwszych prac naukowych dotyczących teorii prawdopodobieństwa napisał holenderski uczony Christiaan Huygens. Została ona opublikowana w 1657 r. Do rozwoju tej dyscypliny naukowej przyczyniły się powstanie i wzrost znaczenia towarzystw ubezpieczeniowych, zajmujących się początkowo ubezpieczaniem statków, co wymagało m.in. poprawnego ustalenia wysokości składki.



Przykład dawnej tablicy do gry w kości

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Doświadczenia losowe i zdarzenia elementarne

Będziemy się zajmować bardzo niewielkim fragmentem rachunku prawdopodobieństwa. W rozpatrywanych w podręczniku przykładach ograniczymy się do takich doświadczeń losowych, które spełniają równocześnie dwa warunki:

- mają **skończoną liczbę** wyników,
- każdy wynik ma **identyczną szansę** (identyczne prawdopodobieństwo) zajścia.

Pojedyncze, wykluczające się wyniki doświadczenia losowego zostały nazwane **zdarzeniami elementarnymi**.

Jeżeli w doświadczeniu losowym możemy uzyskać n różnych wyników i zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo (szansa) zajścia każdego z nich wynosi $\frac{1}{n}$.

Na przykład w rzucie monetą możliwe są tylko dwa zdarzenia elementarne – wypadnięcie orła albo wypadnięcie reszki, a szansa uzyskania każdego z nich jest równa $\frac{1}{2}$.

Podobnie w rzucie sześcienną kostką do gry – każde z sześciu możliwych zdarzeń elementarnych (czyli wypadnięcie jedynki, dwójki, trójki, czwórki, piątki albo szóstki) ma szansę zajścia równą $\frac{1}{6}$.

W prostych przykładach bez trudu umiemy ocenić szansę uzyskania jakiegoś wyniku w doświadczeniu losowym.

Przykład 1 ◂ zad. 2.4

W doświadczeniu polegającym na losowaniu jednej karty z talii mamy 52 zdarzenia elementarne. Prawdopodobieństwo zajścia każdego z nich (np. wylosowania waleta pik) wynosi $\frac{1}{52}$.

Przykład 2 ◂ zad. 2.6

Wśród 13 piłek tenisowych jedna jest uszkodzona. Jeżeli losujemy jedną piłkę, mamy szansę równą $\frac{1}{13}$ trafienia na tę złą i $\frac{12}{13}$ wybrania piłki dobrej.

Przykład 3 ◂ zad. 2.7

Losujemy jedną kartę z talii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy asa?

Rozwiązanie

W talii 52 kart są 4 asy. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{4}{52}$.

Aby wyraźniej pokazać, skąd wziął się wynik, czasem nie będziemy skracać otrzymanych ułamków.

W tym samym doświadczeniu prawdopodobieństwo wylosowania trefla jest równe $\frac{13}{52}$, a karty starszej od dziewiątki $\frac{20}{52}$.

Przykład 4 ◂ zad. 2.8

Izydor Muszka uzależnia od całkowitego przypadku podjęcie decyzji, jak spędzić popołudnie. Jeżeli w rzucie kostką wypadnie jedno oczko – idzie na mecz, jeżeli parzysta liczba oczek – spotyka się z koleżanką Jolką, w pozostałych przypadkach – zabiera się do nauki. Ocenimy prawdopodobieństwo, z jakim Izydor zabierze się do nauki.

Rozwiązanie

W rzucie kostką jest sześć możliwych wyników, a tylko jeden sprzyja podjęciu decyzji o pójściu na mecz, więc takie zdarzenie zajdzie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

Inaczej jest w dwóch następnych sytuacjach, którym sprzyja większa liczba zdarzeń elementarnych. Parzysta liczba oczek to wypadnięcie dwójki, czwórki lub szóstki, więc szansę na spotkanie z Jolką Izydor ma aż w trzech na sześć możliwych przypadków. Prawdopodobieństwo jest w tym wypadku równe $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Pozostały jeszcze dwa zdarzenia elementarne – wypadnięcie trzech albo pięciu oczek. Zatem Izydor weźmie się do nauki z prawdopodobieństwem $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$.

Do powyższego przykładu wprowadzimy symboliczny opis. Będziemy z niego korzystać również w dalszych zadaniach. Oto on:

- Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia przyjęło się oznaczać dużą grecką literą Ω (omega).
- Zapis $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jest jedną z form krótkiego zapisu faktu, że zdarzeniami elementarnymi w doświadczeniu z przykładu 4 są: 1, czyli wypadnięcie jednego oczka, 2 – wypadnięcie dwóch oczek itd.
- Zdarzenie polegające na wypadnięciu jednego oczka zapisujemy krótko: $A = \{1\}$.

- Zapis $B = \{2, 4, 6\}$ oznacza zdarzenie polegające na wypadnięciu parzystej liczby oczek. Powiemy, że zajściu tego zdarzenia **sprzyjają** trzy zdarzenia elementarne.
- Ostatniemu z opisywanych zdarzeń sprzyjają dwa wyniki: $C = \{3, 5\}$.
- Zdarzenie A jest elementarne, natomiast zdarzenia B i C nie są elementarne.
- Zdanie „prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{1}{2}$" zapisujemy w postaci: $P(B) = \frac{1}{2}$.
- Liczbę zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω oznaczamy symbolicznie: $\overline{\Omega}$.
- Liczbę zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A oznaczamy podobnie: $\overline{A}$.

Definicja prawdopodobieństwa

Definicja

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zakładamy, że w danym doświadczeniu losowym Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w tym doświadczeniu jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

Każdy wynik elementarny sprzyja zajściu zdarzenia $A = \Omega$ i $P(\Omega) = 1$, dlatego zdarzenie Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**.

Na przykład w rzucie sześcienną kostką wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 7 jest zdarzeniem pewnym.

Wygodnie jest wprowadzić pojęcie **zdarzenia niemożliwego**, czyli takiego, któremu nie sprzyja żaden wynik elementarny (inaczej mówiąc – zdarzenie takie nigdy w danym doświadczeniu losowym nie zajdzie). Na przykład w rzucie sześcienną kostką wyrzucenie liczby oczek równej 8 jest zdarzeniem niemożliwym. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia niemożliwego jest więc równe 0. Zdarzenie niemożliwe oznaczamy symbolem zbioru pustego $\emptyset$ i $P(\emptyset) = 0$.



We wszystkich rozpatrywanych w podręczniku zadaniach zdarzenia elementarne opisywanych doświadczeń losowych są jednakowo prawdopodobne, dlatego nie będziemy powtarzać tej uwagi za każdym razem przed zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Zauważmy, że liczby $\overline{\overline{\Omega}}$, $\overline{\overline{A}}$ są liczbami naturalnymi. Ponadto, zawsze prawdziwy jest układ nierówności $0 \leqslant \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\Omega}}$. Jeżeli obie strony każdej z nierówności podzielimy przez $\overline{\overline{\Omega}}$, to otrzymamy $0 \leqslant \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \leqslant 1$.

Wniosek

Jeżeli A jest zdarzeniem w jakimś doświadczeniu losowym, to $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Przykład 5

◀ zad. 2.13

W skrzynce są cztery kule białe, dwie zielone, pięć czerwonych i trzy czarne. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana kula będzie zielona?

Rozwiązanie

Doświadczeniem jest losowanie jednej kuli ze skrzynki zawierającej 14 kul. Zdarzeniem elementarnym jest wybór konkretnej kuli. Zatem zbiór zdarzeń elementarnych ma 14 elementów:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 14$$

Interesujące nas zdarzenie A polega na wylosowaniu zielonej kuli. Ponieważ są dwie takie kule, liczba zdarzeń sprzyjających jego zajściu jest równa 2:

$$\overline{\overline{A}} = 2$$

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

Odp.: Zieloną kulę wylosujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{7}$.

Opis rozwiązania tak prostego jak powyższe zadanie wydaje się trochę sztuczny. Odpowiedź jesteśmy przecież w stanie podać od razu – z pamięci. Chcemy jednak pokazać, jak można takie rozwiązanie zapisać. Przyda się to do dalszych, już nie tak banalnych zadań.

Przykład 6

W pudełku są cztery klocki: dwa czerwone i dwa zielone. Jaś wyjmuje dwa klocki na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyjmie klocki różnego koloru?

Rozwiązanie

Dwa klocki czerwone oznaczmy c_1, c_2, a zielone – z_1, z_2.

Zdarzeniem elementarnym jest wyciągnięcie przez Jasia dwóch klocków.

Na przykład zdarzenie polegające na wyciągnięciu klocka c_1 z klockiem c_2 zapiszemy w postaci $\{c_1, c_2\}$. Zauważmy, że kolejność zapisu c_1 i c_2 jest w tej sytuacji nieistotna, ponieważ Jaś wyjmuje obydwa klocki równocześnie. Zatem zapisy $\{c_1, c_2\}$ i $\{c_2, c_1\}$ oznaczają to samo zdarzenie elementarne w tym doświadczeniu.

Wszystkie możliwe wyniki losowania Jasia to:

$$\Omega = \{\{c_1, c_2\}, \{c_1, z_1\}, \{c_1, z_2\}, \{c_2, z_1\}, \{c_2, z_2\}, \{z_1, z_2\}\}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6$$

Jeżeli A oznacza zdarzenie polegające na tym, że Jaś wyjął dwa klocki różnego koloru, to:

$$A = \{\{c_1, z_1\}, \{c_1, z_2\}, \{c_2, z_1\}, \{c_2, z_2\}\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 4$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Jeżeli w doświadczeniu losujemy więcej niż jeden element i gdy:

- ważna jest kolejność losowanych elementów, to do opisu zdarzeń elementarnych stosujemy nawiasy **okrągłe** (lub nie stosujemy żadnych nawiasów),
- nie uwzględniamy kolejności losowanych elementów, to stosujemy nawiasy **klamrowe**.

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że klocki będą różnego koloru, wynosi $\frac{2}{3}$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Rzucamy sześcienną kostką. Wskaż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby pierwszej.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 3

2.2. W torebce są cukierki owocowe i czekoladowe. Cukierków owocowych jest dwa razy więcej niż czekoladowych. Wyjmujemy losowo cukierek z torebki. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że będzie to cukierek czekoladowy.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$

2.3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy jedną liczbę. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania liczby x, która spełnia nierówność $1 - x \leqslant 0$.

A. 0 **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** 1

2.4. Podaj możliwe wyniki opisanego doświadczenia losowego. Ile jest tych wyników? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania każdego z nich?

a) W szkolnym sklepiku jest 17 identycznych butelek wody mineralnej. Sabina bierze jedną z nich.
b) W pudełku jest 5 kredek czerwonych, 3 zielone, 2 żółte, pomarańczowa i niebieska. Piotrek wyjmuje na chybił trafił jedną kredkę.
c) W urnie jest 13 losów pustych i 2 pełne. Wyciągamy jeden los.
d) Z klasy liczącej 18 dziewcząt i 18 chłopców losujemy jednego ucznia.
e) W przedszkolu Mateusz sięga po omacku do skrzynki, w której jest 25 piłek i wyciąga jedną z nich.
f) Sprzedawca wyciąga losowo z szuflady jedną z piętnastu 60-watowych żarówek.

2.5. Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką.

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A – wypadła parzysta liczba oczek lub pięć oczek na kostce.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

2.6. W loterii fantowej jest 100 losów, w tym 13 wygrywających. Wyciągamy jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu

a) pustego.
b) wygrywającego.

2.7. Z talii 52 kart Robert wyjmuje jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnie

a) siódemkę.
b) figurę, tzn. asa, króla, damę lub waleta.
c) kartę pik.
d) kartę koloru czerwonego, tzn. karo lub kier.
e) kartę młodszą od dziesiątki.
f) kartę różną od damy i króla.

2.8. Rzucamy sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń:

A – wypadnie szóstka
B – wypadnie nieparzysta liczba oczek
C – wypadnie liczba pierwsza
D – wypadną co najmniej 3 oczka
E – wypadną co najwyżej 2 oczka
F – nie wypadnie dwójka
G – wypadnie czwórka lub szóstka
H – nie wypadnie liczba pierwsza

2.9. Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest

a) parzysta.
b) mniejsza od 50.
c) podzielna przez 7.
d) niepodzielna przez 5.
e) złożona.
f) pierwsza.
g) kwadratem liczby naturalnej.
h) sześcianem liczby naturalnej.

2.10. W urnie jest 100 losów ponumerowanych od 1 do 100. Monika wylosowała jeden los. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnęła los z liczbą

a) mniejszą od 10.
b) parzystą.
c) większą od 55.
d) podzielną przez 3.
e) podzielną przez 10.
f) pierwszą mniejszą od 50.

2.11. W trzypiętrowym domu wczasowym na każdym piętrze jest 15 wolnych dwuosobowych pokoi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rodzice Bartka, którzy zarezerwowali sobie miejsca w tym domu, otrzymają pokój na drugim piętrze? Zakładamy, że wybór pokoju jest losowy, a na parterze wszystkie pokoje są zajęte.

2.12. W hotelu jest 17 wolnych pokoi jednoosobowych o kolejnych numerach od 1 do 17. Oblicz, z jakim prawdopodobieństwem pierwszemu gościowi przydzielony zostanie pokój o numerze

a) parzystym.
b) będącym liczbą pierwszą.
c) różnym od 7 i od 13.
d) nie większym od 11.
e) równym co najmniej 8.

2.13. Biuro turystyczne ma w ofercie wycieczki do następujących miast: Ankary, Aten, Limy, Lizbony, Londynu, Paryża, Rio de Janeiro, Sydney i Toronto. Jedną z tych wycieczek biuro przeznaczyło w ramach promocji na nagrodę dla zwycięzcy konkursu „Matematyka bez granic". Zwycięzca będzie losować cel podróży. Wyznacz prawdopodobieństwo, z jakim uda się do

a) Ameryki Północnej.
b) Ameryki Południowej.
c) kraju Unii Europejskiej.
d) stolicy jakiegoś państwa.

2.14. Pan Alojzy Mrówka ma w portfelu jeden banknot stuzłotowy, dwa pięćdziesięciozłotowe, cztery dwudziestozłotowe i siedem dziesięciozłotowych. Wyciąga losowo jeden banknot. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kwota mniejsza od 50 zł?

2.15. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany miesiąc ma nazwę (w języku polskim) złożoną przynajmniej z ośmiu liter?

2.16. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana dwucyfrowa liczba naturalna jest podzielna przez 14?

2.17. W pudełku są klocki czerwone i 6 brązowych. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania klocka czerwonego jest równe $\frac{6}{7}$. Ile czerwonych klocków jest w tym pudełku?

2.18. Ania i Małgosia grają w wojnę. Każda z nich otrzymała 26 kart z talii. Małgosia odkryła swoją pierwszą kartę. Był to as kier. Teraz swoją kartę odkrywa Ania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to as pik?

2.19. W pojemniku są zielone i niebieskie kulki. Kulek zielonych jest dwa razy więcej niż niebieskich. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wyciągnięta kulka jest
a) zielona. b) niebieska.

Prosto do matury

1. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 30 losujemy jedną. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej
A. przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$. **B.** przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$. **C.** przez 7 jest równe $\frac{1}{7}$.

2. W pudełku znajduje się 40 zapałek, w tym 6 wypalonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta losowo zapałka nie będzie wypalona?

3. Ze zbioru wszystkich krawędzi ostrosłupa wybieramy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to krawędź podstawy?

4. W klasie 3b jest 12 dziewcząt. Nauczyciel wywołuje do odpowiedzi jedną wylosowaną osobę. Ilu uczniów jest w tej klasie, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania chłopca wynosi $\frac{3}{5}$?

5. Ze zbioru wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

3. Reguła mnożenia

Umiejętności:

- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania

Jeżeli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo zaistnienia konkretnego zdarzenia w danym doświadczeniu losowym, powinniśmy obliczyć:

- liczbę wszystkich możliwych wyników,
- liczbę wyników sprzyjających.

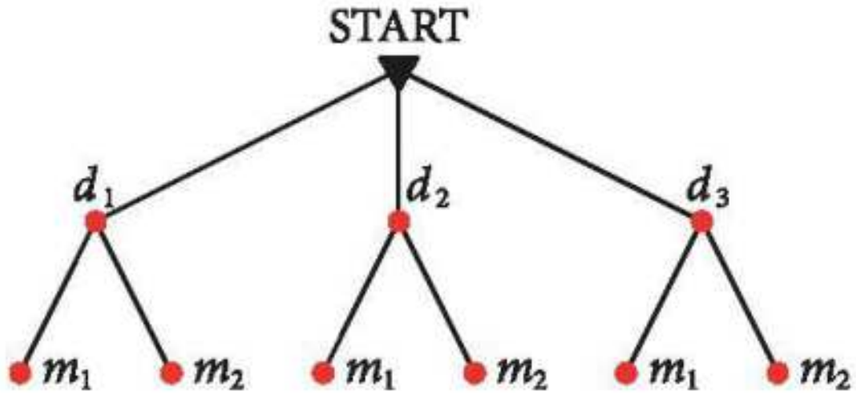
Zaczniemy od wyznaczania liczby wszystkich możliwych wyników uzyskanych w konkretnym doświadczeniu losowym.

Przykład 1

Bagaż do samolotu można spakować w jedną małą walizkę podręczną i duże walizki, które trzeba nadać oddzielnie. Franek chce wziąć jedną dużą i jedną małą walizkę. W domu ma trzy duże i dwie małe walizki. Ile różnych zestawów może uzyskać?

Rozwiązanie

W rozwiązaniu tego zadania pomożemy sobie rysunkiem.



Oznaczmy walizki:
duże – d_1, d_2, d_3,
małe – m_1, m_2.

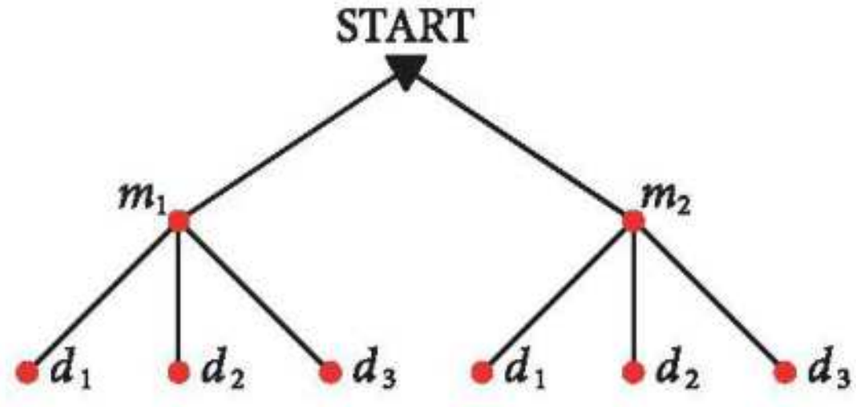
Jeśli Franek sięgnie najpierw po dużą walizkę, ma trzy możliwości wyboru. Na rysunku zaznaczono je w postaci trzech odcinków (tzw. gałęzi) wychodzących z punktu startu. Do każdej z wybranych dużych walizek może dołożyć jedną z dwóch małych – w ten sposób tworzy się sześć zestawów „duża i mała".

Możemy je wypisać, przesuwając się od punktu START wzdłuż gałęzi:

$d_1m_1,\ d_1m_2,\ d_2m_1,\ d_2m_2,\ d_3m_1,\ d_3m_2$

Zatem Franek może uzyskać $3 \cdot 2 = 6$ różnych par walizek.

Zauważmy, że nie ma znaczenia kolejność wybieranych elementów. Jeżeli Franek zacznie wybierać najpierw małą walizkę i do niej dobierać dużą, rysunek będzie wyglądał inaczej, inaczej też zapiszemy uzyskane wyniki:



$m_1d_1,\ m_1d_2,\ m_1d_3,\ m_2d_1,\ m_2d_2,\ m_2d_3$

ale liczba możliwości się nie zmieni: $2 \cdot 3 = 6$.

Odp.: 6

Rysunek ilustrujący wyniki takiego doświadczenia losowego nazywamy drzewkiem, a liczba wszystkich możliwych wyników równa jest liczbie gałęzi w ostatnim wierszu.

Twierdzenie

Reguła mnożenia

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

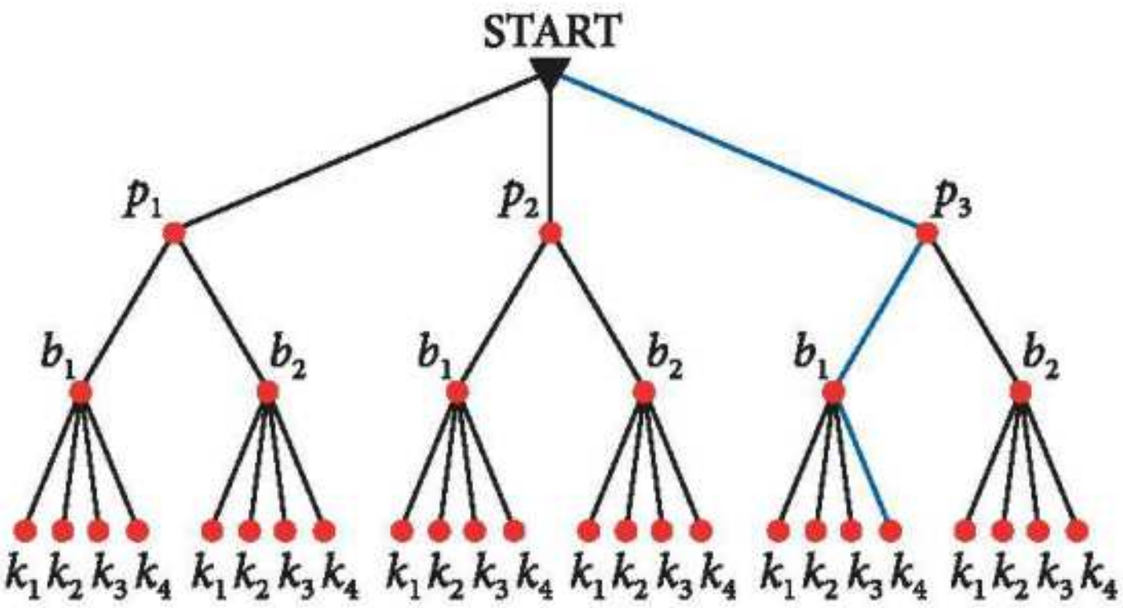
Regułę mnożenia można uogólnić na n ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) zbiorów, z których każdy ma skończoną liczbę elementów. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 2 ◂ zad. 3.4, 3.5

Ania odłożyła na półkę trzy powieści, dwie biografie i cztery kryminały. Są to książki, spośród których zamierza wybrać zestaw do przeczytania podczas urlopu. Ile różnych zestawów może uzyskać, jeżeli z każdej kategorii wybierze po jednym egzemplarzu?

Rozwiązanie

Oznaczmy książki stojące na półce:
powieści – p_1, p_2, p_3,
biografie – b_1, b_2,
kryminały – k_1, k_2, k_3, k_4.
Kiedy Ania sięga na półkę po jedną powieść, ma trzy możliwości do wyboru. Na rysunku zaznaczono je w postaci trzech gałęzi wychodzących z punktu startu.



Do każdej z powieści może dołożyć jedną z dwóch biografii – w ten sposób tworzy się sześć zestawów „powieść i biografia". Do każdego z nich można dołożyć jeden z czterech kryminałów. Zatem Ania zabierze na urlop jeden z $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ możliwych zestawów. Ostatni wiersz drzewka ma 24 gałęzie, a przykładowo zaznaczona ścieżka wskazuje zestaw $p_3 b_1 k_4$.

Odp.: 24

Przykład 3 ◀ zad. 3.6

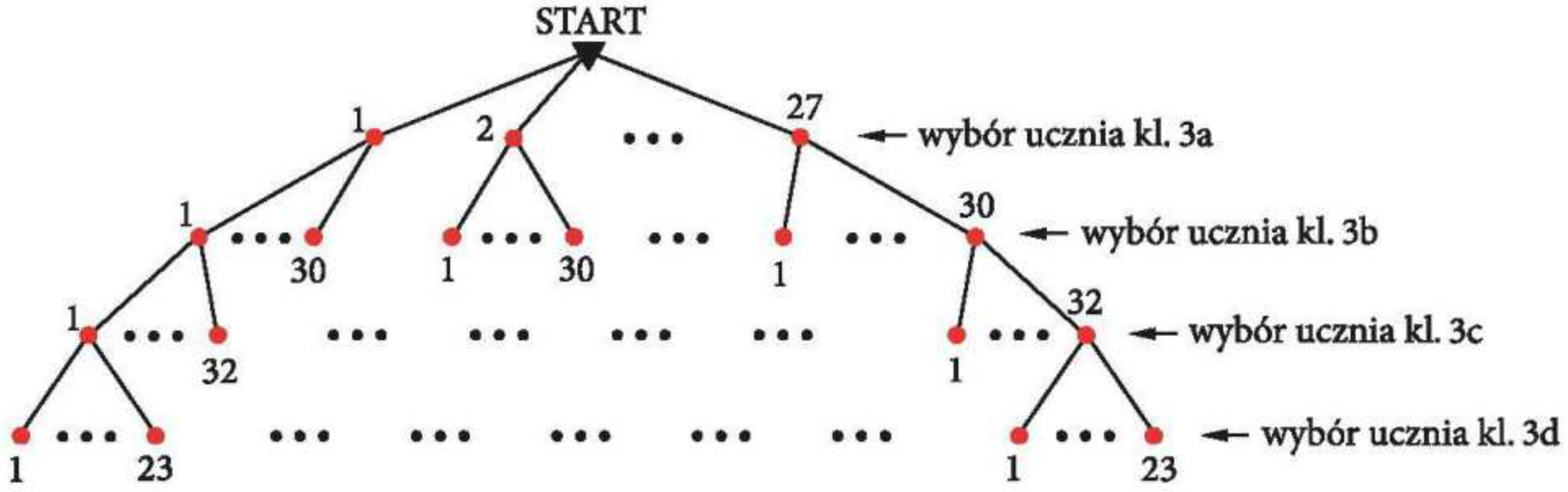
W trzech urnach umieszczone są ponumerowane kule. W pierwszej urnie jest siedem kul, w drugiej – cztery, a w trzeciej – pięć. Z każdej urny losujemy jedną kulę. Liczba wszystkich możliwych zestawów trzech kul, czyli wyników tego doświadczenia, wynosi $7 \cdot 4 \cdot 5 = 140$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.7

Z czterech klas trzecich wybrano losowo po jednym uczniu do reprezentowania szkoły. W klasie 3a jest 27 uczniów, w 3b – 30 uczniów, w 3c – 32 uczniów, a w 3d – 23 uczniów. Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych reprezentacji i zilustrujemy wyniki losowania za pomocą drzewka.

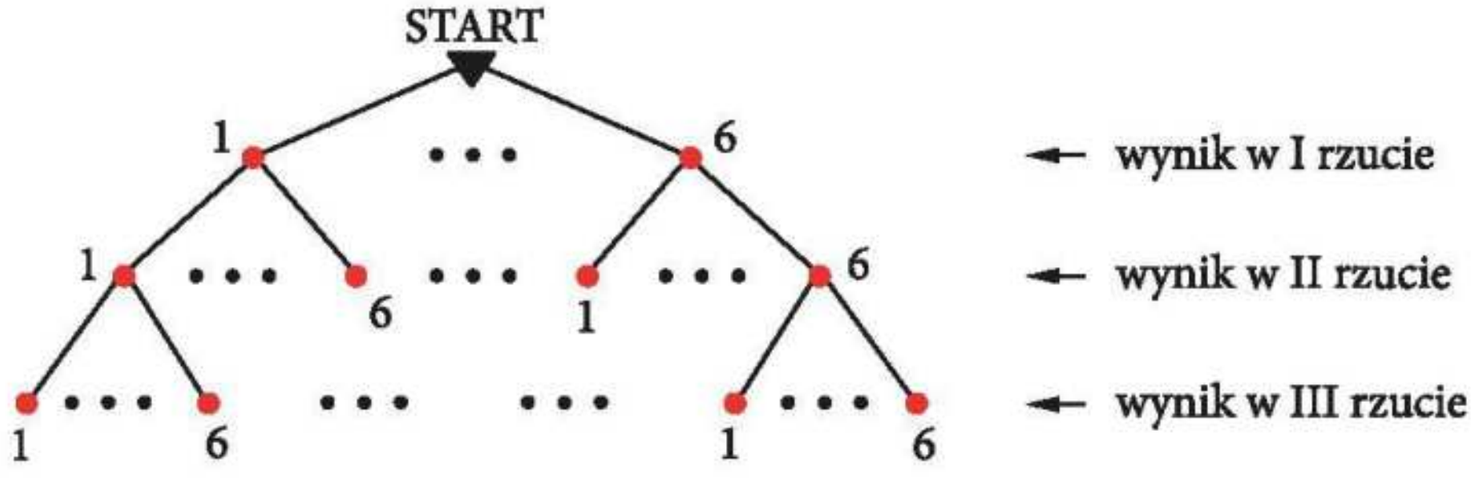
Rozwiązanie

Wszystkich możliwych reprezentacji jest $27 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 23 = 596\,160$. Drzewko ilustrujące wszystkie wyniki tego losowania jest bardzo rozbudowane. Dlatego uprościliśmy rysunek – poszczególne liczby zamarkowaliśmy kropkami.



Przykład 5 ◀ zad. 3.8

Rzucamy trzy razy kostką. Wynikiem tego doświadczenia jest trójka liczb, np. 1, 6, 6.



Liczba wszystkich możliwych wyników wynosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Przykład 6 ◂ zad. 3.9

Na ile sposobów można rozmieścić trzy różne książki w dwóch pudełkach, jeżeli w każdym pudełku jest miejsce na trzy książki?

Rozwiązanie

Dla każdej z książek mamy dwa pudełka do wyboru. Mamy zatem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ możliwości umieszczenia trzech książek w dwóch pudełkach.

Odp.: 8

Przykład 7

W pierwszej skrzynce znajdują się 4 modele starych samochodów osobowych przeznaczone na wystawę. W drugiej skrzynce jest 5 modeli współczesnych samochodów wyścigowych. Dekorator ma ponadto do dyspozycji 3 modele motocykli. Na wystawie salonu można ustawić po jednym modelu samochodu i motocykla. Wyznaczymy liczbę możliwych zestawów.

Rozwiązanie

Jeżeli dekorator zdecyduje się na ustawienie starego samochodu, to ma $4 \cdot 3 = 12$ możliwych zestawów, a jeżeli na auto wyścigowe, to $5 \cdot 3 = 15$ różnych możliwości. Dekorator postanowił wybrać samochód losowo.

W tym celu włożył wszystkie modele samochodów do jednej skrzynki i poprosił pracownika salonu o wylosowanie jednego samochodu. W ten sposób mógł otrzymać jeden z $(4 + 5) \cdot 3 = 27$ możliwych zestawów.

W ostatnim przykładzie, poza regułą mnożenia, skorzystaliśmy z tzw. reguły dodawania.

Twierdzenie

Reguła dodawania

Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, zbiór A ma m elementów i zbiór B ma n elementów, to liczba wszystkich elementów x takich, że $x \in A$ lub $x \in B$, jest równa $m + n$.

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}, \text{ gdy } A \cap B = \emptyset$$

Warunek, że zbiory A i B są rozłączne lub inaczej – nie mają wspólnych elementów – zapisujemy często w postaci równości $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 8 ◂ zad. 3.11

Pan Teodor Motylek ma zamiar wyjechać na tygodniowe wczasy. Spakował do walizki 7 koszul, 10 krawatów i 8 par skarpetek.

a) Ile różnych zestawów może stworzyć z wymienionych części garderoby?

b) Po namyśle pan Teodor dołożył do walizki 2 koszule i 3 pary skarpetek. O ile zwiększyła się liczba zestawów?

Rozwiązanie

a) $7 \cdot 10 \cdot 8 = 560$

b) $9 \cdot 10 \cdot 11 - 7 \cdot 10 \cdot 8 = 430$

Odp.: a) 560 b) o 430

Przykład 9 ◂ zad. 3.12

Klasa Izydora Muszki wybiera się na wycieczkę. Cała grupa liczy 36 uczniów i 3 opiekunów. W autokarze jest 25 foteli dwuosobowych. Wychowawca postanowił przydzielić miejsca losowo. Zastanówmy się, jak może przeprowadzić losowanie i ile jest różnych wyników w takim doświadczeniu.



Rozwiązanie

W urnie powinno być 50 losów z numerami miejsc. Uczestnicy wycieczki w kolejności alfabetycznej losują po jednym losie, a następnie udają się na swoje miejsce do autokaru. Oczywiście wyjętego numeru nie wrzucają z powrotem do urny. Zatem pierwsza losująca osoba ma 50 losów w urnie, druga 49, trzecia 48 itd.

Obliczmy, ile losów zostanie dla ostatniej osoby. Przed nią było 38 losujących, więc w urnie zostanie $50 - 38 = 12$ losów.

Różnych wyników losowania jest więc tyle, ile wynosi iloczyn trzydziestu dziewięciu czynników:

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$

Jest to ogromna liczba, równa w przybliżeniu $7 \cdot 10^{56}$.

Odp.: $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

Przykład 10

Zastanówmy się, jak można przeprowadzić losowanie z poprzedniego przykładu, aby spełnić ukryte marzenie Izydora Muszki i posadzić obok niego Jolkę. Na ile różnych sposobów możemy wówczas rozlokować uczestników wycieczki?

Rozwiązanie

Najprościej liczbę wszystkich możliwości opiszemy, jeśli tym razem zaczniemy losowanie od Izydora. Ma on do wyboru jedno z 50 miejsc (w urnie jest 50 losów), ale po odczytaniu wyniku wiadomo już, które miejsce powinniśmy zarezerwować dla koleżanki. Wybieramy los z tym numerem, wręczamy go Jolce (która nie bierze udziału w losowaniu) i kontynuujemy losowanie. Następny uczestnik ma więc do wyboru 48 możliwości, kolejny – 47 itd.

Aby lepiej zilustrować przebieg losowania, warto zapisać wynik jako iloczyn 39 czynników, z tym że na drugim miejscu wpisać 1, jako liczbę losów dla Jolki: $50 \cdot 1 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

Liczba wszystkich możliwości jest iloczynem 38 czynników $50 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

Odp.: $50 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

Za pomocą urny i ponumerowanych kul można symulować wiele doświadczeń losowych. Na przykład:

- rzut sześcienną kostką do gry można zastąpić losowaniem jednej z sześciu kul ponumerowanych 1, 2, 3, 4, 5, 6,
- rzut monetą można zastąpić losowaniem jednej z dwóch kul,
- rzut dwiema kostkami można zastąpić dwukrotnym losowaniem jednej z sześciu kul itp.



Można wielokrotnie powtarzać czynność wyjmowania kuli z urny. Rozróżnimy tu dwa sposoby losowania – obydwa uwzględniające kolejność losowanych numerów.

1. Przed każdym podejściem stan urny jest taki sam. Inaczej mówiąc, po wylosowaniu (i zanotowaniu wyniku) wyciągnięta kula wrzucana jest z powrotem do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem ze zwracaniem**.
2. Raz wyjęta kula nie wraca do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem bez zwracania**.

Przykład 11 ◂ zad. 3.16

Z cyfr 4, 7, 8 układamy czterocyfrowe kody. Ile takich kodów możemy uzyskać?

Rozwiązanie

Przykładem takiego kodu jest ciąg 7448. Cyfry muszą się oczywiście powtarzać. Jeżeli chcemy to doświadczenie przeprowadzić za pomocą losowania kul z urny, to:

- w urnie muszą być trzy kule ponumerowane odpowiednio cyframi 4, 7 i 8,
- losujemy ze zwracaniem z tej urny cztery razy po jednej kuli.

Przy każdym losowaniu mamy zatem trzy możliwości do wyboru, więc wszystkich wyników (kodów) jest $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Odp.: 81

Przykład 12

Pięcioro pacjentów ustawia się losowo w kolejkę (inaczej mówiąc – losuje numerek do lekarza). Na ile sposobów mogą to zrobić?

Rozwiązanie

Teraz w urnie mamy pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, a losowanie odbywa się bez zwracania. Pierwsza osoba ma pięć możliwości wyboru, druga – cztery itd. Wszystkich wyników losowania jest zatem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Odp.: 120

Przykład 13 ◂ zad. 3.24

Obliczymy, ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych, jeżeli

a) układ cyfr może być dowolny.

b) numer nie może zaczynać się od zera.

Rozwiązanie

a) Na każdym miejscu takiego numeru możemy wpisać jedną z dziesięciu cyfr. Takich dowolnie tworzonych numerów siedmiocyfrowych jest zatem $10^7 = 10\,000\,000$, czyli 10 milionów.

b) Jeżeli numer telefonu nie może zaczynać się od zera, to na pierwszym miejscu możemy wpisać jedną z dziewięciu cyfr, a na każdym z pozostałych sześciu – jedną z dziesięciu. Liczba wszystkich możliwych wyników takiego losowania jest więc równa $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$, czyli 9 milionów.

Odp.: a) 10^7 b) $9 \cdot 10^6$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są różnymi liczbami parzystymi?

A. 48 **B.** 60 **C.** 100 **D.** 125

3.2. W kawiarni można zamówić 8 rodzajów ciastek, 4 rodzaje deserów lodowych i 7 rodzajów kawy. Na ile sposobów możemy zamówić zestaw składający się z kawy i czegoś słodkiego (ciastka lub deseru lodowego)?

A. 19 **B.** 36 **C.** 84 **D.** 224

3.3. Na ile sposobów możemy rozdzielić pomiędzy pięciu uczniów cztery różne tematy referatów do napisania tak, aby każdy dostał co najwyżej jeden temat?

A. $5 \cdot 4$ **B.** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ **C.** 5^4 **D.** 4^5

3.4. W karcie dań jest 5 zup, 12 drugich dań i 3 desery. Na ile sposobów można wybrać zestaw obiadowy składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

3.5. Nauczyciel matematyki układa sprawdzian powtórzeniowy zawierający po jednym zadaniu z działów: funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, ciągi, funkcja wykładnicza. Ile zestawów może ułożyć, jeżeli dysponuje pięcioma zadaniami o funkcji liniowej, dziesięcioma – o funkcji kwadratowej, sześcioma – o ciągach i trzema – o funkcji wykładniczej?

3.6. Rysiek pisze kartki świąteczne według wzoru:

Wesołych Radosnych Pogodnych Rodzinnych Spokojnych	Świąt,	udanego szalonego niezapomnianego wystrzałowego	Sylwestra i dużo	zdrowia pomyślności szczęścia sukcesów	w Nowym Roku życzy Rysiek.

Ile różnych kartek może napisać?

3.7. W klasie jest 32 uczniów. Nauczyciel matematyki nie stawia za pracę klasową ocen z plusami lub minusami. Ile jest możliwych wyników jednej klasówki, którą pisali wszyscy uczniowie?

3.8. Ile możemy otrzymać wyników doświadczenia polegającego na rzucie
a) pięć razy kostką do gry?
b) siedem razy monetą?
c) dwiema kostkami do gry?
d) pięcioma monetami?
e) kostką i monetą?
f) dwa razy kostką i trzy razy monetą?

3.9. W 30-osobowej klasie odbył się sprawdzian z matematyki. Ile mogło być różnych wyników sprawdzianu, jeżeli wiadomo, że nauczyciel wystawiał tylko „plus" albo „minus"?

3.10. Na ile sposobów można rozmieścić n kredek różnych kolorów w k pudełkach dla danych n i k? Zakładamy, że kolejność kredek w pudełku nie jest istotna oraz że w każdym pudełku zmieszczą się wszystkie kredki.
a) $n = 2, \quad k = 3$
b) $n = 1, \quad k = 6$
c) $n = 12, \quad k = 1$
d) $n = 10, \quad k = 3$

3.11. W trzech urnach rozmieszczone są kolorowe ponumerowane kule. W pierwszej urnie jest 12 kul żółtych, w drugiej 6 czerwonych, a w trzeciej 5 fioletowych.
a) Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Ile zestawów kul otrzymamy?
b) Do drugiej urny dołożono 4 czerwone kule. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. O ile więcej otrzymamy zestawów kul niż w losowaniu przed dołożeniem kul?

3.12. Do pustej sali kinowej weszły 4 osoby. Na ile sposobów mogą zająć miejsca? Wszystkich foteli w tym kinie jest 180.

3.13. Z urny zawierającej sześć kartek z numerami 0, 1, 2, 4, 6, 8 losujemy ze zwracaniem cztery razy po jednej kartce. Wylosowane numery zapisujemy kolejno i w ten sposób otrzymujemy liczbę. Oblicz, ile możemy otrzymać liczb czterocyfrowych
a) parzystych.
b) nieparzystych.
c) podzielnych przez 10.
d) w których zapisie nie wystąpi cyfra 0.

3.14. Hasło, za pomocą którego można się zalogować w sieci, składa się z 6 znaków. Każdy znak jest jedną z 24 liter (system odróżnia litery małe i duże) lub 10 cyfr. Ile istnieje takich haseł? Ile czasu zajęłoby sprawdzenie wszystkich możliwości przy założeniu, że w ciągu sekundy można sprawdzić jedno hasło?

3.15. Pan Teodor Motylek zabrał na tygodniowe wczasy 10 krawatów. Ile ma możliwości zaprezentowania swej kolekcji, jeżeli każdego dnia będzie chodził w innym krawacie?

3.16. Dwanaście ponumerowanych kul rozmieszczono w pięciu pojemnikach oznaczonych literami A, B, C, D, E. Ile jest różnych rozmieszczeń tych kul?

3.17. Lokujemy n pasażerów w k wagonach tak, aby każdy z nich był w innym wagonie. Na ile sposobów możemy to zrobić dla danych n i k?

a) $n = 3,\ k = 7$
b) $n = 7,\ k = 5$
c) $n = 6,\ k = 6$
d) $n = 3,\ k = 11$

3.18. Ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f\}$ losujemy kolejno bez zwracania k elementów. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia dla danego k?

a) $k = 1$ b) $k = 2$ c) $k = 3$ d) $k = 4$ e) $k = 5$ f) $k = 6$

3.19. Ile słów pięcioliterowych (mających sens lub nie) można ułożyć z pięciu liter wybranych ze słowa KOMPUTER?

3.20. Ile jest czterocyfrowych liczb, w których żadna cyfra się nie powtarza, zaczynających się od 1, 3 lub 7?

3.21. Ile jest trzycyfrowych liczb, do których zapisania możemy użyć podanych cyfr? Cyfry w liczbach nie mogą się powtarzać.

a) 2, 6, 8, 9 b) 1, 3, 5, 7, 9 c) 2, 3, 5 d) 0, 7, 8, 9

3.22. Ile jest podzielnych przez 5 liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?

3.23. W urnie są kule ponumerowane kolejnymi liczbami dwucyfrowymi od 10 do 99. Losujemy trzy razy kolejno bez zwracania po jednej kuli. Z wylosowanych numerów kul tworzymy sześciocyfrowe liczby (zapisywane zgodnie z kolejnością losowania). Ile możemy otrzymać liczb

a) podzielnych przez 10? b) podzielnych przez 100?

3.24. Ela chciała zatelefonować do Ali, ale pamiętała tylko pierwsze cztery cyfry siedmiocyfrowego numeru. Jaką największą liczbę numerów musiałaby wypróbować, aby połączyć się z koleżanką?

3.25. Krzyś dostał na urodziny kolejkę elektryczną składającą się z elektrowozu i siedmiu różnych wagoników. Na ile sposobów może zbudować pociąg, który ma elektrowóz na początku składu i cztery wagoniki?

3.26. W klasie 5c jest 18 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać w tej klasie samorząd złożony z przewodniczącego, zastępcy i skarbnika, jeżeli funkcję przewodniczącego ma objąć dziewczynka, a zastępcą ma być chłopiec?

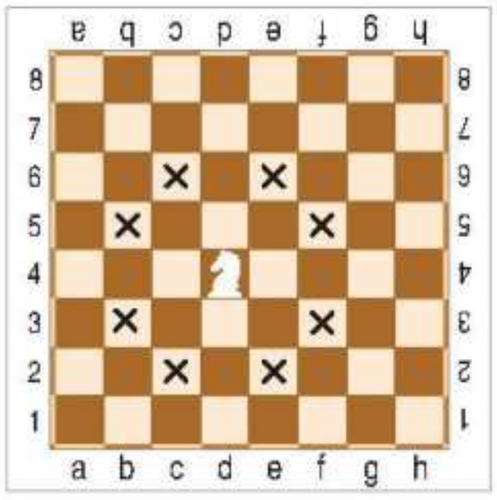
3.27. Marta ma trzy różne klucze. Tylko dwa z nich pasują do zamków w skrytce bankowej, którą można otworzyć jednoczesnym przekręceniem obydwu kluczy. Klucze nie różnią się, niestety, wielkością. Ile prób otwarcia podjęła Marta, jeżeli dopiero przy ostatnim z możliwych wariantów (a jest mądrą dziewczyną i nie sprawdzała kilka razy tego samego układu) drzwi się otworzyły?

3.28. W konkursie „Kangur Matematyczny" jest 30 pytań, a do każdego z nich 5 wariantów odpowiedzi (z których dokładnie jedna jest poprawna). Na ile sposobów uczestnik konkursu może wypełnić kartę odpowiedzi, jeżeli

a) odpowie na wszystkie pytania?

b) na niektóre (a nawet na wszystkie) pytania może nie udzielić odpowiedzi?

3.29. Skoczek (potocznie zwany koniem lub konikiem) jest figurą szachową, która porusza się na szachownicy w jednym ruchu o dwa pola w pionie lub poziomie i o jedno pole w kierunku prostopadłym do poprzedniego, czyli „po literze L" (zob. rysunek). Ustawiamy skoczka na pozycji a1, a następnie wykonujemy nim trzy ruchy. Na ile sposobów możemy to zrobić?



3.30. Ile jest wszystkich podzbiorów zbioru

a) trzyelementowego? b) n-elementowego?

3.31. Ile dzielników naturalnych ma liczba 30 030?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Liczba wszystkich liczb sześciocyfrowych, które są utworzone z cyfr 1, 2, 3 oraz są

A. parzyste, jest równa 243.

B. nieparzyste, jest równa 64.

C. podzielne przez 4, jest równa 81.

2. Nauczyciel wychowania fizycznego zamawia stroje dla szkolnej drużyny piłki nożnej. Do wyboru ma 6 kolorów koszulek, 4 kolory spodenek i 3 kolory getrów. Ile różnych zestawów może wybrać?

3. Autobusy w Pyrkach mają specjalną rejestrację, na którą składają się najpierw dwie litery, a następnie dwie cyfry. Ile maksymalnie autobusów można w taki sposób zarejestrować, jeżeli do dyspozycji mamy 24 litery alfabetu?

4. Przesuwamy się po bokach i przekątnych wypukłego pięciokąta $ABCDE$. Na ile sposobów możemy dojść z punktu A do punktu E, przechodząc przez wszystkie pozostałe wierzchołki pięciokąta i przez każdy z nich tylko raz?

5. Rozpatrujemy wszystkie funkcje, których dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a wartości należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Ile jest wśród tych funkcji takich, których zbiór wartości jest dwuelementowy?

4. Obliczanie prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Przypomnijmy, że jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A jest równe:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, a $\overline{\overline{\Omega}}$ – liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Przykład 1

Rzucamy dwa razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną różne wyniki?

Rozwiązanie

W pierwszym rzucie może wypaść orzeł (oznaczamy to O) lub reszka (oznaczamy R), w drugim rzucie podobnie – wynik to O lub R. Przyjmujemy następującą konwencję – zapis OR oznacza taki wynik doświadczenia, w którym w pierwszym rzucie wypadł orzeł i w drugim wypadła reszka. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy w postaci:

$$\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$$

Niech A oznacza zdarzenie: wypadną różne wyniki.

$$A = \{OR, RO\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Zamiast monety możemy wykorzystać urnę z dwiema ponumerowanymi kulami i losować kolejno ze zwracaniem.

Odp.: $\frac{1}{2}$

Gdybyśmy nie uwzględnili kolejności wyników rzutów, to otrzymalibyśmy 3 zdarzenia elementarne: „różne wyniki", „dwa orły" i „dwie reszki", ale wówczas zdarzenia te nie byłyby jednakowo prawdopodobne (co zauważy nawet początkujący gracz).

Przykład 2 ◀ zad. 4.4

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba reszek będzie większa od liczby orłów?

Doświadczenia „k razy rzut monetą (kostką)" i „rzut k rozróżnialnymi monetami (kostkami)" możemy dokładnie tak samo zinterpretować i opisać. Identyczne są zatem zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.

Rozwiązanie

Doświadczeniem jest trzykrotny rzut monetą. Wyznaczmy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO,\ OOR,\ ORO,\ ROO,\ RRO,\ ROR,\ ORR,\ RRR\}$$

Zatem zbiór zdarzeń elementarnych ma $2^3 = 8$ elementów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 8$$

Interesujące nas zdarzenie A polega na wylosowaniu większej liczby reszek niż orłów, czyli:

$$A = \{RRR,\ RRO,\ ROR,\ ORR\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 4$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że jeżeli wykonujemy nieparzystą liczbę rzutów monetą, to nie ma możliwości otrzymania takiej samej liczby reszek i orłów. W połowie wszystkich możliwych wyników więcej jest reszek, a w połowie – orłów. Odpowiedzi można było udzielić od razu, bez wypisywania elementów zbioru A.

Odp.: $\frac{1}{2}$

Przykład 3

Zapisujemy czterocyfrowe liczby w następujący sposób: rzucamy 4 razy monetą – jeżeli wypadnie orzeł, to zapisujemy 1, a jeśli reszka – to 2. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest:

A – parzysta, B – podzielna przez 3, C – podzielna przez 4?

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych ma $2^4 = 16$ elementów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 16$$

W zapisie otrzymanych liczb występują tylko cyfry 1 i 2. Połowa tych liczb kończy się jedynką, a połowa – dwójką, zatem:

$$\overline{\overline{A}} = 8, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że do wybrania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A niepotrzebne były informacje o cyfrach uzyskanych w pierwszych trzech losowaniach. Szukane prawdopodobieństwo można zatem wyznaczyć prościej – wystarczy wziąć pod uwagę tylko ostatnie losowanie. Skoro na dwie możliwości jedna jest dobra, to $P(A) = \frac{1}{2}$.

Zdarzenie B zajdzie wtedy, gdy suma cyfr będzie podzielna przez 3 – w naszym losowaniu oznacza to wyłącznie liczbę, której suma cyfr jest równa 6 (najmniejszą z możliwych sum jest 4, a największą – 8). Zatem dobrymi wynikami są tylko liczby zapisane z użyciem dwóch dwójek i dwóch jedynek: 1122, 1212, 1221, 2121, 2112, 2211.

$$\overline{\overline{B}} = 6, \quad P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Zdarzenie C zajdzie wtedy, gdy na końcu liczby pojawi się układ cyfr 12 (zgodnie z cechą podzielności przez 4), czyli dobrymi wynikami są tylko liczby: 1112, 1212, 2112, 2212.

$$\overline{\overline{C}} = 4, \quad P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Podobnie jak przy zdarzeniu A, do obliczenia szukanego prawdopodobieństwa niepotrzebna jest informacja o wynikach pierwszych dwóch losowań. Zadanie można uprościć – wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania liczby dwucyfrowej podzielnej przez 4, w której występują tylko cyfry 1 i 2. Sprzyjający układ 12 wystąpi raz na cztery możliwości (11, 12, 21, 22), więc $P(C) = \frac{1}{4}$.

Odp.: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(C) = \frac{1}{4}$

Przykład 4 ◂ zad. 4.10

Rzucamy dwa razy kostką. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że:

A – suma oczek jest większa od 10,

B – za drugim razem wypadła liczba oczek o 2 większa niż za pierwszym razem,

C – obydwa wyniki są nieparzyste,

D – wyniki w obydwu rzutach są różne.

Rozwiązanie

W tym doświadczeniu losowym $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$.

$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16,$
$21, 22, 23, 24, 25, 26,$
$31, 32, 33, 34, 35, 36,$
$41, 42, 43, 44, 45, 46,$
$51, 52, 53, 54, 55, 56,$
$61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

- $A = \{56, 65, 66\}$

  $\overline{\overline{A}} = 3, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

- $B = \{13, 24, 35, 46\}$

  $\overline{\overline{B}} = 4, \quad P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- C – obydwa wyniki są nieparzyste:

$$\overline{\overline{C}} = 3^2 = 9,\ P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

- D – wyniki w obydwu rzutach są różne:

$$\overline{\overline{D}} = 6 \cdot 5,\ P(D) = \frac{\overline{\overline{D}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6 \cdot 5}{36} = \frac{5}{6}$$

Odp.: $P(A) = \frac{1}{12}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{5}{6}$

1. rzut / 2. rzut	1	2	3	4	5	6
1	×		×		×	
2						
3	×		×		×	
4						
5	×		×		×	
6						

Poszczególne zdarzenia w tym doświadczeniu można też zliczać na rysunku. Każdemu z 36 zdarzeń elementarnych odpowiada jedna komórka w tabeli. Na rysunku zaznaczono zdarzenia sprzyjające zdarzeniu C.

Przykład 5

Rzucamy trzy razy kostką. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie otrzymamy tyle oczek, ile jest równa suma oczek w drugim i trzecim rzucie.

Rozwiązanie

Niech A oznacza interesujące nas zdarzenie.

$$A = \{615, 624, 633, 642, 651, 514, 523, 532, 541, 413, 422, 431, 312, 321, 211\}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^3,\quad \overline{\overline{A}} = 15,\quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$

Odp.: $\frac{5}{72}$

Przykład 6

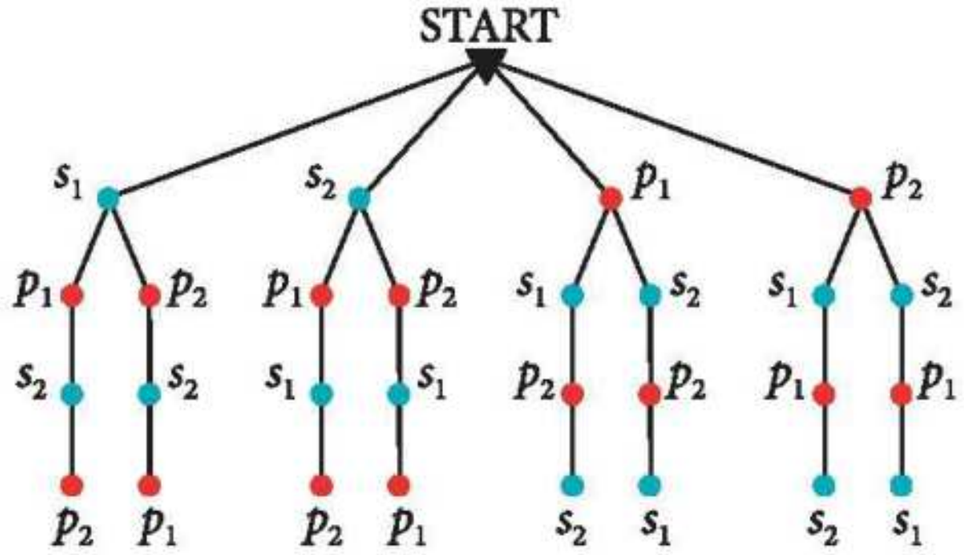
Krzyś opiekuje się szczeniakami – dwiema suczkami i dwoma pieskami. Podaje je losowo weterynarzowi do szczepienia. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A: suczki i pieski będą szczepione na zmianę?

Rozwiązanie

Na rysunku drzewka s_1, s_2 oznacza suczkę, p_1, p_2 – pieska.

Odczytujemy z niego liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A:

$$\overline{\overline{A}} = 4 \cdot 2$$



Cztery szczeniaki są podawane kolejno, zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Odp.: $\frac{1}{3}$

Przykład 7 ◀ zad. 4.11

Tata Ali codziennie śpiewa córeczce jedną z siedmiu kołysanek, które zna. Z jakim prawdopodobieństwem nie powtórzy w ciągu tygodnia ani jednej, jeżeli kołysanki wybiera w sposób losowy?

Rozwiązanie

Jeżeli ponumerujemy kołysanki 1, 2, …, 7, to każdą możemy utożsamić z kulą o odpowiadającym jej numerze. Tata Ali losuje jedną dziennie (z całego zbioru, czyli ze zwracaniem), więc ma zawsze 7 możliwości wyboru. Zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 7^7$$

Jeżeli przyjmiemy, że A jest zdarzeniem polegającym na wyborze różnych piosenek w ciągu tygodnia, to zdarzenia sprzyjające otrzymamy, gdy będziemy losować 7 razy bez zwracania, czyli:

$$\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P(A) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^6} = \frac{720}{117649} \approx \frac{1}{163}$$

Odp.: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^6}$

Przykład 8 ◀ zad. 4.13

Klara i Leon wybierają losowo przedziały spośród 7 kolejnych wolnych przedziałów w wagonie. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że nie będą jechali

a) w tym samym przedziale.

b) ani w tym samym przedziale, ani w sąsiednich przedziałach.

Rozwiązanie

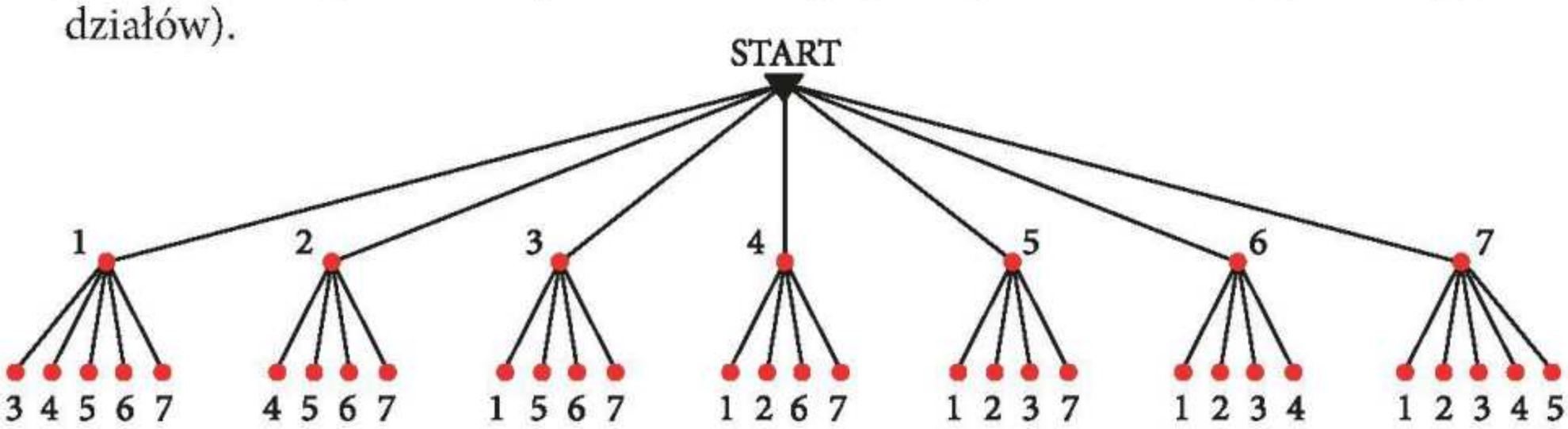
Klara i Leon mają po 7 możliwości wyboru, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 7 \cdot 7$.

a) Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że nie wylosują tego samego przedziału. Pierwsza osoba wybierająca przedział ma 7 możliwości, natomiast druga już tylko 6. Liczba wszystkich sprzyjających układów jest więc równa $7 \cdot 6$.

$$\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 6$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{7 \cdot 6}{7 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

b) Niech B oznacza zdarzenie polegające na tym, że Klara i Leon nie wylosują ani tego samego przedziału, ani sąsiednich przedziałów. Do wyznaczenia liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B posłużymy się rysunkiem. Przyjmijmy, że jako pierwsza przedział wybiera Klara (cyfry na rysunku oznaczają numery przedziałów).



Zauważmy, że:

- jeżeli Klara trafi do pierwszego przedziału, to Leon może jechać w każdym z przedziałów o numerach 3, 4, 5, 6 oraz 7 – daje to 5 możliwości (podobna sytuacja zaistnieje wówczas, gdy Klara wylosuje ostatni przedział),
- jeżeli Klara trafi do któregoś ze środkowych przedziałów, to Leon ma do wyboru jeden z czterech przedziałów.

Wszystkich sprzyjających zdarzeń elementarnych jest tyle, ile gałęzi w ostatnim wierszu drzewka.

$$\overline{\overline{B}} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 30$$

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{30}{7 \cdot 7} = \frac{30}{49}$$

Odp.: a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{30}{49}$

Przykład 9 ◀ zad. 4.17

Autobus wiozący pięciu pasażerów jedzie trasą, wzdłuż której jest 8 przystanków. Zakładamy, że wszystkie rozkłady wysiadania pasażerów na przystankach są jednakowo prawdopodobne. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że każdy pasażer wysiądzie na innym przystanku.

Rozwiązanie

Każdy z pasażerów ma do wyboru dowolny z ośmiu przystanków (ośmiu ponumerowanych kul). Wyobraźmy sobie, że losowanie odbywa się przed wejściem pasażera do autobusu. Pierwszy pasażer losuje jedną kulę z ośmiu, wrzuca ją z powrotem do urny, aby drugi pasażer miał do dyspozycji 8 przystanków itd.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 8^5$$

Niech A oznacza zdarzenie, że każdy pasażer wysiądzie na innym przystanku. Wyniki sprzyjające uzyskamy wówczas, gdy żadna cyfra się nie powtórzy. Zatem:

$$\overline{\overline{A}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4, \quad P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{105}{512}$$

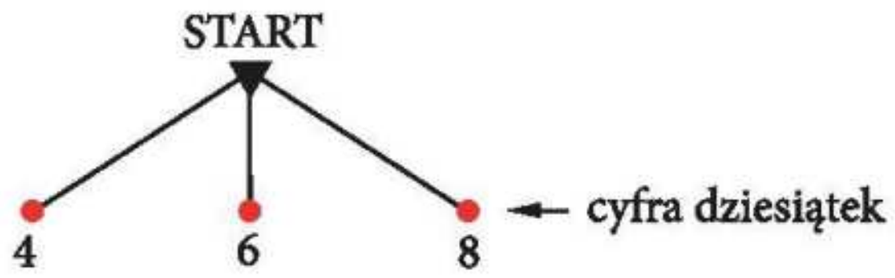
Odp.: $\frac{105}{512}$

Przykład 10 ◂ zad. 4.26

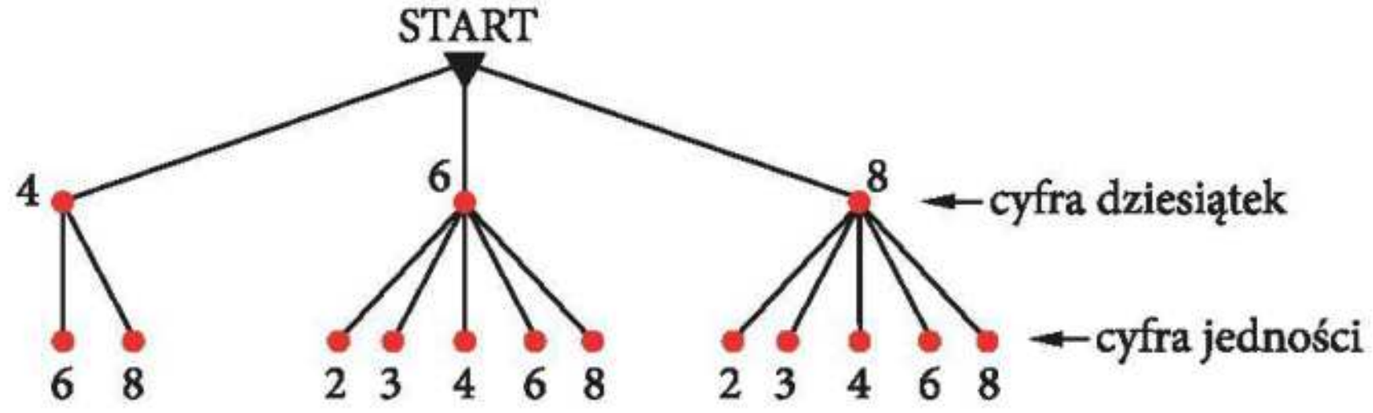
W urnie znajduje się pięć kul podpisanych cyframi 2, 3, 4, 6, 8. Losujemy jedną kulę, zapisujemy wynik i wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do urny. Następnie losujemy drugi raz i dopisujemy wynik do pierwszej cyfry (po jej prawej stronie). W ten sposób wylosowane cyfry tworzą liczbę dwucyfrową. Z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę większą od 44?

Rozwiązanie

W urnie mamy pięć kul i losowanie powtarzamy dwukrotnie, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 25$.
Oznaczmy literą A interesujące nas zdarzenie – wylosowanie liczby większej od 44. Przykładami sprzyjających zdarzeń elementarnych są wyniki: 66, 48, 63 itd. Natomiast niepożądane liczby to np. 23, 44.
Zastanówmy się, jak zliczyć wyłącznie sprzyjające układy cyfr. Pierwsza wylosowana cyfra będzie cyfrą dziesiątek tworzonej liczby, więc nie może być mniejsza od 4. W pierwszym losowaniu interesują nas zatem tylko kule oznaczone 4, 6 albo 8.



Jeżeli pierwszą wylosowaną cyfrą jest 6 lub 8, to nie jest ważne, jaka będzie następna – każdy układ jest dobry. Inaczej rzecz się ma z wylosowaną jako pierwszą cyfrą 4. Liczba 46 jest dobra, a 43 nie. W tym wypadku w drugim losowaniu mogą pojawić się tylko dwie kule – z numerem 6 oraz 8. Ostatecznie drzewko wszystkich sprzyjających układów wygląda następująco:



$$\overline{\overline{A}} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{12}{25}$$

Odp.: $\frac{12}{25}$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w trzech rzutach monetą.

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{3}{8}$

4.2. Kazik zapomniał czterocyfrowego kodu do domofonu w swoim bloku. Wybrał więc losowo liczby na klawiaturze. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że drzwi się otworzą.

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{40}$ **C.** $\frac{1}{10^4}$ **D.** $\frac{1}{4^{10}}$

4.3. Rzucamy trzema kostkami i czterema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wypadną tylko szóstki i reszki.

A. $\frac{1}{3 \cdot 6 + 4 \cdot 2}$ **B.** $\frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$ **C.** $\frac{1}{6^3 \cdot 2^4}$ **D.** $\frac{1}{3^6 \cdot 4^2}$

4.4. Rzucamy czterema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na trzech spośród tych monet wypadnie reszka?

4.5. Rzucamy pięć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik.

4.6. Rzucamy monetą i sześcienną kostką do gry. Wypisz zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:
A – wypadnie reszka i parzysta liczba oczek,
B – wypadnie orzeł i liczba oczek podzielna przez 3,
C – wypadnie nieparzysta liczba oczek,
D – wypadnie orzeł,
E – wypadnie reszka i liczba oczek podzielna przez 7,
F – wypadnie szóstka.

4.7. Pan Krzysztof ma w lewej kieszeni jeden cienkopis czarny i jeden niebieski, a w prawej – jeden zielony, jeden czerwony i jeden fioletowy. Wyjmuje losowo po jednym cienkopisie z każdej kieszeni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyjmie cienkopisy czarny i czerwony.

4.8. Z talii 52 kart losujemy kolejno dwie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwszą wylosowaną kartą będzie as, a drugą dama.

4.9. Z pudełka, w którym są 3 kule białe i 2 czarne, losujemy bez zwracania dwie kule. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie dwóch kul białych czy wylosowanie najpierw kuli czarnej, a potem białej?

4.10. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) na obu kostkach wypadną identyczne wyniki.
b) na obu kostkach wypadną parzyste liczby oczek.
c) liczba oczek na pierwszej kostce będzie większa.
d) liczba oczek na pierwszej kostce będzie wielokrotnością liczby oczek z drugiej kostki.

4.11. Ze zbioru {4, 6, 7, 8} losujemy cztery razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Otrzymane wyniki zapisujemy i tworzymy w ten sposób czterocyfrowe liczby – ostatnia wylosowana liczba jest cyfrą jedności. Oblicz z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę
a) o różnych cyfrach.
b) nieparzystą.

4.12. Tworzymy liczbę trzycyfrową w następujący sposób: spośród cyfr 1, 2, …, 9 losujemy najpierw cyfrę setek, potem z pozostałych ośmiu cyfrę dziesiątek, a następnie z pozostałych siedmiu – cyfrę jedności. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej.

4.13. Patryk i Martyna jadą na wakacje tym samym pociągiem. Komputer przydzielił im losowo miejsca w tym samym sześcioosobowym przedziale. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zajmą miejsca
a) naprzeciwko siebie.
b) obok siebie.

4.14. W wagonie jest jedenaście przedziałów po osiem miejsc w każdym. Kupujemy (losową) miejscówkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy miejsce przy oknie.

4.15. W teleturnieju prowadzący zadaje dziesięć pytań. Do każdego z nich podane są cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba nieznająca odpowiedzi na żadne pytanie odpowie na wszystkie poprawnie.

4.16. Ambroży, Baltazar, Cezary i Dionizy losują kolejność, w jakiej będą skakać do basenu z trampoliny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) Ambroży będzie skakał na końcu.
b) panowie skoczą w alfabetycznej kolejności ich imion.
c) Cezary i Dionizy skoczą jeden za drugim (Cezary za Dionizym lub odwrotnie).
d) Baltazar będzie skakał wcześniej niż Dionizy.

4.17. Sześciu pasażerów wsiada na przystanku do tramwaju złożonego z trzech wagonów. Zakładamy, że każdy pasażer może z tym samym prawdopodobieństwem wsiąść do dowolnego wagonu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

a) wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu.

b) do jednego z wagonów nie wsiądzie żaden pasażer.



4.18. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne w doświadczeniu, które polega na losowaniu kolejno dwóch kul

a) bez zwracania.

b) ze zwracaniem.

4.19. W urnie są cztery kule, na każdej z nich napisana jest cyfra. Losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na drugiej wylosowanej kuli jest większa liczba niż na pierwszej, jeżeli kule w urnie mają cyfry

a) 1, 2, 3, 4.

b) 1, 1, 2, 3.

4.20. Z cyfr 0, 1, 2, 3, 4 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana jedna z tych liczb ma dwie cyfry parzyste i jedną nieparzystą.

4.21. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5 i 6, wybieramy losowo jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę

a) o różnych cyfrach.

b) o jednakowych cyfrach.

c) parzystą.

d) większą od 500.

4.22. Gracz rzuca dwa razy kostką. Jeżeli wyniki są identyczne, to do sumy wyrzuconych oczek dolicza mu się 5 punktów, jeżeli wyniki są różne i wśród nich jest jedynka, to dolicza się 3 punkty. W pozostałych przypadkach grający traci tyle punktów, ile wynosi suma wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, z jakim w jednej grze gracz

a) zdobędzie maksymalną liczbę punktów.

b) zdobędzie 6 punktów.

c) zdobędzie 9 punktów.

d) straci punkty.

4.23. Pięcioletni Tomek pomaga tacie w robieniu porządków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ustawi czterotomową encyklopedię i zachowa kolejność tomów (Tomek nie umie jeszcze czytać i książki ustawia losowo).

4.24. Bliźniaki Antek i Bartek ustanowili następującą zasadę wynoszenia śmieci. Rzucają kostką i monetą. Jeżeli na kostce wypadnie mniej niż pięć oczek i na monecie orzeł, to przez tydzień śmieci wynosi Antek, a jeżeli na kostce wypadną więcej niż dwa oczka i na monecie reszka, to Bartek. W pozostałych przypadkach śmieci ma wynosić ich młodszy brat Czarek. Czy ustalone warunki są sprawiedliwe?

4.25. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczby oczek wyrzuconych w pierwszym i drugim rzucie jest mniejsza od liczby oczek wyrzuconych w trzecim rzucie.

4.26. W pudełku jest 10 kul oznaczonych cyframi 0, 1, …, 8, 9. Wyjmujemy losowo jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy z powrotem do pudełka. Czynność tę powtarzamy trzy razy. W ten sposób tworzymy ciągi trzyelementowe (a, b, c), dla których budujemy wyrażenia $100a+10b+c$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wartość tego wyrażenia jest

a) liczbą dwucyfrową.
b) liczbą większą od 653 i mniejszą od 921.
c) wielokrotnością liczby 10.

* **4.27.** Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że urodziny sześciu losowo wybranych osób wypadają w dwóch miesiącach? Prawdopodobieństwo urodzenia w każdym miesiącu przyjmujemy za jednakowe.

4.28. Pomalowany klocek sześcienny pocięto na 1000 jednakowych sześcianików. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia sześcianika

a) pomalowanego na jednej ścianie.
b) pomalowanego na dwóch ścianach.
c) pomalowanego na trzech ścianach.
d) pomalowanego na jednej lub dwóch ścianach.
e) niepomalowanego.

4.29. Ankieta składa się z czterech pytań, na które można odpowiedzieć „tak” lub „nie”. Jarek i Kasia wypełnili swoje ankiety na chybił trafił. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypełnili je tak samo.

* **4.30.** Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednym elemencie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg w kolejności losowania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane liczby utworzą

a) ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ lub 3.
b) ciąg arytmetyczny.

4.31. Ze zbioru wszystkich liczb całkowitych czterocyfrowych wybieramy losowo jedną. Oznaczmy ją n. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 1 jest ostatnią cyfrą liczby
a) n^2. b) n^4.

4.32. Rzucamy dwukrotnie kostką trzydziestościenną, na której ściankach są wypisane liczby od 1 do 30 i wyrzucenie każdej ze ścianek jest jednakowo możliwe. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wartość bezwzględna różnicy otrzymanych liczb jest mniejsza od 10.



Prosto do matury

1. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Prawdopodobieństwo tego, że jedna z tych liczb wybrana losowo jest
A. równa 125, wynosi $\frac{1}{125}$.
B. mniejsza od 300, wynosi $\frac{2}{5}$.
C. parzysta, wynosi $\frac{3}{5}$.

2. Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn oczek uzyskanych w obu rzutach będzie liczbą podzielną przez 3.

3. Z pudełka, w którym są 2 kule białe i 3 czarne, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie wylosowane kule będą tego samego koloru.

4. Trzech profesorów przyszło na konferencję z podobnymi parasolami. Po zakończeniu konferencji zabrali parasole losowo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy wrócił do domu z własnym parasolem.

5. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno trzy razy ze zwracaniem po jednej cyfrze. Następnie tworzymy z nich liczbę trzycyfrową (pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą setek itd.). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy w ten sposób liczbę mniejszą od 240.

5. Własności prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- wykonywanie działań na zdarzeniach
- stosowanie własności prawdopodobieństwa w zadaniach

W rachunku prawdopodobieństwa wygodne jest używanie języka teorii zbiorów. Do tej pory korzystaliśmy z takich określeń jak np. zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych (zdarzenie pewne), zbiór pusty (zdarzenie niemożliwe), ponadto dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych nazywaliśmy zdarzeniem. Ponieważ zdarzenia są zbiorami, możemy wykonywać na nich poznane wcześniej działania oraz badać relacje, jakie między nimi zachodzą.

Przyjmijmy, że Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego oraz A, B – zdarzeniami, czyli $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$.

- **Alternatywą** lub **sumą zdarzeń** A i B nazywamy takie zdarzenie C, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A albo zachodzi zdarzenie B, albo zachodzą obydwa te zdarzenia jednocześnie. Zdarzeniu C sprzyjają więc zdarzenia elementarne sprzyjające co najmniej jednemu ze zdarzeń A lub B, czyli $C = A \cup B$.
- **Koniunkcją** lub **iloczynem zdarzeń** A i B nazywamy takie zdarzenie D, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie zachodzi zdarzenie A i zdarzenie B. Zdarzeniu D sprzyjają więc zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniom A i B, czyli $D = A \cap B$.
- **Różnicą zdarzeń** A i B nazywamy takie zdarzenie E, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i nie zachodzi zdarzenie B. Zdarzeniu E sprzyjają więc tylko te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A i nie sprzyjają zdarzeniu B, czyli $E = A - B$.

Przykład 1

Doświadczenie polega na rzucie kostką i monetą. Zatem:

$\Omega = \{1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R, 1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O\}$

Zdarzenie A polega na wyrzuceniu parzystej liczby oczek na kostce oraz reszki, a zdarzenie B – na wyrzuceniu liczby oczek większej niż 3. Mamy więc:

$A = \{2R, 4R, 6R\}$, $B = \{4R, 5R, 6R, 4O, 5O, 6O\}$

Wówczas:

$A \cup B = \{2R, 4R, 5R, 6R, 4O, 5O, 6O\}$ $\quad$ $A \cap B = \{4R, 6R\}$

$A - B = \{2R\}$ $\quad$ $B - A = \{5R, 4O, 5O, 6O\}$

Przykład 2

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką.

a) Zdarzenie A – iloczyn liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest równy 6:
$A = \{16, 23, 32, 61\}$
Zdarzenie B – przynajmniej raz wypadła szóstka:
$B = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\}$
Zdarzenie C – iloczyn liczb oczek jest równy 6 **lub** przynajmniej raz wypadła szóstka, czyli zaszło zdarzenie A **lub** zdarzenie B:
$C = \{16, 23, 26, 32, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\} = A \cup B$

b) Zdarzenie D – suma liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest mniejsza od 6:
$D = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 31, 32, 41\}$
Zdarzenie E – wyniki obydwu rzutów są liczbami parzystymi:
$E = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$
Zdarzenie F – suma liczb oczek jest mniejsza od 6 **i** wyniki obydwu rzutów są parzyste, czyli zaszło zdarzenie D **i** zdarzenie E:
$F = \{22\} = D \cap E$

c) Zdarzenie G – iloczyn liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest równy 10:
$G = \{25, 52\}$
Zdarzenie H – za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej niż za pierwszym razem:
$H = \{14, 25, 36\}$
Zdarzenie K – za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej **i** iloczyn liczb oczek **nie jest** równy 10, czyli zaszło zdarzenie H **i nie zaszło** zdarzenie G:
$K = \{14, 36\} = H - G$

Nazwiemy teraz pewne relacje, które zachodzą między zdarzeniami $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$.

- Powiemy, że zdarzenia A i B są **identyczne**, jeżeli zdarzenie A zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie B. Oznacza to, że zdarzeniom A i B sprzyjają te same zdarzenia elementarne, czyli zbiory A i B są równe.
  $A = B$
- Powiemy, że zdarzenie A **pociąga za sobą** zdarzenie B, jeżeli każde zdarzenie elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A sprzyja jednocześnie zajściu zdarzenia B. Oznacza to, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B.
  $A \subset B$
- Powiemy, że zdarzenia A i B **wykluczają się (wyłączają się)**, gdy ich iloczyn jest zdarzeniem niemożliwym. Inaczej mówiąc, zdarzenia A i B nie mogą zajść jednocześnie. Zbiory A i B są rozłączne.
  $A \cap B = \emptyset$

- Jeżeli $A \subset \Omega$, to **zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie A' polegające na tym, że nie zaszło zdarzenie A. Zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu A' wtedy i tylko wtedy, gdy nie sprzyja zdarzeniu A. Oznacza to, że $A' = \Omega - A$.

Zauważmy, że jeżeli $A \subset \Omega$, to:

$$A \cap A' = \emptyset$$
$$A \cup A' = \Omega$$

W teorii zbiorów zbiór A' nazywamy **dopełnieniem** zbioru A do przestrzeni (zbioru) Ω.

Przykład 3 ◂ zad. 5.4–5.6

Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrujemy cztery zdarzenia w tym doświadczeniu:

A – suma liczb oczek jest równa 2

B – wypadły dwie jedynki

C – iloczyn liczb oczek jest równy 10

D – wartość bezwzględna różnicy liczb oczek wynosi 3

- Zdarzenia A i B są identyczne:
  $A = \{11\}, \quad B = \{11\}$
  $A = B$
- Zdarzenie C pociąga za sobą zdarzenie D:
  $C = \{25, 52\}, \quad D = \{14, 25, 36, 41, 52, 63\}$
  $C \subset D$
- Zdarzenia A i C się wykluczają:
  $A \cap C = \emptyset$
- Również zdarzenia A i D się wykluczają:
  $A \cap D = \emptyset$

Przykład 4 ◂ zad. 5.8

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką. W tabeli przedstawiamy kilka par zdarzeń przeciwnych w tym doświadczeniu.

Zdarzenie	Zdarzenie przeciwne
A – suma liczb oczek jest równa 10	A' – suma liczb oczek jest różna od 10
B – wypadły parzyste liczby oczek	B' – co najmniej raz wypadła nieparzysta liczba oczek
C – co najmniej raz wypadła szóstka	C' – szóstka nie wypadła ani razu

Przykład 5

Obserwujemy pewien zbiór graczy w lotto. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia „losowo wybrana osoba wygrała przynajmniej raz jakąkolwiek kwotę” jest zdarzenie „losowo wybrana osoba nigdy nie wygrała”.

Przykład 6 ◀ zad. 5.12–5.14

Obserwujemy pewną grupę właścicieli psów. Niech A będzie zdarzeniem – wybrana losowo osoba podaje swojemu psu suchą karmę „Na psi ząb", a B zdarzeniem – wybrana losowo osoba stosuje karmę „Psi gryz".

Rozszyfrujemy, co oznaczają zapisy (każdy dotyczy losowo wybranego właściciela psa): $A \cup B$, $A \cap B$, A', B', $A \cap B'$, $A' \cap B'$, $A - B$.

Rozwiązanie

- $A \cup B$ – właściciel podaje psu karmę „Na psi ząb" lub „Psi gryz".
- $A \cap B$ – właściciel podaje psu dwie karmy: „Na psi ząb" i „Psi gryz".
- A' – właściciel nie podaje psu karmy „Na psi ząb".
- B' – właściciel nie podaje psu karmy „Psi gryz".
- $A \cap B'$ – właściciel stosuje karmę „Na psi ząb" i nie podaje karmy „Psi gryz".
- $A' \cap B'$ – właściciel nie podaje psu ani karmy „Na psi ząb", ani „Psi gryz".
- $A - B$ – właściciel stosuje karmę „Na psi ząb" i nie podaje karmy „Psi gryz".

Zauważmy, że zdarzenia $A \cap B'$ i $A - B$ są identyczne.

Przykład 7

Antybiotyk A^+ musi być podawany razem z dowolnym lekiem z grupy leków tzw. osłonowych. Obserwujemy pacjentów pewnego szpitala.

Jeżeli B oznacza zdarzenie – losowo wybrany pacjent zażywa antybiotyk A^+, a C zdarzenie – losowo wybrany pacjent otrzymuje lek osłonowy, to:

- $B \subset C$ ⟵ każdy pacjent zażywający A^+ przyjmuje również lek osłonowy, więc zdarzenie B pociąga za sobą zdarzenie C
- $B \cap C = B$ ⟵ pacjenci zażywający jednocześnie antybiotyk A^+ i lek osłonowy tworzą całą grupę pacjentów zażywających antybiotyk A^+
- $B \cup C = C$ ⟵ pacjenci zażywający antybiotyk A^+ lub lek osłonowy tworzą całą grupę pacjentów zażywających lek osłonowy

Prawdopodobieństwo klasyczne obejmuje takie doświadczenia losowe, w których liczba zdarzeń elementarnych jest skończona i każde z nich ma jednakową szansę zajścia. Są nimi wszystkie gry losowe (rzuty monetą, kostką, losowanie kart z talii, kul z urny itp.). Praktyczne zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa wykroczyło daleko poza obszar gier. Pojawiła się konieczność wprowadzenia nowej definicji

prawdopodobieństwa, która obejmowałaby wszystkie sytuacje klasyczne, ale odrzuciłaby założenia o:

- skończonej liczbie zdarzeń elementarnych,
- jednakowym prawdopodobieństwie każdego zdarzenia elementarnego.

Przyjęta została następująca definicja.

Definicja

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych.
Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $P(A)$ taka, że
(1) $P(A) \geqslant 0$,
(2) dla każdej pary $A,\ B \subset \Omega$ wykluczających się zdarzeń zachodzi
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
(3) $P(\Omega) = 1$,
to mówimy, że **na zdarzeniach w zbiorze Ω określone jest prawdopodobieństwo** P, a liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia** A.

Zatem prawdopodobieństwo jest funkcją, której argumentami są zdarzenia $A \subset \Omega$ i która spełnia wszystkie trzy podane w definicji warunki.
Z powyższej definicji nie wynika bezpośrednio, w jaki sposób należy obliczać prawdopodobieństwo zdarzenia. Pomogą nam w tym własności prawdopodobieństwa, które wynikają z tej definicji.

Własności prawdopodobieństwa

Twierdzenie

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A,\ B \subset \Omega$. Wtedy:
(1) $P(\emptyset) = 0$.
(2) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.
(3) dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ prawdziwa jest nierówność $P(A) \leqslant 1$.
(4) $P(A) + P(A') = 1$.
(5) dla dowolnych zdarzeń $A,\ B \subset \Omega$ zachodzi równość:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dowód

(1) $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$ $\longleftarrow A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$
$P(A) - P(A) = P(\emptyset)$, czyli $P(\emptyset) = 0$.

(2) Jeżeli $A \subset B$, to $B = (B - A) \cup A$. ⟵ zbiory $(B - A)$ i A są rozłączne
$P(B) = P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A)$, ⟵ zdarzenia $(B - A)$ i A się wykluczają
więc $P(B) \geqslant P(A)$. ⟵ $P(B - A) \geqslant 0$

(3) $P(\Omega) = 1$ i $A \subset \Omega$, więc na mocy udowodnionej nierówności (2) mamy $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.

(4) $A \cup A' = \Omega$ i $A \cap A' = \emptyset$, zatem $1 = P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$.

(5) Jeżeli $A, B \subset \Omega$, to:

- $A \cup B = A \cup (B - A)$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ $(*)$ ⟵ zdarzenia $(B - A)$ i A się wykluczają
- $B = (B - A) \cup (A \cap B)$,
  $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$, ⟵ zdarzenia $(B - A)$ i $(A \cap B)$ się wykluczają

  stąd

  $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ i po podstawieniu do równości $(*)$ otrzymujemy tezę.

Koniec dowodu

Zauważmy, że prawdopodobieństwo klasyczne spełnia warunki 1–3 definicji podanej na s. 410, więc jest prawdopodobieństwem w sensie tej definicji.

Przykład 8 ◂ zad. 5.16

Z talii 52 kart losujemy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że wylosowana karta jest treflem lub figurą.

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe polega na losowaniu jednej karty z talii. Zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 52$.
Wprowadzamy oznaczenia.

T – zdarzenie polegające na wylosowaniu trefla:

$T = \{2_\clubsuit, 3_\clubsuit, 4_\clubsuit, 5_\clubsuit, 6_\clubsuit, 7_\clubsuit, 8_\clubsuit, 9_\clubsuit, 10_\clubsuit, W_\clubsuit, D_\clubsuit, K_\clubsuit, A_\clubsuit\}$

$\overline{\overline{T}} = 13$

F – zdarzenie polegające na wylosowaniu figury:

$F = \{W_\clubsuit, D_\clubsuit, K_\clubsuit, A_\clubsuit, W_\diamondsuit, D_\diamondsuit, K_\diamondsuit, A_\diamondsuit, W_\heartsuit, D_\heartsuit, K_\heartsuit, A_\heartsuit, W_\spadesuit, D_\spadesuit, K_\spadesuit, A_\spadesuit\}$

$\overline{\overline{F}} = 16$

Szukamy prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia $T \cup F$, a ponieważ zdarzenia T i F się nie wykluczają, skorzystamy ze wzoru:

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) - P(T \cap F) \qquad (*)$$

Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, zatem:

$$P(T) = \frac{\overline{\overline{T}}}{\overline{\overline{\Omega}}}, \quad P(F) = \frac{\overline{\overline{F}}}{\overline{\overline{\Omega}}}, \quad P(T \cap F) = \frac{\overline{\overline{T \cap F}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Zdarzenie $T \cap F$ polega na wylosowaniu figury trefl, więc:

$$T \cap F = \{W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit}\} \text{ i } \overline{\overline{T \cap F}} = 4$$

Podstawiamy znalezione wielkości do równości $(*)$ i otrzymujemy:

$$P(T \cup F) = \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} = \frac{25}{52}$$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{25}{52}$.

Przykład 9 ◂ zad. 5.17

Losujemy jedną liczbę spośród 1, 2, . . . , 99, 100. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 3?

Rozwiązanie

Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowana liczba jest podzielna przez 2, B – wylosowana liczba jest podzielna przez 3. Zdarzenie $A \cap B$ polega na wylosowaniu liczby podzielnej przez 2 i przez 3 (czyli przez 6).

$\overline{\overline{\Omega}} = 100$

$\overline{\overline{A}} = 50$ ⟵ w rozpatrywanym zbiorze jest 50 liczb podzielnych przez 2

$\overline{\overline{B}} = 33$ ⟵ co trzecia liczba jest podzielna przez 3 $(100 = 33 \cdot 3 + 1)$

$\overline{\overline{A \cap B}} = 16$ ⟵ co szósta liczba jest podzielna przez 6 $(100 = 16 \cdot 6 + 4)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} + \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} - \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{50 + 33 - 16}{100} = \frac{67}{100}.$$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,67.

Przykład 10 ◂ zad. 5.19

Kontrola jakości w firmie „Czemodan" stwierdziła, że wadliwe zamki ma 17% walizek, szwy prują się w 15% walizek, a obie te wady występują jednocześnie w 7% walizek. Pozostałe walizki mogą być dopuszczone do sprzedaży. Z jakim prawdopodobieństwem wyprodukowana w „Czemodanie" walizka trafi do sklepu?

Rozwiązanie

Niech A oznacza zdarzenie, że wyprodukowana walizka ma wadliwy zamek, natomiast B – zdarzenie, że walizka ma prujące się szwy. Wiemy, że:

$$P(A) = 0{,}17, \; P(B) = 0{,}15, \; P(A \cap B) = 0{,}07$$

Do sprzedaży nie będą dopuszczone walizki, które mają jedną lub drugą wadę, a prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}17 + 0{,}15 - 0{,}07 = 0{,}25$$

Zdarzenie polegające na tym, że wyprodukowana w „Czemodanie" walizka trafi do sklepu, jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia $A \cup B$, zatem jego prawdopodobieństwo jest równe 0,75.

Odp.: Walizka z „Czemodanu" trafi do sklepu z prawdopodobieństwem 0,75.

Przykład 11 ◀ zad. 5.22

Rzucamy trzy razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie szóstka?

Rozwiązanie

Zwrot „przynajmniej raz" oznacza, że interesuje nas zdarzenie A – szóstka wypadła jeden, dwa lub trzy razy. Do obliczenia szukanego prawdopodobieństwa skorzystamy z prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia przeciwnego.

$\overline{\overline{\Omega}} = 6^3$

$\overline{\overline{A'}} = 5^3$ ⟵ A' – szóstka nie wypadła ani razu

$P(A') = \dfrac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$ ⟵ $P(A) + P(A') = 1$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\dfrac{91}{216}$.

Przykład 12 ◀ zad. 5.25

Wiadomo, że $A,\ B \subset \Omega,\ P(A') = \dfrac{3}{4},\ P(B') = \dfrac{1}{2}$ i $P(A \cup B) = \dfrac{3}{8}$.
Obliczymy $P(A \cap B)$.

Rozwiązanie

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, więc:

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $(*)$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Wyznaczone wielkości podstawiamy do wzoru $(*)$.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}$

Odp.: $P(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż liczbę dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 10 lub przez 15.

A. 12 **B.** 13 **C.** 15 **D.** 16

5.2. Z talii 52 kart losujemy jedną. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że jest ona królem lub kierem.

A. $\frac{14}{52}$ **B.** $\frac{15}{52}$ **C.** $\frac{16}{52}$ **D.** $\frac{17}{52}$

5.3. Rzucamy pięcioma monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wypadnie co najmniej jedna reszka.

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $\frac{9}{10}$ **D.** $\frac{31}{32}$

5.4. Rzucamy kostką i monetą. A oznacza zdarzenie – wypadła nieparzysta liczba oczek i reszka, B – wypadł orzeł, C – wypadła parzysta liczba oczek, D – wypadła szóstka. Które ze zdarzeń A, B, C, D się wykluczają, a które pociągają za sobą inne?

5.5. Rzucono 6 razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie – otrzymana liczba orłów jest nieparzysta, B – otrzymana liczba reszek jest mniejsza od liczby orłów, C – otrzymana liczba orłów jest 2 razy mniejsza od liczby reszek. Które ze zdarzeń A, B, C się wykluczają?

5.6. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oznaczmy zdarzenia:

A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty,
B – iloczyn liczb oczek jest parzysty,
C – suma liczb oczek jest nieparzysta,
D – suma liczb oczek jest parzysta.

a) Wypisz pary zdarzeń wykluczających się.
b) Które zdarzenia pociągają za sobą inne?

D **5.7.** Doświadczenie polega na rzucie kostką i monetą. Czy zdarzenia A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

a) A – wypadnięcie orła
B – wypadnięcie reszki
b) A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek
B – wypadnięcie reszki
c) A – wypadnięcie orła lub parzystej liczby oczek
B – wypadnięcie reszki lub nieparzystej liczby oczek

D **5.8.** Doświadczenie polega na rzucie dwiema monetami. Czy zdarzenia A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

a) A – wypadnięcie orła na pierwszej monecie
B – wypadnięcie reszki na drugiej monecie

b) A – wypadnięcie orła na pierwszej monecie
B – wypadnięcie dwóch reszek

5.9. Rzucamy trzema kostkami. Określ zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – na co najmniej jednej kostce wypadły dwa oczka.

5.10. Jan dojeżdża do szkoły pociągiem, który czasem się spóźnia. Określamy zdarzenia: A – we wtorek pociąg przyjechał punktualnie, B – w środę pociąg przyjechał punktualnie, C – w czwartek pociąg przyjechał punktualnie. Zapisz symbolicznie zdarzenie: „we wtorek i w środę pociąg przyjechał punktualnie, a w czwartek się spóźnił".

5.11. Magda rozważa przed trzema ostatnimi lekcjami następujące zdarzenia:
A – będę dziś pytana z angielskiego, G – będę dziś pytana z geografii, H – będę dziś pytana z historii. Jak mogłaby symbolicznie zapisać zdarzenie: „będę dziś pytana dokładnie z jednego przedmiotu"?

5.12. Wychowawczyni klasy Izydora Muszki pod koniec roku szkolnego zrobiła podsumowanie frekwencji uczniów. Załóżmy, że dla losowo wybranego dnia oznaczyła zdarzenia: A – co najmniej jeden z chłopców był nieobecny, B – Jolka uciekła z ostatniej lekcji, C – Martyna spóźniła się do szkoły, D – Izydor był obecny na wszystkich lekcjach, E – wszystkie dziewczyny były obecne. Jak symbolicznie mogła zapisać zdarzenia w losowo wybranym dniu: K – wszyscy chłopcy byli obecni, L – wszyscy uczniowie byli obecni i Martyna nie spóźniła się do szkoły, M – Izydor był na wszystkich lekcjach, chociaż Jolka uciekła z ostatniej?

5.13. Z pewnej grupy ludzi wylosowano trzy osoby. Niech A oznacza zdarzenie – w skład tej trójki weszły same kobiety, B – w jej skład weszli dwie kobiety i jeden mężczyzna. Zapisz, na czym polegają zdarzenia: A', $(A \cup B)'$, $A \cap B'$.

5.14. Z urny, w której są kule zielone i białe, losujemy trzy kule. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowano trzy kule zielone, B – wylosowano jedną kulę białą, C – wylosowano jedynie kule białe, D – wylosowano dwie kule białe. Na czym polegają zdarzenia: $B \cup C \cup D$, $A \cup B \cup D$, $A' \cap B' \cap C'$?

5.15. Pięciu zawodników oddaje po jednym strzale do tej samej tarczy. Oznaczmy zdarzenia: A – tarcza została trafiona dokładnie trzy razy, B – tarcza została trafiona co najmniej cztery razy, C – tarcza nie została trafiona. Na czym polegają zdarzenia: $(A \cup B)'$, C', $A' \cap C$, $(A \cup B \cup C)'$?

5.16. Anka, Beata, Celina i Danka grają w brydża. Niech A_k oznacza zdarzenie – w rozdaniu kart Anka dostała k asów ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), B_k, C_k i D_k analogicznie – liczbę asów u pozostałych dziewcząt. W pewnym rozdaniu zaszło podane zdarzenie. Ile asów dostała w tym rozdaniu każda z dziewcząt?

a) $A_1 \cap B_1 \cap C_1$ b) $C_2 \cap D_2$ c) $A_1 \cap B_1 \cap D_0$ d) $D_2' \cap B_3 \cap C_1' \cap A_1'$

5.17. Ze zbioru liczb {20, 22, 30, 33, 40, 44, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99} losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 6.

5.18. Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich należących do zbioru {1, 2, ..., 1000}. Wyznacz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 i przez 9 oraz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 lub przez 9.

5.19. W klasie jest 18 dziewcząt. Siedem z nich trenuje koszykówkę, a trzy tenis. Wśród nich jest jedna, która uprawia obydwie wymienione dyscypliny sportowe. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana dziewczyna z tej klasy nie trenuje ani tenisa, ani koszykówki.

5.20. W pewnym biurze maklerskim przeciętnie 66% interesantów kupuje obligacje, 46% – akcje spółek giełdowych, a 33% – decyduje się na portfel mieszany złożony i z obligacji, i z akcji. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba szukająca w tym biurze możliwości lokaty kapitału zakupi jakieś papiery wartościowe (obligacje lub akcje)?

5.21. Dorota ma zdawać dwa egzaminy: z angielskiego i z francuskiego. Szacuje szansę zdania co najmniej jednego z nich na 85%, szansę zdania egzaminu z angielskiego na 70%, szansę zdania obydwu na 65%. Jak oszacowała szansę zdania egzaminu z francuskiego?

5.22. Rzucamy siedem razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie orzeł?

5.23. Z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} tworzymy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe (cyfry mogą się powtarzać), a następnie z tak powstałego zbioru liczb losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w wylosowanej liczbie przynajmniej jedna cyfra jest parzysta?

5.24. W pudełku znajduje się 5 kul czarnych, 6 czerwonych i 4 zielone. Losujemy trzy kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej dwie wylosowane kule będą tego samego koloru.

5.25. Wiadomo, że $A,\ B \subset \Omega$ oraz

a) $P(A) = P(B) = 0{,}25$ i $P(A \cap B) = 0{,}2$. Oblicz $P(A \cup B)$.

b) $P(A) = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A \cap B)$.

c) $P(A) = \frac{1}{3},\ P(B') = \frac{3}{4},\ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Oblicz $P(A \cup B)$.

d) $P(B) = \frac{1}{3},\ P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(A - B)$.

5.26. Wiadomo, że $A,\ B \subset \Omega,\ P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{2}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: $P(A),\ P(A'),\ P(B)$.

D **5.27.** Niech $A,\ B \subset \Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}9$ i $P(B) = 0{,}7$, to $0{,}2 \leqslant P(A \cap B') \leqslant 0{,}3$.

Prosto do matury

1. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oznaczmy zdarzenia:

A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty, C – suma liczb oczek jest nieparzysta,

B – iloczyn liczb oczek jest parzysty, D – suma liczb oczek jest parzysta.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zdarzenia

A. A i B się wykluczają. **B.** A i D się wykluczają. **C.** B i C się wykluczają.

2. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę, w której zapisie jest co najmniej jedno zero.

3. Synoptycy twierdzą, że w sobotę możemy spodziewać się deszczu z prawdopodobieństwem 40%, a w niedzielę – z prawdopodobieństwem 30%. Ponadto prawdopodobieństwo wystąpienia deszczu w oba te dni wynosi 15%. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nie będzie padać ani w sobotę, ani w niedzielę?

4. Adam trenuje koszykówkę. Prawdopodobieństwo tego, że na pięć rzutów do kosza trafi co najmniej trzy razy, wynosi 0,31. Prawdopodobieństwo tego, że na pięć rzutów do kosza co najmniej dwa razy nie trafi, wynosi 0,92. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na pięć rzutów do kosza Adam trafi dokładnie trzy razy.

5. Wiadomo, że $A,\ B \subset \Omega,\ P(A) = \frac{1}{8},\ P(A \cup B) = \frac{5}{12},\ P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Oblicz prawdopodobieństwo $P(B')$.

6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych

Umiejętności:

- obliczanie wartości oczekiwanej w prostych grach losowych

Na koniec wrócimy do zagadnień, które zapoczątkowały powstanie i rozwój rachunku prawdopodobieństwa, czyli do gier losowych. Przeanalizujemy najpierw kilka przykładów.

Przykład 1

Rysiek gra z kolegą w rzut monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, Rysiek wygrywa 5 zł, jeżeli reszka – przegrywa i musi zapłacić 5 zł koledze.

Rysiek wygra z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i z takim samym prawdopodobieństwem przegra.

Przykład 2

Teodor Motylek gra w kasynie w rzut trzema monetami. Jeżeli wypadną identyczne wyniki na monetach, Teodor wygrywa 200 zł, w pozostałych przypadkach przegrywa i wpłaca krupierowi 70 zł.

Zbiór zdarzeń elementarnych w rzucie trzema monetami to:

$$\Omega = \{OOO,\ OOR,\ ORO,\ ROO,\ RRO,\ ROR,\ ORR,\ RRR\}$$

Panu Motylkowi sprzyjają wyniki {OOO, RRR}, zatem wygra 200 zł z prawdopodobieństwem $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a przegra z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$.

Przykład 3

Gra polega na rzucie dwa razy kostką do gry. Zenobia wygrywa 1000 zł, gdy przynajmniej raz w tych dwóch rzutach wypadnie szóstka. W pozostałych przypadkach przegrywa i wpłaca krupierowi 200 zł.

W doświadczeniu polegającym na dwukrotnym rzucie kostką $\overline{\overline{\Omega}} = 36$. Zenobii sprzyjają wyniki {16, 26, 36, 46, 56, 66, 65, 64, 63, 62, 61} – jest ich 11. Zatem Zenobia wygra 1000 zł z prawdopodobieństwem $\frac{11}{36}$, a straci 200 zł z prawdopodobieństwem $\frac{25}{36}$.

Naturalne pytania, jakie może postawić każdy uczestnik gry losowej, to:

- Czy opłaca mi się w nią zagrać?
- Czy ta gra jest sprawiedliwa?

Na obydwa pytania od razu można odpowiedzieć Ryśkowi z przykładu 1. Przy tak ustalonych zasadach gra w monetę jest sprawiedliwa – co należy rozumieć w taki sposób, że jeśli Rysiek zagra bardzo wiele razy, to wyjdzie na zero, czyli ani nie zyska, ani nie straci.

Zastanówmy się, jak wygląda sytuacja Teodora z przykładu 2. Obliczymy **średnią wygraną** w jednej grze.

Wynik	OOO	OOR	ORO	ROO	RRO	ROR	ORR	RRR
„Wygrana" Teodora [zł]	200	−70	−70	−70	−70	−70	−70	200

Średnia wygrana wynosi:

$$\frac{2 \cdot 200 + 6 \cdot (-70)}{8} = -2{,}50 \text{ [zł]}$$

Zapiszmy średnią wygraną w nieco innej postaci:

$$\frac{2 \cdot 200 + 6 \cdot (-70)}{8} = 200 \cdot \frac{2}{8} + (-70) \cdot \frac{6}{8} = 200 \cdot 0{,}25 + (-70) \cdot 0{,}75$$

Zestawmy możliwe wartości wygranej z ich prawdopodobieństwami.

„Wygrana" Teodora [zł]	200	−70
Prawdopodobieństwo	0,25	0,75

Jak widać, średnią wygraną możemy na podstawie powyższej tabeli obliczyć następująco:

$$200 \cdot 0{,}25 - 70 \cdot 0{,}75 = -2{,}5 \text{ [zł]}$$

Zatem w grze z przykładu 2 przeważa prawdopodobieństwo przegranej – Teodor Motylek może oczywiście wygrać nawet w pierwszym podejściu 200 zł, może również za drugim razem wygrać, bo gra jest losowa – ale należy się spodziewać, że przy większej liczbie powtórzeń wygranym okaże się kasyno.

Jak wygląda sytuacja pani Zenobii z przykładu 3?

„Wygrana" Zenobii [zł]	1000	−200
Prawdopodobieństwo	$\frac{11}{36}$	$\frac{25}{36}$

W tej grze średnia wygrana dla gracza w jednym rozdaniu wynosi:

$$1000 \cdot \frac{11}{36} - 200 \cdot \frac{25}{36} = \frac{1}{36}(11\,000 - 5000) \approx 166{,}67 \text{ [zł]}$$

Zatem tu przeważa prawdopodobieństwo wygranej – pani Zenobia może oczywiście przegrać nawet dużą kwotę, ale należy się spodziewać, że przy większej liczbie powtórzeń powinna wygrać.

Natomiast w przykładzie 1 średnia wygrana wynosi $1 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0{,}5 = 0$ [zł].

O grach, w których średnia wygrana jest różna od 0, czyli takich jak opisane w przykładach 2 i 3, mówimy, że nie są sprawiedliwe.

Omawiamy w tym temacie szczególny przypadek doświadczeń losowych, dlatego dostosowaliśmy do niego język. I tak:

- zamiast mówić o zdarzeniu losowym, używamy tu określenia **gra losowa**,
- zbiór zdarzeń sprzyjających to wygrana **stawka**,
- prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia to **prawdopodobieństwo wygranej**, itp.

Wprowadzimy jeszcze nazwę obliczanej wyżej średniej.

Definicja

Jeżeli w grze losowej wyniki gracza X przyjmują wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdzie $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to wartością oczekiwaną EX tej gry nazywamy liczbę:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Zatem wartość oczekiwana gry Ryśka $ER = 0$, w grze Teodora $ET = -2{,}5$, a w grze Zenobii $EZ \approx 166{,}67$.

- Wartość oczekiwana dawniej nazywana była „nadzieją matematyczną” i stąd pochodzi jej oznaczenie: E – od francuskiego słowa *espérance* (nadzieja).
- Wyrażenia „wartość oczekiwana gry” oraz „wartość oczekiwana wygranej gracza” znaczą to samo.

Wartość oczekiwana jest tylko rodzajem średniej, ale jej wysokość może być cenną wskazówką. Grę losową nazywamy **grą sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa zero.

Przykład 4 ◂ zad. 6.4

Z talii 52 kart Karol losuje jedną kartę. Jeżeli wylosowana karta jest treflem lub figurą, wygrywa 20 zł, w przeciwnym razie przegrywa 10 zł. Obliczymy wartość oczekiwaną tej gry.

Rozwiązanie

W przykładzie 7 w poprzednim temacie obliczyliśmy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana karta jest treflem lub figurą.

Zatem:

$$P(A) = \frac{25}{52} \qquad P\left(A'\right) = 1 - \frac{25}{52} = \frac{27}{52}$$

x_i	20	-10
p_i	$\frac{25}{52}$	$\frac{27}{52}$

Wartość oczekiwana gry Karola wynosi:

$$EK = 20 \cdot \frac{25}{52} - 10 \cdot \frac{27}{52} = \frac{10}{52}(50 - 27) = \frac{230}{52} \approx 4{,}42 \text{ [zł]}$$

Odp.: Wartość oczekiwana tej gry $EK \approx 4{,}42$ zł.

Przykład 5 ◂ zad. 6.8

Tarcza koła ruletki jest podzielona na 37 równych sektorów, ponumerowanych od 0 do 36. Gracz stawia na wybrany przez siebie numer 1 zł, a następnie krupier puszcza na obracającą się tarczę kulkę. Jeżeli kulka zatrzyma się w sektorze o numerze obstawionym przez gracza, to gracz otrzymuje 36 zł, w przeciwnym razie traci swoją stawkę. Sprawdzimy, czy ta gra jest sprawiedliwa.

Rozwiązanie

W tej grze losowej gracz X może uzyskać dwa wyniki:

35 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{37}$ ⟵ gdy wygra (wcześniej wpłacił 1 zł)

-1 z prawdopodobieństwem $\frac{36}{37}$ ⟵ gdy przegra

x_i	35	-1
p_i	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

$$EX = 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = \frac{1}{37} \cdot (35 - 36) = -\frac{1}{37}$$

Odp.: Podana gra nie jest sprawiedliwa.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Gra losowa przyjmuje wartości 10 oraz -3 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0,2 i 0,8. Wskaż wartość oczekiwaną tej gry.

A. $-0{,}4$ **B.** 6,4 **C.** $-0{,}2$ **D.** 0,4

6.2. Wpłacamy krupierowi 40 zł i rzucamy kostką. Wygrywamy kwotę równą dziesięciokrotności liczby wyrzuconych oczek. Wskaż wartość oczekiwaną tej gry.
A. −0,50 zł **B.** −5 zł **C.** 0,50 zł **D.** 5 zł

6.3. Wpłacamy krupierowi *s* zł i rzucamy dwiema monetami. W przypadku wyrzucenia dwóch orłów wygrywamy 20 zł, w przypadku wyrzucenia orła i reszki wygrywamy 2 zł, w przypadku wyrzucenia dwóch reszek nie wygrywamy nic. Wskaż taką wartość *s*, dla której gra jest sprawiedliwa.
A. 6 zł **B.** 7 zł **C.** 8 zł **D.** żadna z wymienionych

6.4. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa, wygrywamy 20 zł, jeżeli inną figurę – wygrywamy 10 zł, w każdym innym przypadku tracimy 5 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6.5. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa pik, wygrywamy 100 zł, jeżeli figurę kier, wygrywamy 50 zł, w każdym innym przypadku tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6.6. Jolka rzuca monetą i sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie orzeł i liczba oczek podzielna przez 3, wygrywa 20 zł. W przeciwnym wypadku przegrywa 4 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

6.7. Waldemar rzuca dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeżeli otrzyma takie same wyniki na obu kostkach, to wygrywa stawkę będącą iloczynem tych wyników. W przeciwnym wypadku przegrywa 3 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

D **6.8.** Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli dokładnie raz wypadnie reszka, wygrywamy 50 zł, w przeciwnym razie przegrywamy 30 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

6.9. Gracz wpłaca krupierowi 10 zł, a następnie rzuca 5 razy monetą. Jeżeli w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik, wygrywa 100 zł, w przeciwnym razie traci swoją stawkę. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej gracza.

6.10. W wesołym miasteczku za 5 zł można rzucić do obracającej się tarczy składającej się z 16 pól jednakowej wielkości – jak na rysunku. Za trafienie w pole czerwone wygrywamy 20 zł, za trafienie w pole żółte wygrywamy 10 zł, za trafienie w pole niebieskie wygrywamy 5 zł. Trafienie w pole czarne nie daje wygranej. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.



* **6.11.** Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Jeśli na wszystkich kostkach wypadną parzyste liczby oczek, to wygrywamy stawkę będącą iloczynem tych liczb. W przeciwnym wypadku przegrywamy 8 zł. Sprawdź, czy ta gra jest sprawiedliwa.

Prosto do matury

1. Gracz przegrał w pięciu kolejnych losowaniach gry losowej, w której wartość oczekiwana jego wygranej jest dodatnia. Oceń prawdziwość podanych zdań.
W szóstym losowaniu prawdopodobieństwo wygranej tego gracza
A. zwiększyło się.
B. jest takie samo jak w pięciu poprzednich losowaniach.
C. zmniejszyło się.

2. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa kier, wygrywamy 100 zł, jeżeli inną figurę – wygrywamy 10 zł, w każdym innym przypadku tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

3. Płacimy krupierowi 50 zł i z talii liczącej 52 karty losujemy kolejno ze zwracaniem dwie karty. Jeżeli za pierwszym lub za drugim razem wylosujemy asa, to wygrywamy 300 zł. W przeciwnym wypadku nie wygrywamy nic. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

D **4.** Dwaj bracia grają ze sobą na punkty. Każdy z nich na zmianę rzuca dwa razy kostką. Jeśli w każdym z tych dwóch rzutów wypadnie parzysta liczba oczek lub liczba oczek większa od czterech, rzucający dopisuje sobie 25 punktów. W przeciwnym razie 20 punktów dopisuje sobie przeciwnik. Wykaż, że ta gra jest sprawiedliwa.

5. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Za wylosowanie asa trefl dostajemy 8 punktów, króla trefl – 7 punktów, damy trefl – 6 punktów, a waleta trefl – 5 punktów. Stawki za wylosowanie figury w pozostałych kolorach są wyższe niż w treflach – odpowiednio: w karach – dwukrotnie wyższe, w kierach – trzykrotnie wyższe, a w pikach – czterokrotnie wyższe. Wylosowanie karty niebędącej figurą oznacza utratę 7 punktów. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

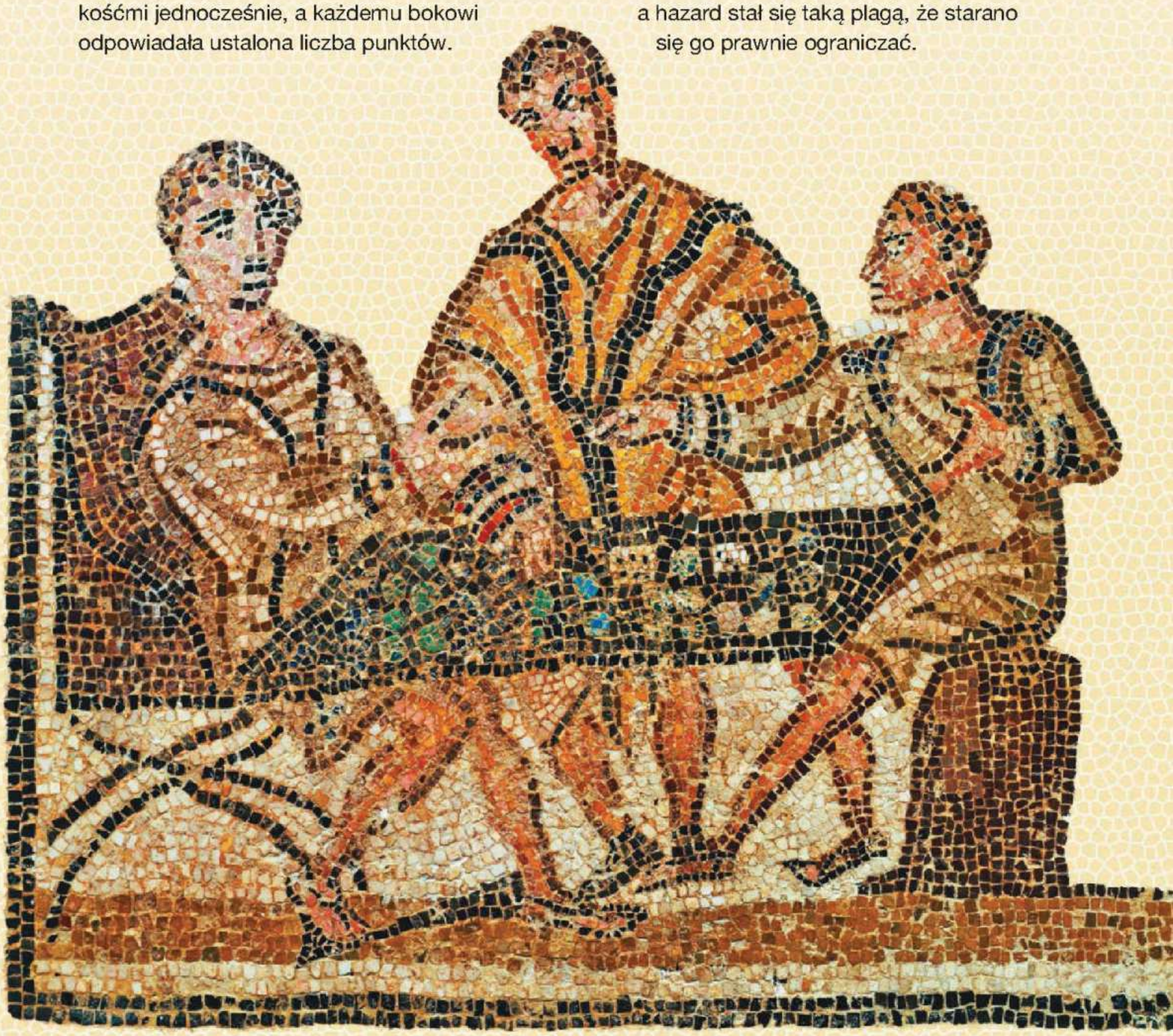
Co wynikło z gry w kości

Rachunek prawdopodobieństwa jest stosunkowo młodym działem matematyki. Jego początki są ściśle związane z grą w kości.

Gra w kości

Gra w kości znana była już w świecie starożytnym. Przed wynalezieniem dzisiejszych sześciennych kości używano m.in. drobnych kości zwierzęcych, zwanych astragalusami. Po rzucie upadały na jeden z czterech asymetrycznych boków. Rzucano czterema kośćmi jednocześnie, a każdemu bokowi odpowiadała ustalona liczba punktów.

W starożytnym Rzymie gry były ulubioną formą rozrywki, a gra w kości cieszyła się szczególną popularnością. Świadczą o tym chociażby słowa przypisywane Juliuszowi Cezarowi: „Alea iacta est", czyli „Kości zostały rzucone". Grano najczęściej o pieniądze, a hazard stał się taką plagą, że starano się go prawnie ograniczać.



Grający w kości, mozaika z czasów cesarstwa rzymskiego, III w.,
Muzeum Narodowe w Tunisie

Słynna korespondencja

Wydaje się, że dopiero w XVI w. zaczęto matematycznie rozważać szanse wyrzucenia różnych układów oczek. Prawdziwy przełom przyniósł jednak rok 1654 za sprawą Francuza, Antoine'a Gombaulda, kawalera de Méré. Był on zagorzałym hazardzistą, a przy tym człowiekiem o dużych zdolnościach matematycznych. Obstawiał takie układy kości, które według własnych obserwacji uznał za pojawiające się częściej niż inne. Kiedy jednak zaczął grać w nową grę, jego metoda przestała działać. Zamiast uznać to za odwrócenie koła fortuny, zaczął szukać matematycznego wytłumaczenia tego niepowodzenia. Zwrócił się o pomoc do swojego przyjaciela, Blaise'a Pascala, wybitnego matematyka i filozofa. Ten z kolei listownie włączył w dyskusję innego wielkiego francuskiego matematyka, Pierre'a de Fermata. I tak powstała słynna wymiana listów, która zapoczątkowała nowy dział matematyki – **rachunek prawdopodobieństwa**.



Blaise Pascal (1623–1662), francuski filozof, matematyk i fizyk



Pierre de Fermat (1601 lub 1607 – 1665), francuski matematyk i prawnik

Co się bardziej opłaca?

Rozpatrzmy dwa spośród problemów rozwiązanych w tej korespondencji. Pierwszy z nich polegał na ocenieniu szansy wyrzucenia **co najmniej jednej szóstki** przy **czterokrotnym rzucie kością** (zdarzenie A), drugi – na ustaleniu, jaka jest szansa wyrzucenia **co najmniej raz dwóch szóstek jednocześnie** przy **24-krotnym rzucie dwiema kośćmi** (zdarzenie B). Dziś wiemy, że w rozwiązaniu problemu warto wykorzystać zdarzenia przeciwne:

1 $P(A') = \frac{5^4}{6^4}$ – w 4 rzutach kością ani razu nie wypadnie szóstka

$P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}52$

Oznacza to, że jeżeli powtórzymy czterokrotny rzut kością 100 razy, średnio 52 razy wypadnie co najmniej jedna szóstka.

2 $P(B') = \frac{35^{24}}{36^{24}}$ – w 24 rzutach dwiema kośćmi ani razu nie wypadną dwie szóstki jednocześnie

$P(B) = 1 - P(B') \approx 0{,}49$

Oznacza to, że jeżeli powtórzymy 100 razy serię 24 rzutów dwiema kośćmi, średnio w 49 seriach co najmniej raz wypadną dwie szóstki jednocześnie.

Tymczasem kawaler de Méré był przekonany, że szansa zajścia każdego z tych zdarzeń jest większa od 0,5. W przypadku zdarzenia A miał rację, mimo że źle wyliczył prawdopodobieństwo, ale w przypadku zdarzenia B się pomylił. Stąd obstawiane wyniki nie pojawiały się z przewidywaną przez niego częstością.



Achilles i Ajas grający w kości, scena z greckiej amfory, ok. 540–530 p.n.e., Muzea Watykańskie

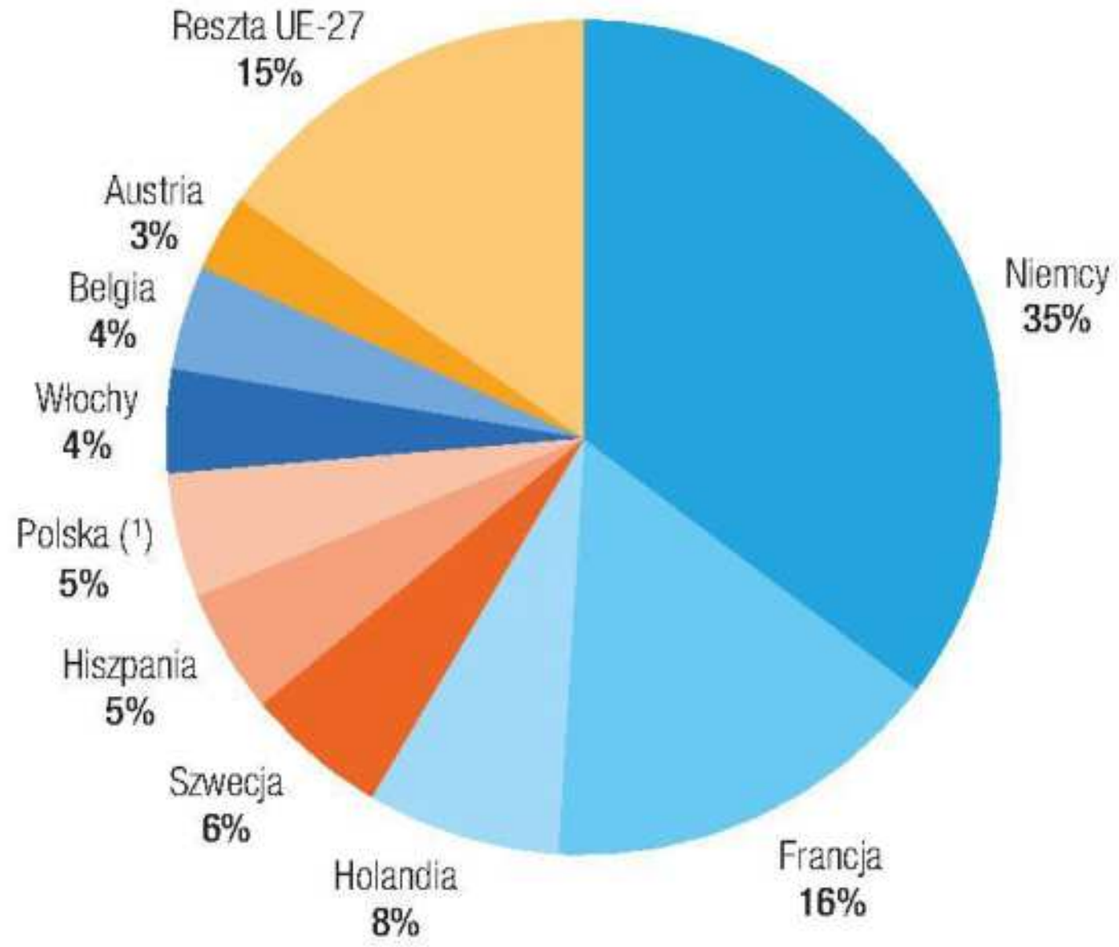
7. Wstęp do statystyki

Myślenie statystyczne stanie się pewnego dnia
równie niezbędnym elementem wychowania
obywatelskiego, jak umiejętność czytania i pisania.
H. G. Wells

Trudno wyobrazić sobie dzisiejszy świat bez statystyki. GUS – Główny Urząd Statystyczny – zbiera, przetwarza i prezentuje olbrzymią liczbę danych. Co roku wydawany jest rocznik statystyczny, dokument wagi państwowej. Na mniejszą skalę ze statystyką mamy do czynienia na co dzień – media publikują wyniki najrozmaitszych badań opinii publicznej, nauczyciel jest zobowiązany do robienia statystyki ocen i frekwencji uczniów, kibic śledzi wyniki rozgrywek piłkarskich itd. Wyniki badań statystycznych pojawiają się wszędzie (najczęściej w postaci różnych tabel, diagramów, wykresów itp.).

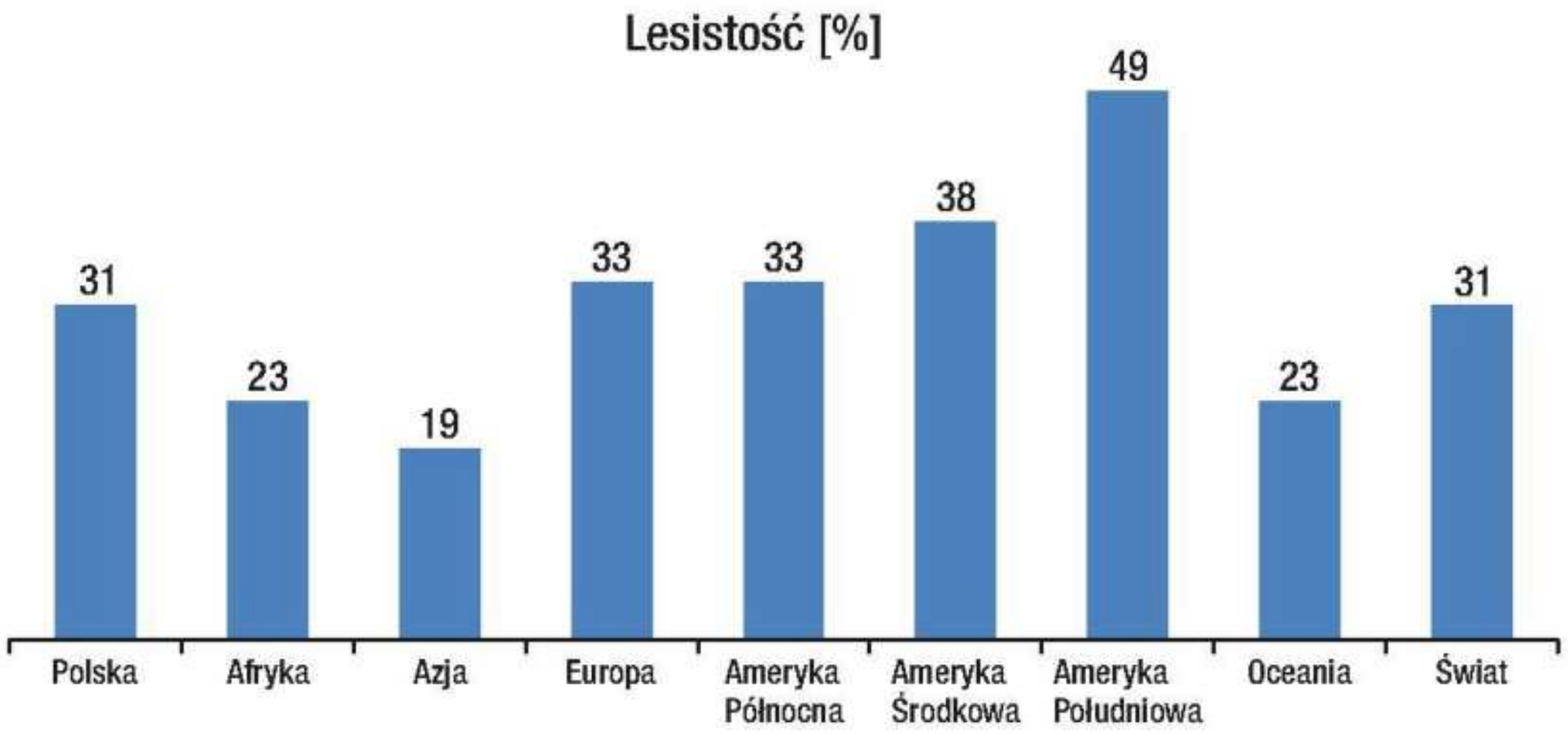
Działalność statystyczną prowadzono już w starożytności. W Biblii czytamy: „W owym czasie wyszło rozporządzenie Cezara Augusta, żeby przeprowadzić spis ludności w całym państwie". Mowa tu o okresie tuż przed narodzeniem Chrystusa, czyli samym początku naszej ery.

Udział noclegów spędzonych przez Europejczyków podczas wakacyjnych podróży, w podziale na państwa zamieszkania turystów, 2018 rok
(% noclegów za granicą mieszkańców UE-27)



Uwaga: Ocena UE-27 stworzona na potrzeby tej publikacji, na podstawie dostępnych źródeł.
(1) Dane z 2017 roku.
eurostat

Źródło: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Tourism_statistics/pl#Miejsca_noclegowe_w_UE-27:_dominuj.C4.85_W.C5.82ochy_i_Francja [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]



Źródło: https://www.bdl.lasy.gov.pl/portal/lasy-na-swiecie [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Statystyka spełnia przede wszystkim dwa podstawowe zadania:

- służy jako narzędzie opisu i wówczas nazywamy ją **statystyką opisową**,
- służy jako narzędzie do wyciągania wniosków z przeprowadzonych badań, wówczas mamy do czynienia z **wnioskowaniem statystycznym**.

Słowo **statystyka** wywodzi się od łacińskiego *status* – stan rzeczy, państwo. Dawne znaczenie wyrazu „statysta" to mąż stanu, dyplomata, osoba zajmująca się sprawami państwa. Początkowo (od XVI w.) statystyka zajmowała się gromadzeniem rozmaitych danych liczbowych potrzebnych do sprawnego kierowania państwem.



Źródło: https://www.money.pl/gospodarka/wiadomosci/artykul/w-polsce-zyje-sie-lepiej-niz-w-niemczech-czy,24,0,2403864.html [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Statystyka opisowa porządkuje i prezentuje informacje o pewnym zbiorze elementów (ludzi, zwierząt, roślin, zdarzeń, procesów itp.). Zbiór ten nazywamy **populacją**. Natomiast wnioskowanie statystyczne jest najczęściej próbą uogólnienia wyników takich badań. Wówczas badana grupa stanowi podzbiór, czyli tzw. **próbę** wybraną z populacji.

Termin **populacja** używany jest zatem w dwóch znaczeniach:

- w statystyce opisowej oznacza zbiór opisywanych elementów,
- we wnioskowaniu statystycznym oznacza zbiorowość, w stosunku do której wyciągane są wnioski (po przeanalizowaniu wyników badań wybranej próby).

Prześledźmy na przykładach różnicę w stosowaniu tych pojęć.

Przykład 1

Pani Piórnik podsumowała wyniki klasy trzeciej po pierwszym semestrze. Obliczyła, ile jest ocen niedostatecznych, dopuszczających, dostatecznych itd., obliczyła średnią klasową, liczbę osób bez ocen niedostatecznych, liczbę osób ze średnią powyżej 4,5 oraz poniżej 3 itp. Dane statystyczne przedstawiła najpierw na zebraniu rady pedagogicznej, a potem przekazała je rodzicom. Opisała w ten sposób pewną konkretną grupę osób. W tym wypadku mamy do czynienia ze statystyką opisową, a opisywaną populacją jest zbiór uczniów klasy trzeciej.

Przykład 2

Na początku sezonu właściciel firmy Alfa, szkolącej chętnych do zdobycia prawa jazdy, przedstawił dane o wynikach egzaminów ubiegłorocznych absolwentów kursów.

- Podanie odsetka osób, które zdały egzamin, jest statystyką opisową populacji wszystkich absolwentów.
- Jeżeli natomiast na podstawie tej samej informacji ocenimy poziom przygotowywania do egzaminu na prawo jazdy przez Alfę, to przeprowadzimy wnioskowanie statystyczne (niekoniecznie słuszne!), w którym zbiór wszystkich absolwentów stanowi próbę, a populacją jest zbiór wszystkich kursantów Alfy.

Przykład 3

W szkolnej bibliotece podsumowano liczbę wypożyczonych książek i obliczono średnią przypadającą na jednego czytelnika.

- Taka informacja jest statystyką opisową populacji wszystkich czytelników wypożyczających książki w tej bibliotece.
- Jeżeli na podstawie tej statystyki uogólnimy informację i wypowiemy się na temat czytelnictwa np. młodzieży licealnej, to jest to wnioskowanie statystyczne, w którym próbą jest zbiór uczniów wypożyczających książki w konkretnej bibliotece, a populację stanowi młodzież licealna.

Jedną z najgłośniejszych „wpadek" w zastosowaniu statystyki była prognoza wyników wyborów na stanowisko prezydenta USA w 1936 r., sporządzona przez czasopismo „Literary Digest". Gazeta twierdziła, że potrafi przewidzieć wynik z dokładnością do ułamka procenta. Sondaż wyborczy miał być przeprowadzony na ogromnej, 10-milionowej próbie. Odpowiedzi udzieliło 2,3 mln ankietowanych. Według wyników ankiety wybory miał wygrać gubernator stanu Kansas, republikanin – Alfred M. Landon (miał zwyciężyć w 32 na 48 stanów i uzyskać 370 głosów elektorskich). Natomiast przegranym miał być urzędujący prezydent, kandydat demokratów – Franklin Delano Roosevelt (161 głosów elektorskich). Tymczasem F. D. Roosevelt wygrał wybory w 46 stanach, uzyskał 523 głosy elektorskie i został prezydentem na następną kadencję. Na dodatek przewaga, jaką zwycięzca uzyskał nad rywalem, była największa we wszystkich wyborach od czasu, gdy Stany Zjednoczone stały się niezależnym państwem.



Franklin Delano Roosevelt

Na błędny wynik prognozy wpływ miały przede wszystkim dwa czynniki:

- niewłaściwy sposób wyboru ankietowanych (nazwiska losowano z rejestrów samochodowych, książek telefonicznych oraz prenumeratorów gazety; w 1936 r. oznaczało to zawężenie do zamożniejszej części społeczeństwa, bardziej skłonnej do głosowania na republikanów),
- nieuwzględnienie faktu, że w stosunku do liczby wysłanych ankiet tylko niewielka grupa osób udzieliła odpowiedzi (w statystyce taką sytuację określa się jako obciążenie wyników wskutek niepełności odpowiedzi).

Próba losowa, pomimo jej ogromnej liczebności, nie była reprezentatywna dla ogółu wyborców. W wyniku popełnionego błędu czasopismo „Literary Digest" niedługo po wyborach przestało się ukazywać.

Już po przeanalizowaniu kilku przykładów widać, jak bardzo ważny dla wnioskowania statystycznego jest właściwy dobór próby. Jedno z zadań statystyki to opracowanie metod, które sprawią, że wybierane próby będą **reprezentatywne**. Bardzo często proponowany sposób polega na różnego rodzaju losowaniach elementów z populacji i wówczas taką próbę nazywamy **próbą losową**. Współczesna statystyka dysponuje na tyle precyzyjnymi narzędziami, że dobór próby, metody jej badania oraz wyciąganie logicznych wniosków z wyników tych badań dają dosyć dokładny obraz analizowanej populacji. W wielu sytuacjach nie ma innej metody niż wnioskowanie na podstawie badania próbek losowych. Dotyczy to np. kontroli jakości wyrobów, określania skuteczności działania nowych leków oraz poznawania skutków ubocznych ich stosowania.

Przykład 4

W firmie Plasterek produkowane są m.in. jałowe kompresy gazowe. Porównamy rodzaje problemów, jakie mogą być interesujące dla tej firmy z punktu widzenia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa.

W statystyce	W rachunku prawdopodobieństwa
Nie można sprawdzić jakości każdego kompresu (oznaczałoby to zniszczenie całej produkcji!), więc kontroli poddawane jest co któreś opakowanie. Wyniki takiego badania przesądzają o tym, czy wyprodukowana partia kompresów spełnia wymagania jakości i może być sprzedana, czy też trafi na przemiał. Ile opakowań trzeba sprawdzić, w jaki sposób je wybierać, jak zinterpretować wyniki, aby (z dostatecznie dużym prawdopodobieństwem) dopuścić do sprzedaży tylko wartościową produkcję?	W skrzynce pobranej z magazynu firmy Plasterek znajduje się 1000 opakowań jałowych kompresów gazowych. Wiadomo, że wśród nich jest 60 nieszczelnych (inaczej mówiąc – nadających się tylko na śmietnik). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych 30 opakowań jest co najmniej jedno nieszczelne?

Wnioskowanie statystyczne jest ściśle związanie z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Wniosek

W statystyce mamy do czynienia z odwróconym, w stosunku do rachunku prawdopodobieństwa, wnioskowaniem:

- w probabilistyce – na podstawie znajomości całej populacji określamy prawdopodobieństwo wylosowania próbki o określonej własności,
- w statystyce – na podstawie własności próbki losowej wyciągamy najbardziej prawdopodobne wnioski o własnościach nieznanej populacji.

W tym podręczniku zajmiemy się przede wszystkim elementarnymi pojęciami statystyki opisowej. Zaawansowane metody statystyczne będą wprowadzane w trakcie studiowania na wyższych uczelniach (niezależnie od wybranego kierunku studiów). Lekarz, biolog, językoznawca, inżynier, ekonomista itd. musi obecnie umiejętnie korzystać z wyników statystyki. Nierzadko sam powinien wiedzieć, jak zaplanować i opisać eksperyment statystyczny. Umiejętność taką z pewnością powinien posiadać każdy przedsiębiorca prowadzący własną firmę. Łatwo można podać przykład niepowodzeń, do których doszło z powodu braku odpowiednich badań rynkowych. Jeżeli np. właściciel firmy odzieżowej postanawia rozszerzyć działalność gospodarczą poza obszar własnego państwa, to najpierw powinien sprawdzić, jakie są typowe rozmiary obcokrajowców, którym chce sprzedawać ubrania. Może się bowiem okazać, że rozmiary te są np. zdecydowanie mniejsze od rozmiarów oferowanych przez jego firmę w kraju. Brak tej wiedzy może spowodować niepowodzenie całego przedsięwzięcia. A przecież trzeba jeszcze zbadać, jaki jest gust przyszłych klientów, gdzie wydzierżawić sklepy, jaką metodą rozreklamować ofertę itd.

Dodajmy jeszcze jedną uwagę. Otóż wyniki (nawet rzetelnych) badań statystycznych można zaprezentować tak, aby osiągnąć zaplanowane wcześniej efekty. Mówiąc prościej – łatwo można manipulować opinią publiczną, jeżeli świadomość statystyczna obywateli jest niska. To również powód przemawiający za tym, żeby poznać przynajmniej podstawy statystyki.

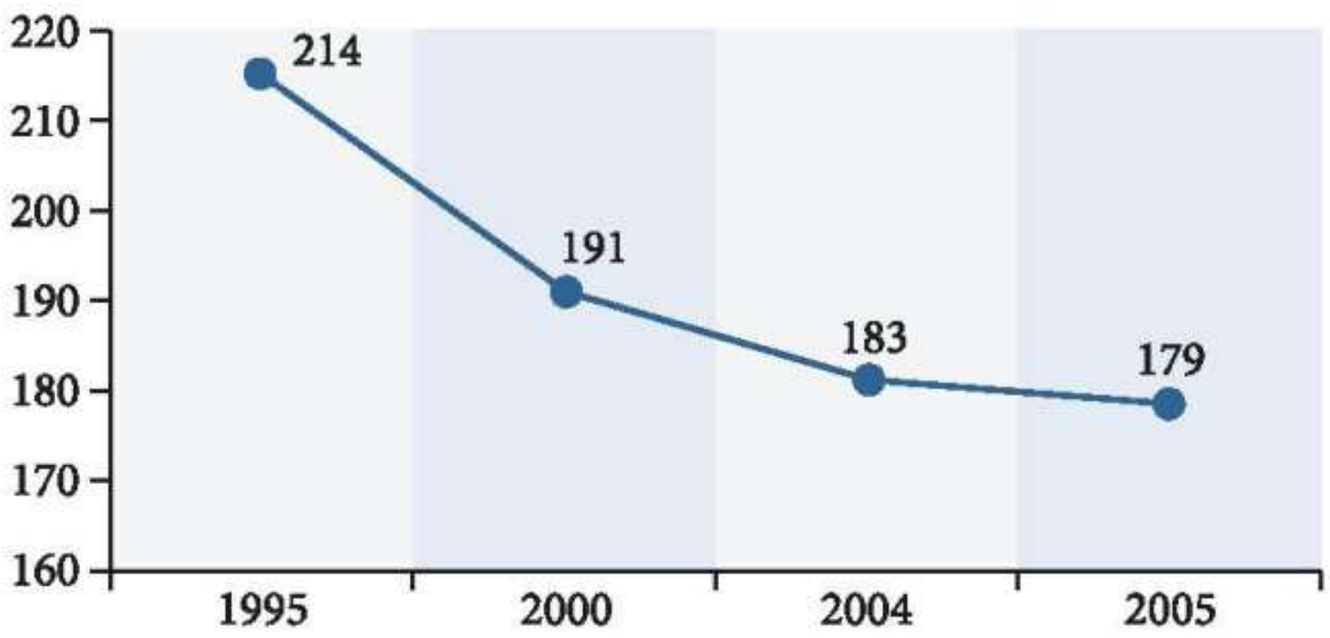
Pewną wysepkę zamieszkiwało małżeństwo, któremu w pierwszym roku urodziły się bliźnięta, a w następnym trzecie dziecko. W zależności od punktu widzenia można powiedzieć, że w ciągu roku przyrost naturalny spadł o 50% albo że liczba ludności tej wyspy wzrosła o 25%.

Przykład 5

Oto dane z *Małego Rocznika Statystycznego 2007* o liczbie łóżek w szpitalach ogólnych (w tysiącach):

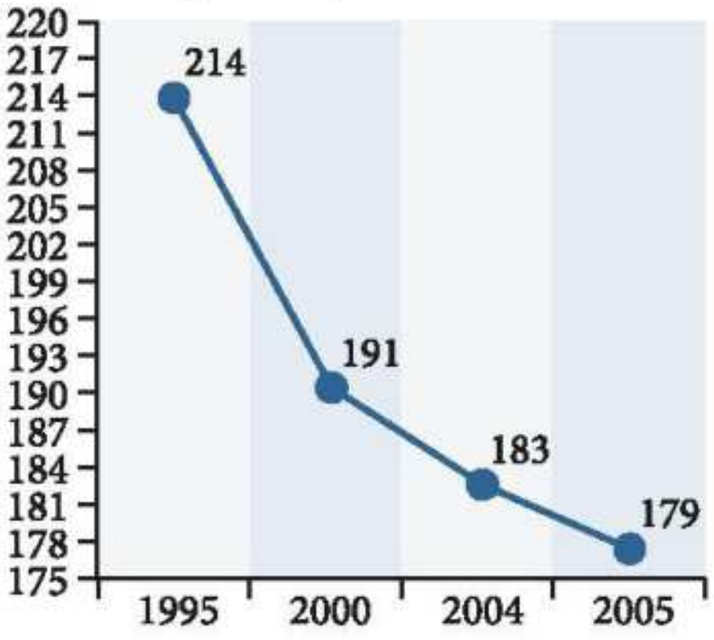
Rok	1995	2000	2004	2005
Liczba łóżek	213,97	190,95	183,28	179,49

Na podstawie tych danych możemy wykonać poniższy wykres (liczbę łóżek zaokrąglono do tysięcy).

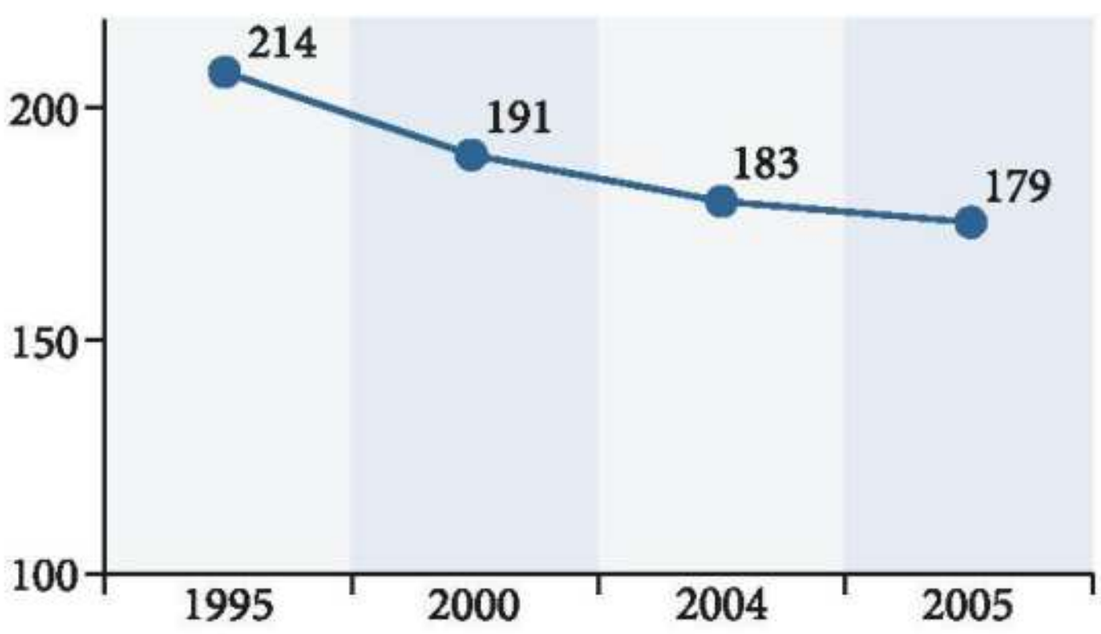


Te same dane możemy zaprezentować w nieco inny sposób i podpisać je odpowiednim komentarzem (manipulacja polega na obraniu różnych jednostek na osiach).

Dramatycznie spada liczba łóżek szpitalnych!



Od 1995 r. nieznacznie spadła liczba łóżek szpitalnych.



8. Mediana, średnia i dominanta

Umiejętności:

- prezentowanie danych z zastosowaniem mediany, dominanty, średniej arytmetycznej i średniej ważonej
- stosowanie skali centylowej
- interpretowanie parametrów opisowych dla danych empirycznych

Dane surowe i uporządkowane

Wszystkie wyniki badania statystycznego nazywamy **danymi surowymi**. Najczęściej są nimi zbiory liczb (wiek, wzrost, oceny z egzaminów, liczby piskląt w gniazdach, liczby wadliwych elementów produkcji, oglądalność programów telewizyjnych itd.). Nawet jeśli badanie ma charakter opisowy, np. podanie ulubionego gatunku filmowego, to i tak wyniki opisuje się liczbowo (tyle osób lubi fantastykę, tyle – kryminały, tyle – kino obyczajowe itd.).
Danych surowych jest na ogół bardzo dużo, więc wyciąganie wniosków na ich podstawie jest albo bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe.

Przykład 1

Studenci trzeciego roku BIWU (czyli Bardzo Interesującego Wydziału Uniwersytetu) zdawali w sesji zimowej egzamin punktowany w skali od 0 do 9. Wyniki były następujące:

8 2 7 5 5 2 3 2 3 5 6 6 5 1 4 5 6 7 6 3 5 2 0 4 3 0 3 3 6 7 4 6 6 4 8 8 6 7 9 9 9 1 1 2 5 7
2 5 8 4 3 3 6 5 8 4 7 7 8 5 4 5 1 4 5 2 2 7 6 4 0 3 6 7 1

Są to punkty spisane z alfabetycznie ułożonej listy uczestników egzaminu. Inaczej mówiąc – pominięte zostały nazwiska zdających. Tak przedstawione wyniki są bardzo trudne do zinterpretowania. Lepszym pomysłem jest na przykład uszeregowanie danych w kolejności od najmniejszej do największej:

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9

Taki zapis liczb nazywać będziemy **szeregiem uporządkowanym**.

Centyle

Statystyka opisowa zajmuje się prezentacją danych (liczbowych) surowych za pomocą innych liczb, których jest już tylko kilka.

Przykład 2

Jaś wrócił ze szkoły bardzo zadowolony, ponieważ dostał z klasówki trójkę. Mama Jasia wcale nie wykazała z tego powodu entuzjazmu i zareagowała typowym dla mam pytaniem: dlaczego tylko trójka? Oburzony Jaś tłumaczy: nie „tylko", ale „aż" – w całej klasie były z tej klasówki trzy oceny dostateczne i dwie dobre, a wszystkie pozostałe były niższe!

Zatem tylko dwie osoby w klasie napisały prace lepiej od Jasia.

Przykład 3

Chętni do studiowania na BIWU muszą zdać egzamin wstępny oceniany w punktach. Ustalona przed egzaminem liczba dostępnych miejsc jest równa 230. Przyjęci zostaną ci kandydaci, którzy zmieścili się w grupie 230 osób z najlepiej zdanym egzaminem. Dla każdego zdającego najważniejsza zatem będzie pozycja na liście uporządkowanych wyników, a nie liczba punktów uzyskanych z egzaminu.

Przykłady 2 i 3 dotyczą ustalenia miejsca interesującej nas liczby w szeregu liczb uporządkowanych według wielkości. W badaniu statystycznym używa się do tego celu centyli.

Definicja

***p*-tym centylem** w zbiorze liczb nazywamy taką wartość k, że $p\%$ liczb z tego zbioru jest mniejszych lub równych k.

Zdanie „Na egzaminie wstępnym Piotr znalazł się na trzydziestym centylu" oznacza więc, że wyniki słabsze niż jego (lub identyczne) uzyskało 30% zdających. Pozostała grupa, czyli 70% zdających, otrzymała wyniki lepsze od wyniku Piotra.

Przykład 4 ◀ zad. 8.4

Jeżeli w klasie Jasia (przykład 2) klasówkę napisało 32 uczniów i 30 uzyskało oceny niższe niż on (lub takie same), to wynik Jasia znajduje się na 94. centylu, ponieważ liczba 30 stanowi 94% liczby 32.

Zasada wyznaczania poszczególnych centyli podana w tym podręczniku nie jest jedyna. W różnych podręcznikach można znaleźć inne sposoby ich znajdowania, wyznaczane wartości mogą się więc nieznacznie różnić.

Mediana

Do opisywania danych surowych praktycznie wykorzystuje się tylko niektóre centyle. Najważniejszy wśród nich jest 50. (nazywany medianą), czyli wartość, poniżej której znajduje się połowa wyników.

Definicja

W uporządkowanym rosnąco szeregu liczb **medianą** nazywamy wyraz środkowy (w szeregu o nieparzystej liczbie wyrazów) lub średnią arytmetyczną dwóch wyrazów środkowych (w szeregu o parzystej liczbie wyrazów).

Mediana dzieli zatem uporządkowany szereg danych surowych w taki sposób, że przed nią i za nią jest tyle samo danych.

Mediana (wartość środkowa) jest liczbą, która nie musi należeć do opisywanego zbioru danych.

Przykład 5

Marek kupił po jednej akcji jedenastu różnych spółek giełdowych. Po roku okazało się, że stopy zwrotu (w procentach) poszczególnych akcji wyniosły: 10,2, 11, 7,6, 7,3, 13,1, −2,4, 3, −3,2, 4,5, 11,2, 8,2. Wyznaczymy medianę tych danych.

Rozwiązanie

Najpierw uporządkujemy je od najmniejszej do największej:

−3,2, −2,4, 3, 4,5, 7,3, 7,6, 8,2, 10,2, 11, 11,2, 13,1

Medianą jest środkowy (szósty) wynik, czyli liczba 7,6. Przed medianą mamy pięć danych: −3,2, −2,4, 3, 4,5, 7,3, za nią również pięć: 8,2, 10,2, 11, 11,2, 13,1.

Odp.: Mediana tego zestawu wynosi 7,6.

Przykład 6

Wynagrodzenia* (w zł) wszystkich pracowników firmy Szwaczka, które umieszczono na spisanej alfabetycznie liście płac, wynoszą: 890, 3400, 1278, 2390, 980, 1500, 1500, 2600, 3400, 980, 1500, 4900. Wyznaczymy medianę tych danych.



Rozwiązanie

Porządkujemy dane rosnąco:

890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900

W szeregu znajduje się dwanaście wyrazów, więc medianą jest średnia arytmetyczna środkowych wyrazów (szóstego i siódmego) równa $\frac{1500 + 1500}{2} = 1500$.

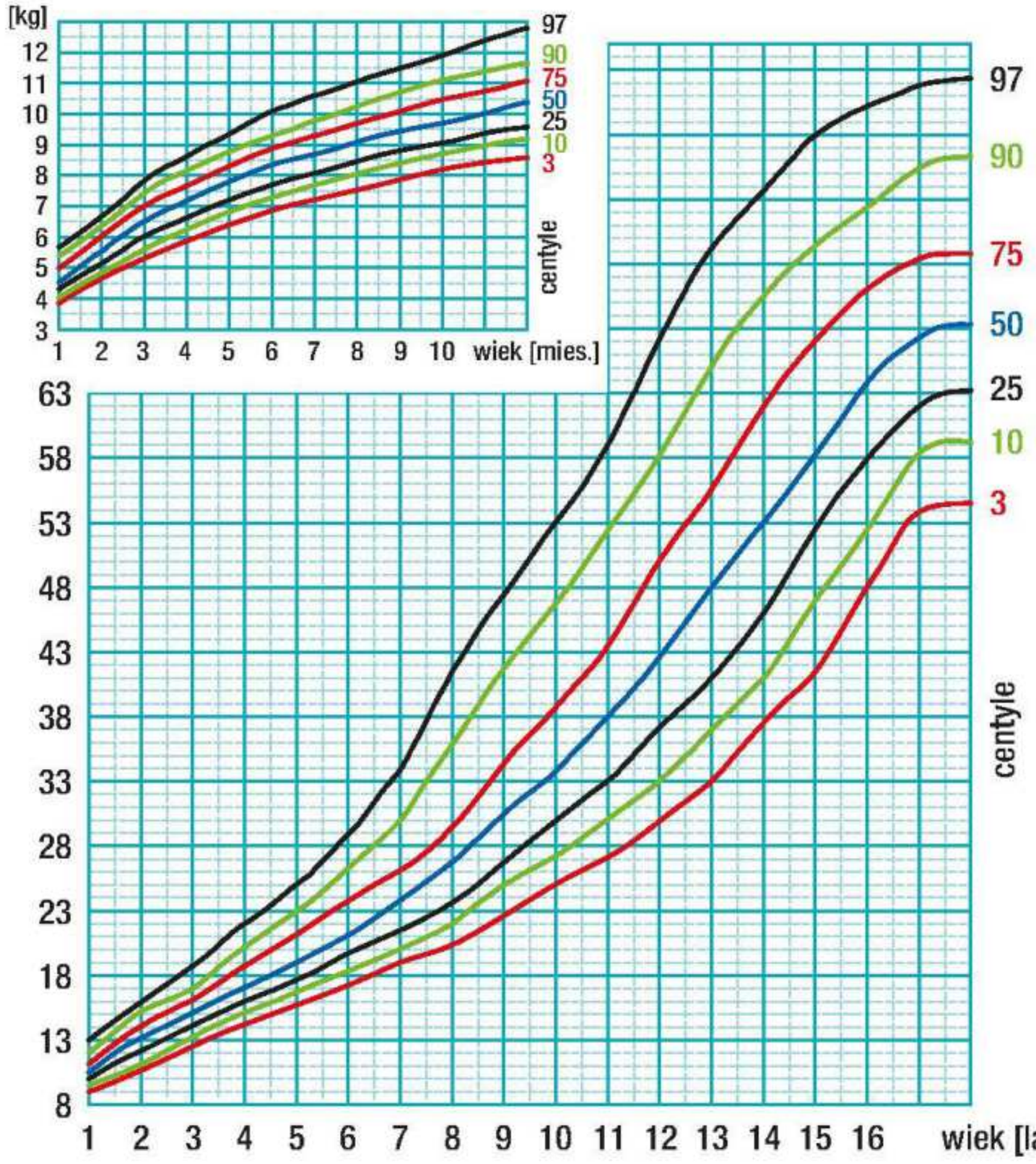
---

* Podane w przykładzie liczby nie mają odzwierciedlenia w rzeczywistości. Dla porównania: najniższa płaca krajowa – czyli najniższe wynagrodzenie, które przysługuje każdemu zatrudnionemu na pełny etat pracownikowi – w 2019 r. wynosiła 2250 zł brutto (co oznacza 1674 zł netto).

Przykład 7 ◀ zad. 8.6

Lekarze pediatrzy kontrolują rozwój dziecka między innymi w ten sposób, że sprawdzają jego wagę i wzrost ze wzorcem umieszczonym na tzw. siatce centylowej. Rodzice mogą oczywiście zaznaczać wyniki pomiarów samodzielnie. Taka kontrola jest ważna szczególnie w pierwszym roku życia dziecka.

Siatka centylowa masy ciała chłopców



Mediana (zaznaczona niebieską linią) została wyznaczona na podstawie badań statystycznych przeprowadzonych w naszym kraju. Zauważmy, że na przykład:

- 90% chłopców w wieku 18 lat nie przekracza masy 82 kg,
- 25% chłopców w wieku 10 lat waży nie więcej niż 30 kg,
- połowa niemowląt płci męskiej w dniu urodzenia waży co najwyżej 4,6 kg, a po ukończeniu roku nie przekracza masy 10,5 kg,
- duże różnice (rozrzut) w masie ciała mają chłopcy w wieku 14,5 roku, a mianowicie: 10% z nich waży co najwyżej 44 kg, 15% mieści się w przedziale 44–49 kg, 25% w przedziale 49–55 kg, 25% w przedziale 55–65 kg, 15% w przedziale 65–73 kg, 10% przekracza masę 73 kg.

Wyznaczenie mediany w zbiorze kilkunastu liczb nie jest czynnością skomplikowaną. Badania statystyczne rzadko jednak przeprowadza się na tak mało licznych próbach (populacjach). Jeżeli wyników obserwacji jest dużo, to oczywiście ich porządkowaniem i szukaniem mediany zajmuje się odpowiedni program komputerowy.
Wróćmy do danych z przykładu 1. W uporządkowanym szeregu 75 liczb:

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9

wyznaczamy 38. wyraz, czyli medianę. Jest ona równa 5.

Średnia

W statystyce zamiast „średnia arytmetyczna" mówimy krótko – **średnia**. Średnią wyników obserwacji jest ich suma podzielona przez liczbę wszystkich wyników. Średnią w próbie oznaczamy $\overline{x}$.

Definicja

Jeżeli wyrazy szeregu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi wynikami obserwacji, to ich **średnia** jest równa:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Przykład 8 ◀ zad. 8.8

Obliczymy średnią (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) w przedstawionym zestawie danych.

Rozwiązanie

a) 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 9 + 11 + 12 + 2 \cdot 15}{10} = \frac{78}{10} = 7{,}8$$

Odp.: $\overline{x} = 7{,}8$

b) 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900

$$\overline{x} = \frac{890 + 2 \cdot 980 + 1278 + 3 \cdot 1500 + 2390 + 2600 + 2 \cdot 3400 + 4900}{12} = \frac{25\,318}{12} \approx 2109{,}83$$

Odp.: $\overline{x} = 2109{,}83$

c) 23, 43, 73, 102, 165, 229, 332, 345, 372, 556

$$\overline{x} = \frac{23 + 43 + 73 + 102 + 165 + 229 + 332 + 345 + 372 + 556}{10} = 224$$

Odp.: $\overline{x} = 224$

d) 2, 2, 2, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 17, 17, 19

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 2 + 5 + 6 + 7 + 11 + 4 \cdot 12 + 13 + 2 \cdot 17 + 19}{16} \approx 9{,}44$$

Odp.: $\overline{x} = 9{,}44$

Dominanta

Do opisu zestawu danych liczbowych służy również miara zwana dominantą.

Definicja

Dominantą (modą, wartością modalną) w zestawie danych jest ta wartość, która występuje w nim najczęściej, ale więcej niż raz.

Przykład 9 ◀ zad. 8.10

Wskażemy dominantę w przedstawionym zestawie danych.

Uporządkowany szereg danych może nie mieć dominanty, może też mieć ich wiele.

Rozwiązanie

a) 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15
Dominanta jest równa 4.

b) 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900
Dominanta jest równa 1500.

c) 23, 43, 73, 102, 165, 229, 332, 345, 372, 556
Ten zestaw danych nie ma dominanty – każdy wynik występuje tylko raz.

d) 2, 2, 2, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 17, 17, 19
Dominantami tego zestawu są liczby 2 oraz 12.

Przykład 10 ◀ zad. 8.11

Spójrzmy na uporządkowane wyniki egzaminu 75 studentów trzeciego roku BIWU na s. 436.
Mediana danych jest równa 5.

Teraz zgrupujemy wyniki tak, jak czyni to najczęściej każdy egzaminator – zliczymy poszczególne oceny.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3

Dominantą tego zestawu jest również 5.

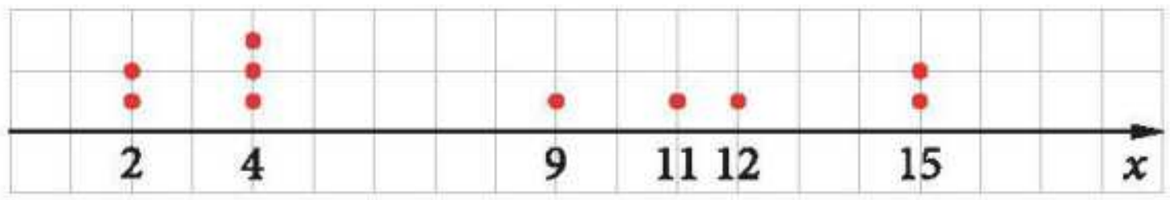
Średnia ocen:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 3}{75} = 4{,}64$$

Zilustrujmy teraz dwa z omówionych zestawów danych. Na poziomej osi x zaznaczymy wartości otrzymanych wyników, a powyżej narysujemy tyle kropek, ile było tych wyników.

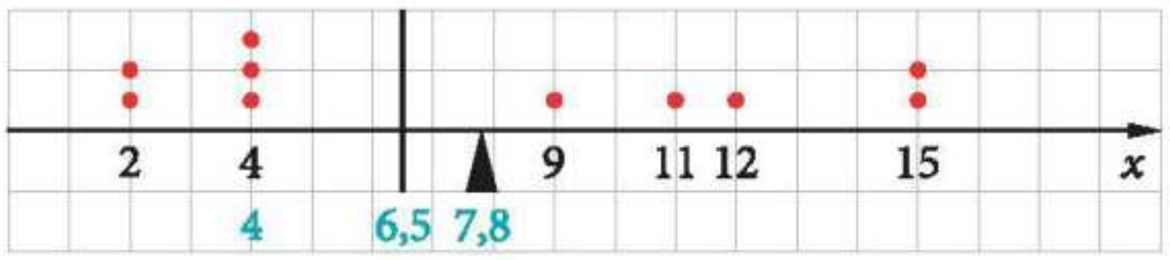
Przykład 11

a) Zestaw 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15 możemy przedstawić graficznie:

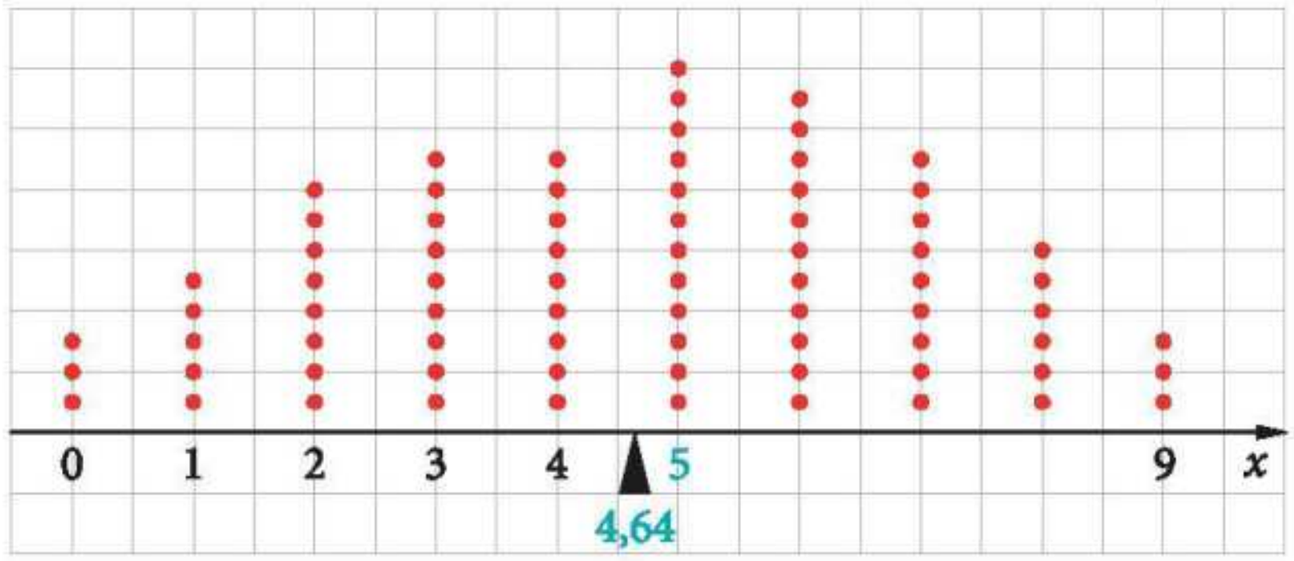


Zauważmy, że mediana dla tej próby jest równa 6,5. Średnią równą 7,8 wyznaczyliśmy w przykładzie 8a, a dominantę równą 4 – w przykładzie 9a.

Zaznaczmy te wielkości na rysunku.



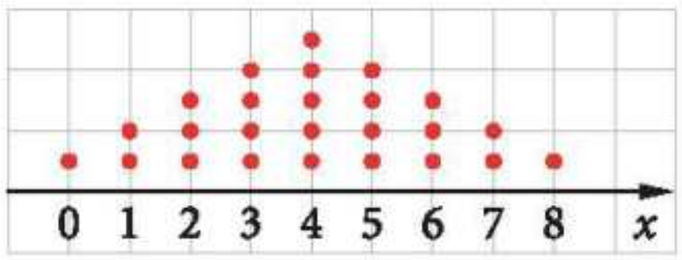
b) Dla zestawu z przykładu 10 mamy średnią równą 4,64 i dominantę oraz medianę równe 5.



Średnia wyników ma interpretację fizyczną. Jeżeli przyjmiemy, że zamiast rysowanych kółeczek mamy kulki o identycznej masie ułożone na osi w odpowiednich punktach jedna nad drugą, to **średnia wskazuje środek ciężkości** całego układu. Inaczej mówiąc, wyznacza ona taki punkt na osi, w którym masy kulek po obydwu jego stronach zrównoważą się. Jeżeli podeprzemy w tym punkcie oś, to żadna z jej stron nie przeważy drugiej.

Przykład 12

Na rysunku zaprezentowane są dane surowe pewnej obserwacji. Wyznaczymy na jego podstawie średnią, dominantę i medianę.



Szereg uporządkowany dla narysowanego zestawu danych to: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8.

Rozwiązanie

Od razu możemy wskazać dominantę – najczęściej pojawia się wynik 4.
Na podstawie tego rysunku łatwo również wyznaczyć medianę – tyle samo kropek jest po lewej i po prawej stronie liczby 4.
Środek ciężkości całego układu jest również w punkcie 4. Aby to sprawdzić, obliczamy średnią:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8}{25} = \frac{100}{25} = 4$$

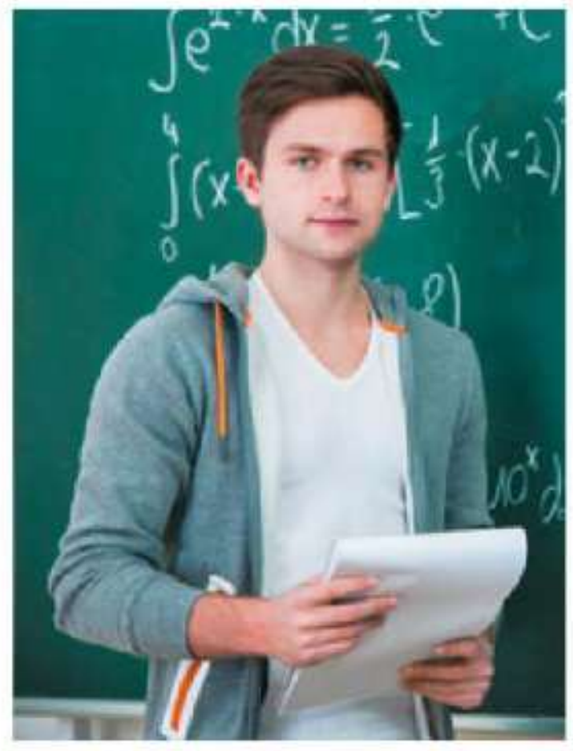
Odp.: średnia = dominanta = mediana = 4

Średnia ważona

Średnią arytmetyczną czasem wygodnie jest zastąpić innym parametrem charakteryzującym dane surowe. Zanim go wprowadzimy, przeanalizujmy przykład.

Przykład 13

Marzeniem wszystkich uczniów i nauczycieli jest opracowanie sprawiedliwego i jednoznacznego systemu oceniania, zwłaszcza w wypadku wystawiania ocen semestralnych. Najczęściej (choć nie zawsze) średnia arytmetyczna nie jest dobrym pomysłem – ocena z klasówki to nie to samo, co ocena na przykład za pracę domową. Pani Piórnik przyjęła następującą zasadę: oceny z pracy klasowej mnożyła przez 5, z odpowiedzi ustnej przez 3, z kartkówki przez 2, pozostałe oceny przez 1. Inaczej mówiąc, ocena z pracy klasowej była liczona pięciokrotnie, z odpowiedzi – trzykrotnie itd. Zatem do „średniej" musiała uwzględnić odpowiednio więcej ocen.



Izydor Muszka otrzymał w semestrze z prac klasowych oceny: 4, 3, 5, 3; z odpowiedzi ustnych: 4, 5; z kartkówek: 1, 5. Zgodnie z przyjętą zasadą „średnia" ocen Izydora jest więc równa:

$$\frac{5 \cdot (4 + 3 + 5 + 3) + 3 \cdot (4 + 5) + 2 \cdot (1 + 5)}{4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2} = \frac{114}{30} = 3{,}8$$

Pani Piórnik postawiła Izydorowi na semestr czwórkę.

Definicja

Jeżeli wynikom $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nadane są nieujemne wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$, to **średnią ważoną** tych wyników jest liczba:

$$\overline{x}_w = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

Przykład 14 ◀ zad. 8.16

Obliczymy średnią ważoną następujących wyników pomiaru: 10, 11, 5, 4, 12 z podanymi wagami.

Wartość oczekiwana gry losowej jest średnią ważoną z przyjmowanych wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z wagami $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Rozwiązanie

a) Z wagami odpowiednio 2, 1, 3, 1, 1:

$$\overline{x}_w = \frac{2 \cdot 10 + 11 + 3 \cdot 5 + 4 + 12}{2 + 1 + 3 + 1 + 1} = \frac{62}{8} = 7{,}75$$

b) Z wagami odpowiednio 0,1, 0,2, 0,3, 0,2, 0,2:

$$\overline{x}_w = \frac{0{,}1 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 11 + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 12}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2} = \frac{7{,}9}{1} = 7{,}9$$

Odp.: a) $\overline{x}_w = 7{,}75$ b) $\overline{x}_w = 7{,}9$

Zauważmy, że:
- jeżeli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej,
- jeżeli wszystkie wyniki są równe, to, niezależnie od przyjętych wag, ich średnia ważona jest taka sama (równa każdemu wynikowi),
- średnia ważona wyznacza środek ciężkości układu „kul" o różnych masach.

Przykład 15 ◀ zad. 8.17

Dwa izotopy miedzi mają masy atomowe 63 i 65. Wyznaczymy masę atomową miedzi otrzymanej w sposób naturalny, jeżeli wiadomo, że składa się ona z obu izotopów w stosunku odpowiednio 7 : 3.

Rozwiązanie

Szukana wielkość jest średnią ważoną liczb 63 i 65 z wagami 7 oraz 3.

$$\overline{x}_w = \frac{7 \cdot 63 + 3 \cdot 65}{7 + 3} = 63{,}6$$

Odp.: 63,6

Przykład 16 ◂ zad. 8.21

Wyznaczymy takie wagi m i p, aby średnia ważona liczby 7 z wagą m i liczby 4 z wagą p
a) była równa 5. b) była równa 5, a suma wag m i n wynosiła 1.

Rozwiązanie

a) Zgodnie z definicją: $m \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $m + p > 0$ i $\frac{7m + 4p}{m + p} = 5$.

Równanie możemy przekształcić do postaci $p = 2m$.

Rozwiązaniem zadania jest każda para liczb m, p spełniająca układ warunków:

$p > 0$ i $m > 0$ i $p = 2m$

Takich par liczb jest nieskończenie wiele, np.: $\begin{cases} m = 1 \\ p = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 3 \\ p = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 0{,}4 \\ p = m = 0{,}8 \end{cases}$.

Odp.: Każda para liczb m, p spełniająca układ warunków: $p > 0$ i $m > 0$ i $p = 2m$.

b) Szukamy rozwiązania układu warunków:

$p > 0$ i $m > 0$ i $p = 2m$ i $p + m = 1$

Rozwiązaniem tego układu warunków jest jedna para liczb: $m = \frac{1}{3}$, $p = \frac{2}{3}$.

Odp.: $m = \frac{1}{3}$, $p = \frac{2}{3}$

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Średni wzrost dziesięciorga zawodników drużyny jest równy 184 cm. Jedenasty zawodnik ma 195 cm wzrostu. Wskaż średni wzrost jedenastu sportowców.

A. 190 cm **B.** 188 cm **C.** 187 cm **D.** 185 cm

8.2. Średnia ważona liczby 7 z wagą 3 i liczby 19 z wagą x jest równa 17. Wskaż x.

A. $x = 13$ **B.** $x = 15$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 12$

8.3. Do zestawu danych surowych: 2, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 11, 11, 11, 25 dopisano jedną daną, taką że mediana całego zestawu nie uległa zmianie. Wskaż tę daną.

A. 5 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 12

8.4. W tabeli przedstawiono wyniki sprawdzianu w klasie liczącej 30 uczniów.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów, którzy uzyskali tę ocenę	4	5	9	6	4	2

Na którym centylu znajduje się wynik ucznia, który dostał
a) dwójkę? b) trójkę? c) czwórkę? d) piątkę? e) szóstkę?

8.5. Marta dostała na półrocze czwórkę z matematyki. Znajduje się z tym wynikiem na 84. centylu w klasie liczącej 25 osób. Jej koleżanka Zuzia otrzymała trójkę i znalazła się na 64. centylu. Ile czwórek było w tej klasie?

8.6. W 2019 r. egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym zdawało 250 489 osób. Poniżej przedstawiona jest tabela zawierająca rozkład wyników tego egzaminu w poszczególnych centylach.
Na jej podstawie oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wynik nie wyższy od 10% uzyskało 2% zdających.
B. Wynik niższy od 30% uzyskało mniej niż 30 000 zdających.
C. Liczba osób, które uzyskały wynik wyższy od 50%, przekracza 150 000.
D. Liczba osób, które uzyskały wynik niższy niż 20%, jest mniejsza od liczby osób, które uzyskały wynik wyższy od 90%.

Matematyka – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	21	68	64
2	1	36	23	70	66
4	1	38	26	72	69
6	1	40	28	74	71
8	1	42	30	76	74
10	2	44	33	78	76
12	3	46	35	80	78
14	4	48	38	82	80
16	5	50	40	84	82
18	7	52	43	86	85
20	8	54	45	88	87
22	10	56	48	90	89
24	12	58	51	92	91
26	13	60	53	94	93
28	15	62	56	96	96
30	17	64	58	98	98
32	19	66	61	100	100

8.7. Podaj takie trzy zestawy dziesięciu liczb całkowitych, aby we wszystkich mediana była równa 6, ale każdy z nich miał inną wartość najmniejszą i inną wartość największą.

8.8. Wyznacz średnią arytmetyczną danych surowych. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

a) 1, 8, 7, 3, 4, 2, 9, 7, 1, 3, 2, 6, 3

b) 21, 32, 33, 45, 33, 17, 0, 21, 22, 17, 45, 48, 20, 51

8.9. Oblicz średnią liczbę biletów sprzedanych w kolejnych dniach na seans filmowy w kinie: 43, 102, 372, 229, 332, 556, 345, 23, 73, 165.

8.10. Miesięczna średnia temperatura powietrza od stycznia do grudnia w Rzymie (zaokrąglona do 1°) wynosi w kolejnych miesiącach:

7°C, 8°C, 11°C, 14°C, 18°C, 22°C,
25°C, 25°C, 22°C, 17°C, 12°C, 9°C

Wskaż dominantę i wyznacz medianę tych danych.



8.11. Krzyś chciał zważyć jednocześnie cztery szczeniaki na domowej wadze. Udało mu się zważyć trzy, bo suczka Sinuska uciekła. Średnia masa trzech zważonych szczeniąt wyniosła 2,1 kg. Sinuskę postawiono na wagę oddzielnie. Ważyła 1,9 kg. Ile średnio waży jeden szczeniak?

8.12. Zapisz dane surowe w szeregu uporządkowanym, wyznacz ich medianę, dominantę i średnią. Wyniki zaokrąglij do całości.

a) Liczby punktów uzyskanych ze sprawdzianu w klasie 3 przez poszczególnych uczniów: 14, 17, 12, 11, 8, 5, 16, 11, 13, 14, 17, 12, 7, 8, 14, 11, 12, 10, 15, 11, 13, 9, 14, 11, 7, 18, 15.

b) Liczby batonów sprzedanych dziennie w sklepiku szkolnym w ciągu miesiąca: 18, 14, 20, 11, 5, 66, 18, 11, 4, 3, 19, 21, 20, 15, 2, 1, 0, 12, 12, 20, 5, 9, 7, 50, 8.

c) Miesięczne opady w mm od stycznia do grudnia w Łowiczu: 30, 24, 30, 44, 52, 62, 85, 72, 45, 35, 33, 35.

d) Masa w gramach losowo wybranych z koszyka jajek kurzych: 41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41.

e) Liczby książek wypożyczonych w ciągu roku szkolnego przez poszczególnych uczniów: 25, 4, 107, 21, 23, 46, 17, 4, 0, 29, 34.

8.13. Pani Gertruda prowadzi bar Uszko, w którym daniem głównym są pierogi. Przez trzy tygodnie pani Gertruda skrupulatnie notowała liczbę oraz rodzaj wydawanych porcji pierogów. W tabeli zanotowane są zebrane przez nią dane (R oznacza pierogi ruskie, M – pierogi z mięsem, G – pierogi z kapustą i grzybami).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
R	8	5	10	6	13	5	5	7	6	10	6	16	4	5	8	7	11	5	14	7	4
M	7	10	5	3	2	5	9	7	3	2	7	5	3	2	7	5	7	6	–	3	5
G	4	2	7	5	10	2	4	–	3	5	10	9	1	2	5	–	3	9	7	1	6

Wyznacz średnią, medianę i dominantę w zestawie liczb
a) sprzedanych dziennie porcji pierogów ruskich.
b) sprzedanych dziennie porcji pierogów z mięsem.
c) wszystkich sprzedanych dziennie porcji pierogów.
Wyniki zaokrąglij do całości.

8.14. Skorzystaj z danych dotyczących sprzedaży pierogów w barze Uszko z poprzedniego zadania.
a) Pani Gertruda swoje obserwacje zapisywała w kolejne dni, zaczynając od poniedziałku. W jaki dzień tygodnia ma najwięcej chętnych na swoje danie główne?
b) Cena hurtowa porcji pierogów, które kupuje pani Gertruda, wynosi: R – 3 zł, M – 5 zł, G – 4 zł, natomiast w Uszku klient płaci odpowiednio: 5,50 zł, 7 zł i 6 zł. Na którym rodzaju pierogów pani Gertruda zarobiła najwięcej? Czy zysk pani Gertrudy byłby większy czy mniejszy, gdyby każdy rodzaj pierogów kosztował w Uszku 6,50 zł za porcję (zakładamy sprzedaż na takim samym poziomie)?

8.15. Dwie klasy trzecie planują wspólną dyskotekę. Wszyscy chętni mają przyjść o godzinie 18. Trzeba ustalić, do której godziny ma trwać dyskoteka i jak długo powinien być czynny bufet. Uczniowie przeprowadzili pomiędzy sobą ankietę z pytaniem „Ile godzin zamierzasz zostać na dyskotece?". Odpowiedzi zebrano w następującej tabeli:

Czas (w godz.)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6
Liczba uczniów	2	1	6	4	12	4	8	1	2	1

Postanowiono, że dyskoteka zakończy się, gdy w szkole pozostanie nie więcej niż 50% liczby uczestników. Natomiast bufet będzie otwarty, dopóki będzie co najmniej 75% uczniów. Do której godziny ma trwać dyskoteka i jak długo będzie czynny bufet?

8.16. Dane są wyniki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

a)

x_i	−2	1	3
a_i	3	5	4

b)

x_i	−2	−1	0	1	2
a_i	1	3	5	7	9

c)

x_i	3	4	5	6
a_i	0,3	0,2	0,4	0,1

d)

x_i	2	4	6
a_i	1	1	1

8.17. Łukasz musi wybrać liceum. Aby ułatwić sobie podjęcie decyzji, wybrał cztery kryteria i przypisał im wagi. Następnie zdobył informacje o liceach i ocenił te kryteria w skali od 0 do 10 (im więcej punktów, tym lepsza ocena). Wyniki zebrał w poniższej tabeli. Które liceum powinien wybrać Łukasz?

	Wyniki matury	Łatwość dojazdu	Oferta nauki języków obcych	Opinia uczniów klas starszych
	waga 0,4	waga 0,3	waga 0,2	waga 0,1
I LO	6	3	4	8
II LO	3	5	2	7
III LO	5	7	3	9

8.18. Średnia ważona liczby 4 z wagą 2 i liczby 8 z wagą x jest równa 7. Wyznacz x.

8.19. Średnia ważona podanego zestawu danych i ich wag wynosi $\overline{x}_w = 14{,}3$. Oblicz brakującą wagę m.

x	5	10	15	22
waga	2	3	m	4

8.20. Oblicz średnią ważoną swoich ocen z pierwszego semestru. Przyjmij jako wagę liczbę godzin danego przedmiotu w tygodniu.

8.21. Średnia ważona liczby 15 z wagą m i liczby 33 z wagą n jest równa 21.

a) Podaj przykład takich wag m i n.

b) Jaką zależność spełniają wielkości m i n?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
W uporządkowanym rosnąco szeregu liczb całkowitych mediana
A. może być liczbą niecałkowitą.
B. jest liczbą wymierną.
C. może być liczbą niewymierną.

2. Medianą zestawu liczb: 3, 12, 7, 5, x, 10 jest 8. Wyznacz wartość x.

3. Kolejni klienci kiosku robili zakupy za następujące kwoty (w zł):
2,40; 0,60; 7,20; 5; 4,20; 1,50; 2; 6,40; 1,50; 12,50; 1,50; 2,50
Wyznacz średnią i dominantę tych kwot. Średnią podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

4. We wszystkich klasach trzecich pewnej szkoły przeprowadzono wspólny sprawdzian z matematyki. Liczbę poszczególnych ocen ze sprawdzianu przedstawiono w tabeli.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	23	16	35	27	11	3

Wyznacz medianę i średnią tych ocen. Średnią podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

5. Wyznacz zestaw czterech danych, w którym mediana wynosi 6, dominanta jest równa 3, a średnia 7.

9. Miary rozproszenia

Umiejętności:

- obliczanie odchylenia standardowego zestawu danych (także w wypadku danych odpowiednio pogrupowanych)
- interpretowanie parametrów opisowych dla danych empirycznych

Zastanówmy się teraz, jakie wady i zalety mają omówione wcześniej parametry opisujące dane surowe – mediana i średnia.

Mediana dzieli uporządkowany szereg danych na pół. Jej wartość zależy od liczby wszystkich wyników oraz od wartości wyrazu środkowego (dla nieparzystej liczby wszystkich danych) lub wyrazów środkowych (dla parzystej liczby wszystkich danych). Natomiast wartości skrajne nie mają na nią wpływu.

Przykład 1 ◂ zad. 9.4

W zestawieniu zarobków pracowników firmy Szwaczka (zob. przykład 6 na s. 434) mediana jest równa 1500. Z informacji tej wynika tylko tyle, że np. zarobki księgowej tej firmy wynoszące 3400 zł sytuują się w górnej połowie listy.

Przypomnijmy całą listę płac.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900
  mediana: 1500

Jeżeli księgowa dostanie podwyżkę o 1000 zł, to wartość mediany się nie zmieni.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 4900
  mediana: 1500

Jeżeli prezes firmy, zarabiający 4900 zł, dostanie pensję o 2000 zł większą, to mediana również się nie zmieni.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 6900
  mediana: 1500

Natomiast zmiana na liście w sąsiedztwie mediany może zmienić jej wartość. Na przykład w szeregu:

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1700, 2390, 2600, 3400, 4400, 6900
  mediana jest równa 1600.

Porównajmy teraz średnie dla powyższych danych. W szeregu:

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900 średnia jest równa 2109,83,
- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 4900 średnia jest równa 2193,17,
- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 6900 średnia jest równa 2359,83.

Zatem zmiana w szeregu danych nawet jednej wartości powoduje zmianę średniej.

Średnia – środek ciężkości rozkładu danych – ma więc istotną zaletę. Reaguje na zmiany każdej wartości rozkładu. Poza tym wygodnie jest ją stosować w różnych obliczeniach matematycznych. Może się jednak zdarzyć, że to, co uważamy za zaletę średniej, w konkretnym przypadku jest wadą. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy w szeregu danych wystąpi wynik nietypowy.

Przykład 2

W drugim semestrze, do końca maja, Agata otrzymała z matematyki następujące oceny:

4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

Zauważmy, że mediana i średnia tych wyników są identyczne i wynoszą 5. Agata spodziewała się na świadectwie piątki z matematyki. Niestety, na początku czerwca nie zrobiła pracy domowej i „złapała" jedną ocenę niedostateczną. Zatem jej wyniki utworzyły szereg:

1, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

Mediana danych nadal jest równa 5. Natomiast średnia ocen spadła do 4,6.
W tym wypadku wydaje się, że do wystawienia końcowej oceny lepiej posłużyć się medianą, traktując jedną ocenę niedostateczną jako wynik dla Agaty nietypowy.

Częstym błędem jest wyznaczanie średniej dla populacji jako średniej dla średnich jej podzbiorów.

Przykład 3

Dwie rodziny wybrały się wspólnie na grzybobranie. Każde z szóstki dzieci pierwszej rodziny zebrało odpowiednio 10, 8, 7, 9, 8 i 6 grzybów. Czworo dzieci z drugiej rodziny przyniosło odpowiednio 3, 7, 6, 4 grzybów. Obliczymy średnią liczbę grzybów zebranych przez dziecko w każdej z rodzin i średnią liczbę grzybów zebranych przez każde z dzieci.

Rozwiązanie

Średnia liczba grzybów znaleziona przez jedno dziecko w pierwszej rodzinie wynosi:

$$\frac{10+8+7+9+8+6}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

a w drugiej jest równa:

$$\frac{3+7+6+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

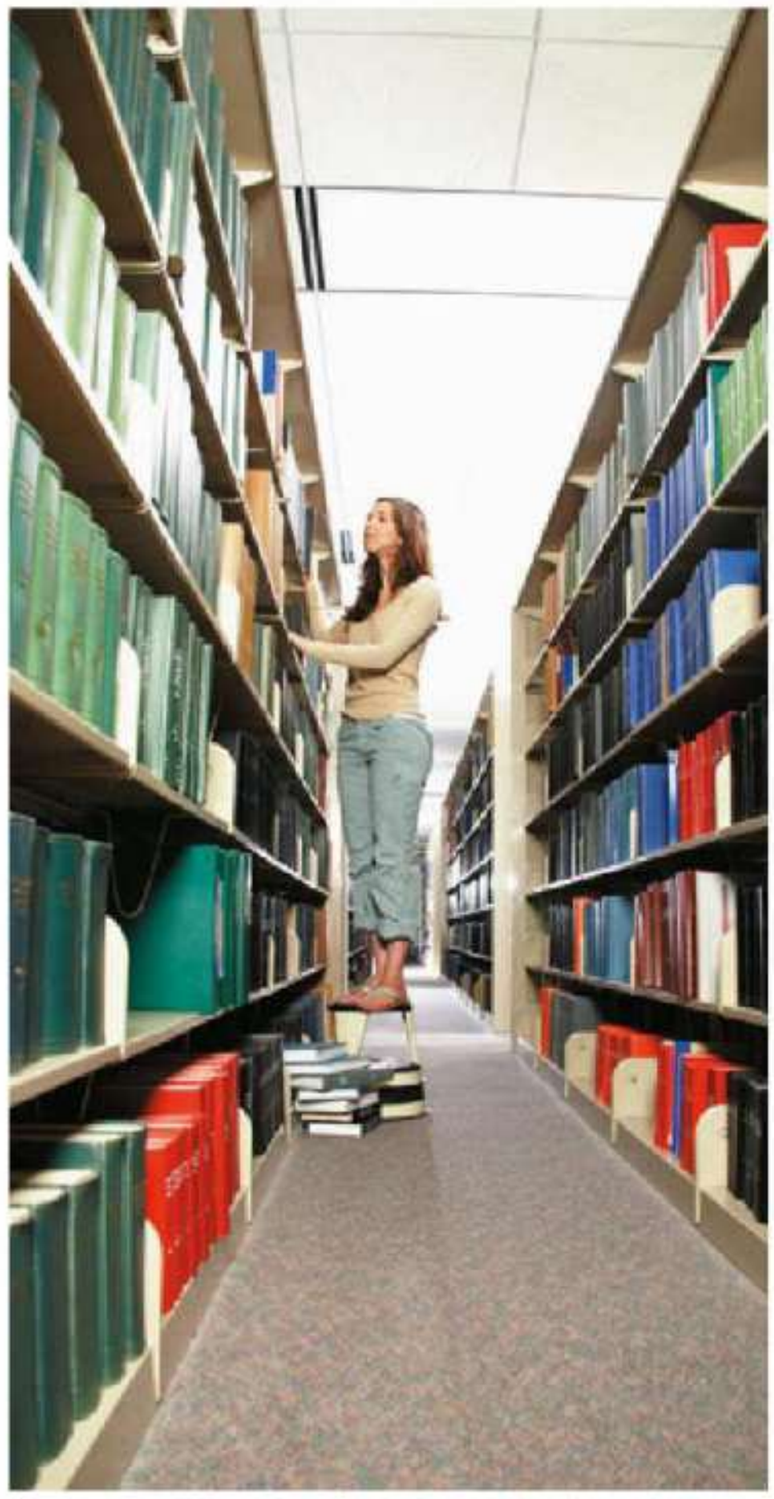
Średnia liczba grzybów zebranych przez jedno dziecko podczas tej wyprawy to $\frac{48+20}{10} = 6{,}8$. Zauważmy, że ta średnia nie jest równa średniej dwóch wyznaczonych średnich (która wynosi $\frac{8+5}{2} = 6{,}5$).

Często zdarza się, że średnia z wyliczonych wcześniej średnich klasowych jest błędnie nazywana średnią ocen w szkole.

Różne parametry charakteryzujące próbę wprowadzane są po to, aby na ich podstawie można było wyciągnąć poprawne wnioski o całej populacji. Zastanówmy się, jak podanie mediany, dominanty i średniej spełnia to zadanie.

Przykład 4 ◀ zad. 9.6

Klasy 3a i 3b liczą po 20 osób. Biblioteka szkolna zebrała dane o liczbie książek przeczytanych przez uczniów obydwu klas we wrześniu i październiku. Po podsumowaniu danych i wykonaniu obliczeń statystycznych okazało się, że parametry opisujące wyniki były identyczne dla obu klas. Liczba 4 była zarówno średnią, medianą, jak i dominantą zestawu danych dotyczących każdej z klas.

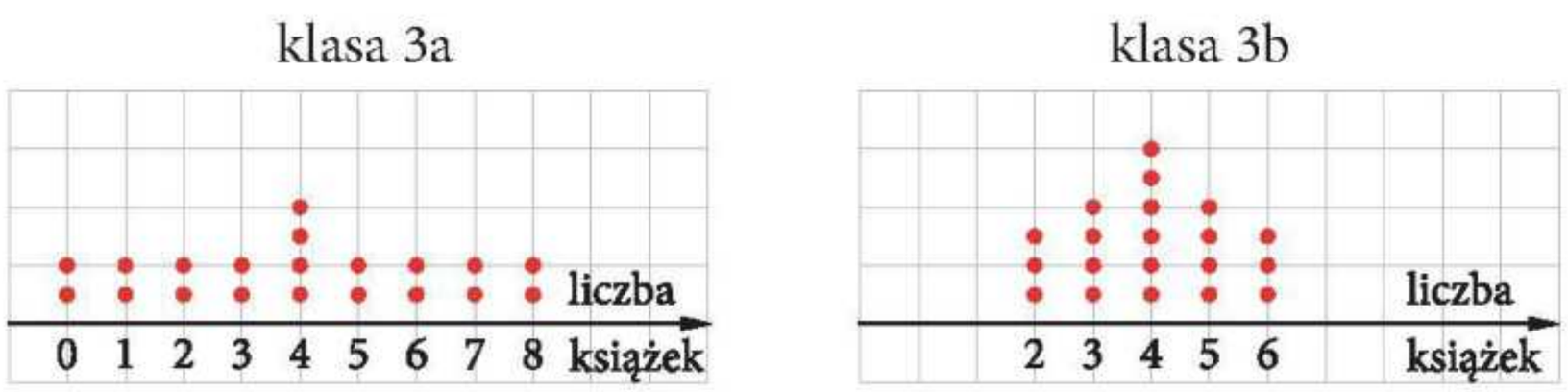


Jakie zatem wnioski (wspólne dla obydwu klas) można wyciągnąć na podstawie takich informacji?

- Średnia jest równa 4, czyli każdy z uczniów przeczytał przeciętnie 4 książki.
- Mediana jest równa 4, zatem połowa uczniów przeczytała co najwyżej 4 książki oraz połowa uczniów przeczytała co najmniej 4 książki.
- Dominanta jest równa 4, czyli największa liczba uczniów przeczytała w badanym okresie 4 książki.

Czy z powyższych danych można wnioskować, że uczniowie obydwu klas prezentują podobne grupy czytelników? Niezupełnie – można się o tym przekonać, porównując dane surowe, które były następujące:

Podane rozkłady nie wyczerpują wszystkich możliwości dopasowania danych surowych do informacji podanych na początku przykładu.



W klasie 3a cztery osoby przeczytały co najmniej 7 książek, ale jednocześnie dość liczna jest grupa uczniów nielubiących czytać, wyniki są równomiernie rozproszone. Natomiast w klasie 3b każdy uczeń przeczytał co najmniej 2 książki, wszystkie wyniki są zgrupowane blisko średniej, nie ma tu „maniaków" czytania.

Podanie średniej, dominanty i mediany nie wystarcza zatem do opisania badanej populacji.

Wprowadzimy teraz parametry mierzące rozproszenie wyników.

Jest wiele takich miar. Najprostszą jest **rozstęp** w uporządkowanym szeregu, czyli odległość między danymi skrajnymi.

W wynikach klasy 3a rozstęp jest równy $8 - 0 = 8$, a w wynikach klasy 3b: $6 - 2 = 4$. Wadą tej miary jest jej wrażliwość na pozycje skrajne. Jeżeli pojawi się wynik nietypowy, to rozstęp będzie bardzo duży i niewiele powie o skupieniu danych wokół średniej.

Dla rzeczywistych potrzeb wnioskowania statystycznego taka miara rozproszenia jest za mało dokładna i dlatego niezbyt przydatna. Ważniejsza jest informacja o przeciętnej odległości wyników od wartości średniej.

Definicja

Przeciętnym odchyleniem od średniej $\overline{x}$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest wartość:

$$\frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Przykład 5

Obliczymy przeciętne odchylenie liczb 1, 4, 7, 8, 10 od ich średniej $\overline{x} = 6$.

Rozwiązanie

Kolejne odległości są równe:

$$|1-6| = 5,\ |4-6| = 2,\ |7-6| = 1,\ |8-6| = 2,\ |10-6| = 4$$

Zatem odchylenie to $\frac{5+2+1+2+4}{5} = 2{,}8$.

Odp.: Przeciętne odchylenie liczb tego zestawu od ich średniej wynosi 2,8.

Zauważmy, że suma nieujemnych liczb jest tym mniejsza, im mniejsze są jej składniki i na odwrót – jeżeli suma nieujemnych liczb jest mała, to jej składniki muszą być również małe (żadne wyrazy nie mogą się przecież zredukować). Zatem jeżeli przeciętne odchylenie od średniej jest małe, to dane są zgrupowane blisko niej.

Wyrażanie wielkości za pomocą wartości bezwzględnej nie jest wygodne. Takie wzory nie dają się na przykład łatwo przekształcać. Dlatego (chociaż nie jest to jedyny powód) narzędziem mierzącym rozproszenie wyników, używanym w statystyce, jest wielkość wyrażona przez kwadraty odległości, tzw. **wariancja**.

Definicja

Wariancją w zestawie wyników $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy przeciętne odchylenie kwadratowe od wartości średniej $\overline{x}$, czyli:

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$$

Przykład 6

Obliczymy wariancję danych 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8.

Rozwiązanie

Kolejno obliczamy:

- średnią (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku): $\overline{x} = 5{,}1$
- wariancję: $\frac{2\cdot 3{,}1^2 + 3\cdot 1{,}1^2 + 4\cdot 0{,}1^2 + 3\cdot 0{,}9^2 + 1{,}9^2 + 2\cdot 2{,}9^2}{15} = \frac{45{,}75}{15} = 3{,}05$

Odp.: Wariancja jest równa 3,05.

Wariancja ma tę samą własność co przeciętne odchylenie, tzn. jest sumą nieujemnych składników, więc jest mała tylko wtedy, gdy składniki są małe. Jej wadą jest niewygodna, mierzona w kwadratach, jednostka. Wprowadzona została więc jeszcze jedna miara rozproszenia, tzw. **odchylenie standardowe**.

Definicja

Odchyleniem standardowym w zestawie wyników obserwacji nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji. Odchylenie standardowe oznaczamy σ.

Zatem:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

σ (sigma) jest małą literą alfabetu greckiego.

Zaletą odchylenia standardowego jest to, że wyraża się je, podobnie jak przeciętne odchylenie, w jednostkach liniowych, a nie kwadratowych. Nadal zachowana zostaje podstawowa własność potrzebna do oszacowania rozproszenia – **odchylenie standardowe jest małe wtedy i tylko wtedy, gdy wyniki są skupione blisko średniej**.

Ze względu na zależność między wariancją a odchyleniem standardowym przyjmuje się σ^2 jako oznaczenie wariancji.

Dla zestawu danych z przykładu 6 odchylenie standardowe jest równe:

$$\sigma = \sqrt{3{,}05} \approx 1{,}75$$

Przykład 7

Powróćmy jeszcze raz do wyników czytelnictwa w klasach 3a i 3b (zob. przykład 4 na s. 449).
Obliczymy odchylenie przeciętne i odchylenie standardowe dla obydwu rozkładów wyników. Przypomnijmy, że średnie wyników są równe 4 w każdej z klas.

W klasie 3a (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8) mamy:

- odchylenie przeciętne: $\frac{40}{20} = 2$
- odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(0-4)^2 + 2(1-4)^2 + 2(2-4)^2 + 2(3-4)^2 + 2(5-4)^2 + 2(6-4)^2 + 2(7-4)^2 + 2(8-4)^2}{20}}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

Natomiast w klasie 3b (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6) mamy:

- odchylenie przeciętne: $\frac{20}{20} = 1$
- odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3(2-4)^2 + 4(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 3(6-4)^2}{20}} = \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1{,}26$$

Wyniki potwierdzają wcześniejsze obserwacje dotyczące rodzaju czytelnictwa w obydwu klasach. Ale zauważmy, że obserwacje te zostały poczynione po zaprezentowaniu danych surowych eksperymentu. Teraz moglibyśmy wyciągnąć podobne wnioski bez znajomości dokładnych wyników, a tylko mając do dyspozycji następujące liczby:

- w zestawie wyników klasy 3a:
  dominanta = mediana = średnia = 4, odchylenie standardowe = 2,45,
- w zestawie wyników klasy 3b:
  dominanta = mediana = średnia = 4, odchylenie standardowe = 1,26.

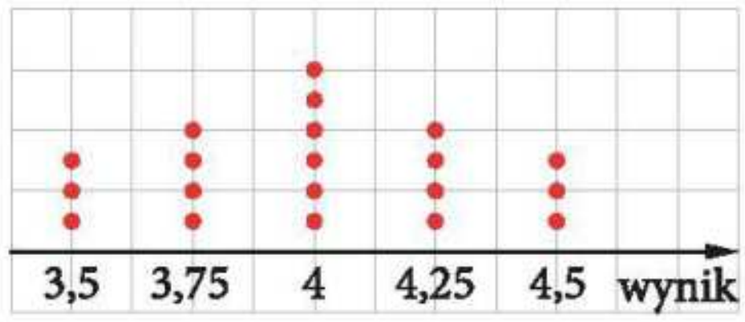
Przykład 8

Obliczymy odchylenie standardowe wyników o rozkładzie zbliżonym do rozkładu wyników klasy 3b, ale skupionych bliżej średniej.

Rozwiązanie

W zestawie danych:

3,5 3,5 3,5 3,75 3,75 3,75 3,75 4 4 4 4 4 4
4,25 4,25 4,25 4,25 4,5 4,5 4,5



średnia wynosi 4, sześć wyników jest oddalonych od niej o 0,5, osiem – o 0,25.
Odchylenie standardowe tego zestawu równa się:

$$\sqrt{\frac{6 \cdot 0{,}5^2 + 8 \cdot 0{,}25^2}{20}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}32$$

i jest dużo mniejsze niż w wypadku zestawu wyników klasy 3b.

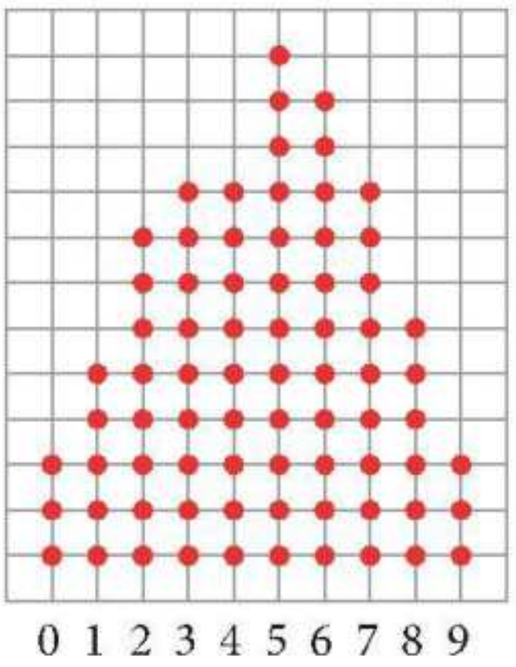
Grupowanie danych

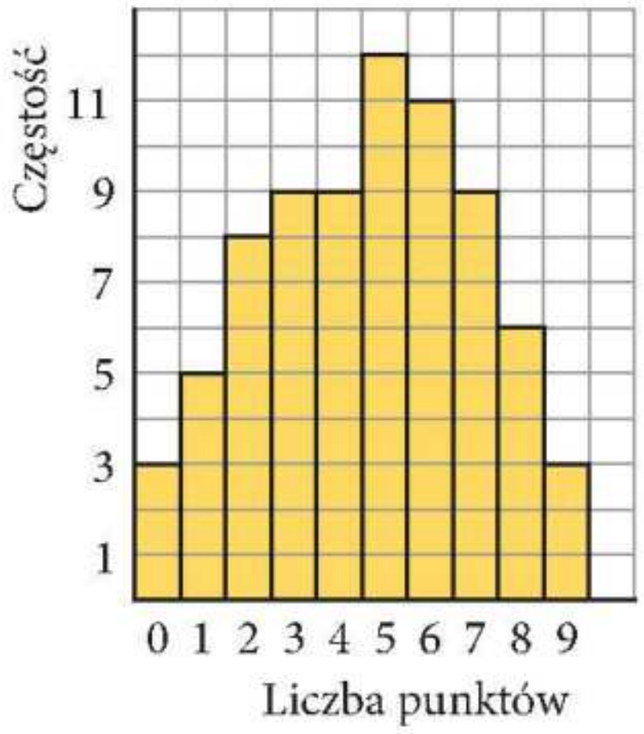
Pokazaliśmy wcześniej przykłady grupowania danych w tabelach. Przypomnijmy tabelę wyników egzaminu 75 studentów BIWU:

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3

Na podstawie tak zaprezentowanych danych wyznaczaliśmy dominantę i średnią wyników (medianę wskazujemy w uporządkowanym szeregu). W tabeli mamy podaną informację, jak często występuje każdy z wyników i dlatego tak opracowane dane noszą nazwę **tabeli rozkładu częstości**.

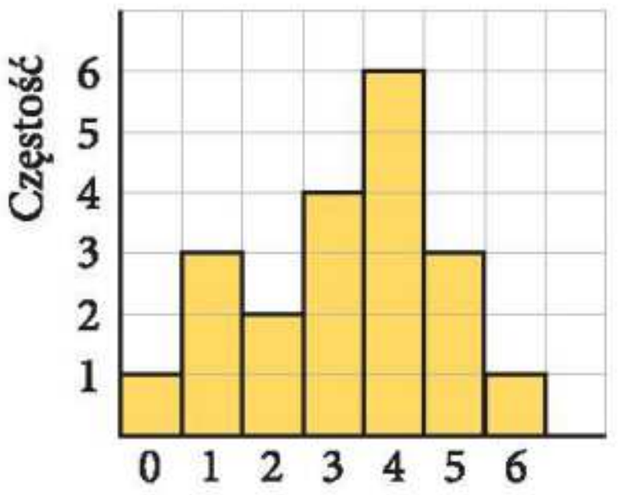
Częstym sposobem prezentowania danych zgrupowanych są diagramy słupkowe, wykonane na podstawie tabeli częstości. Są one dokładnym odwzorowaniem „punktowych" rysunków, co można zaobserwować na poniższych rysunkach.





Przykład 9 ◂ zad. 9.8

Na diagramie przedstawiono liczbę zniszczonych w ostatnim sezonie krzeseł we wszystkich kinach sieci Sowa. Odczytamy z tego diagramu różne informacje.



Rozwiązanie

a) Ile kin liczy sieć Sowa?

Słupki diagramu podzielone zostały poziomymi kreskami – każda kostka dotyczy jednego kina.
Zatem dane w diagramie są następujące:
0 zniszczonych krzeseł – w jednym kinie, 1 zniszczone krzesło – w trzech kinach, 2 zniszczone krzesła – w dwóch kinach, 3 – w czterech kinach itd. Cała sieć składa się z dwudziestu kin.

b) W ilu kinach uległy zniszczeniu jakieś krzesła?

W dziewiętnastu.

c) Jaki jest rozstęp liczby zniszczonych krzeseł?

Najmniejsza liczba jest równa 0, największa 6, zatem rozstęp jest równy 6.

d) Jaka liczba dominuje?

4 (aż w sześciu kinach zniszczone zostały 4 krzesła)

e) W ilu kinach zniszczono co najmniej 5 krzeseł?

W czterech.

f) Ile jest równa mediana?

3,5 (w dwudziestu uporządkowanych danych surowych mediana jest średnią arytmetyczną 10. i 11. wyniku)

g) Ile jest równa średnia liczba zniszczonych krzeseł?

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{20} = 3{,}2$$

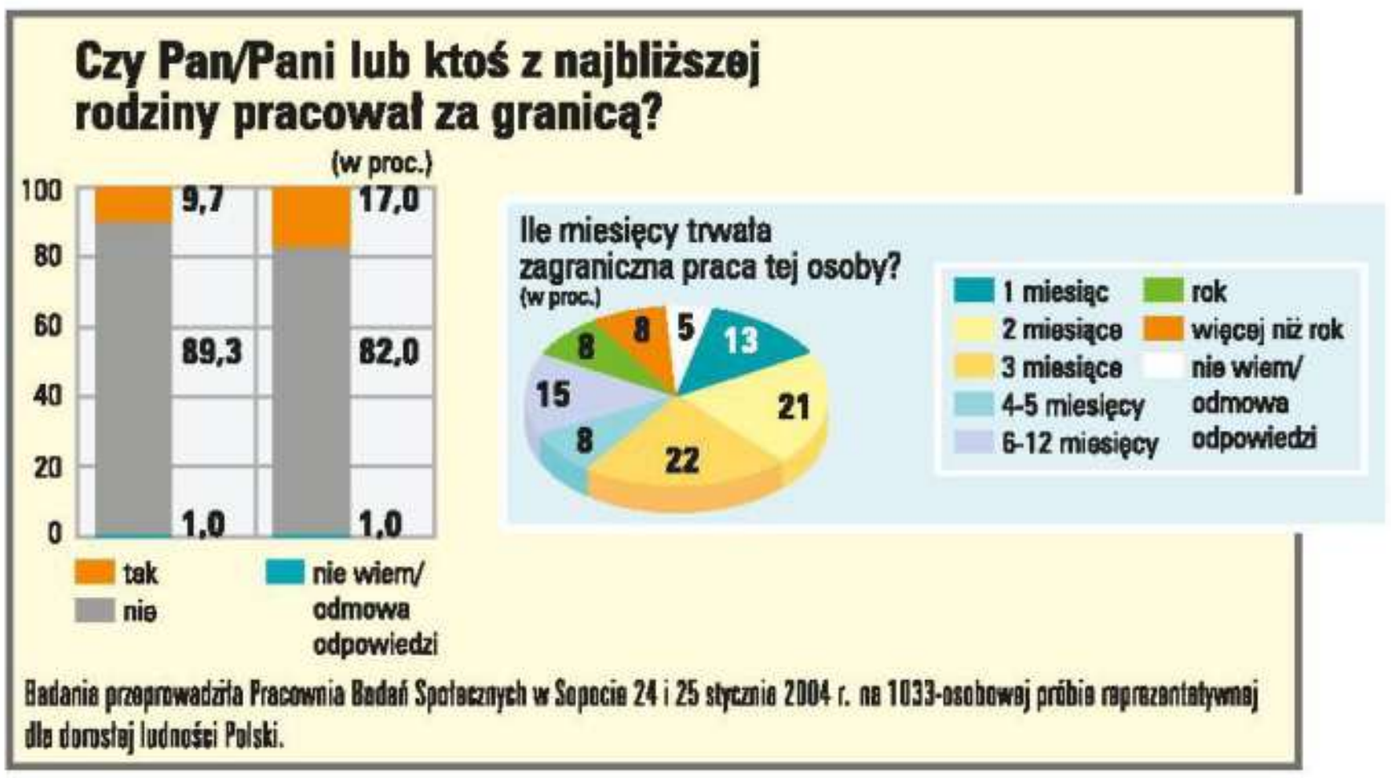
h) Ile jest równe odchylenie standardowe w tym zestawie danych?

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0-3{,}2)^2 + 3(1-3{,}2)^2 + 2(2-3{,}2)^2 + 4(3-3{,}2)^2 + 6(4-3{,}2)^2 + 3(5-3{,}2)^2 + (6-3{,}2)^2}{20}}$$

$$\sigma \approx 1{,}57$$

Za pomocą wprowadzonych parametrów opisujemy dane surowe zebrane w wyniku obserwacji próby jakiejś populacji. Jeżeli chcemy uogólnić wyciągnięte wnioski na całą populację, to bardzo ważnym warunkiem jest właściwy dobór próby – istotna jest np. jej liczebność i sposób losowania.

Wyniki badań statystycznych prezentowane np. w gazetach powinny być zaopatrzone w informacje na temat rodzaju próby.



Próba powinna być reprezentatywna dla badanej populacji.
Jeżeli ten warunek jest spełniony, to najczęściej cechy rozkładu wyników próby są również cechami rozkładu całej populacji. Inaczej mówiąc, parametry opisujące próbę są dobrym przybliżeniem parametrów opisujących całą populację.

Pokażemy na koniec przykład sposobu wyboru próby losowej innego niż typowe losowanie ze zbioru wszystkich elementów.

Przykład 10

W liceum, do którego chodzi Matylda, między kilkoma grupami uczniów doszło do konfliktu o muzykę nadawaną w trakcie przerw. Aby problem rozstrzygnąć i wybrać jeden z kilku możliwych wariantów (najprostszy, zaproponowany przez dyrekcję, polegał na wyłączeniu radiowęzła), postanowiono przeprowadzić badanie opinii na ten temat wśród szkolnej społeczności. Matylda otrzymała za zadanie przygotowanie sposobu wybrania reprezentatywnej próby losowej. Przyjęto, że jej liczebność nie powinna przekroczyć 50 osób – taka liczba ankiet wydawała się możliwa do opracowania. Ponadto, ponieważ wystąpiły wyraźne różnice w gustach między różnymi poziomami klas, a nie poszczególnymi klasami, należało wybrać jedną grupę reprezentującą klasy pierwsze, drugą – klasy drugie, trzecią – klasy trzecie, czwartą – klasy czwarte. O uwzględnienie swoich głosów upomniał się też personel szkoły.

Prześledźmy, co kolejno przygotowała Matylda.

Krok 1: Zebrała dane o liczebności poszczególnych grup.

Grupa	klasy 1	klasy 2	klasy 3	klasy 4	personel
Liczebność	180	171	165	150	74

Krok 2: Obliczyła, jaki procent całej szkolnej populacji tworzy każda z grup.

Grupa	klasy 1	klasy 2	klasy 3	klasy 4	personel
Procent	24,3%	23,1%	22,3%	20,3%	10%

Krok 3: Obliczyła, ile osób w takim razie powinna liczyć reprezentacja każdej z grup w ustalonej 50-osobowej próbie losowej.

Grupa	Liczebność	Procent	Reprezentacja
klasy 1	180	24,3%	$24{,}3\% \cdot 50 = 12{,}15$ 12 osób
klasy 2	171	23,1%	$23{,}1\% \cdot 50 = 11{,}55$ 12 osób
klasy 3	165	22,3%	$22{,}3\% \cdot 50 = 11{,}15$ 11 osób
klasy 4	150	20,3%	$20{,}3\% \cdot 50 = 10{,}15$ 10 osób
personel	74	10%	$10\% \cdot 50 = 5$ 5 osób

W skład ankietowej próby powinno zatem wejść 12 uczniów klas pierwszych, 12 – klas drugich, 11 – klas trzecich, 10 – klas czwartych i 5 osób reprezentujących personel szkoły.
Wylosowanie tych grup miało się odbyć tradycyjnie – poprzez wskazanie (losowo!) odpowiedniej liczby numerów z alfabetycznie zapisanych list. Tak wybrana próba nazywana jest **warstwową próbą** losową.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Dane do zadań 9.1–9.3. Wyniki zaokrąglono do jednego miejsca po przecinku.
Według *Małego Rocznika Statystycznego 1938* produkcja światowa włókna bawełny wynosiła (w milionach kwintali):

Rok	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936
Mln q	57,4	56,3	59,7	51,8	57,7	51,3	57,4	68,6

9.1. Wskaż średnią podanego zestawu danych.
A. 57,5 **B.** 57,6 **C.** 57,8 **D.** 56,8

9.2. Wskaż wariancję podanego zestawu danych.
A. 25,6 **B.** 25,0 **C.** 25,1 **D.** 25,2

9.3. Wskaż odchylenie standardowe podanego zestawu danych.
A. 5,3 **B.** 5,0 **C.** 5,1 **D.** 5,2

9.4. Kasia bawi się kostką do gry, rzucając ją wiele razy. Wyniki zapisuje w kolejności rzutów:

2, 6, 4, 5, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 5, 1, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 5, 6, 4, 3, 5, 1, 6, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 1

Narysuj diagram częstości oraz wyznacz medianę tych wyników i ich dominantę.

9.5. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe następujących danych surowych. Wyniki zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

a) Masa (w gramach) losowo wybranych z koszyka jajek kurzych:
41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41
b) Rozmiary damskich ubrań zakupionych w pewnym sklepie:
38, 40, 38, 42, 42, 42, 44, 50, 36, 38, 38, 46, 42, 42, 40, 44, 46, 42, 36, 40, 40
c) Liczby sprzedanych przez kwiaciarkę tulipanów w losowo wybranych dziesięciu dniach: 112, 108, 102, 115, 92, 111, 84, 98, 105, 93

9.6. Pielęgniarka szkolna przeprowadziła wśród uczniów klas pierwszych pomiar masy ciała. Wyniki (w kg) zapisała zgodnie z kolejnością alfabetyczną nazwisk:

48, 49, 47, 48, 51, 54, 52, 47, 49, 53, 50, 48, 49, 51, 48, 50, 49, 51, 47, 47, 52, 51, 51, 50, 49, 48, 47, 54, 47, 50, 48, 49, 49, 50, 51, 48, 50, 48, 48, 56, 50, 52, 51, 53, 49, 54, 55, 48, 49, 50, 51, 52, 48, 49, 51, 52, 49, 53, 53, 55, 54, 49

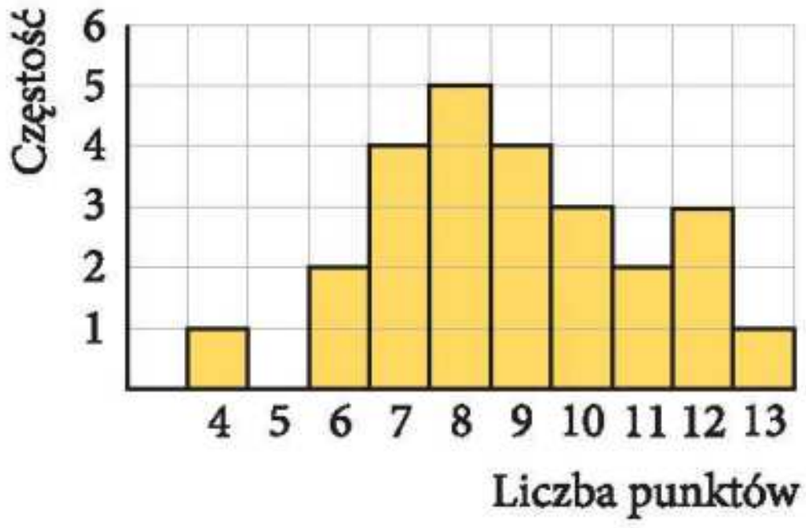
Dla tego zestawu danych

a) wyznacz rozstęp wartości.
b) wyznacz medianę i dominantę.
c) oblicz średnią masę ucznia (wynik zaokrąglij do całości) oraz odchylenie standardowe od średniej (wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku).
d) narysuj diagram rozkładu częstości.

9.7. W tabeli podana jest moc silnika (w KM) wybranych 20 modeli samochodów. Uporządkuj dane niemalejąco, wyznacz ich medianę i dominantę. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe. Wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Marka samochodu	moc [KM]	Marka samochodu	moc [KM]
Citroen Berlingo II	115	Subaru Forester IV	150
Citroen Xsara Picasso	110	Toyota Auris II	132
Fiat Bravo II	90	Toyota Avensis I	128
Fiat Punto IV	77	Toyota Corolla IX	97
Fiat Grande Punto	90	Opel Astra H	100
Alfa Romeo 146	103	Opel Corsa D	75
Ford Focus 95	95	Opel Omega A	125
Ford Fiesta VI	60	Land Rover Discovery IV	190
Ford KA II	75	Suzuki Swift V	136
IV Mazda CX-5	160	Suzuki Alto VII	68

9.8. Diagram przedstawia liczby punktów zdobyte w turnieju przez poszczególnych zawodników. Na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.



a) Ile osób uczestniczyło w zawodach?
b) Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyli zawodnicy?
c) Ile wynosi dominanta liczby punktów?
d) Ilu zawodników zdobyło co najmniej 9 punktów?
e) Ile średnio punktów zdobył w tym turnieju jeden zawodnik?

9.9. Długości ciał noworodków (w cm) wprowadzane do szpitalnego rejestru w takiej kolejności, w jakiej dzieci się rodziły, wynosiły:

54, 57, 59, 58, 59, 56, 54, 58, 57, 52, 50, 53, 53, 55, 54, 57, 55, 57, 49, 53, 54, 62, 56, 58, 55, 60, 50, 53, 53, 56, 56, 53, 58, 54, 54, 53, 57, 53, 55, 54, 53, 54, 58, 58, 52, 53, 53, 56, 57, 58

a) Jaka jest średnia długość ciała noworodka z badanej próby? Wynik zaokrąglij do całości.
b) Wyznacz medianę, dominantę, rozstęp i odchylenie standardowe (zaokrąglone do dwóch miejsc po przecinku) w tym zestawie danych.

9.10. Podaj przykład zestawu czterech danych, których średnia jest równa 10, zaś odchylenie standardowe zaokrąglone do całości wynosi 3.

Prosto do matury

1. Przyjmujemy, że $\overline{x}$ oznacza średnią zestawu danych, σ^2 – wariancję tego zestawu oraz σ – odchylenie standardowe. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Istnieje taki zestaw danych, w którym

A. $\sigma > \sigma^2$. **B.** $\sigma < 0$. **C.** $\overline{x} < 0 < \sigma$.

2. Liczby pacjentów przychodni lekarskiej w wybranych dniach wynosiły: 37, 59, 24, 113, 49, 83, 57, 57, 69, 17. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe tego zestawu danych. Wyniki zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

3. Kolejne miesięczne rachunki za telefon zaokrąglone do pełnych złotych wynosiły: 50, 61, 43, 60, 49, 52, 47, 36, 42, 45, 33, 46. Wyznacz średnią i odchylenie standardowe tych danych (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku).

4. Przeliczono zawartość 100 losowo wybranych pudełek zapałek. Wyniki kontroli przedstawiono w poniższej tabeli.

Liczba zapałek w pudełku	38	39	40	41	42	43	44
Liczba pudełek	3	11	37	18	16	13	2

Wyznacz średnią i odchylenie standardowe liczby zapałek w pudełku (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

5. Wyznacz zestaw czterech danych, tworzących ciąg arytmetyczny, których średnia jest równa 5, zaś odchylenie standardowe zaokrąglone do całości wynosi 2.

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–25 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Jaką liczbę trzeba dopisać do zestawu -3, 0, 7 i 10, aby średnia arytmetyczna wszystkich pięciu liczb była równa 3?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

2. Ile wynosi prawdopodobieństwo znalezienia w 30-osobowej grupie co najmniej dwóch osób urodzonych w tym samym miesiącu?

A. 1 **B.** $\frac{1}{15}$ **C.** $\frac{2^{30}}{30^{30}}$ **D.** Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

3. Rzucamy raz kostką do gry. Które z poniższych zdarzeń jest przeciwne do zdarzenia „wypadły co najwyżej trzy oczka”?

A. Wypadły mniej niż trzy oczka.
B. Wypadły co najmniej cztery oczka.
C. Wypadły więcej niż cztery oczka.
D. Wypadły trzy oczka lub więcej.

4. Czterech panów wybiera losowo (w tym samym czasie, ale w różnych mieszkaniach) jeden z pięciu kanałów telewizyjnych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy wybiorą ten sam kanał?

A. $\frac{1}{125}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{4}{125}$ **D.** $\frac{4^5}{5^4}$

5. Średnia arytmetyczna liczb A i B jest równa k i $A = 6k$. Ile jest równe B?

A. $4k$ **B.** $2k$ **C.** $-3k$ **D.** $-4k$

6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w rzucie dwiema monetami wypadnie (w dowolnej kolejności) orzeł i reszka?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

7. Z klasy, w której stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy $4 : 5$, wylosowano jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to dziewczyna?

A. $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{9}$

8. W urnie znajduje się 7 kul białych i 3 kule czarne. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule są różnego koloru?

A. $\frac{7}{30}$ **B.** $\frac{7}{15}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{10}{21}$

9. W uporządkowanym szeregu: 3, 3, 5, 7, k, k, 15, 16, 16, 19, 20, 21 mediana wynosi 12. Ile jest równe k?

A. 11 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 9

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w rzucie dwiema kostkami wypadną różne liczby oczek?

A. $\frac{11}{12}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{5}{6}$

11. Ula chce zamalować trzy różne kwiatki na obrazku, każdy na inny kolor. W pudełku ma 10 różnych kredek. Na ile sposobów może zamalować kwiatki?

A. 27 **B.** 10 **C.** 10^3 **D.** 720

12. Rzucamy trzy razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzecim rzucie wypadnie szóstka?

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{216}$ **D.** $\frac{6}{125}$

13. Średnia dwóch liczb, z których jedną jest $\sqrt{5}$, wynosi $\sqrt{3}$. Wskaż drugą liczbę.

A. $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{5} - \sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{15}$ **D.** $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

14. Ze zbioru kolejnych liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 555\}$ wybieramy losowo jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba jest podzielna przez 3?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{184}{555}$ **D.** $\frac{1}{3}$

15. Odchylenie standardowe zestawu danych: 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7

A. równa się 1. **B.** równa się 7. **C.** równa się 0. **D.** nie istnieje.

16. Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że przy losowym ustawianiu w kolejkę sześciu osób Ania i Mania będą stały obok siebie?

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

17. Które zdanie dotyczące uporządkowanego szeregu danych:
1, 1, 3, 3, 3, 4, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10 jest prawdziwe?

A. Dominantą w tym zestawie jest liczba 3.
B. Ten zestaw danych ma dwie dominanty.
C. Dominantą w tym zestawie jest liczba 8.
D. Ten zestaw danych ma cztery dominanty.

18. Który zestaw danych ma trzy dominanty?

A. 3 2 3 3 1 1 3 5 6 5 1 5 5 7 7 9 9 7 8 9 8 7
B. 1 2 3 3 1 3 4 4 5 7 7 3 7
C. 2 4 2 7 2 7 2 9 9 2 1 2 2 2 2
D. 9 9 9 9 9 9 9 8 8 8 8 8 6 6 6 6

19. Uparty pan Kajetan co tydzień bierze udział w grze w lotto. Przez 100 kolejnych gier nie wygrał ani razu. Wypełnia więc kupon po raz 101.

I. Szansa na wygraną przez pana Kajetana się zwiększyła.

II. Szansa na kolejną przegraną nie uległa zmianie.

Które spośród zdań I, II są prawdziwe?

A. tylko I **B.** tylko II **C.** żadne **D.** obydwa

20. Ile wynosi mediana w następującym zestawie danych surowych:
6 2 2 5 2 8 2 2 8 5 6 8 8?

A. 5,5 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

21. Średnia punktów z egzaminu czterdziestu studentów jest równa s. Dwudziestu innych studentów otrzymało w sumie 1800 punktów. Ile wynosi średnia wszystkich studentów?

A. $\frac{2}{3}s + 30$ **B.** $\frac{2s + 30}{3}$ **C.** $\frac{40s + 90}{60}$ **D.** $\frac{s + 1800}{60}$

22. W urnie znajduje się n kul białych i $2n$ kul czarnych. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule są różnego koloru, wynosi $\frac{16}{33}$. Ile jest równe n?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

23. Ile jest pięciocyfrowych liczb o różnych, nieparzystych cyfrach?

A. 60 **B.** 5^5 **C.** $4 \cdot 5^4$ **D.** 120

24. Dany jest uporządkowany nierosnąco zestaw liczb naturalnych: 16, 15, a, 13, 12, 11. Mediana tego zestawu jest równa 14. Zatem

A. $a = 12$. **B.** $a = 13$. **C.** $a = 14$. **D.** $a = 15$.

25. Rzucamy trzema monetami dwuzłotowymi. Wygrywamy te monety, na których wypadł orzeł. Wskaż wartość oczekiwaną wygranej.

A. 2 zł **B.** 3 zł **C.** 4 zł **D.** 5 zł

W zadaniach 26–34 oceń prawdziwość podanych zdań.

26. Liczba wszystkich liczb czterocyfrowych utworzonych z cyfr 0, 1, 5

A. jest równa 81. **B.** jest równa 54. **C.** podzielnych przez 4 jest równa 6.

27. Prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach monetą co najmniej raz wypadnie

A. orzeł, wynosi $\frac{1}{16}$. **B.** orzeł, wynosi $\frac{1}{4}$. **C.** reszka, wynosi $\frac{15}{16}$.

28. Zdarzenie polegające na tym, że w tysiącu rzutach monetą ani razu nie wypadnie orzeł, jest zdarzeniem

A. niemożliwym.

B. tak samo prawdopodobnym jak to, że orzeł pojawi się 1000 razy.

C. o prawdopodobieństwie zajścia równym $\frac{1}{2^{1000}}$.

29. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć

A. 6^5 liczb pięciocyfrowych.

B. 6^4 liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5.

C. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach.

30. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek mniejszej od 5, a r – sumy oczek większej od 9. Zatem

A. $p < r$. **B.** $p \geqslant r$. **C.** $p = r$.

31. Rzucamy kostką i monetą. Jeżeli wypadnie reszka i parzysta liczba oczek, wygrywamy 120 zł. W przeciwnym razie przegrywamy 40 zł.

A. Wartość oczekiwana gry jest równa 5.

B. Wartość oczekiwana gry jest równa -2.

C. Gra jest sprawiedliwa.

32. Średnia arytmetyczna zestawu liczb naturalnych: $23,\ x+8,\ 6,\ 14,\ x+15,\ 2$ jest równa 12.

A. Ten zestaw nie ma dominanty.

B. $x = 2$

C. Mediana tego zestawu jest równa 12.

33. Średnia arytmetyczna zestawu liczb naturalnych: $5,\ 21,\ 2x,\ 19,\ 11,\ 7x,\ 31,\ 8x+5$ jest równa $5x$.

A. Ten zestaw nie ma dominanty.

B. Średnia tego zestawu jest równa 20.

C. Mediana tego zestawu jest mniejsza od średniej.

34. Spośród 16 uczniów piszących kartkówkę z języka hiszpańskiego dwie osoby dostały ocenę niedostateczną, dwie – dopuszczającą, trzy – dostateczną, pięć – dobrą, trzy – bardzo dobrą i jedna – ocenę celującą.

A. Wynik ucznia, który dostał piątkę, znajduje się na 94. centylu.

B. W klasie jest uczeń, którego wynik znajduje się na 50. centylu.

C. Najliczniejsza jest grupa uczniów, których wynik znajduje się na 44. centylu.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

35. Na ile sposobów można wybrać dziewczynkę i chłopca z klasy, w której jest 17 dziewczynek i 15 chłopców?

36. Ile liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach jest mniejszych od 50 000?

37. Grupa 5 znajomych wybiera się na wakacje dwoma samochodami. Każdy z nich może wybrać, którym samochodem chce jechać, ale w każdym samochodzie musi jechać co najmniej 1 osoba. Na ile sposobów mogą się podzielić?

38. Na ile sposobów możemy posadzić pięcioro dzieci na sześciu różnokolorowych krzesełkach?

39. Rzucamy kostką ośmiościenną, na której ściankach znajdują się liczby od 1 do 8. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą.

40. Rzucamy dwiema kostkami czworościennymi, na których ściankach znajdują się liczby 1, 3, 5, 7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3.

41. Z talii 52 kart losujemy 2 karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch asów.

42. Rzucamy czterema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech orłów.

43. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwie losowo wybrane osoby urodziły się tego samego dnia tygodnia.

44. Do zestawu danych 5, 6, 6, 8, 12 dopisz taką liczbę x, aby

a) mediana zestawu była równa 7.

b) średnia zestawu była równa 6.

45. Dane są wyniki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

x_i	4,1	5,3	5,8	6	6,4	7
a_i	1	3	5	4	2	1

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

46. Dwie rodziny – czworo dorosłych i pięcioro dzieci – zajmują 9 kolejnych miejsc w jednym rzędzie w kinie. Na ile sposobów mogą to zrobić tak, aby

a) rodzice siedzieli obok siebie oraz dzieci siedziały obok siebie (w dowolnym porządku)?

b) dzieci siedziały obok siebie (w dowolnym porządku)?

c) żadnych dwoje dzieci nie siedziało obok siebie?

47. Ile jest różnych kodów składających się z dwóch liter i dwóch cyfr? Litery i cyfry mogą występować w dowolnej kolejności. Zakładamy, że alfabet składa się z 24 liter.

48. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wypisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
A – wypadną dwie szóstki,
B – na dokładnie jednej kostce wypadnie piątka,
C – suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 2,
D – iloczyn oczek na obu kostkach wynosi 12,
E – na żadnej kostce nie wypadnie jedynka,
F – na każdej kostce wypadnie parzysta liczba oczek.

49. Z pudełka, w którym jest 6 kul białych i 2 kule czarne, losujemy kolejno bez zwracania trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul o tym samym kolorze.

50. Z pudełka, w którym są 2 kule białe i 3 kule czarne, losujemy cztery razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania najpierw kuli czarnej, a potem trzech kul białych.

51. Z pudełka, w którym są 2 kule białe, 3 czarne i 5 kul zielonych, losujemy trzy razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze i trzeciej w innym kolorze.

52. Na biurku Weroniki stoją cztery maskotki – słoń, kot, pies i laleczka Pyza. Weronika losuje dwie spośród nich. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) obydwie maskotki będą zwierzakami.
b) jedną z maskotek będzie Pyza.

53. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 2 lub przez 5.

54. Trzy osoby kolejno rzucają kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie z nich otrzymają taki sam wynik.

55. Z pudełka, w którym jest 7 losów wygrywających i 3 losy puste, wyciągamy trzy losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający.

56. W drodze do pracy pan Marek przejeżdża przez 10 skrzyżowań z sygnalizacją świetlną. Prawdopodobieństwo tego, że na każdym skrzyżowaniu trafi na światło zielone, wynosi 0,04, a prawdopodobieństwo tego, że czerwone światło zatrzyma go co najmniej na dwóch skrzyżowaniach, jest równe 0,77. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pan Marek trafi na czerwone światło na dokładnie jednym skrzyżowaniu?

57. Do gry planszowej dzieci używają sześciennej kostki, na której ściankach napisane są cyfry: 0, 2, 2, 3, 3 i 5. Jeżeli wypadnie liczba oczek różna od zera, pionek porusza się na planszy do przodu o wskazaną przez kostkę liczbę kroków, czyli 2, 3 lub 5. Jeżeli na kostce wypadnie 0, pionek musi się cofnąć o 10 kroków. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kroków w jednym rzucie kostką.

D **58.** Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Jeżeli wypadną dwie szóstki, wygrywamy 50 zł. Jeżeli wypadnie jedna szóstka lub na obu kostkach wypadną takie same (ale różne od 6) liczby oczek, to wygrywamy 10 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 10 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

59. Na jednym z wydziałów pewnej uczelni obowiązuje następujący system obliczania punktów rekrutacyjnych:

- wynik matury z matematyki na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,4,
- wynik matury z geografii na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,3,
- wynik matury z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,2,
- wynik matury z języka polskiego na poziomie podstawowym (w %) z wagą 0,1.

a) Ile punktów rekrutacyjnych uzyskał Szymon, który otrzymał na maturze 92% z matematyki, 73% z geografii, 91% z języka angielskiego i 70% z języka polskiego?

b) Adam uzyskał 69,6 punktów rekrutacyjnych. Na maturze otrzymał 62% z geografii, 83% z języka angielskiego i 56% z języka polskiego. Jaki wynik miał na maturze z matematyki?

60. Podaj taki układ wag w_1 i w_2, aby średnia liczby 32 z wagą w_1 i liczby 27 z wagą w_2 była równa 30 i aby suma wag wynosiła 10.

61. W tabeli przedstawiono średni wynik matury z matematyki na poziomie podstawowym w kraju w latach 2010–2013.

Rok	2010	2011	2012	2013
Wynik (w %)	58	48	56	54

Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych danych.

62. Zbadano masę 20 losowo wybranych paczek herbaty. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba pudełek	2	4	10	3	1
Masa (w gramach)	98	99	100	101	105

Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych danych.

Odpowiedzi

1. Trygonometria

s. 14

1.1. B **1.2.** C **1.3.** B **1.4.** $4\left(\sqrt{3}-1\right)$ **1.5.** a) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ b) $12\sqrt{6}$ c) 0,612 d) 12,37 **1.6.** 30° **1.7.** a) $\gamma = 43°$, $b = 11{,}45$ cm, $c = 7{,}93$ cm b) $\gamma = 57°$, $a = 17{,}57$ cm, $c = 15{,}06$ cm c) $\alpha = 33°$, $a = 13{,}56$ cm, $b = 21{,}56$ cm **1.8.** 190 m **1.9.** $4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ cm i $8\sqrt{6}$ cm **1.10.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135°$, $|AD| = |BC| = 4{,}24$ cm, $|AB| = 10{,}41$ cm, $|CD| = 4{,}42$ cm **1.11.** $|AW| = 1{,}22$ km, $|BW| = 1{,}32$ km **1.12.** a) ok. 20,7 cm b) ok. 5,4 cm **1.13.** $|BC| = 7{,}08$, $|AC| = 8{,}68$ lub $|BC| = 17{,}92$, $|AC| = 21{,}98$ **1.14.** 11,54 cm, 9,13 cm, 50°, 56° **1.15.** 7 **1.16.** $18\sqrt{2}$ cm, $18\sqrt{3}$ cm, $9\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ cm **1.17.** $obw = 2\left(3+2\sqrt{3}\right)$, długość okręgu: $2\pi\sqrt{6}$ **1.19.** 25°, 39°, 116°, 9,0 cm lub 25°, 141°, 14°, 2,4 cm **1.20.** *Wskazówka*: Zapisz kąty trójkąta ABM w zależności od kątów trójkąta ABC i skorzystaj z twierdzenia sinusów dla obu trójkątów. Analogicznie postępuj z trójkątami BMC i ACM. **1.21.** *Wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia sinusów i znajdź zależność między wartościami funkcji tangens dla wymienionych kątów. **1.22.** a) ok.18,5 tys. km b) nie **1.23.** $2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ lub $2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ **1.24.** 30°, 45°, 135°, 150°

s. 16

1. P, F, P **2.** 3,7 **3.** 33° **4.** $\frac{d\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}$, $\frac{d\cdot\sin\beta}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}$ **5.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ oraz z twierdzenia sinusów.

s. 21

2.1. B **2.2.** C **2.3.** C **2.4.** a) $\frac{33}{35}$, $\frac{9}{25}$, $-\frac{1}{35}$ b) $\frac{17}{35}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{11}{15}$ c) $\frac{47}{52}$, $\frac{17}{28}$, $-\frac{19}{91}$ d) $\frac{9\sqrt{2}-4}{16}$, $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$, $\frac{10-3\sqrt{2}}{8}$ **2.5.** 8,36 **2.6.** $|BC| = 6\sqrt{7}$, $\sphericalangle B = 19°$, $\sphericalangle C = 41°$ **2.7.** 5, 37°, 98° **2.8.** a) 53°, 44°, 83° b) 30°, 56°, 94° c) 109°, 26°, 45° d) 46°, 59°, 75° **2.9.** a) rozwartokątny b) prostokątny c) ostrokątny d) ostrokątny **2.10.** 120° **2.11.** $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$ **2.12.** $obw = 7\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm, $R = 7$ cm **2.13.** $|AB| = 10$, $|AC| = 15$ **2.14.** a) $b = 2$, $c = \sqrt{3}+1$, $\gamma = 75°$ b) $a = 3-\sqrt{3}$, $c = 3+\sqrt{3}$, $\alpha = 15°$ c) $a = \sqrt{2}$, $b = 3+\sqrt{3}$, $\beta = 120°$ d) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 105°$ e) $b = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ f) $b = 2$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 30°$ **2.15.** bok: $4\sqrt{7}$ cm, przekątna: $4\sqrt{13}$ cm, kąty: ok. 79° i ok. 101° **2.16.** 45°, 60°, 75° **2.17.** $80\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, $80\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm **2.18.** 6,2 cm **2.19.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$ **2.20.** $7\sqrt{7}$ **2.21.** $\frac{1}{2}\sqrt{407}$, $\frac{1}{2}\sqrt{218}$, $\frac{5}{2}\sqrt{14}$ **2.22.** $3\sqrt{31}$ **2.23.** *Wskazówka*: Oblicz wartości cosinusów badanych kątów, a następnie sprawdź w tablicach przybliżone wartości miar kątów.
2.24. *Wskazówka*: Zastosuj twierdzenie cosinusów i przekształć sumę kwadratów długości przekątnych równoległoboku. **2.25.** *Wskazówka*: Skorzystaj najpierw z twierdzenia sinusów, a potem z twierdzenia cosinusów. **2.26.** $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4}R$ lub $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}R$
2.27. *Wskazówka*: Zastosuj twierdzenie sinusów oraz cosinusów. **2.28.** $\sqrt{12+3\sqrt{3}}$

s. 23

1. P, F, P **2.** $\sphericalangle A = 23°$, $\sphericalangle B = 49°$, $\sphericalangle C = 108°$ **3.** $-\frac{1}{15}$ **4.** $\frac{\sqrt{5}}{3}a$

5. *Wskazówka*: Wyznacz długość środkowej w zależności od długości przyprostokątnej trójkąta i skorzystaj z twierdzenia o środkowych.

s. 30

3.1. B **3.2.** A **3.3.** C **3.4.** $5\frac{5}{7}$, $4\frac{2}{7}$ **3.5.** AB: $2\frac{18}{19}$ i $5\frac{1}{19}$, BC: 2,8 i 4,2, AC: 6,4 i 5,6

3.6. 4 cm **3.7.** $|AB| = 18$, $|AC| = 15$ **3.8.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}a$ **3.9.** a) $3\sqrt{15}$ b) $8\sqrt{30}$ c) $\frac{45}{4}\sqrt{7}$ d) $\frac{3}{4}\sqrt{255}$ **3.10.** $3\frac{1}{4}$ **3.11.** $R = \frac{8}{7}\sqrt{7}$ cm, $r = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ cm **3.12.** 2,50 **3.13.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3.14. $3\pi\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$ **3.15.** $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ **3.16.** $x = \sqrt{17}$ cm, $r = \frac{9 - \sqrt{17}}{4}$ cm lub $x = \sqrt{65}$ cm, $r = \left(9 - \sqrt{65}\right)$ cm **3.17.** $\frac{9\left(3 + \sqrt{5}\right)}{8}$ **3.18.** 4,71 **3.19.** $P = \frac{\sqrt{23}}{2}$ cm^2, $\frac{6\left(7\sqrt{3} + 3\right)}{23}$

3.20. $2\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)$ cm^2 **3.21.** a) $r = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ cm, $R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm b) $\frac{2}{5}$

3.22. $P = \frac{\left(2 + \sqrt{2 - 2\cos\alpha}\right)^2}{\sin\alpha}r^2$ lub $P = \frac{\left(2 + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}\right)^2}{\sin\alpha}r^2$ **3.23.** $|BC| = \sqrt{7} + 1$, $|CD| = \sqrt{7} - 1$

3.24. $3\frac{1}{2}$ **3.25.** $\cos\sphericalangle CBD = \frac{11\sqrt{14}}{42}$ **3.26.** $\frac{25}{6\pi}$ **3.27.** a) $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ b) $a\left(1 + \sqrt{2}\right)$ c) $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ **3.28.** *Wskazówka*: Wyznacz miary kątów trójkąta APB. **3.29.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ i zauważ, że długości boków trójkąta są mniejsze lub równe $\sqrt{2}$.

3.30. $|AB| = 12$. *Wskazówka*: Poprowadź dwusieczną CD kąta BCA. Skorzystaj z podobieństwa trójkątów BAC i BCD. **3.32.** promienie: $4\left(3 - \sqrt{5}\right)$ cm, $2\left(3 - \sqrt{5}\right)$ cm, odległość między środkami: $2\sqrt{10}\left(3 - \sqrt{5}\right)$ cm **3.33.** *Wskazówka*: Rozważ trójkąt AEM i przekątną EB jako dwusieczną kąta w tym trójkącie.

3.34. $R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P}$ lub $R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P}$

s. 33

1. P, F, P **2.** $6\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)$ **3.** 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **4.** $5\sqrt{123 - 18\sqrt{41}}$ **5.** $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}c$, $\left(2 - \sqrt{3}\right)c$, $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}c$

s. 44

4.1. C **4.2.** A **4.3.** D **4.4.** a) $2 \cdot 360° + 246°$ b) $3 \cdot 360° + 303°$ c) $4 \cdot 360° + 351°$ d) $5 \cdot 360° + 118°$ e) $-2 \cdot 360° + 240°$ f) $-3 \cdot 360° + 327°$ **4.5.** A i K, B i I, C i G, D i J, E i L, F i H **4.6.** Merkury o 2°, Jowisz o 864°, Neptun o 480° **4.7.** a) IV b) III c) II **4.10.** a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{3}$ b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$ c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ d) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ e) $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$ f) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{7}{8}$ **4.11.** a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **4.12.** a) 0,9848

b) 0,8192 c) 0,3640 d) 0,8988 e) −0,0872 f) 0,0175 **4.13.** a) $\alpha = 137°$ b) $\alpha = 200°$ c) $\alpha = 276°$ d) $\alpha = 207°$ e) $\alpha = 306°$ f) $\alpha = 194°$ **4.14.** a) $\alpha = 32°$ lub $\alpha = 328°$ b) $\alpha = 246°$ lub $\alpha = 294°$ c) $\alpha = 22°$ lub $\alpha = 202°$ d) $\alpha = 166°$ lub $\alpha = 194°$ e) $\alpha = 37°$ lub $\alpha = 143°$ f) $\alpha = 94°$ lub $\alpha = 274°$ **4.15.** a) 0 b) 0 c) 0 d) $2\sqrt{3} - 3$ **4.16.** a) −3 b) −4 c) 1 d) 2

s. 46

1. F, P, F **2.** $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ **3.** a) $\alpha = 148°$ b) $\alpha = 273°$ **4.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

s. 54

5.1. D **5.2.** C **5.3.** A **5.4.** b) $D = \mathbf{Z}$, $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; wartość najmniejsza: 0 dla $x = 5k$, $k \in \mathbf{Z}$, wartość największa: 4 dla $x = 5k + 4$, $k \in \mathbf{Z}$ **5.5.** $ZW = \langle -2; 4\rangle$; wartość najmniejsza: −2 dla $x = 9k$, $k \in \mathbf{Z}$, wartość największa: 4 dla $x = 9k + 6$, $k \in \mathbf{Z}$; miejsca zerowe: $x = 9k - 1$ lub $x = 9k - 7$, $k \in \mathbf{Z}$; $f(x) > 0$ dla $x \in (9k - 7; 9k - 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, $f(x) < 0$ dla $x \in (9k - 1; 9k + 2)$, $k \in \mathbf{Z}$ **5.6.** miejsca zerowe: $x = 6k + 5$, $k \in \mathbf{Z}$; $f(x) > 0$ dla $x \in (6k - 5; 6k - 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, $f(x) < 0$ dla $x \in (6k - 1; 6k + 1\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $\langle 6k - 2; 6k + 1\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$, stała w każdym z przedziałów $(6k - 5; 6k - 2\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$ **5.9.** a) $\sin\alpha > \cos\alpha$ b) $\sin\delta < \cos\delta$ c) $\sin\beta > \cos\beta$ d) $\sin\varphi < \cos\varphi$ e) $\sin\gamma < \cos\gamma$ f) $\sin\upsilon > \cos\upsilon$ **5.10.** a) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$ d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **5.11.** a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ lub $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ lub $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ lub $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{4}$ lub $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$ **5.12.** a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ lub $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ b) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ lub $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$ c) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$ lub $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ lub $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ **5.13.** a), d), e), f) tak b), c) nie **5.15.** a) α dowolne b), c), d) $\alpha \neq k \cdot 90°$, $k \in \mathbf{Z}$ **5.17.** $\frac{23}{32}$

s. 57

1. F, F, F **2.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8\sqrt{17}}{17}$ lub $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8\sqrt{17}}{17}$ **3.** $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{53}}{53}$, $\cos\alpha = -\frac{7\sqrt{53}}{53}$ **4.** $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbf{Z}$

s. 63

6.1. B **6.2.** C **6.3.** C **6.4.** a) 70° b) 53°35′ c) 150° d) 50°30′ **6.5.** a) $20° = \frac{\pi}{9}$, $15° = \frac{\pi}{12}$, $42° = \frac{7\pi}{30}$, $1° = \frac{\pi}{180}$ b) $630° = \frac{7\pi}{2}$, $100° = \frac{5\pi}{9}$, $300° = \frac{5\pi}{3}$ **6.6.** a) $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\frac{23\pi}{18} = 230°$ b) $\frac{\pi}{9} = 20°$, $\frac{2\pi}{5} = 72°$, $\frac{10\pi}{3} = 600°$ c) $2 = \left(\frac{360}{\pi}\right)°$, $1{,}5 = \left(\frac{270}{\pi}\right)°$, $0{,}7 = \left(\frac{126}{\pi}\right)°$ d) $102 = \left(\frac{18360}{\pi}\right)°$, $1{,}25 = \left(\frac{225}{\pi}\right)°$, $7{,}5 = \left(\frac{1350}{\pi}\right)°$ **6.7.** a) $\frac{33\pi}{4} = 45° + 4 \cdot 360°$,

$\frac{51\pi}{9} = 300° + 2 \cdot 360°$, $\frac{19\pi}{6} = 210° + 360°$ b) $-\frac{35\pi}{9} = 20° - 2 \cdot 360°$, $-\frac{32\pi}{3} = 240° - 6 \cdot 360°$, $-\frac{5\pi}{4} = 135° - 360°$ **6.8.** a) $405° = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, $1020° = \frac{5\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$, $520° = \frac{8\pi}{9} + 2\pi$ b) $-405° = \frac{7\pi}{4} - 2 \cdot 2\pi$, $-30° = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$, $-780° = \frac{5\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi$ **6.9.** $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **6.10.** a) 0 b) 1 c) −8 d) 6 **6.12.** a) $\alpha < \beta$ b) $\alpha < \beta$ c) $\alpha = \beta$ d) $\alpha > \beta$ **6.13.** a) $\alpha < \beta$ b) $\alpha < \beta$ c) $\alpha = \beta$ d) $\alpha < \beta$ **6.14.** α, β, δ **6.15.** a) kolejno: II, IV, I, IV b) kolejno: II, I, II, III **6.16.** a) π b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{13\pi}{36}$ d) $\frac{13\pi}{15}$ **6.17.** $\nu < \varphi < \delta < \gamma < \beta < \alpha$ **6.19.** a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ b) $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$ c) $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **6.20.** 46° **6.21.** a) 46,5 cm b) 36 cm c) $13\frac{1}{3}\pi$ cm d) 25π cm

s. 65

1. F, P, P **2.** $36° = \frac{\pi}{5}$, $200° = \frac{10\pi}{9}$, $280° = \frac{14\pi}{9}$ **3.** $\frac{\pi}{5} - 3 \cdot 2\pi$ **4.** $\sin\frac{16\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{53\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} = \sqrt{3}$

s. 76

7.1. B **7.2.** B **7.3.** C **7.6.** a) $\langle 0; 2\rangle$ b) $\langle -1; 1\rangle$ c) $\langle -1; 1\rangle$ d) $\langle -2; 0\rangle$ **7.7.** np. $f(x) = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + 1$ **7.8.** a) maleje w każdym z przedziałów $\left\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle$, rośnie w każdym z przedziałów $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$ b) maleje w każdym z przedziałów $\left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle$, rośnie w każdym z przedziałów $\left\langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$ **7.9.** a) wartość najmniejsza: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $x = \frac{4\pi}{3}$, wartość największa: 1 dla $x = \frac{\pi}{2}$ b) wartość najmniejsza: −1 dla $x = \frac{3\pi}{2}$, wartość największa: 1 dla $x = \frac{\pi}{2}$ c) wartość najmniejsza: −1 dla $x = \pi$, wartość największa: 0 dla $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ **7.10.** a) wartość najmniejsza: $-\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{\pi}{2}$, wartość największa: $1\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{3\pi}{2}$ b) wartość najmniejsza: 0 dla $x = -\frac{\pi}{4}$, wartość największa: 2 dla $x = \frac{3\pi}{4}$ **7.11.** a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ d) brak miejsc zerowych **7.12.** a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **7.14.** $x \in \left\{-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right\}$ **7.15.** a), b), c), d) dodatni, e), f) ujemny **7.16.** a), c) dodatni, b), d), e), f) ujemny **7.17.** a) $\sin 5 < \sin 3 < \sin\frac{1}{2} < \sin(-4)$ b) $\cos 3 < \cos 2 < \cos(-1) < \cos 6$ **7.19.** nie **7.20.** a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ c) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ d) $x \in \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ **7.21.** a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ e) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ f) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **7.22.** a) $x \approx \frac{14}{45}\pi + 2k\pi$ lub

$x \approx \frac{31}{45}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ b) $x \approx \frac{7}{18}\pi + 2k\pi$ lub $x \approx -\frac{7}{18}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ c) $x \approx \frac{53}{180}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x \approx -\frac{2}{9}\pi + 2k\pi$ lub $x \approx -\frac{7}{9}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ e) $x \approx \frac{121}{180}\pi + 2k\pi$ lub $x \approx -\frac{121}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
f) $x \approx -\frac{17}{36}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **7.23.** a) $x \in \left\langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ b) $x \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$
c) $x \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right)$ d) $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\rangle$
7.24. $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\rangle$ **7.25.** a) $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$ **7.26.** $m \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$

s. 79

1. P, F, P **2.** wartość najmniejsza: $\frac{1}{2}$ dla $x = 2\pi$, wartość największa: $\frac{3}{2}$ dla $x = \frac{3\pi}{2}$ **3.** $x \approx -\frac{\pi}{5}$ lub $x \approx \frac{4\pi}{5}$ lub $x \approx \frac{9\pi}{5}$ **4.** $x \in \left\langle -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\rangle$ **5.** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

s. 86

8.1. D **8.2.** B **8.3.** C **8.4.** $\frac{-3\sqrt{3} - 2\sqrt{10}}{14}$ **8.5.** $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-15 + \sqrt{77}}{24}$,
$\cos(\alpha + \beta) = \frac{-3\sqrt{11} - 5\sqrt{7}}{24}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{27\sqrt{7} - 20\sqrt{11}}{19}$ **8.6.** $\sin(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}$,
$\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{9}$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$ **8.7.** $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{19}{4}$ **8.8.** $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
8.9. $\frac{23}{27}$ **8.10.** $-\frac{24}{7}$ **8.11.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **8.12.** a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) -2
8.13. *Wskazówka*: $\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta)]$ **8.15.** 0, $x \in \mathbf{R}$ **8.16.** 0, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
8.17. a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ **8.18.** *Wskazówka*: Zauważ, że $\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos^2 22{,}5° + \sin^2 22{,}5° = 1$. **8.20.** $\operatorname{tg} 4x$ dla $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}$ **8.21.** *Wskazówka*: Lewą stronę tożsamości pomnóż i podziel przez $\sin 36°$.

s. 88

1. F, F, P **2.** $\frac{\sqrt{21} - 4\sqrt{6}}{25}$ **3.** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ lub $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **4.** *Wskazówka*: Zauważ, że $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$.

s. 95

9.1. C **9.2.** C **9.3.** D **9.4.** a) $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$ b) $x = \frac{2}{3}\pi$ c) $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{7}{6}\pi$
d) $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$ lub $x = 2\pi$ **9.5.** a) $x = -1 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ c) $x = \frac{4}{7}k\pi$ lub $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **9.6.** a) $x = \frac{1}{5}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{5}{8}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ d) $x = 8k\pi$ lub $x = 6\pi + 8k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
9.7. a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$ b) $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$ c) $x \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi\right\}$

d) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$ **9.8.** a) $x \in \langle 3\pi + 6k\pi; 6\pi + 6k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}; \frac{5}{36}\pi + \frac{k\pi}{6}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left\langle -\frac{11}{3}\pi + 8k\pi; -\frac{7}{3}\pi + 8k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

9.9. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ e) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ f) $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

9.10. a) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ d) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ f) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

9.11. a) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi\right\rangle$ b) $x \in \left\langle -2\pi; -\frac{3}{4}\pi\right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi\right\rangle$ c) $x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$ d) $x \in (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$ **9.12.** a) $x = \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi$ lub $x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $x = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = -\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{2}{5}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **9.13.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right\}$ **9.14.** $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, 2\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right\}$

9.15. $x \in \left\{0, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \pi\right\}$ **9.16.** $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$ **9.17.** $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

9.18. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **9.19.** $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \pi\right)$ **9.20.** $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi\right)$

9.21. $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \pi\right)$ **9.22.** *Wskazówka*: Udowodnij tożsamość $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$ i skorzystaj z niej. **9.23.** $x = 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$ lub $x = \frac{5}{2}\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. *Wskazówka*: Przedstaw $\cos x$ jako funkcję argumentu $\frac{x}{2}$. **9.24.** $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. *Wskazówka*: Przedstaw $\cos x$ jako funkcję argumentu $\frac{x}{2}$.

9.25. $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru na cosinus sumy.

9.26. a) $m \in \langle -1; 1\rangle$ b) $m \in \mathbf{R}$ c) $m \in \left\langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right\rangle$ d) $m = 3$

s. 97

1. F, F, F **2.** $x = -\frac{5}{8}\pi$ lub $x = \frac{3}{8}\pi$ lub $x = \frac{11}{8}\pi$ **3.** $x \in \left\langle \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$ **4.** $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **5.** $m \in \langle -3; -1\rangle$

s. 98

1. D **2.** B **3.** B **4.** B **5.** B **6.** C **7.** C **8.** D **9.** C **10.** A **11.** C **12.** D
13. P, P, P **14.** F, P, P **15.** P, P, P **16.** P, P, F **17.** F, F, F **18.** F, F, P **19.** F, F, P
20. P, P, F **21.** P, F, P **22.** P, P, F **23.** F, P, P **24.** F, P, P **25.** F, F, F **26.** F, P, P
27. F, P, F **28.** 15,5 **29.** 76,0 **30.** 60° lub 120° **31.** $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{5}$ **33.** $\sin\alpha = -\frac{13\sqrt{194}}{194}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{194}}{194}$ lub $\sin\alpha = \frac{13\sqrt{194}}{194}$, $\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{194}}{194}$
34. kolejno: III, IV, IV, II, II, I, III, II, III **35.** a) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{12}$ **37.** $\frac{7}{18}$ **38.** $2\sqrt{10}$

39. $|AC| = \sqrt{97}$, $|BD| = \sqrt{273}$ **40.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; wyznacz długości boków trójkąta i zauważ, że nie spełniają nierówności trójkąta. **41.** a) $\sphericalangle CAD = 41°$, $\sphericalangle DAB = 19°$ b) 1 **42.** $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 105°$, $\sphericalangle C = 30°$, $P = 32\pi$ **43.** *Wskazówka*: Wyznacz $\cos\sphericalangle B$ i $\cos\sphericalangle D$. **44.** $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ **45.** *Wskazówka*: $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CKA = 60°$ **46.** $|BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r$, $\cos\sphericalangle CDB = \frac{7\sqrt{89}}{89}$ **47.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru Herona. **48.** a) 120° b) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ c) $\sqrt{6}$ **49.** $\frac{6\sqrt{7}}{5}$, $\frac{9\sqrt{7}}{5}$ **50.** 30°, 60°, 90° **51.** $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ **54.** $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ **55.** $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **56.** $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ **57.** ujemna **58.** $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{12}{5}k\pi$ lub $x = \frac{3}{13}\pi + \frac{12}{13}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **59.** $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 6k\pi;\ \frac{11}{2}\pi + 6k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$ **60.** $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **61.** $x \in \left\langle -\frac{3}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}\pi;\ \frac{11}{4}\pi\right\rangle$ **62.** a) $x \approx -41° + k \cdot 360°$ lub $x \approx 41° + k \cdot 360°$ lub $x = -120° + k \cdot 360°$ lub $x = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}$ b) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **63.** $x = -\frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi$ **64.** $x \in \left\{-\pi, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, 2\pi\right\}$ **65.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$ **66.** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **67.** $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$ **68.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **69.** a) $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi;\ \pi\right)$ b) $x \in \left(\frac{2}{3}\pi;\ \pi\right)$ **70.** $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqslant m \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **71.** a) $x = 0$ lub $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{2}$ b) $p \in (-2;\ 0\rangle$ **72.** b) $ZW = \left\langle -2\frac{1}{3};\ 14\right\rangle$ **73.** $m \in \left\langle 0;\ \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2;\ \infty)$ **74.** $\alpha = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **75.** $\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $\alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

2. Geometria analityczna

s. 110

1.1. C **1.2.** D **1.3.** C **1.4.** P, P, F **1.6.** a) $y = 2x$ b) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$ c) $y = 4$ d) brak równania w postaci kierunkowej e) $y = -3x + \frac{1}{2}$ f) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ **1.7.** a) $a = -5$ b) $a = 1$ c) $a = \frac{3}{4}$ d) $a = \frac{\pi}{2}$ **1.8.** a) $3x - y + 1 = 0$ b) $x - 5y - 15 = 0$ c) $2x + 9y - 6 = 0$ d) $5x + y = 0$ e) $3x - 4y - 20 = 0$ f) $2x + 14y - 7 = 0$ **1.9.** a), b), f) tak c), d) e) nie **1.10.** a) $y = -4x + 11$ b) $y = \frac{1}{3}x + 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ d) $y = x + 1\frac{1}{3}$ **1.11.** a) (0, 2), (4, 0) b) (0, 6), (−2, 0) c) $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ d) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ **1.13.** a) (0, 2) b) (3, −1) c) (1, −4) d) brak punktów wspólnych e) (0, −2) f) proste pokrywają się **1.14.** Szukany zbiór punktów to: a) suma dwóch prostych: $x = 7$ i $y = 0$, b) suma dwóch prostych: $x = -3$ i $y = x$, c) prosta $x = 6$, d) suma dwóch prostych: $x = 1$ i $x = 3$, e) punkt (−5, 2), f) prosta $x = -3$, g) punkt (−7, 1), h) prosta $y = -5$. **1.15.** nie ma osi symetrii, ma środek symetrii **1.16.** $m \in \langle -4;\ 6\rangle$ **1.17.** $m \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2};\ \infty\right)$ **1.18.** a) $m \in \langle -2;\ 1\rangle$ b) $m \in (-\infty;\ -2\rangle$ c) $m \in \langle 1;\ \infty)$ d) Nie ma takiego m. **1.19.** a) $m \in (-3;\ -1)$ b) $m \in (-\infty;\ -5)$ **1.20.** a) $y = 5x - 7$

b) $y = \frac{2}{3}x + 1$ c) $y = -4x + 5$ d) $x = 3$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ f) $y = 2\sqrt{2}x$ **1.21.** a) $y = \frac{1}{3}x + 3$ b) $y = -\frac{1}{7}x - 4$ c) $y = -\sqrt{3}x + 10$ d) $y = 5x - 2$ e) $y = 2\frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1$ **1.22.** a) $(5, 4)$ b) $(-2, 1)$ c) $\left(-2\frac{1}{2}, 1\right)$ d) $\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$ **1.23.** a) $B = (-1, 10)$ b) $B = (1, -3)$ c) $B = (-10, 0)$ d) $B = (5, 8)$ **1.24.** $A = (-1, 2)$, $B = (8, -4)$ **1.25.** $(-1, 3)$, $\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-1\frac{1}{2}, 1\right)$ **1.26.** a) $D = (-3, 3)$ b) $A = (-5, 6)$ **1.27.** $C = (6, 5)$, $D = (-6, 1)$, $4\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$ **1.28.** Są współliniowe.

s. 121

2.1. C **2.2.** A **2.3.** C **2.4.** a) 5 b) $\sqrt{29}$ c) $3\sqrt{10}$ d) 6 **2.5.** a) 8 b) 7 c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ **2.6.** a) 5 b) 10 c) 15 d) 41 **2.7.** a) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ b) $5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$ c) $2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$ d) $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$ **2.8.** a) 18 b) $32 + \sqrt{10}$ c) $10\sqrt{2}$ d) $14 + \sqrt{10}$ **2.9.** a) $P = 10$ b) $P = 17$ c) $P = 17$ d) $P = 25$ **2.10.** a) $10\left(2 + \sqrt{2}\right)$ b) $4\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3\right)$ c) $10 + \sqrt{2}$ d) $15 + \sqrt{29}$ **2.11.** a) $P = 10\frac{1}{2}$ b) $P = 8$ c) $P = 12$ **2.12.** $5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}$ **2.13.** boki: $2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}$, przekątne: $4\sqrt{2}, 8\sqrt{2}$ **2.14.** a) $S = (2, -1)$ b) $S = (3, -1)$ **2.15.** $A = (-5, -1)$ **2.16.** a) środkowa z A: $\sqrt{82}$, środkowa z B: $\sqrt{58}$, środkowa z C: 10 b) środkowa z A: $\frac{\sqrt{85}}{2}$, środkowa z B: 2, środkowa z C: $\frac{\sqrt{85}}{2}$ c) środkowa z A: $\frac{\sqrt{53}}{2}$, środkowa z B: $\frac{\sqrt{41}}{2}$, środkowa z C: $\sqrt{2}$ d) środkowa z A: $\frac{\sqrt{61}}{2}$, środkowa z B: $\sqrt{13}$, środkowa z C: $\frac{1}{2}$ **2.19.** $A = (-4, -7)$, $C = (1, 10)$

s. 123

1. F, P, P **2.** $4\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ **3.** $obw = 10\sqrt{2} + 14$, $|BD| = 13$, $|AC| = \sqrt{29}$ **4.** $P = 15$ **5.** środkowa z A: $y = 3$, środkowa z B: $y = -x + 5$, środkowa z C: $x = 2$

s. 133

3.1. C **3.2.** B **3.3.** C **3.4.** a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = -x$ c) $y = \sqrt{3}x$ d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ **3.5.** a) 31° b) 111° c) 84° d) 94° e) 3° f) 174° **3.6.** a) $y = x + 14$ b) $y = \sqrt{3}x + 1 - 5\sqrt{3}$ c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}$ d) $y = -\sqrt{3}x + 5$ e) $y = -2$ f) $y = -x - 7$ **3.7.** a) $9x - 2y - 6 = 0$ b) $2x + 3y - 5 = 0$ c) $7x + y - 35 = 0$ d) $6x - 5y - 3 = 0$ e) $x + 11y - 10\sqrt{2} = 0$ f) $5x + \sqrt{3}y - 7 = 0$ **3.8.** a) $l \parallel k$, $p \nparallel k$ b) $l \nparallel k$, $p \parallel k$ c) $l \parallel k$, $p \parallel k$ d) $l \nparallel k$, $p \nparallel k$ **3.9.** $|AB| = |CD| = 6$, $|AD| = |BC| = \sqrt{13}$, $|AC| = \sqrt{73}$, $|BD| = 5$ **3.10.** a) l: $3x - 8y - 10 = 0$ b) l: $11x - 5y - 14 = 0$ c) l: $3x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ d) l: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$ e) l: $x + 3y + 3 = 0$ f) l: $7x - 4y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$ **3.11.** punkt A: 2, punkt B: $1\frac{1}{5}$, punkt C: 0 **3.12.** punkt A: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, punkt B: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$, punkt C: 0 **3.13.** $2\sqrt{2}$ **3.14.** 3 **3.15.** a) $P = 25$ b) $P = 16{,}5$ **3.16.** $(6, -1)$, $(0, 7)$, $(2, 1)$, $P = 10$ **3.17.** a) $obw = \sqrt{13}\left(4 + \sqrt{2}\right)$, $P = 19{,}5$ b) $obw = 16\sqrt{2}$, $P = 24$ c) $obw = 4\sqrt{13}$, $P = 13$ d) $obw = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$, $P = 30$ **3.18.** $C = (2, 3)$, $|AB| = \sqrt{130}$, $|BC| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = 3\sqrt{10}$ **3.19.** a) 2 b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ **3.20.** a) $y = -x + 2$

b) $y = 4x - 15$ c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$ d) $y = \frac{8}{5}x + \frac{51}{10}$ **3.21.** $y = 3x + 1$ **3.22.** $C = (4, 9)$ **3.23.** $P = 67{,}5$ **3.24.** $C = \left(4\sqrt{3} - 4,\ 12 - 4\sqrt{3}\right)$. *Wskazówka*: Wyznacz najpierw równania boków AC i BC. **3.25.** a) $(2, 1)$, $(6, -1)$, $(0, 7)$ b) $\left(3 - \sqrt{2}\right)x + \left(1 - 2\sqrt{2}\right)y - 7 + 4\sqrt{2} = 0$, $\left(4 + \sqrt{5}\right)x + \left(3 + 2\sqrt{5}\right)y - 21 - 4\sqrt{5} = 0$, $\left(15 + 4\sqrt{10}\right)x + \left(5 + 3\sqrt{10}\right)y - 35 - 21\sqrt{10} = 0$

s. 136

1. F, P, P **2.** $x - y - 3 = 0$ **3.** $P = 10\frac{1}{8}$ **4.** $B = (-10, 22)$, $C = (8, 4)$ **5.** $x - 3y + 12 = 0$, $3x + y - 4 = 0$

s. 144

4.1. A **4.2.** A **4.3.** B **4.4.** a) $x^2 + y^2 = 121$ b) $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 1$ c) $x^2 + (y-5)^2 = 18$ d) $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 25$ **4.5.** a) punkt $(-2, 5)$ b) okrąg o środku $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$ **4.6.** a) $S = (-3, -11)$, $r = \sqrt{5}$ b) $S = (0, 0)$, $r = 14$ **4.7.** a) A – tak, B – nie b) A – nie, B – tak **4.8.** $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ **4.9.** a) zbiór pusty b) okrąg o środku $S = (-2, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{3}$ **4.10.** a) $S = (1, -2)$, $r = 3$ b) $S = (3, -5)$, $r = 2$ c) $S = (-1, 2)$, $r = 5$ d) $S = (-4, -8)$, $r = 1$ **4.11.** a) $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 10x + 18y + 101 = 0$ **4.12.** a) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$ b) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 4$ **4.13.** np. $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$ (są cztery takie okręgi) **4.14.** $x^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $x^2 + (y+3)^2 = 9$ **4.15.** a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ b) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ **4.16.** $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ lub $(x-29)^2 + (y-29)^2 = 841$ **4.17.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ **4.18.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ **4.19.** a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ b) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ **4.20.** $(x+2)^2 + y^2 = 25$ **4.21.** $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ **4.23.** $x^2 + (y+1)^2 = 25$ **4.24.** $m = 4$ **4.25.** $m < 13$, $S = (3, -2)$, $r = \sqrt{13 - m}$

s. 146

1. P, P, P **2.** $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 25$ **3.** $(x+2)^2 + y^2 = 4$ **4.** $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ **5.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$

s. 156

5.1. B **5.2.** C **5.3.** B **5.4.** P, P, F **5.5.** a) Prosta przecina okrąg w punktach $(-1, -2)$ i $(3, 2)$. b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem. **5.6.** a) $(-2, -1)$, $(2, 3)$ b) $(1, 7)$, $(4, 4)$ **5.7.** a) $(5, -4)$, $(5, 4)$ b) brak punktów wspólnych **5.8.** $2\sqrt{5}$ **5.9.** $(2, 4)$, $(4, 0)$ **5.10.** $P = 16$, $obw = 8\left(1 + \sqrt{2}\right)$ **5.11.** $C = \left(1 - \sqrt{5},\ 2 - \sqrt{5}\right)$ lub $C = \left(1 + \sqrt{5},\ 2 + \sqrt{5}\right)$ **5.12.** $(1, 0)$, $(2, 5)$, $(7, 4)$, $(6, -1)$, $P = 26$ **5.13.** $\left(1 - \sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$, $\left(1 + 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$, $\left(1 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ **5.14.** a), b) odcinek **5.15.** $x + 5y - 15 = 0$ **5.16.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 7{,}2$ **5.17.** $y = -x + 6$, $y = -x - 6$ **5.18.** $y = -x + 3$, $y = -x - 9$ **5.19.** $y = -x + 2 - 2\sqrt{5}$, $y = -x + 2 + 2\sqrt{5}$ **5.20.** $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$, l: $y = -2x + 5$ **5.23.** $\sqrt{10}$ **5.24.** $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 49$, punkty: $\left(7 - 2\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(7 + 2\sqrt{6}, 0\right)$ lub $(x+7)^2 + (y-5)^2 = 49$, punkty: $\left(-7 - 2\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(-7 + 2\sqrt{6}, 0\right)$ **5.25.** a) 0 b) 1 c) 2 d) 1 **5.26.** a) styczne wewnętrznie b) rozłączne zewnętrznie c) styczne zewnętrznie d) przecinają się **5.27.** a) $(-4, 2)$, $(2, -2)$ b) $(-5, -3)$, $(3, -1)$ c) $(2, 1)$ d) $(-2, 2)$, $(6, -6)$ e) brak punktów wspólnych f) $(0, 0)$, $(8, 2)$ **5.28.** dla $m = 12$: $(x-12)^2 + (y-2)^2 = 25$, dla $m = 2$:

$(x-2)^2+(y-2)^2=25$, dla $m=0$: $x^2+(y-2)^2=25$, dla $m=-10$: $(x+10)^2+(y-2)^2=25$

5.29. a) $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

s. 159

1. F, P, F **2.** $4\sqrt{2}$ **3.** $x=7$, $x=9$ **4.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4\frac{1}{2}$ **5.** (2, −3), (8, −1)

s. 167

6.1. B **6.2.** A **6.3.** B **6.4.** równoległobok **6.5.** Tak, każdy punkt prostej jest jej środkiem symetrii. **6.6.** a) nie b) nie c) Tak, tylko wtedy, gdy środkowa prosta jest jednakowo oddalona od dwóch pozostałych prostych. d) tak **6.7.** a), b) trzy **6.8.** trójkątem równoramiennym prostokątnym, w którym $\sphericalangle A=90°$ **6.10.** a) dwie b) trzy **6.11.** a) (−1, 2) b) (0, 3) c) (4, 3) d) (1, 4) **6.12.** $A'=(5,-4)$, $B'=(-7,2)$, $C'=\left(\sqrt{3},5\right)$, $D'=\left(6,-\sqrt{5}\right)$ **6.13.** $A'=(6,2)$, $B'=(1,4)$, $C'=(4,-2)$ **6.14.** a) $y=3x+4$ b) $y=\sqrt{2}x-11$ c) $y=-0{,}3x+\sqrt{7}$ d) $x+15=0$ e) $8x-3y-5=0$ f) $9x+\sqrt{11}y+3\sqrt{2}=0$ **6.15.** (2, 2), (−1, −7), (−8, −2) **6.16.** $(x+4)^2+(y-6)^2=9$ **6.17.** a) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ b) $x^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=1$ c) $(x-4)^2+(y-2)^2=2$ d) $(x+7)^2+(y-8)^2=45$ **6.18.** a) $\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y-2)^2=\sqrt{2}$ b) $x^2+y^2+10x+10y+43=0$ c) $(x-11)^2+(y-0{,}1)^2=9$ d) $x^2+y^2+16x-8y+78=0$ **6.19.** a) K: $\left(x+\sqrt{7}\right)^2+(y+7)^2=3$ b) K: $x^2+y^2-2x+22y+120=0$ c) K: $(x+3)^2+(y-0{,}2)^2=13$ d) K: $x^2+y^2-16x-34y+348=0$ **6.20.** (−2, 1) **6.21.** $(x+1)^2+(y+2)^2=16$ **6.22.** a) (−4, 7) b) (−2, −4) **6.23.** a) $x+y+2=0$ b) $2x-y-9=0$

s. 170

1. F, F, F **2.** $2x-4y-5=0$ **3.** (0, −1) **4.** k: $x-y+1=0$ **5.** $A_1=(5,-2)$, $B=(-2,-3)$, $P=38$

s. 176

7.1. D **7.2.** B **7.3.** C **7.4.** a) jedną lub dwie b) jedną, dwie lub nieskończenie wiele c) dwie lub nieskończenie wiele **7.5.** a) prosta zawierająca wspólny bok, prosta przechodząca przez wierzchołki trójkątów nienależące do wspólnego boku b) prosta prostopadła do danej prostej, przechodząca przez dany punkt c) prosta przechodząca przez środki obu okręgów **7.7.** Figura $\{A, B, C, D\}$ ma dwie osie symetrii, gdy punkty A, B, C i D są wierzchołkami rombu lub prostokąta. **7.8.** a) nieskończenie wiele b) dwie **7.10.** na przecięciu symetralnej odcinka łączącego kran z ogniskiem oraz dwusiecznej kąta między lasem a jeziorem **7.11.** a) szesnaście b) jedenaście **7.12.** *Wskazówka*: Kąt padania jest równy kątowi odbicia. **7.13.** a) $(x-9)^2+(y-11)^2=1$ b) $\left(x-1+\sqrt{2}\right)^2+y^2=8$ c) $x^2+\left(y+2+\sqrt{5}\right)^2=7$ d) $x^2+\left(y-1+3\sqrt{6}\right)^2=9$ **7.14.** a) $(x-3)^2+(y-13)^2=12$ b) $x^2+\left(y-7+\sqrt{11}\right)^2=6$ c) $\left(x-5+\sqrt{3}\right)^2+y^2=18$ d) $(x-0{,}4)^2+\left(y-1-2\sqrt{7}\right)^2=16$ **7.15.** a) K: $(x+3)^2+(y-17)^2=10$ b) K: $(x+13)^2+(y+10)^2=15$ c) K: $(x+14)^2+(y+16)^2=17$ **7.16.** P, F, F **7.17.** $P=42$ **7.18.** b) $y=-x+5$ **7.19.** a) $A=(4,-5)$, $B=(2,3)$ b) $A_1=(-4,-5)$, $B_1=(-2,3)$ c) $P=48$ **7.20.** $(x-3)^2+y^2=50$ **7.21.** $M=(-2,8)$

s. 179

1. F, F, P **2.** $A_1 = (-4, -3)$, $B_1 = (1, 2)$, $P = 20$ **3.** $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 6)$, $(-2, 2)$, $P = 12$
4. $P = 6\sqrt{7}$ **5.** $A' = (4, 2)$, $B' = (-3, 9)$, $C' = (8, 10)$

s. 180

1. C **2.** D **3.** B **4.** A **5.** C **6.** B **7.** D **8.** D **9.** B **10.** C **11.** A **12.** C
13. A **14.** D **15.** C **16.** C **17.** B **18.** C **19.** A **20.** B **21.** B **22.** F, F, P
23. P, F, P **24.** F, P, F **25.** P, P, P **26.** F, F, F **27.** P, F, P **28.** P, F, P **29.** P, F, P
30. P, P, P **31.** F, P, P **32.** F, P, P **33.** F, F, F **34.** F, F, F **35.** P, P, F **36.** P, F, P
37. P, F, F **38.** P, P, P **39.** a) $2\sqrt{26}$ b) 4 c) 8,5 d) $3\sqrt{11}$ **40.** a) $5\sqrt{2}$ b) 4 c) $\sqrt{13}$
d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **41.** a) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 26$ b) $(x-4)^2 + y^2 = 61$ c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y+3)^2 = 11\frac{1}{9}$
d) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 24$ **42.** a) Prosta jest styczna do okręgu. b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem. c) Prosta przecina okrąg w dwóch punktach. d) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem. **43.** a) przecinające się b) styczne zewnętrznie c) rozłączne zewnętrznie d) styczne wewnętrznie **44.** a) przecinające się b) styczne wewnętrznie c) współśrodkowe d) rozłączne zewnętrznie **45.** $m < 0$ **46.** prostokątem o polu 42 **47.** $m \in \langle -8; 5 \rangle$
48. $|QR| = 4\sqrt{13}$ **49.** $y = \frac{1}{3}x + 1$ **50.** $k'\colon y = 3x + 7$ **51.** (6, 9), (6, 0), (0, 3),
$obw = 6\left(2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ **52.** $C = (-2, 7)$ **53.** $D = (2, 2)$ **54.** a) $A = (-3, 2)$, $B = (6, 5)$,
$C = (0, 8)$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ c) $y = 5$ **55.** $B = (10, -7)$ **56.** $C = (4, 5)$, $P = 30$
57. $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$ **58.** $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 50$ **59.** $B = (2, 0)$, $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 18$
60. $y = -3x + 11 - 3\sqrt{10}$, $y = -3x + 11 + 3\sqrt{10}$ **61.** $k\colon y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **62.** $P = 12{,}5$
63. $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 45$ **64.** $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 18$ **65.** $y = -x + 2$, $y = -x + 14$
66. $C = \left(1 - \sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}\right)$ lub $C = \left(1 + \sqrt{2}, 3 - 3\sqrt{2}\right)$ **67.** $y = 3x + 1$ **68.** a) $obw = 5 + 9\sqrt{5}$
b) $P = 35$ c) $|AC| = \sqrt{65}$, $|BD| = 10$ **69.** $P = 45$ **71.** $y = 2x - 6$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $y = -3x + 14$,
$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ **72.** $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ **73.** a) $y = -2x + 6$ b) $P = 50$ **74.** $\sqrt{2}$
75. $A = (3, -3)$, $B = (1, 1)$, $C = (-7, -3)$, $D = (-5, -7)$, $P = 40$ **76.** $x^2 + y^2 + 6x - 20y + 29 = 0$
77. $y = 2x - 5$, $y = \frac{1}{2}x - 5$ **78.** $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 8$ lub $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 32$
79. $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 2x - \frac{5}{2}$ **80.** $C = (5, 0)$, $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 45$
81. $\left(5 - 2\sqrt{3}, -3 - 4\sqrt{3}\right)$, $\left(5 + 2\sqrt{3}, -3 + 4\sqrt{3}\right)$

3. Ciągi

s. 199

1.1. C **1.2.** C **1.3.** B **1.4.** P, F, F **1.5.** a) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$ b) $b_1 = 3$, $b_2 = 9$,
$b_3 = 27$ c) $c_1 = 1$, $c_2 = 27$, $c_3 = 125$ d) $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 27$ e) $e_1 = 1$, $e_2 = 2\frac{1}{3}$, $e_3 = 3$
f) $f_1 = 5$, $f_2 = 2$, $f_3 = -3$ g) $g_1 = 2\sqrt{2}$, $g_2 = \sqrt{10}$, $g_3 = 2\sqrt{3}$ h) $h_1 = 2$, $h_2 = 3$, $h_3 = 4$ i) $i_1 = 2$,
$i_2 = 2$, $i_3 = 2$ **1.6.** a) $a_9 = 162$, $a_{11} = 242$, $a_{k+1} = 2(k+1)^2$, $a_{3m} = 18m^2$, $a_{m+k} = 2(m+k)^2$

b) $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{11} = \frac{1}{11}$, $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$, $a_{3m} = \frac{1}{3m}$, $a_{m+k} = \frac{1}{m+k}$ c) $a_9 = -\frac{1}{9}$, $a_{11} = -\frac{1}{11}$, $a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$, $a_{3m} = \frac{(-1)^{3m}}{3m}$, $a_{m+k} = \frac{(-1)^{m+k}}{m+k}$ d) $a_9 = \frac{33}{14}$, $a_{11} = \frac{41}{16}$, $a_{k+1} = \frac{4k+1}{k+6}$, $a_{3m} = \frac{12m-3}{3m+5}$, $a_{m+k} = \frac{4m+4k-3}{m+k+5}$ **1.7.** a) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $a_4 = 4$, $a_5 = -8$ b) $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 14$, $a_4 = 30$, $a_5 = 55$ c) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{11}{6}$, $a_4 = \frac{25}{12}$, $a_5 = \frac{137}{60}$ d) $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, $a_3 = 6$, $a_4 = -10$, $a_5 = 15$ **1.8.** $c_{100} = 1$, $d_{100} = 1$ **1.9.** a) trzy b) trzynaście c) czternaście d) jeden e) pięć f) pięć g) dwanaście h) $k-1$ i) $k-1$ **1.10.** a) $a_n + a_{n+1}$ b) $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ c) $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ d) $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ e) $\frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{5}$ f) $a_{k-2} + a_{k-1} + a_k$ g) $a_{n-k+1} \cdot a_{n-k+2} \cdot a_{n-k+3}$ **1.11.** a) a_{n+k}, a_{n+k+1}, a_{n+k+2} b) a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3} c) $a_{3(n+7)+1}$, $a_{3(n+7)+2}$, $a_{3(n+7)+3}$ d) $a_{5(n-2)+1}$, $a_{5(n-2)+2}$, $a_{5(n-2)+3}$ **1.12.** a) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 17$ b) $b_1 = 5$, $b_2 = \frac{1}{5}$, $b_3 = 5$, $b_4 = \frac{1}{5}$, $b_5 = 5$ c) $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 5$, $c_4 = 11$, $c_5 = 89$ d) $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2$, $d_5 = 2$ **1.13.** a) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$, $a_6 = 21$ b) $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_3 = 4$, $b_4 = -1$, $b_5 = -5$, $b_6 = -4$ c) $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, $c_3 = 10$, $c_4 = 50$, $c_5 = 500$, $c_6 = 25\,000$ d) $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = \frac{5}{3}$, $d_4 = \frac{1}{3}$, $d_5 = \frac{1}{5}$, $d_6 = \frac{3}{5}$ **1.16.** 3 **1.17.** 0 **1.20.** a), b) rosnący c) malejący d), e), f) niemonotoniczny **1.21.** d) *Wskazówka*: Rozważ np. wyrazy a_9, a_{10} i a_{11}. **1.22.** a) brak miejsc zerowych b) $n = 5$ lub $n = 6$ c) $n = 4$ d) $n = 2$ **1.23.** $n = 5$ lub $n = 6$. *Wskazówka*: Zbadaj najpierw monotoniczność ciągu. **1.24.** a) a_7 b) a_5 c) a_9 d) a_3 e) a_{13} f) a_3 **1.25.** Nie. *Wskazówka*: Liczba przekątnych n-kąta wypukłego ($n \geqslant 3$) jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$. **1.26.** a) dwa b) nieskończenie wiele c) osiem d) trzysta trzydzieści dziewięć **1.27.** a) $a_1 = 1$ b) $a_1 = 10$ c) brak największego wyrazu d) $a_1 = \frac{1}{3}$ **1.28.** a) największy: $a_{10} = 102{,}4$, najmniejszy: $a_1 = a_2 = 2$ b) największy: $a_1 = 1$, najmniejszy: $a_{100} = \frac{1}{100}$ c) największy: $a_9 = 54$, najmniejszy: $a_1 = a_2 = -2$ d) największy: $a_5 = 1$, najmniejszy: $a_{20} = -224$ **1.29.** najmniejszy wyraz: 1, brak największego wyrazu; nie jest monotoniczny **1.31.** (a_n) – rosnący, (b_n) – malejący a) $c_n = 2$, stały b) $c_n = 4 - \frac{2}{n}$, rosnący c) $c_n = \frac{1-n}{3n-1}$, malejący d) $c_n = -3 + \frac{4n-1}{n^2}$, malejący **1.32.** a), b), c), d) rosnący **1.33.** a), b) rosnący c) malejący

s. 203

1. P, F, P **2.** $a_3 = \frac{3}{4}$ **3.** siedem **4.** $a_4 = \frac{27}{23}$ **5.** $c_n = 4$

s. 211

2.1. B **2.2.** C **2.3.** B **2.4.** $(a_n), (c_n)$ **2.5.** $(a_n), (d_n)$ **2.6.** a) 9, 13, 17 b) −8, −13, −18 c) $1, -\frac{1}{2}, -2$ d) 7, 7, 7 **2.7.** a) 7, 11, 13 b) 1, 2, 3 c) 3,1; 3,6; 4,6 d) −3, −1, 1 **2.8.** a) $a_{25} = -42$ b) $a_{11} = 17\frac{1}{3}$ c) $a_8 = 7\sqrt{2} - 5$ d) $a_5 = 6\frac{1}{2}$ e) $a_{11} = 1{,}4$ f) $a_6 = 6\sqrt{5}$ **2.9.** a) jedenaście b) dziewiętnaście c) czternaście d) osiem **2.10.** a) tak b) nie **2.11.** a) np. $\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+2, \sqrt{2}+3, \ldots$ b) np. 5, 11, 17, 23 **2.12.** 40 **2.13.** pierwszy wyraz: 11, różnica: −4 **2.14.** pierwszy wyraz: 2, różnica: 3 lub pierwszy wyraz: −16, różnica: 6 **2.15.** 30 **2.16.** 32 **2.17.** sześć **2.18.** $a_1 = -5$, $r = 3$ **2.19.** 930 minut (15,5 godziny) **2.20.** nie

2.21. a) tak b) nie **2.22.** $x = 28$ **2.23.** $x = 0{,}4$ lub $x = 2$ **2.24.** a) 150 b) 1500 zł c) w siódmym **2.26.** a) 12, 16, 20 b) 9, 12, 15 **2.27.** a) $y = -3x + 4$ b) $y = 3x - 5$ **2.28.** tak **2.29.** a) tak b) tak c) może być (np. gdy jeden z ciągów jest stały), ale nie musi **2.30.** a) tak b) tak c) nie d) tak **2.31.** $r = k + m$. *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzorów na wyrazy a_k i a_m ciągu arytmetycznego. **2.32.** $r = -1$, $a_p = m + k - p$ **2.33.** 0 **2.34.** Jest pięć takich ciągów o różnicach odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 6. *Wskazówka*: Różnica szukanego ciągu jest dzielnikiem liczby $17 - 5$. **2.35.** a) tak b) nie **2.36.** $-\frac{3}{2}$ **2.37.** $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$ **2.38.** $m = -3$ lub $m = -\frac{1}{3}$ lub $m = 3$ lub $m = \frac{1}{3}$ **2.39.** *Wskazówka*: Zastosuj wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

s. 215

1. P, F, P **2.** 22 **3.** $x = 111$ **4.** sześć (zob. wskazówkę do zadania 2.34) **5.** Różnica nie musi być liczbą niewymierną, iloraz może być liczbą wymierną. Przykład: ciąg stały $a_n = \sqrt{2}$ (różnica $r = 0$, iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$).

s. 220

3.1. C **3.2.** C **3.3.** D **3.4.** P, F, P **3.5.** a) $S_8 = 80$ b) $S_{20} = 370$ c) $S_{17} = 782$ d) $S_{100} = 435$ e) $S_7 = 203$ f) $S_5 = 25\sqrt{2}$ **3.6.** a) 3240 b) 5202 c) -180 d) $253\sqrt{3}$ **3.7.** 1460 **3.8.** a) 1375 b) 672 **3.9.** a) 494 550 b) 594 c) 1188 **3.10.** 55 **3.11.** 55 **3.12.** 1092 **3.13.** a) $n = 11$ b) $n = 13$ c) $n = 6$ d) $n = 8$ **3.14.** 819 **3.15.** $a_1 = -5, r = 2$ **3.16.** a) $x = -1$ b) $x = -1$ c) $x = 41$ d) $x = 3$ e) $x = 40$ **3.17.** a) tak, $n = 18$ b) nie **3.18.** dwanaście **3.19.** 36, 34, 32, 30, 28; suma: 224 **3.20.** osiemnaście **3.21.** -2, 1, 4 lub 4, 1, -2 **3.22.** $a_1 = 3$, $n = 6$ **3.23.** 26, 22, 18, 14, 10 **3.24.** po 16 dniach **3.25.** nie **3.26.** tak, po 11 dniach **3.27.** 140 patyczków, 18 domków **3.28.** po 21 dniach roboczych i 3 niedzielach, czyli po 24 dniach **3.29.** a) $a_n = -38$, $S_n = -155$ b) $a_1 = -3$, $S_n = 84$ c) $a_1 = -11$, $r = 3$ d) $n = 115$, $S_n = 25\,645$ e) $n = 10$, $a_n = -16$ **3.31.** a) $3, 4 - \sqrt{3}, 5 - 2\sqrt{3}$; $S_5 = 15$ b) $4 + \sqrt{2}, 6, 8 - \sqrt{2}$; $S_5 = 5\left(4 + \sqrt{2}\right)$ c) $1, 2 - \sqrt{5}, 3 - 2\sqrt{5}$; $S_5 = 5$ d) $\sqrt{3}, 1, 2 - \sqrt{3}$; $S_5 = 5\sqrt{3}$ **3.32.** $-500\,500$. *Wskazówka*: Zastosuj wzór na różnicę kwadratów. **3.33.** *Wskazówka*: Zapisz wzory na S_n i S_{2n}. Z otrzymanego układu równań wyznacz r i a_1 w zależności od n, a otrzymane wartości wstaw do wzoru na S_{3n}. **3.34.** $\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$ **3.35.** $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

s. 224

1. P, P, P **2.** 45 **3.** $x = 4$ **4.** A: 8 rat, 980 zł, B: 12 rat, 700 zł **5.** $a_1 = 4, r = 2$. *Wskazówka*: Wykorzystaj zależności $S_1 = a_1$, $S_n - S_{n-1} = a_n$ dla $n \geqslant 2$.

s. 231

4.1. B **4.2.** A **4.3.** B **4.4.** P, F, P **4.5.** $(b_n), (d_n)$ **4.6.** a) 18, 54, 162 b) $\sqrt{5}, 1, \frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ d) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ **4.7.** a) 8, 64 b) $4\frac{1}{2}, 40\frac{1}{2}$ c) $2\sqrt{5}, 8\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{7}, 49$ **4.8.** a) $a_6 = -4$ b) $a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $a_3 = -1$ d) $a_6 = 2000$ **4.9.** a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_n = 2^{2-n}$ lub $a_n = (-2)^{2-n}$ c) $a_n = 3^{n-2}$ lub $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-2}$ d) $a_n = -2^{3-n}$ lub $a_n = (-2)^{3-n}$ **4.10.** a) nie b), c), d) tak **4.11.** $q = 1 - \sqrt{2}$ **4.12.** a) $x = 5\sqrt{15}$ b) $x = 6$ c) $x = 2$

4.13. a) $x = -9$ lub $x = 9$ b) $x = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{12}$ c) $x = -3$ lub $x = 3$ **4.14.** $a = -54$, $b = -36$, $c = -24$ **4.15.** $x = 64$, $y = 256$ **4.16.** $a_1 = \frac{3}{2}$, $q = 2$ lub $a_1 = \frac{3}{2}$, $q = -2$ **4.17.** 5 **4.18.** 26 liczb trzycyfrowych, 20 liczb czterocyfrowych, 18 liczb n-cyfrowych dla $n > 4$ **4.19.** ok. 107 km **4.20.** po trzech latach **4.21.** (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. **4.22.** a), b), d) tak c) nie, jeśli (b_n) nie jest stały; tak, jeśli (b_n) jest stały **4.23.** (7, 21, 63), (63, 21, 7), (13, 26, 52), (52, 26, 13), (25, 30, 36), (36, 30, 25), (1, 9, 81), (81, 9, 1), (91, 0, 0) **4.24.** 2, 6, 18 **4.25.** $k = 8$, $m = 128$ lub $k = -72$, $m = -1152$. *Wskazówka*: Zastosuj wzory Viète'a. **4.26.** $x = 6$, $y = 30$ lub $x = -6$, $y = 42$ **4.27.** 17, 8, −1 lub 5, 8, 11 **4.28.** 2, 4, 6, 9, 12 **4.29.** 4, 12, 36 lub $\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}$ **4.30.** Dowolny ciąg stały. *Wskazówka*: $a_n = a_1 q^{n-1}$; zastosuj wzór na średnią arytmetyczną dla wyrazów $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ i wykaż, że $q = 1$.

s. 234

1. P, F, P **2.** $-\frac{1}{16}$ **3.** $a_1 = 1$, $q = 2$ lub $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = -2$ **4.** 13, 13, 13 lub 3, 9, 27

s. 238

5.1. A **5.2.** C **5.3.** C **5.4.** a) $S_5 = -40\frac{1}{3}$ b) $S_{100} = 0$ c) $S_3 = 2\left(3\sqrt{2} - 5\right)$ d) $S_4 = 2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ **5.5.** a) 1092 b) $11\frac{13}{16}$ c) $13\left(3 + \sqrt{3}\right)$ d) $\frac{31 + 15\sqrt{2}}{2}$ e) $93\left(5 + \sqrt{5}\right)$ f) 63π **5.6.** 2047 **5.7.** a) $n = 7$ b) $n = 7$ c) $n = 5$ d) $n = 5$ **5.8.** a) $S_5 = -5\frac{13}{16}$ b) $k = 7$ c) $q = \frac{1}{3}$ d) $a_1 = \frac{1}{2}$ **5.9.** 4, 8, 16, 32 **5.10.** ok. 75,5 m **5.11.** 20 ha **5.12.** 37 448 **5.13.** 5625 zł, 4500 zł, 3600 zł, 2880 zł, 2304 zł **5.14.** $n = 4$ **5.15.** Ciąg arytmetyczny (a_n): $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$, $S_n = \frac{n(n+7)}{4}$, ciąg geometryczny (b_n): $b_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-2}$, $S_n = \frac{1 - (-2)^n}{6}$; ciągi nie mają równych wyrazów. *Wskazówka*: Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i leżą na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, a dodatnie wyrazy ciągu (b_n) mają nieparzyste numery i leżą na wykresie funkcji $g(x) = 2^{x-2}$. Naszkicuj wykresy funkcji f i g dla dodatnich wartości x i zauważ, że mają tylko jeden punkt wspólny, dla argumentu, który nie jest liczbą naturalną. **5.16.** $1365\pi\ \text{cm}^2$ **5.17.** cztery drukarki; pierwsza: 13 stron, druga: 39, trzecia: 117, czwarta: 351 **5.18.** a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{3367\sqrt{3}}{16\,384}$. *Wskazówka*: Po sześciu krokach będzie $3^6 = 729$ niezacieniowanych trójkątów o boku $\frac{1}{64}$. **5.19.** a) $x = \frac{1}{32}$ b) $x = 64$ c) $x = 96$ d) $x = 32$ **5.20.** $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$. *Wskazówka*: Dla każdego $n \geqslant 1$ mamy $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ jedynek}} = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} = \frac{1 - 10^n}{1 - 10}$. **5.21.** 910. *Wskazówka*: Skorzystaj z tego, że $q^{2n} = \left(q^n\right)^2$ i $q^{3n} = \left(q^n\right)^3$.

s. 241

1. F, P, F **2.** $42\frac{5}{8}$ **3.** 420,20 zł **4.** $\frac{1}{6}$

s. 253

6.1. B **6.2.** D **6.3.** C **6.4.** P, P, P **6.5.** 10,368 **6.6.** a) 313,84 zł b) 179,59 zł c) 359,17 zł d) 380,47 zł **6.7.** po osiemnastu latach **6.8.** po czterech latach **6.9.** o ok. 99,39% **6.10.** o ok. 19,25% **6.11.** ok. 8533 m^3 **6.12.** 87,5% **6.13.** 2024 zł **6.14.** a) 4064 zł b) 4129,02 zł c) 4330,41 zł **6.15.** 3036,16 zł **6.16.** 8056 zł, o 0,7% **6.17.** 4274,80 zł **6.18.** I. 145,19 zł, II. 144,97 zł, III. 144 zł; III < II < I **6.19.** a) 2431,20 zł b) 4894,01 zł c) 5694,01 zł **6.20.** 5086,67 zł **6.21.** a) 186 392 zł b) 196 857 zł c) 76 104 zł **6.22.** a) 5676 zł, 500 zł b) 7757,20 zł, 341,17 zł c) 11 124,96 zł, 420 zł **6.23.** 1389,14 zł **6.24.** rata: 2702,78 zł, zwrócona kwota: 324 333,60 zł **6.25.** 13,1% **6.26.** Paweł, 212 zł **6.27.** 2,5 roku (30 rat miesięcznych)

s. 256

1. F, P, P **2.** ok. 14,1 **3.** a) 2400 zł b) o 27,1% **4.** 128 749 zł; przez 10 lat i 8 miesięcy **5.** 587,76 zł

s. 257

1. B **2.** B **3.** D **4.** D **5.** A **6.** D **7.** B **8.** D **9.** A **10.** B **11.** B **12.** B **13.** A **14.** A **15.** B **16.** A **17.** A **18.** F, P, P **19.** P, P, P **20.** P, F, P **21.** F, P, F **22.** P, P, F **23.** P, P, F **24.** P, P, P **25.** P, P, F **26.** P, P, P **27.** P, P, F **28.** P, F, P **29.** P, P, P **30.** P, F, P **31.** F, P, P **32.** P, F, P **33.** F, P, P **34.** P, F, P **35.** F, P, P **36.** P, F, P **37.** a) np. $a_n = n + 1$ b) np. $a_n = \frac{1}{n}$ c) np. $a_n = \frac{n+1}{n}$ d) np. $a_n = \sqrt{n}$ e) np. $a_n = 2n$ f) np. $a_n = -n - 2$ g) np. $a_n = 2^{n-1}$ h) np. $a_n = \frac{1}{2n+1}$ **38.** a) cztery b) a_{15} c) $n > 11$ **39.** czterdzieści dziewięć **40.** a) rosnący b) rosnący c) niemonotoniczny d) niemonotoniczny e) malejący f) malejący **41.** a) stały b) niemonotoniczny c) rosnący **43.** a) 5, 7, 100 c) $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$, $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$ **44.** $a_1 = -17,\ r = 3$ **45.** $a_1 = 7,\ r = 13$ **46.** 20 **47.** a) tak, $a_1 = 12,\ q = 4$ b) nie c) tak, $a_1 = -\pi,\ q = 1$ d) tak, $a_1 = -\frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{2}$ **48.** $q = 2 - \sqrt{2}$ **50.** $a_1 = -5,\ r = 3$ **51.** −98 **52.** $n \leqslant 66$ **53.** b) 825 **54.** $a_1 = -5,\ k = 12$ **55.** $a_1 = -147$ **56.** $x = \frac{1}{2}$ **57.** $S_8 = 228$ **58.** $a_{15} = 72$ **59.** $a = 3,\ b = -1,\ c = -3$ lub $a = -3,\ b = -1,\ c = 3$ lub $a = -9,\ b = 23,\ c = -15$ **60.** a) w Supertaxi b) 5 km **61.** 222 lub −222 **62.** $a_1 = -3\frac{1}{2},\ n = 27$ lub $a_1 = 4,\ n = 12$ **63.** $-\frac{1}{16}$ **64.** pierwszy wyraz: −3, iloraz: −2; nie jest monotoniczny **65.** ok. 7,6 razy **66.** 20 m **67.** 16 zł, 24 zł, 36 zł **68.** 6 cm, 12 cm, 24 cm **69.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **70.** $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2$ lub $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ **71.** (a_n): $a_1 = 2,\ r = 3$, (b_n): $b_1 = 3,\ q = 2$ **72.** $x_1 = 3$ **73.** a) $a_1 = 17,\ r = -2$ b) $q = \frac{1}{3}$ c) $n = 9$ **74.** $k = 16$ **75.** $a = 3,\ b = 15,\ c = 75$ lub $a = 31,\ b = 31,\ c = 31$ **76.** $a_n = 2$ lub $a_n = 3n - 7$ **77.** $x = 3,\ y = 2$ **78.** $a = 5,\ b = 2,\ c = 128$ **79.** $a = 4,\ b = 12,\ c = 36$ **80.** $x = 8,\ y = 4,\ z = 16$. *Wskazówka*: Wyznacz x, y i z w zależności od różnicy r ciągu arytmetycznego. **81.** $q = \frac{1}{2}$ **82.** 3, 12, 48 lub $\frac{3}{25}, \frac{48}{25}, \frac{768}{25}$ **83.** 3472,88 zł **84.** 20 zł **85.** oferta banku B **86.** a) 1296 zł b) 4207,33 zł c) 18 774,58 zł **87.** 5432,50 zł **88.** 855 zł, 850,63 zł, 846,25 zł, średnia rata 804,69 zł

4. Analiza matematyczna

s. 279

1.1. A **1.2.** B **1.3.** C **1.4.** a) wyrazy o numerach $n > 9993$ b) wyrazy o numerach $n > 39\,991$ c) wyrazy o numerach $n > 100$ d) wyrazy o numerach $n \geqslant 174$ **1.5.** a) $M = 999\,998$ b) $M = 5$ c) $M = 16$ d) $M = 3$ **1.7.** (b_n), (d_n) **1.8.** a) $x \in (-1; 1\rangle$ b) $x \in \left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ c) $x \in (-5; -3\rangle$ d) $x \in \left\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\rangle$ e) $x \in \langle -2; 0) \cup (0; 2\rangle$ f) $x \in \left\langle -\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right\rangle$ **1.9.** a) 6 b) -1 c) $\frac{7}{5}$ d) 0 e) $-\frac{1}{5}$ f) $-\frac{1}{8}$ g) 0 h) $\frac{1}{7}$ i) -4 **1.10.** $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 7$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 10$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \frac{5}{2}$ **1.11.** a) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$ b) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{-2n+1}$ c) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ d) np. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$ e) np. $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ f) np. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ **1.12.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) -4 d) $-\sqrt{2}$ **1.13.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$. *Wskazówka:* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **1.16.** a) ∞ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) ∞ e) $-\infty$ f) $-\infty$ **1.17.** a) 0 b) ∞ c) 0 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{10}{7}$ f) $-\infty$ **1.18.** a) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 3n$ b) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ c) np. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$ **1.19.** a) np. $a_n = n^2$, $b_n = n$ b) np. $a_n = n$, $b_n = n^2$ c) np. $a_n = 2n$, $b_n = n$ **1.20.** a) 6 b) 13 c) $\frac{5}{7}$

s. 281

1. F, F, F **2.** a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** a) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$ b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ c) np. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$

s. 285

2.1. D **2.2.** B **2.3.** D **2.4.** a) $-\frac{100}{33}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{9}{11}$ d) $\frac{100}{11}$ **2.5.** a) $m \in (1; 3)$, $S = \frac{1}{3-m}$ b) $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $S = \frac{m}{1-m^2-m}$ c) $m \in \langle 3; \infty)$, $S = 2\sqrt{m-3}$ d) $m \in \left\langle -\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right\rangle$, $S = \frac{m\sqrt{2-m^2}}{m-1}$ **2.6.** a) $\frac{1}{2}$ b) $2 + \sqrt{2}$ c) $\frac{30}{11}$ d) $\frac{49}{2}$ e) szereg rozbieżny f) -10 **2.7.** a) 3 b) 16 c) $\sqrt{3}$ d) -12 **2.8.** a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{2}{33}$ c) $\frac{23}{22}$ d) $\frac{7}{220}$ e) $\frac{19}{15}$ f) $\frac{25}{11}$ **2.9.** $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$ **2.10.** a) $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ b) $x = \frac{3}{4}$ c) $x = -\frac{1}{2}$ **2.11.** a) $x = 1{,}5$ b) $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$ **2.12.** a) $x \in (-\infty; 4)$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$ **2.13.** $n > 9$, $n \in \mathbf{N}$ **2.14.** $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ **2.15.** $-\frac{1}{3}$ **2.16.** suma obwodów: $\frac{\pi R \cdot \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, suma pól: $\frac{\pi R^2 \cdot \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$

s. 287

1. F, P, P **2.** $\frac{113}{99}$ **3.** $x \in (-\infty; -2) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$ **4.** Szereg zbieżny dla $x \in (-1; 0) \cup (1; 2)$, $S = 0{,}8$ dla $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$. **5.** suma promieni: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, suma pól: $\frac{\pi a^2}{9}$

s. 294

3.1. D **3.2.** B **3.3.** C **3.6.** a) 13 b) $\sqrt{2}$ c) -27 d) 25 **3.7.** a) $-\frac{7}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{15}{123}$ d) $-\frac{1}{3}$ **3.8.** a) -2 b) 1 c) $\frac{6}{35}$ d) $-\frac{10}{13}$ **3.9.** a) -2 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$ **3.10.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ **3.12.** $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ nie istnieje; $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ nie istnieje **3.13.** a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nie istnieje d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 2 = \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nie istnieje f) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **3.14.** a) 0 b) $-\frac{9}{10}$ c) 11 d) 8

s. 297

1. F, F, F. *Wskazówka*: A. Dla $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = -\frac{1}{x}$ mamy $f(x) + g(x) = 0$, zatem nie istnieje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i nie istnieje $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, natomiast $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$. Wynikanie w drugą stronę jest prawdziwe. **2.** a) $-\frac{8}{29}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{4}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

s. 303

4.1. C **4.2.** C **4.3.** A **4.4.** $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \infty$ **4.5.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 3$ **4.6.** a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 11^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 11^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$ **4.7.** a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) $-\infty$ **4.8.** a) $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$ b) $x = 1$, $x = 2$ c) $x = 7$ d) brak asymptot pionowych **4.9.** a) w ∞ i $-\infty$: $y = 0$ b) brak asymptot poziomych c) w ∞ i $-\infty$: $y = -1$ d) w $-\infty$: $y = -2$, w ∞: $y = 3$ **4.10.** a) 0 b) ∞ c) ∞ d) -1 **4.11.** a) ∞ b) ∞ c) $-\infty$ d) $-\infty$ **4.12.** a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-2; 5\rangle$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; \infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3)$; funkcja nie jest monotoniczna – jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2; \infty)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$; brak asymptot pionowych, asymptoty poziome: w $-\infty$ prosta $y = -2$, w ∞ prosta $y = 2$; $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2\rangle \cup (5; \infty)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-2; 2\rangle \cup \{5\}$, dwa rozwiązania dla $m \in (2; 5)$ b) $D = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$, $ZW = \mathbf{R}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 1$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (0; 1)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -2) \cup (1; \infty)$;

funkcja nie jest monotoniczna – jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$, $(-4; 0)$ i $\langle 2; \infty)$ malejąca w przedziale $(0; 2\rangle$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; asymptoty pionowe: $x = -4$, $x = 0$, asymptoty poziome: w $-\infty$ prosta $y = 2$, w ∞ prosta $y = 0$; $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1)$, dwa rozwiązania dla $m \in \langle 0; 2\rangle \cup \{-1\}$, trzy rozwiązania dla $m \in (-1; 0) \cup (2; \infty)$
c) $D = (-\infty; -1) \cup \langle 0; 5) \cup (5; \infty)$, $ZW = \mathbf{R}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ lub $x = 7$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0; 2) \cup (2; 5) \cup (5; 7)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (7; \infty)$; funkcja nie jest monotoniczna – jest stała w przedziale $(-\infty; -1)$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle 0; 2\rangle$ i $(5; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle 2; 5)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; asymptota pionowa: $x = 5$, asymptota pozioma: w $-\infty$ prosta $y = -2$; $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup \langle 3; \infty)$, dwa rozwiązania dla $m \in (2; 3) \cup \{0\}$, trzy rozwiązania dla $m \in (0; 2\rangle$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -2$
d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{Z}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0; 1)$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; \infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$; funkcja niemalejąca – jest stała w każdym z przedziałów postaci $\langle k; k + 1)$ dla $k \in \mathbf{Z}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, dla $k \in \mathbf{Z}$: $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = k - 1$, $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = k$; brak asymptot; $f(x) = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \mathbf{Z}$, nie ma rozwiązań dla $m \notin \mathbf{Z}$

s. 306

1. F, P, F **2.** a) $-\infty$ b) ∞ c) ∞ **3.** asymptoty pionowe: $x = -3$, $x = 0$, asymptota pozioma w ∞ i $-\infty$: $y = -2$ **4.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0,5^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to0,5^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ **5.** $D = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$, $ZW = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 0; \infty)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 0)$; funkcja nie jest monotoniczna – jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$, $(-4; -2\rangle$ i $\langle 2; \infty)$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle -2; 0)$ i $(0; 2\rangle$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$; asymptoty pionowe: $x = -4$, $x = 0$; asymptoty poziome: w $-\infty$ prosta $y = 0$, w ∞ prosta $y = 3$; $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-1; 0)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{-1, 0\}$, dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; -1) \cup \langle 3; \infty)$, trzy rozwiązania dla $m \in (0; 3)$

s. 312

5.1. A **5.2.** D **5.3.** D **5.4.** P, P, P **5.5.** a), b), c), d) ciągła **5.6.** a) nieciągła b) ciągła **5.7.** a), b) ciągła **5.8.** a) $D = \mathbf{R}$, punkty nieciągłości: $x = -4$, $x = -3$, $x = 5$ b) $D = \mathbf{R} - \{-3, 0\}$, punkty nieciągłości: $x = -1$, $x = 2$ **5.9.** ciągła **5.10.** nieciągła **5.11.** a) $m = -2$ b) $m = -1$ c) $m = -2$ d) $m = 1$

s. 314

1. P, F, P **2.** ciągła **4.** $m = \frac{1}{4}$

s. 323

6.1. D **6.2.** B **6.3.** C **6.4.**

x_0	-1	0	1	2
$f(x_0 + h) - f(x_0)$	3	4	8	-3

6.5. a) $f'(7) = -5$ b) $f'(0) = 0$ c) $f'(4) = \frac{3}{4}$ d) $f'(-3) = 6$ **6.6.** $D = (0; \infty)$, $f'(3) = -\frac{1}{6\sqrt{3}}$

6.7. $D = \mathbf{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$, $f'(-2) = 17$ **6.10.** Nie jest różniczkowalna. **6.11.** $y = 2$
6.12. $y = 3x - 1$ **6.13.** a) 36° lub 59° b) 72° **6.14.** 90°

s. 324

1. P, P, F **2.** $f'(-2) = 12$ **3.** $y = 4x - 5$ **4.** w punkcie $(1, -4)$ kąt $\alpha = 63°$, w punkcie $(3, 0)$ kąt $\beta = 13°$

s. 332

7.1. D **7.2.** C **7.3.** A **7.4.** a) $f'(x) = -\sqrt{3}$; $f'(-1) = -\sqrt{3}$, $f'(0) = -\sqrt{3}$, $f'(1) = -\sqrt{3}$
b) $f'(x) = 2x$; $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$ c) $f'(x) = 0$; $f'(-1) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$
d) $f'(x) = 2x - \sqrt{3}$; $f'(-1) = -2 - \sqrt{3}$, $f'(0) = -\sqrt{3}$, $f'(1) = 2 - \sqrt{3}$ **7.5.** a) $f'(x) = 10x - 7$
b) $f'(x) = -12x^3$ c) $f'(x) = x^4 - x^2 + 1$ d) $f'(x) = 2x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3$ e) $f'(x) = 4x + 1$
f) $f'(x) = 12x^2 + 10x - 4$ g) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 46x - 26$ h) $f'(x) = -6x^5 - 30x^4 + 18x + 54$
7.6. a) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$ b) $f'(x) = \frac{3}{x^6}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$ c) $f'(x) = -\frac{5}{x^6} + \frac{6}{x^7}$,
$D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$ d) $f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{3}{x^3}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$ e) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $D = \langle 0; \infty)$,
$D' = (0; \infty)$ f) $f'(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$, $D = \langle 0; \infty)$, $D' = (0; \infty)$ g) $f'(x) = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$
h) $f'(x) = -\frac{13}{20x \cdot \sqrt[20]{x^{13}}}$, $D = D' = (0; \infty)$ i) $f'(x) = \frac{9}{4}x\sqrt[4]{x}$, $D = D' = (0; \infty)$
7.7. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-3\}$ b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$
c) $f'(x) = -\frac{6x+6}{(x^2+2x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$ d) $f'(x) = \frac{4x^3+4x}{(x^4+2x^2+5)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$
e) $f'(x) = -\frac{4x-1}{(2x^2-x-3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ f) $f'(x) = \frac{13}{(3x-1)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$
g) $f'(x) = -\frac{3}{(2x-3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ h) $f'(x) = \frac{27}{(4x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}$
7.8. a) $f'(x) = \frac{-3x^2+4x+13}{(x^2+2x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$ b) $f'(x) = \frac{10x}{(x^2+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$
c) $f'(x) = \frac{3\left(x^2+2x-1\right)}{(2x^2+x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$ d) $f'(x) = \frac{6x^2+10x-3}{(x^2+3x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$
e) $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ f) $f'(x) = \frac{8x}{(2-x)^3}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{2\}$
g) $f'(x) = \frac{-x^2\left(x^2-12\right)}{2(4-x^2)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ h) $f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2-7x+10)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{2, 5\}$
7.9. $D = D' = \mathbf{R} - \{0, 1\}$, $f'(x) = \frac{-3x^2+4x-2}{(x^2-x)^2}$ **7.10.** a) $y = 5x - 10$ b) $y = -x - 1$ c) $y = -2x$
7.11. $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$ **7.12.** $y = -6x - 6$, $y = 6x - 6$ **7.13.** $y = x$ **7.14.** $y = 7x - 1$, $y = -5x - 7$
7.15. $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{3}x + 4$ **7.16.** $a = 4$, $b = -1$ **7.17.** $m = 3$ **7.18.** $k = -3$
7.19. $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$, $B = \left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$. *Wskazówka*: Oś rzędnych jest osią symetrii wykresu.

s. 335

1. F, F, F **2.** $f'(x) = \frac{6x^2 - 3}{(2x^2 + 1)^2}$ **3.** $y = -3x + 4$ **4.** $y = 2x - \frac{3}{2}$ **5.** $y = -4x,\ y = 4x$

s. 342

8.1. D **8.2.** B **8.3.** B **8.4.** a) $D_F = \mathbf{R},\ u = f(x) = 3x - 1,\ g(u) = u^5$ b) $D_F = \left\langle \frac{3}{4}; \infty \right)$, $u = f(x) = 4x - 3,\ g(u) = \sqrt{u}$ c) $D_F = \mathbf{R},\ u = f(x) = 2x^2 - 4x + 11,\ g(u) = u^7$ d) $D_F = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 0; \infty)$, $u = f(x) = 6x^2 + 18x,\ g(u) = \sqrt{u}$ e) Dziedziną funkcji F jest zbiór pusty. f) $D_F = \langle -5; 0\rangle \cup \langle 3; \infty)$, $u = f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x,\ g(u) = \sqrt{u}$ g) $D_F = \langle -7; 2\rangle$, $u = f(x) = -x^2 - 5x + 14,\ g(u) = \sqrt{u}$ h) $D_F = \langle 0; \infty)$, $u = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x,\ g(u) = \sqrt{u}$

8.5. a) $F'(x) = 30\left(x^2 - 8x + 17\right)^{14} \cdot (x - 4),\ D_F = D_{F'} = \mathbf{R}$ b) $F'(x) = \frac{x + 7}{\sqrt{x^2 + 14x}}$, $D_F = (-\infty; -14\rangle \cup \langle 0; \infty)$, $D_{F'} = (-\infty; -14) \cup (0; \infty)$ c) $F'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 8x}{2\sqrt{x^4 - x^3 + 4x^2}},\ D_F = \mathbf{R}$, $D_{F'} = \mathbf{R} - \{0\}$ d) $F'(x) = \frac{3 - 4x - 3x^2}{\sqrt{12 + 6x - 4x^2 - 2x^3}},\ D_F = (-\infty; -2\rangle \cup \left\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\rangle$, $D_{F'} = (-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ **8.6.** a) $D = D' = \mathbf{R},\ f'(-2) = 64$ b) $D = D' = \mathbf{R},\ f'(-1) = 3$ c) $D = D' = \mathbf{R},\ f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ **8.7.** a) $D = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 4; \infty),\ D' = (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$, $f'(-3) = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$ b) $D = \left\langle -1; \frac{1}{2}\right\rangle,\ D' = \left(-1; \frac{1}{2}\right),\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ c) $D = \langle -2; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$, $D' = (-2; 0) \cup (2; \infty),\ f'(-1) = -\sqrt{3}$ d) $D = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle,\ D' = \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right),\ f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

8.8. a) $y = -12x - 7$ b) $y = 3x - 7$ c) $5x - 4y - 7 = 0$ d) $13x - 4y - 5 = 0$

8.9. $D_f = \mathbf{R},\ 2x - 3y + 9 = 0$ lub $2x + 3y - 1 = 0$ **8.10.** $D_f = \mathbf{R},\ y = 0$

8.11. $D_f = \mathbf{R},\ \sqrt{3}x - 3y + 6\sqrt{3} = 0,\ 30°$

s. 343

1. F, P, P **2.** $f'(x) = \frac{9x^4 + 3}{\sqrt{x^4 + 1}}$ **3.** $y = 1$ **4.** $y = \frac{1}{3}x + 2$ **5.** 72°, (1, 1)

s. 353

9.1. B **9.2.** D **9.3.** D **9.4.** a) rosnąca w $\mathbf{R}$ b) rosnąca w $(-\infty; 0\rangle$, malejąca w $\langle 0; 2\rangle$, rosnąca w $\langle 2; \infty)$ c) rosnąca w $(-\infty; -2)$, malejąca w $(-2; 0\rangle$, rosnąca w $\langle 0; \infty)$ d) malejąca w $(-\infty; -1\rangle$, rosnąca w $\langle -1; 2)$, rosnąca w $(2; 5\rangle$, malejąca w $\langle 5; \infty)$ **9.5.** $\left(-\infty; -2\sqrt{3}\right\rangle$ i $\left\langle 2\sqrt{3}; \infty\right)$ **9.6.** rosnąca w $\langle -2; 2\rangle$, malejąca w $\langle 2; 6\rangle$ **9.7.** *Wskazówka*: a) f jest rosnąca. b) f jest malejąca.

9.8. a) maksimum: 80 dla $x = 0$, minimum: -1 dla $x = -3$ i $x = 3$ b) maksimum: $-\frac{1}{4}$ dla $x = 0$ c) maksimum: 30 dla $x = 3$ d) maksimum: -8 dla $x = -2$, minimum: 0 dla $x = 2$ e) maksimum: -1 dla $x = 2$, minimum: $-\frac{1}{9}$ dla $x = -2$ f) maksimum: -11 dla $x = 4$, minimum: 1 dla $x = -2$ **9.9.** minimum: 0 dla $x = -\sqrt{3},\ x = 0$ i $x = \sqrt{3}$, maksimum: 4 dla $x = -1$ i $x = 1$

9.10. W punkcie $x = -8$ funkcja ma maksimum, w $x = -4$ ma minimum, w $x = 6$ ma maksimum.

9.11. I–B, II–C, III–A **9.12.** $a = 1,\ b = 0$ **9.13.** $a = 2,\ b = 0$ **9.14.** $m \in \langle 3; \infty)$

9.15. ciągła w $\mathbf{R}$, różniczkowalna w $\mathbf{R} - \{1\}$; malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$; minimum: -2 dla $x = -1$, maksimum: 2 dla $x = 1$

9.16. a)

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0\searrow$	-2 (min)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2 (maks)	$\searrow 0$

b)

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0\searrow$	$-\frac{1}{3}$ (min)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 (maks)	$\searrow 0$

c)

x	$\left(-\infty;\ -2\sqrt{2}\right)$	$-2\sqrt{2}$	$\left(-2\sqrt{2};\ -2\right)$	-2	$(-2;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	nie istnieje	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty\nearrow$	0	$\nearrow\infty$	nie istnieje	$\infty\searrow$	0	$\searrow$

x	0	$\left(0;2\sqrt{2}\right)$	$2\sqrt{2}$	$\left(2\sqrt{2};\ \infty\right)$
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-2 (min)	$\nearrow$	0	$\nearrow\infty$

d)

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	nie istnieje	$-$
$f(x)$	$1\searrow$	$\frac{1}{2}$ (min)	$\nearrow$	1	$\nearrow\infty$	nie istnieje	$\infty\searrow 1$

e)

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ 2)$	2	$(2;\ 3)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nie istnieje	$+$
$f(x)$	$0\searrow$	$-\frac{1}{9}$ (min)	$\nearrow$	$-\frac{1}{10}$	$\nearrow$	0	$\nearrow\infty$	nie istnieje	$-\infty\nearrow$

x	3	$(3;\ 5)$	5	$(5;\ \infty)$
$f'(x)$	0	$-$	nie istnieje	$-$
$f(x)$	-1 (maks)	$\searrow -\infty$	nie istnieje	$\infty\searrow 0$

f)

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$	1	$\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	$+$	nie istnieje	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$4\nearrow\infty$	nie istnieje	$-\infty\nearrow$	0	$\nearrow$	1 (maks)	$\searrow$	0

x	$\left(\frac{3}{2};\ 2\right)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	nie istnieje	$-$
$f(x)$	$\searrow -\infty$	nie istnieje	$\infty\searrow 4$

s. 355

1. P, P, F **2.** malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0\rangle$ i $\langle 2; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 2\rangle$ **3.** maksimum: 0 dla $x = -3$, minimum: 12 dla $x = 3$ **4.** Dla $m = 2$ funkcja ma w $x = 1$ maksimum równe -4. **5.** (0, 2). *Wskazówka*: Styczne o równaniach $y = 4$, $y = 0$, $y = 9x + 18$, $y = 9x - 14$ ograniczają równoległobok.

s. 363

10.1. wartość największa: $-\frac{14}{27}$ dla $x = \frac{1}{3}$, wartość najmniejsza: -35 dla $x = -2$ **10.2.** wartość najmniejsza: $\frac{5}{3}$ dla $x = -1$, wartość największa: 2 dla $x = -2$ **10.3.** $8 = 2 + 6$ **10.4.** $(-1, 1)$ **10.5.** $C = \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ **10.6.** $y = -2x + 6$ **10.7.** $P = 96\sqrt{3}$ **10.8.** $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **10.9.** $\frac{1000}{9}$ **10.10.** $\frac{4}{3}$ **10.12.** *Wskazówka*: Niech a oznacza długość krawędzi podstawy graniastosłupa, P – jego pole powierzchni całkowitej. Wtedy $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a}$.

s. 364

1. P, F, P **2.** wartość najmniejsza: $-\frac{1}{18}$ dla $x = -4$, wartość największa: 0 dla $x = 0$ **3.** -8 **4.** -1 **5.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

s. 365

1. D **2.** B **3.** A **4.** B **5.** A **6.** C **7.** C **8.** D **9.** C **10.** B **11.** D **12.** D **13.** A **14.** C **15.** B **16.** F, P, P **17.** P, P, P **18.** F, P, F **19.** P, F, P **20.** F, F, P **21.** P, P, F **22.** F, P, P **23.** P, P, P **24.** P, F, P **25.** F, F, P **26.** P, F, F **27.** a) 10 b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) 1 **28.** a) 9 b) $8\left(2 - \sqrt{2}\right)$ c) szereg rozbieżny d) $1 - \sqrt{3}$ **29.** a) $\frac{20}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$ **30.** a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) $-\infty$ **31.** tak **32.** a) 39 b) -127 c) -19 d) $\frac{3}{4}$ **33.** $y = 3x - 2$ **34.** $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ **35.** $x = \frac{3}{2}$ **36.** 8 lub 24 **37.** $D = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ **38.** nie

39. *Wskazówka*: Skorzystaj z ciągłości funkcji $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$. **40.** *Wskazówka*: Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = 16x^5 - 5x + 5$. **42.** $y = \frac{5}{9}x - \frac{10}{9}$ **43.** $3x - 4y + 9 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$ **44.** malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$ **45.** maksimum: $-3\sqrt{3}$ dla $x = -2\sqrt{3}$, minimum: $3\sqrt{3}$ dla $x = 2\sqrt{3}$ **46.** $ZW = \langle -11; \infty)$ **47.** wartość najmniejsza: $\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$ dla $x = 1 - \sqrt{3}$, wartość największa: $\frac{1}{7}$ dla $x = 2$ **48.** $a = 0$, $b = 1$; malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(-1; 0\rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów $\langle 0; 1)$ i $(1; \infty)$ **49.** $a = 1$, $b = -3$, $c = -2$ **50.** wartość najmniejsza: $2\sqrt{2} - 2$ dla $x = 1 - \sqrt{2}$, wartość największa: 3,4 dla $x = -4$ **51.** (1, 3) **52.** *Wskazówka*: Niech x oznacza długość ramienia trójkąta. Wtedy pole trójkąta: $P(x) = \frac{\sqrt{p}}{4} \cdot \sqrt{16x^3 - 20px^2 + 8p^2x - p^3}$, gdzie $x \in \left(\frac{p}{4}; \frac{p}{2}\right)$.

53. $f(m) = \frac{m^2}{(m+2)^2}$, $D = D' = (-3; -2) \cup (-2; 3)$; malejąca w przedziale $(-2; 0\rangle$, rosnąca w każdym

z przedziałów $(-3;\ -2)$ i $\langle 0;\ 3)$; wartość najmniejsza: 0 dla $m = 0$ **54.** $D = \left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$, wartość największa: 20 **55.** $\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{5}$

5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

s. 379

2.1. B **2.2.** B **2.3.** D **2.4.** a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{15}$ **2.5.** a) $A = \{2, 4, 5, 6\}$ b) $\frac{4}{6}$ **2.6.** a) 0,87 b) 0,13 **2.7.** a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{8}{13}$ f) $\frac{11}{13}$ **2.8.** $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{2}{3}$, $P(E) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{5}{6}$, $P(G) = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{1}{2}$ **2.9.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{13}{90}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{23}{30}$ f) $\frac{7}{30}$ g) $\frac{1}{15}$ h) $\frac{1}{45}$ **2.10.** a) 0,09 b) 0,5 c) 0,45 d) 0,33 e) 0,1 f) 0,15 **2.11.** $\frac{1}{3}$ **2.12.** a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{7}{17}$ c) $\frac{15}{17}$ d) $\frac{11}{17}$ e) $\frac{10}{17}$ **2.13.** a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ **2.14.** $\frac{11}{14}$ **2.15.** $\frac{7}{12}$ **2.16.** $\frac{7}{90}$ **2.17.** 36 **2.18.** $\frac{1}{51}$ **2.19.** a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

s. 382

1. P, P, F **2.** $\frac{17}{20}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 30 **5.** $\frac{1}{150}$

s. 390

3.1. A **3.2.** C **3.3.** B **3.4.** 180 **3.5.** 900 **3.6.** 80 **3.7.** 6^{32} **3.8.** a) 6^5 b) 128 c) 36 d) 32 e) 12 f) 288 **3.9.** 2^{30} **3.10.** a) 3^2 b) 6 c) 1 d) 3^{10} **3.11.** a) 360 b) o 240 **3.12.** $180 \cdot 179 \cdot 178 \cdot 177$ **3.13.** a) 900 b) 180 c) 180 d) 625 **3.14.** $58^6 \approx 38$ mld haseł; ponad 1200 lat **3.15.** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604\,800$ **3.16.** 5^{12} **3.17.** a) $7 \cdot 6 \cdot 5$ b) to niemożliwe c) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ d) $11 \cdot 10 \cdot 9$ **3.18.** a) 6 b) 30 c) 120 d) 360 e) 720 f) 720 **3.19.** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ **3.20.** $3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1512$ **3.21.** a) $4 \cdot 3 \cdot 2$ b) $5 \cdot 4 \cdot 3$ c) $3 \cdot 2$ d) $3 \cdot 3 \cdot 2$ **3.22.** 136. *Wskazówka*: Ostatnią cyfrą musi być 0 lub 5. **3.23.** a) $9 \cdot 89 \cdot 88 = 70\,488$ b) 0 **3.24.** 1000 **3.25.** 840 **3.26.** $18 \cdot 12 \cdot 28$ **3.27.** 6 **3.28.** a) 5^{30} b) 6^{30} **3.29.** 64 **3.30.** a) 8 b) 2^n. *Wskazówka*: Ponumeruj elementy zbioru od 1 do n. Dla każdego elementu trzeba zdecydować, czy należy on do danego podzbioru czy nie. Narysuj drzewko, które zaczyna się od dwóch gałęzi. Wybór jednej oznacza, że pierwszy element należy do podzbioru, wybór drugiej – że nie należy. Kolejne poziomy drzewka oznaczają kolejne elementy zbioru. **3.31.** 64. *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru wyprowadzonego w zadaniu 3.30 b.

s. 393

1. P, F, F **2.** 72 **3.** 57 600 **4.** 6 **5.** $3 \cdot \left(2^9 - 2\right) = 1530$

s. 401

4.1. D **4.2.** C **4.3.** C **4.4.** $\frac{1}{4}$ **4.5.** $\frac{1}{16}$ **4.6.** $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{1}{2}$, $P(E) = 0$, $P(F) = \frac{1}{6}$ **4.7.** $\frac{1}{6}$ **4.8.** $\frac{4}{663}$ **4.9.** Zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. **4.10.** a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{7}{18}$ **4.11.** a) $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^4} = \frac{3}{32}$ b) $\frac{4^3 \cdot 1}{4^4} = \frac{1}{4}$ **4.12.** $\frac{4}{9}$ **4.13.** a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{4}{15}$ **4.14.** $\frac{1}{4}$ **4.15.** $\frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576}$ **4.16.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ **4.17.** a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{3\left(2^6-2\right)}{3^6} = \frac{62}{243}$ **4.18.** a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{9}{25}$ **4.19.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{12}$ **4.20.** $\frac{7}{12}$ **4.21.** a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ **4.22.** a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{5}{9}$ **4.23.** $\frac{1}{12}$ (jeśli uznamy za poprawne ustawienia 1, 2, 3, 4 oraz 4, 3, 2, 1) lub $\frac{1}{24}$ (jeśli poprawne jest tylko ustawienie 1, 2, 3, 4) **4.24.** tak **4.25.** $\frac{5}{54}$ **4.26.** a) 0,09 b) 0,267 c) 0,1 **4.27.** $\frac{12 \cdot 11 \cdot \left(2^6-2\right)}{2 \cdot 12^6} = \frac{341}{12^5}$ **4.28.** a) 0,384 b) 0,096 c) 0,008 d) 0,48 e) 0,512 **4.29.** $\frac{1}{16}$ **4.30.** a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{41}{729}$ **4.31.** a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ **4.32.** $\frac{8}{15}$

s. 405

1. F, P, F **2.** $\frac{5}{9}$ **3.** $\frac{2}{5}$ **4.** $\frac{1}{6}$ **5.** $\frac{10}{49}$

s. 414

5.1. A **5.2.** C **5.3.** D **5.4.** pary zdarzeń wykluczających się: A i B, A i C, A i D; zdarzenie D pociąga za sobą zdarzenie C **5.5.** pary zdarzeń wykluczających się: A i C, B i C **5.6.** a) A i B, A i C, C i D b) Zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie D, zdarzenie C pociąga za sobą zdarzenie B. **5.7.** a) tak b) tak c) nie **5.8.** a) nie b) tak **5.9.** A' – na żadnej kostce nie wypadły dwa oczka **5.10.** $A \cap B \cap C'$ **5.11.** $\left(A \cap G' \cap H'\right) \cup \left(A' \cap G \cap H'\right) \cup \left(A' \cap G' \cap H\right)$ **5.12.** $K = A'$, $L = A' \cap C' \cap E$, $M = D \cap B$ **5.13.** A' – w wylosowanej trójce jest co najmniej jeden mężczyzna, $(A \cup B)'$ – w wylosowanej trójce jest co najwyżej jedna kobieta, $A \cap B'$ – w wylosowanej trójce są trzy kobiety. **5.14.** $B \cup C \cup D$ – wylosowano co najmniej jedną kulę białą, $A \cup B \cup D$ – wylosowano co najmniej jedną kulę zieloną, $A' \cap B' \cap C'$ – wylosowano dokładnie dwie kule białe. **5.15.** $(A \cup B)'$ – tarcza została trafiona co najwyżej dwa razy, C' – tarcza została trafiona co najmniej raz, $A' \cap C$ – tarcza nie została trafiona, $(A \cup B \cup C)'$ – tarcza została trafiona raz lub dwa razy. **5.16.** a) Każda z nich ma jednego asa. b) Celina i Danka mają po dwa asy, Anka i Beata nie mają żadnego asa. c) Anka i Beata mają po jednym asie, Danka nie ma żadnego asa, a Celina ma dwa asy. d) Beata ma trzy asy, Danka ma jednego asa, a Anka i Celina nie mają asów. **5.17.** $\frac{3}{8}$ **5.18.** przez 5 i przez 9: 0,022; przez 5 lub przez 9: 0,289 **5.19.** $\frac{1}{2}$ **5.20.** 79% **5.21.** na 80% **5.22.** $\frac{127}{128}$ **5.23.** $\frac{279}{343}$ **5.24.** $\frac{67}{91}$ **5.25.** a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{1}{3}$ **5.26.** $P(A) < P(B) < P\left(A'\right)$

s. 417

1. P, F, F **2.** 0,19 **3.** 45% **4.** 0,23 **5.** $\frac{5}{8}$

s. 421

6.1. A **6.2.** B **6.3.** A **6.4.** $\frac{5}{13} \approx 0{,}38$ [zł] **6.5.** $-\frac{85}{26} \approx -3{,}27$ [zł] **6.6.** 0 [zł] **6.7.** $\frac{1}{36} \approx 0{,}03$ [zł] **6.9.** −3,75 [zł] **6.10.** −0,625 [zł] **6.11.** nie

s. 423

1. F, P, F **2.** $-\frac{55}{26} \approx -2{,}12$ [zł] **3.** $-\frac{950}{169} \approx -5{,}62$ [zł] **5.** $\frac{2}{13}$

s. 441

8.1. D **8.2.** B **8.3.** B **8.4.** a) 30 b) 60 c) 80 d) 93 e) 100 **8.5.** pięć **8.6.** P, F, P, P **8.7.** np.: {0, 1, 2, 2, 4, 8, 9, 9, 9, 11}, {1, 1, 3, 3, 5, 7, 7, 7, 8, 12}, {3, 3, 4, 4, 6, 6, 9, 9, 10, 15} **8.8.** a) 4,31 b) 28,93 **8.9.** 224 **8.10.** dominanty: 22°C i 25°C, mediana: 15,5°C **8.11.** 2,05 kg **8.12.** a) mediana: 12, dominanta: 11, średnia: 12 b) mediana: 12, dominanta: 20, średnia: 15 c) mediana: 40, dominanty: 30 i 35, średnia: 46 d) mediana: 42, dominanta: 42, średnia: 41 e) mediana: 23, dominanta: 4, średnia: 28 **8.13.** a) średnia: 8, mediana: 7, dominanta: 5 b) średnia: 5, mediana: 5, dominanty: 5 i 7 c) średnia: 17, mediana: 17, dominanta: 12 **8.14.** a) w piątki b) Najwięcej zarobiła na pierogach ruskich. Zysk byłby większy. **8.15.** Dyskoteka ma trwać do godz. 21^{00}, bufet będzie czynny 2,5 h. **8.16.** a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 4,3 d) 4 **8.17.** III LO **8.18.** $x = 6$ **8.19.** $m = 1$ **8.21.** a) np. $n = 2$, $m = 4$ b) $m = 2n$

s. 446

1. P, P, F **2.** $x = 9$ **3.** $\overline{x} = 3{,}94$, dominanta: 1,5 **4.** mediana: 3, $\overline{x} = 2{,}97$ **5.** 3, 3, 9, 13

s. 457

9.1. A **9.2.** C **9.3.** B **9.4.** mediana: 3, dominanta: 2 **9.5.** a) $\overline{x} = 41{,}4$, $\sigma^2 = 26{,}5$, $\sigma = 5{,}2$ b) $\overline{x} = 41{,}2$, $\sigma^2 = 11{,}6$, $\sigma = 3{,}4$ c) $\overline{x} = 102{,}0$, $\sigma^2 = 91{,}6$, $\sigma = 9{,}6$ **9.6.** a) 9 b) mediana: 50, dominanta: 49 c) średnia: 50, odchylenie standardowe: 2,35 **9.7.** mediana: 101,5, dominanty: 75 i 90, średnia: 108,8, wariancja: 1067,6, odchylenie standardowe: 32,7 **9.8.** a) 25 b) najmniejsza: 4, największa: 13 c) 8 d) 13 e) 8,84 **9.9.** a) 55 cm b) mediana: 55, dominanta: 53, rozstęp: 13, $\sigma \approx 2{,}66$ **9.10.** np. 6, 8, 12, 14

s. 459

1. P, F, P **2.** $\overline{x} = 56{,}5$, $\sigma^2 = 711{,}1$, $\sigma = 26{,}7$ **3.** $\overline{x} = 47$, $\sigma = 7{,}99$ **4.** $\overline{x} = 40{,}8$, $\sigma = 1{,}4$ **5.** np. 2, 4, 6, 8

s. 460

1. A **2.** A **3.** B **4.** A **5.** D **6.** C **7.** A **8.** B **9.** D **10.** D **11.** D **12.** A **13.** A **14.** D **15.** C **16.** B **17.** C **18.** A **19.** B **20.** B **21.** A **22.** C **23.** D **24.** D **25.** B **26.** F, P, P **27.** F, F, P **28.** F, P, P **29.** P, P, P **30.** F, P, P **31.** F, F, P **32.** P, P, P **33.** P, P, F **34.** P, F, F **35.** 255 **36.** 12 096 **37.** 30 **38.** 720 **39.** $\frac{1}{2}$ **40.** $\frac{5}{16}$ **41.** $\frac{1}{221}$ **42.** $\frac{5}{16}$ **43.** $\frac{1}{7}$ **44.** a) $x \geqslant 8$ b) $x = -1$ **45.** 5,8 **46.** a) 5760 b) 14 400 c) 2880 **47.** 345 600 **48.** $P(A) = \frac{1}{36}$, $P(B) = \frac{5}{18}$, $P(C) = 0$, $P(D) = \frac{1}{9}$, $P(E) = \frac{25}{36}$, $P(F) = \frac{1}{4}$ **49.** $\frac{5}{14}$ **50.** $\frac{24}{625}$ **51.** $\frac{33}{50}$ **52.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{3}{5}$ **54.** $\frac{4}{9}$ **55.** $\frac{119}{120}$ **56.** 0,19 **57.** $\frac{5}{6}$ **59.** a) 83,9 b) 72% **60.** $w_1 = 6$ i $w_2 = 4$ **61.** $\overline{x} = 54$, $\sigma = \sqrt{14} \approx 3{,}74$ **62.** $\overline{x} = 100$, $\sigma = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

Skorowidz

Alternatywa (suma) zdarzeń 406
asymptota pionowa wykresu funkcji 69, 300
— pozioma wykresu funkcji 302

Centyl 433
ciąg 190
— arytmetyczny 206, 208, 210, 211, 220
— geometryczny 225, 228, 229
— liczbowy 190
— malejący 197
— monotoniczny 197
— naprzemienny 228
— niemalejący 197
— nierosnący 197
— nieskończony 190
— rosnący 197
— rozbieżny 272, 275
— skończony 190
— stały 192
— zbieżny 272
cosinus kąta 36
— podwojonego kąta 84
— różnicy kątów 80, 81
— sumy kątów 80, 81
cosinusoida 68

Dane surowe 432
dominanta (moda, wartość modalna) 437
dopełnienie zbioru 408
doświadczenie losowe 373
dziedzina równania 90

Ekstremum funkcji 347

Figura osiowosymetryczna 172
— środkowosymetryczna 163
funkcja ciągła 309
— — w punkcie 307
— malejąca 344, 345
— nieciągła 309
— okresowa 49
— pochodna 325, 327, 328
— rosnąca 344, 345
— różniczkowalna 325
— — w punkcie 317
— wewnętrzna/zewnętrzna 339
— złożona 339

Geometria analityczna 114
gra losowa 420
granica ciągu 270, 272, 273, 276, 277
— niewłaściwa ciągu 275
— — funkcji w nieskończoności 300
— — — w punkcie 298
— — prawostronna/lewostronna funkcji w punkcie 299
— właściwa funkcji w nieskończoności 302
— — — w punkcie 288, 290, 291, 292, 294
— — prawostronna/lewostronna funkcji w punkcie 293

Iloraz ciągu geometrycznego 225
— różnicowy 315, 316

Jedynka trygonometryczna 51

Kąt nachylenia prostej do osi x 124
— przecięcia wykresów funkcji 321
klasyczna definicja prawdopodobieństwa 377
koniunkcja (iloczyn) zdarzeń 406

Logika probabilistyczna 372

Maksimum funkcji 347, 349
mediana 434, 447
miara łukowa kąta 58
minimum funkcji 347, 349

Nierówność opisująca koło 142, 143

Odchylenie standardowe 451, 452
odległość między punktami na płaszczyźnie 116
— punktu od prostej 131
okres funkcji 48, 49
— kapitalizacji (rozrachunkowy) 244
— zasadniczy (podstawowy) funkcji 48, 49
oprocentowanie stałe 245
— zmienne 245
oś symetrii 171, 172

otoczenie liczby na osi 268

Pochodna funkcji w punkcie 317
— funkcji złożonej 340
populacja 428
prawdopodobieństwo zajścia
zdarzenia 377, 394, 410
procent składany 242
próba losowa 429
przeciętne odchylenie od średniej 450
punkt nieciągłości funkcji 309
— stały przekształcenia 165

Radian 59
reguła dodawania 386
— mnożenia 384
rozstęp 450
równania prostych prostopadłych 108, 129
— prostych równoległych 108, 127, 128
równanie kierunkowe prostej 106
— okręgu w postaci kanonicznej 137
— — — — ogólnej 139
— prostej w postaci ogólnej 106
różnica ciągu arytmetycznego 206
— zdarzeń 406

Sieczna wykresu funkcji 316
sinus kąta 36
— podwojonego kąta 84
— różnicy kątów 80, 81
— sumy kątów 80, 81
sinusoida 67
statystyka 427
— opisowa 427
styczna do wykresu funkcji 320
suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 216
— — — — geometrycznego 235
symetria osiowa 173
— środkowa 164
szereg geometryczny 282, 283
— — rozbieżny 282
— — zbieżny 282
— uporządkowany 432

Średnia 436
— ważona 440
środek ciężkości trójkąta 119
— odcinka 109
— symetrii 162, 163
środkowa boku trójkąta 118

Tabela rozkładu częstości 453
tangens kąta 36
— różnicy kątów 82
— sumy kątów 82
tangensoida 70
twierdzenie cosinusów 17
— o dwusiecznej 24
— o przyjmowaniu wartości pośrednich 310
— o trzech ciągach 278
— sinusów 12
— Weierstrassa 311

Uogólnione twierdzenie Pitagorasa 17

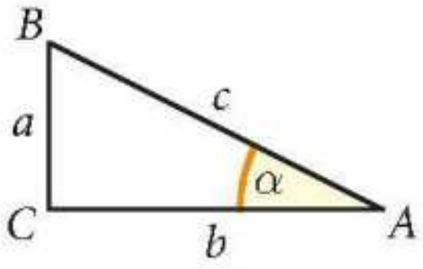
Wariancja 451
warstwowa próba losowa 457
wartość oczekiwana gry losowej 420
warunek konieczny istnienia ekstremum 349
— wystarczający istnienia ekstremum 349
wektory równe 109
— równoległe 110
wnioskowanie statystyczne 427
współczynnik kierunkowy prostej 124, 125
współrzędne wektora 109
wzory redukcyjne 40, 42, 44, 61
wzór cosinusów 17
— Herona 27
— na pole trójkąta 26
— ogólny ciągu arytmetycznego 207
— — — geometrycznego 226
— — — liczbowego 192, 193
— rekurencyjny (indukcyjny) ciągu 194
— sinusów 9

Zdarzenia identyczne 407
— niemożliwe 377
— pewne 377
— przeciwne 408
— wykluczające się 407
zdarzenie elementarne 375

Wybrane wzory trygonometryczne

Definicje funkcji trygonometrycznych

kąta ostrego	dowolnego kąta



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

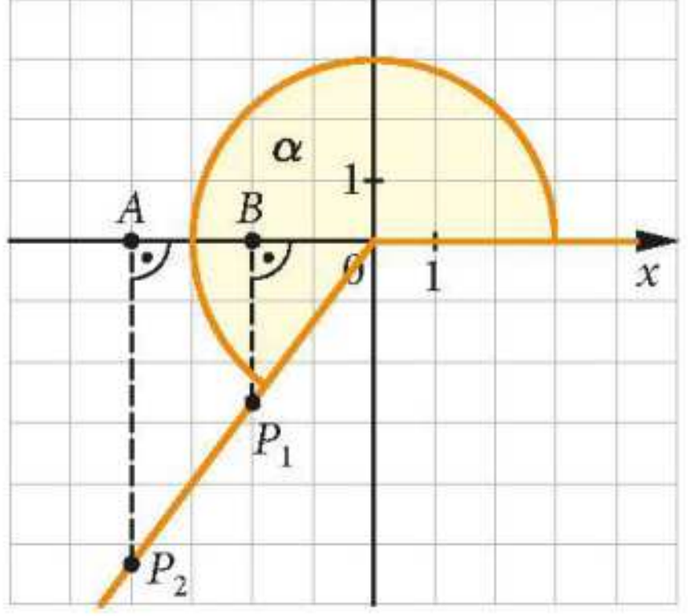
$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x_P}{r}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}$, dla $x_P \neq 0$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_P}{y_P}$, dla $y_P \neq 0$

$r = |OP| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$



Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0	nie istnieje	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nie istnieje	0	nie istnieje

α	$(0°; 90°)$	$(90°; 180°)$	$(180°; 270°)$	$(270°; 360°)$
	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg}\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

Wzory redukcyjne

β	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\beta =$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta =$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta =$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta =$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Podstawowe zależności trygonometryczne

- **Jedynka trygonometryczna:** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Zależności trygonometryczne w trójkącie

- **Pole trójkąta**

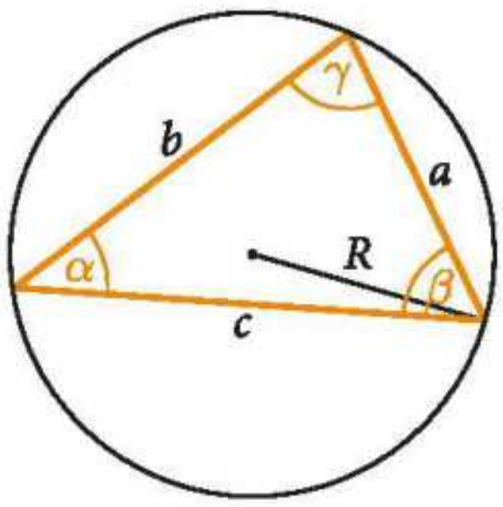
$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \qquad P = \frac{1}{2}ac\sin\beta \qquad P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

- **Twierdzenie sinusów**

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

- **Twierdzenie cosinusów**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik *Prosto do matury 3* do zakresu podstawowego i rozszerzonego został opracowany z myślą o uczniach przygotowujących się do matury z matematyki w zakresie rozszerzonym. Prawie 1500 zadań z odpowiedziami pozwala wyćwiczyć umiejętności sprawdzane na maturze.



Pomoc w zrozumieniu

Przykładowe rozwiązania zadań typu maturalnego pokazują różne możliwości radzenia sobie z takimi zadaniami.

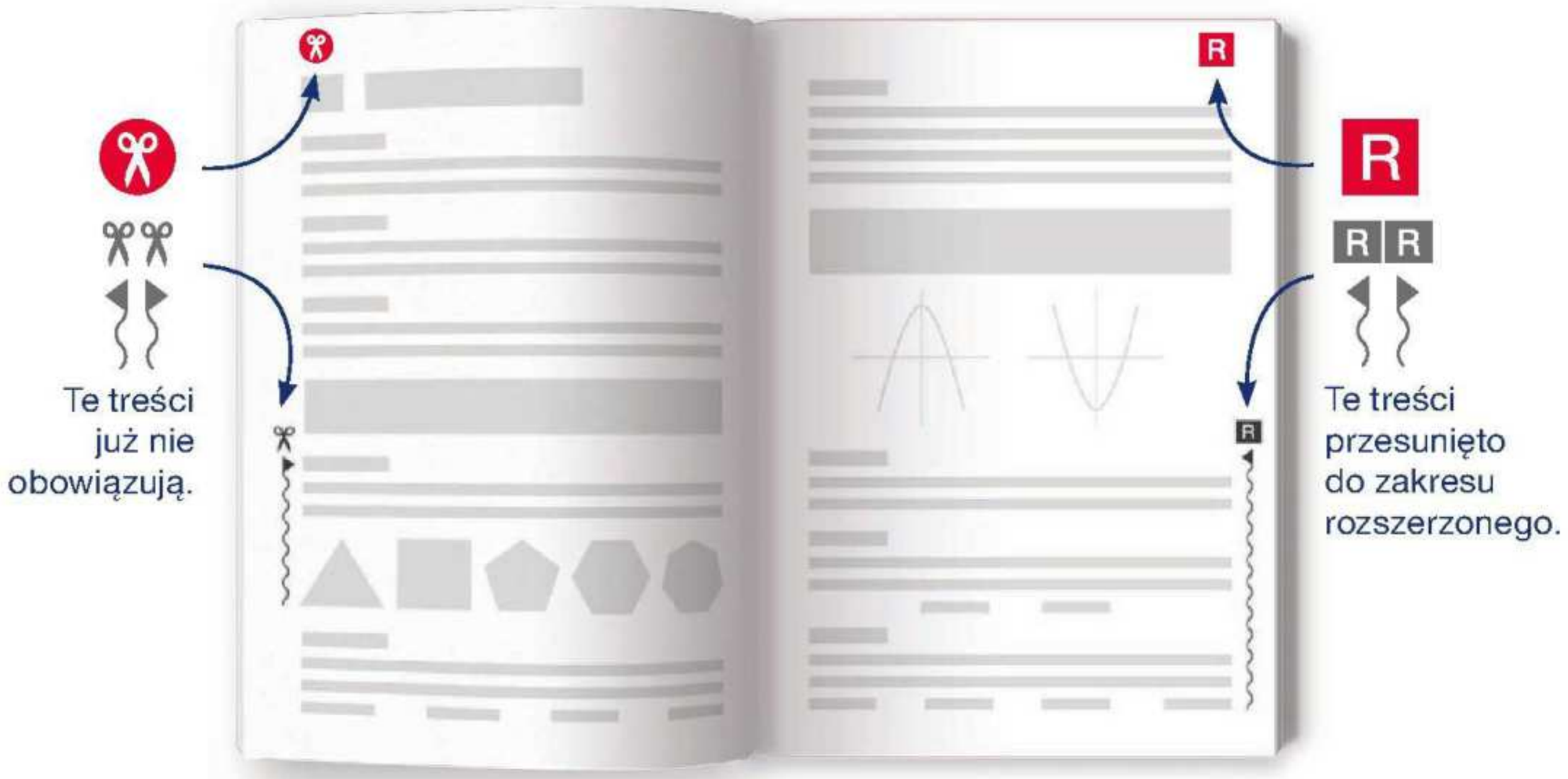
Porządkowanie i syntetyzowanie

Warto powtórzyć przypominają wiadomości z wcześniejszego etapu nauki.

Obszerne powtórzenia

Powtórzenie po każdym dziale zawiera zadania różnego typu, zarówno zamknięte, jak i otwarte.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia związane ze zmianami obowiązującymi od września 2024 r.



Czerwone ikony na górze strony informują, że na tej stronie są zmiany.
Ich dokładne umiejscowienie wskazują szare ikony z falkami.

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5091-5