Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era
Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr Marii Borowskiej, dr Moniki Fabijańczyk i dr hab. Anny Cegieły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)
Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5089-2

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski
Redakcja językowa: Marta Zuchowicz
Korekta językowa: Anna Wesołowska
Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak
Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło
Ilustracje: Wojciech Sendal
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar
Ilustracje na infografikach: Elżbieta Buczkowska, Natalia Helman, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar
Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Photographer's Choice/Harald Sund.
Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo – CPA Media Pte Ltd s. 390 (Galileusz), Pictorial Press Ltd s. 108 (Tartaglia), Science History Images s. 108 (Cardano), The Picture Art Collection s. 111; East News: Joanna Gajcy s. 45; Getty Images: E+/LeoPatrizi s. 17, Moment – PATSTOCK s. 276, wellsie82 s. 341, Moment Open/Photo by Vincent Ting s. 309, Stone/GK Hart/Vikki Hart s. 91, ullstein bild s. 30; Indigo: agefotostock/Luis Castañeda s. 207, Alamy Stock Photo – Juergen Nowak s. 282-283, Pictorial Press Ltd s. 390 (dzieło Napiera), Danita Delimont Agency/Paul Souders/DanitaDelimont.com s. 7; Shutterstock: Adam Gryko s. 175, Africa Studio s. 390 (pióro), blackzheep s. 391 (tablet), David Pereiras s. 87, dvande s. 391 (suwak logarytmiczny), Paladin12 s. 390–391 (stara kartka), Slava Gerj s. 108-109 (szkic Wenecji), Tatiana Popova s. 335, theshots.co s. 334, Tito Wong s. 365, travis manley s. 182, Vitaly Korovin s. 109 (stara kartka).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

R

Spis treści

Wstęp 5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych 6

Dział 1. Zastosowania funkcji kwadratowej

1. Warto powtórzyć – własności funkcji, funkcja kwadratowa 8
2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej 12
3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej 22
4. Wzory Viète'a 30
5. Nierówności kwadratowe 37
6. Zadania prowadzące do równań kwadratowych 43
7. Równania kwadratowe z parametrem 50
8. Nierówności kwadratowe z parametrem 57
9. Własności funkcji kwadratowej – podsumowanie 62
10. Powtórzenie 76

Dział 2. Wielomiany i wyrażenia wymierne

1. Określenie funkcji wielomianowej 88
2. Działania w zbiorze wielomianów 97
R 3. Wzory skróconego mnożenia 103
4. Równania wielomianowe 110
R 5. Dzielenie wielomianów 123
R 6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta 133
7. Nierówności wielomianowe 145
8. Wyrażenia wymierne 155
9. Działania na wyrażeniach wymiernych 164
10. Równania wymierne 171
11. Nierówności wymierne 180
12. Warto powtórzyć – proporcjonalność odwrotna 186
13. Funkcja wymierna 188
14. Powtórzenie 199

Dział 3. Planimetria

1. Wstęp do planimetrii 208
2. Okręgi i proste 217
3. Kąty w kole 231
4. Wielokąt wpisany w okrąg 248
5. Wielokąt opisany na okręgu 255

6. Twierdzenie Talesa 263
7. Podobieństwo 273
8. Trójkąty podobne 284
9. Powtórzenie 300

Dział 4. Funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego 310
2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego 321
3. Warto powtórzyć – pola i obwody figur 328
4. Zastosowania funkcji trygonometrycznych 336
5. Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego 343
6. Własności funkcji trygonometrycznych 353
7. Powtórzenie 359

Dział 5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

1. Warto powtórzyć – potęgi 366
2. Funkcja wykładnicza 368
3. Warto powtórzyć – logarytmy 378
4. Własności logarytmów 381
5. Funkcja logarytmiczna. Zastosowania logarytmów 392
*6. *Równania i nierówności wykładnicze* 400
*7. *Równania i nierówności logarytmiczne* 404
8. Powtórzenie 409

Odpowiedzi 418
Skorowidz 454
Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9 455
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych 456

*Temat wykraczający poza podstawę programową.

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy drugiej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera ponad półtora tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są * lub **, zadania typu „Wykaż…" poprzedzono znakiem D, natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego rozdziału uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

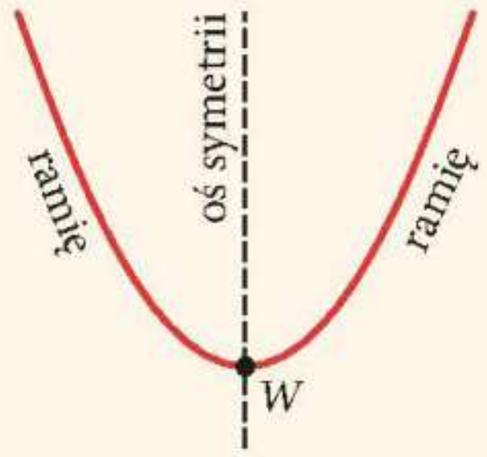
$x \in A;\ x \notin A$	x należy do zbioru A; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$	zbiór, którego elementami są a, b, c
N, **Z**, **Q**, **R**	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$\emptyset$	zbiór pusty
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$	logarytm przy podstawie a liczby b
$\log b$	logarytm przy podstawie 10 liczby b
$a < b\ \ (a > b)$	liczba a jest mniejsza (większa) od liczby b
$a \leqslant b$	liczba a jest nie większa, tzn. równa lub mniejsza od liczby b
$a \geqslant b$	liczba a jest nie mniejsza, tzn. równa lub większa od liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b\rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b)$	przedział lewostronnie domknięty
$(a; b\rangle$	przedział prawostronnie domknięty
$\|a\|$	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D	dziedzina funkcji
ZW	zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r
$k(S, r)$	koło o środku S i promieniu r
P	pole figury
obw	obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB	odcinek o końcach A i B
$\|AB\|$	długość odcinka AB
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a i b
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
Δ	delta; wyróżnik trójmianu kwadratowego
$\sin\alpha$	sinus kąta α
$\cos\alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg}\alpha$	tangens kąta α
$F_1 \equiv F_2$	figura F_1 jest przystająca do figury F_2
$F_1 \sim F_2$	figura F_1 jest podobna do figury F_2

Zastosowania funkcji kwadratowej

1

1. Warto powtórzyć – własności funkcji, funkcja kwadratowa

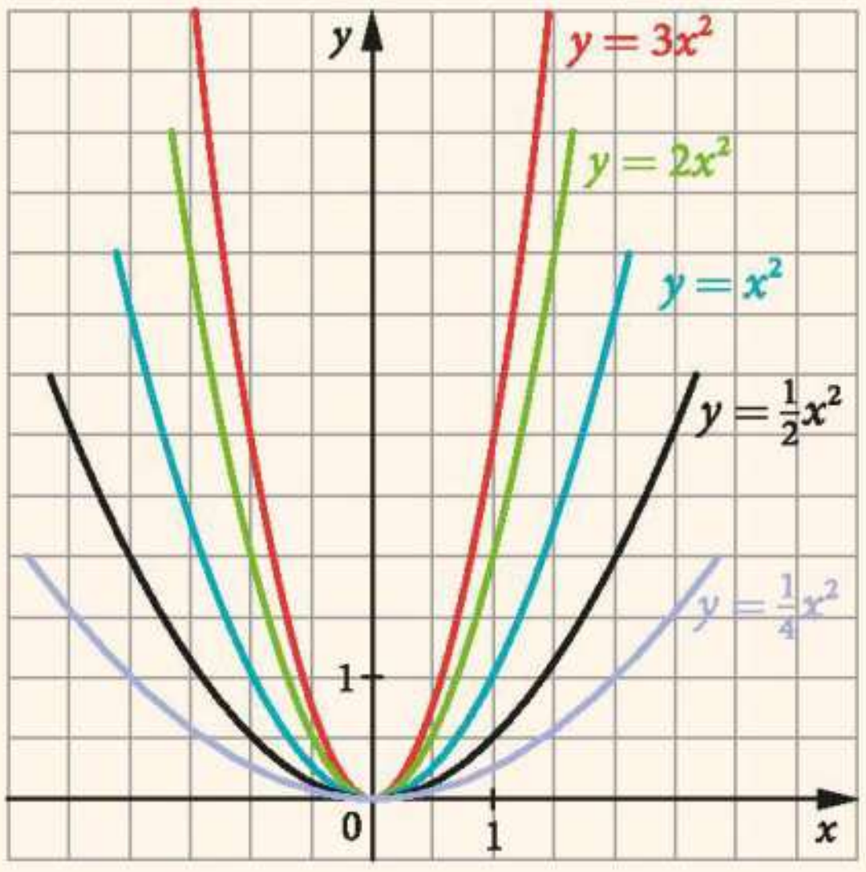
Parabola o równaniu $y = x^2$ jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. W dalszych rozważaniach tych zapisów na ogół nie będziemy rozróżniać.



Parabola ma dwa **ramiona** oraz **wierzchołek**, czyli punkt przecięcia paraboli z jej osią symetrii (na rysunku oznaczony literą W).

Własności funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a > 0$:

- zbiorem wartości jest przedział $\langle 0; \infty)$,
- funkcja ma wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$,
  funkcja nie ma wartości największej,
- miejscem zerowym jest $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$, więc wykres znajduje się w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych,
- w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\langle 0; \infty)$ jest rosnąca, zatem funkcja nie jest monotoniczna,
- osią symetrii wykresu jest oś y,
- równanie $f(x) = m$:
  dla $m < 0$ nie ma rozwiązań,
  dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m > 0$ ma dwa rozwiązania.



Wykres funkcji $y = -ax^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = ax^2$ względem osi x.

Wierzchołkiem każdej paraboli o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$, jest początek układu współrzędnych.

Definicja

Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x **w postaci kanonicznej**.

Parabola o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$, ma taki sam kształt jak parabola $y = ax^2$, a jej wierzchołkiem jest punkt $W = (p, q)$.

Przykład 1

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $W = (3, -1)$ przechodząca przez punkt $P = (1, 7)$. Napiszemy wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

Wiemy, że $W = (3, -1)$, zatem do postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ podstawiamy $p = 3$, $q = -1$.

$f(x) = a(x - 3)^2 - 1$

$7 = a(1 - 3)^2 - 1$ ⟵ punkt P należy do wykresu funkcji

$8 = 4a$, więc $a = 2$

Odp.: $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1$

Definicja

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x **w postaci ogólnej**.

Twierdzenie

- **Postacią kanoniczną funkcji** $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem funkcji kwadratowej**.

- **Wierzchołek paraboli** o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ma współrzędne:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

Przykład 2

Wyznaczymy współrzędne wierzchołka oraz równanie osi symetrii wykresu funkcji $f(x) = 3x^2 + 30x + 73$.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji jest parabola. Aby rozwiązać zadanie, przekształcimy wzór funkcji dany w postaci ogólnej $f(x) = 3x^2 + 30x + 73$ do postaci kanonicznej.

I sposób

Stosujemy metodę nazywaną dopełnianiem do kwadratu.

$$3x^2 + 30x + 73 = 3\left(x^2 + 10x\right) + 73 = 3\left[\left(x^2 + 2 \cdot 5x + 25\right) - 25\right] + 73 =$$

$$= 3\left[(x+5)^2 - 25\right] + 73 = 3(x+5)^2 - 75 + 73 = 3(x+5)^2 - 2$$

Zatem $f(x) = 3(x+5)^2 - 2$,

czyli $x_w = -5$, $y_w = -2$, a osią symetrii wykresu jest prosta $x = -5$.

II sposób

Korzystamy ze wzorów podanych w twierdzeniu. Mamy $a = 3$, $b = 30$, $c = 73$.

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{6} = -5$$

Aby obliczyć y_w, albo wyznaczamy wartość $\Delta = b^2 - 4ac = 900 - 12 \cdot 73 = 24$

i wówczas $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-24}{4 \cdot 3} = -2$,

albo znajdujemy $y_w = f(x_w) = f(-5) = 3 \cdot 25 - 150 + 73 = -2$.

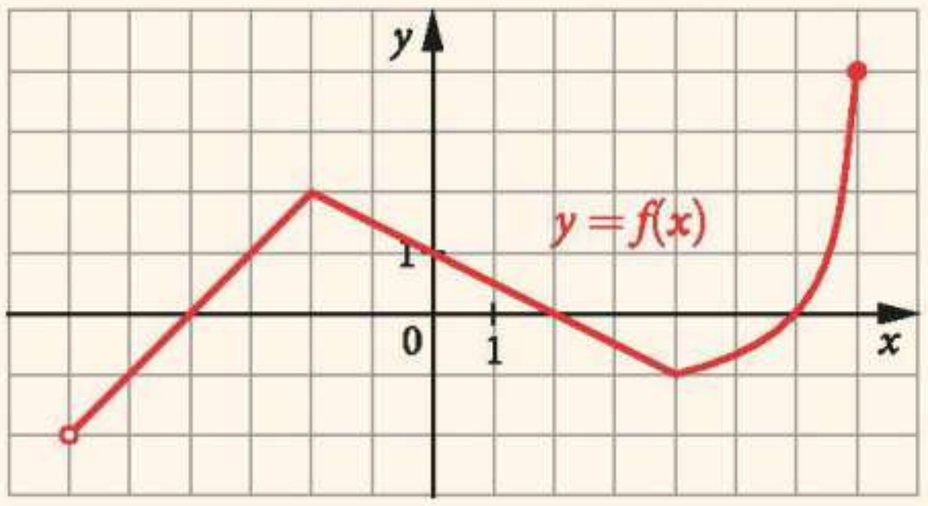
Odp.: Osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta $x = -5$, wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-5, -2)$.

Zadania

1.1. Dane są zbiór $A = \left\{-1, 0, \frac{3}{2}, 5\right\}$ i funkcja $f(x) = \frac{2x}{x-5}$. Oblicz wartość funkcji f dla tych liczb ze zbioru A, które należą do dziedziny funkcji f.

1.2. Odczytaj z wykresu funkcji f:

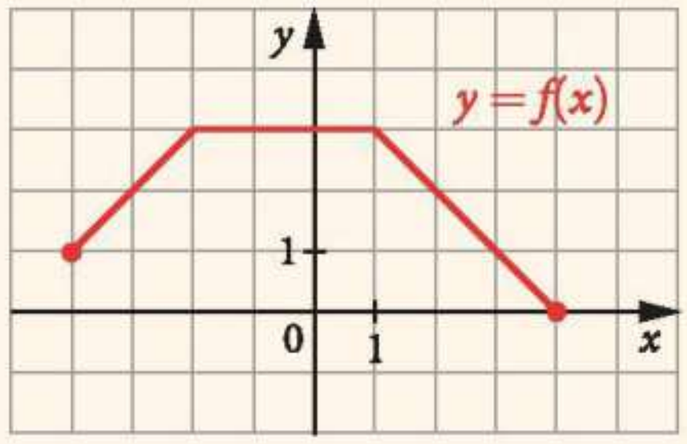
- dziedzinę D i zbiór wartości ZW,
- wartości największą i najmniejszą,
- miejsca zerowe,
- przedziały monotoniczności,
- zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$,
- liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.



1.3. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle 0; 10\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -3; 5\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x-2) - 1$.

1.4. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 3$ i przyjmuje wartość najmniejszą równą -11 dla $x = -6$. Podaj wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji $f(x+5) + 3$ oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

1.5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = g(x)$.



a) $g(x) = -f(x)$
b) $g(x) = f(x) - 1$
c) $g(x) = |f(x+4)|$
d) $g(x) = f(x-3) + 2$
e) $g(x) = f(-x) - 3$
f) $g(x) = |f(x) - 2|$

1.6. Przedstaw podane wyrażenie w postaci iloczynu. Wykorzystaj wzory skróconego mnożenia.

a) $(b-3)^2 - 1$
b) $p^2 - 4p + 4 - s^2$
c) $w^2 - 4z^2 + 12z - 9$

1.7. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{3x-6}$
b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1-x}}$
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{6-2x}}$

1.8. Podaj zbiór wartości i określ przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = -(x+1)^2 - 11$
b) $f(x) = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$
c) $f(x) = -\sqrt{5}\left(x + \sqrt{3}\right)^2$

1.9. Wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (-3, 1)$ przechodząca przez punkt $A = (1, 5)$. Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej.

1.10. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

a) $f(x) = -x^2 - x$
b) $f(x) = -9x^2 - 6x + 2$
c) $f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 0{,}75$

1.11. O funkcji kwadratowej f wiadomo, że: jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 3\rangle$, osią symetrii wykresu jest prosta o równaniu $x = 2$, wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 1)$. Napisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

1.12. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$
b) $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$

1.13. Dla jakiej wartości m równanie ma jedno rozwiązanie?

a) $57x^2 - 11 = m$
b) $7(x+11)^2 + 32 = m$
c) $-3x^2 - x + 1 = m$

1.14. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ należą punkty $K = (-3, -8)$ oraz $M = (6, 19)$. Wyznacz współczynniki b i c.

1.15. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2\right| - 1$. Dla jakich wartości m równanie $\left|\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2\right| - 1 = m$ ma 4 rozwiązania?

1.16. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 4 - \left|\frac{1}{4}x^2 - 2x\right|$. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności tej funkcji.

2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- odczytywanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej określonej w przedziale domkniętym

Przykład 1 ◂ zad. 2.5

Kowboje na Dzikim Zachodzie popisywali się strzelaniem do rzuconej pionowo w górę monety. Sekret tej sztuki polegał na tym, by trafić monetę w momencie, gdy była w najwyższym punkcie i przez chwilę jak gdyby zatrzymywała się w powietrzu.
Z fizyki wiadomo, że ruch monety w górę jest jednostajnie opóźniony, a osiąganą przez nią wysokość (jeśli pominiemy opór powietrza) obliczymy ze wzoru:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Przyjmijmy, że: $h_0 = 1\text{ m}$ – wysokość, z jakiej wyrzucona była moneta,

$v_0 = 6\text{ m/s}$ – prędkość początkowa monety,

$g = 10\text{ m/s}^2$ – przyspieszenie ziemskie.

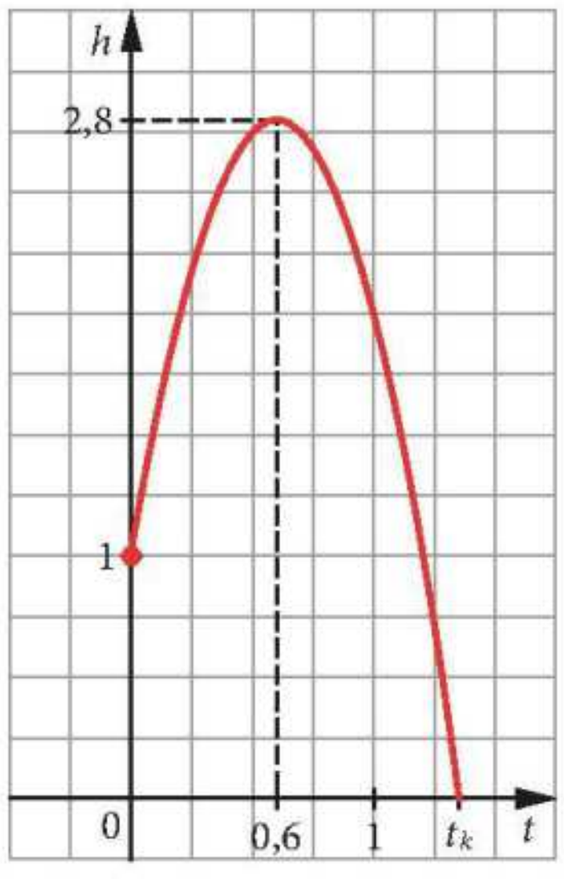
Wtedy, po podstawieniu danych i uporządkowaniu wzoru, mamy:

$$h(t) = -5t^2 + 6t + 1$$

Obliczymy, po jakim czasie moneta osiągnie największą wysokość i jaka ona będzie.
Dziedziną funkcji jest (mierzony w sekundach) czas trwania eksperymentu, czyli przedział od $t = 0$ do $t = t_k$ – chwili, w której moneta znajdzie się na ziemi.
Wykresem funkcji jest parabola skierowana ramionami do dołu.
Znajdźmy współrzędne (t_w, h_w) wierzchołka.

$$t_w = \frac{-6}{-10} = 0{,}6$$

$$h_w = h(t_w) = h(0{,}6) = -5(0{,}6)^2 + 6 \cdot 0{,}6 + 1 = 2{,}8$$



Moneta osiągnie najwyższe położenie równe 2,8 m po upływie 0,6 s.

Istotnym zastosowaniem matematyki jest rozwiązywanie problemów dotyczących **optymalizacji**. Funkcje opisujące rzeczywistość są na ogół bardzo skomplikowane, ale spróbujemy zilustrować to zagadnienie za pomocą uproszczonego modelu.

Jednym z zadań konstruktora mostu jest pogodzenie sprzecznych warunków – jak najlepszej jakości materiałów i jak najniższych kosztów budowy. Ponadto przyszli użytkownicy chcą, aby most się nie zawalił i stał wiele lat. Wszystkie te uwarunkowania są powiązane. Załóżmy, że konstruktorowi udało się przedstawić koszty budowy jako funkcję rodzaju materiałów. Aby wyznaczyć dziedzinę, musiał uwzględnić żądaną wytrzymałość planowanego mostu. Teraz powinien znaleźć argument, dla którego funkcja osiąga wartość najmniejszą. Jeśli natomiast wyznaczył funkcję opisującą wytrzymałość w zależności od materiałów, to w dziedzinie uzależnionej od kosztów musi szukać argumentu, dla którego wartość jest największa.
Funkcja kwadratowa jest jedną z tych funkcji, dla których zadanie wyznaczenia wartości największej lub najmniejszej (tzw. **wielkości ekstremalnych**) przy ustalonej dziedzinie jest proste.

Kowboje, rzecz jasna, nie wykonywali takich obliczeń jak w przykładzie 1 – swoje umiejętności nabywali dzięki praktyce. Również starożytni Rzymianie, którzy zbudowali jedne z najdłużej istniejących mostów, nie potrzebowali do tego badania funkcji. My jednak, żeby choć trochę zbliżyć się do aktualnych zastosowań matematyki, zajmiemy się znajdowaniem wartości ekstremalnych różnych funkcji kwadratowych.

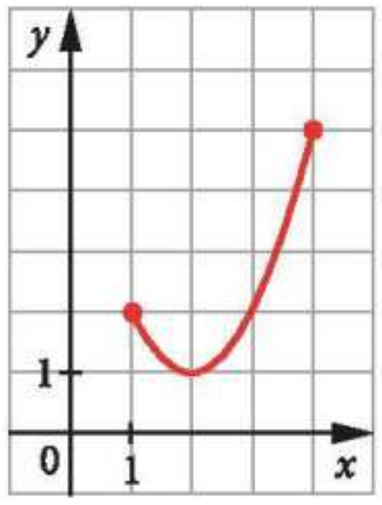
Przykład 2 ◂ zad. 2.6

Poszukamy wartości największej i wartości najmniejszej funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 5$ określonej w różnych dziedzinach D oraz wskażemy argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie

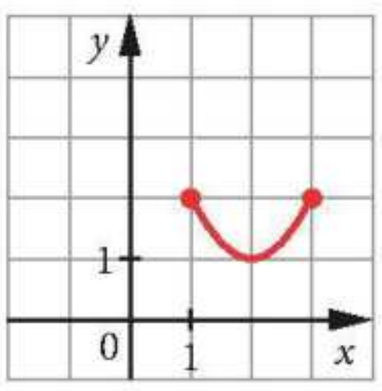
a) $D = \langle 1; 4 \rangle$

Wykres funkcji jest fragmentem paraboli o wierzchołku (x_w, y_w). Wartości ekstremalne funkcja może przyjąć albo dla argumentu x_w, albo na końcach przedziału $\langle 1; 4 \rangle$. Współrzędne wierzchołka to $x_w = 2$ i $y_w = f(2) = 1$. Natomiast $f(1) = 2$ i $f(4) = 5$. Zatem najmniejsza wartość funkcji to 1, dla $x = 2$; największa wartość funkcji to 5, dla $x = 4$.



b) $D = \langle 1; 3 \rangle$

Dla takiej dziedziny $x_w \in D$ oraz $f(1) = 2$ i $f(3) = 2$.
Najmniejszą wartością funkcji jest liczba 1, przyjmowana dla $x = 2$. Natomiast wartość największą, równą 2, funkcja przyjmuje dla dwóch argumentów: $x = 1$ oraz $x = 3$.



c) $D = \langle -1;\ 1\rangle$

Teraz $x_w \notin D$.

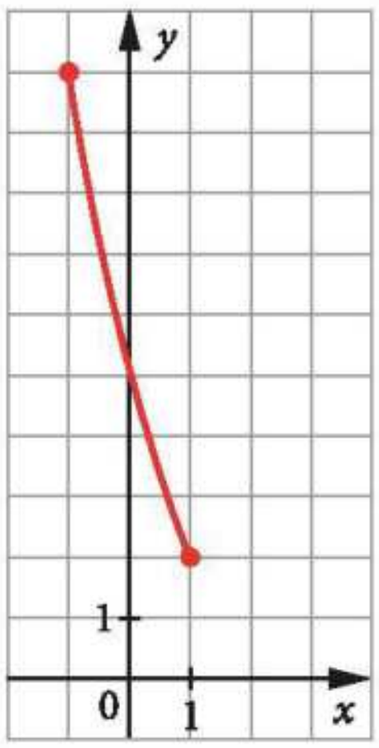
Obliczymy wartości funkcji na końcach dziedziny.

$f(-1) = 10$

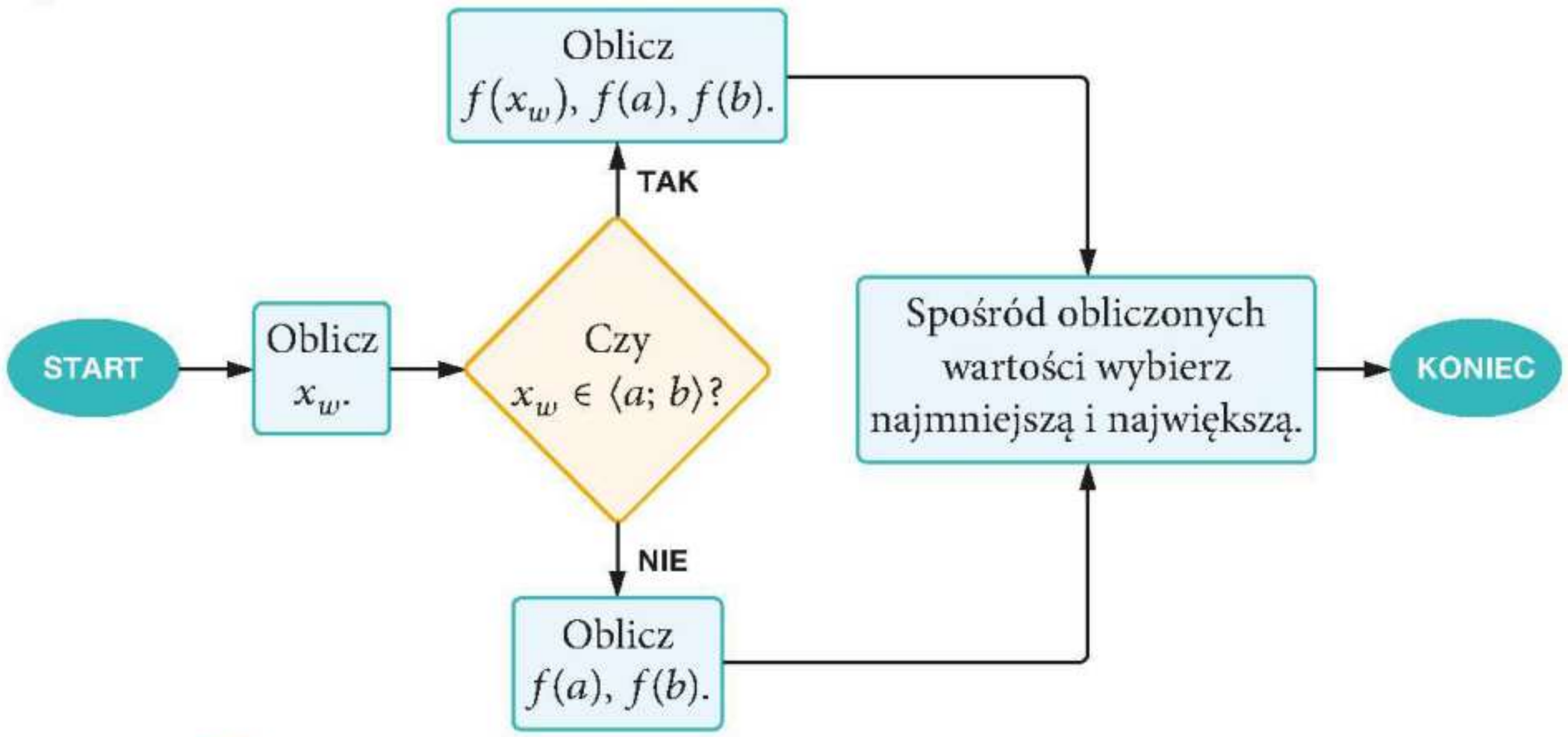
$f(1) = 2$

Najmniejszą wartością funkcji jest liczba 2, przyjmowana dla argumentu $x = 1$.

Największą wartość, równą 10, funkcja przyjmuje dla $x = -1$.



Jeżeli ograniczymy dziedzinę funkcji kwadratowej $y = f(x)$ do przedziału domkniętego $\langle a;\ b\rangle$, to przyjmie ona swoje wartości – największą i najmniejszą – albo na końcach przedziału, albo dla x_w. Metodę znajdowania tych wartości można przedstawić w postaci schematu.



Przykład 3 ◀ zad. 2.7

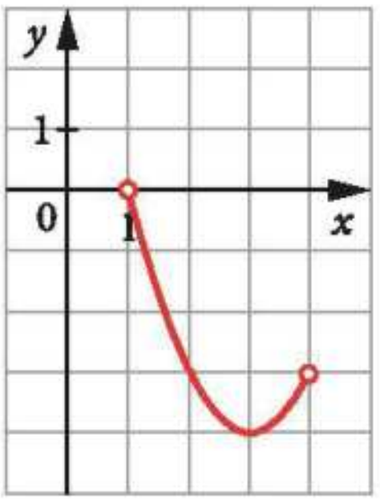
Znajdziemy wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $g(x) = x^2 - 6x + 5$ o dziedzinie $D = (1;\ 4)$.

Rozwiązanie

Parabola $y = x^2 - 6x + 5$ ma wierzchołek w punkcie $(x_w,\ y_w)$.

$x_w = 3 \in D$, zatem $y_w = g(3) = -4$

Punkty (1, 0) i (4, −3) nie należą do wykresu funkcji, ponieważ $1 \notin D$ i $4 \notin D$. Funkcja maleje w przedziale $(1;\ 3\rangle$ i rośnie w przedziale $\langle 3;\ 4)$, więc $y = -4$ jest najmniejszą wartością funkcji.



Odp.: Najmniejsza wartość: −4, dla $x = 3$. Wartości największej funkcja nie ma.

Przykład 4 ◂ zad. 2.20

Z drutu długości 20 cm budujemy prostokątną ramkę. Zbadamy pole tworzonego prostokąta jako funkcję długości jednego z jego boków. Sprawdzimy, czy wśród tak powstających prostokątów jest taki, który ma największe pole.

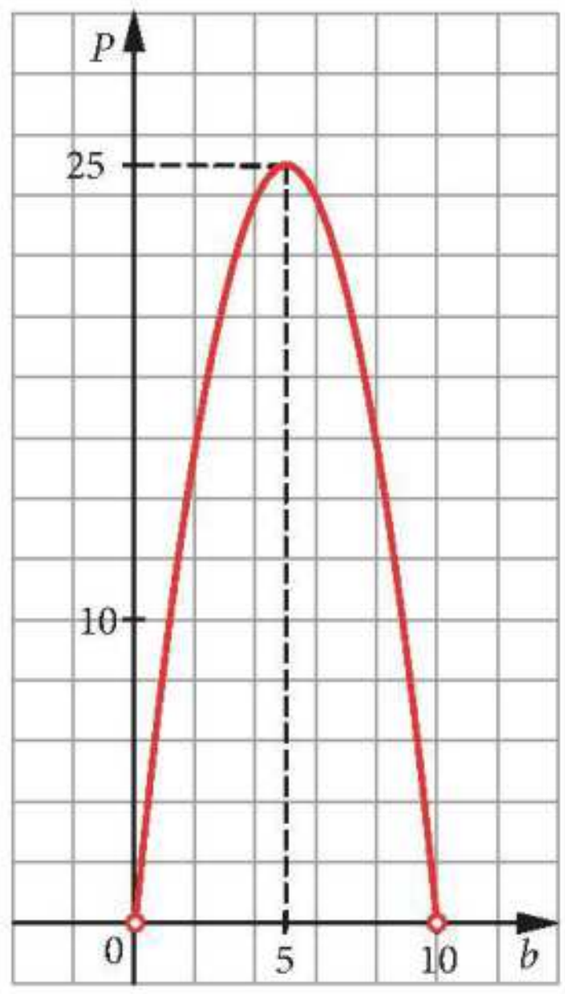
Rozwiązanie

Pole prostokąta o bokach a, b wyraża się wzorem $P = a \cdot b$, zatem zależy od dwóch zmiennych – długości dwóch sąsiednich boków.

Z treści zadania wiemy jednak, że $2a + 2b = 20$. Możemy więc uzależnić jedną zmienną od drugiej, np. $a = 10 - b$.

Wówczas, po podstawieniu ostatniej równości do wzoru na pole prostokąta, otrzymamy zależność pola tylko od jednej zmiennej.

$$P(b) = (10 - b) \cdot b$$
$$P(b) = -b^2 + 10b$$



Zastanówmy się, jaka jest dziedzina tej funkcji.

Długości obydwu boków muszą być liczbami dodatnimi:

$$b > 0 \text{ i } a = 10 - b > 0$$

Zatem $b \in (0; 10)$ i ten przedział jest dziedziną D.

Oznaczmy jako b_w pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji P.

$$b_w = 5 \in (0; 10)$$
$$P(5) = -25 + 50 = 25$$

Funkcja P ma wartość największą, gdy $b = 5$.

Wówczas $a = 10 - 5 = 5$.

Punkty (0, 0) oraz (10, 0) nie należą do wykresu, ponieważ 0 oraz 10 nie należą do dziedziny funkcji. Interpretacja geometryczna tego faktu jest następująca: gdyby b było równe 0, to zamiast prostokątnej ramki mielibyśmy dwa „sklejone" odcinki, każdy długości 10; jeżeli z kolei mielibyśmy $b = 10$, to sytuacja byłaby analogiczna – odcinek a miałby długość 0 i znów z prostokąta zrobiłby się odcinek. W jednym i drugim wypadku pole takiej „ramki" jest równe 0.

Odp.: Ze wszystkich prostokątów o obwodzie 20 cm największe pole ma kwadrat o boku 5 cm.

Przykład 5 ◂ zad. 2.21, 2.22

Grupa studentów planuje wyjazd do Francji na narty. Autokar, który chcą wynająć, zabiera maksymalnie 40 pasażerów. Najwyższą ceną, jaką każdy z uczestników może zapłacić za przejazd, jest 450 zł. Właścicielka autokaru zgadza się go wynająć po 450 zł od osoby, jeżeli pojedzie co najmniej 20 osób. Przedstawiciel grupy uzgadnia z nią, że jeżeli zbierze więcej niż 20 chętnych na wyjazd, to przy każdej kolejnej osobie cena wynajmu będzie mniejsza o 10 zł dla każdego uczestnika. Zatem, jeżeli pojedzie tylko 20 osób, to właścicielka autokaru otrzyma:

$20 \cdot 450$ zł $= 9000$ zł, jeżeli 21 osób, to $21 \cdot 440$ zł $= 9240$ zł itd.

Jeżeli x oznacza liczbę uczestników, o którą zwiększy się 20-osobowa grupa, to:

$20 + x$ jest liczbą wyjeżdżających studentów,

$450 - 10x$ jest ceną przejazdu dla każdego z nich,

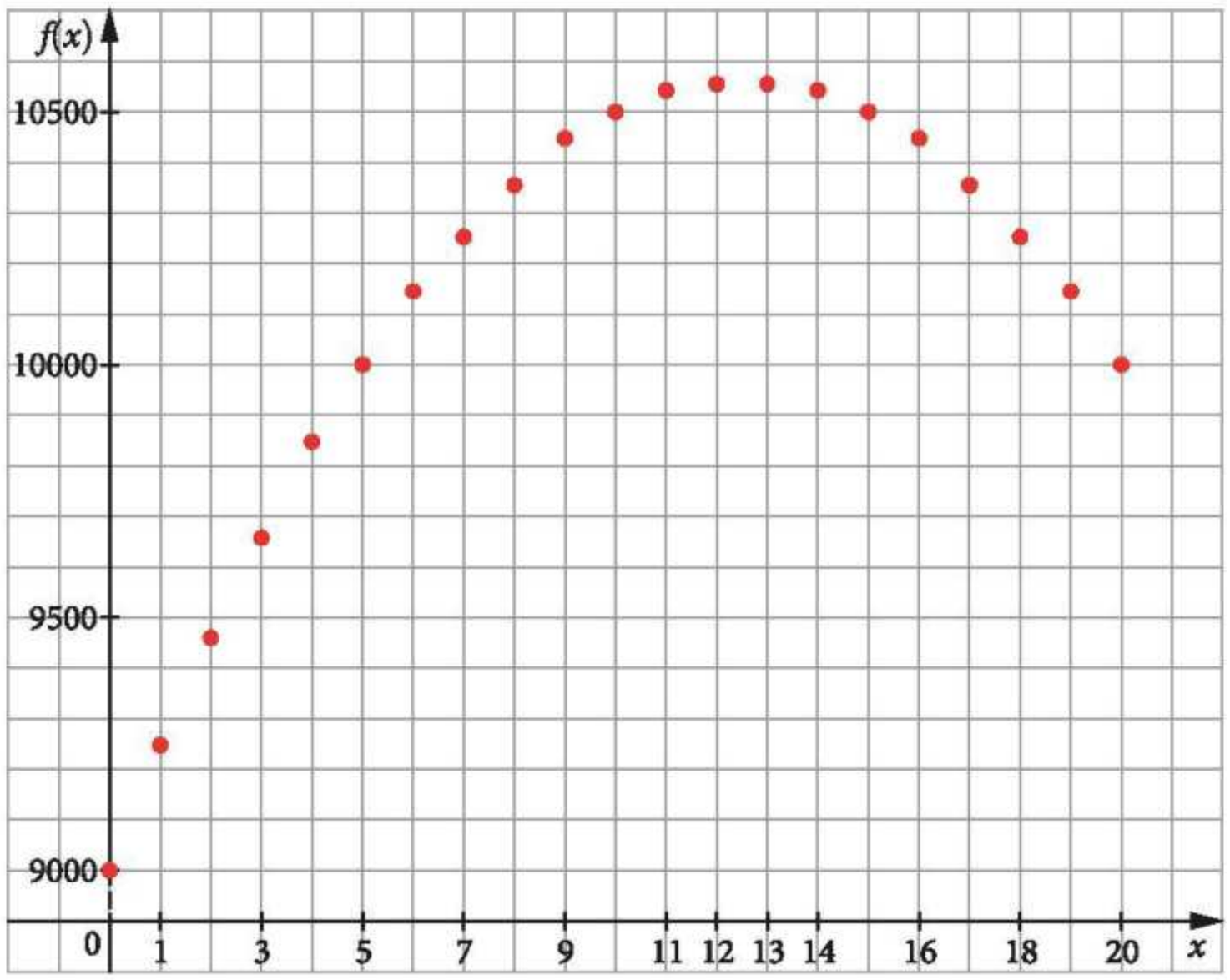
a właścicielka autokaru otrzyma:

$(20 + x)(450 - 10x)$ zł za jego wynajęcie.

Przyjmijmy, że $f(x) = (20 + x)(450 - 10x)$, gdzie $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$, i poszukajmy odpowiedzi na następujące pytania:

- Jaka liczba uczestników wyjazdu zapewni właścicielce autokaru najwyższą kwotę?
- Jaką maksymalną kwotę może otrzymać?
- Czy umowa ze studentami jest dla właścicielki korzystna?

Narysujmy wykres funkcji f.



Wartość największą funkcja f osiąga dla $x_w = 12{,}5$. Ta liczba nie należy do dziedziny, więc na pierwsze pytanie otrzymujemy dwie odpowiedzi.
Właścicielka autokaru otrzyma najwięcej pieniędzy dla $x = 12$ lub $x = 13$, czyli gdy autokarem będzie jechało 32 lub 33 uczestników.

Ta maksymalna kwota to: $32 \cdot 330$ zł $= 10\,560$ zł (albo $33 \cdot 320$ zł $= 10\,560$ zł).

Zauważmy, że $f(0) = 9000$, a $f(20) = 40 \cdot 250 = 10\,000$.

Zatem umowa ze studentami jest dla właścicielki korzystna niezależnie od liczby dodatkowych pasażerów.

Przykład 6

Kajetan, kierownik wyprawy w Himalaje, zatrudniał tragarzy do niesienia bagażu. Umówił się z 10 osobami, że każda z nich otrzyma 800 dolarów za wykonaną pracę. Ładunek okazał się na tyle ciężki, że tragarze zaprotestowali. Trzeba było zatrudnić dodatkowe osoby. Według nowej umowy każdy tragarz miał otrzymywać o 40 dolarów mniej przy zwiększanej o każdą następną osobę liczbie zatrudnionych. Ostatecznie okazało się, że trzeba było zapłacić najmniej korzystną dla wyprawy kwotę. Jaką łączną liczbę tragarzy przyjął Kajetan?

Rozwiązanie

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę dodatkowo zatrudnionych tragarzy, to:

$10 + x$ jest liczbą wszystkich zatrudnionych,
$800 - 40x$ jest zarobkiem każdego z nich.

Koszt wynajęcia tragarzy jest więc równy $(10 + x)(800 - 40x)$ dolarów. Zmienna x musi spełniać dwa warunki:

- $x \geqslant 0$
- $800 - 40x > 0$ ⟵ zarobek każdego tragarza musi być większy od zera

Zatem dziedziną funkcji $f(x) = 40(10 + x)(20 - x)$ jest zbiór liczb naturalnych z przedziału $\langle 0; 20)$.
Wartość największą funkcja f przyjmuje dla:

$x_w = 5$

Koszt niesienia bagażu był najwyższy przy pięciu dodatkowo przyjętych tragarzach, czyli Kajetan zatrudnił ich w sumie piętnastu i zapłacił:

$f(15) = 15 \cdot 600 = 9000$ (dolarów)

Odp.: 15 tragarzy.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

2.1. Dana jest funkcja $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$. Funkcja f ma wartość największą w dziedzinie D, gdy

A. $D = (0; 1)$. **B.** $D = (-3; -2\rangle$. **C.** $D = (2; 3\rangle$.

2.2. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

A. W przedziale $\langle -3; 0\rangle$ funkcja f ma wartość najmniejszą równą 1.

B. W przedziale $\langle 0; 3\rangle$ funkcja f ma wartość najmniejszą równą 1.

C. W przedziale $\langle -3; 3\rangle$ funkcja f ma wartość najmniejszą równą $\frac{2}{3}$.

2.3. Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = kx^2 - 2kx$

A. dla $k = 3$ ma wartość najmniejszą równą -3.

B. dla $k = -7$ ma wartość największą równą 7.

C. dla każdego $k > 0$ ma wartość najmniejszą równą $-k$.

2.4. Suma liczb a i b jest równa 24. Iloczyn tych liczb

A. nie przekracza 120.

B. jest największy, gdy $a = b$.

C. jest najmniejszy, gdy $a = b$.

2.5. Oblicz, na jaką wysokość wzniesie się piłka tenisowa odbita rakietą pionowo z wysokości 1 m, z prędkością początkową 20 m/s. Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie 1.

2.6. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w podanym przedziale. Podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = 2x^2 - 16x + 25$ $\langle 2; 5\rangle$

b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 6$ $\langle -1; 2\rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$ $\langle -8; -6\rangle$

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 9$ $\langle -1; 3)$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ $\langle 1; 5\rangle$

f) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ $\langle -3; \infty)$

2.7. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ w podanej dziedzinie D, o ile funkcja przyjmuje te wartości.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$ $D = (-2; 1)$

b) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ $D = (-4; 1)$

c) $f(x) = 3x^2 + 12x - 7$ $D = (-4; 0)$

d) $f(x) = -x^2 + 4x + 122$ $D = (-5; 2)$

2.8. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{dla} \quad x < 3 \\ -x^2 + 10x - 15 & \text{dla} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą tej funkcji oraz argumenty, dla których są one przyjmowane w podanym zbiorze D.

a) $D = \langle -13; 7 \rangle$ b) $D = \mathbf{N}$ c) $D = \langle -2; 8)$ d) $D = \langle 7; 8 \rangle$

2.9. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, która przyjmuje wartość najmniejszą równą -7 dla $x = 4$, a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 25)$.

2.10. Wykresem funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (-4, -1)$. Oblicz b i c.

2.11. Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola przechodząca przez punkty $(-3, -3)$ i $(0, -9)$. Wierzchołek paraboli jest punktem, którego pierwsza współrzędna jest równa -2. Wyznacz współczynniki a, b i c.

2.12. Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, których iloczyn jest największy.

2.13. Liczbę 30 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza.

2.14. Oblicz największy iloczyn takich dwóch liczb, których suma jest równa

a) 22. b) 50. c) m.

2.15. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych różniących się o 10?

2.16. Liczbę 6 rozłóż na sumę takich trzech składników, by pierwszy był dwa razy większy od drugiego i by suma kwadratów wszystkich trzech składników była możliwie najmniejsza.

2.17. Liczbę 24 rozłóż na sumę takich czterech składników, by pierwszy był większy od drugiego o 1, drugi był większy od trzeciego o 1 i by suma kwadratów wszystkich czterech składników była możliwie najmniejsza.

2.18. Liczbę a rozłóż na sumę takich dwóch składników, aby suma kwadratu pierwszego składnika i połowy kwadratu drugiego składnika była możliwie najmniejsza.

D **2.19.** Wykaż, że 16 jest największą wartością iloczynu dwóch liczb, których suma wynosi 8.

2.20. Prostokąt ma boki długości 16 cm i 10 cm. Dłuższy bok zmniejszamy o x cm, a krótszy zwiększamy o x cm. Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

2.21. Bilet wstępu do muzeum kosztuje 20 zł. Przygotowano specjalną ofertę dla grup liczących powyżej 15 osób. Grupa 16-osobowa płaci 19,50 zł za jeden bilet, grupa 17-osobowa płaci 19 zł za jeden bilet, grupa 18-osobowa płaci 18,50 zł za jeden bilet itd. Grupy nie mogą być liczniejsze niż 35 osób. Jak liczna grupa zapłaci najwięcej za bilety?

2.22. Fotograf zrobił zdjęcie klasie liczącej 33 uczniów. Cenę zdjęcia określił następująco: jeżeli odbitkę zamówi nie więcej niż 10 osób, to cena będzie równa 8 zł. Zamówienie zdjęcia przez każdą następną osobę spowoduje, że każdy zamawiający będzie płacić o 10 groszy mniej. Zakładając, że zrobienie odbitki kosztuje fotografa 1 zł, oblicz, przy jakiej liczbie zamówień jego zysk będzie największy. Ile ten zysk będzie równy?

2.23. Autokary wycieczkowe pokonują trasę z Luksoru do Hurghady w strzeżonym przez wojsko konwoju, w którym nie może być więcej niż 40 pojazdów. Najmniejsza łączna kwota, którą wszyscy jadący muszą zapłacić, jest równa 6000 $. Jeżeli konwój jest złożony z 30 autokarów, to przejazd kosztuje po 200 $ od jednego pojazdu. Z każdym dołączonym autokarem cena spada o 5 $ od jednego pojazdu. Jak liczna grupa autokarów jest dla konwojentów najkorzystniejsza?

2.24. Samorząd szkolny postanowił zorganizować dyskotekę dla uczniów sześciu klas. Na podstawie przeprowadzonej ankiety organizatorzy oszacowali, że przy cenie biletu wynoszącej 9 zł z każdej klasy przyjdzie 15 osób. Każdorazowe zwiększenie ceny biletu o złotówkę spowoduje, że z każdej klasy przyjdzie o 1 osobę mniej. Jaką cenę powinni ustalić, aby suma ze sprzedaży biletów była największa? Ilu osób należy się wówczas spodziewać?

2.25. Dysponujemy farbą w ilości wystarczającej do namalowania na placu 60 m linii. Za pomocą tej linii mamy wyznaczyć prostokątne, przedzielone na połowy boisko. Jaką długość i szerokość powinno mieć to boisko, aby jego powierzchnia była możliwie największa? W obliczeniach pomiń wymiary malowanej linii.

* **2.26.** Suma obwodów kwadratu i prostokąta o stosunku boków 2 : 1 wynosi 12. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć suma pól tych figur?

2.27. W kwadrat $ABCD$ o boku 2 wpisano trójkąt równoramienny AKL w taki sposób, że wysokość trójkąta zawarta jest w przekątnej AC. Zapisz pole tego trójkąta jako funkcję jego wysokości h. Narysuj wykres tej funkcji. Wyznacz wysokość trójkąta o największym polu.

2.28. Suma obwodów kwadratu i trójkąta równobocznego wynosi 1. Jakie długości powinny mieć boki tych figur, aby suma ich pól była najmniejsza?

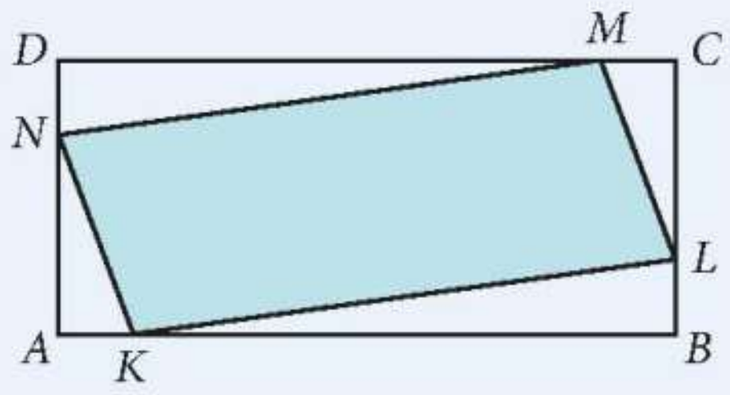
Prosto do matury

1. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. W przedziale $\langle 0; 3\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -5.
B. W przedziale $\langle 1; 10\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 4.
C. W przedziale $\langle -1; 5\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 7.

2. Wyznacz wartości: najmniejszą oraz największą funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x + 2$ w przedziale $\langle 0; 10\rangle$.

3. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych należących do przedziału $\langle -40; 40\rangle$ i różniących się o 12?

4. Prostokąt $ABCD$ ma boki długości $|AB| = 36$ cm i $|BC| = 16$ cm. Punkty K, L, M, N położone są na bokach prostokąta $ABCD$ w taki sposób, że $|AK| = |BL| = |CM| = |DN| = a$ cm. Dla jakiej wartości a pole czworokąta $KLMN$ jest najmniejsze?



5. Założenie sieci monitoringowej w osiedlu domów jednorodzinnych kosztuje 240 zł od każdego abonenta, pod warunkiem, że umowę z operatorem podpisze co najmniej pięciu chętnych. Z każdym dodatkowo włączonym w sieć domem cena zainstalowania maleje o 20 zł. Jaka liczba domów, w których zakładany będzie monitoring, jest najbardziej korzystna dla operatora? Jaką najniższą opłatę mogą uiścić abonenci przy maksymalnym zysku operatora?

3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Umiejętności:
- rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą
- zapisywanie funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Zauważmy, że czynność ta to nic innego jak rozwiązywanie **równania kwadratowego** $ax^2 + bx + c = 0$. Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **pierwiastkami** tego równania.

Przykład 1 ◂ zad. 3.6

Rozwiążemy podane równanie.

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $(x + 2)^2 - 7 = 0$

d) $(x + 5)^2 + 3 = 0$

Rozwiązanie

a) Lewą stronę równania możemy rozłożyć na czynniki: $x(x - 3) = 0$.
Mamy więc $x = 0$ lub $x - 3 = 0$.

Odp.: $x = 0$ lub $x = 3$

$a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

b) Możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia i zapisać podane równanie w postaci $(x - 3)^2 = 0$.
Jedynym pierwiastkiem równania jest więc liczba 3.

Odp.: $x = 3$

Wzory skróconego mnożenia:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ różnica kwadratów

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ kwadrat różnicy

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ kwadrat sumy

c) $(x + 2)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 0$
$\left[(x + 2) - \sqrt{7}\right] \cdot \left[(x + 2) + \sqrt{7}\right] = 0$
$x + 2 - \sqrt{7} = 0$ lub $x + 2 + \sqrt{7} = 0$

Odp.: $x = -2 + \sqrt{7}$ lub $x = -2 - \sqrt{7}$

d) W równaniu $(x+5)^2 + 3 = 0$ wartość wyrażenia po lewej stronie znaku równości jest dodatnia dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Odp.: Równanie nie ma pierwiastków.

Funkcja kwadratowa może nie mieć miejsc zerowych, mieć jedno miejsce zerowe lub dwa miejsca zerowe. Zbadamy, od czego zależy wystąpienie każdej z tych sytuacji oraz wyprowadzimy wzory pozwalające obliczyć miejsca zerowe. W tym celu zapiszemy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ w postaci iloczynu. Najpierw sprowadzamy funkcję do postaci kanonicznej i wyłączamy a przed nawias:

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

Dalsze postępowanie uzależniamy od znaku Δ – wyróżnika trójmianu kwadratowego.

I. Jeżeli $\Delta > 0$, to istnieje $\sqrt{\Delta}$, więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym możemy zapisać jako różnicę kwadratów i rozłożyć na czynniki (zob. przykład 1c).

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \qquad \longleftarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$f(x) = a\left[x - \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x - \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$f(x) = 0$ gdy $x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ lub $x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$, czyli dla:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

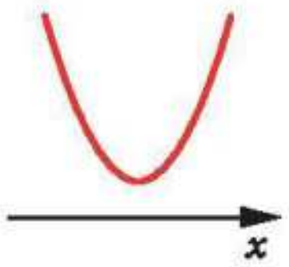
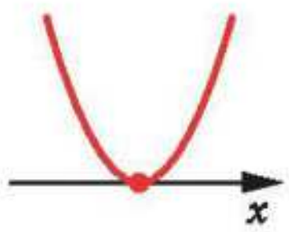
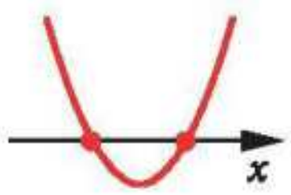
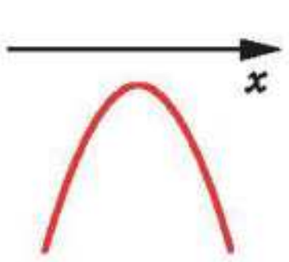
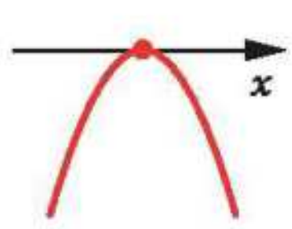
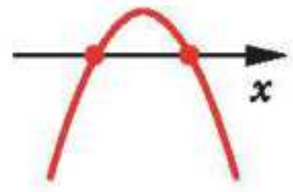
II. Jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji jest $x = \frac{-b}{2a}$ (zob. przykład 1b).

III. Jeżeli $\Delta < 0$, to $\frac{-\Delta}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią. Wyrażenie $\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ jest dodatnie dla każdej wartości x (zob. przykład 1d). Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Rozważymy teraz, w jaki sposób liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej wpływa na znak Δ.

Z postaci kanonicznej wynika, że $\Delta = -4aq$, gdzie q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$.

Na rysunkach przedstawione są możliwe położenia paraboli względem osi x w zależności od liczby miejsc zerowych funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Brak miejsc zerowych	Jedno miejsce zerowe	Dwa miejsca zerowe
		
$\begin{cases} a > 0 \\ q > 0 \end{cases}$ więc $\Delta < 0$	$\begin{cases} a > 0 \\ q = 0 \end{cases}$ więc $\Delta = 0$	$\begin{cases} a > 0 \\ q < 0 \end{cases}$ więc $\Delta > 0$
		
$\begin{cases} a < 0 \\ q < 0 \end{cases}$ więc $\Delta < 0$	$\begin{cases} a < 0 \\ q = 0 \end{cases}$ więc $\Delta = 0$	$\begin{cases} a < 0 \\ q > 0 \end{cases}$ więc $\Delta > 0$

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

- **nie ma** pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma **jeden** pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$; wówczas $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
- ma **dwa** pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$; wówczas

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ oraz } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

W dalszych przykładach i zadaniach stosujemy oznaczenia współczynników przyjęte w treści twierdzenia.

Przykład 2 ◂ zad. 3.10, 3.11

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $2x^2 - x + 1 = 0$

Współczynniki trójmianu po lewej stronie to $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$

Ponieważ $\Delta < 0$, równanie nie ma rozwiązań.

b) $3x^2 + 2\sqrt{15}x = -5$ ⟵ porządkujemy równanie

$3x^2 + 2\sqrt{15}x + 5 = 0$ ⟵ $a = 3$, $b = 2\sqrt{15}$, $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{15}\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 15 - 4 \cdot 15 = 0$

Ponieważ $\Delta = 0$, jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Zauważmy, że jeżeli $\Delta = 0$, to $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-b}{2a}$.

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$

Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

Sposób oznaczania pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ symbolami x_1 oraz x_2 jest tradycyjnie przyjęty. Nieistotne jest, czy oznaczymy $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ symbolem x_1 czy x_2 (czy wprowadzimy jeszcze inne oznaczenie).

Z wyprowadzenia wzorów na pierwiastki równania kwadratowego wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można zapisać **w postaci iloczynowej**, gdy $\Delta \geqslant 0$, a mianowicie:

- jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$ i $x_0 = -\frac{b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Przykład 3 ◀ zad. 3.13

Zapiszemy podaną funkcję w postaci iloczynowej (jeżeli to możliwe).

Rozwiązanie

a) $f(x) = -3x^2 + x + 2$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-6} = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-6} = 1$$

Odp.: $f(x) = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$

Podczas sprowadzania wzoru funkcji kwadratowej do postaci iloczynowej należy pamiętać o zapisaniu współczynnika a przed nawiasami.

b) $f(x) = 2x^2 - x + 4$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$

Odp.: Funkcja f nie ma postaci iloczynowej.

c) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$

$\Delta = 24 - 24 = 0$, $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Odp.: $f(x) = 3\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

Przykład 4 ◀ z. 3.18

Rozwiążemy równanie $x^2 + 3 = |2x + 1| + x$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla} \quad x \geqslant -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{dla} \quad x < -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Równanie $x^2 + 3 = |2x + 1| + x$ rozwiążemy więc oddzielnie w dwóch przedziałach.

I. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

$x^2 + 3 = -2x - 1 + x$

$x^2 + x + 4 = 0$

$\Delta = 1 - 16 < 0$, zatem w przedziale $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ równanie nie ma rozwiązań.

II. $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right)$

$x^2 + 3 = 2x + 1 + x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{2} = 1$ i $1 \in \left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right)$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 1}{2} = 2$ i $2 \in \left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right)$

Odp.: $x = 1$ lub $x = 2$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

3.1. Pierwiastkami równania $-x^2 + 4x + 3 = 0$ są

A. dwie liczby niewymierne.

B. dwie liczby dodatnie.

C. liczby $2 - \sqrt{7}$ i $2 + \sqrt{7}$.

3.2. Równanie $3x^2 - 2x - 1 = 0$

A. nie ma pierwiastków.

B. ma dwa pierwiastki całkowite.

C. ma dwa pierwiastki o różnych znakach.

3.3. Równanie $x^2 + 4x - k = 0$
A. dla $k = -5$ nie ma pierwiastków.
B. dla $k = 4$ ma jeden pierwiastek.
C. dla $k = \sqrt{2}$ ma dwa pierwiastki.

3.4. Liczba 3 jest pierwiastkiem równania $x^2 + bx + c = 0$. Wynika stąd, że
A. c jest liczbą całkowitą podzielną przez 3.
B. $b^2 \geqslant 4c$.
C. Liczba $\frac{c}{3}$ też jest pierwiastkiem tego równania.

3.5. Jaką liczbę należy wpisać w miejsce ?, aby podane równanie miało tylko jedno rozwiązanie?
a) $x^2 - \boxed{?}\, x + 81 = 0$
b) $x^2 - 6x + \boxed{?} = 0$
c) $-9x^2 + x + \boxed{?} = 0$
d) $\boxed{?}\, x^2 - x + 16 = 0$

3.6. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.
a) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$
b) $25x^2 - 20x + 4 = 0$
c) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
d) $-6x^2 + 7x = 0$

3.7. Wykorzystaj postać iloczynową równania i odczytaj jego pierwiastki.
a) $3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \pi) = 0$
b) $-4x\left(x + 3\sqrt{2}\right) = 0$
c) $-2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3) = 0$
d) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$

3.8. Współczynniki a, p i q funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ spełniają podane warunki. Podaj liczbę miejsc zerowych tej funkcji.
a) $a > 0,\ q = 0,\ p \in \mathbf{R}$
b) $a > 0,\ q > 0,\ p \in \mathbf{R}$
c) $a < 0,\ q > 0,\ p \in \mathbf{R}$
d) $a < 0,\ p > 0,\ q \in \mathbf{R}$

3.9. Bez rozwiązywania równania podaj liczbę jego pierwiastków.
a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$
b) $7x^2 - 3x + 10 = 0$
c) $5x^2 + x - 1 = 0$
d) $-4x^2 + 20x - 25 = 0$

3.10. Rozwiąż równanie.
a) $x^2 + 8x + 7 = 0$
b) $x^2 - 10x + 21 = 0$
c) $16x^2 + 24x + 9 = 0$
d) $3x^2 + x - 4 = 0$
e) $x^2 + x - 1 = 0$
f) $x^2 - 4x - 1 = 0$

3.11. Rozwiąż równanie.

a) $-6x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 - 4x + 7 = 0$

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $4x^2 - 12x + 1 = 0$

f) $-4x^2 + 9x - 9 = 0$

3.12. Rozwiąż równanie.

a) $(3x - 5)(2x + 1) + (7x - 5)^2 = -2$

b) $(1 - 5x)(x - 2) - (2 + 3x)(2 - 3x) = 7(2x - 3)^2 + 2x$

c) $4\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - 3(x - 2)(3x + 2) = (7 - x)^2 - 16$

d) $11\left(3x^2 + 3\right) - 11 = 4(x + 5)^2 - (1 - 2x)^2$

3.13. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 3$

b) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

c) $f(x) = -6x^2 + x + 2$

d) $f(x) = 12x^2 - 12x + 3$

3.14. Dane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej f oraz jej współczynnik a. Zapisz tę funkcję w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $a = 1$ $x_1 = -9$ $x_2 = 2$

b) $a = -2$ $x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = \sqrt{3}$

c) $a = 3 - 2\sqrt{2}$ $x_0 = -0{,}2$

d) $a = 1$ $x_1 = 1 - \sqrt{7}$ $x_2 = 1 + \sqrt{7}$

3.15. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji f oraz punktu P przecięcia paraboli z osią y. Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

d) $f(x) = -x^2 - x + \frac{15}{4}$

3.16. Pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$ są liczby przeciwne do pierwiastków równania $x^2 - 7x + 5 = 0$. Wyznacz b i c.

3.17. Rozwiąż równanie.

a) $\left|x^2 - 4\right| = 3$

b) $\left|3 - 2x^2\right| = 1$

c) $\left|x^2 - 5x\right| = 6$

d) $\left|2x^2 + x\right| = 1$

e) $\left|x^2 + 4x + 2\right| = 2$

f) $\left|x^2 + x - 2\right| = 4$

3.18. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$

b) $x^2 = |x - 3| - 1$

c) $x^2 + |2x - 2| = 1$

d) $x^2 - |5x - 10| = 4$

e) $x^2 + |x - 3| = 9$

f) $x^2 - |2x - 6| = 2$

3.19. Rozwiąż równanie.

a) $\left||x^2 - 2| - 3\right| = 4$

b) $\left||x^2 - 7| - 6\right| = 3$

c) $\left||x^2 - 7x| - 2\right| = 4$

d) $\left||x^2 + 4x| - 2\right| = 2$

3.20. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \dfrac{5}{-x^2 - 2x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 - 3x + 5}$

3.21. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 + 10|x| - 6}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{|x^2 - x| - 30}$

Prosto do matury

1. Jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej f jest liczba 2. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(1, 2)$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wyróżnik funkcji f jest równy 0.

B. Funkcję f można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = (x - 2)^2$.

C. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie o współrzędnej 4.

2. Rozwiąż równanie $(2x - 1)^2 - (3x - 5)^2 = (x + 1)(5 - x) + 1$.

3. Zapisz funkcję $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ w postaciach: kanonicznej oraz iloczynowej.

4. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4|x| - 5}$.

5. Pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$ i $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$.
Wyznacz b i c.

4. Wzory Viète'a

Umiejętności:

- stosowanie wzorów Viète'a

Podamy teraz pewne zależności między pierwiastkami równania kwadratowego a współczynnikami funkcji kwadratowej. Zależności te noszą nazwę **wzorów Viète'a**.

François Viète (1540–1603) – francuski prawnik i matematyk, jest uznawany za ojca współczesnej algebry. Jako pierwszy używał w swoich pracach liter do oznaczania współczynników równań, wprowadził też symbole + i –. Podczas wojny francusko-hiszpańskiej znalazł klucz do szyfru używanego w listach przez króla hiszpańskiego Filipa II.

Twierdzenie

Wzory Viète'a

Równanie $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ ma pierwiastki x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Zwrot „wtedy i tylko wtedy" oznacza, że prawdziwe są dwa twierdzenia:

I. Jeżeli równanie $ax^2+bx+c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

II. Jeżeli liczby x_1, x_2 spełniają warunek $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, to są one pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Udowodnimy obydwa twierdzenia.

Dowód I

Równanie $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ ma pierwiastki, o ile $\Delta \geqslant 0$. Wtedy:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Zatem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Dowód II

Jeżeli liczby x_1, x_2 spełniają warunek $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, to $b = -a(x_1 + x_2)$ oraz $c = a(x_1 \cdot x_2)$. Zatem równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma postać

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1 \cdot x_2) = 0$$

Oznaczmy wyrażenie po lewej stronie tego równania przez $f(x)$. Wówczas

$f(x_1) = ax_1^2 - a(x_1 + x_2)x_1 + a(x_1 \cdot x_2) = 0$ oraz

$f(x_2) = ax_2^2 - a(x_1 + x_2)x_2 + a(x_1 \cdot x_2) = 0$, czyli liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami badanego równania.

Koniec dowodu

Uwaga: Dla każdego trójmianu kwadratowego można zapisać ilorazy $-\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$, ale wyrażają one sumę i iloczyn pierwiastków równania wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$.

Wzorów Viète'a możemy używać do rozwiązywania w pamięci niektórych równań kwadratowych.

Przykład 1 ◀ zad. 4.5

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 152x + 300 = 0$

Poszukujemy liczb x_1, x_2, które spełniają podany układ równań.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -152 \\ x_1 \cdot x_2 = 300 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -150 \end{cases}$$

Odp.: $x = -2$ lub $x = -150$

b) $x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = 9 - 20 < 0$ ⟵ w tym wypadku szybciej wykażemy brak pierwiastków, gdy zbadamy znak Δ

Odp.: Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 2 ◀ zad. 4.7

Bez obliczania pierwiastków podanego równania określimy ich znaki.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 37x - 5 = 0$

$\Delta = 37^2 + 20 > 0$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki.

$x_1 \cdot x_2 = -5 < 0$

Odp.: Pierwiastki równania mają różne znaki.

Liczby p i q mają **różne znaki** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$p \cdot q < 0$

Liczby p i q są **dodatnie** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} p \cdot q > 0 \\ p + q > 0 \end{cases}$$

Liczby p i q są **ujemne** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} p \cdot q > 0 \\ p + q < 0 \end{cases}$$

b) $x^2 - 131x + 47 = 0$

$\Delta = 131^2 - 4 \cdot 47 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = 47 > 0$ ⟵ oba pierwiastki są tego samego znaku

$x_1 + x_2 = 131 > 0$

Odp.: Pierwiastki równania są dodatnie.

c) $x^2 + \sqrt{126}x + 13 = 0$

$\Delta = 126 - 52 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = 13 > 0$ ⟵ oba pierwiastki są tego samego znaku

$x_1 + x_2 = -\sqrt{126} < 0$

Odp.: Pierwiastki równania są ujemne.

Podsumujmy:

jeżeli w równaniu $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$ i $\Delta > 0$, iloczyn pierwiastków jest:

- ujemny, to pierwiastki są przeciwnych znaków,
- dodatni, to pierwiastki są tego samego znaku i wówczas, aby odpowiedzieć na pytanie, czy obydwa są dodatnie czy ujemne, badamy znak ich sumy.

Przykład 3 ◂ zad. 4.12

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2. Suma miejsc zerowych jest równa 4, a ich iloczyn wynosi −5. Do wykresu funkcji f należy punkt $A = (3, -8)$. Napiszemy wzór funkcji f w postaci ogólnej.

Rozwiązanie

I sposób

Obliczamy miejsca zerowe.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases}$$

Ten układ równań można rozwiązać w pamięci.

$x_1 = 5, \ x_2 = -1$

Korzystamy z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a(x - 5)(x + 1)$

$-8 = a(3 - 5)(3 + 1)$ ⟵ punkt $A = (3, -8)$ należy do wykresu funkcji

$a = 1$

$f(x) = (x - 5)(x + 1)$

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

II sposób

Zapisujemy wszystkie informacje o funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, w postaci układu równań. Korzystamy ze wzorów Viète'a.

$$\begin{cases} \frac{-b}{a} = 4 & \longleftarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = -5 & \longleftarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ -8 = 9a + 3b + c & \longleftarrow \text{punkt } A = (3, -8) \text{ należy do wykresu funkcji} \end{cases}$$

Wyznaczamy z drugiego równania np. $c = -5a$ i podstawiamy je do trzeciego. Otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = 4 \\ 9a + 3b - 5a = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 3b = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases}$$

Odp.: $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Przykład 4 ◀ zad. 4.18, 4.19

Równanie $x^2 - 3x - 7 = 0$ ma dwa różne pierwiastki $(\Delta > 0)$. Obliczymy sumę odwrotności tych pierwiastków.

Rozwiązanie

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} \qquad \longleftarrow \text{korzystamy ze wzorów Viète'a}$$

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = -7$$

Odp.: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{7}$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

4.1. Pierwiastki równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczbami ujemnymi. Wynika z tego, że

A. $b < 0$. **B.** $b \leqslant 0$. **C.** $c < 0$.

4.2. Pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$ są liczbami dodatnimi. Zatem

A. $a < 0$. **B.** $b > 0$. **C.** $c > 0$.

4.3. Dane jest równanie $3x^2 + x - 11 = 0$.

A. Suma pierwiastków tego równania jest równa $-\frac{1}{3}$.

B. Pierwiastki tego równania są liczbami wymiernymi.

C. Pierwiastki tego równania są liczbami o przeciwnych znakach.

4.4. Dane jest równanie $x^2 + 7x + 8 = 0$.

A. Iloczyn pierwiastków tego równania jest równy 8.

B. Suma kwadratów pierwiastków tego równania jest równa 33.

C. Pierwiastki tego równania są liczbami niewymiernymi.

4.5. Rozwiąż równanie. Skorzystaj ze wzorów Viète'a i postaraj się odgadnąć rozwiązania.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 20 = 0$

c) $x^2 + 40x + 300 = 0$

d) $x^2 - 4x - 21 = 0$

4.6. Podaj przykład równania postaci $ax^2 + bx + c = 0$, które ma dane pierwiastki.

a) $x_1 = 8, \quad x_2 = -3$

b) $x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{6}$

c) $x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = -3\sqrt{3}$

d) $x_1 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$

4.7. Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki. Jeżeli ma, ustal ich znaki.

a) $3x^2 - x - 7 = 0$

b) $\frac{1}{16}x^2 - 5x + 20 = 0$

c) $-x^2 + x + 1 = 0$

d) $-3x^2 - 50x - 1 = 0$

4.8. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$. Znaki pierwiastków oraz współczynnika c są podane. Ustal znaki współczynników a i b.

a) $x_1 > 0, \ x_2 > 0$ i $c > 0$

b) $x_1 < 0, \ x_2 < 0$ i $c > 0$

c) $x_1 > 0, \ x_2 > 0$ i $c < 0$

d) $x_1 < 0, \ x_2 < 0$ i $c < 0$

4.9. Podaj, o ile istnieje, przykład takich liczb b i c, aby $bc > 0$ oraz równanie $x^2 + bx + c = 0$ miało dwa różne pierwiastki

a) różnych znaków. b) dodatnie. c) ujemne.

4.10. Pierwiastkami równania $4x^2 + bx + 28 = 0$ są dwie liczby całkowite. Wyznacz te pierwiastki oraz współczynnik b.

4.11. Czy istnieje równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są liczby x_1, x_2 spełniające podane warunki? Jeżeli tak, podaj przykład takiego równania.

a) $x_1 \cdot x_2 = 5 \qquad x_1 + x_2 = 3$

b) $x_1 \cdot x_2 = -33 \qquad x_1 + x_2 = -8$

4.12. Funkcja kwadratowa $f(x)$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 + x_2 = -2\frac{1}{2}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = -1\frac{1}{2}$. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $P = (1, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.13. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right\rangle$, malejąca w przedziale $\left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$ i ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2, których iloczyn jest równy 2. Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(0, -2)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.14. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 i spełnia następujące warunki: suma pierwiastków jest równa -6, suma odwrotności pierwiastków jest równa $-\frac{3}{4}$, a wartość funkcji dla argumentu 2 jest równa 12. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.15. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest przedział $\langle -2; \infty)$. Wiadomo, że funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 + x_2 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = 0$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.16. Do wykresu funkcji kwadratowej f należy punkt $Q = (-1, -6)$. Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 \cdot x_2 = -2$ oraz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{x_1 \cdot x_2}$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.17. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2, których suma jest równa 1, a suma ich sześcianów wynosi 61. Wykresem tej funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = \left(\frac{1}{2}, -20\frac{1}{4}\right)$. Wyznacz wzór funkcji f.

4.18. Dane jest równanie $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$, $\Delta \geqslant 0$. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania. Wyraź podaną wielkość w zależności od współczynników a, b i c.

a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ b) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ c) $(x_1 - x_2)^2$ d) $\left(x_1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(x_2 + \sqrt{3}\right)^2$

4.19. Jeżeli istnieją pierwiastki x_1, x_2 podanego równania, oblicz wartość t.

a) $x^2 - 11x + 7 = 0$ $t = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

b) $x^2 - x - 10 = 0$ $t = (x_1 - x_2)^2$

c) $x^2 + 13x + 3 = 0$ $t = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

d) $x^2 - 4x + 5 = 0$ $t = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

4.20. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $3x^2 - 7x - 9 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{3x_1^2 + 7x_1x_2 + 3x_2^2}{2x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2}$.

D **4.21.** Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - bx + c = 0$, a liczby x_1^2, x_2^2 są pierwiastkami równania $x^2 - dx + e = 0$. Wykaż, że

a) $e = c^2$. b) $d \geqslant 2c$.

D **4.22.** Liczby x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + kx + 1 = 0$. Wykaż, że $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4$.

D **4.23.** Wykaż, że jeżeli liczby x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $x^2 - 12x + m = 0$, to $m < 36$ i $x_1^2 + x_2^2 = 144 - 2m$.

D **4.24.** Wykaż, że dla każdego $m \in \mathbf{R}$ suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + mx - 1 = 0$ jest większa od 1.

D **4.25.** Współczynniki a, b i c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ są różne od zera i wszystkie mają ten sam znak. Wykaż, że jeśli funkcja f ma miejsca zerowe, to są one ujemne.

Prosto do matury

1. Dane jest równanie $x^2 + 7x + k = 0$ z parametrem k.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Dla $k = 13$ iloczyn pierwiastków tego równania jest równy 13.
B. Dla $k = -5$ pierwiastki tego równania są przeciwnych znaków.
C. Dla $k = 10$ pierwiastki tego równania są ujemne.

2. Suma i iloczyn pierwiastków równania $2x^2 + 3x - 7 = 0$ są pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$. Wyznacz b i c.

3. Suma pierwiastków równania $x^2 + bx + c = 0$ jest równa 3, a ich iloczyn jest równy 1. Wyznacz te pierwiastki.

4. Suma pierwiastków trójmianu kwadratowego jest równa -5, iloczyn tych pierwiastków jest równy -14, a dla $x = 3$ wartość trójmianu wynosi 50. Wyznacz ten trójmian kwadratowy.

5. Dane jest równanie $x^2 + bx + c = 0$ z niewiadomą x, którego pierwiastkami są liczby x_1, x_2. Napisz równanie, którego pierwiastkami są liczby

a) $5x_1$ oraz $5x_2$. b) x_1^2 oraz x_2^2.

5. Nierówności kwadratowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą

Rozwiązanie **nierówności kwadratowej**, czyli nierówności postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, dla $a \neq 0$, jest tym samym zadaniem co odczytanie z wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x) > 0$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$ lub $f(x) \leqslant 0$.

Przykład 1 ◂ zad. 5.5

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

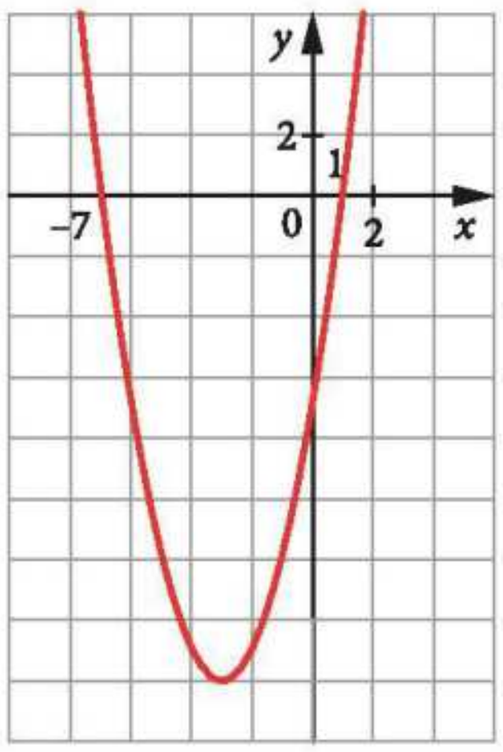
a) $x^2 + 6x \leqslant 7$ ⟵ porządkujemy nierówność

$x^2 + 6x - 7 \leqslant 0$ ⟵ obliczamy pierwiastki

$\Delta = 36 + 28 = 64$

$x_1 = 1,\ x_2 = -7$

Rysujemy parabolę $y = x^2 + 6x - 7$ i odczytujemy rozwiązanie nierówności.



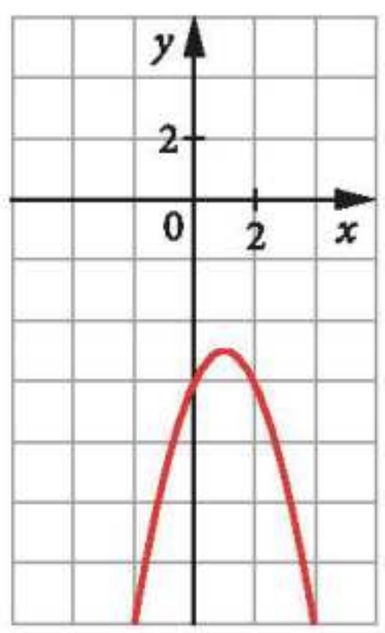
Odp.: $x^2 + 6x - 6 \leqslant 7$ dla $x \in \langle -7; 1 \rangle$

b) $2x - 6 > x^2$

$-x^2 + 2x - 6 > 0$

$\Delta = 4 - 24 = -20$

$\Delta < 0$, więc funkcja $f(x) = -x^2 + 2x - 6$ nie ma miejsc zerowych. Poza tym parabola $y = -x^2 + 2x - 6$ ma ramiona skierowane do dołu, zatem cała znajduje się poniżej osi x.

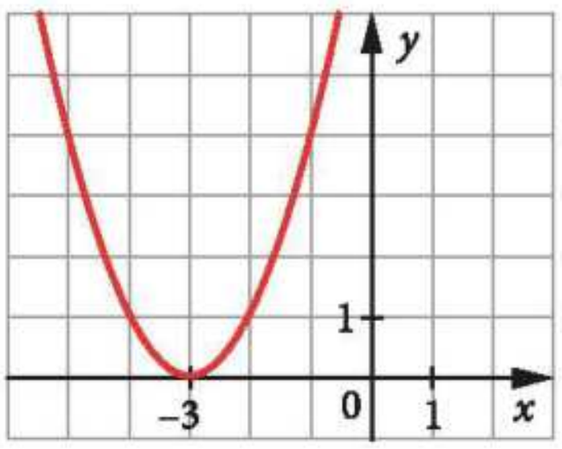


Odp.: Nierówność $2x - 6 > x^2$ nie ma rozwiązań.

c) $x^2 + 6x + 9 > 0$

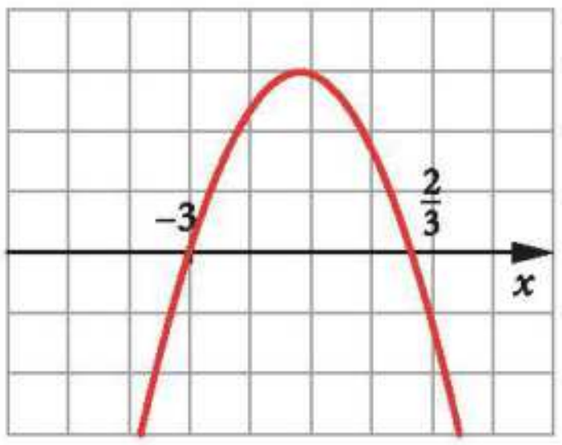
$(x + 3)^2 > 0$

Odp.: $x^2 + 6x + 9 > 0$ dla $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$



Zauważmy, że nie musimy dokładnie rysować paraboli, aby rozwiązać nierówność kwadratową. Aby zrobić szkic rysunku, z którego odczytamy zbiór rozwiązań, wystarczy zaznaczenie miejsc zerowych na osi x oraz informacja o zwrocie ramion paraboli. W szczególności nie ma potrzeby znajdowania współrzędnych wierzchołka.

d) $(2-3x)(x+3)>0$



Z postaci iloczynowej odczytujemy pierwiastki:

$$x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-3$$

Współczynnik przy x^2 jest równy -3, zatem ramiona paraboli są skierowane do dołu.

Odp.: $(2-3x)(x+3)>0$ dla $x\in\left(-3;\frac{2}{3}\right)$

Przykład 2 ◂ zad. 5.15

Wyznaczymy dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{42-x-x^2}-3x+7$.

Rozwiązanie

Argumenty funkcji f spełniają dwa warunki:

$x^2+2x-3\geqslant 0$ i $42-x-x^2\geqslant 0$ ⟵ wyrażenia pod pierwiastkami są nieujemne

Rozwiążemy każdą z nierówności oddzielnie, część wspólna obydwu zbiorów rozwiązań jest szukaną dziedziną funkcji.

- $x^2+2x-3\geqslant 0$

  $\Delta=4+12=16,\ x_1=\frac{-2-4}{2}=-3,\ x_2=\frac{-2+4}{2}=1$

  $(x+3)(x-1)\geqslant 0$ ⟵ pierwiastki trójmianu: -3, 1, ramiona paraboli skierowane w górę

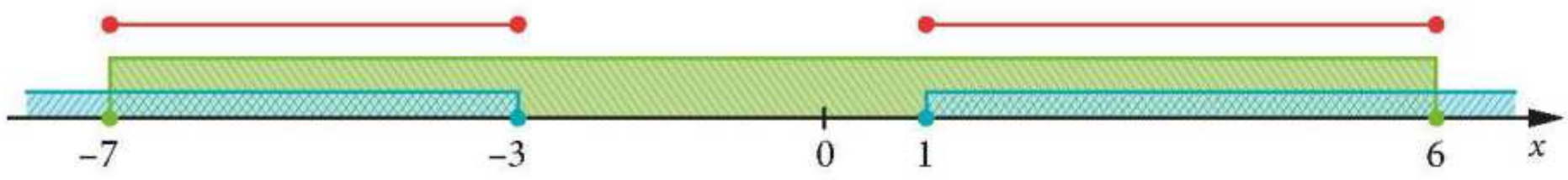
  $x\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle 1;\infty)$

- $42-x-x^2\geqslant 0$

  $\Delta=1+168=169,\ x_1=\frac{1-13}{-2}=6,\ x_2=\frac{1+13}{-2}=-7$

  $-(x-6)(x+7)\geqslant 0$ ⟵ pierwiastki trójmianu: 6, -7, ramiona paraboli skierowane w dół

  $x\in\langle -7;6\rangle$

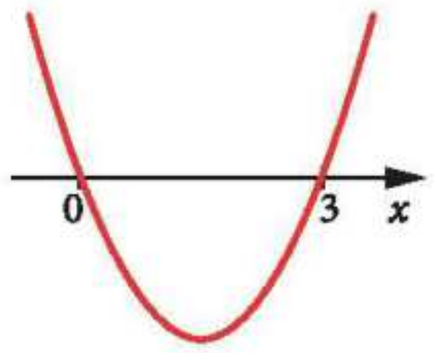


Odczytujemy część wspólną obu zbiorów rozwiązań: $x\in\langle -7;-3\rangle\cup\langle 1;6\rangle$.

Odp.: Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle -7;-3\rangle\cup\langle 1;6\rangle$.

Przykład 3 ◀ zad. 5.17

Rozwiążemy nierówność $\left|x^2-3x\right|-x^2+2>0$.



Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$x^2-3x>0$ dla $x\in(-\infty;\,0)\cup(3;\,\infty)$

$x^2-3x\leqslant 0$ dla $x\in\langle 0;\,3\rangle$

Nierówność $|x^2-3x|-x^2+2>0$ rozwiążemy zatem oddzielnie dla dwóch zbiorów.

- Dla $x\in(-\infty;\,0)\cup(3;\,\infty)$ mamy:

  $x^2-3x-x^2+2>0$

  $-3x>-2$, czyli $x\in\left(-\infty;\,\frac{2}{3}\right)$

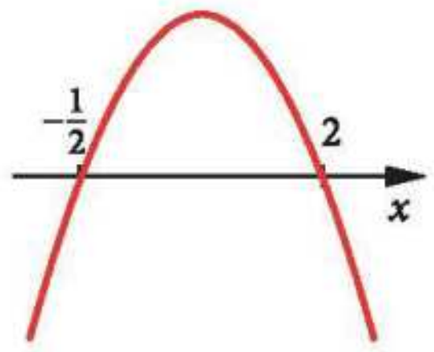
  Uwzględniamy warunek $x\in(-\infty;\,0)\cup(3;\,\infty)$ i otrzymujemy $x\in(-\infty;\,0)$.

- Dla $x\in\langle 0;\,3\rangle$ mamy:

  $-x^2+3x-x^2+2>0$, czyli $-2x^2+3x+2>0$

  $\Delta=9+16=25,\quad x_1=2,\quad x_2=-\frac{1}{2}$

  Zatem $-2x^2+3x+2>0$ dla $x\in\left(-\frac{1}{2};\,2\right)$.



  Uwzględniamy warunek $x\in\langle 0;\,3\rangle$ i otrzymujemy $x\in\langle 0;\,2)$.

  Końcowe rozwiązanie otrzymujemy po zsumowaniu obu otrzymanych zbiorów:
  $(-\infty;\,0)\cup\langle 0;\,2)=(-\infty;\,2)$

Odp.: $x\in(-\infty;\,2)$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

5.1. Przedział $\langle -3;\,1\rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności

A. $-(x-3)(x+1)\geqslant 0$. **B.** $(-x-3)(x-1)\geqslant 0$. **C.** $(x+3)(2x-2)\leqslant 0$.

5.2. Zbiór rozwiązań nierówności

A. $6x^2\leqslant 0$ jest jednoelementowy.

B. $-6x^2+2\sqrt{6}-1>0$ jest jednoelementowy.

C. $6x^2-4\sqrt{3}x+2\leqslant 0$ jest jednoelementowy.

5.3. Nierówność $3x^2-6x+k>0$

A. dla $k=-3$ nie ma rozwiązań.

B. dla $k=3$ nie ma rozwiązań.

C. dla $k=6$ nie ma rozwiązań.

5.4. Przedział $(-3;\ 1)$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

A. $x^2 + x - 12 < 0$. **B.** $-x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$. **C.** $x^2 - x + 3 > 0$.

5.5. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z niego, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) > 0$, a dla jakich $f(x) < 0$.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

d) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

5.6. Rozwiąż nierówność.

a) $(3 - 2x)(x + 5) \leqslant 0$

b) $\left(\sqrt{2} - x\right)(x + 7) > 0$

c) $(3 - x)(2 - x) \leqslant 0$

d) $\left(3x - 2\sqrt{2}\right)(x + 5) \geqslant 0$

e) $(x - 2)^2 \geqslant 4$

f) $(x - 3)^2 < 1$

5.7. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 < 2x$

b) $x^2 \leqslant 4$

c) $4x > x^2 + 4$

d) $-3x^2 + 8x - 4 \geqslant 0$

e) $4x^2 + 2x + 1 > 0$

f) $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$

g) $2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0$

h) $5x^2 + 2x - 3 > 0$

5.8. Rozwiąż nierówność.

a) $2(x + 1)^2 - (x - 3)^2 \geqslant 11x - 1$

b) $(x - 2)^2 + 5 \leqslant 5(2x - 8)$

c) $(x + 3)(3 - x) > 3(x - 2)^2 + 5$

d) $\left(\frac{x - 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6 - x}{2}\right)^2 > (x - 3)^2$

e) $(x - 4)(2x + 5) < (x - 4)(2 - x)$

f) $(3x + 2)(5x - 1) > (11x - 7)(6x + 4)$

g) $(8x - 17)^2 \leqslant 8x - 17$

h) $(5x - 6)^2 > (6 - 5x)(5 + 6x)$

5.9. Wyznacz wszystkie całkowite rozwiązania nierówności $3x^2 - 9x - 2 < 0$.

5.10. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj rozwiązania nierówności lub równania:

I. $f(x) > g(x)$, II. $f(x) < g(x)$, III. $f(x) = g(x)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$ sposobem rachunkowym.

a) $f(x) = x^2 - 4$ $g(x) = x - 2$

b) $f(x) = 3 - 2x - x^2$ $g(x) = 3 - 2x$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 9\frac{1}{2}$ $g(x) = -1$

d) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$ $g(x) = -2x - 2$

5.11. Wyznacz dodatnie wartości zmiennej x, dla których wartości funkcji $g(x) = 3x^2 - 6$ są nie większe od wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + 3$.

5.12. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, jeżeli
$A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 + 4x - 5 > 0\}$ i $B = \{x \in \mathbf{R}: -3x^2 + 7x \geqslant 0\}$.

5.13. Dla jakich wartości parametru m druga współrzędna wierzchołka paraboli $y = x^2 - (m+2)x + m + 3$ jest większa od drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli $y = x^2 - 3x + m + 3$?

5.14. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ 3x > x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 \leqslant 0 \\ 3x^2 - 16x + 20 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 11x + 18 < 0 \\ 4x^2 > 81 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (11x - 5)(17x - 4) \geqslant 0 \\ (3x - 2)(2x + 3) \leqslant 5 \end{cases}$

5.15. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2} + \sqrt{1 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$

5.16. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x^2 - 4| - 5}} - \dfrac{3x + 1}{\sqrt{7 - x}}$

b) $f(x) = \sqrt{|x^2 - |x|| - 6} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 6}}$

5.17. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5|x| + 4 > 0$

b) $x^2 + 7|x| + 10 < 0$

c) $x^2 - 4x + 2|x - 2| + 1 > 0$

d) $\left|x^2 + 2x\right| > (x + 2)^2$

e) $|2x - 1| < x^2 - 3x + 5$

f) $|2x + 1| \geqslant x^2 - x + 3$

5.18. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|2x^2 - x\right| + 3x^2$.

5.19. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ \left|1 - x^2\right| & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$.

Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania?

5.20. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|x^2 - 9\right| + \left|x^2 - 4\right|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left|x^2 - 9\right| + \left|x^2 - 4\right| = m$ ma trzy rozwiązania?

5.21. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right| + 2x - 1$.

5.22. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left|x^2 - 4\right| - 2x = m$ ma trzy rozwiązania?

5.23. Dla jakich wartości parametru m równanie $3x + m^2 - 3m + 2 = 0$ ma rozwiązanie ujemne?

5.24. Dla jakich wartości parametru m równanie $|x - 1| = -6m^2 - 5m + 6$ ma dwa rozwiązania?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Nierówność $3x^2 - 5x + 4 > 0$ jest prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$.

B. Nierówność $-100x^2 - 60x - 9 < 0$ jest prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$.

C. Dokładnie jedna liczba rzeczywista spełnia nierówność $\frac{1}{4}x^2 + 1 \leqslant x$.

2. Rozwiąż nierówność $2x^2 - x + 1 > 0$.

3. Rozwiąż nierówność $(3 - \pi)(2x - 3)\left(\sqrt{2} + x\right) < 0$.

4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wartość funkcji jest mniejsza od 2.

5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - \left|x^2 - 2x\right|$ i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

6. Zadania prowadzące do równań kwadratowych

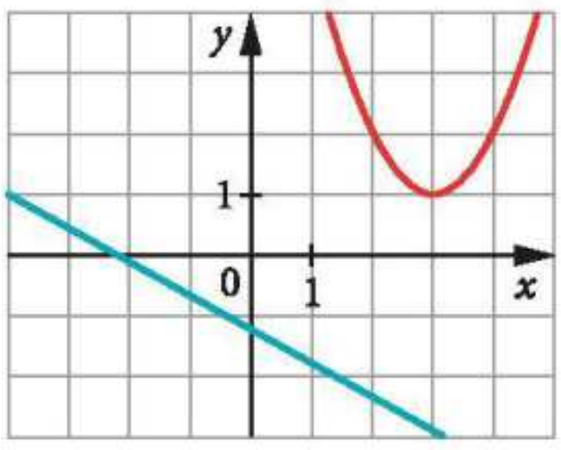
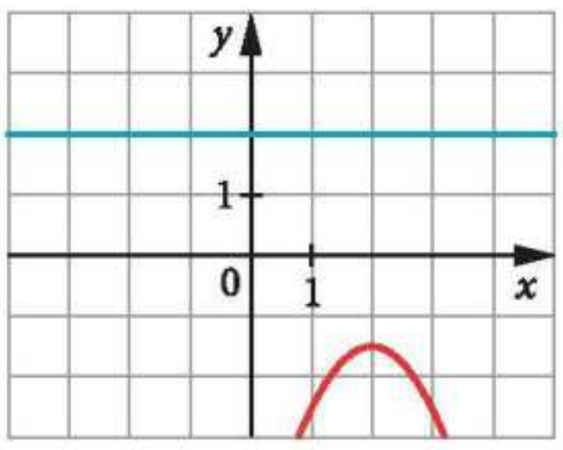
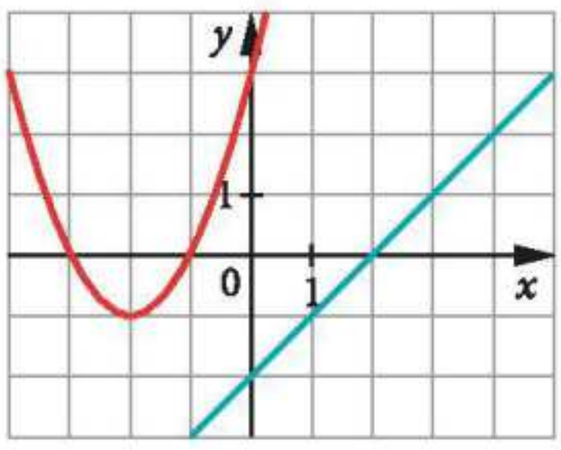
Umiejętności:

- rozwiązywanie układów równań prowadzących do równań kwadratowych
- wykorzystywanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

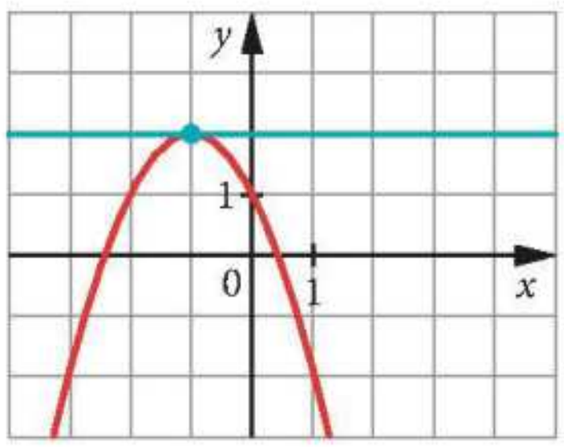
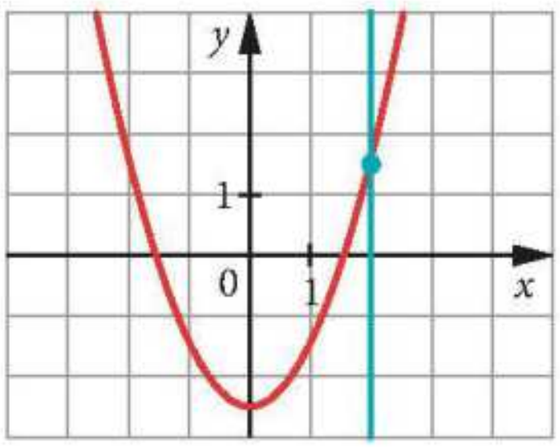
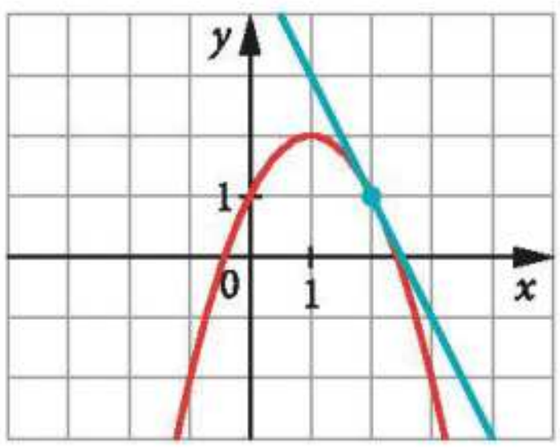
Punkty przecięcia paraboli i prostej

Wykresem równania $y = ax^2 + bx + c$ (jeżeli $a \neq 0$) jest parabola. Wykresem równania $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (jeżeli a_1 i b_1 nie są jednocześnie równe 0) jest prosta. Ile punktów wspólnych mogą mieć prosta i parabola? Z własności geometrycznych tych figur wynika, że są trzy możliwości.

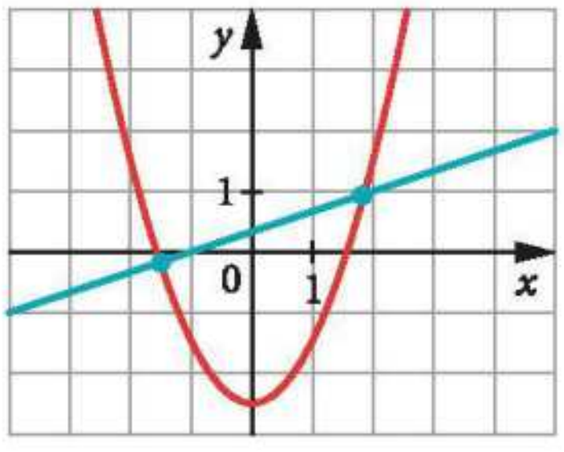
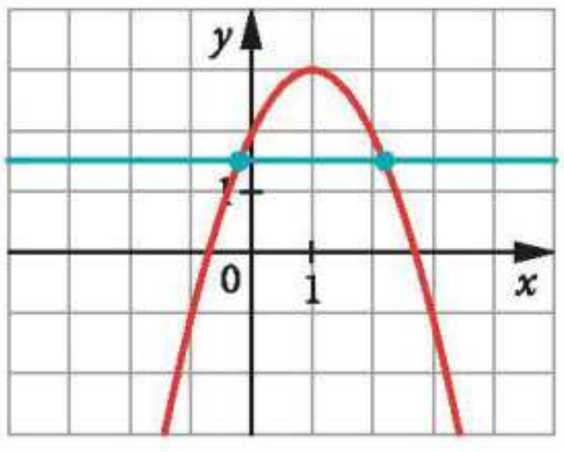
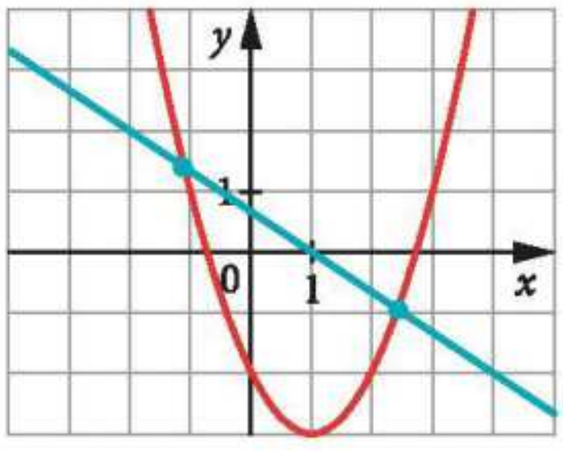
I. Prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą, np.:

II. Prosta ma jeden punkt wspólny z parabolą, np.:

III. Prosta ma dwa punkty wspólne z parabolą, np.:

R

Przykład 1 ◂ zad. 6.6

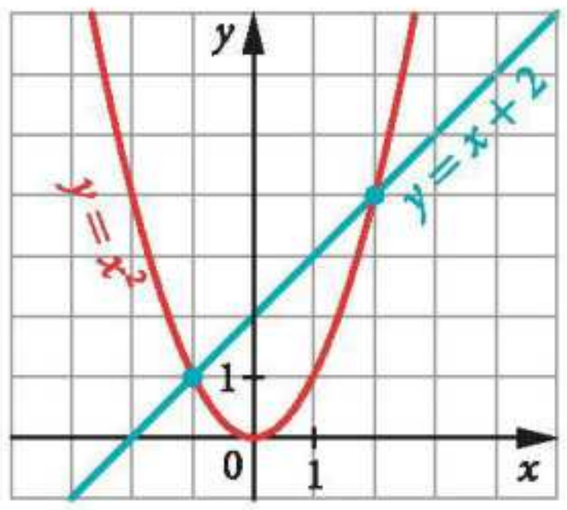
Wyznaczymy współrzędne punktów przecięcia paraboli i prostej, rozwiązując rachunkowo układ równań, a następnie przedstawimy ilustrację geometryczną zadania.

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = x^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$

Równanie $x^2 - x - 2 = 0$ jest równaniem kwadratowym, które ma dwa pierwiastki ($\Delta = 9$):
$x_1 = -1$ oraz $x_2 = 2$



Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

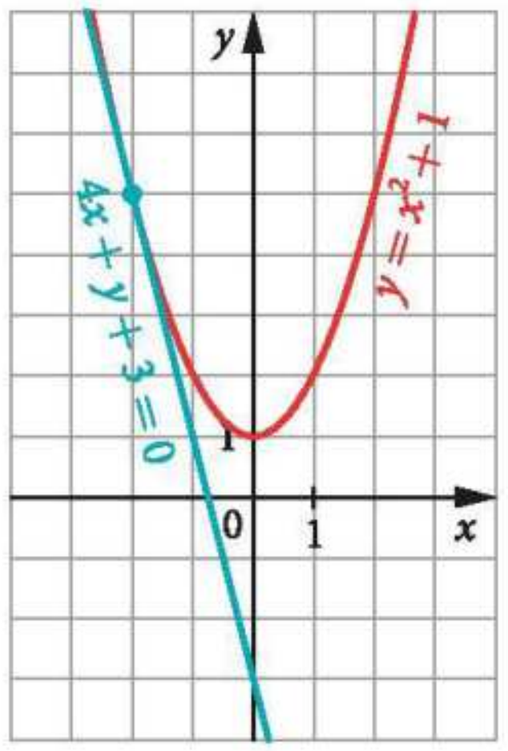
$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Każda z nich jest parą współrzędnych punktu przecięcia prostej $y = x + 2$ z parabolą $y = x^2$.
Mamy zatem dwa takie punkty: $(-1, 1)$ oraz $(2, 4)$.

b) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 4x + y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4x - 3 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4x - 3 \\ (x + 2)^2 = 0 \end{cases}$



Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek $x = -2$, więc rozwiązaniem układu jest jedna para liczb.

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

Prosta i parabola mają jeden punkt wspólny: $(-2, 5)$.

Układ równań, z których jedno jest równaniem prostej, a drugie – paraboli, zawsze możemy przekształcić do układu składającego się z równania liniowego z dwiema niewiadomymi i równania kwadratowego z jedną niewiadomą. W konsekwencji dany układ równań może mieć dwa rozwiązania albo jedno rozwiązanie, albo może nie mieć rozwiązań – w zależności od liczby pierwiastków równania kwadratowego.

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Wiele zadań tekstowych prowadzi do równań kwadratowych lub opisanych wyżej układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe. Taka sytuacja występuje też często w zagadnieniach z fizyki.

Przykład 2 ◂ zad. 6.14

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 371. Wyznaczymy te liczby.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trzy kolejne liczby nieparzyste możemy zapisać jako $2n + 1$, $2n + 3$ i $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Otrzymujemy zatem równanie:

$$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = 371$$

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 = 371$$

$$12n^2 + 36n - 336 = 0, \text{ czyli } n^2 + 3n - 28 = 0$$

$$\Delta = 121, \quad n_1 = -7, \quad n_2 = 4$$

Oba rozwiązania są liczbami całkowitymi, więc zadanie ma dwa rozwiązania. Po podstawieniu -7 oraz 4 w miejsce n otrzymujemy dwa zestawy liczb.

Odp.: Szukane liczby to: $-13, -11$ i -9 lub $9, 11$ i 13.

Przykład 3 ◂ zad. 6.22

Na dziedzińcu zamku w Niedzicy znajduje się studnia o głębokości 60 m, wykuta w litej skale. Obliczymy, ile czasu spada kamień wrzucony do tej studni z prędkością początkową 10 m/s. Wynik podamy z dokładnością do 0,1 s.

Rozwiązanie

Użyjemy wzoru na drogę przebytą przez ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

s oznacza drogę przebytą przez kamień (w metrach), t – czas spadania (w sekundach), v_0 – prędkość początkową (w m/s), zaś $g = 10\ \text{m/s}^2$ to przyspieszenie ziemskie.

Otrzymujemy równanie: $10t + 5t^2 = 60$, dla $t > 0$.

$$5t^2 + 10t - 60 = 0, \text{ czyli } t^2 + 2t - 12 = 0$$

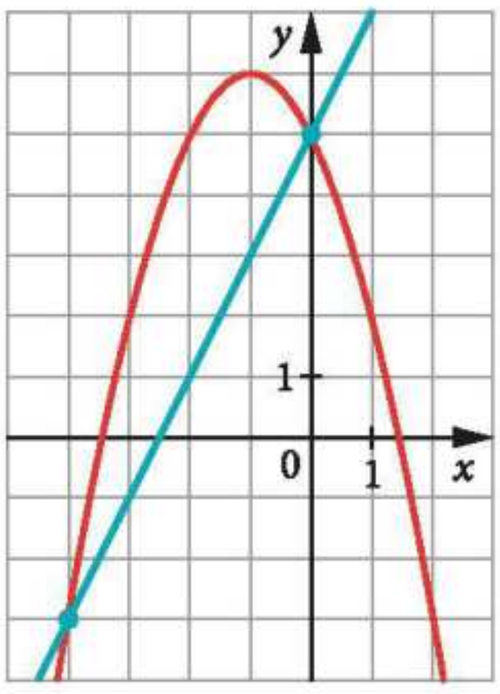
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \quad t_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{2} = -1 - \sqrt{13}, \quad t_2 = -1 + \sqrt{13}$$

Tylko druga liczba jest dodatnia, zatem rozwiązaniem zadania jest $-1 + \sqrt{13} \approx 2{,}6$.

Odp.: Kamień spada 2,6 sekundy.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.



6.1. Na rysunku przedstawiona jest graficzna ilustracja układu równań. Który to układ?

A. $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 5 \\ y = x + 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

6.2. Dany jest układ równań $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + m \end{cases}$ z parametrem m.

Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Dla $m = 10$ układ ma jedno rozwiązanie.

B. Dla $m = 0$ układ ma jedno rozwiązanie.

C. Dla $m = -10$ układ nie ma rozwiązań.

D. Dla $m = -1$ układ ma dwa rozwiązania.

6.3. Dany jest układ równań $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 9x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Ten układ równań nie ma rozwiązań.

B. Ten układ równań ma co najmniej jedno rozwiązanie.

C. Rozwiązaniami tego układu równań są pary liczb naturalnych.

D. Rozwiązaniem tego układu równań jest $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$.

6.4. Suma dwóch liczb jest równa 1, a suma kwadratów tych liczb pomniejszonych o 3 wynosi 5. Który układ równań opisuje tę sytuację?

A. $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 - 3 = 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a - 3 + b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

6.5. Sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ $g(x) = -2x + 6$

b) $f(x) = 3x^2 + 2$ $g(x) = 5$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ $g(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ $g(x) = -x - 2$

6.6. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \\ y = x - 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 4 \\ y = 2 \end{cases}$

6.7. Rozwiąż graficznie układ równań. Otrzymane wyniki sprawdź metodą rachunkową.

a) $\begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 2 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 2 \\ y + 7 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

* d) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -3x^2 + 12x - 9 \end{cases}$

* e) $\begin{cases} y = 4x^2 - 8x + 2 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$

* f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \end{cases}$

* **6.8.** Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = -2x^2 - 8x - 4 \\ y = 2|x + 4| \end{cases}$

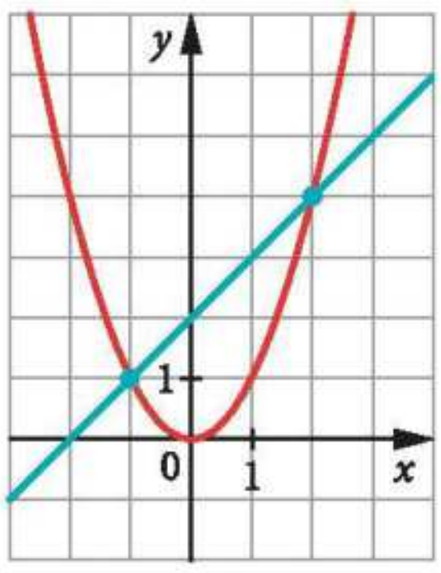
b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4|x| + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 6|x| + 5 \\ y = |x| - 1 \end{cases}$

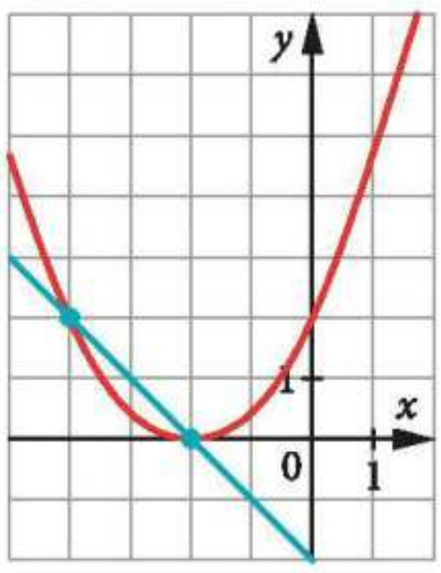
d) $\begin{cases} y = \left|x^2 - 4\right| \\ y = |2 - x| \end{cases}$

6.9. W układzie współrzędnych narysowane są parabola i prosta. Napisz układ równań, którego ilustracją jest przedstawiony rysunek.

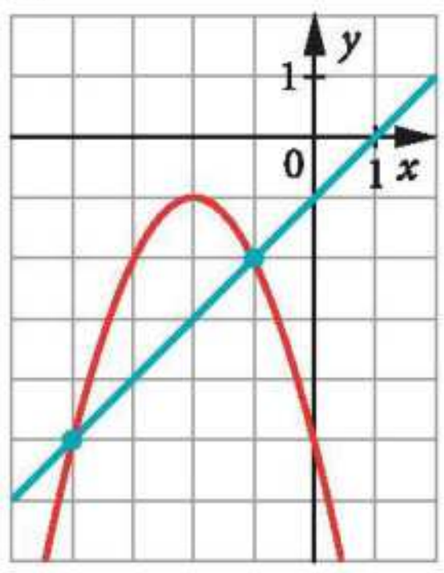
a)



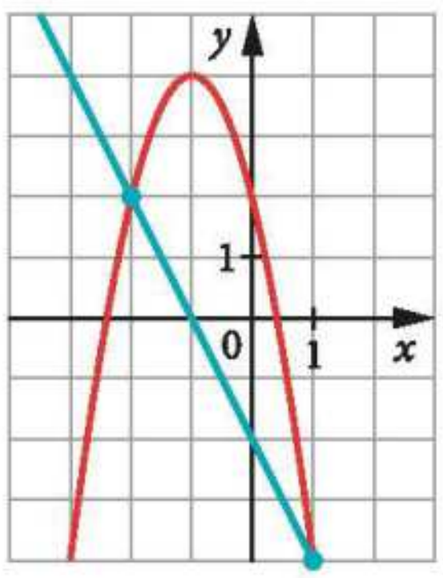
b)



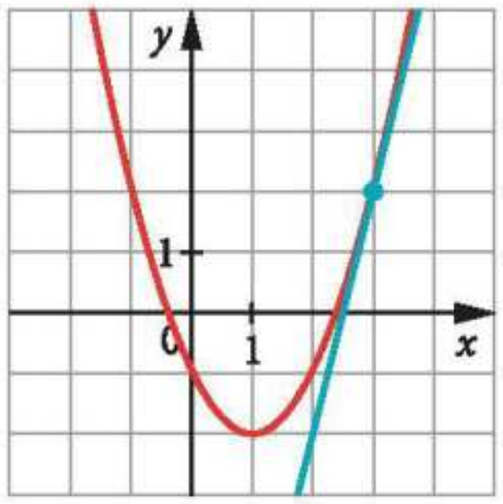
c)



d)



6.10. W układzie współrzędnych narysowane są parabola i prosta. Napisz układ równań, którego ilustracją jest przedstawiony obok rysunek. Sprawdź rachunkowo, że ten układ ma tylko jedno rozwiązanie.



6.11. Podaj przykład układu równań, który opisuje parabolę i prostą

a) o dwóch wspólnych punktach (1, 3) i (4, −3).

b) o jednym wspólnym punkcie (−4, −2).

6.12. Trójkąt wpisano w parabolę $y = \frac{1}{8}x^2$ w ten sposób, że jeden z jego wierzchołków jest wierzchołkiem paraboli, a dwa pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tej paraboli prostą $y = \frac{1}{4}x + 1$.

a) Wyznacz wierzchołki trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta.

6.13. Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \left(p^2 + q^2\right)x + p + q = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz p i q.

6.14. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 56. Wyznacz te liczby.

6.15. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 974. Wyznacz te liczby.

6.16. Suma dwóch liczb jest dwa razy większa od wartości bezwzględnej ich różnicy, a suma kwadratów tych liczb wynosi 160. Wyznacz te liczby.

6.17. W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona do podstawy jest równa 3 cm. Obwód trójkąta wynosi 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

6.18. Pole prostokąta jest równe 17,68 cm^2, a różnica długości jego boków wynosi 1,8 cm. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

6.19. Obwód rombu jest równy 116 cm, a różnica długości jego przekątnych równa się 2 cm. Oblicz długości przekątnych rombu.

6.20. Przeciwprostokątna pewnego trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 2 cm, a od drugiej o 25 cm. Wyznacz obwód tego trójkąta.

6.21. Jeżeli do iloczynu dwóch liczb dodamy mniejszą z liczb, to otrzymamy 60. Jeżeli do tego iloczynu dodamy większą z nich, to otrzymamy 63. Jakie to liczby?

6.22. Do studni opuszczono kamień i po upływie 3,5 s usłyszano plusk. Oblicz przybliżoną głębokość studni. Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

6.23. Ile boków ma wielokąt wypukły, który ma 90 przekątnych?

6.24. Dwa wielokąty wypukłe mają razem 28 boków i 158 przekątnych. Ile boków ma każdy z tych wielokątów?

* **6.25.** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych niepodzielnych przez 4 wynosi 1004. Wyznacz te liczby.

* **6.26.** Suma kwadratu wieku ojca i kwadratu wieku syna wynosi 2570. Za 4 lata iloczyn wieku ojca i wieku syna będzie o 280 większy niż jest obecnie. Ile lat ma teraz ojciec, a ile syn?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Układ równań $\begin{cases} y = -x^2 - 4x - 1 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

B. ma dokładnie dwa rozwiązania.

C. jest spełniony przez parę liczb $(-3, 2)$.

2. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \\ y = -x + 2 \end{cases}$.

Przedstaw interpretację graficzną rozwiązania.

3. Podaj przykład układu równań, który opisuje parabolę i prostą o dwóch wspólnych punktach: $(-4, 4)$ i $(0, -2)$.

4. W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności. Iloczyn tej liczby i sumy jej cyfr jest równy 364. Jaka to liczba?

5. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych wynosi 1883. Wyznacz te liczby.

7. Równania kwadratowe z parametrem

Umiejętności:
- rozwiązywanie równań kwadratowych z parametrem
- zastosowanie wzorów Viète'a

Rozwiązywanie równania z parametrem polega na wyznaczaniu liczby oraz postaci pierwiastków tego równania w zależności od wartości parametru.
We wszystkich omawianych przykładach i zadaniach x oznacza niewiadomą, a pozostałe litery to parametry.

Przykład 1 ◂ zad. 7.5

Rozwiążemy równanie $kx^2 - (2k-1)x + k - 3 = 0$.

Rozwiązanie

I. Dla $k = 0$ otrzymujemy równanie pierwszego stopnia:

$x - 3 = 0$

którego rozwiązaniem jest $x = 3$.

II. Dla $k \neq 0$ mamy do rozwiązania równanie kwadratowe, w którym liczba rozwiązań zależy od wyróżnika Δ.

$\Delta = (2k-1)^2 - 4k(k-3) = 8k + 1$

- $\Delta < 0$ dla $k < -\frac{1}{8}$ ⟵ brak pierwiastków
- $\Delta = 0$ dla $k = -\frac{1}{8}$ ⟵ jeden pierwiastek

$x_0 = \frac{2k-1}{2k} = 5$

- $\Delta > 0$ dla $k \neq 0$ i $k > -\frac{1}{8}$ ⟵ dwa pierwiastki

$x_1 = \frac{2k-1+\sqrt{8k+1}}{2k}$, $x_2 = \frac{2k-1-\sqrt{8k+1}}{2k}$

Odp.: Jeżeli $k = 0$, to $x = 3$.

Jeżeli $k = -\frac{1}{8}$, to $x = 5$.

Jeżeli $k \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right) \cup (0; \infty)$, to $x = \frac{2k-1+\sqrt{8k+1}}{2k}$ lub $x = \frac{2k-1-\sqrt{8k+1}}{2k}$.

Dla $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$ równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 2

Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 + 6mx + 3 = 0$ nie ma rozwiązań?

Rozwiązanie

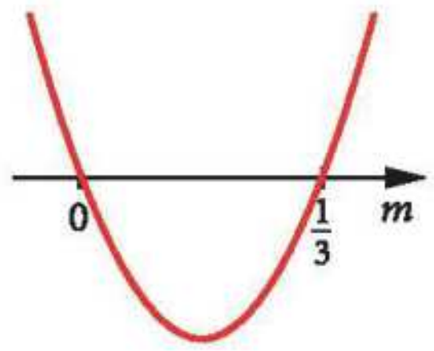
I. Dla $m = 0$ równanie ma postać $0x^2 + 0x + 3 = 0$, czyli $3 = 0$. Jest to równanie sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań, zatem $m = 0$ spełnia warunki zadania.

II. Dla $m \neq 0$ równanie jest kwadratowe i nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest ujemny.

$\Delta = (6m)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 = 36m^2 - 12m$

$36m^2 - 12m < 0$

$3m\left(m - \frac{1}{3}\right) < 0$, czyli $m \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$



Podsumowując, równanie $mx^2 + 6mx + 3 = 0$ nie ma rozwiązań, gdy $m \in \left\langle 0; \frac{1}{3}\right)$.

Odp.: $m \in \left\langle 0; \frac{1}{3}\right)$

Zastosowanie wzorów Viète'a

Wzory Viète'a są wygodnym narzędziem służącym do badania znaków pierwiastków oraz własności różnych wyrażeń, które można zapisać za pomocą sumy lub iloczynu pierwiastków danego równania kwadratowego.

Przykład 3 ◂ zad. 7.15

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 + (2k + 1)x + k - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Rozwiązanie

Równanie $x^2 + (2k+1)x + k - 2 = 0$ dla każdej wartości parametru k jest równaniem kwadratowym. Aby miało dwa różne pierwiastki, jego wyróżnik musi być dodatni. Pierwiastki te będą liczbami ujemnymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn będzie dodatni i suma ujemna. Skorzystamy ze wzorów Viète'a, aby zapisać te warunki.

$\Delta > 0$ i $\frac{c}{a} > 0$ i $-\frac{b}{a} < 0$ $\longleftarrow a = 1,\ b = 2k + 1,\ c = k - 2$

Po podstawieniu wartości współczynników otrzymujemy układ nierówności.

$$\begin{cases} 4k^2 + 4k + 1 - 4k + 8 > 0 \\ k - 2 > 0 \\ -(2k + 1) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4k^2 + 9 > 0 \\ k > 2 \\ k > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Pierwsza z nierówności układu jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą. Dane równanie ma zatem dwa różne rozwiązania ujemne dla $k \in (2; \infty)$.

Odp.: $k \in (2; \infty)$

Przykład 4 ◂ zad. 7.21

Wyznaczymy taką wartość parametru m, aby suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - (m-2)x - 3 - m = 0$ była najmniejsza.

Rozwiązanie

Współczynniki tego równania muszą spełnić dwa warunki:

I. $\Delta > 0$ ⟵ warunek istnienia dwóch różnych pierwiastków

II. $x_1^2 + x_2^2$ ma przyjmować wartość najmniejszą.

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(-3-m) = m^2 + 16 \quad \longleftarrow \text{wyróżnik dodatni dla każdego } m \in \mathbf{R}$$

Wyrazimy zależność $x_1^2 + x_2^2$ od współczynników trójmianu $ax^2 + bx + c$. Skorzystamy ze wzorów Viète'a.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (m-2)^2 - 2(-3-m) \quad \longleftarrow a = 1,\ b = -(m-2),\ c = -3-m$$

$$x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m + 10$$

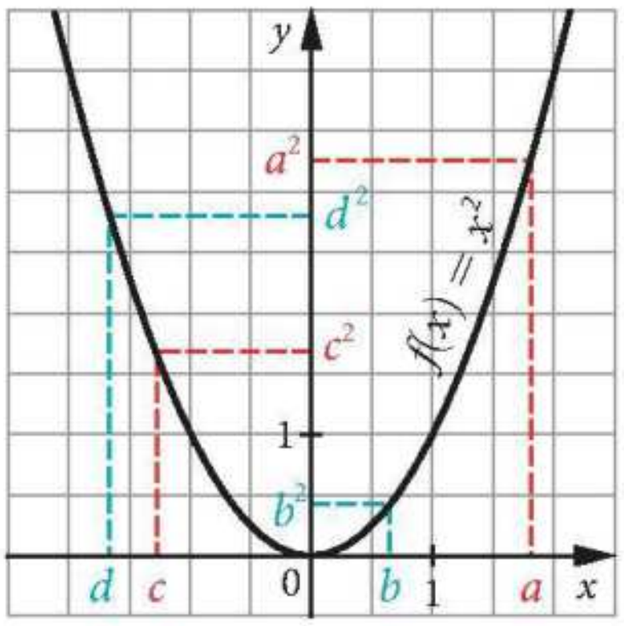
Suma kwadratów pierwiastków jest więc funkcją kwadratową zmiennej m. Wykresem tej funkcji jest parabola skierowana ramionami do góry. Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą dla $m = 1$.

Odp.: $m = 1$

Rozważanie zagadnień z parametrem często wiąże się z rozwiązywaniem nierówności. Jedną ze stosowanych wówczas metod jest podniesienie obydwu stron nierówności do kwadratu. Nie można tej operacji wykonywać bez pewnych założeń, bo na przykład $-5 < 3$, ale $25 > 9$. W jakiej sytuacji możemy zatem obie strony nierówności podnieść do kwadratu bez zmiany jej zwrotu, jeżeli chcemy otrzymać nierówność równoważną? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wykorzystamy informacje o monotoniczności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$. Jak wiemy, w przedziale $\langle 0;\ \infty)$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $(-\infty;\ 0\rangle$ – malejąca. Oznacza to, że:

- dla $a > 0$ i $b > 0$ nierówność $a > b$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $a^2 > b^2$,
- dla $c < 0$ i $d < 0$ nierówność $c > d$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $c^2 < d^2$.

Natomiast niczego nie można wywnioskować na temat zależności między kwadratami liczb o przeciwnych znakach.



Wniosek

Jeżeli obydwie strony nierówności są nieujemne, to możemy podnieść je do kwadratu bez zmiany zwrotu tej nierówności i otrzymamy w ten sposób nierówność równoważną.

Przykład 5 ◀ zad. 7.26

Wykażemy, że dla każdej wartości parametru $m \in \mathbf{R}$ równanie $x^2 + (6-m)x + 2(3-m) = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 oraz wyznaczymy te wartości m, dla których pierwiastki równania spełniają warunek $|x_1 - x_2| < 3$.

Rozwiązanie

$x^2 + (6-m)x + 2(3-m) = 0$ (1)

$\Delta = (6-m)^2 - 4 \cdot 2(3-m) = m^2 - 4m + 12$ ⟵ $\Delta_m = 16 - 48 = -32$

Wyróżnik Δ_m trójmianu $m^2 - 4m + 12$ jest ujemny, zatem dla każdego $m \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $\Delta > 0$. Oznacza to, że równanie (1) ma dwa różne pierwiastki niezależnie od wartości parametru m.

Nierówność $|x_1 - x_2| < 3$ zapiszemy w równoważnej postaci, aby skorzystać ze wzorów Viète'a. Obie strony nierówności są dodatnie – podnosimy je do kwadratu:

$|x_1 - x_2| < 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1 - x_2)^2 < 9$

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 < 9$ ⟵ przekształcamy tak, aby otrzymać $(x_1 + x_2)^2$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 < 9$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9$ ⟵ stosujemy wzory Viète'a

$(6-m)^2 - 8(3-m) < 9$ ⟵ $a = 1,\ b = 6-m,\ c = 2(3-m)$

$m^2 - 4m + 3 < 0$, czyli $m \in (1; 3)$

Odp.: $m \in (1; 3)$

Zadania

W zadaniach 7.1–7.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.1. Równanie $x^2 - kx = 0$

A. dla pewnej wartości k nie ma pierwiastków.

B. dla pewnej wartości k ma dokładnie jeden pierwiastek.

C. dla dowolnej wartości $k \in \mathbf{R}$ ma dwa różne pierwiastki.

7.2. Równanie $ax^2 + bx + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie. Zatem

A. $b^2 - 12a > 0$. **B.** $a > 0$. **C.** $b > 0$.

7.3. Równanie $mx^2 + x - 1 = 0$

A. dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie.

B. dla $m = -\frac{1}{4}$ ma jedno rozwiązanie.

C. dla $m = \sqrt{2}$ nie ma rozwiązań.

7.4. Współczynnik m jest taką liczbą, dla której równanie $x^2 - mx + m = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek x_0. Wynika stąd, że

A. $x_0 \in \mathbf{Z}$. **B.** $x_0 < 0$. **C.** x_0 jest liczbą parzystą.

7.5. Rozwiąż równanie z niewiadomą x i parametrem m.

a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 6 = 0$

b) $x^2 + 2mx + m^2 - 9 = 0$

c) $(m - 1)x^2 + 2mx + m + 5 = 0$

d) $\left(\frac{1}{4}m + 2\right)x^2 - 3mx + 9m = 0$

e) $4m^2x^2 + 4mx + 1 = 0$

f) $m^2x^2 - 3mx + 2m + 3 = 0$

7.6. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $\left(m^2 - 1\right)x^2 - 2(m - 1)x - 1 = 0$ w zależności od wartości parametru m.

7.7. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m + 2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

7.8. Dla jakich wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie? Dla znalezionych wartości m oblicz pierwiastki danego równania.

a) $x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 6 = 0$

b) $(m - 1)x^2 - \left(m^2 - 1\right)x + m^2 + m = 0$

7.9. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie?

a) $x^2 - (m - 1)x + m^2 - 1 = 0$

b) $mx^2 - 4(m - 1)x + m = 0$

D **7.10.** Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m równanie

a) $x^2 - (2m - 1)x + m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki.

b) $mx^2 - (m + 5)x + 5 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek.

c) $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$ ma jeden pierwiastek.

7.11. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2(m + 1)x + m + \frac{7}{4} = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 + x_2 > 0$?

7.12. Dla jakich wartości parametru m równanie $-x^2 + mx - m^2 + 2m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 + x_2 = x_1x_2 + 1$?

7.13. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2(2m-3)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku?

7.14. Dla jakich wartości parametru m dane równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ b) $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

7.15. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

7.16. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - mx + m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

7.17. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m + 2$ i $g(x) = x^2 - mx - 1$ przecinają się w dwóch punktach? Czy istnieje taka wartość m, dla której punkty przecięcia wykresów tych funkcji są położone symetrycznie względem osi rzędnych?

7.18. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = 2x^2 + x - m$ i $g(x) = mx^2 - 2mx + 3$ przecinają się w dwóch punktach, których odcięte mają różne znaki?

7.19. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których iloczyn jest równy połowie ich sumy?

7.20. Dla jakich wartości parametru m suma dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (2m-3)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ jest mniejsza od iloczynu tych pierwiastków?

7.21. Dla jakich wartości parametru t suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 2tx + t^2 - t - 2 = 0$ jest najmniejsza?

7.22. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 + 1 = 0$ jest równa 19?

7.23. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - (m-5)x + m^2 - 6m + 5 = 0$ jest większa od 7?

7.24. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $3x^2 + (1-3m)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 takie, że $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{41}}{3}$.

7.25. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 2mx + m^2 + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $x_1 x_2 \leqslant m + 3 \leqslant x_1^2 + x_2^2$.

7.26. Dany jest trójmian kwadratowy $\frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + 3 - m$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 4$.

7.27. Dany jest trójmian kwadratowy $x^2 + (m-3)x - m^2 + 2m + 3$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| > 4$.

7.28. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (2m-2)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| < 2$?

Prosto do matury

1. Funkcja $y = f(k)$ określa iloczyn dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - kx - k^2 - 10k = 0$ w zależności od wartości parametru k.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
C. Funkcja f osiąga wartość największą dla $k = -5$.

2. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - x + m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

3. Dla jakich wartości parametru k równanie $(k+1)x^2 - 4kx + k + 1 = 0$ ma jeden pierwiastek?

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

5. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m-6)x + m - 7 = 0$ jest najmniejsza?

8. Nierówności kwadratowe z parametrem

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z parametrem

Przykład 1 ◀ zad. 8.7

Dla jakich wartości parametru m nierówność $mx^2 - (2m - 1)x + 2m - 1 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$?

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:

$$a = m, \quad b = -(2m - 1), \quad c = 2m - 1$$

Nierówność $ax^2 + bx + c > 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą x w dwóch przypadkach.

I. $a = 0$ i $b = 0$ i $c > 0$ $\longleftarrow 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c > 0$

II. $a > 0$ i $\Delta < 0$ $\longleftarrow$ ramiona paraboli skierowane do góry i brak pierwiastków

Zauważmy, że $a = 0$ dla $m = 0$, ale wówczas $b \neq 0$, czyli pierwszy przypadek nie jest możliwy. Rozważmy drugą możliwość.

Rozwiążemy układ nierówności:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ (2m - 1)^2 - 4m(2m - 1) < 0 \end{cases} \longleftarrow \text{wyłączamy wspólny czynnik } (2m - 1) \text{ przed nawias}$$

Δ jest trójmianem kwadratowym zmiennej m, zatem, aby rozwiązać nierówność $\Delta < 0$, musimy znaleźć miejsca zerowe i odczytać rozwiązanie z odpowiedniego wykresu.

$$\begin{cases} m > 0 \\ (2m - 1)(-2m - 1) < 0 \end{cases} \longleftarrow m_1 = -\frac{1}{2},\ m_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ m \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ \infty\right) \end{cases}$$

Odp.: Podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in \left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

Przykład 2 ◂ zad. 8.13

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(x+3m)(x-m-2) < 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby z przedziału $\langle 1;\ 5\rangle$?

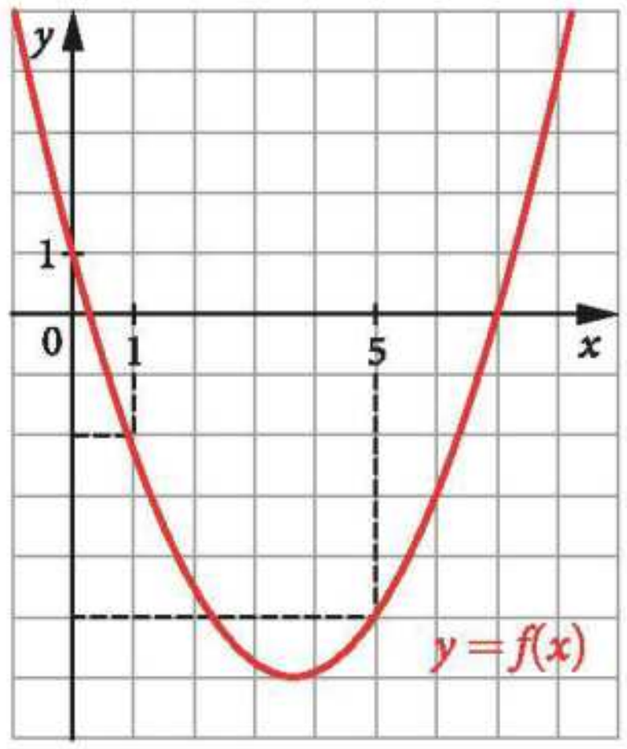
Rozwiązanie

Zauważmy, że po lewej stronie nierówności mamy trójmian kwadratowy zmiennej x w postaci iloczynowej, czyli dla każdej wartości m trójmian ten ma miejsca zerowe.
Oznaczmy $f(x) = (x + 3m)(x - m - 2)$.

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem warunek zadania będzie spełniony, gdy dla $x = 1$ oraz $x = 5$ wartości funkcji f będą ujemne.

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(5) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1 + 3m)(-m - 1) < 0 \\ (5 + 3m)(3 - m) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{3};\ \infty\right) \\ m \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right) \cup (3;\ \infty) \end{cases}$$



Obydwa warunki są spełnione dla $m \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right) \cup (3;\ \infty)$.

Odp.: Nierówność $(x + 3m)(x - m - 2) < 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby z przedziału $\langle 1;\ 5\rangle$, gdy $m \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right) \cup (3;\ \infty)$.

Przykład 3 ◂ zad. 8.19

Wyznaczymy zbiór rozwiązań nierówności $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 > 0$ w zależności od parametru m.

Rozwiązanie

I. $m = 2$

Nierówność ma wówczas postać $-4x + 3 > 0$, czyli $x \in \left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$.

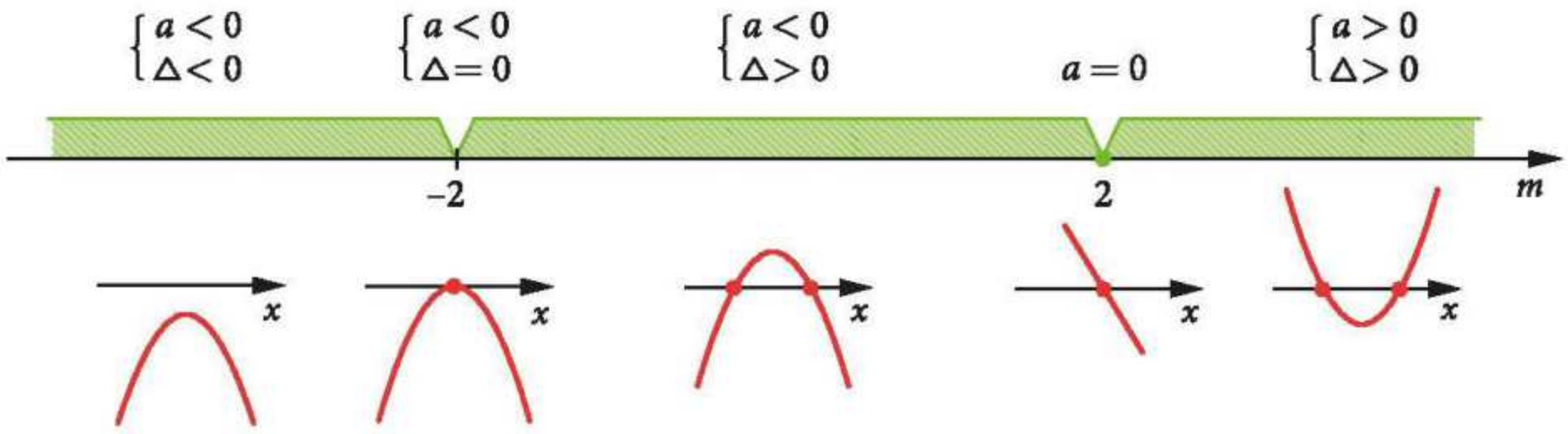
II. $m \neq 2$

Nierówność jest kwadratowa i zbiór jej rozwiązań zależy od znaku współczynnika przy x^2 oraz od znaku wyróżnika.

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m - 2)(m + 1) = 4m^2 - 4\left(m^2 - m - 2\right) = 4(m + 2)$$

Zatem współczynnik przy x^2 zmienia znak w $m = 2$, a wyróżnik w $m = -2$.

Zaznaczymy na osi m przedziały, w których należy rozważyć rozwiązanie nierówności $(m - 2)x^2 - 2mx + m + 1 > 0$.



- Dla $m \in (-\infty; -2\rangle$ nierówność nie ma rozwiązań.
- Dla $m \in (-2; 2)$ rozwiązania nierówności tworzą przedział pomiędzy miejscami zerowymi trójmianu.

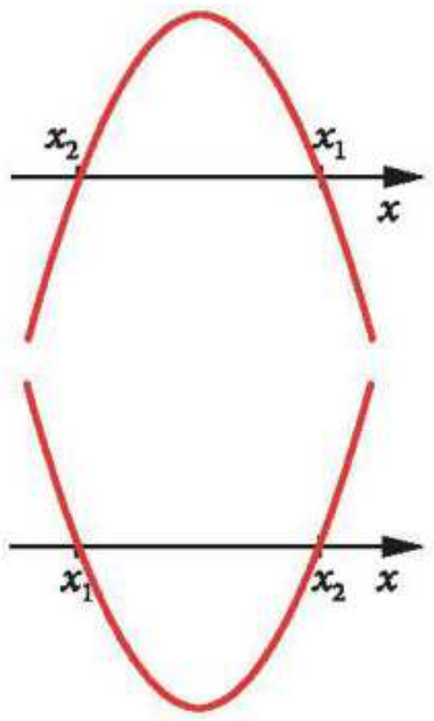
$$x_1 = \frac{2m - 2\sqrt{m+2}}{2(m-2)} = \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}, \qquad x_2 = \frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}$$

Żeby zapisać rozwiązanie nierówności danej w zadaniu, musimy stwierdzić, który z pierwiastków x_1, x_2 jest większy. W tym celu zbadamy znak różnicy $x_1 - x_2$.

$$x_1 - x_2 = \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2} - \frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2} = \frac{-2\sqrt{m+2}}{m-2}$$

Mianownik $m-2$ jest ujemny, czyli $x_1 > x_2$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 > 0$ jest więc przedział $\left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right)$.



- Dla $m \in (2; \infty)$ rozwiązania nierówności tworzą sumę przedziałów. Zauważmy, że tym razem $x_1 < x_2$. Zatem:

$$x \in \left(-\infty; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right) \cup \left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \infty\right)$$

Odp.: Dla $m \in (-\infty; -2\rangle$ nierówność nie ma rozwiązań. Jeżeli $m \in (-2; 2)$, to $x \in \left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right)$. Jeżeli $m = 2$, to $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$.

Jeżeli $m \in (2; \infty)$, to $x \in \left(-\infty; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right) \cup \left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \infty\right)$.

Zadania

W zadaniach 8.1–8.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

8.1. Nierówność $mx^2 + mx + 1 \geqslant 0$

A. dla $m = 0$ nie ma rozwiązań.

B. dla $m = 1$ ma jedno rozwiązanie.

C. dla $m = -1$ nie ma rozwiązań.

D. dla $m = 5$ nie ma rozwiązań.

8.2. Zbiorem rozwiązań nierówności $kx^2 + kx > 0$

A. dla $k = 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.
B. dla $k < 0$ jest przedział $(-\infty; 0)$.
C. dla $k > 0$ jest przedział $(-1; 0)$.
D. dla $k = -1$ jest przedział $(-1; 0)$.

8.3. Zbiorem rozwiązań nierówności $m(x + 3)(x - m) < 0$

A. dla $m > 0$ jest zbiór $(-3; m)$.
B. dla $m < 0$ jest zbiór $(-3; m)$.
C. dla $m < -3$ jest zbiór $(-\infty; m) \cup (-3; \infty)$.

8.4. Nierówność $kx^2 + x + k > 0$ nie ma rozwiązań

A. dla $k \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.
B. dla $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.
C. dla $k \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

8.5. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4m^2 > 0$ w zależności od wartości parametru m.

8.6. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $kx^2 - k \leqslant 0$ w zależności od wartości parametru k.

8.7. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich wartości $x \in \mathbf{R}$?

a) $3x^2 + 2x - m > 0$
b) $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$
c) $(m - 1)x^2 + (m - 1)x + m > 0$
d) $(2m - 3)x^2 + 4mx + m - 1 < 0$
e) $x^2 + 2mx + 2m^2 + 8m + 7 > 0$
f) $(m + 3)x^2 + 2(m + 1)x + 4(m + 1) < 0$

8.8. Dla jakich wartości parametru m nierówność
$\left(3m^2 + m - 2\right)x^2 + (m + 1)x + 2 < 0$ nie ma rozwiązań?

8.9. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(x - 2)(x + m) > 3m$ jest spełniona dla wszystkich wartości $x \in \mathbf{R}$?

8.10. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(mx - 3)(x - 2) < -m$ nie ma rozwiązań?

8.11. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + (m - 3)x + m^2 - 2m + 2}$. Dla jakich wartości parametru m dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych?

8.12. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{mx^2 + mx + m + 2}}$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

8.13. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x - 3)(x - k) < 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle -1; 2 \rangle$?

8.14. Dla jakich wartości parametru m nierówność $x^2 + (m-1)x - m > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb ze zbioru $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$?

8.15. Dla jakich wartości parametru k nierówność $3x^2 + 13x - 10 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle 3k; 3k + 10\rangle$?

D **8.16.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $4x^2 + (12 - 4m)x + m^2 - 6m + 10 > 0$.

D **8.17.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność $a^2 + 5b^2 - 4ab - 6b + 9 \geqslant 0$.

D **8.18.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby k prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 4(k+1)x + (k+1)(k+4) > 0$.

* **8.19.** Określ zbiór rozwiązań nierówności $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 < 0$ w zależności od wartości parametru m.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Zbiorem rozwiązań nierówności $mx^2 - m^2x < 0$
A. dla $m > 0$ jest przedział $(0; m)$.
B. dla $m < 0$ jest zbiór $(-\infty; 0) \cup (m; \infty)$.
C. dla $m < 0$ jest zbiór $(-\infty; m) \cup (0; \infty)$.

2. Dla jakich wartości parametru m nierówność $3x^2 + mx + 1 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$?

3. Dla jakich wartości parametru k nierówność $\left(k^2 - k - 6\right)x^2 + 3(k+2)x + 1 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$?

4. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(x - 2m)(x - m - 3) > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle 0; 4\rangle$?

D **5.** Wykaż, że dla każdego $m \in \mathbf{R}$ funkcja $f(x) = x^2 + (m-2)x + m^2 - 2m + 2$ przyjmuje dla wszystkich argumentów $x \in \mathbf{R}$ tylko wartości dodatnie.

9. Własności funkcji kwadratowej – podsumowanie

Umiejętności:

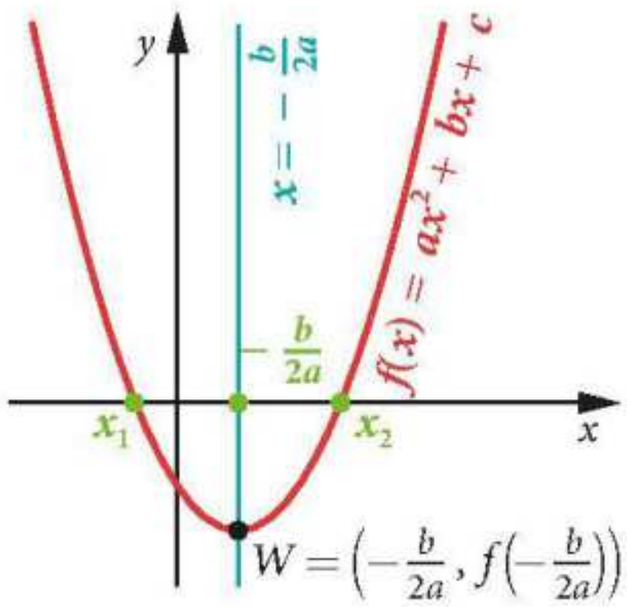
- szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności lub wykresu
- szkicowanie wykresu funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami
- odczytywanie własności funkcji z jej wykresu

Przypomnijmy – jeżeli $f(x) = ax^2 + bx + c$ i $a \neq 0$, to:

- $x_w = -\frac{b}{2a}$ ⟵ pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli
- $x = -\frac{b}{2a}$ ⟵ równanie osi symetrii paraboli

Jeżeli ponadto $\Delta \geqslant 0$, to można pokazać, że:

- $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ ⟵ średnia arytmetyczna miejsc zerowych



Przykład 1 ◂ zad. 9.1

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy wielkości przydatne przy rysowaniu wykresu:

- miejsca zerowe funkcji,
- współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli,
- współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią y.

$\Delta = 16 - 12 = 4$

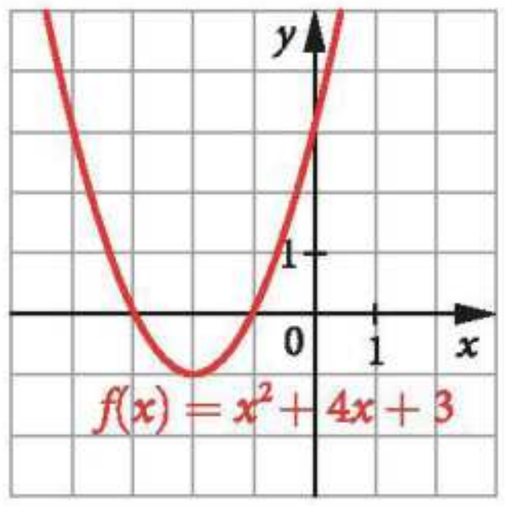
$x_1 = -1, \ x_2 = -3$

$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2, \quad y_w = f(x_w) = f(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$

Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 3)$, ma ramiona skierowane do góry oraz kształt taki, jak parabola o równaniu $y = x^2$ (bo we wzorze funkcji współczynnik przy x^2 jest równy 1).

Jeżeli $0 \in D$, to punkt $(0, f(0))$ należy do wykresu funkcji $y = f(x)$.
Dla funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest to punkt $(0, c)$.

Na podstawie narysowanego wykresu opisujemy własności funkcji f:



- dziedziną jest zbiór **R**,
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; \infty)$,
- funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -1 dla $x = -2$ i nie przyjmuje wartości największej,
- miejscami zerowymi funkcji są argumenty $x_1 = -1,\ x_2 = -3$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$,
  $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -1)$,
- osią symetrii wykresu jest prosta $x = -2$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
  w przedziale $(-\infty; -2\rangle$ funkcja jest malejąca,
  w przedziale $\langle -2; \infty)$ funkcja jest rosnąca,
- równanie $f(x) = m$:
  dla $m < -1$ nie ma rozwiązań,
  dla $m = -1$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m > -1$ ma dwa rozwiązania.

Przykład 2 ◂ zad. 9.2 a, b

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; 2\rangle \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 & \text{dla} \quad x \in (2; 7) \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Wykres funkcji f jest sumą fragmentów dwóch parabol.

Pierwsza z nich, o równaniu $y = x^2 - 4$, ma wierzchołek o współrzędnych $(0, -4)$ i przecina oś x w punktach o pierwszych współrzędnych $x = -2$ oraz $x = 2$.
Do wykresu funkcji f wybieramy te punkty pierwszej paraboli, których pierwsze współrzędne spełniają warunek $x \in (-\infty; 2\rangle$, w tym punkt $(2, 0)$.

Druga parabola, o równaniu $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$, ma wierzchołek o współrzędnych $(4, 2)$. Pierwsze współrzędne punktów przecięcia tej paraboli z osią x są rozwiązaniami równania $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$. Są to liczby $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 6$.
Do wykresu funkcji f wybieramy te punkty drugiej paraboli, których pierwsze współrzędne spełniają warunek $x \in (2; 7)$.

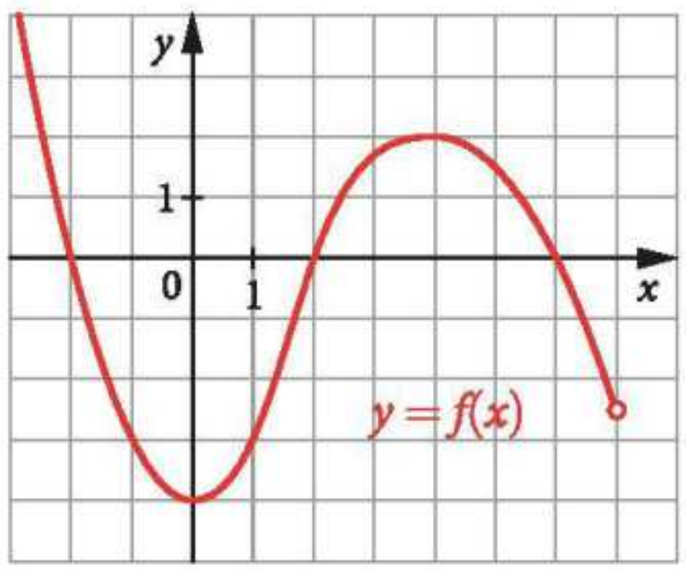
Wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ dla $x = 2$ jest równa 0, czyli jest równa wartości funkcji f w punkcie 2. Zatem w punkcie o współrzędnych (2, 0) fragment wykresu funkcji $y = x^2 - 4$ przechodzi we fragment wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

Obliczamy jeszcze wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ dla $x = 7$.

$$-\frac{1}{2} \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 - 6 = -\frac{49}{2} + 22 = -2\frac{1}{2}$$

Skoro $7 \notin D$, to punkt $\left(7,\ -2\frac{1}{2}\right)$ będzie na wykresie zaznaczony pustym kółeczkiem.

Odczytujemy z wykresu własności funkcji:



- dziedziną jest zbiór $(-\infty; 7)$,
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$,
- funkcja ma wartość najmniejszą równą -4 dla $x = 0$ i nie ma wartości największej,
- miejscami zerowymi funkcji są argumenty: $x = -2,\ x = 2,\ x = 6$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 6)$,
  $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (6; 7)$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
  w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ jest malejąca,
  w przedziale $\langle 0; 4\rangle$ jest rosnąca,
  w przedziale $\langle 4; 7)$ jest malejąca,
- równanie $f(x) = m$:
  dla $m < -4$ nie ma rozwiązań,
  dla $m = -4$ oraz dla $m > 2$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m \in \left\langle -4; -2\frac{1}{2}\right\rangle \cup \{2\}$ ma dwa rozwiązania,
  dla $m \in \left(-2\frac{1}{2}; 2\right)$ ma trzy rozwiązania.

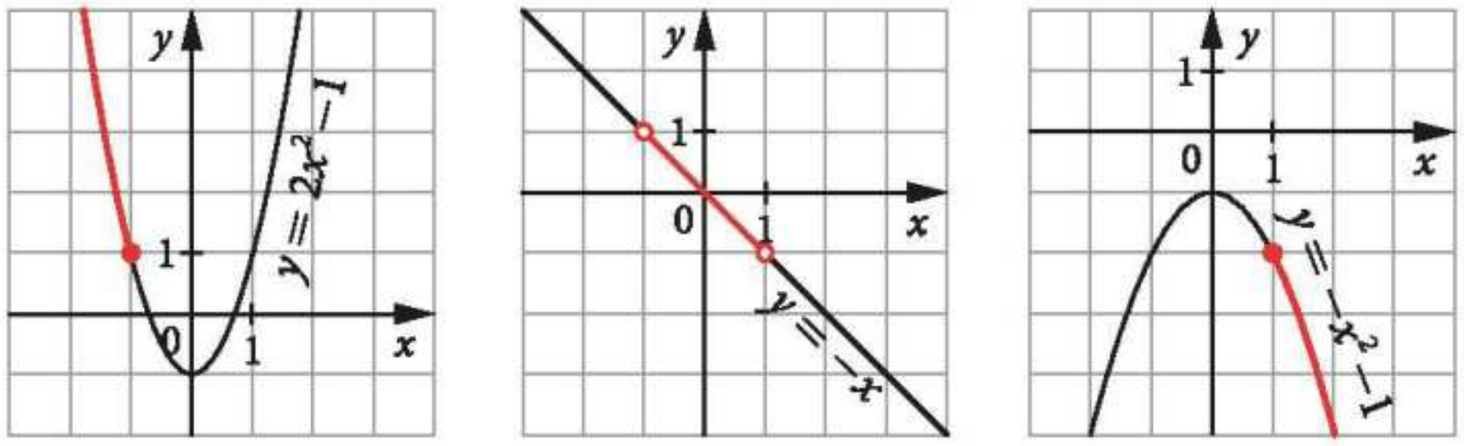
Przykład 3 ◀ zad. 9.2 c, d

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; -1\rangle \\ -x & \text{dla} \quad x \in (-1; 1) \\ -x^2 - 1 & \text{dla} \quad x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

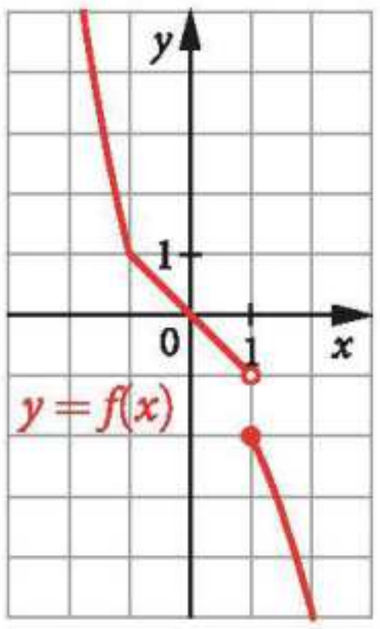
Rozwiązanie

Z trzech wykresów poszczególnych funkcji wybieramy odpowiednie fragmenty.



Rysujemy wykres funkcji f (obrazowo mówiąc, sklejony z wybranych fragmentów) i na jego podstawie opisujemy własności funkcji:

- dziedziną jest zbiór **R**,
- zbiorem wartości jest zbiór $(-\infty; -2\rangle \cup (-1; \infty)$,
- funkcja nie ma wartości najmniejszej i nie ma wartości największej,
- miejscem zerowym funkcji jest argument $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$,
  $f(x) < 0$ dla $x \in (0; \infty)$,
- funkcja jest malejąca,
- równanie $f(x) = m$:
  dla $m \in (-\infty; -2\rangle \cup (-1; \infty)$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m \in (-2; -1\rangle$ nie ma rozwiązań.



Przykład 4 ◂ zad. 9.11

Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku $W = (-2, 4)$ przechodzącą przez punkt $P = (-3, 3)$. Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie

I sposób

Najpierw wyznaczamy postać kanoniczną danej funkcji. Znamy współrzędne wierzchołka paraboli, więc do obliczenia pozostaje tylko współczynnik a.

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Podstawiamy do wzoru współrzędne punktu $P = (-3, 3)$.

$$3 = a(-3 + 2)^2 + 4$$

Zatem $a = -1$ i $f(x) = -(x + 2)^2 + 4$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci ogólnej: $f(x) = -x^2 - 4x$.

II sposób

Podane własności funkcji możemy zapisać w postaci układu równań.

Jeżeli wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$ jest parabolą, to $a \neq 0$.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \\ f(-3) = 3 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ pierwsza współrzędna wierzchołka W

$\longleftarrow$ druga współrzędna wierzchołka W

$\longleftarrow$ punkt $P = (-3, 3)$ należy do wykresu f

$$\begin{cases} b = 4a \\ 4a - 2b + c = 4 \\ 9a - 3b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 4a - 8a + c = 4 \\ 9a - 12a + c = 3 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ podstawiamy $4a$ w miejsce b w drugim i trzecim równaniu

$$\begin{cases} b = 4a \\ -4a + c = 4 \\ -3a + c = 3 \end{cases}$$

Ostatnie dwa równania tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Po rozwiązaniu tego układu (np. metodą przeciwnych współczynników) otrzymujemy $a = -1$ i $c = 0$. Zatem $b = -4$, a wzór funkcji ma postać $f(x) = -x^2 - 4x$.

Odp.: $f(x) = -x^2 - 4x$

Przykład 5 ◀ zad. 9.15

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $A = (1, -2)$, $B = (0, -5)$ i $C = (-2, -5)$. Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} -2 = a + b + c \\ -5 = c \\ -5 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

$\longleftarrow$ punkty A, B, C należą do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi rozwiążemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} c = -5 \\ a + b - 5 = -2 \\ 4a - 2b - 5 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -5 \\ a + b = 3 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases}$$

Stąd $a = 1$ i $b = 2$.

Odp.: $f(x) = x^2 + 2x - 5$

Przykład 6 ◂ zad. 9.20

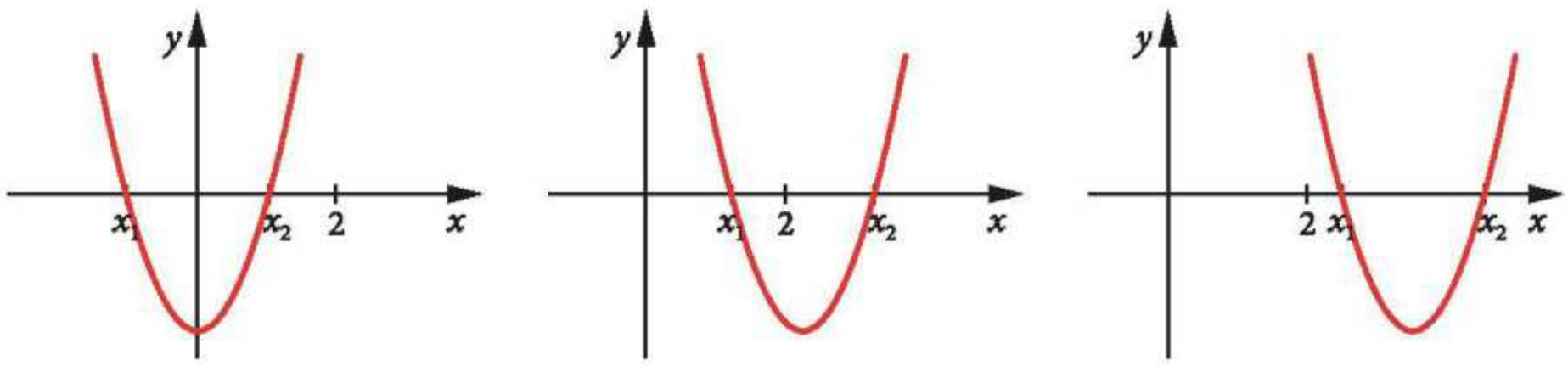
Wyznaczymy takie wartości parametru m, aby funkcja

$$f(x) = x^2 + 2(2m - 3)x + m - 1$$

miała dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 < 2 < x_2$.

Rozwiązanie

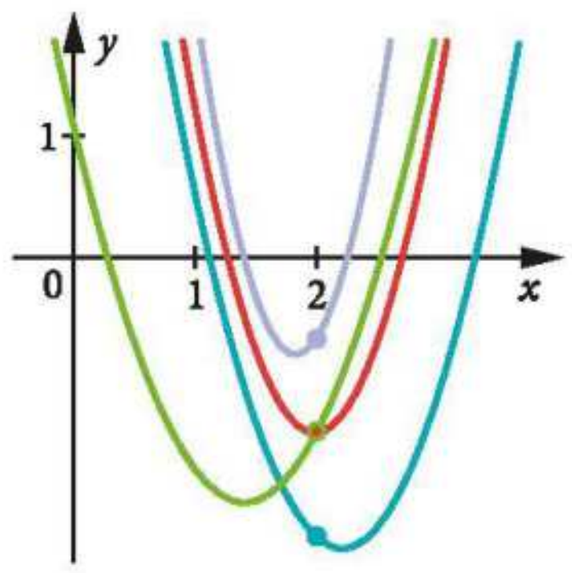
Zastanówmy się, jakie położenie paraboli gwarantuje spełnienie warunków zadania. Ponieważ ramiona paraboli są skierowane do góry, to gdy $\Delta > 0$, możemy utworzyć trzy nierówności z pierwiastkami $x_1 < x_2$ i liczbą 2.



$x_1 < x_2 < 2$ $\quad$ $x_1 < 2 < x_2$ $\quad$ $2 < x_1 < x_2$

Jeśli $x_1 < x_2 < 2$ lub $2 < x_1 < x_2$, to $f(2) > 0$. Natomiast w przypadku $x_1 < 2 < x_2$ spełniona jest nierówność $f(2) < 0$.

Istnieje nieskończenie wiele parabol przechodzących przez przykładowy punkt $(2, f(2))$, gdzie $f(2) < 0$. Popatrzmy na kilka z nich.



Warunek $f(2) < 0$ wystarczy do rozwiązania zadania, ponieważ wynika z niego:

- istnienie dwóch pierwiastków (nie ma potrzeby badania znaku Δ),
- położenie tych pierwiastków na osi x po dwóch stronach liczby 2.

Zatem dana funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 < 2 < x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(2) < 0$.

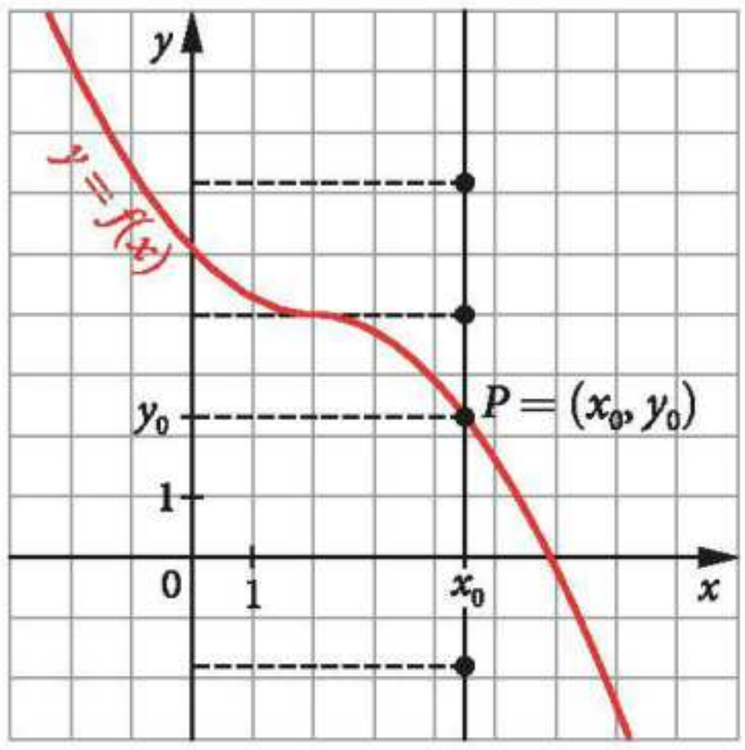
$$f(2) = 4 + 4(2m - 3) + m - 1 = 9m - 9$$

$$f(2) < 0 \text{ dla } m \in (-\infty; 1)$$

Odp.: $m \in (-\infty; 1)$

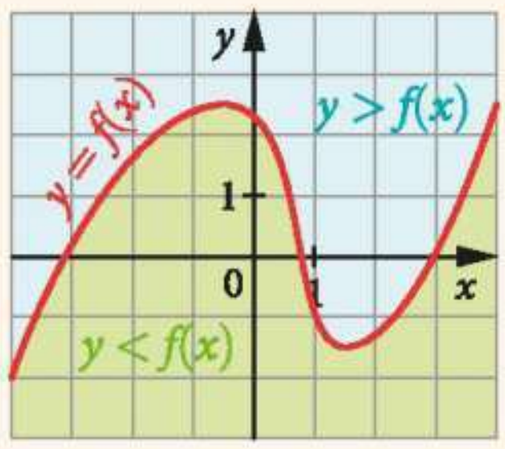
Nierówność $y > f(x)$

Wykresem funkcji $y = f(x)$ na płaszczyźnie kartezjańskiej jest zbiór punktów o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie x jest argumentem funkcji f.
Na rysunku mamy wykres pewnej funkcji $y = f(x)$. Jeżeli przez punkt $P = (x_0, y_0)$ tego wykresu poprowadzimy pionową prostą, to jej punkty leżące powyżej P mają drugą współrzędną większą od y_0, a punkty leżące poniżej P mają drugą współrzędną mniejszą od y_0. To samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla dowolnego punktu należącego do wykresu funkcji.



Wniosek

Jeżeli na płaszczyźnie kartezjańskiej narysowany jest wykres funkcji $y = f(x)$, $x \in D$, to punkty leżące powyżej tego wykresu tworzą zbiór opisany za pomocą nierówności $y > f(x)$, a punkty leżące poniżej wykresu – zbiór opisany za pomocą nierówności $y < f(x)$.

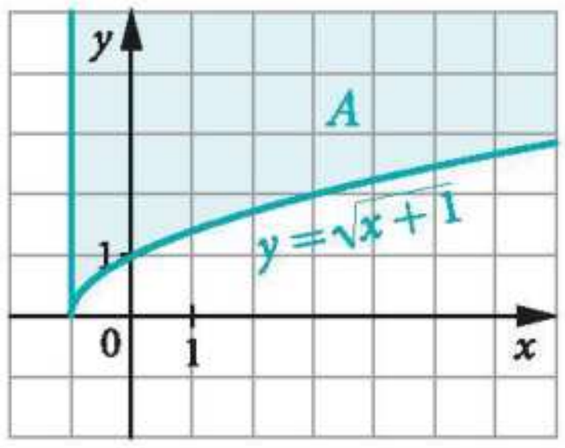


Przykład 7 ◀ zad. 9.24

Zaznaczymy na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór $A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geqslant \sqrt{x+1}\}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji $y = \sqrt{x+1}$ jest zbiór $\langle -1; \infty)$, zatem do szukanego zbioru mogą należeć tylko takie punkty, których odcięta $x \geqslant -1$.



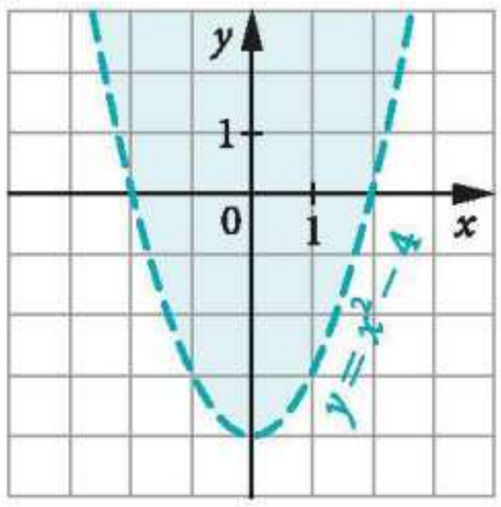
Wniosek

Parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ jest wspólnym brzegiem dwóch części płaszczyzny kartezjańskiej. Jedną z nich, utworzoną przez punkty leżące **na** paraboli **i powyżej** niej opisuje nierówność $y \geqslant ax^2 + bx + c$, a drugą, utworzoną przez punkty leżące **na** paraboli **i poniżej** niej opisuje nierówność $y \leqslant ax^2 + bx + c$.

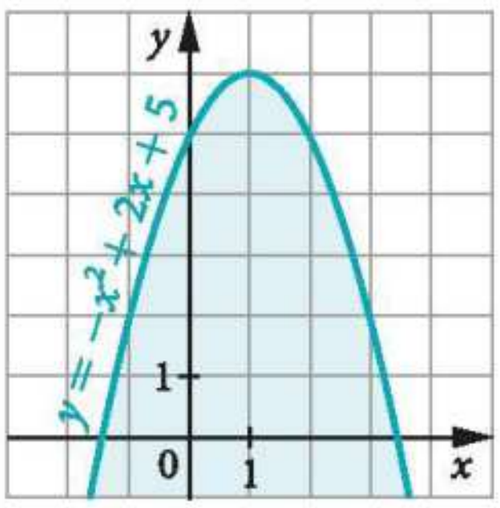
Przykład 8 ◀ zad. 9.24, 9.25

Zaznaczymy na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność lub układ nierówności.

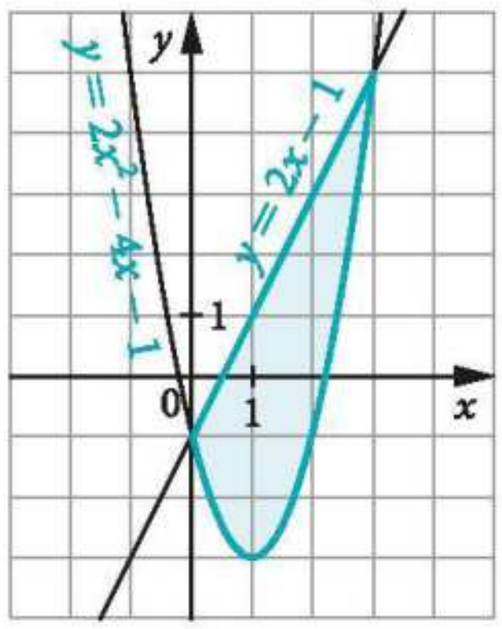
a) $y > x^2 - 4$



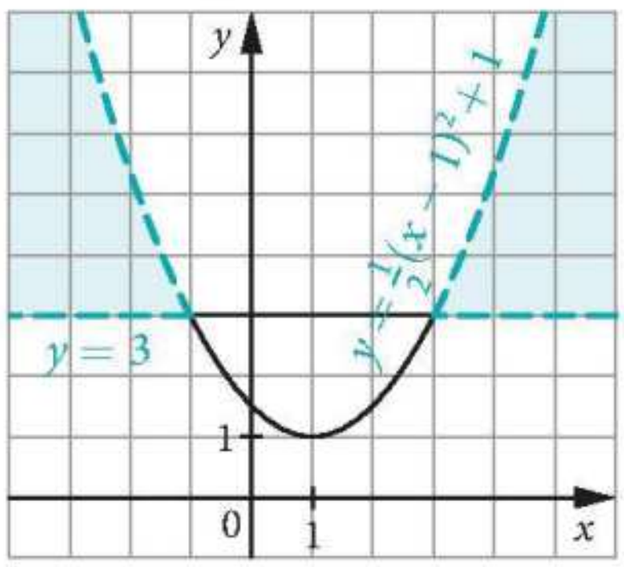
b) $y \leqslant -x^2 + 2x + 5$



c) $2x^2 - 4x - 1 \leqslant y \leqslant 2x - 1$



d) $3 < y < \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$



Przykład 9 ◀ zad. 9.27

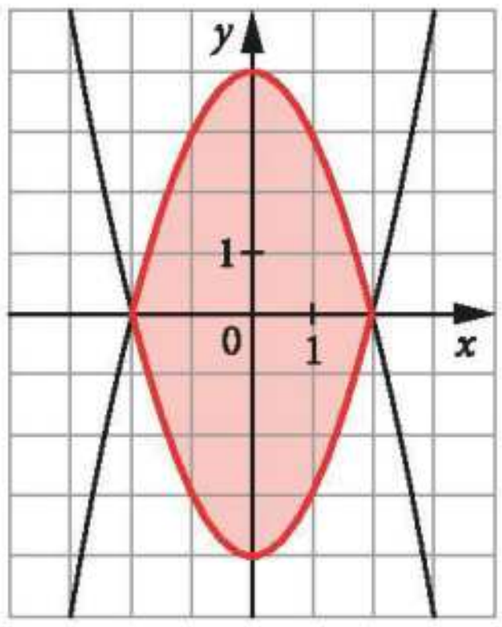
Dane są zbiory:

$$A = \left\{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 - 4 \leqslant y \leqslant -x^2 + 4\right\},$$

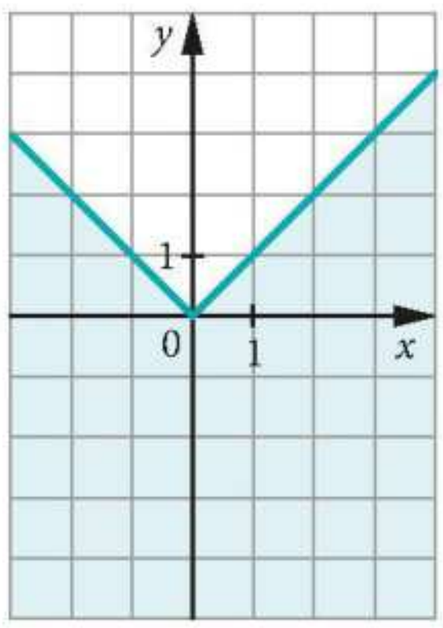
$$B = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leqslant |x|\}.$$

Narysujemy na płaszczyźnie zbiory: A, B, $A \cap B$ oraz $A - B$.

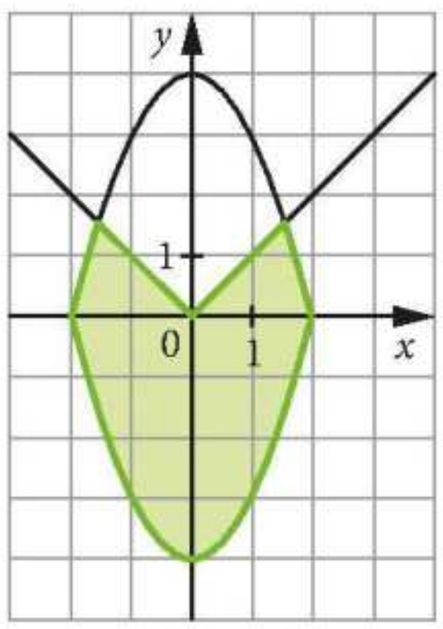
Rozwiązanie



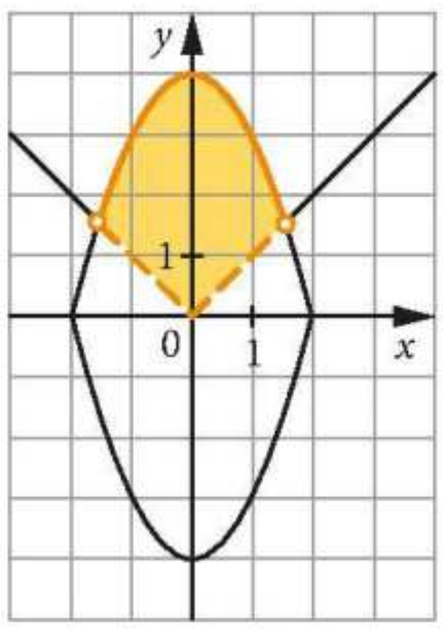
A



B



$A \cap B$



$A - B$

Przykład 10 ◂ zad. 9.29

Funkcja f przyporządkowuje każdej wartości m liczbę rozwiązań równania $(m+2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$ z niewiadomą x. Napiszemy wzór funkcji f i naszkicujemy jej wykres.

Rozwiązanie

I. Jeżeli $m + 2 = 0$, to równanie nie jest równaniem kwadratowym.

Dla $m = -2$ mamy:

$-12x - 9 = 0$ ⟵ równanie liniowe, które ma jedno rozwiązanie

Zatem $f(-2) = 1$.

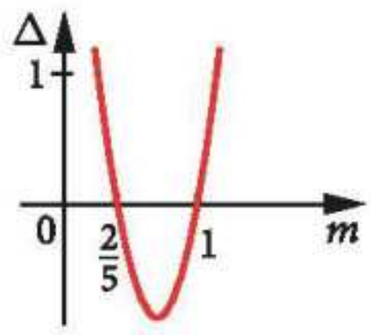
II. Jeżeli $m + 2 \neq 0$, to równanie jest równaniem kwadratowym i liczba jego rozwiązań zależy od znaku Δ. Zakładamy, że $m \neq -2$.

$\Delta = 36m^2 - 4(m+2)(4m-1)$

$\Delta = 20m^2 - 28m + 8$

$\Delta = 4\left(5m^2 - 7m + 2\right)$ ⟵ $m_1 = 1,\ m_2 = \frac{2}{5}$

$\Delta = 20(m-1)\left(m - \frac{2}{5}\right)$



Z wykresu odczytujemy:

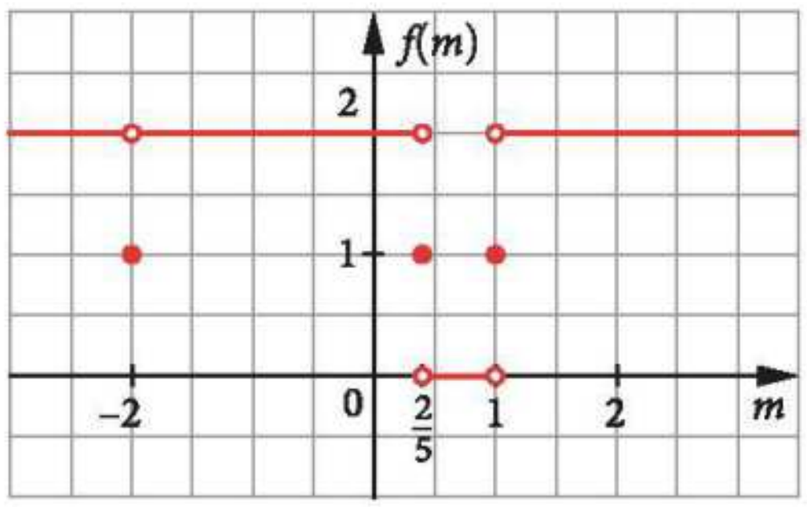
$\Delta > 0$ dla $m \in (-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ \frac{2}{5}\right) \cup (1;\ \infty)$ ⟵ równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania

$\Delta < 0$ dla $m \in \left(\frac{2}{5};\ 1\right)$ ⟵ równanie kwadratowe, które nie ma rozwiązań

$\Delta = 0$ dla $m = \frac{2}{5}$ lub $m = 1$ ⟵ równanie kwadratowe, które ma jedno rozwiązanie

Zatem:

$$f(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m \in \left(\frac{2}{5};\ 1\right) \\ 1 & \text{dla} \quad m = -2 \text{ lub } m = \frac{2}{5} \text{ lub } m = 1 \\ 2 & \text{dla} \quad m \in (-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ \frac{2}{5}\right) \cup (1;\ \infty) \end{cases}$$



Zadania

9.1. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

9.2. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla} \quad x \leqslant 2 \\ -x + 2 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{dla} \quad x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{dla} \quad x \leqslant -1 \\ x + 3 & \text{dla} \quad -1 < x < 2 \\ -x^2 + 6x - 3 & \text{dla} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla} \quad x \leqslant -1 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{dla} \quad -1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{dla} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$

9.3. Sporządź wykres funkcji i odczytaj z wykresu rozwiązanie podanej nierówności.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{dla} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$ $\qquad f(x) < 8$

b) $g(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 4 & \text{dla} \quad x \leqslant 3 \\ 2x - 4 & \text{dla} \quad x > 3 \end{cases}$ $\qquad g(x) > 2$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{dla} \quad x \in (-\infty;\, 0\rangle \cup \langle 4;\, \infty) \\ -2x^2 + 8x + 1 & \text{dla} \quad x \in (0;\, 4) \end{cases}$ $\qquad h(x) \leqslant 7$

d) $k(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 4 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$ $\qquad -4 < k(x) < 4$

9.4. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{dla} \quad x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 18x - 21 & \text{dla} \quad x \leqslant -2 \\ \frac{1}{2}x + 4 & \text{dla} \quad x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 4 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty) \\ -2x^2 + 4x + 4 & \text{dla} \quad x \in \langle 0; 2 \rangle \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{dla} \quad x \leqslant -1 \\ 2x + 2 & \text{dla} \quad -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 12x + 13 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

9.5. Sporządź wykres funkcji $y = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$ w zależności od wartości parametru m.

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 3 \\ -x^2 + 8x - 17 & \text{dla} \quad x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

9.6. Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4|x|$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

9.7. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 4x^2 + bx + c$ jest parabola przechodząca przez punkty $A = (0, 2)$ i $B = (-1, 14)$. Wyznacz współczynniki b i c w równaniu paraboli.

9.8. Osią symetrii paraboli $y = ax^2 + bx - 4$ przechodzącej przez punkt $A = (-2, 4)$ jest prosta $x = -3$. Wyznacz współczynniki a i b w równaniu paraboli.

9.9. Wierzchołkiem paraboli $y = -3x^2 + bx + c$ jest punkt $B = (1, 0)$. Wyznacz współczynniki b i c w równaniu paraboli.

9.10. Parabola, której wierzchołek leży na osi y, przechodzi przez punkty $A = (2, 1)$ i $B = (-4, 7)$. Wyznacz równanie tej paraboli.

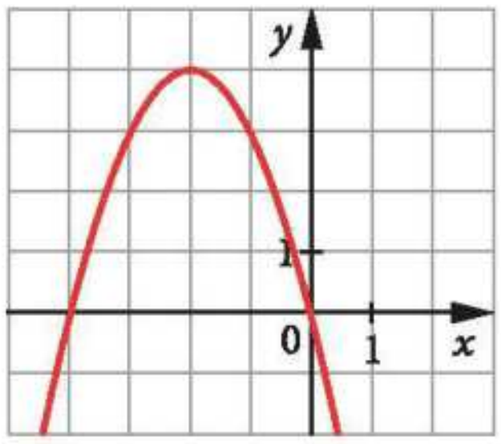
9.11. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $(4, 6)$ i przechodzi przez punkt $(1, 3)$. Wyznacz współczynniki a, b, c.

9.12. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 2 dla $x = 2$. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(4, 6)$. Wyznacz współczynniki a, b, c.

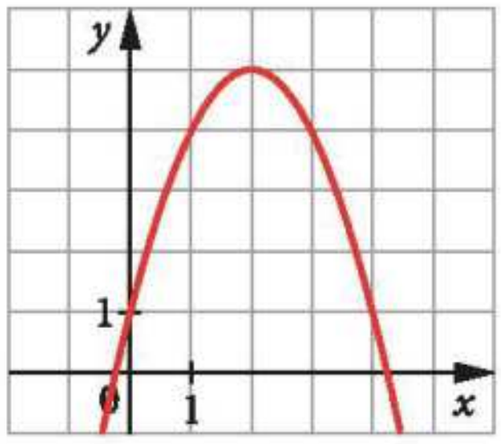
9.13. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $(1, -2)$ i $(0, 1)$. Jej osią symetrii jest prosta $x = 2$. Wyznacz współczynniki a, b, c.

9.14. Podaj wzór funkcji kwadratowej f, której wykres przedstawiono na rysunku.

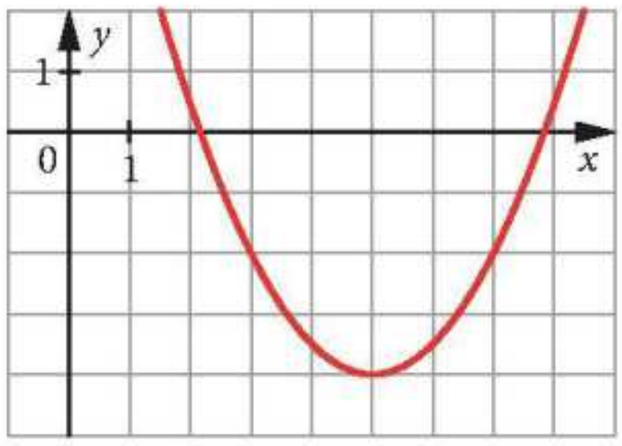
a)



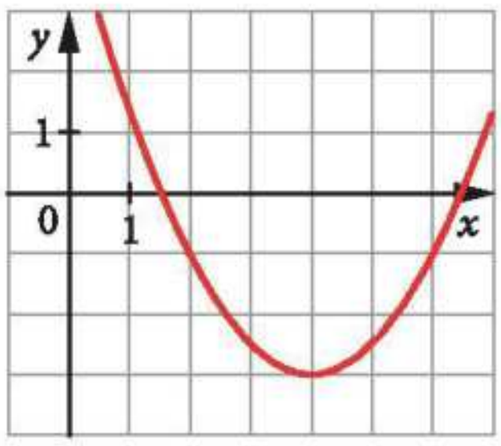
c)



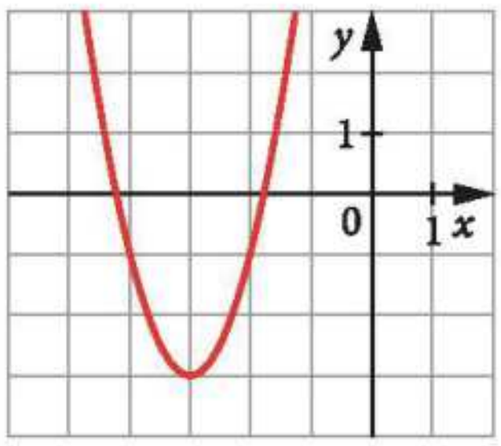
e)



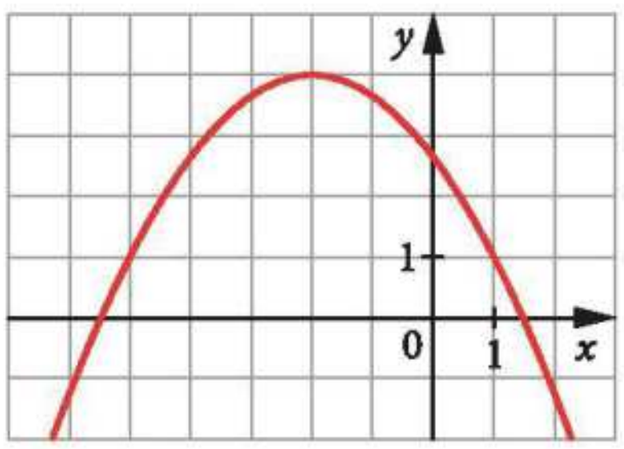
b)



d)



f)



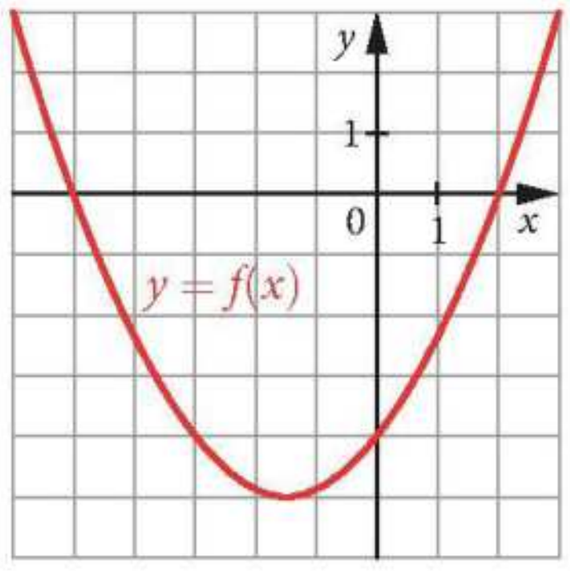
9.15. Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty A, B, C. Wyznacz współczynniki a, b, c.

a) $A = (0, 1)$ $B = (-1, -1)$ $C = (2, 11)$
b) $A = (1, -4)$ $B = (2, -3)$ $C = (-1, 0)$
c) $A = (-2, -3)$ $B = (-1, -1)$ $C = (1, 3)$

9.16. Wyznacz współczynniki b i c funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ o podanych własnościach.

a) Jej miejscami zerowymi są liczby -3 i 1.
b) Jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 5)$, a liczba 5 jest miejscem zerowym.

9.17. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz współczynniki a, b, c.



D **9.18.** Wykaż, że funkcja kwadratowa, której wykres przechodzi przez punkty $K = (-5, 10)$, $L = (-3, 5)$, $M = (3, 2)$, nie ma miejsc zerowych.

* **9.19.** Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2; 4)$?

9.20. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + 6m - 18$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1 < -2 < x_2$?

9.21. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = x^2 + (2k+4)x + 6k + 3$ ma dwa różne miejsca zerowe mniejsze od 1?

9.22. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 - (2m-1)x + m^2 - 4$ ma dwa różne miejsca zerowe mniejsze od 4?

D **9.23.** Wykaż, że dla każdej wartości parametru m funkcja $f(x) = -2x^2 + 3mx + m^2 - m + 5$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1 < 1 < x_2$.

9.24. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają podaną nierówność.

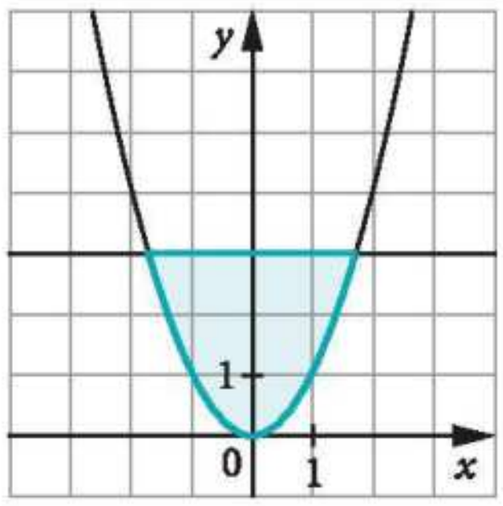
a) $y \leqslant 2x^2$ b) $y \geqslant \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

9.25. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór opisany za pomocą układu nierówności.

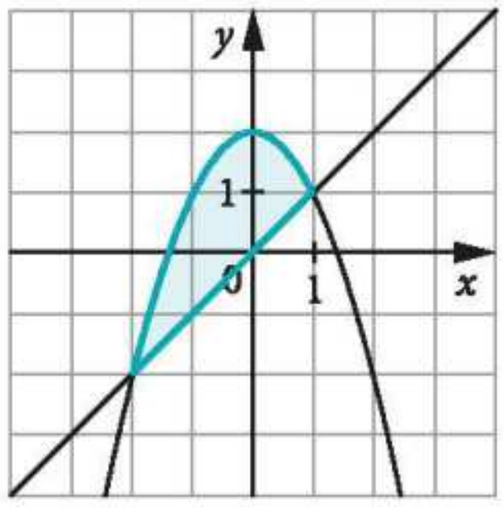
a) $\begin{cases} y \leqslant x + 2 \\ y \geqslant x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \leqslant -2x^2 + 8x - 4 \\ y \geqslant 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \geqslant x \\ y \leqslant -x^2 + 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \leqslant 3 - |x| \\ y \geqslant x^2 - 9 \end{cases}$

9.26. Na rysunku przedstawione są fragmenty parabol lub prostych. Opisz za pomocą układu nierówności zbiór zaznaczony kolorem.

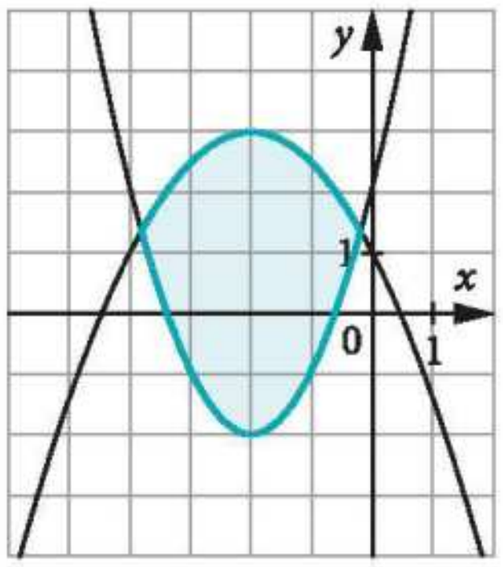
a)



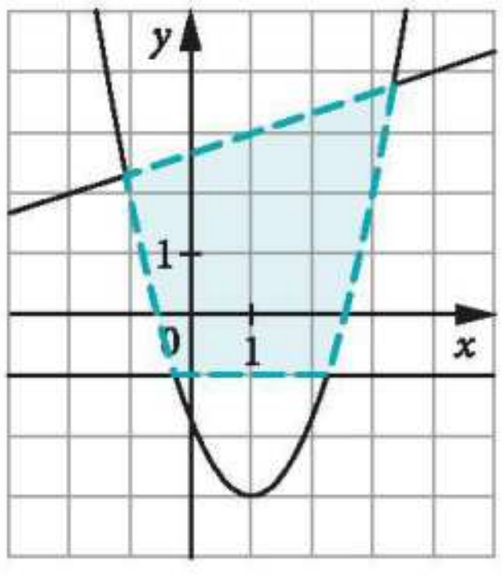
b)



c)



d)



9.27. Dane są zbiory:

$$A = \left\{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geqslant x^2 + 4x + 2\right\} \text{ i } B = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leqslant 2 - |x|\}.$$

Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiory: A, B, $A \cap B$ oraz $A - B$.

9.28. Funkcja $y = f(m)$ przyporządkowuje sumę kwadratów pierwiastków równania $x^2 - mx + m^2 - 2m + 1 = 0$ każdej wartości parametru m, dla której istnieją dwa różne pierwiastki tego równania. Wyznacz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

9.29. Funkcja f przyporządkowuje każdej wartości parametru m liczbę rozwiązań równania $(m + 3)x^2 + (m + 3)x + m = 0$. Wyznacz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

9.30. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3 - |x| & \text{dla} \quad x \leqslant 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{dla} \quad x > 3 \end{cases}$.

Określ liczbę pierwiastków równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m. Narysuj wykres funkcji $g(m) = k$, gdzie k oznacza liczbę pierwiastków równania $f(x) = m$, $m \in \mathbf{R}$.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - x + 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja $g(x) = |f(x)|$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

B. Funkcja $h(x) = |f(x) - 1|$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

C. Równanie $|f(x) - 2| = 1$ ma trzy rozwiązania.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 4 & \text{dla} \quad x < -2 \\ \frac{1}{4}x^2 - x + 1 & \text{dla} \quad x \geqslant -2 \end{cases}$.

Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

3. Do wykresu funkcji kwadratowej $y = f(x)$ należą punkty: $(-1, 5)$, $(3, 1)$ i $(5, 2)$. Wyznacz wzór tej funkcji.

4. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $\langle -2; \infty)$. Osią symetrii jej wykresu jest prosta $x = 3$. Wykres przecina oś y w punkcie o drugiej współrzędnej 1. Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

5. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -4 i 2, a jej wykres przecina oś y w punkcie o drugiej współrzędnej -1. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż postać iloczynową trójmianu kwadratowego $-9 + 6x - x^2$.

A. $(-3 + x)^2$

B. $-(x - 3)^2$

C. $-(x + 3)^2$

D. Ten trójmian nie ma postaci iloczynowej.

2. Wskaż miejsca zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)(x + 1)$.

A. $2, -\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{2}, -1$ **C.** $-\sqrt{2}, 1$ **D.** $\sqrt{2}, 1$

3. Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = x^2 + 2x$ przyjmuje w przedziale $\langle -4; 1\rangle$ największą wartość?

A. $x = -1$ **B.** $x = -4$ **C.** $x = 1$ **D.** $x = 1$ lub $x = -3$

4. Jakie wartości może przyjmować współczynnik k w równaniu paraboli $y = x^2 - kx$, aby nie miała ona punktów wspólnych z osią x?

A. $k < 0$

B. $k = 0$

C. $k \geqslant 1$

D. Nie istnieje takie k.

5. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x$ o dziedzinie $D = \langle 1; 4)$ i cztery zdania dotyczące tej funkcji.

I. Funkcja f przyjmuje wartość największą dla $x = 2$.

II. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4$.

III. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

IV. Funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej.

Które zdania są prawdziwe?

A. tylko I i IV **B.** tylko I i II **C.** tylko II i III **D.** tylko III i IV

6. Równanie $x^2 + 5 = 9$

A. nie ma pierwiastków.

B. ma dwa dodatnie pierwiastki.

C. ma dwa ujemne pierwiastki.

D. ma dwa pierwiastki o przeciwnych znakach.

7. Wskaż postać iloczynową funkcji $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.

A. $f(x) = (x+2)(x+4)$

B. $f(x) = -(x-2)(x-4)$

C. $f(x) = (x-2)(x-4)$

D. Ta funkcja nie ma postaci iloczynowej.

8. Postać iloczynowa funkcji $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x - 2\sqrt{2}$ to

A. $f(x) = \left(\sqrt{2}x - 4\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

B. $f(x) = \left(\sqrt{2}x - 4\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right)$.

C. $f(x) = \sqrt{2}(x-2)(x+1)$.

D. $f(x) = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

9. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ są liczby $x = -1$ oraz $x = -5$. Ile są równe współczynniki tej funkcji?

A. $a = 1,\ b = -4$

B. $a = -2,\ b = \frac{7}{2}$

C. $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{2}$

D. $a = \frac{1}{2},\ b = 3$

10. Wskaż nierówność prawdziwą dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$.

A. $3(x-2)^2 - 1 \leqslant 0$

B. $-5(x+2)^2 + 3 > 0$

C. $-0{,}4(x+3)^2 - 0{,}5 < 0$

D. $7(x-11)^2 + 2 \leqslant 0$

11. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0$.

A. $\mathbf{R}$

B. Ta nierówność nie ma rozwiązań.

C. $\left\langle -2;\ \frac{1}{3}\right)$

D. $\left\langle -2;\ \frac{1}{3}\right\rangle$

12. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-\frac{3}{7}\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) > 0$.

A. $\left(-\frac{3}{5};\ \frac{2}{3}\right)$

B. $\left(-\frac{2}{3};\ \frac{3}{5}\right)$

C. $\left(-\infty;\ -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ \infty\right)$

D. $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{5};\ \infty\right)$

13. O funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ wiadomo, że ma dwa ujemne miejsca zerowe oraz że $f(0) = -1$. Jakie znaki mają współczynniki a, b i c?

A. Jest za mało danych, żeby to określić.

B. $a < 0$ i $b < 0$ i $c < 0$

C. $a > 0$ i $b > 0$ i $c < 0$

D. $a < 0$ i $b < 0$ i $c > 0$

14. Parabola $y = m - x^2$ przecina oś x w punktach $x = 2$ oraz $x = -2$. Jaką wartość ma współczynnik m?

A. $m = 2$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 4$ **D.** Nie istnieje takie m.

15. Wskaż układ równań, który ma dwa rozwiązania.

A. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -(x-2)^2 - 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x \\ y = (x+2)^2 + 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -3 \\ y = (x+5)^2 - 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = x \\ y = -(x+1)^2 - 1 \end{cases}$

16. Wskaż układ równań, który ma jedno rozwiązanie.

A. $\begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -2x \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

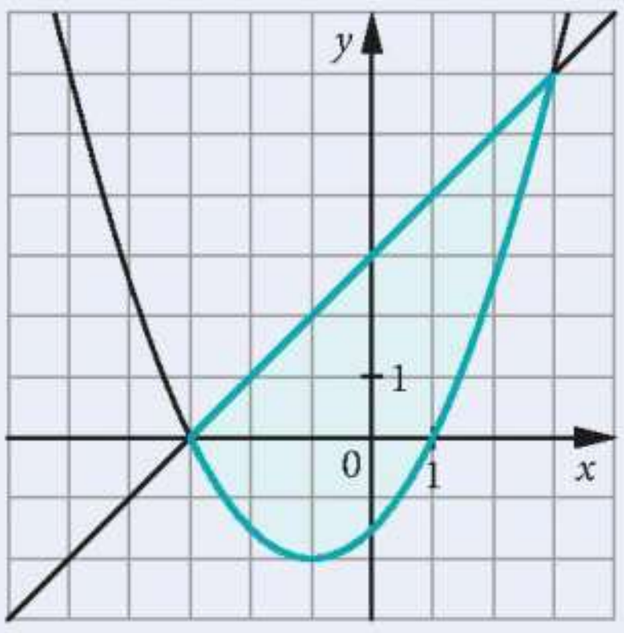
17. Ile rozwiązań ma równanie $|x| + x^2 = 4$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

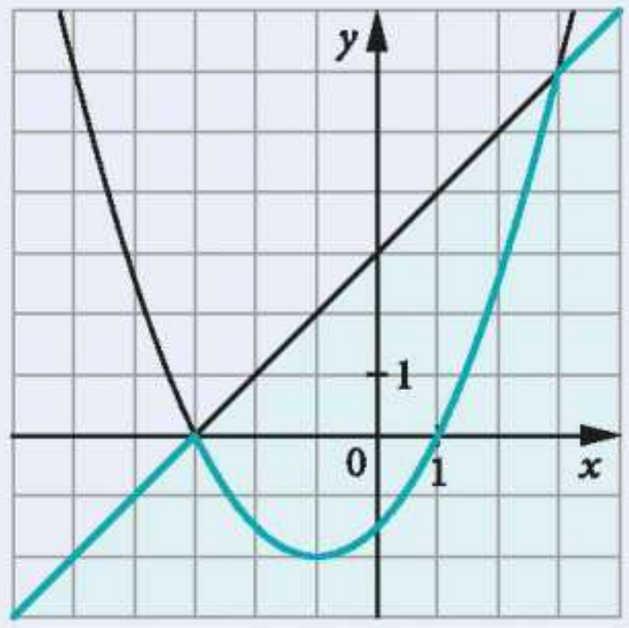
18. Wskaż wykres będący ilustracją zbioru rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \\ x - y + 3 \geqslant 0 \end{cases}.$$

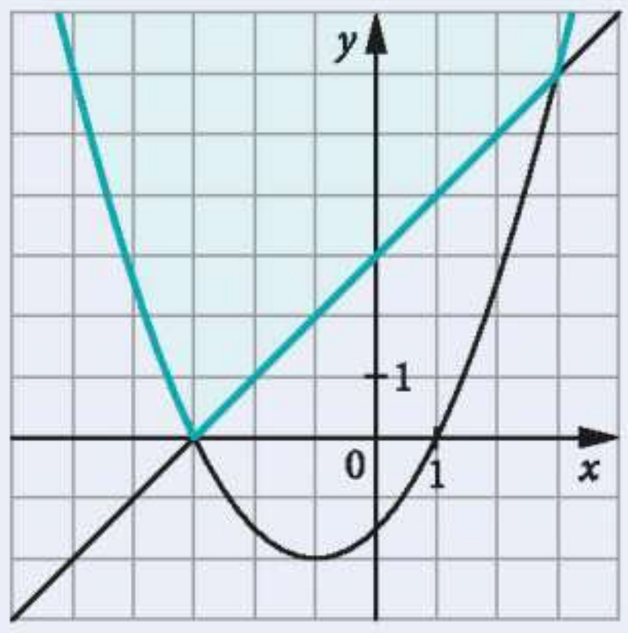
A.



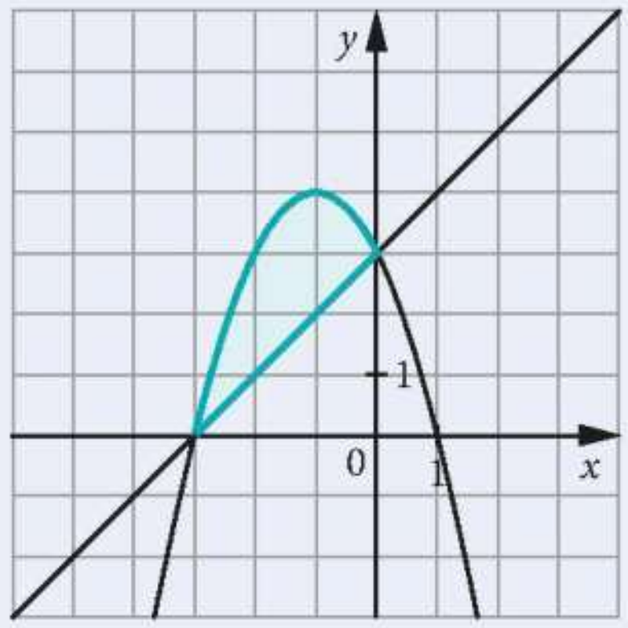
B.



C.



D.



W zadaniach 19–33 oceń prawdziwość podanych zdań.

19. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ są liczby 3 i 7. Wynika z tego, że

A. $a > 0$. **B.** $p = 5$. **C.** $q = -4$.

20. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2+bx+c$ jest liczba 2. Wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji ma współrzędne (5, 3). Wynika z tego, że

A. drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 8.

B. $a < 0$.

C. $c < 0$.

21. Funkcja $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{dla} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

A. jest rosnąca.

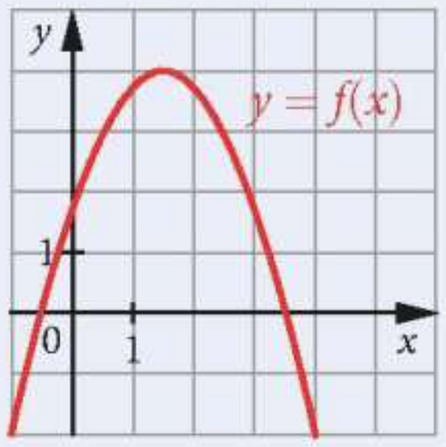
B. ma trzy miejsca zerowe.

C. przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 1$.

22. Parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przecina oś y w punkcie $(0, -6)$, a jej wierzchołek ma współrzędne $(-2, 7)$. Wynika z tego, że

A. $a < 0$. **B.** $b < 0$. **C.** $\Delta < 0$.

23. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres jest dany na rysunku obok, ma miejsca zerowe x_1, x_2. Na podstawie wykresu można wywnioskować, że



A. $a < 0$ i $c > 0$ i $x_1 \cdot x_2 < 0$.

B. $a < 0$ i $b > 0$.

C. $b > 0$ i $c > 0$ i $\Delta \geqslant 0$.

24. Dana jest funkcja $f(x) = -2(x+7)^2 + 3$.

A. W przedziale $(-\infty; 7\rangle$ funkcja f jest rosnąca.

B. W przedziale $\langle 7; \infty)$ funkcja f jest malejąca.

C. Prosta $x = -7$ jest osią symetrii wykresu funkcji f.

25. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla} \quad x \leqslant -1 \\ 2 - x^2 & \text{dla} \quad x > -1 \end{cases}$.

A. Równanie $f(x) = m$ ma dla dowolnej wartości m co najmniej jedno rozwiązanie.

B. Dla $m \in (1; 2)$ równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

C. Równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania tylko dla $m = 1$.

26. Dana jest funkcja $f(x) = |(x-3)(x+1)|$.
A. Dla pewnej wartości m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie.
B. Równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania dla $m > 4$ lub $m = 0$.
C. Dla pewnej wartości m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

27. Dane jest równanie $x^2 - 2|x| = m$ z parametrem m.
A. Dla pewnej wartości m równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.
B. Dla pewnej wartości m równanie to ma dokładnie trzy rozwiązania.
C. Dla nieskończenie wielu wartości m równanie to ma dokładnie cztery rozwiązania.

28. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2+bx+c$ ma wszystkie współczynniki dodatnie. Wynika stąd, że
A. funkcja f ma dwa miejsca zerowe tego samego znaku.
B. funkcja f nie ma dodatnich miejsc zerowych.
C. wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f należy do półpłaszczyzny opisanej nierównością $y < 0$.

29. Suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + x - 4 = 0$ jest
A. większa od $2\sqrt{17}$.
B. kwadratem liczby całkowitej.
C. pierwiastkiem równania $x^2 - 7x - 18 = 0$.

30. Funkcje $f(x) = x^2 + 3x + m$ i $g(x) = 3x + m$ mają wspólne miejsce zerowe x_0. Wynika stąd, że
A. $x_0 = 0$.
B. $m = 0$.
C. nieskończenie wiele wartości współczynnika m spełnia warunek zadania.

31. W trójmianie $x^2 + px + q$ współczynniki p i q są przeciwnymi liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że
A. trójmian ten ma dwa pierwiastki.
B. trójmian ten może mieć jeden pierwiastek.
C. trójmian ten może nie mieć pierwiastków.

32. Jedno z miejsc zerowych funkcji $f(x) = -x^2 + bx + c$ jest większe od 5, a drugie jest mniejsze od 2. Wynika stąd, że
A. $f(5) > 0$ i $f(2) < 0$. **B.** $f(5) < 0$ i $f(2) < 0$. **C.** $f(5) > 0$ i $f(2) > 0$.

33. Sumę odwrotności rozwiązań równania $x^2 + kx - 5 = 0$ określa wyrażenie
A. $\frac{k}{5}$. **B.** $\frac{5}{k}$. **C.** $-\frac{1}{k}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

34. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale i podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = x^2 - 10x + 22$ $\langle 3; 6\rangle$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ $\langle -4; 0\rangle$

c) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ $\left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right\rangle$

d) $f(x) = -\sqrt{2}x^2 - x + 3$ $\langle -2; -1\rangle$

35. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = 25x^2 - 1$

b) $f(x) = 9x^2 + x$

c) $f(x) = 9x^2 + 4$

d) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

e) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$

f) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

36. Funkcję kwadratową f daną w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej zapisz w pozostałych możliwych postaciach.

a) $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 1$

c) $f(x) = -3(x - 2)(x + 1)$

d) $f(x) = 5x^2 - 15x$

37. Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $-2x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $9x^2 - 12\sqrt{5}x + 20 = 0$

d) $x^2 - 3 \cdot 2^{16}x + 2^{33} = 0$

e) $2^{11}x^2 - 3^5x + 2^{17} = 0$

f) $x^2 - \left(3^{20} + 1\right)x + 3^{20} = 0$

38. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 < 81$

b) $x^2 + x > 0$

c) $-2(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$

d) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 \leqslant 0$

e) $x^2 - 11x + 24 < 0$

f) $x + 6 \leqslant 2x^2$

g) $-8x^2 + 13x - 6 < 0$

h) $-3x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 90 < 0$

39. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby 2 i 8, a wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(-1, 3)$. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

40. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej iloczyn tej liczby i liczby o 3 od niej mniejszej.

a) Podaj wzór funkcji f.

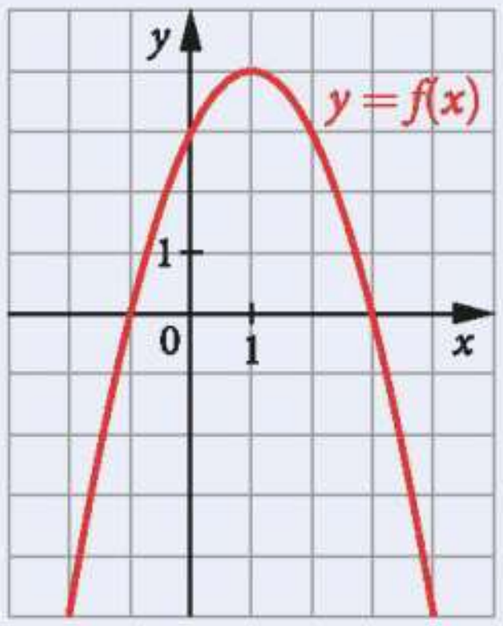
b) Zbadaj, ile rozwiązań ma równanie $f(x) + 3 = 0$.

41. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Na podstawie tego wykresu

a) rozwiąż nierówność $f(x) < 3$.

b) podaj wartości: największą i najmniejszą funkcji f w przedziale $\langle 0; 3\rangle$.

c) wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.



Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

42. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

a) Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji są mniejsze od -14.

d) Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.

43. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby -2 i 4, a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty; 3\rangle$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

44. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz punktu P przecięcia paraboli z osią y. Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

45. Rozłóż liczbę 11 na sumę takich trzech składników, że drugi jest o 3 większy od połowy pierwszego, a suma kwadratów wszystkich trzech składników jest możliwie najmniejsza.

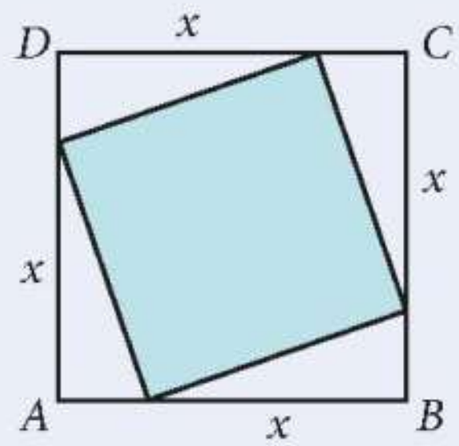
46. Rozłóż liczbę p na sumę takich trzech składników, by pierwszy był większy od drugiego o $\frac{p}{6}$ i by suma kwadratów wszystkich trzech składników była najmniejsza.

47. Sklep kupuje w hurtowni buty po 80 zł za parę i sprzedaje średnio 30 par miesięcznie po 120 zł za parę. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny pary butów o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 parę. Jaką cenę butów powinien ustalić sprzedawca, aby jego zysk miesięczny był największy?

48. W prostokącie o wymiarach a cm $\times$ b cm jeden bok zwiększono o x cm, a drugi zmniejszono o x cm. Dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta będzie największe?

49. Suma długości boku trójkąta i wysokości opuszczonej na ten bok wynosi 10 cm. Ile centymetrów powinien mierzyć bok, a ile wysokość, aby pole takiego trójkąta było największe?

D **50.** Bok kwadratu $ABCD$ jest równy a. Na każdym z boków tego kwadratu odłożono odcinek o długości x (jak na rysunku). Wykaż, że pole pokolorowanego obszaru jest najmniejsze, gdy $x = \frac{a}{2}$.



51. Grupa uczniów zorganizowała turniej. Każdy z uczestników rozegrał z każdym z pozostałych uczestników 2 partie. Rozegrano 72 partie. Ilu uczniów wzięło udział w turnieju?

52. Dane są trzy liczby naturalne takie, że największa z nich stanowi 150% najmniejszej, a trzecia liczba jest o 2 większa od najmniejszej. Suma kwadratów wszystkich trzech liczb jest równa 2149. Wyznacz te liczby.

53. Jeśli liczbę a zmniejszymy o a%, otrzymamy 16. Wyznacz liczbę a.

54. Rozwiąż równanie.

a) $\left|5x^2 - 12x\right| = 9$

b) $\left|3x^2 - 2x - 2\right| = 1$

c) $|x - 1| + |x + 1| = x^2 - 3x$

d) $\left|\left|x^2 - 5x\right| - 2\right| = 4$

55. Rozwiąż nierówność.

a) $\left|x^2 + x - 3\right| < 3$

b) $\left|x^2 - 4\right| > 3x$

c) $|x - 3| - |x| \leqslant x^2 - 5$

d) $\left|\left|x^2 + x\right| - 1\right| \leqslant 1$

56. Dla jakiej wartości m zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x^2 + 15x + m$ jest przedział $\langle -10; \infty)$?

57. Funkcja $f(x) = 2(x - p)^2 + q$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (1; 3)$. Wyznacz p i q.

58. Ułóż równanie kwadratowe o całkowitych współczynnikach, którego jednym z pierwiastków jest podana liczba.

a) $1 - \sqrt{2}$

b) $3 + \sqrt{7}$

59. Funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki spełniające następujące warunki: ich iloczyn jest równy 6, a suma ich kwadratów jest równa 52. Wyznacz b i c.

60. Wyznacz (jeśli istnieją) miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 12x + 19 & \text{dla} \quad x < -2 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{dla} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2x^2 + 4x + 3 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

61. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązania nierówności lub równania:

I. $f(x) > g(x)$, II. $f(x) < g(x)$, III. $f(x) = g(x)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$ sposobem rachunkowym.

a) $f(x) = -2x^2 - 12x - 12$ $\quad g(x) = 2x + 8$

b) $f(x) = -x - 2$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

62. Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 3 & \text{dla} \quad x \in \langle -4; -1 \rangle \\ x + 3 & \text{dla} \quad x \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) \end{cases}.$$

Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

63. Rozwiąż układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

64. Dane jest równanie kwadratowe $x^2 + bx + c = 0$. Suma pierwiastków tego równania jest równa 4, zaś suma kwadratów pierwiastków tego równania jest równa 14. Wyznacz sumę sześcianów pierwiastków tego równania.

65. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ o współczynniku $b < 0$ ma dwa różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy -8. Funkcja ta przyjmuje największą wartość równą $4\frac{1}{2}$. Wyznacz

a) współczynniki b i c. $\qquad$ b) miejsca zerowe funkcji f.

66. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$

b) $y = \left|2x^2 - 7x + 3\right|$

c) $y = \left|x^2 - 4x\right| - 3$

d) $y = \left|-\frac{1}{4}x^2 + x\right| + 1$

67. Dla jakich wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie?

a) $x^2 + 2(2m - 3)x + m - 1 = 0$

b) $(2m - 1)x^2 - (5m - 2)x + 2m = 0$

68. Dla jakich wartości parametru m funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?

a) $f(x) = (m + 1)x^2 - 4mx + 2m + 3$

b) $f(x) = (m + 1)x^2 - 4mx + m + 1$

D **69.** Wykaż, że równanie $x^2 - (k - 1)x - 4 - k = 0$ dla każdej wartości parametru k ma dwa różne pierwiastki.

70. Dla jakiej wartości parametru k równanie $(2k - 1)x^2 + (k + 1)x + k - 4 = 0$ ma jeden pierwiastek?

71. Dla jakich wartości m jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = 3x^2 - 5x + m^2 - 4$ jest zero?

72. Narysuj wykres funkcji f, która każdej wartości m przyporządkowuje liczbę rozwiązań podanego równania.

a) $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 4 = 0$

b) $mx^2 + (m - 3)x + 2 - m = 0$

73. Dla jakich wartości parametru m równanie

a) $x^2 - 2(2m - 5)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku?

b) $x^2 - 2(2m - 1)x + 3m + 11 = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

c) $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

d) $2x^2 + (3m - 1)x + m^2 - 5m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

74. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

75. Funkcja $y = f(m)$ przyporządkowuje wartości m iloczyn różnych pierwiastków równania $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$, a funkcja $y = g(m)$ – sumę tych pierwiastków.

a) Określ dziedziny funkcji f i g.

b) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g.

c) Dla jakiej wartości m zachodzi równość $g(m) = f(m)$?

76. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania jest najmniejsza?

a) $x^2 + (m-6)x + m - 7 = 0$ b) $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$

77. Dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania $x^2 - 2(m+5)x + m^2 + 10m + 21 = 0$ należą do przedziału $(-3;\ 10)$?

78. Dla jakich wartości parametru k liczba 2 leży między pierwiastkami równania $-x^2 + 3kx + k^2 - 3 = 0$?

79. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = (k-2)x^2 + 2(1-k)x + k - 2$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 < 2 < x_2$?

80. Dla jakich wartości parametru m nierówność $\left(m^2 + 3m\right)x^2 - (m+3)x + 2 > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?

81. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$?

82. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(3m-5)x^2 - (2m+1)x + \frac{1}{4}(3m-5) < 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$?

83. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x+5)(3k-x) \leqslant 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$?

84. Wyznacz miejsca zerowe i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - x - 5|x|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania?

85. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \left(4 - m^2\right)x^2 + (1-m)x + 3m - 5$ jest rosnąca?

86. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiory A, B, $A \cap B$.

a) $A = \left\{(x,\ y):\ x,\ y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geqslant \left|x^2 - 4\right|\right\}$,

$B = \{(x,\ y):\ x,\ y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leqslant |x|\}$

b) $A = \left\{(x,\ y):\ x,\ y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geqslant (x+2)^2 - 3\right\}$,

$B = \left\{(x,\ y):\ x,\ y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leqslant \left|\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1\right|\right\}$

Wielomiany i wyrażenia wymierne

2

1. Określenie funkcji wielomianowej

Umiejętności:

- stosowanie określenia wielomianu stopnia n jednej zmiennej

Przypomnijmy: skończoną sumę jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną** lub **wielomianem**. Składniki takiej sumy nazywamy jej **wyrazami**. Przykładami sum algebraicznych są:

$$x+y,\ 3x^2+2x-1,\ xy+x^3yt-5y-4,\ x^5-\sqrt{7}z$$

Jednomian to pojedyncza zmienna lub liczba, lub ich iloczyn, np.:
$3,\ 2x,\ \sqrt{5}xy,\ -x^3yz,\ \frac{3}{11}xyt^8$

Zajmiemy się teraz badaniem własności funkcji określanych za pomocą wielomianów. Jedną z liter występujących w wielomianie we wzorze funkcji (najczęściej x) wyróżnimy jako zmienną niezależną. Pozostałe litery będą oznaczały współczynniki. Zauważmy, że ogólne wzory funkcji liniowej i funkcji kwadratowej zmiennej x mają podobną strukturę:

$$f(x)=ax+b$$
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Gdybyśmy chcieli podać ogólny wzór funkcji – analogiczny do wymienionych – ale ze zmienną x w trzeciej potędze, to zadanie nie byłoby trudne. Szukany wzór ma postać:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Następny, ze zmienną x w czwartej potędze, to:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

Postępowanie to można kontynuować. W przypadku funkcji, w której x występuje w wyższej potędze (np. dziesiątej), wypisanie wszystkich wyrazów może być uciążliwe. Radzimy sobie wówczas w ten sposób, że np. w wielomianie

$$f(x)=ax^{10}+bx^9+cx^8+dx^7+ex^6+fx^5+gx^4+hx^3+ix^2+jx+k$$

zamiast kilku środkowych wyrazów wpisujemy wielokropek:

$$f(x)=ax^{10}+bx^9+cx^8+\ldots+ix^2+jx+k$$

Z poważniejszym problemem spotkalibyśmy się natomiast podczas zapisywania ogólnego wzoru funkcji tego typu ze zmienną x np. w 30. potędze. Zabrakłoby bowiem liter alfabetu na oznaczenie wszystkich współczynników. Dlatego przyjęto inny

sposób oznaczania tych liczb. Współczynniki przy kolejnych potęgach x oznaczone są jedną, ustaloną literą, ale opatrzoną numerem zgodnym ze stopniem potęgi, np. $a_{10}x^{10}$, a_5x^5. Funkcję, w której najwyższą potęgą x jest 4, zapiszemy zatem ogólnie:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Możemy używać dowolnej litery na oznaczenie współczynników, uwzględniając to, że litery x, y, t, z tradycyjnie oznaczają zmienne, np.:

$f(x) = b_5x^5 + b_4x^4 + \ldots + b_1x + b_0$

$g(t) = d_6t^6 + d_5t^5 + \ldots + d_1t + d_0$

Przykład 1 ◂ zad. 1.5

Funkcja $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dla $a_3 = -2$, $a_2 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_0 = 5$ ma wzór:

$$f(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x + 5$$

Definicja

Funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x $(x \in \mathbf{R})$ nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gdzie:

- n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną,
- $a_n \neq 0$,
- współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Ponadto przyjmujemy, że funkcja stała $W(x) = c$ $(c \neq 0)$ jest **wielomianem stopnia 0**, a funkcja $W(x) = 0$ (stale równa 0) jest **wielomianem zerowym** i nie ma stopnia.

Zgodnie z przyjętą definicją powiemy, że funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia drugiego, funkcja liniowa ze współczynnikiem przy x różnym od zera – wielomianem stopnia pierwszego, funkcja stała, ale różna od zera – wielomianem stopnia zerowego. Wiemy już, że wykresami wielomianu zerowego oraz wielomianów stopnia zerowego i pierwszego są proste, a wykresami wielomianów stopnia drugiego – parabole. Wykresy wielomianów jednej zmiennej wyższych stopni są bardziej skomplikowane.

Słowa „wielomian" będziemy używali w tym podręczniku w dwóch znaczeniach. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień, gdyż z kontekstu będzie wynikało, czy chodzi o sumę algebraiczną czy o funkcję.

Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Określimy stopień podanego wielomianu i wypiszemy jego współczynniki.

a) $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

b) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Wielomiany tradycyjnie oznaczamy wielkimi literami z końca alfabetu W, P, Q itp.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia takie jak w definicji, czyli

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

a) $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

Stopień wielomianu W jest równy 3; $a_3 = 4$, $a_2 = -2$, $a_1 = 3$, $a_0 = -5$.

b) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Stopień wielomianu P jest równy 4; $a_4 = 1$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_0 = \sqrt{2}$.

Definicja

Jednomianem stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbf{R}$) nazywamy jednomian postaci ax^n, gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną oraz współczynnik $a \neq 0$.
Jednomian postaci c ($c \neq 0$) nazywamy **jednomianem stopnia zero**, a jednomian 0 (stale równy 0) jest **jednomianem zerowym** i nie ma stopnia.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = 0$ (stale równa 0) jest zarówno funkcją liniową, jak i wielomianem zerowym oraz jednomianem zerowym.

Przykład 3

$3x^5$ – jednomian stopnia piątego zmiennej x,

$-\frac{1}{3}t$ – jednomian stopnia pierwszego zmiennej t,

$\left(3 - \sqrt{5}\right)x^{11}$ – jednomian stopnia jedenastego zmiennej x.

$2x^{-3}$ nie jest jednomianem, ponieważ $-3 \notin \mathbf{N}$.

Jednomiany tego samego stopnia tej samej zmiennej są **jednomianami podobnymi**. Jednomiany podobne można dodawać; czynność tę nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**. Wynikiem takiego działania jest jednomian, np.:

$3x^5 + 4x^5 = 7x^5$

$-x^3 + \sqrt{3}x^3 + 5x^3 = \left(4 + \sqrt{3}\right)x^3$

$x^7 - 3x^7 + 2x^7 = 0$

Jeżeli jednak stopnie jednomianów są różne, to ich suma nie jest już jednomianem, lecz wielomianem, np. $2x^4 - 7x + \sqrt{2}$.

Porządkowanie wielomianu polega na dodaniu wszystkich jednomianów podobnych, a następnie napisaniu wyrazów w porządku malejącym – od najwyższej do najniższej potęgi (lub rosnącym – czyli odwrotnie).

Przykład 4

zad. 1.7

Uporządkujemy wielomian $W(x) = 3x^3 - x + 2x^2 - 2x^3 + x - 17 + x^4 + 4$, określimy jego stopień i podamy współczynniki.

Rozwiązanie

$W(x) = \underline{3x^3} \underline{\underline{-x}} + 2x^2 \underline{-2x^3} \underline{\underline{+x}} \underline{\underline{-17}} + x^4 \underline{\underline{+4}}$ ⟵ redukujemy wyrazy podobne

$W(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 13$

Odp.: W jest wielomianem stopnia 4.

Jego współczynnikami są liczby:

$a_4 = 1,\ a_3 = 1,\ a_2 = 2,\ a_1 = 0,\ a_0 = -13.$

Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym** wielomianu.

Przykład 5

Wysokość akwarium przedstawionego na zdjęciu nie przekracza 90 cm. Znajdziemy wzór i dziedzinę funkcji V opisującej pojemność tego akwarium w zależności od x.

Rozwiązanie

Pojemność akwarium wyraża się wzorem:

$$V(x) = (x - 7)(x + 3)(x - 4)$$

Wszystkie krawędzie mają dodatnie długości, a wysokość akwarium nie przekracza 90 cm. Warunki te możemy opisać za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} x - 4 \leqslant 90 \\ x - 4 > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

Zatem $7 < x \leqslant 94$.

Po wymnożeniu czynników i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy wielomian stopnia trzeciego $V(x) = x^3 - 8x^2 - 5x + 84$, którego dziedziną jest przedział $(7; 94\rangle$. W rzeczywistości trudno sobie wyobrazić akwarium, którego jeden z boków miałby długość niewiele większą od zera – dziedzina funkcji wyznaczona została wyłącznie na podstawie teoretycznych rozważań.

Definicja

Funkcje f i g **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny i każdemu argumentowi funkcja f przyporządkowuje taką samą wartość jak funkcja g.

Popatrzmy na dwa wielomiany W i Q:

$$W(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3,\ Q(x) = 2x^4 - x^3 - 2x - 3$$

i porównajmy ich wartości dla $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.

$W(0) = 0^5 + 0^4 - 3 \cdot 0^3 - 3 = -3$
$Q(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^3 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$ $\qquad W(0) = Q(0)$

$W(1) = 1^5 + 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 3 = -4$
$Q(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ $\qquad W(1) = Q(1)$

$W(2) = 2^5 + 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 3 = 21$
$Q(2) = 2 \cdot 2^4 - 2^3 - 2 \cdot 2 - 3 = 17$ $\qquad W(2) \neq Q(2)$

Wielomiany W i Q nie są równe, ponieważ nie przyjmują jednakowych wartości dla wszystkich argumentów.

Podamy teraz (bez dowodu) twierdzenie dotyczące wielomianów równych.

Twierdzenie

Wielomiany W i Q **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Jeśli więc wielomiany różnią się na przykład współczynnikami przy x^3, to tej różnicy nie można nadrobić, dobierając odpowiednio współczynniki przy innych potęgach.

Przykład 6 ◀ zad. 1.13

Czy można dobrać współczynnik k tak, aby wielomiany W i P były równe, jeżeli

$$W(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5 \text{ i } P(x) = x^3 + kx^2 + kx - 5?$$

Rozwiązanie

Oba wielomiany są trzeciego stopnia i mają równe współczynniki przy x^3 oraz jednakowe wyrazy wolne. Aby zgadzały się współczynniki przy x^2, musimy przyjąć, że

$k = -3$. Wówczas $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 5$. Wtedy jednak nie są równe współczynniki przy x.

Odp.: Nie można dobrać takiej liczby k, aby W i P były równe.

Przykład 7 ◀ zad. 1.14

Wyznaczymy liczby a i b tak, aby wielomiany:

$$W(x) = ax^3 - 2x^2 - 2 \text{ i } P(x) = -x^3 - 2x^2 + bx - 2$$

były równe.

Rozwiązanie

Współczynniki przy x^2 i wyrazy wolne tych wielomianów są równe, więc aby wielomiany W i P były równe, współczynniki przy x^3 i współczynniki przy x w obu wielomianach też muszą być równe.

Odp.: $a = -1,\ b = 0$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż wartość wyrażenia $(2x - y)(2x + y) - 3(x - y)^2 - 2x(3y + x)$ dla $x = \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{2}$.

A. 11 **B.** -11 **C.** -10 **D.** 12

1.2. Jeden z wymiarów prostokąta jest równy $2x + 2y$. Obwód tego prostokąta wynosi $6x + 8y$. Jaki jest drugi wymiar prostokąta?

A. $x + 2y$ **B.** $3x - 2y$ **C.** $2x + y$ **D.** $2x + 3y$

1.3. Wskaż wielomian, który otrzymamy po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $3(x - 2) - [2(3x - 1) - 3]$.

A. $-1 - 3x$ **B.** $-3x$ **C.** $1 - 3x$ **D.** $2x - 1$

1.4. Spośród podanych wyrażeń wybierz wszystkie wielomiany i zapisz je w zeszycie.

A. $x^3 + 2x - 1$

B. $x - \frac{1}{2}$

C. $3x^2 + 2x^{-3}$

D. $\frac{1}{2}t^2 - 7t + \frac{5}{3}$

E. $\frac{1}{t} + 1$

F. $\sqrt{2}t^2 - \sqrt{3}t - \sqrt{5}$

G. $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$

H. $\frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{3}x^2 - 2$

1.5. Dane są wszystkie współczynniki wielomianu. Zapisz ten wielomian w postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Określ jego stopień.

a) $a_5 = 7,\ a_4 = 1,\ a_3 = 2,\ a_2 = -5,\ a_1 = 2,\ a_0 = -1$

b) $a_3 = 2,\ a_2 = -5,\ a_1 = -1,\ a_0 = 11$

c) $a_5 = -\frac{1}{2},\ a_4 = a_3 = 0,\ a_2 = a_1 = a_0 = 1$

d) $a_3 = a_2 = a_1 = -\sqrt{2},\ a_0 = 0$

1.6. Wypisz wszystkie współczynniki oraz określ stopień podanego wielomianu.

a) $T(x) = -5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$

b) $Q(x) = -4x^4 + 6x^2 - 7x + 2$

c) $P(x) = \sqrt{2}x - 1$

d) $M(x) = \frac{1}{13}x^{10} + \frac{1}{12}x^5 + 2$

e) $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 5$

f) $H(x) = 5\sqrt{2}$

1.7. Uporządkuj wielomian $W(x)$, określ jego stopień i podaj współczynniki.

a) $W(x) = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 7x^5 + x^2 - 2\sqrt{3}x$

b) $W(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^3 + 3 - 1\frac{1}{4}x^6 + x^3 + 2x^4$

c) $W(x) = 2x^5 - 8x + 7x^7 + 2x - 8\sqrt{5} - 3x^5$

d) $W(x) = \sqrt{5}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - 3x + 4x^4 - 2\sqrt{5}x^5$

e) $W(x) = 11x - 9x^2 + 1\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 - x + 2$

1.8. Podaj przykład wielomianu stopnia n.

a) $n = 5$ b) $n = 0$ c) $n = 100$ d) $n = 3030$

1.9. Podaj przykład wielomianu postaci $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, który jest stopnia

a) czwartego i którego współczynniki a_1 i a_0 są równe.

b) trzeciego i którego współczynnik $a_0 = 0$.

c) drugiego i którego współczynniki są liczbami niewymiernymi.

d) piątego i którego współczynniki są liczbami parzystymi dodatnimi.

e) siódmego i którego współczynniki są różnymi dodatnimi dzielnikami liczby 48.

f) pierwszego i którego współczynniki są liczbami przeciwnymi.

1.10. Oblicz wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = x_0$.

a) $W(x) = 3x^7 - 25x^5 + x^3 - 1$ $x_0 = 1$

b) $W(x) = \sqrt{3}x^{15} - 17\sqrt{5}x^7 + 2x^4 - \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}$ $x_0 = 0$

c) $W(x) = 12x^5 + 3x^3 - 5x + 10$ $x_0 = -1$

d) $W(x) = x^4 - 2x^2 + \sqrt{3}x - 7$ $x_0 = \sqrt{3}$

e) $W(x) = x^6 - \sqrt{2}x^5 + x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + x + 4$ $x_0 = \sqrt{2}$

f) $W(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 5\frac{1}{2}x + 1$ $x_0 = -2$

1.11. Wyznacz współczynniki wielomianu $W(x)$ tak, aby spełniony był podany warunek.

a) $W(x) = 2x^5 - 3ax^4 + (a-1)x + 2a + 5$ $\quad W(-1) = 14$

b) $W(x) = 6x^3 - 3(2m+1)x^2 + (3m+2)x - 4$ $\quad W(m) = 2$

c) $W(x) = -7x^4 + (8a-1)x^2 + 3$ $\quad W(\sqrt{2}) = 5$

d) $W(x) = -2x^3 - 3a(\sqrt{2}-1)x^2 + 2(\sqrt{2}-1)x - 4$ $\quad W(-2) = 4(2\sqrt{2}+1)$

e) $W(x) = -3\sqrt{2}x^3 + (2a-1)x^2 + (3a+2)\sqrt{2}x + 3$ $\quad W(\sqrt{2}) = 13$

f) $W(x) = \frac{1}{4}(a+1)x^6 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)x^3 + (2a-1)x^2 + a\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}$

$W(-\sqrt{2}) = 6(1+\sqrt{2})$

1.12. Dla jakich wartości p wielomian $W(x)$ jest wielomianem:

I. zerowym, II. stopnia zero?

a) $W(x) = (p^2 - 1)x + p + 1$

b) $W(x) = (p^2 - 4)x + p - 2$

c) $W(x) = (p^2 - 9)x + p + 3$

1.13. Czy można dobrać taką wartość m, aby wielomiany P i Q były równe? Jeśli tak, podaj tę wartość.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ $\quad Q(x) = x^3 - 2x^2 + mx + 1$

b) $P(x) = x^4 + 5x^3 - mx - 7$ $\quad Q(x) = x^4 + mx^3 - 5x - 7$

c) $P(x) = x^3 - mx^2 + x - 3$ $\quad Q(x) = mx^3 + x^2 + x - 3$

d) $P(x) = 3(m-1)x^2 - (1-m)x + m$ $\quad Q(x) = 2mx^2 + 2x + m$

e) $P(x) = x^5 - mx^4 + 5x - 1$ $\quad Q(x) = mx^5 + x^4 + 5x - 1$

f) $P(x) = (2-m)x^4 - (2+m)x^3 + 2m$ $\quad Q(x) = (2+3m)x^4 - 2x^3 + m$

1.14. Dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany W i R były równe.

a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 - 2x + 6$, $\quad R(x) = 2x^4 + bx^3 - 7x^2 - 2x + 6$

b) $W(x) = x^3 + (a+2b)x^2 + x + 1$, $\quad R(x) = x^3 + 3x^2 + (3a+b)x + 1$

c) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 + (3a-b)x + a + 3b - 10$,

$R(x) = 3x^3 - 7x^2 + x + 3 - 2(a+b)$

d) $W(x) = 5x^3 + 2a(a-2)x^2 - (7-5a)x + 8a$,

$R(x) = 5x^3 + (b+2)x^2 + (4b+1)x$

e) $W(x) = -2ax^3 - (1+b)x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\quad R(x) = (b-3)x^3 + a(a-3)x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x$

f) $W(x) = -(2a^2 - 7a)x^3 + (1+b)x + a + 3$,

$R(x) = 3(3-b)x^3 + a(a-1)x + a^2 + b$

1.15. Różne wielomiany W i Q spełniają warunki $W(0) = Q(0)$ oraz $W(1) = Q(1)$. Podaj przykład takich wielomianów W i Q, mających
a) ten sam stopień.
b) różne stopnie.

1.16. Podaj przykład wielomianu $W(x)$, który ma wszystkie współczynniki niewymierne i który spełnia warunki: $W(3) = 3$ i $W(5) = 6$.

1.17. Dany wielomian $W(x)$ zapisz jako wielomian zmiennej z.
a) $W(x) = 16x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 16x + 3 \quad z = 2x$
b) $W(x) = 9x^3 - 18x^2 + 15x - 1 \quad z = 3x$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wyrażenie $2\sqrt{x} - 3$ nie jest wielomianem.

B. Wyrażenie $2x^3 - 3x^2 + x - \frac{1}{x} + 5$ jest wielomianem stopnia trzeciego.

C. Dla $m = 3 + \sqrt{2}$ wielomiany $P(x) = x^3 - 2\sqrt{3}x^2 + 3x + m - \sqrt{2} - 2$ i $Q(x) = x^3 - 2\sqrt{3}x^2 + \left(m - \sqrt{2}\right)x + 1$ są równe.

2. Dane są wartości wszystkich współczynników wielomianu:

$$a_7 = 2,\ a_6 = a_4 = 0,\ a_5 = -5,\ a_3 = -\frac{1}{2},\ a_2 = a_1 = a_0 = \sqrt{2}$$

Napisz ten wielomian w postaci $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Określ jego stopień.

3. Wyznacz współczynniki wielomianu

$$W(x) = x^3 + 2(3a - 1)x^2 + \left(a^2 - 4a\right)x + 2a^2$$

tak, aby spełniony był warunek $W(2) = -16$.

4. Jeżeli to możliwe, dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany

$$P(x) = ax^3 - 2bx^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad \text{i} \quad Q(x) = 3x^3 + 3x^2 - ax + 3bx + 5$$

były równe.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b wyrażenie

$$(a - 1)x^3 + (a + 2b)x + (b - a)x^{-1} + (a + b - 2)x^{-3}$$

jest wielomianem? Określ stopień tego wielomianu.

2. Działania w zbiorze wielomianów

Umiejętności:

- dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów jednej zmiennej

W szkole podstawowej były omawiane i ćwiczone działania dodawania, odejmowania i mnożenia wyrażeń algebraicznych. Poznane zasady zastosujemy teraz do wykonywania różnych działań na wielomianach jednej zmiennej.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Definicja

Jeżeli $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, to:
sumą wielomianów $P(x) + Q(x)$ jest wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

a **różnicą wielomianów** $P(x) - Q(x)$ jest wielomian

$$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 - b_m x^m - b_{m-1}x^{m-1} - \ldots - b_1 x - b_0$$

W wielomianach $W(x)$ oraz $Z(x)$ należy zredukować wyrazy podobne.

Przykład 1 ◀ zad. 2.6

Dodamy wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$.

a) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13$ $\quad Q(x) = -2x^4 + x^3 - x + 8$

b) $P(x) = \sqrt{3}x^7 - 3x + 1$ $\quad Q(x) = x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1$

Rozwiązanie

a) $P(x) + Q(x) = \left(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13\right) + \left(-2x^4 + x^3 - x + 8\right) =$
$= -x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 21$

b) $P(x) + Q(x) = \left(\sqrt{3}x^7 - 3x + 1\right) + \left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1\right) =$
$= \sqrt{3}x^7 - 3x + 1 + x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1 = \sqrt{3}x^7 + x^4 - \sqrt{2}x^2$

Przykład 2 ◀ zad. 2.6

Od wielomianu $W(x) = 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3$ odejmiemy wielomian $R(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 12x + 1$.

Rozwiązanie

$$W(x) - R(x) = \left(3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3\right) - \left(3x^4 - x^3 + x^2 - 12x + 1\right) =$$
$$= 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 12x - 1 = -5x^3 + 7x^2 + 11x + 2$$

W przykładzie 1a suma dwóch wielomianów stopnia czwartego jest wielomianem stopnia czwartego. W przykładzie 2 różnica dwóch wielomianów stopnia czwartego jest wielomianem stopnia trzeciego. Podamy jeszcze przykład dwóch wielomianów stopnia 100, których suma jest wielomianem zerowym.

$$W(x) = 3x^{100} - 5x^{50} + 1, \qquad Q(x) = -3x^{100} + 5x^{50} - 1, \qquad W(x) + Q(x) = 0$$

Twierdzenie

Wielomian będący sumą (różnicą) dwóch wielomianów W i Q ma stopień nie większy od stopnia wielomianu W i stopnia wielomianu Q; może on być również wielomianem zerowym.

Mnożenie wielomianów

Iloczyn dwóch wielomianów jest wielomianem będącym sumą wszystkich iloczynów wyrazów jednego wielomianu przez wyrazy drugiego wielomianu. Inaczej mówiąc, aby pomnożyć jeden wielomian przez drugi, każdy wyraz pierwszego wielomianu mnożymy przez każdy wyraz drugiego wielomianu, wyniki dodajemy, a następnie redukujemy wyrazy podobne.

Przykład 3 ◀ zad. 2.9

Pomnożymy wielomiany $W(x) = x^3 - x^2 + 6x - 1$ i $Q(x) = 3x^4 - x$.

Rozwiązanie

$$W(x) \cdot Q(x) = \left(x^3 - x^2 + 6x - 1\right)\left(3x^4 - x\right) =$$

$$= 3x^7 - x^4 - 3x^6 + x^3 + 18x^5 - 6x^2 - 3x^4 + x =$$
$$= 3x^7 - 3x^6 + 18x^5 - 4x^4 + x^3 - 6x^2 + x$$

Iloczyn $W \cdot Q$ jest wielomianem stopnia siódmego.

W działaniach na wielomianach obowiązują wszystkie poznane wcześniej prawa działań. W szczególności – wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach, np.:

$$x^3 \cdot 3x^4 = 3x^{3+4} = 3x^7$$

Twierdzenie

Jeżeli W i Q są niezerowymi wielomianami, to stopień wielomianu $W \cdot Q$ będącego ich iloczynem jest sumą stopni wielomianów W i Q.

Przykład 4 ◀ zad. 2.10

Dane są wielomiany: $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, $P(x) = -x^2 + 2x + 8$, $Q(x) = 2x^2 - 5x$.
Wyznaczymy wielomian $2 \cdot W(x) - P(x) \cdot Q(x)$.

Rozwiązanie

$$2W(x) - P(x) \cdot Q(x) = 2\left(x^3 - 2x^2 + x - 3\right) - \left(-x^2 + 2x + 8\right)\left(2x^2 - 5x\right) =$$
$$= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6 - \left(-2x^4 + 5x^3 + 4x^3 - 10x^2 + 16x^2 - 40x\right) =$$
$$= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6 + 2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 40x = 2x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 42x - 6$$

Podsumujmy:
wielomiany możemy dodawać, odejmować i mnożyć. Wynik takich działań jest zawsze wielomianem.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Dane są wielomiany $W(x) = 5x^4 + 7x^3 - x + 2$ i $P(x) = -5x^4 + 2x - 1$. Wskaż wielomian równy wielomianowi $W(x) + P(x)$.

A. $5x^4 + 12x - 3$
B. $7x^3 + x + 1$
C. $2x^4 - x + 1$
D. $7x^3 - x + 1$

2.2. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^3 - x + 1$ i $V(x) = -3x^2$. Wskaż wielomian równy wielomianowi $W(x) \cdot V(x)$.

A. $-6x^6 + 3x^2 - 3$
B. $-2x^3 - 3x^2 - x + 1$
C. $-6x^5 + 3x^3 - 3x^2$
D. $6x^5 - 3x^3 + 3x^2$

2.3. Wskaż iloczyn równy wielomianowi $W(x) = x^6 - 2x^3 - 3$.

A. $\left(x^2 + 2\right)\left(x^4 + 3\right)$
B. $\left(x^3 - 2\right)\left(x^2 + 1\right)$
C. $\left(x^3 - 3\right)\left(x^3 + 1\right)$
D. $\left(x^3 + 1\right)\left(x^2 - 3\right)$

2.4. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^7 - 2x^5 + 4x - 1$ i $P(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 1$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 10.
B. Stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest równy 7.
C. Wyraz wolny wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy -1.

2.5. Dane są dwa różne wielomiany $W(x)$ i $P(x)$, każdy piątego stopnia. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian $W(x) - P(x)$ może być wielomianem zerowym.

B. Wielomian $W(x) - P(x)$ może być wielomianem stopnia 3.

C. Wielomian $W(x) + P(x)$ może być wielomianem zerowym.

2.6. Wyznacz sumę $W + Q$ i różnicę $W - Q$ wielomianów W i Q.

a) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ $\quad Q(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 5$

b) $W(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 3$ $\quad Q(x) = x^5 + 4x^3 + 2x - 1$

c) $W(x) = 4x^5 - 6x^3 + 11$ $\quad Q(x) = 4x^5 + 6x^3 + 3$

d) $W(x) = 12x^4 - 3x + 1$ $\quad Q(x) = -5x^4 + 3x^2 - 1$

e) $W(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$ $\quad Q(x) = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

f) $W(x) = 0{,}3x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}1x + 3{,}1$ $\quad Q(x) = -2{,}7x^3 + 1{,}7x^2 - 0{,}9x + 2{,}1$

g) $W(x) = 3x^4 - 0{,}2x^3 - x^2 + 1{,}1x - 7$ $\quad Q(x) = 0{,}8x^3 + 2x^2 - 3{,}9x + 1$

2.7. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R.

a) $S(x) = -3x^2 + 5x - 1$ $\quad R(x) = 2x + 1$

b) $S(x) = 5x^3 - 2x + 2$ $\quad R(x) = x - 1$

c) $S(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ $\quad R(x) = 3x + 2$

d) $S(x) = 2x^4 + \sqrt{2}x^2 - 1$ $\quad R(x) = 3x - \sqrt{2}$

e) $S(x) = -x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ $\quad R(x) = \sqrt{3}x + 1$

2.8. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R.

a) $S(x) = 3x^2 - x + 2$ $\quad R(x) = 2x^2 + x + 3$

b) $S(x) = 4x^2 + 2x - 6$ $\quad R(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

c) $S(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ $\quad R(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x + 1$

d) $S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 4x + 2$ $\quad R(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x + 4$

e) $S(x) = -\sqrt{3}x^2 + 3x - 6$ $\quad R(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + \sqrt{3}$

2.9. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R.

a) $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ $\quad R(x) = -2x^3 + x - 3$

b) $S(x) = -x^3 - 3x^2 + x - 1$ $\quad R(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

c) $S(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 1$ $\quad R(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 2$

d) $S(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$ $\quad R(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$

e) $S(x) = \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 3$ $\quad R(x) = x^3 - 3x + \sqrt{3}$

f) $S(x) = x^3 + x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$ $\quad R(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$

2.10. Dane są wielomiany: $W(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$, $P(x) = 2x^2 - x + 1$, $Q(x) = 5x + 2$. Wykonaj działania.

a) $2W(x) + 3P(x) - Q(x)$

b) $2[W(x) - P(x)] + Q(x)$

c) $W(x) - [P(x) + 3Q(x)]$

d) $2W(x) + 3[Q(x) - 2P(x)]$

e) $5Q(x) - [W(x) + 2P(x)]$

f) $3[W(x) - 2P(x)] - [P(x) + 3W(x)]$

2.11. Dane są wielomiany: $P(x) = 2x - 3$, $Q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$, $R(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Wykonaj działania.

a) $P(x) \cdot R(x) - Q(x)$

b) $2P(x) \cdot Q(x) - 3R(x)$

c) $[P(x)]^2 - Q(x)$

d) $R(x) \cdot Q(x) - [P(x)]^2$

e) $[P(x)]^2 \cdot [-R(x)] + 2Q(x)$

f) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

2.12. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Wykonaj działania i uporządkuj wyrazy w wielomianie $Q(x) = W(2) \cdot x^3 + 3x^2 - (W(x) - x + 1) \cdot x - W(3)$.

2.13. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x - 1$, $P(x) = x^2 - 3ax + b$, $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + (5a + b)x - 2a$. Wyznacz a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $W(x) \cdot P(x) = Q(x)$.

2.14. Czy można tak dobrać współczynniki a i b, aby dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodziła równość $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$?

a) $P(x) = 2x + a$ $\quad Q(x) = 3x^2 + bx + 1$ $\quad W(x) = 6x^3 + x^2 - 10x + 3$

b) $P(x) = x^2 + ax + 5$ $\quad Q(x) = 2x^2 + bx + 1$ $\quad W(x) = 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 8x + 5$

c) $P(x) = x^2 - 3x + a$ $\quad Q(x) = x^2 + bx - 2$ $\quad W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 10$

2.15. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - ax + b$, $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = -6x^3 + (1 + b)x^2 - 8bx + a - b$. Wyznacz a i b tak, aby wielomian $F(x) = W(x) \cdot P(x) + Q(x)$ był wielomianem zerowym.

2.16. Przedstaw wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów, z których jeden jest równy $Q(x) = x^2 - x + 1$.

2.17. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia piątego, których suma jest wielomianem stopnia trzeciego.

2.18. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia trzeciego, których różnica jest wielomianem stopnia zerowego.

D **2.19.** Dane są wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniony jest warunek $W(x) \cdot P(x) = x^5$. Wykaż, że $W(1) = P(1)$.

2.20. Wyznacz stopień wielomianu $W(x) + P(x)$ w zależności od a i b.

a) $W(x) = ax^3 + bx^2 + x - 3$ $\quad P(x) = (b-2)x^3 - ax^2 - x - 1$

b) $W(x) = (a-1)x^3 - (b+4)x^2 + ax - 1$ $\quad P(x) = (b+1)x^3 - 2ax^2 + 2x + 2$

2.21. Wielomian $W(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5$ przedstaw w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach będących liczbami naturalnymi.

2.22. Oblicz sumę współczynników wielomianu.

a) $W(x) = 5x^4 - 11x^3 + 7x^2 + 4x - 2$

b) $W(x) = \left(3x^3 - 5\right)\left(2x^2 + 3x - 4\right)$

c) $W(x) = \left(5x^7 - 3x^6 + 12x^4 - 7x^3 + x^2 - 9x\right)^{27} - 1$

d) $W(x) = \left(3x^2 + x - 3\right)^{2020} + \left(3x^2 - x - 3\right)^{2021}$

Prosto do matury

1. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^5 - 11x^3 + x - 3$ i $P(x) = -x^8 - 2x^5 + x^2$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 40.

B. Stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest równy 8.

C. Wyraz wolny wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy -3.

2. Dane są wielomiany: $W(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$, $Q(x) = 8x - 5$, $R(x) = x^2 + x + 2$.
Wyznacz wielomian $P(x) = 3 \cdot W(x) - 2Q(x) \cdot R(x)$.

D **3.** Dane są wielomiany: $W(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$, $Q(x) = -3x + 1$, $P(x) = x^2 - x + 2$. Wykaż, że wielomian $W(x) + Q(x) \cdot P(x)$ jest wielomianem zerowym.

4. Dane są wielomiany:
$P(x) = 3x^2 - 2ax + b$ i $Q(x) = 9x^4 + 3(b-2a)x^3 + \left(5b^2 - 4\right)x^2 + 8x + 2a^2b$.
Wyznacz a i b tak, aby $[P(x)]^2 = Q(x)$.

5. Dane są wielomiany: $P(x) = ax + 1$, $Q(x) = x^2 + bx - 4$,
$W(x) = -4x^3 - 19x^2 + 21x - 4$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

3. Wzory skróconego mnożenia

Umiejętności:

- stosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3

Podnoszenie wielomianu do potęgi (o dodatnim wykładniku naturalnym) jest, podobnie jak potęgowanie liczb, innym zapisem mnożenia.

Przykład 1 ◀ zad. 3.5

Podniesiemy do trzeciej potęgi wielomian $W(x) = x^3 - 2$.

Rozwiązanie

$$(W(x))^3 = \left(x^3-2\right)^3 = \left(x^3-2\right)^2\left(x^3-2\right) = \left(x^6-4x^3+4\right)\left(x^3-2\right) =$$
$$= x^9 - 2x^6 - 4x^6 + 8x^3 + 4x^3 - 8 = x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8$$

Przy mnożeniu wielomianów pomocne są **wzory skróconego mnożenia**.

Twierdzenie

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	**kwadrat sumy**
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	**kwadrat różnicy**
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	**różnica kwadratów**

Analogiczne wzory dla potęgi o wykładniku równym 3 mają następującą postać.

Twierdzenie

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	**sześcian sumy**
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	**sześcian różnicy**
$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$	**suma sześcianów**
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$	**różnica sześcianów**

Zauważmy, że w ostatnich dwóch wzorach wyrażenia a^2-ab+b^2 oraz a^2+ab+b^2 przypominają kwadraty różnicy oraz sumy, tylko że przy iloczynie ab nie ma współczynnika 2 (inaczej mówiąc, nie ma tam podwojonych iloczynów a przez b).
Wyrażenia te często nazywamy **niepełnymi kwadratami** różnicy (sumy) a i b.

Wyprowadzimy dwa wzory dla potęgi o wykładniku 3, pozostałe zostawiamy jako zadanie do samodzielnego wykonania.

- $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) =$
  $= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Przykład 2 ◀ zad. 3.6

Wykonamy działania.

a) $(x-2)^3$ b) $\left(3x^2-2x\right)^3$ c) $(x-2)^3+(x+2)^3$ d) $(5-x)^3+(x-5)^3$

Rozwiązanie

a) $(x-2)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

b) $\left(3x^2-2x\right)^3 = \left(3x^2\right)^3 - 3\cdot\left(3x^2\right)^2\cdot 2x + 3\cdot 3x^2\cdot(2x)^2 - (2x)^3 =$
$= 27x^6 - 3\cdot 9x^4\cdot 2x + 9x^2\cdot 4x^2 - 8x^3 = 27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3$

c) $(x-2)^3+(x+2)^3 = (x-2+x+2)\left[(x-2)^2-(x-2)(x+2)+(x+2)^2\right] =$
$= 2x\left(x^2-4x+4-x^2+4+x^2+4x+4\right) = 2x\left(x^2+12\right) = 2x^3+24x$

d) $(5-x)^3+(x-5)^3 = \left[-(x-5)\right]^3+(x-5)^3 = (-1)^3(x-5)^3+(x-5)^3 =$
$= -(x-5)^3+(x-5)^3 = 0$

Wyprowadzimy wzór na kwadrat sumy trzech składników.

$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) =$
$= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Szukany wzór ma zatem następującą postać.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ **kwadrat sumy trzech składników**

Przykład 3 ◀ zad. 3.8

Wykonamy podane działania.

a) $\left(x^2+2x+1\right)^2 = \left(x^2\right)^2+(2x)^2+1^2+2\cdot x^2\cdot 2x+2\cdot x^2\cdot 1+2\cdot 2x\cdot 1 =$
$= x^4+4x^2+1+4x^3+2x^2+4x = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

b) $\left(\sqrt{2}x^3-x-3\right)^2 =$
$= \left(\sqrt{2}x^3\right)^2+(-x)^2+(-3)^2+2\cdot\left(\sqrt{2}x^3\right)\cdot(-x)+2\cdot\left(\sqrt{2}x^3\right)\cdot(-3)+2\cdot(-x)\cdot(-3) =$
$= 2x^6+x^2+9-2\sqrt{2}x^4-6\sqrt{2}x^3+6x = 2x^6-2\sqrt{2}x^4-6\sqrt{2}x^3+x^2+6x+9$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wyrażenie $\left[\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^3+2}{2\sqrt{2}-3}\right]^2$ jest równe wyrażeniu

A. $25\left(\sqrt{2}+1\right)$. **B.** $5\left(\sqrt{2}-1\right)$. **C.** $5\left(1-\sqrt{2}\right)$. **D.** $25\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

3.2. Wielomian $\left(2x^2-1\right)^3-3\left(x^3-2\right)^2-5x^2\left(x^4+1\right)$ jest równy wielomianowi

A. $12x^4+12x^3+x^2-13$.
B. $-12x^4+12x^3-x^2-13$.
C. $12x^4-12x^3-x^2+13$.
D. $-12x^4+12x^3+x^2-13$.

3.3. Wskaż objętość sześcianu, którego krawędź ma długość równą $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

A. $10+7\sqrt{2}$ **B.** $10+14\sqrt{2}$ **C.** $10-7\sqrt{2}$ **D.** $14\sqrt{2}-10$

3.4. Wykonaj potęgowanie.

a) $\left(x^3\right)^7$, $\left(2y^5\right)^3$, $\left(-x^7\right)^3$, $\left(-2x^3\right)^4$

b) $(x-4)^2$, $\left(x-\sqrt{2}+1\right)^2$, $\left(x+3-\sqrt{3}\right)^2$

c) $\left(3\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\right)^2$, $\left(\sqrt{3}x+2\sqrt{3}\right)^2$, $\left(2\sqrt{7}x+\frac{7x}{\sqrt{7}}\right)^2$

3.5. Wykonaj potęgowanie.

a) $(2x+1)^3$, $(2x-3)^3$, $(2x-1)^3$

b) $(4x-3)^3$, $(3x-4)^3$, $(4x-1)^3$

c) $\left(x^2-1\right)^3$, $\left(x^2+2\right)^3$, $\left(x^2+1\right)^3$

d) $\left(2x^2-5x^3\right)^3$, $\left(3x^3-1\right)^3$, $\left(2x^3-5\right)^3$

3.6. Wykonaj działania.

a) $2(x-2)^3-(2x-1)^3$

b) $(-3-2x)^3+(2x+3)^3$

c) $3(x-2)^3-2(2x-1)^3+4x(2x-1)^2$

d) $(3x-1)^3-2(x+2)^3+x(5x+1)^2$

e) $\left(x^2+1\right)^3-\left(x^3+1\right)^2$

f) $\left[(x+1)^2+(2-x)(2+x)\right]^3$

g) $\left(x^2-2x\right)^3-\left(x^2+2x\right)^3$

h) $\left(2x^2-3x\right)^3+\left(3x-2x^2\right)^3$

3.7. Zastosuj wzory na sumę lub różnicę sześcianów i przekształć wielomian.

a) $8x^3 - 27$

b) $125 + x^3$

c) $64x^6 - x^3$

d) $(x-1)^3 - (x+1)^3$

e) $(2x-3)^3 + (x+3)^3$

f) $(5x-3)^3 - (3x+5)^3$

3.8. Wykonaj działania.

a) $\left(x^2+3x-1\right)^2 + \left(7x-2x^2\right)^2 - x + 1$

b) $2\left(x^2-x+1\right)^2 - \left(2x^2-5\right)^2 - 4\left(x^2-7\right)$

c) $\left(2x^2-x-3\right)^2 + \left(3x^2-x-2\right)^2 + 5(2x-1)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x^2+2x-1\right)^2 - 3\frac{1}{2}$

e) $\left(3x^2-x-1\right)^2 - \left(2x^2+5x+1\right)^2$

f) $\left(x^2+x-4\right)^2 - \left(x^2-3x+2\right)^2 + 2(2x-3)$

3.9. Przekształć wielomian $W(x)$ do prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = x_0$.

a) $W(x) = \left(x\sqrt{7}-1\right)\left(x\sqrt{7}+1\right) - (2x+3)^2 + 4\left(3x + \sqrt{2\frac{1}{4}}\right)$ $\qquad x_0 = \sqrt{3}$

b) $W(x) = \left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right) - \frac{1}{2}\left(1-2x^2\right) - \left(x+\frac{1}{2}\right)$ $\qquad x_0 = 1-\sqrt{7}$

c) $W(x) = (2x+1)^2 - 2(x-2)^2 + 3 - 2x^2$ $\qquad x_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}+4}$

3.10. Przekształć wielomian $W(x)$ do prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = x_0$.

a) $W(x) = \left(x^2-5x+3\right)^2 - 4(2x-1)^2 + 3x$ $\qquad x_0 = \frac{1}{2}$

b) $W(x) = 2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right) - 3\left(x^2-x-1\right)^2 - 2x(x+1)^2$ $\qquad x_0 = -\sqrt{2}$

c) $W(x) = \left(2x^2-3x+1\right)^2 - \left(x^2+x-3\right)^2 + 2x\left(7x^2-6x\right)$ $\qquad x_0 = \sqrt{3}$

3.11. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x+1$, $P(x) = x+a$ i $Q(x) = 8x^4 - 4x^3 + bx^2 - 11x - 2$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $(W(x))^3 \cdot P(x) = Q(x)$.

3.12. Wielomian $W(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ jest kwadratem wielomianu $Q(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz b i c.

3.13. Oblicz.

a) $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ b) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^3$ c) $\left(\sqrt{7}+2\sqrt{3}\right)^3$ d) $\left(3-\sqrt[3]{2}\right)^3$

D **3.14.** Wykaż, że liczba $2021^3 - 2018^3$ jest podzielna przez 3. Nie korzystaj z kalkulatora.

D **3.15.** Wykaż, że liczba $22\,222^3 + 33\,333^3$ jest podzielna przez 5. Nie korzystaj z kalkulatora.

D **3.16.** Wykaż, że liczba $13^6 - 11^6$ jest podzielna przez 48. Nie korzystaj z kalkulatora.

D * **3.17.** Dane są dwie liczby rzeczywiste x i y spełniające równania $x-y=4$ i $xy=2$. Wykaż, że

a) $x^2+y^2=20$. b) $x^3-y^3=88$.

D * **3.18.** Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt{2}$ jest całkowita.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Jednomian $36x^4$ jest jednym ze składników sumy $\left(3x^2+2\right)^3$.

B. Jednomian $36x^4$ jest jednym ze składników sumy $\left(2x^2+3\right)^3$.

C. Jednomian $36x^4$ jest jednym ze składników sumy $\left(3x^2+2x\right)^3$.

2. Zapisz wielomian $(2x-1)^3+(1-x)(3x-2)^2$ w postaci uporządkowanej. Oblicz wartość wielomianu dla $x=-\sqrt{5}$.

3. Dla jakich wartości parametrów a, b, c wielomiany $8x^6-27$ i $\left(2x^2+a\right)\left(4x^4+bx^2+c\right)$ są równe?

4. Wiadomo, że $a+b=3$ i $ab=1$. Oblicz a^3+b^3.

D **5.** Wykaż, że liczba $29^9 - 17^9$ jest podzielna przez 12. Nie korzystaj z kalkulatora.

Pojedynek na równania trzeciego stopnia

Problem równań trzeciego stopnia trapił uczonych co najmniej od czasów Archimedesa. Dopiero w XVI w. odkryto metodę ich rozwiązywania, a wiąże się z tym pełna dramaturgii historia.

Dwaj główni bohaterowie

Niccolò Tartaglia [czyt. tartalja] (1500?–1557), włoski matematyk, pochodzący z bardzo biednej rodziny. Samouk. Naprawdę nazywał się Fontana, ale posługiwał się przydomkiem Tartaglia (po włosku „jąkała"), gdyż na skutek ran gardła odniesionych w dzieciństwie miał kłopoty z mówieniem. Nauczyciel matematyki, autor pierwszych matematycznych książek o artylerii i fortyfikacjach.

Gerolamo Cardano (1501–1576), włoski matematyk, lekarz, filozof, profesor uniwersytetu w Bolonii. Pochodzący z bogatej rodziny, przyjaciel Leonarda da Vinci, autor ponad 200 dzieł.

Dramat w siedmiu aktach

Prolog

Scipio del Ferro, profesor Uniwersytetu w Bolonii, zna sposób rozwiązywania równań typu $x^3 + px = q$ i na łożu śmierci przekazuje go swojemu uczniowi. **Antonio Maria Fior** wykorzystuje tę wiedzę do wygrywania **pojedynków naukowych**.

W XVI w. we Włoszech popularne były pojedynki naukowe. Polegały one na rozwiązywaniu w określonym czasie zestawu zadań przekazanych przez przeciwnika. Ten, kto rozwiązał więcej zadań, wygrywał. Zdobywał nagrodę finansową, zwiększał swój prestiż i zyskiwał mecenasów. Między innymi dlatego naukowcy nie dzielili się swoimi odkryciami, ale strzegli ich bardzo pilnie i przekazywali co najwyżej swoim uczniom.

I

W 1525 r. Fior wyzywa na pojedynek **Tartaglię**, słyszy bowiem pogłoski, że ten odniósł sukces na polu równań sześciennych.

II

Tartaglia wyzwanie przyjmuje. Podczas pracy nad zadaniami odkrywa ogólną metodę rozwiązywania równań $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + px^2 = q$. Wszystkie zadania przeciwnika sprowadzają się do pierwszego równania, więc nie sprawiają Tartaglii żadnego problemu. Fior natomiast nie radzi sobie z dwoma pozostałymi typami równań. Tartaglia wygrywa pojedynek.

W tamtych czasach współczynniki równania i rozwiązania miały być liczbami dodatnimi, dlatego $x^3 + px = q$ było traktowane jak równanie innego typu niż $x^3 = px + q$. Nie stosowano zapisów symbolicznych i nie używano znaków +, −, = ani pojęcia niewiadomej.

III

O odkryciu Tartaglii dowiaduje się **Gerolamo Cardano**. Próbuje namówić Tartaglię, by podzielił się z nim wiedzą. Ten długo odmawia, ale w końcu ulega i w 1539 r. przekazuje Cardanowi metodę rozwiązywania równań $x^3 + px = q$ i $x^3 = px + q$. Cardano przysięga dochować tajemnicy, a Tartaglia nie podaje rozwiązania wprost, ale szyfruje je w wierszu. Cardano ma kłopoty z odszyfrowaniem wiersza i musi prosić Tartaglię o pomoc.

IV

Cardano pracuje nad dziełem *Ars magna*. Pomaga mu w tym jego uczeń, Ludovico Ferrari. Ferrari znajduje metodę rozwiązywania równań czwartego stopnia.

V

W 1545 r. Cardano wydaje księgę *Ars magna*, a w niej opisuje m.in. metodę Tartaglii. Oczywiście nie szyfrem, tylko wprost. Rozpoczyna się batalia Tartaglii o prawo do odkrycia.

VI

Cardano nie odpowiada na oskarżenia Tartaglii. Zamiast tego Ferrari wyzywa Tartaglię na pojedynek naukowy.

VII

Pojedynek odbywa się w 1548 r., Tartaglia go przegrywa.

Epilog

Dziś metodę szukania pierwiastków równania trzeciego stopnia opracowaną przez Tartaglię nazywamy **wzorami Cardano**.

4. Równania wielomianowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań wielomianowych

Poznaliśmy już definicję pierwiastka trójmianu kwadratowego. Podobnie określamy pierwiastek dowolnego wielomianu.

Definicja

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę a, dla której $W(a) = 0$.

Na przykład liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 8$,
bo $W(2) = 2^3 - 8 = 0$,
a liczby 0, 1 i -1 są pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^3 - x$,
bo $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$.

Definicja

Równaniem wielomianowym (algebraicznym) nazywamy równanie postaci $W(x) = 0$, w którym $W(x)$ jest wielomianem. **Stopniem równania** nazywamy stopień występującego w nim wielomianu.

Na przykład równanie $x^3 - x = 0$ jest równaniem stopnia 3, a równanie $x^5 + 1 = 0$ jest równaniem stopnia 5.

Rozwiązanie równania $W(x) = 0$ oznacza znalezienie wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$.

Ogólne wzory na pierwiastki wielomianów stopnia trzeciego odkrył w XVI w. włoski matematyk **Nicolò Tartaglia**. Wzory te jednak noszą nazwę **wzorów Cardana**, od nazwiska innego włoskiego matematyka i lekarza, który w 1545 r. opublikował je (bez zgody Tartaglii) w swojej książce. Podał tam również metodę (znalezioną przez Ferrariego, który był jego uczniem) rozwiązania równania czwartego stopnia poprzez sprowadzenie go do równania stopnia trzeciego.

Nie podamy ogólnych wzorów na pierwiastki wielomianów stopni wyższych niż drugi. Dla stopni trzeciego i czwartego takie ogólne wzory istnieją, ale są bardzo skomplikowane. Udowodniono natomiast, że dla równań stopnia wyższego niż czwarty

wzorów na pierwiastki nie ma. Tylko nieliczne typy równań wyższych stopni dają się rozwiązać w prosty sposób. W pozostałych przypadkach można szukać różnymi metodami przybliżeń pierwiastków i najczęściej, korzystając z pomocy komputerów, znajduje się je z zadaną wcześniej dokładnością.

Autorem ostatecznego rozstrzygnięcia problemu rozwiązywalności równań wielomianowych jest wybitny matematyk francuski **Évariste Galois** (1811–1832). Żył bardzo krótko, ale jego naukowe osiągnięcia wyprzedziły stan ówczesnej matematyki o kilkadziesiąt lat. Zajmował się też polityką i jako rewolucjonista trafił do więzienia. Zginął w pojedynku. Jego życie zostało opisane w książce Leopolda Infelda *Wybrańcy bogów*.

Zajmiemy się teraz szukaniem rozwiązań równań stopnia wyższego niż drugi w przypadkach, gdy cel ten można osiągnąć w stosunkowo prosty sposób. Najprościej, podobnie jak w równaniach kwadratowych, znajduje się pierwiastki równania $W(x) = 0$ wówczas, gdy wielomian W jest zapisany w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego.

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

Rozwiążemy równanie $(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$.

Rozwiązanie

Iloczyn ma wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik w tym iloczynie ma wartość 0. Zatem aby wyznaczyć pierwiastki równania, wystarczy znaleźć pierwiastki poszczególnych czynników. Mamy więc:

$x - 1 = 0$ lub $x - 3 = 0$ lub $x + 2 = 0$, czyli
$x = 1$ lub $x = 3$ lub $x = -2$

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby: 1, 3 i −2.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Wyznaczymy pierwiastki wielomianu $Q(x) = x(x + 3)^2$.

Rozwiązanie

$Q(x) = 0$
$x(x + 3)^2 = 0$
$x = 0$ lub $x = -3$

Jeśli n jest dodatnią liczbą naturalną, to $(x - a)^n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$.

Odp.: Pierwiastkami wielomianu Q są liczby 0 i −3.

Przykład 3 ◂ zad. 4.6

Napiszemy wielomian, który ma dokładnie trzy pierwiastki: 7, 4 i −2.

Rozwiązanie

Najprostszym rozwiązaniem jest $W(x) = (x-7)(x-4)(x+2)$, ale wielomianów spełniających warunek zadania jest nieskończenie wiele. Oto kilka innych:

$$P(x) = 3(x-7)(x-4)(x+2)$$
$$T(x) = (x-7)^2(x-4)^3(x+2)$$
$$Q(x) = (x-7)(x-4)(x+2)\left(x^2+1\right)$$
$$Z(x) = \sqrt{3}(x-7)(x-4)^{125}(x+2)\left(x^4+2\right)$$

W każdym wielomianie spełniającym warunki naszego zadania **musi** wystąpić iloczyn $(x-7)(x-4)(x+2)$. Jeżeli chcemy tworzyć inne rozwiązania, to możemy:

- mnożyć iloczyn $(x-7)(x-4)(x+2)$ przez dowolną liczbę różną od zera – tak jak w wielomianie P,
- poszczególne czynniki iloczynu $(x-7)(x-4)(x+2)$ podnosić do dowolnych potęg naturalnych dodatnich – tak jak w wielomianie T,
- mnożyć iloczyn $(x-7)(x-4)(x+2)$ przez czynnik, który nie ma innych pierwiastków – tak jak w wielomianie Q.

Przykład 4 ◂ zad. 4.11

Wyznaczymy współczynnik a_0 wielomianu $W(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + a_0$ tak, aby jednym z pierwiastków wielomianu W była liczba −1.

Rozwiązanie

$W(-1) = 0$, zatem

$-2 - 1 - 5 + a_0 = 0$ i stąd $a_0 = 8$

Odp.: $a_0 = 8$

Rozkład wielomianu na czynniki

Wiemy już, że jeżeli wielomian W jest zapisany w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego, to bez problemu można rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$. Dlatego zajmiemy się teraz rozkładem wielomianu na czynniki. Nie wszystkie wielomiany można rozłożyć na czynniki liniowe. Przykładami takich nierozkładalnych wielomianów są trójmiany kwadratowe, których wyróżnik (Δ) jest ujemny, np. x^2+2, $x^2 + x + 1$.

Podamy (bez dowodu) twierdzenie dotyczące rozkładu wielomianu na czynniki.

Twierdzenie

Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Zatem **jedyne** wielomiany, których nie można rozłożyć na czynniki, to trójmiany kwadratowe o ujemnym wyróżniku.

Wniosek

Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.

Wielomian stopnia parzystego może nie mieć pierwiastków. Jest wówczas iloczynem wyłącznie nierozkładalnych trójmianów kwadratowych.

Tylko niektóre wielomiany stopnia wyższego niż 2 można w prosty sposób rozłożyć na czynniki. Pokażemy przykłady takich wielomianów.

Przykład 5 ◀ zad. 4.14

Rozłożymy na czynniki podany wielomian.

Rozwiązanie

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + x$ ⟵ wspólny czynnik x wyłączamy przed nawias

$W(x) = x\left(x^2 - 2x + 1\right)$ ⟵ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Odp.: $W(x) = x(x - 1)^2$

b) $W(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2$ ⟵ wspólny czynnik x^2 wyłączamy przed nawias

$W(x) = x^2\left(2x^2 + x + 5\right)$ ⟵ obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39$ ⟵ $\Delta < 0$

Odp.: $W(x) = x^2\left(2x^2 + x + 5\right)$

c) $W(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$

$W(x) = 3x\left(x^2 - x - 2\right)$ ⟵ $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$

$x_1 = -1,\ x_2 = 2$ ⟵ obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ ⟵ zapisujemy trójmian w postaci iloczynowej

Odp.: $W(x) = 3x(x + 1)(x - 2)$

d) $W(x) = x^4 + 2x$

$W(x) = x\left(x^3 + 2\right)$ $\longleftarrow a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$x^3 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \left(x + \sqrt[3]{2}\right)\left(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

Odp.: $W(x) = x\left(x + \sqrt[3]{2}\right)\left(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

Niepełny kwadrat różnicy $a^2 - ab + b^2$, o ile $a \neq 0$ i $b \neq 0$, jest wielomianem nierozkładalnym. Jeżeli bowiem w wyrażeniu $a^2 - ab + b^2$ literę a potraktujemy jako zmienną, natomiast b jako liczbę, to wyróżnik Δ takiego trójmianu jest ujemny, bo $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2$. Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w wypadku niepełnego kwadratu sumy, czyli wyrażenia $a^2 + ab + b^2$.

Przyjrzyjmy się ponownie rozkładowi na czynniki wielomianu z przykładu 5c:

$W(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$

Zauważmy, że można ten rozkład przedstawić w wielu postaciach, np.:

(1) $W(x) = 3x(x+1)(x-2)$

(2) $W(x) = x(3x+3)(x-2)$

(3) $W(x) = 3x(x-2)(x+1)$

(4) $W(x) = 3(x+1)x(x-2)$

które różnią się w rzeczywistości **tylko kolejnością** czynników, ewentualnie położeniem stałej (w rozkładzie (2) liczba 3 nie jest wyłączona z czynnika $3x + 3$).

Tę własność rozkładu wielomianu na czynniki formułuje się w postaci twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Rozkład wielomianu na czynniki jest jednoznaczny (z dokładnością do stałej wyłączonej przed nawias).

Dzięki podanym wyżej twierdzeniom mamy **gwarancję istnienia rozkładu wielomianu** na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Twierdzenia te nie wskazują natomiast **sposobu** postępowania prowadzącego do otrzymania takiego rozkładu.

W dotychczasowych przykładach można było od razu skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia lub wyłączyć wspólny czynnik ze wszystkich składników wielomianu. W następnych przykładach, aby wyłączyć czynnik, będziemy najpierw odpowiednio grupować wyrazy wielomianu.

Przykład 6 ◀ zad. 4.15

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$.

Rozwiązanie

Popatrzmy na pierwsze dwa składniki tego wielomianu: $x^3 + 3x^2$. Jeżeli wyłączymy przed nawias x^2, to otrzymamy $x^2(x + 3)$. W nawiasie mamy wówczas sumę identyczną jak ta, którą tworzą ostatnie dwa wyrazy wielomianu.

$W(x) = x^2(x + 3) + x + 3$

$W(x) = x^2(x + 3) + 1 \cdot (x + 3)$ ⟵ wspólny czynnik $x + 3$ wyłączamy przed nawias

$W(x) = (x + 3)\left(x^2 + 1\right)$ ⟵ czynnik $x^2 + 1$ jest nierozkładalny

Odp.: $W(x) = (x + 3)\left(x^2 + 1\right)$

Przykład 7 ◀ zad. 4.16

Rozłożymy na czynniki dany wielomian $W(x)$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$W(x) = \left(x^3 - 2x^2\right) - (4x - 8)$ ⟵ grupujemy wyrazy

$W(x) = x^2(x - 2) - 4(x - 2)$

$W(x) = (x - 2)\left(x^2 - 4\right)$ ⟵ korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów

$W(x) = (x - 2)(x - 2)(x + 2)$

Odp.: $W(x) = (x - 2)^2(x + 2)$

b) $W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$

Pokażemy dwa sposoby grupowania wyrazów tego wielomianu.

I sposób

$W(x) = \left(7x^3 - 21x\right) + \left(2x^2 - 6\right) = 7x\left(x^2 - 3\right) + 2\left(x^2 - 3\right) =$

$= \left(x^2 - 3\right)(7x + 2) = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)(7x + 2)$

II sposób

$W(x) = \left(7x^3 + 2x^2\right) - (21x + 6) = x^2(7x + 2) - 3(7x + 2) =$

$= (7x + 2)\left(x^2 - 3\right) = (7x + 2)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

Mamy już ostateczny rozkład wielomianu W. Można jeszcze wyłączyć przed nawias 7, aby wszystkie czynniki były zapisane w postaci wygodnej do odczytania miejsc zerowych wielomianu.

Odp.: $W(x) = 7\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x + \frac{2}{7}\right)$

R

Przykład 8 ◂ zad. 4.19

Rozwiążemy podane równanie, rozkładając jego lewą stronę na czynniki.

Rozwiązanie

a) $5x^3 - 4x^2 - 10x + 8 = 0$

$\left(5x^3 - 10x\right) - \left(4x^2 - 8\right) = 0$

$5x\left(x^2 - 2\right) - 4\left(x^2 - 2\right) = 0$

$\left(x^2 - 2\right)(5x - 4) = 0$, czyli $5\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$

Odp.: $x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{4}{5}$

b) $x^4 + \sqrt{3}x^3 - x^2 - \sqrt{3}x = 0$

$x\left(x^3 + \sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3}\right) = 0$

$x\left[\left(x^3 - x\right) + \left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}\right)\right] = 0$

$x\left[x\left(x^2 - 1\right) + \sqrt{3}\left(x^2 - 1\right)\right] = 0$

$x\left(x^2 - 1\right)\left(x + \sqrt{3}\right) = 0$, czyli $x(x - 1)(x + 1)\left(x + \sqrt{3}\right) = 0$

Odp.: $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = -1$ lub $x = -\sqrt{3}$

Przykład 9 ◂ zad. 4.22

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x)$ ma nieparzystą liczbę składników, zatem grupowanie wyrazów nie doprowadzi do wyłonienia wspólnego czynnika. Przedstawmy więc jeden z tych składników jako sumę dwóch: $3x^2 = x^2 + 2x^2$. Zatem:

$W(x) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2$

$W(x) = \left(x^3 - x^2\right) - \left(2x^2 - 2\right)$

$W(x) = x^2(x - 1) - 2\left(x^2 - 1\right)$

$W(x) = x^2(x - 1) - 2(x - 1)(x + 1)$

$W(x) = (x - 1)\left[x^2 - 2(x + 1)\right]$, czyli $W(x) = (x - 1)\left(x^2 - 2x - 2\right)$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$ ⟵ obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego

$x_1 = 1 - \sqrt{3},\ x_2 = 1 + \sqrt{3}$

$W(x) = (x - 1)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)$

Odp.: $W(x) = (x - 1)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)$

Metoda podstawiania

Często podczas rozkładania wielomianu na czynniki nie można skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia, wyłączyć wspólnego czynnika ani też pogrupować wyrazów wielomianu. W niektórych sytuacjach możemy posłużyć się **metodą podstawiania**.

Przykład 10 ◀ zad. 4.24

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + x^2 - 20$.

Rozwiązanie

Podstawiamy $x^2 = t$. Wówczas wielomian W staje się zależny od zmiennej t i przyjmuje postać:

$W(t) = t^2 + t - 20$ ⟵ obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego zmiennej t: $\Delta = 81$

$t_1 = -5,\ t_2 = 4$ ⟵ obliczamy jego pierwiastki

$t^2 + t - 20 = (t + 5)(t - 4)$ ⟵ zapisujemy trójmian w postaci iloczynowej

Zatem $W(t) = (t + 5)(t - 4)$. Wracamy do podstawienia $x^2 = t$:

$$W(x) = \left(x^2 + 5\right)\left(x^2 - 4\right)$$

Czynnik $x^2 + 5$ jest nierozkładalny, a czynnik $x^2 - 4$ rozkładamy, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy ostateczny rozkład wielomianu W na czynniki.

Odp.: $W(x) = \left(x^2 + 5\right)(x - 2)(x + 2)$

Przykład 11 ◀ zad. 4.25

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = \left(x^2 - 4x\right)^2 - 3x^2 + 12x - 10$.

Rozwiązanie

Podstawiamy $x^2 - 4x = t$. Wówczas:

$W(t) = t^2 - 3t - 10$ ⟵ $\Delta = 49$

$t_1 = 5, t_2 = -2$ ⟵ obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego zmiennej t

$t^2 - 3t - 10 = (t - 5)(t + 2)$ ⟵ zapisujemy trójmian w postaci iloczynowej

Zatem $W(t) = (t - 5)(t + 2)$. Wracamy do podstawienia $x^2 - 4x = t$:

$$W(x) = \left(x^2 - 4x - 5\right)\left(x^2 - 4x + 2\right)$$

Obydwa trójmiany zmiennej x zapisujemy w postaciach iloczynowych:

$$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5), \quad x^2 - 4x + 2 = \left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)$$

Odp.: $W(x) = (x + 1)(x - 5)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)$

R

Na koniec pokażemy przykład rozkładu na czynniki wielomianu parzystego stopnia, który nie ma miejsc zerowych.

Przykład 12 ◀ zad. 4.34

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + 1$.

Rozwiązanie

Zastosujemy tzw. dopełnienie do kwadratu sumy.

$$x^4 + 1 = \left[\left(x^2\right)^2 + 2x^2 + 1\right] - 2x^2 =$$
$$= \left(x^2 + 1\right)^2 - 2x^2 =$$
$$= \left(x^2 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = \qquad \longleftarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$= \left(x^2 + 1 - \sqrt{2}x\right)\left(x^2 + 1 + \sqrt{2}x\right)$$

Oba czynniki są nierozkładalne.

Odp.: $W(x) = \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Suma wszystkich pierwiastków równania $2x(x - 2)(x + 9)(x - 11) = 0$ jest równa

A. 0. **B.** 4. **C.** 22. **D.** −4.

4.2. Wskaż rozwiązania równania $x^3(3x + 1)\left(x^3 - 8\right) = 0$.

A. $-8, 0, -1$ **B.** $-8, 0, \frac{1}{3}$ **C.** $-\frac{1}{3}, 0, 2$ **D.** $0, \frac{1}{3}, 2$

4.3. Wskaż wielomian, w którego rozkładzie na czynniki występuje $x - 3$.

A. $W(x) = x^3 - 3x$
B. $W(x) = x^4 + 9x^2$
C. $W(x) = 2x^5 - 18x^3$
D. $W(x) = x^6 - 9x^5$

4.4. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

a) $W(x) = 2(x - 7)(x + 5)(0{,}5x - 1)$
b) $W(x) = (0{,}02 - 0{,}1x)(5x - 2)$
c) $W(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)\left(3\frac{1}{3}x - 2\right)$
d) $W(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}x - 2\right)\left(3 + x\sqrt{3}\right)$
e) $W(x) = 0{,}1x(2x - 5)(3x + 0{,}6)$
f) $W(x) = -4x^3(x + 1)(x + 6)^2$

4.5. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

a) $Z(x) = 4(x-3)\left(x^2-1\right)$

b) $Z(x) = -2(x+5)^2\left(x^2-6x+9\right)$

c) $Z(x) = 3x\left(x^2-5x+6\right)(2x+8)$

d) $Z(x) = \left(x^3-8\right)\left(x^2+x-6\right)$

e) $Z(x) = 5\left(x^3+27\right)\left(x^2-9\right)$

f) $Z(x) = (2x+3)\left(x^2-x-2\right)$

g) $Z(x) = \left(8x^3-64\right)\left(x^2-9\right)$

h) $Z(x) = (2x-6)\left(x^2+11x+10\right)$

4.6. Napisz przykład wielomianu, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

a) $-2, 5, 1$ b) $-3, -2, 0, 2$ c) $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 4, -\sqrt{7}$ d) $3, -1, \frac{2}{5}$

4.7. Podaj przykłady trzech różnych wielomianów, których pierwiastkami są tylko liczby: $\sqrt{7}, 4, -2, -5$.

4.8. Napisz przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

a) $-7, -2, 1$ b) $0, 4$ c) $-3, 3$ d) 3

4.9. Podaj przykład wielomianu, którego pierwiastkami

a) są trzy kolejne liczby nieparzyste.

b) są dwie liczby pierwsze.

c) są dwie pary liczb przeciwnych.

d) jest pięć kolejnych liczb całkowitych.

4.10. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są liczby: -1, 3 i 4. Zapisz ten wielomian w postaci $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

4.11. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -x^3 + a_2x^2 + 5x + a_0$. Wyznacz współczynniki a_2 i a_0 tego wielomianu.

4.12. Podaj przykład wielomianu W, którego pierwiastkami są liczby 1, 2 oraz 3 i który spełnia warunek $W(4) = 12$.

4.13. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 - 2x^2$

b) $W(x) = 3x^2 - 3x$

c) $W(x) = -7x^3 + 14x^2$

d) $W(x) = x^3 - 4x$

e) $W(x) = -3x^3 + 27x^2$

f) $W(x) = -x^3 + 4x^2$

4.14. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$

b) $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x$

c) $P(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 3x$

d) $P(x) = 5\pi x^4 - 10\pi x^3 - 15\pi x^2$

e) $P(x) = 0{,}2x^5 + 0{,}6x^4 - 2x^3$

f) $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

4.15. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

b) $W(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

c) $W(x) = 125 + 75x + 15x^2 + x^3$

d) $W(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16$

e) $W(x) = -3x^3 - 27x^2 - 81x - 81$

f) $W(x) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

4.16. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

b) $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

c) $Q(x) = 8x^3 - 20x^2 - 18x + 45$

d) $Q(x) = 11\frac{1}{4}x^3 - 6\frac{3}{4}x^2 - 20x + 12$

e) $Q(x) = 14x^3 + 2x^2 - 21x - 3$

f) $Q(x) = 6x^3 + \sqrt{8}x^2 - 18x - 6\sqrt{2}$

g) $Q(x) = \sqrt{3}x^3 - x^2 + \sqrt{48}x - 4$

h) $Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - 3x^2 + 1\frac{1}{2}x$

4.17. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

b) $Q(x) = 8x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x^2 - 4x + 4$

c) $Q(x) = 9x^5 + 12x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 12x - 4$

d) $Q(x) = x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 4x^2 - 16x + 16$

4.18. Przerysuj tabelę. Wyznacz wielomiany, które należy wstawić w miejsce ?.

	czynnik	czynnik	czynnik	iloczyn
czynnik	?	?	?	$x^3 + x^2$
czynnik	?	?	?	$x^3 + 5x^2 + 6x$
czynnik	?	?	?	$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
iloczyn	$x^3 - 2x^2$	$x^3 + 6x^2 + 9x$	?	

4.19. Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 + 30x^2 + 75x = 0$

b) $18x + 12x^2 + 2x^3 = 0$

c) $9\pi x - 6\pi x^2 + \pi x^3 = 0$

d) $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

e) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 0$

f) $-2x^5 - 28x^4 - 98x^3 = 0$

g) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x = 0$

h) $\sqrt{2}x^7 - 4x^6 - 6\sqrt{2}x^5 = 0$

4.20. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$

b) $4x^3 + 4x^2 - 25x - 25 = 0$

c) $\sqrt{3}x^3 - \sqrt{192} = 0$

d) $2\sqrt{2}x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 9\sqrt{2}x - 3\sqrt{3} = 0$

e) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{27} = 0$

f) $x^4 + \sqrt{2}x^3 - 4x^2 - 4\sqrt{2}x = 0$

4.21. Rozwiąż równanie.

a) $(x-4)\left(x^2+x+3\right)+(2x-5)\left(x^2+x+3\right)=0$

b) $\left(x^2-3\right)(x+7)=\left(3-x^2\right)(x+1)$

c) $\left(x^2+4\right)(x+8)=x^4-16$

d) $(x-2)(2x+4)(2x+3)=(3-x)(x+2)(6x+9)$

4.22. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x)=x^3-7x+6$

b) $W(x)=x^3-4x-3$

c) $W(x)=x^3-21x-20$

d) $W(x)=x^3-12x+11$

4.23. Rozwiąż równanie.

a) $x^3-13x+12=0$

b) $x^3-111x+110=0$

c) $x^3+2x+3=0$

d) $x^3-5x+4=0$

4.24. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x)=x^4-5x^2+4$

b) $W(x)=x^4-11x^2+18$

c) $W(x)=x^4+12x^2-13$

d) $W(x)=-2x^4-12x^2-16$

e) $W(x)=4x^4-25x^2+6$

f) $W(x)=-36x^4-65x^2+36$

4.25. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x)=\left(x^2+4x+5\right)^2-3\left(x^2+4x+5\right)+2$

b) $W(x)=\left(x^2-6x\right)^2+4x^2-24x-5$

c) $W(x)=\left(x^2-x+3\right)^2+2x^2-2x-29$

d) $W(x)=\left(\sqrt{2}x^2-5\sqrt{2}x\right)^2+x^2-5x-1$

4.26. Rozwiąż równanie.

a) $x^4-2x^2-3=0$

b) $\left(x^2+2x\right)^2-7\left(x^2+2x\right)-8=0$

c) $\left(x^2+x-1\right)^2-4x^2-4x-1=0$

d) $\left(x^2+3x+5\right)^2-2x^2-6x-13=0$

4.27. Suma dwóch liczb naturalnych równa się 18, a suma ich sześcianów równa się 1674. Wyznacz te liczby.

4.28. Suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest 12 razy większa od kwadratu środkowej z nich zwiększonego o 2. Wyznacz te liczby.

4.29. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami równania $x^3+mx^2-4x+n=0$ z niewiadomą x. Wyznacz współczynniki m i n, a następnie znajdź trzeci pierwiastek tego równania.

4.30. Sprawdź, czy istnieją takie wartości a, b i c, dla których wielomiany:
$W(x)=(x-a)\left(x^2-x-6\right)$, $P(x)=(x-b)\left(x^2-4x-12\right)$
i $Q(x)=(x-c)\left(x^2-9x+18\right)$ są równe.

* **4.31.** Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby 1, 3 i -5. Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x-2)$.

D * **4.32.** Wykaż, że jeżeli pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ są liczby a, b, c, to $a\cdot b\cdot c=-a_0$.

D * **4.33.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej x wartość wielomianu $W(x)=x^3+5x^2-9x-45$ jest liczbą podzielną przez 8.

** **4.34.** Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x)=x^4+9$
b) $W(x)=16x^4+1$
c) $W(x)=x^4+x^2+1$
d) $W(x)=x^4+3x^2+9$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian $W(x)=x^3+x^2+x+1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

B. Wielomian $W(x)=x^3-x^2+x-1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

C. Wielomian $W(x)=x^3+x^2-x-1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

2. Rozłóż na czynniki stopnia pierwszego wielomian $W(x)=2x^3-x^2-3x$.

3. Rozwiąż równanie $2x^3+3x^2-10x-15=0$.

4. Kwadrat pewnej liczby zmniejszonej o 2 jest równy sześcianowi tej liczby. Wyznacz tę liczbę.

5. Wyznacz takie wartości a i b, aby wielomiany $W(x)=(x-a)\left(x^2-8x+15\right)$ i $P(x)=(x-b)\left(x^2-2x-15\right)$ były równe.

5. Dzielenie wielomianów

Umiejętności:
- dzielenie wielomianu przez dwumian $ax + b$

Ostatnim działaniem w zbiorze wielomianów, które omówimy, jest dzielenie.

Definicja

Mówimy, że wielomian $W(x)$ **jest podzielny** przez niezerowy wielomian $P(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wielomian $P(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$, a wielomian $Q(x)$ **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.
Bezpośrednio z tej definicji wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, to stopień $P(x)$ nie może być wyższy od stopnia $W(x)$.

Sposób dzielenia jest bardzo podobny do dzielenia w zbiorze liczb naturalnych.

Podzielimy wielomian $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ przez wielomian $x^2 + 5$.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 2x^2 + 3x - 1 \\ \big(2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5\big) : \big(x^2 + 5\big) \\ -\big(2x^4 + 10x^2\big) \\ \hline \qquad\quad 3x^3 - x^2 + 15x - 5 \\ \qquad -\big(3x^3 + 15x\big) \\ \hline \qquad\qquad -x^2 - 5 \\ \qquad\quad -\big(-x^2 - 5\big) \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

- sprawdzamy, ile razy x^2 mieści się w wyrazie $2x^4$ i wynik, równy $2x^2$, zapisujemy nad kreską
- mnożymy $x^2 + 5$ przez $2x^2$
- od $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ odejmujemy $2x^4 + 10x^2$
- sprawdzamy, ile razy x^2 mieści się w wyrazie $3x^3$
- mnożymy $x^2 + 5$ przez $3x$
- od $3x^3 - x^2 + 15x - 5$ odejmujemy $3x^3 + 15x$
- sprawdzamy, ile razy x^2 mieści się w wyrazie $-x^2$
- mnożymy $x^2 + 5$ przez -1
- od $-x^2 - 5$ odejmujemy $-x^2 - 5$

$$2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5 = \big(x^2 + 5\big) \cdot \big(2x^2 + 3x - 1\big)$$

Z własności działań na potęgach wynika, że jeżeli $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, to między stopniami wielomianów W, P i Q zachodzi następujący związek:

stopień Q = stopień W − stopień P

Zauważmy, że dzielenie wielomianów nie zawsze jest wykonalne. Na przykład wielomianu $x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ nie można podzielić przez x (inaczej mówiąc – nie można wyłączyć x przed nawias z podanego wielomianu). Wyłączenie x przed nawias może być tylko częściowe:

$$x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = x\left(x^2 - 2x + 7\right) + 1$$

Podobnie jest przy dzieleniu liczb naturalnych. Na przykład liczba 297 nie jest podzielna przez 13, bo $297 = 22 \cdot 13 + 11$. W takiej sytuacji mówimy, że można wykonać dzielenie z resztą. Wynik dzielenia 297 przez 13 to iloraz 22 i reszta 11.

Twierdzenie

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowymi wielomianami oraz stopień $P(x)$ nie jest większy od stopnia $W(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

przy czym:

- stopień Q = stopień W − stopień P,
- stopień R jest mniejszy od stopnia P albo R jest wielomianem zerowym.

Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to wielomian W jest **podzielny** przez wielomian P.

Przykład 1 ◂ zad. 5.6

Podzielimy wielomian $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1$ przez wielomian $x^2 + 5$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{l} \\ \left(2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1\right) : \left(x^2 + 5\right) \\ -\left(2x^4 + 10x^2\right) \\ \hline \\ \\ -\left(3x^3 + 15x\right) \\ \hline \\ \\ -\left(-x^2 - 5\right) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 \\ \\ \\ 3x^3 - x^2 + 18x - 1 \\ \\ \\ -x^2 + 3x - 1 \\ \\ \\ 3x + 4 \end{array}$$

Dzielenie można kontynuować, dopóki stopień wielomianu pod kreską nie stanie się mniejszy niż stopień dzielnika.

← kończymy dzielenie, ponieważ stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika

Łatwo można sprawdzić, że:

$$2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1 = \left(x^2 + 5\right) \cdot \left(2x^2 + 3x - 1\right) + (3x + 4)$$

Odp.: Wynikiem dzielenia wielomianów jest iloraz $2x^2 + 3x - 1$ i reszta $3x + 4$.

Przykład 2 ◂ zad. 5.10, 5.11

Wyznaczymy wielomian $W(x)$, który przy dzieleniu przez $x^3 - 2x + 1$ daje iloraz równy $2x^2 + x$ i resztę równą $x^2 - 3x + 5$.

Rozwiązanie

Z podanych informacji wynika, że szukany wielomian W ma postać:

$$W(x) = \left(x^3 - 2x + 1\right) \cdot \left(2x^2 + x\right) + x^2 - 3x + 5$$

Po wykonaniu działań, redukcji wyrazów podobnych i uporządkowaniu składników otrzymujemy końcową odpowiedź.

Odp.: $W(x) = 2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 5$

Podzielność wielomianu przez dwumian

Dwumianem nazywamy wielomian stopnia pierwszego. Przyjmijmy, że wielomian $W(x)$ jest stopnia co najmniej drugiego. Podczas dzielenia wielomianu W przez dwumian postaci $x - a$, wyznaczamy takie wielomiany Q i R, że:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Dzielnik jest stopnia pierwszego, więc reszta jest zawsze albo liczbą różną od zera (czyli wielomianem stopnia zero), albo zerem (czyli wielomianem zerowym). Inaczej mówiąc, nie występuje w niej zmienna x. Dlatego możemy wprowadzić ogólny zapis:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Czynność dzielenia zakończy się, gdy w słupku pod kreską zostanie liczba, np.:

$$\begin{array}{r|l} \left(x^3 + 3x^2 - 2x + 1\right) & x^2 + 5x + 8 \\ \hline -\left(x^3 - 2x^2\right) & \\ \hline 5x^2 - 2x + 1 & \\ -\left(5x^2 - 10x\right) & \\ \hline 8x + 1 & \\ -(8x - 16) & \\ \hline 17 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \left(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3\right) & x^3 - x^2 - x + 1 \\ \hline -\left(x^4 + 3x^3\right) & \\ \hline -x^3 - 4x^2 - 2x + 3 & \\ -\left(-x^3 - 3x^2\right) & \\ \hline -x^2 - 2x + 3 & \\ -\left(-x^2 - 3x\right) & \\ \hline x + 3 & \\ -(x + 3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Mamy zatem:

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x - 2) \cdot \left(x^2 + 5x + 8\right) + 17$$

oraz

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = (x + 3) \cdot \left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$$

Zauważmy, że jeżeli obliczymy wartość wielomianu

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

dla $x = a$, to otrzymamy równość:

$$W(a) = (a - a)Q(a) + R, \text{ czyli } W(a) = R.$$

Wniosek

Jeżeli $W(x) = (x - a)Q(x) + R$, to $W(a) = R$

Zatem, aby obliczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$, nie trzeba wykonywać dzielenia – wystarczy obliczyć wartość wielomianu W dla $x = a$.

Przykład 3 ◀ zad. 5.15

Obliczymy resztę R z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = 3x^4 - 4x^3 + x - 12$, $P(x) = x - 2$

$R = W(2)$

$W(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2 - 12 = 6$

Odp.: $R = 6$

b) $W(x) = x^4 - x^2 + 20$, $P(x) = x - \sqrt{3}$

$R = W\left(\sqrt{3}\right)$

$W\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^4 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 20 = 26$

Odp.: $R = 26$

c) $W(x) = 3x^6 - x^4 - 5x^2 - 10$, $P(x) = x + \sqrt{2}$

$R = W\left(-\sqrt{2}\right)$

$W\left(-\sqrt{2}\right) = 3\left(-\sqrt{2}\right)^6 - \left(-\sqrt{2}\right)^4 - 5\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 10 = 24 - 4 - 10 - 10 = 0$

W tym wypadku wielomian W jest podzielny przez dwumian $x + \sqrt{2}$.

Odp.: $R = 0$

Wróćmy do zapisu:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Z równości $W(a) = R$ wynikają następujące wnioski:

- Jeżeli a jest pierwiastkiem wielomianu W (czyli $W(a) = 0$), to $R = 0$, co oznacza, że wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$.
- Jeżeli wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$ (czyli $R = 0$), to $W(a) = 0$, co oznacza, że a jest pierwiastkiem wielomianu W.

Obydwa te wnioski zapiszemy krótko w postaci jednego twierdzenia.

Twierdzenie

Twierdzenie Bézouta

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Jest to jedno z ważniejszych twierdzeń o wielomianach. Nosi nazwę twierdzenia Bézouta od nazwiska XVIII-wiecznego matematyka francuskiego, choć znane i stosowane było wcześniej.

Przykład 4 ◀ zad. 5.16

Sprawdzimy bez wykonywania dzielenia, czy wielomian W jest podzielny przez dwumian P.

Rozwiązanie

a) $W(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 3, \ P(x) = x - 3$

$$W(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^4 - 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 27 - 27 + 18 - 15 - 3 = 0$$

$$W(3) = 0$$

Odp.: Wielomian W jest podzielny przez $x - 3$.

b) $W(x) = 5x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1, \ P(x) = x + 1$

$$W(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = -5 - 1 - \frac{1}{2} + 1 = -5\frac{1}{2}$$

$$W(-1) \neq 0$$

Odp.: Wielomian W nie jest podzielny przez $x + 1$.

R

Przykład 5 ◂ zad. 5.17

Obliczymy, dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x) = x^4 + mx^3 + 3x^2 - 5x - 2$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Rozwiązanie

Aby wielomian W był podzielny przez dwumian $x - 2$, musi zachodzić równość $W(2) = 0$.

$$W(2) = 2^4 + m \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 16 + 8m$$

$16 + 8m = 0$, stąd $m = -2$

Odp.: Wielomian W jest podzielny przez $x - 2$ dla $m = -2$.

Przykład 6 ◂ zad. 5.24

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 1$ jest równa -1, a z dzielenia przez x jest równa 1. Obliczymy resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = x(x + 1)$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = x^2 + x$ otrzymamy resztę postaci $R(x) = ax + b$. Zatem rozwiązanie zadania polega na wyznaczeniu współczynników a i b.

Stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika (albo reszta jest wielomianem zerowym).

Z założeń zadania wiemy, że:

- reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x + 1$ jest równa -1, czyli $W(-1) = -1$,
- reszta z dzielenia $W(x)$ przez x jest równa 1, czyli $W(0) = 1$.

Wyznaczymy wartości wielomianu

$$W(x) = Q(x) \cdot x(x + 1) + ax + b$$

dla $x = -1$ i $x = 0$.

Mamy:

$$W(0) = Q(0) \cdot 0 \cdot (0 + 1) + a \cdot 0 + b$$

$$W(-1) = Q(-1) \cdot (-1) \cdot (-1 + 1) + a \cdot (-1) + b$$

czyli:

$$W(0) = b$$

$$W(-1) = b - a$$

Otrzymujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} b = 1 \\ b - a = -1 \end{cases} \longleftarrow W(0) = 1 \text{ i } W(-1) = -1$$

Stąd $a = 2$, $b = 1$, czyli szukaną resztą z dzielenia jest dwumian $2x + 1$.

Odp.: $R(x) = 2x + 1$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż iloraz z dzielenia wielomianu $x^3 + 2x^2 - x + 6$ przez $x + 3$.

A. $x^2 + x + 2$ **B.** $x^2 + x - 2$ **C.** $x^2 - x + 2$ **D.** $x^2 - x - 2$

5.2. Wskaż wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 3$ daje iloraz $x+2$ i resztę 1.

A. $x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

B. $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

C. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

D. $x^3 - 2x^2 - 3x - 5$

5.3. Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^7 - 5x^3 + 4$ przez dwumian $P(x) = x + 1$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 10

5.4. Dane są wielomiany $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Stopień wielomianu W jest równy 10, stopień wielomianu P jest równy 4, a stopień wielomianu R jest równy 5.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień wielomianu Q jest równy 6.

B. Wielomian R jest resztą z dzielenia W przez P.

C. Wielomian R jest resztą z dzielenia W przez Q.

5.5. Podziel wielomian przez dwumian.

a) $\left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right) : (x - 1)$

b) $\left(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6\right) : (x + 2)$

c) $\left(10x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 10x + 3\right) : (2x + 3)$

d) $\left(3x^5 - 7x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 5x + 6\right) : (x - 3)$

5.6. Wykonaj dzielenie wielomianów.

a) $\left(x^3 + 3x^2 - 8x + 10\right) : \left(x^2 - 2x + 2\right)$

b) $\left(x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6\right) : \left(x^2 - x - 2\right)$

c) $\left(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6\right) : \left(x^2 - 2x - 3\right)$

d) $\left(x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 2\right) : \left(x^3 + 2x^2 - 3x + 1\right)$

5.7. Podziel każdy z wielomianów x^2-1, x^3-1, x^4-1, x^5-1 przez dwumian $x-1$.

5.8. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$. Zapisz wielomian $W(x)$ jako $P(x)\cdot Q(x)+R(x)$, przy czym R oznacza resztę z dzielenia W przez P. Określ stopnie wielomianów W, P, Q i R.

a) $W(x)=3x^3+5x^2+2x+7$ $\quad P(x)=x+1$
b) $W(x)=x^3-2x^2+x-1$ $\quad P(x)=x^2+x+3$
c) $W(x)=2x^3-x^2-17x-3$ $\quad P(x)=x^2-3x-1$
d) $W(x)=2x^4+x^3+6x^2-12x+3$ $\quad P(x)=x^2+x+3$

5.9. Którego stopnia wielomianem może być reszta, która powstanie w wyniku dzielenia wielomianu stopnia siódmego przez wielomian stopnia trzeciego?

5.10. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $2x+1$ daje iloraz x^2+2x-3 i resztę 5.

5.11. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez x^2-5x+2 daje iloraz $3x^2-x+1$ i resztę $2x-8$.

5.12. Podaj przykład wielomianu stopnia czwartego, który przy dzieleniu przez $5x^2+4x-3$ daje resztę $x-4$.

5.13. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego podzielnego przez dwumian $x-2$.

5.14. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego podzielnego przez dwumiany $x+1$ i $x-4$.

5.15. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian P. Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x)=2x^3-7x^2+x-11$ $\quad P(x)=x-1$
b) $W(x)=x^4+3x^3+5x+1$ $\quad P(x)=x+2$
c) $W(x)=x^{100}-2x^{50}+50$ $\quad P(x)=x+1$
d) $W(x)=x^{1000}-x^{999}$ $\quad P(x)=x-2$

D **5.16.** Wykaż, że wielomian W jest podzielny przez dwumian P. Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x)=x^3-2x^2+5x-4$ $\quad P(x)=x-1$
b) $W(x)=-x^4-2x^3+4x^2+x-6$ $\quad P(x)=x+3$
c) $W(x)=3x^3+x^2-16x+4$ $\quad P(x)=x-2$
d) $W(x)=8x^4-2x^3+x^2-1$ $\quad P(x)=x+\frac{1}{2}$

5.17. Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $Q(x)$?

a) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + m$ $\quad Q(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 4$ $\quad Q(x) = x + 4$

c) $W(x) = mx^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ $\quad Q(x) = x + 2$

d) $W(x) = 9x^3 - 3x^2 + mx - 2$ $\quad Q(x) = x - \frac{2}{3}$

5.18. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $Q(x)$ jest równa R?

a) $W(x) = x^3 - (8 + m)x^2 + (2m + 11)x + 5m$ $\quad Q(x) = x - 1$ $\quad R = -2$

b) $W(x) = 2x^4 - (2m - 1)x^3 - (m - 1)x^2 + \frac{1}{2}mx - 5$ $\quad Q(x) = x + 2$ $\quad R = 1$

c) $W(x) = -x^3 + (m - 2)x^2 - (2m - 3)x + 2m + 2$ $\quad Q(x) = x - 3$ $\quad R = -9$

d) $W(x) = (5m - 3)x^5 - (m + 1)x^3 + (2m - 2)x^2 - (m - 3)x + 5$

$Q(x) = x - \frac{1}{2}$ $\quad R = 6$

e) $W(x) = (m - 1)x^3 + 3mx^2 - (m + 2)x - 2m$ $\quad Q(x) = x + 5$ $\quad R = -6$

5.19. Dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 7$ przez $P(x) = x + a$ jest równa 9?

5.20. Dla jakich wartości parametrów a i b reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ przez wielomian $x - 1$ jest równa 4, a reszta z dzielenia wielomianu W przez wielomian $x + 2$ jest równa 13?

D **5.21.** Wykaż, że nie istnieje wartość parametru m, dla której wielomian $W(x) = x^3 - \left(m^2 + 1\right)x^2 + (m - 3)x + 1$ jest podzielny przez dwumian $P(x) = x - 1$.

5.22. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian W jest podzielny przez wielomian Q?

a) $W(x) = bx^3 + (a + 2b)x^2 - 2x - 5$ $\quad Q(x) = x^2 - 1$

b) $W(x) = ax^3 + (4 - a)x^2 - 3(4a + 3b)x - 9$ $\quad Q(x) = x^2 - 9$

c) $W(x) = -4(a - b)x^3 + (a + b)x^2 - x - \frac{3}{4}$ $\quad Q(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

d) $W(x) = x^5 + bx^4 + (a + 1)x^3 - (6a + b)x^2 - 2ax - 4b$ $\quad Q(x) = x^2 - 1$

e) $W(x) = x^4 - (a - 5)x^3 + (5b + 3)x^2 - (b - 4)x - (4a + 5b + 10)$ $\quad Q(x) = x^2 + 25$

f) $W(x) = (2a - b)x^4 + (a - b)x^3 + (5a + 3b)x^2 - 9$ $\quad Q(x) = x^2 + 9$

5.23. Dla jakich wartości parametrów a i b reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest równa $R(x)$?

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b, \quad P(x) = x^2 - 1, \quad R(x) = 3x + 2$

b) $W(x) = x^3 + 2x^2 - ax - 20b, \quad P(x) = x^2 - 3x + 5a, \quad R(x) = 9x - 5$

c) $W(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - (a+1)x + 2(b-1), \quad P(x) = x^2 - 3x + 2, \quad R(x) = -3x + 4$

d) $W(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x + a + 5, \quad P(x) = x^2 - x - 2, \quad R(x) = (3a+1)x + b + 2$

* **5.24.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 3$ jest równa 27, a z dzielenia przez $x - 1$ jest równa 3. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - 3)(x - 1)$.

* **5.25.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 2$ jest równa -2, a z dzielenia przez $x + 1$ jest równa 18. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x + 2)(x + 1)$.

* **5.26.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 2$ równa się -1, a z dzielenia przez $x - 2$ jest równa 15. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 - 4$.

R

Prosto do matury

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Wielomian W jest podzielny przez $x - 3$.
B. Wielomian W jest podzielny przez $x^2 - 1$.
C. Wielomian W ma trzy pierwiastki.

2. Podziel wielomian $W(x) = 9x^4 - 37x^2 + 4$ przez dwumian $3x + 1$.

3. Wyznacz wielomian $W(x)$, który przy dzieleniu przez $P(x) = -x^3 + x^2 - x - 2$ daje iloraz $Q(x) = x^2 + x - 1$ i resztę $R(x) = x - 2$.

D **4.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ jest podzielny przez każdy z dwumianów: $x - 2$, $x - 3$, $x + 1$, $x + 4$.

5. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 + (2m - 3)x + 5$ przez $P(x) = x + 2$ jest równa 3?

6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta

Umiejętności:

- stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$
- stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Schemat Hornera

Dzielenie wielomianu przez wielomian zawsze można wykonywać według algorytmu opisanego wcześniej. Ponieważ jednak dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$ ma szczególne znaczenie, podamy szybki sposób na znalezienie ilorazu i reszty w takim działaniu.

Prześledźmy na przykładzie dzielenia $\left(2x^3 + 5x^2 - 24x - 13\right) : (x - 3)$, skąd biorą się współczynniki w ilorazie.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 11x + 9 \\ \hline \left(2x^3 + 5x^2 - 24x - 13\right) : (x - 3) \\ -\left(2x^3 - 6x^2\right) \\ \hline 11x^2 - 24x - 13 \\ -\left(11x^2 - 33x\right) \\ \hline 9x - 13 \\ -(9x - 27) \\ \hline 14 \end{array}$$

Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą wynika następująca równość:

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = (x - 3) \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) + R$$

Znalezienie wyniku dzielenia polega na wyznaczeniu współczynników a, b, c oraz reszty R:

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 - 3bx + cx - 3c + R$$
$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x + R - 3c$$

Z twierdzenia o wielomianach równych otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2 = a \\ 5 = b - 3a \\ -24 = c - 3b \\ -13 = R - 3c \end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3a + 5 \\ c = 3b - 24 \\ R = 3c - 13 \end{cases} \quad (*)$$

Umieścimy teraz w tabeli współczynniki wielomianu $2x^3 + 5x^2 - 24x - 13$, miejsce zerowe dzielnika (czyli liczbę 3), współczynniki a, b, c oraz resztę R w następujący sposób:

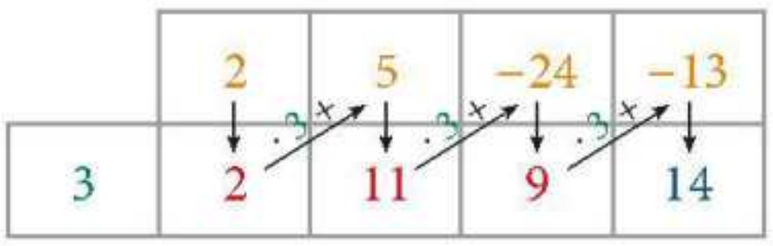
	2	5	−24	−13
3	a	b	c	R

R

Z równań tworzących układ (*) odczytujemy sposób wyznaczania liczb a, b, c i R w tabeli:

- liczba a: przepisujemy stojącą nad nią w tabeli liczbę 2,
- liczba b: mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę a przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę 5,
- liczba c: mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę b przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę -24,
- liczba R: mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę c przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę -13.

Można to przedstawić graficznie:



W ten sposób możemy znaleźć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu dowolnego stopnia przez dwumian $x - a$. Opisany sposób postępowania nosi nazwę **schematu Hornera**.

Przykład 1

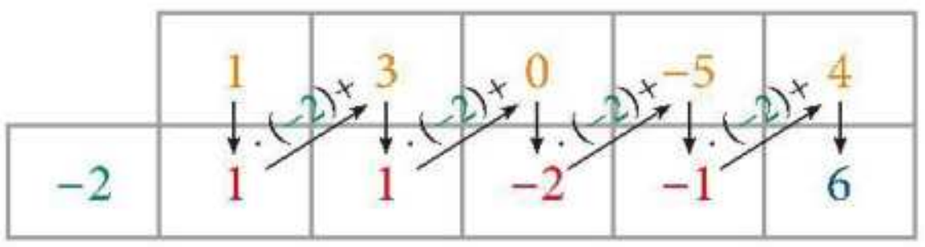
Wyznaczymy iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ przez dwumian $x + 2$. Skorzystamy ze schematu Hornera.

Rozwiązanie

Zwróćmy uwagę, że współczynnik przy x^2 jest równy 0.

$$x^4 + 3x^3 - 5x + 4 = 1 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (-5) \cdot x + 4$$

Miejscem zerowym dwumianu $x + 2$ jest liczba -2.



Wielomian otrzymany w wyniku dzielenia jest stopnia trzeciego. Jego współczynniki odczytujemy z tabeli. Ostatnia liczba jest resztą z dzielenia.

Odp.: Iloraz to $x^3 + x^2 - 2x - 1$, reszta jest równa 6.

Przykład 2

zad. 6.6

Wyznaczymy iloraz i resztę z dzielenia $\left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12\right) : (x - 4)$.

Rozwiązanie

	1	−4	−2	11	−12
4	1	0	−2	3	0

Iloraz to $x^3 + 0 \cdot x^2 - 2x + 3$, czyli $x^3 - 2x + 3$.

Reszta jest równa 0, czyli $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = (x - 4)\left(x^3 - 2x + 3\right)$.

Odp.: Ilorazem jest $x^3 - 2x + 3$, reszta jest równa 0.

Wykorzystanie twierdzenia Bézouta w rozwiązywaniu równań

Pokażemy przykłady zastosowania twierdzenia Bézouta do rozwiązywania równań.

Przykład 3 ◀ zad. 6.7

Wiadomo, że liczba -4 jest jednym z rozwiązań równania $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$. Wyznaczymy pozostałe rozwiązania tego równania.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ trudno jest rozłożyć na czynniki metodą grupowania wyrazów i wyłączania przed nawias. Wiemy jednak, że $W(-4) = 0$. Z twierdzenia Bézouta wynika, że W jest podzielny przez $x + 4$. Skorzystamy ze schematu Hornera i wykonamy to dzielenie.

	1	1	−10	8
−4	1	−3	2	0

Zatem $W(x) = (x + 4)\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

Równanie możemy więc zapisać w postaci iloczynowej.

$(x + 4)\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$ ⟵ rozwiązujemy równanie $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby: -4, 1 i 2.

Jak widać, znalezienie jednego rozwiązania równania pozwala wykonać dzielenie, a poszukiwanie pierwiastków sprowadza się do rozwiązywania równania stopnia niższego o jeden. Równanie stopnia trzeciego możemy więc łatwo rozwiązać, gdy znamy jego jeden pierwiastek, równanie stopnia czwartego, gdy znamy dwa pierwiastki itd. Problem polega na tym, jak znaleźć choćby jedno rozwiązanie równania wielomianowego.

R

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3 = 0$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, nie widać prostej możliwości zastosowania metody rozkładu na czynniki lewej strony równania. Tym razem nie mamy podanego żadnego pierwiastka naszego równania.

Gdyby pierwiastkiem była pewna liczba całkowita a, to prawdziwa byłaby równość:

$$2a^3 - 10a^2 + 13a - 3 = 0$$

Możemy ją zapisać w innej postaci:

$$2a^3 - 10a^2 + 13a = 3, \text{ czyli } a\left(2a^2 - 10a + 13\right) = 3$$

Wszystkie współczynniki wyrażenia w nawiasie są całkowite. Gdy a jest również liczbą całkowitą, to po lewej stronie znaku równości mamy iloczyn dwóch liczb całkowitych: a oraz $\left(2a^2 - 10a + 13\right)$. Oznacza to, że każda z tych liczb musi być dzielnikiem liczby 3, stojącej po drugiej stronie znaku równości. Stąd już prosty wniosek: rozwiązania równania, będące liczbami całkowitymi, mogą należeć wyłącznie do zbioru całkowitych dzielników liczby 3, czyli $\{1, -1, 3, -3\}$.

Teraz podstawiamy do równania kolejne liczby z tego zbioru i sprawdzamy, czy któraś z nich jest jego rozwiązaniem:

- gdy $x = 1$, to $2 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 13 - 3 = 2 \neq 0$, więc 1 nie jest rozwiązaniem równania,
- gdy $x = -1$, to $-2 - 10 - 13 - 3 \neq 0$,
- gdy $x = 3$, to $2 \cdot 27 - 10 \cdot 9 + 13 \cdot 3 - 3 = 0$.

Zatem liczba 3 jest pierwiastkiem równania.

Wykonujemy dzielenie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3$ przez dwumian $x - 3$.

	2	−10	13	−3
3	2	−4	1	0

Mamy więc $(x - 3)\left(2x^2 - 4x + 1\right) = 0$.

Z rozwiązania równania kwadratowego $2x^2 - 4x + 1 = 0$ otrzymujemy następne pierwiastki:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Odp.: Równanie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3 = 0$ ma pierwiastki: 3, $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ i $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Całkowite pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych

Udowodnimy twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu W, którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu.

Założenie

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
$p, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi
$W(p) = 0$

Teza

Liczba p jest dzielnikiem liczby a_0.

Dowód

Dowód twierdzenia jest powtórzeniem rozumowania z przykładu 4.
Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem równania:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

to

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Zapiszmy tę równość w innej postaci:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p = -a_0$$

czyli

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_2 p + a_1\right) = -a_0$$

Zgodnie z założeniem wszystkie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi, zatem lewa strona równości jest iloczynem dwóch liczb całkowitych:

$$p \text{ oraz } \left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_2 p + a_1\right)$$

Każda z nich jest więc dzielnikiem stojącej po prawej stronie liczby całkowitej $-a_0$.
Oznacza to, że liczba p jest dzielnikiem liczby a_0.

Koniec dowodu

Przykład 5 ◂ zad. 6.15

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$.

Rozwiązanie

Mnożymy obie strony równania przez 2, aby dostać równanie o współczynnikach całkowitych.

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x = 0$$
$$x\left(x^3 - 2x^2 - x - 6\right) = 0$$

Zatem $x = 0$ lub $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.
W drugim równaniu szukamy całkowitych pierwiastków w zbiorze $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Po sprawdzeniu, że pierwiastkiem jest 3 i wykonaniu odpowiedniego dzielenia mamy:

$$x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x - 3)\left(x^2 + x + 2\right)$$

Równanie $x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x = 0$ możemy więc zapisać w postaci:

$$x(x - 3)\left(x^2 + x + 2\right) = 0$$

czyli dane początkowo równanie ma postać $\frac{1}{2}x(x - 3)\left(x^2 + x + 2\right) = 0$.
Trójmian w ostatnim nawiasie jest nierozkładalny ($\Delta = -7$).

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Gdy współczynniki równania są liczbami wymiernymi, wystarczy pomnożyć obydwie jego strony przez NWW mianowników, aby otrzymać równoważne równanie o współczynnikach całkowitych. Jeżeli więc dane na początku równanie ma pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego nowo powstałego wielomianu.

Twierdzenie ogólniejsze, które podamy bez dowodu, pozwala na znajdowanie wymiernych pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, w którym $q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$, $p \in \mathbf{Z}$, jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to:

- p jest dzielnikiem współczynnika a_0

oraz

- q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Przykład 6 ◂ zad. 6.16

Rozwiążemy równanie $18x^3 + 9x^2 - 5x - 2 = 0$.

Rozwiązanie

Żaden z dzielników liczby 2 nie jest rozwiązaniem tego równania, czyli równanie nie ma pierwiastków całkowitych.

Jeżeli to równanie ma pierwiastek wymierny postaci $\frac{p}{q}$, to zgodnie z twierdzeniem $p \in \{-1,\ 1,\ -2,\ 2\}$, a $q \in \{-2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -6,\ 6,\ -9,\ 9,\ -18,\ 18\}$.

Pierwiastek wymierny (ale nie całkowity) może być zatem jedną z czternastu liczb należących do zbioru $\left\{\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{9},\ \pm\frac{1}{18},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{9}\right\}$.

Dla $x = -\frac{1}{2}$ mamy $-\frac{18}{8} + \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - 2 \neq 0$, czyli $-\frac{1}{2}$ nie jest pierwiastkiem równania.

Dla $x = \frac{1}{2}$ mamy $\frac{18}{8} + \frac{9}{4} - \frac{5}{2} - 2 = 0$, czyli $\frac{1}{2}$ jest jednym z pierwiastków równania.

Po podzieleniu wielomianu $18x^3 + 9x^2 - 5x - 2$ przez dwumian $x - \frac{1}{2}$ równanie możemy zapisać w postaci $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(18x^2 + 18x + 4\right) = 0$.

Pierwiastkami trójmianu kwadratowego są liczby: $-\frac{2}{3}$ oraz $-\frac{1}{3}$.

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby: $-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$.

Pierwiastki wielokrotne

Wiemy, że każdy wielomian W można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Zastanówmy się, jakie czynniki mogą występować w postaci iloczynowej wielomianu stopnia wyższego niż dwa. Rozważmy wielomiany czwartego i piątego stopnia.

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia czwartego, to może być iloczynem:

- czterech czynników liniowych, np. $W(x) = 3(x-3)(x-2)\left(x+\sqrt{7}\right)(x+1)$,
- dwóch czynników liniowych i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego, np. $W(x) = (5x-8)(x-4)\left(x^2+1\right)$,
- dwóch nierozkładalnych czynników kwadratowych, np. $W(x) = \left(5x^2+2\right)\left(x^2+1\right)$.

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia piątego, to może być iloczynem:

- pięciu czynników liniowych, np. $W(x) = 3(x-3)(x-2)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right)(x+4)$,
- trzech czynników liniowych i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego, np. $W(x) = 3(x-3)(x-2)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(5x^2-x+1\right)$,
- czynnika liniowego i dwóch nierozkładalnych czynników kwadratowych, np. $W(x) = (x+9)\left(5x^2+8\right)\left(x^2+1\right)$.

Zauważmy, że każdy wielomian może mieć **co najwyżej** tyle czynników liniowych, ile wynosi jego stopień, oraz że w rozkładzie wielomianu stopnia nieparzystego musi wystąpić przynajmniej jeden czynnik liniowy. Może się zdarzyć, że wielomian stopnia parzystego jest iloczynem wyłącznie nierozkładalnych trójmianów kwadratowych. Zatem z twierdzenia o rozkładzie wielomianu na czynniki oraz własności działań na wielomianach wynika następujący wniosek.

Wniosek

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Wniosek ten jest informacją o maksymalnej liczbie **różnych** pierwiastków, której nie należy utożsamiać z liczbą liniowych czynników w rozkładzie. Na przykład wielomian:

- $W(x) = (x-2)^5$ jest stopnia piątego, rozkłada się na pięć czynników liniowych, ale ma tylko jeden pierwiastek – jest nim liczba 2,
- $Q(x) = (x-2)^3(x+1)^4\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+6\right)$ jest stopnia dziesiątego, ma w rozkładzie osiem czynników liniowych, ale tylko trzy pierwiastki: $2, -1, \sqrt{2}$.

Zauważmy, że wielomian $Q(x) = (x-2)^3(x+1)^4\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+6\right)$ jest podzielny np. przez każdy z czynników $(x-2)$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$, ale nie można go już podzielić przez $(x-2)^4$.

Definicja

Liczbę a nazywamy **n-krotnym pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-a)^n$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{n+1}$.

Zgodnie z tą definicją dla wielomianu $Q(x) = (x-2)^3(x+1)^4\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+6\right)$ liczba:

2 jest pierwiastkiem trzykrotnym,
-1 jest pierwiastkiem czterokrotnym,
$\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem jednokrotnym.

Przykład 7 zad. 6.19

Czy można dobrać taką wartość parametru m, aby liczba -3 była dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 + 15x + 9$?

Rozwiązanie

Liczba -3 jest pierwiastkiem tego wielomianu, o ile jest prawdziwa równość $W(-3) = 0$. Zatem $-27 + 9m - 45 + 9 = 0$, czyli $m = 7$.

Teraz trzeba sprawdzić, czy wielomian $W(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ jest podzielny przez $(x+3)^2$ i nie jest podzielny przez $(x+3)^3$. Odpowiedź na drugą część pytania jest prosta – wielomian W jest stopnia trzeciego, więc byłby podzielny przez $(x+3)^3$ tylko wówczas, gdyby był sześcianem sumy $x+3$, a nie jest. Po wykonaniu dzielenia przez $(x+3)^2$ otrzymujemy $W(x) = (x+3)^2(x+1)$.

Odp.: Liczba -3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu W dla $m = 7$.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż wielomian, przez który podzielny jest wielomian $x^5 + x + 2$.

A. $x - 2$ **B.** $x - 1$ **C.** $x + 1$ **D.** $x + 2$

6.2. Wielomian $x^3 - 3x + m$ jest podzielny przez $x - 2$. Wskaż liczbę m.

A. -14 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 14

6.3. Wyraz wolny pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest równy 48. Która liczba nie może być pierwiastkiem tego wielomianu?

A. 4 **B.** 9 **C.** 48 **D.** -6

6.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Każdy wielomian stopnia piątego

A. jest podzielny przez pewien dwumian.

B. ma co najmniej jeden pierwiastek.

C. ma co najwyżej pięć pierwiastków.

6.5. Dany jest wielomian $W(x) = -5x^2\left(x^2 - 7x\right)^2\left(x^3 - 14x^2 + 49x\right)\left(x^2 - 8x + 7\right)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba 7 jest pięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu W.

B. Wielomian W ma dokładnie trzy pierwiastki.

C. Wielomian W ma jeden pierwiastek jednokrotny.

6.6. Zastosuj schemat Hornera i wykonaj dzielenie.

a) $\left(x^3 - 3x^2 + 5x - 3\right) : (x - 1)$

b) $\left(2x^3 - 7x^2 - 3x + 6\right) : (x + 1)$

c) $\left(-3x^3 + x^2 - 2x - 32\right) : (x + 2)$

d) $\left(x^3 - 23x - 10\right) : (x - 5)$

e) $\left(x^4 - 3x^2 + 15x - 9\right) : (x + 3)$

f) $\left(x^5 + 32\right) : (x + 2)$

6.7. Wiadomo, że r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ $\quad r = -2$
b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ $\quad r = 3$
c) $W(x) = 2x^3 - 11x^2 + 4x + 5$ $\quad r = 5$
d) $W(x) = 4x^3 - 27x + 27$ $\quad r = -3$

6.8. Liczby 1 i -2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

6.9. Liczby 2 i 3 są pierwiastkami równania $2x^3 + mx^2 - 13x + k = 0$. Znajdź m i k oraz oblicz trzeci pierwiastek równania.

6.10. Liczby $\frac{5-\sqrt{33}}{2}$ i $\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 11x + 2$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

6.11. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$
b) $x^3 + 9x - 10 = 0$
c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
R d) $(2x-1)(x+3)(x-2) - 2\left(x^2+6\right) = 0$
R e) $(x-4)\left(-3x^2 - x - 16\right) - 60 = 0$
R f) $\left(x^2-5\right)(x+5) - 3(x-2)\left(x^2+4\right) + 7 = 0$

6.12. Pierwiastkami równania $3(2x-7)(9x+4)(x-15) = 0$ są liczby $15, \frac{7}{2}, -\frac{4}{9}$. Skorzystaj z tego przykładu i podaj przykład równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są podane liczby.

a) $-3, -2, \frac{1}{2}, 1$ b) $-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ c) $-1, 0, \frac{2}{3}, 2$ d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 7$

6.13. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
c) $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$
d) $3x^3 - 6x^2 - 27 = 0$

6.14. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$
b) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$
c) $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$
d) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 6x + 13\frac{1}{3} = 0$

6.15. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 21x = 0$
b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 32x - 16 = 0$
c) $x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 28x - 48 = 0$
d) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 20x - 7 = 0$
e) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 11x - 5 = 0$
f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

6.16. Rozwiąż równanie.

a) $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = 0$
b) $63x^3 + 12x^2 - 17x + 2 = 0$
c) $50x^3 - 15x^2 - 9x + 2 = 0$
d) $2x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 6x + 24 = 0$

6.17. Jednym z rozwiązań podanego równania z niewiadomą x jest liczba r. Wyznacz m i rozwiąż to równanie.

a) $mx^3 - (m+1)x^2 - 9(x-2) = 0$ $\quad r = 2$
b) $x^3 + 7mx^2 - 2(5m-2)x + 8m = 0$ $\quad r = 2$
c) $(m-1)x^3 + x^2 - (m+2)x - 2m = 0$ $\quad r = -1$
d) $\frac{1}{2}mx^3 + (4+m)x^2 - (3m-1)x - 2m = 0$ $\quad r = 4$

6.18. Zbadaj krotność pierwiastka r wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ $\quad r = -1$
b) $W(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 32x + 16$ $\quad r = 2$
c) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ $\quad r = 1$
d) $W(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 14x + 15$ $\quad r = 3$

6.19. Dla jakich wartości parametru m liczba r jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$?

a) $W(x) = x^3 - mx^2 - 3mx + 27$ $\quad r = 3$
b) $W(x) = x^4 - (m+2)x^3 + 4mx^2 - 36x + 16$ $\quad r = 2$
c) $W(x) = (m-1)x^4 - 3mx^3 + (m+2)x^2 + 6x - 5$ $\quad r = 1$
d) $W(x) = (m+4)x^3 - (2-3m)x^2 + 35x + 8m - 1$ $\quad r = 5$

6.20. Dla jakich wartości a i b liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$?

6.21. Dla jakich wartości parametru m liczba $r = -2$ jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + 2mx^3 - (5m+6)x - 16$?

6.22. Znajdź takie wartości a i b, aby liczba r była dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = ax^4 + bx^3 - 2(4a+b)x^2 + (a-3b)x + 8$ $\quad r = 2$
b) $W(x) = (a+b)x^3 - (4a+b)x^2 + (7a-1)x - (4a-b)$ $\quad r = 3$

D **6.23.** Wykaż, że dla $a \neq 1$ wielomian $W(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + \left(a^2+2a\right)x - a^2$ ma pierwiastek dwukrotny.

6.24. Pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ są liczby 1 i -2, przy czym -2 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wyznacz współczynniki a, b, c tego wielomianu.

6.25. Jakie całkowite wartości może przyjąć parametr m, jeśli wiadomo, że równanie $x^3 + (m-2)x - 3 = 0$ ma pierwiastek całkowity?

6.26. Jakie całkowite wartości może przyjąć współczynnik a, jeżeli wiadomo, że wielomian $ax^4 - 3x + 1$ ma pierwiastek całkowity?

6.27. Wykaż, że wielomian $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 1$ nie ma pierwiastków wymiernych.

6.28. Pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + px^2 + 56x + q$ są dodatnie i pozostają w stosunku $1 : 2 : 4$. Znajdź te pierwiastki.

6.29. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki wielomianu $W(x) = x\left[x^2 - (m+1)x + m\right]$ są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi?

6.30. Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x) = (x+6)\left[x^2 - (m-4)x - 4m\right]$ ma trzy pierwiastki będące kolejnymi liczbami parzystymi mniejszymi od zera?

Prosto do matury

1. Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Wielomian W ma trzy różne pierwiastki całkowite.
B. Wielomian W ma co najwyżej jeden pierwiastek ujemny.
C. Suma wszystkich pierwiastków wielomianu W jest liczbą dodatnią.

2. Rozwiąż równanie $x^3 - 7x - 6 = 0$.

3. Dla jakiej wartości parametru a równania $(x-a)\left(2x^2 + 5x - 3\right) = 0$ i $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ mają ten sam zbiór rozwiązań?

4. Liczby $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ są pierwiastkami równania $x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0$.
Wyznacz pozostałe pierwiastki tego równania.

5. Dla jakich wartości parametru k pierwiastkami równania $x^3 + \left(k^2 - 7\right)x^2 - (k+4)x - 2 = 0$ są liczby 1 i -2?

7. Nierówności wielomianowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności wielomianowych

W tym rozdziale przedstawimy dwie metody rozwiązywania nierówności wielomianowych: za pomocą **siatki znaków** oraz z użyciem **przybliżonego wykresu** wielomianu. Każdą z nich możemy zastosować pod warunkiem, że rozłożymy wielomian na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Znajomość znaków poszczególnych czynników umożliwia określenie znaku iloczynu.

Siatka znaków

Prześledźmy na przykładach metodę rozwiązywania nierówności wielomianowych wyższych stopni, nazywaną siatką znaków.

Przykład 1 ◂ zad. 7.5 a–d

Rozwiążemy nierówność $(x-5)(x-1)(x+2) > 0$.

Rozwiązanie

Lewa strona nierówności jest rozłożonym na czynniki liniowe wielomianem stopnia trzeciego. Iloczyn trzech czynników jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są dodatnie albo dwa z nich są ujemne i jeden dodatni.

- $x-5=0$ dla $x=5$ $\quad x-5>0$ dla $x>5$ $\quad x-5<0$ dla $x<5$
- $x-1=0$ dla $x=1$ $\quad x-1>0$ dla $x>1$ $\quad x-1<0$ dla $x<1$
- $x+2=0$ dla $x=-2$ $\quad x+2>0$ dla $x>-2$ $\quad x+2<0$ dla $x<-2$

Znaki trzech czynników zbieramy w jednej tabeli. W dolnym wierszu wpisujemy znak iloczynu.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; \infty)$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
iloczyn	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Odp.: $(x-5)(x-1)(x+2) > 0$ dla $x \in (-2; 1) \cup (5; \infty)$

Przykład 2 ◀ zad. 7.8

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \leqslant 0$

Rozkładamy lewą stronę nierówności na czynniki.

$x^2(x-4) - 9(x-4) \leqslant 0$

$(x-4)\left(x^2-9\right) \leqslant 0$

$(x-4)(x-3)(x+3) \leqslant 0$

Miejscami zerowymi wielomianu są liczby: 4, 3 i −3.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 3)$	3	$(3; 4)$	4	$(4; \infty)$
$x-4$	−	−	−	−	−	0	+
$x-3$	−	−	−	0	+	+	+
$x+3$	−	0	+	+	+	+	+
iloczyn	−	0	+	0	−	0	+

Odp.: $(x-4)(x-3)(x+3) \leqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$

b) $x^3 + 10x^2 + 25x \geqslant 0$

$x\left(x^2 + 10x + 25\right) \geqslant 0$

$x(x+5)^2 \geqslant 0$

Miejscami zerowymi wielomianu są liczby 0 i −5.

Dla dowolnej liczby naturalnej n:

- $(x-a)^{2n} > 0$, gdy $x \neq a$
- $(x-a)^{2n+1} > 0$, gdy $x > a$
- $(x-a)^{2n+1} < 0$, gdy $x < a$

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	0	$(0; \infty)$
x	−	−	−	0	+
$(x+5)^2$	+	0	+	+	+
iloczyn	−	0	−	0	+

Odp.: $x^3 + 10x^2 + 25x \geqslant 0$ dla $x \in \langle 0; \infty) \cup \{-5\}$

c) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 > 0$

$x^2(x-3) + 4(x-3) > 0$

$(x-3)\left(x^2+4\right) > 0$

Czynnik $x^2 + 4$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Jedynym miejscem zerowym wielomianu po lewej stronie nierówności jest liczba 3. Zatem dana nierówność ma taki sam zbiór rozwiązań jak nierówność $x - 3 > 0$.

Odp.: $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 > 0$ dla $x \in (3; \infty)$

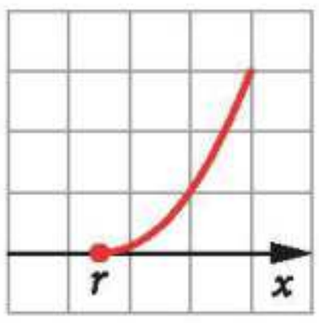
Przybliżone wykresy wielomianów

Znamy dokładne wykresy następujących wielomianów: zerowego $(W(x) = 0)$, stopnia zero $(W(x) = a_0,\ a_0 \neq 0)$, stopnia pierwszego $(W(x) = a_1x + a_0,\ a_1 \neq 0)$ i stopnia drugiego $(W(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2 \neq 0)$. Wykresem każdego z trzech pierwszych jest prosta, a ostatniego – parabola. Zastanówmy się, jakie własności mają wykresy wielomianów wyższych stopni.

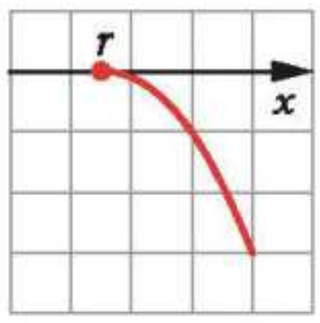
- Dziedziną każdego wielomianu jest zbiór **R**.
- Ani prosta, ani parabola nie jest nigdzie „rozerwana". Tę własność ma wykres każdego wielomianu.

Wykres dowolnego wielomianu można, obrazowo mówiąc, narysować bez odrywania ołówka od kartki.

- Wielomian stopnia n
$W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0,$
ma co najwyżej n pierwiastków. Któryś z nich jest największy – oznaczmy go r. Zatem dla argumentów większych od r wykres nie przecina już osi x. Inaczej mówiąc, dla $x > r$ albo $W(x) > 0$ (wykres jest powyżej osi x), albo $W(x) < 0$ (wykres jest poniżej osi x). Zależy to wyłącznie od znaku współczynnika stojącego przy najwyższej potędze x.



Jeżeli $a_n > 0$, to dla $x > r$ mamy $W(x) > 0$.



Jeżeli $a_n < 0$, to dla $x > r$ mamy $W(x) < 0$.

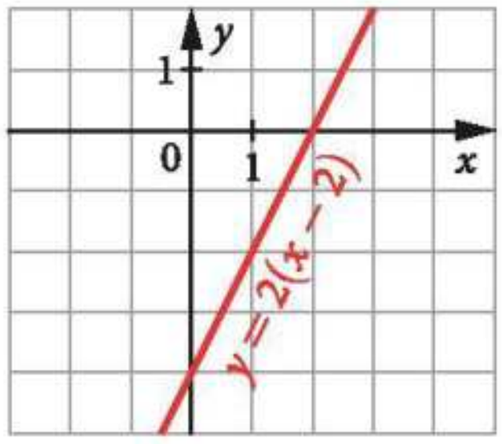
Jeżeli szkicujemy wykres wielomianu od prawej strony, to zaczynamy w:

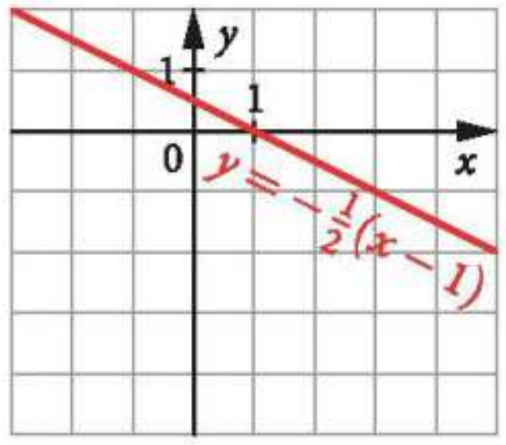
- I ćwiartce (od góry), gdy $a_n > 0$,
- IV ćwiartce (od dołu), gdy $a_n < 0$.

W naszych podręcznikach wszystkie wykresy potrzebne do rozwiązywania nierówności wyższego stopnia rysujemy od strony prawej do lewej.

- Z faktu, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków, wynika jeszcze jedna własność wykresu – ma on co najwyżej n punktów wspólnych z osią x.

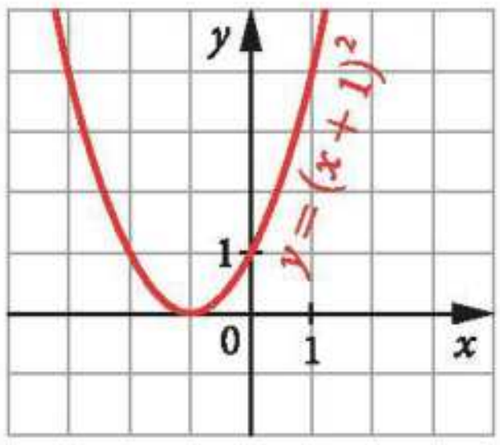
Przyjrzyjmy się, jak wygląda wykres wielomianu w pobliżu miejsca zerowego. Dla pierwiastków jednokrotnych zachodzi jedna z dwóch możliwości, np.:

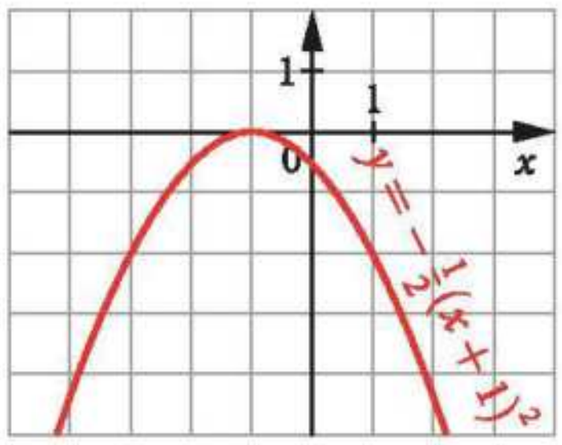




W obydwu sytuacjach wartości wielomianu mają różne znaki dla argumentów leżących odpowiednio blisko miejsca zerowego po jego dwóch stronach.

Jeżeli pierwiastek jest dwukrotny, to też mamy dwie możliwości, np.:





Tym razem wartości funkcji są tego samego znaku dla argumentów leżących po obydwu stronach miejsca zerowego – wykres odbija się od osi x.

Jeśli x_0 jest pierwiastkiem o nieparzystej krotności, to w punkcie $(x_0, 0)$ wykres wielomianu przecina oś x; jeśli x_0 jest pierwiastkiem o parzystej krotności, to w punkcie $(x_0, 0)$ wykres wielomianu odbija się od osi x.

Wiemy, że czynniki z pierwiastkami parzystej krotności nie zmieniają znaku wielomianu, więc powyższe obserwacje możemy uogólnić na wielomiany dowolnego stopnia i dowolne krotności ich pierwiastków.

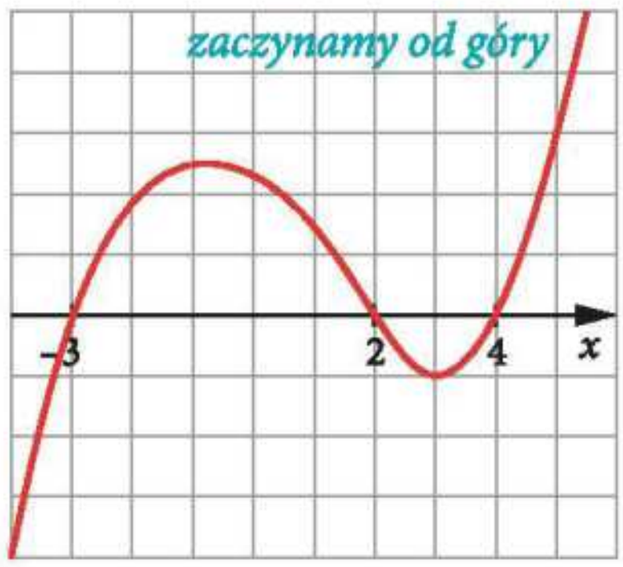
Opisane własności wykresów (przeprowadzenie ich dowodów wymaga bardziej zaawansowanej wiedzy) pozwalają na naszkicowanie przybliżonego wykresu wielomianu i to tylko wówczas, gdy wielomian jest rozłożony na czynniki. Z takiego wykresu można jednak w prosty sposób odczytać znak wielomianu dla danego argumentu.

Przykład 3

Odczytamy rozwiązanie nierówności $5(x-2)(x+3)(x-4) > 0$ z przybliżonego wykresu wielomianu $W(x) = 5(x-2)(x+3)(x-4)$.

Rozwiązanie

- Wielomian W jest trzeciego stopnia i ma trzy jednokrotne pierwiastki: -3, 2 i 4.
- Współczynnik przy x^3 jest dodatni – szkic zaczynamy z prawej strony od góry.



Odp.: $x \in (-3;\ 2) \cup (4;\ \infty)$

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest w postaci iloczynowej, to wyznaczenie współczynnika przy najwyższej potędze x sprowadza się do wymnożenia odpowiednich współczynników z kolejnych nawiasów. Na przykład w wielomianie stopnia 9

$W(x) = -2(x-3)(3x+1)(4-x)(1-2x)^4\left(\sqrt{7}x^2 - x + 4\right)$

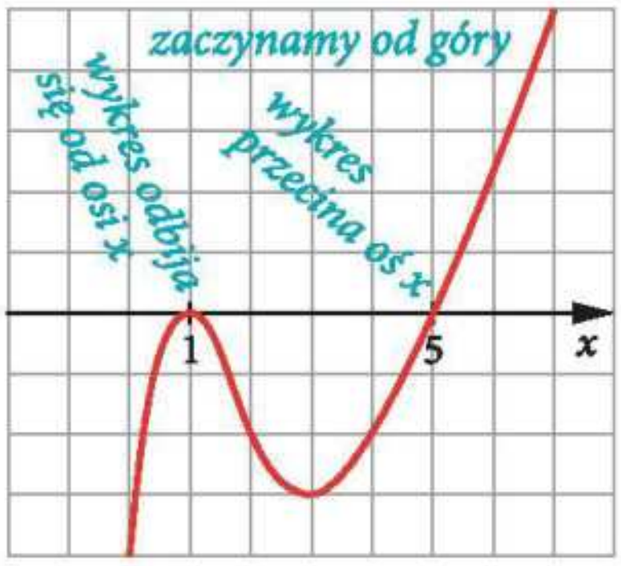
współczynnik a_9 jest równy $(-2) \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-2)^4 \cdot \sqrt{7}$. Przy rozwiązywaniu nierówności w praktyce potrzebna jest tylko informacja o znaku tej liczby.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność, korzystając z przybliżonego wykresu wielomianu.

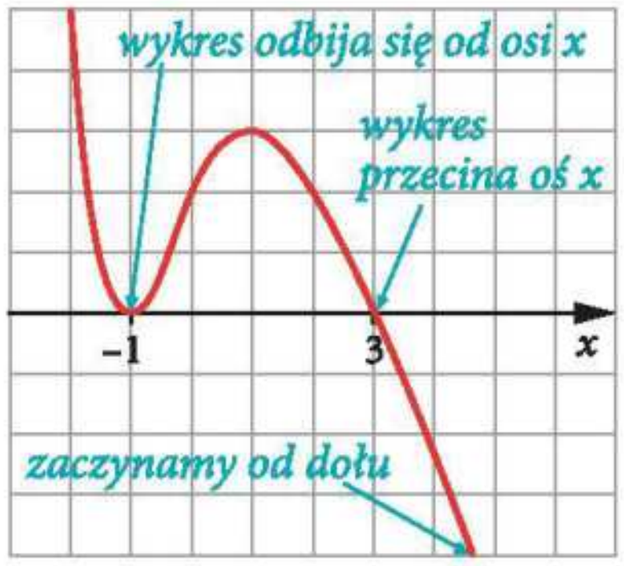
Rozwiązanie

a) $(x-1)^2(x-5) \geqslant 0$



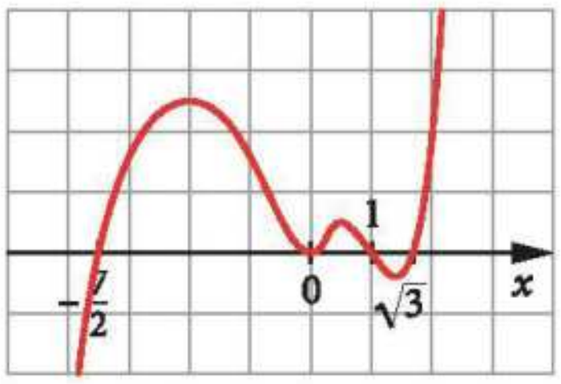
Odp.: $x \in \langle 5;\ \infty) \cup \{1\}$

b) $-2(x+1)^2(x-3) > 0$



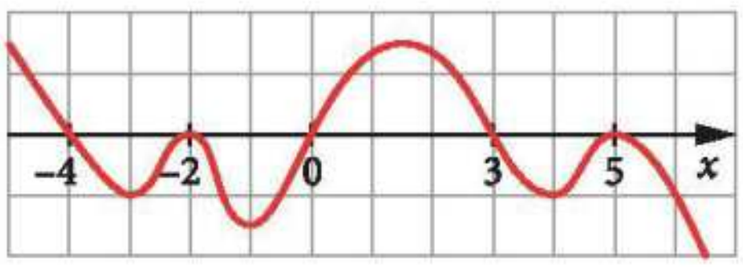
Odp.: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 3)$

c) $x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-1)^3 < 0$



Odp.: $x \in \left(-\infty;\ -\frac{7}{2}\right) \cup \left(1;\ \sqrt{3}\right)$

d) $-5x(x+4)^3(x+2)^4(x-3)(x-5)^2 \geqslant 0$



Odp.: $x \in (-\infty;\ -4\rangle \cup \langle 0;\ 3\rangle \cup \{-2,\ 5\}$

Podsumujmy: rozwiązanie nierówności wielomianowej $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \geqslant 0$, $W(x) \leqslant 0$ za pomocą przybliżonego wykresu wielomianu otrzymamy w kolejnych krokach.

Krok 1: Rozkładamy wielomian W na **czynniki**, znajdujemy wszystkie jego **pierwiastki** i zaznaczamy je na osi x.

Krok 2: Sprawdzamy **znak współczynnika** stojącego przy najwyższej potędze x – jeżeli jest dodatni, to wykres zaczynamy od góry (po prawej stronie największego pierwiastka), jeżeli ujemny, to od dołu.

Krok 3: W pierwiastkach o nieparzystej krotności **przecinamy** linią wykresu oś x, w pierwiastkach o parzystej krotności linię wykresu **odbijamy** od osi x.

Krok 4: Z tak narysowanego „wężyka" odczytujemy **znaki wartości funkcji**, czyli rozwiązanie nierówności.

Z omówionych własności wykresów wielomianów wynika, że:

- żaden wielomian **nieparzystego stopnia** nie przyjmuje w całej dziedzinie wartości największej ani najmniejszej. Zbiorem wartości takiego wielomianu jest cały zbiór liczb rzeczywistych **R**,
- każdy wielomian **parzystego stopnia** przyjmuje wartość największą albo wartość najmniejszą, przy czym jeżeli współczynnik stojący przy najwyższej potędze x jest:
  dodatni, to taki wielomian przyjmuje wartość najmniejszą,
  ujemny, to taki wielomian przyjmuje wartość największą.

Jeśli mamy rozwiązać równanie lub nierówność wielomianową wyższego stopnia, warto sprawdzić, czy nie można zastosować jakiegoś podstawienia, by obniżyć w ten sposób stopień rozpatrywanego wielomianu.

Przykład 5 ◂ zad. 7.18

Rozwiążemy nierówność $\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+6\right)-3<0$.

Rozwiązanie

Nierówność jest stopnia czwartego, ale jeśli podstawimy

$$t = x^2 - 4x + 4,$$

to sprowadzimy ją do nierówności kwadratowej.

$$t(t+2)-3<0$$

$$t^2+2t-3<0 \qquad \longleftarrow t_1=-3,\ t_2=1$$

$$t \in (-3;\ 1)$$

Wracamy do niewiadomej x i otrzymujemy do rozwiązania układ nierówności.

$$\begin{cases} x^2-4x+4<1 \\ x^2-4x+4>-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3<0 \\ x^2-4x+7>0 \end{cases} \qquad \longleftarrow \begin{cases} x_1=1,\ x_2=3 \\ \Delta<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (1;\ 3) \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

czyli ostatecznie $x \in (1;\ 3)$.

Odp.: $x \in (1;\ 3)$

Zadania

W zadaniach 7.1–7.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.1. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^4 > 1$ jest

A. $(1; \infty)$. **B.** $\mathbf{R} - \{1\}$. **C.** $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

7.2. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - \frac{1}{x}$ jest zbiór

A. $D = \mathbf{R} - \{0\}$. **B.** $D = (-1; \infty)$. **C.** $D = (-1; \infty) - \{0\}$.

7.3. Dany jest wielomian $W(x) = x^{10} + 2x^5 + 1$.

A. Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $W(x) \geqslant 0$.

B. Tylko jedna liczba całkowita spełnia nierówność $W(x) \leqslant 0$.

C. Zbiorem wartości wielomianu W jest przedział $(0; \infty)$.

7.4. Dany jest wielomian $W(x) = x(x-2)\left(x - \sqrt{5}\right)$.

A. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \leqslant 0$ ma element największy.

B. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \geqslant 0$ ma element najmniejszy.

C. Zbiór liczb wymiernych spełniających nierówność $W(x) \geqslant 0$ ma element najmniejszy.

7.5. Rozwiąż nierówność.

a) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

b) $(x+2)(x+3)(x-4) \geqslant 0$

c) $(x-4)(x-1)(x+6) < 0$

d) $(x+3)(x+4)(x-5) \leqslant 0$

e) $(x+5)(1-x)(x+1) \geqslant 0$

f) $(x+8)(x-6)x(x+4) < 0$

g) $(x-1)(x+9)(7-x)x \geqslant 0$

h) $(1-x)(2-x)(3+x)(4+x) \geqslant 0$

7.6. Rozwiąż nierówność.

a) $(x+6)(x-3)^2 > 0$

b) $(x+2)^2(x+5) < 0$

c) $(x-2)(x+1)^2 \geqslant 0$

d) $(x+4)^2(x-4) \leqslant 0$

e) $(x-3)^2x^2 \geqslant 0$

f) $(x+1)^2(x-2)^2 \leqslant 0$

g) $-3(x+3)^3(x-5)^2 < 0$

h) $-\frac{1}{2}(x+1)^2x^3(x-8)(x+7)^2 > 0$

7.7. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 > 27$

b) $x^3 \leqslant 9x$

c) $x^4 < 1$

d) $x^4 > x^2$

e) $x^4 + x^2 \leqslant 2x^3$

f) $x^3 + 6x^2 + 9x \geqslant 0$

g) $x^4 + 25x^2 < 10x^3$

h) $x^4 + 4x^2 \geqslant 4x^3$

7.8. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$
b) $x^3 - 5x^2 - x + 5 < 0$
c) $x^3 + 7x^2 + 3x + 21 \geqslant 0$
d) $x^3 - 3x^2 + x - 3 < 0$
e) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geqslant 0$
f) $x^3 - x^2 + x - 1 \geqslant 0$
g) $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \leqslant 0$
h) $-x^3 + 4x^2 - 3x + 12 \leqslant 0$

7.9. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 < 0$
b) $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 < 0$
c) $-x^3 + 7x^2 + 10x - 16 \geqslant 0$
d) $x^3 - 7x - 6 < 0$
e) $-x^3 + 28x + 48 > 0$
f) $x^3 + 8x^2 - 5x - 84 \geqslant 0$
g) $x^3 - 9x^2 - x + 9 > 0$
h) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 < 0$

7.10. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 - 5x^2 + 4x > 0$
b) $3x^3 + 9x^2 - 30x < 0$
c) $2x^3 + 6x^2 \leqslant 0$
d) $-4x^3 + 8x^2 + 12x \geqslant 0$
e) $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leqslant 0$
f) $-x^3 - x^2 + x + 1 > 0$
g) $x^3 - 1 < 0$
h) $8x^3 - 27 > 0$

7.11. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 > 0$
b) $x^3 + 2x^2 - 29x + 42 < 0$
c) $x^3 - 2x^2 - 8x \leqslant 0$
d) $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 > 0$
e) $x^3 - 12x + 16 \geqslant 0$
f) $x^3 - 3x - 2 \leqslant 0$

7.12. Rozwiąż nierówność.

a) $4x^3 + 20x^2 - 28x > 0$
b) $x^3 + x^2 \leqslant 0$
c) $2x^3 - 18x \geqslant 0$
d) $-x^3 - x^2 - 7x < 0$
e) $5x^3 - 15x^2 - 10x + 30 > 0$
f) $-3x^3 - 3x^2 + 15x + 15 \geqslant 0$

7.13. Wyznacz dziedzinę D funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$
c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$
e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^3 - 32x}}$
f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}$

7.14. Dla jakich wartości współczynników b i c zbiorem rozwiązań nierówności $(x + 3)\left(x^2 + bx + c\right) > 0$ jest podany zbiór A?

a) $A = (-3;\ 1) \cup (3;\ \infty)$
b) $A = (-3;\ 2) \cup (2;\ \infty)$
c) $A = (-3;\ \infty)$
d) $A = (-\infty;\ -5) \cup (-3;\ 7)$

7.15. Rozwiąż nierówność.

a) $\left|x^3 - 3x + 1\right| < 1$

b) $x^2\left(x^2 - 5\right)(|x| - 1) + 6|x| \leqslant 6$

c) $|x|\left(x^2 - 3\right) - 2 \leqslant 0$

d) $|x|\left(x^2 + x\right) > x + 1$

e) $\left|x^3 - x^2 - x + 1\right| < 9x + 9$

f) $\left|x^3 - 4x\right| \geqslant 3x^2$

7.16. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^3 \geqslant 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 - x \leqslant 0 \\ (x-1)(x-3)(x-5) < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(x^2 - 2x + 1\right)(x - 3) < 0 \\ (x+2)^2\left(x^2 - 14x + 49\right) \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4x > 0 \\ (2x-1)(x-5) \leqslant 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \leqslant 0 \\ x^3 - 9x > 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3 - 13x + 12 < 0 \\ |2x - 1| > 3 \end{cases}$

7.17. Ułóż nierówność wielomianową, której zbiorem rozwiązań jest zbiór A.

a) $A = (2;\ 3) \cup (4;\ \infty)$

b) $A = (-\infty;\ -3) \cup (-2;\ 0) \cup (1;\ \infty)$

c) $A = (-\infty;\ -3\rangle \cup \langle 2;\ \infty) \cup \{-1\}$

d) $A = (-3;\ -2) \cup (-2;\ 1) \cup (1;\ 2)$

7.18. Rozwiąż nierówność.

a) $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 4\right) \leqslant 24$

b) $\left(x^2 + 2x - 8\right)\left(x^2 + 2x\right) > 105$

c) $6\left(x^2 + 2x + 2\right)^2 - \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 3\right) < 6\left(x^2 + 2x + 3\right)$

7.19. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x - 5)^3(3x + k) < 0$ nie ma rozwiązań?

D **7.20.** Wykaż, że nierówności $x^3 + x^2 - x - 10 > 0$ i $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 < 0$ mają te same zbiory rozwiązań.

D **7.21.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^6 - x^5 + x^4 + 3x^2 - 3x + 3$ przyjmuje wartości dodatnie dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

D ✱ **7.22.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

7.23. Dla jakich wartości parametru m dla każdej liczby rzeczywistej z przedziału $\langle 1; 3\rangle$ prawdziwa jest nierówność $x(x-m)(x+2m) < 0$?

D **7.24.** Wykaż, że każdy z wielomianów postaci $x^{2n} + x - 27$ $(n \in \mathbf{N},\ n \neq 0)$ ma co najmniej dwa miejsca zerowe.

Prosto do matury

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 21$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \leqslant 0$ ma element największy.

B. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \geqslant 0$ ma element najmniejszy.

C. $W(-4) \cdot W(4) < 0$

2. Rozwiąż nierówność $(2-x)(3x+7)\left(x-\sqrt{2}\right) \leqslant 0$.

3. Rozwiąż nierówność $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 > 0$.

4. Ułóż nierówność wielomianową, której zbiorem rozwiązań jest $A = (-2; 1) \cup (1; 3)$.

D **5.** Wykaż, że nierówność $2x^4 - 4x^2 + 3 > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x.

8. Wyrażenia wymierne

Umiejętności:
- wykonywanie działań na wielomianach wielu zmiennych
- wyznaczanie dziedziny wyrażenia wymiernego z jedną zmienną
- rozszerzanie i skracanie wyrażenia wymiernego
- sprowadzanie wyrażeń wymiernych do wspólnego mianownika

Wielomiany wielu zmiennych

Do tej pory zajmowaliśmy się przede wszystkim jednomianami i wielomianami jednej zmiennej. W szczególności określony został stopień takiego jednomianu oraz wielomianu. Definicję tę można rozszerzyć. Zaczniemy od określenia stopnia jednomianu dwóch zmiennych.

Definicja

Jeżeli jednomian zmiennych x, z jest postaci $ax^n z^m$ i $a \neq 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą, zwaną współczynnikiem jednomianu, a wykładniki n oraz m są ustalonymi liczbami naturalnymi, to **stopniem jednomianu** jest liczba $n+m$.

Podobnie definiujemy stopień jednomianu trzech i więcej zmiennych. Na przykład jednomian $-2\sqrt{3}z^3y^4$ jest stopnia siódmego $(3+4=7)$, a jednomian $-t^2xz$ jest stopnia czwartego.

Aby obliczyć wartość jednomianu dla danych wartości zmiennych, podstawiamy je do wyrażenia w miejsce odpowiednich liter. Na przykład jednomian $-3x^2y$ dla $x=-1$ i $y=2$ przyjmuje wartość $-3\cdot(-1)^2\cdot 2=-6$.

Jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami nazywamy **podobnymi**.

Definicja

Stopniem wielomianu (sumy algebraicznej) nazywamy największy ze stopni jednomianów będących jego składnikami po redukcji wyrazów podobnych.

Przykład 1 ◀ zad. 8.7

Wielomian $-2x^3y^2+x^2y^3-3x+y^4+3$ zmiennych x, y jest sumą pięciu jednomianów, z których pierwsze dwa są stopnia piątego, trzeci – stopnia pierwszego, czwarty – stopnia czwartego, a piąty – stopnia zerowego. Zatem wielomian ten jest stopnia piątego.

Przykład 2 ◀ zad. 8.10

Wykonamy wskazane działania i zredukujemy wyrazy podobne.

a) $(w-t)(w+t)-\left(w^2-3\right)=w^2-t^2-w^2+3=3-t^2$

b) $xy^2-2x^2y-2xy+3-y(xy-4x-1)=xy^2-2x^2y-2xy+3-xy^2+4xy+y=$
$=-2x^2y+2xy+y+3$

Przykład 3 ◀ zad. 8.12

Rozłożymy na czynniki podany wielomian.

R a) $3x^2+xy-6x-2y=\left(3x^2-6x\right)+(xy-2y)=3x(x-2)+y(x-2)=(x-2)(3x+y)$

b) $9x^2z^6-4y^4=\left(3xz^3-2y^2\right)\left(3xz^3+2y^2\right)$

Wyrażenia wymierne

Wśród wyrażeń algebraicznych istotną rolę odgrywają wyrażenia postaci $\frac{W}{Q}$, gdzie W oraz Q są wielomianami i Q nie jest wielomianem zerowym. Nazywamy je **wyrażeniami wymiernymi**. Swoją budową przypominają liczby wymierne. Każdy wielomian jest również wyrażeniem wymiernym.

Za pomocą wyrażeń wymiernych zapisujemy różne wzory i zależności w opisie zjawisk fizycznych lub chemicznych.

Przykład 4 ◀ zad. 8.14

Martyna miała w baku samochodu m litrów benzyny. Siedem dni jeździła tą samą trasą długości a km, spalając średnio p litrów benzyny na kilometr. Jaka część początkowego zapasu benzyny została w baku po upływie tego tygodnia?

Rozwiązanie

ap ⟵ dzienne zużycie benzyny

$7ap$ ⟵ tygodniowe zużycie benzyny

$m-7ap$ ⟵ tyle litrów benzyny zostało w baku po tygodniu

$\frac{m-7ap}{m}$ ⟵ taka część początkowego zapasu benzyny pozostała w baku po tygodniu

Odp.: $\frac{m-7ap}{m}$

Napisanie założeń do danego wyrażenia wymiernego jest tym samym, co określenie jego **dziedziny**. Dla wyrażenia wymiernego jednej zmiennej jest nią podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla wyrażenia wymiernego dwóch zmiennych – zbiór par liczb, dla wyrażenia wymiernego trzech zmiennych – zbiór trójek liczb itd.

Przykład 5

Napiszemy założenia dla podanego wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{x+8}{4-x^2}$

Założenie: $4-x^2 \neq 0$, czyli $x \neq -2$ i $x \neq 2$
Dziedziną tego wyrażenia wymiernego jest zbiór $\mathbf{R}-\{-2, 2\}$.

b) $\frac{2x+y}{y-x}$

Założenie: $y-x \neq 0$, czyli $y \neq x$
Dziedziną tego wyrażenia wymiernego jest zbiór par różnych liczb rzeczywistych.

Dwa wyrażenia wymierne **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny i dla dowolnych argumentów wartości tych wyrażeń są równe. Na przykład wyrażenia $\frac{x^2}{x}$ oraz x nie są równe. Dziedziną pierwszego jest zbiór $\mathbf{R}-\{0\}$, a drugiego zbiór $\mathbf{R}$. Natomiast wyrażenia $\frac{x}{x^2}$ i $\frac{1}{x}$ są równe – każde z nich ma dziedzinę $\mathbf{R}-\{0\}$ i dla wszystkich $x \neq 0$ zachodzi równość $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Działania na wyrażeniach wymiernych są podobne do działań na ułamkach. Zanim zajmiemy się dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem takich wyrażeń, powtórzymy, jak się je skraca, rozszerza i sprowadza do wspólnego mianownika.

Skracanie wyrażenia wymiernego polega na podzieleniu licznika i mianownika przez to samo, różne od zera, wyrażenie. Aby wyrażenie po skróceniu było równe danemu wyrażeniu, najpierw określamy jego dziedzinę.

Przyjmujemy to jako zasadę – wszystkie założenia dotyczące danego wyrażenia wymiernego robimy, zanim zaczniemy wykonywać na nim jakiekolwiek działania.

Przykład 6 ◀ zad. 8.20

Skrócimy podane wyrażenie.

Rozwiązanie

a) $\frac{2ab^2}{4a^2} = \frac{b^2}{2a}$, $a \neq 0$

b) $\frac{xy^4z^2}{x^4y^2z^2} = \frac{y^2}{x^3}$, $xyz \neq 0$

c) $\frac{x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{x(x+2)}{x(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$, $x \neq 0$ i $x \neq 3$

d) $\dfrac{x^3-p^3}{x^2-p^2}=\dfrac{(x-p)\left(x^2+xp+p^2\right)}{(x-p)(x+p)}=\dfrac{x^2+xp+p^2}{x+p}$, $x\neq p$ i $x\neq -p$

e) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)}=\dfrac{x-3}{x+5}$, $x\neq -2$ i $x\neq -5$

f) $\dfrac{x^3+8}{2x^2+x-6}=\dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{x^2-2x+4}{2x-3}$, $x\neq -2$ i $x\neq \dfrac{3}{2}$

Zauważmy, że jeśli w liczniku i mianowniku wyrażenia występują sumy algebraiczne (przykłady c–f), to skrócenie takiego wyrażenia jest możliwe dopiero po przedstawieniu każdej z tych sum w postaci iloczynowej.

Aby dodać (odjąć) dwa wyrażenia wymierne, trzeba najpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika. To zadanie często wymaga **rozszerzenia** ułamka, czyli pomnożenia licznika i mianownika przez to samo, różne od zera, wyrażenie.

Przykład 7

zad. 8.21

Dane jest wyrażenie wymierne $\dfrac{x+2}{x-3}$ o dziedzinie $\mathbf{R}-\{3\}$. Rozszerzenie tego wyrażenia przez wielomian P może oznaczać zmianę dziedziny wyrażenia – poprzez dodatkowe wykluczenie wszystkich miejsc zerowych P.

Poniżej przedstawiamy trzy różne rozszerzenia wyrażenia $\dfrac{x+2}{x-3}$.

- $\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{x(x+2)}{x(x-3)}$ dla $x\in\mathbf{R}-\{0,3\}$
- $\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$ dla $x\in\mathbf{R}-\{1,3\}$
- $\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{\left(x^2+5\right)(x+2)}{\left(x^2+5\right)(x-3)}$ dla $x\in\mathbf{R}-\{3\}$

Sprowadzanie wyrażeń wymiernych do wspólnego mianownika

Wyrażenia wymierne sprowadzamy do wspólnego mianownika na tej samej zasadzie co ułamki. Wyjaśnimy to na przykładach.

Przykład 8

zad. 8.22

Sprowadzimy do wspólnego mianownika podane wyrażenia.

a) $\dfrac{x+1}{x+2}$ i $\dfrac{2x}{x-2}$

b) $\dfrac{2}{x-3}$ i $\dfrac{x+1}{2x^2-18}$

Rozwiązanie

a) Pierwszy ułamek wymaga założenia, że $x \neq -2$, a drugi, że $x \neq 2$.
Wielomiany w mianownikach nie mają wspólnych czynników. Nie można ich też rozłożyć. Wspólnym mianownikiem może być w tym przypadku iloczyn $(x+2)(x-2)$. Znając wspólny mianownik, rozszerzamy ułamki:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)} \quad \text{przy założeniu, że } x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+4x}{(x-2)(x+2)} \quad \text{przy założeniu, że } x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

Zazwyczaj wygodnie jest zostawić wspólny mianownik w postaci iloczynu. Jest to przydatne zwłaszcza przy dalszych przekształceniach wyrażeń.

b) Mianownika pierwszego wyrażenia nie można zapisać prościej, zakładamy tylko, że $x \neq 3$. Natomiast wielomian z mianownika drugiego wyrażenia można rozłożyć:

$$2x^2 - 18 = 2\left(x^2 - 9\right) = 2(x-3)(x+3)$$

Okazuje się, że pierwszy mianownik jest dzielnikiem drugiego mianownika, podobnie jak np. w ułamkach $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{28}$. Wspólnym mianownikiem może więc być $2(x-3)(x+3)$, przy założeniu, że $x \neq 3$ i $x \neq -3$.

Wyrażenie $\frac{x+1}{2x^2-18}$ nie zmieni się, natomiast pierwsze będzie równe:

$$\frac{2 \cdot 2(x+3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{4x+12}{2(x-3)(x+3)}$$

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Wskaż stopień wielomianu $z^9 - \left(\sqrt{3}\right)^3 z^8 w + w^9 z$ zmiennych w i z.

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

8.2. W wielomianie $8xyz - 2x^2yz + 11x^2yz - 4xyz + 5xyz^2 - 9x^2yz$ przeprowadzono redukcję wyrazów podobnych. Wskaż wynik tego działania.

A. $x^2yz + 5xyz^2$

B. $4xyz$

C. $4xyz - x^2yz + 5xyz^2$

D. $4xyz + 5xyz^2$

8.3. Ułamek $\frac{2x}{x+1}$ rozszerzono tak, że jego mianownikiem jest teraz wyrażenie x^3+1. Wskaż licznik otrzymanego ułamka.

A. $2x^3+2x^2+2$ **B.** $2x^2+x$ **C.** $2x^3-2x^2+2x$ **D.** $2x^2+2x$

8.4. Dany jest wielomian $x^2y^4-2xy-\sqrt{3}x^2y$ zmiennych x i y.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień tego wielomianu jest równy 8.

B. Stopień tego wielomianu jest równy 6.

C. Wartość tego wielomianu dla $x=\sqrt{2}$ i $y=-\sqrt{3}$ jest równa $2\left(12+\sqrt{6}\right)$.

8.5. Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{x^3+8}{2x^2+x-6}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną tego wyrażenia jest zbiór **R**.

B. Wartość tego wyrażenia jest równa 0 dla $x=-2$.

C. Wyrażenia $\frac{x^3+8}{2x^2+x-6}$ oraz $\frac{x^2-2x+4}{2x-3}$ są równe.

8.6. Określ stopień podanego jednomianu.

a) $4xyz$ b) $x^2y^3v^4$ c) $\sqrt{3}y^2xt$ d) $-6xyt^4z$

8.7. Określ stopień podanego wielomianu.

a) $a^2bc-2ab+3bc^2$

b) $7x^2y-5x^4y^2+10y^9-3$

c) $-4x^3t-6tv+\sqrt{7}x^6x^4-11xvst$

d) $x^3zy+x^2z^2y+xz^2y^2+xz^3y+xzy^3+x^2zy^2$

8.8. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $2xy^3-3x^2y+5xy-xy^3+2x^2y-4x+1$

b) $xy^2-2x^2y+5xy^2+7x^2y-3xy^2-4x^2y-2xy^2-x^2y-xy^2$

c) $abc+a^2b-2bc+3abc+5-a^2b+3bc-2abc-bc-2$

d) $-1\frac{1}{3}x^2y^2z^2+2\frac{1}{2}x^2yz^2-\frac{2}{3}x^2y^2z^2-1\frac{1}{2}x^2yz^2+2x^2y^2z^2$

e) $-3x^2y+2xy^2-5xy+x^2y-2xy^2+2xy+3x^2y+2xy$

f) $2\sqrt{2}xy^2tz-3x^2ytz^2-\sqrt{2}xy^2tz+3xy-\sqrt{2}xy^2tz+x^2ytz^2$

8.9. Oblicz wartość wielomianu dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2y-3xy+1$ $x=-2,\ y=3$

b) $2xyz^4-3z^2+xy-9$ $x=1,\ y=-2,\ z=\sqrt{2}$

c) $-4x^3+2y^2-4xy+x$ $x=-1,\ y=-2$

d) $10-ab+\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}b^2$ $a=4,\ b=-2$

8.10. Wykonaj działania, a następnie przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x-y)(x+y)-\left(x^2-xy-y^2\right)$

b) $(x+2y)^2-(x-y)^2-2xy$

c) $(x-xy+3)(2xy+y+1)$

d) $(xy+1)^3-x\left(3y^2+x\right)+(x-y)(x+y)$

e) $2xy+3x^2-2\left(x^2+7xy-y^2\right)+10xy-2y^2$

f) $3x^2+2y^2-\left(2x^2y-2xy-4xy^2\right)-\left(2xy+7x^2y\right)+9x^2y-2y^2$

g) $7\left(xy-y^2\right)+2\left(xy-x^2\right)+5xy+3\left(x^2-5xy\right)+7y^2$

h) $2x^2-y^2-3\left(2xy-x^2-y^2\right)+2\left(x^2y-x^2\right)-\left(y^2+2x^2y\right)+6xy$

i) $(2x-y)(2x+y)-3\left(xy-y^2+x^2\right)-2y^2$

j) $(x-y)^2-3(x+y)(x-y)+2\left(x^2+xy\right)$

k) $(x-y+2)(x+y-1)-2x(x+y)-y(y-x)+x^2+2y^2$

l) $2\left(x-x^2y\right)-(x-y-2)^2-4(x-y)+2\left(x^2y-xy\right)+y^2$

8.11. Wykonaj działania, przeprowadź redukcję wyrazów podobnych, a następnie oblicz wartość wielomianu dla podanych wartości zmiennych.

a) $(x+3y)(x-3y)+(x+2y)^2-\left(2x^2-5y^2\right)$ $\quad x=\sqrt{8}$ i $y=\sqrt{2}$

b) $(x+2y)(x-2y)-4x(x-y)+(x-2y)^2+4xy$ $\quad x=0{,}5$ i $y=-0{,}5$

c) $3x\left[5xy^2(x-1)+2y\left(3x^2y-2xy\right)-3xy^2(4x-3)\right]+2x^3y^2$ $\quad x=-1$ i $y=3$

8.12. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $2x^2+4xy+2y^2$

b) $4x-4y-6x^2+6y^2$

c) $(x+y)\left(x^2+y^2\right)-(x-y)\left(2x^2+2y^2\right)$

d) $16-x^2-6xy-9y^2$

e) $25x^2-10xy+y^2-4x^2y^2$

f) $x^2-8xy+15y^2$

g) $y^2+10xy+16x^2$

h) $3x^2+4xy+y^2$

D **8.13.** Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2+4xy+y^2+1>0$.

8.14. Katarzyna Kangur dostała 1 marca pensję w wysokości k złotych. Po pierwszym tygodniu tego miesiąca zostało jej s złotych. Jaką część pensji wydała przez pierwszy tydzień marca?

8.15. Rysiek przeznaczył na pomalowanie płotu a dni. Z zaplanowaną wydajnością malował b dni. Jaką część pracy ma jeszcze do wykonania?

8.16. Zenobia Żubr przeznaczyła teren o powierzchni a hektarów na uprawę choinek. Z zakupionych m sadzonek zostało jej jeszcze t drzewek. Do terenu uprawy dołączyła więc b ha, ale wówczas zabrakło jej sadzonek. Ile sadzonek powinna dokupić?

8.17. Ośmioro sąsiadów postanowiło kupić wspólną kosiarkę do trawy za k złotych. Dwóch z nich wycofało się z umowy. O ile złotych wzrosła składka każdego z pozostałych sąsiadów?

8.18. Pewna drużyna piłki nożnej wygrała x meczów i przegrała y meczów. Jaką częścią liczby rozegranych meczów są mecze wygrane?

8.19. Hilary Pajączek handluje drożdżówkami, które kupuje w piekarni. Jednego dnia sprzedał n sztuk po k złotych i zarobił na tym r złotych. Jaka była cena jednej drożdżówki w piekarni?

8.20. Skróć wyrażenie wymierne, jeżeli to możliwe. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{1-a}{a-1}, \frac{3a-6b}{a^2-2ab}, \frac{2a^2-3ab}{2ab-3b^2}, \frac{4x^2-9y^2}{2x^3+3x^2y}$

b) $\frac{2x-1}{2-4x}, \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x}, \frac{x^2-2x-8}{2x^2+3x-2}$

c) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12x+12}, \frac{3x^4-17x^3+10x^2}{6x^2-34x+20}, \frac{x^3+27}{2x^2-6x+18}$

d) $\frac{x^5-x^3-27x^2+27}{x^4-3x^3-x^2+3x}, \frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3+8}$

8.21. Zastąp ? odpowiednim wyrażeniem, aby rozszerzyć wyrażenie wymierne. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{5x^2-5x}$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{5x^2-5}$

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{x^3-1}$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{2x^2-4x+2}$

8.22. Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika. Podaj założenia.

a) $\frac{x+2}{2x-4}, \frac{x+1}{3x-6}$

b) $\frac{x-1}{2x^2-12x+18}, \frac{5}{x-3}$

c) $\frac{x^2-1}{5x^2+10x+5}, \frac{x-3}{2x^2-x-3}$

d) $\frac{1}{x^2-1}, \frac{2}{x^2-x}, \frac{3}{x^3+x^2}$

e) $\frac{2}{3x^2-12}, \frac{5}{2x^2+8x+8}$

f) $\frac{x}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^3+1}$

8.23. Wyznacz takie wartości parametrów a i b, aby wyrażenia $\frac{x^2-7}{x^2-x-12}$ oraz $\frac{x^2-7}{(x-a)(x-b)}$ były równe.

8.24. Wyznacz takie wartości parametrów a, b i c, aby wyrażenia $\frac{11}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ oraz $\frac{11}{x^3-6x^2+11x-6}$ były równe.

* **8.25.** Ile jest par liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie $yx-2y-x=4$?

* **8.26.** Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) spełniające równanie $xy+5x-3y=53$.

8.27. Wyznacz takie dodatnie liczby naturalne x i y, dla których wartość wielomianu $x^2+2xy+y^2+2x+2y$ jest równa 24.

D * **8.28.** Wykaż, że jedyną parą dodatnich liczb naturalnych x i y, dla których wartość wielomianu $4x^2+4xy+y^2-4x-2y+1$ wynosi 9, jest para $(1, 2)$.

* **8.29.** Znajdź takie dodatnie liczby naturalne x i y, dla których wartość wielomianu $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ jest równa 512.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wartość wyrażenia $(2x-y)(2x+y)-3(x-y)^2-2x(3y+x)$ dla $x=\sqrt{3}$ i $y=\sqrt{2}$

A. jest liczbą całkowitą. **B.** jest równa 11. **C.** jest liczbą ujemną.

2. Skróć wyrażenie wymierne $\frac{6x^2+5x-6}{4x^2-9}$. Podaj odpowiednie założenia.

3. W klasie Joli m dziewcząt waży w sumie s kg, a średnia waga c chłopców jest równa p kg. Jaka jest średnia waga ucznia tej klasy?

4. Wyznacz takie wartości parametrów a i b, aby wyrażenia $\frac{a}{x-1}$ oraz $\frac{x+b}{x^2-2x+1}$ były równe.

D **5.** Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2+2xy+2y^2+4y+4 \geqslant 0$.

9. Działania na wyrażeniach wymiernych

Umiejętności:

- dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Zasady wykonywania tych działań są takie same jak przy dodawaniu i odejmowaniu liczb wymiernych zapisanych w postaci ułamków. Jeżeli dwa wyrażenia wymierne mają identyczne mianowniki, to – aby je dodać – dodajemy wyrażenia w ich licznikach (mianownik pozostaje bez zmian):

$$\frac{W}{Q}+\frac{P}{Q}=\frac{W+P}{Q}, \text{ przy założeniu, że } Q\neq 0$$

Aby natomiast od pierwszego wyrażenia wymiernego odjąć drugie o identycznym mianowniku, należy od wyrażenia w pierwszym liczniku odjąć wyrażenie w drugim liczniku (mianownik pozostaje bez zmian):

$$\frac{W}{Q}-\frac{P}{Q}=\frac{W-P}{Q}, \text{ przy założeniu, że } Q\neq 0$$

Prześledźmy na przykładach dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych.

Przykład 1 ◂ zad. 9.5

Wykonamy dodawanie $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x\neq -1$ i $x\neq 2$.

Przekształcamy składniki sumy tak, aby były wyrażeniami o identycznych mianownikach. Wspólnym mianownikiem jest iloczyn $(x+1)(x-2)$.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

Odp.: $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$, $x\neq -1$ i $x\neq 2$

Przykład 2 ◂ zad. 9.6

Wykonamy odejmowanie $\frac{x+1}{2x-3}-\frac{x-2}{3-2x}$.

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}$$

Rozwiązanie

Mianowniki różnią się tylko znakiem: $3 - 2x = -(2x - 3)$.

Zatem:

$$\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x-2}{3-2x} = \frac{x+1}{2x-3} + \frac{x-2}{2x-3} = \frac{2x-1}{2x-3}, \text{ przy założeniu, że } x \neq \frac{3}{2}$$

Odp.: $\frac{2x-1}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$

Przykład 3 ◀ zad. 9.7

Wykonamy odejmowanie $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{x}{(x+2)^2}$$

Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 2$.

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} - \frac{x(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} = \quad \longleftarrow \text{sprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika}$$

$$= \frac{\left(x^2+2x+x+2\right) - \left(x^2-2x\right)}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x^2+3x+2-x^2+2x}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{5x+2}{(x+2)^2(x-2)}$$

Odp.: $\frac{5x+2}{(x+2)^2(x-2)}$, $x \neq -2$ i $x \neq 2$

Przykład 4 ◀ zad. 9.8

Wykonamy działania $\frac{x+3}{2x-4} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x^2-2x}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+3}{2x-4} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x^2-2x} = \frac{x+3}{2(x-2)} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x(x-2)}$$

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

$$\frac{x+3}{2(x-2)} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x(x-2)} = \quad \longleftarrow \text{jako wspólny mianownik przyjmujemy } 4x(x-2)$$

$$= \frac{(x+3)\cdot 2x}{4x(x-2)} + \frac{(x+2)(x-2)}{4x(x-2)} - \frac{\left(x^2-1\right)\cdot 4}{4x(x-2)} = \frac{\left(2x^2+6x\right)+\left(x^2-4\right)-\left(4x^2-4\right)}{4x(x-2)} =$$

$$= \frac{-x^2+6x}{4x(x-2)} = \quad \longleftarrow \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias w liczniku i skracamy ułamek}$$

$$= \frac{x(-x+6)}{4x(x-2)} = \frac{-x+6}{4(x-2)}$$

Odp.: $\frac{-x+6}{4(x-2)}$, $x \neq 0$ i $x \neq 2$

Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Mnożenie ułamków jest na ogół prostsze niż ich dodawanie. Wystarczy pomnożyć licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik. Dzielenie ułamka $\frac{a}{b}$ przez ułamek $\frac{c}{d}$ zastępujemy mnożeniem $\frac{a}{b}$ przez odwrotność dzielnika, czyli przez ułamek $\frac{d}{c}$. Wyniki tych operacji można ewentualnie jeszcze skrócić. W wypadku wyrażeń wymiernych jest podobnie, musimy tylko pamiętać o zrobieniu odpowiednich założeń.

$$\frac{W}{Q}\cdot\frac{T}{P}=\frac{W\cdot T}{Q\cdot P},\ \text{przy założeniu, że}\ Q\neq 0\ \text{i}\ P\neq 0$$

$$\frac{W}{Q}:\frac{T}{P}=\frac{W}{Q}\cdot\frac{P}{T}=\frac{W\cdot P}{Q\cdot T},\ \text{przy założeniu, że}\ Q\neq 0,\ P\neq 0\ \text{i}\ T\neq 0$$

Przykład 5 ◀ zad. 9.11

Wykonamy mnożenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}=$$ ⟵ poszczególne wielomiany rozkładamy, jeśli to możliwe, na czynniki

$$=\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x+2}=$$ ⟵ zapisujemy założenia: $x\neq -1,\ x\neq 1,\ x\neq -2$

$$=\frac{x}{x+1}$$

Odp.: $\frac{x}{x+1}$, $x\neq -1,\ x\neq 1,\ x\neq -2$

Przykład 6 ◀ zad. 9.12

Wykonamy dzielenie $\frac{5x-3}{x^2+5x+6}:\frac{3-5x}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie

$$\frac{5x-3}{x^2+5x+6}:\frac{3-5x}{x^2+4x+4}=$$ ⟵ rozkładamy trójmiany kwadratowe na czynniki

$$=\frac{5x-3}{(x+2)(x+3)}:\frac{3-5x}{(x+2)^2}=$$ ⟵ zapisujemy założenia: $x\neq -3,\ x\neq -2,\ x\neq \frac{3}{5}$

$$=\frac{5x-3}{(x+2)(x+3)}\cdot\frac{(x+2)^2}{3-5x}=$$ ⟵ mnożymy przez odwrotność

$$=\frac{-(3-5x)(x+2)}{(x+3)(3-5x)}=-\frac{x+2}{x+3}$$ ⟵ skracamy ułamek

Odp.: $\frac{-x+2}{x+3}$, $x\neq -3,\ x\neq -2,\ x\neq \frac{3}{5}$

Przykład 7 ◀ zad. 9.13

Wykonamy działania $\frac{x^2-12x+36}{4x^2-16}\cdot\frac{6x-18}{2x^2-12x}:\frac{x-3}{x^2+2x}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x^2-12x+36}{4x^2-16}\cdot\frac{6x-18}{2x^2-12x}:\frac{x-3}{x^2+2x}=$$

$$=\frac{(x-6)^2}{4(x+2)(x-2)}\cdot\frac{6(x-3)}{2x(x-6)}\cdot\frac{x(x+2)}{x-3}=$$ ⟵ założenie: $x\in\mathbf{R}-\{-2, 0, 2, 3, 6\}$

$$=\frac{3(x-6)}{4(x-2)}$$

Odp.: $\frac{3(x-6)}{4(x-2)}$, $x\in\mathbf{R}-\{-2, 0, 2, 3, 6\}$

Przykład 8 ◀ zad. 9.14

Wykonamy działania $\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}\right):\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-1\right)$.

Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}\right):\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-1\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x-1)}\right):\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-1\right)=$$ ⟵ wykonujemy działania w nawiasach przy założeniu, że $x\in\mathbf{R}-\{-1, 0, 1\}$

$$=\frac{x-1+x+1}{x(x+1)(x-1)}:\frac{x^2+x+1}{x^2}\left(x^3-1\right)=$$

$$=\frac{2x}{x(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x^2}{x^2+x+1}\cdot(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\frac{2x^2}{x+1}$$

Odp.: $\frac{2x^2}{x+1}$, $x\in\mathbf{R}-\{-1, 0, 1\}$

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wskaż wynik działania i odpowiednie założenia dla wyrażenia $\frac{x}{x+2}-\frac{x+2}{x+9}$.

A. $\frac{5x-4}{(x+2)(x+9)}$, $x\neq 9$, $x\neq 2$

B. $\frac{2x^2+13x+4}{(x+2)(x+9)}$, $x\neq -9$, $x\neq -2$

C. $\frac{13x+4}{(x+2)(x+9)}$, $x\neq -9$, $x\neq -2$

D. $\frac{5x-4}{(x+2)(x+9)}$, $x\neq -9$, $x\neq -2$

9.2. Wskaż wszystkie założenia potrzebne do wykonania działań $\frac{x-4}{3x+9} \cdot \frac{x-1}{5x-10}$.

A. $x \neq -3$

B. $x \neq -3,\ x \neq 2$

C. $x \neq 1$

D. $x \neq -3,\ x \neq 2,\ x \neq 1,\ x \neq 4$

9.3. Wynikiem działania $\frac{x^2-y^2}{4x^2y} : \frac{x+y}{xy}$ przy założeniu, że $xy \neq 0,\ x+y \neq 0,$ jest

A. $\frac{(x^2-y^2)(x+y)}{4x^3y}$.

B. $\frac{x-y}{4x}$.

C. $\frac{x-y}{4}$.

D. $\frac{x-y}{4x^3y}$.

9.4. Dane jest wyrażenie $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x+2}{x-2}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$.

B. Wartość tego wyrażenia dla $x = 1$ jest równa 3.

C. Wyrażenia $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x+2}{x-2}$ oraz $\frac{x+2}{x}$ są równe.

9.5. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x+1}{2x+3} + \frac{x+2}{2x+3}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{3x}$

c) $\frac{x-2}{3x+3} + \frac{2x+1}{2x+2}$

d) $\frac{2x}{x-5} + \frac{5-x}{x}$

9.6. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{1}{x-7} - \frac{5}{x+4}$

c) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}$

d) $\frac{10x+1}{6x^2} - \frac{3}{2x}$

9.7. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-3} + \frac{7}{3-x}$

b) $\frac{x+5}{3x-1} + \frac{2-4x}{1-3x}$

c) $\frac{x+3}{2x-7} + \frac{x+2}{7-2x}$

d) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{3-9x}$

e) $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4x-4}$

f) $\frac{2x+1}{3x^2-12} - \frac{x-1}{2x^2+4x}$

g) $\frac{x-2}{x^2-6x+9} + \frac{x+2}{9-x^2}$

h) $\frac{2x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x-16}{2x^2-32}$

9.8. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{2x+2} - \frac{x-1}{3x-3} + 1$

b) $\frac{8x}{2x-1} - \frac{6x}{2x+1} - 1$

c) $\frac{2x}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{5x}$

d) $\frac{4-x}{x+1} - \frac{1-2x}{x-1} + \frac{5-x^2}{x^2-1}$

e) $\frac{4-5x}{5x-3} + \frac{5x^2-23x+12}{25x^2-9} - \frac{x-4}{5x+3} + 1$

f) $\frac{2x-1}{x^2+2x} - \frac{2x}{x-3} + \frac{x^3+7x-3}{x^3-x^2-6x}$

g) $\frac{x}{x^2-6x-16} - \frac{x-3}{x^2-8x} + \frac{x+4}{4x^2+8x}$

h) $\frac{3}{x^3+1} + \frac{2}{2x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-1}$

9.9. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3}{4x^2-10x+4}+\frac{2}{1-4x^2}-\frac{1}{4x^2-12x+8}$

b) $\frac{x+2}{2x^2-7x+3}-\frac{2x+1}{2x^2+5x-3}+\frac{x^2-14}{2x^3-x^2-18x+9}$

9.10. Wyznacz takie wartości parametrów a i b, aby podane wyrażenia były równe.

a) $\frac{a}{x-2}-\frac{b}{x+2}$ i $\frac{7x-2}{x^2-4}$

b) $\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}$ i $\frac{3x+1}{x^2-x-6}$

c) $\frac{a}{x-5}-\frac{ax+b}{3x+1}$ i $\frac{2(x^2-9x+4)}{3x^2-14x-5}$

d) $\frac{ax-a}{(x^2-4)(x-1)}+2b$ i $\frac{2x^3-2x^2-3x+3}{x^3-x^2-4x+4}$

9.11. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x-1}{2x+4}\cdot\frac{x+2}{3x}$

b) $\frac{5x-3}{3x+6}\cdot\frac{x^2+2x}{10x-6}$

c) $\frac{2x^2-x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{3x}$

d) $\frac{3x-5}{x^2+3x}\cdot\frac{2x^2-7x}{6x-10}$

e) $\frac{x^2+x-2}{2x^2+5x-3}\cdot\frac{x^2+4x+3}{x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2-4}$

f) $\frac{x^2-9}{x^2-3x+2}\cdot\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x^2}$

9.12. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-5}:\frac{10x-10}{5x-25}$

b) $\frac{4x^2-9}{2x^2-3x}:\frac{15+10x}{3x^2}$

c) $\frac{x^3-8}{x^3+8}:\frac{4x-8}{4x+8}$

d) $\frac{x^2+x-6}{x+5}:\frac{x-2}{x^2+2x-15}$

9.13. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\left(4+\frac{3x^2}{1-x^2}\right):\left(2-\frac{x}{x+1}\right)$

b) $\left(3x-\frac{6}{3-x}\right):\left(\frac{2}{x^2-3x}+1\right)$

c) $\left(\frac{x-3}{4x+6}-\frac{x-2}{6x+9}\right)\cdot\left(\frac{x+3}{3x-15}+\frac{2x+1}{4x-20}\right)$

d) $\left(\frac{x^2+x}{x^2+4x-5}-\frac{x^2-x}{x^2+6x+5}\right):\left(\frac{2}{x^2-1}+2\right)$

9.14. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\left(\frac{3}{x^2+x-2}+\frac{1}{x^2+3x+2}\right):\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x+2}\right)$

b) $\left[\left(\frac{x+2}{4x^2+4x+1}+\frac{x+2}{4x^2-1}\right)\cdot\frac{4x+2}{3x^2+6x}-\frac{4}{2x-1}\right]\cdot(4x+2)$

c) $\left(\frac{x+1}{3x-3}-\frac{4}{3x^2-3}-\frac{x+10}{3x+3}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{7}$

d) $\left[\left(\frac{5x}{1-5x}+\frac{3x}{5x+1}\right):\frac{15x+12}{1-10x+25x^2}\right]\cdot\frac{3}{5x-1}$

9.15. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\dfrac{\dfrac{x+1}{2x-4}+\dfrac{x-5}{6x-12}}{\dfrac{x+2}{3x-6}-\dfrac{x+1}{4x-8}}$ b) $\dfrac{\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+7}-1}{\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7}-1}$ c) $\dfrac{x}{x+\dfrac{x}{x+1}}$ d) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x-1}}}$

9.16. Niech $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Który znak: $=$ czy $\neq$ należy wstawić zamiast ?, aby otrzymać zależność prawdziwą?

a) $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}$? 1

b) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$? 1

c) $\dfrac{y}{x}:\dfrac{x}{2y}$? $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{x-y}{y}$? $\dfrac{x}{y}-1$

e) $\dfrac{x}{y}+1$? $\dfrac{x+y}{y}$

f) $\dfrac{2x}{y}-\dfrac{1}{x}$? $\dfrac{2x^2-y}{xy}$

* **9.17.** Wykonaj działania $\left(\dfrac{2}{x^2-ax-6a^2}-\dfrac{1}{x^2-2ax-3a^2}\right)\left(x^2+3ax+2a^2\right)$. Podaj odpowiednie założenia.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wartość wyrażenia $\dfrac{x^2}{x^2-y^2}:\dfrac{x^3-x^2y}{x^2-2xy+y^2}$ dla $x=\dfrac{1}{9}$ i $y=\dfrac{2}{9}$

A. jest liczbą całkowitą. **B.** jest równa 2. **C.** jest liczbą pierwszą.

2. Wykonaj działania $\dfrac{x}{4x+4}+\dfrac{x+1}{6x-6}-\dfrac{x^2+1}{3x^2-3}$. Podaj odpowiednie założenia.

3. Wykonaj działania $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-16}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$. Podaj odpowiednie założenia.

4. Wykonaj działania $\left[\left(1+\dfrac{x-2}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x-1}+2\right)-\dfrac{4}{x+1}\right]\cdot\dfrac{3x+3}{2x}$. Podaj odpowiednie założenia.

5. Wyznacz takie wartości parametrów a, b i c, aby wyrażenia $\dfrac{ax+b}{2x-1}+\dfrac{c}{3x+2}$ i $\dfrac{3x^2-13}{6x^2+x-2}$ były równe.

10. Równania wymierne

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań wymiernych

Równanie postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$, w którym W i Q są wielomianami zmiennej x i Q nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **równaniem wymiernym** z niewiadomą x. Wszystkie pierwiastki wielomianu W, które należą do dziedziny, czyli spełniają założenie $Q(x) \neq 0$, są rozwiązaniami równania.

Przykład 1

a) Równanie $\frac{x-3}{x+2} = 0$ jest równaniem wymiernym o dziedzinie równej $\mathbf{R} - \{-2\}$. Jego rozwiązaniem jest liczba 3.

b) Równanie $\frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0$ jest równaniem wymiernym o dziedzinie równej $\mathbf{R} - \{1, 2\}$. Pierwiastek wielomianu $W(x) = x - 1$ nie należy do dziedziny, zatem równanie to nie ma rozwiązania.

Przykład 2

Dziedziną równania $\frac{1}{x} = 3$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$. Aby rozwiązać to równanie, nie musimy przekształcać go do postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$. Jeżeli bowiem pomnożymy obydwie strony równania przez x, to otrzymamy $1 = 3x$, stąd $x = \frac{1}{3}$.

Jeżeli w równaniu wymiernym mamy sumę kilku wyrażeń, to na ogół, po wyznaczeniu dziedziny, mnożymy obydwie strony równania przez wspólny mianownik wszystkich składników. Po rozwiązaniu otrzymanego w ten sposób równania wielomianowego musimy sprawdzić, które z jego pierwiastków należą do dziedziny równania wymiernego.

Przykład 3 ◀ zad. 10.6

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $\frac{2x+1}{x-4} = 5$, $D = \mathbf{R} - \{4\}$

$2x + 1 = 5(x - 4)$, stąd $x = 7$ i $7 \in D$

Odp.: $x = 7$

b) $\frac{x}{x+2} - \frac{18}{(x-1)(x+2)} + \frac{x+5}{x-1} = 0$

$D = \mathbf{R} - \{1, -2\}$

Obydwie strony równania mnożymy przez $(x-1)(x+2)$, czyli przez wspólny mianownik wszystkich wyrażeń wymiernych.

$x(x-1) - 18 + (x+5)(x+2) = 0$

$2x^2 + 6x - 8 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

Pierwiastkami tego równania są $x_1 = 1$ i $x_2 = -4$.

$x_1 \notin D$, więc rozwiązaniem równania wymiernego jest tylko drugi pierwiastek.

Odp.: $x = -4$

c) $\frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} = \frac{22}{x^2-6x+8}$ ⟵ rozkładamy wielomian w mianowniku na czynniki

$\frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} = \frac{22}{(x-4)(x-2)}$

$D = \mathbf{R} - \{4, 2\}$

$(x+7)(x-2) + (x-7)(x-4) - 22 = 0$

Po wykonaniu działań, uporządkowaniu i podzieleniu obydwu stron równania przez 2 otrzymujemy równanie kwadratowe:

$x^2 - 3x - 4 = 0$

którego pierwiastkami są $x_1 = -1 \in D$, $x_2 = 4 \notin D$.

Odp.: $x = -1$

Przykład 4 ◂ zad. 10.10

Ze wzoru $a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$ wyznaczymy podaną zmienną. Zakładamy, że zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

Rozwiązanie

a) zmienna E

$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$ ⟵ obydwie strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$

$(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2) = nE$ ⟵ obydwie strony równania dzielimy przez n

Odp.: $E = \frac{(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2)}{n}$

b) zmienna i_2

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2} \quad \longleftarrow \text{obydwie strony równania mnożymy przez } ni_1 + i_2 \text{ i dzielimy przez } a_1 + a_2$$

$$ni_1 + i_2 = \frac{nE}{a_1 + a_2} \quad \longleftarrow \text{przenosimy } ni_1 \text{ na drugą stronę}$$

Odp.: $i_2 = \frac{nE}{a_1 + a_2} - ni_1$

c) zmienna n

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2} \quad \longleftarrow \text{obydwie strony równania mnożymy przez } ni_1 + i_2$$

$$(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2) = nE \quad \longleftarrow \text{mnożymy przez wyraz ze zmienną } n$$

$$ni_1(a_1 + a_2) + i_2(a_1 + a_2) = nE \quad \longleftarrow \text{przenosimy wyrazy ze zmienną } n \text{ na jedną stronę}$$

$$nE - ni_1(a_1 + a_2) = i_2(a_1 + a_2) \quad \longleftarrow \text{wyłączamy } n \text{ przed nawias}$$

$$n\left[E - i_1(a_1 + a_2)\right] = i_2(a_1 + a_2)$$

Odp.: $n = \frac{i_2(a_1 + a_2)}{E - i_1(a_1 + a_2)}$

Przykład 5 ◂ zad. 10.11

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{x} + \frac{2}{|x-1|-1} = \frac{2}{x-2}$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę równania. W tym celu rozpatrujemy potrzebne założenia:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ |x-1| - 1 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$|x-1| - 1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x-1| = 1$, czyli $x - 1 = 1$ lub $x - 1 = -1$, zatem gdy $x = 0$ lub $x = 2$.

Ostatecznie dziedziną równania jest więc zbiór $\mathbf{R} - \{0, 2\}$.

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej:

$$|x-1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{dla} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Zatem:

I. dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ równanie ma postać:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{-x + 1 - 1} = \frac{2}{x - 2}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x - 2}$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{2}{x - 2}$$

$$-x + 2 = 2x$$

$$2 = 3x$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ i } \frac{2}{3} \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$$

II. dla $x \in \langle 1;\ 2) \cup (2;\ \infty)$ równanie ma postać:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1-1} = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

$\frac{1}{x} = 0$, a to równanie nie ma rozwiązań.

Odp.: $x = \frac{2}{3}$

Przykład 6 ◂ zad. 10.14

Samochód przejechał w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Rozwiązanie

Korzystamy ze związku $t = \frac{s}{v}$ między drogą, prędkością i czasem.

$s = v \cdot t$
$v = \frac{s}{t}$
$t = \frac{s}{v}$

t – czas przejazdu (w godzinach)

v – średnia prędkość (w km/h)

$s = 210$ km

$\frac{210}{v}$ wyraża czas przejazdu z prędkością, o której mowa w zadaniu

$\frac{210}{v+10}$ wyraża czas przejazdu ze zwiększoną prędkością

Z treści zadania wynika, że:

$$\frac{210}{v} = \frac{210}{v+10} + \frac{1}{2}$$

Po pomnożeniu obydwu stron równania przez mianowniki i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie:

$$v^2 + 10v - 4200 = 0$$

którego pierwiastkami są liczby: $v_1 = -70$, $v_2 = 60$. Zgodnie z treścią zadania $v > 0$, zatem rozwiązaniem jest tylko druga liczba.

Odp.: Samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h.

R

Przykład 7 ◂ zad. 10.18

Pani Zenobia Żubr zatrudniła do przycinania drzewek owocowych pracowników trzech firm ogrodniczych. Gdyby podpisała umowę tylko z firmą P, to praca zostałaby wykonana w czasie o 5 dni dłuższym, niż przewidywała to oferta firmy K. Natomiast firma N przycięłaby drzewka w czasie o 2 dni dłuższym niż podwojony czas pracy firm K i P łącznie. Ile dni zajęłaby praca każdej z firm pracującej osobno, jeżeli wspólnie wykonały pracę w ciągu 2 dni?

Rozwiązanie

Zakładamy, że każda z firm wykonuje swoją dzienną normę bez zmian (bez takiego założenia zadania nie można rozwiązać). Oznaczmy:

x – liczba dni pracy w ofercie firmy K. Zatem $x > 0$.

Wówczas:

$x + 5$ to liczba dni pracy w ofercie firmy P,

$2(x + x + 5) + 2$ to liczba dni pracy w ofercie firmy N.

Zatem w ciągu jednego dnia firmy wykonują część pracy równą:

$\frac{1}{x}$ – norma firmy K,

$\frac{1}{x+5}$ – norma firmy P,

$\frac{1}{4(x+3)}$ – norma firmy N.

Przycięcie wszystkich drzewek zajęło pracownikom trzech firm pracującym wspólnie 2 dni, czyli w ciągu jednego dnia wykonali połowę pracy. Zatem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{4(x+3)} = \frac{1}{2}$$

W kolejnych przekształceniach otrzymujemy:

$$4(x+5)(x+3) + 4x(x+3) + x(x+5) = 2x(x+5)(x+3)$$

$$4\left(x^2 + 8x + 15\right) + 4x^2 + 12x + x^2 + 5x - 2x\left(x^2 + 8x + 15\right) = 0$$

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0, \text{ czyli } (x-3)\left(2x^2 + 13x + 20\right) = 0$$

Obydwa pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 + 13x + 20$ są ujemne, więc jedynym rozwiązaniem zadania jest $x = 3$.

Odp.: Firma K przycięłaby drzewka w 3 dni, firma P w 8 dni, firma N w 24 dni.

Zadania

W każdym z zadań 10.1–10.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

10.1. Jan podróżował przez T godzin ze średnią prędkością R km/h i przez t godzin ze średnią prędkością r km/h. Jaką miał średnią prędkość (w km/h) na całej trasie?

A. $\frac{R}{T}+\frac{r}{t}$ **B.** $\frac{RT+rt}{T+t}$ **C.** $\frac{RT+rt}{2}$ **D.** $\frac{Rt+rt}{R+r}$

10.2. Wskaż równanie, które nie ma rozwiązania.

A. $\frac{1}{x-1}=1$ **B.** $\frac{x-1}{x}=2$ **C.** $\frac{1}{x}=x$ **D.** $\frac{x}{x-1}=1$

10.3. Wiadomo, że $m=\frac{1}{a+b}$. Ile jest równe $\frac{5}{b}$?

A. $\frac{5m}{1-ma}$ **B.** $\frac{5(a+m)}{1+a}$ **C.** $\frac{m+a}{5a}$ **D.** $\frac{m}{5a(1+m)}$

10.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $na+x=\frac{x}{y}$ oraz $naxy\neq 0$. Zatem

A. $y=\frac{na+x}{x}$. **B.** $a=\frac{x(1-y)}{ny}$. **C.** $n=\frac{x-yx}{ay}$.

10.5. Jeden robotnik wykonuje pewną pracę w x dni, drugi tę samą pracę wykonuje w y dni. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Obaj robotnicy, pracując wspólnie, wykonają tę pracę w ciągu

A. $\frac{x+y}{xy}$ dni. **B.** $\frac{1}{x+y}$ dni. **C.** $\frac{xy}{x+y}$ dni.

10.6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+1}{x-2}=3$

b) $\frac{3x-2}{2x+1}=-2$

c) $\frac{-x+3}{4x-5}=\frac{2}{3}$

d) $\frac{3x-5}{-6x+7}=-\frac{1}{2}$

e) $\frac{2x-3}{x^2-4x+4}=-1$

f) $\frac{4x+6}{2x^2+x-3}=4$

10.7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x+3}{1-x}$

b) $\frac{7-x}{x+3} = \frac{x-2}{x+7}$

c) $\frac{3x-1}{5-x} - \frac{x}{x-2} = 0$

d) $\frac{x+2}{x+4} = \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-12}$

e) $\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{6x}{5x-1} = 0$

f) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{2x-1}{4x+3}$

g) $\frac{x+1}{x+5} - \frac{2x+3}{4x+11} = 0$

h) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x+2}{x+3}$

10.8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x-5}{x^2+4x+3}$

b) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+2}{x-4} = \frac{18}{x^2-5x+4}$

c) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$

d) $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x+10}{x-4} + \frac{2}{x^2-7x+12} = 0$

e) $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x-4} = \frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x}$

f) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+11}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6} = 0$

10.9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+11}{x^2-x-20} + 2 = \frac{2x-2}{x+4}$

b) $\frac{x-1}{x-5} - \frac{2}{x^2-11x+30} = \frac{x}{x-6}$

c) $5 - \frac{x-1}{x+2} = \frac{6}{x^2+6x+8} + \frac{4x+11}{x+4}$

d) $\frac{4}{x^2-6x+5} + \frac{x-6}{x-5} = \frac{x}{x-1} - 1$

e) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x^2}{x-6} - \frac{x^2-7x+9}{x^2-9x+18} = 0$

f) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} + 1$

10.10. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną. Zakładamy, że wszystkie zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

a) $F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$ M

b) $B = \frac{mg}{I \cdot l}$ I

c) $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$ p

d) $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$ R

e) $k = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$ R

f) $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$ m

10.11. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{|x| + x^3}{x+1} = 0$

b) $\frac{|x-3|}{x+2} = x + 5$

c) $\frac{|x|}{x-3} = \frac{2x}{|x-2|}$

d) $\left|\frac{x}{x-3}\right| = 2$

10.12. Gdy jabłka staniały o 1 zł za kg, to za 24 zł można ich było kupić o 2 kg więcej niż poprzednio. Jaka była początkowa cena 1 kilograma jabłek?

10.13. Trzy litry soku rozlano do szklanek – do każdej szklanki tyle samo. Gdyby do każdej szklanki wlano o 50 ml mniej, można by było napełnić o 5 szklanek więcej. Ile szklanek początkowo napełniono sokiem?

10.14. Kierowca samochodu obliczył, że zdąży dojechać w ciągu 2 godzin na konferencję, jeżeli będzie jechał ze średnią prędkością 55 km/h. Niestety przez pierwsze 20 minut jechał z prędkością tylko 45 km/h. Z jaką średnią prędkością musi pokonać resztę trasy, żeby przyjechać na czas?

10.15. Marcin jechał samochodem z domu do hurtowni ze średnią prędkością 60 km/h, a wracał ze średnią prędkością 40 km/h. Cały przejazd zajął mu łącznie 4 godziny. Jak daleko jest z domu Marcina do hurtowni?

10.16. Anna jechała samochodem ze stałą prędkością. W pewnym momencie wyprzedziła rowerzystę poruszającego się ze stałą prędkością 18 km/h. Następnie zatrzymała się na 10 minut. Potem jechała dalej z tą samą co poprzednio prędkością i po pewnym czasie znowu wyprzedziła tego samego rowerzystę. Z jaką prędkością jechała Anna, jeżeli między kolejnymi momentami wyprzedzania rowerzysty upłynęło 13 minut?

10.17. Pociąg osobowy wyjechał z miasta A do miasta B o godzinie 12^{45} i jechał ze średnią prędkością 60 km/h. O godzinie 13^{30} z miasta B do miasta A wyjechał pociąg pospieszny i jechał ze średnią prędkością 90 km/h. Pociągi minęły się o godzinie 15^{10}. Jaka odległość dzieli miasta A i B?

10.18. Sieć sklepów dysponuje trzema rodzajami samochodów dostawczych, które mają rozwieźć partię komputerów z centralnego magazynu do poszczególnych sklepów na terenie całego kraju. Ciężarówkami alfa można wykonać to zadanie w czasie o 4 dni krótszym niż ciężarówkami beta. Do rozwiezienia komputerów tylko półciężarówkami gamma trzeba aż o 9 dni więcej niż w przypadku wykorzystania alf. Ile dni zajmie wykonanie zadania każdym typem samochodów oddzielnie, jeżeli wszystkim razem zajęłoby to 3 dni?

10.19. Właściciel ośrodka wypoczynkowego kupił nową kosiarkę. Można za jej pomocą skosić trawę na terenie całego ośrodka w czasie o 4 godziny krótszym niż połowa czasu pracy starej kosiarki. Jeżeli obydwie kosiarki pracują równocześnie, to cała trawa jest skoszona po upływie 6 godzin. Ile czasu kosi całą trawę każda z kosiarek osobno?

10.20. Członkowie klubu wysokogórskiego myją okna na zewnątrz wysokich budynków i w ten sposób zarabiają na wyprawę. Kiedy Zenon pracuje sam, myje okna na jednej ścianie budynku 8 godzin. Kiedy pracują wspólnie z Józefem, to praca ta zajmuje im 6 godzin. Ile godzin potrzebowałby Józef na samodzielne umycie okien na tej ścianie?

10.21. Na szczyt góry wywożą narciarzy trzy wyciągi – gondolowy, krzesełkowy i orczykowy. Gondole wywożą grupę 1200 narciarzy w czasie o 2 godziny krótszym niż wyciąg krzesełkowy oraz 3 razy szybciej niż orczyk. Jeżeli wszystkie wyciągi są czynne, to grupa 1200 narciarzy wjeżdża na szczyt w czasie 2 godzin. Ilu narciarzy wywozi na szczyt w ciągu godziny każdy z wyciągów?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Zbiór rozwiązań równania $\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}$

A. jest dwuelementowy.

B. ma nieskończenie wiele elementów.

C. jest równy $\mathbf{R} - \{0, 1\}$.

2. Rozwiąż równanie $\frac{x-7}{x-2} = \frac{x+3}{x+7}$.

3. Rozwiąż równanie $\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+3} = \frac{x+2}{x+1}$.

4. Kwotę 3360 zł przeznaczono na premie świąteczne dla pracowników. W ostatniej chwili zdecydowano, że premię otrzyma o dwóch pracowników mniej i wtedy okazało się, że pozostali otrzymają po 40 zł więcej. Wszystkie wypłacone premie były równe. Ilu pracowników je otrzymało?

5. Ogrodnik miał przyciąć 200 drzewek owocowych w określonym terminie. Pracował systematycznie, a ponieważ udało mu się każdego dnia przyciąć o 5 drzewek więcej niż wcześniej zaplanował, skończył pracę 2 dni przed terminem. Ile dni pracował?

11. Nierówności wymierne

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności wymiernych

Jeżeli W i Q są wielomianami zmiennej x i Q nie jest wielomianem zerowym, to każdą z nierówności postaci:

$$\frac{W(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{W(x)}{Q(x)} \geqslant 0, \quad \frac{W(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{W(x)}{Q(x)} \leqslant 0$$

nazywamy **nierównością wymierną** z niewiadomą x.

Badanie znaku ilorazu można zastąpić badaniem znaku iloczynu, ponieważ:

- $\frac{a}{b} > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b > 0$.
- $\frac{a}{b} < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b < 0$.

Przy założeniu, że $b \neq 0$.

Zatem rozwiązywanie nierówności wymiernej najlepiej sprowadzić do rozwiązywania nierówności wielomianowej. Zaprezentujemy to na przykładach.

Przykład 1

Rozwiążemy podaną nierówność.

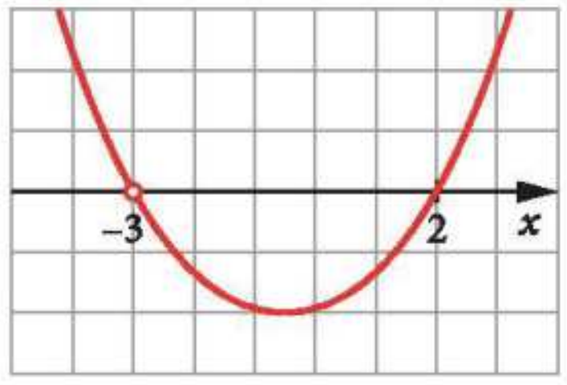
Rozwiązanie

a) $\frac{x-2}{x+3} > 0, \quad D = \mathbf{R} - \{-3\}$

Nierówność $\frac{x-2}{x+3} > 0$ zastępujemy nierównością

$(x-2)(x+3) > 0$ dla $x \in D$.

Po lewej stronie nierówności mamy trójmian kwadratowy zapisany w postaci iloczynowej. Jego pierwiastkami są liczby 2 i -3. Na wykresie zaznaczyliśmy punkt $(-3, 0)$ pustym kółeczkiem, ponieważ $-3 \notin D$. Współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc ramiona paraboli są skierowane do góry. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności wymiernej.

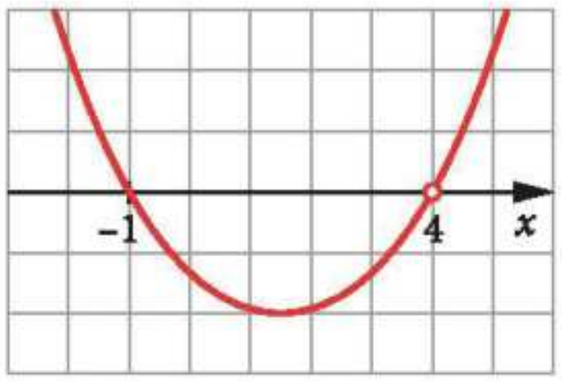


Odp.: $\frac{x-2}{x+3} > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

b) $\frac{x+1}{x-4} \leqslant 0, \quad D = \mathbf{R} - \{4\}$

$(x+1)(x-4) \leqslant 0$ i $x \in D$

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc ramiona paraboli są skierowane do góry. Ponieważ x nie może być równy 4, zbiorem rozwiązań jest przedział lewostronnie domknięty $\langle -1; 4)$.



Odp.: $\frac{x+1}{x-4} \leqslant 0$ dla $x \in \langle -1; 4)$

c) $\frac{1}{x} \geqslant 3, \quad D = \mathbf{R} - \{0\}$

Doprowadzamy tę nierówność do takiej postaci, w której po jednej stronie jest wyrażenie wymierne, a po drugiej 0.

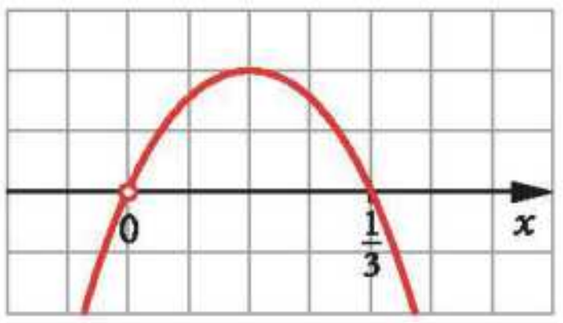
$\frac{1}{x} - 3 \geqslant 0$, czyli $\frac{1-3x}{x} \geqslant 0$

Teraz możemy zapisać nierówność w postaci równoważnej.

$x(1-3x) \geqslant 0$ i $x \in D$

Pierwiastkami tego trójmianu są liczby 0 i $\frac{1}{3}$.

Współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc ramiona paraboli są skierowane do dołu. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.



Odp.: $\frac{1}{x} \geqslant 3$ dla $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right\rangle$

Nie możemy pomnożyć obydwu stron nierówności wymiernej przez mianownik ułamka, który w niej występuje – zazwyczaj jest on wyrażeniem z niewiadomą, więc jego znak zależy od wartości tej niewiadomej. Jeżeli jednak pomnożymy obydwie strony nierówności przez **kwadrat** mianownika (dla każdej liczby należącej do dziedziny nierówności jest on dodatni), to kierunek nierówności się nie zmieni i otrzymamy równoważną postać iloczynową nierówności. Jest to inny sposób rozwiązywania nierówności wymiernych.

Przykład 2 ◂ zad. 11.8

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $\frac{3}{x+5} < \frac{2}{x-1}, \quad D = \mathbf{R} - \{-5, 1\}$

$\frac{3}{x+5} - \frac{2}{x-1} < 0$ ⟵ wyrażenia wymierne przenosimy na jedną stronę nierówności

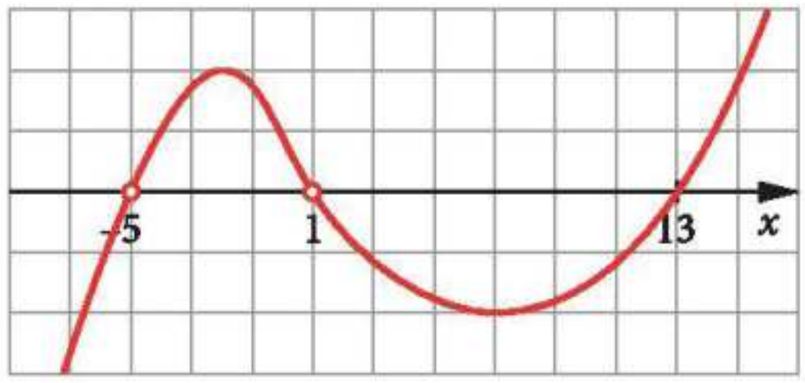
Wykonujemy odejmowanie wyrażeń wymiernych, następnie porządkujemy wielomian w liczniku, wielomian w mianowniku zostawiamy w postaci iloczynowej.

$$\frac{3(x-1)-2(x+5)}{(x+5)(x-1)} < 0, \text{ czyli } \frac{x-13}{(x+5)(x-1)} < 0$$

Nierówność wymierną zastępujemy nierównością wielomianową ograniczoną do wcześniej wyznaczonej dziedziny.

$(x-13)(x+5)(x-1) < 0$ i $x \in \mathbf{R} - \{-5, 1\}$

Rysujemy przybliżony wykres wielomianu; punkty nienależące do dziedziny zaznaczamy na osi x pustymi kółeczkami.



Odp.: $x \in (-\infty; -5) \cup (1; 13)$

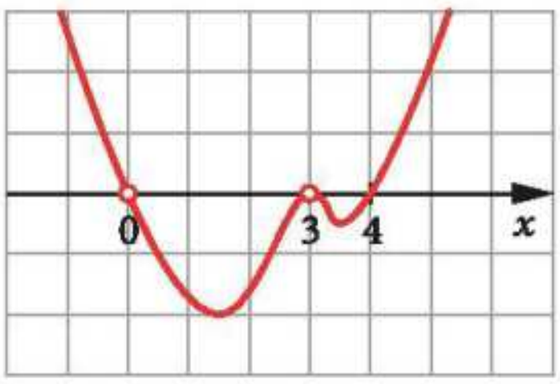
b) $\frac{x-2}{x} + \frac{x-9}{x-3} \leqslant \frac{18}{3x-x^2}$

$\frac{x-2}{x} + \frac{x-9}{x-3} - \frac{18}{-x(x-3)} \leqslant 0, \quad D = \mathbf{R} - \{0, 3\}$

$\frac{(x-2)(x-3)+x(x-9)+18}{x(x-3)} \leqslant 0$

$\frac{2x^2-14x+24}{x(x-3)} \leqslant 0$, czyli $2\left(x^2-7x+12\right)x(x-3) \leqslant 0$ i $x \in D$

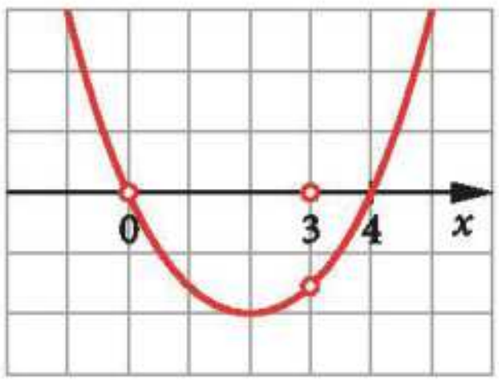
$x(x-4)(x-3)^2 \leqslant 0$, zatem $x \in (0; 3) \cup (3; 4\rangle$



Gdybyśmy nie zastąpili od razu ułamka $\frac{2x^2-14x+24}{x(x-3)}$ iloczynem jego licznika i mianownika, tylko rozłożyli trójmian w liczniku i skrócili, to rysunek byłby trochę inny, ale odpowiedź oczywiście taka sama:

$\frac{2(x-4)(x-3)}{x(x-3)} \leqslant 0$, czyli $\frac{2(x-4)}{x} \leqslant 0$ i $x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$

$2x(x-4) \leqslant 0$ i $x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$



Odp.: $x \in (0; 3) \cup (3; 4\rangle$

Przykład 3 ◂ zad. 11.17

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m-1)x^2 - (5m-2)x + 2m = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

Rozwiązanie

Przypomnijmy – równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ trzech warunków:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

Współczynnikami rozważanego równania są:

$a = 2m - 1,\ b = -(5m - 2),\ c = 2m$

Zatem:

- $a \neq 0$, czyli $2m - 1 \neq 0$, stąd $m \neq \frac{1}{2}$
- $\Delta > 0$, czyli $b^2 - 4ac > 0$:

  $(5m - 2)^2 - 4 \cdot (2m - 1) \cdot 2m > 0$, czyli $(3m - 2)^2 > 0$, stąd $m \neq \frac{2}{3}$
- $\frac{c}{a} < 0$, czyli $\frac{2m}{2m - 1} < 0$, stąd $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Wszystkie warunki są spełnione dla $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Odp.: Równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków dla $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Wzory Viète'a

Jeżeli współczynniki równania $ax^2 + bx + c = 0$ spełniają warunki $a \neq 0$ i $b^2 - 4ac > 0$, to:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

gdzie x_1, x_2 oznaczają pierwiastki tego równania.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

11.1. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $\frac{3}{x} > 1$.

A. $(-\infty; 3)$ **B.** $(-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ **C.** $(0; 3)$ **D. R**

11.2. Wiadomo, że $x > 0$, $y > 0$ i $\frac{y}{x} < 1$. Wynika stąd, że

A. $x < y$.
B. $x > y$.
C. $x = y$.
D. jest za mało danych, aby porównać x i y.

11.3. Wiadomo, że $a > b > 0$. Wynika stąd, że

A. $\frac{a+b}{b} > 1 + \frac{a}{b}$.
B. $\frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b}$.
C. $\frac{a+b}{b} < 1 + \frac{a}{b}$.
D. jest za mało danych, żeby porównać $\frac{a+b}{b}$ oraz $1 + \frac{a}{b}$.

11.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{7}$. Zatem

A. $x < 7$. **B.** $x \in \langle 0; 7 \rangle$. **C.** $x \leqslant 7$.

11.5. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x} < 5$ b) $\frac{\sqrt{3}}{x} \geqslant -1$ c) $\frac{1}{2x} > -\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{5}}$

11.6. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2}{3-x} \leqslant -\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{x-5} \geqslant -3$ c) $\frac{-2}{2x+3} > 5$ d) $\frac{3}{4x-2} \leqslant -1$

11.7. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+2}{2x-3} > 1$ b) $\frac{3x-1}{x+4} \geqslant 2$ c) $\frac{4x-3}{2x+5} < 2$ d) $\frac{1}{5x+3} \leqslant -8$

11.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x-1}{x-3} \leqslant \frac{2x-1}{x-2}$ b) $\frac{3x+1}{4x-2} \leqslant \frac{x+2}{2x-1}$ c) $\frac{3x-1}{x-1} \leqslant \frac{x+7}{x+1}$ d) $\frac{x+2}{x+5} < \frac{3x+8}{5(x+2)}$

11.9. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+2}{x+8} < 1 + \frac{3-x}{x+3}$

b) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} < \frac{1}{20}$

c) $\frac{16}{x-3} - \frac{15}{x-2} \leqslant \frac{2}{x-5}$

d) $\frac{x+3}{3x+3} - \frac{x-1}{x+5} < \frac{2}{3}$

11.10. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x+1}{x+1} > 2 + \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x-8} < \frac{x+2}{4-x} - \frac{x+3}{x+2}$

c) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x} \leqslant \frac{x^2+2x+3}{x^2}$

d) $\frac{3x^2-24x-3}{x^2-4x+3} + 1 > \frac{4x-10}{x-1}$

e) $\frac{2}{x^2+x+1} < \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^3+3x^2+3x+2}$

f) $\frac{3x^3-4}{x^3-4x^2+6x-4} - 3 > \frac{1}{x-2} + \frac{10x-1}{x^2-2x+2}$

11.11. Rozwiąż podwójną nierówność $-1 \leqslant \frac{x+1}{x-1} \leqslant \frac{3}{x-3}$.

11.12. Rozwiąż nierówność.

a) $\left|\frac{2}{x}\right| \geqslant 1$ b) $\left|\frac{3}{x+1}\right| > 2$ c) $\left|\frac{x}{x-2}\right| < 5$ d) $\left|\frac{x^2}{x-2}\right| \leqslant 1$

11.13. Rozwiąż nierówność $\frac{|x-1|}{x+2} \geqslant 2$.

D **11.14.** Wykaż, że nierówność $\frac{|x+1|}{|x|+1} > 2$ nie ma rozwiązań.

11.15. Rozwiąż nierówność $\frac{3}{|x-3|+1} > |x-3| - 1$.

11.16. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x+5}{|x+2|} > 3$.

11.17. Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2-(m+3)x+2m+1=0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

11.18. Dla jakich wartości parametru m równanie $4mx^2-4(1-2m)x+9m-8=0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

11.19. Dla jakich wartości parametru m równanie $(1-m)x^2+2x+m+1=0$ ma dwa różne pierwiastki należące do przedziału $(-2;\ 2)$?

* **11.20.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x^2-2mx+1}{x-2}=0$ ma dwa rozwiązania?

* **11.21.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x^2+(m+2)x-2m}{x+3}=0$ ma jedno rozwiązanie?

* **11.22.** Dla jakich wartości parametru k równanie $\frac{kx-6}{x^2-x-2}=0$ nie ma rozwiązań?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $x>0$, $y>0$, $a=\frac{1}{x+y}$ i $b=\frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Zatem

A. $a \leqslant b$. **B.** $a > b$. **C.** $a = b$.

2. Rozwiąż nierówność $\frac{x+2}{x-3} > 2-\frac{2x-4}{x+1}$.

3. Rozwiąż nierówność $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x+14}{x}+\frac{2}{x^2+x} \leqslant 0$.

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx-2m-3=0$ ma rozwiązanie większe od 1?

5. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2-2(m-1)x+m-3=0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma jest większa od 3?

12. Warto powtórzyć – proporcjonalność odwrotna

Definicja

Zależność między dwiema dodatnimi zmiennymi x i y taką, w której iloczyn a tych wielkości jest stały, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**.

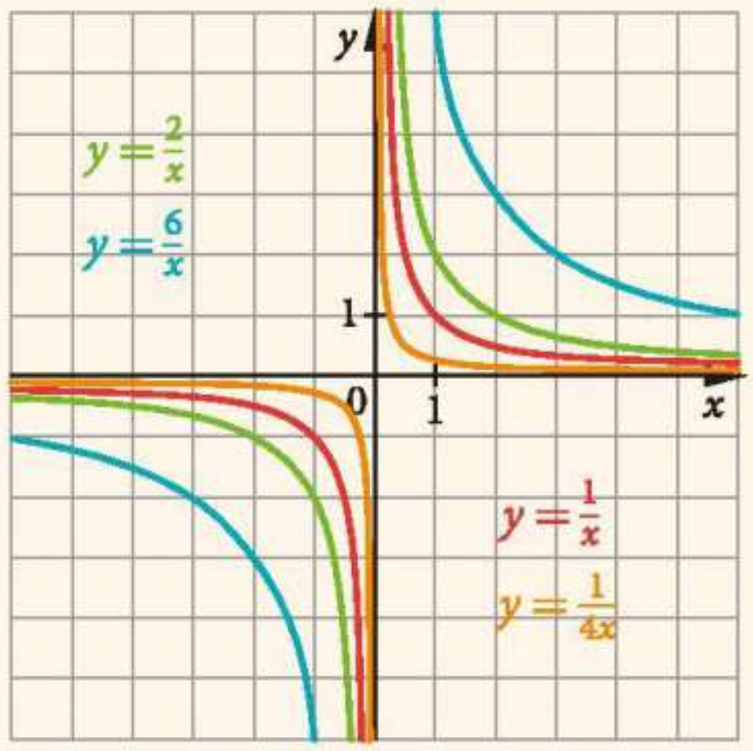
$$xy = a,\ x > 0,\ y > 0$$

Mówimy wówczas, że x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Wykres każdej funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x},\ (a \neq 0,\ x \neq 0)$ nazywamy **hiperbolą**. W dalszych rozważaniach zapisów „hiperbola o równaniu $y = \frac{a}{x}$" oraz „wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$" na ogół nie rozróżniamy.

Własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, o ile $a > 0$:

- $D = \mathbf{R} - \{0\}$,
- $ZW = \mathbf{R} - \{0\}$,
- funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, funkcja nie przyjmuje wartości największej,
- funkcja nie ma miejsc zerowych,
- $f(x) > 0$ dla $x > 0$, $f(x) < 0$ dla $x < 0$,
- w każdym z przedziałów $(-\infty;\ 0)$ i $(0;\ \infty)$ funkcja jest malejąca, ale funkcja nie jest monotoniczna,
- równanie $f(x) = m$: dla $m = 0$ nie ma rozwiązań, dla $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ ma jedno rozwiązanie.



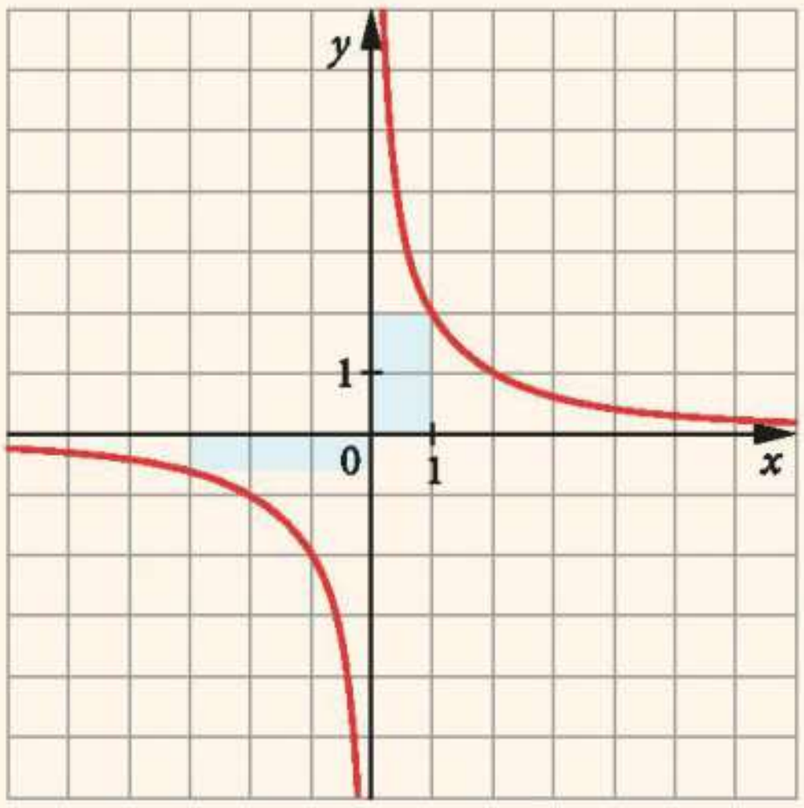
Zauważmy, że $|y| = \frac{|a|}{|x|}$. Jeżeli wartość bezwzględna x jest coraz większa, to wartość bezwzględna y maleje do zera – na wykresie funkcji punkty hiperboli są coraz bliższe osi x. Mówimy, że oś x jest **asymptotą poziomą** wykresu. Z kolei gdy wartość bezwzględna x zbliża się do zera, to wartość bezwzględna y nieograniczenie rośnie – na wykresie punkty hiperboli są coraz bliższe osi y. Mówimy, że oś y jest **asymptotą pionową** wykresu.

Dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ leżącego na hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ prostokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(x, 0)$, P, $(0, y)$ ma pole równe $|a|$.

Jest to prosta konsekwencja równości:

$$|x| \cdot |y| = |a|$$

ponieważ boki rozważanego prostokąta mają długości równe $|x|$ oraz $|y|$.



Zadania

12.1. Naszkicuj wykres i podaj własności funkcji.

a) $y = \frac{4}{x}$

b) $y = \frac{-4}{x}$

c) $y = \frac{-1}{3x}$

d) $y = \frac{6}{x}$

e) $y = \left|\frac{-6}{x}\right|$

f) $y = \left|\frac{1}{2x}\right|$

12.2. Dla jakich wartości parametru a wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez dany punkt?

a) $A = (2, -1)$

b) $A = (-3, 1)$

c) $A = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

d) $A = \left(\frac{5}{2}, -\frac{2}{5}\right)$

12.3. Zacieniuj zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, przez które przechodzą wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdy

a) $a \in \langle 2; 4\rangle$.

b) $a \in \langle 1; 4\rangle$.

c) $a \in \langle 1; 8\rangle \cup \{-1, -8\}$.

d) $a \in \langle -6; -2\rangle \cup \langle 2; 6\rangle$.

e) $a \in \langle -4; -1\rangle \cup (1; 4)$.

f) $a \in \{-4, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

12.4. Wymień wszystkie punkty o obydwu współrzędnych całkowitych, przez które przechodzi wykres funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$

b) $f(x) = -\frac{6}{x}$

c) $f(x) = -\frac{10}{x}$

d) $f(x) = \frac{5}{x}$

12.5. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $-\frac{6}{x} \leqslant -2$

b) $\frac{1}{x} \geqslant x$

c) $\frac{8}{x} < 6 - x$

d) $-\frac{4}{x} > \frac{1}{2}x^2$

13. Funkcja wymierna

Umiejętności:

- wyznaczanie dziedziny funkcji wymiernej
- rozwiązywanie układów równań prowadzących do równań kwadratowych

Umiemy już wykonywać działania na wyrażeniach wymiernych. Wprowadzimy teraz pojęcie funkcji wymiernej jednej zmiennej.

Definicja

Funkcją wymierną zmiennej x nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, w której W i P są wielomianami zmiennej x.

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

Zgodnie z definicją każdy wielomian jest funkcją wymierną. Podobną sytuację mamy w zbiorze liczb – każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

Przykład 1

a) Funkcja $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ jest funkcją wymierną – ilorazem wielomianów $W(x) = 2x + 5$ i $P(x) = x - 1$. Jej dziedziną jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{1\}$.

b) Funkcja $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ jest funkcją wymierną – ilorazem wielomianów $W(x) = 3$ i $P(x) = x^2 + 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbf{R}$.

c) Funkcja $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 6}{3}$ jest funkcją wymierną. W mianowniku mamy wielomian stały, zatem f jest wielomianem i dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbf{R}$.

Przykład 2 ◀ zad. 13.5

Wyznaczymy dziedzinę i naszkicujemy wykres funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

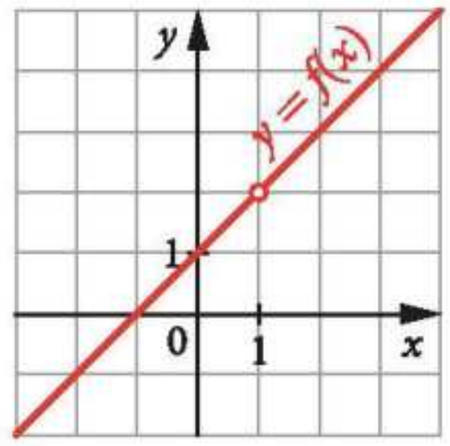
Przypomnijmy: dziedzinę funkcji wyznaczamy **przed** wykonaniem przekształceń we wzorze funkcji.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbf{R} - \{1\}$. Jeżeli rozłożymy wielomian w liczniku do postaci $(x - 1)(x + 1)$, to wzór funkcji $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ można uprościć.

Ostatecznie otrzymujemy wzór $f(x) = x + 1$ dla $x \neq 1$.

Zauważmy, że funkcje $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ i $g(x) = x + 1$ mają różne dziedziny, nie są zatem funkcjami równymi. Natomiast dla wszystkich argumentów $x \neq 1$ obydwie funkcje przyjmują identyczne wartości. Wykresem funkcji $y = g(x)$ jest prosta, a wykresem funkcji $y = f(x)$ jest prosta bez jednego punktu.



Przykład 3 ◀ zad. 13.6

Wyznaczymy dziedzinę D podanej funkcji.

Rozwiązanie

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ dla $x = 1$ lub $x = 2$, więc dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{1, 2\}$.

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{1, 2\}$

b) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{2}}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

$\left(x^3 - 8\right) - \left(6x^2 - 12x\right) = 0$

$(x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right) - 6x(x - 2) = 0$

$(x - 2)\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0$

$(x - 2)^3 = 0$

Miejscem zerowym mianownika jest liczba 2.

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{2\}$

Rysowanie wykresów funkcji wymiernych wymaga opanowania bardziej zaawansowanej matematyki. Do tego zagadnienia wrócimy w następnych klasach. Teraz omówimy metodę rysowania wykresu funkcji wymiernej jednego rodzaju.

W poprzednim roku zajmowaliśmy się funkcją zmiennej x postaci $y = \dfrac{a}{x}$ o współczynniku $a \neq 0$. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$, a jej wykresem – hiperbola. Po przesunięciu tej hiperboli o wektor $[p, q]$, otrzymujemy wykres funkcji $y = \dfrac{a}{x - p} + q$. Wzór tej funkcji można przekształcić tak, aby był ilorazem dwóch funkcji liniowych. Wystarczy dodać obydwa składniki, np.:

$$\frac{2}{x - 4} + 5 = \frac{2 + 5(x - 4)}{x - 4} = \frac{5x - 18}{x - 4}, \qquad \frac{-3}{x + 1} + \frac{3}{5} = \frac{-15 + 3(x + 1)}{5(x + 1)} = \frac{3x - 12}{5x + 5}$$

Funkcję wymierną będącą ilorazem dwóch funkcji liniowych, ale niebędącą funkcją liniową, nazywamy funkcją homograficzną. Sprawdzimy, jakie warunki muszą spełniać a, b, c, d, aby funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ była istotnie nowym rodzajem funkcji. Musimy przyjąć, że $c \neq 0$, bo w przeciwnym wypadku funkcja $y = \frac{ax+b}{d}$ byłaby funkcją liniową. Trzeba wykluczyć również sytuację, w której po skróceniu ułamka zmienna x w ogóle zniknie, np.:

$$\frac{5x+15}{2x+6} = \frac{5(x+3)}{2(x+3)} = \frac{5}{2} \text{ dla } x \neq -3$$

Zatem współczynniki nie mogą być proporcjonalne, czyli $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Jeżeli warunek ten zapiszemy w postaci $ad - bc \neq 0$, to będziemy mieli również gwarancję, że współczynniki b i d nie będą równocześnie zerami.

Definicja

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję wymierną określoną wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, jeżeli $c \neq 0$ oraz $ad - bc \neq 0$.

Zajmiemy się teraz takim przekształceniem wzoru funkcji homograficznej, aby jej wykres można było łatwo narysować.

Przykład 4 ◂ zad. 13.10

Przekształcimy podaną funkcję homograficzną do postaci $y = \frac{a}{x-p} + q$.

Rozwiązanie

a) $y = \frac{2x+3}{x}, \quad x \neq 0$

$\frac{2x+3}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$ ⟵ $a = 3,\ p = 0,\ q = 2$

⟵ przedstawiamy wzór funkcji jako sumę dwóch ułamków, z których jeden można skrócić

Odp.: $y = \frac{3}{x} + 2$

b) $y = \frac{x}{x-3}, \quad x \neq 3$

$\frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$ ⟵ $a = 3,\ p = 3,\ q = 1$

Odp.: $y = \frac{3}{x-3} + 1$

c) $y = \frac{3x+2}{x+2}, \quad x \neq -2$

$$\frac{3x+2}{x+2} = \frac{3(x+2)-6+2}{x+2} = 3 + \frac{-4}{x+2} \qquad \longleftarrow a = -4,\ p = -2,\ q = 3$$

Odp.: $y = \frac{-4}{x+2} + 3$

d) $y = \frac{4x+3}{3x-6}, \quad x \neq 2$

$$\frac{4x+3}{3x-6} = \frac{4x+3}{3(x-2)} = \frac{\frac{1}{3}(4x+3)}{x-2} = \frac{\frac{1}{3}\left[4(x-2)+8+3\right]}{x-2} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}(x-2)+\frac{11}{3}}{x-2} = \frac{\frac{11}{3}}{x-2} + \frac{4}{3} \qquad \longleftarrow a = \frac{11}{3},\ p = 2,\ q = \frac{4}{3}$$

Odp.: $y = \frac{\frac{11}{3}}{x-2} + \frac{4}{3}$

Takie same przekształcenia jak w omówionych przykładach można przeprowadzić na ogólnych danych. Zatem każdą funkcję homograficzną można zapisać w postaci:

$$y = \frac{a}{x-p} + q.$$

Wniosek

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Przykład 5 ◀ zad. 13.13

Sporządzimy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = \frac{-4x-14}{x+2}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2\}$.

Przekształcamy najpierw wzór funkcji:

$$\frac{-4x-14}{x+2} = \frac{-4x-8+8-14}{x+2} = \frac{-4(x+2)-6}{x+2}$$

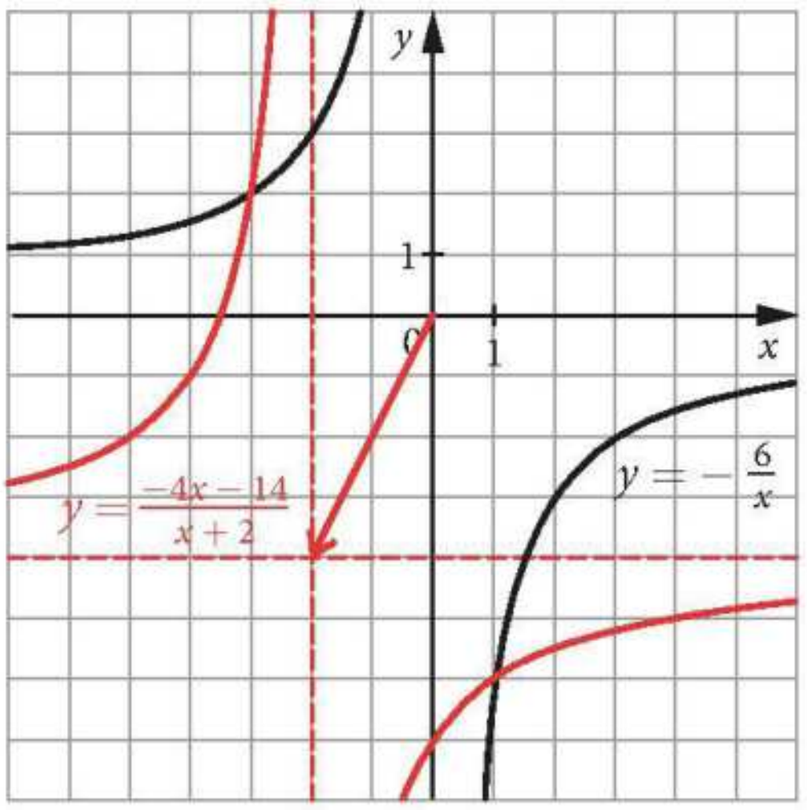
$$f(x) = \frac{-6}{x+2} - 4 \qquad \longleftarrow a = -6,\ p = -2,\ q = -4$$

Aby otrzymać wykres funkcji f, należy zatem hiperbolę o równaniu $y = \frac{-6}{x}$ przesunąć o wektor $[-2, -4]$.

Własności funkcji:

- dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2\}$,
- zbiorem wartości funkcji f jest $\mathbf{R} - \{-4\}$,
- asymptotami wykresu są proste o równaniach $x = -2$ i $y = -4$,
- miejscem zerowym jest $x = -\frac{7}{2}$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{7}{2}; -2\right)$,

  $f(x) < 0$ dla $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup (-2; \infty)$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
  - w przedziale $(-\infty; -2)$ jest rosnąca,
  - w przedziale $(-2; \infty)$ jest rosnąca.



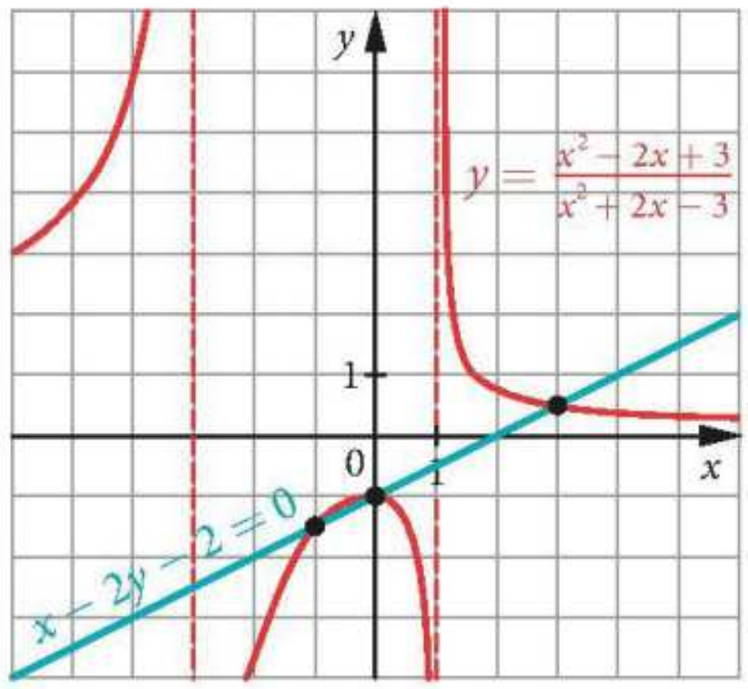
Rozwiązywanie układów równań wymiernych z dwiema niewiadomymi jest najczęściej zadaniem trudnym i często niewykonalnym metodami rachunkowymi. Obecnie nie ma potrzeby ćwiczenia takich umiejętności – tę pracę wykonują za nas komputery. Odpowiednio zaprogramowane, znajdują rozwiązania z niemal dowolną dokładnością. Dlatego poznamy metodę rozwiązywania układów równań tylko w najprostszych sytuacjach, kiedy całe zadanie można sprowadzić do rozwiązywania równań kwadratowych.

Dla przykładu pokazujemy, jak sobie radzić z układem równań wymiernych, jeżeli dysponujemy np. kalkulatorem graficznym lub prostym programem komputerowym, za pomocą którego można narysować wykresy funkcji.

Przykład 6 ◀ zad. 13.17

Odczytamy z wykresu rozwiązania danego układu równań.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3} \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$



Rozwiązanie

Na rysunku czerwona krzywa jest wykresem funkcji $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$, a niebieska – prostą o równaniu $x - 2y - 2 = 0$.

Wykresy przecinają się w trzech punktach: $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $(0, -1)$ oraz $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.
Podstawiamy do układu równań pary liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

i sprawdzamy, że istotnie każda z nich spełnia obydwa równania.

Podczas rozwiązywania układu równań wymiernych, z których jedno jest równaniem liniowym, możemy użyć metody podstawiania. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 7 ◀ zad. 13.18

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} y = \frac{2}{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq 1$.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \longleftarrow \text{do pierwszego równania podstawiamy } y \text{ z drugiego równania}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \longleftarrow \text{mnożymy obie strony pierwszego równania przez } 2(x-1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1, \ x_2 = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

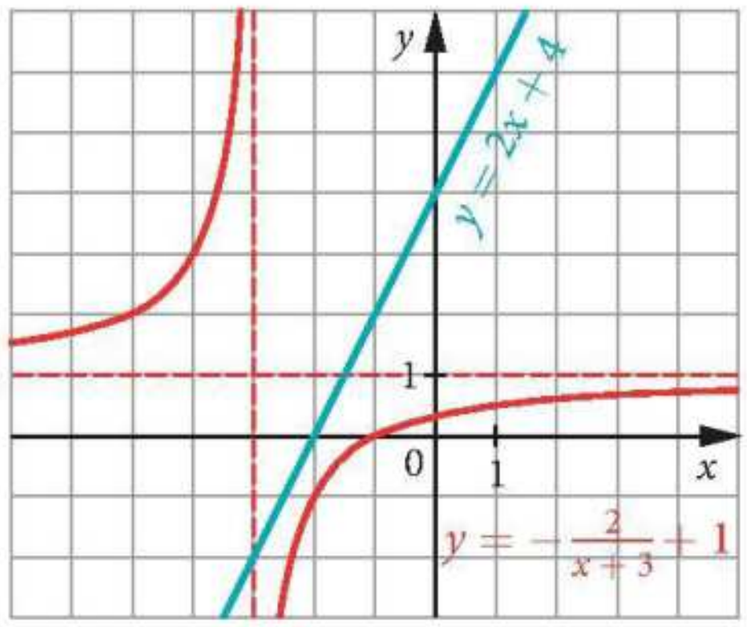
Odp.: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Aby odpowiedzieć na pytanie, ile rozwiązań ma układ równań, czasem wystarczy zrobić rysunek.

Przykład 8

Wykres obok przedstawia hiperbolę o równaniu $y = -\frac{2}{x+3} + 1$ oraz nieprzecinającą ją prostą o równaniu $y = 2x + 4$. Zatem układ równań

$\begin{cases} y = -\frac{2}{x+3} + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ nie ma rozwiązań.



Przykład 9 ◀ zad. 13.23

Rozwiążemy graficznie równanie $\left|\frac{2}{x+1}-3\right|=1$.

Rozwiązanie

Aby rozwiązać graficznie podane równanie, musimy znaleźć w układzie współrzędnych punkty, których pierwsza współrzędna spełnia to równanie. Pokażemy dwa sposoby szukania takich punktów.

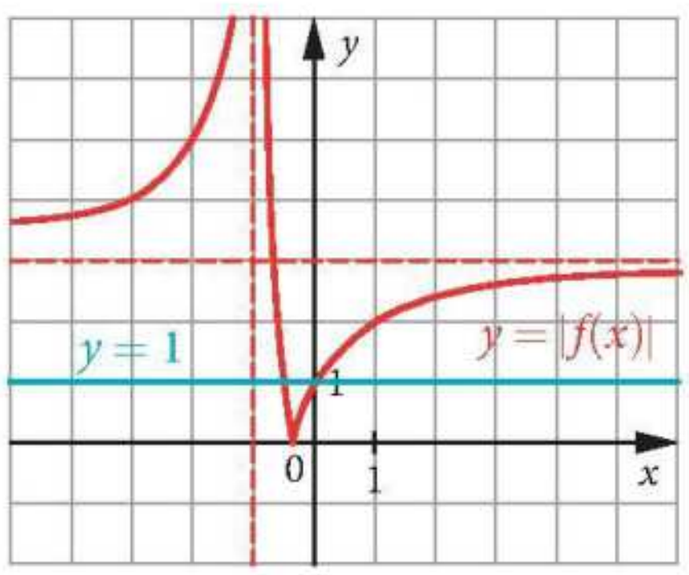
Szkicujemy wykres funkcji $f(x)=\frac{2}{x+1}-3$. Asymptotami wykresu tej funkcji homograficznej są proste: $x=-1$ i $y=-3$, a jej dziedziną zbiór $\mathbf{R}-\{-1\}$.

I sposób

Rysujemy wykresy:

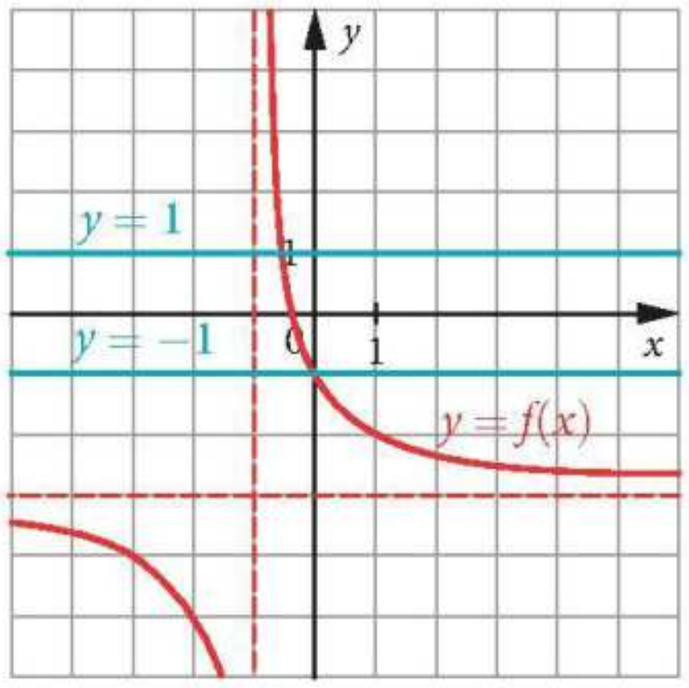
$y=|f(x)|$ i prostą $y=1$,

a następnie odczytujemy współrzędne ich punktów przecięcia.



II sposób

$|f(x)|=1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)=1$ lub $f(x)=-1$, więc w układzie współrzędnych z narysowanym wykresem funkcji $y=f(x)$ prowadzimy dwie proste: $y=1$ oraz $y=-1$ i odczytujemy współrzędne punktów przecięcia tych prostych z wykresem funkcji.



W każdym z opisanych sposobów otrzymujemy dwa punkty o pierwszych współrzędnych: $x=-\frac{1}{2}$ oraz $x=0$. Koniecznym krokiem rozwiązania graficznego jest sprawdzenie, czy te współrzędne spełniają podane równanie.

Jeżeli $x=-\frac{1}{2}$, to $\left|\frac{2}{-\frac{1}{2}+1}-3\right|=|4-3|=1$,

jeżeli $x=0$, to $\left|\frac{2}{0+1}-3\right|=|2-3|=1$.

Odp.: $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=0$

Zadania

W każdym z zadań 13.1–13.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

13.1. Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x+5}{x^2+5x}$ może być zbiór

A. $\mathbf{R} - \{0\}$ **B.** $\mathbf{R} - \{0, 5\}$ **C.** $\mathbf{R} - \{-5, 0\}$ **D.** $\mathbf{R}$

13.2. Wskaż funkcję wymierną.

A. $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$ **B.** $f(x) = \frac{3x+\sqrt{2}}{5x-1}$ **C.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ **D.** $f(x) = \frac{x^3-4}{\sqrt{x}+1}$

13.3. Wskaż funkcję, która nie jest funkcją wymierną.

A. $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}x^4 - 3x}{x^2}$ **B.** $f(x) = \sqrt{7}$ **C.** $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **D.** $f(x) = \frac{x^3-4^x}{5}$

13.4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}$.

B. Miejscem zerowym funkcji f jest $x = -1$.

C. $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -1$.

13.5. Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-2x}$.

13.6. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-2x}$

b) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+5}$

c) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-2x^2-x+2}$

d) $f(x) = \frac{x-4}{x^3+x^2+3x+3}$

e) $f(x) = \frac{x}{x^3-27}$

f) $f(x) = \frac{7x^2-4x+2}{x^3-5x^2+4x}$

13.7. Podaj przykład funkcji wymiernej, której dziedziną jest podany zbiór.

a) $\mathbf{R} - \{-2\}$ b) $\mathbf{R} - \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ c) $\mathbf{R} - \{-2, 1\}$ d) $\mathbf{R} - \{-5, -2, 2, 5\}$

13.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-2x^2-x+2}$

c) $f(x) = \frac{x-4}{x^3+x^2+3x+3}$

d) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^4-1}$

13.9. Wyznacz argumenty, dla których wartość funkcji $y = f(x)$ jest równa t.

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x+7}$ $t = -3$ c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x}$ $t = 1$

b) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-6x+8}$ $t = -1$ d) $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+15}$ $t = 2$

13.10. Przekształć podaną funkcję homograficzną do postaci $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$.

a) $f(x) = \frac{3x-5}{x}$ b) $f(x) = \frac{3x}{x-5}$ c) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{4x+20}{x+3}$

13.11. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{-4x}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{-x-3}{x+5}$ d) $f(x) = \frac{-2x-7}{x+3}$

13.12. Wyznacz równania asymptot wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{11x+21}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{-8x-43}{x+6}$

13.13. Narysuj wykres funkcji i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, równania asymptot.

a) $f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

13.14. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{3}{|x-2|}$ b) $f(x) = \left|\frac{2x+2}{x+3}\right|$ c) $f(x) = \left|\frac{x-3}{x+2}\right|$ d) $f(x) = \frac{x+3}{|x|}$

13.15. Określ dziedzinę, wyznacz miejsca zerowe i narysuj wykres funkcji.

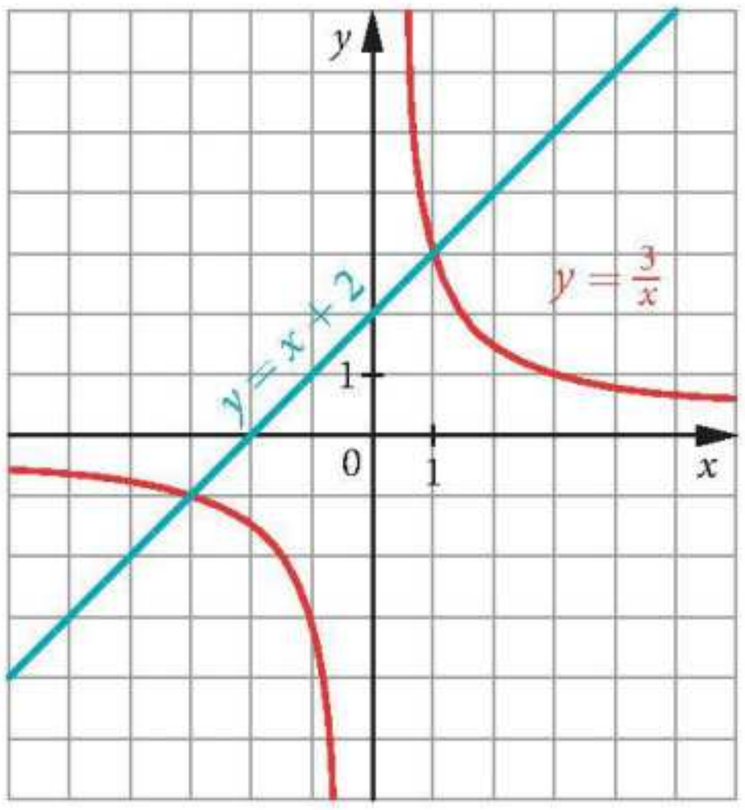
a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x+6}{x-2}$ d) $f(x) = \frac{6x-18}{x^2-9}$

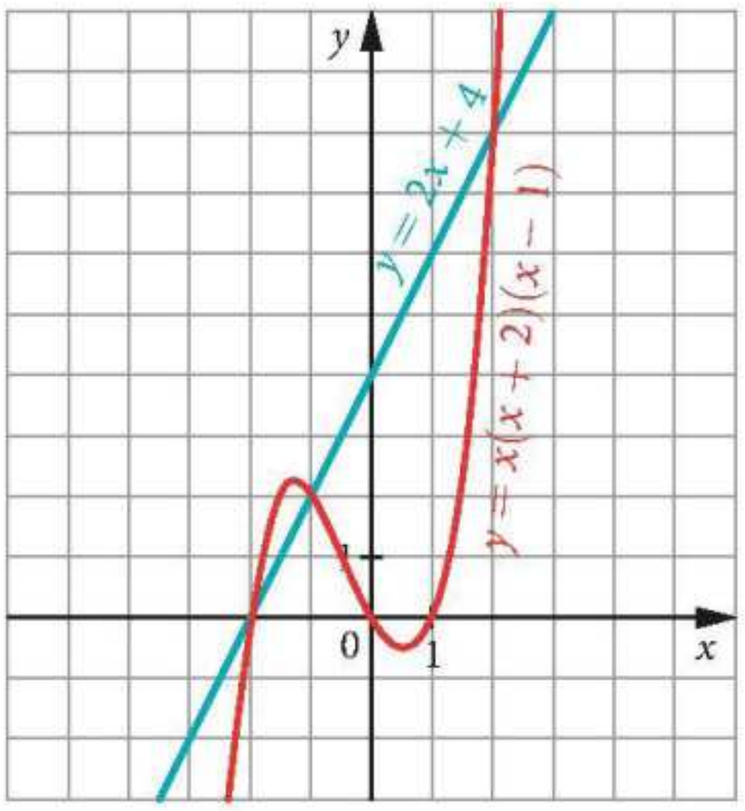
* **13.16.** Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, równania osi symetrii wykresu.

13.17. Odczytaj z wykresu rozwiązania układu równań, a następnie sprawdź je rachunkowo.

a) $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x(x + 2)(x - 1) \end{cases}$



13.18. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{4}{y} \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{21}{x} \\ y = x + 4 \end{cases}$

13.19. Rozwiąż graficznie układ równań, a następnie sprawdź wynik rachunkowo.

a) $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{5}{|x|} \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

13.20. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $\frac{9 - x^2}{x + 3} \geqslant 2$

b) $\frac{x - 2}{x^2 - 2x} \leqslant 2$

13.21. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = \frac{4x^2 - 6x}{2x - 3}$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x - 4}$

* **13.22.** Rozwiąż graficznie równanie.

a) $\frac{x + 3}{x - 1} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

b) $\frac{2x + 4}{x + 3} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{-5x + 8}{x - 2} = x^2 - 4$

d) $\frac{2x - 2}{x + 1} = -2x^2 + 2$

13.23. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $\left|\frac{5}{x+3}-2\right|=3$ b) $\left|\frac{3x-6}{x-4}\right|=x-2$ c) $\left|\frac{-3x+23}{x-5}\right|=5$

13.24. Sporządź wykresy funkcji f i g, a następnie odczytaj rozwiązanie podanej nierówności.

a) $f(x)=\frac{2x}{x-2}$ $g(x)=\frac{1}{2}x+2$ $f(x)\geqslant g(x)$

b) $f(x)=\frac{3x-9}{x-4}$ $g(x)=\frac{3x-9}{x-2}$ $f(x)<g(x)$

c) $f(x)=\frac{x-1}{x-5}$ $g(x)=5(x-5)^2$ $f(x)\leqslant g(x)$

d) $f(x)=\left|\frac{-3x-12}{x+2}\right|$ $g(x)=(x+2)^2+2$ $f(x)>g(x)$

13.25. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x)=\frac{2x+1}{mx^2-mx+1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

D **13.26.** Wykaż, że zbiorem wartości funkcji $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ jest przedział $\langle -1;\ 1\rangle$.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}-\{-1,\ 1\}$.

B. $f(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(-1;\ 1)$.

C. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.

2. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} y=\frac{4}{x} \\ y=2x+2 \end{cases}$, a następnie sprawdź wynik rachunkowo.

3. Wyznacz dziedzinę D i miejsca zerowe funkcji $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-5x-6}$.

4. Podaj przykład funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}-\left\{-5,\ -2\sqrt{2},\ 7\right\}$.

D **5.** Wykaż, że wykresem funkcji $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{dla } x\neq 2 \\ 7 & \text{dla } x=2 \end{cases}$ jest prosta.

14. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–33 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż wartość wielomianu $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ dla $x = -1$.

A. -7 **B.** -3 **C.** 1 **D.** 0

2. Funkcja $f(x) = (p + 1)x + 5$ jest wielomianem stopnia 0, gdy

A. $p = 1$. **B.** $p = 0$. **C.** $p = -1$. **D.** $p > 0$.

3. Wielomian $(2x + 3)^3$ zapisano w postaci sumy tak, że jeden z podanych jednomianów jest jej składnikiem. Wskaż ten jednomian.

A. $2x^3$ **B.** $18x^2$ **C.** $54x$ **D.** 9

4. Wskaż liczbę równą $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^3$.

A. 1 **B.** $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ **C.** $9\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$ **D.** $9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$

5. Jaka jest wartość wielomianu $x^2y^4 - 2xy - \sqrt{3}x^2y$ dla $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{3}$?

A. 0 **B.** $2\left(12 + \sqrt{6}\right)$ **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** -2

6. Wskaż zbiór rozwiązań równania $x^3 - 3x + 2 = 0$.

A. $\{-1, 1, 2\}$ **B.** $\{-2, 1\}$ **C.** $\{-1, 1, -2\}$ **D.** $\emptyset$

7. Ile pierwiastków ma wielomian $x^3 + 2x^2 + x$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

8. Którego z podanych wielomianów nie da się rozłożyć na czynniki?

A. $x^6 + 1$ **B.** $x^4 + 1$ **C.** $x^3 + 1$ **D.** $x^2 + 1$

9. Równanie $x^3 - x^2 - x + 10 = 0$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie trzy rozwiązania.

10. Równanie $2x\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie cztery rozwiązania.
C. ma dokładnie pięć rozwiązań.
D. ma dokładnie sześć rozwiązań.

11. Wskaż wyrażenie, które nie występuje w rozkładzie na czynniki wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$.

A. $x - 2$ **B.** $x + 2$ **C.** $x - 4$ **D.** $x + 4$

12. Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ przez dwumian $x + 2$.

A. 5 **B.** 3 **C.** 0 **D.** -1

13. Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^9 + x^4 - 1$ przez dwumian $x + 1$.

A. -3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 3

14. Dla jakiej wartości m wielomian $W(x) = x^3 - 2mx^2 + 3x - 6$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x - 2$?

A. -2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

15. Wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 1$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$, gdy

A. $a = 3,\ b = 3.$ **B.** $a = -3,\ b = 3.$ **C.** $a = 0,\ b = 3.$ **D.** $a = 1,\ b = -3.$

16. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 1\right)(x - 2)^3$. Jaką krotność ma ten pierwiastek?

A. trzy **B.** cztery **C.** pięć **D.** sześć

17. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x^3 \geqslant x$.

A. $\langle 1;\ \infty)$

B. $(-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 1;\ \infty)$

C. $\emptyset$

D. $\langle -1;\ 0\rangle \cup \langle 1;\ \infty)$

18. Wskaż dziedzinę funkcji $y = \sqrt{x^3(x^2 - 3x)}$.

A. **R**

B. $\langle 3;\ \infty) \cup \{0\}$

C. $(-\infty;\ 0\rangle \cup \langle 3;\ \infty)$

D. $\langle 0;\ 3\rangle$

19. Wiadomo, że $a > b > c > 0$. Wynika stąd, że

A. $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$.

B. $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$.

C. $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$.

D. jest za mało danych, żeby porównać $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$.

20. Grzegorz zaplanował porządkowanie strychu przez a godzin. Przepracował już b godzin, $b < a$. Jaka część zaplanowanego czasu pracy mu została?

A. $a - b$ **B.** $\frac{1}{a - b}$ **C.** $\frac{a - b}{a}$ **D.** $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

21. Dla $x \neq 0$ i $y \neq 0$ wyrażenie $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ można zapisać jako

A. 0. **B.** -1. **C.** $\frac{x-y}{xy}$. **D.** $\frac{x^2-y^2}{xy}$.

22. Który z ułamków jest równy sumie $\frac{r}{x} + \frac{y}{m}$? Zakładamy, że $x \neq 0$ i $m \neq 0$.

A. $\frac{ry}{xm}$ **B.** $\frac{r+y}{xm}$ **C.** $\frac{rm+xy}{x+m}$ **D.** $\frac{rm+xy}{xm}$

23. Jeżeli ułamek $\frac{2x}{x+1}$ rozszerzymy tak, aby w jego mianowniku było wyrażenie $x^3 + 1$, to w liczniku otrzymamy

A. $2x^3 + 2x^2 + 2$. **B.** $2x^2 + x$. **C.** $2x^3 - 2x^2 + 2x$. **D.** $2x^2 + 2x$.

24. Wskaż dziedzinę wyrażenia $\frac{x}{x-1} : \frac{x+2}{x-5}$.

A. $\mathbf{R} - \{1, 5\}$ **B.** $\mathbf{R} - \{-2, 1\}$ **C.** $\mathbf{R} - \{-2, 1, 5\}$ **D.** $\mathbf{R} - \{-2, 0, 1, 5\}$

25. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{x(x-1)}{x+3} = 0$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

26. Wskaż równanie mające ten sam zbiór rozwiązań co równanie $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$.

A. $\left(x^2 - 1\right)(x - 1) = 0$

B. $\left(x^2 - 1\right) = 0$

C. $x - 1 = 0$

D. $x + 1 = 0$

27. Jaki jest zbiór rozwiązań nierówności $\frac{3}{x} > -1$?

A. $(-3; \infty)$ **B.** $(-\infty; -3)$ **C.** $(-\infty; -3) \cup (0; \infty)$ **D.** $\emptyset$

28. Który z wykresów funkcji przechodzi przez początek układu współrzędnych?

A. $y = -\frac{1}{x} + 2$ **B.** $y = \frac{1}{x+1} + 1$ **C.** $y = \frac{2}{x+1} - 2$ **D.** $y = \frac{4}{x}$

29. Która liczba jest miejscem zerowym funkcji $y = \frac{3}{x-4} + 5$?

A. 3,4 **B.** $-1{,}8$ **C.** 2,7 **D.** 4,4

30. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{x-2}{x-5}$?

A. $[5, 1]$

B. $[-5, 1]$

C. $[-5, -3]$

D. Nie istnieje taki wektor.

31. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

A. $\{x \in \mathbf{R}: x > 0\}$ **B.** $\mathbf{R} - \{-2\}$ **C.** $\mathbf{R} - \{1\}$ **D.** $\mathbf{R} - \{2\}$

32. Wskaż dziedzinę funkcji $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$.

A. $\mathbf{R} - \{-4\}$ **B.** $\mathbf{R}$ **C.** $\mathbf{R} - \{-4, 4\}$ **D.** $\mathbf{R} - \{0\}$

33. Jaki jest zbiór wartości funkcji $y = \left|\frac{x-3}{x}\right|$?

A. $(0; \infty)$ **B.** $\langle 0; \infty)$ **C.** $(0; \infty) - \{1\}$ **D.** $\mathbf{R}$

W zadaniach 34–45 oceń prawdziwość podanych zdań.

34. Wyrażenie $x^3 - y^3$ to

A. sześcian różnicy liczb x i y.

B. różnica sześcianów liczb x i y.

C. trzecia potęga różnicy liczb x i y.

35. Dane są wielomiany $W(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + 11x + 3$ i $P(x) = -6x^4 + 5x^2 + x$.

A. Stopień wielomianu $W(x) + P(x)$ jest równy 9.

B. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 9.

C. Współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 3.

36. Dany jest wielomian $W(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2$.

A. Wielomian $W(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.

B. Jedynym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest $x = 0$.

C. Suma pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest równa $\frac{1}{2}$.

37. Dane są wielomiany $W(x) = (a+1)x^3 - 3x^2 + (a - b + 2)x - 1$ i $Q(x) = (4 + b)x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

A. Istnieje dokładnie jedna para wartości parametrów a i b, dla których wielomiany W i Q są równe.

B. Istnieje nieskończenie wiele par wartości parametrów a i b, dla których wielomiany W i Q są równe.

C. Wielomiany W i Q są równe dla dowolnych wartości parametrów a i b.

38. Wielomian $W(x) = x^4 - x - \sqrt{3}$

A. ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny.

B. przyporządkowuje każdej liczbie niewymiernej liczbę niewymierną.

C. przyporządkowuje każdej liczbie wymiernej liczbę niewymierną.

39. Dana jest funkcja $f(x) = \left(x^2 - 2x - 3\right)\left(x^2 - 6x + 5\right)$.

A. $f(-10) > 0$ **B.** $f(4) \leqslant 0$ **C.** $f(5) \geqslant 0$

40. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2mx^2 + 3x - 6$.

A. Dla dowolnej całkowitej wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu W przez $x - 2$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 4.

B. Wielomian W jest podzielny przez $x - 2$ dla $m = 1$.

C. Dla $m < 1$ reszta z dzielenia wielomianu W przez $x - 2$ jest liczbą dodatnią.

41. Równanie wielomianowe trzeciego stopnia może mieć

A. trzy pierwiastki. **B.** dwa pierwiastki. **C.** jeden pierwiastek.

42. Wiadomo, że $ab = a^2$ i $a \neq 0$. Zatem

A. $a - b = 2$. **B.** $a - b = 0$. **C.** $a - b$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

43. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$, określonej w zbiorze $\mathbf{R} - \{2\}$, ma

A. co najwyżej jedną oś symetrii.

B. co najmniej dwie osie symetrii.

C. środek symetrii.

44. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x - x^3}{|x|}$.

A. Funkcja f nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.

B. $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$.

C. Początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji f.

45. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x^3 - 8}$.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$.

B. Dla wszystkich $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ wartości funkcji f są dodatnie.

C. Wartość funkcji f jest równa 4 dla dokładnie dwóch argumentów.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

46. Dane są wielomiany: $W(x) = 4x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 2x - 7$, $Q(x) = 2x - 3$ i $R(x) = x^2 - x$. Wyznacz $W(x) - (Q(x))^2 \cdot R(x)$.

47. Wyznacz liczbę m tak, aby reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx - 1$ przez wielomian $Q(x) = x - 2$ była równa 5.

48. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $Q(x) = 3\pi x^4 + 6x^2$

b) $Q(x) = 14x^5 + 21x^3$

c) $Q(x) = 24x^6 - 36x^4$

d) $Q(x) = 7x^8 - 21x^6$

e) $Q(x) = 2x^4 - 16x$

f) $Q(x) = x^6 - 1$

49. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$
b) $W(x) = 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 20x$
c) $W(x) = x^4 - 18x^2 + 81$
d) $W(x) = -x^4 - x^2 + 2$
e) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
f) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 14$

50. Liczby -3, 2 i 5 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Wyznacz współczynniki tego wielomianu.

51. Podaj przykład równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są liczby -2, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$.

52. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0$
b) $4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$
c) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$
d) $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$
e) $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$
f) $5x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 13x = 0$
g) $-x^3 + 5x^2 + 9x - 45 = 0$
h) $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 20x = 0$

53. Rozwiąż równanie.

a) $\left(x + \sqrt{7}\right)(x - 2)^2 = 0$
b) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$
c) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$
d) $4x^4 - 29x^2 + 25 = 0$
e) $3\left(x^2 - 4x\right) - \left(x^2 - 4x\right)^2 + 10 = 0$
f) $\left(x^4 - 5x^2 + 2\right)^2 - 14\left(x^4 - 5x^2 + 2\right) = 32$

54. Rozwiąż nierówność.

a) $x^8 > 16$
b) $(x + 3)(x - 1)^2 > 0$
c) $x^3 - 2x^2 - 9 \leqslant 0$
d) $4x^5 - 17x^3 + 4x < 0$
e) $2x^3 + 9x^2 - 8x - 36 \geqslant 0$
f) $-4x^3 - 32x^2 - 85x - 75 < 0$

55. Wyznacz takie wartości parametrów a i b, aby podane równanie było spełnione przez wszystkie liczby należące do jego dziedziny.

a) $\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2}$
b) $\frac{3x - 10}{x^2 - 7x + 12} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x - 4}$

D **56.** Wiadomo, że $a + \frac{1}{a} = 3$. Wykaż, że $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

57. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomiany $W(x) = (3x - 1)^3 + ax$ i $P(x) = (3x + 1)\left(9x^2 + bx - 1\right)$ są równe?

58. Znajdź wielomian, którego kwadrat równa się $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$.

59. Dla jakich wartości parametrów a i b liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 + ax + b$?

60. Jednym z pierwiastków równania $(m-1)x^3 + \frac{1}{3}mx^2 - (2m-1)x + m - 1 = 0$ z niewiadomą x jest liczba $\frac{1}{2}$. Rozwiąż to równanie.

61. Pierwiastkami wielomianu $x^3 + ax^2 - bx - 6$ są liczby -1 oraz 3. Wyznacz współczynniki a i b. Czy ten wielomian ma inne pierwiastki?

D **62.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej x wartość wielomianu $W(x) = x^3 - x$ jest liczbą podzielną przez 6.

63. $W(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia, $W(0) = 9$, $W(1) = 12$ i $W(-1) = 16$. Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem tego wielomianu. Wyznacz $W(x)$.

64. Rozwiąż nierówność.

a) $\left|x^3 - 3x + 1\right| \leqslant 1$

b) $\left|x^3 - 2x^2 + x - 1\right| > 1$

c) $|x|\left(x^2 - 7\right) + 6 > 0$

d) $x^3 + 2x^2 > 4|x + 2|$

65. Dla jakich argumentów x wartości funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -2x^2 + 5x - 3$?

66. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{5x^2 - 6x - x^3} + (x+5)\sqrt{x^3 - 1}$.

67. Wyznacz najmniejszą liczbę niewymierną (o ile istnieje) spełniającą nierówność $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 15x \leqslant 0$.

68. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ jest równa 0 oraz $W(0) = 6$ i $W(2) = -4$. Rozwiąż nierówność $W(x) \leqslant 0$.

69. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - bx - 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$, a dla $x = 1$ ma wartość równą -8. Dla jakich x wielomian ten ma wartość nieujemną?

D **70.** Wykaż, że jeśli wielomian $W(x) = x^3 + 3px + q$ ma pierwiastek dwukrotny, to $4p^3 + q^2 = 0$.

D **71.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \neq 0$ każdy z wielomianów postaci $W(x) = x^{2n} + x - 27$ ma co najmniej dwa miejsca zerowe.

72. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x}{x+1} = \frac{1}{2x}$

b) $\frac{3}{x+5} - \frac{1}{x-7} = \frac{2-2x}{x^2-2x-35}$

c) $\frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{x-4}{2x-6} = 1$

d) $\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x^2+2x} = \frac{x}{x^2-4}$

73. Jedna drukarka drukuje cały nakład ulotek w czasie o godzinę dłuższym niż druga. Wydrukowanie wszystkich ulotek na obydwu drukarkach pracujących równocześnie zajęło 1 godzinę i 12 minut. Ile czasu drukowałaby wszystkie ulotki każda z drukarek, pracując oddzielnie?

74. Autobus miejski pokonuje odległość 7 km ze średnią prędkością 42 km/h. Po drodze zatrzymuje się na 13 przystankach – na każdym średnio 30 sekund. Jednocześnie z autobusem na tę samą trasę wyrusza rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Który pojazd pierwszy pokona całą trasę? Jaki dystans zostanie wtedy do przejechania drugiemu pojazdowi?

75. Pociąg zatrzymany na czerwonym świetle stał 20 minut. Następnie przejechał 100 km z prędkością o 20 km/h większą od zaplanowanej, dzieki czemu zmniejszył opóźnienie do 5 minut. Z jaką prędkością przejechał te 100 km?

76. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x^2-2x+9}{x+1} < 3$

b) $\frac{3x+7}{x^2+6x+9} \geqslant 1$

c) $\frac{x^2-x-12}{x-4} > 5$

d) $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x+9}{x-5} + \frac{2}{x^2-9x+20} \geqslant 0$

e) $\frac{2x^2+x+1}{x^2+3x} < \frac{2}{3}$

f) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x+14}{x} + \frac{2}{x^2+x} \leqslant 0$

77. Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $(2m+1)x^2-(m+3)x+2m+1=0$ jest większa od 1?

78. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^4-(2m+6)x^2+9-m^2=0$ ma cztery różne rozwiązania?

79. Narysuj wykres funkcji $f(x)=\frac{x^3-x}{|x+1|}$.

80. Zapisz w prostszej postaci podane wyrażenie.

a) $\sqrt{(x^2+9y^2)^2-81y^4} : \sqrt{x^2+18y^2}$

b) $\sqrt[4]{\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)^2+12\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)+36}$

* **81.** Rozwiąż równanie $\left(x^2+x+2\right)^2-3x^2-3x-10=0$.

D * **82.** Wykaż, że równanie $\frac{x^6-\sqrt{7}}{x}=1$ ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny.

Planimetria

3

1. Wstęp do planimetrii

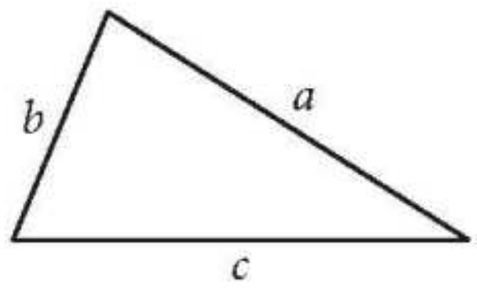
Umiejętności:

- korzystanie z nierówności trójkąta
- korzystanie z twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do niego
- korzystanie z własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta
- wykonywanie podstawowych konstrukcji geometrycznych

Nierówność trójkąta

Z trzech odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy te długości spełniają **nierówność trójkąta**, czyli suma dowolnych dwóch z nich jest większa od trzeciej:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ a+c>b \end{cases}$$



Ten układ nierówności można zapisać krócej.

Z każdej nierówności wyznaczamy jedną zmienną, np. c:

$$\begin{cases} c<a+b \\ c>a-b \\ c>-a+b \end{cases}$$ ⟵ ostatnie dwie nierówności oznaczają, że $c>|a-b|$

Czyli dany układ nierówności można zastąpić nierównością podwójną:

$$|a-b|<c<a+b$$

Podsumujmy: z trzech odcinków o długościach a, b i c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy $|a-b|<c<a+b$.

Zatem dla dowolnych różnych punktów A, B, C na płaszczyźnie prawdziwa jest nierówność:

$$|AB|+|BC|\geqslant|AC|$$

przy czym punkt B należy do odcinka AC wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|AB|+|BC|=|AC|$$

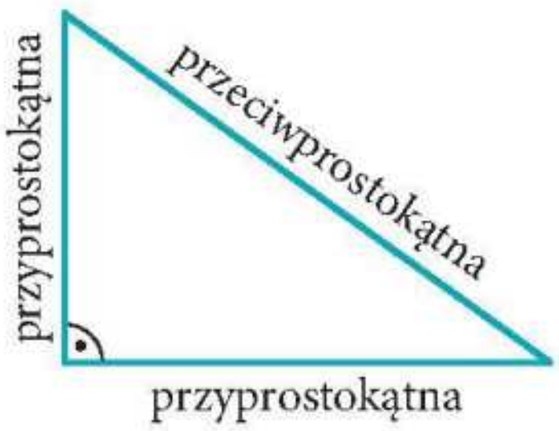
Przypominamy: używamy w podręczniku zwrotów „bok a trójkąta" zamiast „bok trójkąta o długości a", podobnie „wysokość równa 3", a nie „długość wysokości równa 3", „trójkąty mają równe przeciwprostokątne" zamiast „trójkąty mają przeciwprostokątne równej długości" itp.

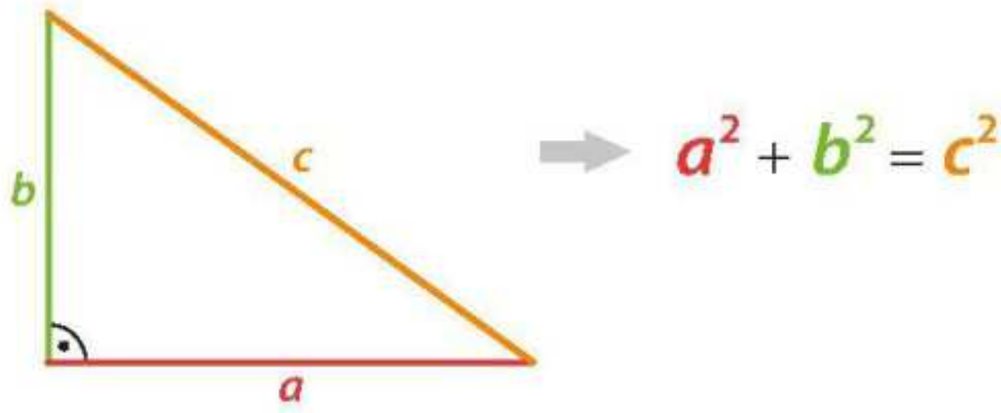
Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego

Twierdzenie

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.





Wnioski

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c (zob. rysunek powyżej):

- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$,
- najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna: $c > a$ i $c > b$.

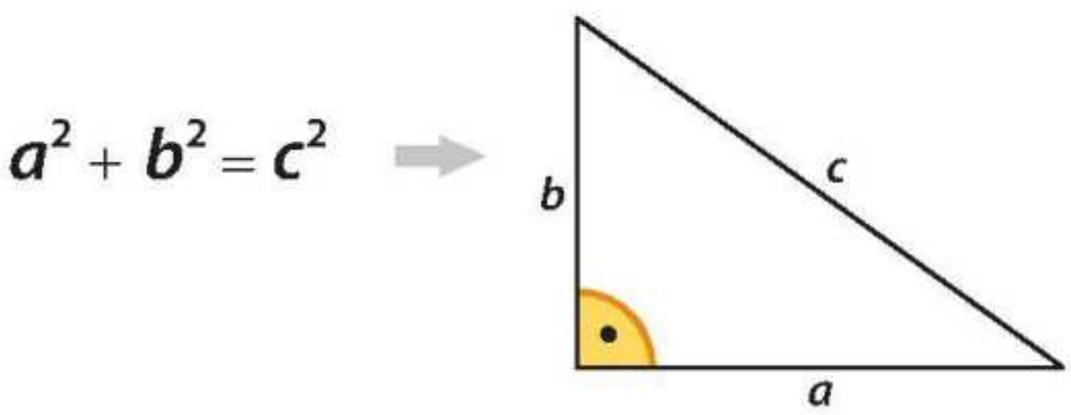
Dzięki twierdzeniu Pitagorasa znamy zależność między długościami boków trójkąta prostokątnego. Okazuje się, że jeśli w pewnym trójkącie zachodzi ta zależność, tzn. gdy długości boków a, b, c spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$, to jest to trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości c.

Twierdzenie

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to ten trójkąt jest prostokątny.

Dowód tego twierdzenia poznacie podczas dalszej nauki matematyki.



Przykład 1 ◂ zad. 1.4

Sprawdzimy, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

a) 10, 24, 26 b) $7, \sqrt{53}, 2$ c) 6, 8, 9 d) 3, 4, 7

Rozwiązanie

a) $26^2 = 676,\ 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$

b) $7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53 = \left(\sqrt{53}\right)^2$

c) $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \neq 9^2 = 81$

d) $3 + 4 = 7$, zatem z tych odcinków nie można zbudować trójkąta.

Odp.: a), b) – tak, c), d) – nie

Symetralna odcinka i jej własności

Definicja

Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.

Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest jego symetralna, a drugą – prosta, w której ten odcinek się zawiera.

Twierdzenie

Jeżeli punkt P leży na symetralnej odcinka AB, to jego odległości od punktów A i B są jednakowe:

$$|AP| = |PB|$$

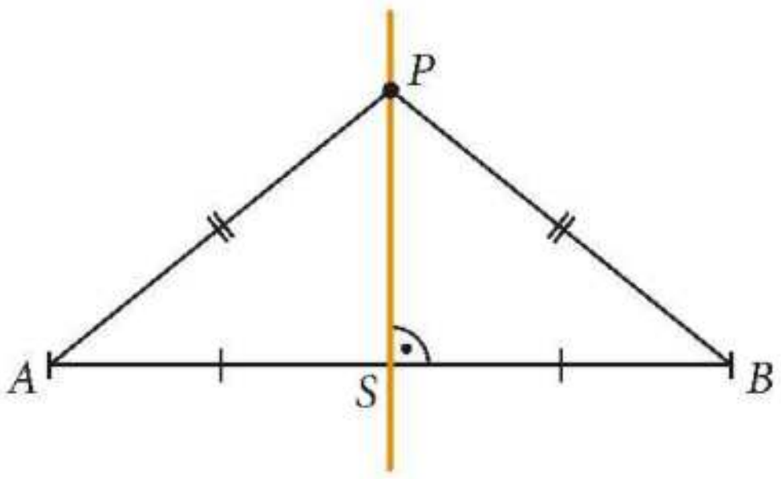
I odwrotnie:

Jeżeli odległości punktu P od punktów A i B są jednakowe, to punkt P leży na symetralnej odcinka AB.

Wniosek

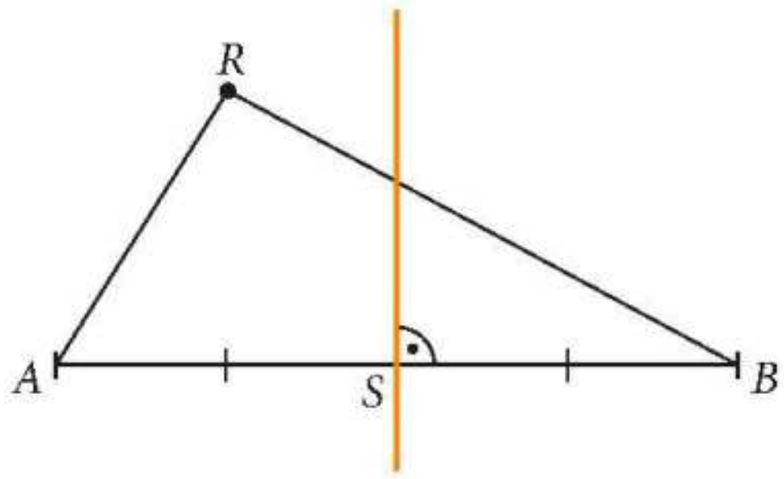
Jeżeli odległości punktu R od końców odcinka AB są różne, to punkt R nie leży na symetralnej odcinka AB.

Punkt P leży na symetralnej odcinka AB.



$|AS| = |SB|,\ |AP| = |PB|$

Punkt R nie leży na symetralnej odcinka AB.

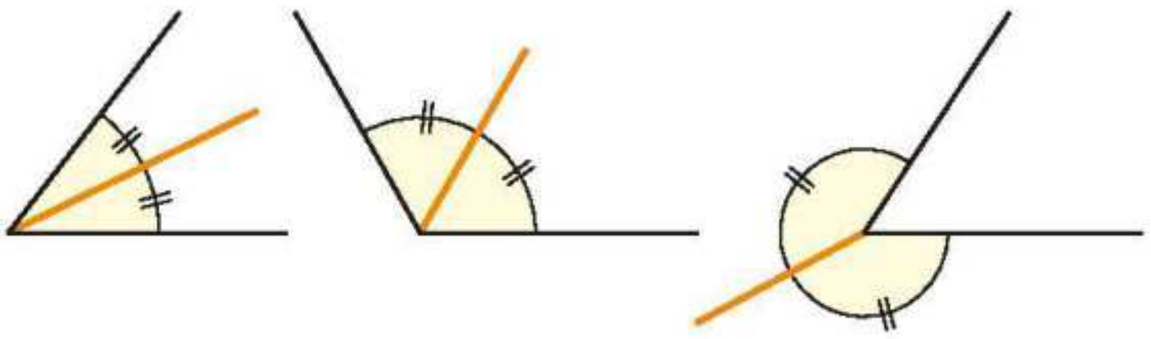


$|AS| = |SB|,\ |AR| \neq |RB|$

Dwusieczna kąta i jej własności

Definicja

Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca ten kąt na dwa kąty przystające.



- Kąty, które mają równe miary, nazywamy kątami równymi.
- Równe kąty, podobnie jak równe odcinki, zaznaczamy w ten sam sposób.

Każdy kąt ma jedną oś symetrii. Dwusieczna kąta zawiera się w jego osi symetrii.

Twierdzenie

Jeżeli punkt P leży na dwusiecznej kąta o mierze mniejszej od 180°, to jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta.

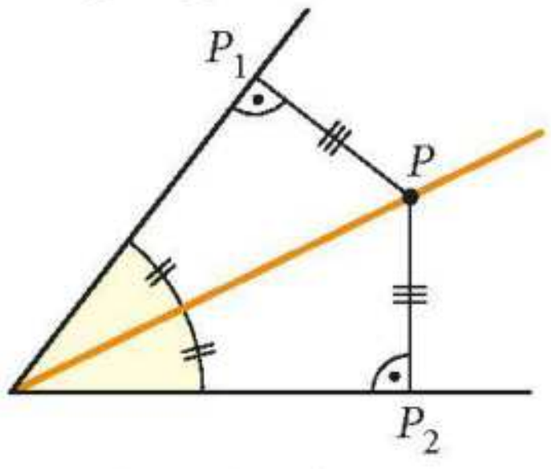
I odwrotnie:

Jeżeli punkt P położony wewnątrz kąta o mierze mniejszej od 180° jest jednakowo oddalony od jego ramion, to P leży na dwusiecznej tego kąta.

Wniosek

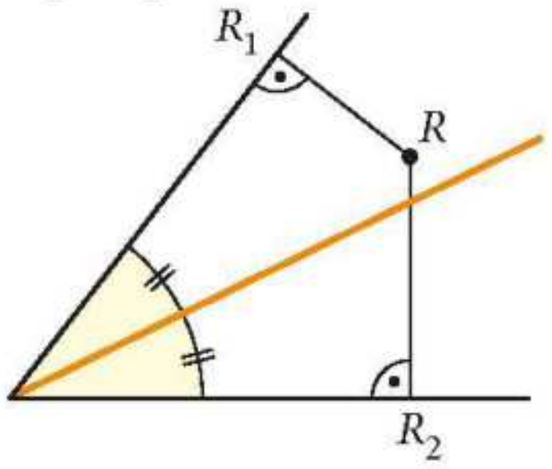
Jeżeli punkt R jest położony wewnątrz kąta o mierze mniejszej od 180° i jego odległości od ramion kąta są różne, to R nie leży na dwusiecznej tego kąta.

Punkt P leży na dwusiecznej kąta P_1OP_2.



$|PP_1| = |PP_2|$

Punkt R nie leży na dwusiecznej kąta R_1OR_2.



$|RR_1| \neq |RR_2|$

Konstrukcje geometryczne

Zadanie konstrukcyjne polega na zbudowaniu figury o zadanych własnościach.
Do wykonania konstrukcji metodą klasyczną używamy tylko dwóch przyrządów:

- linijki bez podziałki, która służy do wykreślania linii prostej (korzystamy z własności: przez dwa punkty płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna prosta),
- cyrkla – do odmierzania (odkładania) odcinków równych danemu odcinkowi (korzystamy z własności: punkty płaszczyzny położone w danej odległości r od danego punktu S leżą na okręgu o środku w punkcie S i promieniu r).

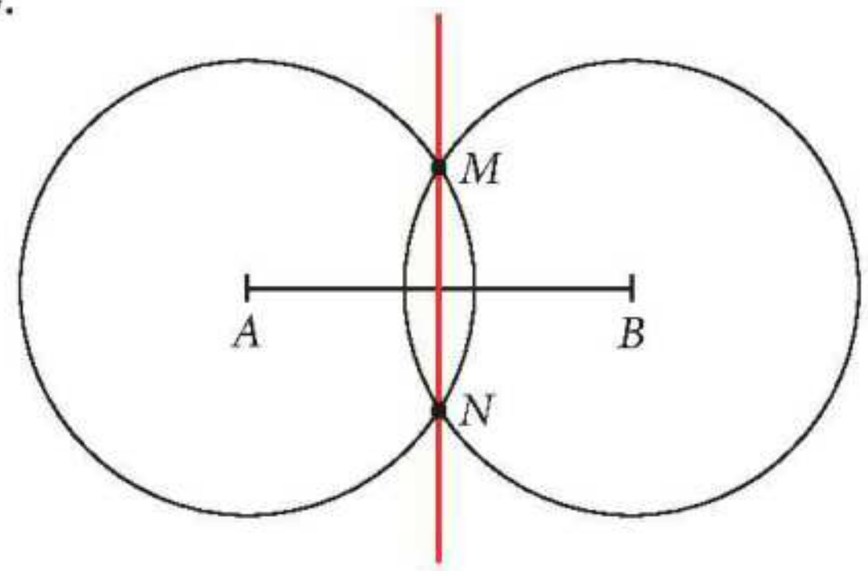
W szkole podstawowej poznaliście jedną konstrukcję: trójkąta o trzech danych bokach. Teraz przedstawimy dwie kolejne: symetralnej danego odcinka oraz dwusiecznej danego kąta. Ich znajomość pozwala na rozwiązywanie różnorodnych zadań.

Przykład 2 ◂ zad. 1.21

Skonstruujemy symetralną danego odcinka AB.

Analiza

Symetralna jest prostą. Zatem do jej wykreślenia potrzebne są dwa różne punkty. Wiemy, że do symetralnej odcinka należą wyłącznie punkty równo oddalone od końców tego odcinka. Najprostszą konstrukcję pokazujemy na rysunku.



Opis konstrukcji

Wykonywana czynność	Otrzymana figura
Z punktów A i B zataczamy okręgi o promieniu $r > 0{,}5 \cdot \|AB\|$.	punkty przecięcia okręgów – oznaczone na rysunku literami M i N
Prowadzimy prostą MN.	prosta MN – szukana symetralna

Dowód poprawności konstrukcji

$|AM| = |BM|$ ⟵ równe promienie zataczanych okręgów

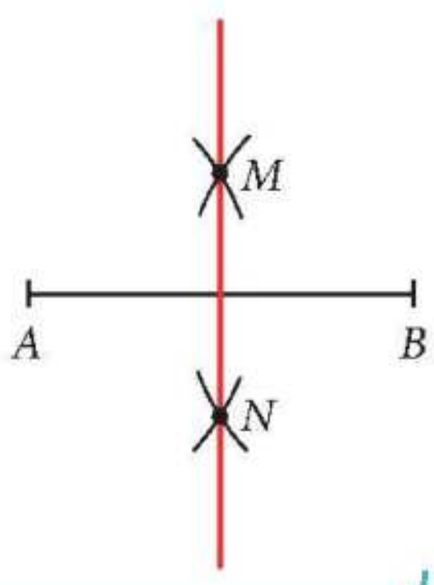
Zatem M należy do symetralnej odcinka AB.

$|AN| = |BN|$ ⟵ równe promienie zataczanych okręgów

Zatem N należy do symetralnej odcinka AB.

Koniec dowodu

Zauważmy, że rozwartość cyrkla (czyli r) musi spełniać warunek $r > 0{,}5 \cdot |AB|$, aby wykreślane okręgi się przecięły. Przy kreśleniu symetralnej nie będziemy w przyszłości rysować pełnych okręgów – do wyznaczenia potrzebnych punktów wystarczy poprowadzenie odpowiednich łuków. Zatem konstrukcja będzie wyglądać jak na rysunku obok.



Twierdzenie o symetralnej gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania zadania.

Konstrukcja symetralnej odcinka umożliwia rozwiązanie kolejnych zadań konstrukcyjnych, takich jak np.:

- podział odcinka na połowy,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej w punkcie należącym do niej,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej z punktu do niej nienależącego.

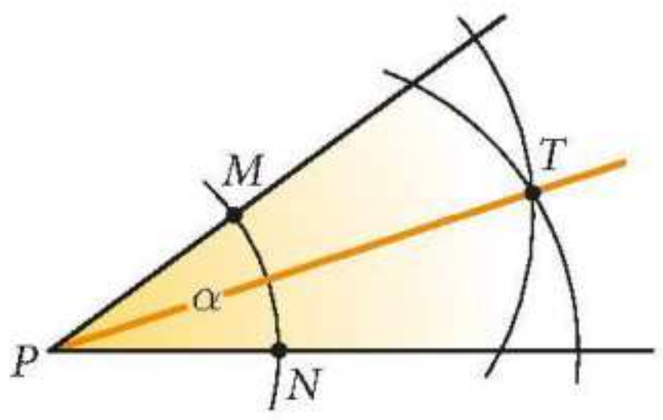
W takich sytuacjach nie rozpisujemy konstrukcji symetralnej na poszczególne etapy, tylko piszemy krótko: prowadzimy symetralną odcinka.

Przykład 3 ◂ zad. 1.24

Skonstruujemy dwusieczną danego kąta α o mierze mniejszej od 180°.

Analiza

Szukana dwusieczna jest półprostą o początku w wierzchołku kąta. Zatem do jej wykreślenia potrzebny jest jeszcze jeden punkt. Najprostszą konstrukcję pokazujemy na rysunku.



Opis konstrukcji

Wykonywana czynność	Otrzymana figura
Z wierzchołka P kąta α odmierzamy na obu jego ramionach równe odcinki.	punkty M i N
Zataczamy łuki okręgów $o(M, r)$ i $o(N, r)$ tak, by przecięły się wewnątrz kąta α.	punkt T
Prowadzimy półprostą PT.	półprosta PT – szukana dwusieczna kąta α

Dowód poprawności konstrukcji

$|PM| = |PN|$ ⟵ odłożone równe odcinki

$|MT| = |NT|$ ⟵ równe promienie zataczanych okręgów

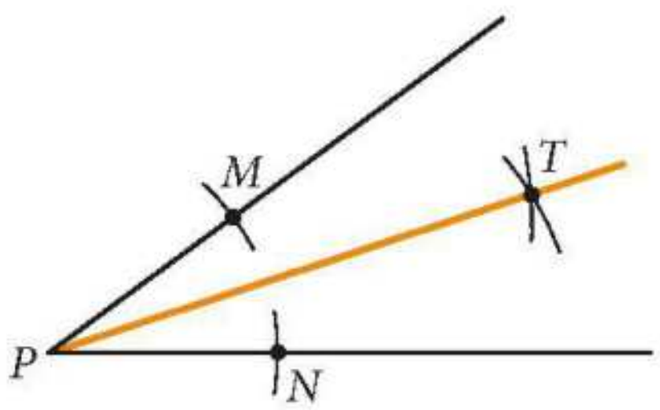
$\triangle PMT \equiv \triangle PNT$ ⟵ cecha bbb przystawania trójkątów (PT – wspólny bok)

- Okrąg o środku A i promieniu r oznaczamy $o(A, r)$.
- Zamiast pisać „kąt ABC o mierze α" używamy też formy „kąt ABC równy α" lub „$\sphericalangle ABC = \alpha$".

Zatem $\sphericalangle MPT = \sphericalangle NPT$, czyli punkt T należy do dwusiecznej kąta α.

Koniec dowodu

Obok przedstawiamy rysunek konstrukcji w wersji uproszczonej.
Twierdzenie o dwusiecznej gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania zadania.



Przykład 4

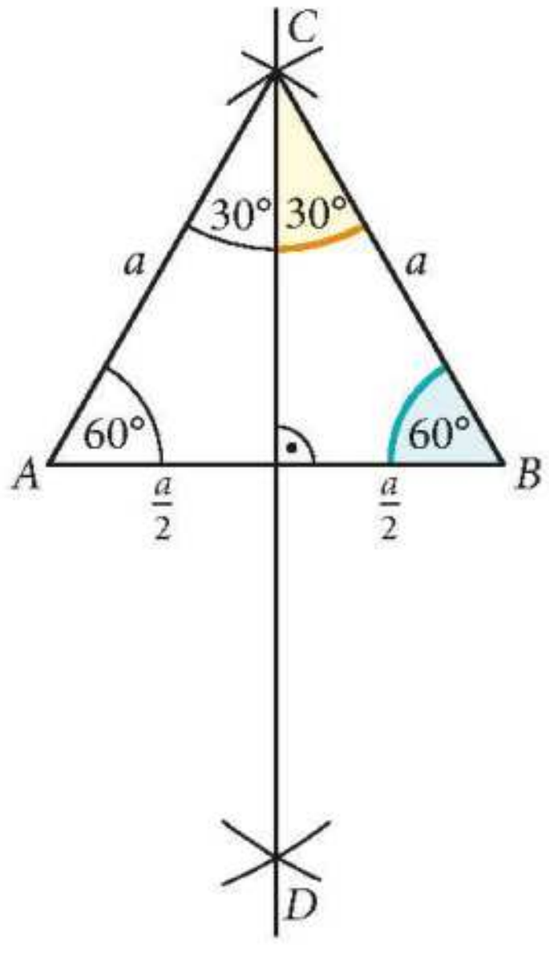
Omówimy jeden ze sposobów konstrukcyjnego wyznaczenia kątów o mierze 30° i 60°.

Rozwiązanie

Oto etapy konstrukcji.

- Na płaszczyźnie rysujemy odcinek AB o pewnej długości a.
- Prowadzimy okręgi $o(A, a)$ i $o(B, a)$ i otrzymujemy punkty ich przecięcia: C i D.
- Prowadzimy prostą CD, będącą symetralną odcinka AB.
- Łączymy odcinkami punkt C z punktami A oraz B – otrzymujemy trójkąt równoboczny ABC.

Każdy z kątów trójkąta równobocznego ma miarę równą 60°. Prosta CD jest osią symetrii tego trójkąta, zatem kąt BCD, podobnie jak kąt ACD, ma miarę 30°.



Zadania

1.1. Czy można zbudować trójkąt o bokach podanej długości?
a) 3,1 cm, 4,5 cm, 2,7 cm
b) 2,1 cm, 5,7 cm, 3,3 cm

1.2. Dane są długości odcinków: $|AB| = 6$, $|BC| = 17$, $|CA| = 11$. Zbadaj, a następnie zilustruj wzajemne położenie punktów A, B i C.

1.3. Ile jest trójkątów o bokach równych 1 cm, 3 cm, 4 cm lub 7 cm? Rozważ wszystkie możliwości.

1.4. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

a) $8,\ 15,\ 17$

b) $2\sqrt{3},\ \sqrt{30},\ 3\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{3},\ 8,\ 2$

d) $7,\ 7,\ 7\sqrt{2}$

e) $5,\ 2\sqrt{5},\ \sqrt{15}$

f) $2+\sqrt{2},\ 2\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$

D **1.5.** Przekątne równoległoboku, którego jeden z boków ma długość 10 cm, są równe 12 cm i 16 cm. Wykaż, że ten równoległobok jest rombem.

1.6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 13 i jednej przyprostokątnej długości 5.

1.7. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 29 i jednej przyprostokątnej długości 21.

1.8. Oblicz długość boku

a) kwadratu o przekątnej długości 3.

b) trójkąta równobocznego o polu $9\sqrt{3}$.

1.9. Przekątne rombu mają długości 14 i 48. Oblicz obwód tego rombu.

1.10. Trójkąt równoramienny o podstawie długości 40 ma ramię długości m. Jakie wartości może przyjmować m?

1.11. Trójkąt równoramienny o ramieniu długości 20 ma podstawę długości m. Jakie wartości może przyjmować m?

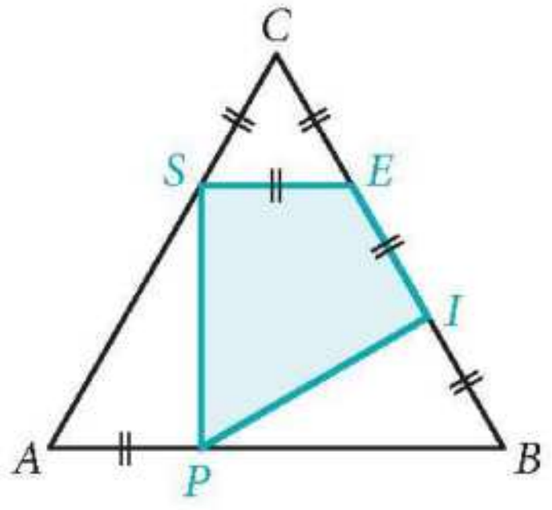
1.12. Podaj przykłady wielokątów, w których symetralna jednego z boków zawiera dwusieczną jednego z kątów wewnętrznych.

1.13. Ile osi symetrii ma podana figura?

a) trójkąt równoboczny
b) trójkąt równoramienny i nierównoboczny
c) kwadrat
d) prostokąt niebędący kwadratem
e) romb niebędący kwadratem
f) trapez równoramienny niebędący równoległobokiem
g) sześciokąt foremny
h) pięciokąt foremny

1.14. Które figury spośród wymienionych w zadaniu 1.13 mają środek symetrii?

1.15. Trójkąt ABC jest równoboczny (zob. rysunek). Jego pole jest równe 9. Zaznaczone odcinki mają tę samą długość. Ile wynosi pole czworokąta $PIES$?



1.16. Narysuj sześciokąt foremny. Czy z faktu, że jakiś sześciokąt ma wszystkie kąty równe wynika, że jest on foremny?

1.17. Narysuj trzy odcinki. Skonstruuj trójkąt o bokach równych tym odcinkom. Jaki warunek muszą spełniać narysowane odcinki?

1.18. Narysuj podany wielokąt, a następnie poprowadź konstrukcyjnie jego wszystkie osie symetrii.

a) trapez równoramienny o podstawach długości 10 cm, 8 cm i wysokości 4 cm
b) trójkąt równoramienny o ramionach dwa razy dłuższych od podstawy
c) prostokąt, którego długości boków są w stosunku 2 : 3

1.19. Skonstruuj trójkąt równoramienny o bokach podanej długości. Ile rozwiązań ma to zadanie?

a) 5 cm i 6 cm b) 5 cm i 2 cm

1.20. Narysuj dowolny czworokąt. Skonstruuj czworokąt przystający do niego.

1.21. Dany odcinek podziel konstrukcyjnie na cztery równe części.

1.22. Narysuj dowolny odcinek AB. Skonstruuj odcinek 2,5 razy dłuższy od odcinka AB.

1.23. Narysuj dowolny odcinek AB. Skonstruuj kwadrat o boku AB.

1.24. Skonstruuj kąt o podanej mierze.

a) 45° b) 22,5°

1.25. Skonstruuj romb o kącie ostrym 45° i danym boku a.

1.26. Narysuj odcinki a i b różnej długości. Skonstruuj romb o przekątnych a i b.

1.27. Narysuj prostą k. Skonstruuj prostą prostopadłą do k przechodzącą przez wybrany punkt A

a) leżący na prostej k. b) leżący poza prostą k.

2. Okręgi i proste

Umiejętności:

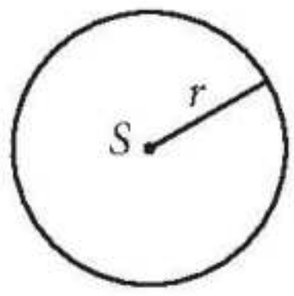
- korzystanie z własności stycznej do okręgu
- korzystanie z własności okręgów stycznych
- stosowanie własności dwusiecznej kąta przy wpisywaniu okręgu w trójkąt
- stosowanie własności symetralnej odcinka przy opisywaniu okręgu na trójkącie

Okrąg i koło

Przypomnijmy znane ze szkoły podstawowej definicje: okręgu i koła.

Definicja

Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r $(r > 0)$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o r od punktu S i oznaczamy go $o(S, r)$.



Określenia **promień okręgu** będziemy w tym podręczniku używać w dwóch znaczeniach: odcinka łączącego punkt okręgu z jego środkiem albo liczby będącej długością tego odcinka. Z kontekstu powinno jasno wynikać, o które ze znaczeń chodzi.

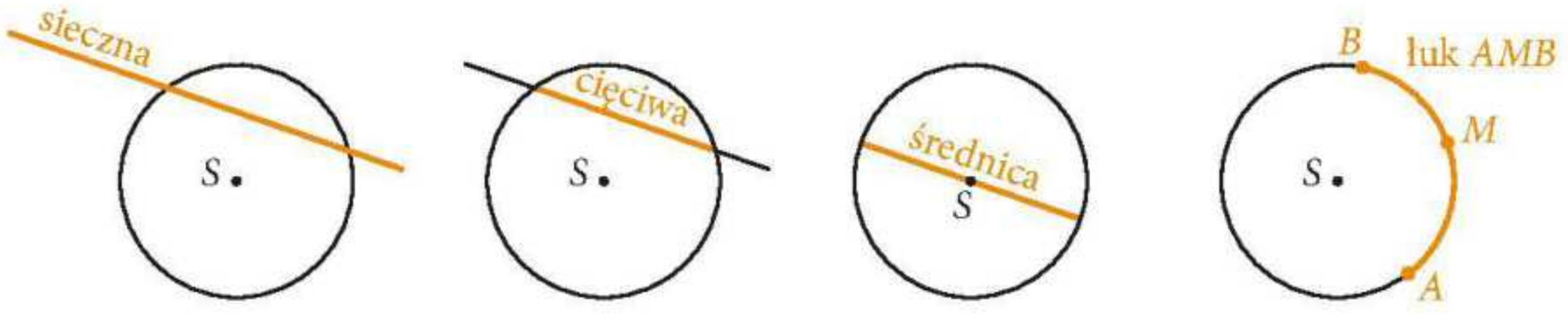
Odległość geometryczna należy do pojęć pierwotnych geometrii.

Sieczną okręgu nazywamy prostą przechodzącą przez dwa punkty okręgu, a **cięciwą** nazywamy odcinek siecznej wyznaczony na niej przez punkty okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez środek okręgu.

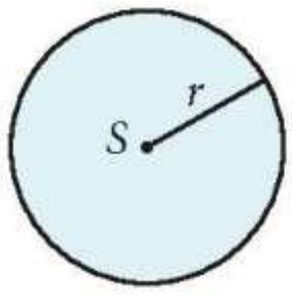
Łukiem okręgu nazywamy każdą z dwóch części okręgu wyznaczoną przez dwa punkty okręgu łącznie z tymi punktami. Jeżeli chcemy wskazać konkretny łuk, to na ogół podajemy jeszcze jeden punkt do niego należący, np. łuk AMB.

Półokręgiem nazywamy każdy z dwóch łuków wyznaczony przez końce średnicy okręgu.



Definicja

Kołem o środku w punkcie S i promieniu r $(r > 0)$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, które są oddalone od środka S co najwyżej o r, i oznaczamy $k(S, r)$. Punkty koła, które nie leżą na jego **brzegu**, czyli na okręgu $o(S, r)$, nazywać będziemy **punktami wewnętrznymi**, a zbiór wszystkich takich punktów – **wnętrzem koła**.

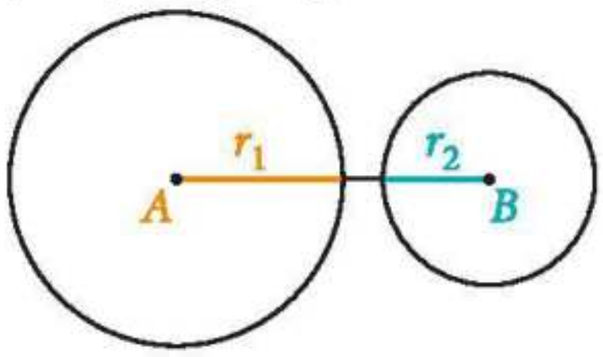


Sieczną, **cięciwą** i **średnicą** koła nazywamy sieczną, cięciwę i średnicę jego brzegu.

Dwa okręgi

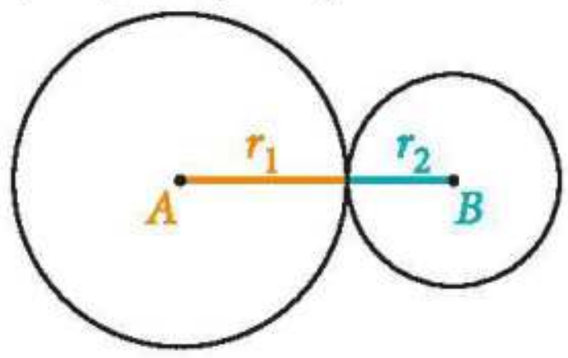
Omówimy wzajemne położenie dwóch okręgów: $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ w zależności od ich promieni i odległości między środkami. Wprowadzimy też odpowiednie nazwy. Przyjmijmy, że $r_1 \geqslant r_2$.

1. $|AB| > r_1 + r_2$



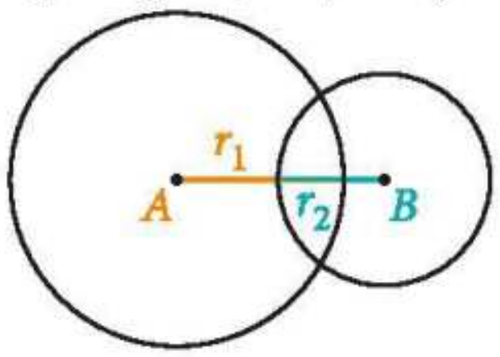
Okręgi **wzajemnie zewnętrzne** (lub rozłączne zewnętrznie) nie mają punktów wspólnych.

2. $|AB| = r_1 + r_2$



Okręgi **zewnętrznie styczne** mają jeden punkt wspólny.

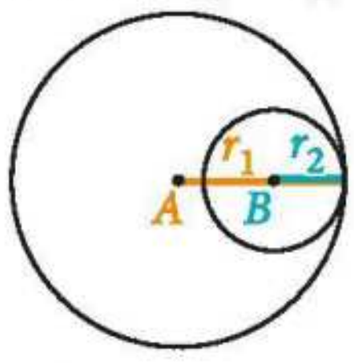
3. $r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$



Okręgi **przecinające się** mają dwa punkty wspólne.

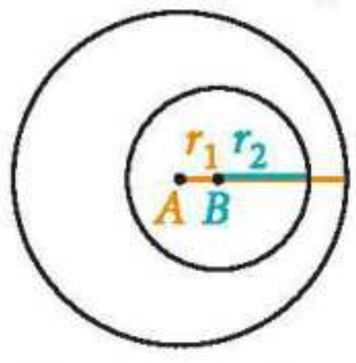
Jeżeli nie jest spełniony warunek $|AB| > r_1 - r_2$, to:
albo $|AB| = r_1 - r_2$ i zachodzi warunek z p. 4,
albo $|AB| < r_1 - r_2$ i zachodzi warunek z p. 5.

4. $|AB| = r_1 - r_2 > 0$



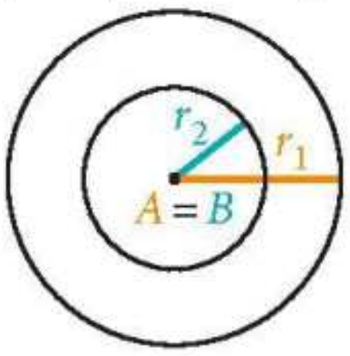
Okręgi **wewnętrznie styczne** mają jeden punkt wspólny.

5. $|AB| < r_1 - r_2$ i $r_1 - r_2 > 0$



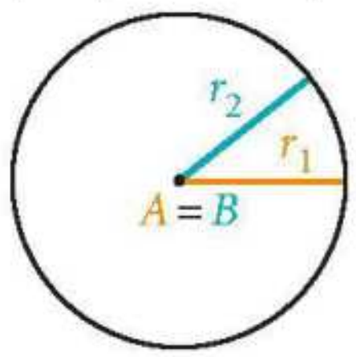
Okręgi **rozłączne wewnętrznie** nie mają punktów wspólnych.

6. $|AB| = 0$ i $r_1 - r_2 > 0$



Okręgi **współśrodkowe** nie mają punktów wspólnych.

7. $|AB| = 0$ i $r_1 = r_2$



Okręgi **identyczne** (pokrywające się) mają wszystkie punkty wspólne.

Wniosek

Jeśli dwa okręgi są styczne, to punkt styczności oraz środki tych okręgów leżą na jednej prostej.

Przykład 1 ◂ zad. 2.4

Sprawdzimy, jak są położone względem siebie okręgi $o(A, 1)$, $o(B, 3)$ i $o(C, 7)$, jeżeli $|AB| = 4$, $|BC| = 10$ i $|AC| = 8$.

Rozwiązanie

Odległości między danymi środkami są równe sumom odpowiednich promieni ($4 = 1 + 3$, $10 = 3 + 7$, $8 = 1 + 7$), więc te okręgi są parami styczne zewnętrznie.

Przykład 2 ◂ zad. 2.5

Określimy, jaka powinna być odległość między punktami A i B, aby okręgi $o(A, 2)$ i $o(B, 5)$ były

a) styczne wewnętrznie.

b) wzajemnie zewnętrzne.

Rozwiązanie

a) Różnica promieni wynosi 3, jeżeli zatem $|AB| = 3$, to okrąg $o(A, 2)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu $o(B, 5)$.

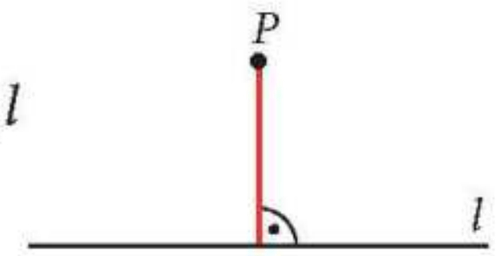
b) Okręgi będą wzajemnie zewnętrzne, jeżeli odległość między ich środkami będzie większa od sumy promieni, równej 7.

Prosta i okrąg

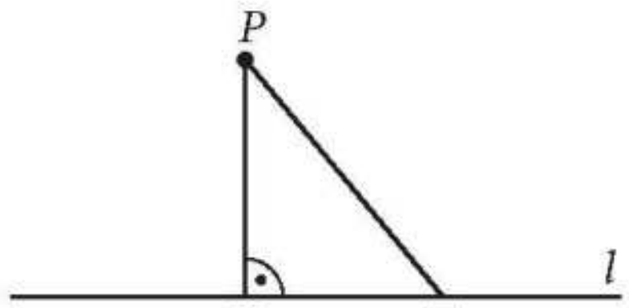
Przypomnijmy znaną ze szkoły podstawowej definicję.

Definicja

Długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z prostą l to **odległość punktu P od prostej l.**



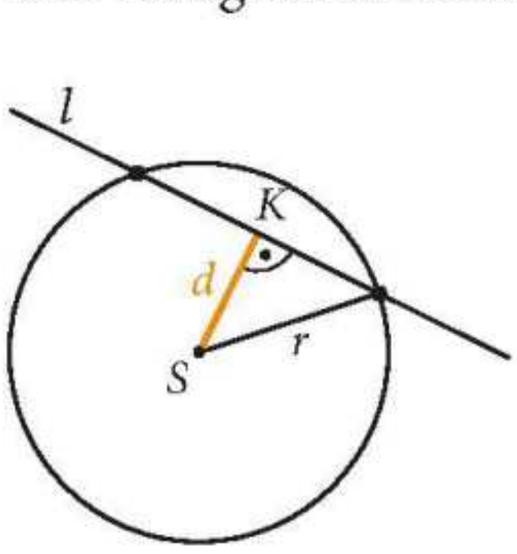
Udowodnimy, że jeżeli $P \notin l$, to najkrótszy odcinek łączący ten punkt z prostą l jest do niej prostopadły. Niech K oznacza koniec odcinka prostopadłego do prostej l łączącego tę prostą z punktem P.



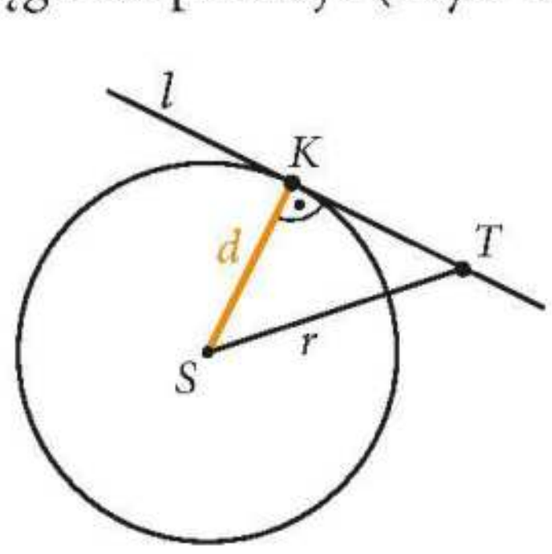
Wybieramy dowolny punkt na prostej l różny od punktu K i oznaczamy go T. Odcinek TP jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym PKT. Z wniosku z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|PT| > |PK|$. Zatem odcinek PK jest najkrótszym odcinkiem łączącym punkt P z prostą l.

Jeżeli punkt $P \in l$, to odległość punktu P od prostej l jest równa 0.

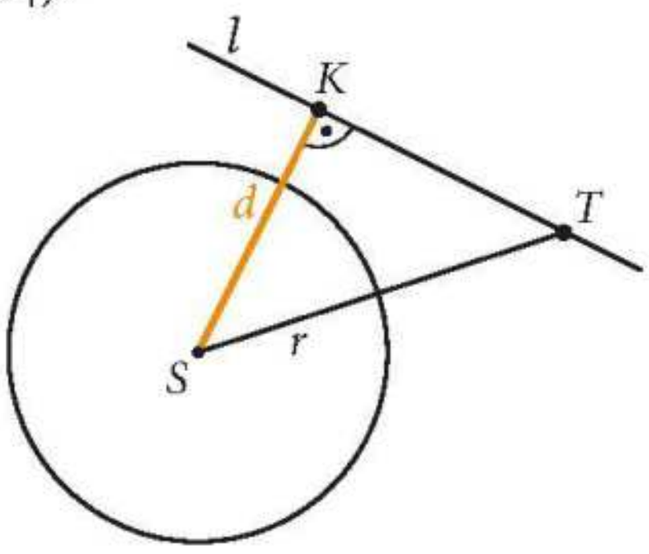
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach poniżej:
K to koniec odcinka prostopadłego do prostej l łączącego tę prostą ze środkiem okręgu $o(S, r)$,
d to odległość środka S okręgu od prostej l (czyli $d = |SK|$).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zauważmy, że jeśli:

I. $d < r$, to prosta l ma dwa punkty wspólne z okręgiem, bo K jest punktem wewnętrznym koła $k(S, r)$ (rys. 1).

II. $d = r$, to punkt K jest jedynym punktem wspólnym prostej l i okręgu – każdy inny punkt prostej l, np. T, wyznacza odcinek TS, który jest przeciwprostokątną w trójkącie STK, czyli $|TS| > d = r$ (rys. 2).

III. $d > r$, to prosta l nie ma żadnego punktu wspólnego z okręgiem – każdy inny punkt prostej l, np. T, wyznacza odcinek TS, który jest przeciwprostokątną w trójkącie STK, czyli $|TS| > d > r$ (rys. 3).

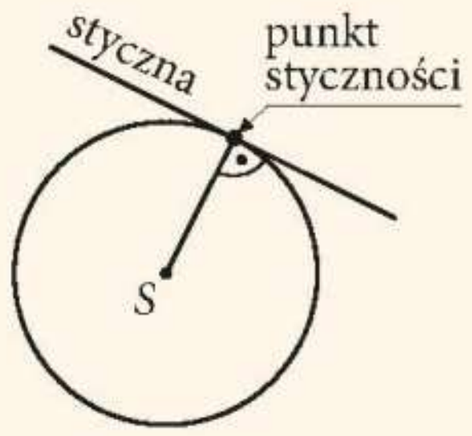
Definicja

Prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy **styczną** do okręgu. Punkt wspólny stycznej i okręgu nazywamy **punktem styczności**.

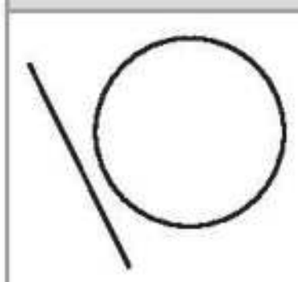
Z poprzednich rozważań wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek

Styczna do okręgu jest prostopadła do odcinka łączącego punkt styczności ze środkiem tego okręgu.



Położenie prostej względem okręgu wiąże się z liczbą wspólnych punktów obu figur.

Rysunek	Liczba punktów wspólnych	Prosta
	0	zewnętrzna względem okręgu
	1	styczna do okręgu
	2	sieczna – przecina okrąg

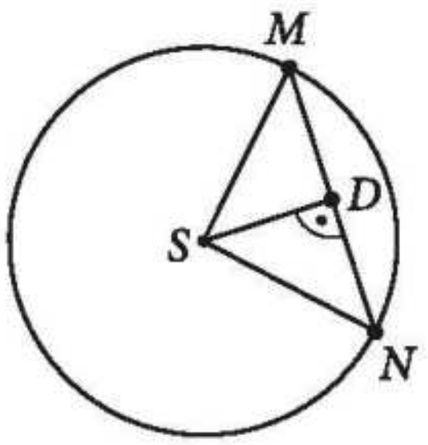
Przykład 3 ◀ zad. 2.9

Dane są: okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = 3$ cm oraz dwie proste – l, oddalona od punktu S o 5 cm, i k, oddalona od punktu S o 2 cm.

Prosta l nie ma z okręgiem żadnego punktu wspólnego, a prosta k przecina ten okrąg w dwóch punktach.

Przykład 4 ◂ zad. 2.10

Prosta zawierająca cięciwę MN okręgu $o(S, 5)$ jest oddalona od punktu S o 4. Obliczymy długość cięciwy MN.



Rozwiązanie

Popatrzmy na rysunek obok. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę jest równa wysokości SD poprowadzonej w trójkącie równoramiennym MNS o podstawie MN.

$|DN|^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ ⟵ twierdzenie Pitagorasa w $\triangle SDN$

$|DN| = 3$

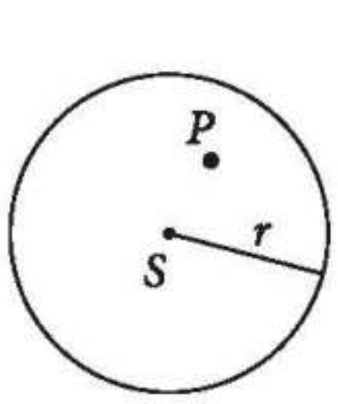
$|MN| = 2 \cdot |DN| = 6$ ⟵ trójkąt MNS jest równoramienny

Odp.: $|MN| = 6$

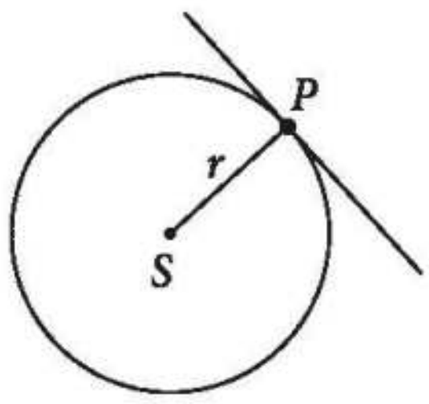
Dane są: punkt P i okrąg $o(S, r)$.
Jeżeli:

- $|SP| < r$, to nie istnieje styczna do okręgu przechodząca przez P,
- $|SP| = r$, to istnieje jedna styczna do okręgu przechodząca przez P,
- $|SP| > r$, to istnieją dwie styczne do okręgu przechodzące przez P.

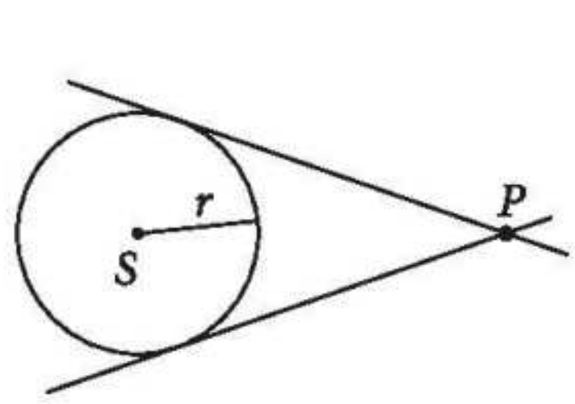
Literą S oznaczamy na rysunkach środek okręgu (chyba że z kontekstu wynika co innego). Czasem, aby rysunek był bardziej przejrzysty, środek okręgu zaznaczony jest tylko kropką.



$|SP| < r$



$|SP| = r$



$|SP| > r$

Przykład 5

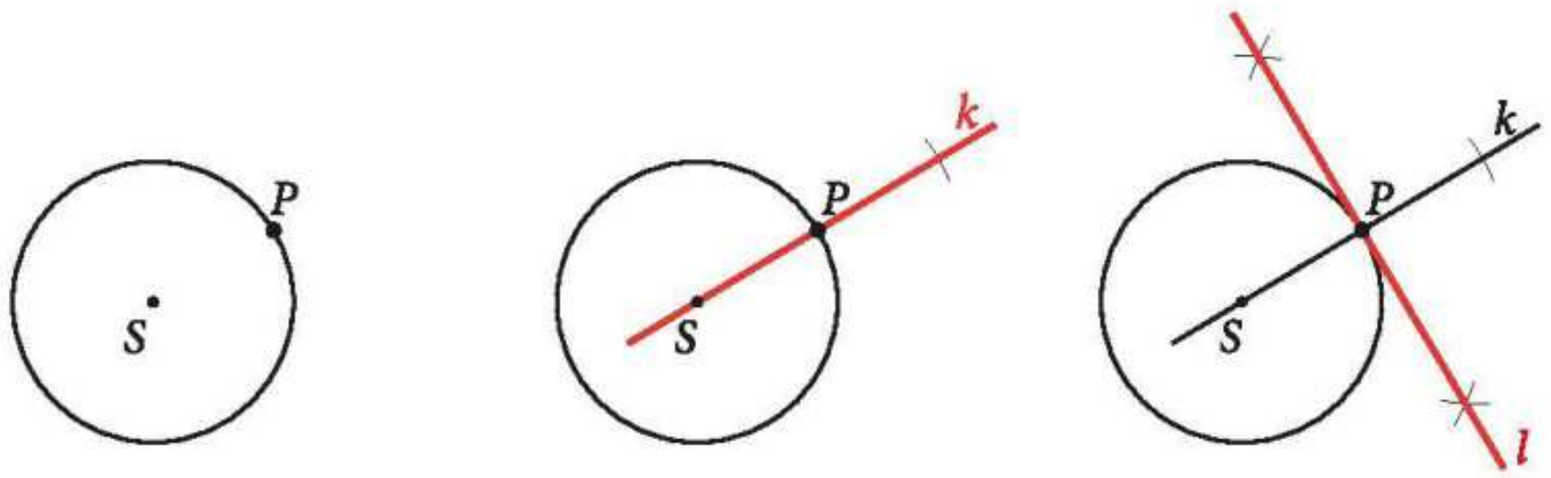
Skonstruujemy styczną do okręgu w punkcie P należącym do tego okręgu.

Rozwiązanie

Styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności, więc:

Krok 1: Przez punkt P i środek S okręgu prowadzimy prostą k.

Krok 2: Przez punkt P prowadzimy prostą l prostopadłą do k.



Konstrukcyjnym wyznaczeniem stycznych przechodzących przez dany punkt P należący do okręgu zajmiemy się w następnym temacie.

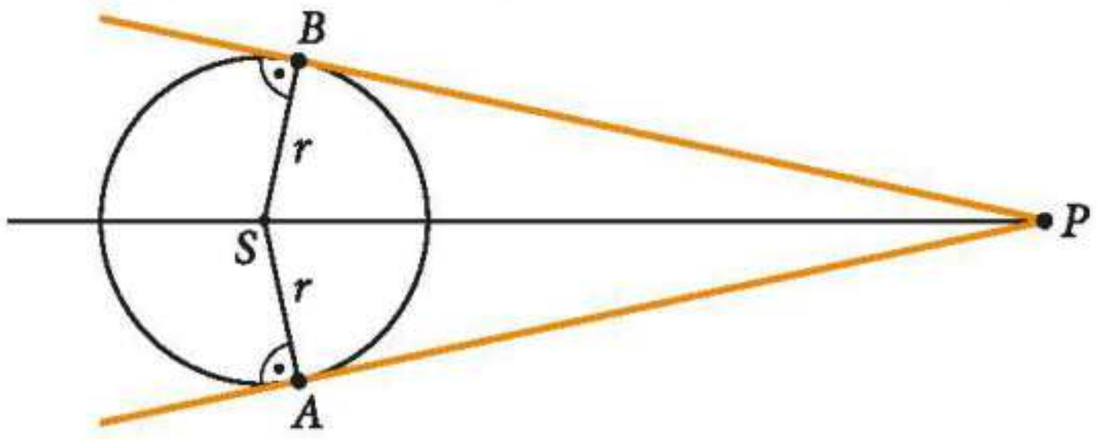
Twierdzenie

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie proste styczne do tego okręgu w punktach A i B, to $|PA| = |PB|$.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Punkt S jest jednakowo (o promień) oddalony od obydwu stycznych. Zatem:

$\sphericalangle SPA = \sphericalangle SPB$ ⟵ półprosta PS jest dwusieczną kąta APB

$\sphericalangle SAP = \sphericalangle SBP = 90°$ ⟵ kąt między styczną i promieniem

$\sphericalangle ASP = \sphericalangle BSP$ ⟵ suma kątów w trójkącie jest równa 180°

$|AS| = |BS|$

Stąd $\triangle SPA \equiv \triangle SPB$, ⟵ cecha kbk przystawania trójkątów

czyli $|PA| = |PB|$.

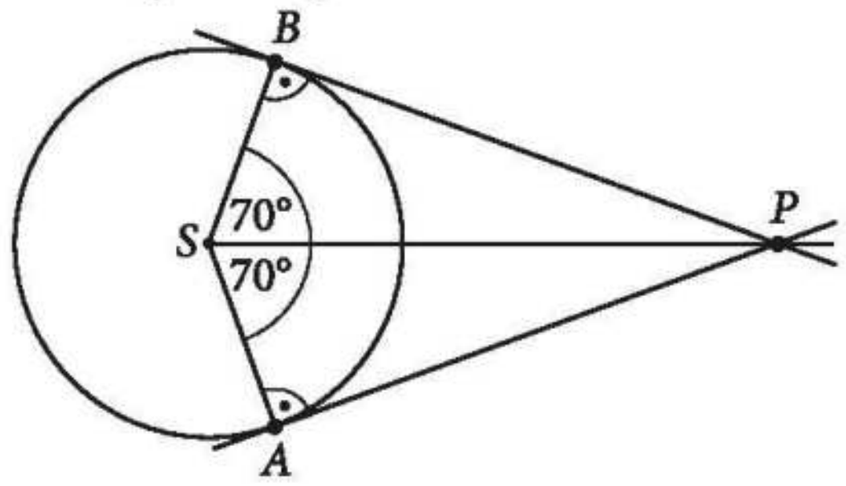
Koniec dowodu

O okręgu położonym jak na rysunku w powyższym dowodzie mówimy, że jest **wpisany w kąt** APB. Odcinki PA i PB nazywamy **odcinkami stycznymi**, a kąt APB o mierze mniejszej od 180° – **kątem między stycznymi**.

Środek okręgu wpisanego w kąt leży na dwusiecznej tego kąta.

Przykład 6

W okręgu o środku S kąt między promieniami SA i SB jest równy $140°$. Wyznaczymy miarę kąta między stycznymi do okręgu poprowadzonymi w punktach A i B.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. P jest punktem przecięcia stycznych. Aby znaleźć miarę kąta APB, można skorzystać z faktu, że suma kątów czworokąta jest równa $360°$:

$$\sphericalangle APB = 360° - 90° - 140° - 90° = 40°$$

Inaczej: $\triangle SAP \equiv \triangle SBP$, zatem $\sphericalangle APB = 2 \cdot \sphericalangle SPB = 2 \cdot (180° - 70° - 90°) = 40°$.

Odp.: $\sphericalangle APB = 40°$

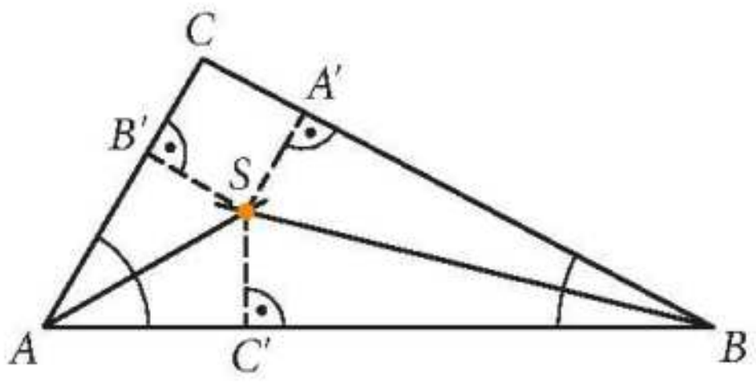
Okrąg wpisany w trójkąt

Twierdzenie

W każdym trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Każdy kąt trójkąta jest mniejszy od $180°$. Zatem dla każdego z tych kątów punkty na jego dwusiecznej leżą w równej odległości od ramion kąta, czyli boków trójkąta. Dwie dwusieczne, np. kąta CAB i kąta CBA, muszą się przeciąć – punkt ich przecięcia oznaczmy literą S.

Zgodnie z rysunkiem, jeśli A', B', C' oznaczają odpowiednie końce odcinków prostopadłych do boków, poprowadzonych z punktu S, to:

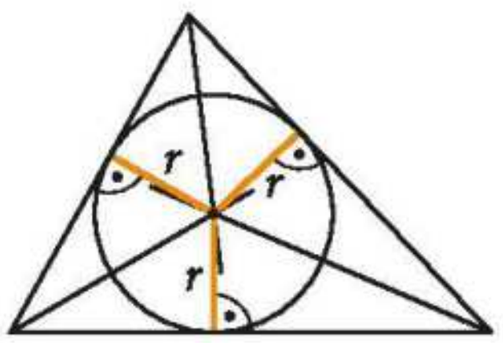
$|SC'| = |SB'|$ ⟵ punkt S leży na dwusiecznej kąta CAB

$|SC'| = |SA'|$ ⟵ punkt S leży na dwusiecznej kąta CBA

Zatem $|SB'| = |SA'|$ i stąd wniosek, że punkt S leży na dwusiecznej kąta ACB.

Koniec dowodu

Okrąg wpisany w trójkąt to okrąg styczny do wszystkich boków trójkąta. Inaczej mówiąc, jest on wpisany we wszystkie trzy kąty tego trójkąta, zatem jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów. Promień okręgu wpisanego jest równy odległości środka okręgu od każdego z boków trójkąta.



Wniosek

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Przykład 7 ◀ zad. 2.13

W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono literami K, L, M jak na rysunku. Dane są długości odcinków: $|AL| = 3$, $|LB| = 7$, $|AC| = 5$. Obliczymy obwód trójkąta ABC.

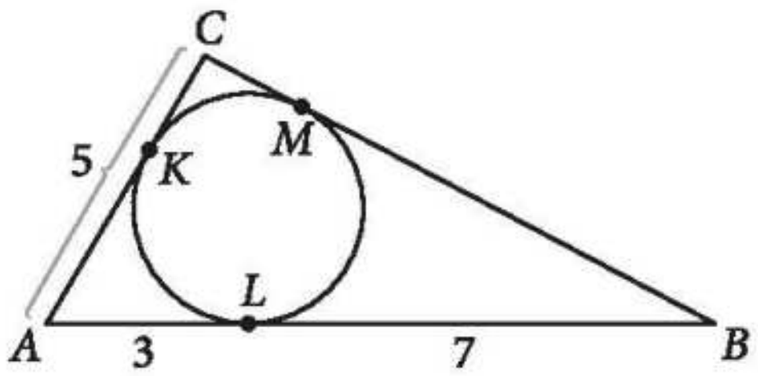
Rozwiązanie

$|AL| = |AK|$ ⟵ odcinki styczne

$|KC| = 5 - 3 = 2 = |CM|$

$|MB| = |LB| = 7$ ⟵ odcinki styczne

$|BC| = |CM| + |MB| = 2 + 7 = 9$



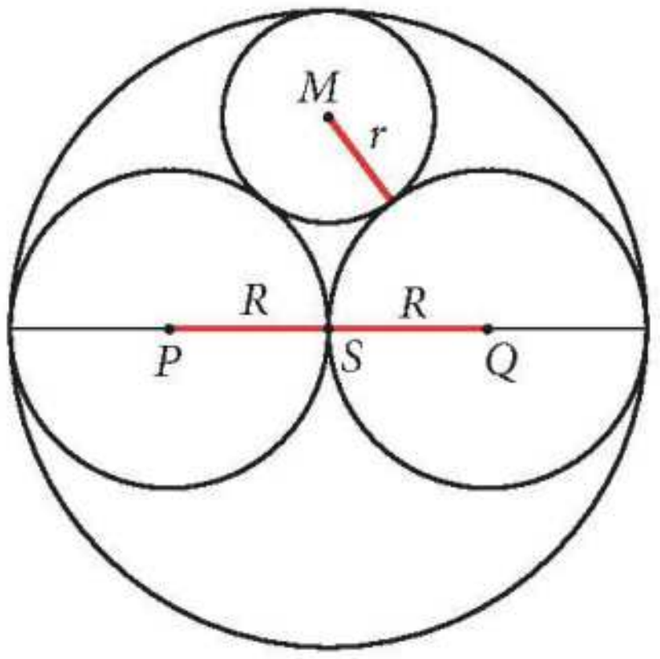
Zatem obwód trójkąta ABC jest równy:

$|AB| + |BC| + |CA| = 10 + 9 + 5 = 24$

Odp.: 24

Przykład 8 ◀ zad. 2.25

Dwa okręgi o równych promieniach R są styczne zewnętrznie w punkcie S. Każdy z nich jest styczny wewnętrznie do okręgu o środku S. Okrąg o promieniu r i środku M ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdym z wymienionych okręgów (zob. rysunek).



Wykażemy, że $r = \frac{2R}{3}$.

Dowód

Uzupełnijmy rysunek o dwa odcinki: BS i MQ.

W prostokątnym trójkącie MSQ mamy:

$|MS| = |SB| - |MB| = 2R - r$ oraz $|QM| = R + r$

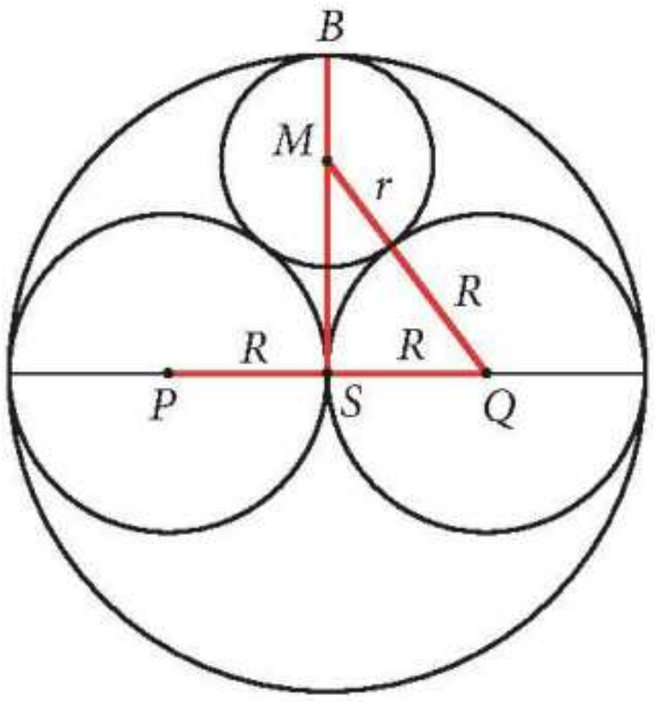
Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$(2R - r)^2 + R^2 = (R + r)^2$

$4R^2 - 4Rr + r^2 + R^2 = R^2 + 2Rr + r^2$

$4R^2 - 6Rr = 0$, czyli $2R(2R - 3r) = 0$

Wynika stąd, że $r = \frac{2R}{3}$, bo $R > 0$.



Koniec dowodu

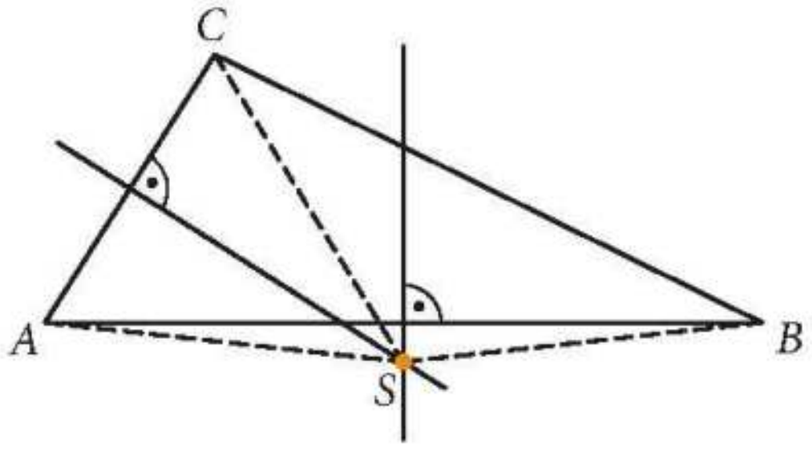
Okrąg opisany na trójkącie

Twierdzenie

W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Punkty należące do symetralnej boku leżą w równej odległości od końców tego boku, czyli wierzchołków trójkąta. Dwie symetralne, np. boku AB i boku AC, muszą się przeciąć – punkt ich przecięcia oznaczmy literą S.

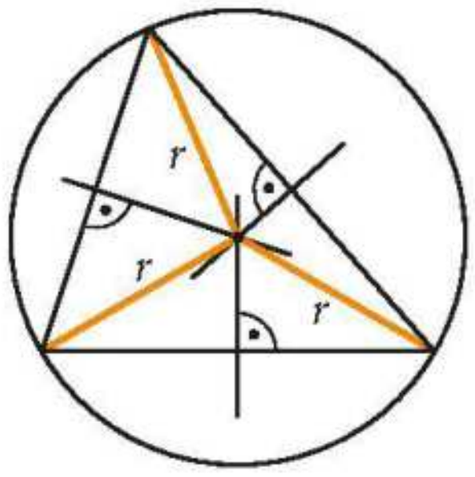


$|SA| = |SB|$ ⟵ punkt S leży na symetralnej boku AB
$|SA| = |SC|$ ⟵ punkt S leży na symetralnej boku CA

Zatem $|SB| = |SC|$, czyli punkt S leży na symetralnej boku BC. Symetralna boku BC przechodzi więc przez S, jako punkt równo oddalony od końców odcinka BC.

Koniec dowodu

Okrąg opisany na trójkącie to okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki trójkąta. Inaczej mówiąc, środek tego okręgu jest jednakowo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta, czyli jest punktem przecięcia symetralnych boków. Promień okręgu opisanego jest równy odległości środka okręgu od każdego z wierzchołków trójkąta.



Wniosek

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

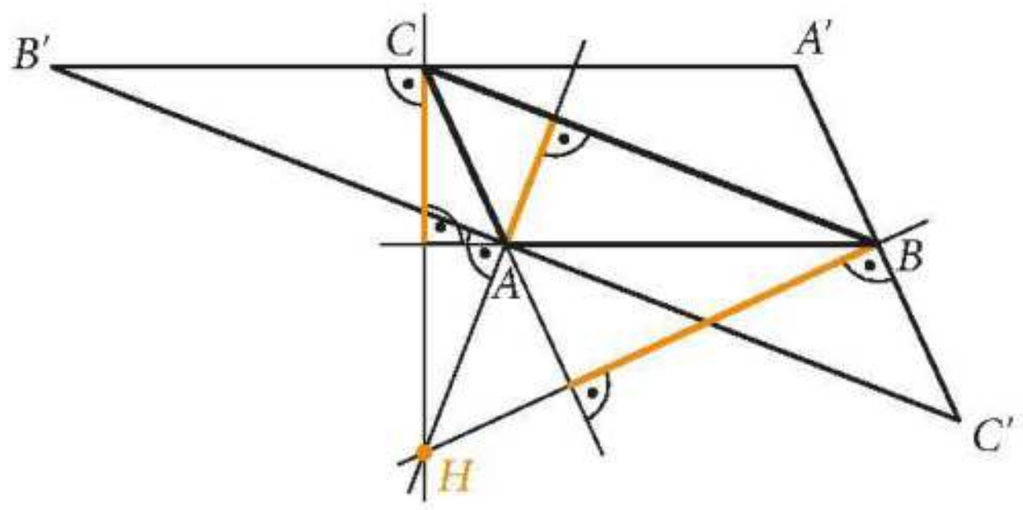
Twierdzenie o symetralnych boków trójkąta stosuje się również w dowodzie następującego twierdzenia o istnieniu innego ważnego punktu – tzw. **ortocentrum**, czyli punktu przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta.

Twierdzenie

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Wskazówka: Przez wierzchołki rozważanego trójkąta ABC poprowadź proste równoległe do jego przeciwległych boków i wykaż, że w nowo powstałym trójkącie $A'B'C'$ proste zawierające wysokości trójkąta ABC są symetralnymi boków (zob. rysunek).



Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Okręgi $o\left(A, \frac{11}{3}\right)$ oraz $o(B, 7)$ są położone tak, że $|AB| = \frac{10}{3}$. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

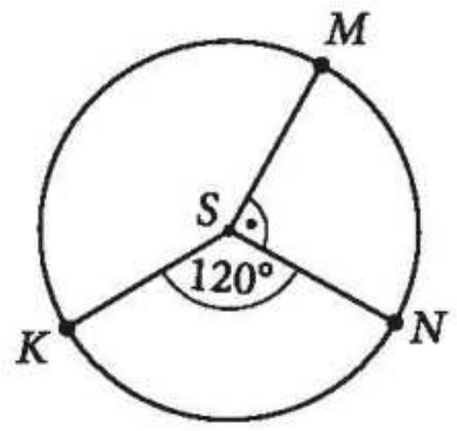
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** nieskończenie wiele

2.2. Wskaż największą możliwą liczbę punktów przecięcia brzegu prostokąta z okręgiem.

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 12

2.3. Przez punkty M, N i K poprowadzono styczne do okręgu o środku S. Punkty przecięcia stycznych są wierzchołkami pewnego trójkąta. Jakie kąty ma ten trójkąt?

A. 45°, 60°, 75°
B. 90°, 45°, 45°
C. 90°, 60°, 30°
D. 90°, 60°, 75°



2.4. Określ na podstawie danych wzajemne położenie okręgów $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$.

a) $|AB| = 8 \quad r_1 = 5 \quad r_2 = 3$
b) $|AB| = 10 \quad r_1 = 4 \quad r_2 = 5$
c) $|AB| = 15 \quad r_1 = 9 \quad r_2 = 24$
d) $|AB| = 12 \quad r_1 = 8 \quad r_2 = 6$
e) $|AB| = 0 \quad r_1 = 5 \quad r_2 = 9$
f) $|AB| = 11 \quad r_1 = 16 \quad r_2 = 4$

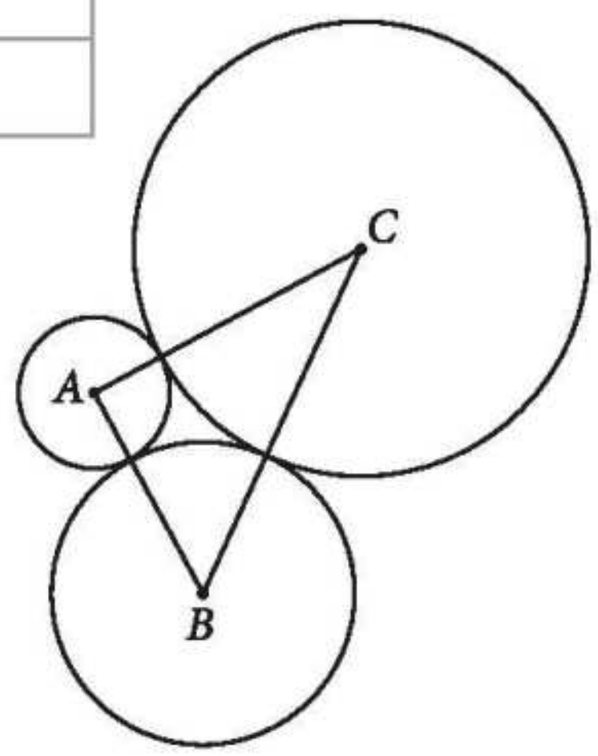
2.5. Określ odległość między punktami A i B tak, aby okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ były

a) styczne zewnętrznie, jeżeli $r_1 = 5$ i $r_2 = 9$.
b) styczne wewnętrznie, jeżeli $r_1 = 2$ i $r_2 = 8$.
c) przecinające się, jeżeli $r_1 = 10$ i $r_2 = 20$.

2.6. Przerysuj tabelę i uzupełnij ją. Jeżeli w którymś wierszu jest więcej niż jedno rozwiązanie, podaj trzy przykłady spełniające podane warunki.

Okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$	$\|AB\|$	r_1	r_2
styczne zewnętrznie	?	3	7
wzajemnie zewnętrzne	20	15	?
przecinają się	5	?	2
styczne wewnętrznie	?	4	?
$o(A, r_1)$ zawiera się w $k(B, r_2)$	?	8	10

2.7. Środki trzech okręgów parami zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta o bokach długości 10, 12 i 6. Oblicz promienie tych okręgów.



D **2.8.** Trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach odpowiednio 1, 2 i 3 są parami styczne zewnętrznie jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

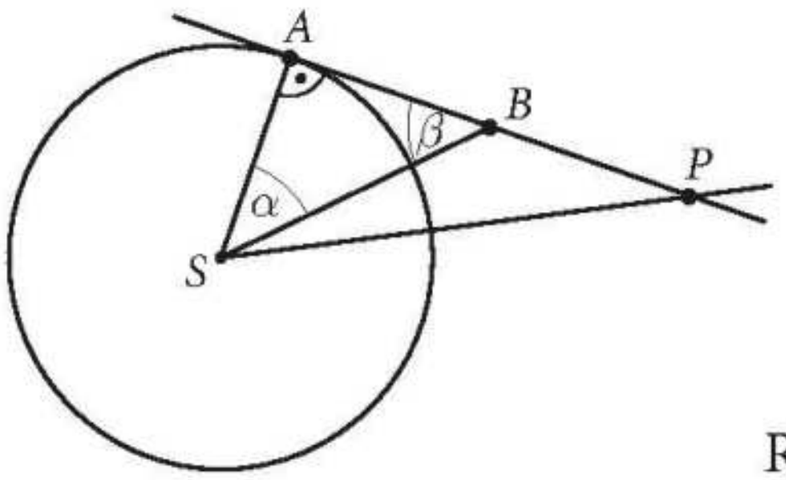
2.9. Określ, ile punktów wspólnych z okręgiem o promieniu r ma prosta oddalona od środka okręgu o d.

a) $r = 6$ $d = 18$ c) $r = 8$ $d = 10$ e) $r = 1{,}5$ $d = 1{,}5$
b) $r = 11$ $d = 11$ d) $r = 7$ $d = 2$ f) $r = 7$ $d = 5$

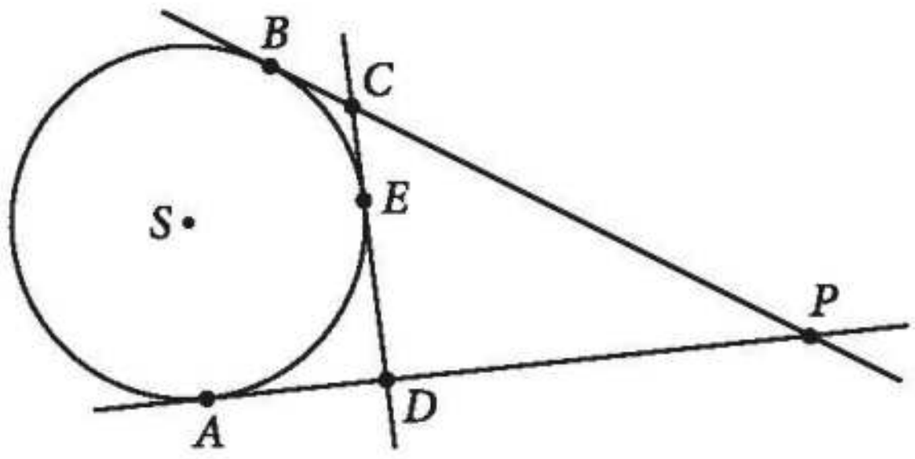
2.10. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę AB jest równa 3 cm. Promień okręgu jest równy 6 cm. Oblicz długość cięciwy AB.

2.11. Z punktu P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A (rys. 1). Odcinek SB jest środkową w trójkącie SPA. Promień okręgu jest równy 4 oraz $\alpha = \beta$. Oblicz długość odcinka SP.

2.12. Dany jest okrąg o środku S i trzy proste styczne do niego, położone jak na rysunku 2. Punkty A, B, E są punktami styczności odpowiednich prostych. Wypisz pary odcinków równych.

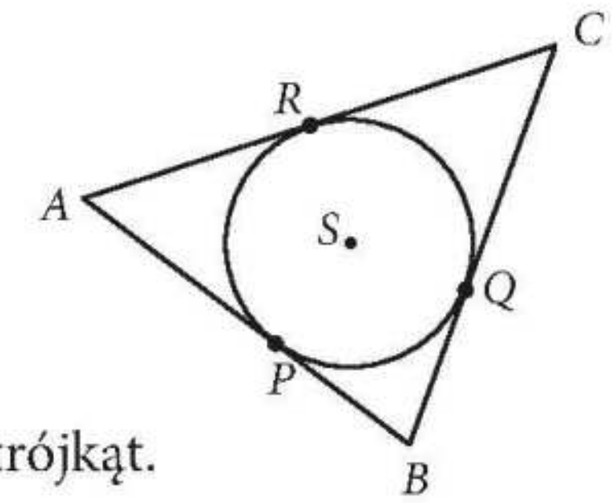


Rys. 1



Rys. 2

2.13. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono P, Q, R jak na rysunku. Wiadomo, że $|BQ| = 4$ i $|AC| = 11$. Oblicz obwód trójkąta ABC.



2.14. Skonstruuj trójkąt o bokach 5 cm, 6 cm i 8 cm, a następnie skonstruuj okrąg

a) opisany na tym trójkącie.

b) wpisany w ten trójkąt.

2.15. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 2 cm, a jedna z przyprostokątnych tego trójkąta ma długość 12 cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

* **2.16.** Ile punktów wspólnych może mieć brzeg kwadratu z okręgiem, którego środek należy do prostej zawierającej przekątną kwadratu? Wykonaj odpowiednie rysunki.

2.17. W trójkąt o kątach 34°, 70°, 76° wpisano okrąg. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności tego okręgu z bokami danego trójkąta.

2.18. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 360 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 16 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2.19. Punkty A i B należą do okręgu o środku S. Styczna do tego okręgu w punkcie B oraz prosta AS przecinają się w punkcie C i tworzą kąt o mierze 26°. Oblicz miarę kąta CAB. Rozważ dwa przypadki.

* **2.20.** Punkty A i B dzielą okrąg na dwa łuki różnej długości. Na krótszym z tych łuków obrano punkt C, a następnie w punktach A, B i C poprowadzono trzy styczne do okręgu: odpowiednio l, k, p. Proste l i k przecinają się w punkcie M, a prosta p przecina proste l i k odpowiednio w punktach N i T. Obwód trójkąta MNT jest równy $2a$. Oblicz długość odcinka MA.

D * **2.21.** Punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach a i b. Wykaż, że pole tego trójkąta jest równe $a \cdot b$.

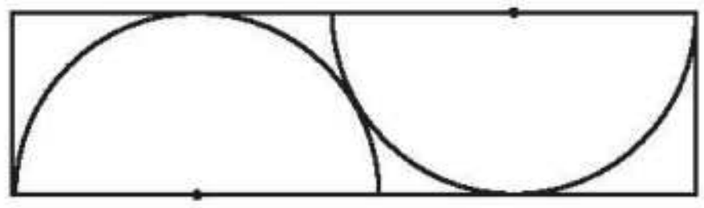
* **2.22.** W kąt prosty wpisano dwa okręgi styczne zewnętrznie. Promień większego z nich jest równy 6 cm. Oblicz promień mniejszego okręgu.

D * **2.23.** Dwa okręgi o środkach A i B oraz różnych promieniach są styczne zewnętrznie i równocześnie styczne wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie C i promieniu r. Wiadomo, że punkty A, B i C nie są współliniowe. Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest równy $2r$.

2.24. Trzy okręgi o promieniach równych 6 cm są parami styczne zewnętrznie. Wyznacz średnicę okręgu stycznego zewnętrznie do każdego z tych trzech okręgów.

2.25. Trzy okręgi o promieniach równych 3 cm są parami styczne zewnętrznie. Oblicz promień okręgu stycznego wewnętrznie do każdego z tych trzech okręgów.

2.26. Z tektury w kształcie prostokąta wycięto dwa półkola o promieniach 13 cm jak na rysunku. Oblicz wymiary tego prostokąta. Wynik zaokrąglij do pełnych centymetrów.



Prosto do matury

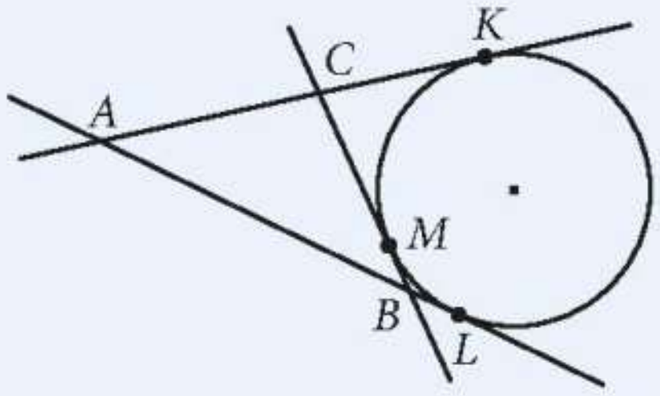
1. Prosta l jest styczna do okręgu $o(S, 5)$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Istnieją dokładnie trzy okręgi o promieniu 3 styczne zewnętrznie równocześnie do prostej l i do okręgu $o(S, 5)$.
B. Istnieją cztery okręgi o promieniu 3 styczne równocześnie do prostej l i do okręgu $o(S, 5)$.
C. Nieskończenie wiele okręgów jest stycznych równocześnie do prostej l i do okręgu $o(S, 5)$.

2. Trójkąt ABC ma boki o długościach $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 9$ cm i $|AC| = 6$ cm. Narysowano trzy okręgi o promieniach 3 cm i o środkach w wierzchołkach trójkąta. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

3. Dane są dwa okręgi współśrodkowe o promieniach równych 25 cm i 7 cm. Oblicz długość tej cięciwy większego okręgu, która jest styczna do mniejszego okręgu.

4. Proste AK, AL i BC są styczne do okręgu (zob. rysunek). Obwód trójkąta ABC jest równy 30. Wyznacz długość odcinka AK.



D **5.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c zachodzi związek $a + b - c = 2r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

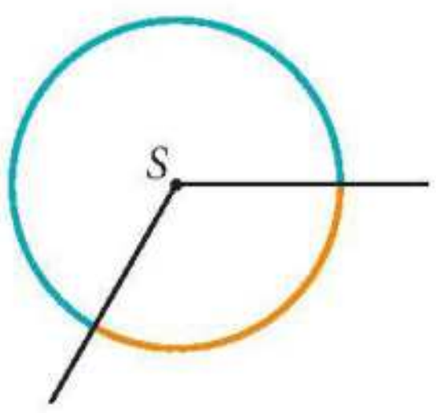
3. Kąty w kole

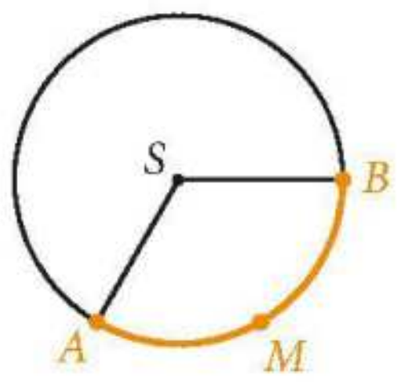
Umiejętności:

- stosowanie zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym
- korzystanie z własności stycznej do okręgu

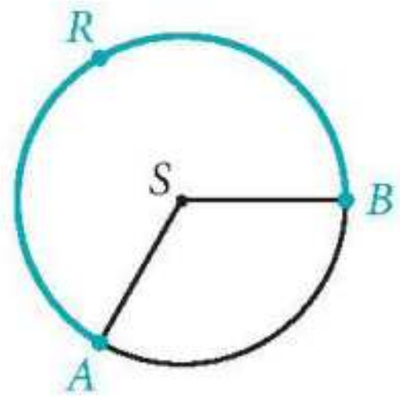
Kąt środkowy

Dwie półproste o wspólnym początku wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty. Jeżeli zakreślimy okrąg o środku w wierzchołku tych kątów, to ich ramiona podzielą okrąg na dwa łuki. Aby jednoznacznie wskazać jeden z nich, wprowadzimy oznaczenia literowe.





Łuk AMB o końcach A i B przechodzi przez punkt M.



Łuk BRA o końcach A i B przechodzi przez punkt R.

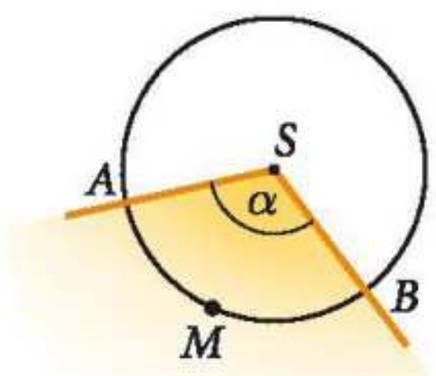
Definicja

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym w tym okręgu**.

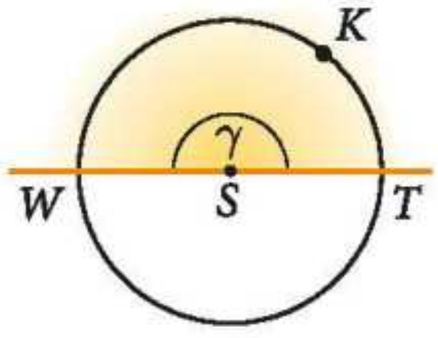
Mówimy, że kąt środkowy jest **wyznaczony przez odpowiedni łuk** okręgu (albo jest **oparty na odpowiednim łuku** okręgu). Oznacza to, że końce łuku leżą na ramionach kąta, a pozostałe punkty łuku są punktami wewnętrznymi kąta.

Przykład 1

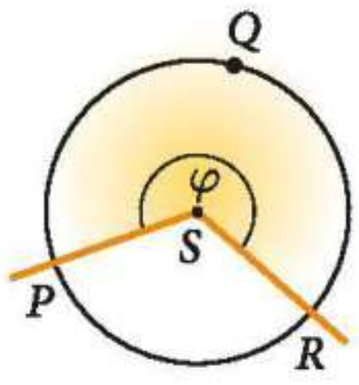
W zapisie literowym łuk AMB i łuk BMA oznaczają to samo, ale zgodnie z często przyjmowaną przez matematyków zasadą, będziemy wymieniać punkty w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara.



Kąt α jest wyznaczony przez łuk AMB.

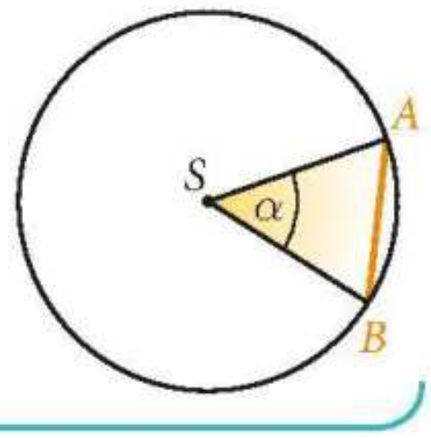


Kąt γ jest wyznaczony przez łuk TKW.

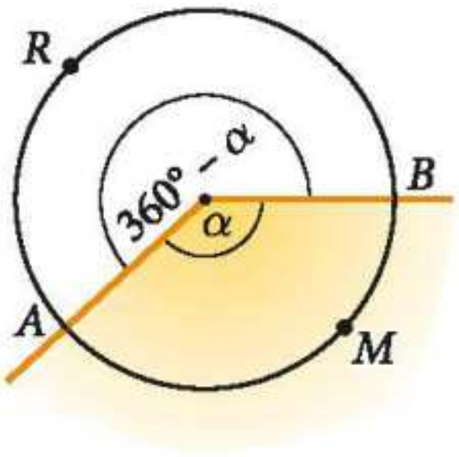


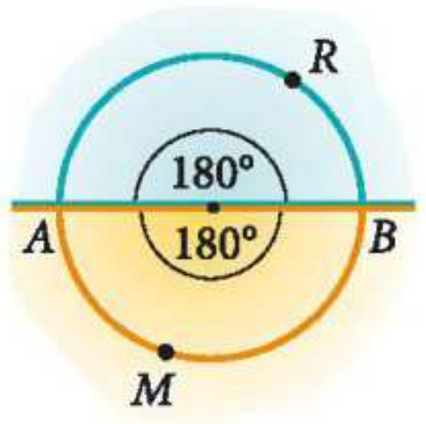
Kąt φ jest wyznaczony przez łuk RQP.

Czasem, gdy kąt środkowy jest wypukły, wygodnie jest wykorzystać cięciwę łączącą końce promieni i powiedzieć, że kąt **jest wyznaczony przez tę cięciwę**.
Na przykład kąt α na rysunku obok jest wyznaczony przez cięciwę AB.



Jeżeli kąt środkowy wyznaczony przez łuk AMB jest równy α, to kąt środkowy wyznaczony przez łuk BRA jest równy $360° - \alpha$. Jedyna sytuacja, w której oba takie kąty są wypukłe, zachodzi wówczas, gdy oba łuki są półokręgami.





Wniosek 1

Kąt środkowy oparty na półokręgu jest kątem półpełnym.

Miara kąta środkowego zależy od długości łuku, który ten kąt wyznacza.

Przypomnijmy: **1° to miara $\frac{1}{90}$ kąta prostego**.

Przykład 2 ◂ zad. 3.4, 3.5

- 90° to miara kąta prostego, czyli kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy $\frac{1}{4}$ okręgu,
- 60° to miara kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy $\frac{1}{6}$ okręgu,
- 150° to miara kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy $\frac{5}{12}$ okręgu itd.

Obliczymy, przez jaki kąt środkowy jest wyznaczony łuk o długości $\frac{2}{3}$ okręgu:

$$\frac{2}{3} \cdot 360° = 240°$$

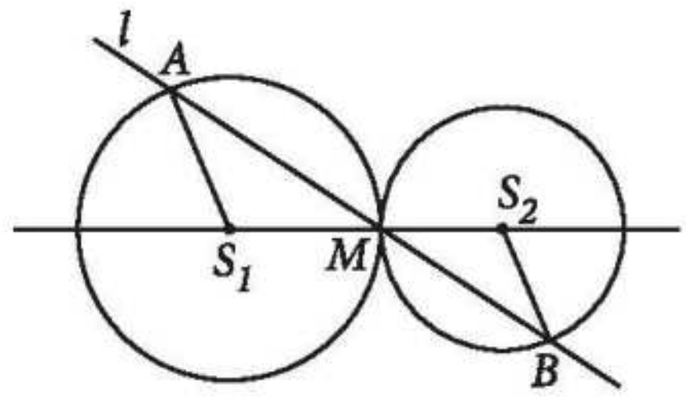
Jest to kąt środkowy o mierze 240°.

Wniosek 2

Dwa kąty środkowe w tym samym okręgu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy opierają się na równych łukach.

Przykład 3

Okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie. Prosta l przechodzi przez punkt styczności M i przecina okręgi w punktach A i B tak jak na rysunku. Wykażemy, że wypukłe kąty środkowe wyznaczone przez cięciwy MA i MB są równe.



Dowód

Trójkąty AS_1M i BS_2M są równoramienne (w każdym z nich ramionami są promienie), zatem każdy z nich ma przy podstawie równe kąty. Punkty S_1, M, S_2 są współliniowe. Kąty S_1MA i S_2MB są wierzchołkowe, czyli równe, więc wszystkie kąty przy podstawach obu trójkątów są równe. Kąty AS_1M i BS_2M są więc równe jako dopełnienie do 180°.

Koniec dowodu

Części koła

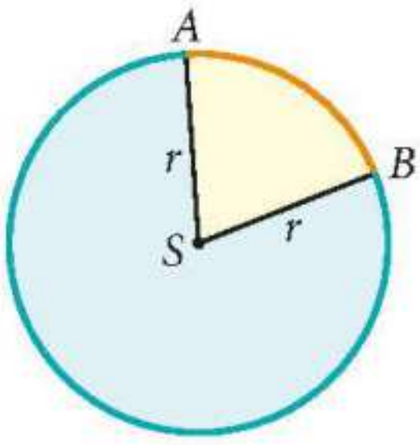
Z kątem środkowym związana jest część koła nazywana wycinkiem.

Definicja

Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na które dzielą koło dwa niepokrywające się promienie.

Pole koła o promieniu r jest równe: $P = \pi r^2$.

Pole wycinka kołowego zależy od miary kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek lub inaczej – od długości łuku, który ten wycinek ogranicza. Na przykład jeśli łuk AB będący brzegiem wycinka kołowego (na rysunku zaznaczony kolorem pomarańczowym) ma długość równą $\frac{1}{5}$ długości okręgu, to pole:



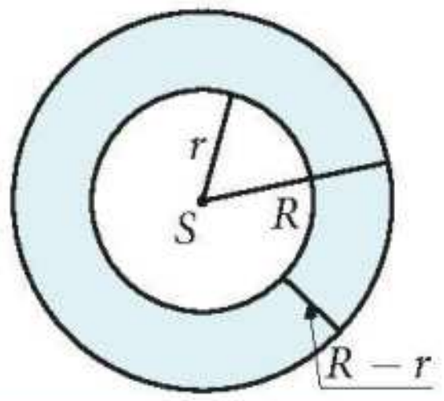
- żółtego wycinka kołowego jest równe: $P_1 = \frac{1}{5}\pi r^2$,
- niebieskiego wycinka jest równe: $P_2 = \frac{4}{5}\pi r^2$.

Zauważmy, że dwa wycinki kołowe kół o równych promieniach są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy łuki wyznaczające te wycinki są tej samej długości, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy kąty środkowe wyznaczające te wycinki mają tę samą miarę.

Przypomnijmy jeszcze pojęcie pierścienia kołowego znane ze szkoły podstawowej.

Definicja

Pierścieniem kołowym o szerokości $R-r$, gdzie $R > r$, nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość d od ustalonego punktu S spełnia warunek $r \leqslant d \leqslant R$.



Pole pierścienia kołowego jest równe: $P = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

Kąt wpisany

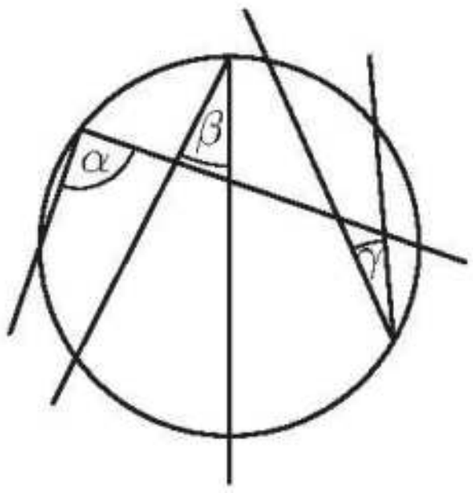
Definicja

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię kąta ma z tym okręgiem jeszcze jeden punkt wspólny.

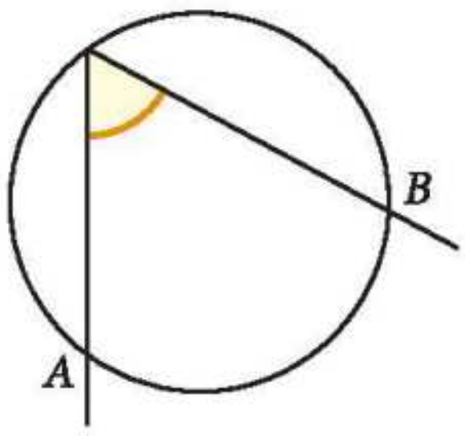
Na rysunku 1 zaznaczono kilka kątów wpisanych w okrąg.

Ramiona kąta wpisanego dzielą okrąg na dwa łuki (rys. 2). Łuk, do którego nie należy wierzchołek kąta, nazywamy **łukiem wyznaczonym przez kąt**. Mówimy również, że kąt wpisany **jest oparty** na tym łuku.

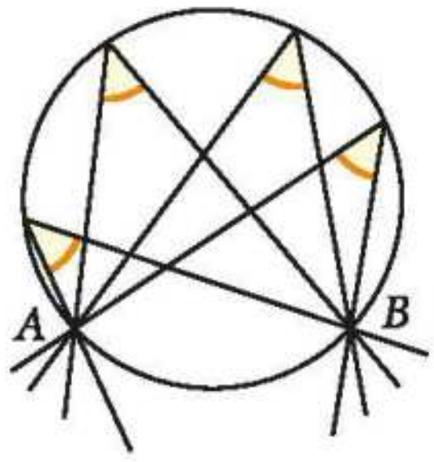
Zwróćmy uwagę na to, że na jednym łuku jest opartych nieskończenie wiele kątów wpisanych (rys. 3).



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

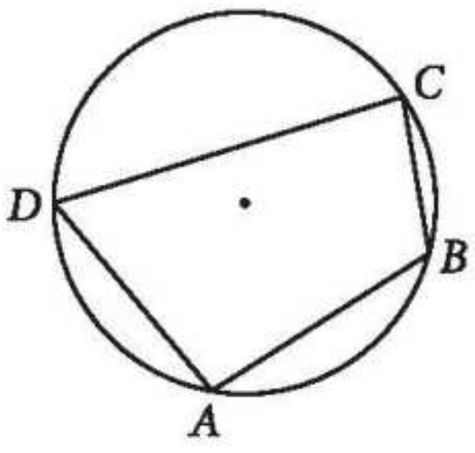
Przykład 4

Wszystkie wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu tak jak na rysunku. Zaznaczymy wszystkie kąty wpisane o wierzchołkach będących wierzchołkami tego czworokąta i oparte na łuku

a) AB nieprzechodzącym przez C.

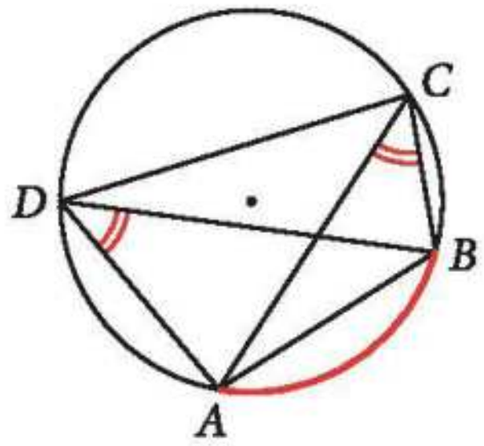
b) BC nieprzechodzącym przez D.

c) ABC.

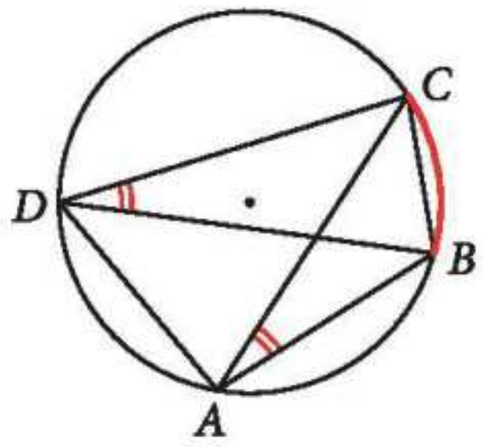


Rozwiązanie

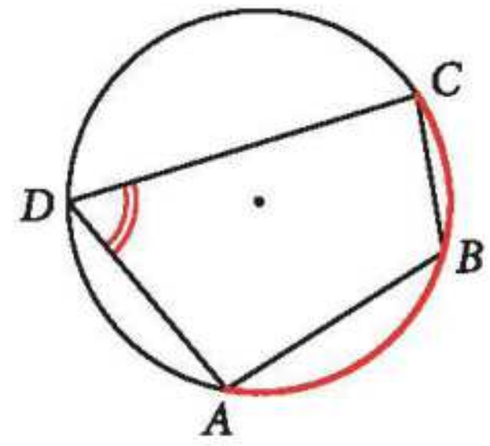
a) Na łuku AB nieprzechodzącym przez C oparte są: $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB$.



b) Na łuku BC nieprzechodzącym przez D oparte są: $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$.



c) Na łuku ABC oparty jest $\sphericalangle ADC$.



Przykład 5

W okręgu o promieniu 2 cm poprowadzimy cięciwę o długości

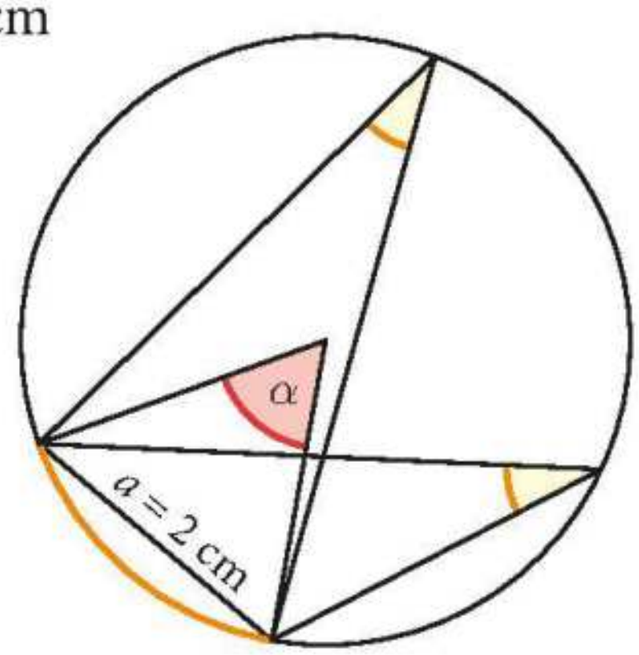
a) $a = 2$ cm. b) $a = 3$ cm.

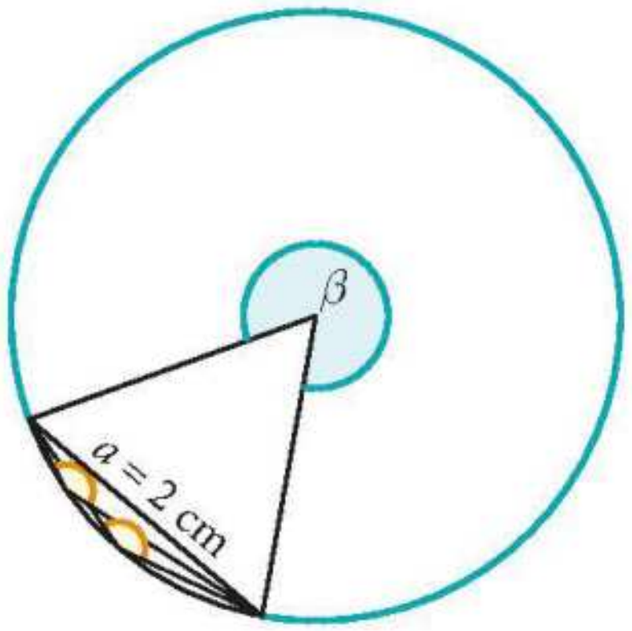
Dla każdego z łuków wyznaczonych przez poprowadzoną cięciwę narysujemy kąt środkowy i dwa kąty wpisane oparte na tym łuku.

Rozwiązanie

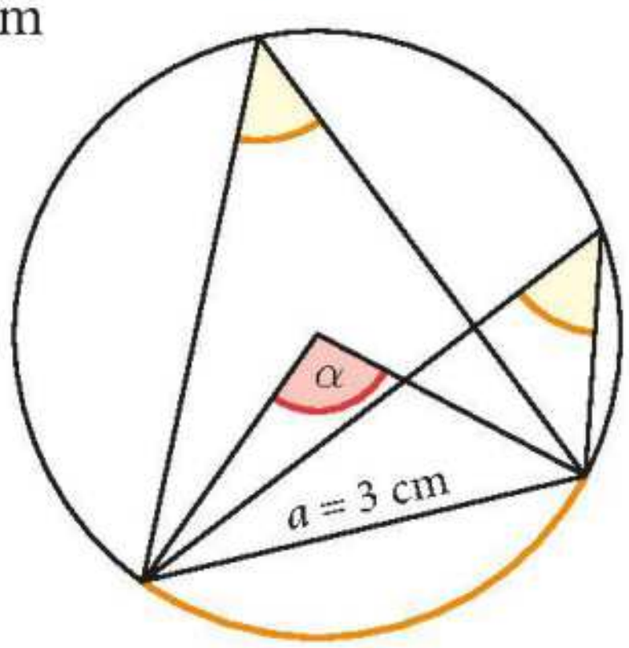
Aby rysunki były bardziej czytelne, zaznaczymy oddzielnie rozwiązanie dla łuku mniejszego od półokręgu (w tym przypadku kąt środkowy oznaczyliśmy α) oraz rozwiązanie dla łuku większego od półokręgu (kąt środkowy oznaczyliśmy β).

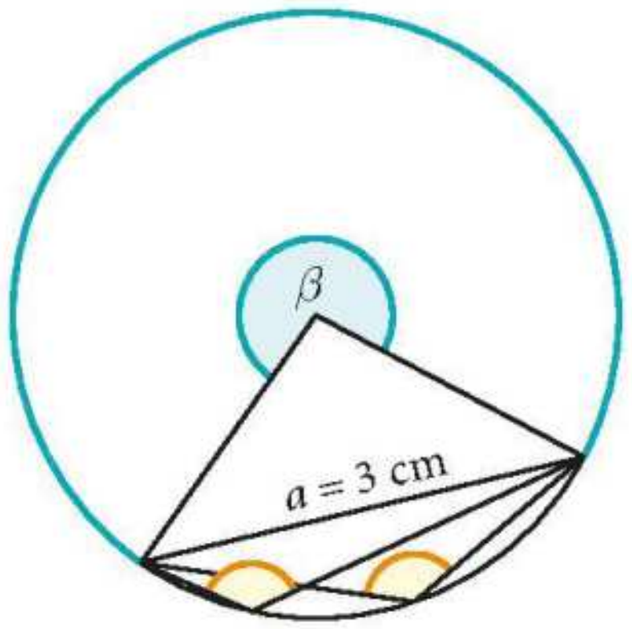
a) $a = 2$ cm





b) $a = 3$ cm





Między kątem wpisanym i kątem środkowym opartymi na tym samym łuku zachodzi zależność wyrażona w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

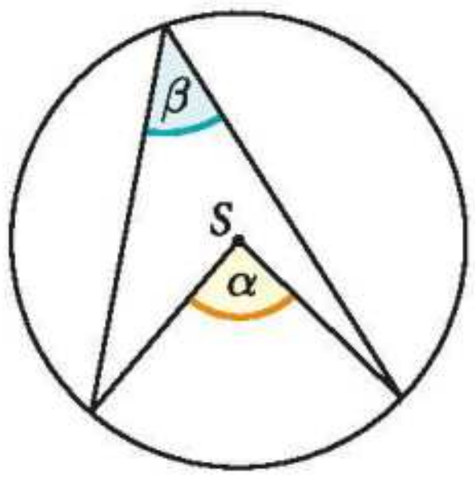
Dowód

Oznaczmy parę kątów, o których jest mowa w twierdzeniu:

α – kąt środkowy

β – kąt wpisany, oparty na tym samym łuku co kąt α

Mamy wykazać, że $\alpha = 2\beta$.



Kąty wpisane mogą być różnie położone, co widać np. na rysunkach z przykładu 5. Dowód twierdzenia przeprowadzimy w trzech przypadkach, które wyczerpią wszystkie możliwości.

I. Ramię kąta wpisanego przechodzi przez środek okręgu.

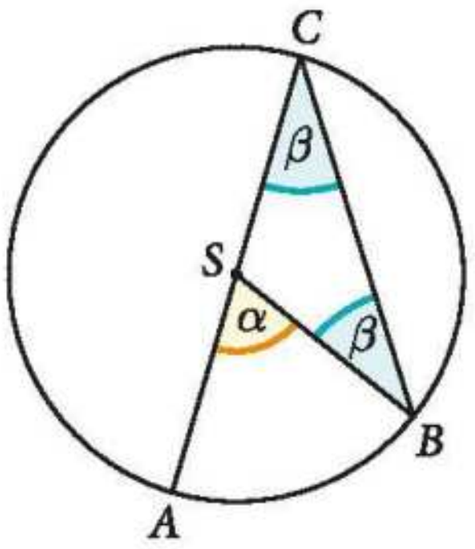
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$\sphericalangle CBS = \beta$ ⟵ trójkąt CBS jest równoramienny

$\sphericalangle CSB = 180^\circ - 2\beta$ ⟵ suma kątów w trójkącie

$\sphericalangle CSB = 180^\circ - \alpha$ ⟵ kąt CSB jest kątem przyległym do kąta α

$\alpha = 2\beta$

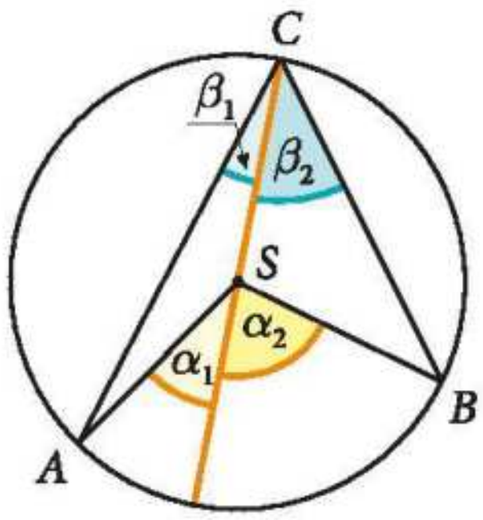


II. Środek okręgu jest punktem wewnętrznym kąta wpisanego.

Prowadzimy półprostą CS.

Półprosta CS dzieli kąt środkowy α na kąty α_1 i α_2, a kąt wpisany β na kąty β_1 i β_2 jak na rysunku obok.

Możemy dla tych kątów zastosować związek udowodniony w punkcie 1.



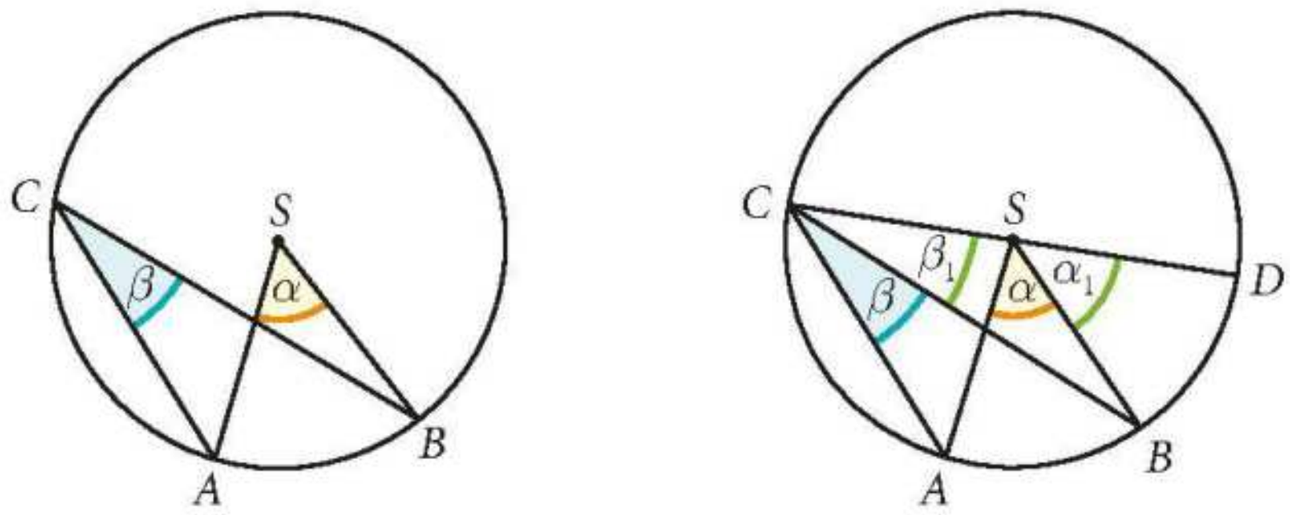
$\alpha_2 = 2\beta_2$ ⟵ po zasłonięciu części rysunku na lewo od prostej CS

$\alpha_1 = 2\beta_1$ ⟵ po zasłonięciu części rysunku na prawo od prostej CS

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

III. Środek okręgu leży poza kątem wpisanym.

Ponownie prowadzimy półprostą CS i oznaczamy kąty α_1, β_1 jak na rysunku.



$\alpha_1 = 2\beta_1$ ⟵ kąt środkowy i kąt wpisany oparte na łuku BD

$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$ ⟵ kąt środkowy i kąt wpisany oparte na łuku AD

$\alpha + 2\beta_1 = 2(\beta + \beta_1)$ ⟵ podstawiamy do drugiego równania $\alpha_1 = 2\beta_1$

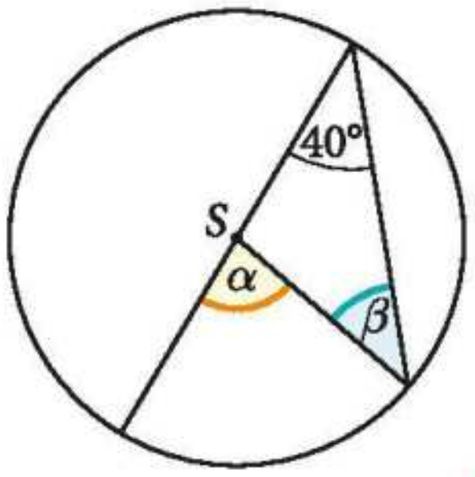
$\alpha + 2\beta_1 = 2\beta + 2\beta_1$

$\alpha = 2\beta$

Koniec dowodu

Przykład 6 ◀ zad. 3.18

Punkt S jest środkiem okręgu. Wyznaczymy miary kątów α i β.



Rozwiązanie

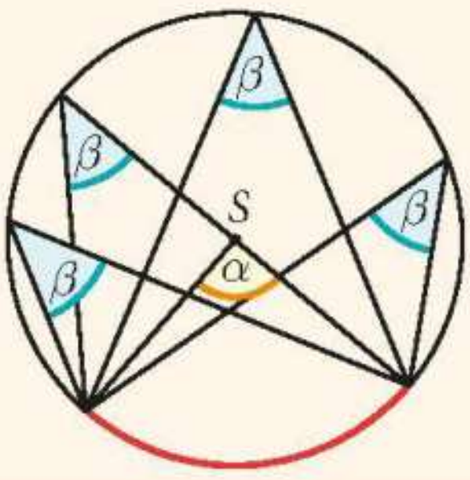
α jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co wpisany kąt o mierze 40°. Zatem $\alpha = 80°$.

Kąt β ma miarę 40°, jako drugi kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego.

W okręgu wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe połowie tego samego kąta środkowego, więc na mocy udowodnionego twierdzenia mamy następujący wniosek.

Wniosek 3

Wszystkie kąty wpisane w dany okrąg i oparte na tym samym łuku są równe.



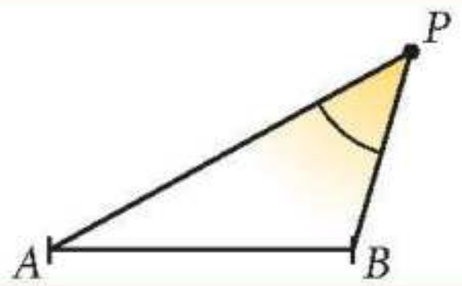
Po połączeniu wniosku 2 (s. 232) i wniosku 3 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

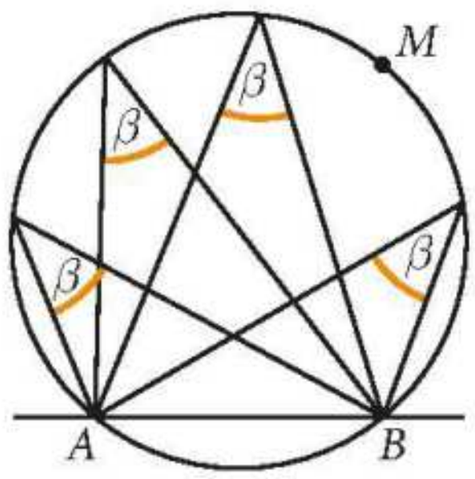
Jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są one równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.

Definicja

Punkty A, B i P są niewspółliniowe. Kąt APB nazywamy **kątem, pod którym widać odcinek AB z punktu P.**



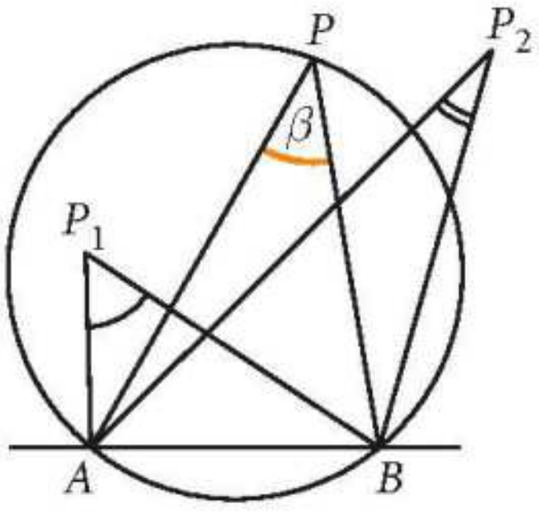
Ograniczmy rozważania do półpłaszczyzny wyznaczonej przez punkty AMB (rys. obok).
Wówczas, zgodnie z ostatnim wnioskiem, z każdego punktu łuku AMB widać odcinek AB pod kątem β. Wykażemy, że żaden inny punkt tej półpłaszczyzny takiego warunku nie spełnia.



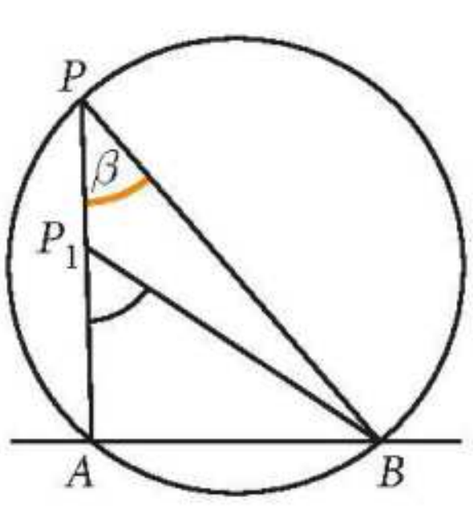
Jeżeli punkt półpłaszczyzny nie należy do łuku AMB, to leży albo wewnątrz części koła ograniczonej tym łukiem, jak np. punkt P_1, albo na zewnątrz tej części, jak np. punkt P_2 (rys. 1).

W pierwszym przypadku (rys. 2) mamy $\sphericalangle AP_1B > \beta$ jako kąt zewnętrzny trójkąta PP_1B nieprzylegający do wewnętrznego kąta β – udowodnienie tego faktu zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.
Czyli z punktu P_1 widać odcinek AB pod kątem większym niż β.

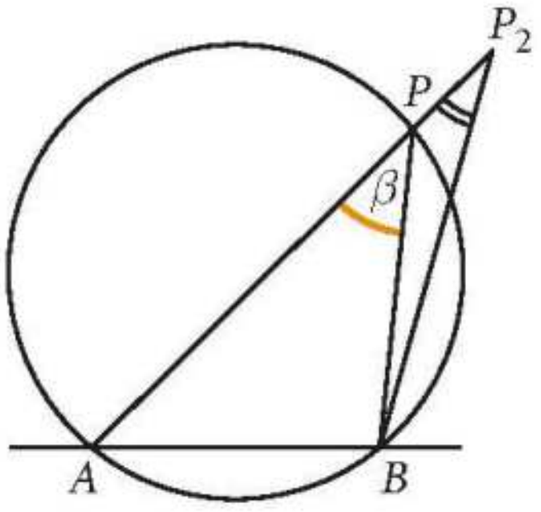
W drugim przypadku (rys. 3) mamy $\beta > \sphericalangle AP_2B$ jako kąt zewnętrzny trójkąta PP_2B nieprzylegający do wewnętrznego kąta PP_2B.
Czyli z punktu P_2 widać odcinek AB pod kątem mniejszym niż β.



Rys. 1



Rys. 2

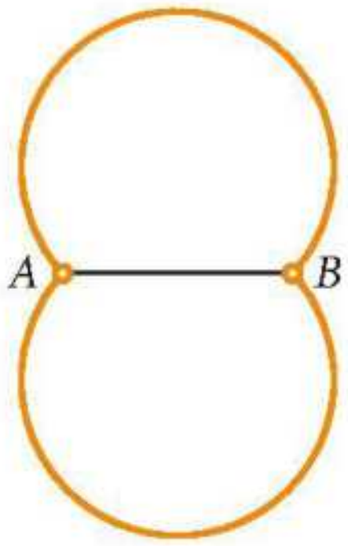


Rys. 3

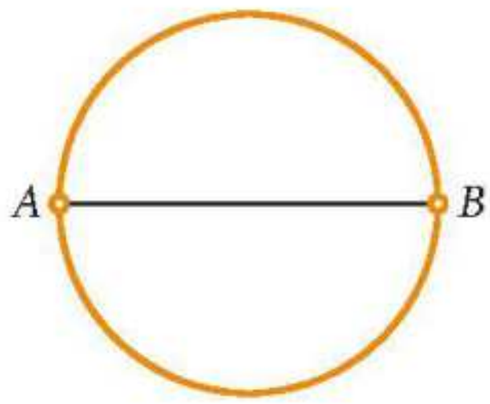
Oczywiście aby otrzymać zbiór wszystkich punktów, z których odcinek AB widać pod kątem β, należy uzupełnić łuk AMB o łuk symetryczny do niego względem prostej AB. Zwróćmy uwagę, że punkty A i B nie należą do tego zbioru.

Ostatecznie – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, z których odcinek AB widać pod danym kątem β, ma, w zależności od rozwartości kąta, następujący kształt:

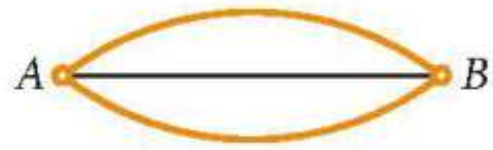
β jest kątem ostrym



β jest kątem prostym

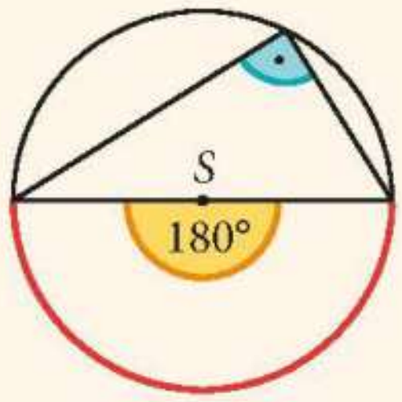


β jest kątem rozwartym



Wniosek 4

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

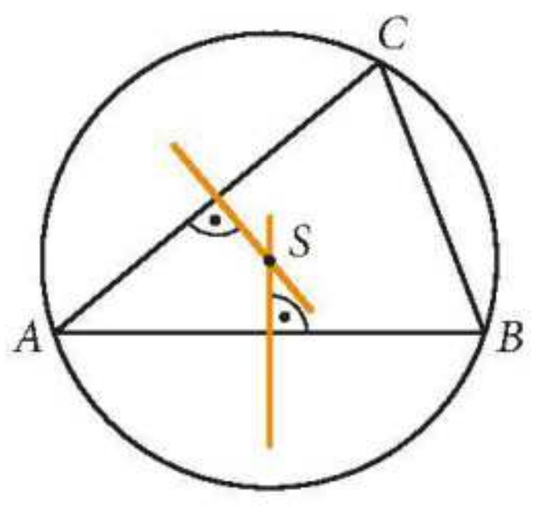


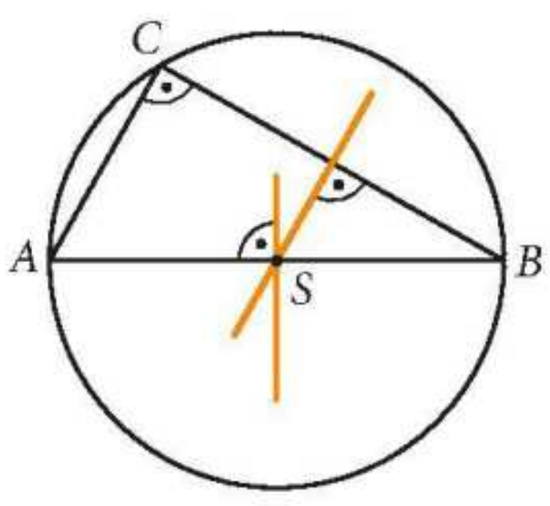
Przykład 7

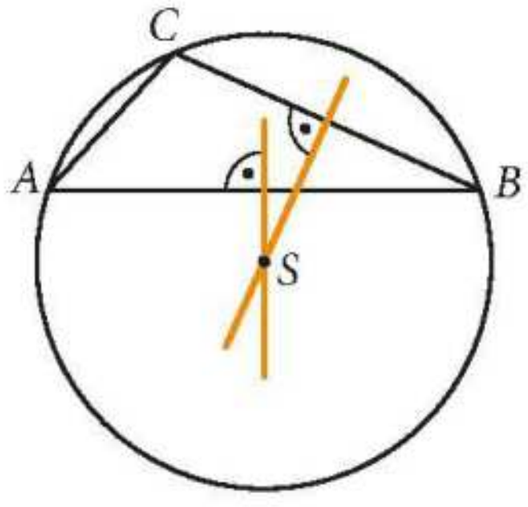
Wyznaczymy konstrukcyjnie środek okręgu opisanego na danym trójkącie.

Rozwiązanie

Aby znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy wyznaczyć punkt przecięcia symetralnych dwóch boków tego trójkąta. Na rysunkach przedstawiono rozwiązanie zadania.







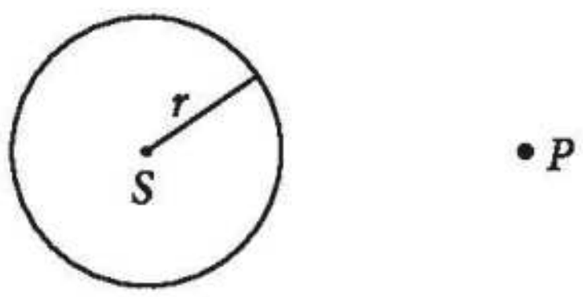
Zauważmy, że środek okręgu opisanego leży:

- wewnątrz trójkąta ostrokątnego,
- na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego,
- na zewnątrz trójkąta rozwartokątnego.

Wynika to bezpośrednio z powyższych rozważań o zbiorach punktów, z których dany odcinek widać pod danym kątem.

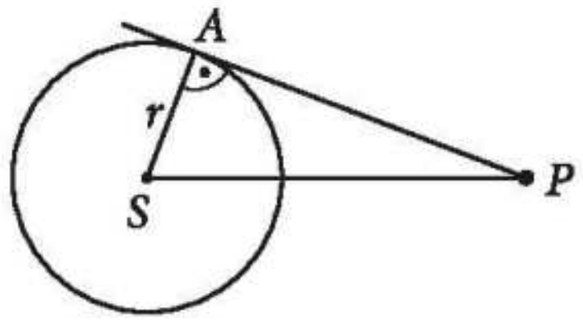
Przykład 8

Dany jest okrąg o środku S i promieniu r oraz punkt P ($|PS| > r$). Skonstruujemy styczną do tego okręgu przechodzącą przez punkt P.



Rozwiązanie

Do narysowania szukanej prostej potrzebny jest drugi punkt. Przeanalizujmy sposób wyznaczenia takiego punktu.

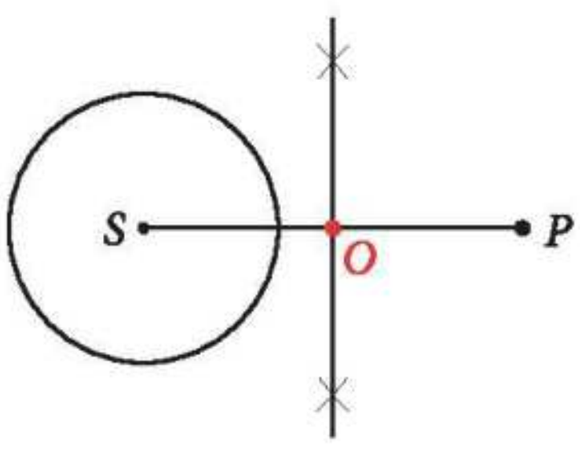


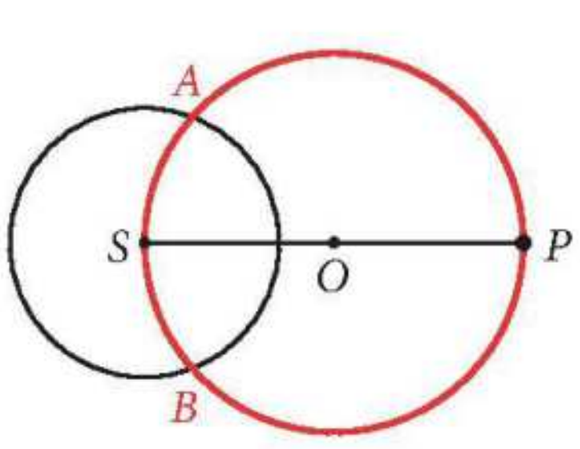
Przypuśćmy, że prosta AP jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiemy, że promień okręgu poprowadzony z punktu styczności jest prostopadły do stycznej. Kąt SAP jest prosty, więc jest kątem wpisanym opartym na półokręgu o średnicy SP.

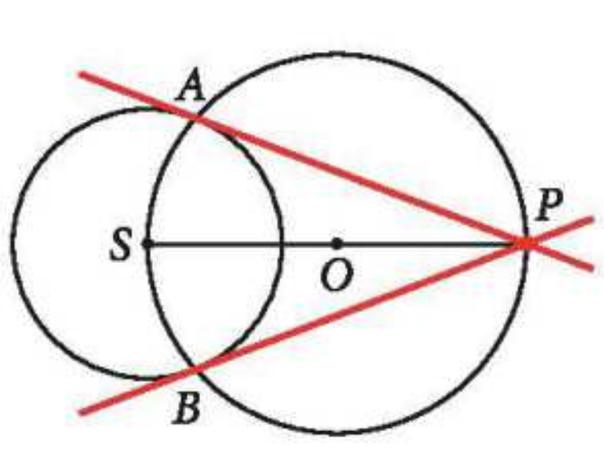
Zatem przecięcie danego okręgu z okręgiem o średnicy SP wyznacza drugi punkt potrzebny do narysowania prostej stycznej.

Oto kolejne etapy konstrukcji.

- Prowadzimy symetralną odcinka SP, aby wyznaczyć jego środek – punkt O.
- Rysujemy okrąg $o(O, |OS|)$ – w przecięciu tego okręgu z danym okręgiem otrzymujemy punkty A i B.
- Prowadzimy proste PA i PB, które są szukanymi stycznymi.







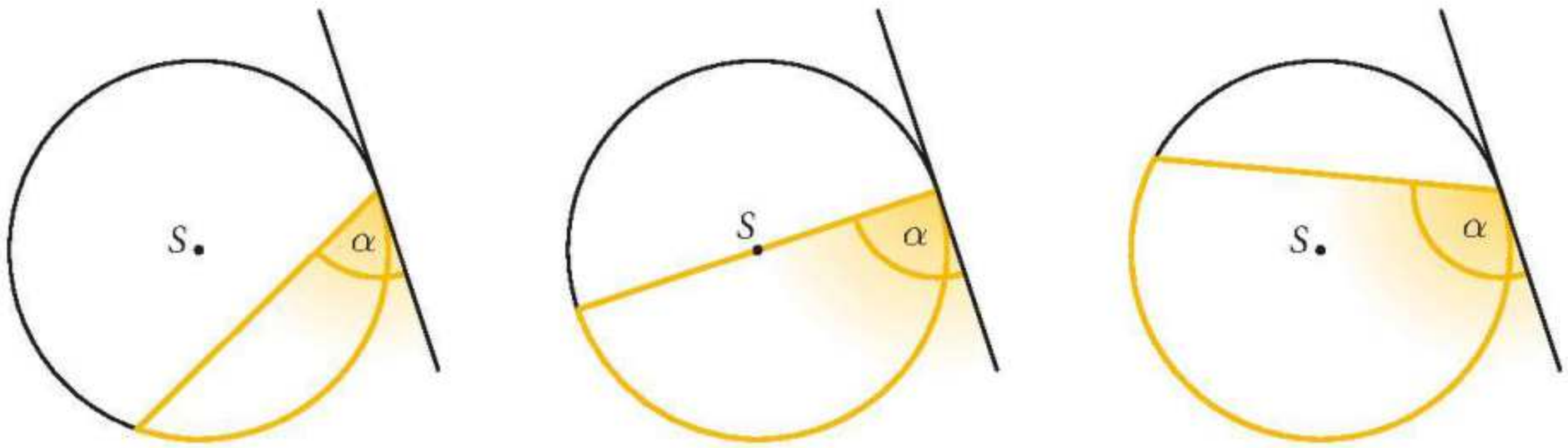
Zadanie ma dwa rozwiązania – z punktu P możemy poprowadzić dwie styczne.

Kąt między styczną a cięciwą

Definicja

Dane są okrąg oraz styczna do tego okręgu. **Kątem między styczną a cięciwą** nazywamy kąt o wierzchołku w punkcie styczności, którego jedno ramię jest zawarte w stycznej, a drugie ramię zawiera cięciwę okręgu poprowadzoną z punktu styczności.

Kąt między styczną a cięciwą może być kątem ostrym, prostym lub rozwartym, co zostało zilustrowane na rysunkach poniżej. Zauważmy, że kąt przyległy do kąta α jest również kątem między styczną a cięciwą.



$0° < \alpha < 90°$ $\quad \alpha = 90°$ $\quad 90° < \alpha < 180°$

Twierdzenie

Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą

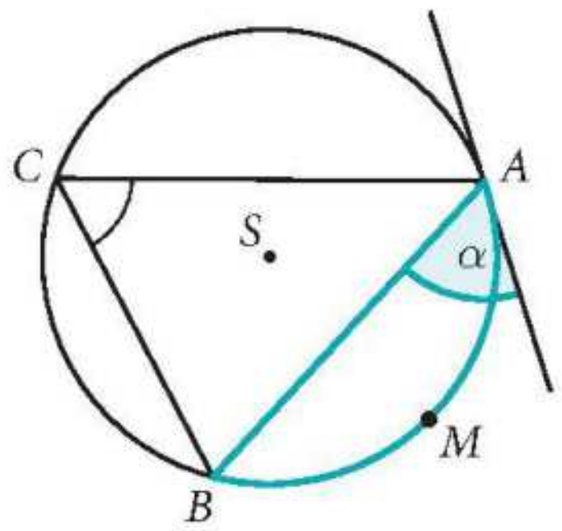
Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α.

Dowód

Oznaczmy:

A – punkt styczności
AB – cięciwa
α – kąt między styczną a cięciwą

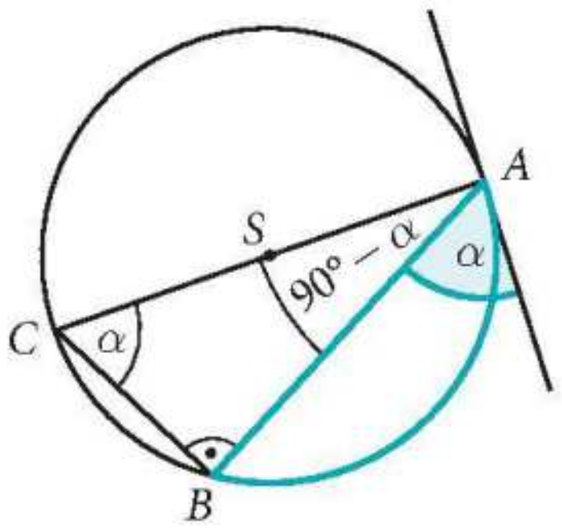
Kolorem zaznaczamy łuk okręgu, o którym mówi twierdzenie, czyli łuk zawarty w obszarze kąta α.



Kąt α może być ostry, prosty lub rozwarty. Dowód twierdzenia przeprowadzimy zatem w trzech przypadkach.

I. Kąt α jest ostry.

Jeżeli α jest kątem ostrym, to po zaznaczeniu średnicy AC otrzymamy trójkąt ABC jak na rysunku.



Kątem wpisanym opartym na łuku zawartym w obszarze kąta α jest kąt BCA.

Wystarczy zatem udowodnić, że $\alpha = \sphericalangle BCA$, bo każdy inny kąt wpisany na mocy wniosku 3 jest równy kątowi BCA.

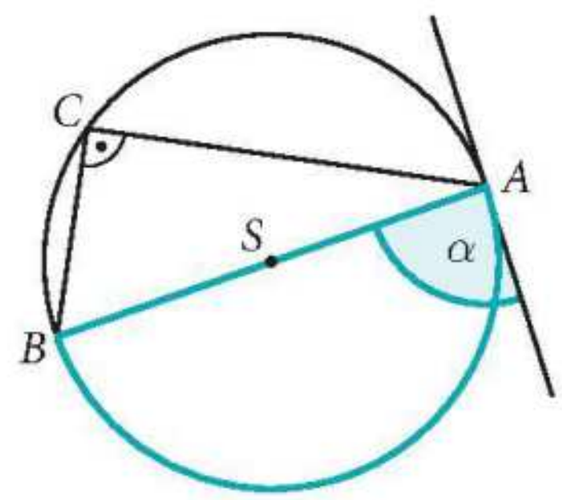
$\sphericalangle CBA = 90°$ ⟵ kąt wpisany oparty na średnicy

$\sphericalangle BAC = 90° - \alpha$ ⟵ styczna jest prostopadła do promienia

$\sphericalangle BCA = \alpha$ ⟵ własność sumy kątów w trójkącie

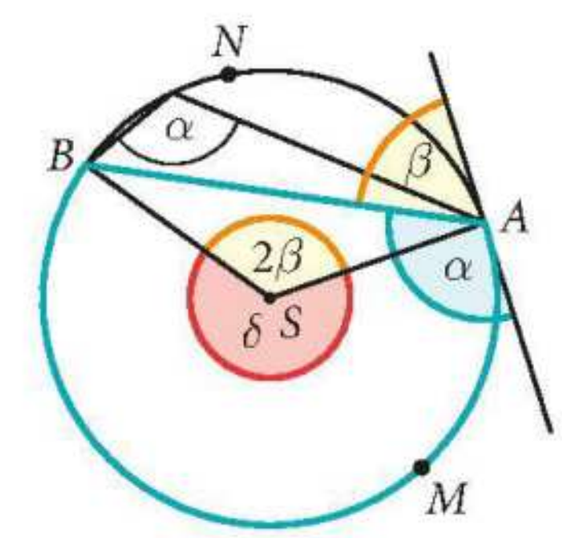
II. Kąt α jest prosty.

Jeżeli α jest kątem prostym, to łuk zawarty w jego obszarze jest półokręgiem, a każdy kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.



III. Kąt α jest rozwarty.

Jeżeli α jest kątem rozwartym, to przyległy do niego kąt β jest ostry. Kąt środkowy wyznaczony przez łuk BMA oznaczyliśmy δ.



Prawdziwość tezy dla kąta β została udowodniona, co oznacza, że kąt wpisany oparty na łuku ANB ma miarę β. Zatem w trójkącie ASB kąt ASB ma miarę 2β.

$\beta = 180° - \alpha$ ⟵ kąt przyległy

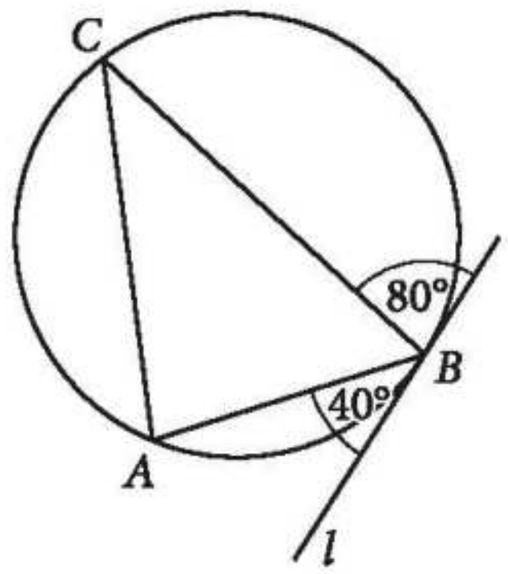
$\delta = 360° - 2\beta = 360° - 2(180° - \alpha) = 2\alpha$

Skoro kąt środkowy oparty na łuku BMA ma miarę 2α, to kąt wpisany oparty na tym łuku ma miarę α.

Koniec dowodu

Przykład 9 ◂ zad. 3.29

Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie B i tworzy z cięciwami AB i BC odpowiednio kąty $40°$ i $80°$ jak na rysunku. Wyznaczymy miary kątów trójkąta ABC.



Rozwiązanie

$$\sphericalangle ABC = 180° - 80° - 40° = 60°$$

$\sphericalangle BCA$ jest kątem wpisanym opartym na łuku AB, czyli jest równy kątowi między styczną a cięciwą zawierającą ten łuk. Zatem:

$$\sphericalangle BCA = 40°$$

Kąt CAB wyznaczamy podobnie (albo korzystamy z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie) i otrzymujemy:

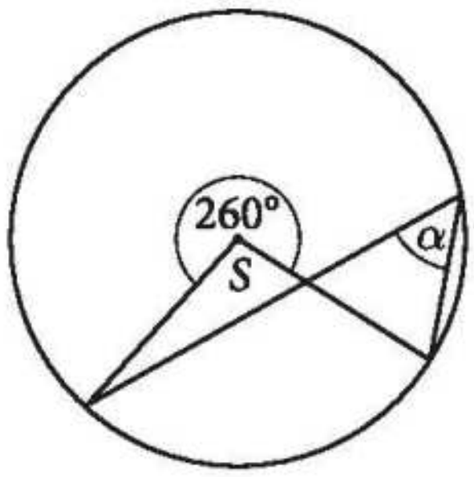
$$\sphericalangle CAB = 80°$$

Odp.: $\sphericalangle A = 80°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 40°$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wyznacz miarę kąta α.

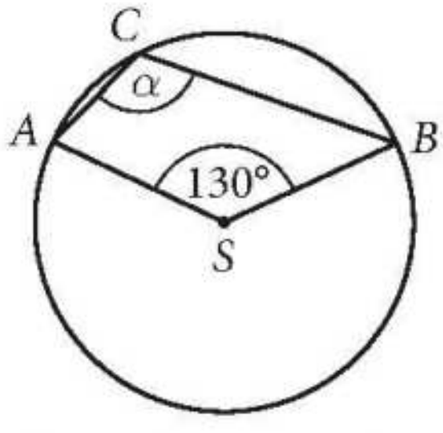


A. $130°$ **B.** $100°$ **C.** $50°$ **D.** $45°$

3.2. Jaką miarę ma kąt wpisany oparty na łuku o długości równej $\frac{4}{9}$ obwodu koła?

A. $20°$ **B.** $40°$ **C.** $80°$ **D.** $160°$

3.3. Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S jak na rysunku. Wyznacz miarę kąta α.

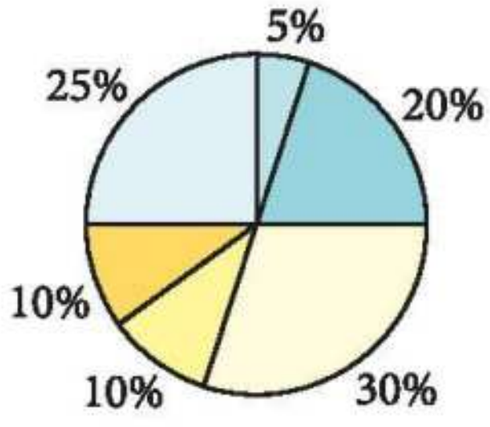


A. $100°$ **C.** $115°$

B. $110°$ **D.** $125°$

3.4. Na okręgu odmierzono kolejno łuki AB, BC i CA, których długości są w stosunku $1 : 7 : 10$. Wyznacz miary kątów środkowych opartych na tych łukach.

3.5. Dany jest diagram kołowy. Oblicz miary kątów zaznaczonych kolorami wycinków kołowych.



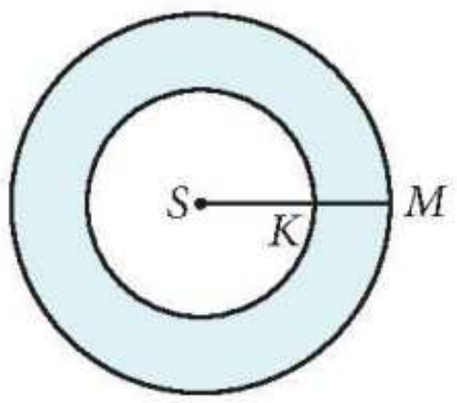
3.6. Oblicz pole wycinka kołowego o promieniu r i kącie środkowym α wyznaczającym ten wycinek.

a) $r = 12,\ \alpha = 60°$
b) $r = 1,\ \alpha = 12°$
c) $r = 2\sqrt{3},\ \alpha = 330°$
d) $r = 8,\ \alpha = 50°$

3.7. Pole wycinka kołowego o promieniu 15 jest równe 45π. Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek.

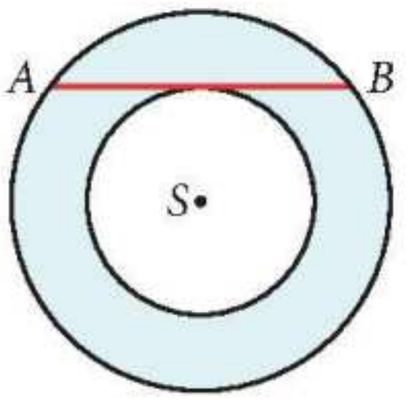
3.8. Przyjmijmy, że kawałki pizzy są wycinkami kołowymi. Który z dwóch kawałków ma większą powierzchnię: kawałek pizzy dużej o średnicy 42 cm i kącie środkowym 30° czy kawałek pizzy średniej o średnicy 32 cm i kącie środkowym 45°?

3.9. W pierścieniu kołowym przedstawionym na rysunku obok $|SK| = 3$ i $|KM| = 2$. Oblicz pole tego pierścienia.



3.10. Długości okręgów ograniczających pierścień kołowy są równe 10 i 12. Oblicz pole tego pierścienia.

3.11. Dany jest pierścień kołowy o środku S. Cięciwa AB zewnętrznego okręgu jest styczna do wewnętrznego okręgu i ma długość 18 (zob. rysunek). Oblicz pole tego pierścienia.



3.12. Cięciwy AB i BC okręgu są równej długości i tworzą kąt ABC o mierze 100°. Oblicz miarę wypukłego kąta środkowego wyznaczonego przez cięciwę AB.

3.13. Kąt wpisany jest o 50° mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Oblicz miary obydwu kątów.

3.14. Kąt między średnicą AC i cięciwą AB okręgu o środku S ma miarę 20°. Wyznacz miary kątów wewnętrznych w trójkątach ASB i ACB.

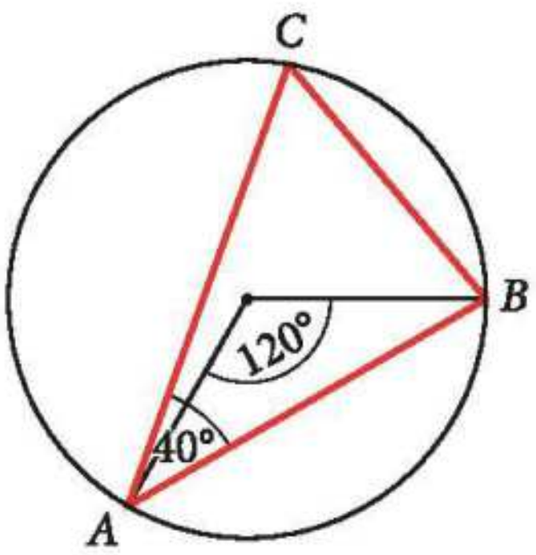
3.15. Na okręgu zaznaczono kolejno punkty A, B, C, D, E i F w taki sposób, że łuki AB, BC i CD są jednakowej długości, a każdy z łuków DE, EF i FA jest dwa razy dłuższy od łuku AB.

a) Wyznacz miary kątów sześciokąta $ABCDEF$.
b) Jakie kąty miałby taki sześciokąt, gdyby łuki były ustawione na przemian: dłuższy, krótszy, dłuższy itd.?

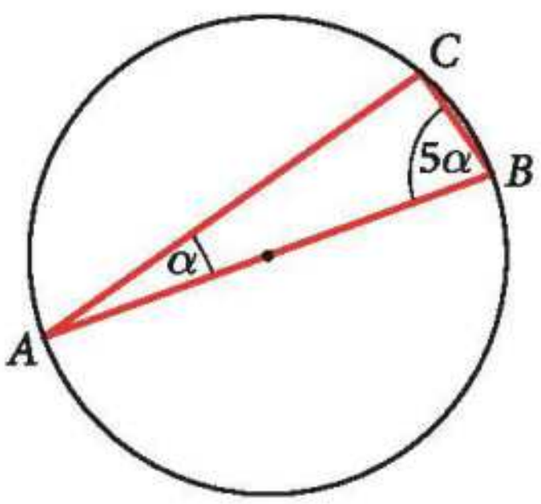
3.16. W kąt $\alpha = 50°$ wpisano okrąg, który jest styczny do ramion kąta w punktach A i B. Na krótszym łuku AB okręgu wybrano punkt M. Oblicz miarę kąta AMB.

3.17. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

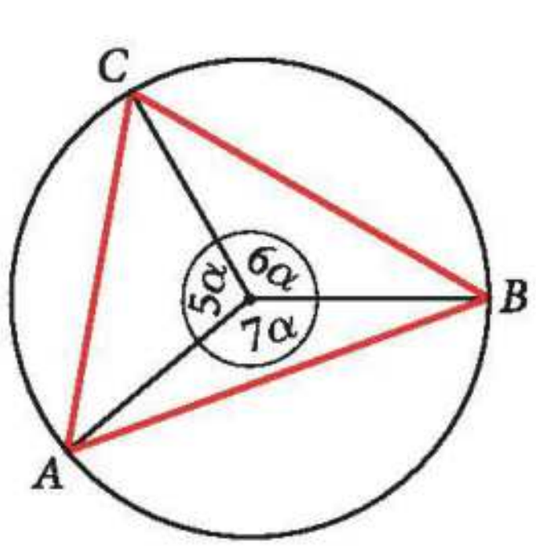
a)



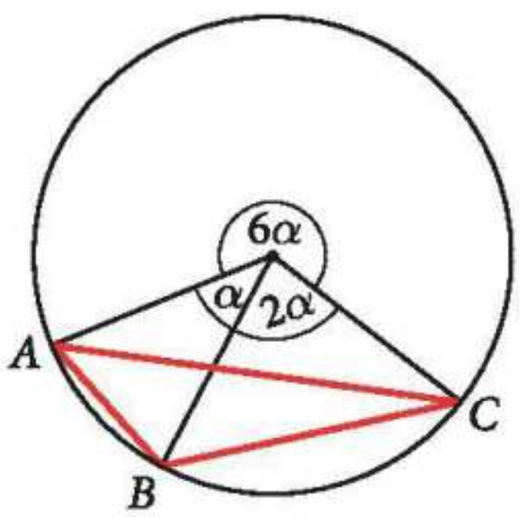
b)



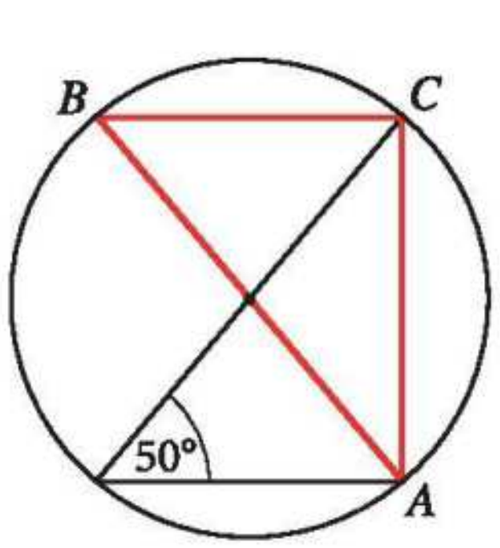
c)



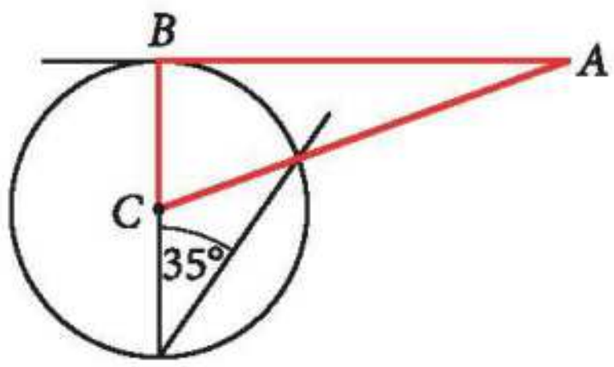
d)



e)



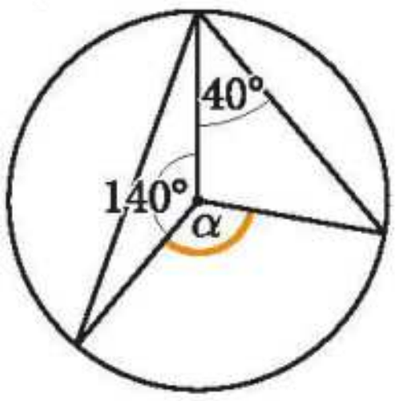
f)



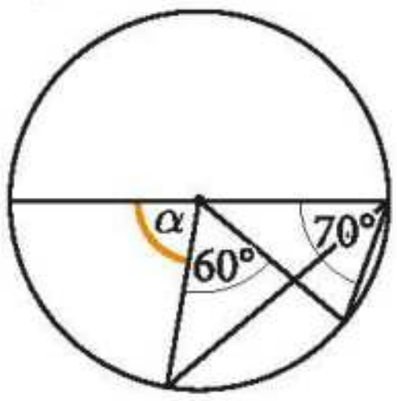
AB – styczna

3.18. Wyznacz miarę kąta α.

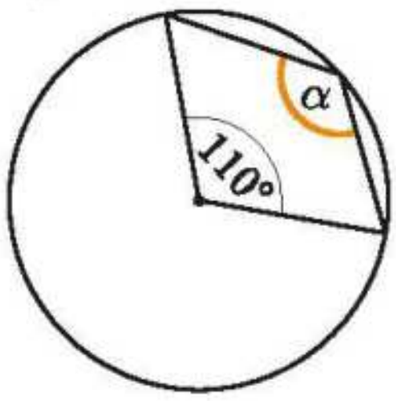
a)



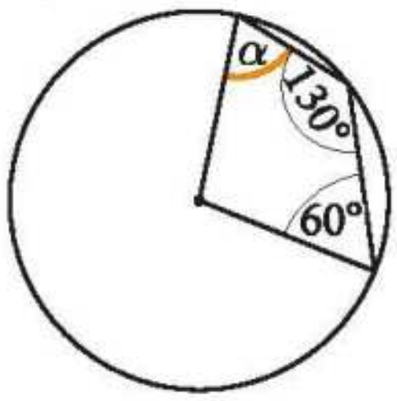
b)



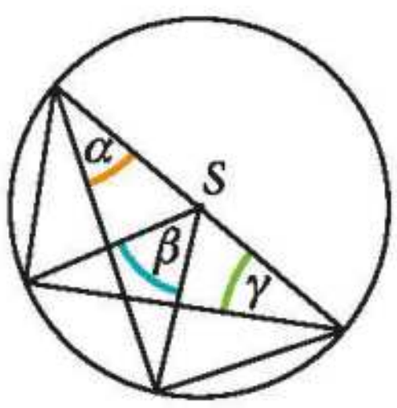
c)



d)

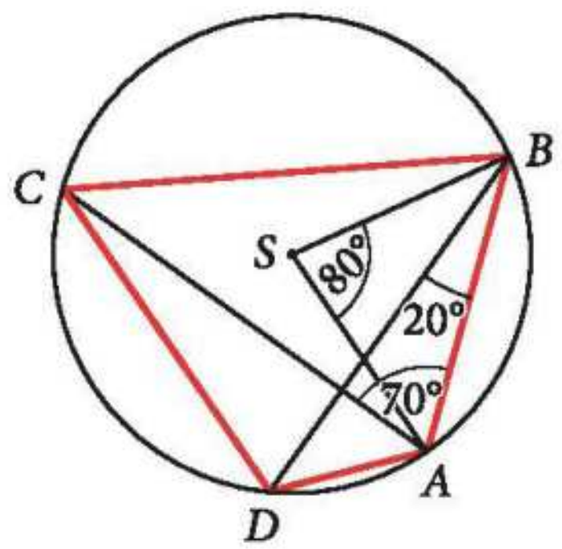


D **3.19.** Kąty α i γ są kątami wpisanymi, a kąt β jest kątem środkowym – jak na rysunku. Wykaż, że $\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = 90°$.



3.20. Dwa okręgi o środkach O i S są styczne zewnętrznie w punkcie P. Przez punkt P poprowadzono prostą przecinającą te okręgi odpowiednio w punktach A i B tak, że kąt środkowy AOP ma miarę równą $100°$. Wyznacz kąty trójkąta PBS.

3.21. Wszystkie wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu jak na rysunku obok. Wyznacz miary kątów tego czworokąta.



3.22. Na okręgu odmierzamy kolejno łuki AB, BC i CD odpowiadające kątom środkowym 120°, 30° i 70°. Wyznacz miary kątów czworokąta $ABCD$ oraz kąta, pod jakim przecinają się jego przekątne.

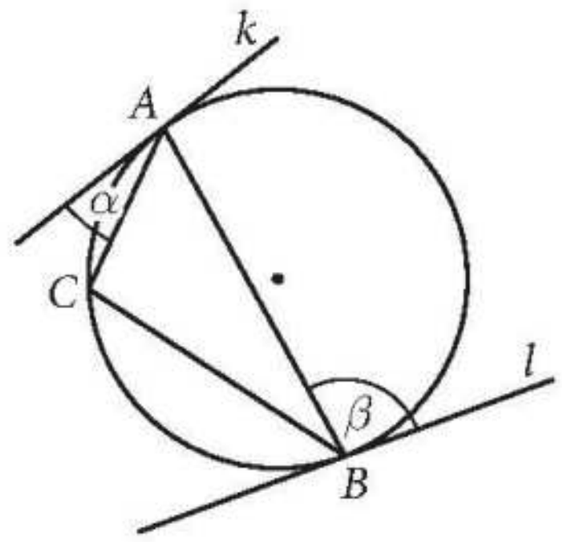
3.23. Skonstruuj trójkąt ABC, w którym dane są: bok AB oraz wysokości AD i BF.

3.24. Skonstruuj trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ i dane są: bok AB oraz wysokość AD, przy założeniu, że $|AD| < |AB|$.

3.25. Wpisz konstrukcyjnie w dane koło trójkąt prostokątny tak, aby jego przyprostokątne przechodziły przez dwa dane punkty wewnętrzne tego koła.

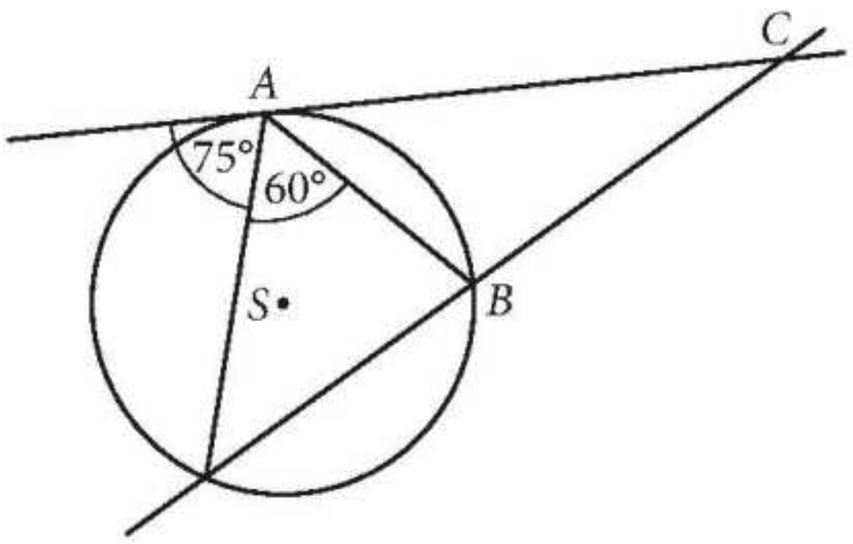
D **3.26.** W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B są ostre. Boki AC i BC są średnicami dwóch okręgów. Wykaż, że drugi punkt przecięcia tych okręgów leży na boku AB.

3.27. Kąt między cięciwami AB i AC w okręgu ma miarę 40°. Wyznacz miarę kąta ostrego między stycznymi do tego okręgu poprowadzonymi w punktach B i C.



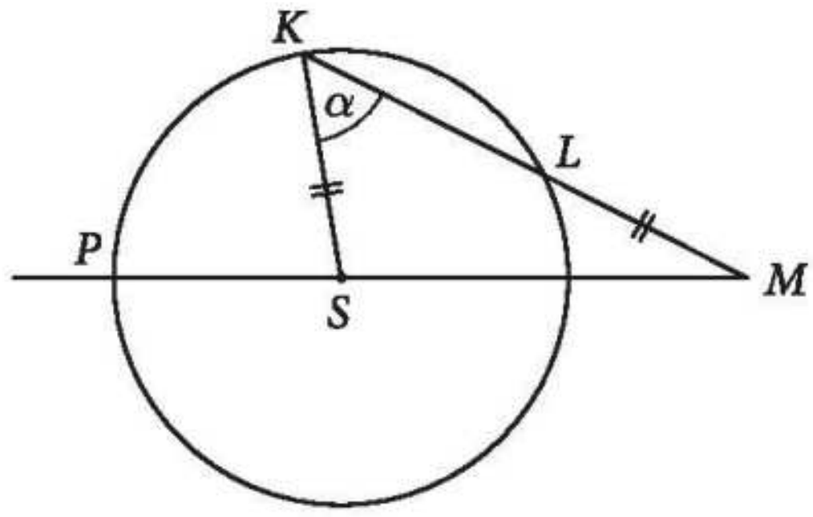
3.28. W trójkącie ABC dane są $\sphericalangle ABC = 28°$, $\sphericalangle BAC = 54°$. Wyznacz miary kątów α i β, jakie tworzą boki trójkąta ze stycznymi k i l poprowadzonymi do okręgu opisanego na trójkącie ABC (zob. rysunek).

3.29. Prosta AC jest styczna do okregu o środku S. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC przedstawionego na rysunku.

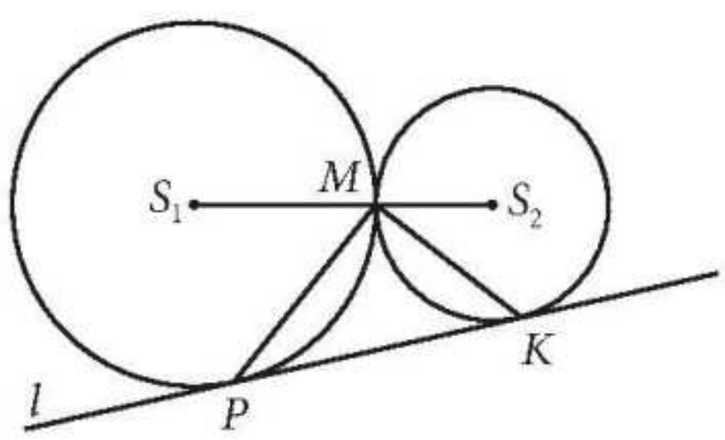


3.30. Dane są odcinek AB oraz kąt ostry α. Wyznacz konstrukcyjnie zbiór punktów płaszczyzny, z których odcinek AB widać pod kątem α.

3.31. Dany jest okrąg o środku S. Prosta PM zawiera jego średnicę, a punkty K i L na okręgu są takie, że $|KS| = |LM|$ oraz $\sphericalangle SKM = \alpha$ (zob. rysunek). Wyznacz miarę kąta PSK.



D **3.32.** Okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie M. Prosta l jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach P i K jak na rysunku. Wykaż, że kąt PMK jest prosty.



D **3.33.** Wykaż, że dla każdego trójkąta ABC okrąg o średnicy AB przecina okrąg o średnicy BC w punkcie M należącym do prostej AC.

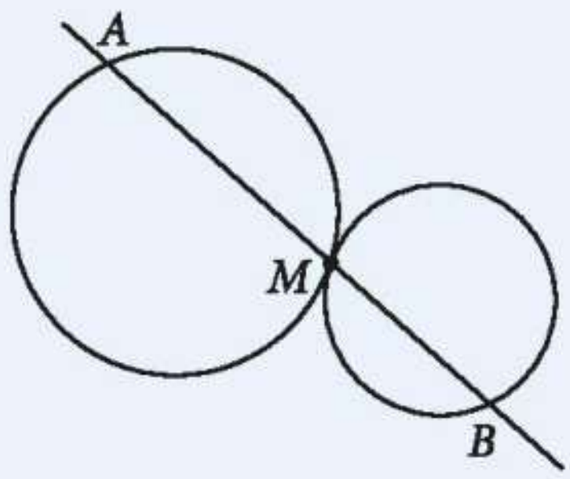
Prosto do matury

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na boku AB.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Trójkąt ABC jest równoramienny.
B. $\sphericalangle ACB = 90°$
C. AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC.

2. Na okręgu odmierzamy kolejno łuki AB i BC odpowiadające kątom środkowym $55°$ i $125°$. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

3. W kąt o mierze $20°$ wpisano okrąg. Punkty styczności ramion kąta z okręgiem połączono cięciwami z pewnym punktem okręgu. Wyznacz miarę kąta między tymi cięciwami. Rozpatrz dwa przypadki.

4. Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono cięciwę AC o długości równej promieniowi okręgu oraz średnicę AB. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.



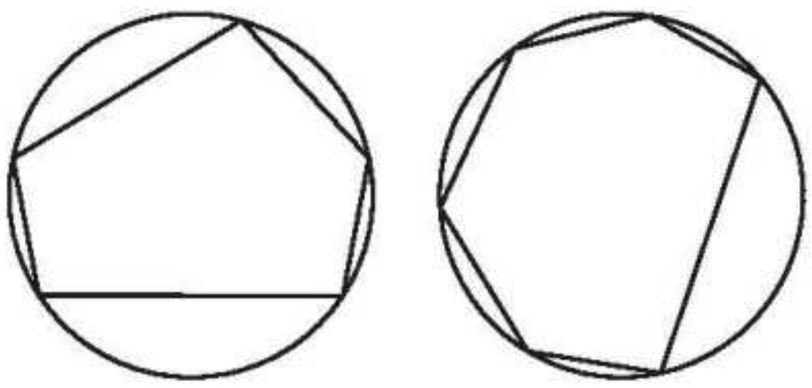
D **5.** Przez punkt styczności M dwóch okręgów poprowadzono prostą przecinającą je w punktach A i B jak na rysunku obok. Wykaż, że styczne poprowadzone do okręgów odpowiednio w punktach A i B są równoległe.

4. Wielokąt wpisany w okrąg

Umiejętności:

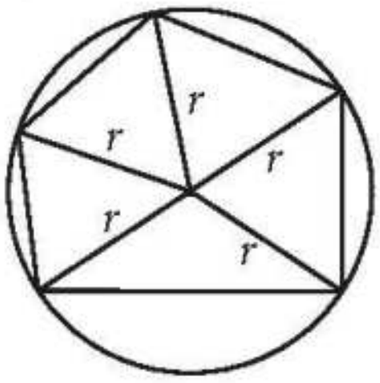
- stosowanie twierdzeń charakteryzujących czworokąty wpisane w okrąg

Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta, nazywamy **okręgiem opisanym na tym wielokącie**.
W takiej sytuacji mówimy również, że dany **wielokąt jest wpisany w okrąg**.



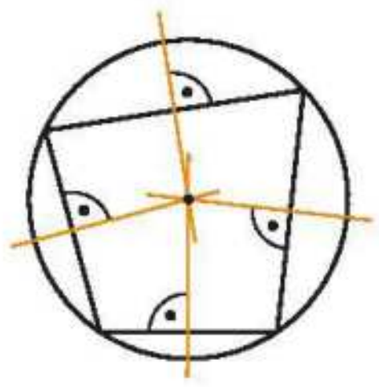
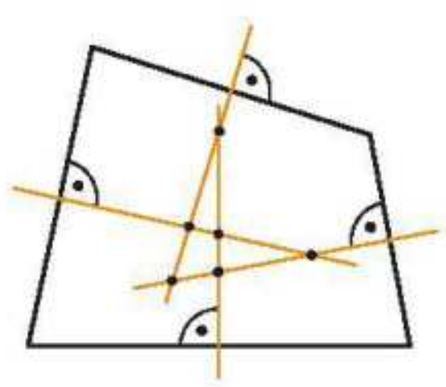
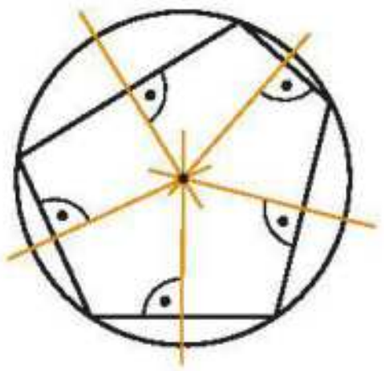
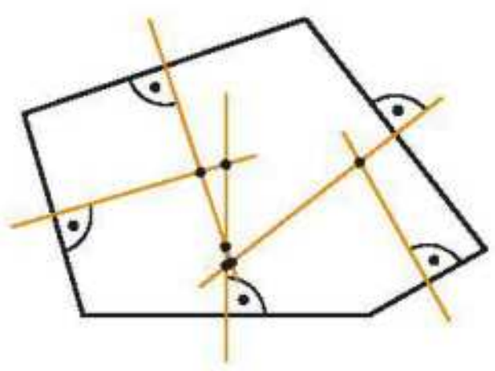
Jeżeli wielokąt jest wpisany w okrąg, to jest on wielokątem wypukłym.

Środek okręgu opisanego na wielokącie jest oddalony o promień od każdego z jego wierzchołków. Inaczej mówiąc, środek takiego okręgu jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków. Leży więc na symetralnej każdego boku takiego wielokąta.



Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równo oddalonych od końców tego odcinka.

Przykład 1 ◂ zad. 4.4

	Wielokąt na którym można opisać okrąg	Wielokąt na którym nie można opisać okręgu
czworokąt		
pięciokąt		

Wniosek

Na wielokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich boków tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Wiemy już, że na każdym trójkącie można opisać okrąg. Sprawdzenie, czy na wielokącie, który nie jest trójkątem, można opisać okrąg, jest zadaniem na ogół bardzo trudnym, często wręcz niewykonalnym. Jednak dla czworokątów mamy proste kryterium pozwalające rozstrzygnąć, czy można opisać okrąg na danym czworokącie.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.

Twierdzenie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i każda z nich wynosi 180°.

Udowodnimy dwa twierdzenia:

- Jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów są równe.
- Jeżeli sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

Założenie I

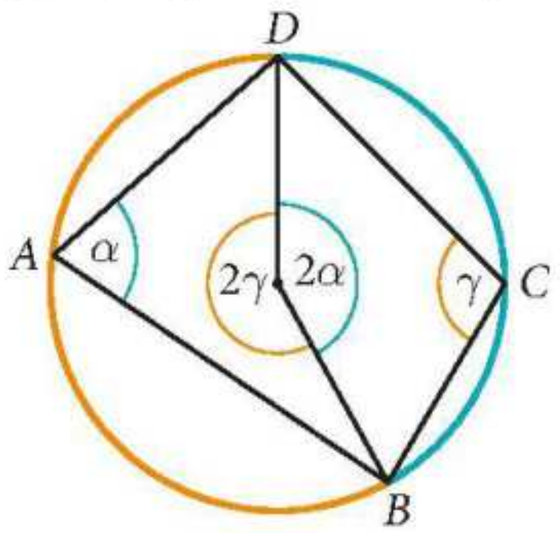
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

Teza I

Sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe.

Dowód I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$\alpha + \gamma = 180°$ ⟵ $2\alpha + 2\gamma = 360°$

$\sphericalangle D + \sphericalangle B = 180°$ ⟵ suma wszystkich kątów czworokąta jest równa 360°

⟵ kąt środkowy oparty na łuku BCD jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, czyli kąta DAB czworokąta

⟵ kąt środkowy oparty na łuku DAB jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, czyli kąta BCD czworokąta

Pokazaliśmy więc, że sumy przeciwległych kątów takiego czworokąta są równe.

Założenie II

Sumy miar przeciwległych kątów czworokąta $ABCD$ są równe.

Teza II

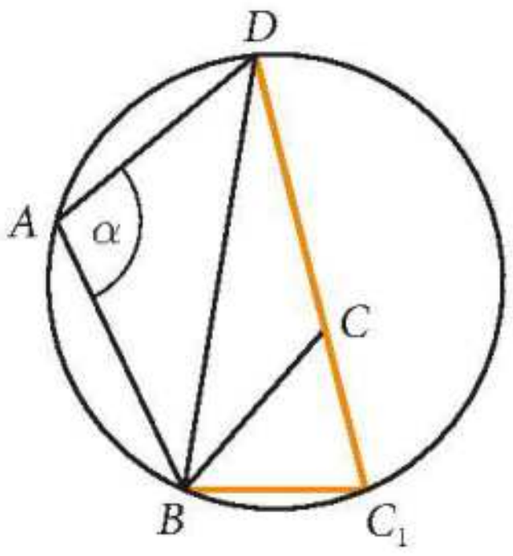
Czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.

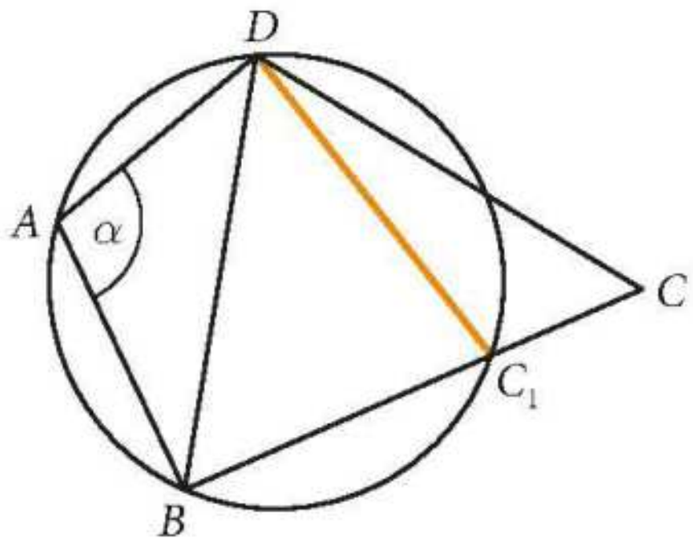
Dowód II

Na dowolnie wybranym trójkącie, którego wierzchołkami są wierzchołki czworokąta $ABCD$, można opisać okrąg. Na przykład opiszmy okrąg na trójkącie ABD i zbadajmy, jakie jest możliwe położenie punktu C.

Niech $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle C = \gamma$ i $\alpha + \gamma = 180°$.

Gdyby punkt C nie leżał na okręgu opisanym na trójkącie ABD, to zachodziłaby jedna z dwóch sytuacji pokazanych na rysunkach poniżej.





Wtedy na podstawie pierwszej części twierdzenia wiemy, że:

$$\sphericalangle BC_1D = 180° - \alpha = \gamma$$

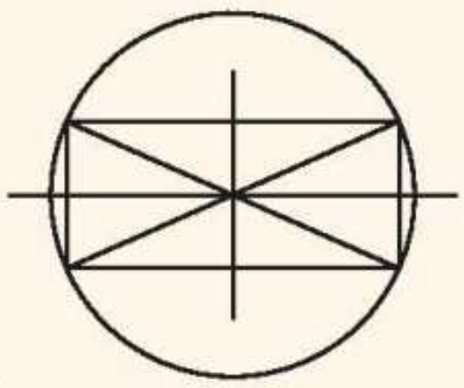
Zatem $\sphericalangle C \neq \gamma$, co jest niezgodne z założeniem.

Udowodnienie tego, że $\sphericalangle C \neq \gamma$ pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania; *Wskazówka*: Zbadaj miary kątów trójkątów CBC_1 i CDC_1.

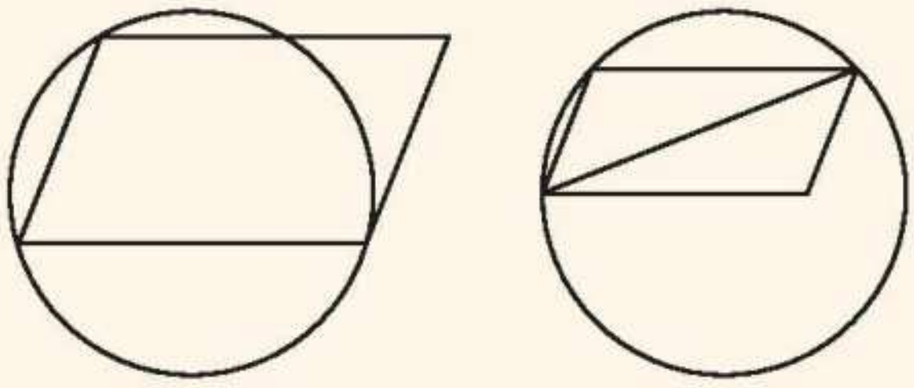
Koniec dowodu

Wnioski

- Na każdym prostokącie można opisać okrąg. Środek okręgu opisanego na prostokącie jest punktem przecięcia jego przekątnych (rys. 1).
- Na równoległoboku, który nie jest prostokątem, nie można opisać okręgu (rys. 2).



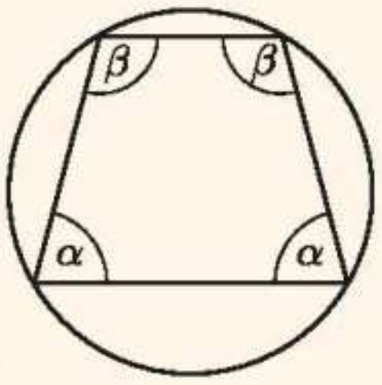
Rys. 1.



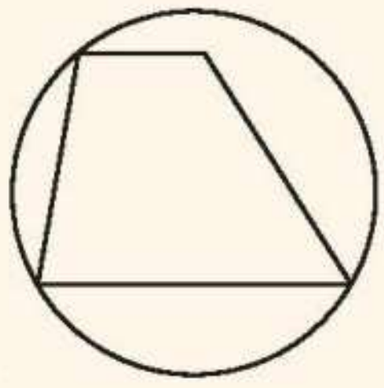
Rys. 2.

Wnioski

- Na trapezie równoramiennym różnym od równoległoboku można opisać okrąg (rys. 3).
- Na trapezie nierównoramiennym nie można opisać okręgu (rys. 4).



Rys. 3.


Rys. 4.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Zbadamy, czy na czworokącie o danych miarach kątów można opisać okrąg.

a) czworokąt $ABCD$: $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 110°$, $\sphericalangle C = 130°$

b) czworokąt $KLMN$: $\sphericalangle K = 60°$, $\sphericalangle L = 90°$, $\sphericalangle M = 100°$

Rozwiązanie

a) $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 50° + 130° = 180°$, zatem na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

b) $\sphericalangle K + \sphericalangle M = 60° + 100° = 160°$, zatem na czworokącie $KLMN$ nie można opisać okręgu.

Przykład 3 ◀ zad. 4.7

W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi zależność:

$\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 4 : 1 : 2$

Obliczymy miary kątów tego czworokąta.

Rozwiązanie

Podaną proporcję miar kątów możemy zapisać w postaci:

$\sphericalangle A = 4x, \quad \sphericalangle B = x, \quad \sphericalangle C = 2x$

$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$ i $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$ ⟵ na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg

$4x + 2x = 180°$, stąd $x = 30°$

$\sphericalangle A = 4x = 120°, \quad \sphericalangle B = x = 30°, \quad \sphericalangle C = 2x = 60°$

$\sphericalangle D = 180° - \sphericalangle B = 180° - 30° = 150°$

Do obliczenia miary kąta D można również skorzystać z równości $\sphericalangle D = 5x$, wynikającej z warunku: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D$.

Odp.: $\sphericalangle A = 120°$, $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle D = 150°$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

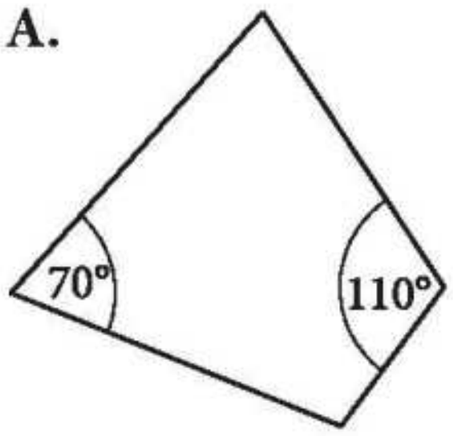
4.1. Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg mają się do siebie jak 6 : 5 : 4. Wskaż miarę czwartego kąta tego czworokąta.
A. 72° **B.** 80° **C.** 90° **D.** 100°

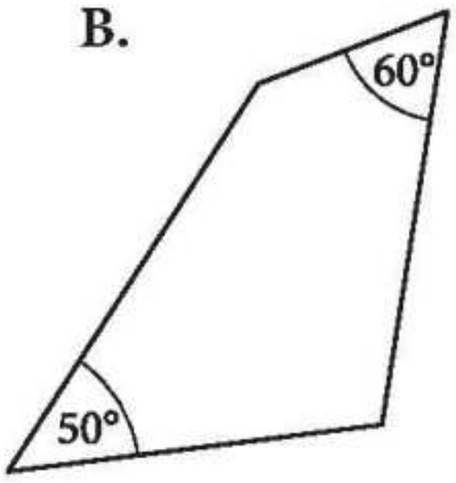
4.2. Dwa największe kąty czworokąta wpisanego w okrąg mogą mieć miary
A. 60° i 90°. **B.** 85° i 95°. **C.** 95° i 105°. **D.** 100° i 190°.

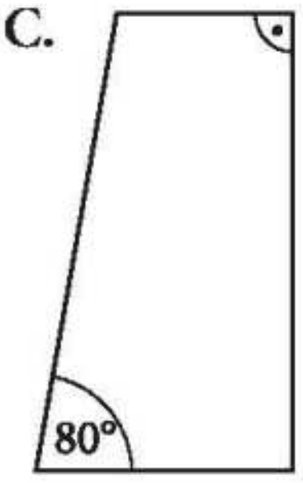
4.3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i AD jest średnicą tego okręgu. Wiadomo, że $\sphericalangle ACB = 30°$. Jaką miarę ma kąt BAD?
A. 40° **B.** 50° **C.** 60° **D.** Nie można tego obliczyć.

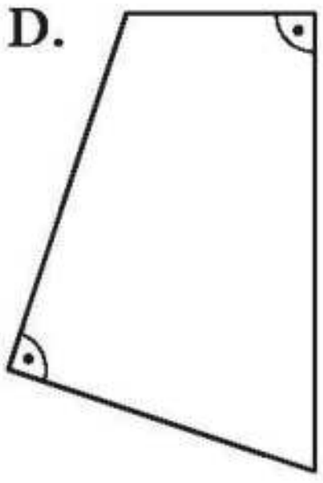
4.4. Symetralne trzech boków pewnego czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?

4.5. Na których z narysowanych czworokątów można opisać okrąg?

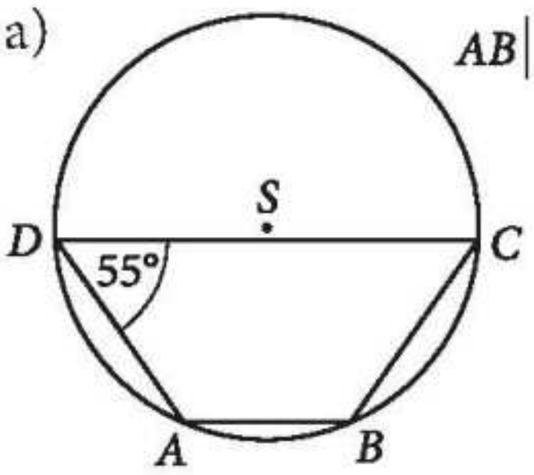
A.


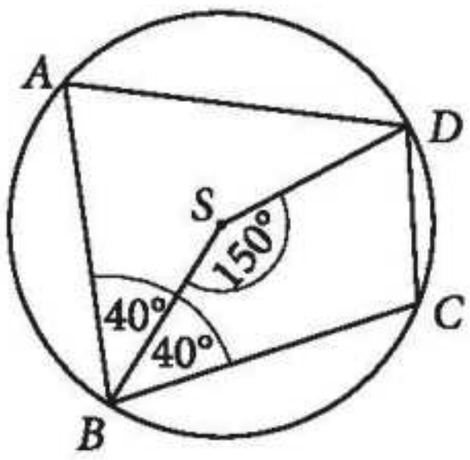
B.


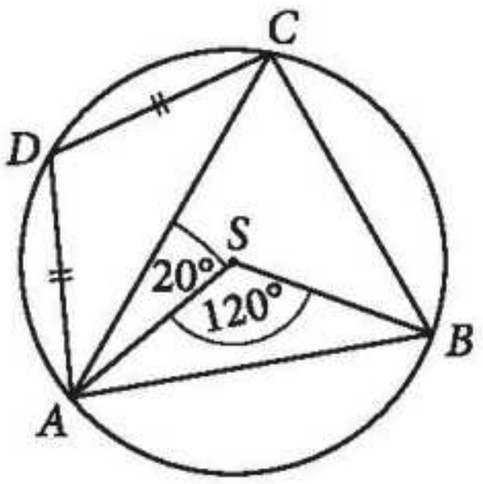
C.


D.


4.6. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.

a)


b)


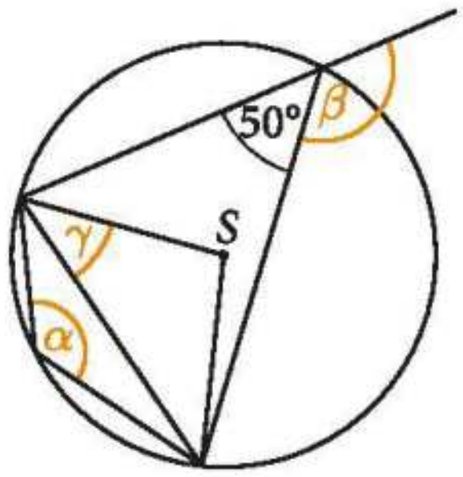
c)


4.7. Dany jest stosunek miar trzech kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

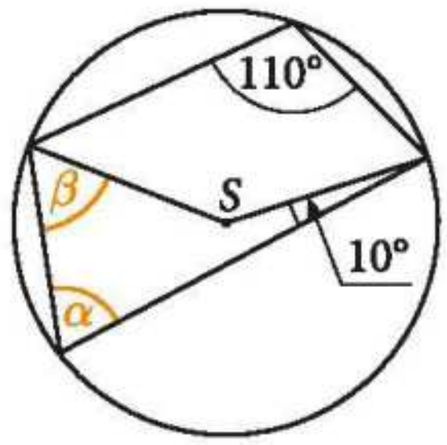
a) $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 5 : 3 : 4$ b) $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 3 : 4 : 2$

4.8. Oblicz miary zaznaczonych kątów.

a)



b)



4.9. Skorzystaj z podanych informacji i wyznacz miary kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg.

a) $\sphericalangle A = 10°$, $\sphericalangle B - \sphericalangle D = 70°$
b) $\sphericalangle A = 4\sphericalangle B$, $\sphericalangle C = 5\sphericalangle B$
c) $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 113°$, $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 177°$
d) $\sphericalangle D - \sphericalangle B = 120°$, $\sphericalangle C - \sphericalangle B = 90°$

4.10. Zbadaj, czy istnieje czworokąt, na którym można opisać okrąg i którego kąty mają podane miary.

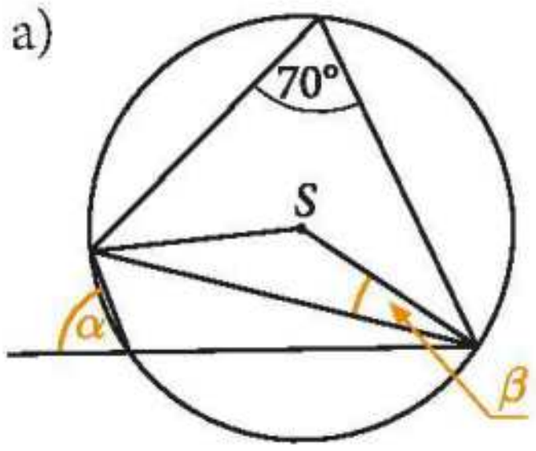
a) 45°, 48°, 135°, 145°
b) 85°, 85°, 95°, 95°
c) 39°, 52°, 128°, 141°
d) 15°, 76°, 104°, 165°

4.11. Czy można opisać okrąg na czworokącie, w którym miary kolejnych kątów są w podanym stosunku?

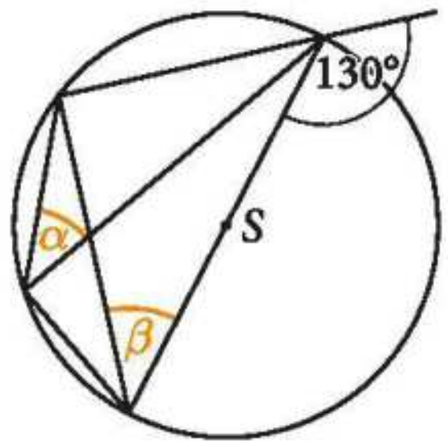
a) 3 : 4 : 3 : 4 b) 1 : 2 : 2 : 1 c) 5 : 5 : 4 : 4 d) 1 : 2 : 5 : 4

4.12. Oblicz miary kątów α i β.

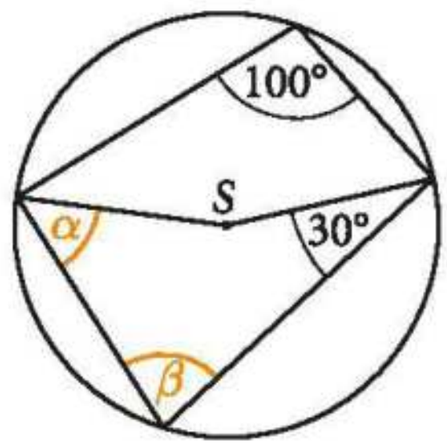
a)



b)



c)



4.13. Jedna z podstaw trapezu jest jednocześnie średnicą okręgu opisanego na tym trapezie. Promień okręgu jest równy 5, a przekątna trapezu ma długość 8. Oblicz długość ramienia trapezu.

D * **4.14.** Dwa odcinki równej długości AB i KM przecinają się w punkcie P takim, że $|PA| = |PM|$. Udowodnij, że na czworokącie $AMBK$ można opisać okrąg.

D * **4.15.** Kąt A w trójkącie ABC ma miarę 60°. Dwusieczne BF i CD przecinają się w punkcie M. Wykaż, że

a) na czworokącie $ADMF$ można opisać okrąg.
b) $|MD| = |MF|$.

4.16. Skonstruuj deltoid, który można wpisać w okrąg, mając dane jego obydwie przekątne.

4.17. Skonstruuj czworokąt $ABCD$, który można wpisać w okrąg, mając dane: bok AB, bok BC oraz kąt B i kąt C tego czworokąta.

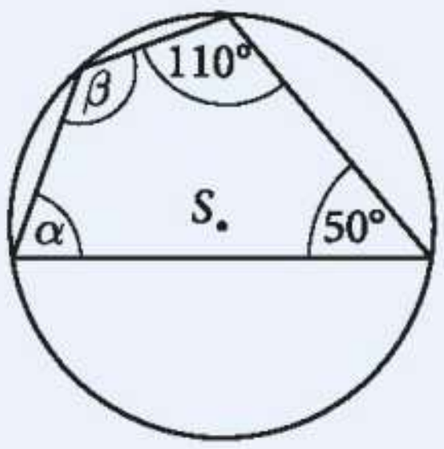
4.18. Skonstruuj czworokąt $ABCD$, który można wpisać w okrąg, mając dane: bok AB, bok AD, przekątną AC oraz kąt B tego czworokąta.

Prosto do matury

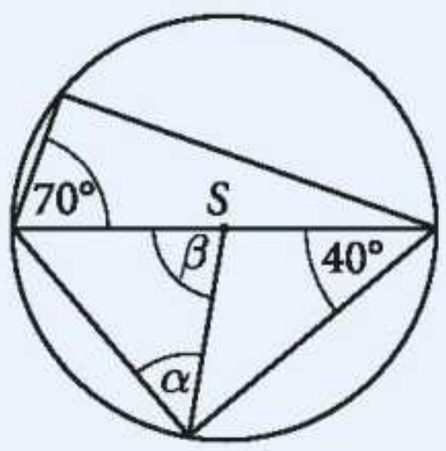
1. Deltoid jest wpisany w okrąg.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Co najmniej dwa z kątów deltoidu są proste.
B. Średnica okręgu opisanego na deltoidzie jest równa jednej z przekątnych deltoidu.
C. Deltoid jest kwadratem.

2. Punkt S jest środkiem okręgu. Oblicz miary kątów α i β.

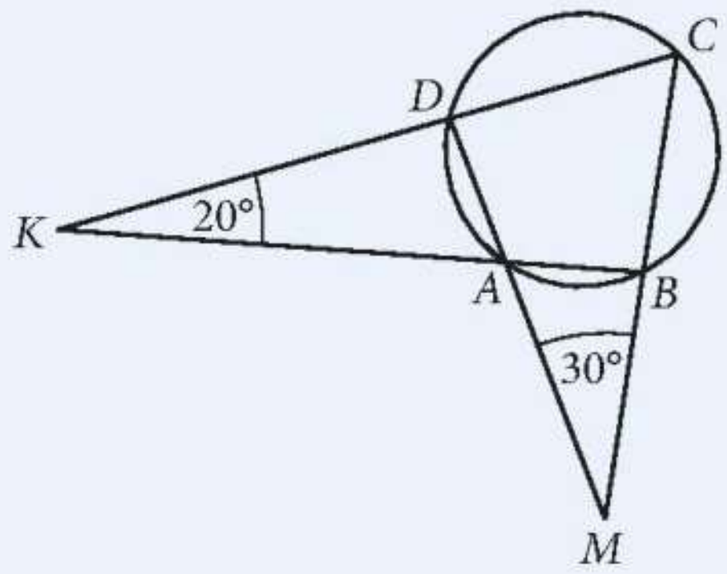
a)



b)

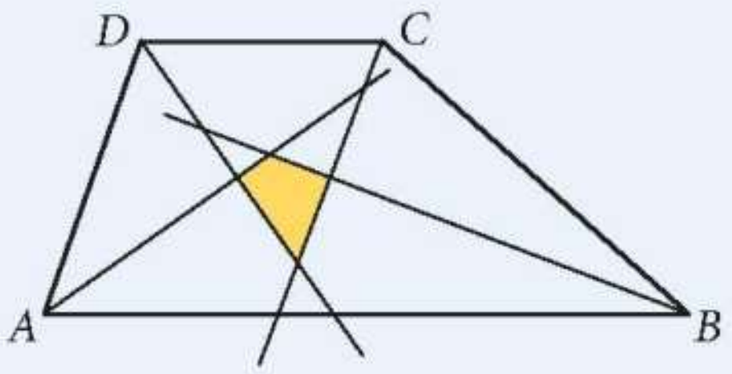


3. Wyznacz miary kątów wpisanego w okrąg czworokąta $ABCD$ (zob. rysunek), o którym wiadomo, że:
- $\sphericalangle CKB = 20°$ i ramiona tego kąta przechodzą przez punkty D i A,
- $\sphericalangle DMC = 30°$ i ramiona tego kąta przechodzą przez punkty A i B.



4. Miary kątów A, B, C i D czworokąta $ABCD$ są w podanym stosunku. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?
a) $3 : 4 : 5 : 6$ b) $3 : 4 : 6 : 5$

D **5.** Czworokąt zaznaczony na rysunku jest wyznaczony przez dwusieczne kątów trapezu $ABCD$. Wykaż, że można na nim opisać okrąg.

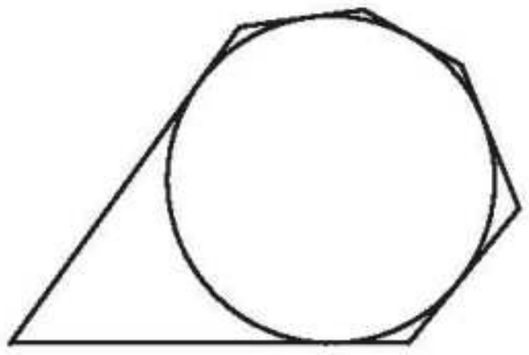


5. Wielokąt opisany na okręgu

Umiejętności:

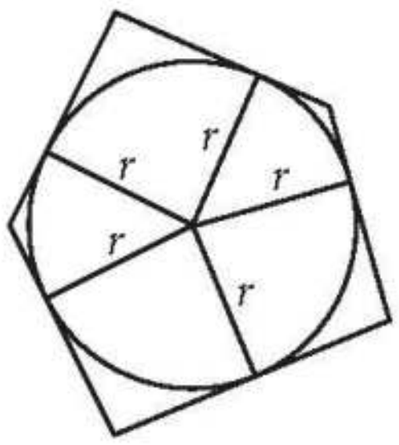
- stosowanie twierdzeń charakteryzujących czworokąty opisane na okręgu

Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt**.
W takiej sytuacji mówimy również, że **wielokąt jest opisany na okręgu**.



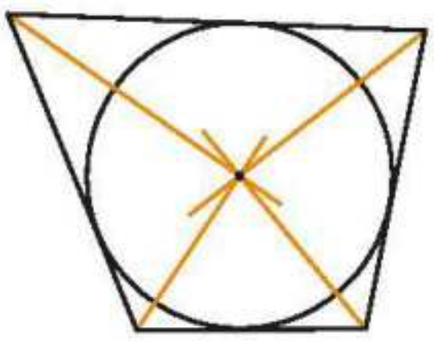
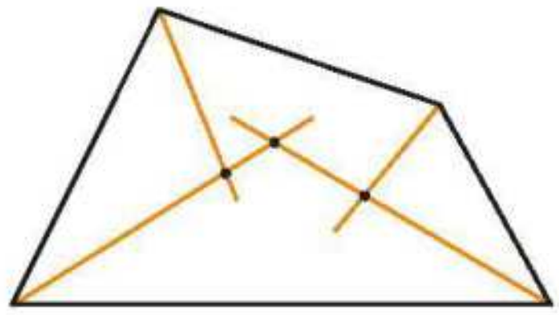
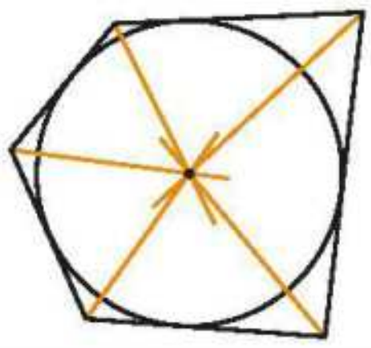
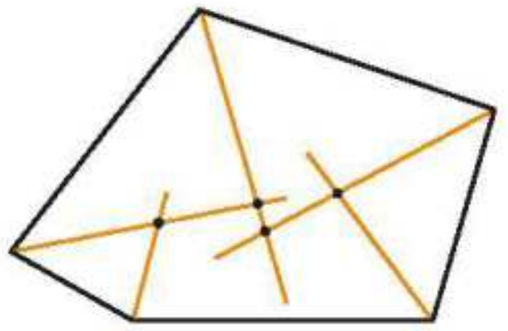
Jeżeli wielokąt jest opisany na okręgu, to jest wielokątem wypukłym.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest oddalony o promień od każdego boku tego wielokąta. Inaczej mówiąc, środek takiego okręgu jest oddalony o promień od ramion każdego z kątów wewnętrznych tego wielokąta, czyli jest punktem wspólnym wszystkich dwusiecznych kątów tego wielokąta.



Zbiorem punktów należących do kąta wypukłego i równo oddalonych od jego ramion jest dwusieczna tego kąta.

Przykład 1 ◂ zad. 5.4

	Wielokąt w który można wpisać okrąg	Wielokąt w który nie można wpisać okręgu
czworokąt		
pięciokąt		

Wniosek

W wielokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Wiemy, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg. Podobnie jak w wypadku okręgu opisanego na wielokącie, sprawdzenie, czy w dany wielokąt można wpisać okrąg, może być zadaniem niewykonalnym. Również i tu dysponujemy kryterium pozwalającym rozstrzygnąć ten problem dla czworokątów.

Twierdzenie

Czworokąt wypukły można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Udowodnimy dwa twierdzenia:

- Jeżeli czworokąt wypukły jest opisany na okręgu, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.
- Jeżeli sumy długości przeciwległych boków czworokąta wypukłego są równe, to w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Założenie I

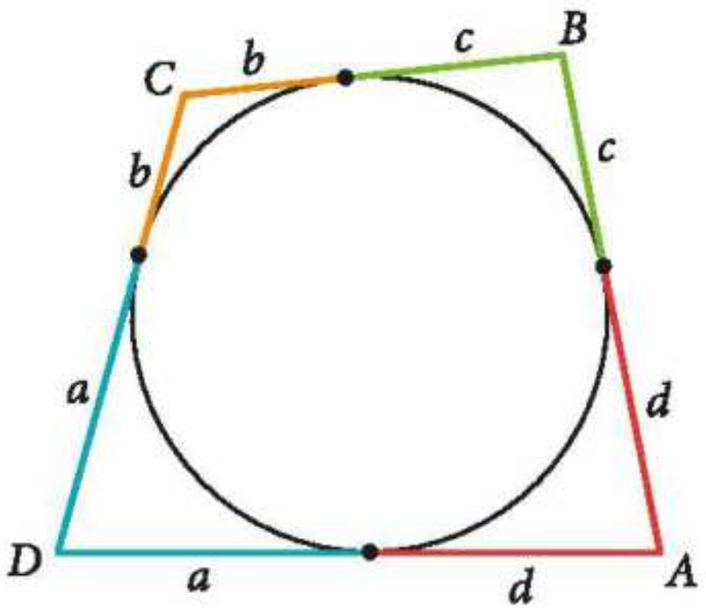
Wypukły czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu.

Teza I

Sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Dowód I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



← odcinki łączące wierzchołki czworokąta z odpowiednimi punktami styczności są równe (zaznaczono je tym samym kolorem i podpisano tą samą literą)

$$|AB| = d + c,\ |DC| = a + b,\ |AD| = d + a,\ |BC| = c + b$$

Mamy zatem:

$$|AB| + |DC| = a + b + c + d = |AD| + |BC|$$

Założenie II

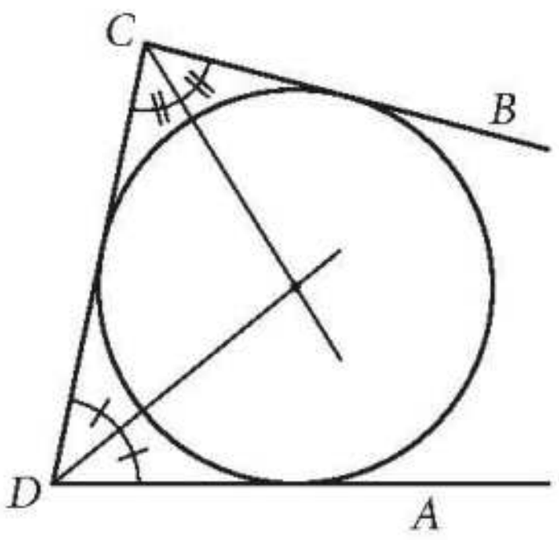
Sumy długości przeciwległych boków wypukłego czworokąta $ABCD$ są równe.

Teza II

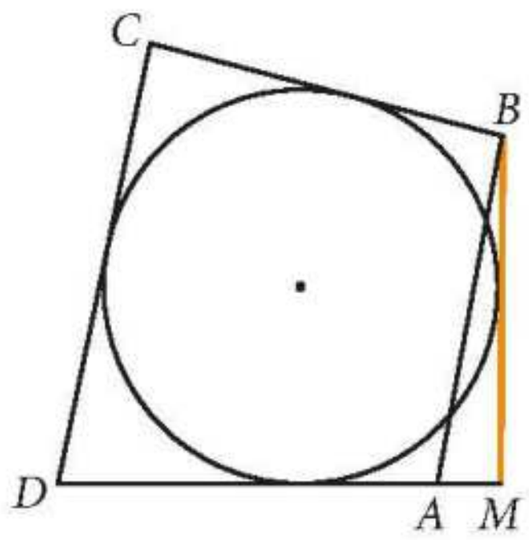
Czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu.

Dowód II

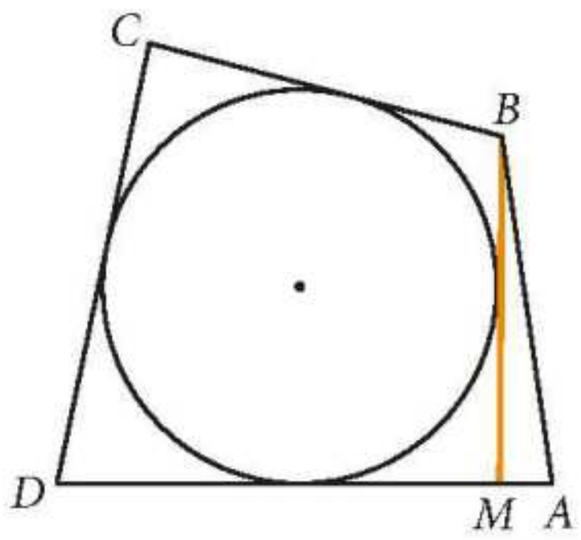
Narysujmy okrąg styczny do trzech boków czworokąta: AD, DC i CB. Taki okrąg na pewno istnieje, bo kąty D i C są mniejsze od kątów półpełnych, czyli ich dwusieczne przetną się wewnątrz rozpatrywanego obszaru (rys. 1).



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Wykażemy, że czwarty bok czworokąta, czyli odcinek AB, jest styczny do tego okręgu. Gdyby nie był, to zaszłaby jedna z dwóch sytuacji przedstawionych na rysunkach 2 i 3. Wtedy styczna do okręgu poprowadzona np. z wierzchołka B przecięłaby prostą zawierającą bok DA w punkcie M różnym od punktu A i na okręgu opisany byłby czworokąt $MBCD$. Zgodnie z udowodnionym poprzednio twierdzeniem byłoby więc:

$$|DM| + |BC| = |MB| + |DC|$$

Równocześnie zgodnie z założeniem zachodzi równość:

$$|DA| + |BC| = |AB| + |DC|$$

Jeżeli odejmiemy od pierwszej równości drugą, to otrzymamy:

$$|DM| - |DA| = |MB| - |AB|$$

W pierwszym przypadku (rys. 2), wykorzystując otrzymaną równość, mamy:

$$|AM| = |MB| - |AB|, \text{ czyli } |AM| + |AB| = |MB|$$

Jest to sprzeczne z nierównością trójkąta – zatem taka sytuacja zajść nie może.
W drugim przypadku (rys. 3) równość $|DM| - |DA| = |MB| - |AB|$ oznacza, że:

$$|AM| = |AB| - |MB|, \text{ czyli } |AM| + |MB| = |AB|$$

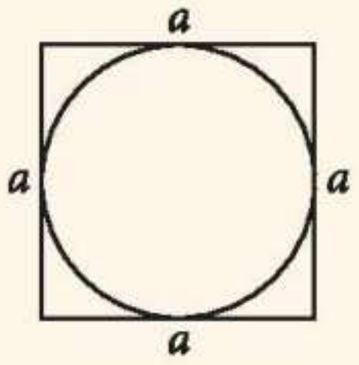
Tu również mamy sprzeczność z nierównością trójkąta.

Tym samym wykazaliśmy, że czwarty bok czworokąta, czyli odcinek AB, jest styczny do rozważanego okręgu.

Koniec dowodu

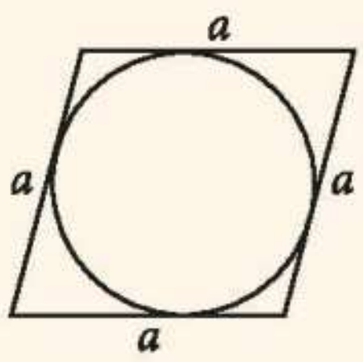
Wnioski

- W kwadrat można wpisać okrąg (rys. 1).
- W romb można wpisać okrąg (rys. 2).
- W deltoid można wpisać okrąg (rys. 3).



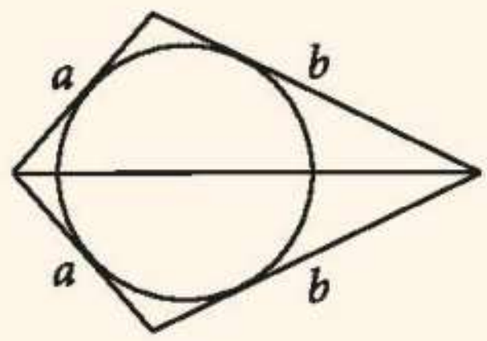
$a + a = a + a$

Rys. 1.



$a + a = a + a$

Rys. 2.



$a + b = a + b$

Rys. 3.

Przykład 2 ◀ zad. 5.5

Sprawdzimy, czy w czworokąt wypukły $ABCD$ o podanych długościach boków można wpisać okrąg.

a) $|AB| = 3,\ |BC| = 4,\ |CD| = 6,\ |DA| = 2$

$|AB| + |CD| = 3 + 6 = 9$

$|BC| + |DA| = 4 + 2 = 6$

$|AB| + |CD| \neq |BC| + |DA|$

W ten czworokąt nie można wpisać okręgu.

b) $|AB| = 3,\ |BC| = 4,\ |CD| = 6,\ |DA| = 5$

$|AB| + |CD| = 3 + 6 = 9$

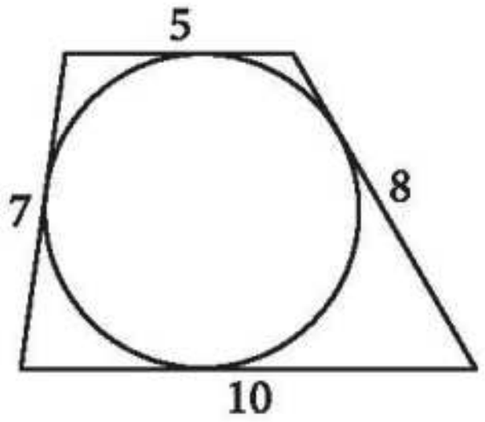
$|BC| + |DA| = 4 + 5 = 9$

$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$

W ten czworokąt można wpisać okrąg.

Przykład 3 ◀ zad. 5.6

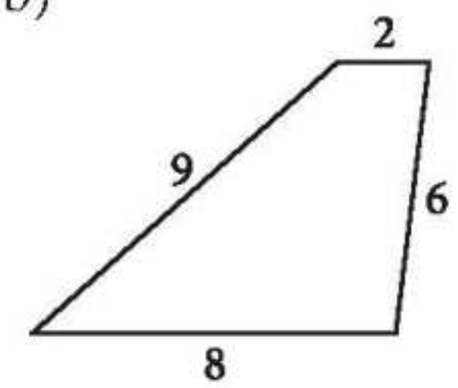
a)



$10 + 5 = 8 + 7$

W ten trapez można wpisać okrąg.

b)



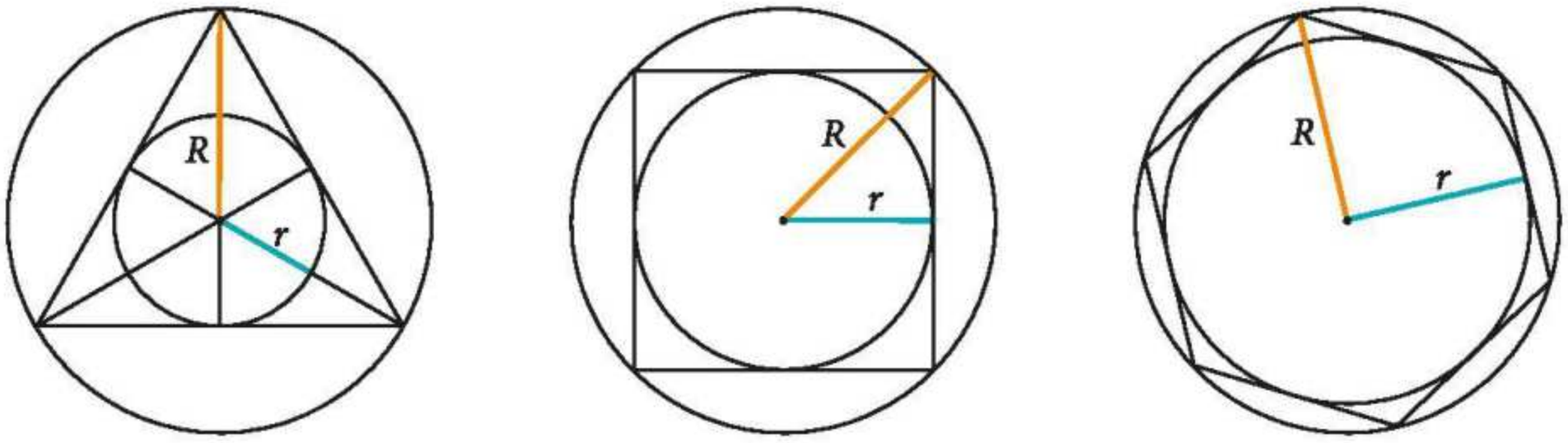
$8 + 2 \neq 9 + 6$

W ten trapez nie można wpisać okręgu.

Przykład 4

W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg. Środek okręgu wpisanego w wielokąt foremny jest również środkiem okręgu opisanego na tym wielokącie. Zilustrujemy to na przykładach (R oznacza promień okręgu opisanego, a r – wpisanego).

a) trójkąt równoboczny b) kwadrat c) sześciokąt foremny

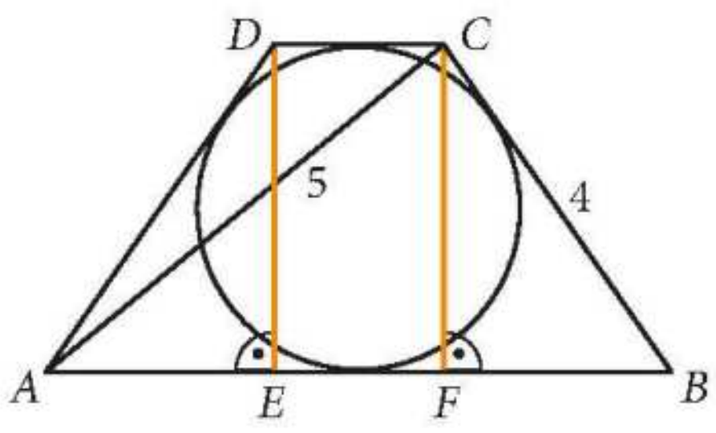


Przykład 5 ◀ zad. 5.9

Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość 4, a przekątna trapezu ma długość 5. Wyznaczymy promień okręgu wpisanego w ten trapez.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Promień okręgu wpisanego w trapez jest połową jego wysokości. Jeżeli poprowadzimy wysokości trapezu z punktów D i C, to powstanie prostokąt $EFCD$.



Oznaczmy $|EF| = |DC| = a$.

$|AB| + |DC| = |AD| + |BC| = 8$ ⟵ sumy długości przeciwległych boków są równe
$|AE| + a + |FB| + a = 8$
$2|AE| + 2a = 8$ ⟵ $|AE| = |FB|$
$|AE| + a = 4$
$|AF| = 4$ ⟵ $|AE| + a = |AF|$
$|FC| = 3$ ⟵ na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AFC

Szukany promień jest więc równy $\frac{3}{2}$.

Odp.: $\frac{3}{2}$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu dane są długości boków: $|AB| = 12$, $|BC| = 15$, $|CD| = 18$. Długość boku $|DA|$

A. jest równa 12.
B. jest równa 15.
C. jest równa 18.
D. zależy od kątów czworokąta.

5.2. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu dane są długości boków: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 4$. Zatem promień okręgu wpisanego w ten czworokąt

A. jest równy 1,5.
B. jest równy 2.
C. jest równy 2,5.
D. zależy od kątów czworokąta.

5.3. Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość 36. Zatem żadna z podstaw tego trapezu nie może mieć długości równej

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 70. **D.** 80.

5.4. Dwusieczne trzech kątów pewnego czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie. Czy w ten czworokąt można wpisać okrąg?

5.5. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować czworokąt, w który da się wpisać okrąg.

a) 5 cm, 8 cm, 9 cm, 12 cm
b) 4,7 cm, 6,3 cm, 6,8 cm, 8,5 cm
c) 11,2 cm, 13,3 cm, 15,2 cm, 17,3 cm
d) $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm, $\left(5\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ cm

5.6. Trapez równoramienny, którego podstawy są równe 15,8 cm i 8,2 cm, jest opisany na okręgu. Oblicz długość ramienia tego trapezu.

5.7. Oblicz obwód czworokąta opisanego na okręgu, w którym

a) przeciwległe boki mają długości 7 cm i 8 cm.
b) stosunek długości trzech kolejnych boków jest równy $2 : 4 : 5$, a czwarty bok ma długość 6 cm.
c) różnica długości przeciwległych boków jest równa 15 cm, a ich stosunek wynosi $1 : 4$.
d) stosunek długości trzech kolejnych boków wynosi $3 : 5 : 6$, a suma tych długości jest równa 42 cm.

5.8. Jedna podstawa trapezu ma 6 cm, druga 3 cm, a jedno ramię ma 4 cm. Wiadomo, że w trapez ten można wpisać okrąg.
a) Jaką długość ma drugie ramię trapezu?
b) Skonstruuj trapez spełniający warunki zadania i wpisz w niego okrąg.

5.9. W trapez równoramienny wpisany jest okrąg. Punkt styczności dzieli ramię trapezu na odcinki o długościach 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu.

5.10. Trapez równoramienny $ABCD$ o ramionach AD i BC opisano na okręgu o promieniu 15. Punkt styczności P dzieli ramię AD na odcinki, których długości są w stosunku $3 : 4$. Wyznacz długości boków trapezu.

5.11. Bok rombu ma 10 cm, a jego dłuższa przekątna 16 cm. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten romb.

5.12. Jakim procentem pola koła opisanego na sześciokącie foremnym jest pole koła wpisanego w ten sześciokąt?

D **5.13.** Środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ jest równocześnie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.

D **5.14.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Z punktu P przecięcia przekątnych tego czworokąta poprowadzono wysokości PK, PL, PM, PN odpowiednio w trójkątach ABP, BCP, CDP oraz DAP. Udowodnij, że w czworokąt $KLMN$ można wpisać okrąg.

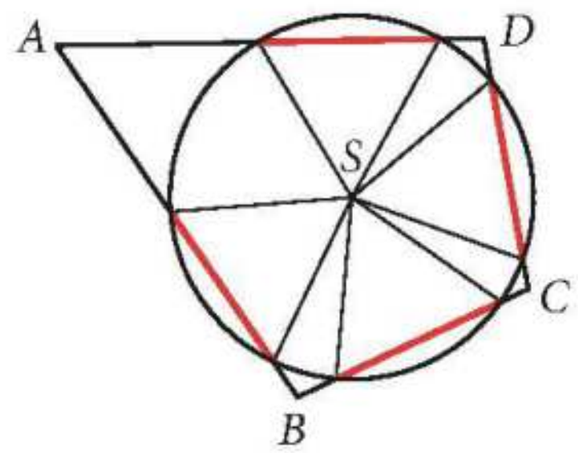
5.15. W trapez o polu 168 i ramionach długości 13 i 15 można wpisać okrąg. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

5.16. W trapez równoramienny o obwodzie równym 20 i przekątnej $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

5.17. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległościach 1 cm i 2 cm od końców dłuższego ramienia tego trapezu. Oblicz pole trapezu.

D **5.18.** Na okręgu o promieniu r opisany jest trapez równoramienny o podstawach a i b. Wykaż, że $r = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{2}$.

D **5.19.** Okrąg o środku S przecina wszystkie boki czworokąta $ABCD$ i wycina z nich odcinki równej długości (zob. rysunek). Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



Prosto do matury

1. Dany jest trapez równoramienny o ramionach długości 5 cm.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Jeżeli w ten trapez jest wpisany okrąg, to podstawy trapezu są równe.
B. Jeżeli w ten trapez jest wpisany okrąg, to podstawy trapezu mogą być równe.
C. Jeżeli ten trapez jest opisany na okręgu, to obwód trapezu jest równy 20 cm.

2. Czy w czworokąt $ABCD$ o podanych długościach boków można wpisać okrąg?
a) $|AB| = 5,\ |BC| = 6,\ |CD| = 7,\ |DA| = 8$
b) $|AB| = 6,\ |BC| = 5,\ |CD| = 7,\ |DA| = 8$

3. W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg. Punkty styczności tego okręgu z bokami AB, BC, CD i DA oznaczono odpowiednio literami E, F, G i H. Dane są długości odcinków $|AE| = 4$ cm, $|FB| = 5$ cm, $|GC| = 2$ cm i $|DH| = 1$ cm. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.

4. Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok ma długość $\frac{3}{2}r$. Oblicz pole tego trapezu.

D **5.** W czworokącie $ABCD$ boki BC i AD są równe, a punkty E i F są odpowiednio środkami tych boków. Wykaż, że jeżeli w każdy z czworokątów $ABEF$ i $FECD$ można wpisać okrąg, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

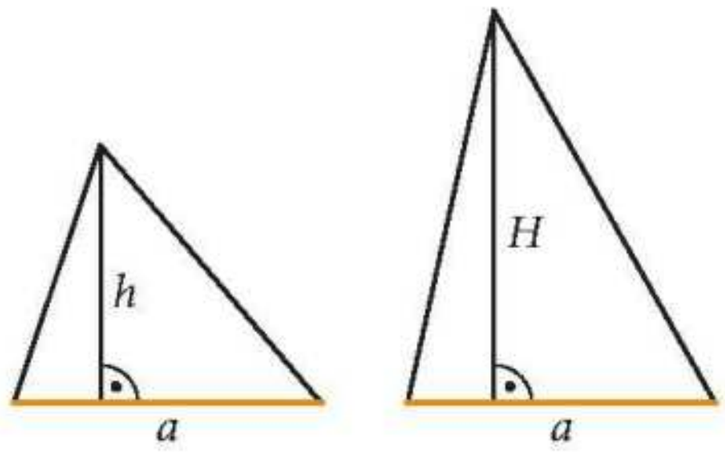
6. Twierdzenie Talesa

Umiejętności:

- stosowanie twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków
- stosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa do badania równoległości prostych

Zbadajmy zależności między polami trójkątów i pewnymi odcinkami w tych trójkątach.

Rozpatrzmy dwa trójkąty o równych podstawach a i wysokościach h oraz H. Obliczmy stosunek pól P_1 i P_2 tych trójkątów.



$$P_1 = \frac{ah}{2}, \quad P_2 = \frac{aH}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{h}{H}$$

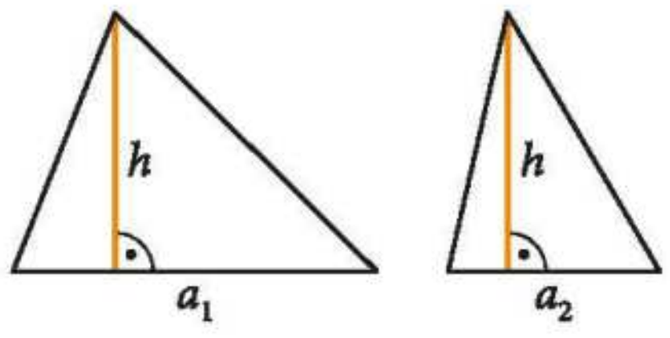
Przypomnijmy – **stosunkiem odcinków** nazywamy stosunek długości tych odcinków.

Stosunek pól takich trójkątów jest równy stosunkowi ich wysokości.

Podobną sytuację mamy w przypadku dwóch trójkątów o równych wysokościach.

$$P_1 = \frac{a_1 h}{2}, \quad P_2 = \frac{a_2 h}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2}$$



Stosunek pól takich trójkątów jest równy stosunkowi ich podstaw.

Omówione wyżej zależności będą przydatne do udowodnienia **twierdzenia Talesa**.

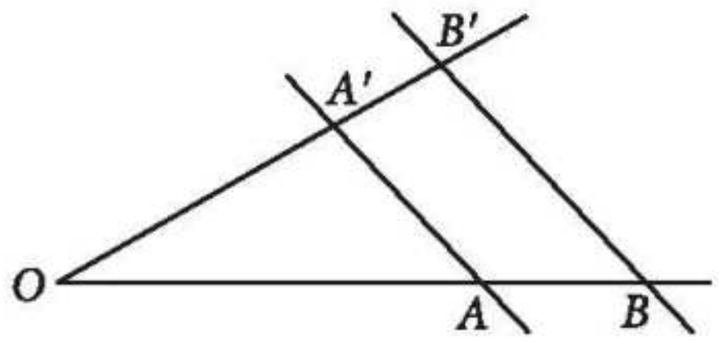
Tales z Miletu (ok. 620 – ok. 540 p.n.e.), grecki filozof i matematyk, sformułował kilka ważnych twierdzeń geometrycznych. Najbardziej znane dotyczy równości stosunków odcinków otrzymanych przy podziale ramion kąta prostymi równoległymi.

Twierdzenie

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

Przyjmijmy oznaczenia zgodne z rysunkiem.



Założenie

$AA' \parallel BB'$

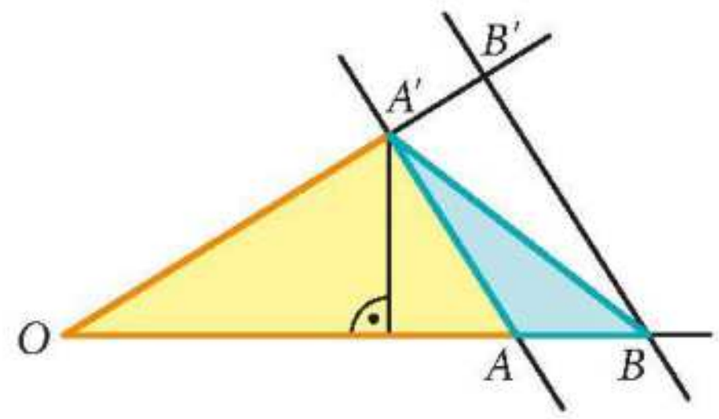
Teza

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

Dowód

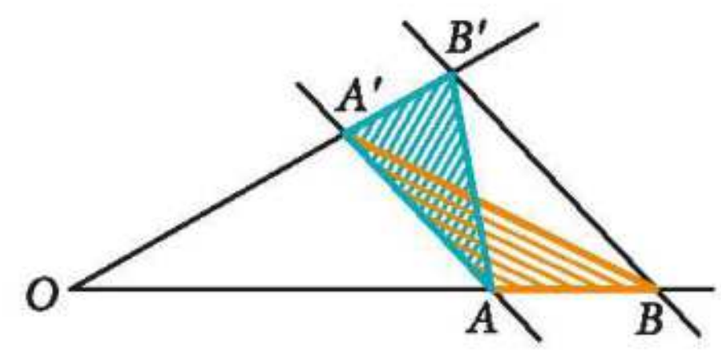
Trójkąty OAA' i ABA' mają różne podstawy OA i AB oraz wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A', zatem:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle ABA'}}$$



$AA' \parallel BB'$, zatem trójkąty ABA' i $AB'A'$ mają wspólną podstawę AA' oraz równe wysokości poprowadzone z wierzchołków B oraz B', czyli:

$$P_{\triangle ABA'} = P_{\triangle AB'A'}$$



Po podstawieniu do poprzedniej równości mamy:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}}$$

$$\frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$ ⟵ trójkąty OAA' i $AB'A'$ mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A

Zatem:

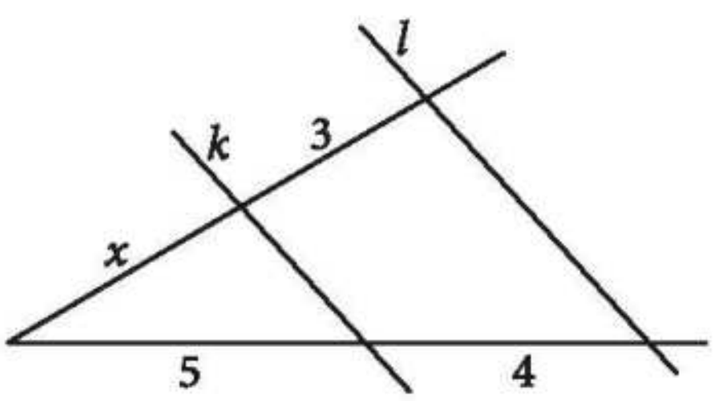
$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}, \text{ czyli } \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

Koniec dowodu

Przykład 1 ◀ zad. 6.4, 6.5

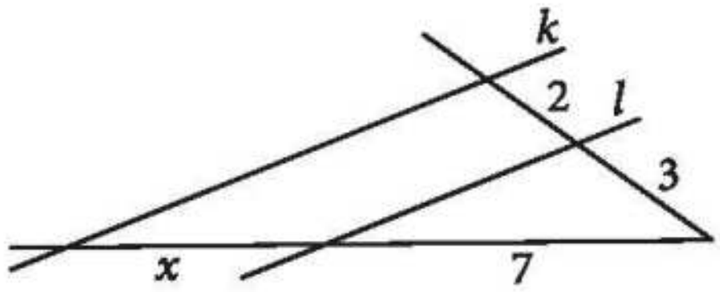
Proste k i l są równoległe. Obliczymy długość odcinka x.

a)



$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}$, więc $x = \frac{15}{4}$

b)

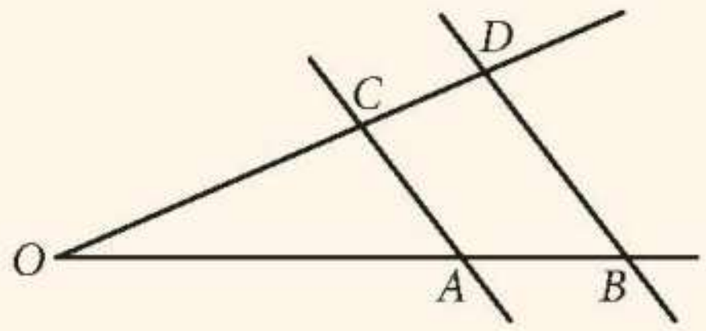


$\frac{3}{2} = \frac{7}{x}$, więc $x = \frac{14}{3}$

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Twierdzenie

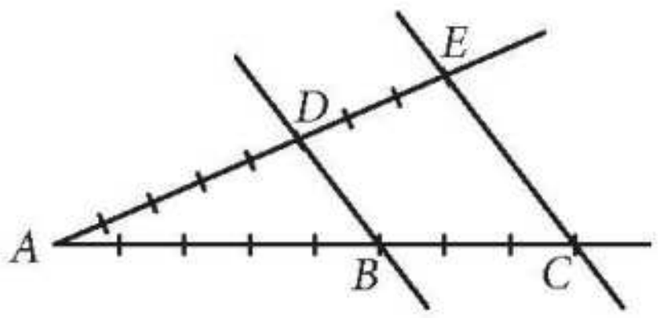
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa
Jeżeli ramiona kąta COA są przecięte dwiema prostymi AC i BD w taki sposób, że odcinki OA i AB leżące na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odcinków OC i CD wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$, to proste AC i BD są równoległe.



Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Przykład 2

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{3}$ oraz $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{5}{3}$, więc prosta DB jest równoległa do prostej EC.



Na podstawie twierdzenia Talesa można zapisać proporcje innych odcinków.

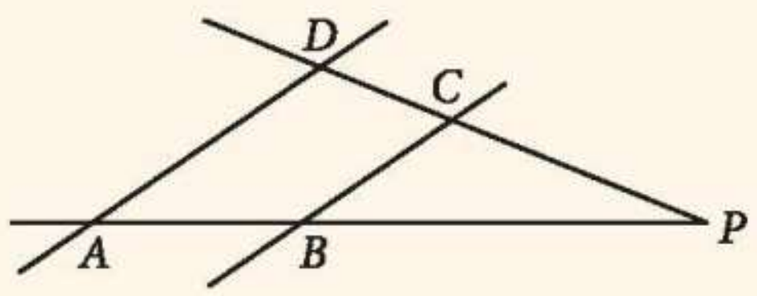
Wniosek

Jeżeli proste AD i BC są równoległe jak na rysunku poniżej, to:

(1) $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}$

(2) $\frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PD|}{|CD|}$

(3) $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$



Do udowodnienia równości (1) wystarczy zauważyć, że:

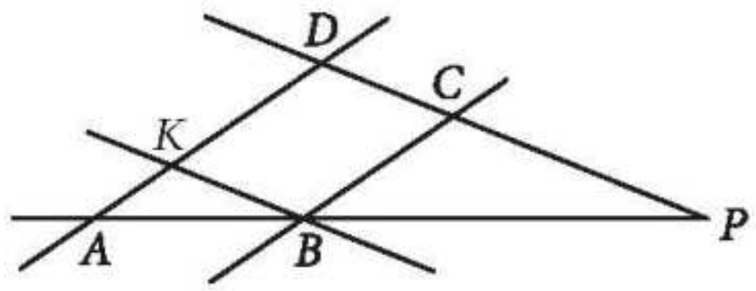
$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PB| + |BA|}{|PB|} = \frac{|PB|}{|PB|} + \frac{|BA|}{|PB|} = 1 + \frac{|BA|}{|PB|}$$

Na mocy twierdzenia Talesa $\frac{|BA|}{|PB|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, więc prawdziwa jest równość:

$$1 + \frac{|BA|}{|PB|} = 1 + \frac{|CD|}{|PC|} = \frac{|PC| + |CD|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PC|}$$

Analogicznie udowadniamy równość (2).

Do udowodnienia równości (3) uzupełnimy rysunek prostą BK równoległą do prostej PD po to, aby zastosować wzór (2) do kąta DAP przeciętego równoległymi prostymi BK i PD.



Mamy więc równość:

$$\frac{|AD|}{|KD|} = \frac{|AP|}{|BP|}$$

w której zamiast $|KD|$ możemy podstawić $|BC|$, bo czworokąt $BCDK$ jest równoległobokiem.

Zatem $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.

Zauważmy też, że równości podane w twierdzeniu Talesa oraz we wniosku możemy przedstawiać w różnych postaciach, zgodnie z zasadami działań na ułamkach (zob. ramka obok).

Załóżmy, że a, b, c, d są różne od 0.
Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to:

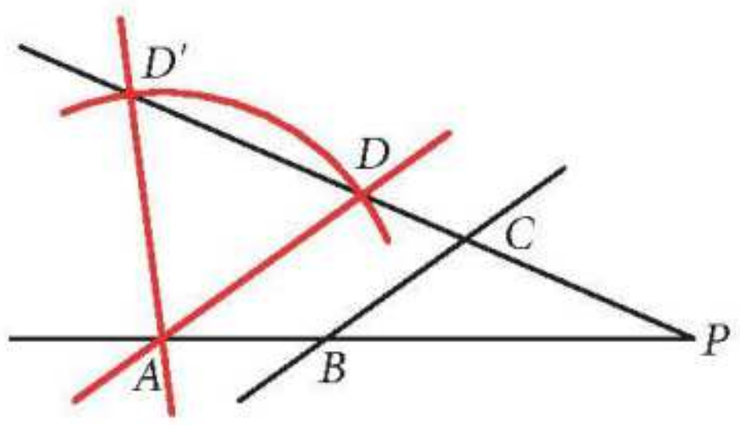
- $a \cdot d = b \cdot c$
- $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Przykład 3 ◂ zad. 6.6

Dwie proste przecinają ramiona kąta o wierzchołku P tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki PB i PA (B leży między P i A), na drugim PC i PD (C leży między P i D) oraz $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$. Sprawdzimy, czy na podstawie podanych informacji można stwierdzić, że proste BC i AD są równoległe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli proste BC i AD są równoległe, to równość podana w założeniach jest prawdziwa na mocy powyższego wniosku – punkt (3). Można podać jednak przykład pokazujący, że wnioskowanie w drugą stronę nie jest prawdziwe. Popatrzmy na rysunek.



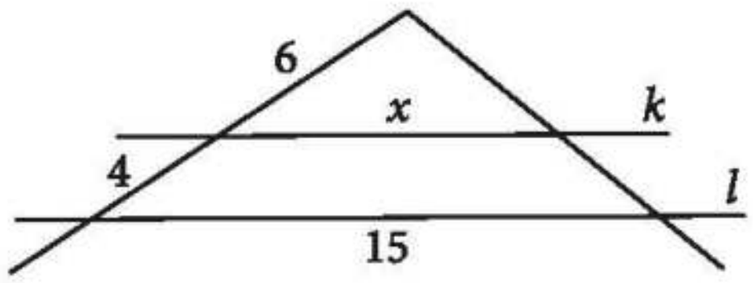
Odcinki AD i AD' są tej samej długości, czyli punkt D' spełnia założenia zadania – w szczególności $\frac{|AD'|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$, natomiast proste BC i AD' nie są równoległe.

Odp.: Na podstawie podanych informacji nie można stwierdzić, czy proste BC i AD są równoległe.

Przykład 4 ◀ zad. 6.7

Proste k i l są równoległe. Obliczymy długość odcinka x.

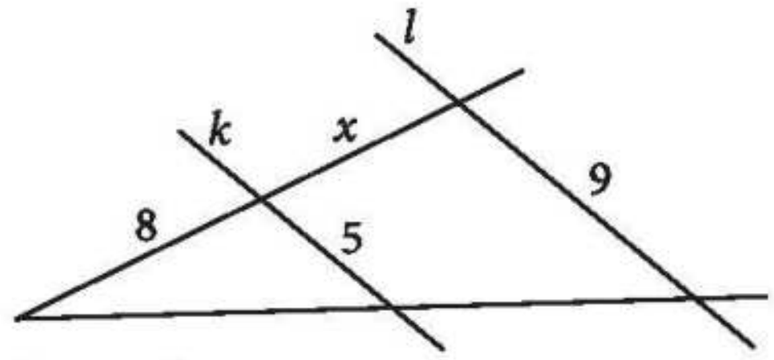
a)



$\frac{x}{6} = \frac{15}{4+6}$

$10x = 15 \cdot 6$, czyli $x = 9$

b)



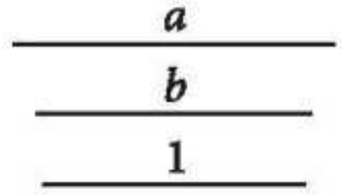
$\frac{5}{8} = \frac{9}{8+x}$

$5(8 + x) = 72$, czyli $x = 6{,}4$

Jeżeli mamy podany odcinek jednostkowy, to możemy konstruować odcinki o długości będącej iloczynem lub ilorazem długości danych odcinków.

Przykład 5 ◀ zad. 6.9

Dane są odcinki o długościach a i b oraz odcinek jednostkowy. Zbudujemy odcinek o długości ab.



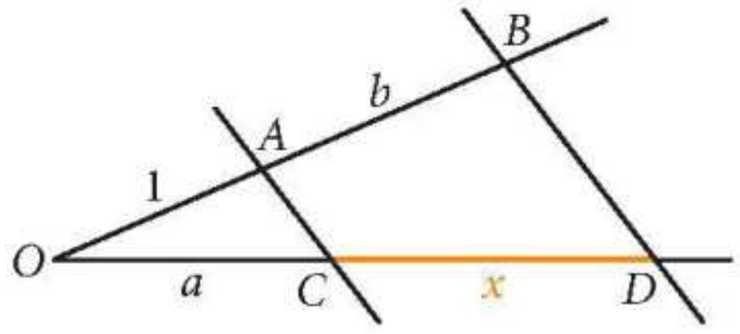
Rozwiązanie

Oznaczmy iloczyn ab literą x. Wówczas:

$x = ab$, czyli $x \cdot 1 = ab$

Tę równość zapisujemy w postaci proporcji, np.:

$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$



Kolejne etapy konstrukcji odcinka o długości ab opiszemy w tabeli.

Wykonywana czynność	Otrzymana figura
Rysujemy kąt o wierzchołku O i na jednym jego ramieniu odkładamy kolejno: odcinek jednostkowy OA i taki odcinek AB, że $\|AB\| = b$.	punkty A i B
Na drugim ramieniu kąta odkładamy taki odcinek OC, że $\|OC\| = a$.	punkt C
Prowadzimy prostą AC, a następnie przez punkt B równoległą do niej prostą BD.	• punkt D, jako punkt przecięcia prostej równoległej do AC z drugim ramieniem kąta • szukany odcinek CD – zgodnie z twierdzeniem Talesa mamy $\|CD\| = ab$

Poprawność konstrukcji wynika z twierdzenia Talesa.

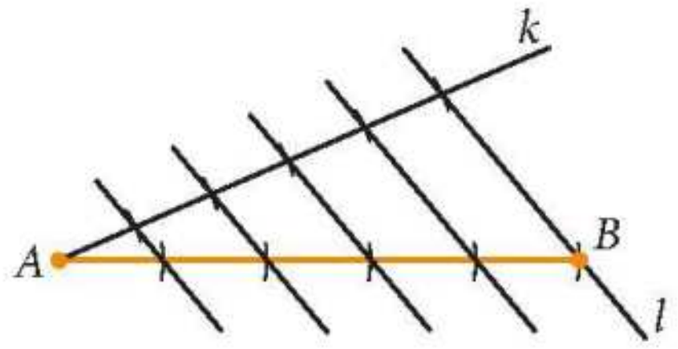
Z wyprowadzonych wzorów wynika, że jeśli przetniemy ramiona kąta dowolnie wieloma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone na jednym ramieniu są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta. Ten fakt wykorzystujemy przy konstrukcyjnym podziale odcinka na n równych części.

Przykład 6

Podzielimy dany odcinek AB na pięć równych części.

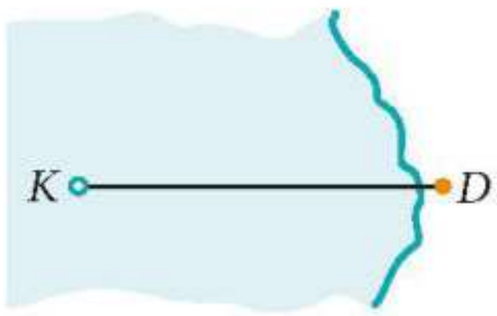
Rozwiązanie

- Z punktu A prowadzimy półprostą k i odkładamy na niej pięć równych odcinków tak, że koniec jednego jest początkiem następnego odcinka.
- Przez koniec ostatniego odcinka i punkt B prowadzimy prostą l.
- Prowadzimy proste równoległe do l przez końce odłożonych na półprostej k odcinków – dzielą one odcinek AB w żądany sposób.



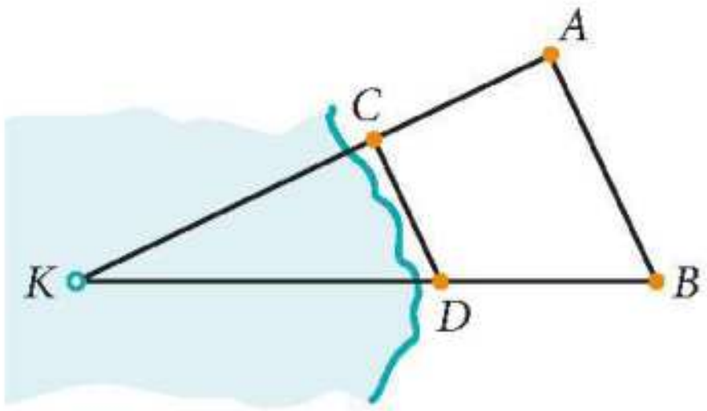
Przykład 7 ◂ zad. 6.13

Na jeziorze umocowana jest boja (oznaczona na rysunku literą K). Podamy sposób obliczenia jej odległości od punktu D znajdującego się na brzegu.



Rozwiązanie

Wytyczamy na brzegu dwa punkty A i B oraz na linii brzegu punkt C w taki sposób, że odcinki AB i CD są równoległe, punkty K, D i B są współliniowe oraz punkty K, C i A są współliniowe. Mierzymy długości $|DB|$, $|AB|$ i $|CD|$.



$$\frac{|KD|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|AB|} \quad \longleftarrow \text{na mocy wniosku z twierdzenia Talesa}$$

$$\frac{|KD|}{|KD| + |DB|} = \frac{|CD|}{|AB|} \quad \longleftarrow |KB| = |KD| + |DB|$$

$$|KD| \cdot |AB| = |CD| \cdot \big(|KD| + |DB|\big)$$

Z tego równania obliczamy niewiadomą wielkość $|KD|$.

Odp.: $|KD| = \dfrac{|CD| \cdot |DB|}{|AB| - |CD|}$

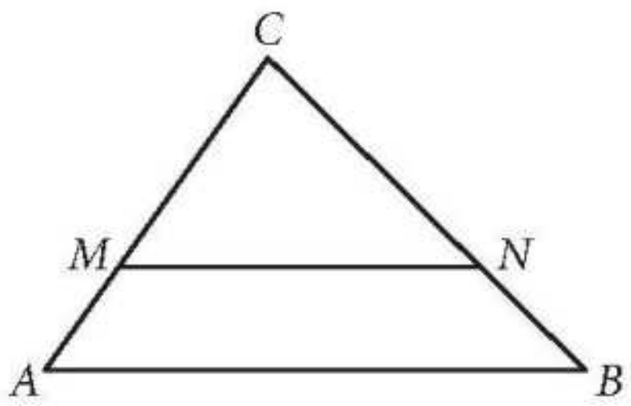
Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, stosunek długości podstaw $|DC| : |AB| = 1 : 3$, a proste zawierające nierównoległe boki AD i BC przecinają się w punkcie S. Zatem stosunek długości $|SD| : |SA|$

A. jest równy $1 : 3$.
B. jest równy $2 : 3$.
C. jest równy $1 : 4$.
D. jest niemożliwy do określenia, bo jest za mało danych.

6.2. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek MN jak na rysunku. Jeżeli $MN \parallel AB$, $|BN| = 5$, $|NC| = 10$ oraz $|AC| = 12$, to



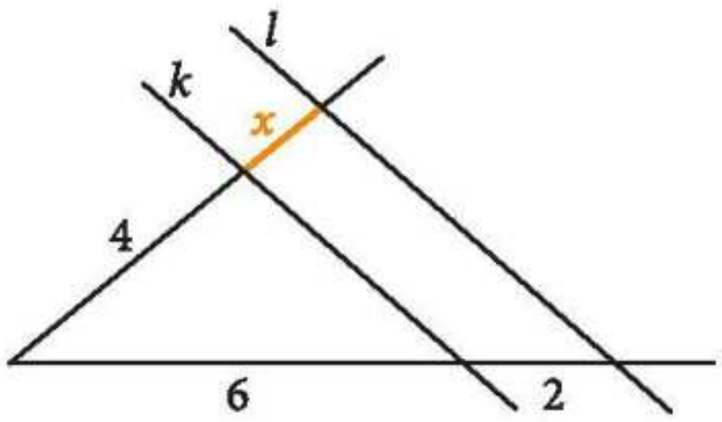
A. $|AM| = 4$, $|MC| = 8$ i $|MN| = 14$.
B. $|AM| = 8$, $|MC| = 4$ i $|MN| = 14$.
C. $|AM| = 5$, $|MC| = 7$ i jest za mało danych do obliczenia $|MN|$.
D. $|AM| = 4$, $|MC| = 8$ i jest za mało danych do obliczenia $|MN|$.

6.3. W trójkącie ABC punkt M leży na boku AC, a punkt N – na boku BC. Które z poniższych danych wykluczają równoległość odcinków AB i MN?

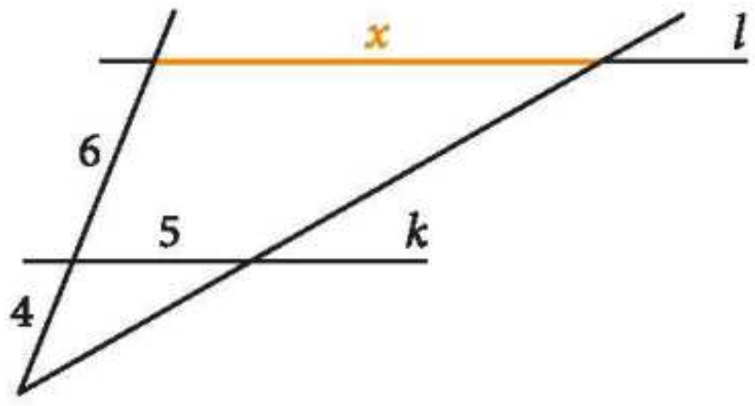
A. $|MC| = 3$, $|AM| = 12$, $|CN| = 13$
B. $|MC| = 3$, $|AC| = 15$, $|AB| = 20$, $|MN| = 5$
C. $|MC| = 3$, $|AC| = 15$, $|CN| = 5$, $|MN| = 5$
D. $|BC| = 20$, $|AC| = 15$, $|AB| = 25$, $|MN| = 5$

6.4. Proste k i l są równoległe. Oblicz x.

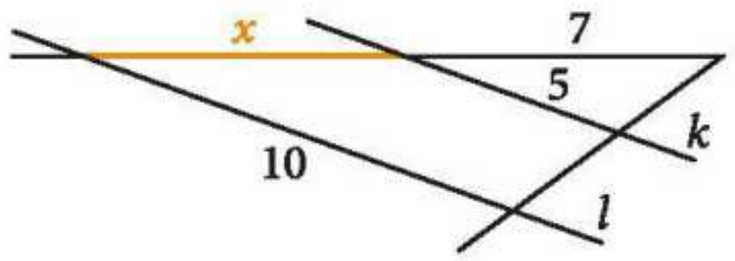
a)



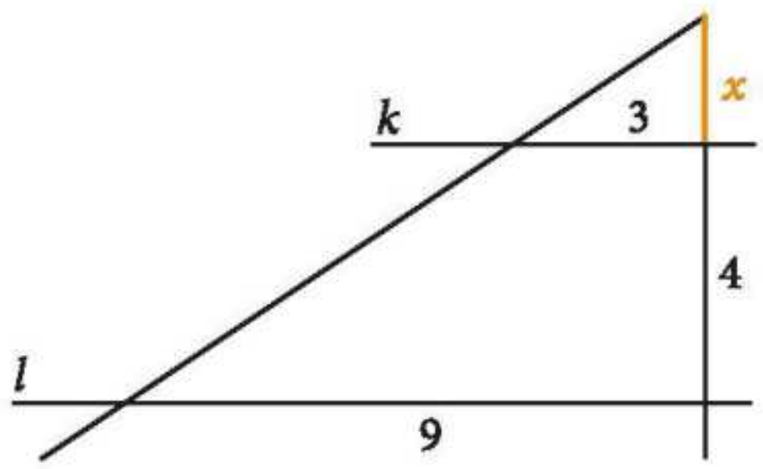
b)



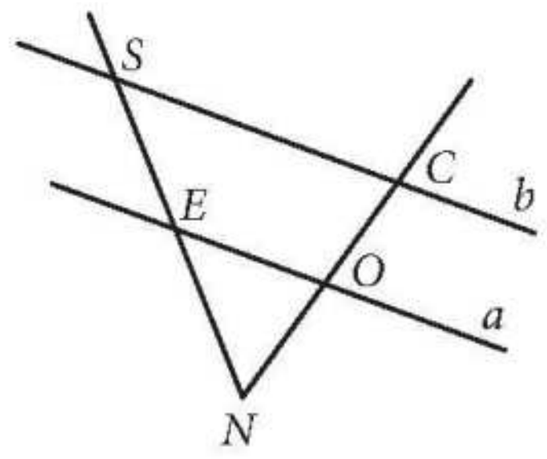
c)



d)

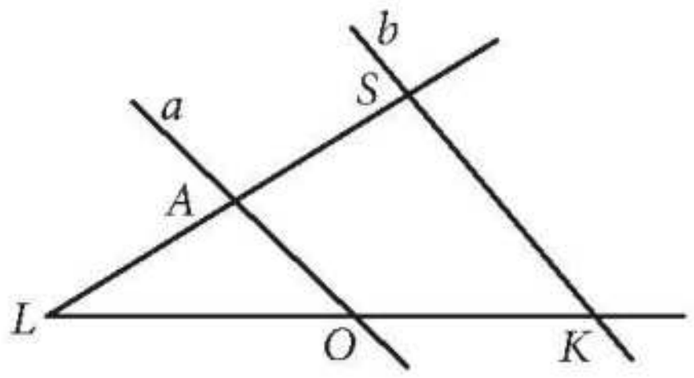


6.5. Proste a i b na rysunku są równoległe. Oblicz



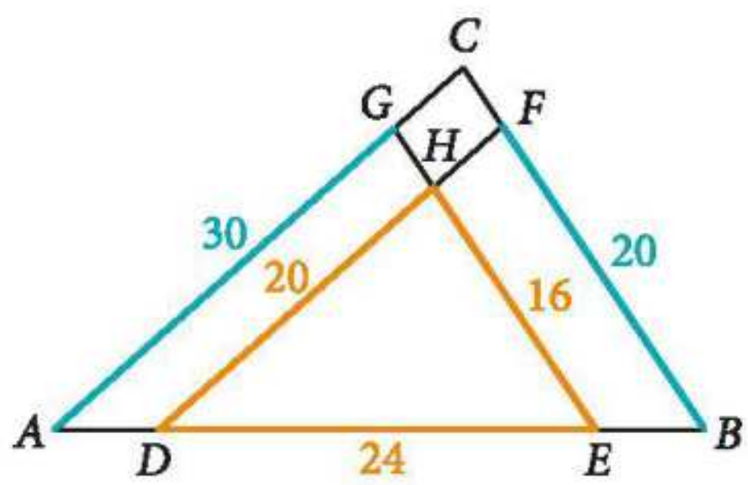
a) $|NE|$, jeżeli $|NS| = 33$, $|NO| = 16$, $|NC| = 44$.
b) $|CO|$, jeżeli $|NC| = 3$, $|NS| = 18$, $|ES| = 0{,}6$.
c) $|EO|$, jeżeli $|SN| = 14$, $|SE| = 8$, $|SC| = 35$.
d) $|SC|$, jeżeli $|EO| = 3$, $|EN| = 1{,}5$, $|SE| = 2$.
e) $|NC|$, jeżeli $|NO| = 4$, $|SE| = 1{,}2$, $|SN| = 1{,}8$.
f) $|EO|$, jeżeli $|SE| : |EN| = 2 : 5$, $|SC| = 14$.

6.6. Proste a i b przecięły ramiona kąta o wierzchołku L tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki LO i OK, a na drugim LA i AS (zob. rysunek). Skorzystaj z podanych informacji i sprawdź, czy proste a i b są równoległe.



a) $|LO| : |LK| = 2 : 3$, $|LA| = 4$, $|AS| = 6$
b) $|LO| : |LK| = 1 : 8$, $|OA| = 2$, $|KS| = 16$
c) $|LK| = \sqrt{2} + 1$, $|OK| = 1$, $|LA| : |AS| = \sqrt{2}$
d) $|LO| = 3\sqrt{2}$, $|OK| = 2\sqrt{2} - 1$, $|OA| : |KS| = 2 + \sqrt{2}$

6.7. W trójkącie ABC poprowadzono odcinki DF i EG tak, że $DF \parallel AC$ i $EG \parallel BC$ (zob. rysunek). Oblicz długości boków trójkąta ABC.



6.8. Na prostej leżą kolejno punkty A, B, C, D tak, że zachodzi proporcja $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$. Oblicz

a) $|AB|$, jeżeli $|BC| = 3$, $|CD| = 7$.
b) $|BC|$, jeżeli $|CD| = 5$, $|AB| = 10$.

6.9. Narysuj odcinek jednostkowy oraz odcinki o długościach a i b, a następnie skonstruuj odcinek o podanej długości.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{a+b}{a \cdot b}$

6.10. Narysuj odcinki o długościach a i b, a następnie skonstruuj odcinek x taki, że

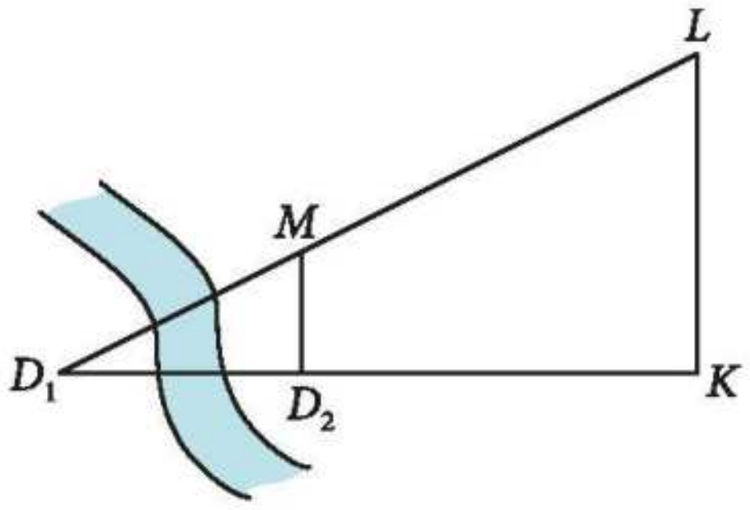
a) $x = \frac{a^2}{a+b}$. b) $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

6.11. Dany odcinek a podziel konstrukcyjnie w podanym stosunku.

a) $2 : 5$ b) $3 : 2\sqrt{2}$ c) $2 : \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ e) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$

6.12. Dany jest odcinek o długości m. Skonstruuj kwadrat, trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny takie, że obwód każdej z tych figur jest równy m.

6.13. Chcemy zmierzyć odległość między drzewami D_1 i D_2, ale nie możemy zrobić tego bezpośrednio, bo rozdziela je rzeka. Na podstawie rysunku opisz sposób, w jaki można wyznaczyć tę odległość. Oblicz $|D_1D_2|$, gdy $|D_2M| = 4$ m, $|D_2K| = 12$ m i $|KL| = 10$ m.



6.14. Przez punkt R należący do boku AB trójkąta ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie S. Kąt CAB ma miarę 60°, $|AR| = 3$ cm, $|RS| = 15$ cm i $\frac{|RB|}{|AB|} = \frac{5}{6}$. Wyznacz długości boków trójkąta ABC.

6.15. W trapezie $ABCD$, w którym: $AB \parallel CD$, $|BC| = 12$ cm, $|CD| = 4{,}5$ cm, $|AD| = 15$ cm, przedłużono nierównoległe boki do przecięcia w punkcie S. Wiadomo, że $\frac{|SC|}{|SB|} = \frac{1}{4}$. Oblicz obwód trójkąta ABS.

6.16. Stosunek dwóch odcinków jest równy 5 : 4. Jeden z tych odcinków jest o 2 cm krótszy od drugiego. Oblicz ich długości.

6.17. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ i $|DB| = 4\sqrt{3}$. Na jakie części zostanie podzielony bok BC długości 8 symetralną boku AB?

6.18. Stosunek długości podstaw trapezu jest równy 1 : 3. Oblicz, o ile centymetrów należy przedłużyć ramię trapezu długości $2\sqrt{2}$ cm, aby przecięło prostą zawierającą drugie ramię tego trapezu.

* **6.19.** Okręgi o promieniach 3 cm i 4,5 cm są styczne zewnętrznie w punkcie P. Odległość punktu P od prostej stycznej do obu okręgów jest równa d. Wyznacz d.

* **6.20.** W rombie $ABCD$ wierzchołek D kąta rozwartego połączono ze środkami K i L boków AB i BC. Pole trójkąta DKL jest równe 36 cm^2. Oblicz pole rombu.

6.21. Na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O obrano punkty K i L, a na drugim M i N tak, że $|OK| = 16$, $|OL| = 52$, $|OM| = 4$, $|MN| = 3m - 2$. Dla jakiej wartości m proste zawierające odcinki KM i LN są równoległe?

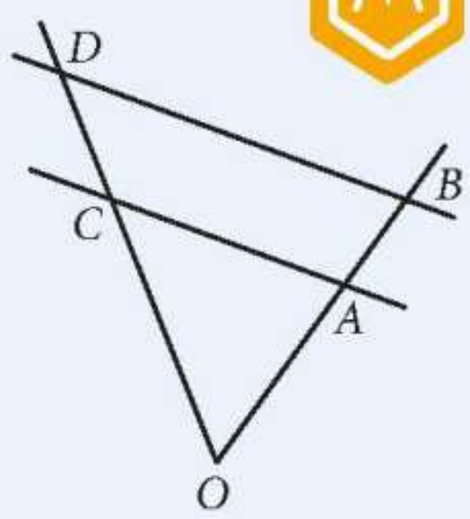
6.22. Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 36$, $|BC| = 24$ i $|AC| = 18$. Przez pewien punkt D na boku AC poprowadzono prostą równoległą do AB przecinającą bok BC w punkcie E takim, że $|AD| + |CE| = 20$. Oblicz długość odcinka DE.

6.23. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę $120°$, $|AC| = b$ i $|BC| = a$. Wyznacz długość dwusiecznej CD.

D **6.24.** Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD. Wykaż, że $MN \parallel AB$ oraz $|MN| = \frac{|AB| + |DC|}{2}$.

Prosto do matury

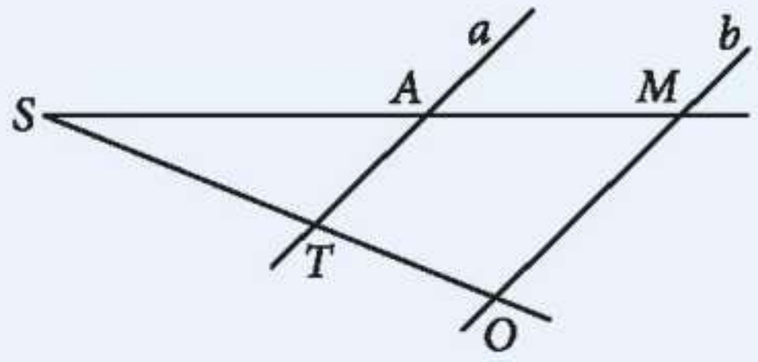
1. Proste AC i BD na rysunku obok są równoległe.



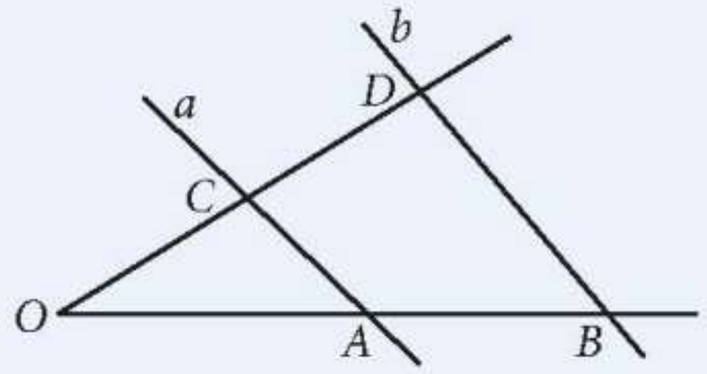
Oceń prawdziwość podanych proporcji.

A. $\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$ **B.** $\frac{|DB|}{|CA|} = \frac{|DC|}{|CO|}$ **C.** $\frac{|DB|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|OA|}$

2. Przedstawione na rysunku proste a i b są równoległe. Oblicz $|ST|$, jeżeli $|TO| = 12$ cm, $|AM| = 16$ cm, $|SA| = 24$ cm.



3. Proste a i b przecinają ramiona kąta o wierzchołku O w punktach A, B oraz C, D jak na rysunku. Skorzystaj z podanych informacji i sprawdź, czy te proste są równoległe.



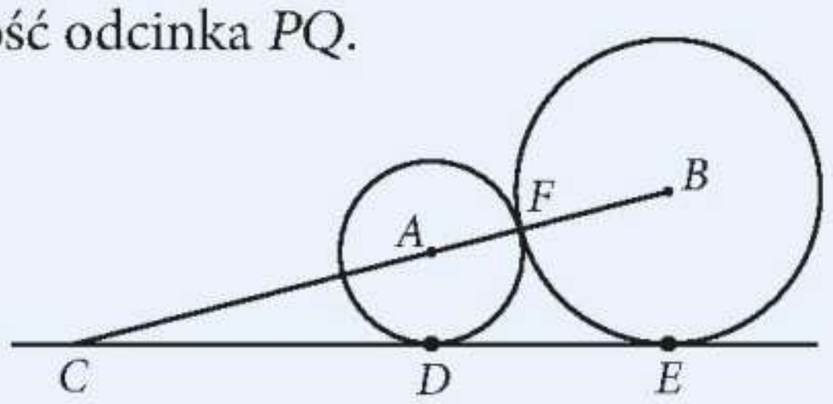
a) $|OA| = 2{,}5$ cm, $|AB| = 1{,}5$ cm, $|AC| = 0{,}5$ dm, $|DB| = 0{,}8$ dm

b) $|OA| = 5{,}1$ cm, $|OB| = 6{,}8$ cm, $\frac{|OC|}{|CD|} = 3$

c) $|OA| = 26$ cm, $|AB| = 4$ cm, $|OC| = 13$ cm, $|OD| = 16$ cm

4. W trójkącie ABC na boku AC obrano punkt P, przez który poprowadzono prostą k równoległą do boku AB. Prosta k przecięła bok BC w punkcie Q. Wiadomo, że $|AB| = 15$ cm i $|AP| : |PC| = 2 : 3$. Oblicz długość odcinka PQ.

5. Dwa okręgi o promieniach 9 i 15 są styczne zewnętrznie w punkcie F i styczne do prostej CE jak na rysunku. Oblicz długość odcinka AC.



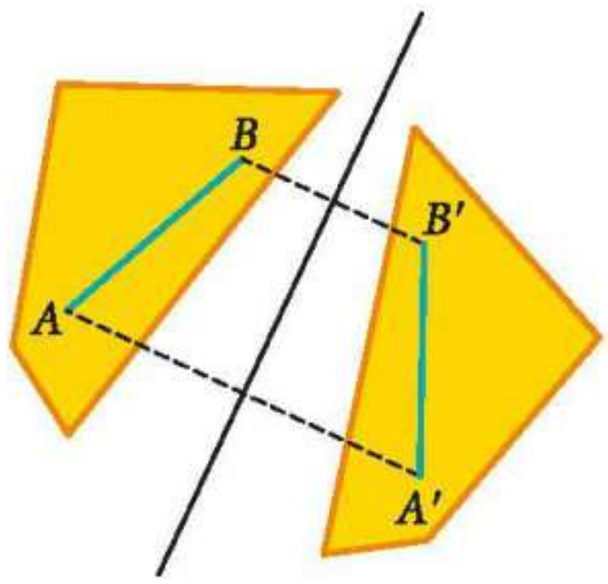
7. Podobieństwo

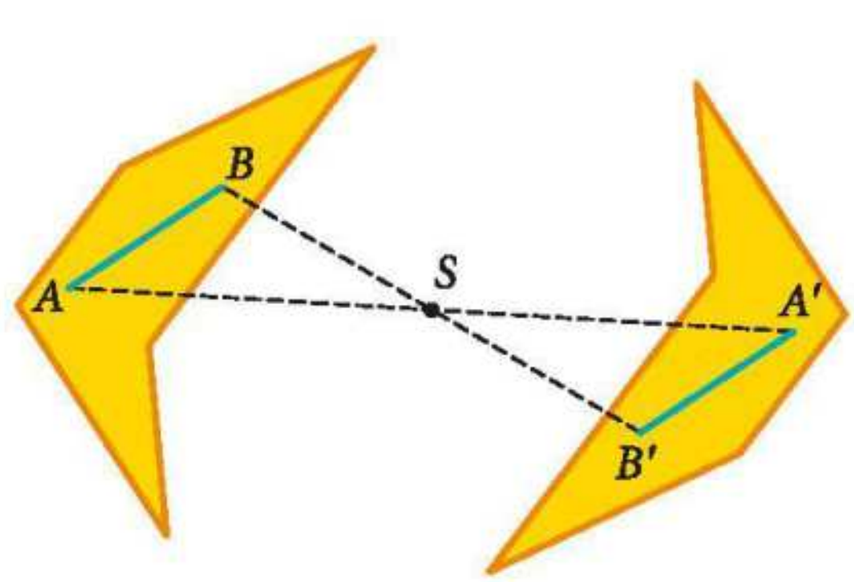
Umiejętności:

- rozpoznawanie figur podobnych
- wykorzystywanie zależności między polami figur podobnych
- wykorzystywanie (także w praktyce) własności figur podobnych

Symetrię osiową oraz symetrię środkową cechuje **zachowanie odległości**. Oznacza to, że dla dowolnych punktów A, B odległość między A i B jest taka sama jak odległość między ich obrazami A' i B' w tych przekształceniach, czyli:

$$|AB| = |A'B'|$$





Jeżeli figura F' powstaje z figury F w wyniku przekształcenia zachowującego odległości, to F' i F nazywamy **figurami przystającymi**.

Teraz zajmiemy się podobieństwem figur. Tego typu przekształcenia na ogół odległości nie zachowują, tylko je zwiększają albo zmniejszają.

Definicja

Jeżeli dana jest pewna liczba dodatnia k, to **podobieństwem** o skali k nazywamy każde takie przekształcenie płaszczyzny, w którym dla dowolnych punktów A, B płaszczyzny oraz ich obrazów A', B' zachodzi równość:

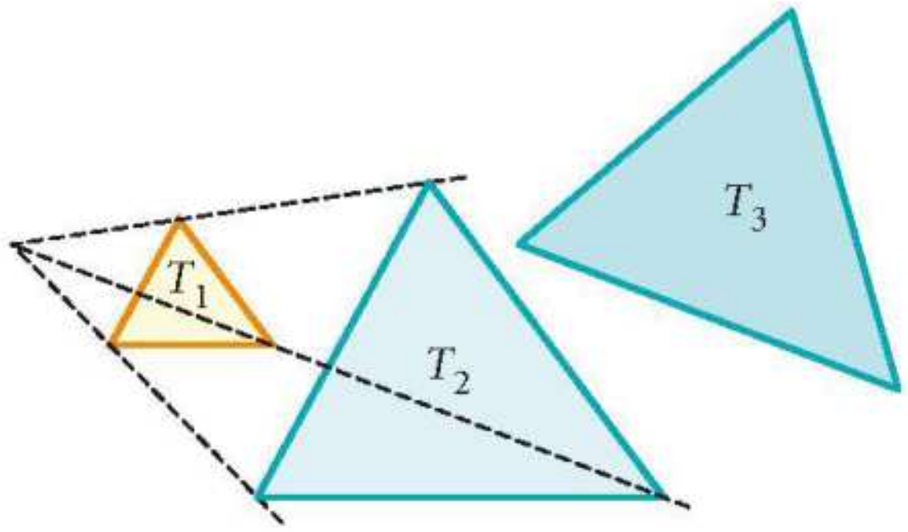
$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

Dwie figury nazywamy podobnymi, jeśli istnieje podobieństwo przekształcające jedną z nich na drugą. Fakt, że figura F_1 jest podobna do figury F_2, zapisujemy symbolicznie $F_1 \sim F_2$.

O figurach przystających mówimy potocznie, że są równe (lub: identyczne), o figurach podobnych – że mają ten sam kształt.

Powiemy, że figury F_2 oraz F_1 są **podobne w skali** k, jeżeli figura F_2 jest obrazem figury F_1 w podobieństwie o skali k. Zauważmy, że jeżeli figury F_2 oraz F_1 są podobne w skali k, to figury F_1 oraz F_2 są podobne w skali $\frac{1}{k}$.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



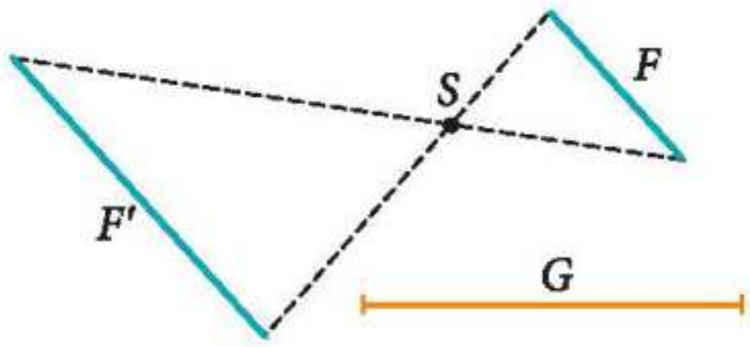
Boki trójkąta T_1 są równoległe do boków trójkąta T_2, więc (zgodnie z twierdzeniem Talesa) boki T_1 są proporcjonalne do odpowiednich boków T_2. Trójkąt T_3 jest przystający do trójkąta T_2, więc boki T_1 są proporcjonalne także do odpowiednich boków T_3. Zatem:

- trójkąty T_1 i T_2 mają odpowiednie boki proporcjonalne,
- trójkąty T_1 i T_3 mają odpowiednie boki proporcjonalne,
- trójkąty T_2 i T_3 mają odpowiednie boki równe, więc proporcjonalne.

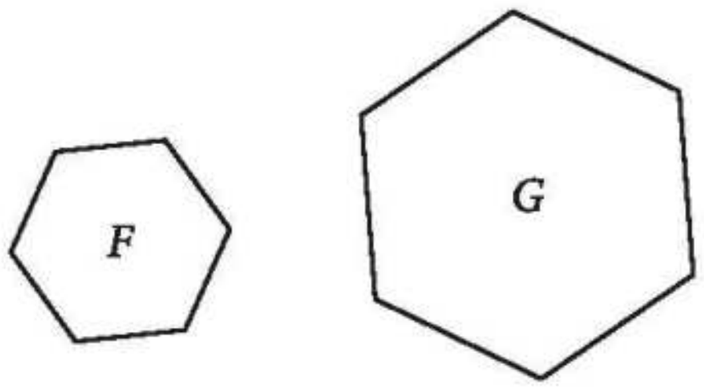
Trójkąty T_1, T_2 i T_3 mają ten sam kształt. Udowodnieniem, że są podobne, zajmiemy się w następnym temacie.

Przykład 1

a) Dowolne dwa odcinki są podobne.
Skalą podobieństwa jest stosunek długości tych odcinków.
$F \sim F'$
$G \equiv F'$, więc $G \sim F'$
$F \sim G$



b) Dwa wielokąty foremne o tej samej liczbie boków są podobne.
$F \sim G$



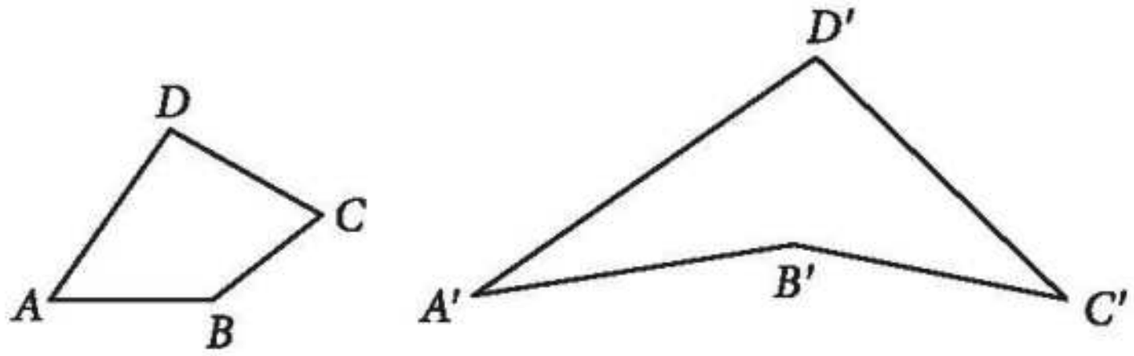
Twierdzenie

Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.

Twierdzenie podajemy bez dowodu, pokażemy tylko na przykładzie, że sama proporcjonalność boków albo sama równość kątów nie wystarczy, by np. czworokąty były podobne.

Przykład 2 ◂ zad. 7.8

Dwa czworokąty narysowane poniżej mają odpowiednie boki proporcjonalne.



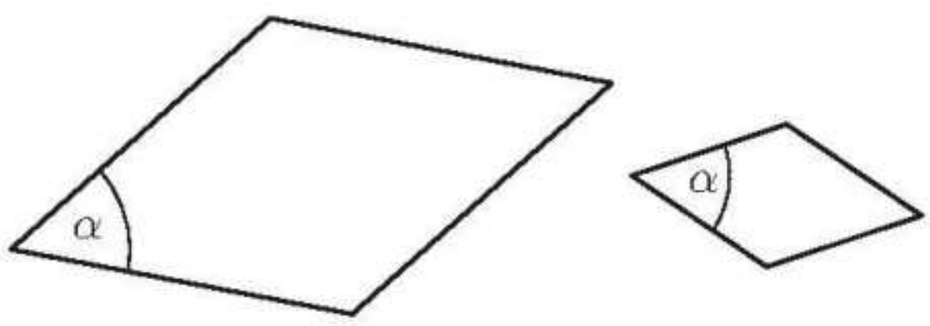
Można sprawdzić, że:

$$|A'B'| = 2|AB|,\ |B'C'| = 2|BC|,\ |C'D'| = 2|CD| \text{ oraz } |D'A'| = 2|DA|$$

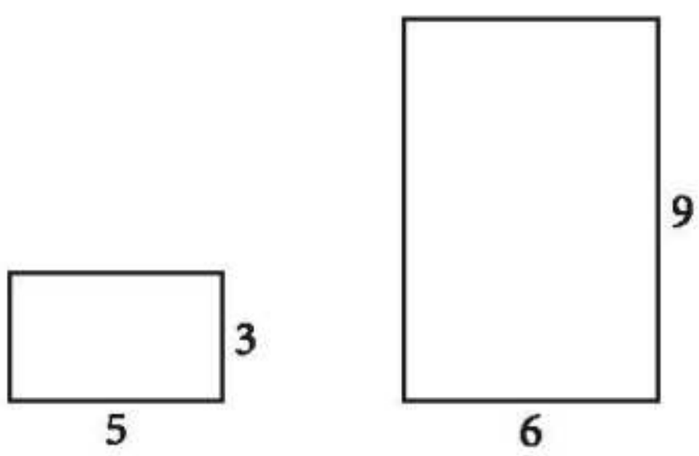
Czworokąty te nie są jednak podobne, ponieważ mają różne kąty wewnętrzne, np. $\sphericalangle ABC \neq \sphericalangle A'B'C'$.

Przykład 3

a) Dwa romby są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same kąty.

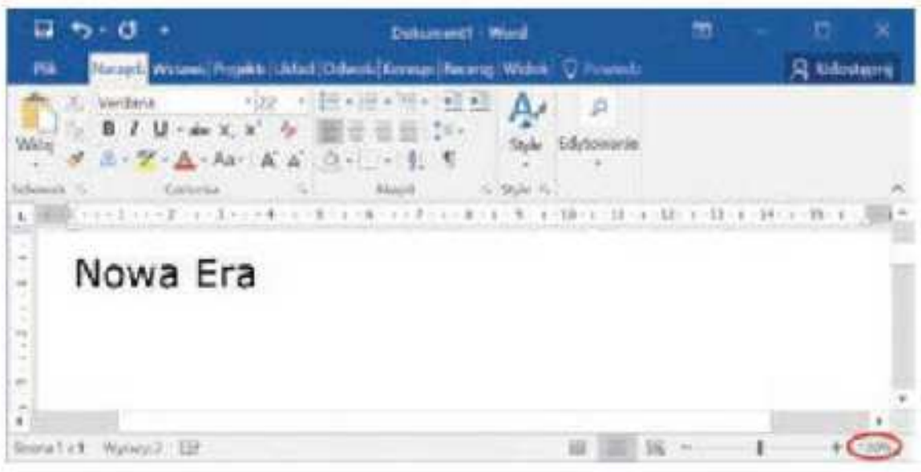


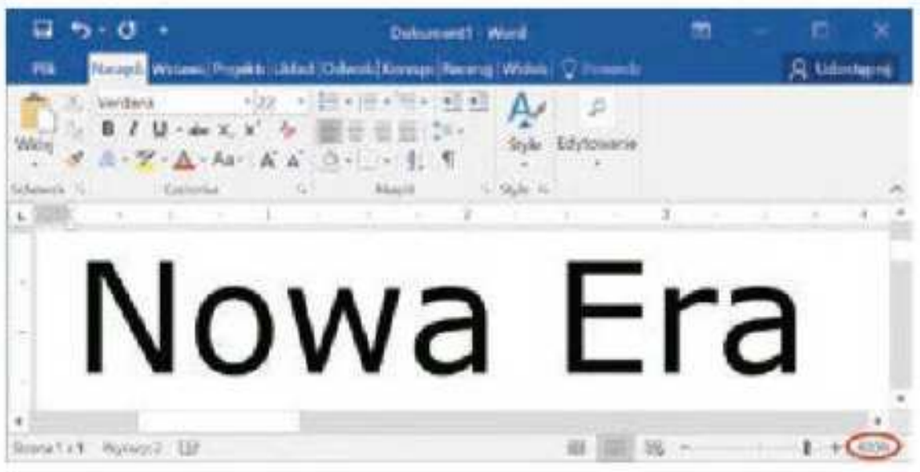
b) Prostokąt o wymiarach 3×5 nie jest podobny do prostokąta o wymiarach 6×9, ponieważ $\frac{3}{6} \neq \frac{5}{9}$.



Z podobieństwem (proporcjonalnym powiększaniem lub zmniejszaniem obiektów) mamy do czynienia na co dzień.

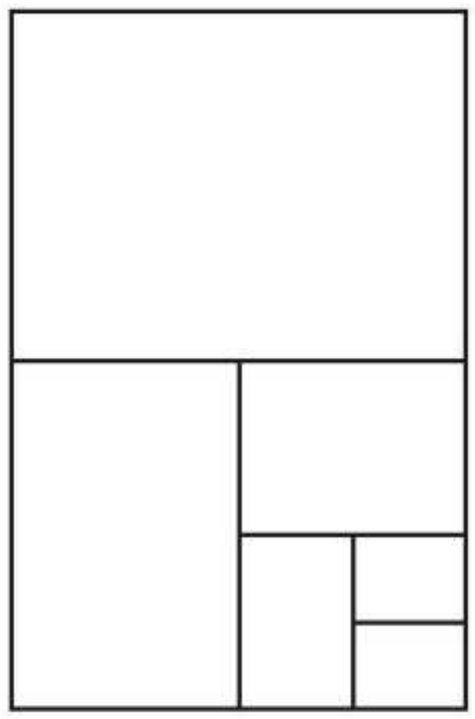
- Gdy chcemy zwiększyć litery na ekranie monitora, klikamy na odpowiednią skalę i komputer zgodnie z nią zwiększa obraz.





- Jeżeli wykonujemy odbitki zdjęć, to czasami robimy je w różnych wymiarach. Sfotografowany obiekt jest na wszystkich takich odbitkach podobny do obrazu, jaki mamy w pierwotnym zapisie.

- Arkusze papieru produkuje się na ogół w kształcie prostokąta o takich bokach, że po rozcięciu go na połowy równolegle do krótszego boku otrzymuje się dwa mniejsze prostokąty podobne do prostokąta wyjściowego.
Jeżeli boki dużego prostokąta oznaczymy a, b $(a > b)$, to mniejszy prostokąt ma boki $\frac{1}{2}a, b$ i zachodzi proporcja $b : a = \frac{1}{2}a : b$. Stąd $b^2 = \frac{1}{2}a^2$, czyli $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Prostokąt o opisanej własności ma więc boki pozostające w stosunku równym $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Podobieństwo znajduje zastosowanie np. przy wykonywaniu wszelkiego rodzaju map. Podana na nich skala zapisywana jest najczęściej w postaci $1 : k$, co oznacza, że rzeczywiste wymiary w terenie są k razy większe od zmierzonych na mapie.

Przykład 4 ◂ zad. 7.15, 7.16

Na mapie w skali 1 : 250 000 długość drogi kolejowej z Uhowa do Klepaczy ma 6,2 cm. Zatem w rzeczywistości odległość między tymi miejscowościami jest równa:

$$6{,}2 \text{ cm} \cdot 250\,000 = 15{,}5 \text{ km}$$

Jeżeli odcinki o długościach a i b przekształcono przez podobieństwo w skali k, to ich obrazy mają długości odpowiednio ka i kb. Zatem stosunek odcinków po przekształceniu jest taki sam jak przed przekształceniem. Mówimy, że podobieństwo **zachowuje stosunek długości**. Z tego faktu wynika na przykład stały stosunek długości okręgu do jego średnicy (bo każde dwa okręgi są podobne).

- Stosunek obwodu koła do jego średnicy jest stały, równy liczbie niewymiernej π:

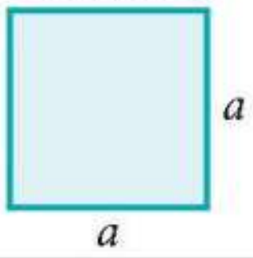
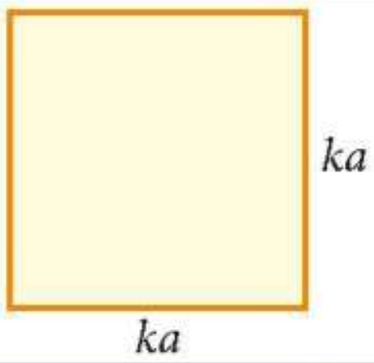
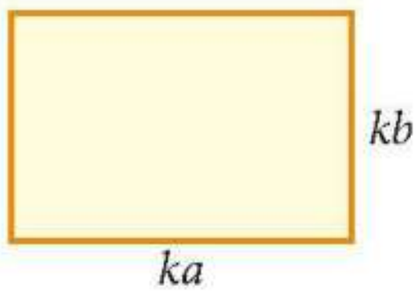
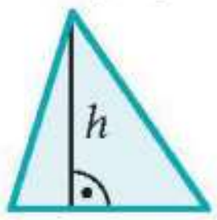
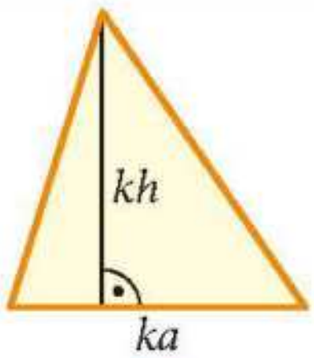
$$\frac{obw_{k(O,r)}}{2r} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

- Stosunek pola koła do kwadratu jego promienia jest stały, równy **tej samej** liczbie π:

$$\frac{P_{k(O,r)}}{r^2} = \frac{\pi r^2}{r^2} = \pi$$

Obydwa te fakty zauważył i udowodnił żyjący w III w. p.n.e. Archimedes z Syrakuz.

Zbadajmy zależność między polami pewnych figur G i F podobnych w skali k.

Figura F	Pole P_F	Figura G	Pole P_G	$\frac{P_G}{P_F}$
kwadrat 	$P_F = a^2$		$P_G = (k \cdot a)^2 = k^2a^2$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$
prostokąt	$P_F = ab$		$P_G = (ka)(kb) = k^2ab$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$
trójkąt 	$P_F = \frac{ah}{2}$		$P_G = \frac{(ka)(kh)}{2} = \frac{k^2ah}{2}$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$
koło	$P_F = \pi r^2$		$P_G = \pi(kr)^2 = k^2\pi r^2$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$

Powyższe obserwacje są ilustracją twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 5 ◂ zad. 7.18

Morze Czarne (łącznie z Morzem Azowskim) ma powierzchnię 460 000 km^2. Obliczymy, jaki obszar zajmie obraz tego morza na mapie w podanej skali.

a) 1 : 1 000 000

Będzie to powierzchnia o polu $1\,000\,000^2$ razy mniejszym, czyli:

$$\frac{460\,000}{1\,000\,000\,000\,000}\ km^2 = \frac{460\,000\,000\,000}{1\,000\,000\,000\,000}\ m^2 = \frac{46}{100}\ m^2 = \frac{460\,000}{100}\ cm^2 = 4600\ cm^2$$

b) 1 : 40 000 000

$$\frac{460\,000}{40\,000\,000^2}\ km^2 = \frac{46 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{(4 \cdot 10^7)^2}\ m^2 = \frac{46 \cdot 10^{10}}{16 \cdot 10^{14}}\ m^2 = \frac{46 \cdot 10^{14}}{16 \cdot 10^{14}}\ cm^2 \approx 2{,}9\ cm^2$$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Obwód trójkąta ABC jest równy 18, a jego pole 15. Jaki jest obwód trójkąta o polu równym 60, podobnego do trójkąta ABC?

A. 9 **B.** 72 **C.** 36 **D.** Jest za mało danych, aby to obliczyć.

7.2. Trójkąt przekształcono przez podobieństwo w takiej skali, że jego obwód zwiększył się o 30%. O ile procent wzrosło pole trójkąta?

A. o 69% **B.** o 90% **C.** o 300% **D.** o 900%

7.3. Jaką trzeba przyjąć skalę, żeby obrazem kwadratu o polu 84 km^2 był na mapie kwadrat o polu 84 mm^2?

A. 1 : 1 000 000 **B.** 1 : 10 000 000 **C.** 1 : 1000 **D.** $1 : 10^{12}$

7.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Każda symetria jest podobieństwem.

B. Dowolne dwa kwadraty są podobne.

C. Pole powierzchni sali na planie w skali 1 : 500 jest 25 000 razy mniejsze niż w rzeczywistości.

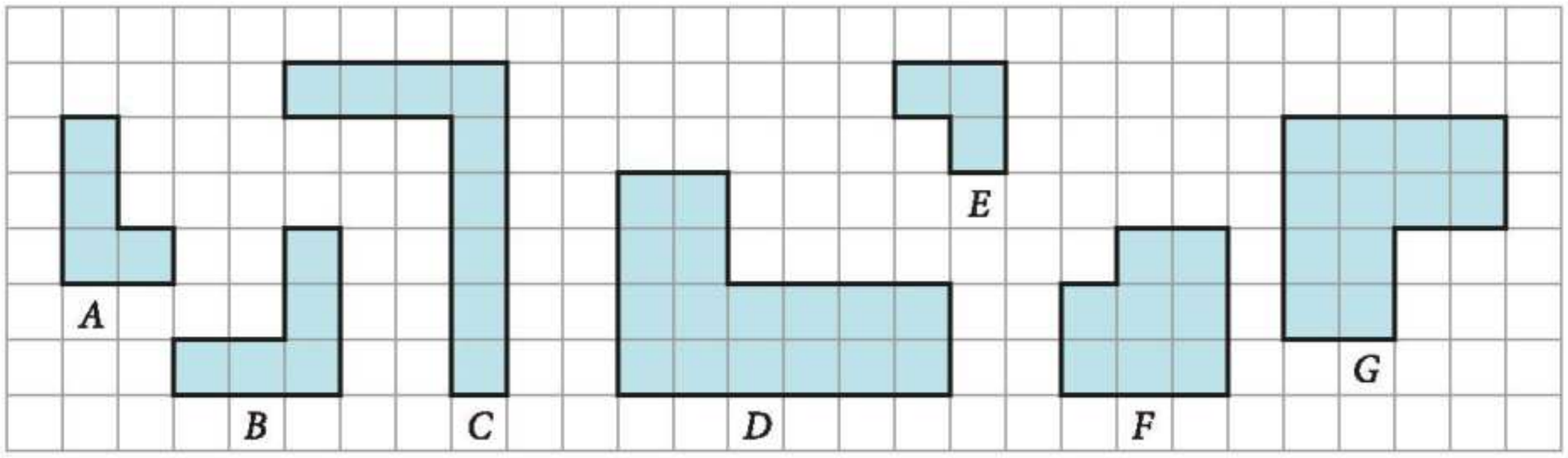
7.5. Prostokąt o wymiarach 2×5 przekształcono przez podobieństwo o podanej skali k. Jakie są wymiary obrazu prostokąta?

a) $k = 2$ b) $k = \frac{1}{3}$ c) $k = \frac{3}{8}$

7.6. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 cm i 4 cm, a jego wysokość jest równa 3 cm. Narysuj trapez podobny do danego w skali $k = \frac{3}{2}$.

7.7. Podaj skalę, w jakiej przekształcono
a) prostokąt o wymiarach 2×5 na prostokąt o wymiarach 6×15.
b) romb o boku 3 i kącie 80° na romb o boku 2 i kącie 80°.
c) koło o promieniu 3,4 na koło o promieniu 17.
d) kwadrat o boku 3 na kwadrat o przekątnej 6.

7.8. Które z narysowanych figur są podobne?



7.9. Czy podane figury są podobne? Dla figur podobnych podaj skalę podobieństwa.
a) trójkąt równoboczny o boku 3,7 cm i trójkąt równoboczny o boku 18,5 cm
b) prostokąt o wymiarach 21×8 i prostokąt o wymiarach $3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3}$
c) trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i ramieniu 10 cm i trójkąt równoramienny o ramieniu 30 cm i wysokości opuszczonej na postawę równej 24 cm
d) równoległobok o bokach 7 i 8 oraz równoległobok o bokach 3 i 4
e) trapez prostokątny o podstawach 6 i 10 oraz wysokości 7 i trapez prostokątny o podstawach 3 i 5 oraz polu 12
f) koło o obwodzie 3π i koło o polu 3π

7.10. Wyznacz skalę, w jakiej należy przekształcić prostokąt o podanych wymiarach, aby otrzymać prostokąt o obwodzie 12 cm.
a) $2\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ b) $6\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ c) $15\text{ mm} \times 15\text{ mm}$ d) $1\text{ cm} \times 1{,}1\text{ dm}$

7.11. Prostokąt $ABCD$ jest podobny do prostokąta $A'B'C'D'$ w skali $k = \frac{6}{5}$. Oblicz obwody tych prostokątów, jeżeli $|AB| = 12\text{ cm}$ i $|A'C'| = 26\text{ cm}$.

7.12. W jakiej skali należy przekształcić prostokąt o przekątnych długości 20 cm i kącie między nimi 60°, aby otrzymać podobny prostokąt o danym obwodzie lub polu?
a) $obw = 5\left(1 + \sqrt{3}\right)\text{ cm}$ b) $obw = 10\text{ cm}$ c) $P = \sqrt{3}\text{ cm}^2$

7.13. Czworokąt C_1 o kolejnych bokach długości 1, 3, 5 i 7 jest podobny do czworokąta C_2, w którym suma długości najdłuższego i najkrótszego boku jest równa 16. Oblicz stosunek obwodu czworokąta C_1 do obwodu czworokąta C_2.

7.14. W równoległoboku $ABCD$ mamy $|AB| = 6$ cm i $|BC| = 9$ cm. Przez punkt M leżący na boku AD poprowadzono prostą równoległą do AB i odcinającą równoległobok $ABNM$ podobny do równoległoboku $ABCD$. Ile wynosi odległość punktu M od punktu A?

7.15. Na podstawie podanego obok fragmentu mapy w skali 1 : 75 000 oblicz przybliżoną długość drogi ze stacji PKP w Leluchowie na szczyt Dubne niebieskim szlakiem.

7.16. Odległość z Łeby do Lęborka wynosi około 30 km. Oblicz przybliżoną skalę zamieszczonej obok mapy.

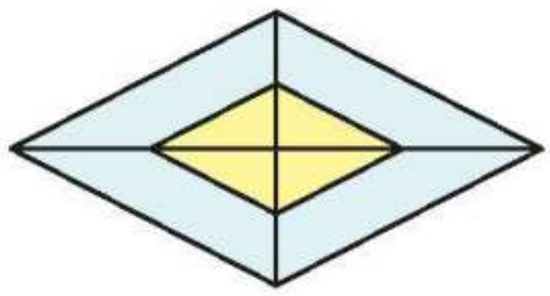
7.17. Julka ma kawałek mapy terenowej w skali 1 : 5000. Chce ją powiększyć tak, aby mieć potrzebny fragment w skali 1 : 2000. Przez jakie podobieństwo powinna przekształcić wybrany fragment mapy?

7.18. Gorczański Park Narodowy zajmuje około 7000 ha. Jaką powierzchnię będzie miał jego obraz na mapie w skali 1 : 50 000? Wynik podaj w dm^2 i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

7.19. Wielokąt przekształcono przez podobieństwo tak, że jego pole zwiększyło się o 96%. Jaka była skala tego podobieństwa?

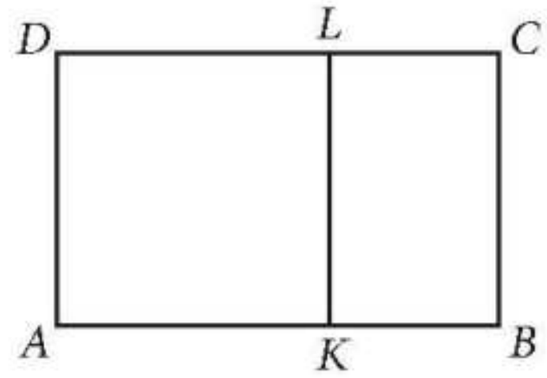
7.20. Pola dwóch wielokątów podobnych wynoszą 75 cm^2 i 48 cm^2. Obwód mniejszego wielokąta jest równy 16 cm. Wyznacz obwód większej figury.

7.21. Na rysunku przedstawiono dwa romby o wspólnym środku symetrii i bokach odpowiednio równoległych. Stosunek pola figury niebieskiej do pola figury żółtej jest równy 96 : 25. Oblicz stosunek obwodów tych rombów.

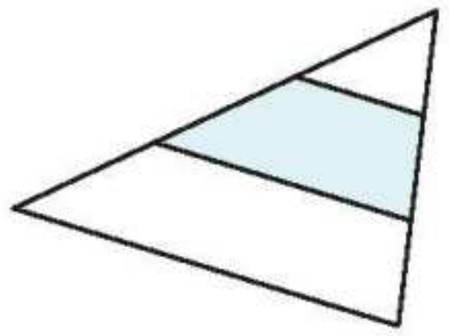


7.22. Podział odcinka na takie dwie części, że stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części, nazywamy **złotym podziałem odcinka**. Oblicz, na jakie części podzielimy w opisany sposób odcinek o długości 1.

7.23. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono odcinek KL, który podzielił prostokąt na kwadrat $AKLD$ i prostokąt $KBCL$ (zob. rysunek). Prostokąt $KBCL$ jest podobny do prostokąta $ABCD$. Wyznacz skalę tego podobieństwa.



7.24. Pole trójkąta jest równe 36. Poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego boku trójkąta, które podzieliły każdy z pozostałych dwóch boków na trzy równe części (zob. rysunek). Oblicz pole trapezu, którego podstawami są te odcinki.



7.25. Przez punkt M leżący na boku AC trójkąta ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB, która podzieliła ten trójkąt na dwa wielokąty o równych polach. W jakim stosunku punkt M dzieli odcinek AC?

Prosto do matury

1. Wielokąt o obwodzie 24 cm i polu 9 cm^2 przekształcono przez podobieństwo o skali 3. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Obwód wielokąta wzrósł o 72 cm.

B. Pole wielokąta wzrosło do 27 cm^2.

C. Stosunek długości najdłuższego boku wielokąta do najkrótszego boku wielokąta wzrósł trzykrotnie.

2. Wielokąt o polu 750 cm^2 przekształcono przez podobieństwo tak, że pole jego obrazu jest mniejsze o 630 cm^2. Ile wynosi skala podobieństwa?

D **3.** Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami ramion BC i AD. Wykaż, że czworokąty $ABKL$ i $KCDL$ są trapezami równoramiennymi i że żaden z nich nie jest podobny do trapezu $ABCD$.

4. Jezioro Śniardwy ma 113,8 km^2 powierzchni. Jaką powierzchnię zajmie jego obraz na mapie w skali 1 : 80 000? Wynik podaj w cm^2 i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

5. Bok AD równoległoboku $ABCD$ ma długość a. Trzy proste równoległe do tego boku podzieliły równoległobok na cztery przystające równoległoboki podobne do równoległoboku $ABCD$. Wyznacz długość boku AB.

Tunel na wyspie Samos

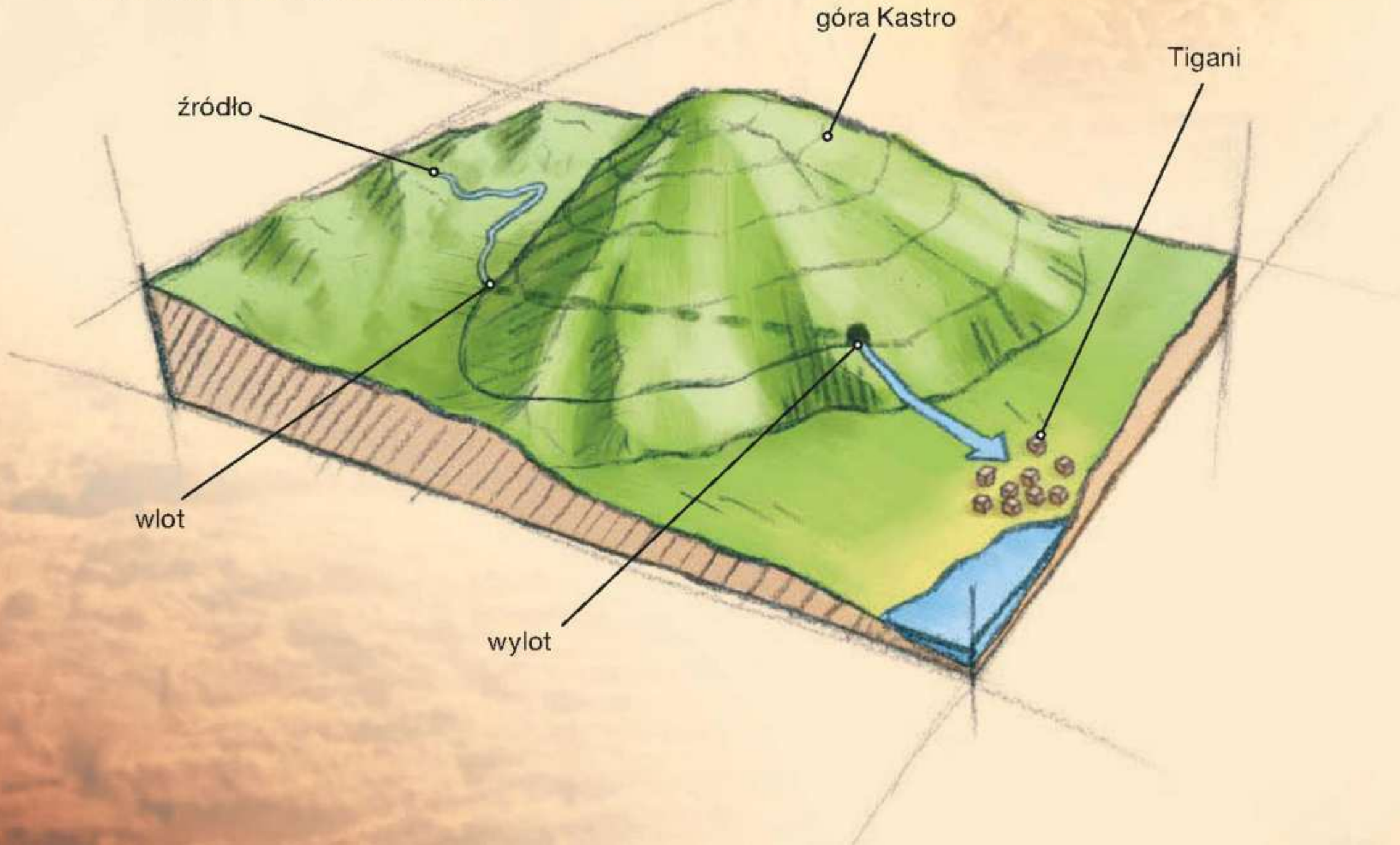
Na greckiej wyspie Samos zachowała się budowla sprzed 2500 lat, która do dzisiaj zachwyca inżynierów i naukowców.

Eupalinos z Megary

W VI w. p.n.e., na polecenie tyrana Polikratesa, Eupalinos z Megary wybudował na Samos podziemny akwedukt doprowadzający wodę do miasta Tigani (obecnie Pythagorion). Najdłuższą częścią tej budowli jest tunel o długości 1036 m, wydrążony we wnętrzu góry Kastro. Chociaż prace górnicze prowadziły dwie ekipy, z obu stron góry jednocześnie, powstał tunel biegnący w linii prostej.

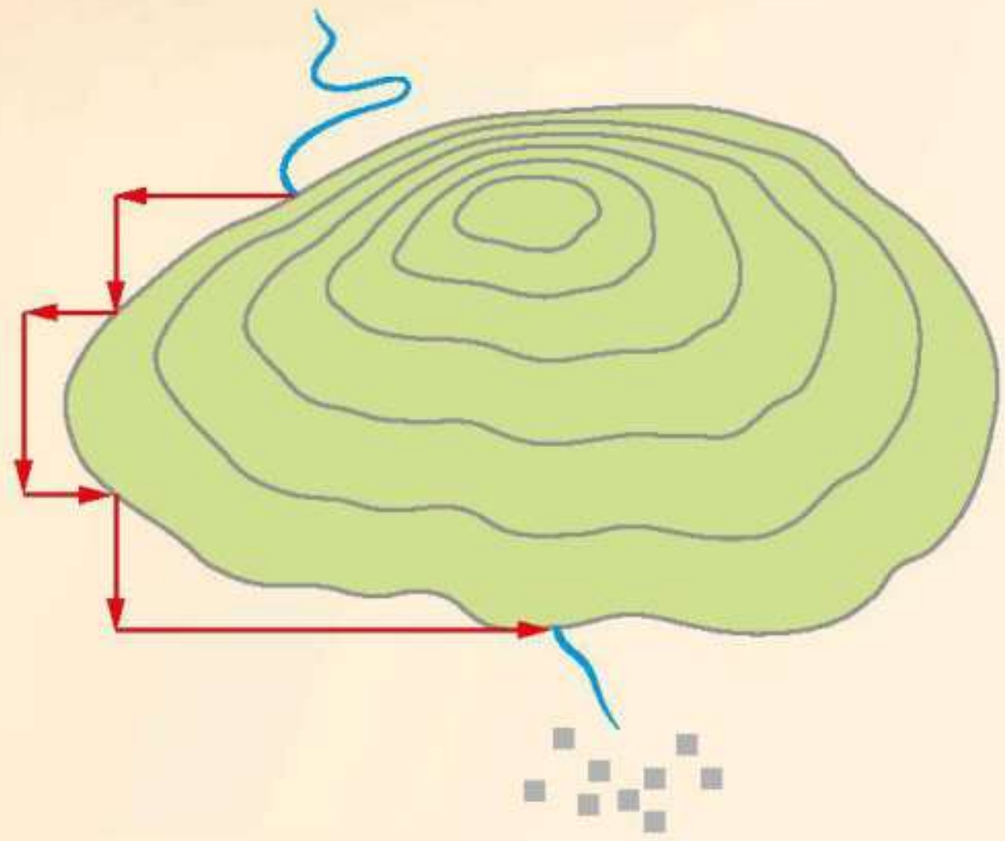
Metoda Eupalinosa

Nie zachowały się zapiski z tamtych czasów, więc nie wiemy na pewno, jak rozumował Eupalinos. Przyjmuje się jednak, że wykorzystał tę samą metodę, którą 500 lat później opisał w swoim dziele Heron z Aleksandrii. Oto jej kolejne etapy.



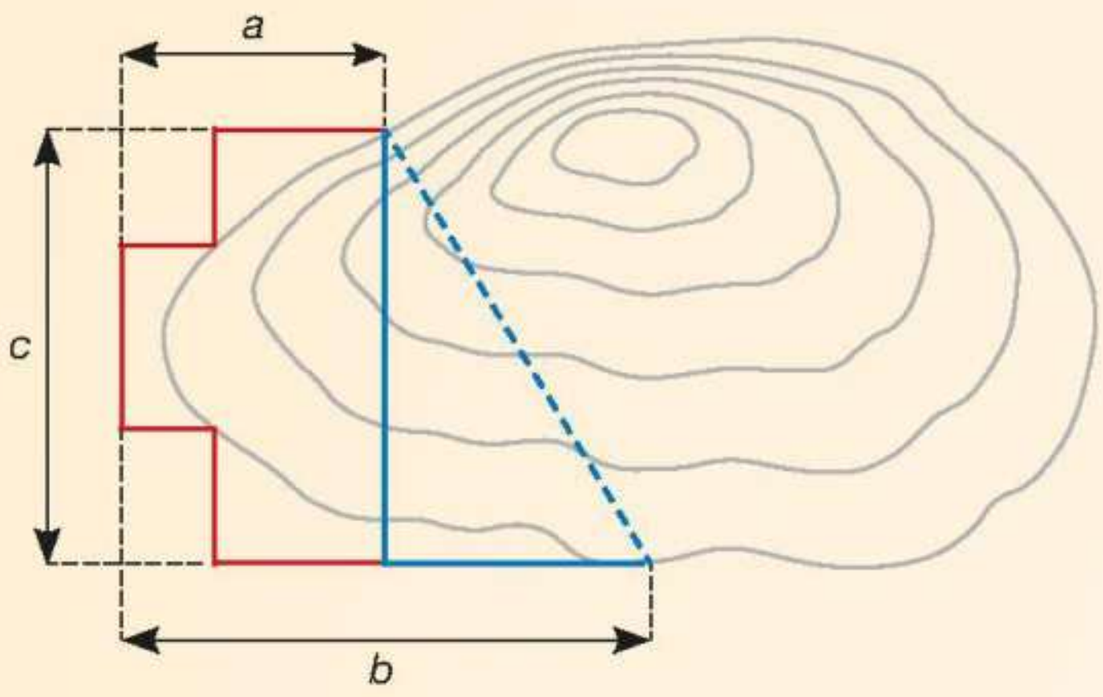
1 Wyznaczenie końców tunelu

Począwszy od miejsca, gdzie miał się znajdować wlot tunelu, Eupalinos wyznaczał kolejno odcinki wzajemnie do siebie prostopadłe (na rysunku kolor czerwony). Kontynuował to tak długo, aż doszedł do miejsca, w którym najdogodniej było zrobić wylot tunelu. Wszystkie pomiary musiał wykonać na tej samej wysokości nad poziomem morza.



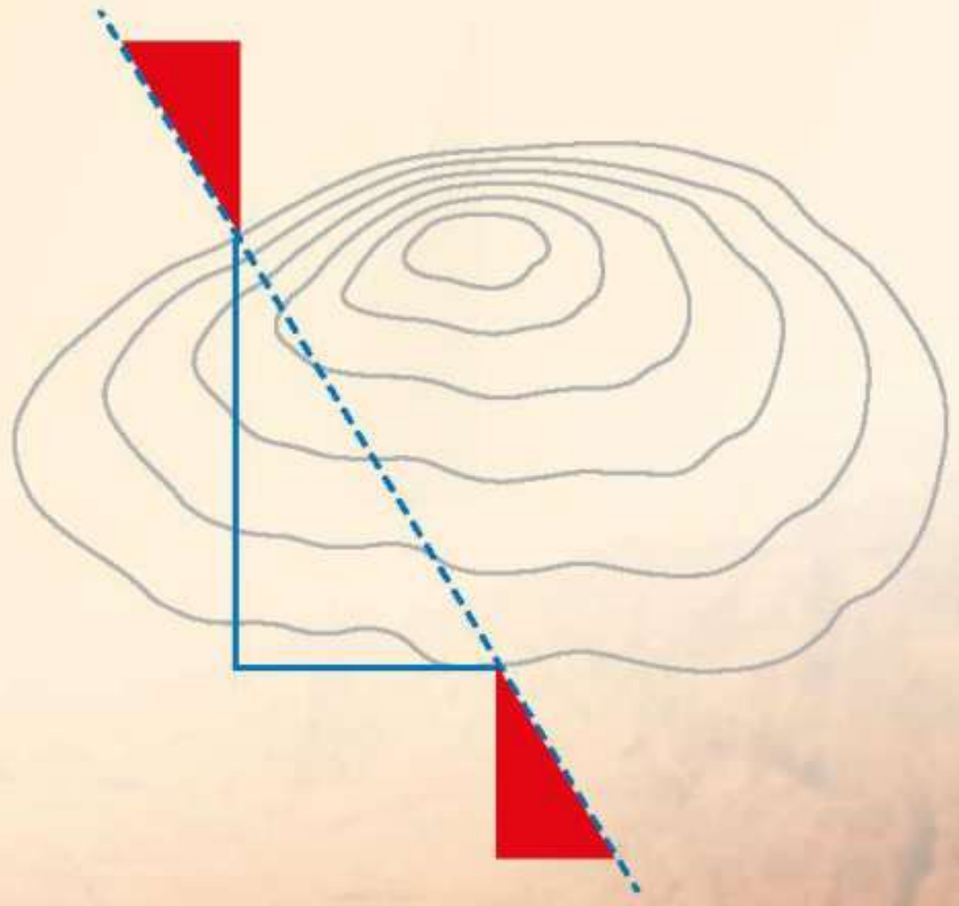
2 Wyznaczenie przebiegu tunelu

Na podstawie swoich pomiarów Eupalinos obliczył długości $b - a$ oraz c (zob. rysunek). W ten sposób wyznaczył długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna leży wzdłuż szukanego tunelu.



3 Wskazanie kierunku drążenia

Na koniec Eupalinos przygotował modele mniejszych trójkątów, podobnych do wyznaczonego. Umieścił je poziomo u wylotów tunelu tak, by ich przeciwprostokątne leżały na przedłużeniu przeciwprostokątnej trójkąta wyznaczonego we wnętrzu góry. Pracujący górnicy mieli drążyć tunel w kierunku wskazanym przez te przeciwprostokątne. Modele trójkątów były stale umieszczone przed wejściem do tunelu, by podczas pracy można było weryfikować kierunek drążenia.



8. Trójkąty podobne

Umiejętności:

- rozpoznawanie trójkątów podobnych
- wykorzystywanie cech podobieństwa trójkątów
- wykorzystywanie własności środkowych trójkąta
- wykorzystywanie (także w praktyce) własności trójkątów podobnych

Cechy podobieństwa trójkątów

- Jeśli dwa trójkąty są podobne, to ich odpowiednie boki są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.
- Jeśli w dwóch trójkątach odpowiednie boki są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe, to te trójkąty są podobne.

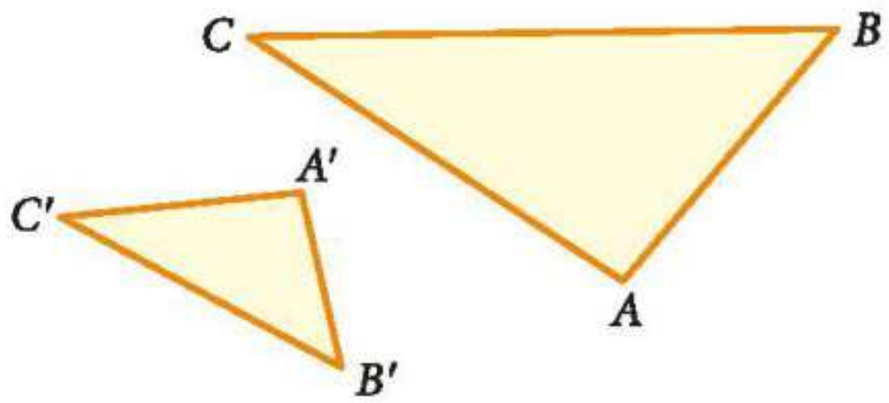
Każde z powyższych zdań jest prawdziwe na mocy twierdzenia ze s. 274.

Okazuje się, że nie musimy badać proporcjonalności wszystkich boków i równości wszystkich kątów, aby wykazać, że dwa trójkąty są podobne. Prostszą metodę uzasadnienia zapewnia każde z trzech poniższych twierdzeń, nazywanych **cechami podobieństwa trójkątów**.

Twierdzenie

Cecha bok-bok-bok podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



Proporcjonalność odpowiednich boków oznacza też, że odpowiednie kąty są równe.

Dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ można tę cechę zapisać symbolicznie:

jeżeli $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$

to $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

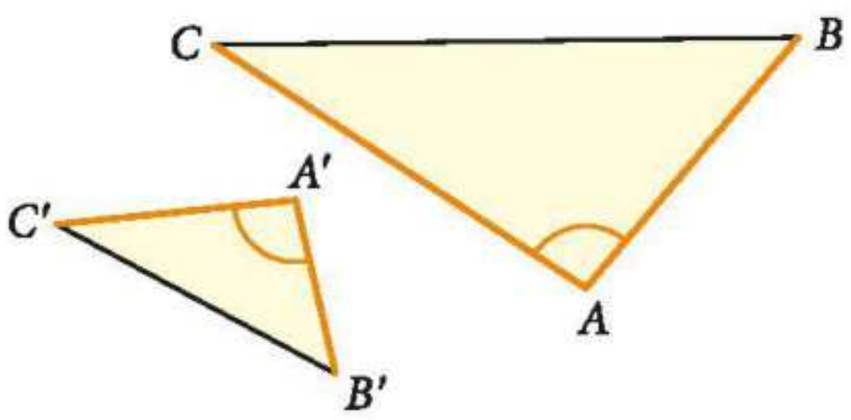
Zapis $p = q = t$ oznacza, że prawdziwe są trzy równości: $p = q$, $q = t$ i $p = t$.

Zauważmy, że analogiczne twierdzenie dla czworokątów nie zachodzi – zobacz przykład 2 s. 275.

Twierdzenie

Cecha bok-kąt-bok podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków innego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.



Proporcjonalność par boków i równość kątów między nimi oznacza też proporcjonalność pozostałych boków i równość pozostałych kątów.

Dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ można tę cechę zapisać symbolicznie:

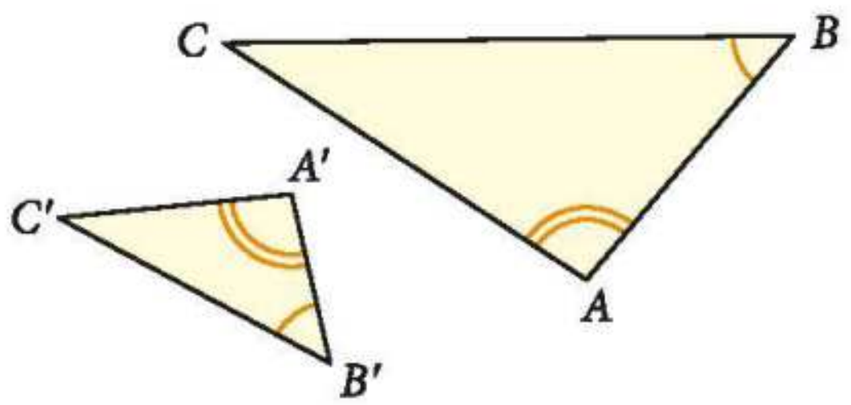
jeżeli $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$

to $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Twierdzenie

Cecha kąt-kąt podobieństwa trójkątów (kk)

Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom innego trójkąta, to trójkąty te są podobne.



Równość odpowiednich kątów oznacza też, że odpowiednie boki są proporcjonalne.

Dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ można tę cechę zapisać symbolicznie:

jeżeli $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ i $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$

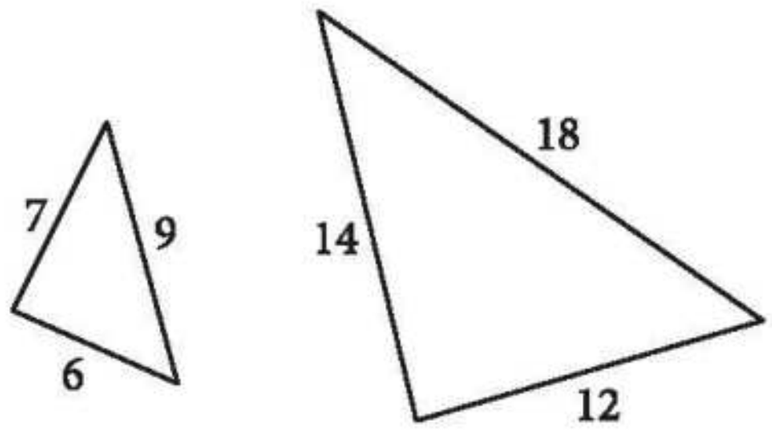
to $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Zauważmy, że analogiczne twierdzenie dla czworokątów nie zachodzi – zobacz przykład 3b s. 275.

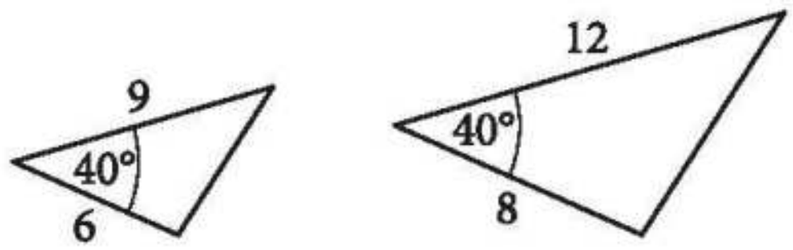
Przykład 1 ◂ zad. 8.6

Zbadamy podobieństwo trójkątów przedstawionych na rysunku.

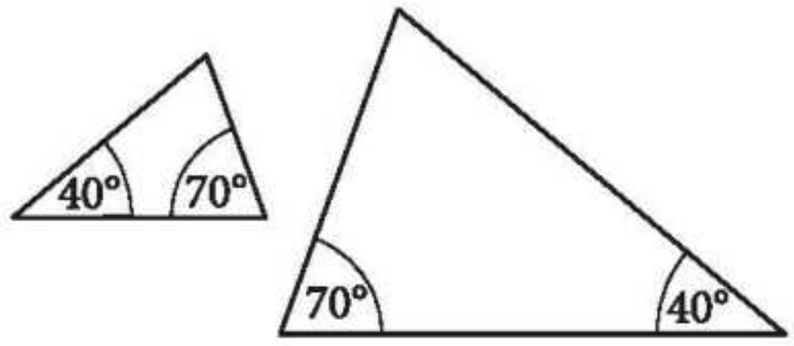
a) Odpowiednie boki trójkątów są proporcjonalne: $\frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{9}{18}$, więc trójkąty o bokach tej długości są podobne.



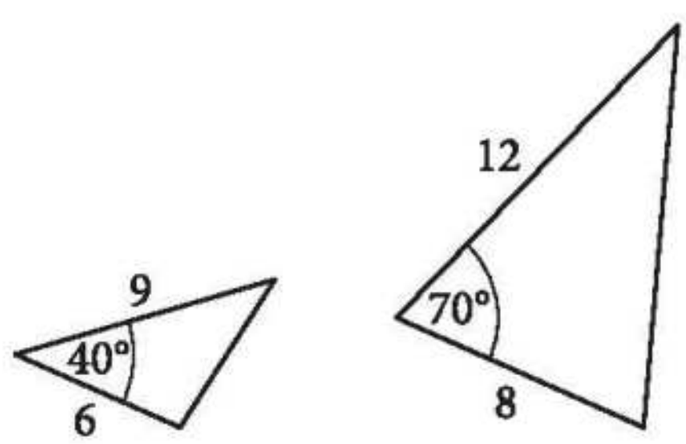
b) Dwa boki pierwszego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ i kąty między tymi bokami są równe $40°$, zatem te trójkąty są podobne.



c) Kąty obu trójkątów są odpowiednio równe (trzeci – jako dopełnienie do $180°$), więc te trójkąty są podobne.



d) Dwa boki pierwszego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$, ale kąty między tymi bokami nie są równe: $40° \neq 70°$. Żadna z cech przystawania nie opisuje takiej sytuacji. Zauważmy jednak, że gdyby te trójkąty miały być podobne, musiałyby być trójkątami o kątach $40°$, $70°$, $70°$, czyli równoramiennymi o kącie $40°$ między ramionami. Zatem mniejszy z podanych trójkątów nie mógłby mieć boków o długościach 6 i 9 zawartych w ramionach kąta $40°$. Oznacza to, że te trójkąty nie są podobne.



Przykład 2

Dane są miary niektórych kątów w trójkątach ABC i DEF: $\sphericalangle A = 38°$, $\sphericalangle B = 96°$, $\sphericalangle D = 96°$, $\sphericalangle E = 48°$. Sprawdzimy, czy te trójkąty są podobne.

Rozwiązanie

Kąty B i D są równe. Ponieważ $\sphericalangle A \neq \sphericalangle E$, rozpatrywane trójkąty są podobne tylko wtedy, gdy kąt C trójkąta ABC jest równy kątowi E w trójkącie DEF.

$$\sphericalangle C = 180° - (38° + 96°) = 180° - 134° = 46°$$

Sprawdziliśmy, że $\sphericalangle C \neq \sphericalangle E$, więc rozpatrywane trójkąty nie są podobne.

Odp.: Trójkąty ABC i DEF nie są podobne.

Przykład 3 ◂ zad. 8.7

Boki trójkąta T_1 mają długości 3 cm, 6 cm i 8 cm. Najkrótszy bok w trójkącie T_2, podobnym do T_1, ma 21 cm. Znajdziemy długości pozostałych boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Podobieństwo zachowuje stosunki odcinków, więc obrazem najkrótszego boku w T_1 jest najkrótszy bok w T_2. Zatem skalą podobieństwa jest w tym wypadku liczba $\frac{21}{3} = 7$, a pozostałe boki mają długości $7 \cdot 6\text{ cm} = 42\text{ cm}$ oraz $7 \cdot 8\text{ cm} = 56\text{ cm}$.

Odp.: Pozostałe boki mają długości 42 cm i 56 cm.

Jeżeli mamy dwa trójkąty podobne, to ważną umiejętnością jest poprawne ustalenie proporcji ich boków. Możemy postępować według podanych niżej zasad.

- Oznaczamy równe kąty w obu trójkątach tymi samymi symbolami.
- W mianownikach trzech ułamków wpisujemy boki jednego trójkąta.

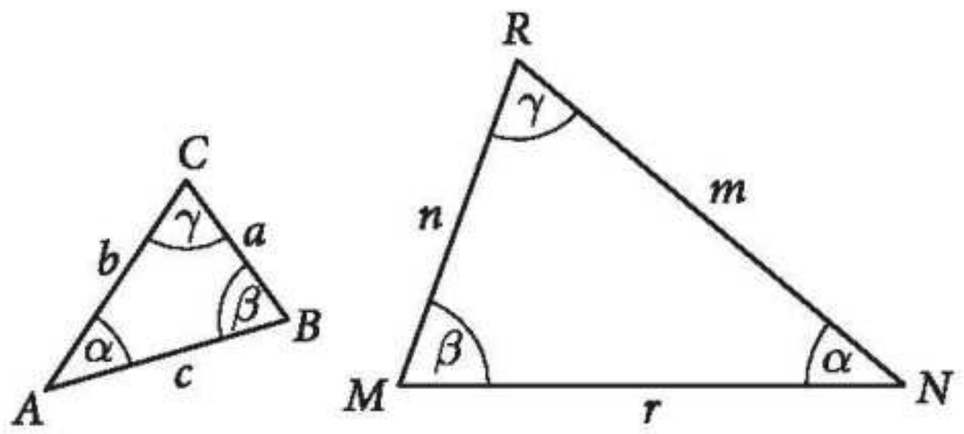
$$\frac{\boxed{?}}{a} = \frac{\boxed{?}}{b} = \frac{\boxed{?}}{c}$$

- Sprawdzamy, które boki drugiego trójkąta leżą naprzeciwko równych (odpowiednio) kątów.

$$\frac{n}{a} = \frac{\boxed{?}}{b} = \frac{\boxed{?}}{c} \longleftarrow \text{w trójkącie } ABC \text{ bok } a \text{ leży naprzeciwko kąta } \alpha, \text{ a w trójkącie } NMR \text{ naprzeciwko kąta } \alpha \text{ leży bok } n, \text{ zatem w pierwszym liczniku wpisujemy } n$$

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = \frac{\boxed{?}}{c} \longleftarrow \text{bok } b \text{ leży naprzeciwko kąta } \beta, \text{ zatem w drugim liczniku wpisujemy } m$$

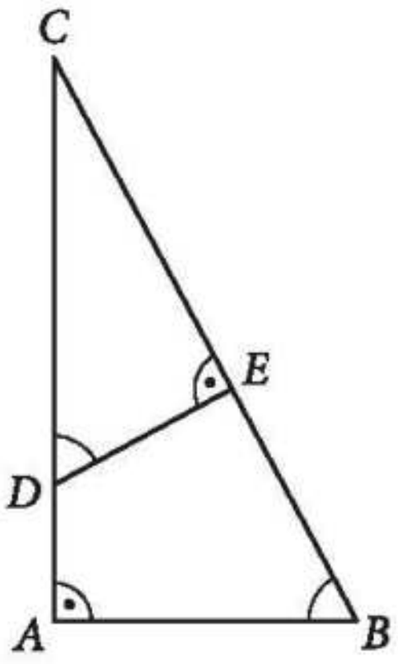
$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = \frac{r}{c} \longleftarrow \text{bok } c \text{ leży naprzeciwko kąta } \gamma, \text{ zatem w trzecim liczniku wpisujemy } r$$



$\triangle ABC \sim \triangle NMR$

Przykład 4

Prostokątne trójkąty ABC i EDC, takie jak na rysunku obok, mają równe kąty: kąt prosty i wspólny kąt przy wierzchołku C, więc również kąt B jest równy kątowi D. Zatem trójkąty te są podobne: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Zapiszemy, które z boków są proporcjonalne.



$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{\boxed{?}}{|BC|} = \frac{\boxed{?}}{|AC|} \longleftarrow \text{bok } DE \text{ leży naprzeciwko kąta } C$$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{\boxed{?}}{|AC|} \longleftarrow \text{bok } DC \text{ leży naprzeciwko kąta prostego}$$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|AC|} \longleftarrow \text{bok } EC \text{ leży naprzeciwko kąta } D, \text{ który jest równy kątowi } B$$

Własności trójkątów podobnych

Do wykazywania podobieństwa figur użyteczne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

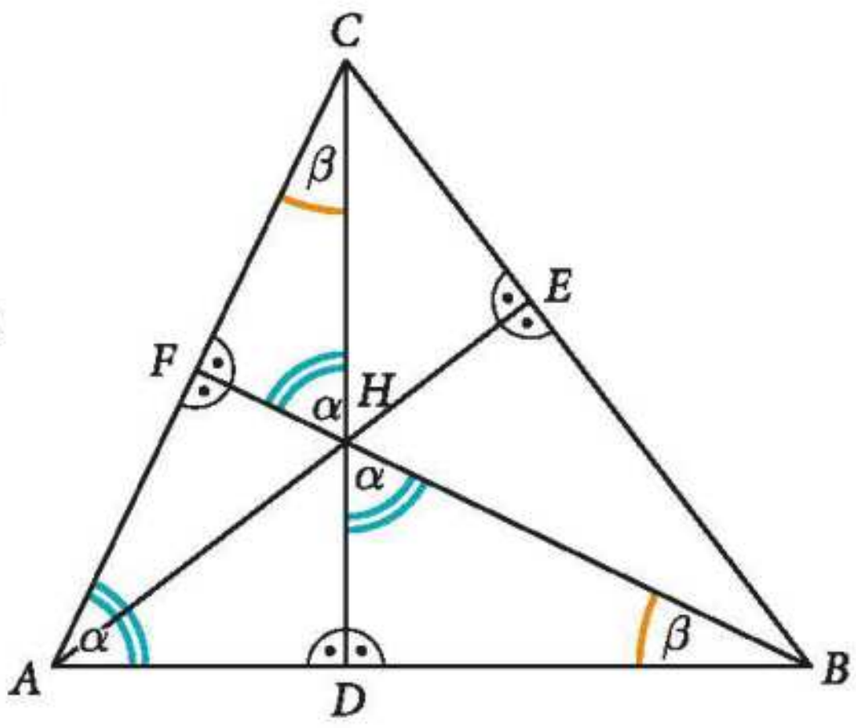
Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 i figura F_2 jest podobna do figury F_3, to F_1 jest podobna do F_3.

Przykład 5 ◀ zad. 8.8

W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE, BF i CD. Wskażemy trójkąty podobne do trójkąta ADC i wypiszemy odpowiednie proporcje boków.

Rozwiązanie

Będziemy korzystać z równości kątów (nie mamy żadnych informacji o długościach boków). Jeśli kąt CAD oznaczymy literą α, a kąt ACD – literą β, to w trójkącie ADC mamy $\beta = 90° - \alpha$ jako dopełnienie do 180°.



Zatem:

- w prostokątnym trójkącie HFC:
  $\sphericalangle FHC = \alpha$
- w prostokątnym trójkącie HDB:
  $\sphericalangle DHB = \alpha$ ⟵ kąt wierzchołkowy do kąta FHC
  $\sphericalangle DBH = \beta$ ⟵ jako dopełnienie do 180°

Kąty α, 90° i β ma również trójkąt AFB.
Mamy zatem rodzinę trójkątów podobnych:

$$\triangle ADC \sim \triangle HFC \sim \triangle HDB \sim \triangle AFB$$

Wypiszemy proporcje boków par trójkątów podobnych, z których jeden jest trójkątem ADC.

$$\frac{|HF|}{|AD|} = \frac{|FC|}{|DC|} = \frac{|HC|}{|AC|}$$ ⟵ z podobieństwa trójkątów ADC i HFC

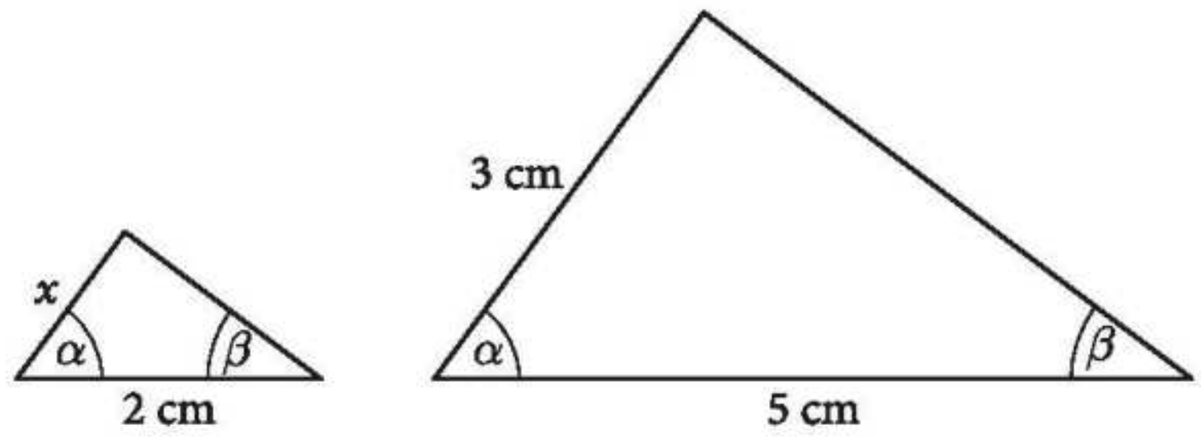
$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|HB|}{|AC|}$$ ⟵ z podobieństwa trójkątów ADC i HDB

$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|FB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$ ⟵ z podobieństwa trójkątów ADC i AFB

Analogicznie możemy zapisać proporcje dla pozostałych par trójkątów podobnych: HFC i HDB, HFC i AFB, HDB i AFB.

Przykład 6 ◀ zad. 8.10

Trójkąty na rysunku obok są podobne. Wyznaczymy x.



Rozwiązanie

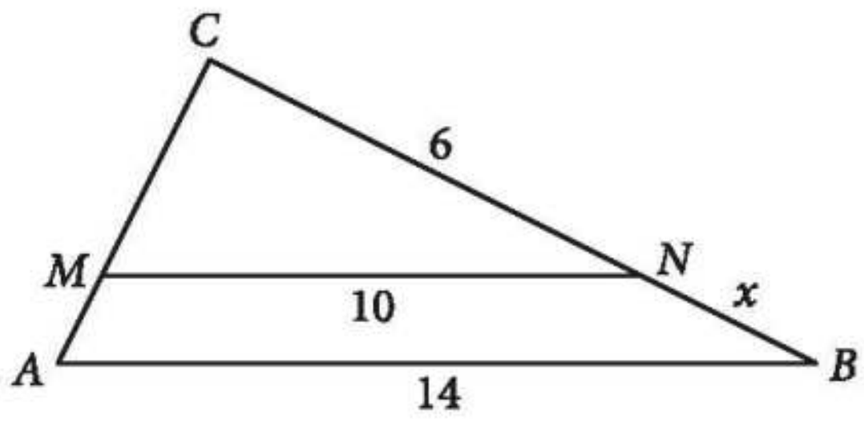
Boki są proporcjonalne, zatem:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{5}, \text{ stąd } x = \frac{6}{5}$$

Odp.: $x = 1{,}2$ cm

Przykład 7 ◀ zad. 8.11

Odcinek MN jest równoległy do AB (zob. rysunek). Wyznaczymy x.



Rozwiązanie

$\sphericalangle CMN = \sphericalangle CAB$ ⟵ kąty odpowiadające

$\sphericalangle MNC = \sphericalangle ABC$ ⟵ kąty odpowiadające

$\triangle MNC \sim \triangle ABC$ ⟵ cecha kk podobieństwa trójkątów

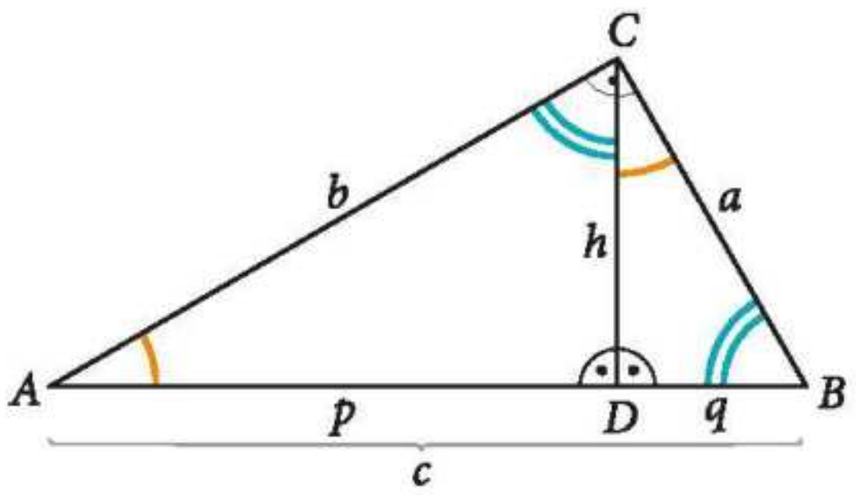
$\frac{|AB|}{|MN|} = \frac{|BC|}{|NC|}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów ABC i MNC

$\frac{14}{10} = \frac{x+6}{6}$, stąd $10(x+6) = 6 \cdot 14$

Odp.: $x = 2{,}4$

Jeżeli w trójkącie prostokątnym poprowadzimy wysokość z wierzchołka kąta prostego, to z równości kątów wynika, że każdy z dwóch małych trójkątów jest podobny do dużego. Mamy zatem:

$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Możemy zapisać następujące proporcje:

- $\frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{p}{b}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów DAC i CAB
- $\frac{a}{c} = \frac{q}{a} = \frac{h}{b}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów DCB i CAB
- $\frac{a}{b} = \frac{q}{h} = \frac{h}{p}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów DCB i DAC

Zauważmy, że z proporcji $\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$ wynika równość $h^2 = pq$.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Jeżeli $w \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$, to liczbę $m = \sqrt{w \cdot z}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb w i z. Dlatego mówimy, że w trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na które ta wysokość dzieli przeciwprostokątną: $h = \sqrt{pq}$.

Przykład 8 ◀ zad. 8.14

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $a = 3$ cm i $b = 4$ cm. Obliczymy wysokość h poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

Rozwiązanie

Skorzystamy z wyprowadzonej wyżej proporcji dla trójkąta prostokątnego ABC:

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$$

w którym $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zatem:

$$h = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Odp.: Wysokość ma 2,4 cm.

Przykład 9

Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 2 cm i 4 cm. Skonstruujemy taki trójkąt.

Rozwiązanie

Pokażemy dwa sposoby rozwiązania zadania.

I sposób

Możemy skorzystać z wyprowadzonego związku i obliczyć wysokość:

$$h = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}\ [\text{cm}]$$

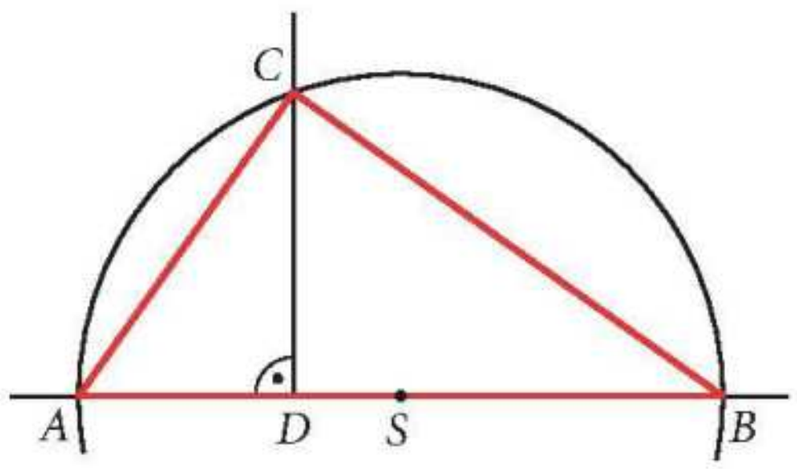
a następnie skonstruować odcinek h (np. jako przekątną kwadratu o boku 2 cm). Dalsze rozwiązanie pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

II sposób

Wiemy, że kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty. Jeżeli narysujemy okrąg, którego średnicą jest przeciwprostokątna (jej długość to 2 cm + 4 cm = 6 cm), to szukany wierzchołek kąta prostego będzie leżał na tym okręgu.

Oto etapy konstrukcji.

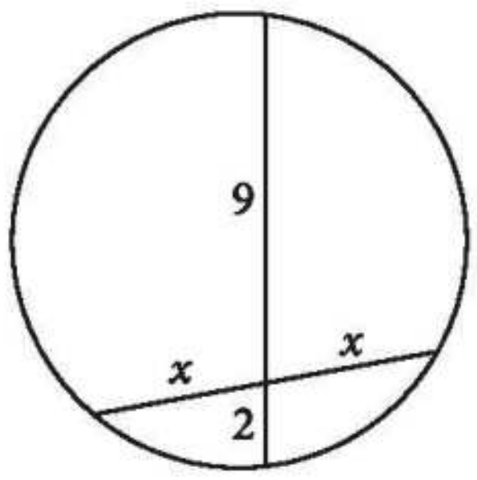
- Na prostej odmierzamy kolejno dwa dane odcinki ($|AD| = 2$ cm i $|DB| = 4$ cm), ich suma jest przeciwprostokątną szukanego trójkąta.
- Znajdujemy środek S przeciwprostokątnej.
- Rysujemy półokrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = |SA|$.
- Z punktu D wystawiamy prostopadłą do AB. Jej punkt przecięcia z półokręgiem jest szukanym wierzchołkiem C trójkąta.
- Rysujemy boki AC i BC szukanego trójkąta.



Do wykonania konstrukcji drugą metodą nie musimy obliczać wysokości trójkąta.

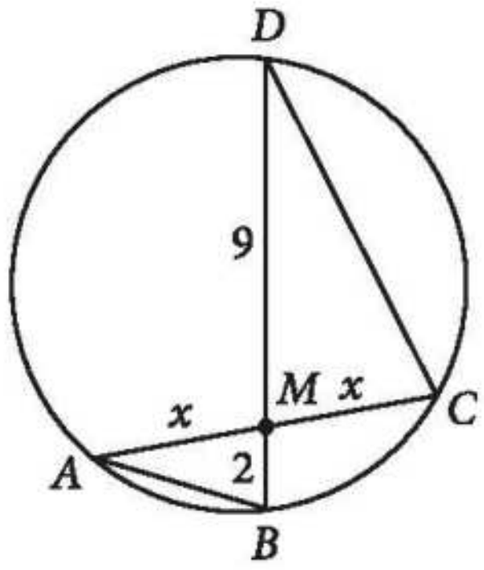
Przykład 10 ◂ zad. 8.23

Dwie cięciwy okręgu przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich na odcinki o długościach podanych na rysunku. Obliczymy x.



Rozwiązanie

Uzupełniamy rysunek takimi dwoma odcinkami, aby występujące w treści zadania części cięciw były bokami pewnych trójkątów.



Wprowadzamy oznaczenia literowe wierzchołków tych trójkątów.

$\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$ ⟵ kąty wierzchołkowe

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ ⟵ kąty wpisane oparte na łuku BC

$\triangle ABM \sim \triangle DCM$ ⟵ cecha kk podobieństwa trójkątów

$\frac{x}{2} = \frac{9}{x}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów ABM i DCM

$x^2 = 9 \cdot 2$ (i $x > 0$)

Odp.: $x = 3\sqrt{2}$

Środek ciężkości trójkąta

Zanim wprowadzimy pojęcie środka ciężkości trójkąta, udowodnimy pomocnicze twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

Twierdzenie

Twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.

Założenie

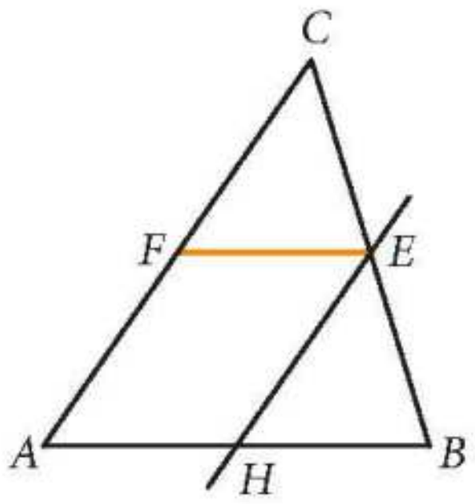
Trójkąt ABC jest dowolny.

Teza

- Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku.
- Długość tego odcinka jest równa połowie długości trzeciego boku.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Punkty E i F są środkami boków BC i AC trójkąta, więc $\frac{|BE|}{|EC|} = 1 = \frac{|AF|}{|FC|}$. Zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $FE \parallel AB$, czyli pierwszy punkt tezy został udowodniony.

Teraz przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do boku AC – przecina ona bok AB w punkcie oznaczonym literą H. Skoro E jest środkiem BC, to na mocy twierdzenia Talesa punkt H jest środkiem AB, a ponadto czworokąt $AHEF$ jest równoległobokiem. Zatem:

$$|EF| = |AH| = \frac{1}{2}|AB|$$

Koniec dowodu

Przypomnijmy, że środkowa trójkąta jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Twierdzenie

Twierdzenie o środkowych w trójkącie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1 (licząc od wierzchołka).

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.

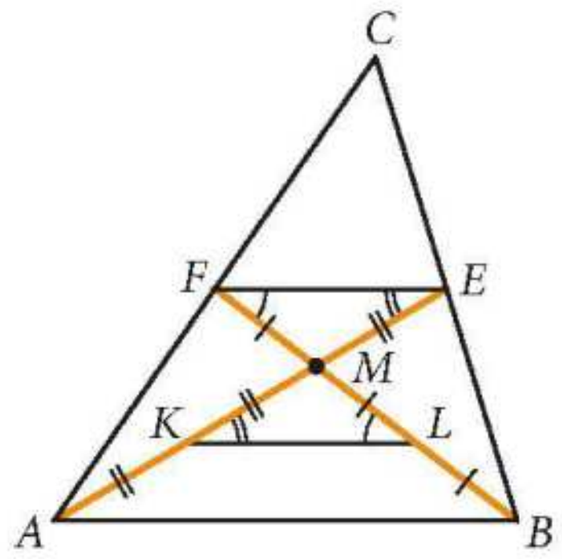
Teza

- Trzy środkowe trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.
- Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.

Dowód

Poprowadźmy w trójkącie ABC dwie środkowe np. z wierzchołków A i B, oraz oznaczmy ich punkt przecięcia literą M. Pokażemy, że punkt M spełnia wymagania tezy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Punkty E i F są odpowiednio środkami odcinków BC i AC, zatem na mocy twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta mamy:



$$EF \parallel AB \text{ oraz } |EF| = \frac{1}{2}|AB|$$

Jeśli L i K oznaczają odpowiednio środki boków BM i AM w trójkącie ABM, to na mocy tego samego twierdzenia mamy:

$$LK \parallel AB \text{ oraz } |LK| = \frac{1}{2}|AB|$$

czyli

$$LK \parallel EF \text{ oraz } |LK| = |EF|$$

$$\sphericalangle MKL = \sphericalangle MEF \longleftarrow \text{kąty naprzemianległe}$$

$$\sphericalangle KLM = \sphericalangle MFE \longleftarrow \text{kąty naprzemianległe}$$

Zatem $\triangle MKL \equiv \triangle MEF$ na mocy cechy kbk przystawania trójkątów.

Stąd $|FM| = |ML| = \frac{1}{2}|MB|$ oraz $|EM| = |MK| = \frac{1}{2}|MA|$.

Środkowe AE i BF podzieliły się zatem w żądanej proporcji $2:1$.

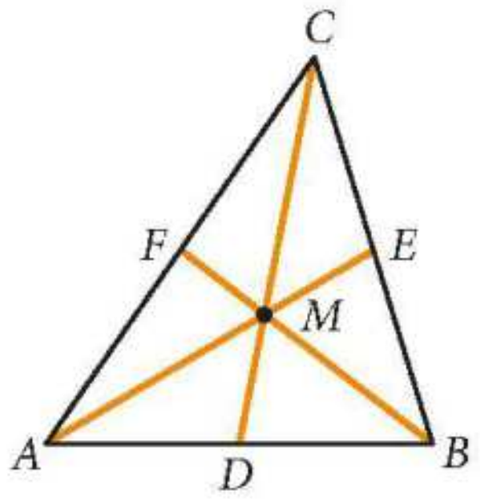
Identyczny dowód możemy przeprowadzić dla innej pary środkowych, np. AE i CD. Wniosek będzie taki sam – obydwie środkowe dzielą się w proporcji $2:1$. Oznacza to, że środkowa CD przetnie AE w wyznaczonym poprzednio punkcie M.

Zatem punkt M spełnia wszystkie warunki tezy, czyli jest środkiem ciężkości trójkąta ABC.

Koniec dowodu

Zgodnie z podanym twierdzeniem środek ciężkości M trójkąta ABC dzieli jego środkowe AE, BF i CD w taki sposób, że:

$$|AM| = 2 \cdot |ME|$$
$$|BM| = 2 \cdot |MF|$$
$$|CM| = 2 \cdot |MD|$$



Środek ciężkości trójkąta ma ciekawą interpretację fizyczną. Załóżmy, że figura w kształcie trójkąta jest wykonana z jednorodnego materiału. Jeśli położymy ją na ostrej podpórce ustawionej pod środkiem ciężkości, to płaszczyzna trójkąta pozostanie pozioma.

Z twierdzenia o środkowych wynikają istotne zależności miarowe w trójkącie równobocznym.

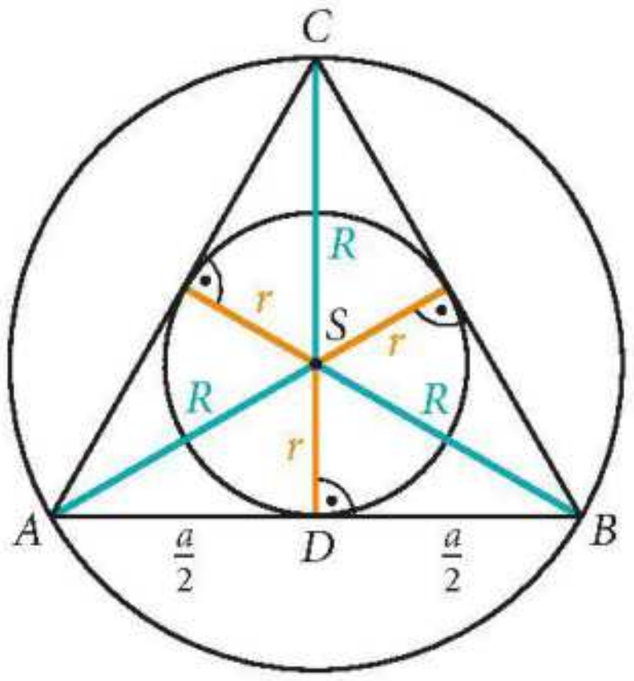
Twierdzenie

W trójkącie równobocznym o boku długości a:

- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Osie symetrii trójkąta równobocznego pokrywają się z symetralnymi boków tego trójkąta i zawierają jego środkowe, dwusieczne kątów oraz wysokości.
Zatem środek ciężkości S trójkąta równobocznego jest również środkiem okręgu wpisanego (punkt przecięcia dwusiecznych), środkiem okręgu opisanego (punkt przecięcia symetralnych) oraz ortocentrum (punkt przecięcia wysokości).



$$|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \longleftarrow \text{wysokość trójkąta równobocznego}$$
$$r = |DS| = \frac{1}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \longleftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$
$$R = |SC| = \frac{2}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \longleftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

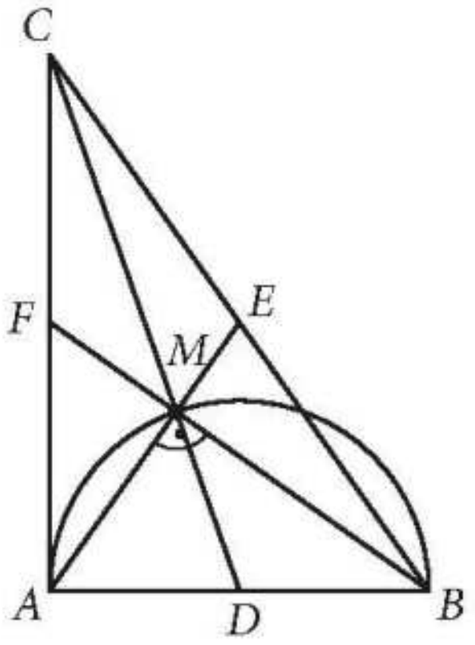
Koniec dowodu

Przykład 11 ◀ zad. 8.33

W trójkącie ABC środkowa AE przecina pod kątem prostym środkową BF w punkcie M. Wiemy, że $|AE| = 9$ oraz $|BF| = 12$. Wyznaczymy długość trzeciej środkowej.

Rozwiązanie

Kąt AMB jest prosty, zatem AB jest średnicą półokręgu, do którego należy punkt M (zob. rysunek).



Na mocy twierdzenia o środkowych w trójkącie wiemy, że środkowa CD łącząca wierzchołek C ze środkiem D boku AB zawiera punkt M. Zatem odcinek DM ma długość równą promieniowi półokręgu.

$$|AM| = \frac{2}{3}|AE| = 6 \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

$$|BM| = \frac{2}{3}|BF| = 8 \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

$$|AB| = \sqrt{|BM|^2 + |AM|^2} = \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

$$= \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$|DM| = \frac{1}{2}|AB| = 5 \qquad \longleftarrow \text{promień półokręgu}$$

$$|DC| = 3 \cdot |DM| = 15 \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

Odp.: $|DC| = 15$

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Wskaż długości boków trójkąta podobnego do trójkąta o bokach 14 cm, 10 cm i 12 cm.

A. 28 cm, 20 cm, 22 cm
B. 12 cm, 8 cm, 10 cm
C. 7 cm, 5 cm, 6 cm
D. 17 cm, 13 cm, 15 cm

8.2. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE tak, że punkt D leży na boku AC, a punkt E – na boku AB. Odcinek DE jest równoległy do BC. Wiadomo, że $|DC| = 14$, $|AC| = 22$ i $|BC| = 31$. Wskaż długość odcinka DE.

A. 19,8
B. 11,3
C. $19\frac{8}{11}$
D. $11\frac{3}{11}$

8.3. W dwóch trójkątach równoramiennych kąty między ramionami są równe. Podstawa i opuszczona na nią wysokość jednego trójkąta mają odpowiednio 4 dm i 7 dm, a podstawa drugiego trójkąta ma długość 8 dm. Ile wynosi pole drugiego trójkąta?

A. 56 dm^2 **B.** 7 dm^2 **C.** 16 dm^2 **D.** 28 dm^2

8.4. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE równolegle do boku AB. Punkt D leży na boku AC, a punkt E – na boku BC. Wiadomo, że $|AB| = 9$, $|DE| = 3$, $|BE| = 4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $|CE| = 7$

B. $|CE| = 2$

C. Jest za mało danych, aby wyznaczyć długość boku CE.

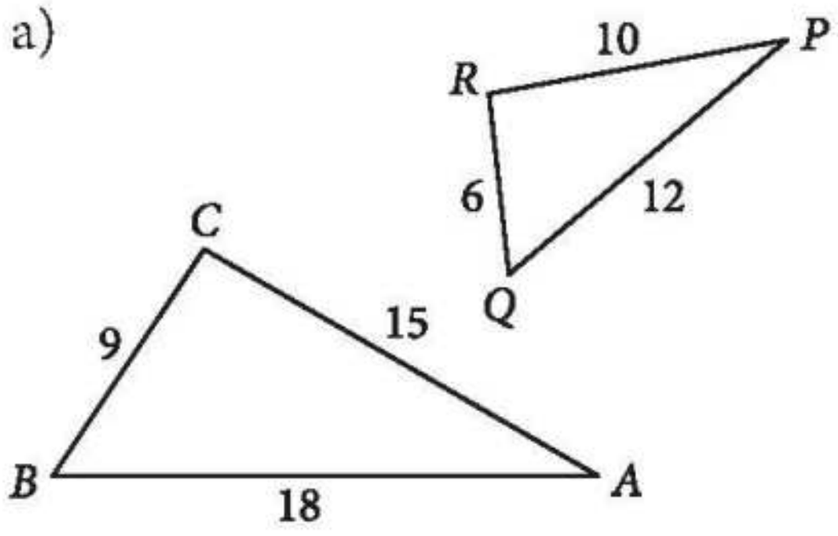
8.5. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach e, f, g.

a) $a = 4,\ b = 3,\ c = 5$
$e = 3,\ f = 1{,}5,\ g = 2$

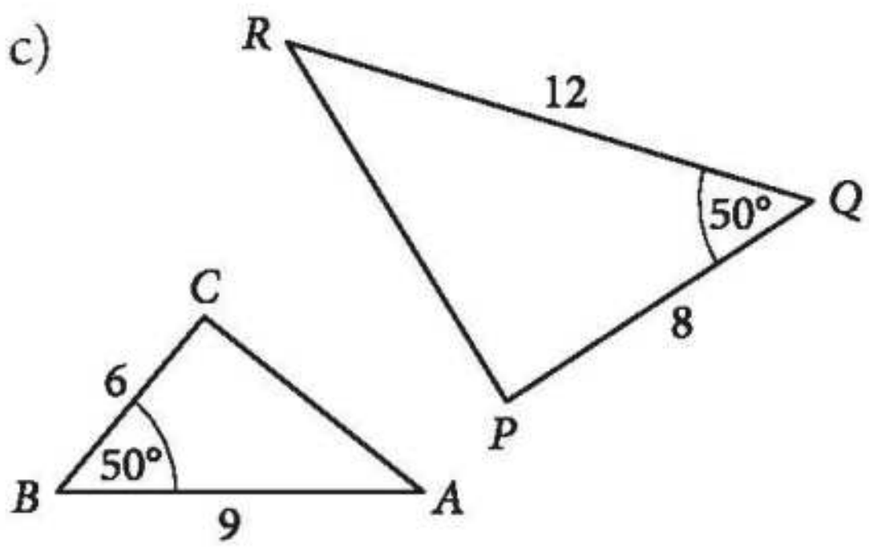
b) $a = 15,\ b = 20,\ c = 7$
$e = 10,\ f = 3{,}5,\ g = 7{,}5$

8.6. Sprawdź, czy trójkąty ABC i PQR są podobne.

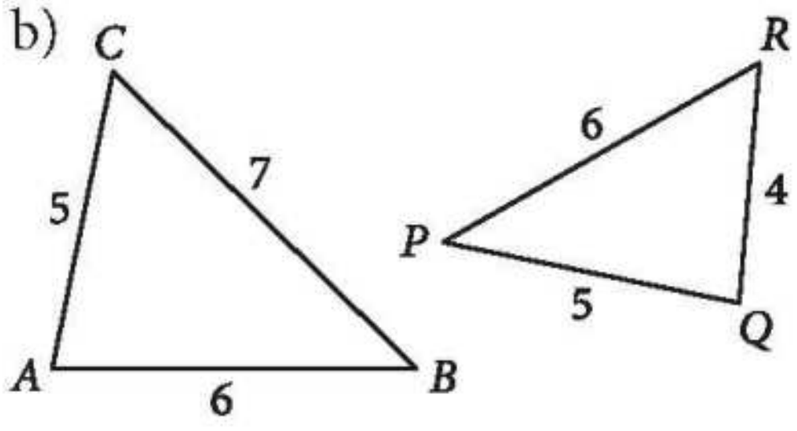
a)



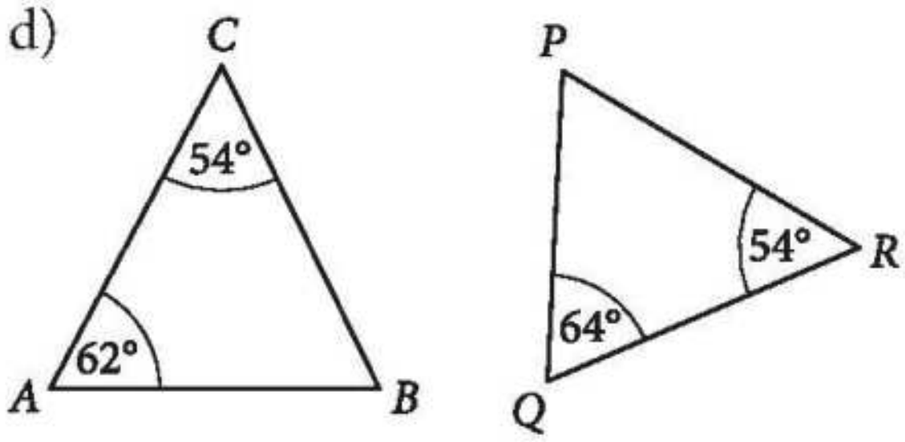
c)



b)



d)



8.7. Trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach a_1, b_1, c_1 tak, że boki a, b, c są proporcjonalne odpowiednio do boków a_1, b_1, c_1. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

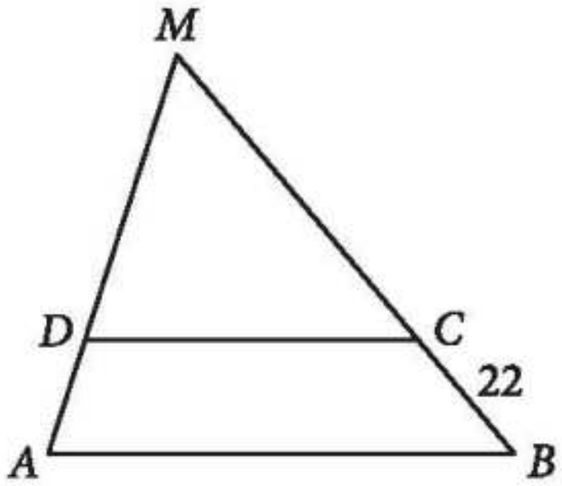
	a	b	c	a_1	b_1	c_1
a)	12	3	11	?	?	$7\frac{1}{3}$
b)	7	?	$2\frac{1}{2}$	?	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$

8.8. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AK, BL i CM. Punkt przecięcia wysokości oznaczono H. Znajdź trójkąty podobne do podanego trójkąta.
a) AMC b) CLB c) CHK

8.9. Drzewo rzuca cień 6 razy dłuższy od cienia Wojtka mierzącego 172 cm wysokości. Jaka jest wysokość drzewa?

8.10. Boki trójkąta ABC są równe 8 cm, 10 cm i 11 cm. Najdłuższy bok trójkąta PQR, podobnego do trójkąta ABC, ma 33 cm. Wyznacz pozostałe boki trójkąta PQR.

8.11. Stosunek podstaw w trapezie $ABCD$ przedstawionym na rysunku jest równy $|AB| : |CD| = 7 : 5$. Ramię BC ma długość 22 cm. Oblicz długość odcinka CM.



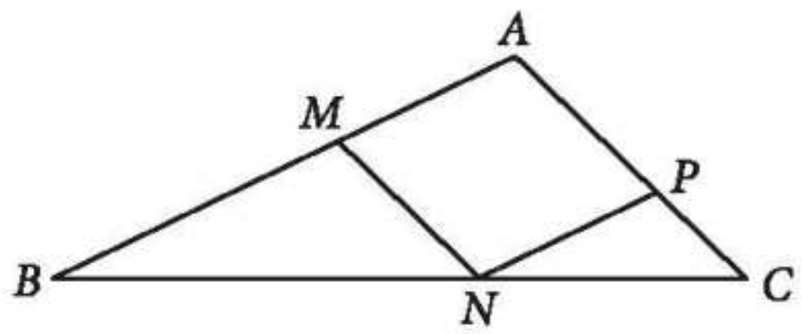
8.12. Trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AC| = 8$ i $|BC| = 6$ jest podobny do trójkąta, którego jeden z boków ma długość równą 6. Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta.

8.13. W trójkącie ABC poprowadzono równolegle do boku AB odcinek DE tak, że punkt D leży na boku AC, a punkt E – na boku BC. Wyznacz x.
a) $|AC| = 10$, $|DC| = 4$, $|DE| = 5$, $|AB| = x$
b) $|AB| = 10$, $|DE| = 5$, $|DC| = 7$, $|AD| = x$

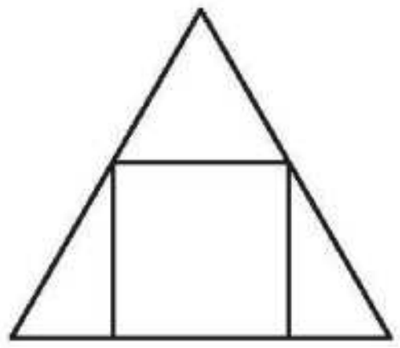
8.14. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma 36 cm. Dzieli ona przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku 4 : 9. Oblicz długości boków tego trójkąta.

8.15. Podziel prostokąt dwoma odcinkami na trzy trójkąty podobne.

D * **8.16.** W trójkąt ABC wpisany jest romb $AMNP$ jak na rysunku. Wykaż, że $|AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}$.



* **8.17.** W trójkąt równoboczny o boku 12 cm wpisano kwadrat jak na rysunku. Wyznacz długość boku kwadratu.



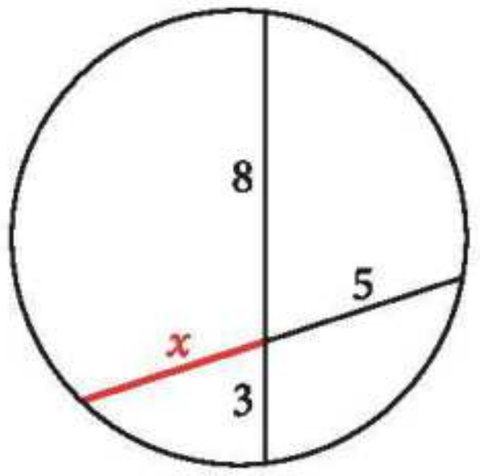
* **8.18.** Trójkąt T_1 jest podobny do trójkąta T_2 w skali k, a trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali $4k$. Ile wynosi k?

* **8.19.** W równoramiennym trójkącie ABC podstawa AB jest równa 12 cm, a ramiona AC i BC mają po 10 cm. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z ramionami trójkąta.

D **8.20.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wykaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w tym trójkącie dzieli przeciwprostokątną w stosunku 1 : 4.

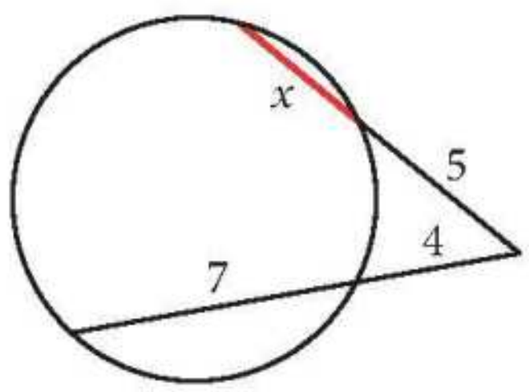
8.21. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych $|AB| = 12$ cm i $|BC| = 4$ cm. Prosta prostopadła do boku AB rozcina trójkąt ABC na dwie figury o równych polach. Oblicz długość wspólnego boku tych figur.

8.22. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 cm i 6 cm, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 1 : 3. Oblicz długości odcinków drugiej cięciwy.



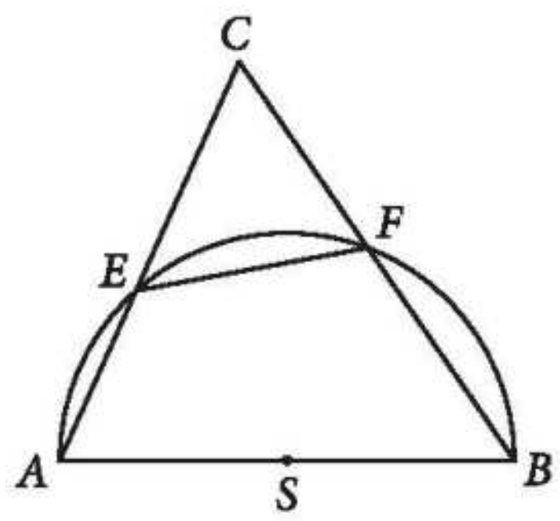
8.23. Dane są okrąg i jego dwie cięciwy jak na rysunku. Oblicz x.

D **8.24.** Z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzono prostą k styczną do tego okręgu w punkcie A i prostą l przecinającą okrąg w punktach B i C.
Wykaż, że $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$.



8.25. Dane są okrąg i dwa odcinki o wspólnym końcu jak na rysunku. Oblicz x.

D **8.26.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku S, jak na rysunku. Punkty E i F są punktami przecięcia okręgu odpowiednio z odcinkami AC i BC. Wykaż, że trójkąt FEC jest podobny do trójkąta ABC.



D **8.27.** Wykaż, że jeżeli dwa trójkąty wpisane w ten sam okrąg są podobne, to są przystające.

8.28. Na okręgu o promieniu $15\sqrt{5}$ opisano kwadrat $ABCD$. Środek E boku DC połączono z wierzchołkiem A odcinkiem, który przecina okrąg w punkcie M. Oblicz długość odcinka EM.

D **8.29.** Przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ poprowadzono prostą, która przecięła przekątną BD w punkcie K, prostą DC w punkcie M oraz prostą BC w punkcie P. Udowodnij, że $|AK|^2 = |KP| \cdot |KM|$.

8.30. Na płaszczyźnie dane są trzy niewspółliniowe punkty. Skonstruuj trójkąt, w którym te trzy punkty są środkami boków.

8.31. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest prosty. Środkowa BD o długości 6 cm dzieli ten kąt tak, że $\sphericalangle DBA : \sphericalangle CBD = 2 : 1$. Oblicz miary kątów, długości boków i pole tego trójkąta.

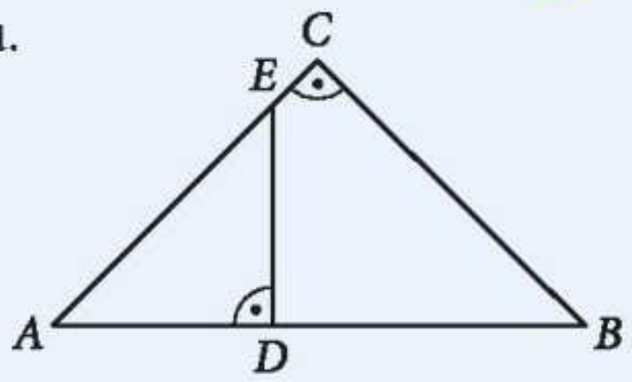
8.32. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16, a każde z ramion ma długość 17. Oblicz długości środkowych tego trójkąta.

8.33. Środkowe trójkąta równoramiennego mają długości 120, 87, 87. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

D **8.34.** W trójkącie ABC środkowa CD jest równa połowie boku AB. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Prosto do matury

1. W trójkącie ABC dane są punkty D i E jak na rysunku. Oceń prawdziwość podanych zależności.

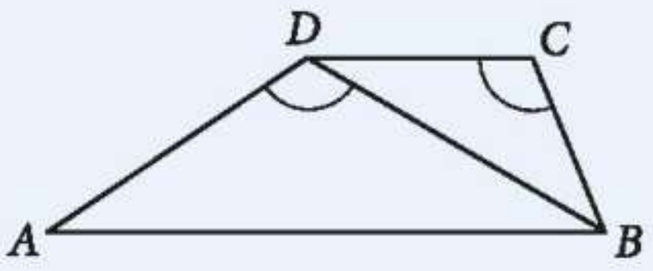


A. $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$ B. $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ C. $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$

D **2.** W trójkącie ABC kąt ACB jest prosty. Na przyprostokątnych AC i BC tego trójkąta obrano odpowiednio punkty Q i P. Na boku AB wyznaczono punkty R i S takie, że odcinki QR i PS są prostopadłe do przeciwprostokątnej. Udowodnij, że trójkąty ARQ i PSB są podobne.

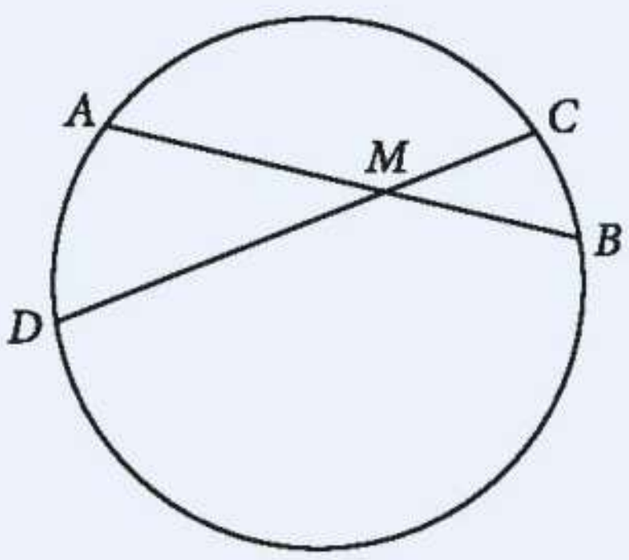
3. W trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i wysokości 8 cm wpisano okrąg i poprowadzono styczną do niego równoległą do podstawy trójkąta. Oblicz promień okręgu i długość odcinka stycznej zawartego w trójkącie.

4. W trapezie $ABCD$ długość podstawy CD jest równa 18, a długości ramion AD i BC są odpowiednio równe 25 i 15. Kąty ADB i DCB, zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.



D **5.** Cięciwy AB i CD w okręgu przecinają się w punkcie M jak na rysunku. Wykaż, że:

$$|MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$$



9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–22 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, miara kąta CAB wynosi 70°. Odcinek BD zawiera się w dwusiecznej kąta ABC. Odcinek BE jest wysokością opuszczoną z wierzchołka B. Wskaż miarę kąta EBD.

A. 20° **B.** 18° **C.** 15° **D.** 10,1°

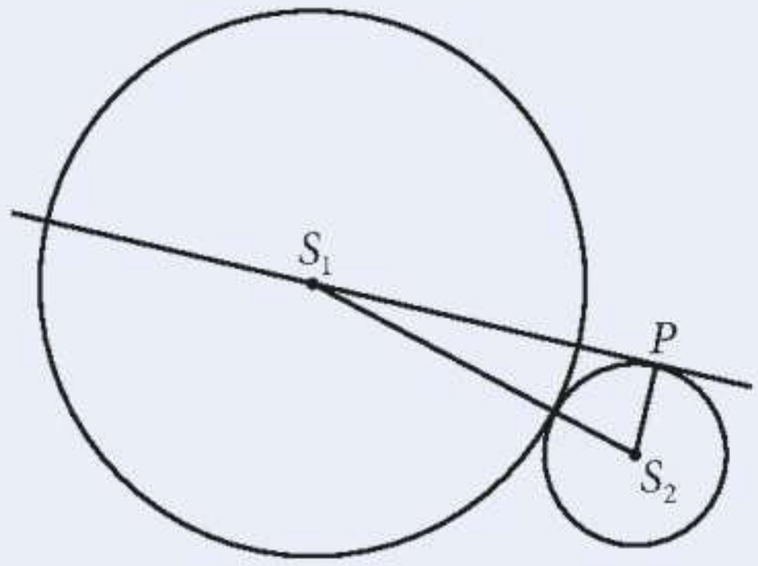
2. Z odcinków o długościach: 1, $m+4$, $2m+1$ można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że

A. $m = -3$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

3. Pięciokąt $ABCDE$ jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ACE.

A. $\triangle ECD$ **B.** $\triangle BCD$ **C.** $\triangle BCE$ **D.** $\triangle ABC$

4. Okręgi o środkach S_1 i S_2 oraz promieniach odpowiednio 3 i 1 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do mniejszego okręgu w punkcie P przechodzi przez środek S_1 większego okręgu (zob. rysunek). Wskaż obwód trójkąta S_1S_2P.



A. 8,8 **C.** $5\sqrt{15}$

B. $5 + \sqrt{15}$ **D.** $15 + \sqrt{5}$

5. Ile wynosi promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 10 cm i 24 cm?

A. 17 cm **B.** 13 cm **C.** 12 cm **D.** 5 cm

6. Kąt wpisany w okrąg jest o 70° mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 35° **B.** 70° **C.** 110° **D.** 140°

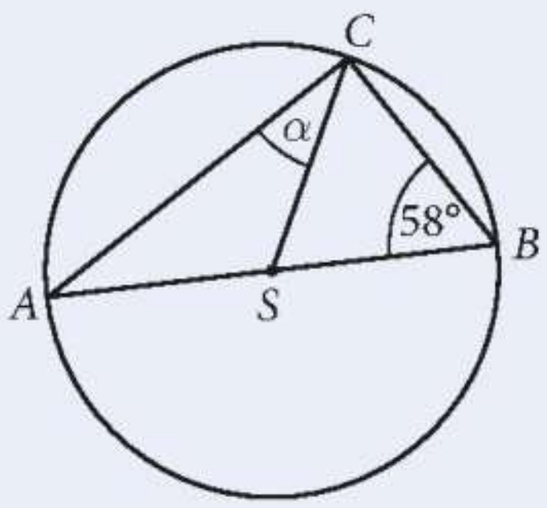
7. Jaką miarę ma kąt wypukły utworzony przez wskazówki zegara o godzinie 10^{20}?

A. 150° **B.** 165° **C.** 170° **D.** 180°

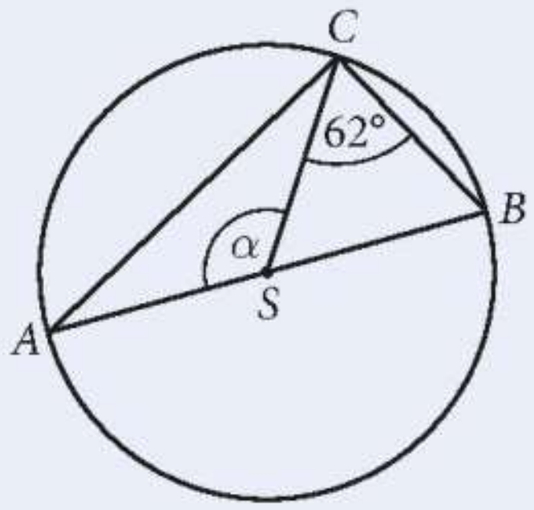
8. Na rysunku 1 punkt S jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt α?
A. 29° **B.** 30° **C.** 31° **D.** 32°

9. Na rysunku 2 punkt S jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt α?
A. 114° **B.** 118° **C.** 122° **D.** 124°

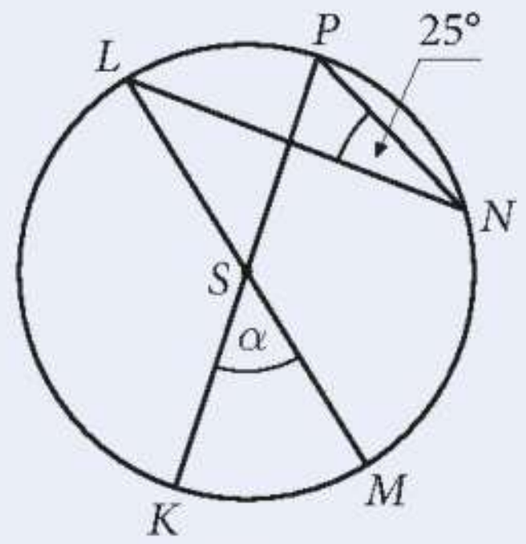
10. Na rysunku 3 punkt S jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt α?
A. 25° **B.** 30° **C.** 40° **D.** 50°



Rys. 1



Rys. 2



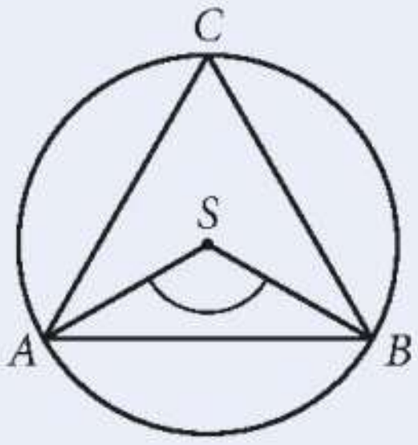
Rys. 3

11. Punkt A leżący na okręgu o środku S jest końcem cięciwy AB oraz punktem styczności okręgu z prostą l. Jeden z dwóch kątów między cięciwą AB a prostą l ma miarę 36°. Jaka jest miara wypukłego kąta środkowego ASB?
A. 18° **B.** 36° **C.** 45° **D.** 72°

12. Cięciwy AB i CD okręgu o środku S przecinają się w punkcie P. Który z wymienionych warunków jest prawdziwy?
A. $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BPD$
B. $\sphericalangle ASD = 2\sphericalangle APD$
C. $2\sphericalangle ABD = \sphericalangle APD$
D. $\sphericalangle DCB = \sphericalangle PAD$

13. Okręgi $o_1(A, r_1)$ i $o_2(B, r_2)$ są styczne zewnętrznie w punkcie C. Przez punkt C poprowadzono prostą przecinającą okrąg o_1 w punkcie K, a okrąg o_2 w punkcie L. Kąt AKC ma miarę 46°. Jaką miarę ma kąt LBC?
A. 44° **B.** 46° **C.** 88° **D.** 134°

14. W okrąg o środku S wpisano trójkąt równoboczny ABC. Wskaż miarę zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB.
A. 160° **B.** 140° **C.** 120° **D.** 30°



15. Punkty A, B, C należą do okręgu o środku w punkcie S. Kąt ABC ma miarę 112°. Jaka jest miara kąta ASC w czworokącie $ABCS$?
A. 68° **B.** 112° **C.** 136° **D.** 224°

16. Dane są trzy koła parami styczne zewnętrznie. Pola tych kół są równe 4π, 9π i 16π. Ile wynosi obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych kół?

A. 15 **B.** 18 **C.** 20 **D.** 25

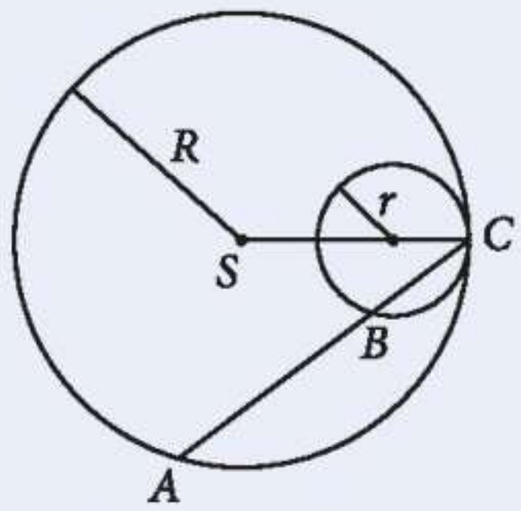
17. Które z podanych zdań jest prawdziwe?

I. Każde dwa prostokąty są podobne.
II. Każde dwa okręgi są podobne.
III. Dwa trójkąty o równym polu są podobne.

A. tylko I **B.** tylko II **C.** tylko III **D.** żadne

18. Okrąg o promieniu $r = 5$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu $R = 15$ jak na rysunku obok. Wiadomo, że $|BC| = 8$. Jaką długość ma cięciwa AC?

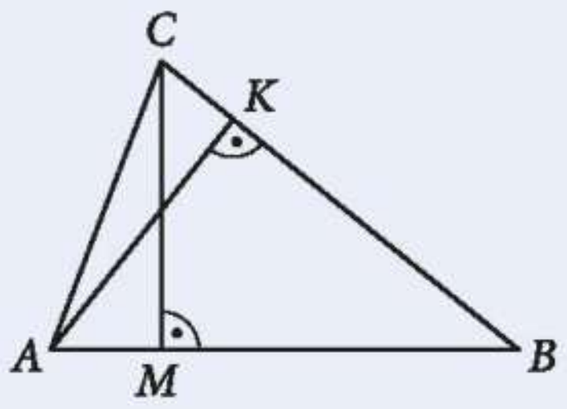
A. 16 **C.** 20
B. 24 **D.** Jest za mało danych, aby to obliczyć.



19. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AK i CM jak na rysunku. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

A. $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|MB|}{|KB|}$ **C.** $\frac{|AB|}{|AK|} = \frac{|BC|}{|CM|}$

B. $\frac{|BK|}{|MB|} = \frac{|AB|}{|CM|}$ **D.** $|MB| \cdot |AK| = |BK| \cdot |CM|$



20. Dwie proste równoległe przecinają ramiona kąta o wierzchołku w punkcie O. Na jednym ramieniu tego kąta powstały odcinki OA i AB równej długości, a na drugim odcinki OC i CD (punkt C leży między punktami O i D). Odcinek BD ma długość $12\frac{1}{3}$. Wskaż długość odcinka AC.

A. $12\frac{1}{3}$ **C.** $6\frac{1}{6}$

B. $6\frac{2}{3}$ **D.** Jest za mało danych, aby to obliczyć.

21. Trójkąt o bokach długości $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$ jest podobny do trójkąta, którego boki mają długości

A. 27, 48, 75. **B.** 9, 12, 15. **C.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$.

22. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne i mają pola odpowiednio równe 36 cm^2 i 80 cm^2. Wskaż skalę podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC.

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **C.** $2\frac{2}{9}$ **D.** $\frac{9}{20}$

W zadaniach 23–32 oceń prawdziwość podanych zdań.

23. Na pewnym czworokącie można opisać okrąg. Zatem
A. suma przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180°.
B. sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.
C. przekątne tego czworokąta są równe.

24. W czworokącie wypukłym poprowadzono dwusieczne czterech kątów wewnętrznych. Wynika stąd, że
A. dwusieczne te przecinają się w jednym punkcie.
B. dwusieczne dokładnie trzech kątów mogą przeciąć się w jednym punkcie.
C. dwusieczne te mogą nie przecinać się w jednym punkcie.

25. Dane są dwa przystające trójkąty prostokątne. W pierwszym z nich poprowadzono symetralną krótszej przyprostokątnej, a w drugim dłuższej. Symetralne podzieliły każdą z figur na trójkąt i czworokąt. Wynika stąd, że
A. pola otrzymanych czworokątów są równe.
B. obwody otrzymanych czworokątów są równe.
C. oba czworokąty są przystające.

26. W pewnym czworokącie środek okręgu wpisanego pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych. Zatem
A. czworokąt ten musi być rombem.
B. czworokąt ten musi być prostokątem.
C. czworokąt ten musi mieć środek symetrii.

27. W trójkącie ABC wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C są równe. Wynika stąd, że
A. środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na wysokości poprowadzonej z wierzchołka B.
B. wszystkie wysokości trójkąta ABC są równe.
C. trójkąt ABC jest ostrokątny.

28. Boki czworokąta wypukłego mają kolejno długości 1, 2, 4, 3. Zatem
A. na tym czworokącie można opisać okrąg.
B. w ten czworokąt można wpisać okrąg.
C. jeden z kątów tego czworokąta jest prosty.

29. W czworokącie wypukłym $ABCD$ literą M oznaczono punkt przecięcia przekątnych. Wiadomo, że $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$. Zatem
A. czworokąt $ABCD$ ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
B. na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
C. pola trójkątów MAB i MCD są równe.

30. Obwód pierwszego prostokąta jest równy 100 cm, a obwód drugiego prostokąta jest o 100 cm większy niż pierwszego. Wynika stąd, że
A. pole drugiego prostokąta jest zawsze większe od pola pierwszego prostokąta.
B. pola obu prostokątów mogą być takie same.
C. pole drugiego prostokąta może być mniejsze od pola pierwszego prostokąta.

31. Czworokąt przekształcono przez podobieństwo, w wyniku czego jego pole wzrosło o 44%. Zatem
A. obwód tego czworokąta wzrósł o 20%.
B. obwód tego czworokąta wzrósł o 22%.
C. skala tego podobieństwa była równa $\sqrt{0{,}44}$.

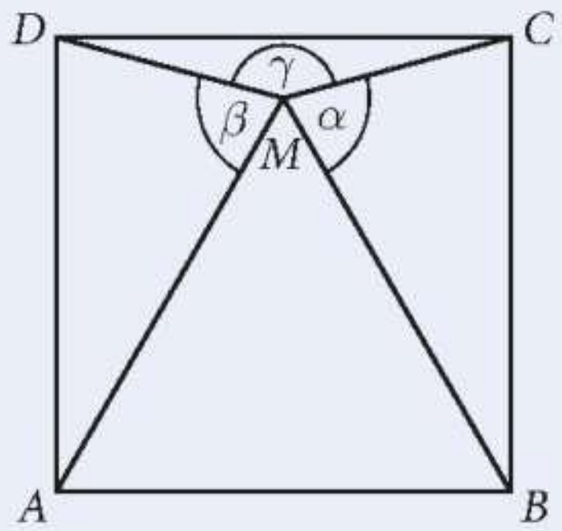
32. Dwie cięciwy AB i CD jednego okręgu przecinają się w punkcie P.
A. Trójkąt ACP jest podobny do trójkąta DBP.
B. Trójkąt ADP jest podobny do trójkąta CBP.
C. Trójkąt ACP jest podobny do trójkąta ADP.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

33. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 40°. Wyznacz miary kątów utworzonych przez dwie różne wysokości tego równoległoboku poprowadzone z jednego wierzchołka.

34. Określ wzajemne położenie okręgów $o_1(A, r_1)$ i $o_2(B, r_2)$.
a) $|AB| = 12 \quad r_1 = 8 \quad r_2 = 3$
b) $|AB| = 8 \quad r_1 = 10 \quad r_2 = 2$
c) $|AB| = 1 \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 5$
d) $|AB| = 6 \quad r_1 = 5 \quad r_2 = 4$

35. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, a trójkąt ABM trójkątem równobocznym (zob. rysunek). Wyznacz miary kątów α, β, γ.



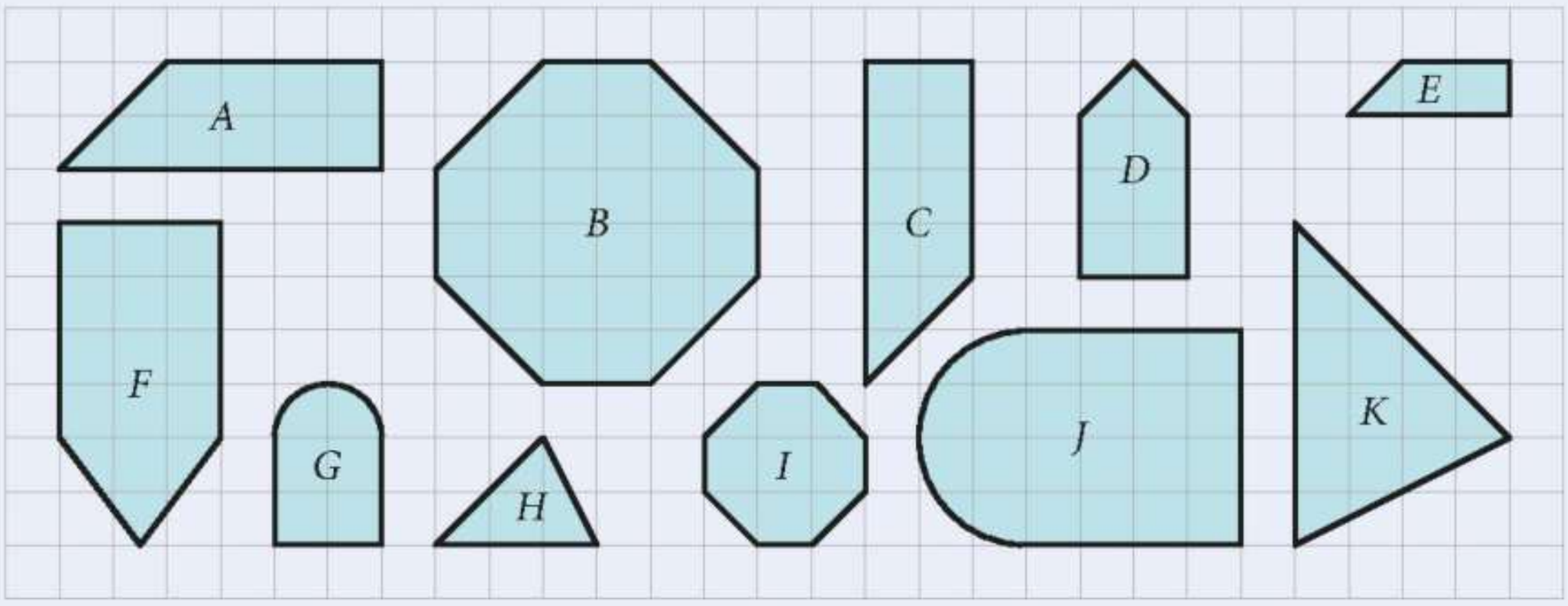
36. Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów o promieniu $r = 4$ stycznych zewnętrznie do okręgu $o(A, 2)$?

37. Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów o promieniu $r = 3$ stycznych wewnętrznie do okręgu $o(A, 7)$?

38. Dane są dwa okręgi $o_1(A, 9)$ i $o_2(A, 5)$. Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów stycznych równocześnie do obydwu tych okręgów?

39. Na trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |CB|$, a kąt między ramieniem i podstawą ma 52°, opisano okrąg o środku S. Wyznacz miarę wypukłego kąta środkowego ASB.

40. Które z narysowanych figur są podobne?



41. Prostokąt o wymiarach 18 cm × 15 cm jest podobny do prostokąta, którego jeden z boków ma długość 6 cm. Oblicz skalę podobieństwa i obwód drugiego prostokąta.

42. Obwody dwóch wielokątów podobnych są równe 80 cm i 60 cm. Długości najkrótszych boków tych wielokątów różnią się o 5 cm. Oblicz te długości.

43. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach e, f, g.

a) $a = 2\sqrt{2},\ b = 3 + \sqrt{2},\ c = 6 - \sqrt{2}$ $\quad$ $e = 2,\ f = 1{,}5\sqrt{2} + 1,\ g = 3\sqrt{2} - 1$

b) $a = 8\frac{2}{3},\ b = 9{,}1,\ c = 17\frac{1}{3}$ $\quad$ $e = 1\frac{1}{3},\ f = 2{,}4,\ g = 2\frac{1}{3}$

44. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, punkt K jest środkiem boku AD. Oblicz stosunek pola trójkąta CKB do pola trapezu $ABCD$.

45. Wielokąt o polu 60 cm^2 przekształcono przez podobieństwo tak, że pole jego obrazu jest o 75 cm^2 większe od pola początkowego wielokąta. Oblicz skalę tego podobieństwa.

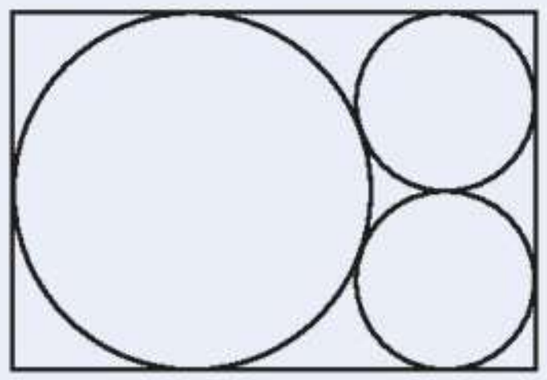
46. Boki trójkąta mają długości 12, 14 i 18. Wyznacz stosunek odpowiednich wysokości opuszczonych na te boki.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

D **47.** Udowodnij, że suma miar kątów n-kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180°$.

D **48.** Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę o długości 18 cm jest równa 12 cm. Wykaż, że średnica tego okręgu wynosi 30 cm.

49. Maszyna wycina kółka z prostokątnych kawałków blachy według wzoru pokazanego na rysunku. Krótszy bok kawałka blachy potrzebnego do wycięcia takich kółek ma długość 60 cm. Oblicz długość dłuższego boku tego prostokąta.



50. Trójkąt ABC o kątach 40°, 60°, 80° wpisano w okrąg, a następnie poprowadzono styczne do tego okręgu odpowiednio w punktach A, B, C. Wyznacz kąty trójkąta utworzonego przez te styczne.

51. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wpisany jest w okrąg o środku S. Wiadomo, że $\sphericalangle BAS = 20°$. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

52. Na okręgu o promieniu 7,5 opisany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C jest równa 20. Oblicz długości boków i pozostałe wysokości tego trójkąta.

53. Dwusieczna kąta A w trójkącie ABC przecina opisany na nim okrąg w punkcie D. Wiadomo, że $\sphericalangle BAC = 60°$ i $\sphericalangle ABC = 80°$. Oblicz miary kątów czworokąta $ABDC$.

54. W kole o środku S i średnicy 16 poprowadzono cięciwę CD równoległą do średnicy AB. Kąt CSD ma miarę 120°. Oblicz pole części koła między cięciwą CD i średnicą AB.

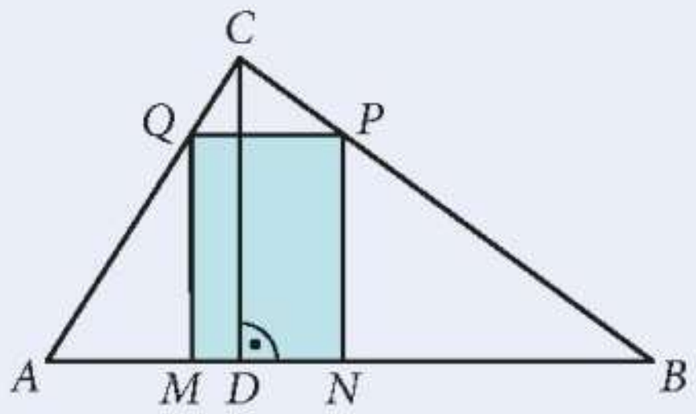
55. Długości boków trójkąta ABC wynoszą 6 cm, 8 cm i 12 cm. Wyznacz obwód trójkąta podobnego do trójkąta ABC, w którym jeden z boków ma długość 12 cm.

56. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o polu 324 cm^2 ma długość 36 cm. Oblicz pole koła stycznego do przyprostokątnych, którego środek leży na przeciwprostokątnej.

57. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę ma 24 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 9 cm. Oblicz pole trójkąta.

58. W trójkąt równoramienny o ramieniu długości 20 cm i wysokości opuszczonej na podstawę równej 16 cm wpisano okrąg. Następnie poprowadzono styczną do okręgu równoległą do podstawy trójkąta. Oblicz
a) długość wpisanego okręgu.
b) długość odcinka stycznej zawartego w trójkącie.

59. W trójkącie ABC poprowadzono wysokość CD jak na rysunku. Wiadomo, że $|AB| = 12$, $|CD| = 6$, $|MN| = 3$. Oblicz pole prostokąta $MNPQ$.



60. Wysokość CD dzieli bok AB trójkąta ABC na dwa odcinki o długościach 36 cm i 14 cm. Prostopadle do boku AB poprowadzono prostą, która dzieli trójkąt na dwie części o równych polach. Jakie są długości odcinków, na które ta prosta dzieli bok AB trójkąta?

D **61.** Udowodnij, że jeżeli czworokąt wypukły ma oś symetrii, to można na nim opisać okrąg lub można wpisać w niego okrąg.

D **62.** Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt. Wykaż, że kąty, pod którymi widać boki tego trójkąta z punktu S, są rozwarte.

D **63.** Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Poprowadzono wysokość CD tego trójkąta. Wykaż, że kąt ACD jest równy kątowi SCB.

D **64.** W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Wykaż, że pola trójkątów ASD i BSC są równe.

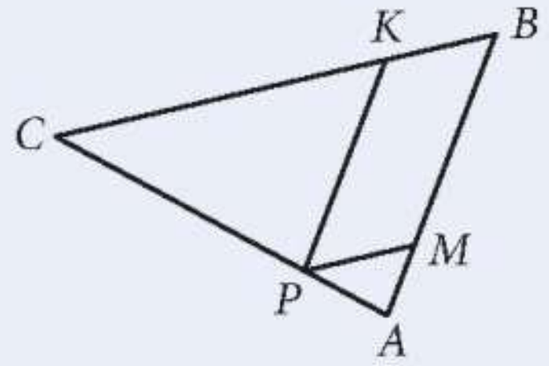
65. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Punkt S dzieli odcinek AC tak, że $|CS| : |SA| = 2 : 3$, a pole trójkąta BCS jest równe 12. Oblicz pole trapezu.

66. W trapezie równoramiennym o polu 135 jedna podstawa jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz pola trójkątów, na jakie dzielą trapez jego przekątne.

67. Pola trzech wielokątów podobnych są równe 80 cm^2, 180 cm^2 i 245 cm^2, a suma obwodów tych figur jest równa 1,7 m. Oblicz obwód najmniejszego wielokąta.

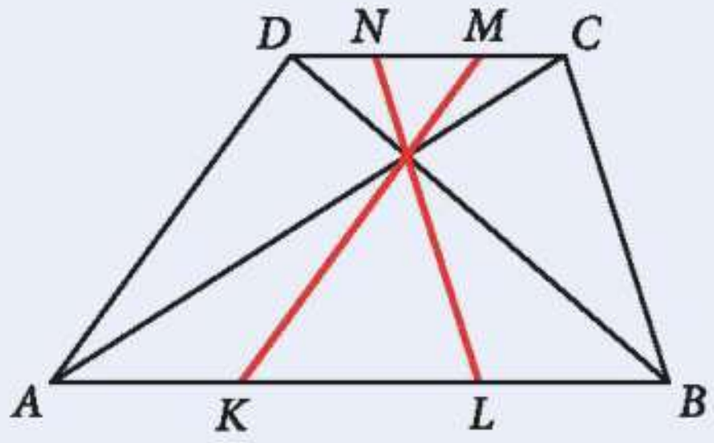
68. Piotr chce narysować na kartce formatu A4 (21 cm × 29,7 cm) możliwie duży plan swojego pokoju, który ma wymiary 2,8 m × 3,6 m. Jaką skalę powinien przyjąć?

69. Proste PK i MP są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC jak na rysunku. Wiadomo, że $|AM| = 4$, $|AP| = 5$, $|PC| = 15$, $|BK| = 6$. Oblicz obwód trójkąta ABC.



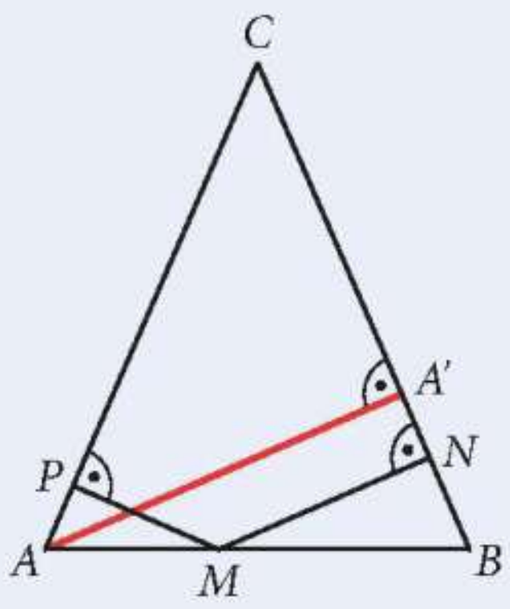
D **70.** Przekątne trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przecinają się w punkcie P. Prosta równoległa do podstaw i przechodząca przez punkt P przecina ramiona trapezu w punktach M i N. Udowodnij, że punkt P jest środkiem odcinka MN.

D * **71.** Proste KM i NL są równoległe do odpowiednich boków trapezu $ABCD$ jak na rysunku. Wykaż, że $|AK| = |LB|$.



D **72.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym ABC kąt pomiędzy wysokością a środkową poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego jest równy różnicy kątów ostrych trójkąta ABC.

D * **73.** W równoramiennym trójkącie ABC, w którym $|AC| = |CB|$, z dowolnie wybranego punktu M podstawy AB poprowadzono odcinki MN oraz MP prostopadłe do ramion BC i AC trójkąta (zob. rysunek). Wykaż, że $|MN| + |MP| = |AA'|$, gdzie AA' jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka A.



74. Na trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |CB|$, opisano okrąg o środku S. Wiadomo, że $\sphericalangle ASB = 80°$. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

75. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 9 i 40.

76. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 6 cm krótszy od boku trójkąta. Wyznacz ten promień.

77. Dany jest romb $ABCD$ o boku 15 i kącie przy wierzchołku A równym 60°. Okrąg opisany na trójkącie ABD przecina przekątną AC w punkcie P. Wyznacz długość odcinka PD.

* **78.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 i kącie między ramionami 150°.

79. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o bokach 18 cm, 15 cm, 15 cm.

D **80.** Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej c. Wykaż, że odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa $\frac{1}{6}c$.

81. Punkt D jest środkiem środkowej AM trójkąta ABC. Punkt F jest takim punktem na boku AB, że odcinek DF jest równoległy do boku AC. Wyznacz stosunek $|AF| : |FB|$.

Funkcje trygonometryczne

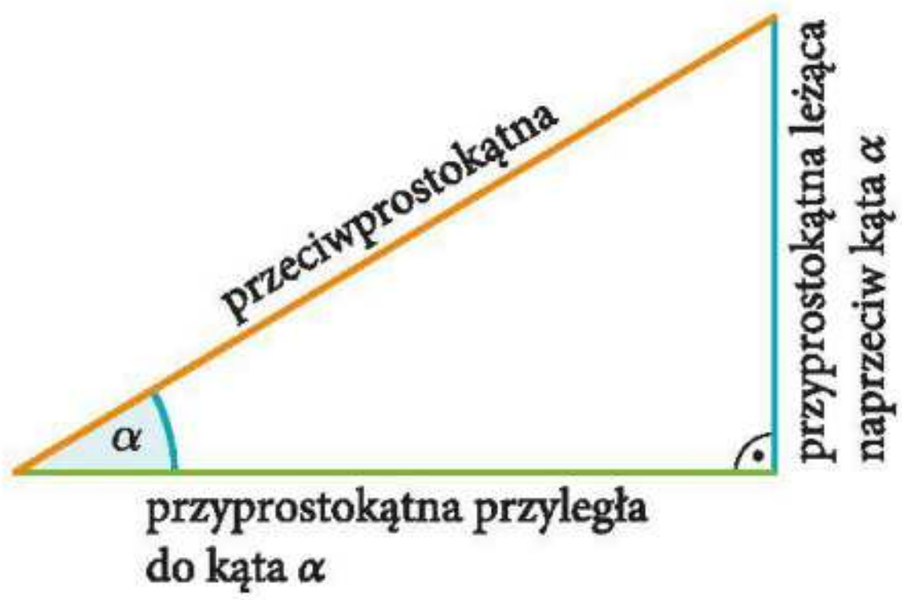
4

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Umiejętności:

- wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych
- obliczanie miary kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość

Popatrzmy na rysunek. Jeżeli α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, to jedno z ramion kąta α jest przyprostokątną (przyległą do kąta α), a drugie przeciwprostokątną. Naprzeciwko kąta α leży druga przyprostokątna.

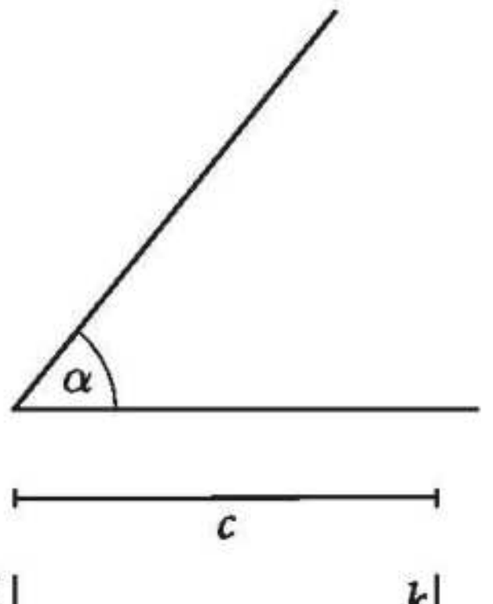


Podanie miary jednego z kątów ostrych jednoznacznie określa drugi kąt ostry w tym trójkącie: jeżeli dany jest kąt α, to drugi kąt ma miarę $90^\circ - \alpha$.

Żeby jednoznacznie wyznaczyć trójkąt prostokątny, wystarczy znać jeden z jego kątów ostrych i jeden z jego boków.

Przykład 1

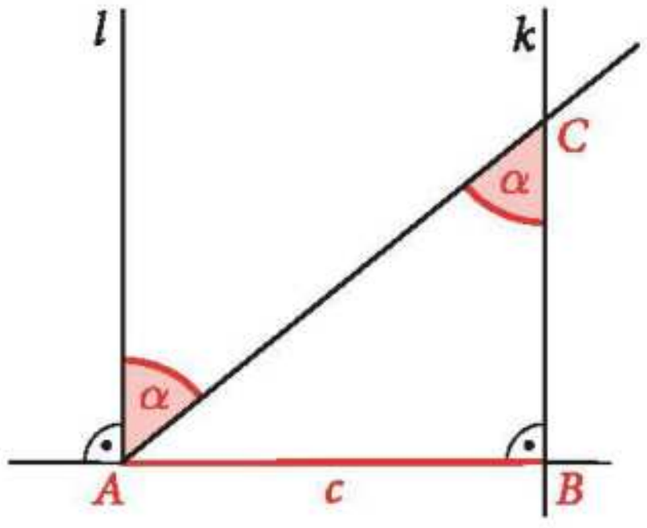
Skonstruujemy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle B = 90^\circ$ oraz dane są: $|AB| = c$ i $\sphericalangle C = \alpha$ $(\alpha < 90^\circ)$.



Rozwiązanie

Oto przykładowa konstrukcja:

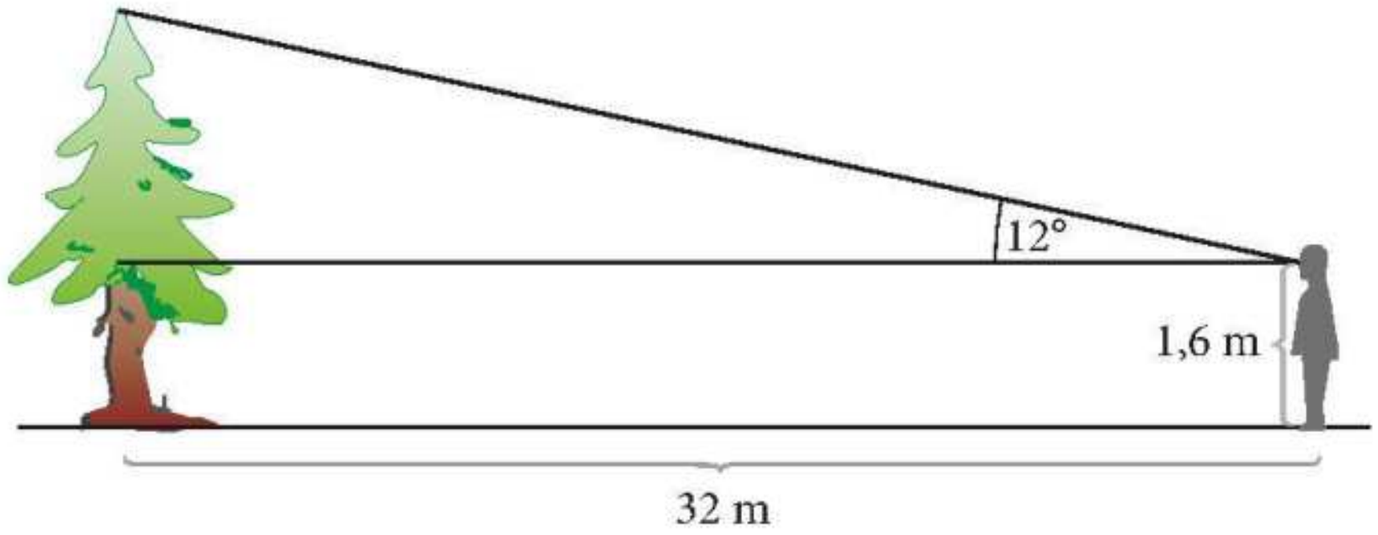
- na prostej odkładamy odcinek AB,
- z punktu B prowadzimy prostą k prostopadłą do AB,
- z punktu A prowadzimy półprostą l prostopadłą do AB,
- odkładamy kąt α w taki sposób, że punkt A jest jego wierzchołkiem, a półprosta l – ramieniem,
- punkt przecięcia drugiego ramienia odłożonego kąta α z prostą k jest szukanym wierzchołkiem C.



Zadanie ma zawsze jedno rozwiązanie.

Przykład 2

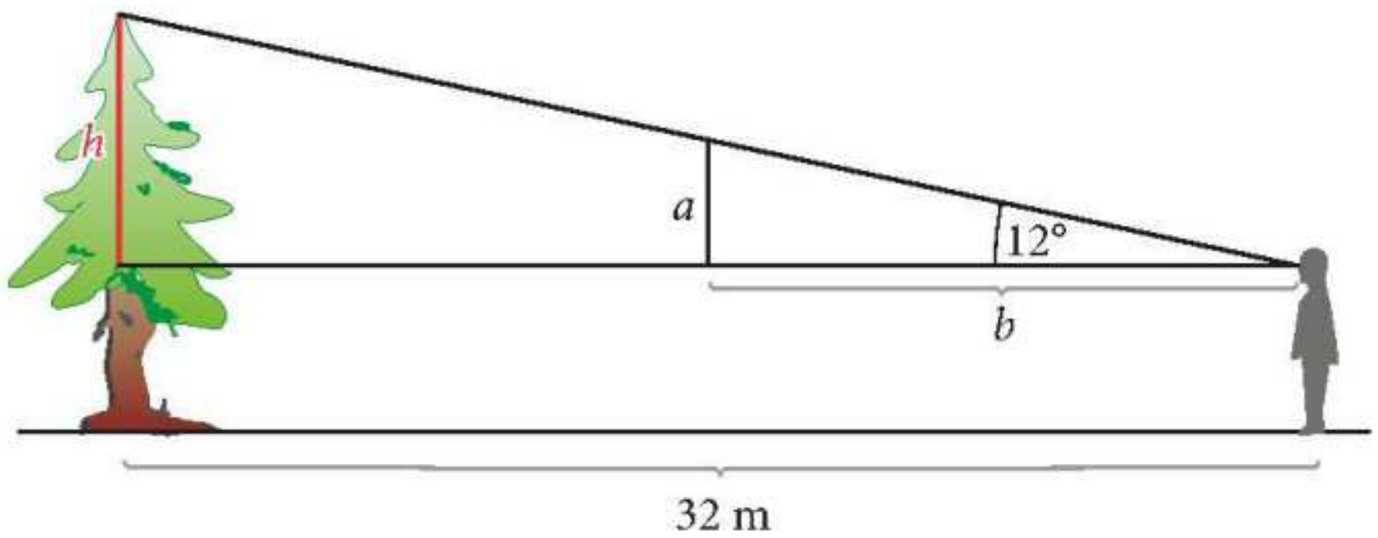
Chcemy oszacować wysokość drzewa. Mamy wyniki następujących pomiarów:
- 32 m – odległość obserwatora od drzewa,
- 12° – kąt, pod którym obserwator widzi wierzchołek drzewa (jak na rysunku),
- 1,6 m – wysokość oczu obserwatora nad ziemią.



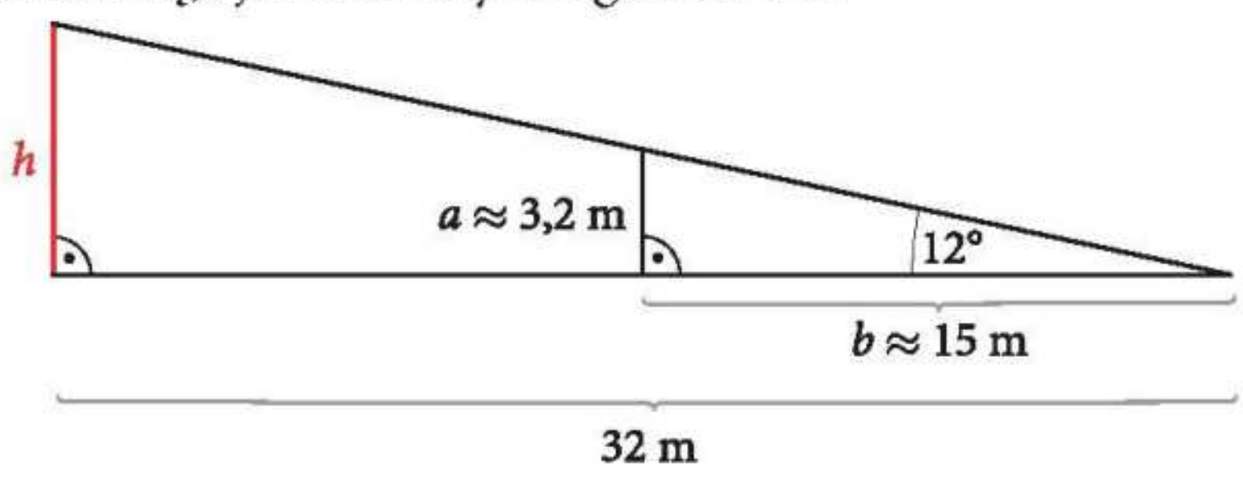
Rozwiązanie

Do rozwiązania problemu powinniśmy wyznaczyć wielkość h. Odcinek oznaczony na rysunku literą a został poprowadzony z pewnego przypadkowo wybranego punktu na przeciwprostokątnej. Otrzymaliśmy w ten sposób dwa trójkąty podobne, zatem:

$$\frac{h}{32} = \frac{a}{b}$$



Stosunek $\frac{a}{b}$ nie zależy od wielkości trójkąta, tylko od miary kąta i możemy go obliczyć (z zadaną dokładnością), jeśli znamy długości a i b.



Dla kąta 12° stosunek $\frac{a}{b} \approx 0{,}213$, a ponieważ $h = \frac{a}{b} \cdot 32$, więc $h \approx 6{,}816$ m.

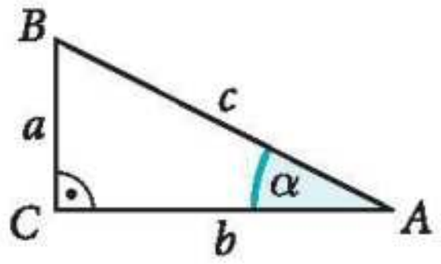
Aby otrzymać odpowiedź na postawione na początku pytanie, do wielkości h trzeba jeszcze dodać 1,6 m.

Odp.: Drzewo ma ok. 8,4 m wysokości.

Stosunek długości dwóch przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest wielkością tak ważną, że na jego określenie wprowadzono specjalną nazwę.

Definicja

W trójkącie prostokątnym, w którym α jest kątem ostrym, stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α nazywamy **tangensem kąta** α i oznaczamy $\operatorname{tg}\alpha$.

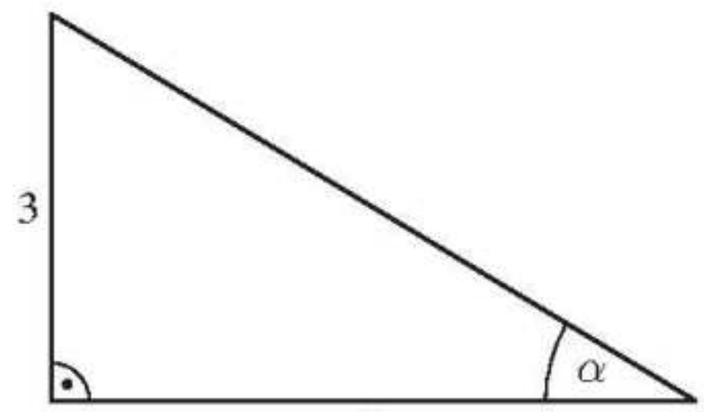


$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Przykład 3

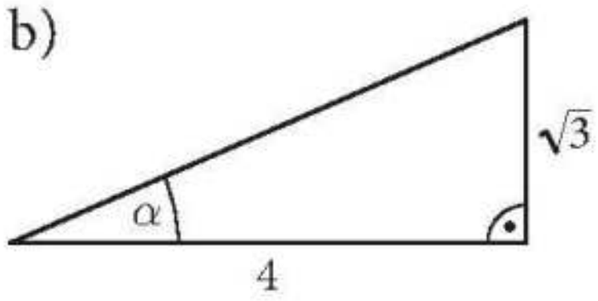
Skorzystamy z danych na rysunku i obliczymy $\operatorname{tg}\alpha$.

a)



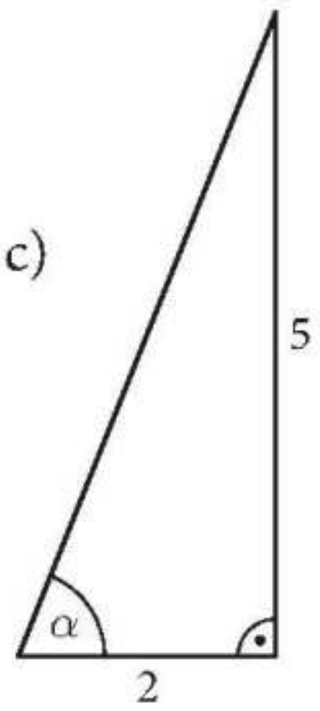
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

b)



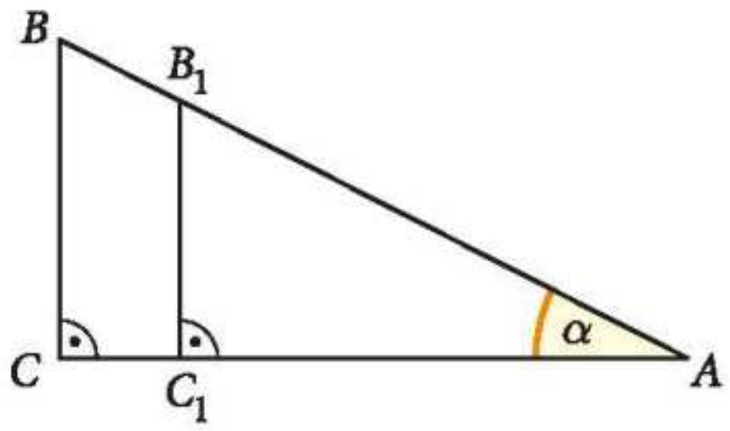
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

c)



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Przyjrzyjmy się rysunkowi. Trójkąty ABC i AB_1C_1 są podobne, więc prawdziwa jest równość:



$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|AC_1|}$$

Wniosek

Wartość tangensa zależy tylko od miary kąta, a nie od długości boków trójkąta prostokątnego.

Każdemu kątowi ostremu została w opisany wyżej sposób przyporządkowana pewna liczba, nazywana jego tangensem. Zatem określona została funkcja, której dziedziną jest zbiór kątów ostrych, a zbiorem wartości – zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.

Podobnie definiujemy następne funkcje.

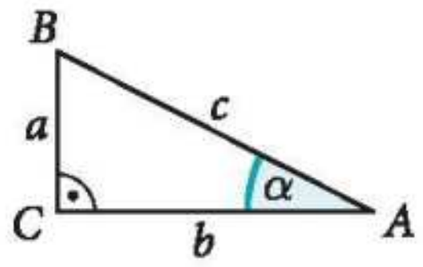
Definicja

W trójkącie prostokątnym, w którym α jest kątem ostrym:

- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem kąta** α i oznaczamy $\sin\alpha$,
- stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem kąta** α i oznaczamy $\cos\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$



Funkcje $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi**, a dział matematyki zajmujący się badaniem ich własności – trygonometrią.

Stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta nazywamy **cotangensem kąta** α i oznaczamy $\operatorname{ctg}\alpha$. Z tej funkcji nie będziemy korzystać, ponieważ łatwo można ją zastąpić tangensem. Bezpośrednio z definicji obu funkcji wynika bowiem równość:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Na końcu podręcznika znajdują się tablice wartości funkcji trygonometrycznych (zaokrąglonych do czwartego miejsca po przecinku) dla wszystkich kątów ostrych od 1° do 89° różniących się kolejno o 1°. Można z nich korzystać w dwie strony:

- dla danego kąta odczytać wartości jego trzech funkcji trygonometrycznych,
- mając daną wartość funkcji trygonometrycznej pewnego kąta, odczytać jego miarę.

- Początki trygonometrii sięgają czasów starożytnych i są ściśle związane z rozwojem astronomii, np. z szukaniem metod orientacji na otwartym morzu według widocznych ciał niebieskich oraz tworzeniem map.
  Definicje, które zostały tutaj przytoczone, wprowadzono w XVI w.
- Wartości (w systemie dziesiętnym) funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych zostały obliczone z dużą dokładnością i spisane w tablicach w XV w. przez Johannesa Müllera z Królewca. Korzystano z nich przy rozwiązywaniu problemów związanych z różnego typu pomiarami – przede wszystkim geodezyjnymi. Uściślona w XVII w. metoda pomiarów terenowych na podstawie tzw. triangulacji (podziału danego obszaru na trójkąty) polegała na zastąpieniu pomiarów odległościowych – kątowymi, a następnie wyznaczaniu odległości z użyciem rachunku trygonometrycznego.

Przykład 4

Odczytamy z tablic przybliżone miary kątów rozważanych w przykładzie 3.

Rozwiązanie

a) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$, to $\alpha \approx 31°$.

b) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43$, to $\alpha \approx 23°$.

c) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$, to $\alpha \approx 68°$.

Przykład 5 ◀ zad. 1.6

Odczytamy z tablic przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów 87° i 14°.

Rozwiązanie

$\sin 87° \approx 0{,}9986$ $\quad$ $\sin 14° \approx 0{,}2419$

$\cos 87° \approx 0{,}0523$ $\quad$ $\cos 14° \approx 0{,}9703$

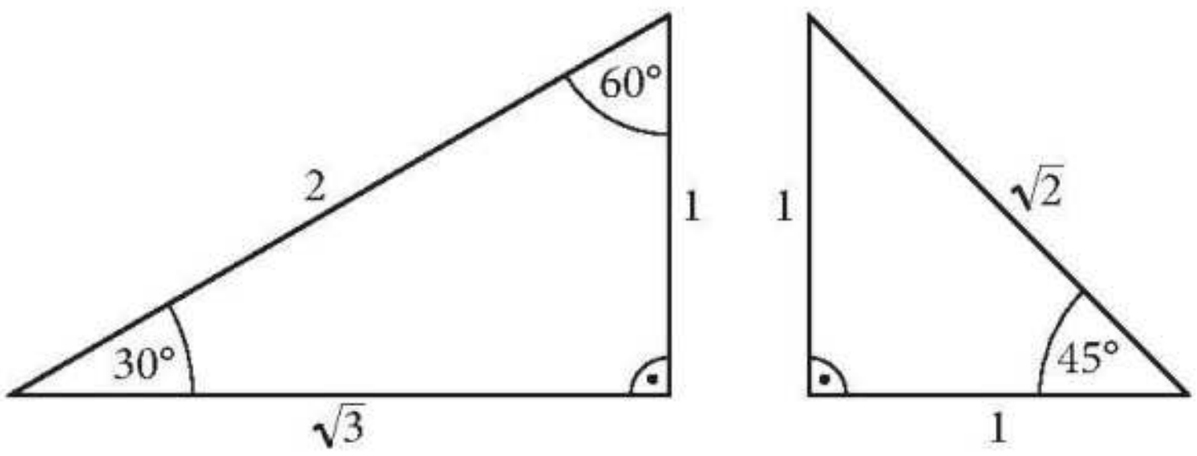
$\operatorname{tg} 87° \approx 19{,}0811$ $\quad$ $\operatorname{tg} 14° \approx 0{,}2493$

Przykład 6

Wyznaczymy wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60°.

Rozwiązanie

Jeżeli narysujemy połowę kwadratu i połowę trójkąta równobocznego o odpowiednio dobranych bokach, to wartości funkcji trygonometrycznych wymienionych kątów odczytamy bezpośrednio z rysunku. Zestawiamy je w tabeli.



α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład 7 ◀ zad. 1.11

Znajdziemy kąt ostry α, dla którego zachodzi równość $2(1 + \cos\alpha) = \sqrt{2} + 2$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie, w którym niewiadomą jest $\cos\alpha$.

$2(1 + \cos\alpha) = \sqrt{2} + 2$ $\quad\longleftarrow$ dzielimy obie strony równania przez 2

$1 + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ $\quad\longleftarrow$ od obu stron równania odejmujemy 1

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Skoro $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, to szukany kąt ostry ma miarę 45° – zob. przykład 6.

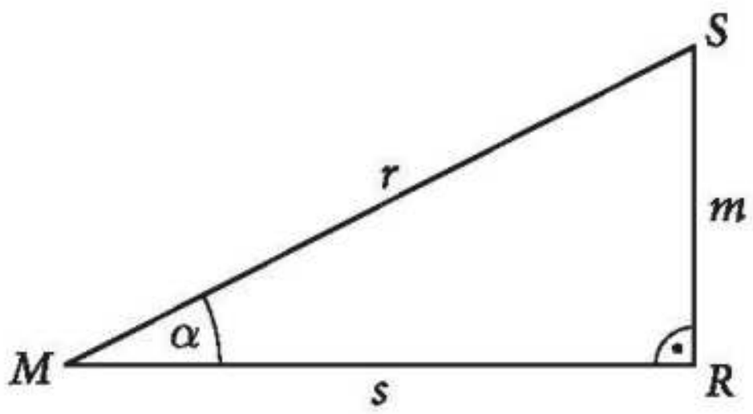
Odp.: $\alpha = 45°$

Zadanie polegające na obliczeniu wszystkich nieznanych długości boków oraz miar kątów w dowolnym trójkącie nazywa się **rozwiązywaniem trójkątów**.
W tym podręczniku ograniczymy się do trójkątów prostokątnych albo takich, które będzie można rozwiązać za pomocą trójkątów prostokątnych.

Uwaga: Wartości funkcji trygonometrycznych można odczytywać również z kalkulatorów naukowych.

Przykład 8 ◂ zad. 1.15

W trójkącie prostokątnym MRS dane są niektóre z wielkości oznaczonych na rysunku literami. Wyznaczymy pozostałe boki i kąty tego trójkąta. Wyniki zaokrąglimy: kąty – do 1 stopnia, długości boków – do dwóch miejsc po przecinku.



Rozwiązanie

a) $\alpha = 37°,\ r = 5$

$\sin 37° = \frac{m}{5}$ ⟵ $\sin\alpha = \frac{m}{r}$

$m = 5\sin 37°$, więc $m \approx 3{,}01$ ⟵ z tablic matematycznych: $\sin 37° \approx 0{,}6018$

$\cos 37° = \frac{s}{5}$ ⟵ $\cos\alpha = \frac{s}{r}$

$s = 5\cos 37° \approx 3{,}99$ ⟵ z tablic matematycznych: $\cos 37° \approx 0{,}7986$

$\sphericalangle MSR = 90° - \alpha = 53°$

Odp.: $\sphericalangle MSR = 53°,\ m \approx 3{,}01,\ s \approx 3{,}99$

b) $\alpha = 70°,\ m = 12$

$\sin 70° = \frac{12}{r}$ ⟵ $\sin\alpha = \frac{m}{r}$

$r = \frac{12}{\sin 70°} \approx \frac{12}{0{,}9397} \approx 12{,}77$ ⟵ $\sin 70° \approx 0{,}9397$

$s = \frac{12}{\operatorname{tg} 70°} \approx \frac{12}{2{,}7475} \approx 4{,}37$ ⟵ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{s}$ i $\operatorname{tg} 70° \approx 2{,}7475$

$\sphericalangle MSR = 90° - \alpha = 20°$

Odp.: $\sphericalangle MSR = 20°,\ r \approx 12{,}77,\ s \approx 4{,}37$

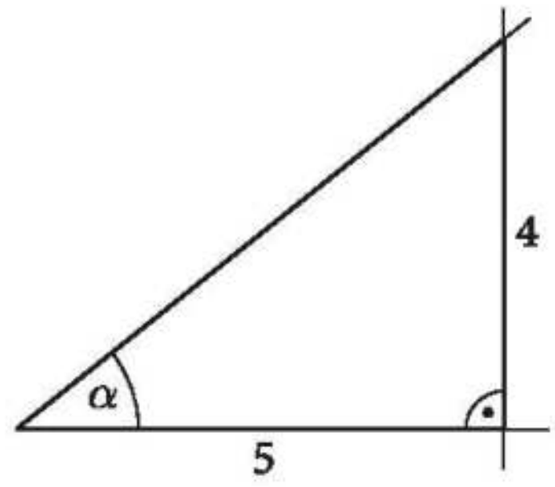
Przykład 9 ◂ zad. 1.19

Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α. Skonstruujemy ten kąt.

Rozwiązanie

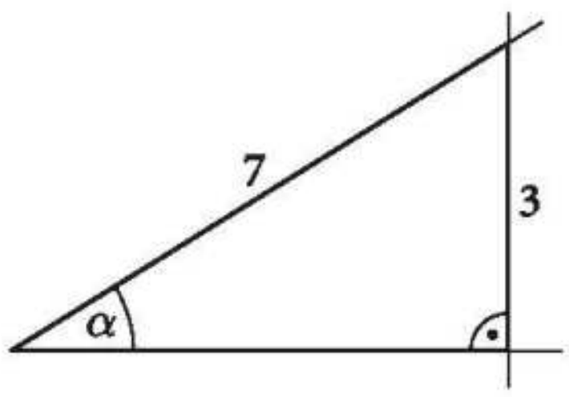
a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$

Szukany kąt możemy traktować jak jeden z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym. Konstruujemy więc taki trójkąt, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma 4 jednostki, a przyprostokątna przyległa do tego kąta – 5 jednostek.



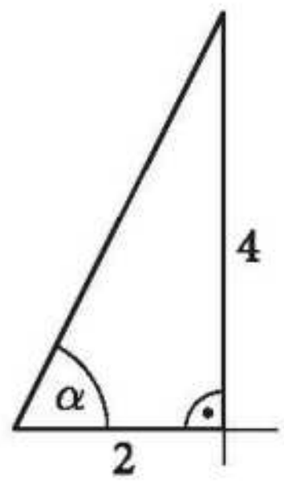
b) $\sin\alpha = \frac{3}{7}$

α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma 3 jednostki, a przeciwprostokątna 7 jednostek. Konstruujemy zatem dwie proste prostopadłe. Na jednej odmierzamy przyprostokątną o długości 3 jednostek i z końcowego jej punktu prowadzimy okrąg o promieniu równym 7 jednostek do przecięcia z drugą.



c) $\operatorname{tg}\alpha = 2$

α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma 2 jednostki, a przyprostokątna przyległa do tego kąta – 1 jednostkę. Konstruujemy więc taki trójkąt, w którym stosunek odpowiednich przyprostokątnych wynosi 2 (możemy przy tym skorzystać np. z równości $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$).



Przykład 10 ◂ zad. 1.22

Prosta przechodząca przez punkty $P = (1, 2)$ i $M = (3, 8)$ tworzy z osią x kąt ostry α. Wyznaczymy ten kąt.

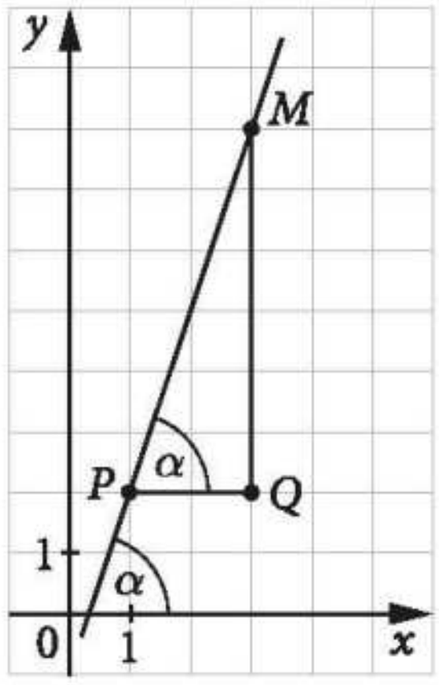
Rozwiązanie

Rysujemy pomocniczy trójkąt prostokątny PQM, w którym $\sphericalangle MPQ = \alpha$. Punkt $Q = (3, 2)$, zatem w trójkącie PQM długości przyprostokątnych wynoszą $|PQ| = 2$ i $|QM| = 6$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|QM|}{|PQ|} = 3$$

Z tablic odczytujemy miarę szukanego kąta.

Odp.: $\alpha \approx 72°$



Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wartość wyrażenia $\frac{4\sin 30^\circ + 2\operatorname{tg} 45^\circ}{\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} 60^\circ}$ jest równa

A. 1. **B.** $1\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

1.2. Kąt α jest ostry i $\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$. Jaką miarę ma kąt α?

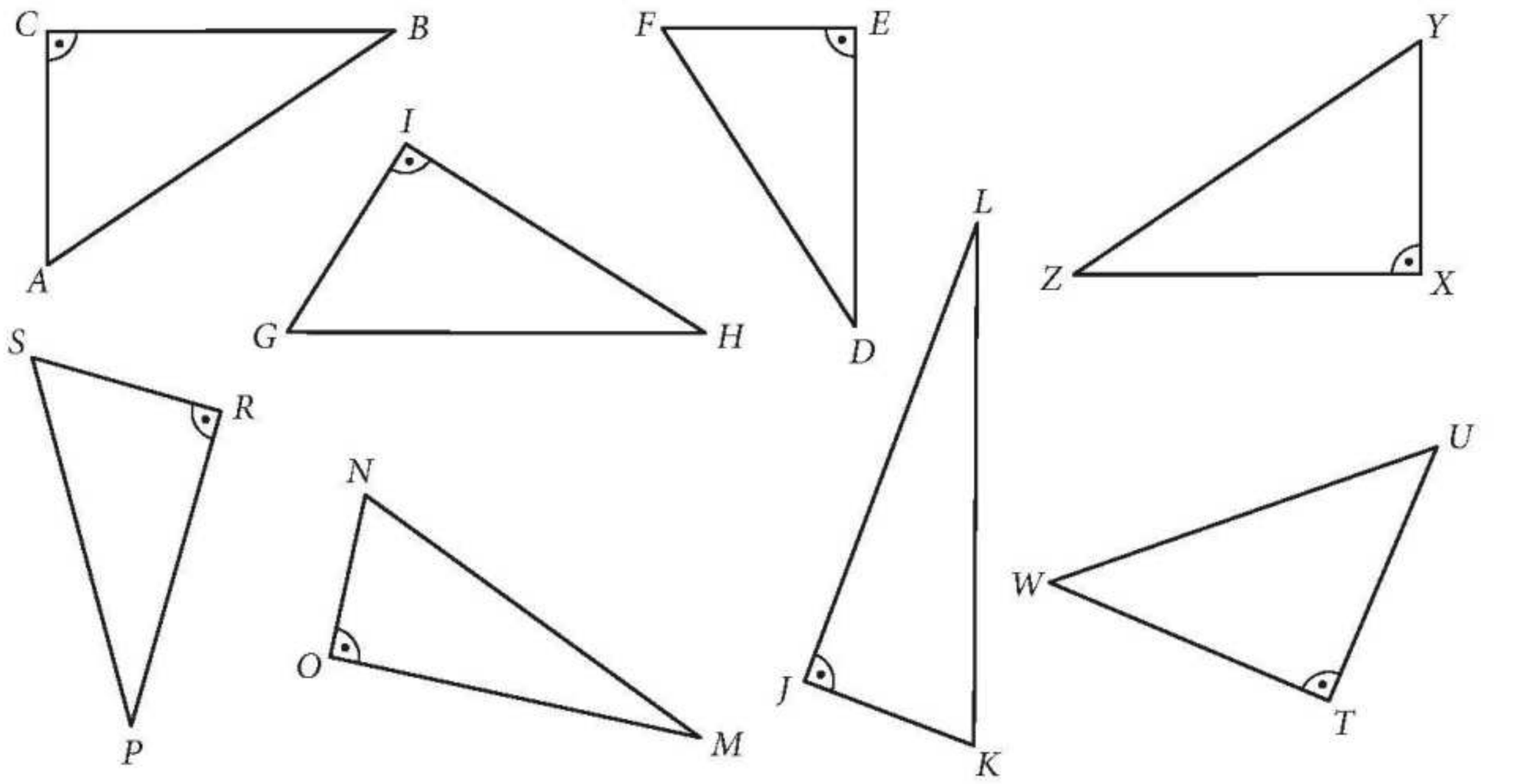
A. 60° **B.** 45° **C.** 30° **D.** 15°

1.3. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 8 cm, a tangens kąta przyległego do niej jest równy $\frac{3}{4}$. Jaką długość ma przeciwprostokątna w tym trójkącie?

A. 13 cm **B.** 12 cm **C.** 10 cm **D.** $10\sqrt{2}$ cm

1.4. Na podstawie rysunku możemy zapisać, że np. $\sin\sphericalangle B = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Stosujemy uproszczony zapis kątów wewnętrznych trójkąta o podanych wierzchołkach. Na przykład w trójkącie ABC zamiast $\sphericalangle BAC$ piszemy krótko $\sphericalangle A$, w trójkącie MPR zamiast $\sphericalangle MRP$ piszemy $\sphericalangle R$ itd.



Zapisz podobnie

a) $\operatorname{tg}\sphericalangle A$, $\cos\sphericalangle B$.

b) $\sin\sphericalangle G$, $\sin\sphericalangle F$.

c) $\cos\sphericalangle K$, $\operatorname{tg}\sphericalangle H$.

d) $\sin\sphericalangle N$, $\cos\sphericalangle M$.

e) $\operatorname{tg}\sphericalangle P$, $\cos\sphericalangle W$.

f) $\operatorname{tg}\sphericalangle Z$, $\sin\sphericalangle Y$.

1.5. Na podstawie poprzedniego zadania zapisz każdy z podanych ułamków jako funkcję trygonometryczną wybranego kąta ostrego.

$$\frac{|BC|}{|AB|},\ \frac{|FE|}{|FD|},\ \frac{|IH|}{|GH|},\ \frac{|JK|}{|JL|},\ \frac{|OM|}{|ON|},\ \frac{|RS|}{|PS|},\ \frac{|WT|}{|WU|},\ \frac{|XY|}{|YZ|}$$

1.6. Odczytaj z tablic wartości podanych funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin 15°$, $\sin 32°$, $\cos 18°$

b) $\cos 37°$, $\cos 41°$, $\sin 52°$

c) $\sin 72°$, $\sin 81°$, $\cos 79°$

d) $\operatorname{tg} 17°$, $\operatorname{tg} 81°$, $\operatorname{tg} 63°$, $\operatorname{tg} 22°$

1.7. Dana jest wartość $\sin\alpha$. Odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1°.

a) 0,4555 b) 0,7349 c) 0,8415 d) 0,9291

1.8. Dana jest wartość $\cos\alpha$. Odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1°.

a) 0,2079 b) 0,3584 c) 0,5299 d) 0,9205

1.9. Dana jest wartość $\operatorname{tg}\alpha$. Odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1°.

a) 0,141 b) 0,249 c) 4,705 d) 57,290

1.10. Oblicz dokładną wartość wyrażenia. Zapis $\sin^2\alpha$ oznacza $(\sin\alpha)^2$.

a) $2\sin 60° \cdot \cos 30° - 2\operatorname{tg} 45°$

b) $\dfrac{\sin^2 45° + \cos 60°}{\sin 30° \cdot \cos 30°}$

c) $\left(\dfrac{\operatorname{tg} 60°}{\cos 60°} - \dfrac{\sin 45°}{\cos 45°}\right)^2$

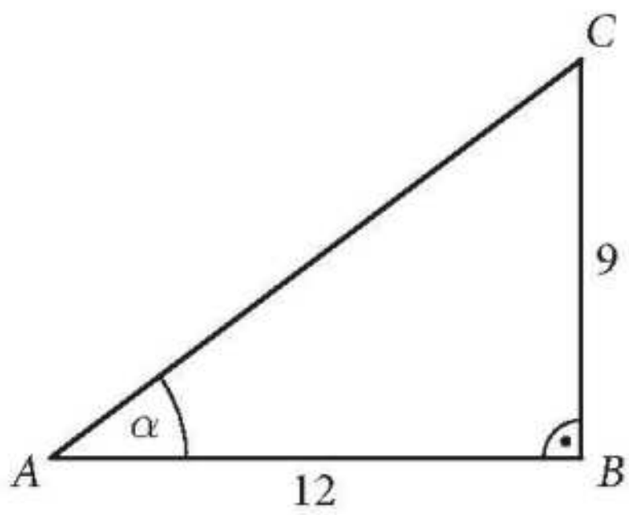
d) $\dfrac{\sin 30° \cdot \operatorname{tg} 60° + \cos 30°}{\operatorname{tg} 30°}$

1.11. Wyznacz kąt ostry α, dla którego prawdziwa jest podana równość.

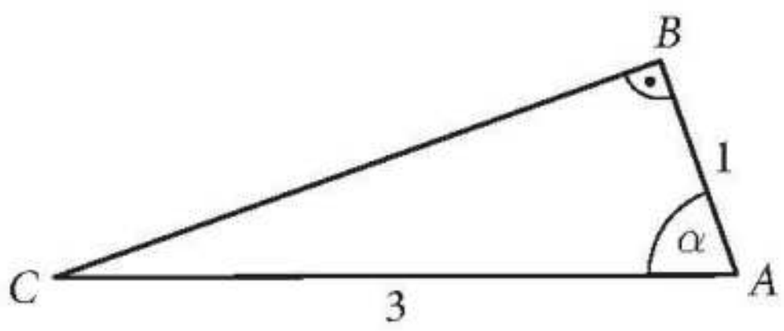
a) $3\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ b) $1 + \cos\alpha = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}(3 + \operatorname{tg}\alpha) = 1\dfrac{1}{3}$

1.12. Na podstawie informacji podanych na rysunku wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

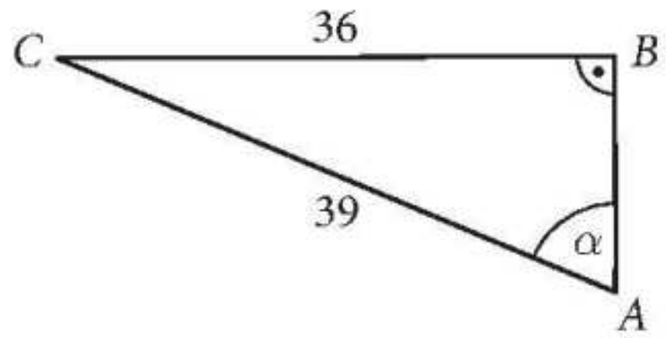
a)



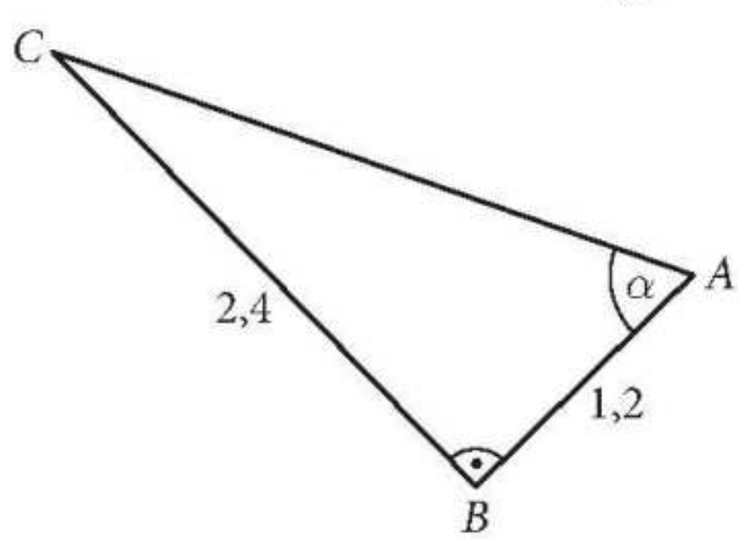
b)



c)



d)



1.13. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym kąt C jest prosty, dane są długości dwóch boków. Odczytaj z tablic przybliżoną (z dokładnością do 1°) miarę kąta A.

a) $|AC| = 2,\ |AB| = 3$
b) $|BC| = 5,\ |AB| = 7$
c) $|AC| = 9,\ |BC| = 4$
d) $|AC| = 6,\ |AB| = 10$
e) $|BC| = 2{,}5,\ |AB| = 4{,}7$
f) $|AC| = 0{,}3,\ |BC| = 8{,}6$

1.14. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym kąt C jest prosty, dane są długości dwóch boków. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta A.

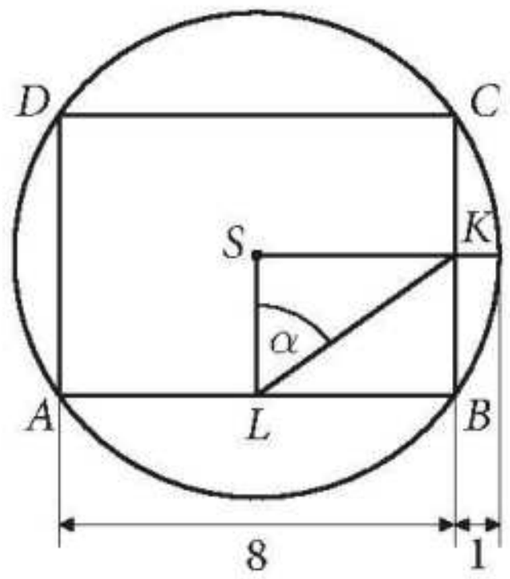
a) $|AC| = 4,\ |AB| = 5$
b) $|AC| = |BC| = 7$
c) $|AC| = 2\sqrt{2},\ |AB| = 3$
d) $|BC| = 10,\ |AB| = 5\sqrt{5}$
e) $|BC| = 15,\ |AC| = 8$
f) $|BC| = 6,\ |AB| = 7$

1.15. Wyznacz boki (wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku) i kąty trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt C jest prosty oraz

a) $\sphericalangle A = 48°,\ |AC| = 11.$
b) $\sphericalangle B = 52°,\ |AC| = 18.$
c) $\sphericalangle A = 27°,\ |BC| = 12.$
d) $\sphericalangle B = 19°,\ |AB| = 6{,}8.$
e) $\sphericalangle A = \frac{2}{3}\sphericalangle B,\ |AB| = 44.$
f) $\sphericalangle B - \sphericalangle A = 40°,\ |BC| = 7.$

1.16. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = 10,\ |AB| = |BC| = 13$, poprowadzono wysokość BD. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta CBD.

1.17. Wszystkie wierzchołki prostokąta $ABCD$ leżą na okręgu o środku S (zob. rysunek). Bok KS trójkąta KLS jest równoległy do AB, a bok LS tego trójkąta jest równoległy do AD. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.



1.18. W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek boków $|AB| : |BC| = 2 : 3$, poprowadzono przekątną AC. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów CAB i CAD.

1.19. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α. Skonstruuj ten kąt.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$
c) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$
d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

1.20. Oblicz tangens kąta ostrego α, który prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i punkt M tworzy z osią x.

a) $M = (2, 1)$
b) $M = (5, 3)$
c) $M = \left(\sqrt{2}, 1\right)$
d) $M = \left(2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

1.21. Oblicz sinus i cosinus kąta α, którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x, a drugie przechodzi przez punkt A.

a) $A = (1, 3)$
b) $A = (12, 5)$
c) $A = \left(\sqrt{5}, 2\right)$
d) $A = \left(2\sqrt{2}, 1\right)$

1.22. Oblicz sinus i cosinus kąta ostrego α, który prosta KL tworzy z osią x.

a) $K = (0, 0),\ L = (1, 2)$
b) $K = (0, -1),\ L = (3, 2)$
c) $K = (3, 0),\ L = (1, -3)$
d) $K = (5, 0),\ L = \left(0, -2\sqrt{6}\right)$

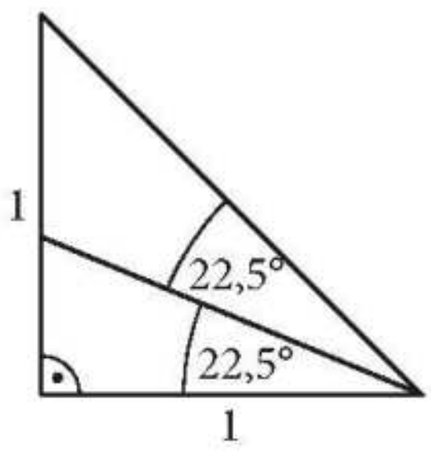
1.23. Wyznacz miarę kąta ostrego (z dokładnością do 1°), który prosta PQ tworzy z osią x.

a) $P = (6, 2),\ Q = (3, -1)$
b) $P = (-1, 1),\ Q = (2, 2)$
c) $P = (3, -2),\ Q = (6, 5)$
d) $P = (-2, -3),\ Q = (2, -1)$

1.24. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB, w którym $|AC| = 24$, $|BC| = 10$. Niech $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{5} - \frac{1}{6}\sqrt{1 - \sin^2\alpha} + \sqrt{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\beta \cdot \cos\alpha}}.$$

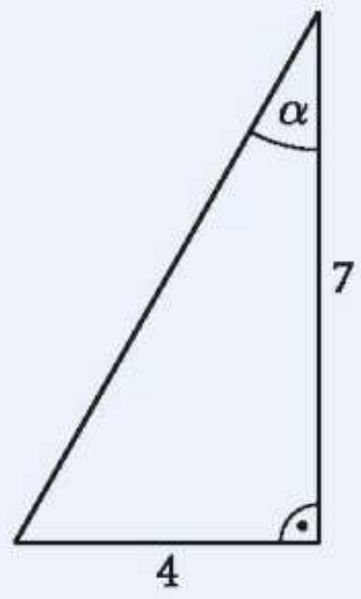
D **1.25.** Wykorzystaj podany rysunek i wykaż, że $\operatorname{tg} 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$.



Prosto do matury

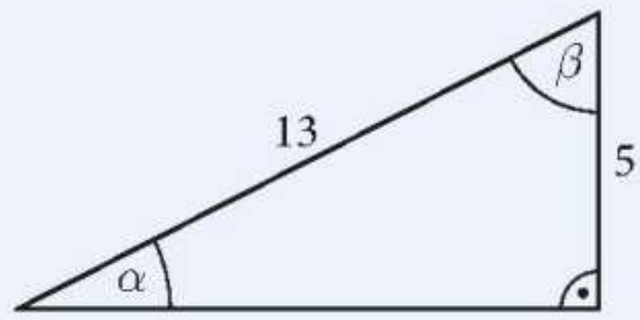
1. Dany jest trójkąt prostokątny jak na rysunku obok. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{7}{4}$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7}$



D **2.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych stanowi 60% drugiej. Wykaż, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta wynosi $\frac{34}{15}$.

3. Na podstawie informacji podanych na rysunku oblicz wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \cos\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.



4. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta A w trójkącie ABC, którego wierzchołkami są punkty $A = (2, 3),\ B = (5, 3),\ C = (5, 7)$.

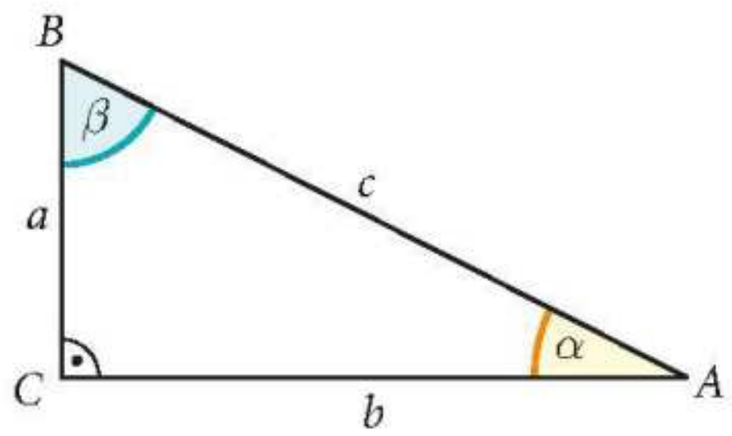
5. Kąt ostry α spełnia warunek $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Skonstruuj ten kąt.

2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Umiejętności:

- stosowanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
- wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeśli znana jest wartość jednej z funkcji

Skorzystamy ze znanych związków między kątami i bokami w trójkącie prostokątnym. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wówczas:



- $\sphericalangle C = 90^\circ$
- $\beta = 90^\circ - \alpha$
- $\alpha = 90^\circ - \beta$
- $a^2 + b^2 = c^2$ (twierdzenie Pitagorasa)
- $\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
- $\sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$

Ponieważ $a^2 + b^2 = c^2$, prawdziwe są nierówności:

$0 < a < c$ oraz $0 < b < c$ ⟵ przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej

$0 < \frac{a}{c} < 1$ oraz $0 < \frac{b}{c} < 1$ ⟵ po podzieleniu poprzednich nierówności stronami przez c

$0 < \sin\alpha < 1$ oraz $0 < \cos\alpha < 1$ ⟵ z definicji: $\frac{a}{c} = \sin\alpha,\ \frac{b}{c} = \cos\alpha$

Wniosek

Dla każdego kąta ostrego α prawdziwe są następujące nierówności:

$$0 < \sin\alpha < 1$$
$$0 < \cos\alpha < 1$$

Tangens kąta ostrego jest ilorazem długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zatem funkcja tangens przyjmuje wartości dodatnie. Ponadto **każda** liczba dodatnia jest tangensem pewnego kąta ostrego: jeśli $a > 0$, to a jest tangensem odpowiedniego kąta ostrego np. w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 1 i a.

Z kolei jeśli a jest liczbą spełniającą warunek $0 < a < 1$, to istnieje trójkąt prostokątny o jednej przyprostokątnej długości a i przeciwprostokątnej długości 1. Sinus odpowiedniego kąta ostrego w tym trójkącie jest równy a. Podobnie jest dla cosinusa.

Podsumujmy:
- zbiorem wartości funkcji tangens jest przedział $(0; \infty)$,
- zbiorem wartości funkcji sinus oraz cosinus jest przedział $(0; 1)$.

Przykład 1 ◀ zad. 2.5

Sprawdzimy, czy istnieje taki kąt ostry α, dla którego

a) $3\cos\alpha - 5 = \cos\alpha - \sqrt{3}$. b) $3\sin\alpha = \sqrt{2} - 2\sin\alpha$.

Rozwiązanie

a) $3\cos\alpha - 5 = \cos\alpha - \sqrt{3}$

$3\cos\alpha - \cos\alpha = 5 - \sqrt{3}$

$2\cos\alpha = 5 - \sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{5 - \sqrt{3}}{2}$

Odp.: $\frac{5 - \sqrt{3}}{2} > 1$, więc nie istnieje kąt α spełniający podany warunek.

b) $3\sin\alpha = \sqrt{2} - 2\sin\alpha$

$5\sin\alpha = \sqrt{2}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$

Odp.: $\frac{\sqrt{2}}{5} < 1$, zatem istnieje kąt α spełniający podany warunek. Możemy taki kąt skonstruować jako jeden z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnej długości $\sqrt{2}$ i przeciwprostokątnej długości 5.

Zauważmy, że:
- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90° - \alpha)$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta = \sin(90° - \alpha)$

Wniosek

Jeżeli α jest kątem ostrym, to prawdziwe są następujące równości:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

Przykład 2

a) $\sin 40^\circ \approx 0{,}6428$, zatem $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) \approx 0{,}6428$

b) $\cos 12^\circ \approx 0{,}9781$, zatem $\sin 78^\circ = \sin(90^\circ - 12^\circ) \approx 0{,}9781$

Skoro $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, to:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

Wniosek

Jeżeli α jest kątem ostrym, to prawdziwa jest następująca równość:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Przykład 3

◀ zad. 2.6

Uprościmy wyrażenie $\frac{\cos\alpha + 3\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3\operatorname{tg}\alpha$.

Rozwiązanie

$$\frac{\cos\alpha + 3\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3\operatorname{tg}\alpha = 1 + 3\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha = 1$$

Ważny związek między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta wyraża twierdzenie nazywane **jedynką trygonometryczną**.

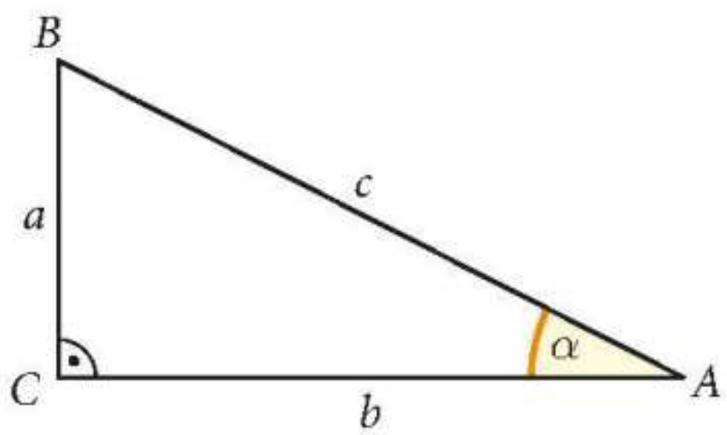
Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dowód

Rozważamy trójkąt prostokątny ABC o jednym z kątów ostrych α. Przyjmujemy takie same oznaczenia jak na początku tego tematu. Wówczas:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Zatem:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \qquad \longleftarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Koniec dowodu

Przykład 4 ◂ zad. 2.7

Obliczymy wartość podanego wyrażenia.

a) $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \sin^2 35^\circ + \sin^2 (90^\circ - 35^\circ) = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1$

b) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 =$
$= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2$

Przykład 5 ◂ zad. 2.11

Dany jest kąt ostry α taki, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Wyznaczymy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Rozwiązanie

I sposób

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ⟵ korzystamy z jedynki trygonometrycznej

$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$, czyli $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

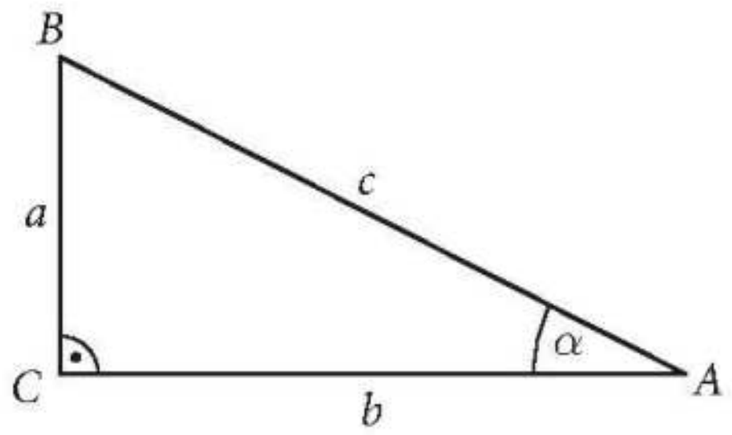
Jeżeli $p > 0$, to równanie $x^2 = p$ ma dwa rozwiązania: $x = \sqrt{p}$ lub $x = -\sqrt{p}$.

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ⟵ funkcje trygonometryczne kąta ostrego przyjmują tylko wartości dodatnie

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$ ⟵ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

II sposób

Stosujemy oznaczenia jak na rysunku.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

Możemy przyjąć, że przyprostokątna przeciwległa do kąta α ma długość $a = 3$, a przeciwprostokątna ma długość $c = 5$.

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ ⟵ twierdzenie Pitagorasa

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$ ⟵ definicja cosinusa

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ⟵ definicja tangensa

Odp.: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

Zauważmy, że podanie wartości jednej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego wyznacza trójkąt prostokątny z dokładnością do podobieństwa. Inaczej mówiąc, wszystkie trójkąty prostokątne, w których np. $\sin\alpha = p$, są podobne.

Przykład 6 ◂ zad. 2.12

Dany jest kąt ostry α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Wyznaczymy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że przyprostokątna przeciwległa do kąta α ma długość $a = 3$, a przyprostokątna przyległa do kąta α ma długość $b = 1$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ ⟵ twierdzenie Pitagorasa

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ⟵ definicja sinusa

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ⟵ definicja cosinusa

Odp.: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Jaką wartość ma wyrażenie $\frac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$?

A. 1 **B.** 0 **C.** ok. 1,27 **D.** 2

2.2. Ile jest równa liczba $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ$?

A. 90 **B.** 0,5 **C.** 1 **D.** 0

2.3. Wiadomo, że $\sin\alpha = \cos 27^\circ$ i α jest kątem ostrym. Jaką miarę ma kąt α?

A. 27° **B.** 33° **C.** 153° **D.** 63°

2.4. Kąty ostre trójkąta prostokątnego mają miary α i β. Sprawdź, czy podana zależność jest prawdziwa.

a) $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$

b) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$

c) $\cos\alpha - \sin\beta = 0$

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

2.5. Sprawdź, czy istnieje kąt ostry α spełniający podany warunek.

a) $\cos\alpha = 7 - 11\cos\alpha$

b) $5 + 2\sin\alpha = 4$

c) $\sqrt{7} - 2\sin\alpha + 3 = 9\sin\alpha$

d) $4 + \sqrt{3}\cos\alpha = \left(7 + \sqrt{3}\right)\cos\alpha$

2.6. Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.

a) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha - \cos(90^\circ - \alpha)$

b) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)}$

2.7. Oblicz wartość wyrażenia bez korzystania z tablic i kalkulatora.

a) $\dfrac{\sin^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ - 3}{\sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ - 2}$

b) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$

c) $\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$

d) $2 \sin 10^\circ \cos 80^\circ + 2 \sin 80^\circ \cos 10^\circ$

e) $-\sin 44^\circ \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cos 44^\circ$

f) $\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$

2.8. Oblicz $\dfrac{\left(\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ\right)^2 - \sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}$.
Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.9. Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.

a) $\sin^2 \alpha - 2 + \cos^2 \alpha$

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha$

c) $\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) \cdot \cos^2 \alpha - 5$

d) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$

2.10. Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

b) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

c) $\dfrac{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \dfrac{3}{\operatorname{tg} \alpha}$

d) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$

2.11. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\sin \alpha = \dfrac{1}{3}$ b) $\cos \alpha = \dfrac{2}{5}$ c) $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.12. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{4}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 50$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$

2.13. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.
Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.14. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \dfrac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.15. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \dfrac{1}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.
Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.16. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{7}$. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha + \sin \alpha}$.
Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.17. Kąt α jest ostry i $\left(\frac{3}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{3}{\cos\alpha}\right)^2=36$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{4}\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2.18. Kąt α jest ostry i $7-5\operatorname{tg}\alpha=3$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2.19. W trójkącie prostokątnym stosunek cosinusa kąta ostrego α do tangensa kąta ostrego β jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz miary kątów α i β z dokładnością do 1°.

2.20. Kąty ostre α i β trójkąta prostokątnego spełniają warunek $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $12\sqrt{3}$. Wyznacz długości przyprostokątnych i miary kątów α i β tego trójkąta.

D **2.21.** Wykaż, że nie istnieje kąt ostry α taki, że $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\cos\alpha=3$.

D * **2.22.** Wykaż, że odwrotność sumy tangensów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa iloczynowi sinusów tych kątów.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
W trójkącie prostokątnym kąty φ i δ są ostre oraz $\varphi>\delta$. Wynika stąd, że
A. $\sin\varphi<\sin\delta$. **B.** $\sin\varphi<\cos\delta$. **C.** $\cos\varphi<\cos\delta$.

2. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$. Wyznacz $\cos\alpha$.

D **3.** W pewnym trójkącie prostokątnym iloczyn sinusów kątów ostrych jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Wykaż, że iloczyn odwrotności cosinusów kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\sqrt{3}+1$.

4. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$.

5. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=3$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha}$.

3. Warto powtórzyć – pola i obwody figur

Zamiana jednostek pola.

$1\ \text{cm}^2 = 10\ \text{mm} \cdot 10\ \text{mm} = 100\ \text{mm}^2$

$1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{mm}^2 = 10^4\ \text{mm}^2$

$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2 = 10^4\ \text{cm}^2$

$1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2 = 100\,000\,000\ \text{dm}^2 = 10^8\ \text{dm}^2$

1 ar zapisujemy 1 a, jest to pole kwadratu o boku 10 m.

$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$

1 hektar zapisujemy 1 ha, jest to pole kwadratu o boku 100 m.

$1\ \text{ha} = 10\,000\ \text{m}^2$

W tym podręczniku pole figury oznaczamy literą P, a obwód figury skrótem *obw*.

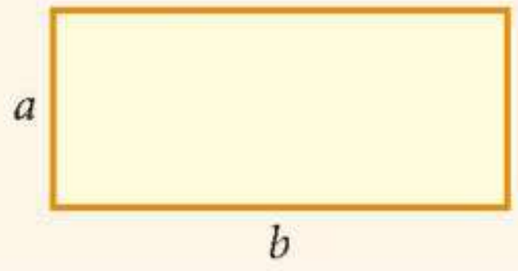
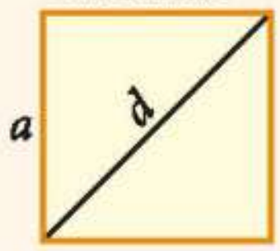
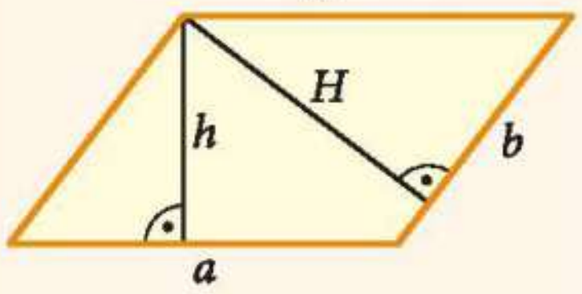
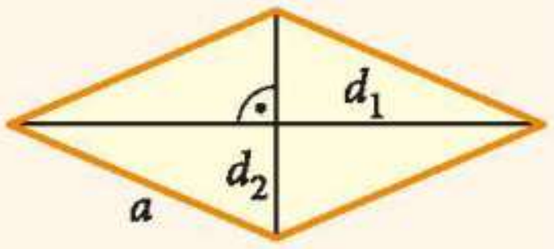
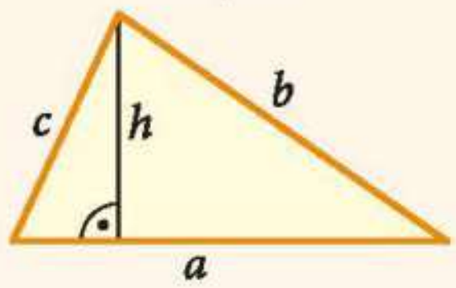
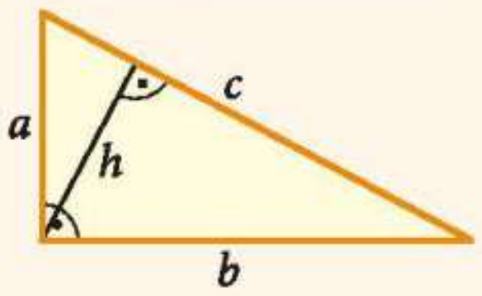
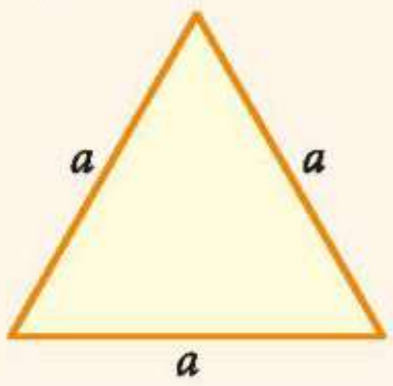
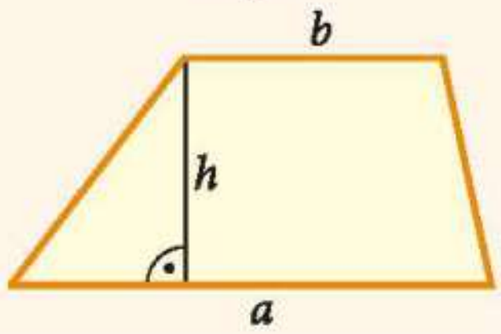
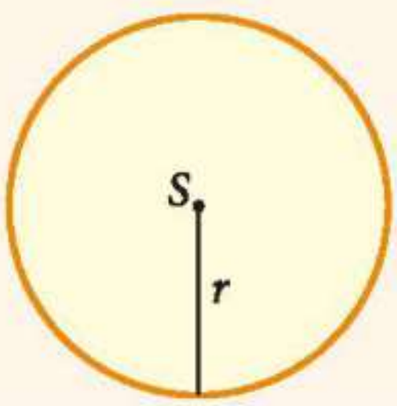
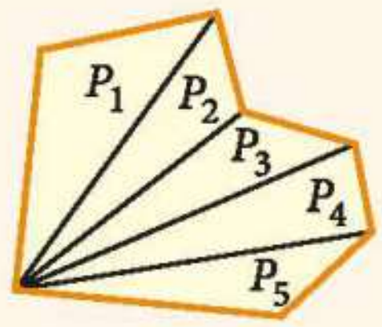
Figura	Oznaczenia	Pole	Obwód
prostokąt 	a, b – boki prostokąta	$P = ab$	$obw = 2a + 2b$
kwadrat 	a – bok kwadratu d – przekątna kwadratu	$P = a^2$ $P = \frac{1}{2}d^2$	$obw = 4a$
równoległobok 	a, b – boki nierównoległe równoległoboku h, H – wysokości równoległoboku wychodzące z jednego wierzchołka	$P = ah$ $P = bH$	$obw = 2a + 2b$
romb 	a – bok rombu d_1, d_2 – przekątne rombu	$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$	$obw = 4a$

Figura	Oznaczenia	Pole	Obwód
trójkąt 	a, b, c – boki trójkąta h – wysokość trójkąta opuszczona na bok a	$P = \frac{1}{2}ah$	$obw = a + b + c$
trójkąt prostokątny 	a, b – przyprostokątne trójkąta c – przeciwprostokątna trójkąta h – wysokość trójkąta opuszczona z wierzchołka kąta prostego	$P = \frac{1}{2}ch$ $P = \frac{1}{2}ab$	$obw = a + b + c$
trójkąt równoboczny 	a – bok trójkąta	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$obw = 3a$
trapez 	a, b – równoległe boki (podstawy) trapezu h – wysokość trapezu	$P = \frac{1}{2}(a + b)h$	
koło 	r – promień koła	$P = \pi r^2$	$obw = 2\pi r$

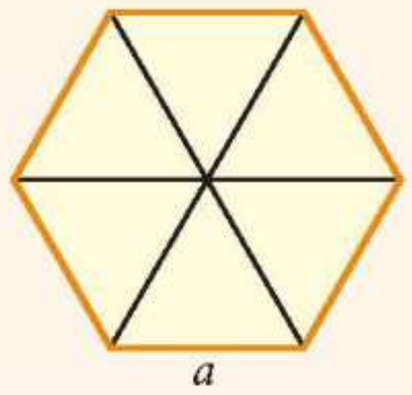
Każdy wielokąt możemy podzielić na trójkąty, które są albo rozłączne, albo mają co najwyżej wspólny odcinek. Sposobów podziału jest wiele. Pole wielokąta jest sumą pól utworzonych trójkątów.



$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$

Z tej metody korzystamy podczas obliczania pola sześciokąta foremnego o boku a. Taki sześciokąt jest sumą sześciu trójkątów równobocznych o boku a, więc jego pole P wyraża się wzorem:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$



Zauważmy, że każdy n-kąt wypukły można podzielić na $n-2$ trójkątów, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami n-kąta. Zatem suma kątów n-kąta wypukłego jest równa $(n-2)\cdot 180°$.

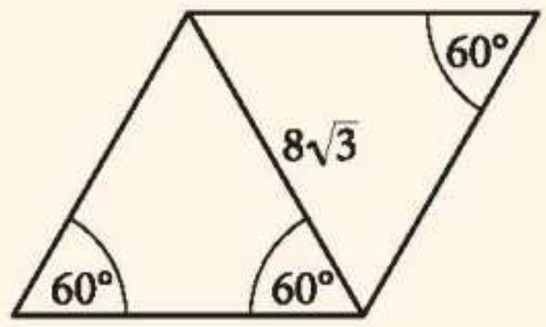
Przykład 1

Krótsza przekątna rombu ma długość $8\sqrt{3}$ cm i dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne. Obliczymy pole tego rombu.

Rozwiązanie

Pole rombu jest sumą pól dwóch trójkątów równobocznych o bokach równych $8\sqrt{3}$ cm. Zatem:

$$P = 2 \cdot \frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 96\sqrt{3}\ \left[\text{cm}^2\right]$$



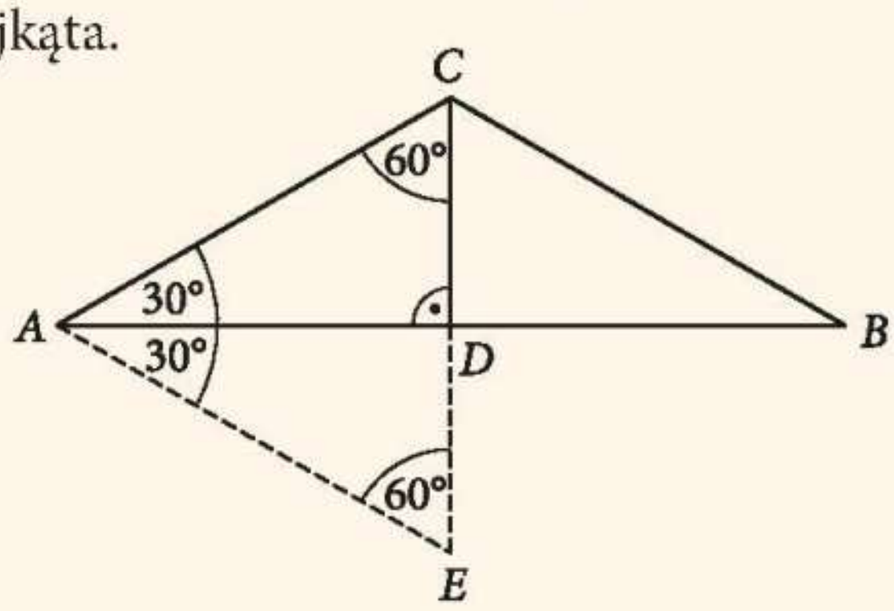
Odp.: Pole rombu jest równe $96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Przykład 2

Pole trójkąta równoramiennego jest równe $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Podstawa tworzy z ramieniem kąt 30°. Obliczymy długość podstawy tego trójkąta.

Rozwiązanie

Jeżeli odetniemy połowę trójkąta wzdłuż wysokości CD i dokleimy odciętą część do połowy AD podstawy tak jak na rysunku, to otrzymamy równoboczny trójkąt AEC o polu takim samym jak pole danego trójkąta, czyli $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Bok a trójkąta AEC obliczymy z równania:



$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3},\ \text{czyli}\ a = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

W trójkącie AEC odcinek AD jest wysokością, zatem $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3$ cm. Odcinek AD jest również połową szukanej podstawy, więc $|AB| = 6$ cm.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku a jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

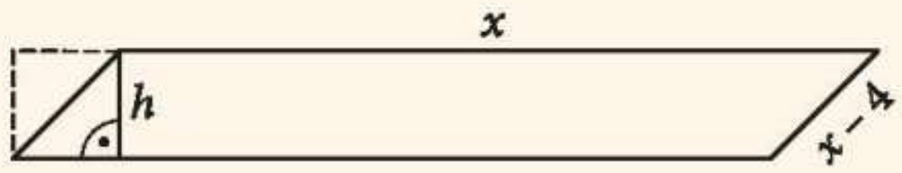
Odp.: Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6 cm.

Przykład 3

Obwód równoległoboku jest równy 12 cm, różnica długości sąsiednich boków wynosi 4 cm, a kąt ostry równoległoboku ma $45°$. Obliczymy pole tego czworokąta.

Rozwiązanie

Jeżeli długość dłuższego boku równoległoboku oznaczymy literą x, to krótszy ma długość równą $(x - 4)$ cm, przy czym $x > 4$.



Połowa obwodu to 6 cm, zatem:

$$x + x - 4 = 6, \text{ stąd } x = 5$$

Równoległobok ma boki równe 5 cm i 1 cm.

Wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego na dłuższy bok jest bokiem kwadratu o przekątnej 1 cm (zob. rysunek), więc:

$$h\sqrt{2} = 1, \text{ czyli } h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$P = x \cdot h = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2$$

Odp.: Pole równoległoboku jest równe $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm^2.

Zadania

3.1. W trójkącie jeden z boków zmniejszono cztery razy. Jak należy zmienić wysokość trójkąta poprowadzoną do tego boku, aby pole nie uległo zmianie?

3.2. Przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od jego boku. Oblicz pole tego kwadratu.

3.3. Prosta poprowadzona przez wierzchołek kwadratu podzieliła go na trójkąt o polu równym 9 i trapez o polu równym 27. Oblicz obwód trapezu.

3.4. Przekątna prostokąta ma długość 6 cm i tworzy z jego bokiem kąt $60°$. Oblicz obwód tego prostokąta.

3.5. Przekątne rombu mają długości 24 cm i 18 cm. Oblicz wysokość rombu.

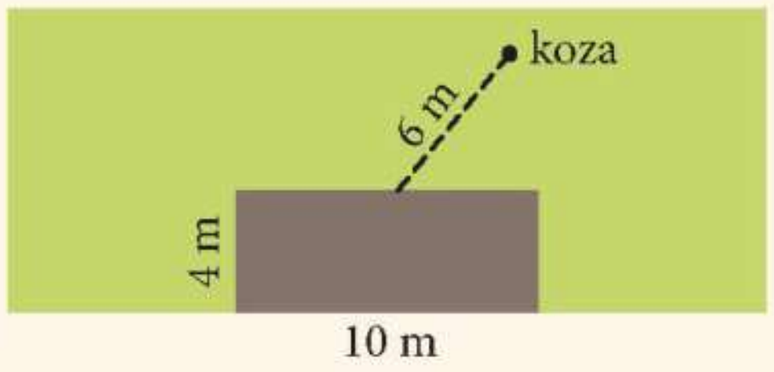
3.6. Równoległobok ma boki o długościach 12 cm i 15 cm. Wysokość opuszczona na krótszy bok jest równa 10 cm. Oblicz wysokość opuszczoną na dłuższy bok.

3.7. Przekątne trapezu równoramiennego przecinają się pod kątem 120° i są dwusiecznymi kątów przy podstawie, a ramiona trapezu mają długość 6 cm. Oblicz pole tego czworokąta.

3.8. W trapezie prostokątnym krótsza podstawa ma długość 4 cm, a kąt rozwarty trapezu ma 120°. Dłuższa przekątna trapezu tworzy z dłuższym ramieniem kąt 30°. Oblicz długości pozostałych boków, pole i obwód trapezu.

3.9. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 48 i 15, a dłuższa przekątna ma długość 52. Oblicz pole trapezu i długość d jego krótszej przekątnej.

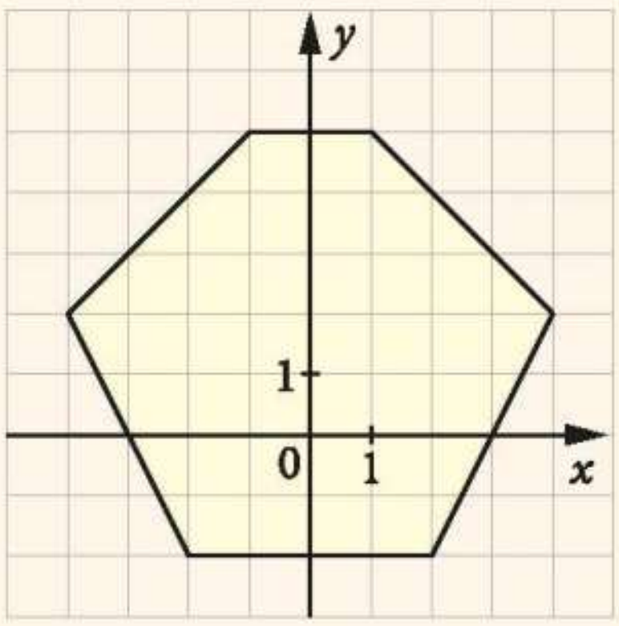
3.10. Do środka dłuższej ściany szopy o podłodze w kształcie prostokąta 10 m × 4 m przywiązana jest koza. Sznurek, na którym jest uwiązana, ma długość 6 m (zob. rysunek). Oblicz, na jakiej powierzchni koza może się paść.



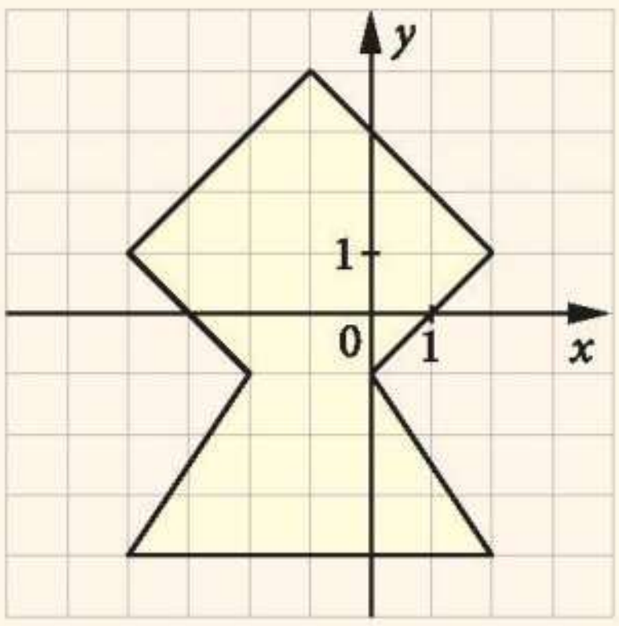
3.11. Każda z trzech figur – koło, kwadrat i trójkąt równoboczny – ma taki sam obwód, równy 10 dm. Która z tych figur ma największe pole, a która najmniejsze?

3.12. Oblicz pole zamalowanej figury.

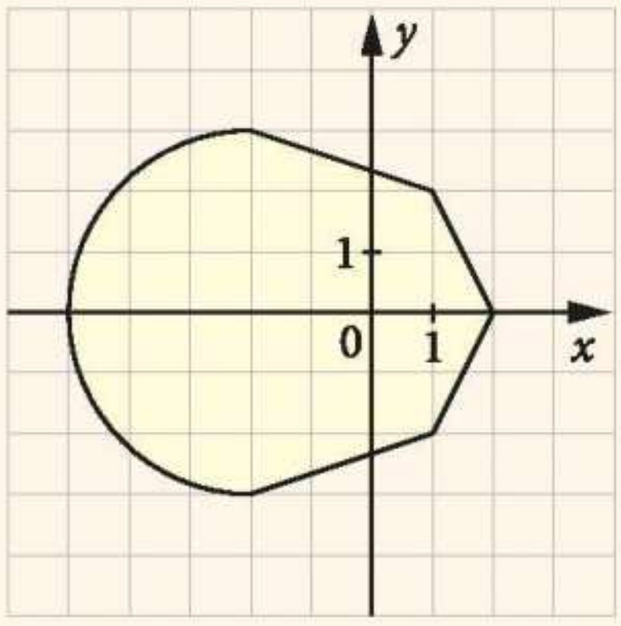
a)



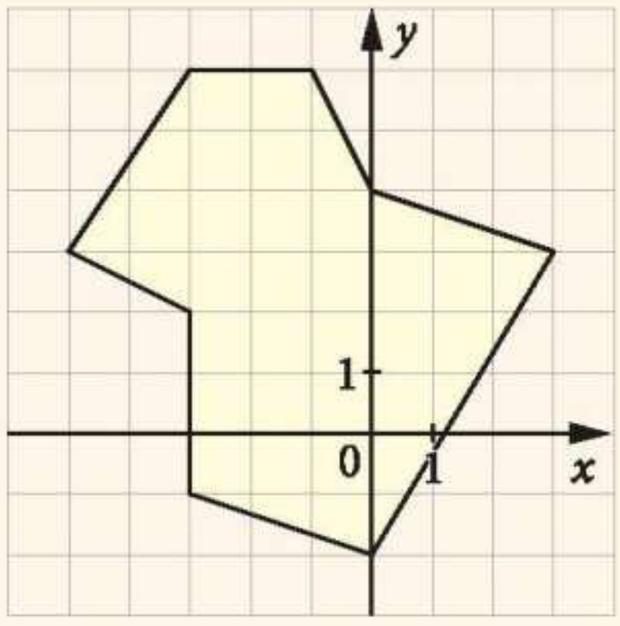
b)



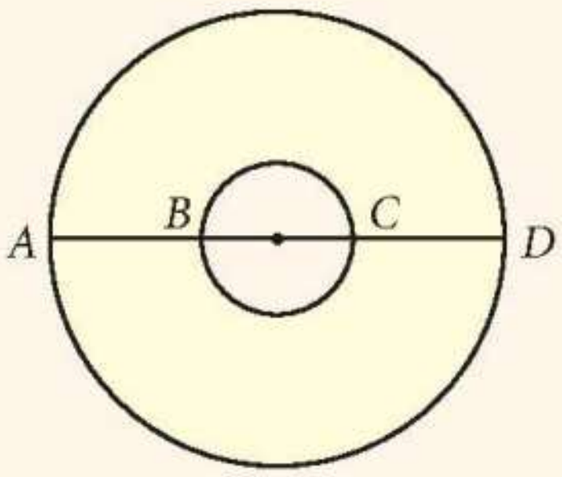
c)



d)



3.13. Punkty B i C dzielą odcinek AD na trzy równe części, każda o długości 6 cm (zob. rysunek). Odcinek AD jest średnicą większego z narysowanych okręgów, a odcinek BC – średnicą mniejszego z nich. Oblicz pole zamalowanej figury.



3.14. Pole trójkąta o kątach 30° i 60° jest równe $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

3.15. Długość jednego boku prostokąta zwiększono o 10%, a długość drugiego zmniejszono o 10%. O ile procent zmieniło się pole prostokąta?

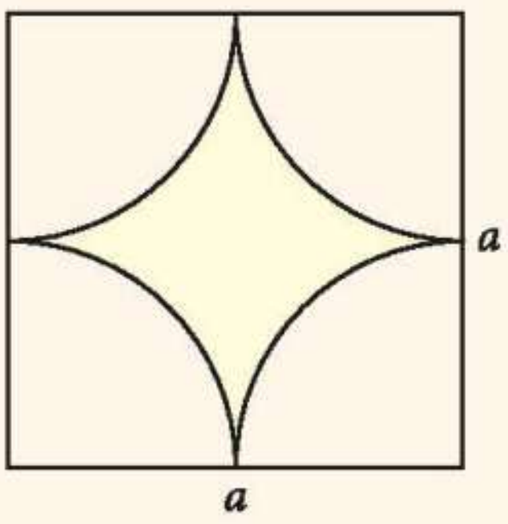
3.16. W kole poprowadzono cięciwę długości 9 cm. Odległość prostej zawierającej tę cięciwę od środka koła jest równa 5 cm. Oblicz promień, pole i obwód koła.

* **3.17.** Oblicz pole trapezu o podstawach długości 6 i 13 oraz ramionach długości 5 i $4\sqrt{2}$.

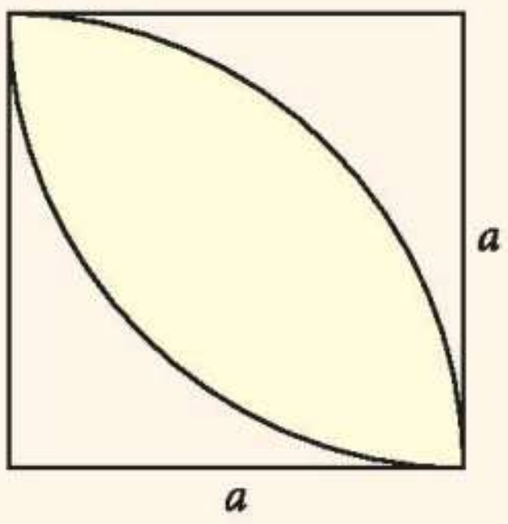
3.18. Według rzymskiej legendy, królewna fenicka Dydona uciekła ze swoimi poddanymi do Afryki. Tam kupiła od króla Jorbasa tylko tyle ziemi, ile udało się nakryć wołową skórą. Dydona pocięła skórę na wąskie paski, związała je i objęła nimi okrągłe miejsce, na którym założono potem Kartaginę. Przyjmij, że długość sznura ze związanych pasków była równa 200 m i oblicz powierzchnię tego obszaru. Zaokrąglij wynik do 1 m^2. Przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

* **3.19.** Zamalowana figura jest ograniczona łukami okręgów o środkach w wierzchołkach danego wielokąta foremnego. Oblicz jej pole.

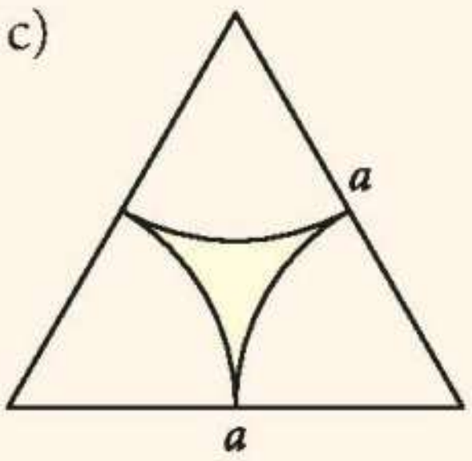
a)



b)



c)



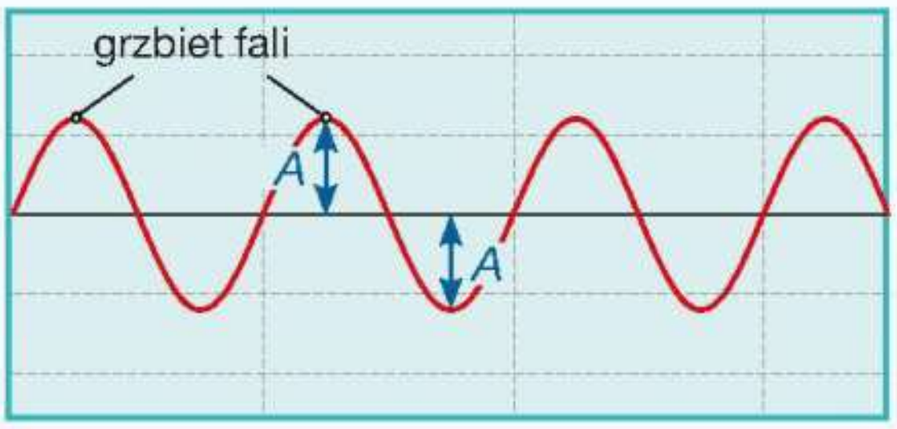
Fala sinusoidalna

Dzięki odpowiedniej aplikacji (np. phyphox) smartfon może pełnić funkcję oscyloskopu. Na ekranie telefonu widać wtedy różne krzywe, które są obrazami rejestrowanych fal dźwiękowych. W przypadku tzw. tonów czystych na ekranie zobaczymy krzywą zwaną sinusoidą.

Każdą taką sinusoidalną krzywą można opisać jako funkcję czasu wzorem: $x(t) = A\sin(2\pi ft)$, gdzie A (amplituda) i f (częstotliwość) to wielkości charakteryzujące daną falę dźwiękową.

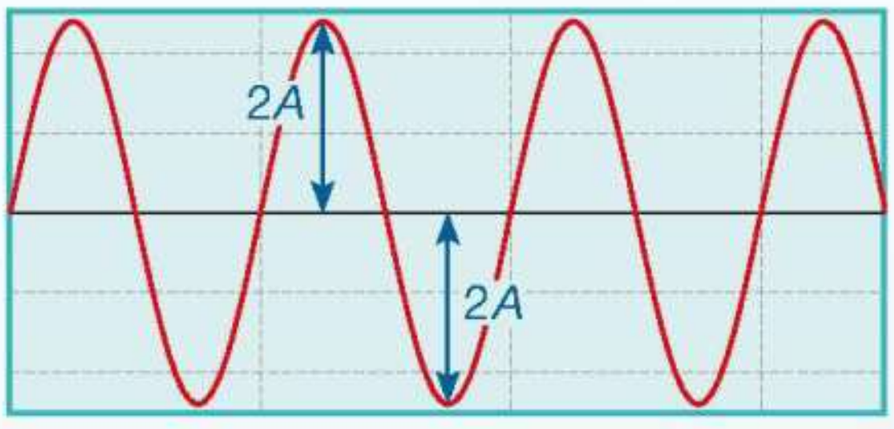
A jak amplituda

Amplituda A to maksymalna odległość od poziomej osi do grzbietu fali.



$x(t) = \mathbf{A}\sin(2\pi ft)$

Jeżeli **podwoimy** amplitudę, sinusoida będzie dwukrotnie wyższa. Otrzymamy **głośniejszy dźwięk**.

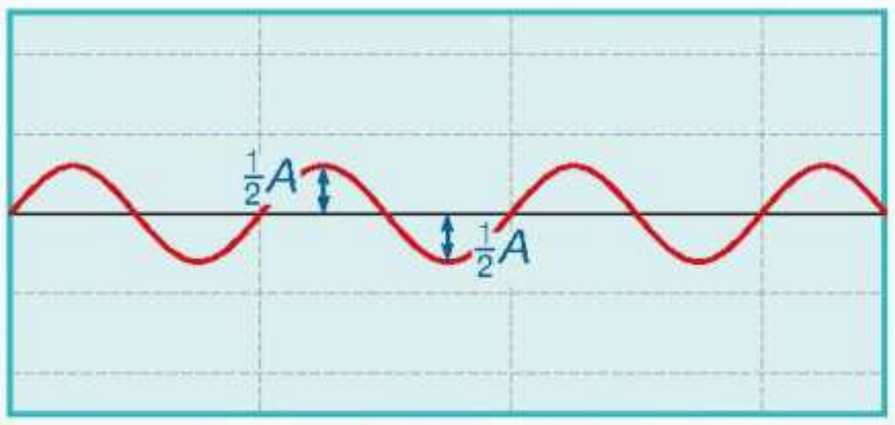


$x(t) = \mathbf{2A}\sin(2\pi ft)$

Niemal wszystkie dźwięki, jakie słyszymy, w tym dźwięki instrumentów muzycznych, składają się z wielu tonów czystych.

Nie tak łatwo zobaczyć na ekranie kształt sinusoidy. Tony czyste możemy usłyszeć w muzyce wytwarzanej elektronicznie. Dźwięk bardzo do nich zbliżony można wydobyć z kamertonu.

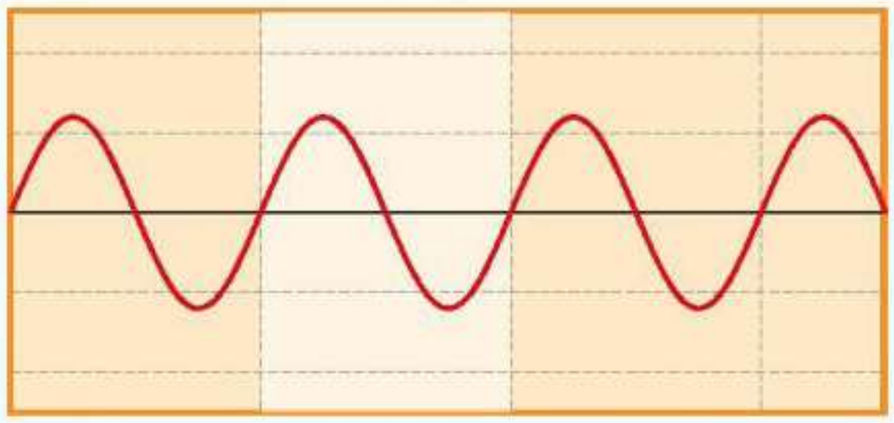
Jeżeli amplitudę **dwukrotnie zmniejszymy**, sinusoida będzie o połowę niższa, a **dźwięk cichszy**.



$$x(t) = \frac{1}{2}A\sin(2\pi ft)$$

f, czyli częstotliwość

Częstotliwość *f* opisuje, jak blisko siebie na ekranie oscyloskopu są kolejne grzbiety fali, czyli ile cyklów fali dociera do naszego ucha w 1 sekundzie. Odbieramy to jako **wysokość dźwięku**.



$$x(t) = A\sin(2\pi\cdot\mathbf{f}\cdot t)$$

Zwiększenie częstotliwości oznacza **wyższy dźwięk**.

$$x(t) = A\sin(2\pi\cdot\mathbf{2f}\cdot t)$$

Zmniejszenie częstotliwości sprawia, że **dźwięk** jest **niższy**.

$$x(t) = A\sin(2\pi\cdot\tfrac{1}{2}\mathbf{f}\cdot t)$$

4. Zastosowania funkcji trygonometrycznych

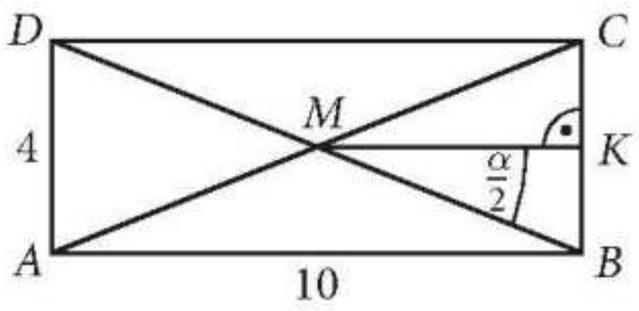
Umiejętności:

- korzystanie z własności funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych
- korzystanie ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

Boki prostokąta mają długości 10 i 4. Wyznaczymy z dokładnością do 1° miarę kąta ostrego α, pod jakim przecinają się przekątne tego prostokąta.

Rozwiązanie



Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.
MK jest odcinkiem prostopadłym do boku BC.

Kąt KMB ma miarę $\frac{\alpha}{2}$.

$|BK| = 2$ i $|MK| = 5$ ⟵ przekątne prostokąta przecinają się w połowie długości

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ ⟵ definicja tangensa w trójkącie prostokątnym BKM

$\frac{\alpha}{2} \approx 22°$ ⟵ z tablic trygonometrycznych

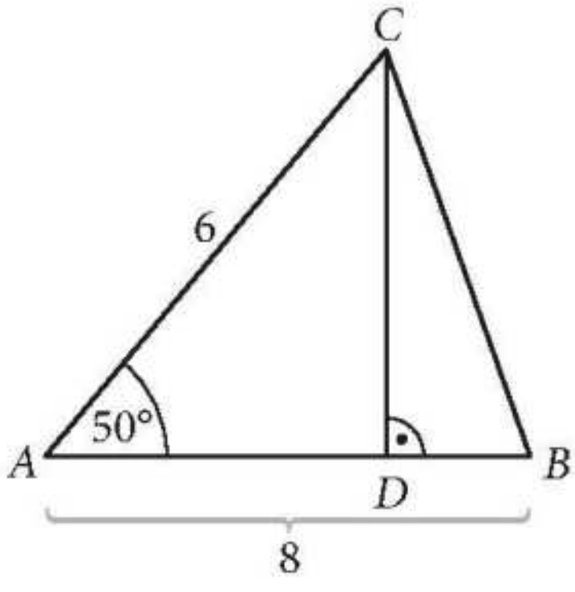
$\sphericalangle BMC = \alpha \approx 44°$

Odp.: Przekątne tego prostokąta przecinają się pod kątem około 44°.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|AC| = 6$ oraz $\sphericalangle CAB = 50°$. Obliczymy pole P tego trójkąta, wynik zaokrąglimy do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie



Prowadzimy wysokość CD z wierzchołka C.
Wówczas:

$$P = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2}$$

Wyznaczamy wysokość w trójkącie prostokątnym ADC.

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \sin\sphericalangle A$$

$$|CD| = |AC| \cdot \sin\sphericalangle A$$

Zatem:

$$P = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \sphericalangle A}{2}$$

$$P = \frac{8 \cdot 6 \cdot \sin 50^\circ}{2} \approx 24 \cdot 0{,}7660 = 18{,}384 \approx 18{,}38$$

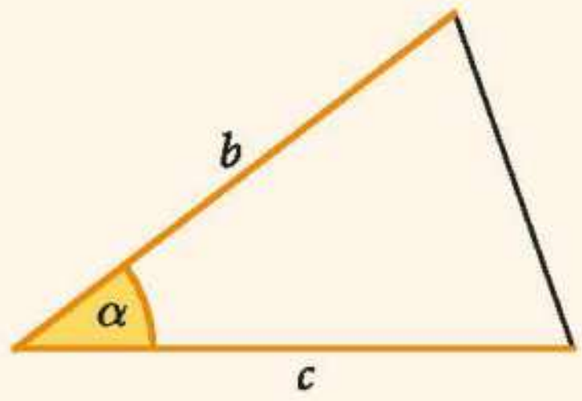
Odp.: Pole trójkąta jest równe około 18,38 cm^2.

Na podstawie rozwiązania przykładu 2 możemy sformułować twierdzenie.

Twierdzenie

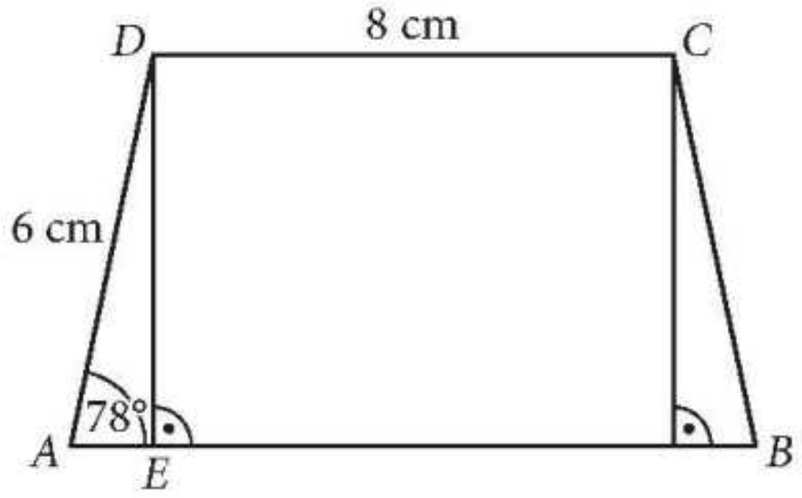
Jeżeli kąt ostry α w trójkącie jest zawarty między bokami o długościach b i c, to pole P tego trójkąta jest równe:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$



Przykład 3 ◀ zad. 4.15

Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 78°, krótsza podstawa ma długość 8 cm, a ramię 6 cm. Obliczymy pole i obwód trapezu, wyniki zaokrąglimy do pierwszego miejsca po przecinku.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

DE jest wysokością trapezu.

$$\frac{|DE|}{|AD|} = \sin 78^\circ \quad \longleftarrow \text{definicja sinusa w trójkącie prostokątnym } AED$$

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \cos 78^\circ \quad \longleftarrow \text{definicja cosinusa w trójkącie prostokątnym } AED$$

$$|DE| \approx 6 \cdot 0{,}9781 = 5{,}8686$$

$$|AE| \approx 6 \cdot 0{,}2079 = 1{,}2474$$

$$|AB| = |DC| + 2 \cdot |AE| \quad \longleftarrow \text{trapez równoramienny}$$

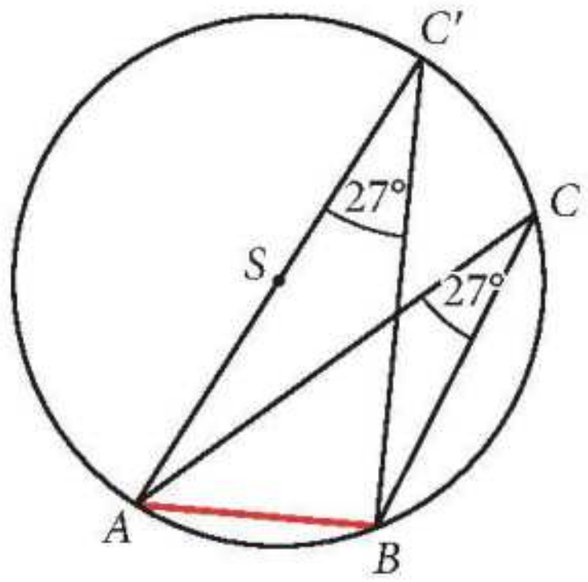
$$obw \approx 2 \cdot 8 + 2 \cdot 1{,}2474 + 2 \cdot 6 \approx 30{,}5 \text{ [cm]}$$

$$P \approx \frac{2 \cdot 8 + 2 \cdot 1{,}2474}{2} \cdot 5{,}8686 \approx 54{,}3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp.: Obwód trapezu jest równy około 30,5 cm, a jego pole około 54,3 cm^2.

Przykład 4 ◂ zad. 4.18

W koło o promieniu 17 cm wpisano kąt o mierze 27°. Kąt ten jest oparty na łuku AB. Obliczymy długość cięciwy AB z dokładnością do 1 mm.



Rozwiązanie

Wpisany kąt jest ostry, więc łuk AB jest mniejszy od półokręgu. Rysujemy okrąg i wpisujemy w niego kąt BCA o mierze 27°.

Prowadzimy średnicę AC'.

$\sphericalangle BC'A = \sphericalangle BCA = 27°$ ⟵ kąty wpisane oparte na tym samym łuku

$\sphericalangle ABC' = 90°$ ⟵ kąt wpisany oparty na średnicy

$|AC'| = 34$ cm ⟵ z danych w treści zadania

$\frac{|AB|}{|AC'|} = \sin 27°$ ⟵ definicja sinusa w trójkącie prostokątnym ABC'

$|AB| = 34 \cdot \sin 27°$

$|AB| \approx 34 \cdot 0{,}4540 = 15{,}436 \approx 15{,}4$ [cm]

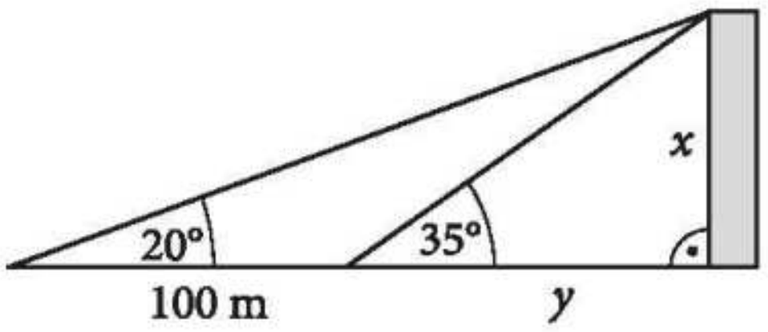
Odp.: Cięciwa AB ma około 15,4 cm długości.

Przykład 5 ◂ zad. 4.24

Trygonometria może się również przydać, jeżeli chcemy oszacować wysokość, np. budynku. Wykonujemy trzy pomiary – zaznaczonych na rysunku kątów i odległości między ich wierzchołkami. Literami x i y oznaczamy odpowiednio szukaną wysokość i odległość budynku od wierzchołka większego z mierzonych kątów.

Otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \operatorname{tg} 35° \\ \frac{x}{y+100} = \operatorname{tg} 20° \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = y \cdot \operatorname{tg} 35° \\ x = (y+100) \cdot \operatorname{tg} 20° \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \operatorname{tg} 35° \\ y \operatorname{tg} 35° = y \operatorname{tg} 20° + 100 \operatorname{tg} 20° \end{cases}$$

Do drugiego równania podstawiamy wartości tangensów i obliczamy niewiadomą y.

$y \approx 108{,}27$

Po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy:

$x \approx 108{,}27 \cdot \operatorname{tg} 35° \approx 108{,}27 \cdot 0{,}7002 \approx 75{,}8$

Odp.: Budynek ma około 76 m wysokości.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 cm i 8 cm, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60°. Ile jest równe pole trójkąta?

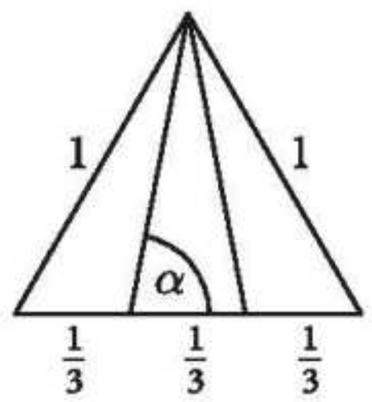
A. $20\ \text{cm}^2$ **B.** $20\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **C.** $10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **D.** $10\ \text{cm}^2$

4.2. Ile wynosi pole równoległoboku o kącie ostrym 30° oraz bokach o długościach 7 cm i 10 cm?

A. $17{,}5\ \text{cm}^2$ **B.** $35\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **C.** $70\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **D.** $35\ \text{cm}^2$

4.3. Wskaż tangens kąta α zaznaczonego na rysunku.

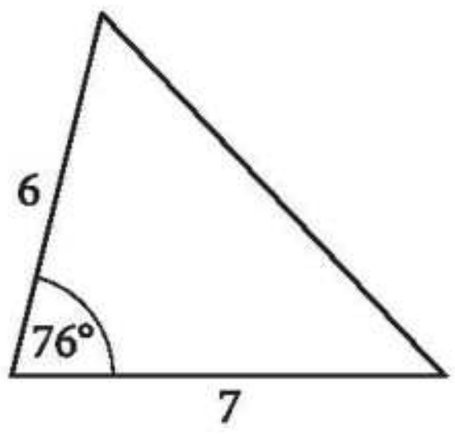
A. $\frac{1}{3}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\sqrt{6}$



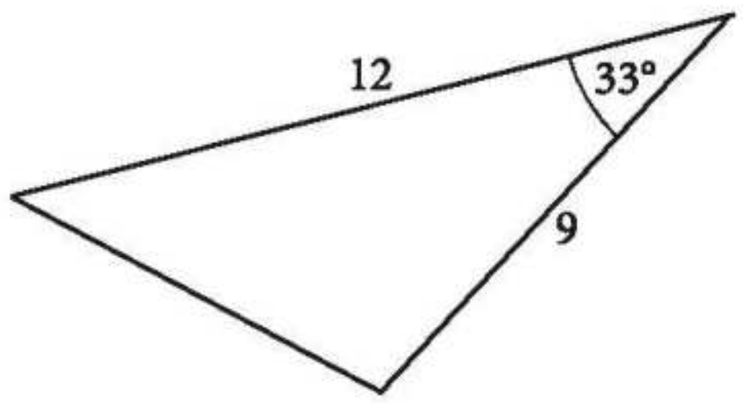
4.4. Wyznacz z dokładnością do 1° kąty między przekątnymi prostokąta, którego obwód jest równy 112, a różnica między długościami boków wynosi 8.

4.5. Oblicz pole trójkąta z dokładnością do 0,1.

a)

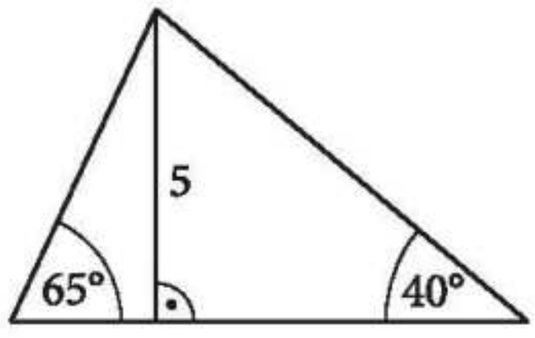


b)

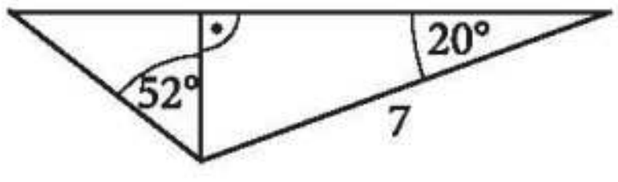


4.6. Oblicz obwód i pole trójkąta z dokładnością do 0,1.

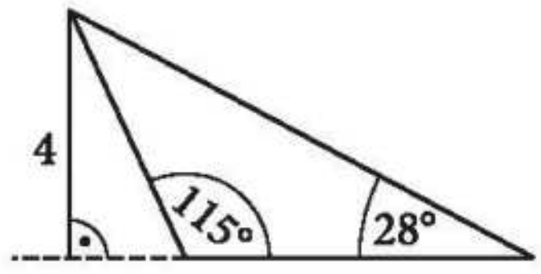
a)



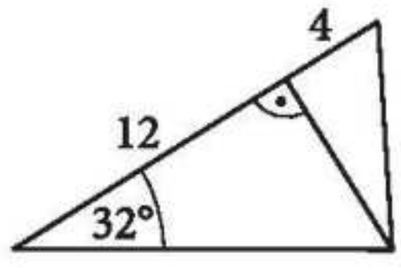
b)



c)



d)



4.7. Wyznacz z dokładnością do 1° kąty równoległoboku, w którym długość jednego z boków jest równa 34 cm, a wysokość opuszczona na drugi bok ma 30 cm.

4.8. Bok rombu stanowi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ jego przekątnej. Wyznacz kąty tego rombu.

4.9. W równoramiennym trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy wierzchołku C ma 68°, a wysokość $|CD| = 15$ cm. Wyznacz długości boków tego trójkąta. Wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.10. W prostokącie, którego krótszy bok jest równy 7 cm, przekątna tworzy z dłuższym bokiem kąt $\alpha = 26°$. Oblicz obwód prostokąta i długość jego przekątnej. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.

4.11. Oblicz pole rombu o boku 6 cm i kącie ostrym 80°. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.12. W rombie o boku 12 cm stosunek długości przekątnych jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz kąty tego rombu i oblicz jego pole.

4.13. W równoległoboku o bokach 12 i 15 stosunek miar sąsiednich kątów jest taki sam jak stosunek długości sąsiednich boków. Oblicz pole równoległoboku. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.14. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 53°, a przekątna długości 20 cm jest prostopadła do ramienia. Oblicz pole trapezu. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

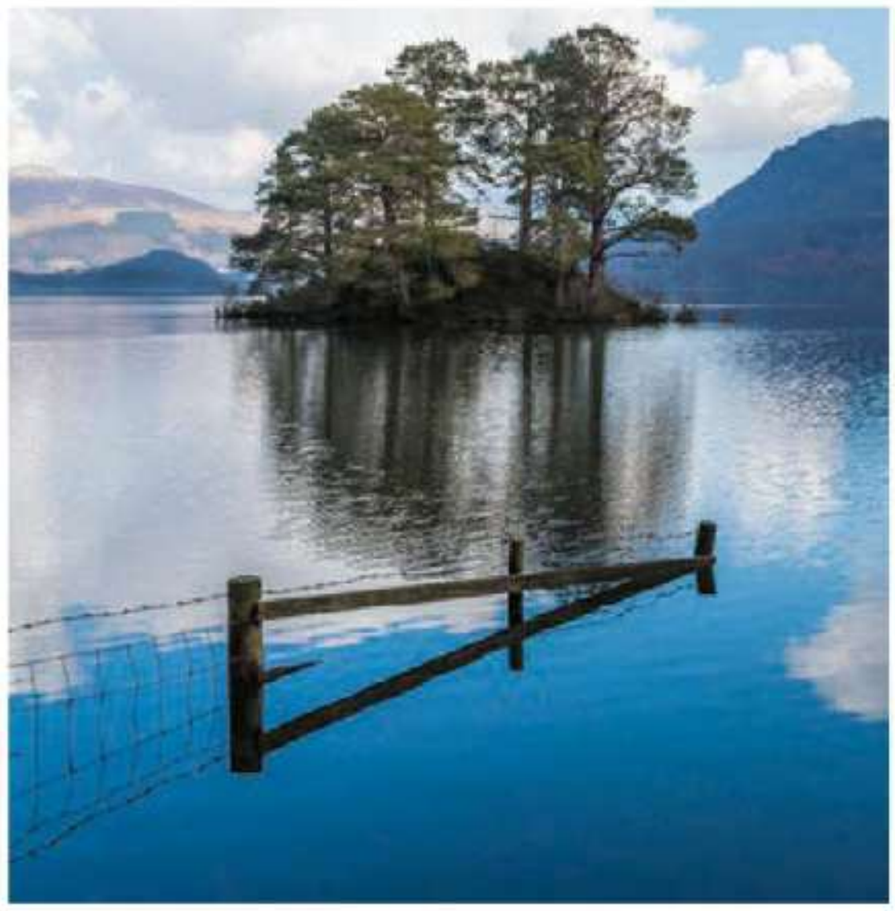
4.15. Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 52°, dłuższa podstawa ma długość 20 cm, a ramię 12 cm. Oblicz pole tego trapezu. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.16. W równoramiennym trójkącie ABC $(|AC| = |BC|)$ kąty przy podstawie mają po 70°, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2 cm. Wyznacz długości boków tego trójkąta. Wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.17. W trójkącie ABC kąt BAC jest równy 37°, $|AB| = 56$. Wysokość CD dzieli bok AB tak, że $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{5}{9}$. Oblicz pole, obwód oraz wysokości trójkąta ABC. Wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.18. Kąt wpisany w koło o promieniu 10 cm jest oparty na łuku AB i ma miarę 35°. Oblicz długość cięciwy AB. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

4.19. Na trójkącie równoramiennym ABC opisano okrąg o środku O. Podstawa AB tego trójkąta tworzy kąt α z promieniem OA okręgu, $|OA| = 30$ i $\cos\alpha = 0{,}6$. Oblicz pole i obwód trójkąta. Rozważ dwa przypadki.



4.20. Na jeziorze, dokładnie na północ od przystani, Piotrek zobaczył niewielką wyspę. Po przejściu 100 metrów na zachód, widział ją w kierunku odchylonym od północy o 12°. Jak daleko od przystani leży wyspa?

4.21. Na równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu równym α znajduje się ciało o ciężarze F. Działa na nie siła o wartości $F \cdot \sin\alpha$ powodująca zsuwanie się ciała po równi oraz siła $F \cdot \cos\alpha$ wywołująca nacisk ciała na równię.

a) Oblicz siłę, z jaką naciska na równię ciało o ciężarze 1200 N leżące na równi nachylonej do poziomu pod kątem 20°.

b) Ciało o ciężarze 300 N zsuwa się z równi pod wpływem siły o wartości 120 N. Jaki jest kąt nachylenia tej równi do poziomu?

4.22. W chwili gdy helikopter przelatywał nad głową Jurka, oddalony od Jurka o 200 m Wojtek widział ten helikopter pod kątem 35° do poziomu. Na jakiej wysokości leciał helikopter?

4.23. Lądujący samolot minął początek pasa startowego na wysokości 90 m. Pilot widział wtedy koniec pasa pod kątem 2° do poziomu. Jaką długość ma pas startowy?

4.24. Drabina ma 6 m długości. Aby stabilnie stała, jej kąt nachylenia do podłoża nie powinien przekraczać 65°. Czy korzystając z tej drabiny, można wejść na balkon drugiego piętra budynku, w którym jedna kondygnacja ma ok. 2,8 m wysokości?

4.25. Państwo Mamutowie jechali na wakacje szosą, która przez dłuższy odcinek biegnie prosto bez żadnych zakrętów. W pewnej chwili spostrzegli po prawej stronie szosy pod kątem 20° do kierunku jazdy ruiny zamku, które zamierzali zwiedzić. Po przejechaniu 2 km ruiny stały się widoczne pod kątem 50° do kierunku jazdy. Prostopadle do szosy prowadzi droga dojazdowa do zabytku. Ile jeszcze metrów mieli do skrzyżowania z tą drogą? Jaka jest długość drogi dojazdowej?

4.26. Cięciwa AB okręgu o promieniu $r = 25$ jest bokiem prostokąta $ABCD$. Bok DC jest styczny do tego okręgu, a kąt środkowy oparty na cięciwie AB ma miarę 148°. Oblicz obwód prostokąta. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.27. Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma długość a, krótsza podstawa – długość b, a kąt ostry ma miarę α. Wykaż, że pole tego trapezu jest równe $\frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

4.28. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego ma długość d i jest prostopadła do dłuższego ramienia. Kąt ostry trapezu ma miarę α. Wykaż, że obwód trapezu jest równy $d\left(\sin\alpha + \cos\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$.

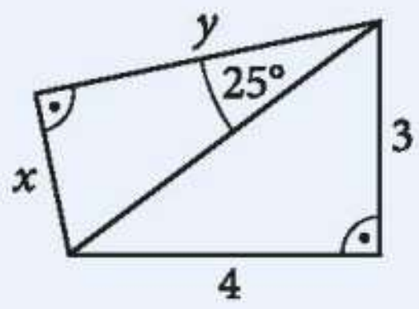
4.29. Kąty ostre przy dłuższej podstawie trapezu mają miary α i β, zaś podstawy mają długości a i b $(a > b)$. Wykaż, że pole trapezu jest równe $\frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

Prosto do matury

1. Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości $|AB| = 12$, $|CD| = 8$, a ramiona mają długość 6. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\sin\sphericalangle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\cos\sphericalangle ABC = \frac{3}{2}$ **C.** $\operatorname{tg}\sphericalangle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{8}$

2. Wyznacz x i y z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Skorzystaj z informacji podanych na rysunku obok.



3. Wierzchołek 70-metrowego komina elektrociepłowni stojącej na płaskim terenie widać z pewnego miejsca w okolicy pod kątem 8° do poziomu. Jaka jest odległość z tego miejsca do podstawy komina? Wynik podaj z dokładnością do 10 m.

4. Pole rombu jest równe 40, a jego kąt ostry ma miarę 50°. Oblicz długości przekątnych rombu z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

5. W trapezie równoramiennym przekątna o długości d tworzy z dłuższą podstawą kąt α. Wykaż, że pole trapezu jest równe $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

5. Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego

Umiejętności:

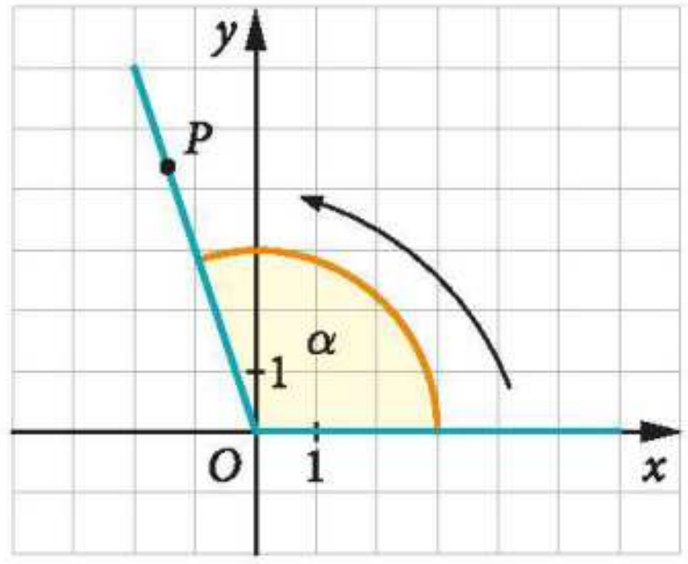
- wykorzystywanie definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°
- stosowanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

Funkcji trygonometrycznych używamy często podczas obliczania pól trójkątów (a więc i pól wielokątów). Z wygodnego wzoru $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ korzystaliśmy dotąd tylko wtedy, gdy kąt zawarty między danymi bokami trójkąta był ostry. A przecież trójkąt ma jednoznacznie określone pole również wtedy, gdy kąt między takimi bokami jest prosty lub rozwarty. Rozszerzymy zatem definicje funkcji trygonometrycznych tak, aby dotyczyły kątów o miarach od 0° do 180°.

W bardziej zaawansowanej matematyce definiuje się funkcje trygonometryczne dla dowolnego kąta.

W tym celu umieścimy kąty w układzie współrzędnych. Przyjmiemy przy tym kilka reguł.

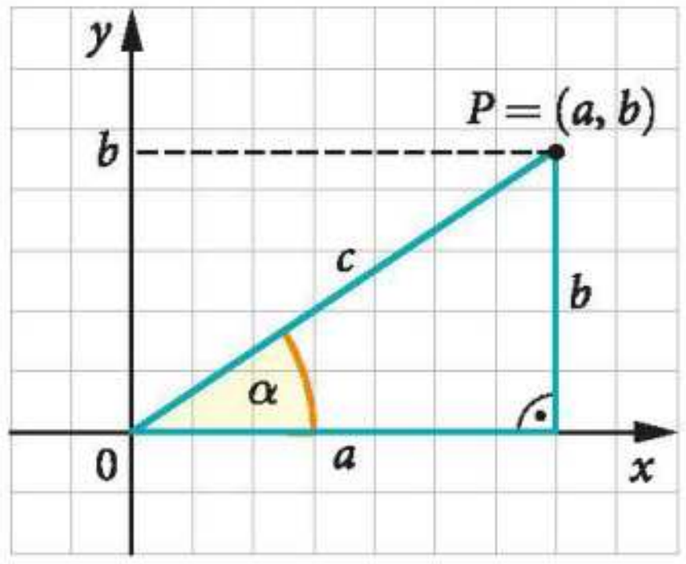
- Wierzchołek kąta α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ jest początkiem układu współrzędnych.
- Jedno z ramion (tzw. ramię **początkowe**) kąta α pokrywa się z dodatnią półosią x. Drugie, **końcowe** ramię, które będziemy również nazywać **ramieniem wodzącym** kąta α, jest odłożone w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
- Jeżeli wybierzemy na ramieniu wodzącym kąta α punkt P różny od początku układu O, to odcinek OP nazywać będziemy **promieniem wodzącym punktu** P. Tak samo będziemy nazywać długość odcinka OP. Zatem liczba $r = |OP|$ jest również promieniem wodzącym punktu P.



Można sobie wyobrazić, że ramię początkowe jest nieruchome, a końcowe zatacza półokrąg, wyznaczając po drodze wszystkie kąty od 0° do 180°. Stąd w nazwie słowo „wodzący".

Uwaga: Słowa „promień", podobnie jak w definicji okręgu, używamy tu w dwóch znaczeniach: odcinek albo jego długość. Nie prowadzi to do nieporozumień, ponieważ z kontekstu wynika, o które znaczenie chodzi.

Rozszerzenie pojęcia funkcji trygonometrycznych nie powinno zmieniać ich wcześniejszych definicji. Kiedy umieścimy trójkąt prostokątny tak jak na rysunku, otrzymamy:



$$P = (a, b)$$
$$r = |OP| = c$$

Współrzędne punktu P są równocześnie długościami przyprostokątnych, zatem zgodnie z przyjętymi definicjami:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Poniższe definicje są naturalnym rozszerzeniem tych związków.

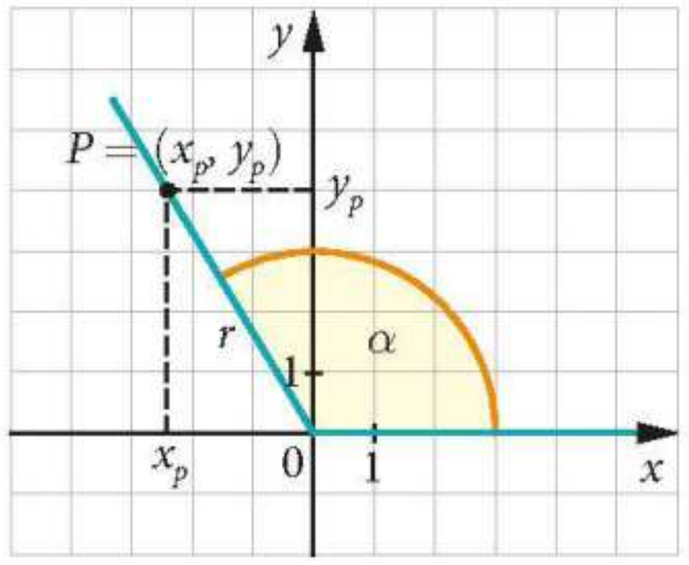
Definicja

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu, przy założeniu, że ta odcięta jest różna od zera.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta α, a r jest promieniem wodzącym tego punktu, to:



$$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x_P}{r}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

Ponadto, skoro $P = (x_P, y_P)$, to:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

Przykład 1 ◀ zad. 5.6

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta.

Rozwiązanie

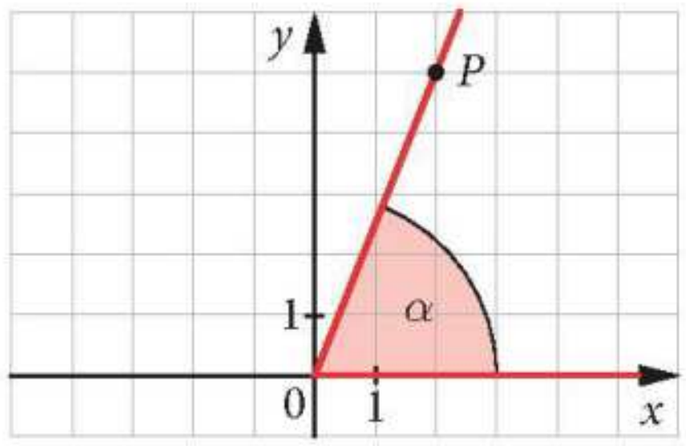
a) $P = (2, 5)$

Obliczamy promień wodzący punktu P:

$r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Zatem:

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$

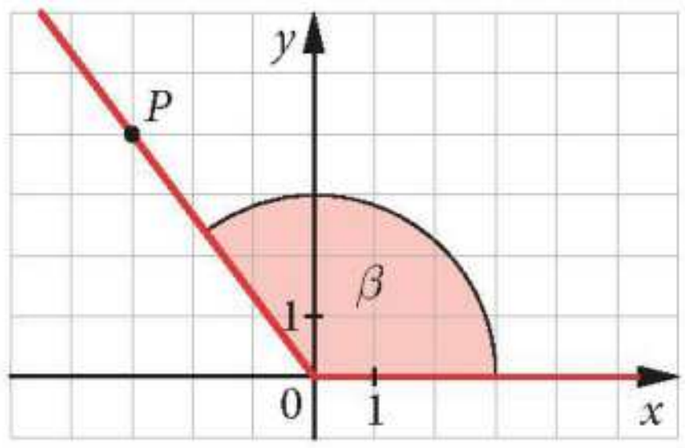


b) $P = (-3, 4)$

$r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Zatem:

$\sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{4}{3}$



Zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne za pomocą stosunków liczb związanych z punktem wybranym na ramieniu wodzącym. Podobnie jak w przypadku trójkąta prostokątnego wykazuje się, że wartości tych stosunków nie zależą od wyboru punktu (dowód tego faktu pominiemy). Czasem wygodnie jest wybrać punkt P tak, aby:

$|OP| = r = 1$

Wówczas:

$\sin\alpha = y_P$ i $\cos\alpha = x_P$

Jeżeli promień wodzący punktu P jest równy 1, to $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Przykład 2

Niech $P = (x_P, y_P)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wodzącym kąta α oraz $r = |OP| = 1$. Obliczymy wartości funkcji $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, gdy

a) $\alpha = 0°$. b) $\alpha = 90°$. c) $\alpha = 180°$.

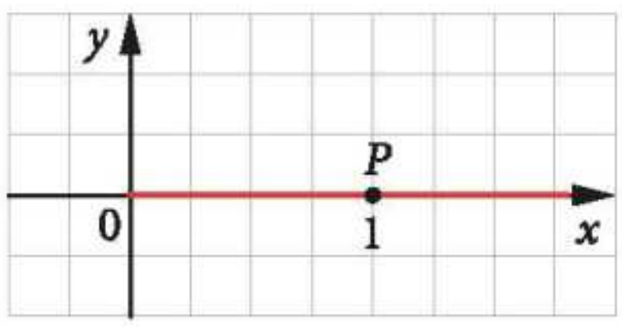
Rozwiązanie

a) $\alpha = 0°$

Ramię wodzące kąta pokrywa się z dodatnią półosią x, więc $y_P = 0$, $x_P = 1$.

Zatem:

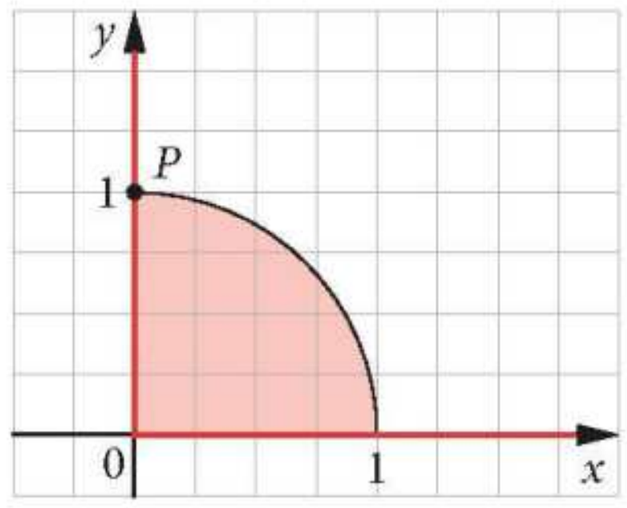
$\sin 0° = 0, \quad \cos 0° = 1, \quad \operatorname{tg} 0° = 0$



b) $\alpha = 90°$

Ramię wodzące kąta pokrywa się z dodatnią półosią y, zatem $y_P = 1$, $x_P = 0$. Nie istnieje tangens kąta 90° (nie jest wykonalne dzielenie przez 0), natomiast:

$\sin 90° = 1, \quad \cos 90° = 0$

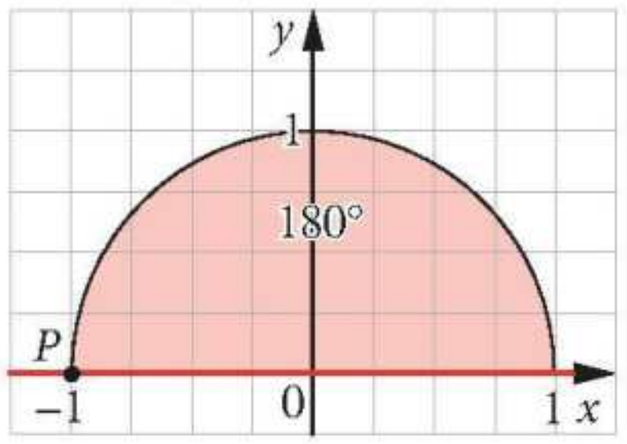


c) $\alpha = 180°$

Ramię wodzące kąta pokrywa się z ujemną półosią x, więc $y_P = 0$, $x_P = -1$.

Zatem:

$\sin 180° = 0, \quad \cos 180° = -1, \quad \operatorname{tg} 180° = 0$

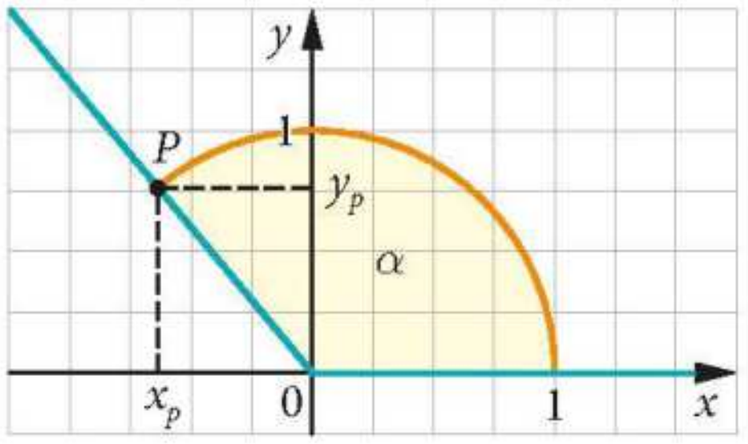


Podsumujmy:

α	0°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	nie istnieje	0

Bezpośrednio z definicji wynika, że dla kątów rozwartych wartości tangensa i cosinusa są ujemne (bo $x_P < 0$).

α	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$
$\sin\alpha$	+	+
$\cos\alpha$	+	−
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−

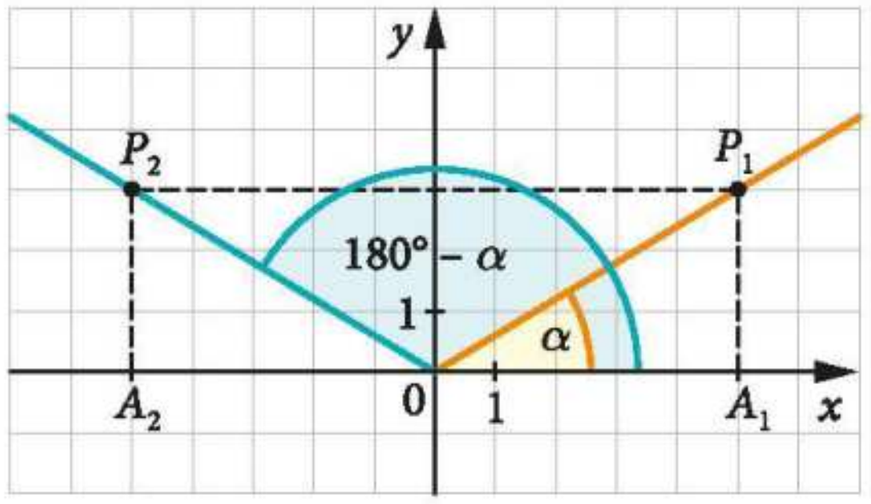


Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta rozwartego można obliczyć za pomocą wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Służą do tego tzw. **wzory redukcyjne**. Wyprowadzimy niektóre z nich.

Każdy kąt rozwarty możemy zapisać w postaci $180° - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym. Na przykład:

- $140° = 180° - 40°, \quad \alpha = 40°$
- $100° = 180° - 80°, \quad \alpha = 80°$
- $175° = 180° - 5°, \quad \alpha = 5°$
- $97° = 180° - 83°, \quad \alpha = 83°$

Jeżeli narysujemy kąty $180° - \alpha$ oraz α w układzie współrzędnych, to ich ramiona wodzące będą symetryczne względem osi y. Wynika to od razu z przystawania odpowiednich trójkątów prostokątnych.



Wystarczy wybrać punkty P_1 i P_2 tak, aby $|OP_1| = |OP_2|$.

Wówczas $\triangle OA_1P_1 \equiv \triangle OA_2P_2$ na mocy cechy kbk $(\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha)$.

Jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (-a, b)$. $|OP_1| = |OP_2| = r$, więc:

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{b}{r} = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli α jest kątem ostrym, to:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Przykład 3 ◀ zad. 5.7

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kątów 120° i 150°.

Rozwiązanie

- $120° = 180° - 60°$

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$$

- $150° = 180° - 30°$

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Przykład 4 ◀ zad. 5.10

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = -5{,}0067$. Wyznaczymy miarę kąta α z dokładnością do 1°.

Rozwiązanie

$\operatorname{tg}\beta = 5{,}0067$ ⟵ β – pomocniczy kąt ostry

$\beta \approx 79°$ ⟵ wartość kąta β odczytana z tablic

$\alpha = 180° - \beta$ ⟵ $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$

$\alpha \approx 101°$

W przykładzie 2 przyjmowaliśmy, że punkt wybierany na ramieniu wodzącym kąta jest oddalony o 1 od jego wierzchołka ($r = 1$). Czasami warto postąpić inaczej.

Przykład 5 ◀ zad. 5.12, 5.13

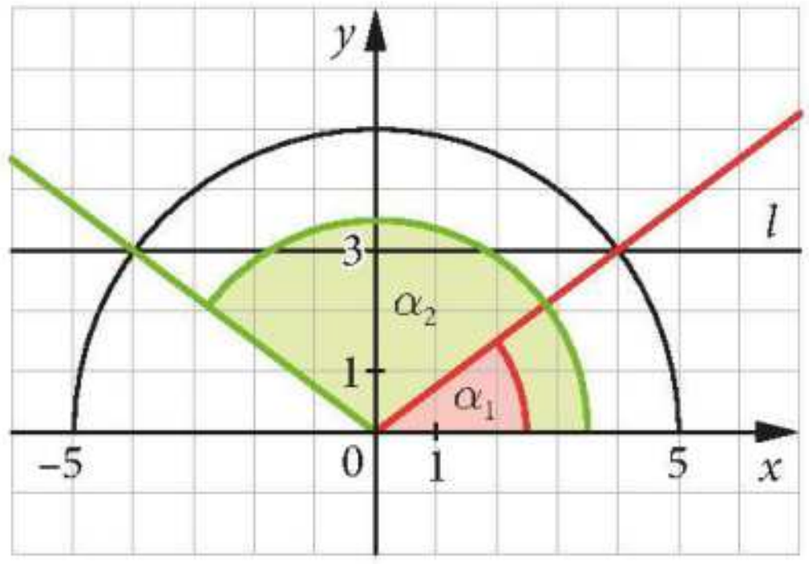
Znamy wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego α. Skonstruujemy ten kąt.

Rozwiązanie

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

Z definicji $\sin\alpha = \frac{y_P}{r}$. Przyjmujemy $y_P = 3$, $r = 5$ i wykonujemy konstrukcję:

- rysujemy nad osią x półokrąg o środku w punkcie (0, 0) i promieniu $r = 5$,
- rysujemy prostą l równoległą do osi x, przechodzącą przez punkt (0, 3),
- z punktu (0, 0) prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej l z półokręgiem – jest ona drugim ramieniem kąta (pierwszym jest dodatnia półoś x).

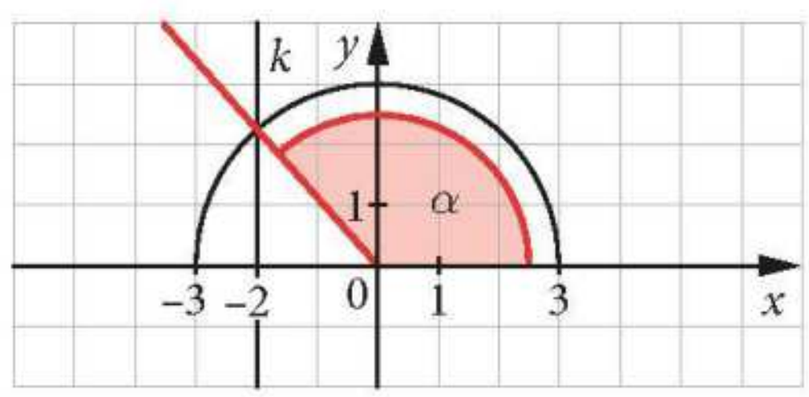


Prosta l przecina półokrąg w dwóch punktach, więc otrzymujemy dwa rozwiązania zadania: kąt α_1 oraz kąt α_2.

b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$

$\cos\alpha = \frac{x_P}{r}$, więc przyjmujemy $x_P = -2$ i $r = 3$, zatem:

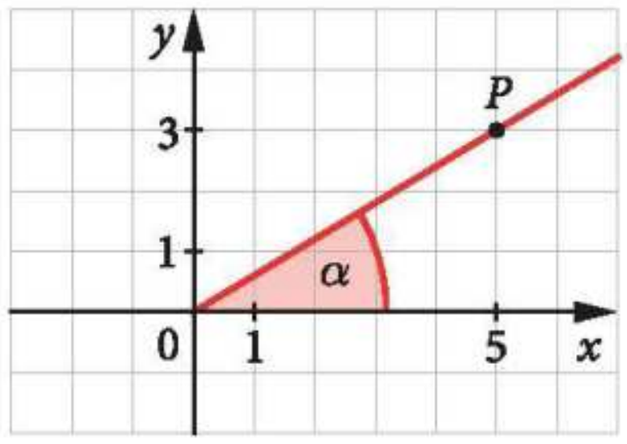
- rysujemy nad osią x półokrąg o środku w punkcie (0, 0) i promieniu $r = 3$,
- rysujemy prostą k równoległą do osi y, przechodzącą przez punkt (−2, 0),
- z punktu (0, 0) prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej k z półokręgiem.



Jedynym rozwiązaniem zadania jest kąt α.

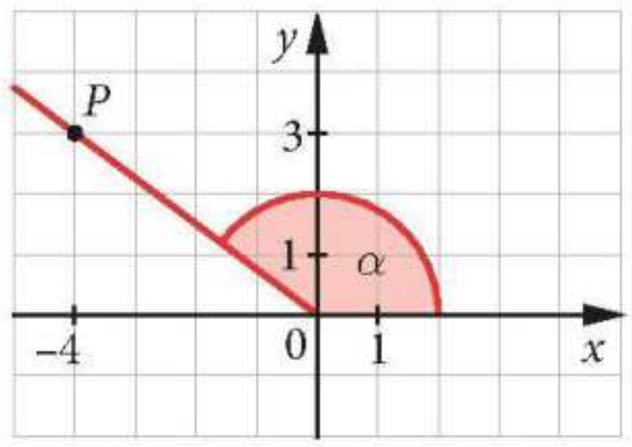
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$

Jeżeli skorzystamy z definicji tangensa $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}\right)$, to zauważymy, że żądaną równość spełniają albo dwie liczby dodatnie, albo dwie ujemne. Dla kąta $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ tylko pierwszy warunek może być spełniony, zatem otrzymamy jeden kąt α z ramieniem wodzącym poprowadzonym przez punkt o współrzędnych (5, 3).



d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

Teraz jedna ze współrzędnych musi być dodatnia, a druga ujemna. Jedynym rozwiązaniem jest kąt α z ramieniem wodzącym poprowadzonym przez punkt o współrzędnych (−4, 3).



Na podstawie rozważań dotyczących wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych (s. 321–322) oraz przykładu 5 sformułujemy wniosek, którego dowód pomijamy.

Wniosek

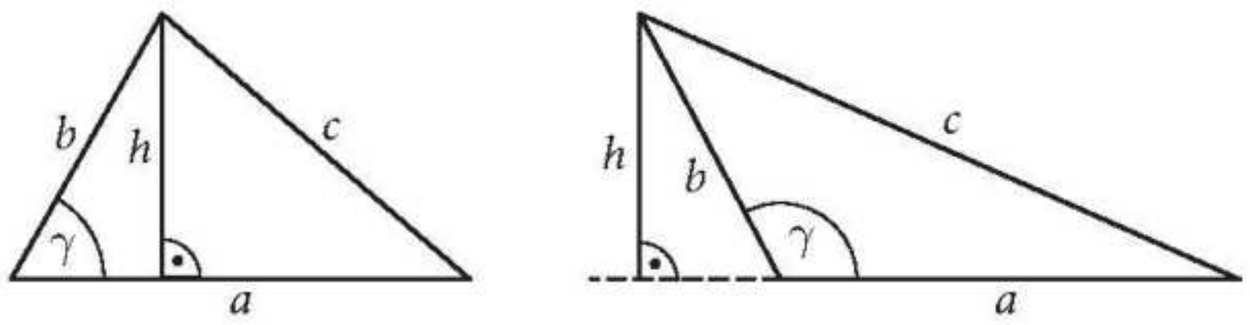
Niech $\alpha \in \langle 0°; 180°\rangle$. Wtedy:

- dla każdego $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ istnieje jeden kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = a$;
- $\operatorname{tg}\alpha = 0$ dla $\alpha = 0°$ lub $\alpha = 180°$;
- dla każdego $a \in \langle -1; 1\rangle$ istnieje jeden kąt α taki, że $\cos\alpha = a$;
- dla każdego $a \in \langle 0; 1)$ istnieją dwa kąty α_1, α_2 takie, że $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = a$;
- $\sin\alpha = 1$ dla $\alpha = 90°$.

Wróćmy do problemu wskazanego na początku tematu. Chcemy obliczyć pole trójkąta o znanych długościach dwóch boków i mierze kąta między tymi bokami.

Oznaczmy dane boki literami a i b oraz kąt między nimi literą γ.

Prowadzimy wysokość h z wierzchołka różnego od wierzchołka kąta γ.



Jeżeli γ jest kątem ostrym, to $h = b \cdot \sin\gamma$.

Jeżeli γ jest kątem rozwartym, to $h = b \cdot \sin(180° - \gamma) = b \cdot \sin\gamma$.

Po podstawieniu obliczonej wysokości do wzoru na pole trójkąta otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

czyli prawdziwy jest wzór $P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Powiemy, że **pole trójkąta jest równe połowie iloczynu jego boków przez sinus kąta zawartego między tymi bokami**.

Przykład 6 ◀ zad. 5.14

Obliczymy pole trójkąta ABC, w którym $|AB| = 3$, $|BC| = 5$ i $\sphericalangle ABC = 133°$. Wynik zaokrąglimy do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

$$133° = 180° - 47°$$

$$\sin 133° = \sin(180° - 47°) = \sin 47° \approx 0{,}7314$$

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 133° = \frac{15}{2} \cdot \sin 47° \approx \frac{15}{2} \cdot 0{,}7314 \approx 5{,}49$$

Odp.: Trójkąt ABC ma pole równe około 5,49.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Ile jest równy $\cos 150°$?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.2. Kąt α jest wypukły, jego ramię wodzące przechodzi przez punkt P i $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{11}$. Które z podanych współrzędnych może mieć punkt P?

A. $(-11, 7)$ **B.** $(-11, -7)$ **C.** $(-7, 11)$ **D.** $(7, -11)$

5.3. Wskaż liczbę równą $\cos 147°$.

A. $\sin 33°$ **B.** $\cos 33°$ **C.** $-\sin 33°$ **D.** $-\cos 33°$

5.4. Narysuj w układzie współrzędnych za pomocą kątomierza kąty: 70°, 120°, 150°, 175°, przy zachowaniu reguł ze s. 343.

5.5. Narysuj w układzie współrzędnych kąt, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt. Odczytaj przy użyciu kątomierza miarę tego kąta.

a) $A = (2, 3)$ b) $B = (-3, 3)$ c) $C = (-1, 5)$ d) $D = (4, 3)$

5.6. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

a) $(3, 4)$ c) $(-4, 2)$ e) $(-1, 4)$ g) $(-4, 1)$

b) $(-1, 3)$ d) $(12, 5)$ f) $(-2, 5)$ h) $\left(-5, \sqrt{7}\right)$

5.7. Oblicz dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta 135°. Nie korzystaj z tablic ani kalkulatora.

5.8. Wyznacz podaną liczbę. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 110°$ c) $\cos 172°$ e) $\sin 129°$ g) $\cos 160°$

b) $\operatorname{tg} 98°$ d) $\operatorname{tg} 116°$ f) $\operatorname{tg} 153°$ h) $\operatorname{tg} 172°$

5.9. Dany jest cosinus kąta wypukłego α. Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1°. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

a) $\cos\alpha = -0{,}2079$ c) $\cos\alpha = -0{,}89$

b) $\cos\alpha = -0{,}9272$ d) $\cos\alpha = -0{,}05$

5.10. Dany jest tangens kąta wypukłego α. Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1°. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}9325$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}1405$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}43$ d) $\operatorname{tg}\alpha = -4{,}6$

5.11. Dany jest sinus kąta wypukłego α. Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1°. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

a) $\sin\alpha = 0{,}6428$ b) $\sin\alpha = 0{,}9877$ c) $\sin\alpha = 0{,}85$ d) $\sin\alpha = 0{,}8$

5.12. Skonstruuj kąt rozwarty α o podanej wartości sinusa lub cosinusa.

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{5}{7}$ c) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ d) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

5.13. Skonstruuj kąt wypukły α o podanej wartości tangensa.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{7}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -3$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = -5$

5.14. Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) pole trójkąta ABC, w którym

a) $|AB| = 16$, $|AC| = 22$, $\sphericalangle CAB = 140°$.

b) $|BC| = 9$, $|AC| = 12$, $\sphericalangle BCA = 127°$.

c) $|AB| = 9$, $|BC| = 12$, $\sphericalangle ABC = 100°$.

d) $|BC| = |AC| = 16$, $\sphericalangle BCA = 144°$.

5.15. Oblicz pole równoległoboku o przekątnych długości 10 i 6 oraz kącie między nimi równym 140°. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

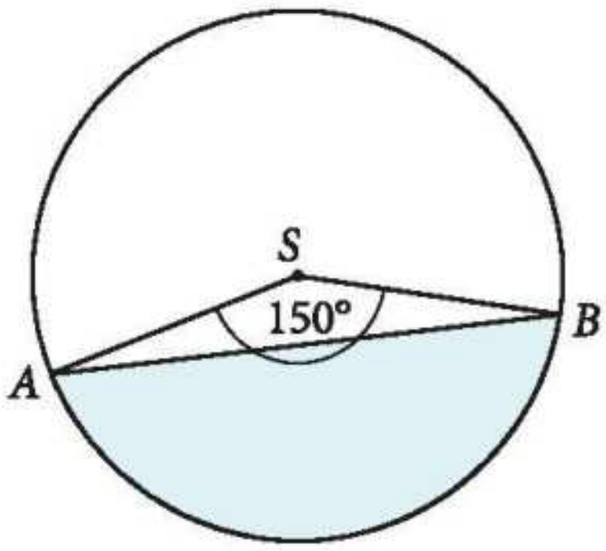
5.16. Długości boków trójkąta ABC są równe $|AB| = 18$ i $|AC| = 14$, a jego pole wynosi 63. Kąt CAB jest rozwarty. Oblicz miarę tego kąta.

5.17. Ramię trójkąta równoramiennego ABC ma długość 24, a jego pole jest równe $144\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta między ramionami trójkąta.

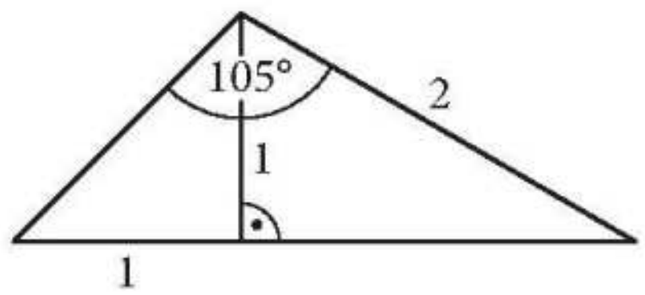
D **5.18.** Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą ten równoległobok na cztery części o równych polach.

5.19. W trapezie prostokątnym o podstawach długości 5 cm i 12 cm tangens kąta rozwartego jest równy -2. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

5.20. Promień okręgu o środku S jest równy 12 cm (zob. rysunek). Oblicz pole zamalowanego obszaru.



D * **5.21.** Wykorzystaj podany rysunek i wykaż, że $\sin 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.



Prosto do matury

1. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt $(-24, 10)$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ **B.** $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$

2. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt $(-2, 3)$.

3. Kąt α jest wypukły i $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$. Wyznacz za pomocą tablic trygonometrycznych lub kalkulatora miarę tego kąta z dokładnością do 1°.

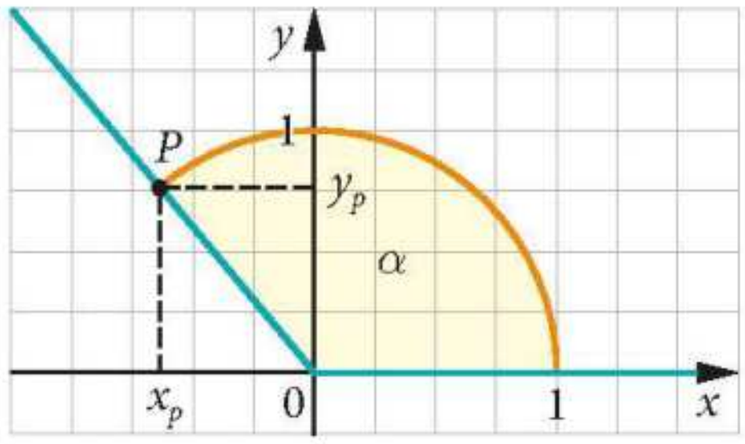
4. Oblicz pole trójkąta ABC, w którym $|AB| = 8$, $|BC| = 12$ i $\sphericalangle ABC = 152°$. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

D **5.** Wykaż, że $\frac{\sin 120° \cdot \operatorname{tg} 135° - \cos 180°}{\cos 150° \cdot \sin 90°} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$.

6. Własności funkcji trygonometrycznych

Umiejętności:
- wykorzystywanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

Omówimy teraz podstawowe własności funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych.
Niech $P = (x_P, y_P)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wodzącym kąta α oraz $r = |OP| = 1$.
Wówczas $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Zauważmy, że dla wszystkich kątów $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ spełnione są zależności $-1 \leqslant x_P \leqslant 1$ oraz $0 \leqslant y_P \leqslant 1$.



Wniosek

Dla każdego kąta α takiego, że $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ prawdziwe są nierówności:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Przykład 1 ◀ zad. 6.4

Sprawdzimy, czy istnieje kąt α spełniający warunek $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ taki, że $27(\cos\alpha)^3 + 8 = 0$.

Rozwiązanie

$27(\cos\alpha)^3 + 8 = 0$, więc $(\cos\alpha)^3 = -\frac{8}{27}$, stąd $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$

Odp.: Ponieważ $-1 \leqslant -\frac{2}{3} \leqslant 1$, istnieje kąt α spełniający podany warunek (s. 349).

Następne własności funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego są takie same jak poznane wcześniej własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Twierdzenie

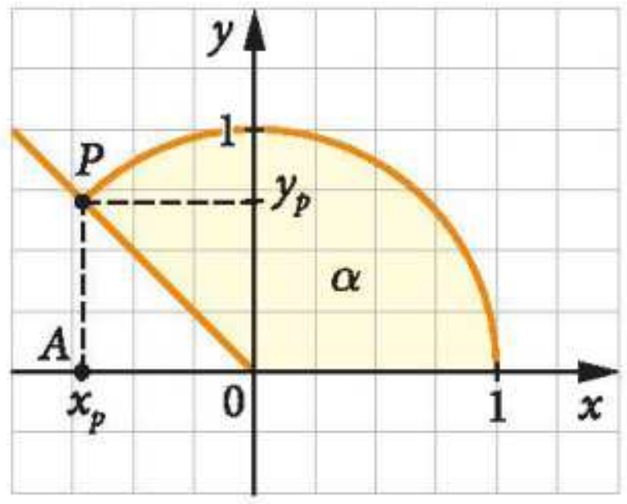
Jedynka trygonometryczna

Dla każdego kąta α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ prawdziwa jest równość:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku oraz załóżmy, że promień wodzący r punktu $P = (x_P, y_P)$ jest równy 1. Wówczas $y_P = \sin\alpha$ i $x_P = \cos\alpha$.



- Jeżeli ramię wodzące kąta pokrywa się z jedną z półosi układu, to prawdziwość wzoru wynika bezpośrednio z definicji (zob. przykład 2 ze s. 345).
- Jeżeli α jest kątem ostrym lub rozwartym:

$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2$ ⟵ twierdzenie Pitagorasa

$|x_P|^2 + |y_P|^2 = 1$, więc $x_P^2 + y_P^2 = 1$ ⟵ $|m|^2 = m^2$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ⟵ $x_P = \cos\alpha$ i $y_P = \sin\alpha$

Koniec dowodu

Użyjmy ponownie oznaczeń przyjętych w definicjach funkcji trygonometrycznych.

Jeżeli $\cos\alpha \neq 0$, to $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{y_P}{r}}{\frac{x_P}{r}} = \dfrac{y_P}{x_P} = \operatorname{tg}\alpha$.

Wniosek

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ dla } \alpha \neq 90^\circ$$

Przykład 2 ◂ zad. 6.8–6.10

Wyznaczymy sinus i cosinus kąta α spełniającego warunki $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ i $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

Rozwiązanie

Skoro $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$, to $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$. ⟵ $\operatorname{tg}\alpha$ istnieje, więc $\alpha \neq 90^\circ$

$\dfrac{y_P}{x_P} = -2$ ⟵ z definicji tangensa: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$

Ponieważ $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$, możemy przyjąć, że $x_P = -1$ i $y_P = 2$. Zatem ramię wodzące kąta przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$.

Obliczamy promień wodzący punktu P.

$r^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$, $r = \sqrt{5}$

Zatem $\sin\alpha = \dfrac{y_P}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha = \dfrac{x_P}{r} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Odp.: $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Przykład 3 ◂ zad. 6.12, 6.13

Kąt wypukły α spełnia warunek $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Obliczymy $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Zatem:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{2} \qquad \longleftarrow \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1}{2}, \text{ czyli } \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\frac{5}{9} - 1}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{9}$$

Odp.: $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{9}$

Wymienione wcześniej związki między funkcjami trygonometrycznymi są spełnione dla wszystkich kątów wypukłych α, dla których te funkcje są określone. Mówimy, że te związki są **tożsamościami trygonometrycznymi**. Korzystając z nich, można udowadniać inne tożsamości.

Przykład 4 ◂ zad. 6.15, 6.16

Udowodnimy podaną tożsamość.

a) $\frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$

Dowód

Zastanówmy się najpierw, jakie warunki musi spełniać kąt α, żeby wszystkie wyrażenia podane w treści zadania były poprawnie określone. Wypiszmy założenia.

$$\begin{cases} 1 - \sin\alpha \neq 0 \\ 1 + \sin\alpha \neq 0 \\ \cos^2\alpha \neq 0 \end{cases} \qquad \longleftarrow \text{mianowniki wyrażeń różne od zera}$$

$$\text{czyli } \begin{cases} \sin\alpha \neq 1 \\ \sin\alpha \neq -1 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$$

W tym wypadku możemy dokładnie określić kąt wypukły, który powyższych warunków nie spełnia – jest nim $\alpha = 90°$.

Zatem dowodzimy tożsamości dla wszystkich kątów wypukłych z wyjątkiem kąta 90°.

Przekształcamy lewą stronę równości.

$$L = \frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1+\sin\alpha+1-\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} = \quad \longleftarrow \text{sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\alpha} = \quad \longleftarrow \text{wykonujemy działania i stosujemy jedynkę trygonometryczną}$$

$$= \frac{2}{\cos^2\alpha} = P \quad \longleftarrow \text{otrzymujemy prawą stronę równości}$$

Koniec dowodu

b) $\frac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2$

Dowód

Funkcja tangens musi być określona i nie może przyjmować wartości 0, zatem $0° < \alpha < 180°$ i $\alpha \neq 90°$. Przy takich założeniach również oba wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. Tym razem przekształcamy prawą stronę równości.

$$P = \left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - 2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - 2 + \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{(1+\cos\alpha)^2 - 2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) + (1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha-2\left(1-\cos^2\alpha\right)+1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{2+2\cos^2\alpha-2\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha} = L$$

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Kąt α jest rozwarty i $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Jaką wartość ma $\sin\alpha$?

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6.2. Wskaż liczbę, która nie może być cosinusem kąta wypukłego.

A. 2^{-1} **B.** $(-2)^{-1}$ **C.** $2^{\frac{1}{2}}$ **D.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

6.3. Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Ile wynosi $\cos\alpha$?

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $-\frac{4}{5}$ **D.** Nie można tego jednoznacznie określić.

6.4. Sprawdź, czy istnieje kąt wypukły α spełniający podany warunek.

a) $3\cos\alpha + 2\sqrt{2} = 0$
b) $5\sin\alpha = \sqrt{3} - 2$
c) $\sin\alpha + \cos\alpha = 2$
d) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{3}$
e) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$
f) $\operatorname{tg}\alpha \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

6.5. Sprawdź, czy istnieją kąty przyległe α i β spełniające podany warunek.

a) $\sin\alpha = \sin\beta$ b) $\cos\alpha = \cos\beta$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$

6.6. Oblicz wartość wyrażenia bez korzystania z tablic i kalkulatora.

a) $\sin^2 160° + \sin^2 70°$
b) $\cos^2 15° + \cos^2 105°$
c) $\operatorname{tg} 80° \cdot \operatorname{tg} 170°$
d) $\sin 115° \cdot \sin 65° - \cos 115° \cdot \cos 65°$
e) $\cos 101° \cdot \operatorname{tg} 79° + \sin 101°$
f) $\operatorname{tg} 35° \cdot \operatorname{tg} 65° \cdot \operatorname{tg} 125° \cdot \operatorname{tg} 155°$

6.7. Uprość podane wyrażenie.

a) $\sin(180° - \alpha) + \cos(180° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}\alpha$
b) $\sin(180° - \alpha) \cdot \cos(90° - \alpha) - \cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha)$
c) $\sin^3(180° - \alpha) + \cos^2(180° - \alpha) \cdot \sin\alpha$
d) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90° - \alpha)$

6.8. Kąt α jest wypukły i $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

6.9. Kąt α jest wypukły i $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

6.10. Kąt α spełnia podane warunki. Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

a) α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{12}{37}$ b) α jest wypukły i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

6.11. Kąt rozwarty α spełnia warunek $5(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$.

a) Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.
b) Zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, który jest różny od początku układu współrzędnych i który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

6.12. Kąt wypukły α spełnia podany warunek. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

a) $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3$ b) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$

6.13. Kąt wypukły α spełnia warunek $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Oblicz $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

D **6.14.** O kącie wypukłym α wiadomo, że $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Wykaż, że $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$.

D **6.15.** Udowodnij tożsamość. Tam, gdzie to konieczne, podaj założenia.

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

c) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \mathrm{tg}^2\alpha$

d) $2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3 = 5\sin^2\alpha$

D **6.16.** Udowodnij tożsamość. Tam, gdzie to konieczne, podaj założenia.

a) $\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha}$

b) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}$

c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}$

d) $\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha - 1} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)}$

D **6.17.** Wykaż, że jeśli α jest kątem rozwartym, to $\sin\alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} - \cos\alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 1$.

6.18. Kąt wypukły α spełnia warunek $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{6}$. Oblicz $|\sin\alpha - \cos\alpha|$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Istnieje kąt rozwarty α taki, że

A. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

2. Oblicz bez korzystania z tablic matematycznych wartość wyrażenia $\sin 24^\circ \cdot \sin 156^\circ - \cos 24^\circ \cdot \frac{\sin 24^\circ}{\mathrm{tg}\,156^\circ}$.

3. Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{6}$. Oblicz $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

D **4.** Kąt α jest wypukły i $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{5}$. Wykaż, że $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$.

D **5.** Udowodnij podaną tożsamość.

$\cos 0^\circ + 2\sin^2(90^\circ - \alpha) \cdot \mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = \big(\cos(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)\big)^2$

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–20 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AC ma długość 39, a $|CB| = 15$. Sinus kąta BCA jest równy

A. $\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{12}{13}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

2. Przeciwprostokątna PQ trójkąta PQS ma długość 25, a przyprostokątna SQ o długości 24 leży naprzeciw kąta α. Miara kąta α spełnia warunek

A. $70° < \alpha \leqslant 72°$. **B.** $72° < \alpha \leqslant 76°$. **C.** $76° < \alpha \leqslant 78°$. **D.** $65° < \alpha \leqslant 68°$.

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt o wierzchołku A jest prosty, $\sphericalangle ABC = \alpha$ oraz $|BC| = \sqrt{45}$ i $|AB| = \sqrt{20}$. Wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}$ wynosi

A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{4}$.

4. Dany jest trójkąt prostokątny MLN, w którym $\sphericalangle MLN = 90°$, $\sphericalangle LNM = 60°$ i $|ML| = k$. Obwód tego trójkąta jest równy

A. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)k$. **B.** $\left(1 + \sqrt{2}\right)k$. **C.** $\left(3 + \sqrt{3}\right)k$. **D.** $\left(1 + \sqrt{3}\right)k$.

5. W okręgu o środku S i promieniu 4 poprowadzono cięciwę MN. Miara kąta SNM jest równa 43°. Odległość cięciwy MN od środka okręgu jest liczbą z przedziału

A. $\left\langle \frac{13}{4}; \frac{15}{4} \right\rangle$. **B.** $\left\langle \frac{11}{4}; \frac{13}{4} \right\rangle$. **C.** $\left\langle \frac{10}{4}; \frac{11}{4} \right\rangle$. **D.** $\left\langle \frac{9}{4}; \frac{10}{4} \right\rangle$.

6. Sinus kąta rozwartego α jest równy $\frac{12}{13}$. Wtedy

A. $\cos\alpha = \frac{1}{13}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. **C.** $\cos\alpha = -\frac{1}{13}$. **D.** $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$.

7. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{14}$. Zatem $\operatorname{tg}\alpha$ jest równy

A. $\frac{3\sqrt{19}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{19}$. **C.** $\frac{2\sqrt{15}}{14}$. **D.** $\frac{3\sqrt{14}}{5}$.

8. Kąt α jest ostry. Wskaż wartość wyrażenia $(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) + 2\sin^2\alpha$.

A. $\sin\alpha$ **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

9. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4$. Wówczas wyrażenie $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ma wartość

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

10. Dwa boki trójkąta mają długości 10 cm i $8\sqrt{2}$ cm. Kąt między tymi bokami ma miarę 45°. Ile wynosi pole tego trójkąta?

A. $40\sqrt{6}\ \text{cm}^2$ **B.** $80\ \text{cm}^2$ **C.** $\frac{40\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^2$ **D.** $40\ \text{cm}^2$

11. Ile wynosi pole równoległoboku o kącie ostrym 60° oraz bokach długości 6 i 11?

A. 66 **B.** 33 **C.** $33\sqrt{3}$ **D.** $66\sqrt{3}$

12. Jaką długość ma bok rombu o wysokości $\frac{\sqrt{3}}{6}$ i kącie ostrym 30°?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

13. W trapezie $ABCD$ kąty przy podstawie AB mają miary odpowiednio 90° i 30°. Dłuższe ramię trapezu ma długość $4\sqrt{3}$, a jego krótsza podstawa 0,5. Ile wynosi pole trapezu?

A. $14\sqrt{3}$ **B.** $7\sqrt{3}$ **C.** $7\sqrt{3} + 1$ **D.** $14\sqrt{3} - 1$

14. W trapezie równoramiennym o wysokości 3 i ramieniu $2\sqrt{3}$ kąt ostry ma miarę

A. 15°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

15. Która z podanych równości nie jest tożsamością?

A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

B. $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

C. $\sin^2\alpha = 1 - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

D. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2\sin\alpha\cos\alpha + 1$

16. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt $(-3, 4)$. Ile wynosi $\cos\alpha$?

A. $-\frac{4}{5}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

17. Jaką wartość ma iloczyn $\operatorname{tg}32° \cdot \operatorname{tg}58°$?

A. -1 **B.** 0 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **D.** 1

18. Ile wynosi promień wodzący punktu $P = (-3, 1)$?

A. 10 **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $-\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{2}$

19. Jaka jest miara kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o godzinie 10^{10}?

A. $\frac{23 \cdot 180^\circ}{36}$ **B.** $\frac{360^\circ}{3}$ **C.** 110° **D.** $\frac{27 \cdot 180^\circ}{36}$

20. Jaką wartość ma wyrażenie $\frac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$?

A. 1 **B.** 0 **C.** ok. 1,27 **D.** 2

W zadaniach 21–27 oceń prawdziwość podanych zdań.

21. Pole trójkąta o bokach 5 i 6 może być równe

A. $\sqrt{2}$. **B.** 15. **C.** $10\sqrt{3}$.

22. Kąt α jest rozwarty. Wynika stąd, że

A. $\sin\alpha > 0$. **B.** $\cos\alpha > 0$. **C.** $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

23. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt $(-12, 9)$. Zatem

A. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. **C.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

24. Kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = m$. Zatem

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = m$. **B.** $\cos\alpha = \sqrt{1 - m^2}$. **C.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$.

25. Liczba $\cos 150^\circ$ jest równa liczbie

A. $\cos 30^\circ$. **B.** $\sin 120^\circ$. **C.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 120^\circ$.

26. W trójkącie PQR kąt Q jest prosty, a kąty ostre φ i δ spełniają nierówność $\varphi > \delta$. Zatem

A. $\operatorname{tg}\varphi < \sin\varphi$. **B.** $\operatorname{tg}\delta < \cos\varphi$. **C.** $\sin\varphi \leqslant \cos\delta$.

27. Kąt α spełnia warunki: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$. Zatem

A. $|\cos\alpha| < |\sin\alpha|$.

B. $\sin\alpha + \cos\alpha$ jest liczbą niewymierną.

C. $\operatorname{tg}\alpha < -1$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

28. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym kąt C jest prosty, dane są długości dwóch boków. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $BAC = \alpha$ oraz odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1°.

a) $|AC| = 2,\ |AB| = 8$
b) $|BC| = 3,\ |AB| = 4$
c) $|AC| = 9,\ |BC| = 3$
d) $|AC| = 5,\ |AB| = 4$

29. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\dfrac{\sin^2 45^\circ - \operatorname{tg}^2 30^\circ}{\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}$

b) $\dfrac{\sin 120^\circ - \cos 135^\circ}{\dfrac{\cos 0^\circ}{\sin 135^\circ} - \operatorname{tg} 120^\circ}$

30. Kąt α jest wypukły i spełnia podany warunek. Wyznacz za pomocą tablic trygonometrycznych lub kalkulatora miarę tego kąta z dokładnością do 1°.

a) $\sin\alpha = 0{,}515$
b) $\operatorname{tg}\alpha = 6{,}3$
c) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$
d) $\operatorname{tg}\alpha = -3$

31. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 24 cm, a ramię ma długość 32 cm. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta między ramionami tego trójkąta.

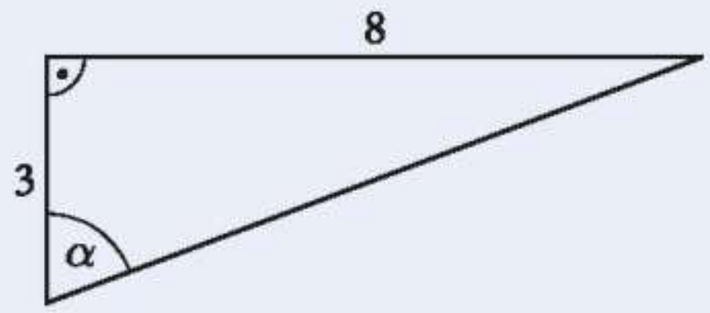
32. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta B w trójkącie ABC, jeżeli $A = (-2, 1),\ B = (3, 1),\ C = (-2, 5)$.

33. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$. Wyznacz wartości sinusa i tangensa kąta α.

34. Kąt α jest wypukły i $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. Wyznacz wartości sinusa i cosinusa kąta α.

35. Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha = \dfrac{60}{61}$. Wyznacz wartości cosinusa i tangensa kąta α.

36. Na podstawie rysunku wyznacz $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.



37. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2$.

D **38.** Wykaż, że wartość wyrażenia $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} + \sin^2\alpha$ jest stała dla każdego kąta ostrego α.

39. Wyznacz kąt, którego wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych, jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią x, a drugie ramię przechodzi przez punkt $\left(-3\sqrt{6},\ 3\sqrt{2}\right)$.

40. Oblicz wartość podanego wyrażenia bez korzystania z tablic matematycznych.

a) $\sin^2 13^\circ + \sin^2 77^\circ$

b) $1 - \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ$

c) $\sin 25^\circ - \cos 155^\circ \cdot \operatorname{tg} 155^\circ$

41. Ramię wodzące kąta α_M przechodzi przez punkt M. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów M, dla których

a) $75^\circ \leqslant \alpha_M \leqslant 120^\circ$.

b) $30^\circ < \alpha_M \leqslant 135^\circ$.

42. Podaj założenia, jakie musi spełniać kąt wypukły α i przekształć wyrażenie $\dfrac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$ do prostszej postaci.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

43. Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma 24 cm, a kąty ostre przy podstawie mają po 32°. Wyniki podaj z dokładnością do pierwszego miejsca po przecinku.

44. Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi 30 cm. Jeden z tych boków jest o 50% dłuższy od drugiego, a kąt zawarty między nimi ma 77°. Oblicz pole tego trójkąta z dokładnością do pierwszego miejsca po przecinku.

45. Kąty przy dłuższej podstawie trapezu mają miary 50° i 80°. Krótsza podstawa ma długość 11 cm, a wysokość trapezu jest równa 8 cm. Oblicz pole tego czworokąta. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

46. Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma 15 cm długości, dłuższe ramię ma 9 cm, a miara kąta rozwartego wynosi 148°. Oblicz pole trapezu. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

47. W trapezie prostokątnym $ABCD$ kąt przy wierzchołku D jest rozwarty, a kąt między przekątną DB i dłuższą podstawą AB ma miarę 60°. Podstawa AB tego trapezu i przekątna DB mają długości odpowiednio równe 11 i 6. Oblicz długość drugiej przekątnej trapezu.

48. Dany jest okrąg o środku O i promieniu $r = 6$ cm. Z punktu A leżącego na tym okręgu poprowadzono równej długości cięciwy AS i AW, które utworzyły kąt 30°. Oblicz pole czworokąta $SOWA$.

49. Ramiona trapezu o podstawach długości 4 cm i 18 cm tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 60° i 30°. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

* **50.** W trójkącie równobocznym ABC punkt D dzieli bok AB na takie odcinki, że $|AD| : |DB| = 1 : 2$. Oblicz sinus kąta DCB.

* **51.** Tangens kąta zawartego między dłuższą przekątną rombu a jego bokiem jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb.

52. Na okręgu o promieniu $r = 4$ opisano trapez prostokątny $ABCD$, którego kąty przy wierzchołkach A i D są proste. Kąt ostry trapezu jest równy 65°. Oblicz obwód i pole tego czworokąta. Wyniki zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

53. W rombie opisanym na okręgu o promieniu $\sqrt{13}$ kąt rozwarty jest 5 razy większy od kąta ostrego. Oblicz pole rombu.

54. Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α.

a) Określ znak wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$.

b) Oblicz wartość wyrażenia $\sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$ dla $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D **55.** Udowodnij, że dla kąta wypukłego α podana równość jest prawdziwa.

$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha = \cos^4\alpha - \cos^2\alpha$

D **56.** Udowodnij tożsamość. Dla jakich kątów wypukłych tożsamość jest prawdziwa?

$$\left(\frac{1}{1-\cos\alpha} - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha}\right) = \frac{4}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

* **57.** Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

* **58.** Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{3}{8}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

5

1. Warto powtórzyć – potęgi

Przypomnijmy najważniejsze definicje oraz twierdzenia dotyczące potęg.

Definicje

- Jeżeli $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 0$, to $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$.

Jeżeli

- $a \neq 0$, to $a^0 = 1$.
- $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$, to $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- $a > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Twierdzenie

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$, $p \in \mathbf{Q}$ i $r \in \mathbf{Q}$, to:

- $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ **iloczyn potęg o tych samych podstawach**
- $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$ **iloraz potęg o tych samych podstawach**
- $\left(a^p\right)^r = a^{p \cdot r}$ **potęga potęgi**
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ **potęga iloczynu**
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ **potęga ilorazu**

Zadania

1.1. Oblicz.

a) $\frac{2^8 - 6^3}{2^7 - 5^3}$ b) $\left(2^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$

1.2. Oblicz.

a) $\frac{2^{99}}{2^{100} + 2^{101}}$ b) $\frac{3^{40} + 3^{41}}{3^{40} - 3^{39}}$ c) $\frac{2^{80} + 2^{81} + 2^{82}}{7}$ d) $\frac{2^{61} - 2^{60} - 2^{60}}{3^{50} - 5^{50}}$

1.3. Oblicz.

a) $2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 6^{-11}$ b) $\frac{4^{10} \cdot 49^{12}}{8^6 \cdot 7^{20} \cdot 14^3}$ c) $\frac{12^{16} \cdot 15^{30}}{100^{15} \cdot 27^{15}}$ d) $\frac{6^{10}}{2^{10} \cdot 3^9 + 2^9 \cdot 3^{10}}$

1.4. Oblicz.

a) $\dfrac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}}{0{,}2^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ b) $\dfrac{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{0{,}1^{-1}-0{,}3^{0}\cdot 0{,}5^{-2}}$ c) $\dfrac{\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{10}{2^4}\right]:(-2)^{-5}}{\left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 7^{0}-1{,}25^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-1}}$

1.5. Oblicz.

a) $\dfrac{2^{-5}\cdot 3^{-5}}{18^{-5}}\cdot\dfrac{5^{-3}\cdot 6^{-3}}{10^{-3}}$

b) $\dfrac{9^{-1}\cdot 27^{-2}\cdot 81}{9^{-2}}:\dfrac{25^{-1}\cdot 0{,}25\cdot 10^{2}}{(5^{-1})^{3}\cdot 125\cdot 2^{-3}}$

c) $\dfrac{32^{-2}\cdot 15^{3}}{16^{-2}\cdot 3^{3}}:\dfrac{0{,}2^{2}\cdot 0{,}4^{-3}}{0{,}4^{2}\cdot 2^{-3}}$

d) $\left[\dfrac{2\cdot[3{,}(3)]^{-2}\cdot 11^{2}}{33^{2}\cdot 10^{-1}}-\dfrac{7^{-1}\cdot 3^{-2}\cdot 49}{0{,}9^{-1}}\right]^{-2}$

1.6. Przedstaw podaną liczbę w postaci potęgi liczby 2.

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$ b) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}:\sqrt[6]{32}\right)\cdot\left(\sqrt[9]{\frac{1}{64}}\right)^{-2}$ c) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{8}}{2\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}$

1.7. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi liczby a. Zakładamy, że $a>0$.

a) $\left(\left(a^{2}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{3}\right)^{2}\cdot a^{-3}\right)^{-2}$

b) $\left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{4}:\left(a^{6}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{2}$

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(\frac{1}{a^{2}}\right)^{\frac{1}{9}}\cdot\left(\frac{1}{a^{-4}}\right)^{\frac{1}{6}}$

d) $\dfrac{\left(a^{0,3}\cdot a^{0,2}:a^{0,4}\right)^{5}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{0,1}\cdot a^{0,5}}$

1.8. Oblicz.

a) $\left(3^{-1}-3^{-2}\right)^{-1}$ b) $\left(5+5^{-1}\right)\left(5-5^{-1}\right)$ c) $\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}$ d) $\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right)^{3}$

1.9. Porównaj liczby a i b.

a) $a=8^{20}$ $b=4^{30}$

b) $a=3^{500}$ $b=5^{300}$

c) $a=\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{6}\right)^{-6}$ $b=6^{2^5}$

d) $a=9^{23}\cdot 6^{14}$ $b=362^{15}$

1.10. Ustaw w kolejności rosnącej podane liczby.

$a=9^{29}$, $b=27^{2\cdot 3^2}$, $c=\left(81^{2}\right)^{7}$, $d=243^{11}$

1.11. Oblicz.

a) $4^{-2}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 32^{0,4}$

b) $\dfrac{64^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{2}}$

c) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^{-2}}{9^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^{-4}}$

d) $\dfrac{0{,}16^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(5\sqrt{5}\right)^{-2}\cdot 0{,}04}{\left(27\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-4}}$

e) $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{5}:\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\right]^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{0,2}:\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$

f) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}}{\sqrt{6\sqrt{6}}}$

2. Funkcja wykładnicza

Umiejętności:

- szkicowanie wykresów funkcji wykładniczych

W poprzednim roku szkolnym zdefiniowaliśmy potęgę o wykładniku wymiernym oraz omówiliśmy sposób, w jaki można oszacować wartość potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Skoro dla każdej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a jednoznacznie określona jest liczba a^x, to można rozważyć funkcję, która wykładnikowi x przyporządkowuje liczbę a^x. W definicji takiej funkcji pomijamy szczególny przypadek $a = 1$, gdyż dla każdej wartości x mamy $1^x = 1$ (otrzymujemy zatem funkcję liniową stałą).

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją wykładniczą o podstawie** a. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($x \in \mathbf{R}$), a jej wykres nazywamy **krzywą wykładniczą**.

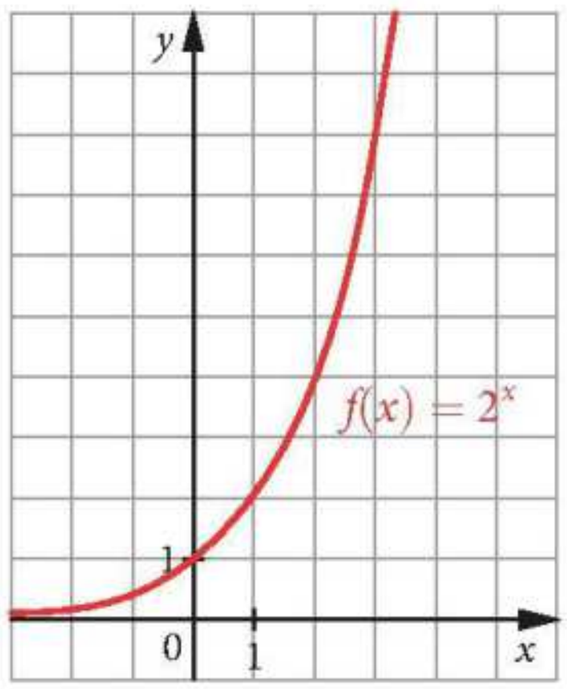
Przykład 1

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = 2^x$ i podamy niektóre jej własności.

Rozwiązanie

Na początku sporządzimy częściową tabelę funkcji dla tych argumentów, dla których łatwo obliczyć wartości funkcji.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16



Zauważmy, że funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje tylko wartości dodatnie, czyli jej wykres leży powyżej osi x.
Funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca.

Jeżeli $a > 1$, ω_1, ω_2 są liczbami rzeczywistymi oraz $\omega_1 < \omega_2$, to $a^{\omega_1} < a^{\omega_2}$.

Każda prosta równoległa do osi x, leżąca powyżej tej osi, ma z wykresem funkcji $f(x) = 2^x$ dokładnie jeden punkt wspólny. Zatem równanie $2^x = m$ ma dla każdej dodatniej wartości m jedno rozwiązanie.

Zauważmy, że jeżeli $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, to zgodnie z definicją potęgi funkcję g można zapisać w postaci $g(x) = a^{-x}$. Zatem jeśli przyjmiemy, że $f(x) = a^x$, to $g(x) = f(-x)$.

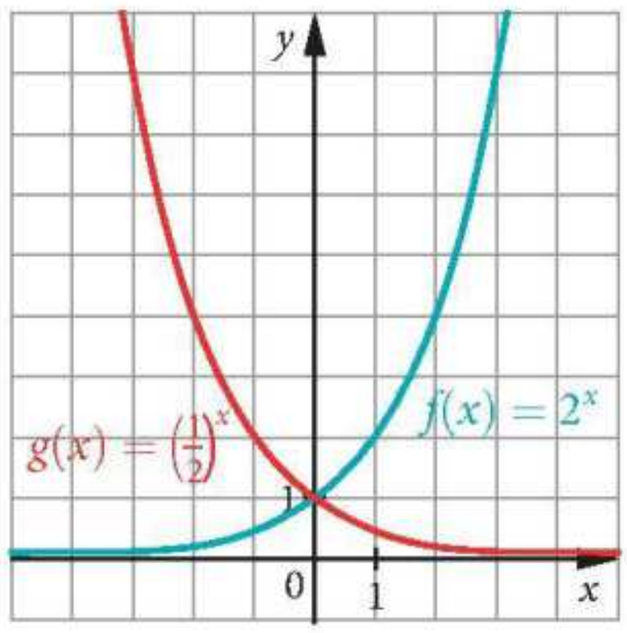
Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ są symetryczne względem osi y.

Wniosek

Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, są symetryczne względem osi y.

Przykład 2

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i podamy niektóre własności funkcji g.



Rozwiązanie

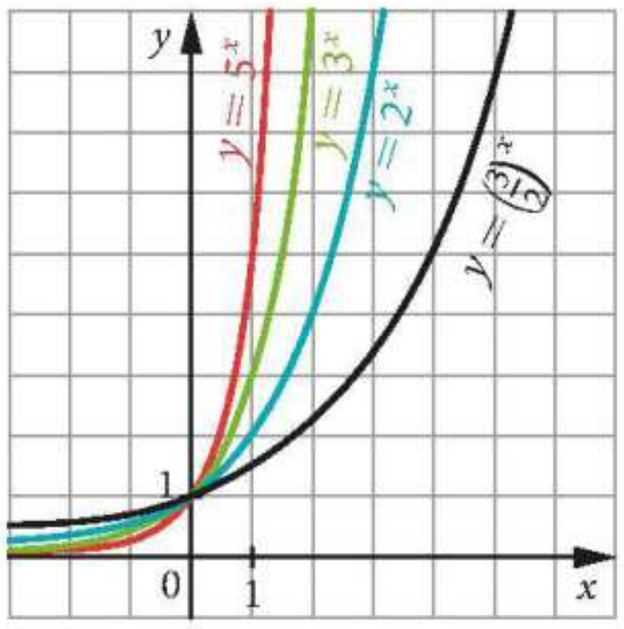
Wykres funkcji g leży powyżej osi x (funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie). Funkcja jest malejąca. Każda prosta równoległa do osi x, leżąca powyżej tej osi, ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny.

Podstawowe własności funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, wynikają ze sposobu, w jaki została określona potęga o wykładniku rzeczywistym.

- Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich (krzywe wykładnicze leżą w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych, oś x jest asymptotą wykresu).
- Każda krzywa wykładnicza przecina oś y w punkcie $(0, 1)$, ponieważ dla dowolnej podstawy $a > 0$ mamy $f(0) = a^0 = 1$.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja f nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
- Funkcja $f(x) = a^x$ jest monotoniczna, przy czym:
  dla $a > 1$ jest rosnąca,
  dla $0 < a < 1$ jest malejąca.
- Równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla każdego $m > 0$ i nie ma rozwiązań dla $m \leqslant 0$.

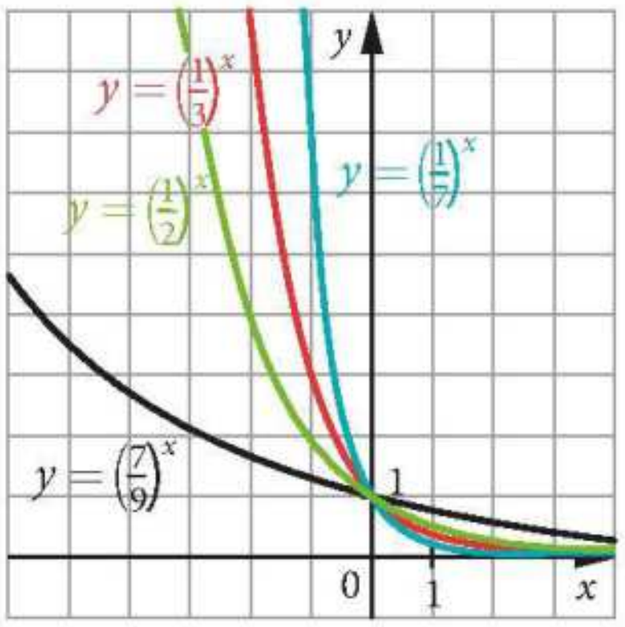
Jeżeli umieścimy w jednym układzie współrzędnych kilka wykresów funkcji wykładniczych **o podstawach większych od 1**, to zauważymy, że:

- dla $x > 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = 3^x$, leży **powyżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = 2^x$,
- dla $x < 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = 3^x$, leży **poniżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = 2^x$.



Ta sama zasada sprawdza się również dla wykresów funkcji wykładniczych o podstawach mniejszych od 1:

- dla $x > 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, leży **powyżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,
- dla $x < 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, leży **poniżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



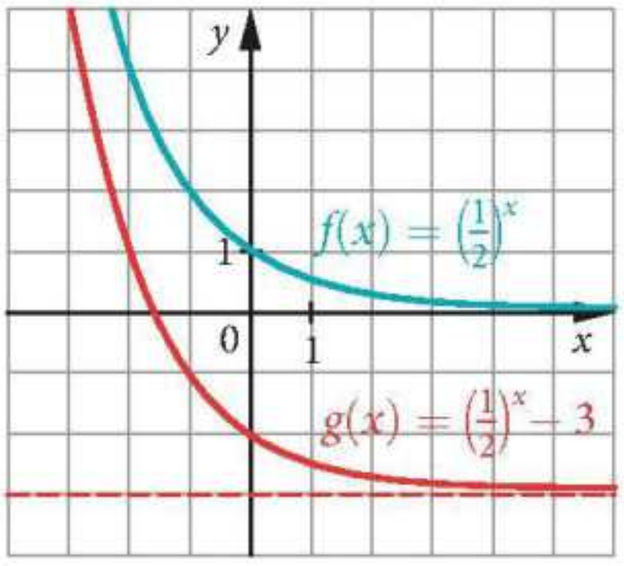
Przykład 3 ◂ zad. 2.7, 2.8

Dzięki prostym przekształceniom wykresów funkcji wykładniczych można otrzymywać wykresy innych funkcji. Sporządzimy kilka takich wykresów.

Rozwiązanie

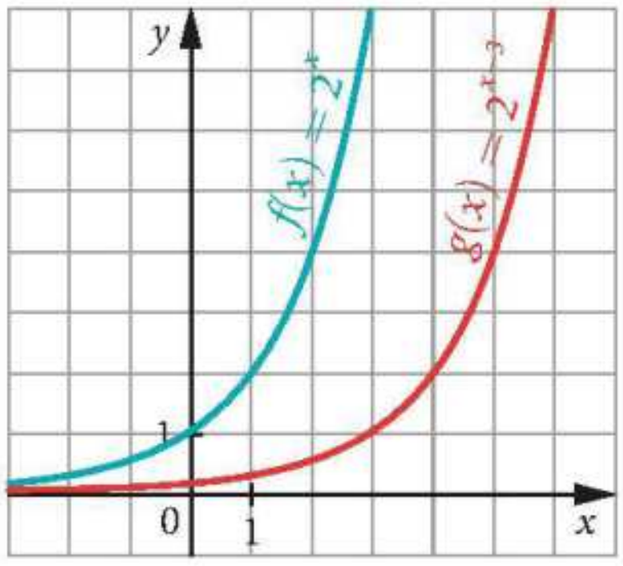
a) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

Wykres powstaje po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ o wektor $\vec{u} = [0, -3]$.



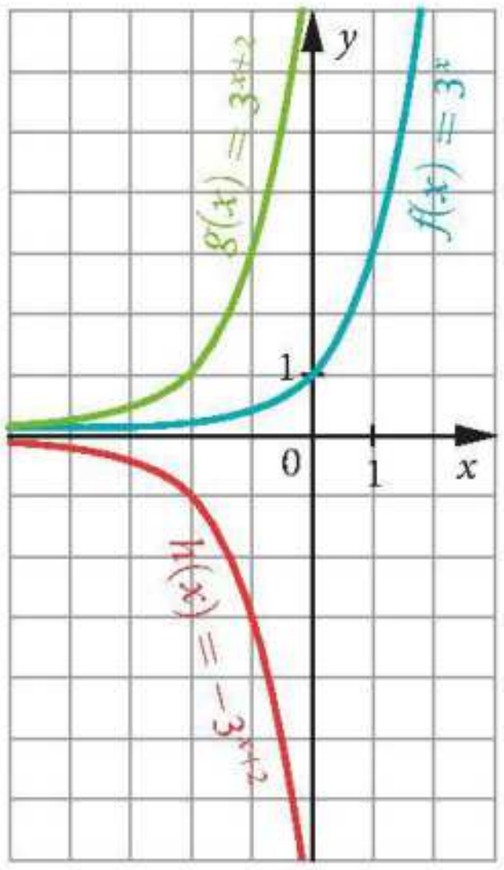
b) $g(x) = 2^{x-3}$

Wykres powstaje po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o wektor $\vec{u} = [3, 0]$.



c) $h(x) = -9 \cdot 3^x$

Wzór funkcji przekształcamy do postaci $h(x) = -3^{x+2}$.
Rysujemy kolejne wykresy.



Krok 1: wykres funkcji $f(x) = 3^x$

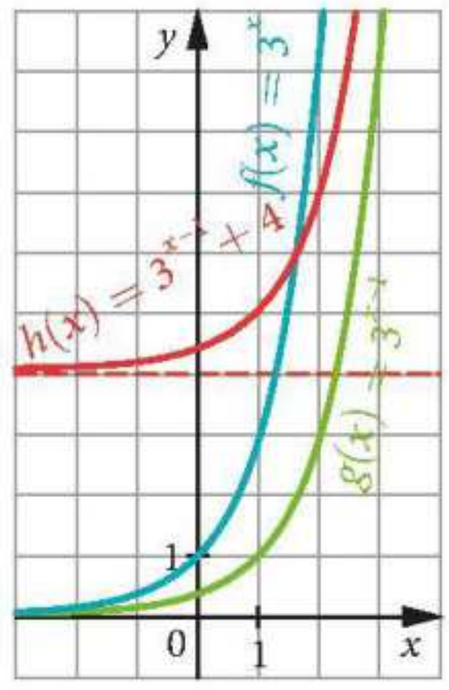
Krok 2: wykres $g(x) = 3^{x+2}$ ⟵ przesunięcie o wektor $\vec{u} = [-2, 0]$

Krok 3: wykres $h(x) = -3^{x+2}$ ⟵ symetria względem osi x

Podane przekształcenia można wykonać w odwrotnej kolejności.

d) $h(x) = 3^{x-1} + 4$

Rysujemy kolejne wykresy.



Krok 1: $f(x) = 3^x$

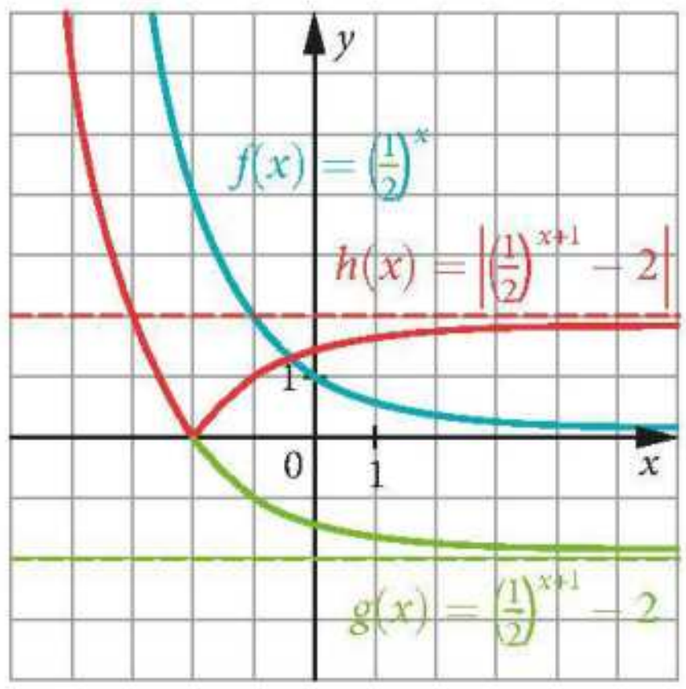
Krok 2: $g(x) = 3^{x-1}$ ⟵ przesunięcie o wektor $\vec{u} = [1, 0]$

Krok 3: $h(x) = 3^{x-1} + 4$ ⟵ przesunięcie o wektor $\vec{v} = [0, 4]$

Podane przekształcenia można wykonać w odwrotnej kolejności.

e) $h(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2\right|$

Rysujemy kolejne wykresy.



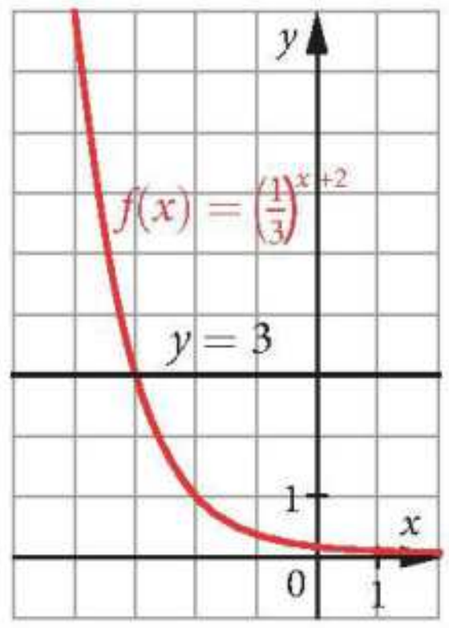
Krok 1: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Krok 2: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$ ⟵ przesunięcie o wektor $\vec{u} = [-1, -2]$

Krok 3: $h(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2\right|$ ⟵ symetria fragmentu wykresu funkcji g leżącego poniżej osi x względem tej osi i zachowanie pozostałej części wykresu bez zmian

Przykład 4 ◀ zad. 2.15

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ i odczytamy z niego zbiór rozwiązań nierówności $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3$.



Rozwiązanie

Prosta $y = 3$ przecina wykres funkcji w punkcie o odciętej -3. Z wykresu odczytujemy, że funkcja przyjmuje wartości większe od 3 dla $x < -3$.

Odp.: $x \in (-\infty; -3\rangle$

Przykład 5 ◀ zad. 2.16

Rozwiążemy graficznie podane równanie i nierówność:

$3^{x-1} + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$, $3^{x-1} + 4 \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$

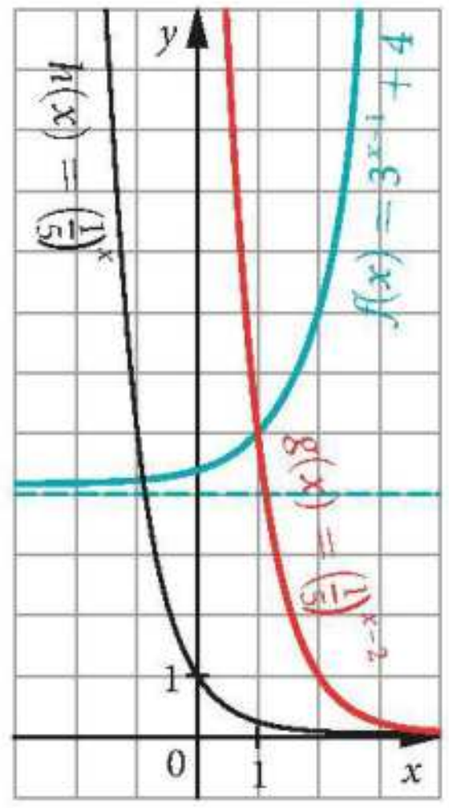
Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $f(x) = 3^{x-1} + 4$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$.

Znajdziemy punkty przecięcia wykresów tych funkcji i sprawdzimy, czy współrzędne x tych punktów spełniają równanie $f(x) = g(x)$.

Wykres funkcji $f(x) = 3^{x-1} + 4$ był rysowany w przykładzie 3 d.

Narysowanie wykresu funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ polega na przesunięciu wykresu funkcji $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ o wektor $\vec{u} = [2, 0]$.



Z rysunku odczytujemy, że wykresy funkcji f i g mają jeden punkt wspólny, o współrzędnych $(1, 5)$.

Sprawdzamy, czy $f(1) = g(1)$.

$$f(1) = 3^0 + 4 = 5, \quad g(1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

$f(1) = g(1)$, więc liczba 1 jest rozwiązaniem równania $f(x) = g(x)$.

Po odczytaniu współrzędnych (x_0, y_0) punktu wspólnego wykresów funkcji f i g sprawdzamy rachunkowo, czy $f(x_0) = g(x_0) = y_0$.

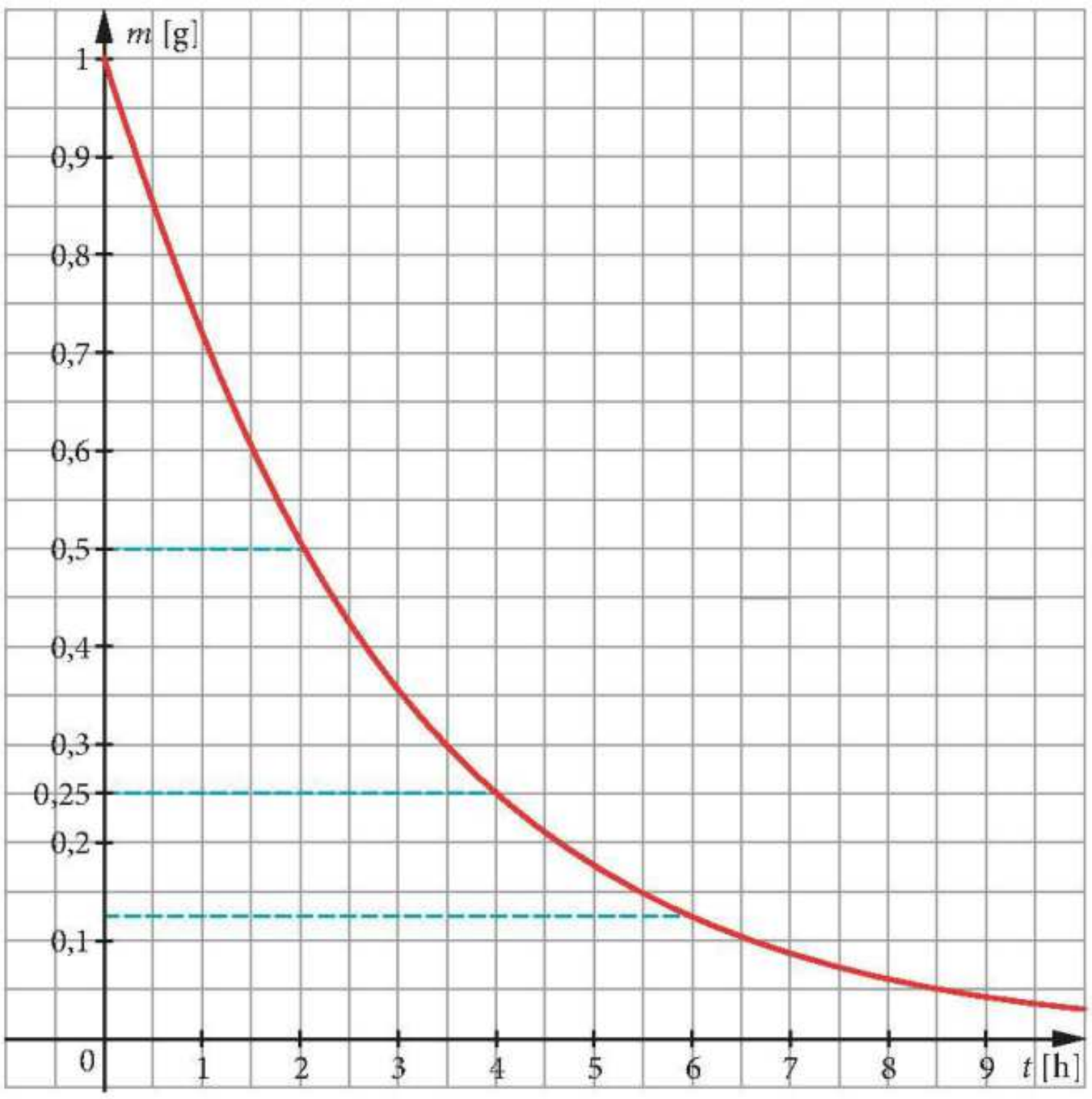
Punkty wykresu funkcji f leżą poniżej punktów wykresu funkcji g dla $x < 1$. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $3^{x-1} + 4 \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ jest przedział $(-\infty; 1\rangle$.

Odp.: $3^{x-1} + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ dla $x = 1$; $3^{x-1} + 4 \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ dla $x \in (-\infty; 1\rangle$

Za pomocą funkcji wykładniczej można opisać przebieg wielu procesów fizycznych.

Przykład 6 ◀ zad. 2.20

Zależność masy m izotopu pierwiastka promieniotwórczego (którego cząstki ulegają rozpadowi) od czasu t można opisać za pomocą malejącej funkcji wykładniczej. Przyjmijmy, że w chwili początkowej masa substancji wynosiła 1 gram. Wykres przedstawia, ile gramów substancji **nie uległo** rozpadowi po określonym czasie (jednostką na osi poziomej jest godzina, jednostką na osi pionowej jest gram).



Można zauważyć, że po 2 godzinach połowa substancji uległa rozpadowi, po kolejnych 2 godzinach znowu połowa pozostałej części uległa rozpadowi itd. Okres (oznaczany T), w którym połowa masy uległa rozpadowi, nazywamy **okresem połowicznego rozpadu**.

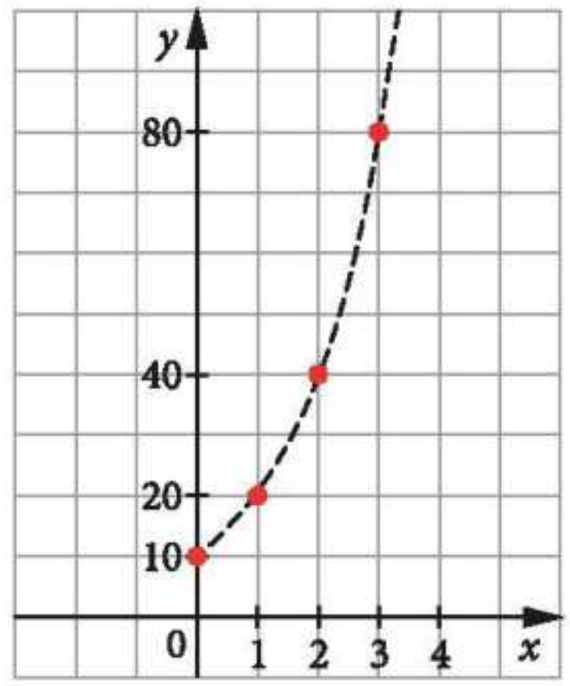
W podanym przykładzie wynosi on 2 godziny ($T = 2$), a wzór funkcji opisującej ten proces to:

$$m(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$$

Podobne zależności opisują wiele innych procesów fizycznych, np. rozładowywanie kondensatora lub stygnięcie ciała w otoczeniu o stałej temperaturze.

Przykład 7

Jeżeli założymy, że liczebność populacji pewnego gatunku owadów zwiększa się dwukrotnie w ciągu każdej doby i że na początku badanego okresu liczebność populacji wynosiła N, to liczebność po upływie x dni opisuje funkcja o wzorze $y(x) = N \cdot 2^x$.



Na wykresie przedstawiamy liczebność populacji w ciągu 3 dni dla $N = 10$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ **B.** $f(x) = -10^x$ **C.** $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^{-x}$ **D.** $f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

2.2. Wskaż wzór funkcji, której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ przez symetrię względem osi y.

A. $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **B.** $g(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^x$ **C.** $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **D.** $g(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^x$

2.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 4^x - 1$ przez symetrię względem osi y.

A. $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$ **B.** $g(x) = -4^x - 1$ **C.** $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$ **D.** $g(x) = -4^x + 1$

2.4. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru i podaj współrzędne punktu przecięcia tego wykresu z osią y.

a) $f(x) = 2^x + 1$ $x \in \langle -3; 3\rangle$

b) $f(x) = 2^x - 3$ $x \in \langle -2; 2\rangle$

c) $f(x) = 3^x + 2$ $x \in \{0, 1, 2\}$

d) $f(x) = 3^x - 3$ $x \in \langle -2; 2\rangle$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ $x \in \mathbf{R}$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$ $x \in (-\infty; 0\rangle$

2.5. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji przyjmowane w tym zbiorze.

a) $f(x) = 2^{x-1}$ $\langle -1; 3\rangle$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ $\langle -3; 0\rangle$

c) $f(x) = 3^{x-5}$ $\langle 4; 6\rangle$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$ $\langle -5; -3\rangle$

2.6. Narysuj wykres funkcji. Podaj jej miejsce zerowe, jeśli istnieje.

a) $f(x) = 2^{x-1} + 2$

b) $f(x) = 2^{x+3} - 1$

c) $f(x) = 3^{x+5} - 3$

d) $f(x) = 3^{x-4} + \frac{3}{2}$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 2$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} + 5$

2.7. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

b) $f(x) = -2^{x} + 3$

c) $f(x) = -3^{x+2}$

d) $f(x) = -2^{x-1} - 1$

e) $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

f) $f(x) = -2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

2.8. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji przyjmowane w tym zbiorze.

a) $f(x) = \left|2^{x-1} - 1\right|$ $\langle -1; 3\rangle$

b) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 2\right|$ $\langle -3; 0\rangle$

c) $f(x) = \left|1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}\right|$ $\langle -5; -3\rangle$

d) $f(x) = \left|-2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right|$ $\langle -4; 0\rangle$

2.9. Punkt $P = (-3, 64)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$, $a > 0$. Wyznacz a.

2.10. Punkt $P = (-3, 55)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x} + k$. Wyznacz k.

2.11. Punkt $P = \left(2, \frac{1}{9}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 3^{x-m}$. Wyznacz m.

D **2.12.** Wykaż, że punkt $\left(\frac{2}{3}, \frac{9 + \sqrt[3]{9}}{9}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 1$.

2.13. Podaj przykład funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x + b$, której wykres przechodzi przez punkt $P = (-2, 3)$ i która jest

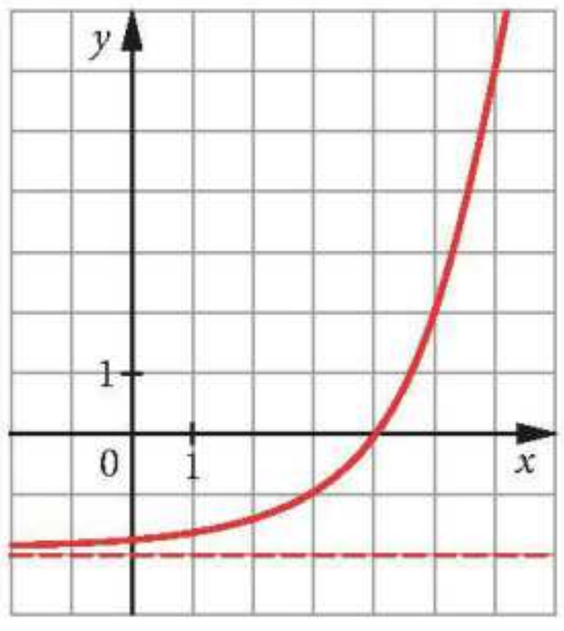
a) rosnąca.

b) malejąca.

2.14. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = 2^{x-a} + b$.

a) Wyznacz wartości a i b.

b) Sporządź wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.



2.15. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant a$.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, $a = 4$

b) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $a = -1$

c) $f(x) = 5^{x-2} - 3$, $a = -2$

d) $f(x) = -3^{x} + 3$, $a = 0$

2.16. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, a następnie odczytaj rozwiązanie:
I. równania $f(x) = g(x)$, II. nierówności $f(x) < g(x)$.

a) $f(x) = 2^{x-1}$ $g(x) = -2x + 10$
b) $f(x) = 3^x$ $g(x) = -x + 4$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$ $g(x) = 5$

2.17. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{x+5} = 3^{x+4} + 1$
b) $2 \cdot 2^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$
c) $16 \cdot 2^{x-3} = 9 \cdot 3^{x-2} + 1$
d) $25 \cdot 5^x - 1 = 3 - x$
e) $2^{-x} + 1 = x^2 + 2$ dla $x \geqslant 0$
f) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 = x^2$

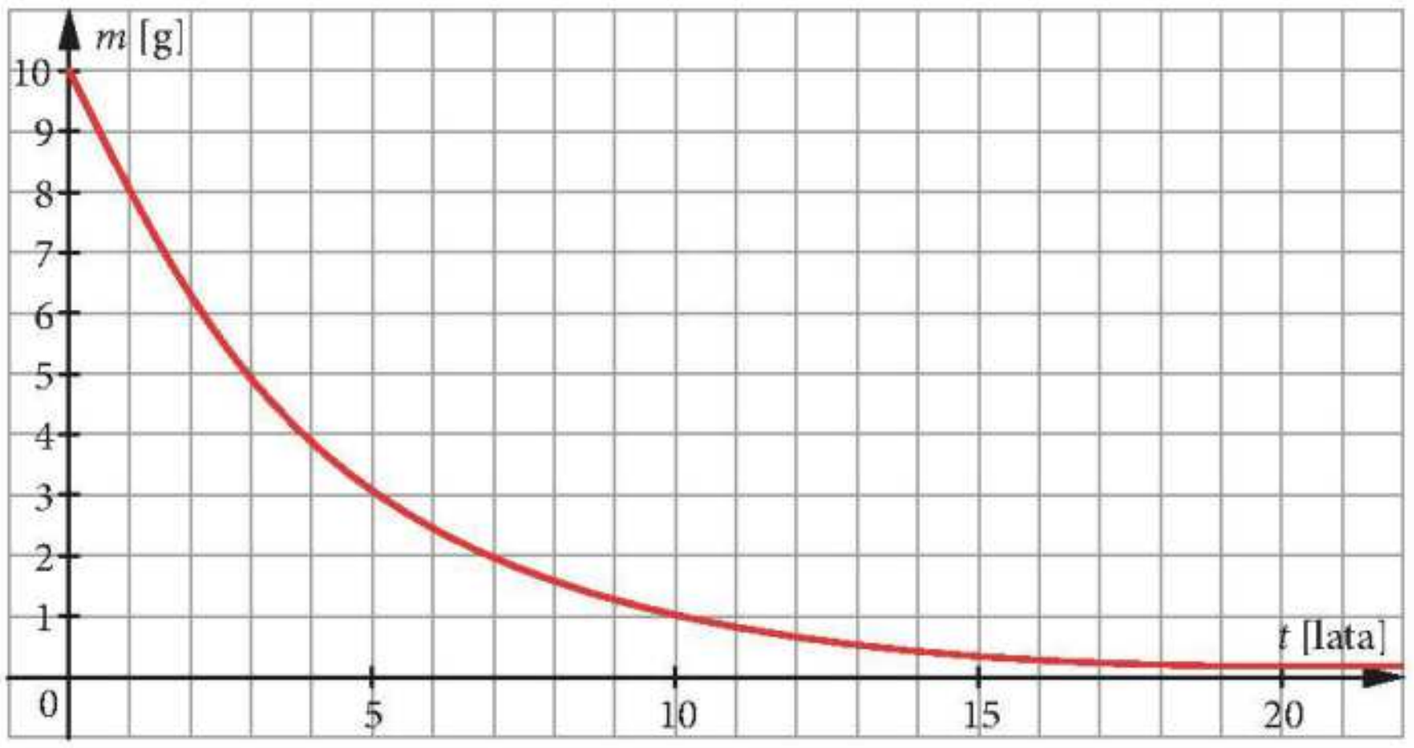
2.18. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 > 1$
b) $\frac{3^{x+2}}{27} > 5 \cdot 5^{x-1} - 4$
c) $\frac{9}{3^{2-x}} - 2 \leqslant \frac{9}{3^x} + 6$
d) $25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 3 \geqslant \frac{1}{16} \cdot 2^{x+5} - 2$

2.19. Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} \\ y = x^2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = 3^{-(x+2)} - 1 \\ y = \frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2^{x-3} - y + 2 = 0 \\ 3x + 4y - 28 = 0 \end{cases}$

2.20. Wykres ilustruje rozpad 10 g masy pewnego pierwiastka promieniotwórczego. Odczytaj z wykresu
a) ile wynosi okres T połowicznego rozpadu tego pierwiastka.
b) po jakim czasie masa pierwiastka, który nie uległ jeszcze rozkładowi, osiągnęła ok. 1 g.



2.21. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} y = -3^x \\ y = -|x-2| + 1 \end{cases}$.

2.22. W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x - 1$ oraz $h(x) = \left|\frac{2x-4}{x}\right|$. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = h(x)$.

2.23. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ b) $f(x) = 3^{|x-2|}$ c) $f(x) = \sqrt{2^{|2x|+1}}$ d) $f(x) = 2^{|x-1|-|x+1|}$

2.24. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left|\left|2^{x+3} - 1\right| - 2\right| = m$ ma dwa rozwiązania?

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = 0{,}7^x - 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f jest rosnąca.

B. Zbiorem wartości funkcji f jest $\langle -1; \infty)$.

C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1.

2. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy odpowiednich funkcji i odczytaj rozwiązanie równania $4^{x-2} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$.

D **3.** Wykaż, że punkt $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^x$.

4. a) Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left|1 - 2^{x-1}\right|$.

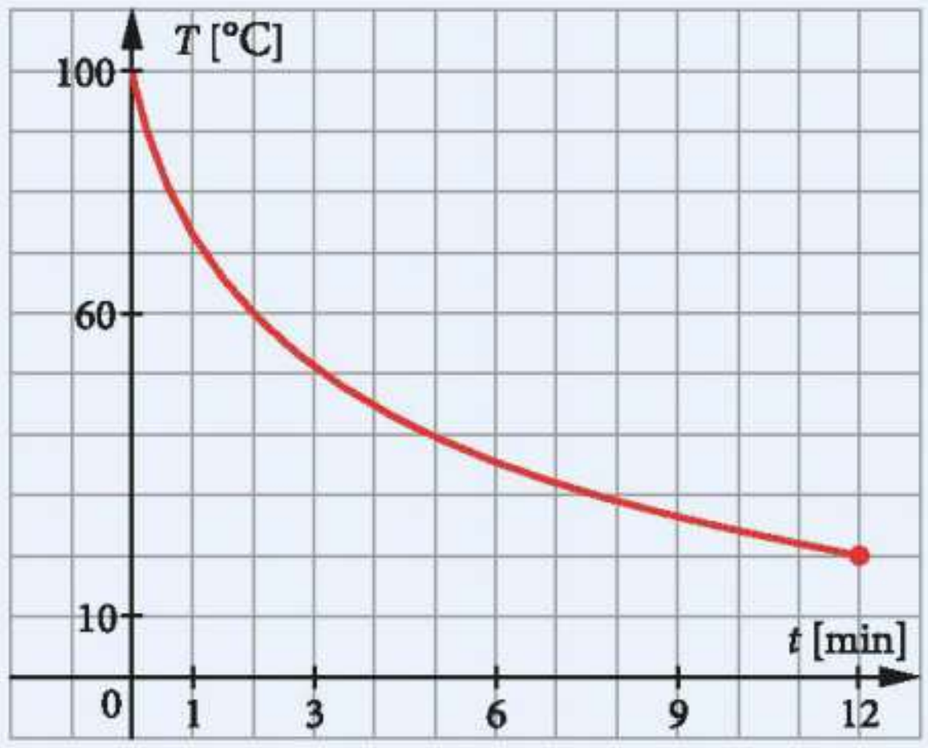
b) Dla jakich wartości m równanie $\left|1 - 2^{x-1}\right| = m$ ma dwa rozwiązania?

5. Funkcja $f(x) = 80 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 20$ opisuje stygnięcie ciała w otoczeniu o stałej temperaturze (rysunek obok).

a) Jaka była początkowa temperatura ciała?

b) Po ilu minutach ciało ostygło do temperatury 60°C?

c) Ile wynosiła temperatura otoczenia?



3. Warto powtórzyć – logarytmy

Twierdzenie

Gdy liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba c, że $a^c = b$.

Definicja

Logarytmem przy podstawie a $(a > 0 \text{ i } a \neq 1)$ **liczby** b $(b > 0)$ nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a, aby otrzymać liczbę b.

$$\log_a b = c, \text{ gdy } a^c = b \text{ i } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.

Zapisane poniżej własności wynikają bezpośrednio z definicji logarytmu.

Wniosek

Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$a^{\log_a b} = b$$

W zapisie **logarytmu dziesiętnego** pomijamy liczbę 10 i np. logarytm przy podstawie 10 liczby 5 zapisujemy: $\log 5$.

Przykład 1

a) Jeżeli $3^x = 5$, to $x = \log_3 5$.

b) Jeżeli $\left(\sqrt{17}\right)^x = 8$, to $x = \log_{\sqrt{17}} 8$.

Przykład 2

a) $\log_3 9 = 2$, bo $3^2 = 9$

b) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$, bo $6^{-2} = \frac{1}{36}$

c) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$, bo $81^{\frac{1}{2}} = 9$

d) $\log_5 5 = 1$, bo $5^1 = 5$

e) $\log 100 = 2$, bo $10^2 = 100$

f) $\log 1 = 0$, bo $10^0 = 1$

g) $\log 0{,}01 = -2$, bo $10^{-2} = 0{,}01$

h) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, bo $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Przykład 3

Obliczymy podany logarytm.

a) $\log_{\sqrt{7}}\left(7\sqrt[3]{7}\right)$ b) $\log_{\sqrt[3]{9}}\left(3\sqrt[4]{3}\right)$

Rozwiązanie

a) $\log_{\sqrt{7}}\left(7\sqrt[3]{7}\right) = x$ ⟵ wprowadzamy zmienną pomocniczą x

$\left(\sqrt{7}\right)^x = 7\sqrt[3]{7}$ ⟵ korzystamy z definicji logarytmu

$7^{\frac{1}{2}x} = 7^{1+\frac{1}{3}}$ ⟵ sprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

$\frac{1}{2}x = \frac{4}{3}$ ⟵ porównujemy wykładniki

$x = \frac{8}{3}$

Odp.: $\log_{\sqrt{7}}\left(7\sqrt[3]{7}\right) = \frac{8}{3}$

b) $\log_{\sqrt[3]{9}}\left(3\sqrt[4]{3}\right) = x$ ⟵ wprowadzamy zmienną pomocniczą x

$\left(\sqrt[3]{9}\right)^x = 3\sqrt[4]{3}$ ⟵ korzystamy z definicji logarytmu

$\left(9^{\frac{1}{3}}\right)^x = 3 \cdot 3^{\frac{1}{4}}$

$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^x = 3^{1+\frac{1}{4}}$

$3^{\frac{2}{3}x} = 3^{\frac{5}{4}}$ ⟵ sprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

$\frac{2}{3}x = \frac{5}{4}$ ⟵ porównujemy wykładniki

$x = \frac{15}{8}$

Odp.: $\log_{\sqrt[3]{9}}\left(3\sqrt[4]{3}\right) = \frac{15}{8}$

Przykład 4

Wiemy, że $\log_5 x = 3$. Wyznaczymy liczbę x.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją logarytmu liczba 3 jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść liczbę 5, żeby otrzymać x. Zatem $x = 5^3 = 125$.

Odp.: $x = 125$

Przykład 5

a) $4^{\log_4 9} = 9$

b) $\left(\sqrt{13}\right)^{2\log_{13} 10} = \left(\left(\sqrt{13}\right)^2\right)^{\log_{13} 10} = 13^{\log_{13} 10} = 10$

c) $9^{\log_3 12} = \left(3^2\right)^{\log_3 12} = 3^{2\cdot\log_3 12} = \left(3^{\log_3 12}\right)^2 = 12^2 = 144$

Zadania

3.1. Oblicz.

a) $\log_2 8$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$

c) $\log_3 \frac{1}{27}$

d) $\log 0{,}001$

e) $\log_{2,7} 2{,}7$

f) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

g) $\log_{17} 1$

h) $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$

3.2. Oblicz.

a) $\log_{2\sqrt{2}} 4$

b) $\log_{25} 5\sqrt{5}$

c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{6}}{36}$

d) $\log_{0{,}01} \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$

e) $\log_{\sqrt[3]{9}} \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\log_{4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{8}$

3.3. Oblicz x.

a) $\log_2 x = 3$

b) $\log_{33} x = 1$

c) $\log_{\frac{2}{3}} x = 0$

d) $\log x = -0{,}5$

e) $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$

f) $\log_{\sqrt{2}} x = 8$

3.4. Oblicz x.

a) $\log_x 4 = 2$

b) $\log_x 1000 = 3$

c) $\log_x 3 = 0{,}5$

d) $\log_x 4 = \frac{1}{3}$

e) $\log_x 6 = -\frac{1}{2}$

f) $\log_x \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$

3.5. Oblicz.

a) $10^{\log 7}$

b) $5^{\log_5 2}$

c) $2^{2-\log_2 5}$

d) $3^{1+2\log_3 2}$

e) $9^{\log_3 4}$

f) $6^{\log_{36} 9}$

4. Własności logarytmów

Umiejętności:
- stosowanie wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi
- stosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu

Omówimy teraz podstawowe własności logarytmów. Dzięki nim logarytmy niezwykle ułatwiły wykonywanie skomplikowanych rachunków i odegrały olbrzymią rolę w zastosowaniach matematyki. Bez przesady można stwierdzić, że sposób rachowania za pomocą logarytmów umożliwił skok cywilizacyjny porównywalny z efektem zastosowania komputerów.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

W dowodzie wykorzystamy własności działań na potęgach.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\log_a x = u$$
$$\log_a y = t$$

Zgodnie z definicją logarytmu otrzymujemy:

$$x = a^u$$
$$y = a^t$$
$$x \cdot y = a^u \cdot a^t \quad \longleftarrow \text{mnożymy obie równości stronami}$$
$$x \cdot y = a^{u+t} \quad \longleftarrow \text{wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach}$$
$$u + t = \log_a(x \cdot y) \quad \longleftarrow \text{korzystamy z definicji logarytmu}$$
$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y) \quad \longleftarrow \text{podstawiamy w miejsce } u \text{ i } t \text{ odpowiednie logarytmy}$$

Koniec dowodu

Mówimy: „**logarytm iloczynu** jest równy sumie logarytmów".

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

a) $\log_6 18 + \log_6 12 = \log_6(18 \cdot 12) = \log_6(6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6) = \log_6 6^3 = 3$

b) $\log_{13} 7 + \log_{13} \frac{1}{7} = \log_{13}\left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) = \log_{13} 1 = 0$

c) $\log_3\left(3\sqrt[5]{3}\right) = \log_3 3 + \log_3 \sqrt[5]{3} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Dowód

W dowodzie ponownie wykorzystamy własności działań na potęgach.

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\log_a x = u$$
$$\log_a y = t$$

Zgodnie z definicją logarytmu otrzymujemy:

$$x = a^u$$
$$y = a^t$$
$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^t} \quad \longleftarrow \text{dzielimy obie równości stronami}$$
$$\frac{x}{y} = a^{u-t} \quad \longleftarrow \text{wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach}$$
$$u - t = \log_a \frac{x}{y} \quad \longleftarrow \text{korzystamy z definicji logarytmu}$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad \longleftarrow \text{podstawiamy w miejsce } u \text{ i } t \text{ odpowiednie logarytmy}$$

Koniec dowodu

Mówimy: „**logarytm ilorazu** jest równy różnicy logarytmów”.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

a) $\log_7 21 - \log_7 3 = \log_7 \frac{21}{3} = \log_7 7 = 1$

b) $\log 0{,}05 - \log 50 = \log \frac{0{,}05}{50} = \log 0{,}001 = -3$

c) $\log_3 \frac{2}{3} = \log_3 2 - \log_3 3 = \log_3 2 - 1$

d) $\log_5 \frac{\sqrt[7]{125}}{25} = \log_5 \sqrt[7]{125} - \log_5 25 = \log_5 5^{\frac{3}{7}} - 2 = \frac{3}{7} - 2 = -1\frac{4}{7}$

Zauważmy, że wzór na logarytm iloczynu można uogólnić na większą liczbę czynników. W szczególności, jeżeli założymy, że $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,$ to zgodnie z tym wzorem prawdziwe są równości:

$$\log_a x^2 = \log_a (x \cdot x) = \log_a x + \log_a x = 2\log_a x$$
$$\log_a x^3 = \log_a (x^2 \cdot x) = \log_a x^2 + \log_a x = 2\log_a x + \log_a x = 3\log_a x \text{ itd.}$$

Uogólnieniem tej obserwacji jest twierdzenie o **logarytmie potęgi**, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

Przykład 3

a) $\log_{13} 13^{-2} = -2 \log_{13} 13 = -2$

b) $\log_7 \left(\sqrt{7}\right)^{21} = 21 \log_7 \sqrt{7} = 21 \cdot \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$

c) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 7 \log_3 \frac{1}{3} = 7 \cdot (-1) = -7$

d) $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 5 = \frac{1}{2}$

Przykład 4 ◀ zad. 4.6, 4.7

Obliczymy wartość podanego wyrażenia.

Rozwiązanie

a) $\log_2 3 - \log_2 30 + \log_2 5 = \log_2 \frac{3 \cdot 5}{30} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

b) $1 + 2\log_4 2 = 1 + \log_4 2^2 = 1 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$

c) $\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \frac{4}{16} + \log_3 \frac{4}{9} =$

$= \log_3 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}\right) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$

Do tej pory wszędzie tam, gdzie było to możliwe, zapisywaliśmy wartości logarytmów w postaci liczby wymiernej. Czasem jednak potrzebne jest wykonanie czynności odwrotnej, czyli zapisanie liczby w postaci logarytmu przy ustalonej podstawie. Korzystamy wówczas z definicji logarytmu, np.:

- $3 = \log_5 5^3$, czyli $3 = \log_5 125$
- $\frac{1}{2} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3}$
- $-4 = \log_{\sqrt{7}} \left(\sqrt{7}\right)^{-4} = \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{\left(\sqrt{7}\right)^4} = \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49}$
- $\pi = \log 10^{\pi}$
- $-\frac{2}{3} = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Przykład 5 ◂ zad. 4.8

Zapiszemy wyrażenie w prostszej postaci i obliczymy jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

a) $3\log a + 2\log b - \log 5, \quad a = 2, \quad b = 25$

b) $\log_3 x - 2\log_3 5 - \left(2 - \log_3 y\right), \quad x = 15, \quad y = 405$

Rozwiązanie

a) $3\log a + 2\log b - \log 5 = \log a^3 + \log b^2 - \log 5 = \log \frac{a^3 b^2}{5}$

Jeżeli $a = 2,\ b = 25,$ to $\log \frac{a^3 b^2}{5} = \log \frac{2^3 \cdot 25^2}{5} = \log\left(2^3 \cdot 5^3\right) = \log 10^3 = 3.$

b) $\log_3 x - 2\log_3 5 - \left(2 - \log_3 y\right) =$ $\longleftarrow 2 = \log_3 9$

$= \log_3 x - \log_3 25 - \log_3 9 + \log_3 y = \log_3 \frac{xy}{25 \cdot 9}$

Jeżeli $x = 15,\ y = 405,$ to $\log_3 \frac{xy}{25 \cdot 9} = \log_3 \frac{15 \cdot 405}{25 \cdot 9} = \log_3 3^3 = 3.$

Przykład 6 ◂ zad. 4.9

Przedstawimy podaną liczbę za pomocą jednego logarytmu.

Rozwiązanie

a) $1 + \log_2 5 = \log_2 2 + \log_2 5 = \log_2 10$

b) $2 - \log 2 = \log 100 - \log 2 = \log 50$

c) $-1 - \log_5 11 = \log_5 5^{-1} - \log_5 11 = \log_5 \frac{1}{55}$

d) $\frac{1}{2} + \log_3 8 = \log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_3 8 = \log_3 8\sqrt{3}$

e) $\log 5 - \log 7 + 2\log 3 + 4\log 2 = \log \frac{5 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{7} = \log \frac{720}{7}$

f) $\frac{\log^2 5 + 2\log 5 \cdot \log 7 + \log^2 7}{\log 35} = \frac{\left(\log 5 + \log 7\right)^2}{\log 35} =$

$= \frac{\log^2 35}{\log 35} = \log 35$

$\left(\log_a b\right)^2 = \log_a^2 b$

g) $\log^2 80 - \log^2 8 = (\log 80 - \log 8)(\log 80 + \log 8) = \log 10 \cdot \log 640 = \log 640$

Przykład 7 ◂ zad. 4.12

Przyjmijmy, że $\log_3 2 = p$. Wyrazimy wartość podanego logarytmu za pomocą p.

Rozwiązanie

a) $\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3\log_3 2 = 3p$

b) $\log_3 18 = \log_3 (2 \cdot 9) = \log_3 2 + \log_3 9 = p + 2$

c) $\log_3 3\frac{5}{9} = \log_3 \frac{32}{9} = \log_3 32 - \log_3 9 = \log_3 2^5 - 2 = 5p - 2$

Podamy teraz **wzór pozwalający zmieniać podstawę logarytmu**.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$ zachodzi równość:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dowód

Udowodnimy równoważną, często używaną postać wzoru: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$.
Przekształcamy prawą stronę wzoru.

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b}$ $\longleftarrow k \cdot \log_a x = \log_a x^k$

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ $\longleftarrow a^{\log_a b} = b$

Koniec dowodu

Przykład 8

a) $\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}$

b) $\dfrac{\log_7 5}{\log_7 10} = \log 5$

c) $\log_3 2 \cdot \log_2 6 = \log_3 6$

d) $\log_3 7 = \dfrac{\log_7 7}{\log_7 3} = \dfrac{1}{\log_7 3}$

W szczególności, jeżeli we wzorze $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ przyjmiemy $c = 10$, możemy wyrazić logarytm dowolnej liczby przy dowolnej podstawie jako iloraz logarytmów dziesiętnych. Zatem: $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2}$, $\log_5 \dfrac{2}{7} = \dfrac{\log \frac{2}{7}}{\log 5}$ itd.

Przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych można odczytać z tablic matematycznych lub kalkulatorów. Na stronie 455 podajemy tablicę wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9 przybliżonych do trzeciego miejsca po przecinku.

Zauważmy, że jeżeli na przykład $\log 6{,}2 \approx 0{,}792$, to $10^{0{,}792} \approx 6{,}2$. Z tablicy tej można więc także odczytywać przybliżone wartości funkcji $y = 10^x$ dla $0 < x < 1$.

Przykład 9 ◀ zad. 4.17, 4.18

Wyznaczymy przybliżoną wartość podanej liczby.

a) $\log_5 3$ b) $\sqrt{10}$ c) $\log 58$ d) $\log 0{,}46$

Rozwiązanie

a) Zgodnie ze wzorem na zamianę podstawy logarytmu mamy $\log_5 3 = \dfrac{\log 3}{\log 5}$.
Podstawiamy przybliżone wartości z tablicy i otrzymujemy
$\log_5 3 \approx \dfrac{0{,}477}{0{,}699} \approx 0{,}682$.

b) Wiemy, że $\sqrt{10} = 10^{0,5}$. Z tablicy możemy odczytać, że $10^{0,491} \approx 3,1$, a $10^{0,505} \approx 3,2$. Zatem $3,1 < \sqrt{10} < 3,2$.

c) Tablica zawiera logarytmy liczb mniejszych od 10. Musimy więc przekształcić $\log 58$ tak, aby skorzystać z tablicy.
$\log 58 = \log(10 \cdot 5,8) = \log 10 + \log 5,8 = 1 + \log 5,8 \approx 1 + 0,763 = 1,763$

d) $\log 0,46 = \log(0,1 \cdot 4,6) = \log 0,1 + \log 4,6 \approx -1 + 0,663 = -0,337$

Korzystając z podanych wzorów, można zastąpić mnożenie, dzielenie i potęgowanie liczb dużo prostszymi działaniami. Obecnie nie ma to specjalnego znaczenia, ponieważ komputery wykonują błyskawicznie nawet bardzo skomplikowane rachunki, a do prostszych działań wystarczają kalkulatory. Okazuje się jednak, że wiele procesów fizycznych, biologicznych, a nawet społecznych ma charakter logarytmiczny. Z niektórymi praktycznymi zastosowaniami logarytmów zapoznacie się w następnym temacie.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Która równość jest prawdziwa dla każdej dodatniej liczby a?

A. $\log_5 a + \log_5(2a) = \log_5(3a)$

B. $\log_5 a \cdot \log_5(2a) = \log_5(3a)$

C. $\log_5 a + \log_5(2a) = \log_5\left(2a^2\right)$

D. $\log_5 a \cdot \log_5(2a) = \log_5\left(2a^2\right)$

4.2. Wskaż liczbę, która nie jest równa liczbie $\log_3 64$.

A. $2\log_3 8$ **B.** $3\log_3 4$ **C.** $4\log_3 4$ **D.** $6\log_3 2$

4.3. Wskaż liczbę, która jest równa liczbie $\log_2 6$.

A. $2\log_2 3$ **B.** $\log_2 2 \cdot \log_2 3$ **C.** $1 + \log_2 3$ **D.** 3^{64}

4.4. Oblicz.

a) $\log_2 27 + \log_2 \frac{2}{9} + \log_2 \frac{2}{3}$

b) $\log_3 4 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{81}{2}$

c) $\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2} + \log \sqrt{10}$

d) $\log_5 7 + \log_5 \frac{6}{14} + \log_5 8\frac{1}{3}$

e) $\log_6 34 + \log_6 \frac{2}{17} + \log_6 9$

f) $\log_{0,5} 3 + \log_{0,5} \frac{2}{9} + \log_{0,5} \frac{3}{8}$

4.5. Oblicz.

a) $\log_5 150 - \log_5 3 - \log_5 2$

b) $\log_4 3 - \log_4 2 - \log_4 \frac{3}{2}$

c) $\log_6 2 - \log_6 \frac{7}{3} - \log_6 \frac{1}{42}$

d) $\log_4 1\frac{3}{13} - \log_4 3\frac{1}{2} - \log_4 \frac{1}{91}$

e) $\log 250 + \log 120 - \log 0{,}3$

f) $\log_7 \frac{3}{11} + \log_7 \frac{5}{14} - \log_7 \frac{15}{22}$

4.6. Oblicz.

a) $2\log 2 + \log 15 - \log 6$

b) $\log 20 - 3\log 2 + \log 40$

c) $2\log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 75$

d) $\log_3 15 + \log_3 45 - 2\log_3 5$

e) $\log_6 18 + 3\log_6 2 - \log_6 4$

f) $2\log_5 2 + 3\log_5 3 - \log_5 21{,}6$

4.7. Oblicz.

a) $\dfrac{3\log 2}{\log 56 - \log 7}$

b) $\dfrac{\log_7 2 + \log_7 3}{\log_7 24 - \log_7 4}$

c) $\dfrac{\log_5 6 - 3\left(\log_5 2 + \log_5 3\right)}{\log_5 6}$

d) $\dfrac{\log_2 15 - 3{,}5\left(\log_2 3 + \log_2 5\right)}{\log_2 45 - \log_2 3}$

e) $\dfrac{2\log_3 4 - 3\log_3 12}{3 + \log_3 4}$

f) $\dfrac{5\log_5 18 - 4\log_5 2 - 9\log_5 3}{\log_5 18 - \log_5 3}$

4.8. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

a) $2\log_8 a + 4\log_8 b - \log_8 50$ $\quad a = 5$ $\quad b = 2$

b) $5\log_3 a - 2\log_3 5 - \left(\log_3 a - 2\log_3 b\right)$ $\quad a = 3$ $\quad b = 5$

c) $3\log_2 x + 5\log_2 y - 2\left(2\log_2 x + \log_2 y\right) - \log_2 7$ $\quad x = 98$ $\quad y = 7$

d) $\log(x + y) + 3\log x + 4\log y - 3\log(xy)$ $\quad x = 3$ $\quad y = 2$

4.9. Przedstaw podaną liczbę za pomocą jednego logarytmu.

a) $\log 0{,}2 + 1$

b) $3 - \log_2 5$

c) $2 + \log_5 2$

d) $-1 - \log_3 2$

e) $\frac{1}{2} + \log 7$

f) $-\frac{2}{3} + \log_2 3$

4.10. Niech $a > 0$. Zapisz wyrażenie za pomocą jednego logarytmu.

a) $\log_3 a - \log_3 a^2 + \log_3(3a)$

b) $\log_5(2a) + \log_5(3a) - \log_5\left(6a^2\right)$

c) $\log_6\left(2a^2\right) - \log_6 \sqrt{2} - \log_6 a$

d) $2\log_3(3a) + \log_3(9a) - 3\log_3 a$

e) $2\log_2(4a) + \log_2(8a) - 5\log_2 a$

f) $3\left(\log_2(4a) - 2\log_2 a\right) - 2\left(\log_2(2a) - \frac{1}{2}\log_2 a\right)$

4.11. Przedstaw wyrażenie w postaci jednego logarytmu. Podaj potrzebne założenia.

a) $2\log x + 5\log y - \log 8$

b) $\log_2 x - \log_2 y - \log_5 25$

c) $2\log_3(x+1) - \log_3 y - \log_2 8$

d) $\frac{1}{2} + \log x - \log 8$

e) $\frac{2}{5} - \log_2\left(x - \sqrt{2}\right) + \log_2 \sqrt[5]{8}$

f) $\log(x+y) + \log(x-y)$

4.12. Przyjmujemy, że $\log_2 3 = a$. Wyraź wartość podanego logarytmu za pomocą a.

a) $\log_2 9$ b) $\log_2 6$ c) $\log_2 48$ d) $\log_2 \frac{1}{9}$ e) $\log_2 \frac{3}{2}$ f) $\log_2 \frac{4}{3}$

4.13. Przyjmujemy, że $\log_5 2 = m$. Wyraź wartość podanej sumy za pomocą m.

a) $\log_5 4 + \log_5 16$

b) $\log_5 8 - \log_5 50$

c) $\log_5 10 - \log_5 6 + \log_5 24$

d) $2\log_5 \frac{4}{5} - \log_5 \frac{1}{4} + \log_5 \frac{5}{2}$

4.14. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(\log_5(25a) - 2\log_5\left(\frac{1}{5}a\right)\right) \cdot \left(2\log_5\left(5\sqrt{a}\right) + \log_5\left(\frac{1}{25}a^2\right)\right)$ dla $\log_5 a = 2$

b) $\left(\log_2(4a) - \log_3 27\right)^2 - \left(2\log_2\left(2\sqrt{a}\right) - 3\log_3 \frac{1}{3}\right)$ dla $\log_2 a = 3$

4.15. Liczby a, b i c spełniają warunek $\log_2(2a) = 3 - \log_3 b = 1 + \log_4 c = 1$. Oblicz $\sqrt{a \cdot b \cdot c}$.

4.16. Liczby a, b i c spełniają warunek

$\log_2 a + \log_2 4 = 4\log_3 b - \log_3 9 = \log_4 c + \log_4 16 = 6$. Oblicz $\frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{c}}$.

4.17. Oblicz przybliżoną wartość podanego logarytmu. Skorzystaj ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz z tablicy logarytmów dziesiętnych.

a) $\log_3 2$ b) $\log_5 7$ c) $\log_2 17$ d) $\log_{23} 61$

4.18. Oszacuj wartość wyrażenia. Skorzystaj z tablicy logarytmów.

a) $\sqrt[4]{10}$ b) $\sqrt[3]{100}$ c) $\frac{100}{\sqrt[5]{10}}$ d) $\frac{40}{\sqrt[3]{100}}$

4.19. Liczby a i b spełniają warunki $\log(10a) = 2$ i $\log \frac{100}{b} = 3$. Oblicz $\log(ab)$.

4.20. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - x \cdot \log_2 3 - 2\left(\log_2 3\right)^2 = 0$

b) $x^2 - (2 + \log 5)x + \log 25 = 0$

c) $x^2 - x \cdot \log_3 10 + \log_3 2 \cdot \log_3 5 = 0$

d) $x^2 - x \cdot \log_2 \frac{3}{2} - \log_2 3 = 0$

D **4.21.** Wykaż, że liczby $5^{\log_2 3}$ i $3^{\log_2 5}$ są równe.

D ✱ **4.22.** Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

a) $\left(\log_5 4 + \log_4 5 + 2\right)\left(\log_5 4 - \log_{20} 4\right) \cdot \log_4 5 - \log_5 4 = 1$

b) $\left(\log_3 6 + \log_6 81 + 4\right)\left(\log_3 6 - \log_{54} 36\right) \cdot \log_6 3 - \log_3 6 = 2$

c) $\left(\log_3 4 + 9\log_4 3 + 6\right)\left(\log_3 4 - 3\log_{108} 4\right) \cdot \log_4 3 - \log_3 4 = 3$

D **4.23.** Wykaż, że dla liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ prawdziwy jest wzór $\log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b}$.

4.24. Przyjmujemy, że $\log_{15} 9 = k$. Wyraź $\log_{15} 5$ za pomocą k.

4.25. Przyjmujemy, że $\log 2 = a$ i $\log 3 = b$. Wyraź $\log_{12} 20$ za pomocą a i b.

✱ **4.26.** Wiadomo, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 4$ oraz $\log_d x = 6$. Oblicz $\log_{abcd} x$.

D ✱ **4.27.** Wykaż, że jeżeli $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ oraz $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, to $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$.

D ✱ **4.28.** Wykaż, że $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \ldots \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 = \log_{10} 2$.

D ✱ **4.29.** Wykaż, że jeżeli $a > 1$ i $b > 1$, to $\log_a b + \log_b a \geqslant 2$.

Prosto do matury

1. Wiadomo, że $\log_3 4 = k$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\log_3 2 = \sqrt{k}$ **B.** $\log_3 2 = \frac{1}{2}k$ **C.** $\log_9 2 = \frac{1}{2}k$

2. Oblicz $\log_3 6 + \log_3 18 - 2\log_3 2$.

3. Przyjmujemy, że $\log_3 7 \approx 1{,}77$. Oblicz $\log_3 42 - \log_3 2$.

4. Przyjmujemy, że $\log_5 2 = m$. Przedstaw wartość wyrażenia $\frac{3\log_5 50 - 4\log_5 10}{\log_5 0{,}008}$ za pomocą m.

D **5.** Wykaż, że dla liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ prawdziwy jest wzór $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$.

Logarytmy – rewolucyjny wynalazek

Są wynalazki, które w świecie naukowym okazują się prawdziwą rewolucją. Można do nich zaliczyć logarytmy.

Odkrycie logarytmów

Poważną trudnością dla XVII-wiecznych uczonych była konieczność wykonywania ręcznych rachunków. Wystarczy pomnożyć pisemnie np. 101 247 · 982 073, by zrozumieć, jak łatwo o pomyłkę.

Jedną z osób, które poszukiwały sposobu na uproszczenie rachunków, był szkocki matematyk John Napier. Opisał on metodę pozwalającą np. zastąpić mnożenie dwóch liczb dodawaniem dwóch innych liczb, które nazwał **logarytmami**, od greckich słów *lógos* – rozumienie i *arithmós* – liczba. Przez 20 lat budował **tablice logarytmiczne**, które wydał w 1614 r.

Ogromna przydatność tablic Napiera została bardzo szybko zauważona i logarytmy zrewolucjonizowały świat rachunków, zwłaszcza w astronomii. Pisano o nich, że „podwoiły życie astronomów".

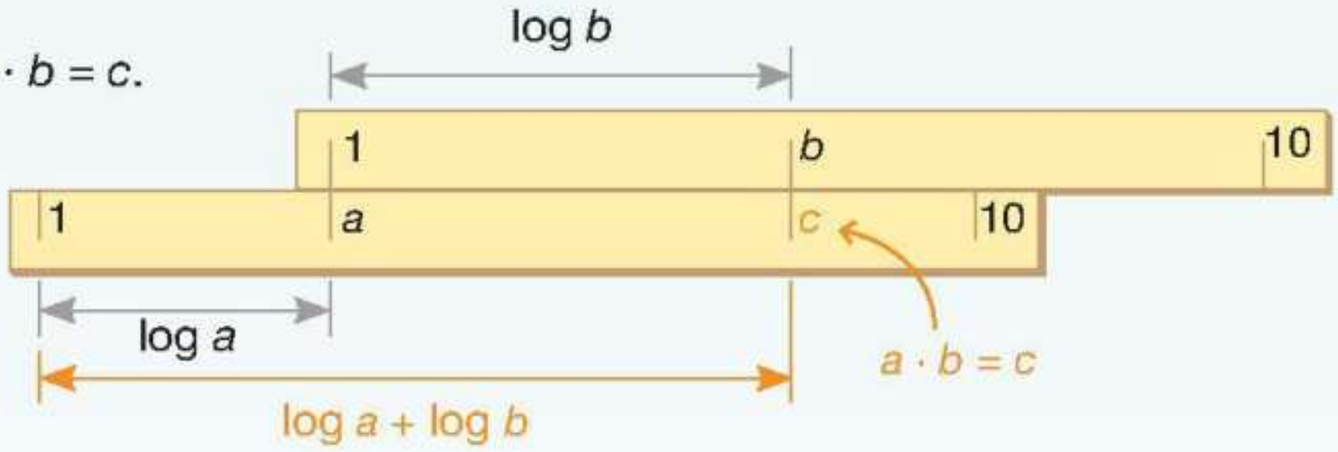
Przez prawie 350 lat, aż do skontruowania pierwszego kalkulatora elektronicznego, logarytmy były podstawą wszystkich obliczeń w świecie nauki. Korzystali z nich astronomowie, budowniczowie, inżynierowie, mechanicy...

1614	1622	1675	ok. 1770
pierwsze tablice logarytmiczne	suwak logarytmiczny	odkrycie przydatności logarytmów w analizie matematycznej	powiązanie funkcji wykładniczej z funkcją logarytmiczną

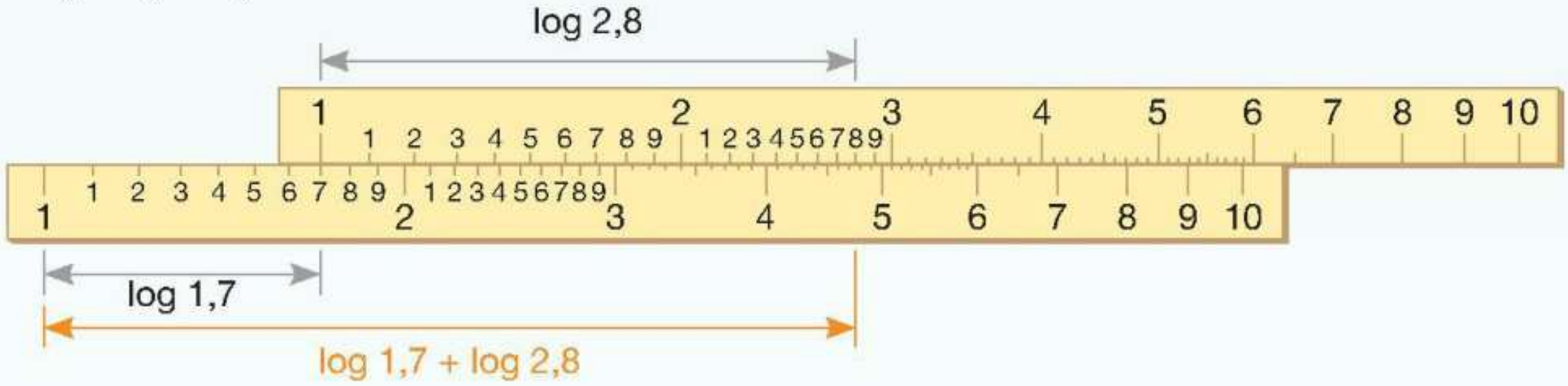
Suwak logarytmiczny

W 1622 r. powstał pierwszy suwak logarytmiczny – przyrząd, na którym można było szybko wykonać dowolne obliczenia algebraiczne.

Aby obliczyć iloczyn $a \cdot b$, wystarczy odpowiednio przesuwać względem siebie dwie podziałki ze skalą logarytmiczną. Na podziałce logarytmicznej odległość od 1 do dowolnej liczby x odpowiada wartości $\log x$. Stąd suma odległości od 1 do a i od 1 do b oznacza $\log a + \log b$.
Jeżeli $\log a + \log b = \log c$, to $a \cdot b = c$.



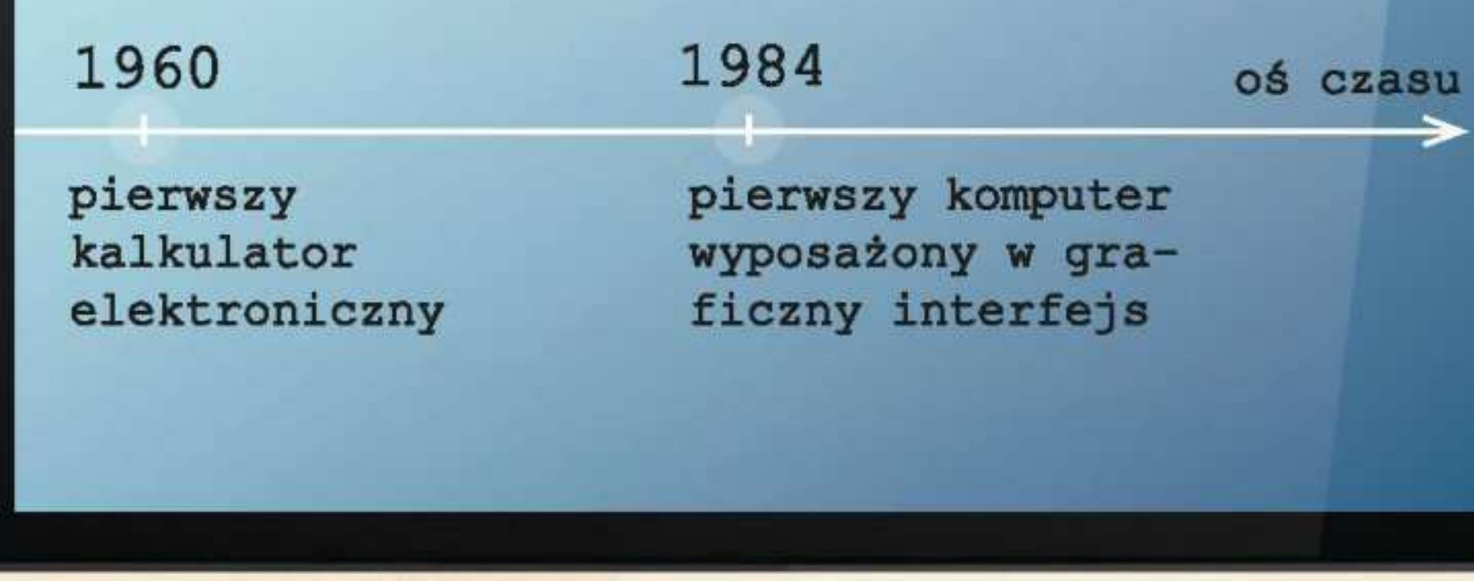
W ten sposób odczytujemy, że $1{,}7 \cdot 2{,}8 \approx 4{,}75$.



Od praktyki do teorii

Przez wiele lat logarytmy służyły wyłącznie jako narzędzie rachunkowe. Dopiero w drugiej połowie XVIII w., po ponad 130 latach od pierwszego wydania tablic Napiera, zauważono związek logarytmów z funkcją wykładniczą i sformułowano definicję logarytmu, której używamy do dzisiaj.

Obecnie, gdy urządzenia elektroniczne zastąpiły ręczne rachunki, zarówno logarytmy, jak i funkcja logarytmiczna i jej własności nadal są szeroko wykorzystywane. Pojawiają się np. w prawach opisujących świat nie tylko we wszystkich naukach ścisłych, lecz także w ekonomii, socjologii, psychologii czy filozofii.



5. Funkcja logarytmiczna. Zastosowania logarytmów

Umiejętności:

- szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznych o różnych podstawach
- stosowanie logarytmów, np. do wyjaśniania zjawisk przyrodniczych

Logarytm o podstawie dodatniej i różnej od 1 można obliczyć dla każdej liczby dodatniej. Można zatem rozważyć funkcję, która każdej liczbie dodatniej przyporządkowuje jej logarytm o podstawie a.

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną o podstawie** a. Dziedziną tej funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych $(x > 0)$, a jej wykres nazywamy **krzywą logarytmiczną**.

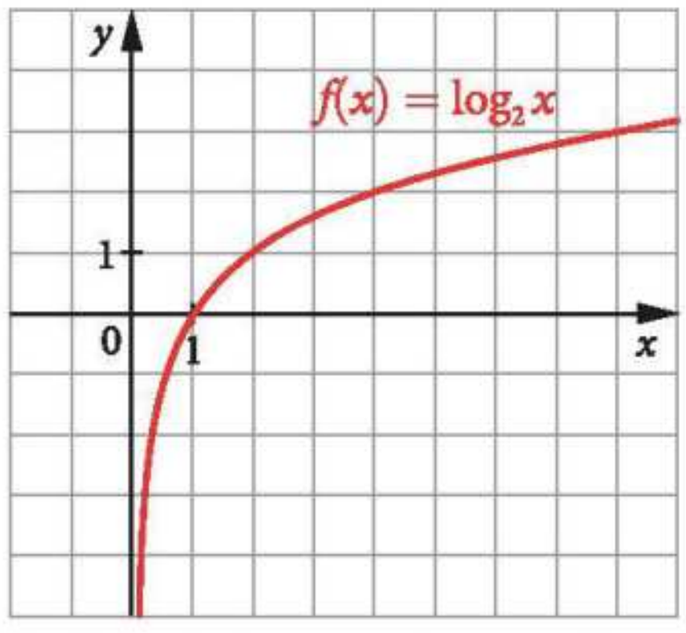
Przykład 1

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ i na jego podstawie opiszemy jej własności.

Rozwiązanie

Na początku sporządzamy częściową tabelę tej funkcji dla argumentów, dla których można łatwo obliczyć wartości funkcji.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4



- Dziedziną funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji jest **R**.
- Miejscem zerowym funkcji jest liczba 1.
- $f(x) > 0$ dla $x > 1$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$.
- Funkcja jest rosnąca.
- Funkcja f nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
- Każda prosta równoległa do osi x ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny. Zatem równanie $\log_2 x = m$ ma dla każdej wartości m jedno rozwiązanie.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Dowód

Korzystamy ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu.

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Koniec dowodu

Wniosek

Wykresy funkcji

$$f(x) = \log_a x \quad \text{i} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x, \text{ dla } a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

są symetryczne względem osi x.

Przykład 2

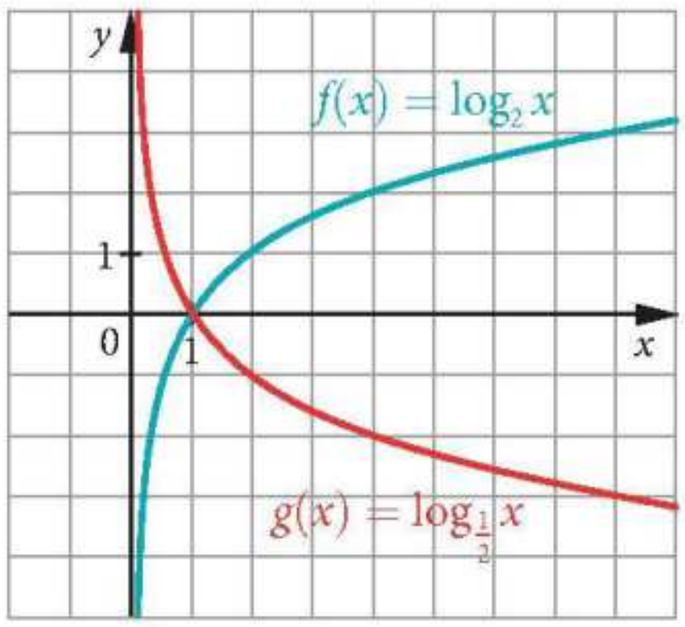
Naszkicujemy wykres i opiszemy własności funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Rozwiązanie

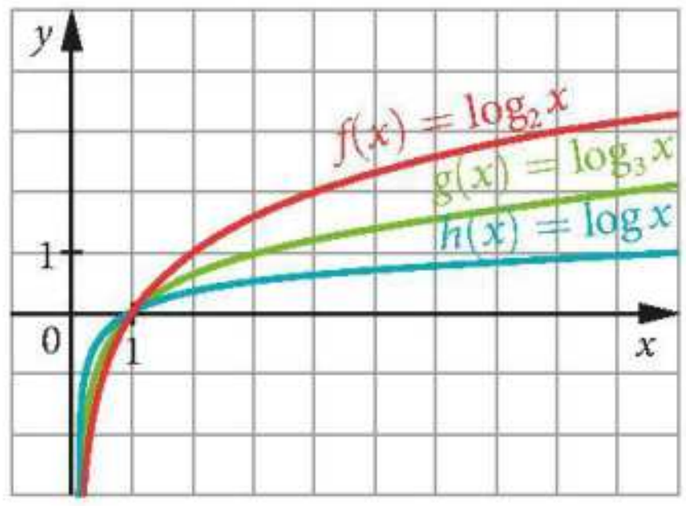
Jeżeli przyjmiemy, że $f(x) = \log_2 x$, to $g(x) = -f(x)$, czyli wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ są symetryczne względem osi x.

Własności funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ są podobne do odpowiednich własności funkcji $f(x) = \log_2 x$.

- Dziedziną funkcji g jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji g jest **R**.
- Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 1.
- $g(x) < 0$ dla $x > 1$, $g(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$.
- Funkcja g jest malejąca.
- Funkcja g nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
- Każda prosta równoległa do osi x ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny. Zatem równanie $\log_{\frac{1}{2}} x = m$ ma dla każdej wartości m jedno rozwiązanie.



Na wykresie obok przedstawiamy krzywe logarytmiczne **o różnych podstawach większych od 1**. Można zaobserwować, że wykres funkcji o większej podstawie leży dla $0 < x < 1$ **powyżej**, a dla $x > 1$ **poniżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie.

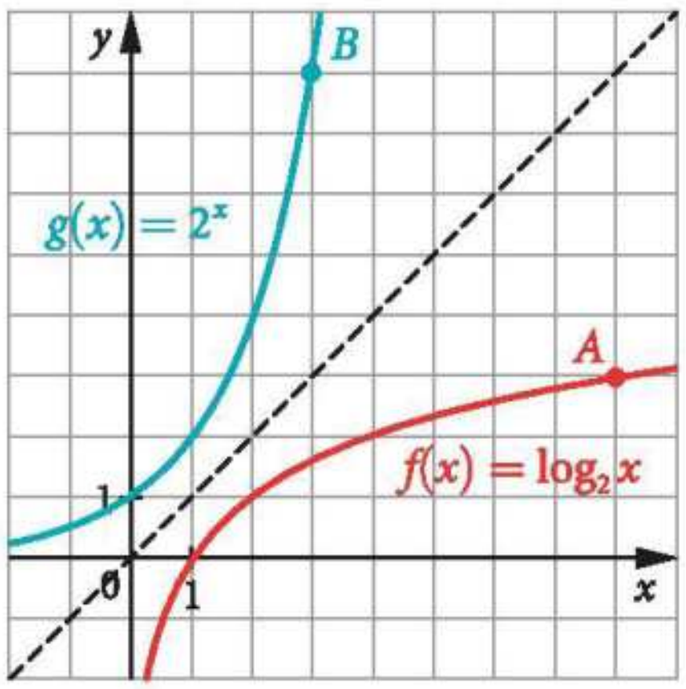


Przykład 3

Przyjrzyjmy się wykresom funkcji $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2^x$.

- Do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ należy punkt $A = (8, 3)$, bo $3 = \log_2 8$.
- Do wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ należy punkt $B = (3, 8)$, bo $8 = 2^3$.

Punkty A i B są symetryczne względem zaznaczonej na rysunku prostej o równaniu $y = x$.



Ogólnie – jeżeli punkt (p, q) należy do wykresu jednej z tych funkcji, to punkt (q, p) należy do wykresu drugiej. Wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2^x$ są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$. Rozumowanie to można w prosty sposób uogólnić na każdą parę wykresów funkcji logarytmicznej i wykładniczej o tej samej podstawie.

Wniosek

Wykresy funkcji

$$f(x) = \log_a x \quad \text{i} \quad g(x) = a^x, \text{ dla } a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

Przykład 4

zad. 5.4

Sporządzimy wykres podanej funkcji.

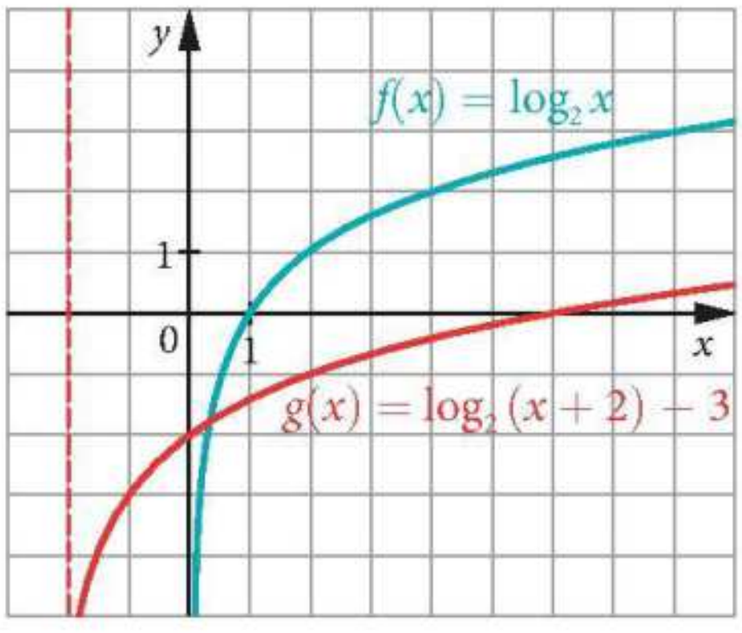
Rozwiązanie

a) $g(x) = \log_2(x + 2) - 3$

Zauważmy, że dziedzinę D funkcji tworzą liczby spełniające założenie:

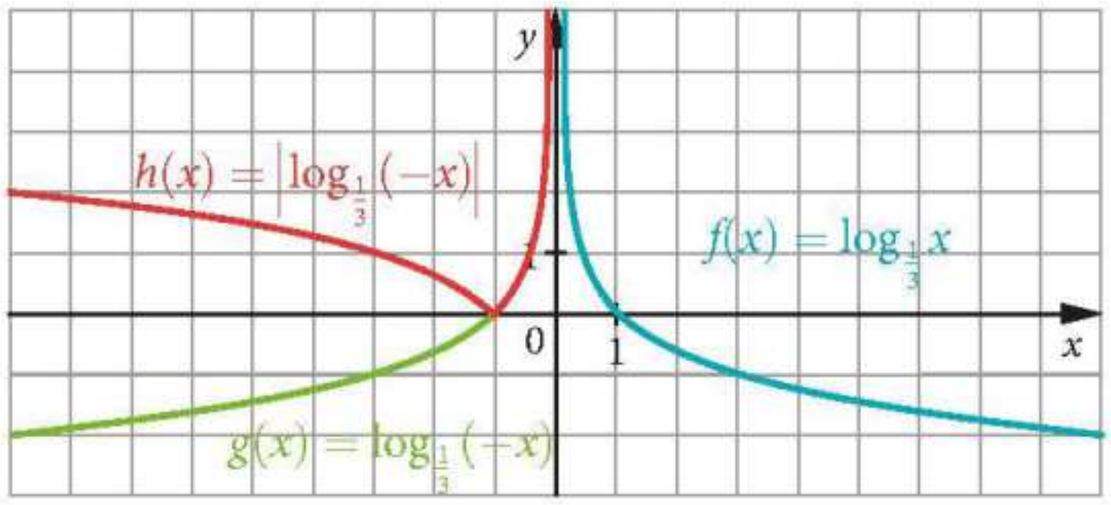
$$x + 2 > 0, \text{ czyli } D = (-2; \infty)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $f(x) = \log_2 x$, to $g(x) = f(x + 2) - 3$.



Wykres funkcji $g(x) = \log_2(x+2) - 3$ otrzymamy jako wynik przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ o wektor $\vec{u} = [-2, -3]$.

b) $h(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}(-x)\right|$



Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Krok 2: $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ ⟵ symetria wykresu f względem osi y

Krok 3: $h(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}(-x)\right|$ ⟵ symetria fragmentu wykresu funkcji g leżącego poniżej osi x względem tej osi

Podane przekształcenia można wykonać w odwrotnej kolejności.

Przykład 5 ◂ zad. 5.11

Wyznaczymy dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2 + 6x - 8\right)$.

Rozwiązanie

$-x^2 + 6x - 8 > 0$ ⟵ logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich

$-(x-2)(x-4) > 0$, stąd $x \in (2; 4)$

Odp.: Dziedziną funkcji f jest przedział $(2; 4)$.

Przykład 6 ◂ zad. 5.15

Chory przyjął jednorazową dawkę 50 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie t godzin określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Wiadomo, że po dziesięciu godzinach organizm usuwa 40% masy przyjętego leku.

a) Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

b) Po jakim czasie od przyjęcia dawki leku jego masa w organizmie zmniejszy się dziesięciokrotnie?

Rozwiązanie

Wyznaczymy najpierw wartości współczynników a i b.

Wiemy, że $M(0) = 50$.

Skoro po 10 godzinach usuwane jest 40% masy leku, to z dawki 50 mg zostaje wtedy w organizmie $60\% \cdot 50 \text{ mg} = 30 \text{ mg}$ leku. To oznacza, że $M(10) = 30$.

Zatem $a \cdot b^0 = 50$ i $a \cdot b^{10} = 30$. Stąd $a = 50$ i $b^{10} = 0{,}6$ czyli $b = 0{,}6^{0{,}1}$.

Wzór funkcji można więc zapisać w postaci $M(t) = 50 \cdot 0{,}6^{0{,}1t}$.

a) Aby obliczyć, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby, podstawiamy do wzoru $t = 24$.
$M(24) = 50 \cdot 0{,}6^{2{,}4} \approx 14{,}7$ [mg]

b) Aby obliczyć, po jakim czasie masa leku w organizmie zmniejszy się dziesięciokrotnie, rozwiążemy równanie:
$M(t) = 5$
$50 \cdot 0{,}6^{0{,}1t} = 5$, czyli $0{,}6^{0{,}1t} = 0{,}1$, stąd $0{,}1t = \log_{0{,}6} 0{,}1$
$t = 10 \cdot \log_{0{,}6} 0{,}1 = 10 \cdot \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}6} =$ ⟵ wzór na zamianę podstawy logarytmu
$= 10 \cdot \frac{-1}{\log 6 - 1} \approx 45$

Odp.: a) Po upływie doby w organizmie pozostanie 14,7 mg leku.
b) Masa leku w organizmie zmniejszy się dziesięciokrotnie po 45 godzinach.

Podany w powyższym przykładzie wzór $f(t) = a \cdot b^t$ można stosować, kiedy mamy do czynienia z procesem, w którym pewna wielkość przyrasta lub zmniejsza się przez cały czas w tym samym tempie.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = \log_{1,2} x$
B. $f(x) = -\log_{0,8} x$
C. $f(x) = \log_3(-x)$
D. $f(x) = \log x - 1$

5.2. Wskaż wzór funkcji, której wykres nie jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ względem osi x.

A. $g(x) = -\log_3 x$
B. $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
C. $g(x) = \log_3 \frac{1}{x}$
D. $g(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

5.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres przecina oś y.

A. $f(x) = \log x - 2$
B. $f(x) = \log(x - 2)$
C. $f(x) = \log x + 1$
D. $f(x) = \log(x + 1)$

5.4. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$
b) $f(x) = -\log_2 x + 2$
c) $f(x) = \log_4(x + 3) - 1$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 1$

5.5. Wyznacz miejsce zerowe funkcji.

a) $f(x) = \log_5(x-1)$

b) $f(x) = -\log_2 x + 3$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 1$

d) $f(x) = \log(x-3) - \frac{1}{2}$

e) $f(x) = -\log_{\frac{1}{4}} x - \frac{1}{2}$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \frac{1}{3}$

5.6. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \left|\log_4(x-2)\right|$

b) $f(x) = 1 - \left|\log_{\frac{1}{3}} x\right|$

c) $f(x) = \left|\left|\log_2 x\right| - 1\right|$

d) $f(x) = \left|-\log_{\frac{1}{2}}(-x)\right|$

5.7. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \log_2\left(2^x\right)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x}$

5.8. Narysuj wykres funkcji.

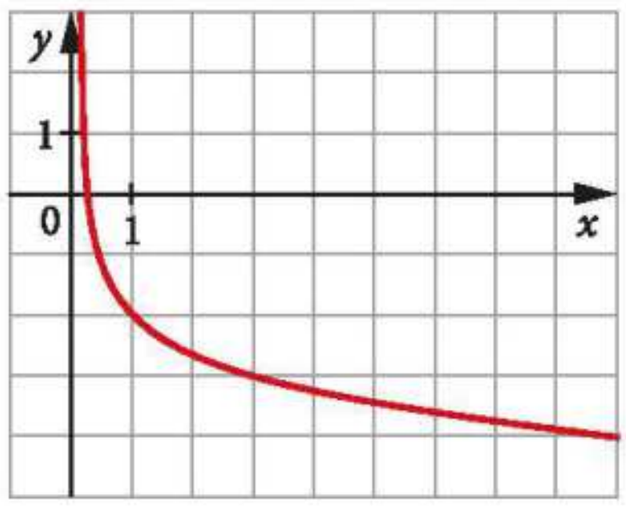
a) $f(x) = \log_4 |x|$

b) $f(x) = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x + \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|}{2}$

5.9. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \log_a x + b$.

a) Wyznacz wartości a i b.

b) Sporządź wykres funkcji $g(x) = -f(x+1)$.



5.10. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, a następnie odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.

a) $f(x) = \log_2(x-1) - 1$ $\quad g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

b) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$ $\quad g(x) = 1 - \frac{1}{4}(x+1)^2$

c) $f(x) = \log(x+1) + 1$ $\quad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 4$ $\quad g(x) = \log_3 x + 2$

5.11. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \log_3 \dfrac{x-3}{x-2}$

b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}}\left(2x^2 - 7x + 5\right)$

5.12. Skala pH służy do badania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych. Współczynnik pH definiuje się jako: $\mathrm{pH} = -\log \mathrm{H}^+$, przy czym H^+ oznacza stężenie jonów wodorowych w molach na litr roztworu. Wyznacz współczynnik pH octu, dla którego stężenie jonów wodorowych wynosi 0,001 mola/litr.

5.13. Poziom natężenia dźwięku mierzymy w dB (decybelach). Liczbę decybeli N oblicza się według wzoru $N = 10\log\frac{I}{I_0}$, gdzie I to natężenie danego dźwięku mierzone w $\mathrm{W/m^2}$ (wat na metr kwadratowy), a I_0 to stała równa natężeniu dźwięku na progu słyszalności dla ucha ludzkiego, wynoszącemu 10^{-12} $\mathrm{W/m^2}$. Wyznacz liczbę decybeli zalecanego przez WHO maksymalnego poziomu hałasu (w środowisku) w porze dziennej. Natężenie dźwięku wynosi w tym wypadku 10^{-7} $\mathrm{W/m^2}$.

Zwróć uwagę, że **poziom natężenia dźwięku** oraz **natężenie dźwięku** to pojęcia opisujące dwie różne wielkości (mierzone w różnych jednostkach).

5.14. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Liczbę stopni w tej skali opisuje wzór $R = \log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, natomiast $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową.

a) Ile stopni w skali Richtera ma trzęsienie ziemi o amplitudzie 0,1 cm?
b) W lipcu 2019 r. w Grecji miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 5,3 stopnia w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.
c) Ile razy większa jest amplituda trzęsienia ziemi o sile 6,7 stopnia w skali Richtera od amplitudy trzęsienia ziemi o sile 4,7 stopnia?

5.15. Pacjentka przyjęła dawkę radioaktywnego jodu, którego okres połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Masę radioaktywnego jodu pozostałego w organizmie po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$.

a) Ile procent substancji radioaktywnej pozostanie w organizmie pacjentki po upływie 30 dni?
b) Po jakim czasie pozostanie w organizmie 1% dawki?

Przyjmij, że $\log_2 10 \approx 3{,}322$.

5.16. Liczba bakterii w badanej próbce w ciągu dwóch godzin od początku obserwacji zwiększyła się trzykrotnie. Zakładamy, że tempo przyrostu liczby bakterii jest stałe.

a) O ile procent zwiększyła się liczba bakterii po godzinie?
b) Po jakim czasie od początku obserwacji liczba bakterii zwiększyła się dwukrotnie?

Przyjmij, że $\log_3 2 \approx 0{,}63$.

5.17. Działka leśna zawierała 2400 m^3 masy drzewnej. Po upływie 8 lat nastąpił przyrost masy o 900 m^3. Zakładamy, że masa drzewna przyrasta przez cały czas w tym samym tempie. Oblicz, ile masy drzewnej będzie zawierać działka po upływie kolejnych 5 lat.

5.18. Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji f, określonej wzorem $f(x) = \log\left(\left(9 - 4m^2\right)x + 4m + 6\right)$, jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

5.19. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji f, określonej wzorem $f(x) = \log\left((2m-3)x^2 - (6-m)x + \frac{1}{7}(m-9)\right)$, jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

5.20. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 \frac{8}{x+1}$.

5.21. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_2\left(x^2 - 9\right) - \log_2(x-3)$.

5.22. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 4x + 4\right)$.

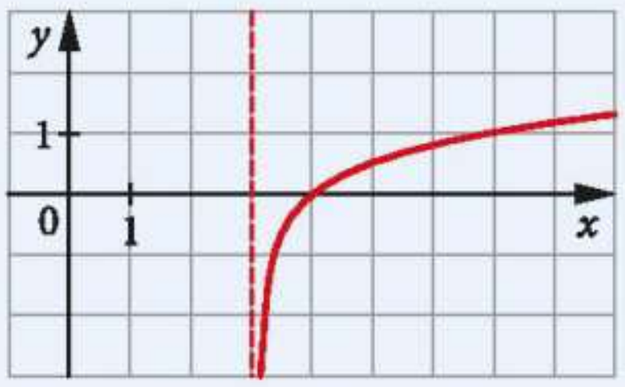
Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $f(x) = -100$ ma jedno rozwiązanie.
B. Miejscem zerowym funkcji $h(x) = f(x) + 3$ jest 1.
C. Równanie $h(x) = |f(x)|$ ma dwa rozwiązania ujemne.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = -2 - \log_2(x-1)$.

3. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \log_a(x-b)$. Wyznacz wartości a i b.



4. Wykaż, że dziedziną funkcji $f(x) = \log_2\left(2x^2 - 6x + 5\right)$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

5. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x) - 1 & \text{dla} \quad x < -2 \\ 3^{x+2} - 1 & \text{dla} \quad x \geqslant -2 \end{cases}$.

6. Równania i nierówności wykładnicze

Umiejętności:

- rozwiązywanie prostych równań i nierówności wykładniczych

Prosta równoległa do osi x przecina krzywą wykładniczą w jednym punkcie albo nie przecina jej wcale. Inaczej mówiąc, równanie

$$a^x = m, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

albo ma dokładnie jedno rozwiązanie, albo nie ma rozwiązania.

Na przykład:

- równanie $4^x = 64$ ma jedno rozwiązanie $x = 3$, bo $64 = 4^3$,
- równanie $2^x = \frac{1}{2}$ ma jedno rozwiązanie $x = -1$, bo $\frac{1}{2} = 2^{-1}$,
- równanie $3^x = -3$ nie ma rozwiązań.

Funkcja $f(x) = a^x$ dla $a > 1$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca. Z monotoniczności funkcji wykładniczej dla $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wynika twierdzenie:

Jeżeli $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ i $p, q \in \mathbf{R}$, to $a^p = a^q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$.

Przykład 1 ◂ zad. 6.5

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $13^{x-2} = 13^{6-x}$

$x - 2 = 6 - x$ ⟵ porównujemy wykładniki

$2x = 8$

Odp.: $x = 4$

b) $4^{x-2} = 1$

Prawą stronę równania zapisujemy w postaci potęgi o podstawie 4.

$4^{x-2} = 4^0$

$x - 2 = 0$ ⟵ porównujemy wykładniki

Odp.: $x = 2$

c) $7^{x+1} = 7^{3+x}$

$x + 1 = 3 + x$ ⟵ porównujemy wykładniki

$1 = 3$

Odp.: Równanie nie ma rozwiązań.

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-1)} = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3(x-1)} = \frac{2}{3}$ ⟵ wykonujemy działania na potęgach

$2x - 3(x - 1) = 1$

$-x + 3 = 1$

Odp.: $x = 2$

Przykład 2 ◀ zad. 6.8

Rozwiążemy równanie $4^x - 2^x = 2$.

Rozwiązanie

Na ogół warto sprowadzać potęgi do tej samej podstawy, gdyż można wówczas zastosować metodę podstawiania.

$$\begin{aligned}
&\left(2^x\right)^2 - 2^x = 2 \\
&2^x = t,\ t > 0 && \longleftarrow \text{wprowadzamy pomocniczą niewiadomą i określamy jej dziedzinę} \\
&t^2 - t = 2 && \longleftarrow \text{rozwiązujemy równanie kwadratowe} \\
&t^2 - t - 2 = 0 \\
&\Delta = 9,\ t_1 = -1,\ t_2 = 2 && \longleftarrow \text{tylko drugie z podanych rozwiązań jest dodatnie} \\
&2^x = 2 && \longleftarrow \text{wracamy do równania zmiennej } x \\
&2^x = 2^1 && \longleftarrow \text{porównujemy wykładniki}
\end{aligned}$$

Odp.: $x = 1$

Wykorzystamy teraz monotoniczność funkcji wykładniczej do rozwiązywania nierówności wykładniczych.

Z monotoniczności funkcji wykładniczej dla $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wynika twierdzenie:

- Jeżeli $a \in (0; 1)$ i $p, q \in \mathbf{R}$, to $a^p < a^q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p > q$.
- Jeżeli $a \in (1; \infty)$ i $p, q \in \mathbf{R}$, to $a^p < a^q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < q$.

Przykład 3 ◀ zad. 6.9

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $2^x > 8$

$2^x > 2^3$ ⟵ podstawa potęgi jest **większa od 1**

$x > 3$

Odp.: $x \in (3; \infty)$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{x-1}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3}$ ⟵ podstawa potęgi jest **mniejsza od 1**

$x > -3x + 3$, czyli $x > \frac{3}{4}$

Odp.: $x \in \left(\frac{3}{4}; \infty\right)$

c) $5^{2x} - 5^{2x+1} + 25^{x+1} \leqslant 105$

$5^{2x} - 5^{2x} \cdot 5 + \left(5^2\right)^{x+1} \leqslant 105$

$5^{2x} - 5^{2x} \cdot 5 + 5^{2x} \cdot 25 \leqslant 105$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$5^{2x}(1 - 5 + 25) \leqslant 105$

$5^{2x} \leqslant 5$ ⟵ podstawa potęgi jest **większa od 1**

$2x \leqslant 1$

Odp.: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$

Przykład 4 ◀ zad. 6.11

Rozwiążemy nierówność $0{,}7^{2x^2} < 0{,}7^{x+1}$.

Rozwiązanie

$2x^2 > x + 1$ ⟵ podstawa potęgi jest **mniejsza od 1**

$2x^2 - x - 1 > 0$

$2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$

Odp.: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$

Zadania

W zadaniach 6.1–6.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

6.1. Równanie $2^{x-1} = 4^{x+1}$ ma ten sam zbiór rozwiązań co równanie

A. $2^{x-1} = 2^{2x+1}$. **B.** $2^{x-1} = 2^{x+2}$. **C.** $2^{x-1} = 2^{4x+8}$.

6.2. Podany zbiór jest zbiorem rozwiązań nierówności $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$.

A. $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{2}; \infty\right)$ **C.** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

6.3. Podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

A. $3^{2x} \leqslant 9^x$ **B.** $3^{3x} > 9^x$ **C.** $3^x \geqslant -9^x$

6.4. Podane równanie nie ma rozwiązań.

A. $2^{2x} + 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ **B.** $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$ **C.** $2^{2x} - 2^x + 1 = 0$

6.5. Rozwiąż równanie.

a) $2^{x+3} = \frac{1}{2}$ d) $5^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6-x}$ g) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1}$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$ e) $3 \cdot 3^x - 2 = 7$ h) $\left(\frac{11}{8}\right)^{x-3} = \left(\frac{8}{11}\right)^{2x}$

c) $3^{x-5} = 3^{5-x}$ f) $2^{5x+2} = 0{,}25^{x+2{,}5}$ i) $0{,}1^{2x+3} = 100^{x-1}$

6.6. Rozwiąż równanie.

a) $4^{x-1} \cdot 16^{2x+3} = 32$ d) $8^{7x+2} : 8^{x-1} = 1$ g) $\left(\frac{1}{81}\right)^{1-x} = \frac{243}{3^{x+3}}$

b) $2^{x+3} \cdot 2^{3x-1} = 4$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} = 2\frac{1}{4}$ h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{1-4x} = \frac{4}{3}$

c) $5^{1-2x} \cdot 5^{3(x+1)} = \frac{1}{5}$ f) $\sqrt[3]{8^{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ i) $0{,}2^{3x-1} : 5^{x+2} = 1$

6.7. Rozwiąż równanie.

a) $25 \cdot 5^{x^2-x} = 25^{2x-1}$

b) $3^{x^3-x} = 9^{2x^2-2}$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{2}{4^{\frac{1}{x}}}$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{81}$

6.8. Rozwiąż równanie.

a) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

b) $25^x + 2 \cdot 5^x + 3 = 0$

c) $36^x - 2^{x+2} \cdot 3^x = 12$

d) $27^x - 3^{2x} + 3^{x+2} = 9$

e) $2 \cdot 49^x - 13 \cdot 7^x = 7$

f) $9^x + 8 \cdot 3^x = 9$

6.9. Rozwiąż nierówność.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+4}$

b) $3^x < 3^{6-x}$

c) $5^{x-1} \leqslant \frac{1}{5}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geqslant 7$

f) $3^x < 27^{2x-1}$

g) $4^{x-1} > 8^{3-x}$

h) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \geqslant 0{,}3^{x+2}$

6.10. Rozwiąż nierówność.

a) $3^{3x} + 27^{x+1} < 84$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} \geqslant 56$

c) $\left(4^x\right)^2 - 2^{4x+3} + 16^{x+1} > 36$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2^{-x} + \frac{3}{2^x} \leqslant 8$

6.11. Rozwiąż nierówność.

a) $5^{2x^2+5x} > 5^3$

b) $11^{3x} \geqslant 11^{x^2+2}$

c) $7^{x^2} \leqslant 49^2$

d) $4^{-x^2+1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{x+6}$

f) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-2x} \geqslant 8$

6.12. Rozwiąż równanie $2^x - 5 = 24 \cdot 2^{-x}$.

6.13. Rozwiąż nierówność $5^{x+\frac{1}{2}} + 5^{x-\frac{1}{2}} > 9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{2x}$.

6.14. Rozwiąż równanie $2^{\sqrt{x^2+6x+9}} + 4^{|x+3|} = 2$.

D **6.15.** Wykaż, że równanie $4^x - k \cdot 2^x - 3 = 0$ ma dla każdej wartości parametru k dokładnie jedno rozwiązanie.

7. Równania i nierówności logarytmiczne

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności logarytmicznych

Załóżmy, że $x > 0$, $a > 0$ i $a \neq 1$. Funkcja $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca. Z monotoniczności funkcji logarytmicznej dla $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wynika twierdzenie:

- Jeżeli $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, $p > 0$, $q > 0$, to $\log_a p = \log_a q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$.
- Jeżeli $a \in (0; 1)$, $p > 0$, $q > 0$, to $\log_a p > \log_a q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < q$.
- Jeżeli $a \in (1; \infty)$, $p > 0$, $q > 0$, to $\log_a p > \log_a q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p > q$.

Przykład 1 ◀ zad. 7.5, 7.6

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $\log(2 - x) = \log(3x + 5)$

Wyznaczamy dziedzinę D równania.

$$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 3x + 5 > 0 \end{cases} \qquad D = \left(-\frac{5}{3}; 2\right)$$

$2 - x = 3x + 5$ ⟵ porównujemy liczby logarytmowane

$x = -\frac{3}{4} \in D$ ⟵ sprawdzamy, czy otrzymana liczba należy do dziedziny D

Odp.: $x = -\frac{3}{4}$

b) $\log_3(x + 1) + \log_3(2x - 3) = 1$

Wyznaczamy dziedzinę D równania.

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \qquad D = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$$

$\log_3[(x + 1)(2x - 3)] = 1$ ⟵ korzystamy z własności logarytmów

$\log_3\left(2x^2 - x - 3\right) = 1$

$2x^2 - x - 3 = 3^1$ ⟵ korzystamy z definicji logarytmu

$2x^2 - x - 6 = 0$

$x_1 = -\frac{3}{2} \notin D, \quad x_2 = 2 \in D$

Odp.: $x = 2$

c) $2\log_2(x-1)+2=\log_2(11x+9)$

Wyznaczamy dziedzinę D równania.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 11x+9>0 \end{cases} \qquad D=(1;\ \infty)$$

$\log_2(x-1)^2+\log_2 4=\log_2(11x+9)$ ⟵ korzystamy z własności logarytmów

$\log_2\left[4\cdot(x-1)^2\right]=\log_2(11x+9)$

$4\left(x^2-2x+1\right)=11x+9$ ⟵ porównujemy liczby logarytmowane

$4x^2-19x-5=0$

$x_1=-\frac{1}{4}\notin D, \quad x_2=5\in D$

Odp.: $x=5$

Przykład 2 ◂ zad. 7.7, 7.8

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $\log_{0,5}(x+3)>-2$

Wyznaczamy dziedzinę D nierówności.

$x+3>0 \qquad D=(-3;\ \infty)$

$\log_{0,5}(x+3)>\log_{0,5}(0,5)^{-2}$ ⟵ zapisujemy prawą stronę nierówności w postaci logarytmu

$\log_{0,5}(x+3)>\log_{0,5}4$

$x+3<4$ ⟵ podstawa logarytmu jest **mniejsza od 1**

$x<1$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanego zbioru i dziedziny.

$$\begin{cases} x<1 \\ x\in(-3;\ \infty) \end{cases}$$

Odp.: $x\in(-3;\ 1)$

b) $\log_5\left(x^2-x\right)>\log_5(8+x)$

Wyznaczamy dziedzinę D nierówności.

$$\begin{cases} x^2-x>0 \\ 8+x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1)>0 \\ x>-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\ \infty) \\ x\in(-8;\ \infty) \end{cases} \qquad D=(-8;\ 0)\cup(1;\ \infty)$$

$x^2 - x > 8 + x$ ⟵ podstawa logarytmu jest **większa od 1**

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$(x + 2)(x - 4) > 0$

$x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanego zbioru i dziedziny D.

$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty) \\ x \in (-8; 0) \cup (1; \infty) \end{cases}$

Odp.: $x \in (-8; -2) \cup (4; \infty)$

c) $\log_{0,3} \frac{x-5}{x+2} > \log_{0,3} x$

Wyznaczamy dziedzinę D nierówności.

$\begin{cases} \frac{x-5}{x+2} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-5)(x+2) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ ⟵ $\frac{a}{b} > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b > 0$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (5; \infty) \\ x \in (0; \infty) \end{cases}$ $D = (5; \infty)$

$\frac{x-5}{x+2} < x$ ⟵ podstawa logarytmu jest **mniejsza od 1**

$\frac{x-5}{x+2} - x < 0$

$\frac{-x^2 - x - 5}{x+2} < 0$ ⟵ wyrażenie w liczniku jest zawsze ujemne

$x + 2 > 0$

$x > -2$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanego zbioru i dziedziny.

$\begin{cases} x \in (-2; \infty) \\ x \in (5; \infty) \end{cases}$

Odp.: $x \in (5; \infty)$

Przykład 3 ◀ zad. 7.10

Rozwiążemy równanie $\frac{\log_3 x}{\log_3 x - 2} + \log_3 x = 6$.

Rozwiązanie

Przy wyznaczaniu dziedziny równania musimy uwzględnić następujące warunki:

$$\begin{cases} x > 0 & \longleftarrow \text{aby logarytm był określony} \\ \log_3 x \neq 2 & \longleftarrow \text{aby wyrażenie w mianowniku nie było równe 0} \end{cases}$$

$D = (0;\ \infty) - \{9\}$

Zastosujemu metodę podstawiania:

$\log_3 x = t,\ t \neq 2$

Równanie przyjmuje postać $\frac{t}{t-2} + t = 6$.

Po przekształceniach otrzymujemy równanie $t^2 - 7t + 12 = 0$, którego rozwiązaniami są:

$t_1 = 3,\ t_2 = 4$ ⟵ oba rozwiązania należą do dziedziny

$\log_3 x = 3$ lub $\log_3 x = 4$

$x = 27$ lub $x = 81$

Odp.: $x = 27$ lub $x = 81$

Zadania

W zadaniach 7.1–7.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.1. Dane jest równanie $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$.

A. Jednym z rozwiązań równania jest liczba -4.

B. Jednym z rozwiązań równania jest liczba 2.

C. Równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

7.2. Nierówność $\log_{0,5}(x-2) > \log_{0,5}(2x)$ jest równoważna nierówności

A. $x - 2 < 2x$.

B. $x > -2$.

C. $\log_2(x-2) < \log_2(2x)$.

7.3. Zbiór $(1;\ \infty)$ jest dziedziną nierówności

A. $\log(x+2) - \log(x-1) \leqslant 3$.

B. $\log x - \log(x^2 - 1) \leqslant 3$.

C. $\log \frac{x+1}{x-1} \leqslant 3$.

7.4. Równanie $\log_2\left(x^2 + 2\right) = m + 1$

A. dla $m = -1$ nie ma rozwiązań.

B. dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie.

C. dla $m = 1$ ma dwa rozwiązania.

7.5. Rozwiąż równanie.

a) $\log_2(x+4)=3$

b) $\log_7(2x+1)=\log_7(3x+5)$

c) $\log_3(x-5)-\log_3(4x+3)=0$

d) $\log_{0,1}(4x-7)=\log_{0,1}(3-2x)$

e) $\log_2\left(x^2-3x+2\right)=\log_2(2x-4)$

f) $\log\left(2x^2-4x\right)=\log\left(x^2+x+6\right)$

g) $\log_6\left(x^2-12\right)=\log_6(x-2)+1$

h) $\log_{13}\left|x^3-27\right|-\log_{13}|x-3|=1$

7.6. Rozwiąż równanie.

a) $\log_2(2x-3)+\log_2 x=1$

b) $\log_2(3x-2)=\log_2(2x-3)+1$

c) $\log_5(x+1)+\log_5(x+2)=\log_5 6$

d) $\log_3 x+\log_3(3-x)=2\log_3(x-1)$

7.7. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_2(5x-3)>\log_2(2x-6)$

b) $\log_{\frac{1}{4}}(x+2)>\log_{\frac{1}{4}}(6-x)$

c) $\log_3(x-12)>2$

d) $\log_{0,5}(4-x)\geqslant -3$

7.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)>2$

b) $\log_2(x-1)-\log_2(5-x)>3$

c) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-2}{x}>-1$

d) $\log(x-1)+\log(2x-1)>1$

e) $\log_{0,2}(3x-2)+1\geqslant 0$

f) $\log_3\left(3x^2-2x-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2-x+5\right)<0$

7.9. Rozwiąż nierówność.

a) $|\log_2 x|>2$

b) $\left|\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)-1\right|<2$

c) $\log_{\frac{1}{3}}|x-3|>-2$

d) $\log_4(|x|-2)\leqslant 1$

7.10. Rozwiąż równanie.

a) $2\left(\log_3 x\right)^2-\log_3 x-1=0$

b) $\frac{3}{\log_2(0{,}25x)}+\frac{4}{\log_2(8x)}=1$

c) $\frac{2}{\log x}-\frac{1}{1-\log x}=2$

d) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3-7\log_{\frac{1}{2}} x+6=0$

7.11. Rozwiąż nierówność $\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<0$.

7.12. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{\log\left(9-x^2\right)}}{2^x-1}$.

* **7.13.** Rozwiąż równanie.

a) $\log_2 x+\log_4 x-\log_8 x=5$

b) $\log_3 x+4\log_x 3=2\log_{\sqrt{7}} 7$

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Jedna z liczb różni się od trzech pozostałych. Która to liczba?

A. $\sqrt[3]{9}$ **B.** $3^{\log_3 \sqrt[3]{9}}$ **C.** $\frac{2}{3}\log_3 3$ **D.** $3^{\frac{2}{3}}$

2. Wskaż liczbę równą $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

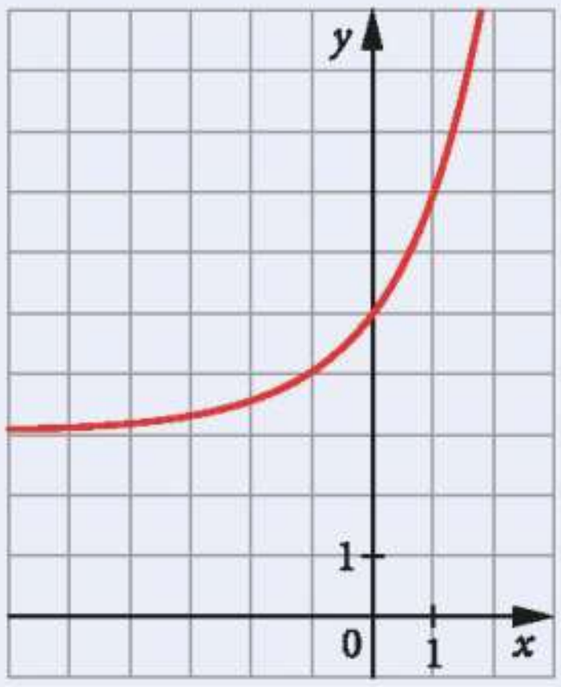
A. $64^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$ **B.** 4 **C.** 2 **D.** $\sqrt{8}$

3. Która nierówność jest fałszywa?

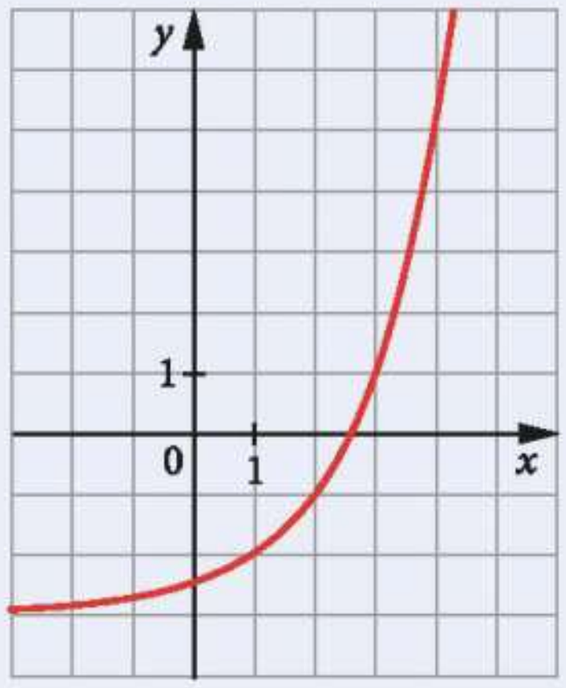
A. $3^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **B.** $2\sqrt{2} > 2^{\frac{4}{3}}$ **C.** $\log_5 3 > \log_5 1$ **D.** $\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{7}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$

4. Na którym rysunku naszkicowany jest wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1} - 3$?

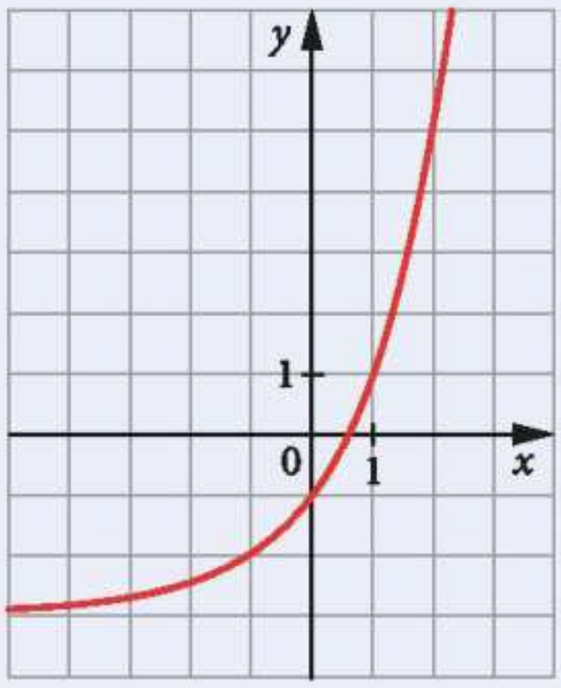
A.



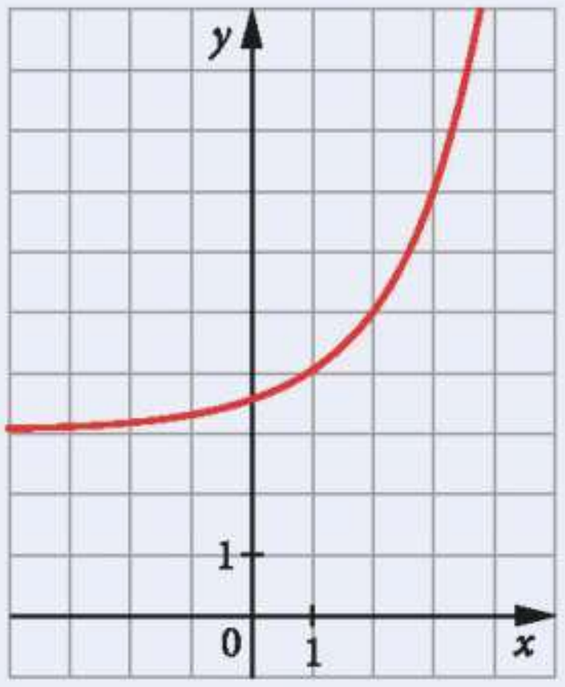
C.



B.



D.



5. Która z liczb jest równa 2?

A. $7^{\log_7 2}$ **B.** $7^{\log_7 49}$ **C.** $7^{\log_2 7}$ **D.** $2^{\log_7 49}$

6. Dane są trzy równości.

I. $8^{\log_2 3} = 27$ II. $\left(\log_5 1\right)^3 = 0$ III. $\sqrt{\log_3 81} = 2$

Które z nich zachodzą?

A. żadna **B.** tylko I i II **C.** tylko II i III **D.** wszystkie

7. Która z równości nie zachodzi?

A. $\log 3 + \log 2 + \log 7 = \log 42$

B. $\dfrac{\log 15}{\log 3} = \log 5$

C. $\dfrac{\log 15 - \log 3}{\log 10} = \log 5$

D. $\log 14 - \log 7 + \log 5 = 1$

8. Funkcja $f(x) = 2^x - 2$ przyjmuje tylko wartości dodatnie dla wszystkich

A. $x > -1$. **B.** $x < 2$. **C.** $x > 1$. **D.** $x > 0$.

9. Które zdanie jest fałszywe?

A. $\log 10 > \log 0{,}1$

B. $\log 0{,}1 < \log 1$

C. $\log 100 + \log 10 = 3$

D. $\log 2 \cdot \log 5 = 1$

10. Dla jakich wartości m równanie $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

A. dla $m = -3$

B. dla $m > -3$

C. dla $m < -3$

D. Nie ma takich wartości m.

11. Dane są liczby $a = -\frac{1}{18}$, $b = \log_{\frac{1}{4}} 64$, $c = \log_{\frac{1}{5}} 25$. Iloczyn abc jest równy

A. -9. **B.** -64. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

12. Wiadomo, że $c = \log_5 3$. Wynika stąd, że

A. $c = 5^3$. **B.** $c^5 = 3$. **C.** $3^c = 5$. **D.** $5^c = 3$.

13. Dane są cztery zależności.

I. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$

II. $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a(x + y)$

III. $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$

IV. $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a(x - y)$

Które z tych zależności są prawdziwe dla wszystkich $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$?

A. tylko I i II **B.** tylko I i III **C.** tylko II i IV **D.** tylko III i IV

14. Liczby a, b, c są większe od 1 i liczba a podniesiona do potęgi b jest równa c. Zatem

A. $a = \log_b c$. **B.** $b = \log_a c$. **C.** $c = \log_a b$. **D.** $b = \log_c a$.

15. Ile wynosi $2^{\log_4 \frac{1}{16}}$?

A. -4 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 16

16. Liczba $\log_2 12$ nie jest równa liczbie

A. $1 + \log_2 6$. **B.** $2 + \log_2 3$. **C.** $3 + \log_2 \frac{4}{3}$. **D.** $4 - \log_2 \frac{4}{3}$.

17. Która z wymienionych liczb jest najmniejsza?

A. $\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **B.** $\left(\sqrt{2}\right)^{2\frac{1}{3}}$ **C.** $\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}$ **D.** $\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$

18. Liczbę $\sqrt{2\sqrt{2}}$ można zapisać jako

A. $2^{\frac{3}{4}}$. **B.** $2^{\frac{3}{2}}$. **C.** $2^{\frac{1}{3}}$. **D.** $2^{\frac{1}{8}}$.

19. Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt o współrzędnych (x, y). Zatem do wykresu funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

A. należy punkt o współrzędnych $(x, -y)$.
B. należy punkt o współrzędnych $(-x, y)$.
C. należy punkt o współrzędnych $(-x, -y)$.
D. nie należy żaden z punktów wymienionych w A, B lub C.

20. Dane są funkcje $f(x) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^x$ i $g(x) = \left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^x$.

A. Funkcja f jest rosnąca i funkcja g jest rosnąca.
B. Funkcja f jest rosnąca, a funkcja g jest malejąca.
C. Funkcja f jest malejąca, a funkcja g jest rosnąca.
D. Funkcja f jest malejąca i funkcja g jest malejąca.

21. Funkcja $f(x) = 3^x$

A. przyjmuje wartość 100 w przedziale $(3; 4)$.
B. przyjmuje wartość 100 w przedziale $(4; 5)$.
C. przyjmuje wartość 100 w przedziale $(5; 6)$.
D. nie przyjmuje wartości 100 dla żadnego argumentu.

W zadaniach 22–39 oceń prawdziwość podanych zdań.

22. Liczba $9^{-\frac{3}{4}}$ jest równa liczbie p, gdy

A. $p = \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}$. **B.** $p = \frac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $p = \left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$.

23. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ są symetryczne względem jednej z osi układu współrzędnych. Funkcje te mogą być opisane wzorami

A. $f(x) = 3^x - 2$ i $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

B. $f(x) = \log_2 x - 2$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$.

C. $f(x) = \log_2 x + 1$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$.

24. Wykres funkcji $f(x) = 3^x - 1$ nie przecina wykresu funkcji

A. $g(x) = 3^{x-3} - 1$.

B. $h(x) = 3^{x-1}$.

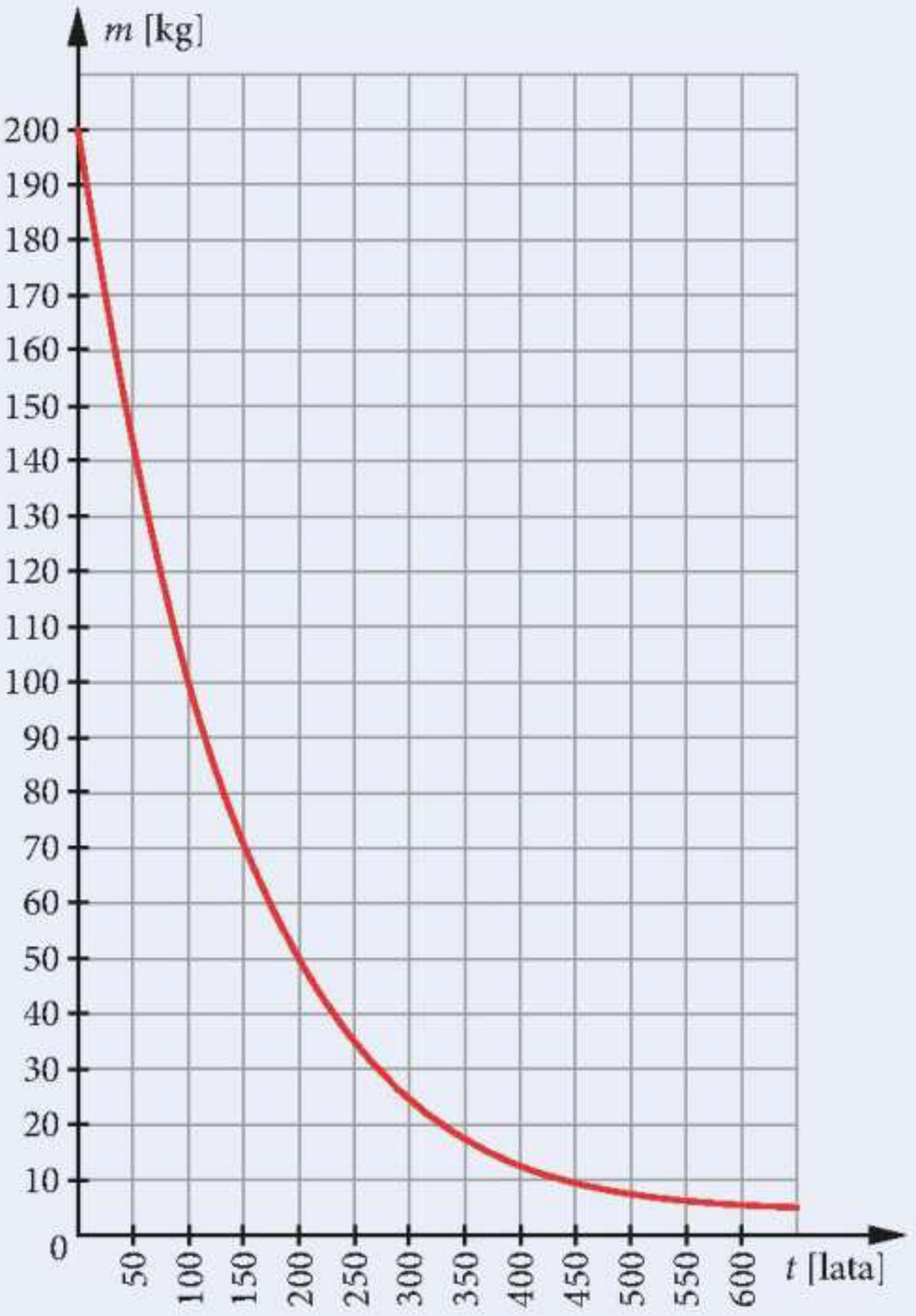
C. $t(x) = 3^{-x} - 1$.

25. Wykres funkcji $m(t)$ przedstawia ilość (w kg) pewnego izotopu pierwiastka promieniotwórczego, która nie uległa rozpadowi po określonym czasie. Okres rozpadu połowicznego tego izotopu wynosi T.

A. $T = 300$ lat.

B. Z masy początkowej 200 kg tego pierwiastka po 200 latach pozostanie 50 kg.

C. $T = 100$ lat.



26. Funkcja

A. $f(x) = -3^{-x}$ jest malejąca.

B. $f(x) = \log_2(-x)$ jest malejąca.

C. $f(x) = \left|0{,}9^x\right|$ jest malejąca.

27. Zbiór rozwiązań nierówności $9^{x-1} < 3$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

A. $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$.

B. $25^x \geqslant -5$.

C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x \leqslant 1\frac{1}{4}$.

28. Liczba

A. $p = 3^{\log_9 2}$ jest wymierna.

B. $p = 9^{\log_3 2}$ jest wymierna.

C. $p = 3^{\frac{1}{2} - \log_3 2}$ jest wymierna.

29. Liczba $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$ jest równa liczbie

A. $1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$. **B.** $-\log_{\frac{1}{3}} 6$. **C.** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{18} - 1$.

30. Niech $\log_{15} 3 = a$. Wtedy

A. $\log_5 3 = \frac{a}{1-a}$. **B.** $\log_3 5 = \frac{a}{1+a}$. **C.** $\log_5 15 = 1 - a$.

31. Równość $\log(x-1) + \log(x+1) = \log\left(x^2 - 1\right)$ zachodzi

A. dla każdej liczby rzeczywistej x.

B. dla każdego $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

C. dla każdego $x \in (1; \infty)$.

32. Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$.

A. Zbiorem wartości tej funkcji jest $\langle 1; \infty)$.

B. Miejscem zerowym funkcji jest -2.

C. $f(2020) > f(2021)$

33. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(-x)$.

A. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.

B. Dziedziną funkcji f jest $(-\infty; 0)$.

C. Funkcja f jest rosnąca.

34. Funkcja

A. $f(x) = \log_{\frac{4}{3}}(x+7)$ jest malejąca.

B. $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(-x)$ jest malejąca.

C. $f(x) = -\log_{0,1} x$ jest malejąca.

35. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ są symetryczne względem osi x. Funkcje te mogą być opisane wzorami

A. $f(x) = \log_3 x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

B. $f(x) = \log_5 x$ i $g(x) = -\log_5 x$.

C. $f(x) = \log x$ i $g(x) = \log_5(-x)$.

36. Funkcja

A. $f(x) = \log\left(x^2\right)$ nie ma miejsc zerowych.

B. $f(x) = \log\left(x^2 - 3\right)$ nie ma miejsc zerowych.

C. $f(x) = \log\left(x^2 + 3\right)$ nie ma miejsc zerowych.

37. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 2x + 2\right)$.

A. Dziedziną funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.
B. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
C. Funkcja f nie przyjmuje wartości dodatnich.

38. Zbiór rozwiązań nierówności $2^x \leqslant 32^{x+1}$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

A. $3^x < \frac{1}{3}$. **B.** $3^x > -\frac{1}{3}$. **C.** $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \sqrt{27}$.

39. Zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

A. $\log_3 x < 0$. **B.** $\log_{0,1} x \leqslant 0$. **C.** $\log_2 x < 1$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

D **40.** Wykaż, że $\left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}$.

41. Oblicz.

a) $\log 10 + \log 100 - \log 1000$
b) $3\log_7 2 + \log_7 56 - 2\log_7 8$
c) $5\log_2 \frac{1}{2} - 2\log_2 \sqrt{2} + 3\log_2 4$
d) $2\log_{12} 2 + \log_{12} 3$

42. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} + 3\log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} 8$
b) $5\log_4 2 - 2\log_4 4 + \log_4 \frac{1}{2}$
c) $\log 10 + \frac{1}{2}\log 100 + \frac{1}{3}\log 1000$
d) $\frac{1}{4}\log_3 6 + \frac{1}{2}\log_3 2 - 0{,}25\log_3 24$

43. Wiadomo, że $\log_9 x = \frac{1}{2}$. Oblicz $\log_x \sqrt{3}$.

44. Przyjmij, że $\log_3 7 \approx 1{,}77$ i oblicz $\log_3 42 - \log_3 2$.

45. Oblicz.

a) $\log_2 \log_5 25$
b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 81$
c) $\log_{\sqrt{3}} \log_4 64$
d) $\log_{\frac{1}{27}} \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{4}$

46. Oblicz.

a) $3^{\log_3 18}$
b) $25^{\log_5 7}$
c) $8^{1-\log_8 4}$
d) $2^{2-\log_4 9}$
e) $81^{1-\log_3 \sqrt[4]{27}}$
f) $216^{\frac{5-\log_6 36}{9}}$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

47. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi.

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}25^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}\right)^{-1} : \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot 0{,}81^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{100}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

48. Wykonaj działania.

a) $\dfrac{\left(7^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{7} + 3\right)}{\left(12^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

b) $\left[\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}\right)\left(3^{\frac{1}{4}} + \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\right]^2$

c) $\left[9^{-\frac{1}{4}} + \left(\dfrac{1}{3^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\left[3^{-0{,}5} - \left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$

d) $\left[\left(2 - 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

49. Oblicz.

a) $\dfrac{\left(3\log\frac{1}{7} + 2\log 49\right)^2}{\log 7} - \log 70$

b) $\frac{1}{2}\log_2\log_2 16 + \left(\log_2 4 - \log_2 0{,}5\right)^2$

c) $\dfrac{\log_5\log_2 32 + \log_2\log_5 25}{\log_5\sqrt{\log_2 32}}$

d) $\dfrac{\log\log_7\log_2 128}{\log_2\log_7\log 18} + \dfrac{\log_2 18}{\log_2\frac{1}{18}}$

50. Skorzystaj z definicji logarytmu i rozwiąż równanie.

a) $\log_4(3x + 1) = 2$

b) $\log_9\log_4(65 - x) = \frac{1}{2}$

c) $\log\log_2\left[\log_5(11x + 4) - 1\right] = 0$

d) $\log_{0{,}5}\log_5\left[\log_3\left(x^2 - 4x + 6\right) + 22\right] = -1$

51. Niech $a = \log_7 4$. Przedstaw wartość podanego wyrażenia za pomocą a.

a) $\log_7 28 - \log_2 14$

b) $\dfrac{\log_{\frac{2}{7}} 7 + \log_{\frac{4}{7}} 7}{\log_{\frac{4}{7}} 7 \cdot \log_{\frac{2}{7}} 7}$

c) $\dfrac{\log_{\frac{2}{7}} 49 + \log_{\frac{4}{7}} 49}{\log_{\frac{4}{7}} 7 - \log_{\frac{2}{7}} 7}$

d) $\dfrac{\log_4 7 \cdot \log_7 16}{\log_{14}\sqrt{7}}$

52. Który ze znaków: $<$, $>$ czy $=$ należy wstawić zamiast ?, aby otrzymać zależność prawdziwą?

a) $2^{\log_2 3}$? $4^{\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 7}$

b) $\sqrt{0{,}007}$? $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4 - \log_{\frac{1}{3}} 9}$

c) $6^{\log_{\frac{1}{6}}\frac{3}{2} + \log_6 9}$? $\left(\sqrt{7}\right)^{2\log_7 3 + \frac{1}{2}\log_7 16}$

d) $10^{-1 + 4\log 5}$? $2^{5 - \frac{1}{2}\log_2 12}$

53. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 3^{x+2} + 1$. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

54. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 4$ i odczytaj z wykresu jej miejsca zerowe.

55. Wykres funkcji $f(x) = a^{x-3} - 2$ przechodzi przez punkt $A = (2, 2)$. Oblicz a i naszkicuj wykres tej funkcji.

56. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{x-3} = 2x - 6$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 3^{x+2} - 1$

c) $2^{x+1} = 2 - x^2$

d) $4^{x-1} = \frac{1}{x}$

57. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $2^x \leqslant -\frac{1}{2}x$

b) $0{,}25 \cdot 2^{x+1} < \frac{1}{8} \cdot 2^x + 6$

58. Rozwiąż równanie.

a) $9 \cdot 3^{x-7} = 81$

b) $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} = \frac{1}{3^{1-2x}}$

c) $0{,}4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-7} = \left(2\frac{1}{2}\right)^{2x}$

d) $\left(\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{8}\right)^{x-2} = 2\sqrt[3]{32}$

59. Dana jest funkcja $f(x) = 3^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. Rozwiąż nierówność.

a) $f(x-1) \geqslant f\left(\frac{1}{2}x - 3\right)$

b) $3f(x+5) \leqslant \frac{1}{27}f(3-x)$

c) $2f(x+5) > \left(\frac{1}{2}f(x+3)\right)^{-1}$

d) $\frac{1}{9}f(x) < f\left(\sqrt{4x+17}\right)$

60. Liczby a, b, c spełniają warunek

a) $\log_5 a = 2\log_3 b = 2 + \log_2 c = 4$. Oblicz $\sqrt[5]{\left(\sqrt{a} - b\right) \cdot c}$.

b) $\log_a x = \log_b x - 2 = \log_c x - 4 = 2$. Oblicz $\log_{a^2b^2c^2} x$.

D **61.** Wykaż, że jeżeli $\log_2 4a = 15$ i $\log_2 \frac{8}{b} = 12$, to $ab = 16$.

D **62.** Wykaż, że jeżeli $a = \log 5$, to $3 - 2a = \log 40$.

63. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \log_2(x+2) - 1$

b) $f(x) = 2 - \log_3(x-1)$

64. Fundusz inwestycyjny „Ryzyko" obiecuje podwojenie zainwestowanego kapitału w ciągu trzech lat. Załóżmy, że taka obietnica byłaby spełniona i że kapitał przyrastałby przez cały czas w tym samym tempie.
a) O ile procent zwiększy się kapitał po roku?
b) Po ilu miesiącach kapitał zwiększy się o 10%?
Przyjmij, że $\log_2 11 \approx 3{,}46$ i $\log_2 10 \approx 3{,}222$.

65. Narysuj wykres funkcji.
a) $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}(-x)\right|$ b) $f(x) = 4^{\log_2 x}$

66. Wyznacz dziedzinę funkcji.
a) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(5x - 15)$ c) $f(x) = \log\left(2^x - 1\right)$
b) $f(x) = \log_3\left(-x^2 - 7x - 10\right)$ d) $f(x) = \log_x(4 - x)$

67. Dane są liczby:
$a = \log_\pi 3$, $b = \log_{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{3}$, $c = 2^{0,1}$, $d = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $e = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$, $f = \left(2^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}$.
a) Która z podanych liczb jest rozwiązaniem równania $\left(\log_2 x\right)^2 + 1{,}9\log_2 x = 0{,}2$?
b) Które z podanych liczb są równe 1, które mniejsze od 1, a które większe od 1?

68. Rozwiąż równanie.
a) $\log_2(3x + 5) - \log_2(1 - x) = 1$ b) $\log\left(x^2 - 16\right) - 2 = 2\log 3 - \log\left(x^2 + 16\right)$

69. Dane są funkcje $f(x) = 2^{3x^2+x-18}$ i $g(x) = 4^{x^2+1}$. Dla jakich x wartości funkcji f są nie większe od wartości funkcji g?

70. Rozwiąż równanie $0{,}125^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{8-2x} = \sqrt{2^{x-1}}$.

71. Rozwiąż nierówność.
a) $\left(\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^x < 27 \cdot 3^{2-x}$ b) $5^{x^2} < \frac{125^x}{25}$

* **72.** Rozwiąż nierówność $8^x + 5 \cdot 2^x \geqslant 2 + 4^{x+1}$.

* **73.** Rozwiąż równanie $\log 2 + \log\left(4^{x-2} + 9\right) = 1 + \log\left(2^{x-2} + 1\right)$.

* **74.** Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2x - \log_{0,5} \frac{m^2 - 3m + 4}{m - 1} = 0$ ma dwa różne dodatnie pierwiastki rzeczywiste?

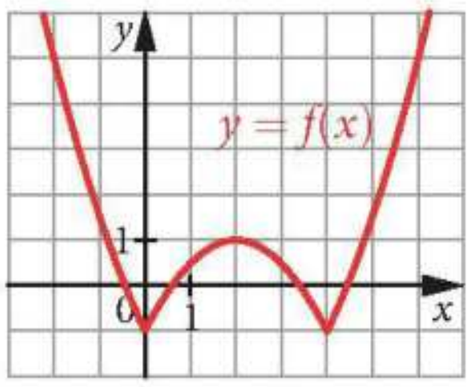
Odpowiedzi

1. Zastosowania funkcji kwadratowej

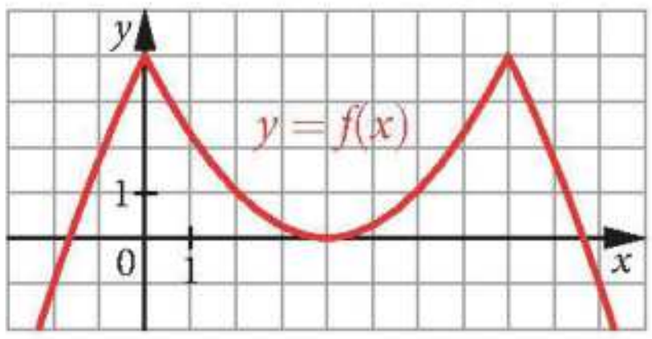
s. 10

1.1. $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{7}$ **1.2.** $D = (-6; 7\rangle$, $ZW = (-2; 4\rangle$; wartość największa: 4 dla $x = 7$, brak wartości najmniejszej; miejsca zerowe: $-4, 2, 6$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; 2) \cup (6; 7\rangle$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -4) \cup (2; 6)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-6; -2\rangle$ i $\langle 4; 7\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 4\rangle$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2\rangle \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; -1) \cup (2; 4\rangle$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1, 2\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-1; 2)$ **1.3.** $D = \langle 2; 12\rangle$, $ZW = \langle -4; 4\rangle$ **1.4.** wartość największa: 7 dla $x = -2$, wartość najmniejsza: -8 dla $x = -11$ **1.5.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy: a) przekształcić symetrycznie względem osi x, b) przesunąć o wektor $[0, -1]$, c) przesunąć o wektor $[-4, 0]$, a następnie przekształcić symetrycznie względem osi x te punkty wykresu, które leżą poniżej osi x, d) przesunąć o wektor $[3, 2]$, e) przekształcić symetrycznie względem osi y, a następnie przesunąć o wektor $[0, -3]$, f) przesunąć o wektor $[0, -2]$, a następnie przekształcić symetrycznie względem osi x te punkty wykresu, które leżą poniżej osi x. **1.6.** a) $(b - 4)(b - 2)$ b) $(p - s - 2)(p + s - 2)$ c) $(w - 2z + 3)(w + 2z - 3)$ **1.7.** a) $D = \langle 2; \infty)$ b) $D = (-\infty; 1)$ c) $D = \langle -2; 3)$ **1.8.** a) $ZW = (-\infty; -11\rangle$, rosnąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; \infty)$ b) $ZW = \left\langle \frac{3}{8}; \infty \right)$, malejąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$, rosnąca w przedziale $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$ c) $ZW = (-\infty; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right\rangle$, malejąca w przedziale $\left\langle -\sqrt{3}; \infty \right)$ **1.9.** $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$ **1.10.** a) $W = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ b) $W = \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ c) $W = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ **1.11.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **1.13.** a) $m = -11$ b) $m = 32$ c) $m = \frac{13}{12}$ **1.14.** $b = 2$, $c = -5$

1.15. $m \in (-1; 1)$



1.16. $ZW = (-\infty; 4\rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0\rangle$ i $\langle 4; 8\rangle$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle 0; 4\rangle$ i $\langle 8; \infty)$

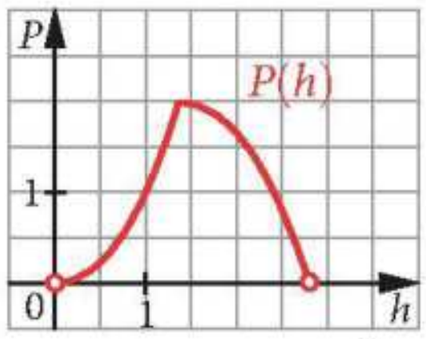


s. 18

2.1. F, F, P **2.2.** F, P, P **2.3.** P, P, P **2.4.** F, P, F **2.5.** 21 m **2.6.** a) wartość najmniejsza: -7 dla $x = 4$, wartość największa: 1 dla $x = 2$ b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -1$, wartość największa: 9 dla $x = 1$ c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -6$, wartość największa: 7 dla $x = -8$ d) wartość najmniejsza: -14 dla $x = -1$, wartość największa: -5 dla $x = 2$ e) wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$, wartość największa: 3 dla $x = 1$ lub $x = 5$ f) brak wartości najmniejszej, wartość największa: 3 dla $x = -1$ **2.7.** a) brak wartości największej i wartości najmniejszej b) wartość największa: 14 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszej c) wartość najmniejsza: -19 dla $x = -2$, brak wartości największej d) brak wartości największej i wartości najmniejszej **2.8.** a) wartość najmniejsza: 0 dla $x = -3$, wartość największa: 10 dla $x = -13$ lub $x = 5$

b) brak wartości najmniejszej, wartość największa: 10 dla $x = 5$ c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -2$, wartość największa: 10 dla $x = 5$ d) wartość najmniejsza: 1 dla $x = 8$, wartość największa: 6 dla $x = 7$ **2.9.** $a = 2$, $b = -16$, $c = 25$ **2.10.** $b = 4$, $c = 7$ **2.11.** $a = -2$, $b = -8$, $c = -9$ **2.12.** $100 = 50 + 50$ **2.13.** $30 = 15 + 15$ **2.14.** a) 121 b) 625 c) $\frac{1}{4}m^2$ **2.15.** -25 **2.16.** $6 = \frac{18}{7} + \frac{9}{7} + \frac{15}{7}$ **2.17.** $24 = 7 + 6 + 5 + 6$ **2.18.** $a = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a$ **2.20.** $x = 3$ **2.21.** 27 lub 28 osób **2.22.** Zysk będzie największy, gdy wszyscy zamówią zdjęcia; wyniesie 155 zł 10 gr. **2.23.** 35 autokarów **2.24.** 12 zł; 72 osób **2.25.** boisko o wymiarach 10 m × 15 m podzielone w połowie dłuższego boku **2.26.** $\frac{72}{17}$

2.27.



$P(h) = \begin{cases} h^2 & \text{dla} \quad h \in \left(0;\ \sqrt{2}\right\rangle \\ -h^2 + 2\sqrt{2}h & \text{dla} \quad h \in \left(\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right) \end{cases}$; pole jest największe dla $h = \sqrt{2}$. *Wskazówka*: Zauważ, że wierzchołki K i L trójkąta mogą leżeć na bokach AB i AD albo BC i CD kwadratu.

2.28. bok kwadratu: $\frac{3\sqrt{3} - 4}{11}$, bok trójkąta: $\frac{9 - 4\sqrt{3}}{11}$

s. 21

1. P, F, P **2.** wartość najmniejsza: -22 dla $x = 6$, wartość największa: 2 dla $x = 0$ **3.** -36
4. $a = 13$ **5.** 8 lub 9 domów, w przypadku 9 domów po 160 zł od abonenta

s. 26

3.1. P, F, P **3.2.** F, F, P **3.3.** P, F, P **3.4.** F, P, P **3.5.** a) 18 lub -18 b) 9 c) $-\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{64}$ lub 0 **3.6.** a) $x = 4$ b) $x = \frac{2}{5}$ c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{6}$ **3.7.** a) $x = -\pi$ lub $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -3\sqrt{2}$ lub $x = 0$ c) $x = -3$ lub $x = \frac{5}{2}$ d) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{3}$ **3.8.** a) jedno b) zero c) dwa d) zero lub jedno lub dwa **3.9.** a) jeden b) zero c) dwa d) jeden **3.10.** a) $x = -7$ lub $x = -1$ b) $x = 3$ lub $x = 7$ c) $x = -\frac{3}{4}$ d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 1$ e) $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ f) $x = 2 - \sqrt{5}$ lub $x = 2 + \sqrt{5}$ **3.11.** a) brak rozwiązań b) brak rozwiązań c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$ d) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ e) $x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$ f) brak rozwiązań **3.12.** a) $x = \frac{2}{5}$ lub $x = 1$ b) $x = 1$ lub $x = 2\frac{7}{8}$ c) $x = 1\frac{2}{3}$ lub $x = 2$ d) $x = -1$ lub $x = 2\frac{1}{3}$ **3.13.** a) $f(x) = -\left(x - \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)$ b) $f(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ c) $f(x) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ d) $f(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ **3.14.** a) $f(x) = x^2 + 7x - 18$ b) $f(x) = -2x^2 + 6$ c) $f(x) = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x^2 + \frac{2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}{5}x + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{25}$ d) $f(x) = x^2 - 2x - 6$ **3.15.** a) miejsca zerowe: 0, 8; $W = (4, -4)$, $P = (0, 0)$ b) brak miejsc zerowych; $W = (2, 3)$, $P = (0, 5)$ c) miejsca zerowe: -3, 1; $W = (-1, 8)$, $P = (0, 6)$ d) miejsca zerowe: $-\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$; $W = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$, $P = \left(0, 3\frac{3}{4}\right)$ **3.16.** $b = 7$, $c = 5$

3.17. a) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = \sqrt{7}$ b) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = \sqrt{2}$ c) $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ lub $x = 6$ d) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{2}$ e) $x = -4$ lub $x = -2$ lub $x = 0$ f) $x = -3$ lub $x = 2$ **3.18.** a) $x = -1$ lub $x = 1$ b) $x = -2$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ d) $x = -7$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ e) $x = -2$ lub $x = 3$ f) $x = -4$ lub $x = 2$ **3.19.** a) $x \in \{-3, 3\}$ b) $x \in \left\{-4, -\sqrt{10}, -2, 2, \sqrt{10}, 4\right\}$ c) $x \in \left\{\frac{7-\sqrt{73}}{2}, 1, 6, \frac{7+\sqrt{73}}{2}\right\}$ d) $x \in \left\{-2\left(1+\sqrt{2}\right), -4, -2, 0, -2\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}$ **3.20.** a) $D = \mathbf{R} - \{-3, 1\}$ b) $D = \mathbf{R}$ **3.21.** a) $D = \mathbf{R} - \left\{5-\sqrt{31}, -5+\sqrt{31}\right\}$ b) $D = \mathbf{R} - \{-5, 6\}$

s. 29

1. P, F, F **2.** $x = 2\frac{1}{2}$ lub $x = 3$ **3.** $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$, $f(x) = 2(x+1)(x-4)$ **4.** $D = \mathbf{R} - \{-5, 5\}$ **5.** $b = -1$, $c = \frac{1}{16}$

s. 33

4.1. F, F, F **4.2.** F, F, F **4.3.** P, F, P **4.4.** P, P, P **4.5.** a) $x = 1$ lub $x = 6$ b) $x = 2$ lub $x = 10$ c) $x = -30$ lub $x = -10$ d) $x = -3$ lub $x = 7$ **4.6.** a) np. $x^2 - 5x - 24 = 0$ b) np. $18x^2 - 27x + 10 = 0$ c) np. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0$ d) np. $2x^2 - 2\sqrt{7}x + 3 = 0$ **4.7.** a) pierwiastki o różnych znakach b) dwa pierwiastki dodatnie c) pierwiastki o różnych znakach d) dwa pierwiastki ujemne **4.8.** a) $a > 0$, $b < 0$ b) $a > 0$, $b > 0$ c) $a < 0$, $b > 0$ d) $a < 0$, $b < 0$ **4.9.** a) np. $b = -3$, $c = -4$ b) Nie ma takich liczb. c) np. $b = 3$, $c = 1$ **4.10.** $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $b = -32$ lub $x_1 = -1$, $x_2 = -7$, $b = 32$ **4.11.** a) nie b) np. $x^2 + 8x - 33 = 0$ **4.12.** $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ **4.13.** $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ **4.14.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$ **4.15.** $f(x) = 2x^2 - 4x$ **4.16.** $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ **4.17.** $f(x) = x^2 - x - 20$ **4.18.** a) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$, $c \neq 0$ b) $\frac{b^2 - 2ac}{ac}$, $c \neq 0$ c) $\frac{b^2 - 4ac}{a^2}$ d) $\frac{b^2 - 2ac - 2\sqrt{3}ab + 6a^2}{a^2}$ **4.19.** a) $t = 2\frac{9}{49}$ b) $t = 41$ c) $t = 54\frac{1}{3}$ d) Nie istnieją pierwiastki. **4.20.** $-\frac{20}{21}$

s. 36

1. F, P, P **2.** $b = 5$, $c = 5\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ **4.** $5x^2 + 25x - 70$ **5.** a) $x^2 + 5bx + 25c = 0$ b) $x^2 - \left(b^2 - 2c\right)x + c^2 = 0$

s. 39

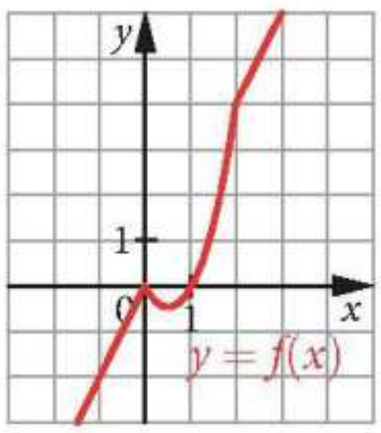
5.1. F, P, P **5.2.** P, F, P **5.3.** F, F, F **5.4.** P, P, P **5.5.** a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0)$ b) nierówność $f(x) > 0$ nie ma rozwiązań, $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} - \{5\}$ c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 6)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$ d) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$ **5.6.** a) $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$ b) $x \in \left(-7; \sqrt{2}\right)$ c) $x \in \langle 2; 3\rangle$ d) $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \left\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}; \infty\right)$ e) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$

f) $x \in (2; 4)$ **5.7.** a) $x \in (0; 2)$ b) $x \in \langle -2; 2\rangle$ c) brak rozwiązań d) $x \in \left\langle \frac{2}{3}; 2 \right\rangle$ e) $x \in \mathbf{R}$
f) $x = 1$ g) $x \in \left\langle -3; \frac{1}{2} \right\rangle$ h) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$ **5.8.** a) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$ b) $x = 7$
c) $x \in (1; 2)$ d) brak rozwiązań e) $x \in (-1; 4)$ f) $x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{13}{17}\right)$ g) $x \in \left\langle \frac{17}{8}; \frac{9}{4} \right\rangle$
h) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{11}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; \infty\right)$ **5.9.** $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ **5.10.** a) I. $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
II. $x \in (-1; 2)$ III. $x \in \{-1, 2\}$ b) I. brak rozwiązań II. $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ III. $x = 0$
c) I. $x \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$ II. $x \in (3; 7)$ III. $x \in \{3, 7\}$ d) I. $x \in (-2; 1)$
II. $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ III. $x \in \{-2, 1\}$ **5.11.** $x \in (0; 3\rangle$ **5.12.** $A \cup B = (-\infty; -5) \cup \langle 0; \infty)$,
$A \cap B = \left(1; 2\frac{1}{3}\right\rangle$, $A - B = (-\infty; -5) \cup \left(2\frac{1}{3}; \infty\right)$, $B - A = \langle 0; 1\rangle$ **5.13.** $m \in (-5; 1)$
5.14. a) $x \in (0; 2)$ b) $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right) \cup \left(3\frac{1}{3}; 6\right\rangle$ c) $x \in \left(-9; -\frac{9}{2}\right)$ d) $x \in \left\langle -\frac{11}{6}; \frac{4}{17} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{11}; 1 \right\rangle$
5.15. a) $D = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}; \infty\right)$ b) $D = (-\infty; -1\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}; \infty\right)$ c) $D = \langle -3; 1\rangle$
d) $D = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ **5.16.** a) $D = (-\infty; -3) \cup (3; 7)$ b) $D = (-6; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)$
5.17. a) $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$ b) brak rozwiązań c) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$ e) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$ f) $x \in \langle 1; 2\rangle$
5.18. *Wskazówka*: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - x & \text{dla } x \in (-\infty; 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right) \\ x^2 + x & \text{dla } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$
5.19. $m \in (0; 1)$. *Wskazówka*: Naszkicuj wykres funkcji f.
5.20. $m = 13$. *Wskazówka*: Rozpatrz cztery przypadki: 1. $\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0 \\ x^2 - 4 \geqslant 0 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 4 \geqslant 0 \end{cases}$, 4. $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$. **5.21.** $ZW = \langle -3; \infty)$ **5.22.** $m = 4$ lub $m = 5$
5.23. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$ **5.24.** $m \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$

s. 42

1. P, F, P **2.** $x \in \mathbf{R}$ **3.** $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}; \infty\right)$ **4.** $x \in \left(\frac{2 - \sqrt{10}}{3}; \frac{2 + \sqrt{10}}{3}\right)$

5.

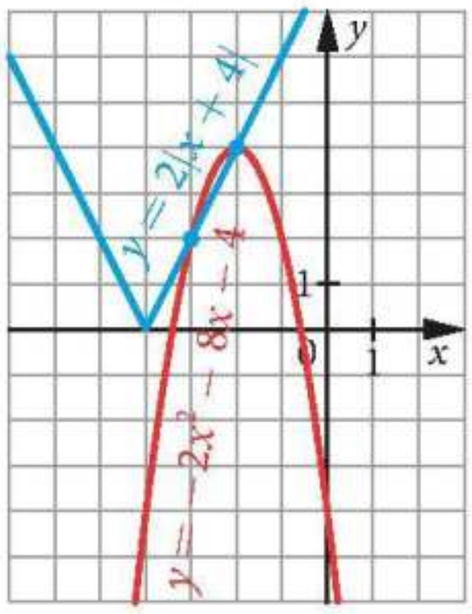


1 rozwiązanie dla $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$,
3 rozwiązania dla $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

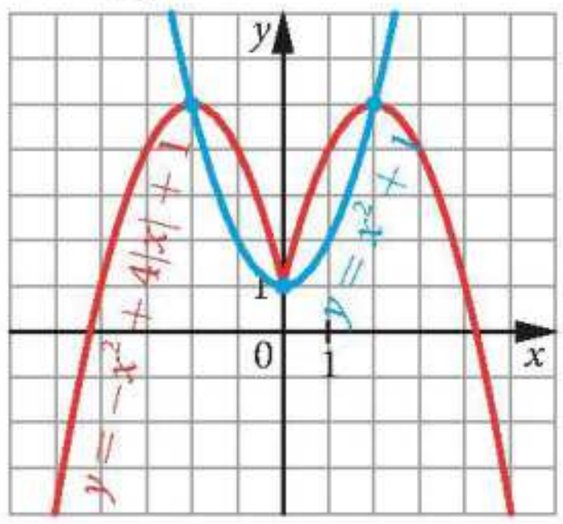
s. 46

6.1. D **6.2.** C **6.3.** B **6.4.** D **6.5.** a) $x = 1$ lub $x = 3$ b) $x = -1$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ lub $x = 2$ d) $x = 0$ lub $x = -6$ **6.6.** a) brak rozwiązań b) $x = -1$, $y = -3$ c) $x = 0$, $y = -6$ lub $x = 6$, $y = 0$ d) $x = 1$, $y = 2$ lub $x = 3$, $y = 2$ **6.7.** a) $x = -2$, $y = 2$ lub $x = 1$, $y = -4$ b) $x = -1$, $y = -7$ lub $x = 5$, $y = -7$ c) $x = 2$, $y = 1$ lub $x = 6$, $y = 9$ d) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 0$ e) $x = 1$, $y = -2$ f) $x = 2$, $y = 0$ lub $x = 4$, $y = -2$

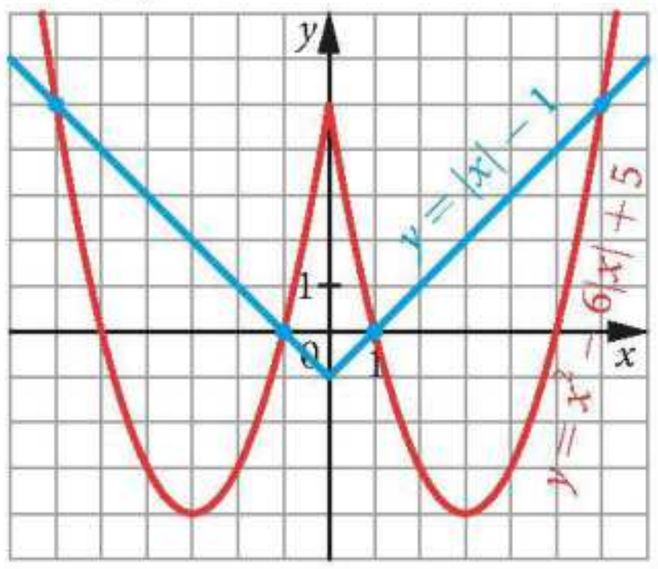
6.8. a) $x = -3,\ y = 2$ lub $x = -2,\ y = 4$



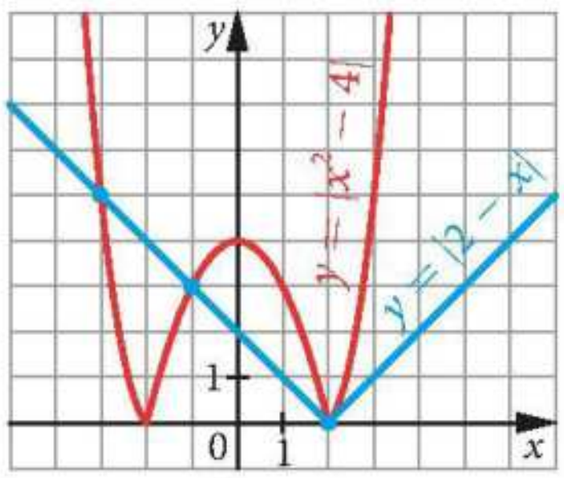
b) $x = -2,\ y = 5$ lub $x = 0,\ y = 1$ lub $x = 2,\ y = 5$



c) $x = -6,\ y = 5$ lub $x = -1,\ y = 0$ lub $x = 1,\ y = 0$ lub $x = 6,\ y = 5$



d) $x = -3,\ y = 5$ lub $x = -1,\ y = 3$ lub $x = 2,\ y = 0$



6.9. a) np. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} y = -x^2 - 4x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

d) np. $\begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 2 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$ **6.10.** np. $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$ **6.11.** a) np. $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\frac{1}{3} \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} y = x^2 + 10x + 22 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y = x^2 - 18 \\ x = -4 \end{cases}$ **6.12.** a) $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 0)$, $(4, 2)$ b) 3

6.13. $p = 3,\ q = -1$ lub $p = -1,\ q = 3$ **6.14.** 2, 4, 6 lub −6, −4, −2. *Wskazówka*: Oznacz szukane liczby: $2(a-1)$, $2a$, $2(a+1)$. **6.15.** 17, 18, 19 **6.16.** 12 i 4 **6.17.** 8 cm, 5 cm, 5 cm
6.18. 5,2 cm i 3,4 cm **6.19.** 40 cm i 42 cm **6.20.** 84 cm **6.21.** 6 i 9 lub −10 i −7
6.22. ok. 56 m **6.23.** 15 **6.24.** 12 i 16 **6.25.** −22, −18, −14 lub 14, 18, 22
6.26. ojciec: 47, syn: 19

s. 49

1. P, F, P **2.** $x = 2,\ y = 0$ lub $x = 10,\ y = -8$ **3.** np. $\begin{cases} y = -\frac{3}{8}x^2 - 3x - 2 \\ y = -\frac{3}{2}x - 2 \end{cases}$

4. 52 **5.** 23, 25, 27 lub −27, −25, −23

s. 53

7.1. F, P, F **7.2.** P, P, F **7.3.** P, P, F **7.4.** P, F, P **7.5.** a) dla $m = \frac{5}{4}$: $x = \frac{11}{4}$, dla $m > \frac{5}{4}$: $x = \frac{2m + 3 - \sqrt{12m - 15}}{2}$ lub $x = \frac{2m + 3 + \sqrt{12m - 15}}{2}$, dla $m < \frac{5}{4}$: brak rozwiązań
b) dla $m \in \mathbf{R}$: $x = -m - 3$ lub $x = -m + 3$ c) dla $m = 1$: $x = -3$, dla $m = \frac{5}{4}$: $x = -5$,

dla $m < \frac{5}{4}$ i $m \neq 1$: $x = \frac{-m - \sqrt{5-4m}}{m-1}$ lub $x = \frac{-m + \sqrt{5-4m}}{m-1}$, dla $m > \frac{5}{4}$: brak rozwiązań

d) dla $m = -8$: $x = 3$, dla $m = 0$: $x = 0$, dla $m < 0$ i $m \neq -8$: $x = \frac{6m - 12\sqrt{-2m}}{m+8}$ lub

$x = \frac{6m + 12\sqrt{-2m}}{m+8}$, dla $m > 0$: brak rozwiązań e) dla $m \neq 0$: $x = -\frac{1}{2m}$, dla $m = 0$: brak rozwiązań

f) dla $m = -\frac{3}{8}$: $x = -4$, dla $m < -\frac{3}{8}$: $x = \frac{3 - \sqrt{-8m-3}}{2m}$ lub $x = \frac{3 + \sqrt{-8m-3}}{2m}$,

dla $m > -\frac{3}{8}$: brak rozwiązań **7.6.** 0 rozwiązań dla $m \in (0; 1\rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in \{-1, 0\}$,

2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (1; \infty)$ **7.7.** $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{2}{5}\right) \cup (1; \infty)$

7.8. a) dla $m = -3$: $x = -3$, dla $m = 2$: $x = 2$ b) dla $m = -1$: $x = 0$, dla $m = 2 - \sqrt{5}$: $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$,

dla $m = 2 + \sqrt{5}$: $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ **7.9.** a) $m \in \left\langle -1\frac{2}{3}; 1 \right\rangle$ b) $m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 2; \infty)$

7.10. c) *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia. **7.11.** $m \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

7.12. $m = 1$ **7.13.** $m \in \left(1; 1\frac{1}{4}\right) \cup (2; \infty)$ **7.14.** a) Nie ma takiego m. b) $m \in (1; 2)$

7.15. $m \in (-\infty; -3)$ **7.16.** $m \in (6; \infty)$ **7.17.** $m \in (-\infty; 1) \cup \left(1; 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}; \infty\right)$; nie

7.18. $m \in (-3; 2)$ **7.19.** $m = 3{,}5$ **7.20.** $m \in \left(-\infty; -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}; 5\frac{1}{4}\right)$ **7.21.** $t = -\frac{1}{2}$

7.22. $m = -1$ **7.23.** $m \in \left(-\frac{1}{3}; 4\right)$ **7.24.** $m \in \left\{-\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right\}$ **7.25.** $m \in \left\langle -\sqrt{2}; -1 \right)$

7.26. $m \in \left(-2 - \sqrt{13}; -5\right) \cup \left(1; -2 + \sqrt{13}\right)$ **7.27.** Nie ma takiego m. **7.28.** $m \in (1; 2)$

s. 56

1. F, F, F **2.** $m \in \left(-\infty; 3\frac{1}{4}\right)$ **3.** $k \in \left\{-1, -\frac{1}{3}, 1\right\}$ **4.** $m \in \left(5\frac{1}{2}; \infty\right)$ **5.** $m = 7$

s. 59

8.1. F, F, F, F **8.2.** F, F, F, P **8.3.** P, F, P **8.4.** F, P, F **8.5.** dla $m < 0$:
$x \in (-\infty; 2m) \cup (-2m; \infty)$, dla $m = 0$: $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, dla $m > 0$: $x \in (-\infty; -2m) \cup (2m; \infty)$
8.6. dla $k > 0$: $x \in \langle -1; 1\rangle$, dla $k = 0$: $x \in \mathbf{R}$, dla $k < 0$: $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$

8.7. a) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ b) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ c) $m \in \langle 1; \infty)$ d) $m \in \left(-3; \frac{1}{2}\right)$

e) $m \in (-\infty; -7) \cup (-1; \infty)$ f) $m \in \left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$ **8.8.** $m \in (-\infty; -1\rangle \cup \left\langle \frac{17}{23}; \infty \right)$

8.9. $m \in \left(-8 - 2\sqrt{15}; -8 + 2\sqrt{15}\right)$ **8.10.** $m \in \left\langle \frac{3}{4}; \infty \right)$ **8.11.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 1; \infty)$

8.12. $m \in \langle 0; \infty)$ **8.13.** $k \in (-\infty; -1)$ **8.14.** $m \in \langle -5; 2\rangle$ **8.15.** $k \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{2}{9}; \infty\right)$

8.17. *Wskazówka*: Rozwiąż nierówność zmiennej a z parametrem b.

8.19. dla $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$: $x \in \mathbf{R}$, dla $m = -\frac{1}{3}$: $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$,

dla $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$: $x \in \left(-\infty; \frac{m+1+\sqrt{3m+1}}{m}\right) \cup \left(\frac{m+1-\sqrt{3m+1}}{m}; \infty\right)$, dla $m = 0$: $x \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$,
dla $m \in (0; \infty)$: $x \in \left(\frac{m+1-\sqrt{3m+1}}{m}; \frac{m+1+\sqrt{3m+1}}{m}\right)$

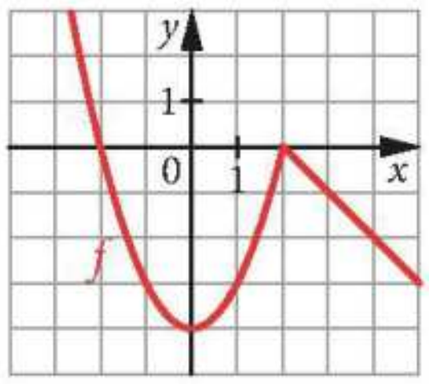
s. 61

1. P, F, P **2.** $m \in \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$ **3.** $k \in (-6; -2\rangle$ **4.** $m \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

s. 71

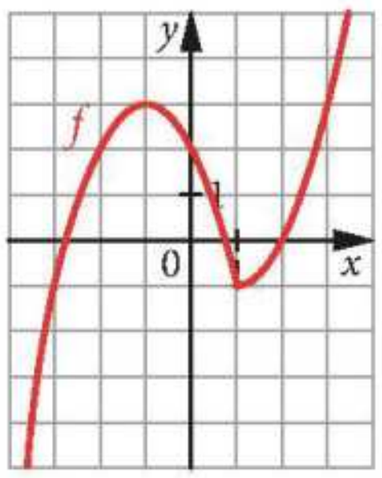
9.1. a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2; \infty)$; miejsca zerowe: 0, 2; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$; wartość najmniejsza: -2 dla $x = 1$, brak wartości największej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m < -2$, 1 rozwiązanie dla $m = -2$, 2 rozwiązania dla $m > -2$ b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; -1\rangle$; brak miejsc zerowych; $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2; \infty)$; wartość największa: -1 dla $x = 2$, brak wartości najmniejszej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m > -1$, 1 rozwiązanie dla $m = -1$, 2 rozwiązania dla $m < -1$ c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -8; \infty)$; miejsca zerowe: -6, 2; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -6) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -2\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; \infty)$; wartość najmniejsza: -8 dla $x = -2$, brak wartości największej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m < -8$, 1 rozwiązanie dla $m = -8$, 2 rozwiązania dla $m > -8$ d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 0\rangle$; miejsce zerowe: -3; $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -3; \infty)$; wartość największa: 0 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m > 0$, 1 rozwiązanie dla $m = 0$, 2 rozwiązania dla $m < 0$

9.2. a)



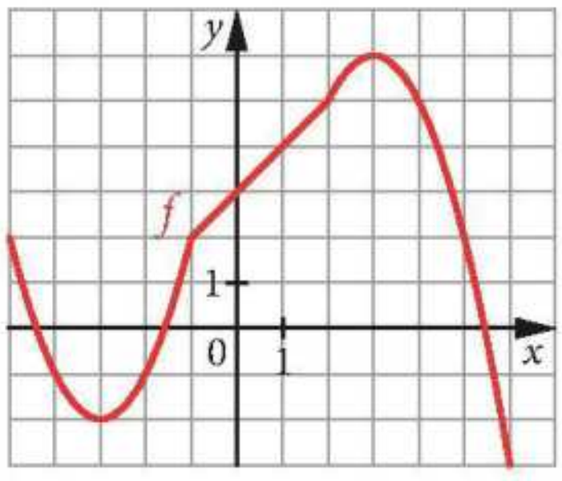
$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: -2, 2; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (2; \infty)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0\rangle$ i $\langle 2; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 2\rangle$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-4, 0\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-4; 0)$

b)

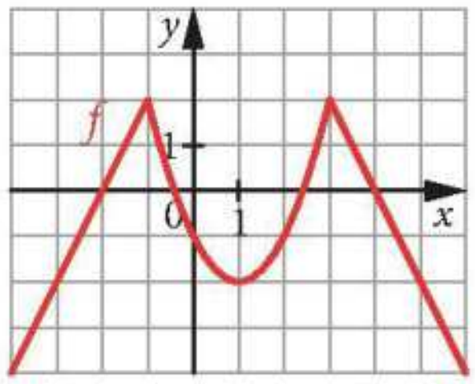


$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-1 - \sqrt{3}$, $-1 + \sqrt{3}$, 2; $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\right) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{3}; 2\right)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1, 3\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-1; 3)$

c)

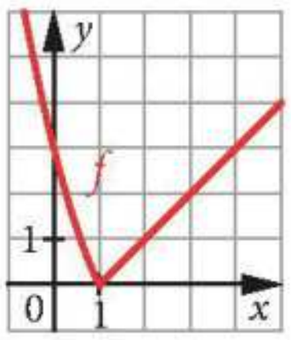


$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-3 - \sqrt{2}$, $-3 + \sqrt{2}$, $3 + \sqrt{6}$; $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\infty; -3 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{6}\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(-3 - \sqrt{2}; -3 + \sqrt{2}\right) \cup \left(3 + \sqrt{6}; \infty\right)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -3\rangle$ i $\langle 3; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle -3; 3\rangle$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2, 6\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 6)$

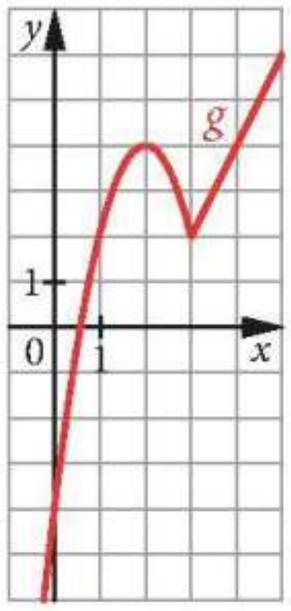
d) 

$D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 2\rangle$; miejsca zerowe: -2, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, 4; $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-2; 1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}; 4\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \left(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right) \cup (4; \infty)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; 3\rangle$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle -1; 1\rangle$ i $\langle 3; \infty)$; brak wartości najmniejszej, wartość największa: 2 dla $x = -1$ i $x = 3$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$, 3 rozwiązania dla $m = -2$, 4 rozwiązania dla $m \in (-2; 2)$

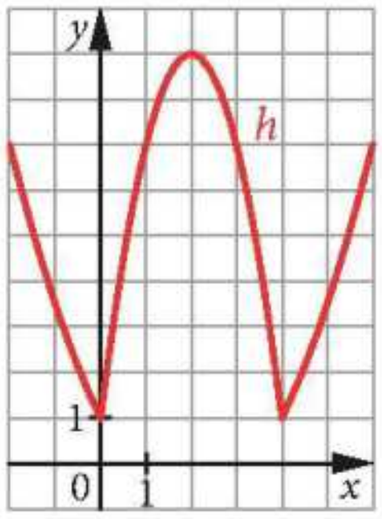
9.3. a) $x \in (-1; 9)$



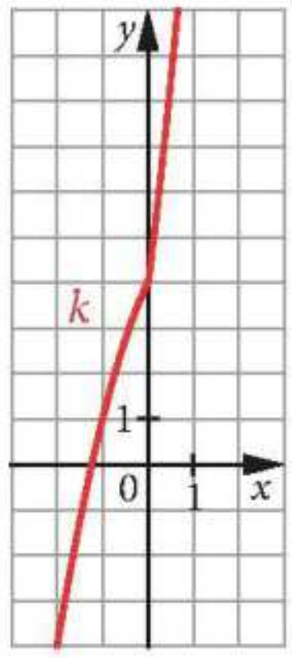
b) $x \in (1; 3) \cup (3; \infty)$



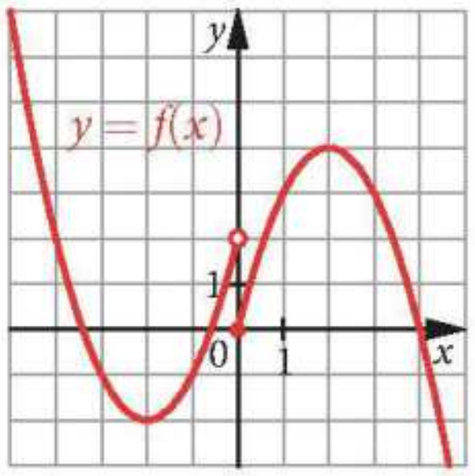
c) $x \in \langle -2; 1\rangle \cup \langle 3; 6\rangle$

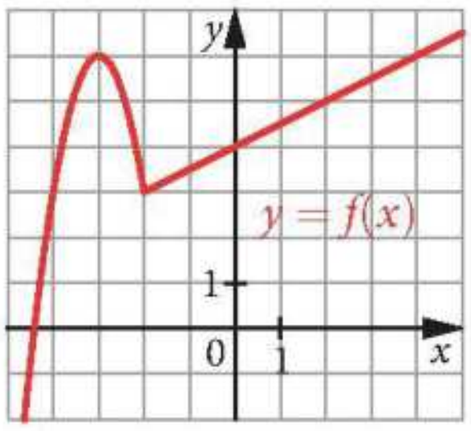


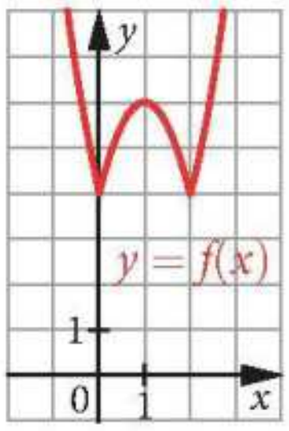
d) $x \in (-2; 0)$

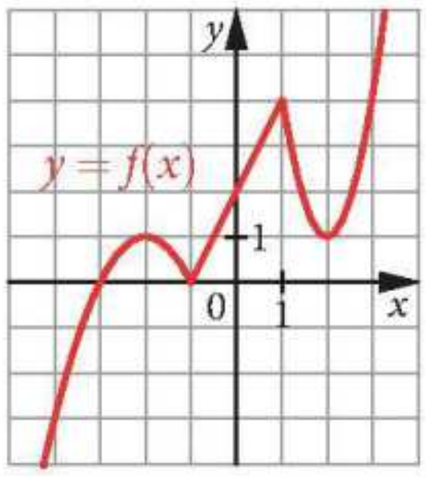


9.4.

a) 

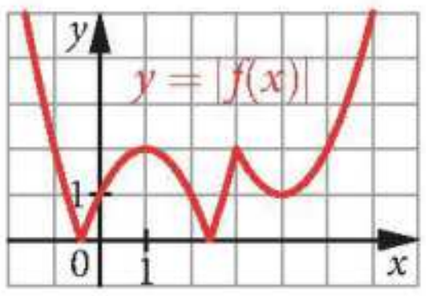
b) 

c) 

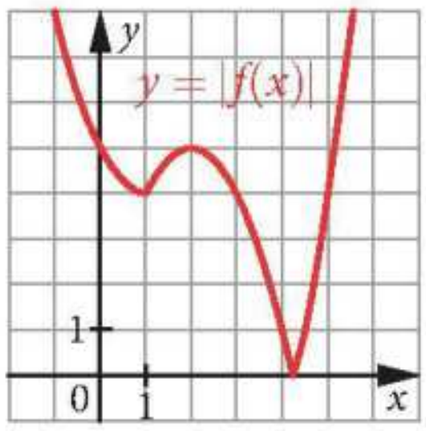
d) 

	Liczba rozwiązań równania				
	zero	jedno	dwa	trzy	cztery
a)	–	$m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$	$m \in \{-2, 4\}$	$m \in (-2; 0) \cup \langle 2; 4)$	$m \in \langle 0; 2)$
b)	–	$m \in (-\infty; 3) \cup (6; \infty)$	$m \in \{3, 6\}$	$m \in (3; 6)$	–
c)	$m \in (-\infty; 4)$	–	$m \in (6; \infty) \cup \{4\}$	$m = 6$	$m \in (4; 6)$
d)	–	$m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$	$m \in \{0, 4\}$	$m \in (0; 4)$	–

9.5.

a) 

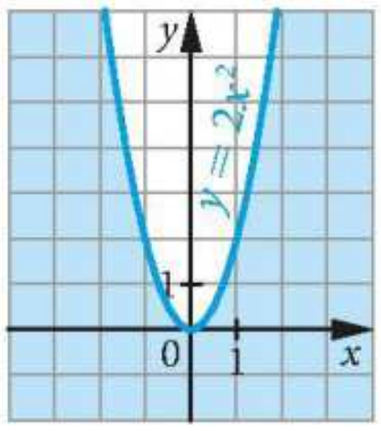
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in (2; \infty) \cup \{0\}$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup \{2\}$,
5 rozwiązań dla $m = 1$,
6 rozwiązań dla $m \in (1; 2)$

b) 

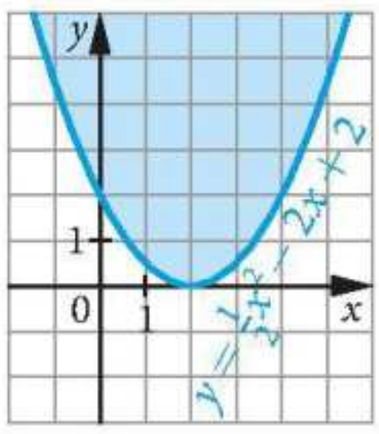
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 rozwiązanie dla $m = 0$,
2 rozwiązania dla $m \in (0; 4) \cup (5; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m \in \{4, 5\}$,
4 rozwiązania dla $m \in (4; 5)$

9.6. 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4)$, 2 rozwiązania dla $m \in (0; \infty) \cup \{-4\}$, 3 rozwiązania dla $m = 0$, 4 rozwiązania dla $m \in (-4; 0)$ **9.7.** $b = -8,\ c = 2$ **9.8.** $a = -1,\ b = -6$ **9.9.** $b = 6,\ c = -3$ **9.10.** $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **9.11.** $a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{8}{3},\ c = \frac{2}{3}$ **9.12.** $a = 1,\ b = -4,\ c = 6$ **9.13.** $a = 1,\ b = -4,\ c = 1$ **9.14.** a) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3$ c) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$ d) $f(x) = 2(x+3)^2 - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - 4$ f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\frac{2}{3}$ **9.15.** a) $a = 1,\ b = 3,\ c = 1$ b) $a = 1,\ b = -2,\ c = -3$ c) $a = 0,\ b = 2,\ c = 1$ **9.16.** a) $b = 2,\ c = -3$ b) $b = -6,\ c = 5$ **9.17.** $a = \frac{2}{5},\ b = \frac{6}{5},\ c = -4$ **9.18.** *Wskazówka:* $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ **9.19.** $m \in (-1; 3)$ **9.20.** $m \in \left(0; \frac{15}{7}\right)$ **9.21.** $k \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$. *Wskazówka:* Zauważ, że musi zajść układ warunków: $\Delta > 0$ i $f(1) > 0$ i $x_w < 1$. **9.22.** $m \in (-\infty; 4) \cup \left(4; 4\frac{1}{4}\right)$

9.24. a)

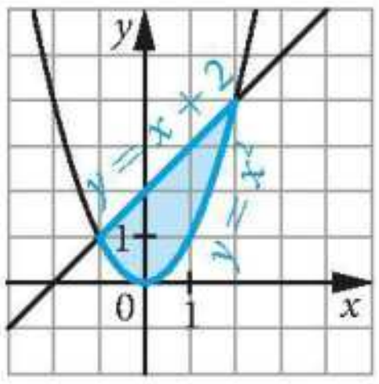


b)

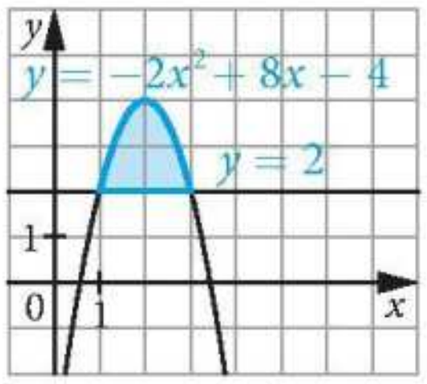


9.25.

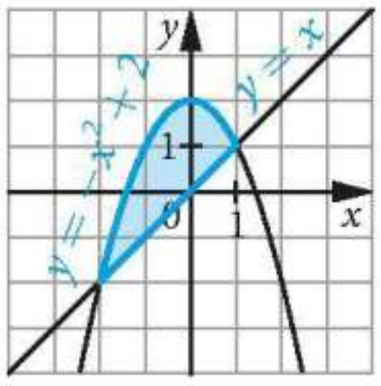
a)



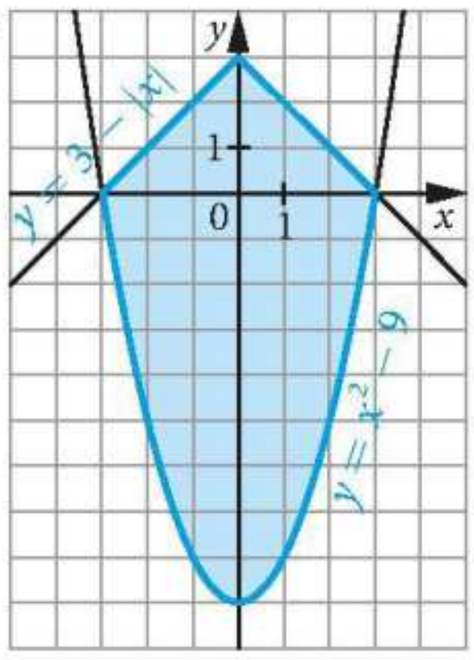
b)



c)

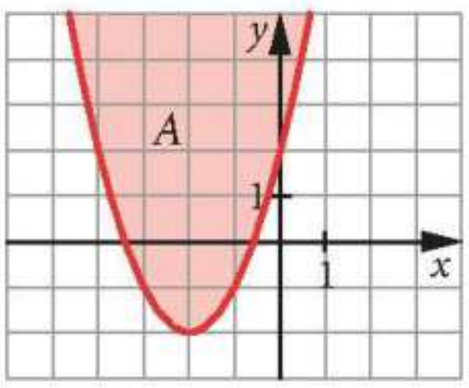


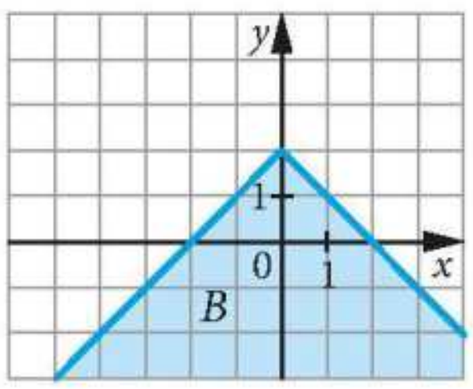
d)

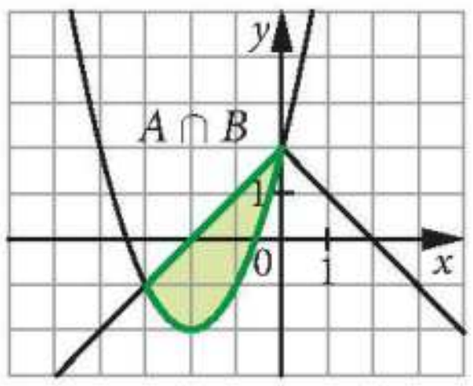


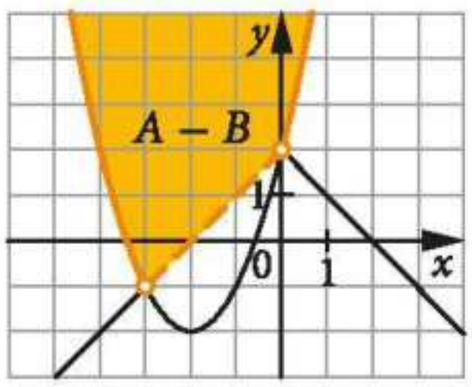
9.26. a) $\begin{cases} y \geqslant x^2 \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \leqslant 2 - x^2 \\ y \geqslant x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \geqslant x^2 + 4x + 2 \\ y \leqslant -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y > -1 \\ y < \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y > x^2 - 2x - 2 \end{cases}$

9.27.

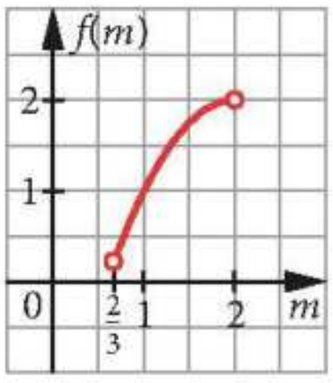




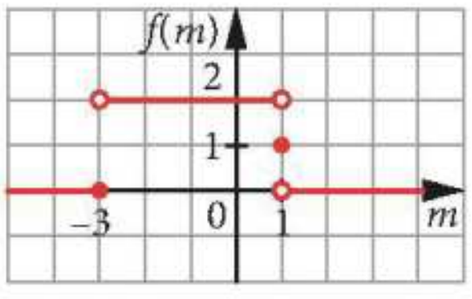




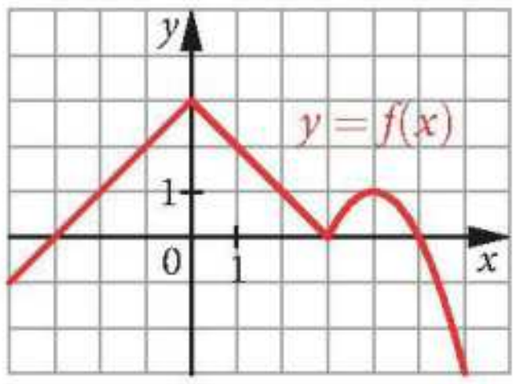
9.28. $f(m) = -(m-2)^2 + 2$ dla $m \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$

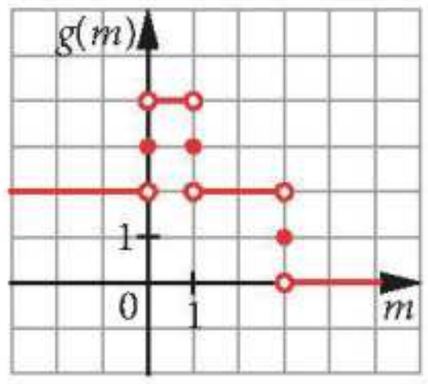


9.29. $f(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; -3\rangle \cup (1; \infty) \\ 1 & \text{dla } m = 1 \\ 2 & \text{dla } m \in (-3; 1) \end{cases}$



9.30.

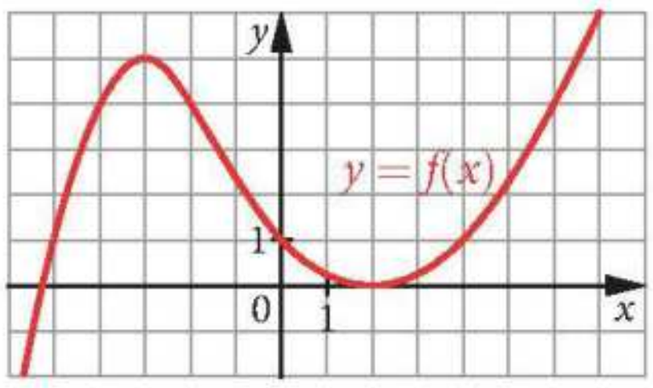




0 pierwiastków dla $m \in (3; \infty)$,
1 pierwiastek dla $m = 3$,
2 pierwiastki dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$,
3 pierwiastki dla $m \in \{0, 1\}$,
4 pierwiastki dla $m \in (0; 1)$

s. 75

1. P, F, F **2.**



1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0, 5\}$,
3 rozwiązania dla $m \in (0; 5)$

3. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}$ **4.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ **5.** $ZW = \left\langle -1\frac{1}{8}; \infty \right)$

s. 76

1. B **2.** B **3.** B **4.** D **5.** A **6.** D **7.** B **8.** A **9.** D **10.** C **11.** D **12.** B
13. B **14.** C **15.** D **16.** B **17.** C **18.** A **19.** F, P, F **20.** P, P, P **21.** F, P, F
22. P, P, F **23.** P, P, P **24.** F, P, P **25.** P, P, F **26.** F, P, P **27.** F, P, P **28.** F, P, F
29. P, P, P **30.** P, P, F **31.** F, P, P **32.** F, F, P **33.** P, F, F

34.

	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	1 dla $x = 3$	-3 dla $x = 5$
b)	6 dla $x = 0$	-10 dla $x = -4$
c)	$-\frac{7}{4}$ dla $x = \frac{1}{6}$	$-\frac{25}{12}$ dla $x = -\frac{1}{6}$
d)	$4 - \sqrt{2}$ dla $x = -1$	$5 - 4\sqrt{2}$ dla $x = -2$

35. a) $f(x) = 25\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$
b) $f(x) = x(9x + 1)$
c) brak postaci iloczynowej
d) $f(x) = \left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right)$
e) brak postaci iloczynowej
f) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)$

36. a) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 8$, $f(x) = 2(x + 5)(x + 1)$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 19$, brak postaci iloczynowej c) $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$, $f(x) = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{3}{4}$ d) $f(x) = 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 11\frac{1}{4}$, $f(x) = 5x(x - 3)$ **37.** a) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = 1$ b) $x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$ c) $x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ d) $x = 2^{16}$ lub $x = 2^{17}$ e) brak rozwiązań f) $x = 1$ lub $x = 3^{20}$ **38.** a) $x \in (-9; 9)$ b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$ c) $x \in \left\langle -4; \frac{1}{2} \right\rangle$ d) $x = \sqrt{2}$ e) $x \in (3; 8)$ f) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 2; \infty)$ g) $x \in \mathbf{R}$ h) $x \in \left(-\infty; -5\sqrt{2}\right) \cup \left(3\sqrt{2}; \infty\right)$ **39.** $f(x) = \frac{1}{9}(x - 2)(x - 8)$ **40.** a) $f(x) = x^2 - 3x$ b) brak rozwiązań **41.** a) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ b) wartość największa: 4 dla $x = 1$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 3$ c) $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$ **42.** a) $f(x) = -(x - 2)^2 + 2$ c) $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$ d) $f(x) = -\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)$ **43.** $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ **44.** a) miejsca zerowe: -5, -1; $W = (-3, 4)$, $P = (0, -5)$

b) miejsca zerowe: 1, 5; $W = (3, -2)$, $P = \left(0, \frac{5}{2}\right)$ **45.** $11 = 3 + \frac{9}{2} + \frac{7}{2}$ **46.** $p = \frac{5}{12}p + \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}p$

47. 115 zł **48.** $x = \frac{|a-b|}{2}$ cm **49.** bok: 5 cm, wysokość: 5 cm **51.** 9 uczniów **52.** 22, 24, 33

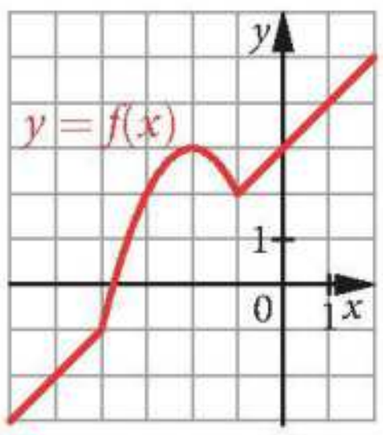
53. $a = 80$ lub $a = 20$ **54.** a) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = 3$ b) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 1$ lub $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ lub $x = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ c) $x = 5$ lub $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ d) $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ lub $x = 6$

55. a) $x \in (-3; -1) \cup (0; 2)$ b) $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$ c) $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \langle 2; \infty)$ d) $x \in \langle -2; 1\rangle$

56. $m = 8\frac{3}{4}$ **57.** $p = 2$, $q = -2$ **58.** a) np. $x^2 - 2x - 1 = 0$ b) np. $x^2 - 6x + 2 = 0$

59. $b = -16$ lub $b = 16$, $c = 12$ **60.** a) -1, 1, 3 b) brak **61.** a) I. $x \in (-5; -2)$
II. $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; \infty)$ III. $x \in \{-5, -2\}$ b) I. $x \in (-4; -2)$ II. $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$
III. $x \in \{-4, -2\}$

62.



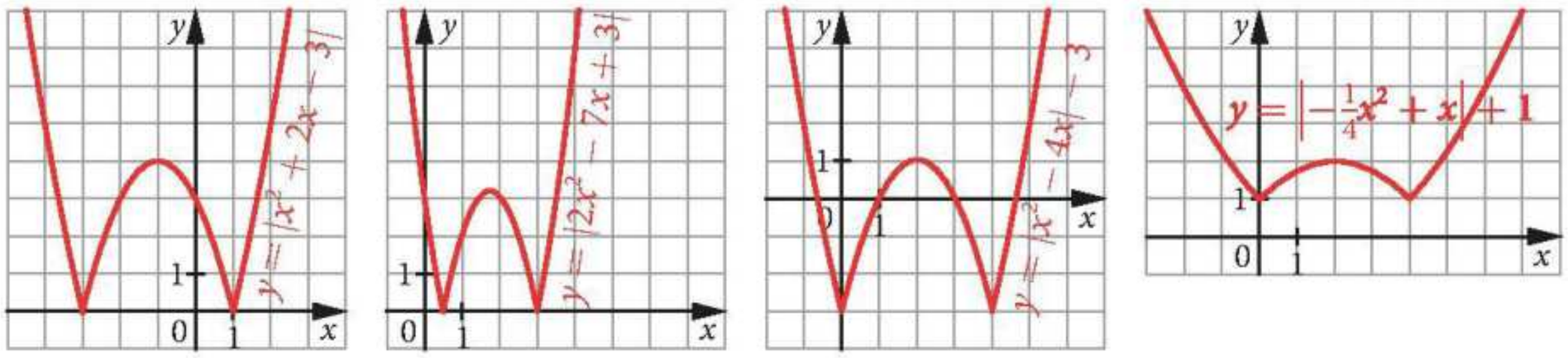
1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m = 2$ lub $m = 3$,
3 rozwiązania dla $m \in (2; 3)$

63. a) $x = -3$, $y = -3$ lub $x = 1$, $y = 5$
b) $x = 3$, $y = 1$

64. 52

65. a) $b = -1$, $c = 4$ b) -4, 2

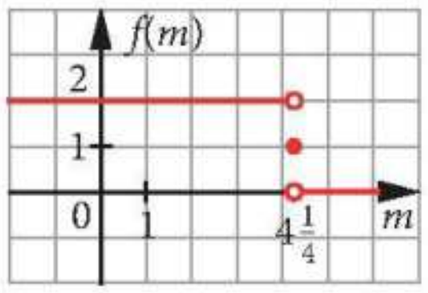
66. a) b) c) d)



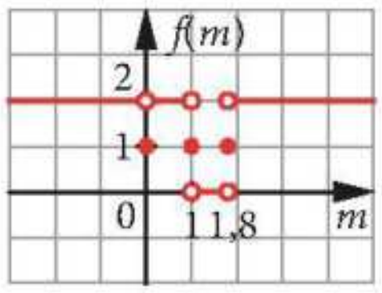
67. a) $m = 1\frac{1}{4}$ lub $m = 2$ b) $m = \frac{1}{2}$ lub $m = \frac{2}{3}$ **68.** a) $m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$

b) $m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$ **69.** *Wskazówka*: Wykaż, że $\Delta > 0$ dla $k \in \mathbf{R}$.

70. $k \in \left\{\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, 5\right\}$ **71.** $m = -2$ lub $m = 2$ **72.** a)



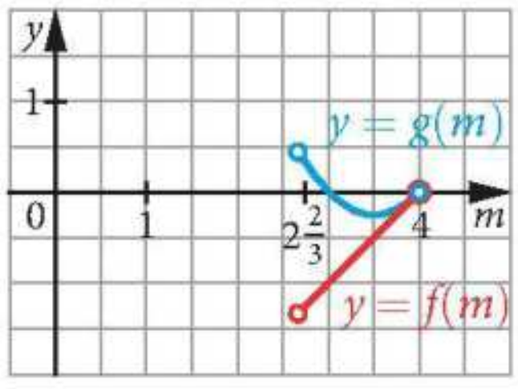
b)



73. a) $m \in \left(2; \frac{9}{4}\right) \cup (3; \infty)$ b) $m \in \left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$ c) $m \in (2; \infty)$ d) $m \in \left(-17 + 8\sqrt{5}; 1\right) \cup (4; \infty)$

74. $m \in \left(-3; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; 3\right)$ **75.** a) $D_f = D_g = \left(2\frac{2}{3}; 4\right)$

b) Zob. rysunek obok. c) Nie ma takiego m.



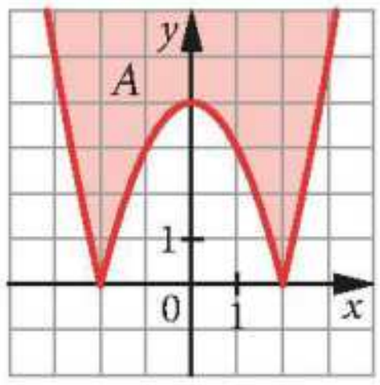
76. a) $m = 7$ b) $m = 1$

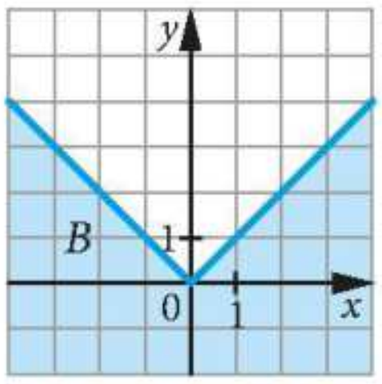
77. $m \in (-6; 3)$. *Wskazówka*: Zauważ, że $x_1 = m + 3$ i $x_2 = m + 7$.

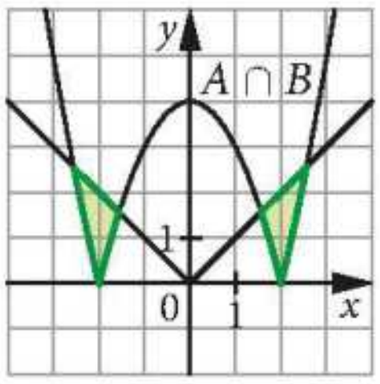
78. $k \in (-\infty; -7) \cup (1; \infty)$ **79.** $k \in (2; 6)$

80. $m \in (-\infty; -3\rangle \cup \left(\frac{3}{7}; \infty\right)$ **81.** $m \in (3; \infty)$ **82.** $m \in \left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$ **83.** $k = -\frac{5}{3}$ **84.** Miejsca zerowe: -4, 0, 6; dla $m \in \{-4, 0\}$. *Wskazówka*: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 6x & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$ **85.** $m = -2$

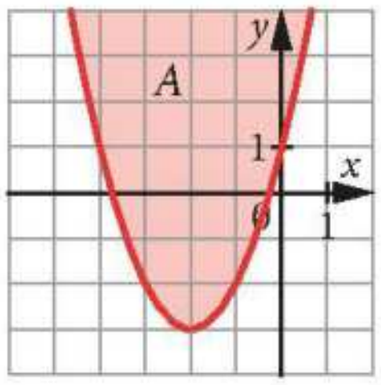
86. a)

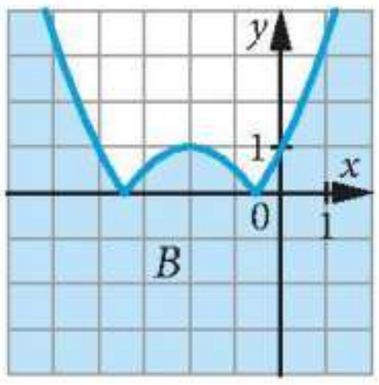


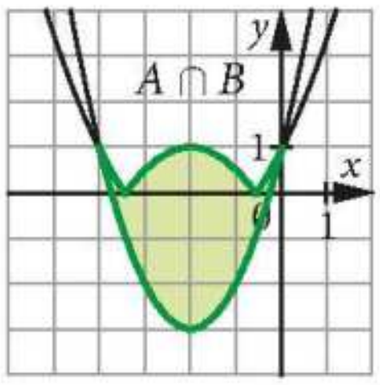




b)







2. Wielomiany i wyrażenia wymierne

s. 93

1.1. B **1.2.** A **1.3.** A **1.4.** A, B, D, F, G, H **1.5.** a) $7x^5 + x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, stopień wielomianu: 5 b) $2x^3 - 5x^2 - x + 11$, stopień wielomianu: 3 c) $-\frac{1}{2}x^5 + x^2 + x + 1$, stopień wielomianu: 5 d) $-\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x$, stopień wielomianu: 3 **1.6.** a) $a_4 = -5$, $a_3 = 3$, $a_2 = 2$, $a_1 = -1$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: 4 b) $a_4 = -4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 6$, $a_1 = -7$, $a_0 = 2$, stopień wielomianu: 4 c) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_0 = -1$, stopień wielomianu: 1 d) $a_{10} = \frac{1}{13}$, $a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$, $a_5 = \frac{1}{12}$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 2$, stopień wielomianu: 10 e) $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -3$, $a_0 = 5$, stopień wielomianu: 3 f) $a_0 = 5\sqrt{2}$, stopień wielomianu: 0 **1.7.** a) stopień wielomianu: 5, $a_5 = -7$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = 4$, $a_1 = -7\sqrt{3}$, $a_0 = 2\sqrt{3}$ b) stopień wielomianu: 6, $a_6 = -\frac{3}{4}$, $a_5 = 0$, $a_4 = 2$, $a_3 = -1$, $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 3$ c) stopień wielomianu: 7, $a_7 = 7$, $a_6 = 0$, $a_5 = -1$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -6$, $a_0 = -8\sqrt{5}$ d) stopień wielomianu: 5, $a_5 = -\sqrt{5}$, $a_4 = 4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_1 = -3$, $a_0 = 0$ e) stopień wielomianu: 4, $a_4 = 1\frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_2 = -7$, $a_1 = 10$, $a_0 = 2$

1.8. a) np. $5x^5 - 3x^3 + x$ b) np. $3\sqrt{7}$ c) np. $x^{100} - x^{99} + 1$ d) np. $3x^{3030} - 2x^2 + x + 3$

1.9. a) np. $3x^4 + 2x + 2$ b) np. $2x^3 + x^2 + 5x$ c) np. $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2}$ d) np. $2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 4x + 2$ e) np. $12x^7 + x^6 + 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 2x^2 + 4x + 6$ f) np. $5x - 5$

1.10. a) -22 b) $\sqrt{2}$ c) 0 d) -1 e) $\sqrt{2}$ f) 0 **1.11.** a) $a_4 = 15$, $a_1 = -6$, $a_0 = -5$ b) $a_2 = -21$, $a_1 = 11$ c) $a_2 = 15$ d) $a_2 = 3\left(\sqrt{2} - 1\right)$ e) $a_2 = 3$, $a_1 = 8\sqrt{2}$ f) $a_6 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 3$, $a_1 = 2\sqrt{2}$ **1.12.** a) I. $p = -1$ II. $p = 1$ b) I. $p = 2$ II. $p = -2$ c) I. $p = -3$ II. $p = 3$

1.13. a) $m = 3$ b) $m = 5$ c) nie d) $m = 3$ e) nie f) $m = 0$

1.14. a) $a = -7,\ b = -3$ b) $a = -\frac{1}{5},\ b = \frac{8}{5}$ c) $a = 1,\ b = 2$ d) $a = 0,\ b = -2$ e) $a = 1,\ b = 1$ lub $a = 4,\ b = -5$ f) $a = 2,\ b = 1$ **1.15.** a) np. $W(x) = x^5 - x + 1,\ Q(x) = -x^5 + x + 1$ b) np. $W(x) = x^2 + x,\ Q(x) = 3x^3 - x$ **1.16.** *Wskazówka*: Wielomianem, który może spełnić warunki zadania i ma najniższy z możliwych stopni, jest funkcja kwadratowa $W(x) = ax^2 + bx + c$. Z układu równań $\begin{cases} 9a + 3b + c = 3 \\ 25a + 5b + c = 6 \end{cases}$ wyznacz dwa współczynniki w zależności od trzeciego i dobierz odpowiednią wartość niewymierną tego trzeciego. Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.
1.17. a) $W(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - 8z + 3$ b) $W(z) = \frac{1}{3}z^3 - 2z^2 + 5z - 1$

s. 96

1. P, F, P **2.** $2x^7 - 5x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}$, stopień wielomianu: 7
3. $a_2 = -14,\ a_1 = 12,\ a_0 = 8$ **4.** $a = 5,\ b = 1$ **5.** $a = 1,\ b = 1$, stopień wielomianu: 1

s. 99

2.1. B **2.2.** C **2.3.** C **2.4.** P, P, P **2.5.** F, P, P **2.6.** a) $W(x) + Q(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 4$, $W(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ b) $W(x) + Q(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x + 2$, $W(x) - Q(x) = -x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$ c) $W(x) + Q(x) = 8x^5 + 14,\ W(x) - Q(x) = -12x^3 + 8$
d) $W(x) + Q(x) = 7x^4 + 3x^2 - 3x,\ W(x) - Q(x) = 17x^4 - 3x^2 - 3x + 2$
e) $W(x) + Q(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - x^2 - 2x - 1,\ W(x) - Q(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3 + 4x^2 - 3x + 1$
f) $W(x) + Q(x) = -2{,}4x^3 + x^2 - 0{,}8x + 5{,}2,\ W(x) - Q(x) = 3x^3 - 2{,}4x^2 + x + 1$
g) $W(x) + Q(x) = 3x^4 + 0{,}6x^3 + x^2 - 2{,}8x - 6,\ W(x) - Q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 8$
2.7. a) $-6x^3 + 7x^2 + 3x - 1$ b) $5x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 2$ c) $21x^4 + 20x^3 - 5x^2 + 4$
d) $6x^5 - 2\sqrt{2}x^4 + 3\sqrt{2}x^3 - 2x^2 - 3x + \sqrt{2}$ e) $-\sqrt{3}x^4 + \left(2\sqrt{3} - 1\right)x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 3$
2.8. a) $6x^4 + x^3 + 12x^2 - x + 6$ b) $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 2x - 12$ c) $x^4 - 12\frac{1}{6}x^3 + 8\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$
d) $\sqrt{2}x^4 - 9x^3 + 2\left(3\sqrt{2} + 2\right)x^2 - 2\left(\sqrt{2} + 8\right)x + 8$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^4 + \left(\sqrt{3} + 1\right)x^3 - 8x^2 + 3\left(\sqrt{3} + 2\right)x - 6\sqrt{3}$
2.9. a) $-6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 6x^2 + x - 3$ b) $-2x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1$
c) $x^6 + 4x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
d) $-4x^6 + 2x^5 - 2\left(\sqrt{2} + 1\right)x^4 + \sqrt{2}x^3 - \left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x + 1$
e) $\sqrt{3}x^6 + \sqrt{2}x^5 - 3\sqrt{3}x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{6}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$ f) $2x^6 + 2x^5 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - 1$
2.10. a) $-2x^3 + 10x^2 - 10x + 11$ b) $-2x^3 + 5x + 10$ c) $-x^3 - 15x - 2$ d) $-2x^3 - 8x^2 + 19x + 10$
e) $x^3 - 6x^2 + 28x + 3$ f) $-14x^2 + 7x - 7$ **2.11.** a) $5x^3 - 18x^2 + 15x - 6$
b) $4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 15x - 21$ c) $-x^3 + 5x^2 - 14x + 6$ d) $3x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 - x - 6$
e) $-12x^4 + 58x^3 - 93x^2 + 61x - 3$ f) $6x^6 - 25x^5 + 48x^4 - 40x^3 - 20x^2 + 45x - 9$
2.12. $Q(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 11$ **2.13.** $a = 1,\ b = 2$ **2.14.** a) tak: $a = 3,\ b = -4$ b) nie c) nie **2.15.** $a = 4,\ b = -2$ **2.16.** $W(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\left(2x^2 - x + 4\right)$ **2.17.** np. $W(x) = 3x^5$, $Q(x) = -3x^5 + 2x^3 - 1$ **2.18.** np. $W(x) = 5x^3 - 7x^2 + 6,\ P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 2$
2.20. a) Dla $a = 1$ i $b = 1$ stopień jest równy 0, dla $a = -b + 2$ i $b \neq 1$ stopień jest równy 2, dla $a \neq -b + 2$ i $b \in \mathbf{R}$ stopień jest równy 3. b) Dla $a = -4$ i $b = 4$ stopień jest równy 1, dla $a = -b$ i $b \neq 4$ stopień jest równy 2, dla $a \neq -b$ i $b \in \mathbf{R}$ stopień jest równy 3.

2.21. $W(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)\left(x^2 + 2x + 5\right)$ **2.22.** *Wskazówka*: Zauważ, że suma współczynników wielomianu jest równa wartości tego wielomianu dla $x = 1$. a) 3 b) −2 c) −2 d) 0

s. 102

1. F, P, F **2.** $-4x^3 - 12x^2 - 25x + 29$ **4.** $a = -1,\ b = 2$ **5.** $a = -4,\ b = 5$

s. 105

3.1. D **3.2.** D **3.3.** C **3.4.** a) $x^{21},\ 8y^{15},\ -x^{21},\ 16x^{12}$ b) $x^2 - 8x + 16$, $x^2 - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 3 - 2\sqrt{2},\ x^2 + 2\left(3 - \sqrt{3}\right)x + 6\left(2 - \sqrt{3}\right)$ c) $18x^2 - 24x + 8,\ 3x^2 + 12x + 12,\ 63x^2$

3.5. a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1,\ 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27,\ 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
b) $64x^3 - 144x^2 + 108x - 27,\ 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64,\ 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$ c) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$, $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8,\ x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ d) $8x^6 - 60x^7 + 150x^8 - 125x^9,\ 27x^9 - 27x^6 + 9x^3 - 1$, $8x^9 - 60x^6 + 150x^3 - 125$ **3.6.** a) $-6x^3 + 18x - 15$ b) 0 c) $3x^3 - 10x^2 + 28x - 22$
d) $50x^3 - 29x^2 - 14x - 17$ e) $3x^4 - 2x^3 + 3x^2$ f) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ g) $-12x^5 - 16x^3$ h) 0
3.7. a) $(2x - 3)\left(4x^2 + 6x + 9\right)$ b) $(5 + x)\left(25 - 5x + x^2\right)$ c) $x^3(4x - 1)\left(16x^2 + 4x + 1\right)$
d) $-2\left(3x^2 + 1\right)$ e) $9x\left(x^2 - 3x + 9\right)$ f) $2(x - 4)\left(49x^2 + 16x + 19\right)$
3.8. a) $5x^4 - 22x^3 + 56x^2 - 7x + 2$ b) $-2x^4 - 4x^3 + 22x^2 - 4x + 5$ c) $13x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 10x + 18$
d) $-x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$ e) $5x^4 - 26x^3 - 34x^2 - 8x$ f) $8x^3 - 20x^2 + 8x + 6$
3.9. a) $W(x) = 3x^2 - 4,\ W\left(\sqrt{3}\right) = 5$ b) $W(x) = -x + 1,\ W\left(1 - \sqrt{7}\right) = \sqrt{7}$ c) $W(x) = 12x - 4$, $W\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{10} + 4}\right) = 2\left(2 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right)$ **3.10.** a) $W(x) = x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 11x + 5$, $W\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{16}$ b) $W(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x - 35,\ W\left(-\sqrt{2}\right) = -41$ c) $W(x) = 3x^4 + 6x^2 - 8$, $W\left(\sqrt{3}\right) = 37$ **3.11.** $a = -2,\ b = -18$ **3.12.** $b = -3,\ c = 2$ **3.13.** a) $10 + 6\sqrt{3}$
b) $11\sqrt{5} - 17\sqrt{2}$ c) $43\sqrt{7} + 66\sqrt{3}$ d) $25 - 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4}$
3.14. $2021^3 - 2018^3 = (2021 - 2018)\left(2021^2 + 2021 \cdot 2018 + 2018^2\right) = 3\left(2021^2 + 2021 \cdot 2018 + 2018^2\right)$
3.18. *Wskazówka*: Przedstaw wyrażenie pod pierwiastkiem jako sumę czterech składników i skorzystaj ze wzoru na sześcian sumy.

s. 107

1. F, P, P **2.** $-x^3 + 9x^2 - 10x + 3,\ 48 + 15\sqrt{5}$ **3.** $a = -3,\ b = 6,\ c = 9$ **4.** 18

s. 118

4.1. B **4.2.** C **4.3.** C **4.4.** a) −5, 2, 7 b) 0,2; 0,4 c) $-1\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ d) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{1}{5}$, 0, $2\frac{1}{2}$ f) −6, −1, 0 **4.5.** a) −1, 1, 3 b) −5, 3 c) −4, 0, 2, 3 d) −3, 2 e) −3, 3 f) $-1\frac{1}{2}$, −1, 2
g) −3, 2, 3 h) −10, −1, 3 **4.6.** a) np. $(x + 2)(x - 5)(x - 1)$ b) np. $(x + 3)(x + 2)^2(x - 2x)$
c) np. $2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)(x - 4)\left(x + \sqrt{7}\right)$ d) np. $5(x - 3)(x + 1)\left(x - \frac{2}{5}\right)$ **4.7.** np.:
$7\left(x - \sqrt{7}\right)(x - 4)(x + 2)(x + 5),\ \left(x - \sqrt{7}\right)^2(x - 4)(x + 2)(x + 5),\ \left(x - \sqrt{7}\right)(x - 4)^4(x + 2)(x + 5)^5$

4.8. a) np. $8(x+7)(x+2)(x-1)$ b) np. $x^2(x-4)$ c) np. $(x+3)(x-3)^2$ d) np. $3(x-3)^3$
4.9. a) np. $(x-3)(x-5)(x-7)$ b) np. $(x-11)(x-17)$
c) np. $\left(x^2-1\right)\left(x^2-8\right)$ d) np. $x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$ **4.10.** np. $\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{5}{2}x+6$
4.11. $a_2=-2,\ a_0=6$ **4.12.** np. $W(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$ **4.13.** a) $W(x)=x^2(x-2)$
b) $W(x)=3x(x-1)$ c) $W(x)=-7x^2(x-2)$ d) $W(x)=x(x+2)(x-2)$ e) $W(x)=-3x^2(x-9)$
f) $W(x)=-x^2(x-4)$ **4.14.** a) $P(x)=2x(x-2)(x+3)$ b) $P(x)=x\left(7x^2+2x+1\right)$
c) $P(x)=0{,}5x(x-2)(x-3)$ d) $P(x)=5\pi x^2(x+1)(x-3)$ e) $P(x)=0{,}2x^3(x-2)(x+5)$
f) $P(x)=-x(x-1)(x-2)$ **4.15.** a) $W(x)=(x-2)^3$ b) $W(x)=(2x-3)^3$ c) $W(x)=(5+x)^3$
d) $W(x)=2(x+2)^3$ e) $W(x)=-3(x+3)^3$ f) $W(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$
4.16. a) $Q(x)=(x-1)\left(x^2+1\right)$ b) $Q(x)=(x-5)(x-2)(x+2)$ c) $Q(x)=(2x-5)(2x-3)(2x+3)$
d) $Q(x)=(5x-3)\left(1\frac{1}{2}x-2\right)\left(1\frac{1}{2}x+2\right)$ e) $Q(x)=\frac{1}{2}(7x+1)\left(2x-\sqrt{6}\right)\left(2x+\sqrt{6}\right)$
f) $Q(x)=2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(3x+\sqrt{2}\right)$ g) $Q(x)=\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(x^2+4\right)$
h) $Q(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{3}\right)$ **4.17.** a) $Q(x)=(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$
b) $Q(x)=(x-2)^2(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)$ c) $Q(x)=(3x+2)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$
d) $Q(x)=(x-2)^2\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$

4.18.

	czynnik	czynnik	czynnik	iloczyn
czynnik	x	x	$x+1$	x^3+x^2
czynnik	$x-2$	$x+3$	$x-3$	$x^3-2x^2-9x+18$
iloczyn	x^3-2x^2	x^3+6x^2+9x	x^3-7x-6	

4.19. a) $x=0$ lub $x=-5$ b) $x=0$ lub $x=-3$ c) $x=0$ lub $x=3$ d) $x=0$ lub $x=4$
e) $x=0$ lub $x=-3$ f) $x=0$ lub $x=-7$ g) $x=-3$ lub $x=0$ lub $x=\frac{1}{2}$ h) $x=-\sqrt{2}$ lub $x=0$
lub $x=3\sqrt{2}$ **4.20.** a) $x=-3$ b) $x=-2\frac{1}{2}$ lub $x=-1$ lub $x=2\frac{1}{2}$ c) $x=2$ d) $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
e) $x=\frac{2}{3}$ f) $x=-\sqrt{2}$ lub $x=-2$ lub $x=0$ lub $x=2$ **4.21.** a) $x=3$ b) $x=-4$ lub $x=-\sqrt{3}$
lub $x=\sqrt{3}$ c) $x=-3$ lub $x=4$ d) $x=-2$ lub $x=-\frac{3}{2}$ lub $x=\frac{13}{5}$
4.22. a) $W(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$ b) $W(x)=(x+1)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$
c) $W(x)=(x+4)(x+1)(x-5)$ d) $W(x)=(x-1)\left(x-\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}\right)$
4.23. a) $x=-4$ lub $x=1$ lub $x=3$ b) $x=-11$ lub $x=1$ lub $x=10$ c) $x=-1$ d) $x=1$ lub
$x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ lub $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ **4.24.** a) $W(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$
b) $W(x)=(x+3)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-3)$ c) $W(x)=(x-1)(x+1)\left(x^2+13\right)$
d) $W(x)=-2\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)$ e) $W(x)=4\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)$

f) $W(x) = -36\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{9}{4}\right)$ **4.25.** a) $W(x) = (x+2)^2(x+1)(x+3)$
b) $W(x) = (x-1)(x-5)\left(x-3-\sqrt{10}\right)\left(x-3+\sqrt{10}\right)$ c) $W(x) = (x+1)(x-2)\left(x^2-x+10\right)$
d) $W(x) = 2\left(x - \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$ **4.26.** a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ b) $x = -4$ lub $x = -1$ lub $x = 2$ c) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 2$ d) $x = -2$ lub $x = -1$ **4.27.** 7 i 11 **4.28.** 3, 4 i 5 **4.29.** $m = 3$, $n = -12$, $x = -2$ **4.30.** tak, $a = 6$, $b = 3$, $c = -2$ **4.31.** $-3, 3, 5$ **4.33.** *Wskazówka*: $W(x) = (x+5)(x+3)(x-3)$, więc dla każdej liczby nieparzystej wartość wielomianu jest iloczynem trzech liczb parzystych.
4.34. a) $W(x) = \left(x^2 - \sqrt{6}x + 3\right)\left(x^2 + \sqrt{6}x + 3\right)$ b) $W(x) = \left(4x^2 - 2\sqrt{2}x + 1\right)\left(4x^2 + 2\sqrt{2}x + 1\right)$
c) $W(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$ d) $W(x) = \left(x^2 - \sqrt{3}x + 3\right)\left(x^2 + \sqrt{3}x + 3\right)$

s. 122

1. F, F, P **2.** $W(x) = 2x(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ **3.** $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \sqrt{5}$ **4.** 1
5. $a = -3$, $b = 3$

s. 129

5.1. C **5.2.** B **5.3.** C **5.4.** P, F, P **5.5.** a) $x^2 + 3x - 4$ b) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
c) $5x^3 + x^2 - 4x + 1$ d) $3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$ **5.6.** a) $x + 5$ b) $x^2 - 3$ c) $x^2 + 3x + 2$
d) $x^2 - x + 2$ **5.7.** $x + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
5.8. a) $W(x) = (x+1)\left(3x^2 + 2x\right) + 7$ b) $W(x) = \left(x^2 + x + 3\right)(x-3) + x + 8$
c) $W(x) = \left(x^2 - 3x - 1\right)(2x+5) + 2$ d) $W(x) = \left(x^2 + x + 3\right)\left(2x^2 - x + 1\right) - 10x$
5.9. wielomianem stopnia drugiego, pierwszego, zerowego lub wielomianem zerowym
5.10. $2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ **5.11.** $3x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 5x - 6$ **5.12.** np. $5x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 3x - 1$
5.13. np. $x^3 + x^2 - 2x - 8$ **5.14.** np. $x^3 + 2x^2 - 19x - 20$ **5.15.** a) -15 b) -17 c) 49
d) 2^{999} **5.17.** a) $m = 1$ b) $m = -3$ c) $m = 4$ d) $m = 1$ **5.18.** a) $m = -1$ b) $m = -2$
c) $m = 5$ d) $m = 7$ e) $m = 3$ **5.19.** $a = -2$ lub $a = 2$ **5.20.** $a = 5$, $b = -4$
5.22. a) $a = 1$, $b = 2$ b) $a = 3$, $b = -1$ c) $a = 1$, $b = 2$ d) $a = 2$, $b = -3$ e) $a = 5$, $b = 4$
f) $a = 1$, $b = 1$ **5.23.** a) $a = 2$, $b = 5$ b) $a = 1$, $b = -1$ c) $a = 4$, $b = 5$ d) $a = -1$, $b = 4$
5.24. $12x - 9$ **5.25.** $20x + 38$ **5.26.** $4x + 7$

s. 132

1. P, P, P **2.** $3x^3 - x^2 - 12x + 4$ **3.** $W(x) = -x^5 + x^3 - 4x^2$ **5.** $m = 2$

s. 141

6.1. C **6.2.** B **6.3.** B **6.4.** P, P, P **6.5.** P, P, P **6.6.** a) $x^2 - 2x + 3$ b) $2x^2 - 9x + 6$
c) $-3x^2 + 7x - 16$ d) $x^2 + 5x + 2$ e) $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ **6.7.** a) -3, 1
b) -2, $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$, 1 d) $\frac{3}{2}$ **6.8.** -3, 3 **6.9.** $m = -5$, $k = 30$; $-\frac{5}{2}$ **6.10.** $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
6.11. a) $x = -2$ lub $x = 1$ b) $x = 1$ c) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 3$ d) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 3$ e) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = 1$ lub $x = 2$ f) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ **6.12.** a) np. $(x+3)(x+2)(2x-1)(x-1) = 0$ b) np. $(x+1)(3x-1)(6x-3) = 0$ c) np. $x(x+1)(3x-2)(x-2) = 0$
d) np. $(4x-2)(10x-4)(x-7) = 0$ **6.13.** a) $x = 1$ lub $x = 2$ b) $x = -3$ lub $x = 2$ c) $x = 4$
d) $x = 3$ **6.14.** a) $x = 1$ lub $x = 3$ lub $x = 4$ b) $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 5$ c) $x = -2$ lub $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d) $x = -4$ lub $x = 2$ lub $x = 5$ **6.15.** a) $x = -7$ lub $x = -3$ lub

$x = -1$ lub $x = 0$ b) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 4$ c) $x = -4$ lub $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$
d) $x = -1$ lub $x = 7$ e) $x = -1$ lub $x = 5$ lub $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ f) $x = -1$ lub $x = 2$
6.16. a) $x = -3$ lub $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{1}{7}$ lub $x = \frac{1}{3}$ c) $x = -\frac{2}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{2}$
d) $x = -2$ lub $x = 4$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ **6.17.** a) $m = 1$, $x = -3$ lub $x = 2$ lub $x = 3$
b) $m = -1$, $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = 4$ c) $m = 2$, $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 2$ d) $m = -2$, $x = -1$ lub $x = 4$ **6.18.** a) dwukrotny b) trzykrotny c) trzykrotny d) jednokrotny
6.19. a) $m = 3$ b) $m = 7$ c) $m = 2$ d) $m = -3$ **6.20.** $a = 8$, $b = -4$ **6.21.** $m = 2$
6.22. a) $a = 1$, $b = -1$ b) $a = -2$, $b = 1$ **6.24.** $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$ **6.25.** $m \in \{-8, -6, -2, 4\}$
6.26. $a = -4$ lub $a = 2$ **6.28.** 2, 4, 8 **6.29.** $m = 2$ **6.30.** $m = -8$ lub $m = -2$

s. 144

1. F, P, P **2.** $x = -1$ lub $x = -2$ lub $x = 3$ **3.** $a = 1$ **4.** $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ **5.** $k = -3$

s. 151

7.1. F, F, P **7.2.** F, F, F **7.3.** P, P, F **7.4.** P, F, P **7.5.** a) $x \in (1; 2) \cup (3; \infty)$
b) $x \in \langle -3; -2\rangle \cup \langle 4; \infty)$ c) $x \in (-\infty; -6) \cup (1; 4)$ d) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -3; 5\rangle$
e) $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle -1; 1\rangle$ f) $x \in (-8; -4) \cup (0; 6)$ g) $x \in \langle -9; 0\rangle \cup \langle 1; 7\rangle$
h) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -3; 1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ **7.6.** a) $x \in (-6; \infty) - \{3\}$ b) $x \in (-\infty; -5)$
c) $x \in \langle 2; \infty) \cup \{-1\}$ d) $x \in (-\infty; 4\rangle$ e) $x \in \mathbf{R}$ f) $x \in \{-1, 2\}$ g) $x \in (-3; 5) \cup (5; \infty)$
h) $x \in (0; 8)$ **7.7.** a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 0; 3\rangle$ c) $x \in (-1; 1)$
d) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ e) $x \in \{0, 1\}$ f) $x \in \langle 0; \infty) \cup \{-3\}$ g) brak rozwiązań h) $x \in \mathbf{R}$
7.8. a) $x \in (-3; -1) \cup (1; \infty)$ b) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 5)$ c) $x \in \langle -7; \infty)$ d) $x \in (-\infty; 3)$
e) $x \in \langle 2; \infty) \cup \{-2\}$ f) $x \in \langle 1; \infty)$ g) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \{3\}$ h) $x \in \langle 4; \infty)$
7.9. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 5)$ b) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 7)$ c) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; 8\rangle$
d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 3)$ e) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 6)$ f) $x \in \langle -7; -4\rangle \cup \langle 3; \infty)$
g) $x \in (-1; 1) \cup (9; \infty)$ h) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 3)$ **7.10.** a) $x \in (0; 1) \cup (4; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 2)$ c) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \{0\}$ d) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 0; 3\rangle$ e) $x \in (-\infty; 3\rangle$
f) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$ g) $x \in (-\infty; 1)$ h) $x \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ **7.11.** a) $x \in (-4; 1) \cup (5; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -7) \cup (2; 3)$ c) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 4\rangle$ d) $x \in (2; \infty)$ e) $x \in \langle -4; \infty)$
f) $x \in (-\infty; 2\rangle$ **7.12.** a) $x \in \left(\frac{-5-\sqrt{53}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{53}}{2}; \infty\right)$ b) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{0\}$
c) $x \in \langle -3; 0\rangle \cup \langle 3; \infty)$ d) $x \in (0; \infty)$ e) $x \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup (3; \infty)$ f) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right\rangle \cup \left\langle -1; \sqrt{5}\right\rangle$
7.13. a) $D = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$ b) $D = \langle 0; \infty)$ c) $D = \langle -3; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$
d) $D = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$ e) $D = (-4; 0) \cup (4; \infty)$ f) $D = (-2; \infty) - \{1\}$ **7.14.** a) $b = -4$, $c = 3$
b) $b = -4$, $c = 4$ c) $c > \frac{b^2}{4}$ (np. $b = -4$ i $c = 5$) lub $c = \frac{b^2}{4}$ i $b \geqslant 6$ (np. $b = 6$ i $c = 9$) d) Nie ma takich b i c. **7.15.** a) $x \in \left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup (0; 1) \cup \left(1; \sqrt{3}\right)$ b) $x \in \left\langle -\sqrt{3}; -\sqrt{2}\right\rangle \cup \langle -1; 1\rangle \cup \left\langle \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\rangle$
c) $x \in \langle -2; 2\rangle$ d) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ e) $x \in (-1; 4)$ f) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -1; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$
7.16. a) brak rozwiązań b) $x \in \langle 4; 5)$ c) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3)$ d) $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 1\right) \cup \langle 4; 5\rangle$
e) $x \in (-3; 0)$ f) $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 3)$ **7.17.** a) np. $(x-2)(x-3)(x-4) > 0$
b) np. $x(x+3)(x+2)(x-1) > 0$ c) np. $(x+3)(x+1)^2(x-2)^3 \geqslant 0$
d) np. $(x+3)(x+2)^2(x-1)^2(x-2) < 0$ **7.18.** a) $x \in \langle -2; 2\rangle$ b) $x \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty)$
c) $x \in (-2; 0)$. *Wskazówka*: Podstaw $t = x^2 + 2x + 2$. **7.19.** $k = -15$

7.23. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; \infty)$ **7.24.** *Wskazówka*: Jeśli $W(x) = x^{2n} + x - 27$, to dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi $W(0) < 0$.

s. 154

1. F, P, P **2.** $x \in \left\langle -2\frac{1}{3}; \sqrt{2} \right\rangle \cup (2; \infty)$ **3.** $x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$

4. np. $(x+2)(1-x)^2(x-3) < 0$ **5.** *Wskazówka*: Podstaw $t = x^2$.

s. 159

8.1. C **8.2.** D **8.3.** C **8.4.** F, P, P **8.5.** F, F, F **8.6.** a) 3 b) 9 c) 4 d) 7 **8.7.** a) 4 b) 9 c) 10 d) 5 **8.8.** a) $xy^3 - x^2y + 5xy - 4x + 1$ b) 0 c) $2abc + 3$ d) x^2yz^2 e) $x^2y - xy$ f) $3xy - 2x^2ytz^2$ **8.9.** a) 43 b) −33 c) 3 d) 29 **8.10.** a) xy b) $3y^2 + 4xy$ c) $2x^2y - 2x^2y^2 - xy^2 + 6xy + 3y + x + 3$ d) $x^3y^3 + 3x^2y^2 + 3xy - 3xy^2 - y^2 + 1$ e) $x^2 - 2xy$ f) $3x^2 + 4xy^2$ g) $x^2 - xy$ h) $3x^2 + y^2$ i) $x^2 - 3xy$ j) $4y^2$ k) $x + 3y - xy - 2$ l) $2x - x^2 - 4$ **8.11.** a) $4xy$, 16 b) $-2x^2 + 4xy$, −1,5 c) $-x^3y^2$, 9 **8.12.** a) $2(x+y)^2$ b) $2(x-y)(2-3x-3y)$ c) $\left(x^2+y^2\right)(3y-x)$ d) $(4-x-3y)(4+x+3y)$ e) $(5x-y-2xy)(5x-y+2xy)$ f) $(x-5y)(x-3y)$ g) $(y+2x)(y+8x)$ h) $(x+y)(3x+y)$

8.14. $\frac{k-s}{k}$ **8.15.** $\frac{a-b}{a}$ **8.16.** $\frac{bm-at-bt}{a}$ **8.17.** o $\frac{k}{24}$ zł **8.18.** $\frac{x}{x+y}$ **8.19.** $\frac{nk-r}{n}$ zł

8.20. a) -1, $a \neq 1$; $\frac{3}{a}$, $a \neq 0$, $a \neq 2b$; $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $b \neq \frac{2}{3}a$; $\frac{2x-3y}{x^2}$, $x \neq 0$, $x \neq -\frac{3}{2}y$ b) $-\frac{1}{2}$, $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{x^2-1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$; $\frac{x-4}{2x-1}$, $x \neq -2$, $x \neq \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$, $x \neq 2$; $\frac{x^2}{2}$, $x \neq \frac{2}{3}$, $x \neq 5$; $\frac{x+3}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ d) $\frac{x^2+3x+9}{x}$, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$; $\frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$ **8.21.** a) $5x^2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ b) $5x^2 + 5x$, $x \neq -1$, $x \neq 1$ c) $x^3 + x^2 + x$, $x \neq 1$ d) $2x^2 - 2x$, $x \neq 1$ **8.22.** a) $\frac{3x+6}{6(x-2)}$, $\frac{2x+2}{6(x-2)}$, $x \neq 2$ b) $\frac{x-1}{2(x-3)^2}$, $\frac{10x-30}{2(x-3)^2}$, $x \neq 3$ c) $\frac{2x^2-5x+3}{5(x+1)(2x-3)}$, $\frac{5x-15}{5(x+1)(2x-3)}$, $x \neq -1$, $x \neq 1\frac{1}{2}$ d) $\frac{x^2}{x^2(x^2-1)}$, $\frac{2x^2+2x}{x^2(x^2-1)}$, $\frac{3x-3}{x^2(x^2-1)}$, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ e) $\frac{4x+8}{6(x+2)^2(x-2)}$, $\frac{15x-30}{6(x+2)^2(x-2)}$, $x \neq -2$, $x \neq 2$ f) $\frac{x\left(x^3+1\right)}{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}$, $\frac{2x\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}$, $\frac{3x\left(x^3-1\right)}{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$

8.23. $a = -3$, $b = 4$ lub $a = 4$, $b = -3$ **8.24.** $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ lub $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ lub $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ lub $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ lub $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$ lub $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

8.25. 8 par **8.26.** (4, 33), (5, 14) **8.27.** $x = 1$, $y = 3$ lub $x = 2$, $y = 2$ lub $x = 3$, $y = 1$

8.28. *Wskazówka*: $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = (2x + y - 1)^2$ **8.29.** $x = 2$, $y = 2$ lub $x = 5$, $y = 1$. *Wskazówka*: Zastosuj wzór na sześcian sumy.

s. 163

1. P, F, P **2.** $\frac{3x-2}{2x-3}$, $x \neq -1\frac{1}{2}$, $x \neq 1\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{s+pc}{m+c}$ kg **4.** $a = 1$, $b = -1$ dla $x \neq 1$

s. 167

9.1. D **9.2.** B **9.3.** B **9.4.** P, P, F **9.5.** a) 1, $x \neq -\frac{3}{2}$ b) $\frac{x+5}{3x}$, $x \neq 0$ c) $\frac{8x-1}{6(x+1)}$, $x \neq -1$ d) $\frac{x^2+10x-25}{x(x-5)}$, $x \neq 0$, $x \neq 5$ **9.6.** a) $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$ b) $\frac{-4x+39}{(x-7)(x+4)}$, $x \neq -4$, $x \neq 7$ c) $\frac{8x}{4x^2-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$ d) $\frac{x+1}{6x^2}$, $x \neq 0$ **9.7.** a) $\frac{2x-7}{x-3}$, $x \neq 3$ b) $\frac{5x+3}{3x-1}$, $x \neq \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2x-7}$, $x \neq 3\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{3(3x-1)}$, $x \neq \frac{1}{3}$ e) $\frac{7x+1}{4(x-1)^2}$, $x \neq 1$ f) $\frac{x^2+11x-6}{6x(x-2)(x+2)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$ g) $\frac{2x}{(x+3)(x-3)^2}$, $x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$ h) $\frac{x+32}{2(x-4)(x+4)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$

9.8. a) $\frac{7x+4}{6(x+1)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ b) $\frac{14x+1}{4x^2-1}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\frac{14x^2-x-5}{5x^2(x+1)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ d) $\frac{6x}{x^2-1}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ e) $\frac{1}{5x-3}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\}$ f) $\frac{-x}{x-3}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 3\}$ g) $\frac{x^2-8}{4x(x-8)(x+2)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 8\}$ h) $\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

9.9. a) $\frac{18x-21}{4(2x-1)(2x+1)(x-2)(x-1)}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ b) $\frac{5}{x^2-9}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-3, \frac{1}{2}, 3\right\}$

9.10. a) $a = 3$, $b = -4$ b) $a = 2$, $b = 1$ c) $a = -2$, $b = 2$ d) $a = 5$, $b = 1$ **9.11.** a) $\frac{x-1}{6x}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 0\}$ b) $\frac{x}{6}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-2, \frac{3}{5}\right\}$ c) $\frac{1-2x}{3}$, $x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$ d) $\frac{2x-7}{2(x+3)}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-3, 0, 1\frac{2}{3}\right\}$ e) $\frac{x+1}{x-2}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-3, -2, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ f) $\frac{x-3}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} - \{-3, 0, 1, 2\}$

9.12. a) $\frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$, $x \neq 5$ b) $\frac{3x}{5}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$ c) $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}$, $x \neq -2$, $x \neq 2$ d) $x^2 - 9$, $x \neq -5$, $x \neq 2$, $x \neq 3$ **9.13.** a) $\frac{x-2}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, -1, 1\}$ b) $3x$, $x \in \mathbf{R} - \{0, 1, 2, 3\}$ c) $\frac{5}{72}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$ d) $\frac{2}{x+5}$, $x \in \mathbf{R} - \{-5, -1, 0, 1\}$ **9.14.** a) 2, $x \in \mathbf{R} - \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $\frac{-8(6x+1)}{3(2x-1)}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\frac{-x-1}{3}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ d) $\frac{-2x}{5x+1}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

9.15. a) $\frac{8x-4}{x+5}$, $x \neq -5$, $x \neq 2$ b) 1, $x \neq -7$, $x \neq -1$, $x \neq 7$ c) $\frac{x+1}{x+2}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 0$ d) $2 - x$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ **9.16.** a) = b) ≠ c) ≠ d) = e) = f) = **9.17.** $\frac{x}{x-3a}$, $x \neq -2a$, $x \neq -a$, $x \neq 3a$

s. 170

1. P, F, P **2.** $\frac{x+2}{12(x+1)}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$ **3.** $\frac{x-1}{x+4}$, $x \neq -4$, $x \neq -3$, $x \neq 4$ **4.** 6, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ **5.** $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$

s. 176

10.1. B **10.2.** D **10.3.** A **10.4.** F, P, P **10.5.** F, F, P **10.6.** a) $x = 7$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{19}{11}$ d) brak rozwiązań e) $x = 1$ f) $x = \frac{3}{2}$ **10.7.** a) $x = -\frac{2}{3}$ b) $x = -5\frac{1}{2}$ lub $x = 5$ c) $x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ d) $x = \frac{2}{3}$ e) $x = \frac{1}{8}$ lub $x = 1$ f) $x = 0$ lub $x = 3$ g) $x = -2$ lub $x = 1$ h) brak rozwiązań **10.8.** a) $x = 0$ b) $x = -1$ c) brak rozwiązań d) $x = -4$ e) $x = -3$ f) $x = -5$ **10.9.** a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) brak rozwiązań d) $x = 3$ e) $x = -1$ lub $x = 1$ f) $x = 0$

10.10. a) $M = \frac{Fr^2}{Gm}$ b) $I = \frac{mg}{Bl}$ c) $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ d) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ e) $R = \frac{qr}{4\pi\varepsilon kr + q}$
f) $m = \frac{2E}{2gh + v^2}$ **10.11.** a) $x = 0$ b) $x = -7$ lub $x = -1$ c) $x = 0$ lub $x = 4$ d) $x = 2$ lub $x = 6$
10.12. 4 zł **10.13.** 15 szklanek **10.14.** 57 km/h **10.15.** 96 km **10.16.** 78 km/h
10.17. 295 km **10.18.** alfa: 6 dni, beta: 10 dni, gamma: 15 dni **10.19.** stara: 24 godziny, nowa: 8 godzin **10.20.** 24 godziny **10.21.** gondolowy: 300, krzesełkowy: 200, orczykowy: 100

s. 179

1. F, P, P **2.** $x = -43$ **3.** $x = 2$ **4.** 12 pracowników **5.** 8 dni

s. 183

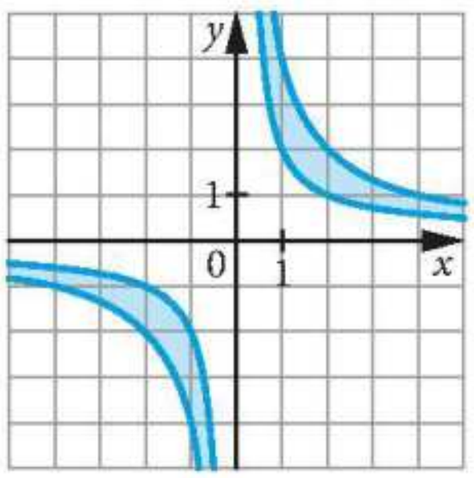
11.1. C **11.2.** B **11.3.** B **11.4.** F, P, P **11.5.** a) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{5}; \infty\right)$
b) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right\rangle \cup (0; \infty)$ c) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup (0; \infty)$ d) $x \in \left\langle -\sqrt{5}; 0\right)$ **11.6.** a) $(3; 7\rangle$
b) $x \in (-\infty; 4\rangle \cup (5; \infty)$ c) $x \in \left(-\frac{17}{10}; -\frac{3}{2}\right)$ d) $x \in \left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ **11.7.** a) $x \in \left(\frac{3}{2}; 5\right)$
b) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 9; \infty)$ c) $x \in \left(-\frac{5}{2}; \infty\right)$ d) $x \in \left\langle -\frac{5}{8}; -\frac{3}{5}\right)$ **11.8.** a) $x \in \langle -1; 1\rangle \cup (2; 3)$
b) $x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right\rangle$ c) $x \in (-1; 1)$ d) $x \in \left(-5; -2\frac{1}{2}\right) \cup (-2; 4)$ **11.9.** a) $x \in (-8; -6) \cup (-3; 7)$
b) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (8; \infty)$ c) $x \in (2; 3) \cup (5; 7\rangle \cup \langle 11; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1) \cup (1; \infty)$ **11.10.** a) $x \in (1; 3)$ b) $x \in \left(-2; -\frac{1}{4}\right) \cup (2; 4)$
c) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ d) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; 3)$ e) $x \in (1; \infty)$ f) $x \in (-4; -1) \cup (2; \infty)$
11.11. $x \in (3; 5\rangle \cup \{0\}$ **11.12.** a) $x \in \langle -2; 2\rangle - \{0\}$ b) $x \in (-2{,}5; 0{,}5) - \{-1\}$
c) $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$ d) $x \in \langle -2; 1\rangle$ **11.13.** $x \in (-2; -1\rangle$ **11.15.** $x \in (1; 5)$.
Wskazówka: Zauważ, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ spełniona jest nierówność $|x-3| + 1 > 0$, zatem nierówność można zapisać w postaci równoważnej $3 > (|x-3| - 1)(|x-3| + 1)$, a następnie podstaw $t = |x-3|$. **11.16.** -1 **11.17.** $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ **11.18.** $m \in \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{9}; 1\right)$
11.19. $m \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$ **11.20.** $m \in (-\infty; -1) \cup \left(1; 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}; \infty\right)$. *Wskazówka:* Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania i sprawdzeniu, jaką wartość m otrzymasz po podstawieniu do licznika liczby nienależącej do dziedziny. **11.21.** $m \in \left\{-6 - 4\sqrt{2}, -6 + 4\sqrt{2}, \frac{3}{5}\right\}$
11.22. $k \in \{-6, 0, 3\}$

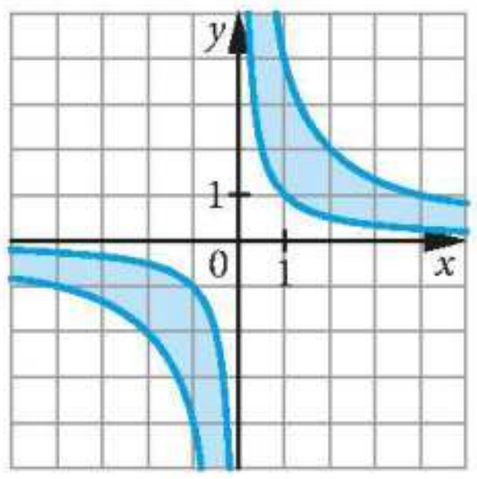
s. 185

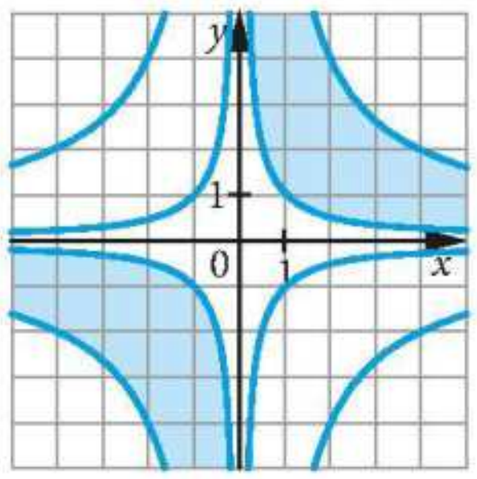
1. P, F, P **2.** $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ **3.** $x \in \langle -8; -1) \cup (-1; 0)$ **4.** $m \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
5. $m \in (-1; 0)$

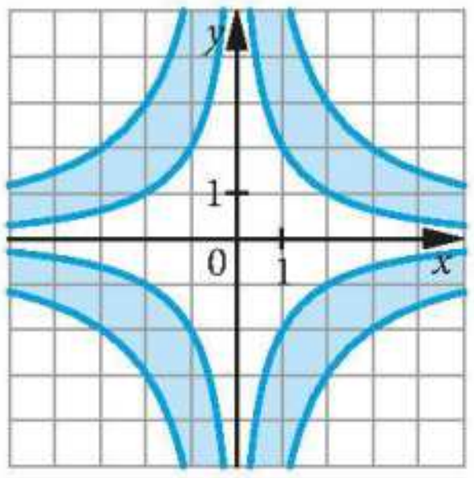
s. 187

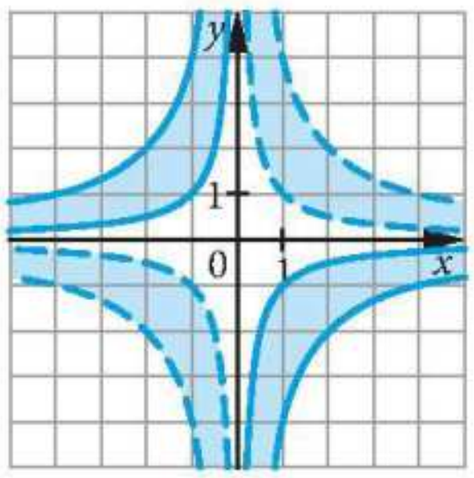
12.2. a) $a = -2$ b) $a = -3$ c) $a = -1$ d) $a = -1$

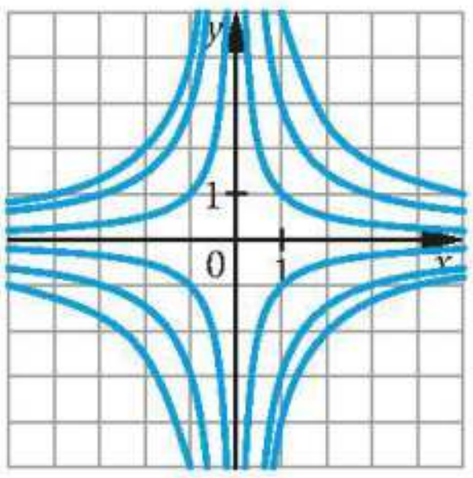
12.3. a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

12.4. a) (1, 4), (2, 2), (4, 1), (−1, −4), (−2, −2), (−4, −1) b) (1, −6), (2, −3), (3, −2), (6, −1), (−1, 6), (−2, 3), (−3, 2), (−6, 1) c) (1, −10), (2, −5), (5, −2), (10, −1), (−1, 10), (−2, 5), (−5, 2), (−10, 1) d) (1, 5), (5, 1), (−1, −5), (−5, −1) **12.5.** a) $x \in (0; 3\rangle$ b) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle$ c) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 4)$ d) $x \in (-2; 0)$

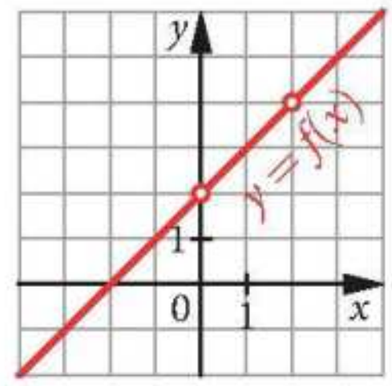
s. 195

13.1. C **13.2.** B **13.3.** D **13.4.** P, P, P **13.5.** $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$ (zob. rysunek poniżej)

13.6. a) $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$ b) $D = \mathbf{R}$ c) $D = \mathbf{R} - \{-1, 1, 2\}$ d) $D = \mathbf{R} - \{-1\}$ e) $D = \mathbf{R} - \{3\}$ f) $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 4\}$ **13.7.** a) np. $f(x) = \dfrac{2x-7}{(x^2+1)(x+2)}$

b) np. $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}$ c) np. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+2)(x-1)}$

d) np. $f(x) = \dfrac{10x-5}{(x+5)(x+2)(x-2)(x-5)}$

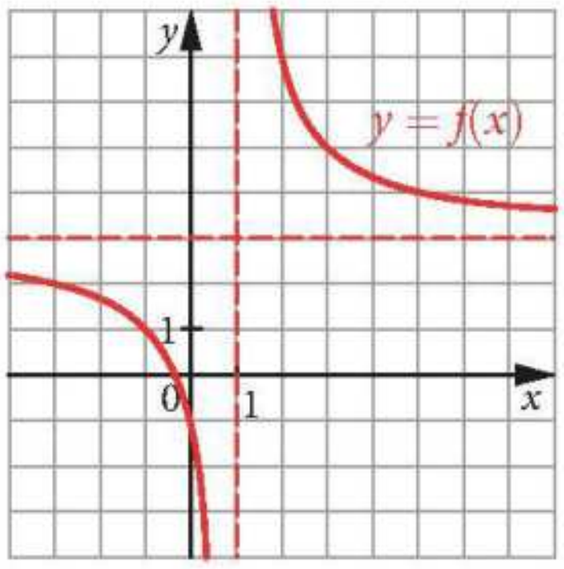


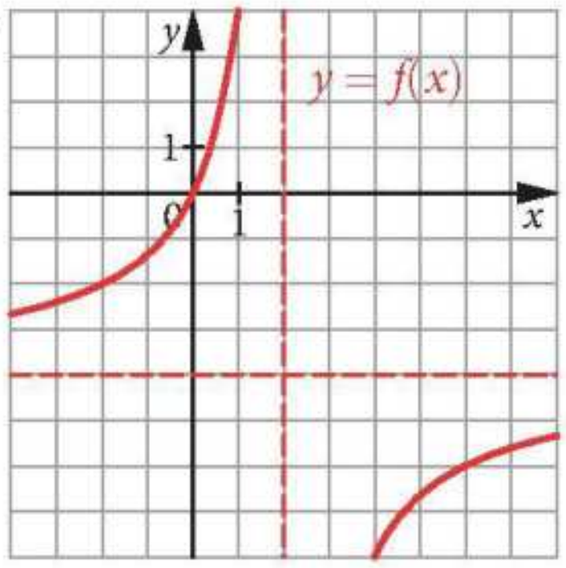
13.8. a) brak miejsc zerowych b) 0 c) 4 d) brak miejsc zerowych **13.9.** a) $x = -3\frac{2}{3}$

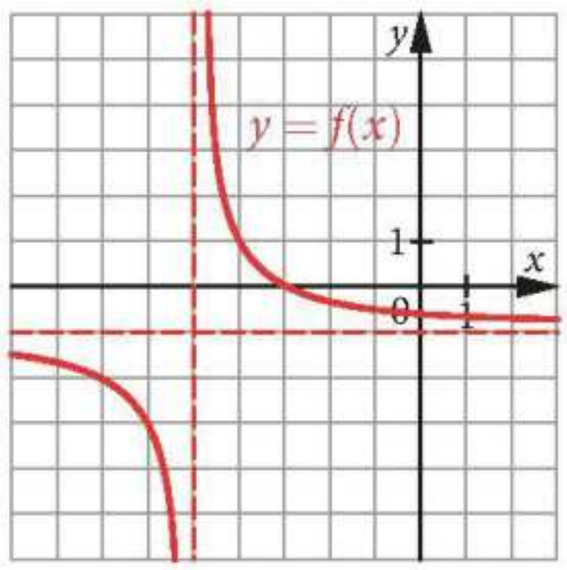
b) $x = 3,\ x = 1$ c) $x = -\frac{1}{2}$ d) Nie ma takich argumentów. **13.10.** a) $f(x) = \dfrac{-5}{x} + 3,\ x \neq 0$

b) $f(x) = \dfrac{15}{x-5} + 3,\ x \neq 5$ c) $f(x) = \dfrac{-1}{x-1} + 1,\ x \neq 1$ d) $f(x) = \dfrac{8}{x+3} + 4,\ x \neq -3$

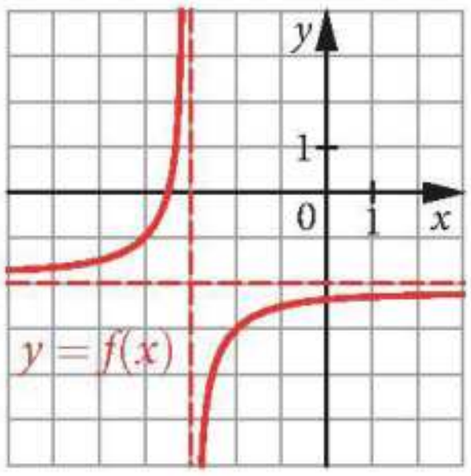
13.11.

a) 

b) 

c) 

d)

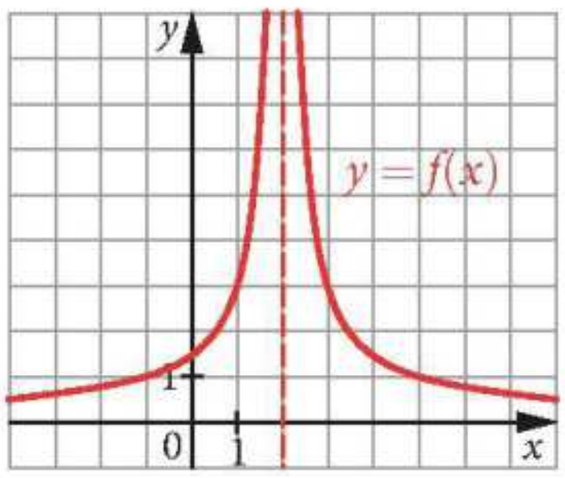


13.12. a) $x = -2,\ y = 11$ b) $x = -6,\ y = -8$

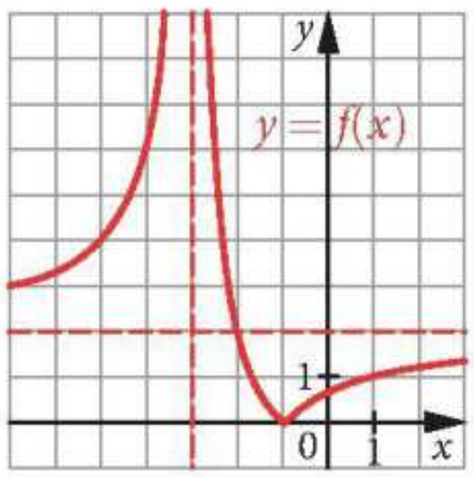
13.13. a) $D = \mathbf{R} - \{1\},\ ZW = \mathbf{R} - \{3\}$; miejsce zerowe: $\frac{4}{3}$;
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty;\ 1) \cup \left(\frac{4}{3};\ \infty\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(1;\ \frac{4}{3}\right)$;
funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;\ 1)$ i $(1;\ \infty)$;
asymptoty: $x = 1,\ y = 3$
b) $D = \mathbf{R} - \{3\},\ ZW = \mathbf{R} - \{2\}$; miejsce zerowe: 0;
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty;\ 0) \cup (3;\ \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0;\ 3)$;
funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;\ 3)$ i $(3;\ \infty)$;
asymptoty: $x = 3,\ y = 2$

13.14.

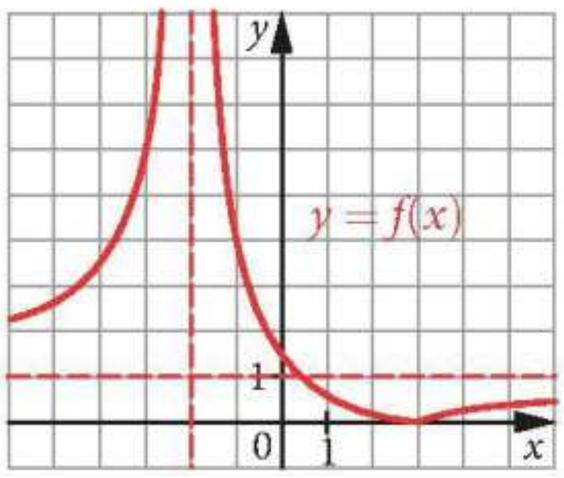
a)



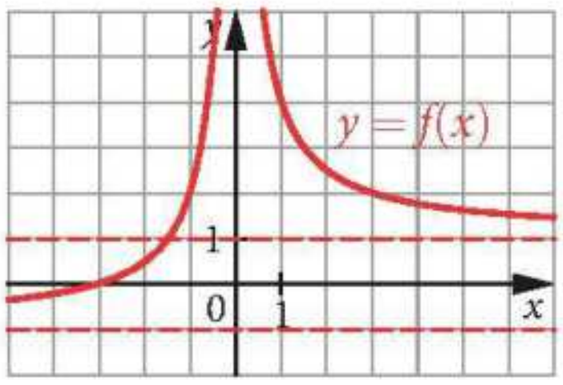
b)



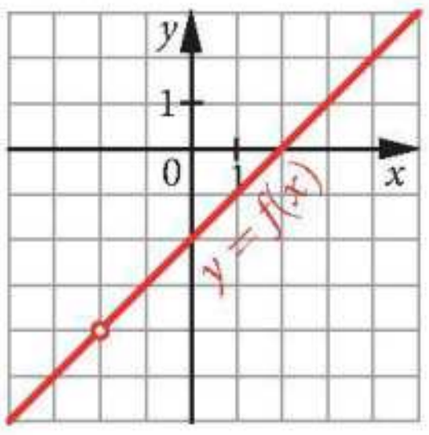
c)



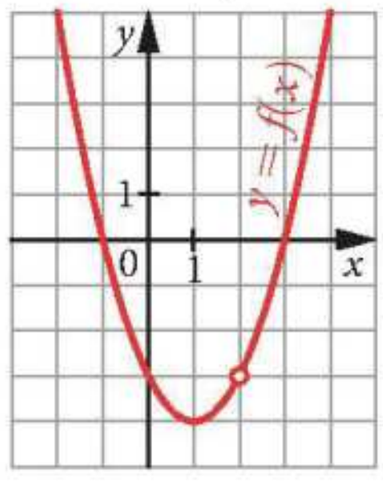
d)



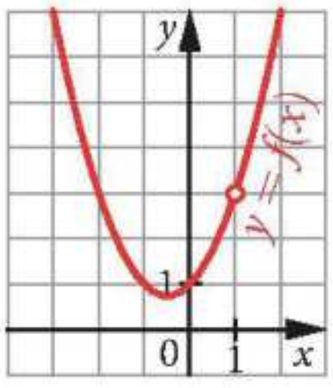
13.15. a) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$, miejsce zerowe: 2



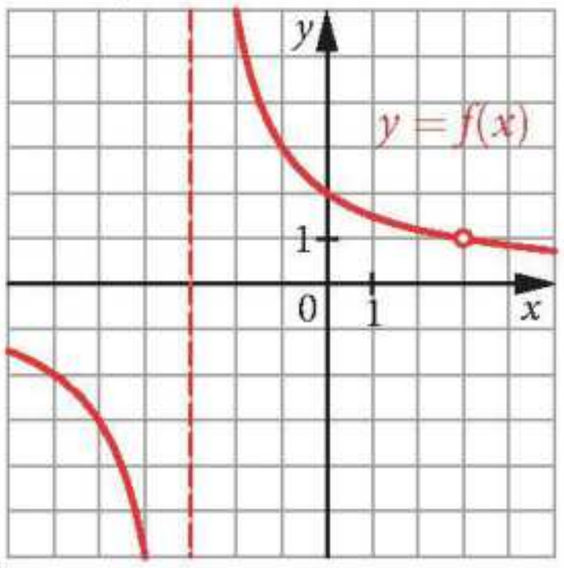
b) $D = \mathbf{R} - \{2\}$, miejsca zerowe: $-1, 3$



c) $D = \mathbf{R} - \{1\}$, brak miejsc zerowych



d) $D = \mathbf{R} - \{-3,\ 3\}$, brak miejsc zerowych



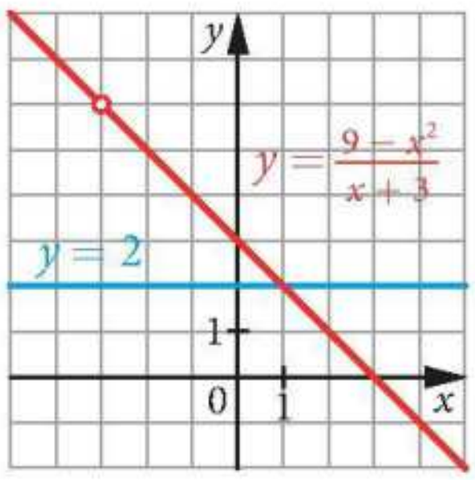
13.16. $D = \mathbf{R}$, $ZW = (0;\ 1\rangle$;
brak miejsc zerowych;
$f(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$;
funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 0\rangle$,
malejąca w przedziale $\langle 0;\ \infty)$.
Wskazówka: Zauważ, że $f(x) = f(-x)$.

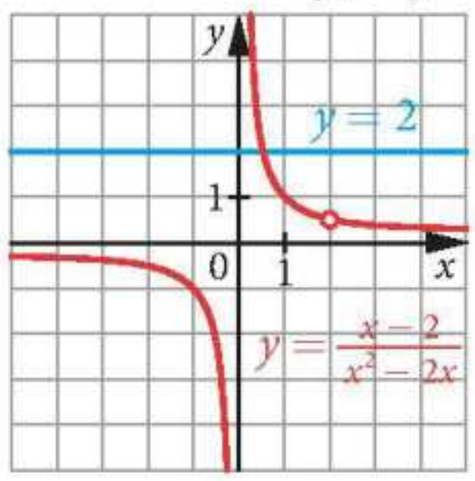
13.17. a) $x = -3,\ y = -1$ lub $x = 1,\ y = 3$ b) $x = -2,\ y = 0$ lub $x = -1,\ y = 2$ lub $x = 2,\ y = 8$

13.18. a) $x = 4,\ y = 2$ lub $x = -2,\ y = -4$ b) $x = -7,\ y = -3$ lub $x = 3,\ y = 7$

13.19. a) $x = 2,\ y = 4$ b) $x = 1,\ y = 5$

13.20. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1\rangle$ b) $x \in (-\infty; 0) \cup \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right) \cup (2; \infty)$



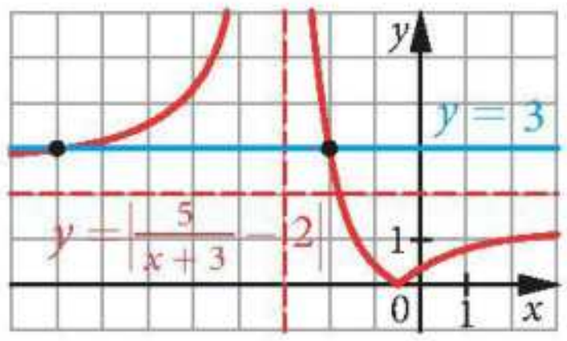


13.21. a) $ZW = \mathbf{R} - \{3\}$ b) $ZW = \langle -1; 0) \cup (0; 15) \cup (15; \infty)$
b) $x = -5$ lub $x = -1$ c) $x = 0$ lub $x = 1$ d) $x = 1$

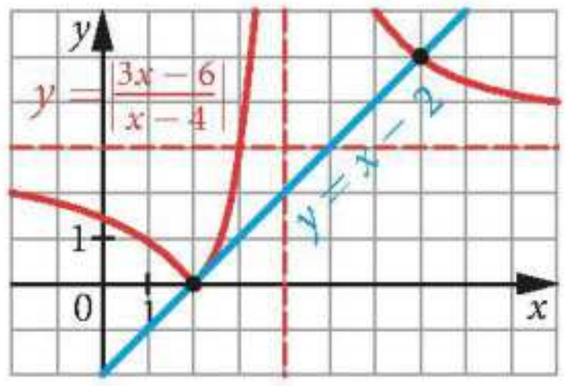
13.22. a) $x = -3$ lub $x = 5$

13.23.

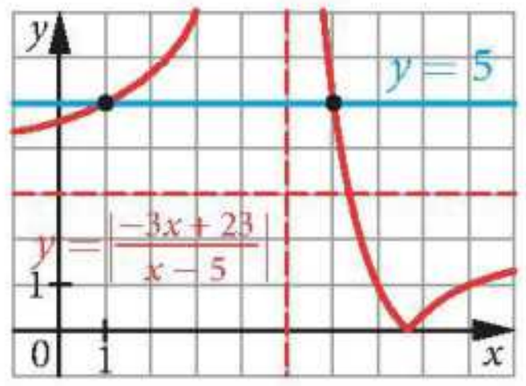
a) $x = -8$ lub $x = -2$



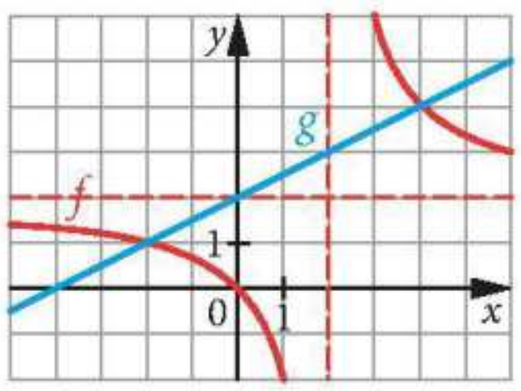
b) $x = 2$ lub $x = 7$



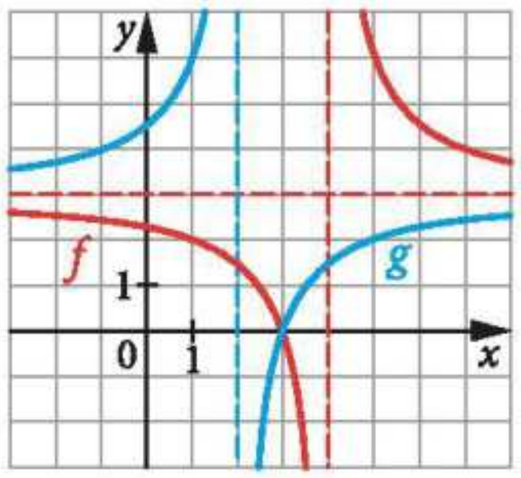
c) $x = 1$ lub $x = 6$



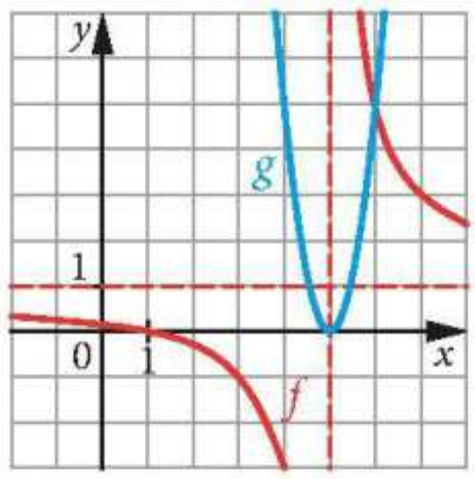
13.24. a) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup (2; 4\rangle$



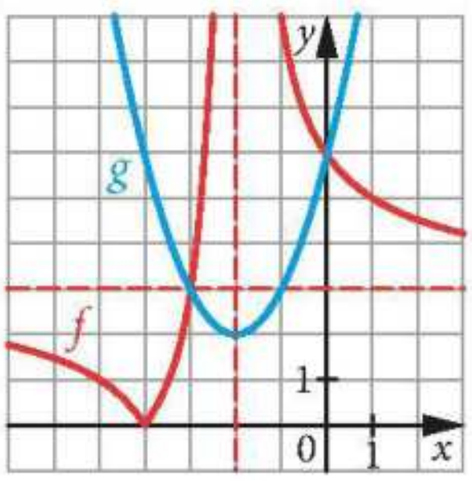
b) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4)$



c) $x \in (-\infty; 5) \cup \langle 6; \infty)$



d) $x \in (-3; -2) \cup (-2; 0)$



13.25. $m \in \langle 0; 4)$

13.26. *Wskazówka*: Zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od m.

s. 198

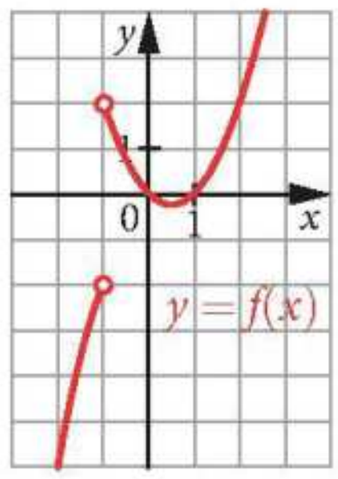
1. P, P, P **2.** $x = -2$, $y = -2$ lub $x = 1$, $y = 4$ **3.** $D = \mathbf{R} - \{-1, 6\}$, brak miejsc zerowych

4. np. $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x + 5)\left(x + 2\sqrt{2}\right)(x - 7)}$

s. 199

1. A **2.** C **3.** C **4.** D **5.** B **6.** B **7.** C **8.** D **9.** B **10.** C **11.** C **12.** A

13. B **14.** B **15.** B **16.** B **17.** D **18.** B **19.** A **20.** C **21.** D **22.** D **23.** C
24. C **25.** C **26.** D **27.** C **28.** C **29.** A **30.** A **31.** D **32.** A **33.** B
34. F, P, F **35.** F, P, F **36.** P, F, P **37.** F, P, F **38.** P, F, P **39.** P, P, P **40.** P, P, P
41. P, P, P **42.** F, P, F **43.** F, P, P **44.** P, P, P **45.** P, P, F **46.** $3x^2 + 11x - 7$
47. $m = 7$ **48.** a) $Q(x) = 3x^2\left(\pi x^2 + 2\right)$ b) $Q(x) = 7x^3\left(2x^2 + 3\right)$
c) $Q(x) = 12x^4\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}\right)$ d) $Q(x) = 7x^6\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$
e) $Q(x) = 2x(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$ f) $Q(x) = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$
49. a) $W(x) = (x+3)(x-3)(x+2)$ b) $W(x) = 2x\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)(x-5)$
c) $W(x) = (x-3)^2(x+3)^2$ d) $W(x) = -(x-1)(x+1)\left(x^2 + 2\right)$ e) $W(x) = (x-1)(x+3)(x-5)$
f) $W(x) = (x+2)\left(x^2 - 5x + 7\right)$ **50.** $a_2 = -4$, $a_1 = -11$, $a_0 = 30$ **51.** np.
$(x+2)(5x-2)(7x-1) = 0$ **52.** a) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 4$ b) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{4}$ lub $x = 1$
c) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$ d) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{4}$ lub $x = 1$ e) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -1\frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{5}$ f) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 2\frac{3}{5}$ g) $x = -3$ lub $x = 3$ lub $x = 5$ h) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$ lub $x = 2\frac{1}{2}$ **53.** a) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = 2$ b) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 3$
c) $x = -5$ lub $x = 1$ d) $x = -2\frac{1}{2}$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 2\frac{1}{2}$ e) $x = -1$ lub $x = 2 - \sqrt{2}$ lub $x = 2 + \sqrt{2}$ lub $x = 5$ f) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = \sqrt{7}$
54. a) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \infty\right)$ b) $x \in (-3; 1) \cup (1; \infty)$ c) $x \in (-\infty; 3\rangle$
d) $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ e) $x \in \left\langle -4\frac{1}{2}; -2\right\rangle \cup \langle 2; \infty)$ f) $x \in \left(-3; -2\frac{1}{2}\right) \cup \left(-2\frac{1}{2}; \infty\right)$
55. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ b) $a = 1$, $b = 2$ **57.** $a = -24$, $b = -12$ **58.** $x^2 + 3x + 1$ lub $-x^2 - 3x - 1$
59. $a = -8$, $b = 12$ **60.** $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$ **61.** $a = 0$, $b = 7$; tak, -2
63. $W(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9$ **64.** a) $x \in \left\langle -2; -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle 0; \sqrt{3}\right\rangle$ b) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$ d) $x \in (2; \infty)$ **65.** $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$ **66.** $D = \langle 2; 3\rangle$
67. $-\sqrt{5}$ **68.** $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$ **69.** $x \in \langle -3; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ **72.** a) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$
b) brak rozwiązań c) $x = 2$ lub $x = 5$ d) $x = 4$ **73.** 2 godziny i 3 godziny
74. autobus; 1,5 km **75.** 100 km/h **76.** a) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3)$
b) $x \in \langle -2; -1\rangle$ c) $x \in (2; 4) \cup (4; \infty)$ d) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup (5; \infty)$
e) $x \in (-3; 0)$ f) $x \in \langle -8; -1) \cup (-1; 0)$ **77.** $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ **78.** $m \in (0; 3)$



79. Zob. rysunek obok. **80.** a) $|x|$ b) $\frac{x^2 + 3}{|x|}$ **81.** $x = -2$ lub $x = 1$

3. Planimetria

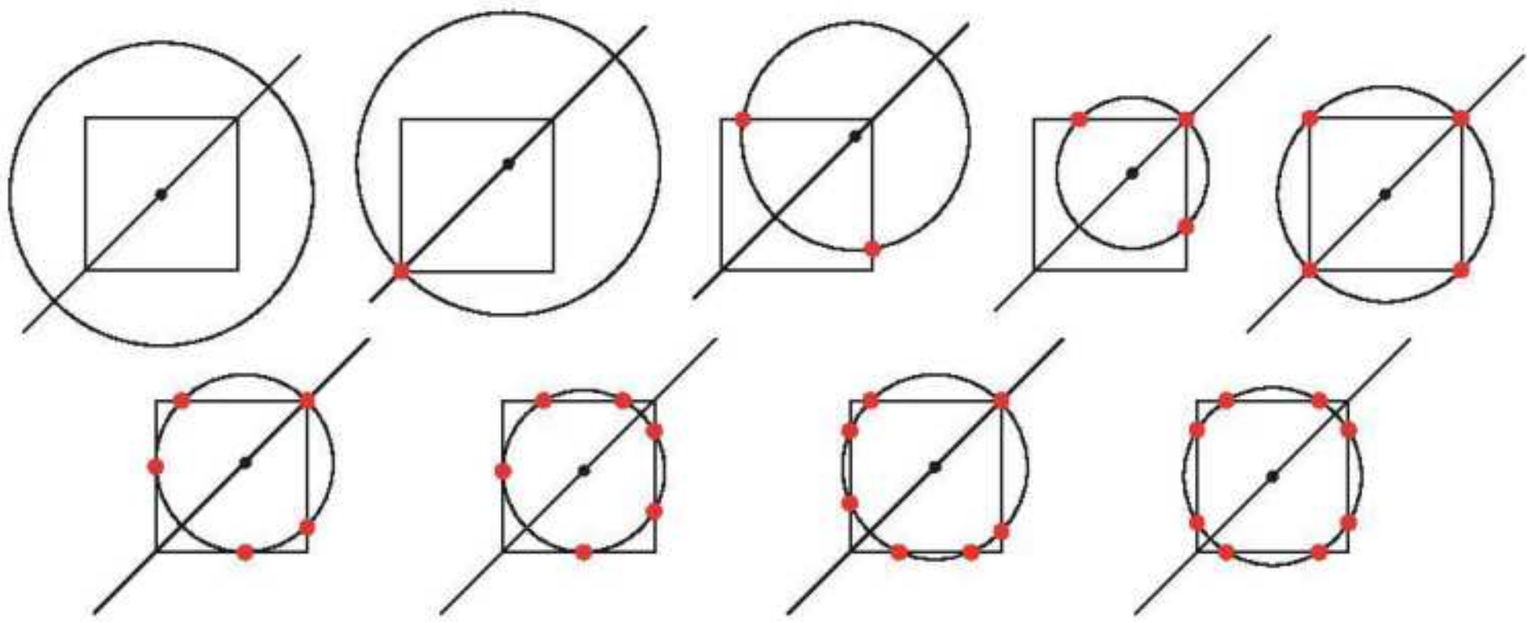
s. 214

1.1. a) tak b) nie **1.2.** Punkty A, B i C są współliniowe i punkt A leży między punktami B i C.
1.3. 12 (4 równoboczne, 8 równoramiennych) **1.4.** a) tak b) tak c) Nie można zbudować trójkąta. d) tak e) nie f) tak **1.6.** 30 **1.7.** 210 **1.8.** a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) 6 **1.9.** 100

1.10. $m \in (20; \infty)$ **1.11.** $m \in (0; 40)$ **1.12.** np. trójkąt równoramienny, pięciokąt foremny **1.13.** a) 3 b) 1 c) 4 d) 2 e) 2 f) 1 g) 6 h) 5 **1.14.** c), d), e), g) **1.15.** 4 **1.16.** nie **1.17.** Muszą spełniać nierówność trójkąta. **1.19.** a) dwa b) jedno **1.20.** *Wskazówka*: W danym czworokącie dorysuj przekątną. **1.26.** *Wskazówka*: Skorzystaj z własności przekątnych rombu.

s. 227

2.1. B **2.2.** C **2.3.** C **2.4.** a) zewnętrznie styczne b) rozłączne zewnętrznie c) wewnętrznie styczne d) przecinające się e) współśrodkowe f) rozłączne wewnętrznie **2.5.** a) $|AB| = 14$ b) $|AB| = 6$ c) $10 < |AB| < 30$ **2.6.** W pierwszym wierszu $|AB| = 10$, w każdym z pozostałych wierszy jest nieskończenie wiele możliwości. **2.7.** 2, 4, 8 **2.8.** *Wskazówka*: Oblicz długości boków trójkąta ABC. **2.9.** a) 0 b) 1 c) 0 d) 2 e) 1 f) 2 **2.10.** $6\sqrt{3}$ cm **2.11.** $4\sqrt{5}$ **2.12.** $|PA| = |PB|$, $|CB| = |CE|$, $|DE| = |DA|$ **2.13.** 30 **2.15.** 5 cm i 13 cm **2.16.** od 0 do 8 punktów wspólnych (zob. rysunek poniżej)



2.17. 52°, 55°, 73° **2.18.** 2880 cm^2 **2.19.** 32° lub 122° **2.20.** a **2.22.** $6\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ cm. *Wskazówka*: Narysuj odcinek łączący wierzchołek kąta ze środkiem większego okręgu i oblicz długość tego odcinka. **2.23.** *Wskazówka*: Oblicz długości boków trójkąta ABC. **2.24.** $4\left(2\sqrt{3} - 3\right)$ cm. *Wskazówka*: Środki danych okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz wysokość tego trójkąta. **2.25.** $\left(2\sqrt{3} + 3\right)$ cm **2.26.** 13 cm i 49 cm

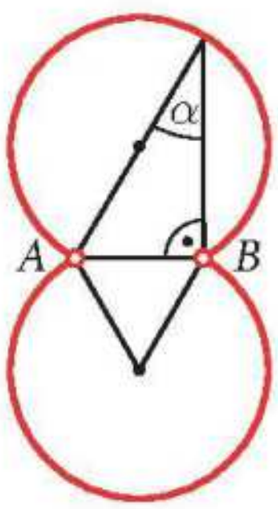
s. 230

1. P, P, P **2.** $o(A, 3)$ i $o(C, 3)$ zewnętrznie styczne, $o(A, 3)$ i $o(B, 3)$ rozłączne zewnętrznie, $o(B, 3)$ i $o(C, 3)$ rozłączne zewnętrznie **3.** 48 cm. *Wskazówka*: Wykorzystaj twierdzenie o odcinkach stycznych. **4.** 15

s. 243

3.1. C **3.2.** C **3.3.** C **3.4.** 20°, 140°, 200° **3.5.** 5% na diagramie odpowiada kąt o mierze 18°, 10% – 36°, 20% – 72°, 25% – 90°, 30% – 108° **3.6.** a) 24π b) $\frac{1}{30}\pi$ c) 11π d) $\frac{80}{9}\pi$ **3.7.** 72° **3.8.** pizzy dużej **3.9.** 16π **3.10.** $\frac{11}{\pi}$ **3.11.** 81π. *Wskazówka*: Zauważ, że pole tego pierścienia można wyrazić bez wyznaczania promieni ograniczających go okręgów. **3.12.** 80° **3.13.** 50°, 100° **3.14.** $\triangle ASB$: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20°$, $\sphericalangle S = 140°$; $\triangle ACB$: $\sphericalangle A = 20°$, $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 70°$ **3.15.** a) $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 120°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 140°$, $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 100°$ b) po 120°

3.16. 115° **3.17.** a) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 60°$ b) $\sphericalangle A = 15°$, $\sphericalangle B = 75°$, $\sphericalangle C = 90°$ c) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 70°$ d) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 120°$, $\sphericalangle C = 20°$ e) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 90°$ f) $\sphericalangle A = 20°$, $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 70°$ **3.18.** a) 120° b) 80° c) 125° d) 70° **3.20.** $\sphericalangle P = \sphericalangle B = 40°$, $\sphericalangle S = 100°$ **3.21.** $\sphericalangle A = 120°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle D = 110°$ **3.22.** $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 105°$, $\sphericalangle C = 130°$, $\sphericalangle D = 75°$; kąt ostry między przekątnymi: 85°. *Wskazówka*: Niech P oznacza punkt przecięcia przekątnych. Wyznacz kąty wpisane BAC i ABD, a następnie zastosuj twierdzenie o sumie kątów w trójkącie ABP. **3.23.** *Wskazówka*: Punkty D i F leżą na okręgu o średnicy AB. **3.25.** *Wskazówka*: Jeżeli oznaczymy dane punkty literami A i B, to wierzchołek kąta prostego szukanego trójkąta leży na okręgu o średnicy AB. W zależności od liczby punktów przecięcia tego okręgu z brzegiem danego koła, zadanie ma 2 rozwiązania, 1 rozwiazanie lub 0 rozwiązań. **3.27.** 80° **3.28.** $\alpha = 28°$, $\beta = 98°$ **3.29.** $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 105°$, $\sphericalangle C = 30°$ **3.30.** *Wskazówka*: Zob. rysunek obok. **3.31.** $\sphericalangle PSK = \frac{3}{2}\alpha$



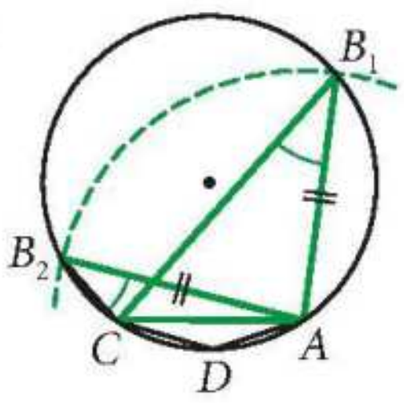
s. 247

1. F, P, P **2.** $\sphericalangle A = 62{,}5°$, $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 27{,}5°$ **3.** 80° lub 100° **4.** $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 90°$ **5.** *Wskazówka*: Połącz punkty styczności ze środkami odpowiednich okręgów i wykorzystaj fakt, że otrzymane trójkąty równoramienne mają identyczne kąty przy podstawach, oraz twierdzenie o kątach naprzemianległych przy prostych przeciętych sieczną.

s. 252

4.1. C **4.2.** C **4.3.** C **4.4.** tak **4.5.** A, D **4.6.** a) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 125°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 55°$ b) $\sphericalangle A = 75°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 105°$, $\sphericalangle D = 100°$ c) $\sphericalangle A = 85°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 95°$, $\sphericalangle D = 110°$ **4.7.** a) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 80°$, $\sphericalangle D = 120°$ b) $\sphericalangle A = 108°$, $\sphericalangle B = 144°$, $\sphericalangle C = 72°$, $\sphericalangle D = 36°$ **4.8.** a) $\alpha = \beta = 130°$, $\gamma = 40°$ b) $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$ **4.9.** a) $\sphericalangle A = 10°$, $\sphericalangle B = 125°$, $\sphericalangle C = 170°$, $\sphericalangle D = 55°$ b) $\sphericalangle A = 80°$, $\sphericalangle B = 20°$, $\sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle D = 160°$ c) $\sphericalangle A = 55°$, $\sphericalangle B = 58°$, $\sphericalangle C = 125°$, $\sphericalangle D = 122°$ d) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle D = 150°$ **4.10.** a) nie b), c), d) tak **4.11.** a) nie b), c), d) tak **4.12.** a) $\alpha = 70°$, $\beta = 20°$ b) $\alpha = \beta = 40°$ c) $\alpha = 50°$, $\beta = 80°$ **4.13.** 6 **4.14.** *Wskazówka*: Wykaż, że czworokąt $AMBK$ jest trapezem równoramiennym. **4.15.** a) *Wskazówka*: Wykaż, że $\sphericalangle FMD = 120°$. b) *Wskazówka*: AM jest dwusieczną kąta A czworokąta $ADMF$ wpisanego w okrąg, więc $\sphericalangle MFD = \sphericalangle MAD = 30°$ oraz $\sphericalangle MDF = \sphericalangle MAF = 30°$ (kąty wpisane oparte na tych samych łukach). **4.16.** *Wskazówka*: Dłuższa przekątna deltoidu jest średnicą okręgu opisanego na tym deltoidzie. **4.17.** *Wskazówka*: Skonstruuj trójkąt ABC i opisz na nim okrąg. Punkt D jest punktem przecięcia tego okręgu i drugiego ramienia kąta C. Zadanie ma 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

4.18.



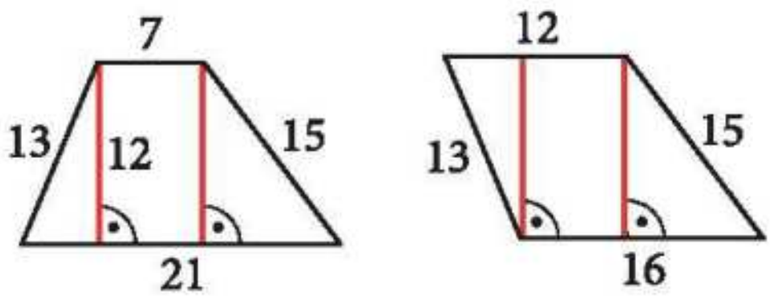
Wskazówka: Skonstruuj najpierw zbiór punktów, z których odcinek AC widać pod kątem B. Zadanie ma 0 rozwiązań, 1 rozwiązanie lub 2 rozwiązania. Rysunek jest ilustracją konstrukcji, gdy istnieją dwa rozwiązania.

s. 254

1. P, P, F **2.** a) $\alpha = 70°$, $\beta = 130°$ b) $\alpha = 50°$, $\beta = 80°$ **3.** $\sphericalangle A = 115°$, $\sphericalangle B = 95°$, $\sphericalangle C = 65°$, $\sphericalangle D = 85°$ **4.** a) nie b) tak **5.** *Wskazówka*: Zauważ, że dwa przeciwległe kąty tego czworokąta są proste.

s. 260

5.1. B **5.2.** D **5.3.** D **5.4.** tak **5.5.** a) tak b) nie c) tak d) tak **5.6.** 12 cm **5.7.** a) 30 cm b) 28 cm c) 50 cm d) 54 cm **5.8.** a) 5 cm b) *Wskazówka*: Zauważ, że trapez jest prostokątny. **5.9.** $2\sqrt{6}$ cm **5.10.** $|AB| = 20\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = \frac{35\sqrt{3}}{2}$, $|DC| = 15\sqrt{3}$ **5.11.** 4,8 cm **5.12.** 75% **5.13.** *Wskazówka*: Wykaż, że $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ oraz $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$. **5.14.** Zauważ, że: 1. Na czworokącie $AKPN$ można opisać okrąg (przeciwległe kąty K i N są proste), zatem $\sphericalangle KAP = \sphericalangle KNP = \alpha$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku). 2. Podobnie na czworokącie $DNPM$ można opisać okrąg, zatem $\sphericalangle PNM = \sphericalangle PDM = \beta$. 3. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. 4. $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle BDC = \beta$, więc $\alpha = \beta$. Oznacza to, że w czworokącie $KLMN$ punkt P należy do dwusiecznej kąta N. 5. Analogicznie wykazujemy, że punkt P należy do dwusiecznych pozostałych kątów czworokąta $KLMN$. Zatem wszystkie dwusieczne przecinają się w punkcie P, który jest środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $KLMN$. **5.15.** 21 i 7 lub 16 i 12. *Wskazówka*: Rozpatrz dwa przypadki (zob. rysunek obok).



5.16. 2 **5.17.** 3,6 cm^2

s. 262

1. F, P, P **2.** a) nie b) tak **3.** 24 cm **4.** $4\frac{1}{2}r^2$ **5.** *Wskazówka*: Wykaż, że $|AB| = |DC|$, korzystając z równości sum długości przeciwległych boków czworokątów $ABEF$ i $FECD$.

s. 269

6.1. A **6.2.** D **6.3.** B **6.4.** a) $1\frac{1}{3}$ b) 12,5 c) 7 d) 2 **6.5.** a) 12 b) 0,1 c) 15 d) 7 e) 12 f) 10 **6.6.** a) nie b) za mało danych, żeby to stwierdzić c) tak d) nie **6.7.** $|AB| = 42$, $|BC| = 28$, $|AC| = 35$ **6.8.** a) $4\frac{2}{7}$ b) 5 **6.9.** *Wskazówka*: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 267.

6.10. a) *Wskazówka*: Zauważ, że podany warunek jest równoważny warunkowi $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{x}$.

b) *Wskazówka*: $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-2ab}{a+b} = (a+b) - \frac{2ab}{a+b}$ **6.11.** *Wskazówka*: Przeanalizuj przykład 6 ze s. 268. a) *Wskazówka*: Odłóż na półprostej odcinki o długościach 2 i 5.

b) *Wskazówka*: Zauważ, że odcinek o długości $\sqrt{2}$ jest przekątną kwadratu o boku 1. **6.13.** 8 m

6.14. trójkąt równoboczny o boku 18 cm **6.15.** 54 cm **6.16.** 10 cm, 8 cm **6.17.** $2\frac{2}{3}$ i $5\frac{1}{3}$

6.18. o $\sqrt{2}$ cm **6.19.** 3,6 cm **6.20.** 96 cm^2 **6.21.** $m = 3\frac{2}{3}$ **6.22.** 12 **6.23.** $\frac{ab}{a+b}$.

Wskazówka: Poprowadź z wierzchołka B prostą równoległą do CD i wyznacz jej punkt przecięcia z półprostą AC. **6.24.** *Wskazówka*: Poprowadź prostą DM do przecięcia z przedłużeniem boku AB w punkcie K i udowodnij, że trójkąt BKM jest przystający do trójkąta CDM.

s. 272

1. F, F, P **2.** 18 cm **3.** a) tak b) tak c) nie **4.** 9 cm **5.** 36. *Wskazówka*: Poprowadź promienie AD i BE.

s. 278

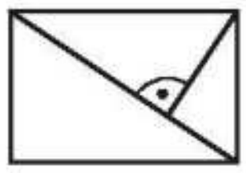
7.1. C **7.2.** A **7.3.** A **7.4.** P, P, F **7.5.** a) 4×10 b) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{4} \times \frac{15}{8}$ **7.7.** a) $k = 3$ b) $k = \frac{2}{3}$ c) $k = 5$ d) $k = \sqrt{2}$ **7.8.** A i D, G i E **7.9.** a) tak, $k = 5$ b) tak, $k = \frac{1}{6}$ c) tak, $k = 3$ d) nie e) nie f) tak, $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **7.10.** a) $k = \frac{6}{7}$ b) $k = \frac{2}{3}$ c) $k = 2$ d) $k = \frac{1}{2}$ **7.11.** $obwABCD = 81{,}6$ cm, $obwA'B'C'D' = 68$ cm **7.12.** a) $k = \frac{1}{4}$ b) $k = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ c) $k = \frac{1}{10}$ **7.13.** 1 : 2 **7.14.** 4 cm **7.15.** ok. 5 km **7.16.** 1 : 375 000 **7.17.** podobieństwo o skali $k = 2\frac{1}{2}$ **7.18.** 2,8 dm^2 **7.19.** $k = 1{,}4$ **7.20.** 20 cm **7.21.** 11 : 5 **7.22.** dłuższa: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, krótsza: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ **7.23.** $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **7.24.** 12 **7.25.** $\frac{|AM|}{|MC|} = \sqrt{2} - 1$

s. 281

1. F, F, F **2.** $k = 0{,}4$ **4.** 177,8 cm^2 **5.** $2a$

s. 295

8.1. C **8.2.** D **8.3.** A **8.4.** F, P, F **8.5.** a) nie b) tak **8.6.** a) tak b) nie c) tak d) tak **8.7.** a) $a_1 = 8$, $b_1 = 2$ b) $b = 5\frac{1}{2}$, $a_1 = 3\frac{1}{2}$ **8.8.** a) $\triangle ALB$, $\triangle HLC$, $\triangle HMB$ b) $\triangle HKB$, $\triangle CKA$, $\triangle HLA$ c) $\triangle AHM$, $\triangle CBM$, $\triangle ABK$ **8.9.** 10,32 m **8.10.** 24 cm, 30 cm **8.11.** 55 cm **8.12.** 8, 10 lub $4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$ lub $3\frac{3}{5}, 4\frac{4}{5}$ **8.13.** a) $x = 12{,}5$ b) $x = 7$ **8.14.** $18\sqrt{13}$ cm, $12\sqrt{13}$ cm, 78 cm **8.15.**



8.16. *Wskazówka*: Wykaż, że $\triangle BMN \sim \triangle NPC$. **8.17.** $\left(24\sqrt{3} - 36\right)$ cm. *Wskazówka*: Wysokość trójkąta jest równa $6\sqrt{3}$ cm. Niech x oznacza bok kwadratu. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów wynika np. proporcja $\frac{x}{6\sqrt{3}} = \frac{6 - 0{,}5x}{6}$. **8.18.** $k = \frac{1}{2}$ **8.19.** 4,8 cm **8.20.** *Wskazówka*: Skorzystaj z podobieństwa trzech trójkątów prostokątnych. **8.21.** $2\sqrt{2}$ cm **8.22.** 4 cm i 12 cm **8.23.** $x = 4{,}8$. *Wskazówka*: Skorzystaj z równości odpowiednich kątów wpisanych. **8.24.** *Wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą. **8.25.** $x = 3{,}8$. *Wskazówka*: Połącz końce cięciwy o długości x z końcami cięciwy o długości 7 tak, aby powstały dwa trójkąty. Wykaż ich podobieństwo i wykorzystaj równość $\frac{x+5}{11} = \frac{4}{5}$. **8.26.** *Wskazówka*: $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFB = 90°$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AFE$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku, $\sphericalangle EFC = 180° - 90° - \sphericalangle ABE = 90° - \sphericalangle ABE = \sphericalangle EAB$. **8.28.** 60 **8.29.** *Wskazówka*: Skorzystaj z podobieństwa trójkątów ABK i MDK oraz BPK i DAK. **8.30.** *Wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie. **8.31.** $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$; $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 6\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 12$ cm; $P = 18\sqrt{3}$ cm^2 **8.32.** 15, $\frac{3}{2}\sqrt{89}$, $\frac{3}{2}\sqrt{89}$ **8.33.** 84

s. 299

1. P, P, F **3.** promień: 3 cm, odcinek stycznej: 3 cm **4.** 108

s. 300

1. C **2.** D **3.** C **4.** B **5.** B **6.** D **7.** C **8.** D **9.** D **10.** D **11.** D **12.** D
13. C **14.** C **15.** C **16.** B **17.** B **18.** B **19.** B **20.** C **21.** B **22.** B
23. P, F, F **24.** F, F, P **25.** P, F, F **26.** P, F, P **27.** P, F, F **28.** F, P, F **29.** P, F, P
30. F, P, P **31.** P, F, F **32.** P, P, F **33.** 40°, 140° **34.** a) rozłączne zewnętrznie b) wewnętrznie styczne c) rozłączne wewnętrznie d) przecinające się **35.** $\alpha = \beta = 75°$, $\gamma = 150°$
36. $o(A, 6)$ **37.** $o(A, 4)$ **38.** $o(A, 7)$ **39.** 152° **40.** A i C, A i E, C i E, B i I, G i J, H i K
41. $k = \frac{1}{3}$, $obw = 22$ cm lub $k = \frac{2}{5}$, $obw = 26{,}4$ cm **42.** 20 cm i 15 cm **43.** a) tak b) nie
44. $\frac{1}{2}$ **45.** $k = \frac{3}{2}$ **46.** 21 : 18 : 14 **49.** $15\left(2\sqrt{2}+3\right)$ cm **50.** 20°, 60°, 100°
51. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 55°$, $\sphericalangle C = 70°$ lub $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 35°$, $\sphericalangle C = 110°$ **52.** $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 25$; pozostałe wysokości: 24 **53.** $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 110°$, $\sphericalangle C = 70°$, $\sphericalangle D = 120°$ **54.** $16\sqrt{3} + \frac{32}{3}\pi$
55. 26 cm lub 52 cm lub 39 cm **56.** 144π cm^2 **57.** 432 cm^2 **58.** a) 12π cm b) 6 cm
59. $13\frac{1}{2}$ **60.** 20 cm i 30 cm **63.** *Wskazówka*: Przedłuż promień CS do średnicy CM i rozważ kąty trójkąta MBC. **65.** 50 **66.** 60, 30, 15, 30 **67.** 40 cm **68.** $1 : 13\frac{1}{3}$ **69.** 60
70. *Wskazówka*: Niech punkt M należy do boku AD, a punkt N do BC. Z podobieństwa trójkątów CDP i ABP wynika równość: $\frac{|PD|}{|BP|} = \frac{|PC|}{|AP|}$. Skorzystaj z podobieństwa trójkątów AMP i ADC oraz trójkątów BNP i BCD, aby zbadać proporcje $\frac{|DC|}{|MP|}$ oraz $\frac{|DC|}{|PN|}$. **71.** *Wskazówka*: Poprowadź prostą równoległą do podstaw trapezu i przechodzącą przez punkt przecięcia przekątnych. Skorzystaj z zadania 70. **73.** *Wskazówka*: Poprowadź odcinek MF (punkt F leży na boku AC) równolegle do boku BC i rozważ trójkąt AMF. **74.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 40°$ lub $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20°$, $\sphericalangle C = 140°$
75. 20,5 **76.** $\left(3+3\sqrt{3}\right)$ cm **77.** $5\sqrt{3}$ **78.** 8. *Wskazówka*: Zauważ, że kąt między dwoma promieniami okręgu opisanego poprowadzonymi do końców jednego z ramion trójkąta jest równy 30°. **79.** 4,5 cm **81.** $\frac{1}{3}$

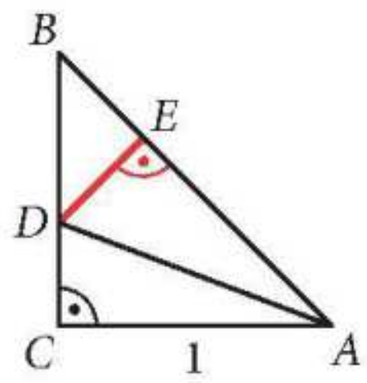
4. Funkcje trygonometryczne

s. 317

1.1. B **1.2.** C **1.3.** C **1.4.** a) $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{|BC|}{|AC|}$, $\cos\sphericalangle B = \frac{|BC|}{|AB|}$ b) $\sin\sphericalangle G = \frac{|HI|}{|GH|}$, $\sin\sphericalangle F = \frac{|DE|}{|DF|}$ c) $\cos\sphericalangle K = \frac{|KJ|}{|KL|}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle H = \frac{|GI|}{|HI|}$ d) $\sin\sphericalangle N = \frac{|OM|}{|NM|}$, $\cos\sphericalangle M = \frac{|OM|}{|NM|}$
e) $\operatorname{tg}\sphericalangle P = \frac{|SR|}{|RP|}$, $\cos\sphericalangle W = \frac{|WT|}{|WU|}$ f) $\operatorname{tg}\sphericalangle Z = \frac{|XY|}{|ZX|}$, $\sin\sphericalangle Y = \frac{|ZX|}{|ZY|}$ **1.5.** $\frac{|BC|}{|AB|} = \sin\sphericalangle A = \cos\sphericalangle B$, $\frac{|FE|}{|FD|} = \sin\sphericalangle D = \cos\sphericalangle F$, $\frac{|IH|}{|GH|} = \sin\sphericalangle G = \cos\sphericalangle H$, $\frac{|JK|}{|JL|} = \operatorname{tg}\sphericalangle L$, $\frac{|OM|}{|ON|} = \operatorname{tg}\sphericalangle N$, $\frac{|RS|}{|PS|} = \sin\sphericalangle P = \cos\sphericalangle S$, $\frac{|WT|}{|WU|} = \sin\sphericalangle U = \cos\sphericalangle W$, $\frac{|XY|}{|YZ|} = \sin\sphericalangle Z = \cos\sphericalangle Y$ **1.6.** a) 0,2588, 0,5299, 0,9511 b) 0,7986, 0,7547, 0,7880 c) 0,9511, 0,9877, 0,1908 d) 0,3057, 6,3138, 1,9626, 0,4040

1.7. a) 27° b) 47° c) 57° d) 68° **1.8.** a) 78° b) 69° c) 58° d) 23° **1.9.** a) 8° b) 14° c) 78° d) 89° **1.10.** a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $13-4\sqrt{3}$ d) 3 **1.11.** a) $\alpha = 30°$ b) $\alpha = 30°$ c) $\alpha = 45°$ **1.12.** a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ **1.13.** a) 48° b) 46° c) 24° d) 53° e) 32° f) 88° **1.14.** a) $\sin\sphericalangle A = \frac{3}{5}$, $\cos\sphericalangle A = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{3}{4}$ b) $\sin\sphericalangle A = \cos\sphericalangle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = 1$ c) $\sin\sphericalangle A = \frac{1}{3}$, $\cos\sphericalangle A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\sin\sphericalangle A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\sphericalangle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = 2$ e) $\sin\sphericalangle A = \frac{15}{17}$, $\cos\sphericalangle A = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{15}{8}$ f) $\sin\sphericalangle A = \frac{6}{7}$, $\cos\sphericalangle A = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ **1.15.** a) $\sphericalangle B = 42°$, $|AB| = 16{,}4$, $|BC| = 12{,}2$ b) $\sphericalangle A = 38°$, $|AB| = 22{,}8$, $|BC| = 14{,}1$ c) $\sphericalangle B = 63°$, $|AB| = 26{,}4$, $|AC| = 23{,}6$ d) $\sphericalangle A = 71°$, $|BC| = 6{,}4$, $|AC| = 2{,}2$ e) $\sphericalangle A = 36°$, $\sphericalangle B = 54°$, $|AC| = 35{,}6$, $|BC| = 25{,}9$ f) $\sphericalangle A = 25°$, $\sphericalangle B = 65°$, $|AC| = 15{,}0$, $|AB| = 16{,}6$ **1.16.** $\sin\sphericalangle CBD = \frac{5}{13}$, $\cos\sphericalangle CBD = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle CBD = \frac{5}{12}$ **1.17.** 7 **1.18.** $\sin\sphericalangle CAB = \cos\sphericalangle CAD = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle CAB = \frac{3}{2}$, $\cos\sphericalangle CAB = \sin\sphericalangle CAD = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle CAD = \frac{2}{3}$ **1.19.** *Wskazówka*: Przeanalizuj przykład 9 ze s. 316. **1.20.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ **1.21.** a) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ c) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **1.22.** a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ **1.23.** a) 45° b) 18° c) 67° d) 27° **1.24.** $\frac{5}{12}$

1.25. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku obok.
$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = 22{,}5°$, $|AB| = \sqrt{2}$, $|AC| = |AE| = 1$,
$|BE| = |ED| = |DC| = \sqrt{2} - 1$. Zatem $\operatorname{tg}\sphericalangle CAD = \operatorname{tg} 22{,}5° = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$.



s. 320

1. P, F, P **3.** $1\frac{12}{13}$ **4.** $\sin\sphericalangle A = \frac{4}{5}$, $\cos\sphericalangle A = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{4}{3}$ **5.** *Wskazówka*: Przeanalizuj przykład 9 ze s. 316. Odcinek o długości $\sqrt{5}$ jest przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych 1 i 2.

s. 325

2.1. D **2.2.** C **2.3.** D **2.4.** a) Tak. *Wskazówka*: Przedstaw $\operatorname{tg}\alpha$ za pomocą $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. b) Nie. *Wskazówka*: Podnieś równość obustronnie do kwadratu. c), d) Tak. *Wskazówka*: Zauważ, że $\beta = 90° - \alpha$. **2.5.** *Wskazówka*: Oblicz wartość danej funkcji trygonometrycznej i oszacuj, czy jest dodatnia i mniejsza od 1. a) tak b) nie c) tak d) tak **2.6.** a) 0 b) 1 **2.7.** a) 2 b) 1 c) 1 d) 2 e) −1 f) 1 **2.8.** $2\frac{1}{2}$ **2.9.** a) −1 b) 0 c) −4 d) 0 **2.10.** a) $4\sin\alpha\cos\alpha$ b) $\cos^2\alpha$ c) 1 d) 1 **2.11.** a) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$ d) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **2.12.** a) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$,

$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ c) $\sin\alpha = \frac{50\sqrt{2501}}{2501}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2501}}{2501}$ d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **2.13.** $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ **2.14.** $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ **2.15.** $\frac{23}{25}$ **2.16.** $\frac{1}{3}$ **2.17.** $\frac{1}{8}$ **2.18.** $\frac{20}{41}$ **2.19.** $\alpha = 35°$, $\beta = 55°$ **2.20.** przyprostokątne: $6\sqrt{3}$, 18; $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$

s. 327

1. F, F, P **2.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **4.** $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ **5.** $\frac{1}{6}$

s. 331

3.1. Zwiększyć cztery razy. **3.2.** $4\left(3+2\sqrt{2}\right)$ cm^2 **3.3.** $3\left(5+\sqrt{5}\right)$ **3.4.** $6\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm **3.5.** 14,4 cm **3.6.** 8 cm **3.7.** $27\sqrt{3}$ cm^2 **3.8.** boki: $2\sqrt{3}$ cm, 6 cm, 4 cm, $P = 10\sqrt{3}$ cm^2, $obw = 2\left(7+\sqrt{3}\right)$ cm **3.9.** $P = 630$, $d = 25$ **3.10.** $18{,}5\pi$ m^2 **3.11.** największe: koło, najmniejsze: trójkąt **3.12.** a) 39 b) 29 c) $4\frac{1}{2}\pi + 17$ d) $34\frac{1}{2}$ **3.13.** 72π cm^2 **3.14.** 3, $3\sqrt{3}$, 6 **3.15.** Zmniejszyło się o 1%. **3.16.** promień: $\frac{\sqrt{181}}{2}$ cm, $P = \frac{181}{4}\pi$ cm^2, $obw = \pi\sqrt{181}$ cm **3.17.** 38. *Wskazówka*: Poprowadź wysokości z końców krótszej podstawy i rozważ długości odcinków, które powstały na dłuższej podstawie. **3.18.** 3185 m^2

3.19. a) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$ b) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$ c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)a^2$

s. 339

4.1. C **4.2.** D **4.3.** B **4.4.** 74°, 106° **4.5.** a) 20,4 b) 29,4 **4.6.** a) $obw = 21{,}6$, $P = 20{,}7$ b) $obw = 20{,}5$, $P = 11{,}5$ c) $obw = 18{,}6$, $P = 11{,}3$ d) $obw = 38{,}7$, $P = 60{,}0$ **4.7.** 62°, 118°, 62°, 118° **4.8.** 60°, 120°, 60°, 120° **4.9.** $|AB| = 20{,}2$ cm, $|AC| = |BC| = 18{,}1$ cm **4.10.** $obw = 42{,}71$ cm, długość przekątnej: 15,97 cm **4.11.** 35,5 cm^2 **4.12.** 60°, 120°, 60°, 120°, $P = 72\sqrt{3}$ cm^2 **4.13.** 177,3 **4.14.** 192,2 cm^2 **4.15.** 119,3 cm^2 **4.16.** $|AB| = 5{,}7$ cm, $|AC| = |BC| = 8{,}4$ cm **4.17.** $P = 422{,}0$, $obw = 120{,}1$, wysokości: 21,6, 33,7, 15,1 **4.18.** 11,47 cm **4.19.** $P = 972$, $obw = 36\left(\sqrt{10}+1\right)$ lub $P = 108$, $obw = 12\left(\sqrt{10}+3\right)$ **4.20.** 470 m **4.21.** a) 1127,6 N b) 24° **4.22.** ok. 140 m **4.23.** prawie 2580 m **4.24.** nie **4.25.** 880 m, 1050 m **4.26.** 159,9 lub 132,4

s. 342

1. P, F, F **2.** $x \approx 2{,}11$, $y \approx 4{,}53$ **3.** 500 m **4.** 6,1 i 13,1 **5.** *Wskazówka*: Poprowadź jedną z wysokości trapezu i rozważ związki trygonometryczne w odpowiednim trójkącie.

s. 350

5.1. D **5.2.** A **5.3.** D **5.6.** a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ d) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ e) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -4$ f) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{2}$ g) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$ h) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{8}$, $\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{5}$

5.7. $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135° = -1$ **5.8.** a) 0,9397 b) −7,1154 c) −0,9903 d) −2,0503 e) 0,7771 f) −0,5095 g) −0,9397 h) −0,1405 **5.9.** a) 102° b) 158° c) 153° d) 93° **5.10.** a) 137° b) 172° c) 125° d) 102° **5.11.** a) 40° lub 140° b) 81° lub 99° c) 58° lub 122° d) 53° lub 127° **5.12.** *Wskazówka*: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 348. **5.13.** *Wskazówka*: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 348. **5.14.** a) 113,13 b) 43,12 c) 53,18 d) 75,24 **5.15.** 19,3 **5.16.** 150° **5.17.** 60° lub 120° **5.19.** $P = 119\ \text{cm}^2$, $obw = \left(31 + 7\sqrt{5}\right)$ cm **5.20.** $12(5\pi - 3)\ \text{cm}^2$ **5.21.** *Wskazówka*: Oblicz pole trójkąta na dwa sposoby.

s. 352

1. P, P, P **2.** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$ **3.** 35° lub 145° **4.** 22,54

s. 356

6.1. D **6.2.** C **6.3.** D **6.4.** a) tak b) nie c) nie d) nie e) tak f) nie **6.5.** a) tak b) tak c) nie **6.6.** a) 1 b) 1 c) −1 d) 1 e) 0 f) 1 **6.7.** a) 0 b) 1 c) $\sin\alpha$ d) −1 **6.8.** $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -4$ **6.9.** $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ **6.10.** a) $\cos\alpha = -\frac{35}{37}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$ b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$ lub $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$ **6.11.** a) $-\frac{2}{5}$ b) np. (−5, 2) **6.12.** a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{18}$ **6.13.** $-\frac{13}{27}$ **6.18.** $\frac{\sqrt{23}}{6}$

s. 358

1. F, F, P **2.** 1 **3.** $\frac{2}{3}$

s. 359

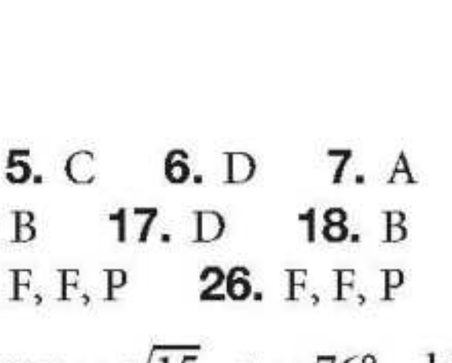
1. C **2.** B **3.** C **4.** D **5.** C **6.** D **7.** A **8.** B **9.** C **10.** D **11.** C **12.** D **13.** B **14.** D **15.** C **16.** B **17.** D **18.** B **19.** A **20.** D **21.** P, P, F **22.** P, F, F **23.** P, F, P **24.** P, F, P **25.** F, F, P **26.** F, F, P **27.** F, P, F

28. a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$, $\alpha = 76°$ b) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\alpha = 49°$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 18°$ d) Nie istnieje taki trójkąt prostokątny.

29. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{2}$ **30.** a) 31° lub 149° b) 81° c) 132° d) 108° **31.** 44° **32.** $\sin\sphericalangle B = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\sphericalangle B = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle B = \frac{4}{5}$ **33.** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ **34.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ **35.** $\cos\alpha = \frac{11}{61}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{60}{11}$ lub $\cos\alpha = -\frac{11}{61}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{60}{11}$ **36.** $\frac{55}{73}$ **37.** $3 + 2\sqrt{3}$ **39.** 150° **40.** a) 1 b) 0 c) 0

41. a)

b)



42. $1 + \sin\alpha$, $\alpha \neq 90°$ **43.** $P = 90{,}0\ \text{cm}^2$, $obw = 52{,}3$ cm **44.** $105{,}2\ \text{cm}^2$ **45.** $120{,}5\ \text{cm}^2$ **46.** $53{,}3\ \text{cm}^2$ **47.** $2\sqrt{37}$ **48.** $18\ \text{cm}^2$ **49.** $P = \frac{77\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$, $obw = \left(7\sqrt{3} + 29\right)$ cm **50.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. *Wskazówka*: Poprowadź odcinek $DE \perp CB$.

51. $\frac{25}{6\pi}$ **52.** $obw = 33{,}65,\ P = 67{,}31$ **53.** 104 **54.** a) $\frac{\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} < 0$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
56. $\alpha \in (0°; 90°) \cup (90°; 180°)$ **57.** $\frac{23}{27}$ **58.** $\frac{1}{2}$ lub $-\frac{1}{2}$

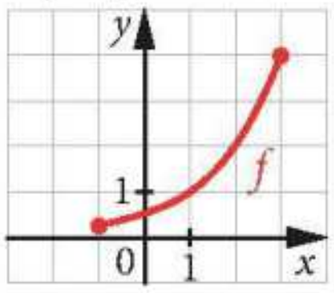
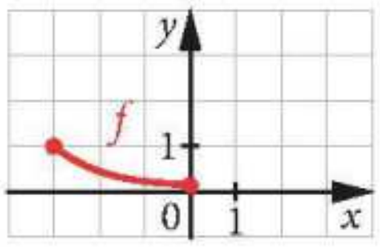
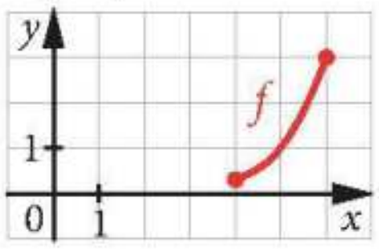
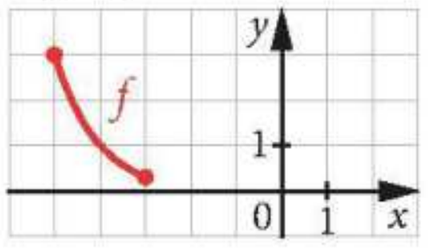
Dział 5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

s. 366

1.1. a) $\frac{40}{3}$ b) 3 c) $\frac{10}{9}$ **1.2.** a) $\frac{1}{6}$ b) 6 c) 2^{80} d) 0 **1.3.** a) 24 b) $\frac{7}{2}$ c) 12 d) $\frac{6}{5}$
1.4. a) 7 b) 2 c) -3 **1.5.** a) 9 b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) 4 **1.6.** a) $2^{\frac{17}{30}}$ b) $2^{-\frac{1}{6}}$ c) $2^{\frac{3}{4}}$ d) $2^{-\frac{1}{3}}$
1.7. a) a^{10} b) a^{8} c) $a^{\frac{5}{9}}$ d) $a^{0,1}$ **1.8.** a) $\frac{9}{2}$ b) $24\frac{24}{25}$ c) 4,5 d) $21\frac{1}{3}$ **1.9.** a) $a = b$ b) $a > b$
c) $a > b$ d) $a < b$ **1.10.** $b < d < c < a$ **1.11.** a) 1 b) 4 c) 81 d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $\sqrt[12]{3}$

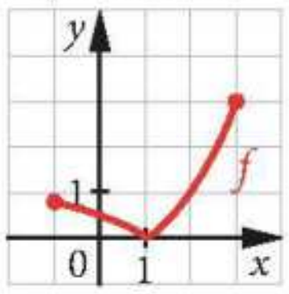
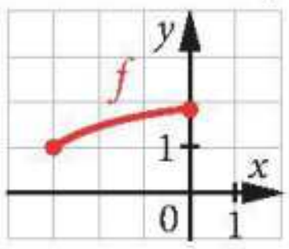
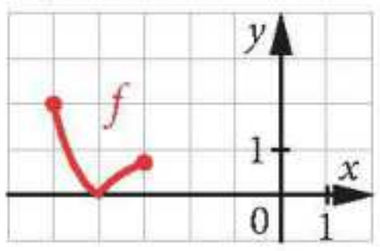
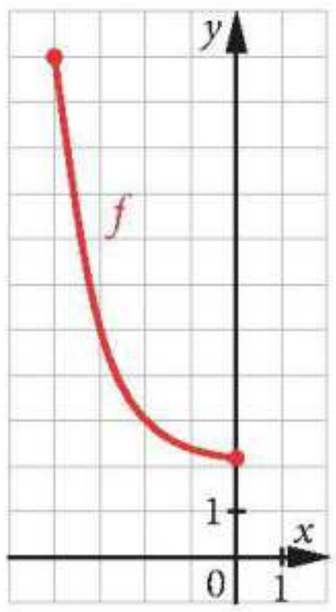
s. 374

2.1. B **2.2.** C **2.3.** A
2.4. a) (0, 2) b) (0, −2) c) (0, 3) d) (0, −2) e) (0, 0) f) (0, 6)
2.5. a) najmniejsza: $\frac{1}{4}$, największa: 4 b) najmniejsza: $\frac{1}{8}$, największa: 1 c) najmniejsza: $\frac{1}{3}$, największa: 3 d) najmniejsza: $\frac{1}{3}$, największa: 3

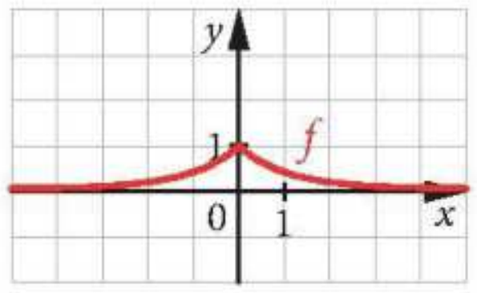
2.6. a) brak miejsc zerowych b) $x = -3$ c) $x = -4$ d) brak miejsc zerowych e) $x = -3$
f) brak miejsc zerowych

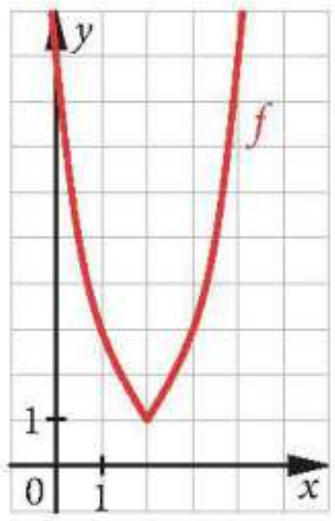
2.8. a) najmniejsza: 0, największa: 3 b) najmniejsza: 1, największa: $1\frac{7}{8}$ c) najmniejsza: 0, największa: 2 d) najmniejsza: $2\frac{1}{9}$, największa: 11

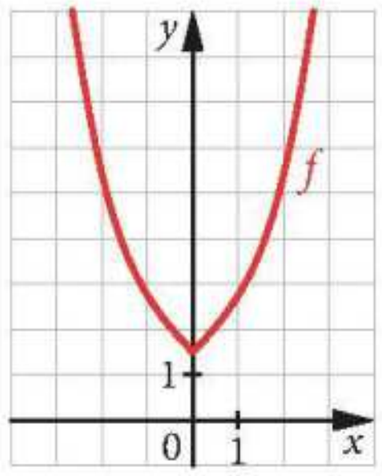





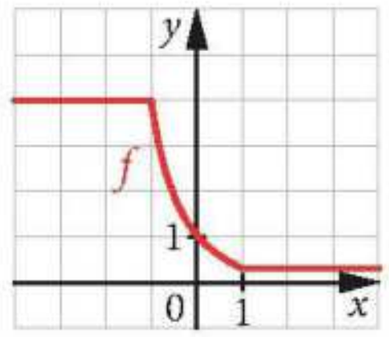
2.9. $a = \frac{1}{4}$ **2.10.** $k = -70$ **2.11.** $m = 4$
2.13. a) np. $f(x) = 2^x + \frac{11}{4}$ b) np. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
2.14. a) $a = 3,\ b = -2$ **2.15.** a) $x \in \langle -2; \infty)$ b) $x \in (-\infty; -1\rangle$
c) $x \in (-\infty; 2\rangle$ d) $x \in \langle 1; \infty)$ **2.16.** a) I. $x = 3$ II. $x \in (-\infty; 3)$
b) I. $x = 1$ II. $x \in (-\infty; 1)$ c) I. $x = -2$ II. $x \in (-2; \infty)$ d) I. $x = -2$ II. $x \in (-2; \infty)$
2.17. a) $x = -4$ lub $x = -3$ b) $x = 1$ c) $x = 0$ lub $x = 1$ d) $x = -1$ e) $x = 0$ f) $x = -1$
2.18. a) $x \in (-\infty; 0)$ b) $x \in (-\infty; 1)$ c) $x \in (-\infty; 2\rangle$ d) $x \in (-\infty; 1\rangle$
2.19. a) $x = 2,\ y = 4$ b) $x = -2,\ y = 0$ c) $x = 4,\ y = 4$ **2.20.** a) 3 lata b) po 10 latach
2.21. $x = 0,\ y = -1$ **2.22.** $x = 1$

2.23.

a) 

b) 

c) 

d) 

2.24. $m \in (0; 1) \cup \{2\}$

s. 377

1. F, F, F **2.** $x = 3$ **4.** b) $m \in (0; 1)$ **5.** a) 100°C b) po 2 minutach c) 20°C

s. 380

3.1. a) 3 b) 2 c) −3 d) −3 e) 1 f) $\frac{2}{3}$ g) 0 h) −2 **3.2.** a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $-\frac{3}{4}$ f) $-\frac{3}{2}$ **3.3.** a) $x = 8$ b) $x = 33$ c) $x = 1$ d) $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $x = 81$ f) $x = 16$ **3.4.** a) $x = 2$ b) $x = 10$ c) $x = 9$ d) $x = 64$ e) $x = \frac{1}{36}$ f) $x = \frac{1}{2}$ **3.5.** a) 7 b) 2 c) $\frac{4}{5}$ d) 12 e) 16 f) 3

s. 386

4.1. C **4.2.** C **4.3.** C **4.4.** a) 2 b) 5 c) 1 d) 2 e) 2 f) 2 **4.5.** a) 2 b) 0 c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 5 f) −1 **4.6.** a) 1 b) 2 c) 1 d) 3 e) 2 f) 1 **4.7.** a) 1 b) 1 c) −2 d) −2,5 e) −1 f) 1 **4.8.** a) $\log_8 \frac{a^2b^4}{50}$, 1 b) $\log_3 \frac{a^4b^2}{25}$, 4 c) $\log_2 \frac{y^3}{7x}$, −1 d) $\log\left(xy + y^2\right)$, 1 **4.9.** a) $\log 2$ b) $\log_2 \frac{8}{5}$ c) $\log_5 50$ d) $\log_3 \frac{1}{6}$ e) $\log\left(7\sqrt{10}\right)$ f) $\log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **4.10.** a) $\log_3 3$ b) $\log_5 1$ c) $\log_6\left(a\sqrt{2}\right)$ d) $\log_3 81$ e) $\log_2 \frac{128}{a^2}$ f) $\log_2 \frac{16}{a^4}$ **4.11.** a) $x > 0$, $y > 0$; $\log \frac{x^2y^5}{8}$ b) $x > 0$, $y > 0$; $\log_2 \frac{x}{4y}$ c) $x > -1$, $y > 0$; $\log_3 \frac{(x+1)^2}{27y}$ d) $x > 0$; $\log \frac{x\sqrt{10}}{8}$ e) $x > \sqrt{2}$; $\log_2 \frac{2}{x - \sqrt{2}}$ f) $x + y > 0$, $x - y > 0$; $\log\left(x^2 - y^2\right)$ **4.12.** a) $2a$ b) $a + 1$ c) $a + 4$ d) $-2a$ e) $a - 1$ f) $2 - a$ **4.13.** a) $6m$ b) $2m - 2$ c) $3m + 1$ d) $5m - 1$ **4.14.** a) 12 b) −4 **4.15.** 3 **4.16.** 3 **4.17.** a) 0,631 b) 1,209 c) 4,086 d) 1,311 **4.18.** a) $1{,}7 < \sqrt[4]{10} < 1{,}8$ b) $4{,}6 < \sqrt[3]{100} < 4{,}7$ c) $63 < \frac{100}{\sqrt[5]{10}} < 64$ d) $8{,}6 < \frac{40}{\sqrt[3]{100}} < 8{,}7$ **4.19.** 0 **4.20.** a) $x = -\log_2 3$ lub $x = 2\log_2 3$ b) $x = 2$ lub $x = \log 5$ c) $x = \log_3 2$ lub $x = \log_3 5$ d) $x = -1$ lub $x = \log_2 3$

4.21. *Wskazówka*: Wprowadź oznaczenia $x = 5^{\log_2 3}$ i $y = 3^{\log_2 5}$, a następnie obie strony każdej równości zlogarytmuj przy podstawie 2. **4.22.** *Wskazówka*: Zapisz wyrażenie po lewej stronie znaku równości za pomocą logarytmu przy podstawie: a) 4, b) 6, c) 3. **4.24.** $\frac{2-k}{2}$ **4.25.** $\frac{a+1}{2a+b}$ **4.26.** $\frac{4}{5}$ **4.29.** *Wskazówka*: Zauważ, że przy podanych założeniach wartość $\log_a b > 0$ i zastosuj wzór na zamianę podstawy logarytmu.

s. 389

1. F, P, F **2.** 3 **3.** 2,77 **4.** $\frac{m-2}{3}$

s. 396

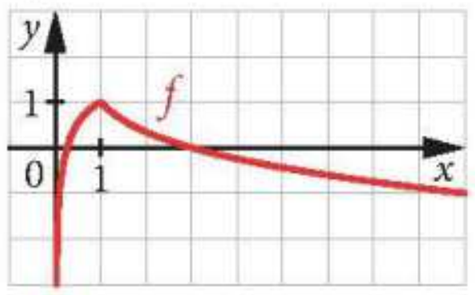
5.1. C **5.2.** D **5.3.** D

5.5. a) 2 b) 8 c) 1 d) $3+\sqrt{10}$ e) 2 f) $\sqrt[3]{2}-1$

5.6.

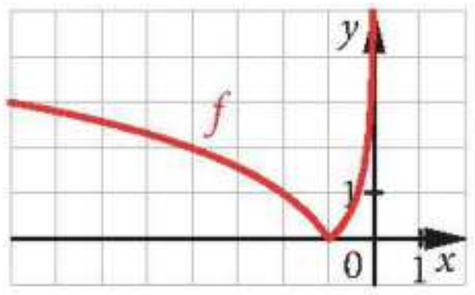
a)

b)



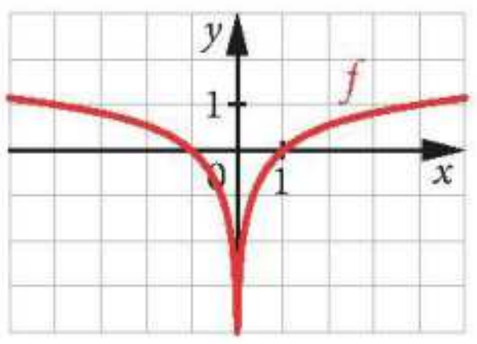
c)

d)

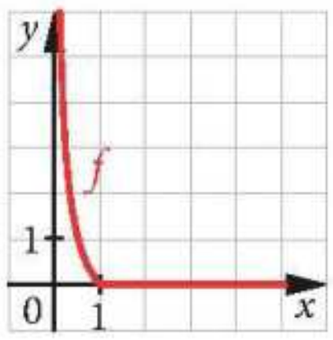


5.7. *Wskazówka*: Funkcję $f(x)$ można przedstawić w postaci: a) $f(x)=x$, b) $f(x)=x$ i $x>0$.

5.8. a)



b)



5.9. a) $a=\frac{1}{3}$, $b=-2$

b) *Wskazówka*: $g(x)=-\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+2$

5.10. a) $x\in(1;2\rangle\cup\langle 5;\infty)$ b) $x\in(0;1\rangle$ c) $x\in(-1;0\rangle$ d) $x\in\langle 1;\infty)$

5.11. a) $D=(-\infty;2)\cup(3;\infty)$ b) $D=(-\infty;1)\cup\left(2\frac{1}{2};\infty\right)$ **5.12.** 3 **5.13.** 50 dB **5.14.** a) 3 b) 20 cm c) 100 razy **5.15.** a) 7,4% b) po 53 dniach **5.16.** a) o 73% b) po 1 h 16 min

5.17. 4027 m^3 **5.18.** $m=\frac{3}{2}$ **5.19.** $m\in(12;\infty)$ **5.20.** $D=(-1;\infty)$. *Wskazówka*: $f(x)=3-\log_2(x+1)$ **5.21.** $D=(3;\infty)$. *Wskazówka*: $f(x)=\log_2(x+3)$ **5.22.** $D=\mathbf{R}-\{2\}$. *Wskazówka*: $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}|x-2|$

s. 399

1. P, P, F **3.** $a=4, b=3$

s. 402

6.1. F, F, P **6.2.** F, F, P **6.3.** P, F, P **6.4.** P, F, P **6.5.** a) $x=-4$ b) $x=3$ c) $x=5$ d) brak rozwiązań e) $x=1$ f) $x=-1$ g) $x=1$ h) $x=1$ i) $x=-\frac{1}{4}$ **6.6.** a) $x=-\frac{1}{2}$ b) $x=0$ c) $x=-5$ d) $x=-\frac{1}{2}$ e) $x=1\frac{1}{2}$ f) $x=1\frac{1}{2}$ g) $x=1\frac{1}{5}$ h) $x=-\frac{2}{5}$ i) $x=-\frac{1}{4}$

6.7. a) $x=1$ lub $x=4$ b) $x=-1$ lub $x=1$ lub $x=4$ c) $x=-1$ lub $x=\frac{2}{3}$ d) $x=-1$ lub $x=2$ **6.8.** a) $x=2$ lub $x=3$ b) brak rozwiązań c) $x=1$ d) $x=0$ e) $x=1$ f) $x=0$

6.9. a) $x<4$ b) $x<3$ c) $x\leqslant 0$ d) $x<\frac{1}{4}$ e) $x\leqslant -1$ f) $x>\frac{3}{5}$ g) $x>2\frac{1}{5}$ h) $x\geqslant\frac{1}{3}$

6.10. a) $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ b) $x\in(-\infty;-2\rangle$ c) $x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ d) $x\in\langle -1;\infty)$

6.11. a) $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ b) $x \in \langle 1; 2\rangle$ c) $x \in \langle -2; 2\rangle$ d) $x \in (0; 1)$ e) $x \in (-2; 3)$ f) $x = 1$ **6.12.** $x = 3$ **6.13.** $x < \frac{1}{2}$ **6.14.** $x = -3$

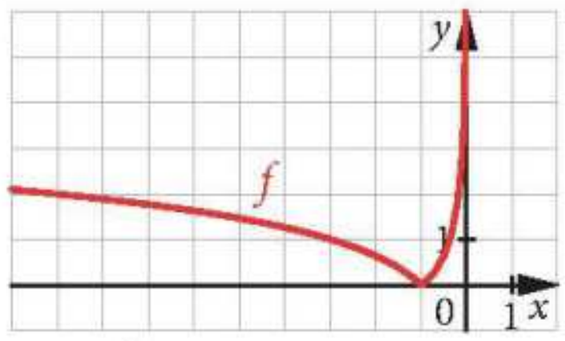
s. 407

7.1. F, P, P **7.2.** F, F, P **7.3.** P, P, F **7.4.** P, P, P **7.5.** a) $x = 4$ b) brak rozwiązań c) brak rozwiązań d) brak rozwiązań e) $x = 3$ f) $x = -1$ lub $x = 6$ g) $x = 6$ h) $x = -4$ lub $x = 1$ **7.6.** a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = 1$ d) $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$ **7.7.** a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (-2; 2)$ c) $x \in (21; \infty)$ d) $x \in \langle -4; 4)$ **7.8.** a) $x \in \left(-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right)$ b) $x \in \left(4\frac{5}{9}; 5\right)$ c) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$ d) $x \in (3; \infty)$ e) $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right\rangle$ f) $x \in \left(-2; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; 3)$ **7.9.** a) $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (4; \infty)$ b) $x \in \left(1\frac{9}{16}; 2\frac{1}{2}\right)$ c) $x \in (-6; 3) \cup (3; 12)$ d) $x \in \langle -6; -2) \cup (2; 6\rangle$ **7.10.** a) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 3$ b) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 128$ c) $x = \sqrt{10}$ lub $x = 100$ d) $x = \frac{1}{4}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 8$ **7.11.** $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$ **7.12.** $D = \left\langle -2\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; 2\sqrt{2}\right\rangle$ **7.13.** a) $x = 16\sqrt[7]{4}$ b) $x = 9$

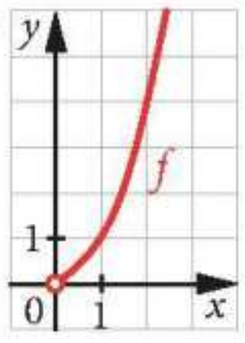
s. 409

1. C **2.** C **3.** A **4.** C **5.** A **6.** D **7.** B **8.** C **9.** D **10.** B **11.** C **12.** D **13.** B **14.** B **15.** B **16.** C **17.** C **18.** A **19.** B **20.** C **21.** B **22.** F, P, P **23.** P, F, P **24.** P, F, F **25.** F, P, P **26.** F, P, P **27.** P, P, P **28.** F, P, F **29.** P, P, P **30.** P, F, F **31.** F, F, P **32.** F, P, P **33.** F, P, P **34.** F, P, F **35.** P, P, F **36.** F, F, P **37.** F, F, P **38.** F, P, F **39.** F, P, F **41.** a) 0 b) 1 c) 0 d) 1 **42.** a) 3 b) 0 c) 3 d) 0 **43.** $\frac{1}{2}$ **44.** 2,77 **45.** a) 1 b) −2 c) 2 d) 0 **46.** a) 18 b) 49 c) 2 d) $1\frac{1}{3}$ e) 3 f) 6 **47.** $9^{\frac{1}{5}}$ **48.** a) $-\frac{2}{3}$ b) 1 c) $\frac{26}{81}$ d) 2 **49.** a) −1 b) 10 c) 4 d) −1 **50.** a) $x = 5$ b) $x = 1$ c) $x = 11$ d) $x = -3$ lub $x = 7$ **51.** a) $a - \frac{2}{a}$ b) $\frac{3}{2}a - 2$ c) $\frac{8 - 6a}{a}$ d) $\frac{8}{a + 2}$ **52.** a) > b) > c) = d) > **53.** $ZW = (1; \infty)$ **54.** $x = -1$ **55.** $a = \frac{1}{4}$ **56.** a) $x = 4$ lub $x = 5$ b) $x = -1$ c) $x = -1$ lub $x = 0$ d) $x = 1$ **57.** a) $x \in (-\infty; -1\rangle$ b) $x \in (-\infty; 4)$ **58.** a) $x = 9$ b) $x = 0$ c) $x = 2$ d) $x = -\frac{2}{3}$ **59.** a) $x \in \langle -4; \infty)$ b) $x \in (-\infty; -2\rangle$ c) $x \in (-4; \infty)$ d) $x \in \left\langle -4\frac{1}{4}; 8\right)$ **60.** a) $2\sqrt[5]{2}$ b) $\frac{6}{11}$ **64.** a) o 26% b) po 5 miesiącach

65. a)



b)



66. a) $D = (3; \infty)$ b) $D = (-5; -2)$ c) $D = (0; \infty)$ d) $D = (0; 1) \cup (1; 4)$ **67.** a) c b) Większe od 1 są c i f, pozostałe liczby są mniejsze od 1.

68. a) $x = -\frac{3}{5}$ b) $x = -\sqrt{34}$ lub $x = \sqrt{34}$ **69.** $x \in \langle -5; 4\rangle$ **70.** $x = 1$ **71.** a) $x \in (-3; \infty)$ b) $x \in (1; 2)$ **72.** $x \in \langle 1; \infty) \cup \{0\}$ **73.** $x = 2$ lub $x = 4$ **74.** $m \in (2; 3)$

Skorowidz

Brzeg koła 218

Cechy podobieństwa trójkątów 284, 285
cięciwa okręgu (koła) 217, 218
cosinus kąta 313, 344
cotangens kąta 313

Dwusieczna kąta 211
dziedzina wyrażenia wymiernego 156

Figury podobne 273
— przystające 273
funkcja homograficzna 190
— kwadratowa 8
— logarytmiczna 392
— wielomianowa 89
— wykładnicza 368
— wymierna 188
funkcje trygonometryczne 313
— równe 92

Jednomian stopnia n 90
jednomiany podobne 90
jedynka trygonometryczna 323, 353

Kąt środkowy 231
— wpisany 234
koło 218
konstrukcje geometryczne 212
krzywa logarytmiczna 392
— wykładnicza 368

Liczba logarytmowana 378
logarytm 378
— dziesiętny 378
— iloczynu 381
— ilorazu 382
— potęgi 383

Łuk okręgu 217

Nierówność kwadratowa 37
— trójkąta 208
— wielomianowa 145
— wymierna 180

Odległość punktu od prostej 219
okrąg 217
— opisany na trójkącie 226
— wpisany w trójkąt 224
okres połowicznego rozpadu 373
okręgi przecinające się 218
— rozłączne wewnętrznie 218
— — zewnętrznie 218
— styczne wewnętrznie 218
— — zewnętrznie 218
— współśrodkowe 219
ortocentrum 226

Pierścień kołowy 234
pierwiastek równania kwadratowego 22
— n-krotny wielomianu 140
— wielomianu 110
podobieństwo o skali k 273
podstawa logarytmu 378
podzielność wielomianów 123
postać iloczynowa funkcji kwadratowej 25
— kanoniczna funkcji kwadratowej 8
— ogólna funkcji kwadratowej 9
półokrąg 217
promień okręgu 217
— wodzący punktu 343
punkt styczności 221

Ramię wodzące kąta 343
redukcja wyrazów podobnych 90
rozwiązywanie trójkąta 315
równanie kwadratowe 22
— wielomianowe 110
— wymierne 171
różnica wielomianów 97

Siatka znaków 145
schemat Hornera 133
sieczna okręgu (koła) 217, 218
sinus kąta 313, 344
skracanie wyrażenia wymiernego 157
styczna do okręgu 221

suma algebraiczna 88
— wielomianów 97
symetralna odcinka 210

Średnia geometryczna 290
średnica okręgu (koła) 217, 218
środek ciężkości trójkąta 292

Tangens kąta 312, 344
tożsamość trygonometryczna 355
twierdzenie Bézouta 127
— o całkowitych pierwiastkach wielomianu 137
— o wymiernych pierwiastkach wielomianu 138
— odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 209
— — — Talesa 265
— o odcinkach stycznych 223
— o środkowych w trójkącie 292
— Pitagorasa 209
— Talesa 263

Wielokąt opisany na okręgu 255
— wpisany w okrąg 248
wielomian 88
— zerowy 89
wierzchołek paraboli 8, 9
wnętrze koła 218
wycinek kołowy 233
wyraz wolny wielomianu 91
wyrażenie wymierne 156
wyróżnik funkcji kwadratowej 9
wzory redukcyjne 346
— Viète'a 30
wzór na zamianę podstawy logarytmu 385

Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
log x	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
log x	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
log x	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
log x	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
log x	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
log x	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
log x	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
log x	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
log x	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

nowa era Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik *Prosto do matury 2* do zakresu podstawowego i rozszerzonego został opracowany z myślą o uczniach przygotowujących się do matury z matematyki w zakresie rozszerzonym. Ponad 1500 zadań z odpowiedziami pozwala wyćwiczyć umiejętności sprawdzane na maturze.

Pomoc w zrozumieniu

Przykładowe rozwiązania zadań typu maturalnego pokazują różne możliwości radzenia sobie z takimi zadaniami.

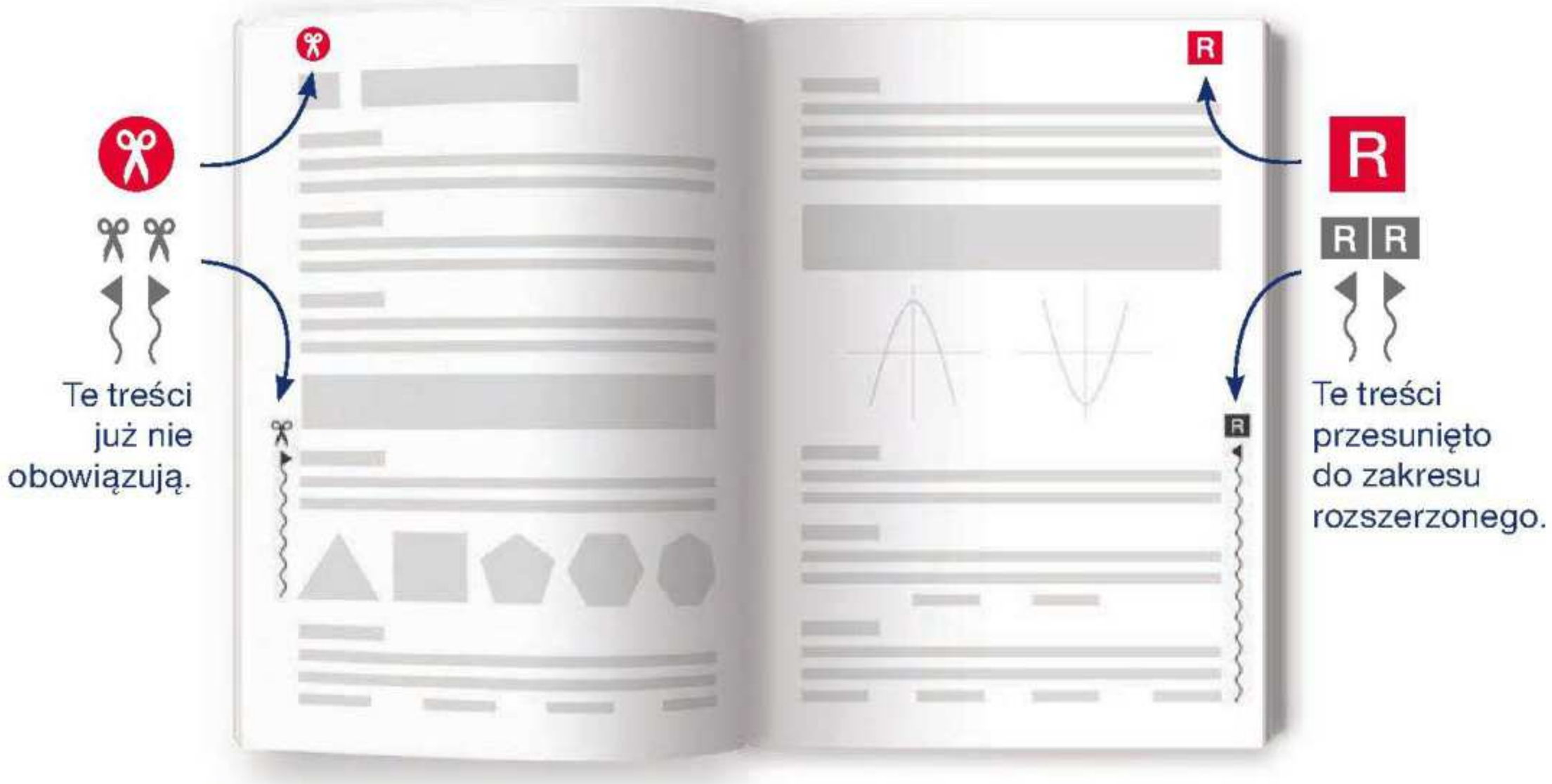
Porządkowanie i syntetyzowanie

Warto powtórzyć przypominają wiadomości z wcześniejszego etapu nauki.

Obszerne powtórzenia

Powtórzenie po każdym dziale zawiera zadania różnego typu, zarówno zamknięte, jak i otwarte.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia związane ze zmianami obowiązującymi od września 2024 r.



Czerwone ikony na górze strony informują, że na tej stronie są zmiany.
Ich dokładne umiejscowienie wskazują szare ikony z falkami.

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5089-2