

Powtórzenie

4



1. Liczby, wyrażenia algebraiczne

Definicje

- Liczbę naturalną k , która ma tylko dwa różne dzielniki: samą siebie oraz 1, nazywamy **liczbą pierwszą**.
- Dwie liczby naturalne nazywamy **względnie pierwszymi**, jeżeli ich jedynym wspólnym dzielnikiem jest 1.
- Zbiór liczb wymiernych: $Q = \left\{ x: x = \frac{p}{q} \text{ i } p \in Z \text{ i } q \in Z - \{0\} \right\}$
- Liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna, nazywamy liczbą niewymierną.
- Przedziały liczbowe ograniczone ($a < b$):
 - domknięty $\langle a; b \rangle = \{x: a \leq x \leq b \text{ i } a, b \in R\}$
 - otwarty $(a; b) = \{x: a < x < b \text{ i } a, b \in R\}$
 - lewostronnie domknięty $\langle a; b) = \{x: a \leq x < b \text{ i } a, b \in R\}$
 - prawostronnie domknięty $(a; b] = \{x: a < x \leq b \text{ i } a, b \in R\}$
- Przedziały liczbowe nieograniczone:
 - otwarty $(-\infty; b) = \{x: x < b \text{ i } b \in R\}$
 - otwarty $(a; \infty) = \{x: x > a \text{ i } a \in R\}$
 - lewostronnie domknięty $\langle a; \infty) = \{x: x \geq a \text{ i } a \in R\}$
 - prawostronnie domknięty $(-\infty; b] = \{x: x \leq b \text{ i } b \in R\}$
- $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$ i $n \in N$
- Jeżeli n jest dodatnią liczbą parzystą oraz $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
Jeżeli n jest liczbą nieparzystą większą od 1, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
- Jeżeli $a \geq 0$, $n \in N$, $n > 1$, to $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- Jeżeli $a > 0$, $k \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, to $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.
- Wartością bezwzględną** $|a|$ liczby a nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0, mierzoną w odcinkach jednostkowych.
- $|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

- **1 procent** pewnej **wielkości** to 0,01 tej wielkości: $1\% \cdot w = \frac{1}{100} \cdot w$.
- **Średnią arytmetyczną** dwóch liczb rzeczywistych a i b nazywamy liczbę $\frac{a+b}{2}$.
- **Średnią geometryczną** dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{a \cdot b}$.

Twierdzenia

- Dla dowolnych liczb całkowitych a i b , $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że $a = q \cdot b + r$, gdzie $r \geq 0$ i $r < |b|$.

- **Własności działań na potęgach**

Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a p i r dowolnymi liczbami wymiernymi, to:

$$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$$

$$\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$$

$$(a^p)^r = a^{p \cdot r}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

- **Własności działań na pierwiastkach**

Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1 i k jest liczbą naturalną, to:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ gdy } b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Dla n będącego liczbą parzystą zakładamy, że liczby a i b są nieujemne.

- **Własności wartości bezwzględnej** (dla $a \in \mathbf{R}$ i $b \in \mathbf{R}$):

$$|a| = |-a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ dla } b \neq 0$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| \text{ dla dodatnich liczb naturalnych } n$$

- Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a - b|$.
- **Wzory skróconego mnożenia**

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	kwadrat sumy
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	kwadrat różnicy
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	sześcian sumy
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	sześcian różnicy
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	różnica kwadratów
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	różnica sześciątów
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	suma sześciątów
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$	różnica n -tych potęg

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.
- Zasady stosowane podczas przybliżania liczb rzeczywistych:
 - jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę pozostawiamy bez zmian (**przybliżenie z niedomiarem**),
 - jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest większa od 5 lub równa 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1 (**przybliżenie z nadmiarem**).
- **Zaokrąglenie liczby naturalnej do n miejsc znaczących** polega na pozostawieniu jej pierwszych n cyfr i zastąpieniu pozostałych zerami, z tym że do ostatniej cyfry stosujemy reguły przybliżania. Podobnie zaokrąglamy liczby dziesiętne. Na przykład zaokrągleniem liczby 675,3527:
 - do dwóch cyfr znaczących jest liczba 680,
 - do trzech cyfr znaczących jest liczba 675.
 Przy zaokrąglaniu do cyfr po przecinku mówimy o przybliżeniach z dokładnością – do jednego miejsca po przecinku: 675,4, do dwóch miejsc po przecinku: 675,35 itd.

Liczby dziesiętne mniejsze od 1 zaokrąglamy podobnie, np. zaokrągleniem liczby 0,0004526 do jednego miejsca znaczącego jest liczba 0,0005, do dwóch miejsc znaczących – liczba 0,00045.

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Ile razy liczba $0,514^2$ jest mniejsza od liczby 514^2 ?

- A. 100 000 razy B. 1 000 000 razy C. 1000 razy D. 10 000 razy

1.2. Różnica między dwiema liczbami jest równa 5, a różnica między ich kwadratami to 95. Ile wynosi suma tych liczb?

- A. 90 B. 25 C. 19 D. 24

1.3. Wskaż iloczyn równy wyrażeniu $3x^2 + 24xy + 48y^2$.

- A. $(3x + 4y)^2$ C. $(\sqrt{3}x + 4y)^2$
B. $(3x + 4\sqrt{3}y)^2$ D. $3(x + 4y)^2$

1.4. Wskaż wyrażenie, które otrzymamy po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $2(x - 3) - [3(2x - 1) - 4]$.

- A. $-1 - 3x$ B. $4 - 4x$ C. $-3 - 4x$ D. $1 - 4x$

1.5. Zosia jest o p lat starsza od Jasia. Ile lat ma Jaś, jeżeli razem mają m lat?

- A. $2(m - p)$ B. $\frac{m + p}{2}$ C. $\frac{p - m}{2}$ D. $\frac{m - p}{2}$

1.6. W domowej bibliotece Karola 15% stanowią książki przyrodnicze. Ile tomów liczy księgozbiór Karola, jeżeli oprócz książek przyrodniczych ma on jeszcze 748 książek?

- A. 1270 B. 880 C. ponad 4980 D. 930

1.7. Najlżejsza z trzech drewnianych belek waży 63 kg, a najcięższa 84 kg. Która z podanych liczb nie może być średnią masą (w kg) tych trzech belek?

- A. 69 B. 72 C. 75,5 D. 76

1.8. Masę Ziemi równą $5,975 \cdot 10^{27}$ g można wyrazić w kilogramach jako

- A. $597,5 \cdot 10^{25}$. B. $59,75 \cdot 10^{24}$. C. $597,5 \cdot 10^{26}$. D. $5975 \cdot 10^{21}$.

1.9. Która z podanych liczb jest równa liczbie $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}}$?

- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $\sqrt{22}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. B

1.2. C

1.3. D

1.4. D

1.5. D

1.6. B

1.7. A

1.8. D

1.9. B

1.10. B

1.10. Która z podanych liczb jest równa liczbie $5^{\frac{7}{3}}$?

- A. $5 \cdot \sqrt[3]{5}$ B. $25 \cdot \sqrt[3]{5}$ C. $5 \cdot \sqrt[3]{5^2}$ D. $5^7 \cdot 5^{\frac{1}{3}}$

1.11. B

1.11. Która z podanych liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $-3x \geq -10$?

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $3\frac{2}{3}$ C. $2\frac{1}{3}$ D. 2

1.12. D

1.12. O liczbach x, y wiadomo, że $xy < 0$ i $x > y$. Który z podanych warunków jest prawdziwy?

- A. $x < 0$ B. $x - y < 0$ C. $xy + y > 0$ D. $y < 0$

1.13. B

1.13. Dwadzieścioro dziewcząt stanowi 62,5% liczby wszystkich uczniów w klasie. Ilu chłopców jest w tej klasie?

- A. 9 B. 12 C. 16 D. 32

1.14. C

1.14. Wskaż zależność fałszywą.

- A. $\sqrt{(-237)^2} = 237$ C. $-13^2 = 169$
 B. $2\sqrt[5]{-32} = -4$ D. $-3\sqrt[3]{-27} = 9$

1.15. D

1.15. Wskaż iloczyn równy wyrażeniu $5x^2 + 30xy + 45y^2$.

- A. $(5x + 3y)^2$ B. $5(x + 2y)^2$ C. $(\sqrt{5}x + 3y)^2$ D. $5(x + 3y)^2$

1.16. C

1.16. O ile zwiększy się pole powierzchni prostokątnego boiska, jeżeli dwukrotnie zwiększymy jego wymiary (długość i szerokość)?

- A. o 100% B. o 200% C. o 300% D. o 400%

1.17. A

1.17. Która z wymienionych liczb jest najmniejsza?

- A. $\left[(\sqrt{5})^2\right]^{\frac{1}{3}}$ B. $(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}$ C. $(5\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}}$

1.18. A

1.18. Jurki liczą o 25% więcej mieszkańców niż Jaśki. O ile procent mniej mieszkańców mają Jaśki niż Jurki?

- A. o 20% B. o 25% C. o 75% D. o 80%

1.19. A

1.19. Średnia arytmetyczna dwóch liczb, z których jedną jest $\sqrt{7}$, wynosi $\sqrt{5}$. Wskaż drugą liczbę.

- A. $2\sqrt{5} - \sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7} - \sqrt{5}$ C. $2\sqrt{35}$ D. $2\sqrt{5} + \sqrt{7}$

1.20. C

1.20. W pewnej fabryce liczba kobiet stanowi 35% liczby wszystkich zatrudnionych. Mężczyzn jest o 252 więcej niż kobiet. Wskaż liczbę pracowników tej fabryki.

- A. 842 B. 752 C. 840 D. 954

1.21. Liczby $a, b, c \in \mathbf{R}$ spełniają warunek $a(b - c) = 0$.

- A. Wynika stąd, że $a = 0$.
 B. Wynika stąd, że $b = 0$.
 C. Wynika stąd, że $b = c$.
 D. Z podanego warunku nie można wywnioskować żadnej z równości wymienionych w punktach A, B, C.

1.21. D

W zadaniach 1.22–1.25 oceń prawdziwość podanych zdań.

1.22. Dane są liczby $a, b \in \mathbf{R}$, gdzie $a < 0$.

- A. $b - a = -(a - b)$ B. $(-a)^2 = a^2 - 2a^2$ C. $a > -a$

1.22. P, F, F

1.23. Dane są liczby $a, b, c \in \mathbf{R}$ takie, że $0 < a < b < c$. Zachodzi nierówność

- A. $\frac{b}{a} < \frac{b}{c}$. B. $\frac{c-a}{b-c} < \frac{b-a}{b-c}$. C. $ac > ab$.

1.23. F, P, P

1.24. Liczba

- A. $\sqrt{2\sqrt{32}}$ jest wymierna.
 B. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ jest równa liczbie $\sqrt{2} + 1$.
 C. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ należy do przedziału $(3,7; 3,8)$.

1.24. F, P, P

1.25. Suma kilku kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 0.

- A. Liczba wszystkich składników rozpatrywanej sumy jest parzysta.
 B. Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa 0.
 C. Iloczyn tych liczb jest równy 0.

1.25. P, P, F

1.26. Wskaż dwa wyrażenia równe wyrażeniu $2x^2 - 24xy + 72y^2$.

- A. $(2x - 6y)^2$ C. $2(x - 6y)^2$ E. $(\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y)^2$
 B. $(2x - 6\sqrt{2}y)^2$ D. $2(x - 4y)^2$ F. $\sqrt{2}(x - 6y)^2$

1.26. C, E

1.27. Rozwinięcie dziesiętne liczby a jest równe 2,1313131313... **Dokończ zdanie.**

Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.

Liczba a jest

1.27. A2

A.	wymierna,	ponieważ	1.	jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone.
B.	niewymierna,		2.	jej rozwinięcie dziesiętne jest okresowe.

1.28. $-2, 0, 2, 4$

1.29. a) np. $1,52$

b) np. $1\frac{2}{3}$

c) np. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

1.30. $10\ 050$

1.31. Liczba n jest cztery razy większa od m .

1.32. a) $(a + 12)^2$

b) $(k - \sqrt{6}m)^2$

c) $(1 - 2x)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}y + 4z\right)^2$

1.33. a) $(a - 15)(a + 15)$

b) $\left(\frac{1}{2}b - 5d^2\right)\left(\frac{1}{2}b + 5d^2\right)$

c) $(m - p - k)(m - p + k)$

d) $(x + y)(x + 3y)$

1.34. $\frac{24 + \sqrt{2}}{14}$

1.35. $3\frac{1}{5} < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$

1.36. $2\text{ min } 5\text{ s}$

1.28. Znajdź wszystkie liczby całkowite $a \neq 1$, dla których wartość wyrażenia $\frac{a+2}{a-1}$ jest liczbą całkowitą.

1.29. Podaj przykład liczby należącej do przedziału $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$, która ma rozwinięcie dziesiętne

a) skończone.

b) nieskończone okresowe.

c) nieskończone nieokresowe.

1.30. Wśród pięciu kolejnych liczb całkowitych środkową liczbą jest 2010. Ile jest równa suma tych liczb?

1.31. Dane są liczby:

$$m = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \cdot \left[6,4 - 3\frac{3}{5} \cdot 0,(3)\right] : 13$$

$$n = 15,2 + 3,2 \cdot \left(1,25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1,25\right) : 6,2 - 1\frac{1}{5}$$

Sprawdź, ile razy jedna z liczb m i n jest większa od drugiej.

1.32. Zapisz wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

a) $a^2 + 24a + 144$

c) $1 - 4x + 4x^2$

b) $k^2 - 2\sqrt{6}km + 6m^2$

d) $\frac{1}{4}y^2 + 4yz + 16z^2$

1.33. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $a^2 - 225$

c) $m^2 - 2mp + p^2 - k^2$

b) $0,25b^2 - 25d^4$

d) $x^2 + 4xy + 3y^2$

1.34. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia $\frac{3 - 5\sqrt{2}}{2 - 3\sqrt{2}}$.

1.35. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$3\sqrt{2}, \quad 3\frac{1}{5}, \quad 2\sqrt{5}, \quad 2\sqrt{3}$$

1.36. Tętno zdrowego człowieka wynosi 12 uderzeń serca w ciągu 10 sekund. W jakim czasie naliczymy 150 uderzeń serca?



1.37. Na podstawie diagramu określ

- jaki procent sumy wszystkich podanych kwot odliczeń stanowiły odliczenia na odpłatne studia.
- o ile procent podatników więcej skorzystało z ulgi na zakup przyrządów i pomocy naukowych niż z ulgi na doksztalcanie i doskonalenie zawodowe.
- które dane przedstawione na wykresie są sprzeczne.



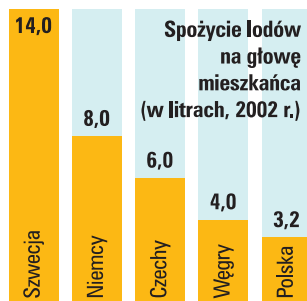
1.37. a) 57,4%

b) o 26,48%

c) Średnia kwota odliczeń na dojazd dzieci do szkół nie jest ilorazem wielkości z dwóch pierwszych diagramów.



1.38. Na podstawie diagramu odpowiedz na podane pytanie.



1.38. a) o 100%

b) o 50%

c) 22,9%

- O ile procent więcej lodów spożył rocznie Niemiec od Węgra?
- O ile procent mniej lodów zjadł Węgier od mieszkańca Niemiec?
- Jaki procent rocznego spożycia lodów przez Szweda stanowiło spożycie lodów przez Polaka?

1.39. o 32

1.40. 80%

1.41. 780 zł

1.42. 100 wiadomości

1.43. 400 000 zł

1.44. 24 h 37 min

1.45. o 37,5%

1.46. o 189%

1.47. Pole trójkąta zmniejszyło się o 9%.

1.48. 9 uczniów

1.39. O ile punktów procentowych liczniejsza jest grupa osób, które nigdy nie robiły zakupów u akwizytorów, od grupy osób, które takiego zakupu dokonały co najmniej dwa razy?

1.40. Drużyna przegrała 4 z 20 rozegranych meczów. Remisów nie było. Jaki procent liczby rozegranych meczów wygrała ta drużyna?

1.41. Pewien towar po podwyżce o 20%, a następnie obniżce o 36 zł, kosztuje 900 zł. Jaka była cena tego towaru przed zmianami?

1.42. W poczcie elektronicznej Magdy spam stanowi 10% wśród 1600 wiadomości. Ile spamu powinna usunąć, aby pozostały stanowił 4% wszystkich wiadomości?

1.43. Pan Stanisław, właściciel 75% akcji firmy, sprzedał $\frac{1}{5}$ swojej własności za 60 000 zł. Jaka jest wartość wszystkich akcji firmy?



1.44. Czas obrotu Marsa wokół własnej osi jest o 2,6% dłuższy od czasu obrotu Ziemi wokół jej osi. Jak długo trwa obrót Marsa?

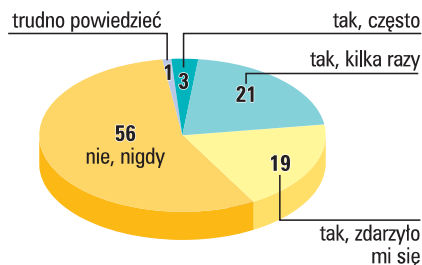
1.45. Honorata ma o 60% więcej pocztówek niż jej brat Paweł. O ile procent mniej pocztówek ma Paweł?

1.46. Długość każdego z boków prostokąta zwiększono o 70%. O ile procent wzrosło pole prostokąta?

1.47. Długość boku trójkąta zmniejszono o 30%, a wysokość opuszczoną na ten bok zwiększono o 30%. Czy pole trójkąta się zmieniło? Jeśli tak, to o ile procent?

1.48. Praca domowa z matematyki składała się z dwóch zadań obowiązkowych i trzeciego dodatkowego. Nauczycielka, chcąc zachęcić uczniów 32-osobowej klasy do rozwiązywania trudniejszych zadań, poinformowała, że rozwiązanie zadania dodatkowego zwalnia z obowiązku wykonania zadań pierwszego i drugiego. Ilu uczniów rozwiązało trzecie zadanie, jeżeli tylko pierwsze zadanie zrobiło 3 uczniów, tylko drugie – 5, a pierwsze i drugie – 15 uczniów?

Czy kupowałaś jakieś towary od akwizytora?
(odpowiedzi w proc.)



1.49. Wyznacz liczbę, której 0,25% wynosi $\frac{8 \cdot 4\frac{1}{4} - \left[11,2 : 9\frac{1}{3} + \left(-2\frac{1}{3} \right) : \frac{5}{3} \right]}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{7}}$.

1.50. Oblicz.

a) $\left(\frac{2^{15} - 8^4}{4^7} + 2^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(12^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}$

1.51. Oblicz.

a) $\frac{\left(\frac{3}{5} \right)^{-3} \cdot 5^{-2}}{2 \cdot \left(\frac{3}{8} \right)^{-1} - 3^4 \cdot \left(4\frac{1}{2} \right)^{-3}}$
 b) $\left[\left(11 - 2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(11 + \left(2^3 \cdot 5 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$

1.52. Oblicz wartość wyrażenia $a^{-\frac{3}{2}} b \cdot (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} \left[(a^{-1})^{-\frac{2}{3}} \right]^3$ dla $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

1.53. Zakładamy, że $a > 0$ i $b > 0$. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left[\frac{\sqrt[3]{a^{-2}} \cdot b \cdot \sqrt{a \cdot b^{-1}}}{\sqrt[4]{a \cdot b^2}} \right]^{-2}$ oraz oblicz jego wartość dla $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{2}$.

1.54. Oblicz.

a) $\frac{1}{4} + \left\{ 1 + \left[4 \cdot \left(1 + 3^{-1} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}$ d) $\frac{2\sqrt{5} - 10}{5\sqrt{45} - 4\sqrt{20} - \sqrt{500}}$
 b) $\frac{3^{-2} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{-1}}{\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{9^{-\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{27}}$ e) $\left| \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7} + 5}{\sqrt{7} + 3} \right)^2} - \sqrt{(\sqrt{7} - 5)^2} \right|$
 c) $\frac{5^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^2}{5^{-3} \cdot \sqrt[3]{25^{-\frac{3}{2}}}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{-54} - \sqrt[3]{-16} - \sqrt[3]{-\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{1 - 4\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{6 - 7}}$

1.55. Która z liczb jest mniejsza: $m = 3\sqrt{2} - 1$ czy $n = 2\sqrt{2} + 1$?

1.56. Zbadaj, czy liczby $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ i $(5 + 2\sqrt{6})^{-\frac{1}{2}}$ są równe czy różne.

1.49. 800

1.50. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{25}$

1.51. a) $\frac{1}{24}$ b) 40

1.52. $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

1.53. $a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{4}{3}}, \sqrt[4]{2}$

1.54. a) 1 b) 9 c) $\frac{1}{25}$

d) $\frac{2(\sqrt{5} - 1)}{3}$ e) 1 f) $\sqrt[3]{2}$

1.55. $m < n$

1.56. Dane liczby są równe.
Wskazówka: Zauważ, że wyrażenie $5 + 2\sqrt{6}$ jest kwadratem sumy dwóch pierwiastków kwadratowych.

2. Funkcje. Funkcja liniowa

Definicje

- Funkcję $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją liniową zmiennej x** . Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** tej funkcji.
- Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy:
 - **oznaczonym**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie; jego wykresem są dwie proste przecinające się,
 - **nieoznaczonym**, jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań; jego wykresem jest jedna prosta,
 - **sprzecznym**, jeżeli nie ma rozwiązania; jego wykresem są proste równoległe niepokrywające się.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Współczynnik a występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej będącej wykresem tej funkcji do osi x .
- Funkcja $f(x) = ax + b$ jest:
 - rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$,
 - malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$,
 - stała dla $a = 0$.
- Każda funkcja postaci $f(x) = ax + b$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest monotoniczna.
- Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$:
 - ma jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$,
 - ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b = 0$,
 - nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
- Wykresem równania postaci $ax + by = c$ z niewiadomymi x, y takiego, że współczynniki a i b nie są jednocześnie równe 0, jest prosta, przy czym:
 - jeżeli $b \neq 0$, to jest to wykres funkcji liniowej o wzorze $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$,
 - jeżeli $b = 0$, to jest to prosta prostopadła do osi x i przecinająca ją w punkcie $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.14 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

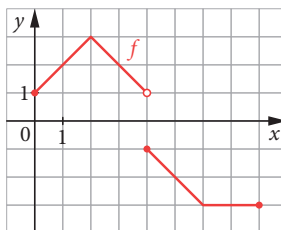
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż liczbę miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(1-x)(2+x)}$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.2. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle 0; 8 \rangle$. Wskaż przedział, w którym funkcja f jest malejąca.

- A. $\langle 0; 2 \rangle$ C. $\langle 4; 8 \rangle$
B. $\langle 2; 6 \rangle$ D. $\langle 6; 8 \rangle$



2.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres przechodzi przez punkt $(-3, 5)$.

- A. $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ C. $f(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$
B. $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ D. $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

2.4. Wskaż wzór funkcji rosnącej, której miejsce zerowe jest liczbą dodatnią.

- A. $f(x) = (\sqrt{5} - 2)x + \sqrt{5} - 2$ C. $f(x) = (\sqrt{5} - 2)x + \sqrt{5} - 3$
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 3)x + \sqrt{5} - 2$ D. $f(x) = (\sqrt{5} - 3)x + \sqrt{5} - 3$

2.5. Wskaż wartość k , dla której miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + k - 1$ jest liczba 3.

- A. $k = -5$ B. $k = -1$ C. $k = 1$ D. $k = 5$

2.6. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x+3}{2} - \frac{5-2x}{3} < 2x$.

- A. $(-\infty; -\frac{1}{5})$ B. $(-\frac{1}{5}; \infty)$ C. $(-\infty; -\frac{1}{13})$ D. $(-\frac{1}{13}; \infty)$

2.7. Liczby x, y spełniają warunki: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$ oraz $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Wskaż wartość y .

- A. $\frac{2}{3}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{5}{6}$

2.8. O liczbach x, y wiadomo, że $x > 0$ i $y > 0$ oraz $\frac{x-y}{3} = \frac{11}{2,5}$. Która z podanych zależności jest prawdziwa?

- A. $y < x$ B. $y > x$ C. $y = x$ D. $y \geq x$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. A

2.2. B

2.3. B

2.4. C

2.5. A

2.6. B

2.7. C

2.8. A

2.9. C

2.9. Liczba $x = \frac{1}{m+3}$. Ile jest równe $\frac{3}{x}$?

- A. $\frac{3}{m+3}$ B. $\frac{m+3}{3}$ C. $3(m+3)$ D. $3m+1$

2.10. C

2.10. Wskaż parę liczb (x, y) spełniającą układ równań $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$.

- A. (1, 4) B. (-3, 2) C. (-1, 3) D. (-7, 0)

2.11. B

2.11. Wskaż układ równań, który nie ma rozwiązań.

- A. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x - 3y = 7 \\ x - y = 14 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2.12. A

2.12. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ z niewiadomymi x, y jest para liczb (1, -1). Wskaż wartość współczynnika m .

- A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $m = 2$ D. $m = 1$

2.13. D

2.13. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $|2 - x| < 3$.

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(-5; 1)$ D. $(-1; 5)$

2.14. C

2.14. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $2|x + 2| > 5 + x$.

- A. $(-3; \infty)$ B. $(1; \infty)$ C. $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ D. $(-3; 1)$

W zadaniach 2.15–2.17 oceń prawdziwość podanych zdań.

2.15. F, P, P

2.15. Dane jest równanie $(m - 1)x + m = 0$ z niewiadomą x .

- A. Dla $m = 1$ równanie jest tożsamościowe.
 B. Dla $m = 1$ równanie jest sprzeczne.
 C. Dla $m = \sqrt{2}$ równanie ma jedno rozwiązanie.

2.16. F, P, P

2.16. Dane jest równanie $kx - m = 2 + x$ z niewiadomą x oraz parametrami k i m .

- A. Dla $k = 0$ i $m = 1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.
 B. Dla $k = 1$ i $m = -2$ równanie jest tożsamościowe.
 C. Dla $k = 1$ i $m = 1$ równanie jest sprzeczne.

2.17. P, P, P

2.17. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m :

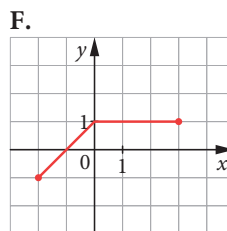
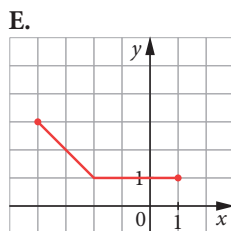
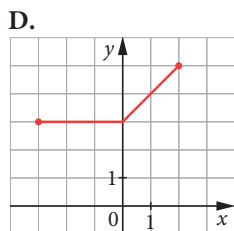
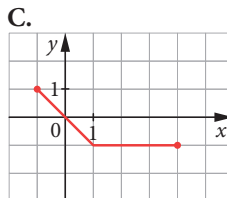
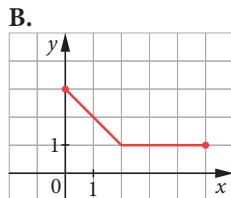
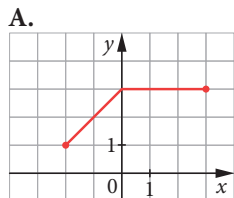
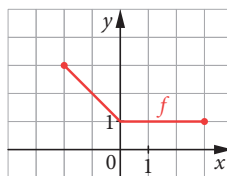
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ mx + 4y = 2m - 4 \end{cases}$$

- A. Dla $m = -1$ rozwiązaniem tego układu jest para liczb o przeciwnych znakach.
 B. Dla $m = 6$ ten układ jest nieoznaczony.
 C. Dla $m = 1$ rozwiązaniem tego układu jest para liczb (2, -1).

2.18. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -2; 3 \rangle$. Funkcje g oraz h są określone następująco:

$$g(x) = f(x - 2) \text{ i } h(x) = f(-x) + 2$$

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji, w tym wykresy funkcji g oraz h . Dla każdej z funkcji g oraz h wskaż rysunek, na którym jest jej wykres.

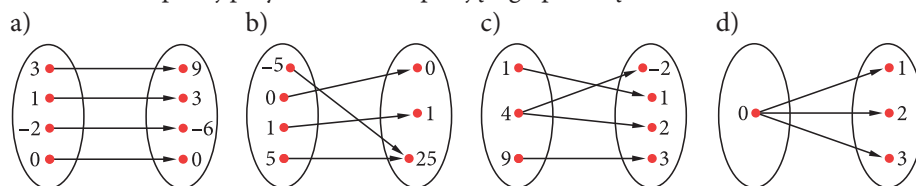


2.19. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$ jest zbiór

A.	$\mathbb{R} - \{1\}$,	ponieważ	1.	$f(x) = \frac{1}{x}$.
B.	$\mathbb{R} - \{0\}$,		2.	$x^2 - x = 0$ dla $x = 0$ lub $x = 1$.
C.	$\mathbb{R} - \{0, 1\}$,		3.	$x - 1 = 0$ dla $x = 1$.

2.20. Czy podany diagram przedstawia funkcję? Jeśli tak, określ jej dziedzinę i zbiór wartości oraz podaj przykład wzoru opisującego podaną zależność.



2.18. B. $g(x)$, D. $h(x)$

2.19. C2

2.20. a) tak, $D = \{-2, 0, 1, 3\}$, $ZW = \{-6, 0, 3, 9\}$, np. $y = 3x$
 b) tak, $D = \{-5, 0, 1, 5\}$, $ZW = \{0, 1, 25\}$, np. $y = x^2$
 c) nie d) nie

2.21. $y = 2x - 1$,
 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $ZW = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

2.22. a) $\mathbb{R} - \{-2\}$

b) $\left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

c) $(-\infty; 5)$

d) $\langle -3; 4 \rangle$

e) $\left\langle \frac{1}{3}; 3 \right\rangle \cup (3; \infty)$

f) $(2; \infty)$

g) $\langle -3; 6 \rangle$

h) $(-5; 5) \cup (5; \infty)$

2.23. $f(-3) = -6$, $f(0) = \frac{3}{2}$,
 $f(\sqrt{2}) = \frac{8-5\sqrt{2}}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$,
 $f(3) = 0$

2.24. a) $\{0, 4, 6\}$

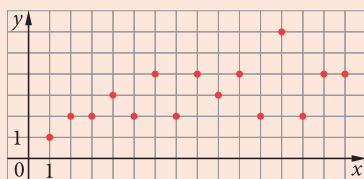
b) $\{-1, 0, -4\}$

c) $\{0, 1, 3\}$

d) $\{0, -1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

2.25. $f(x) = 0,85x + 5$,
 $D = \{40, 52, 68, 84, 120\}$,
 $ZW = \{39, 49, 2, 62, 8, 76, 4, 107\}$

2.26.



wartość funkcji dla każdej liczby pierwszej: 2; wartość największa: 6 dla $x = 12$, wartość najmniejsza: 1 dla $x = 1$

2.27. $f(n) = \frac{60-n}{2n}$,
 $D = \{3, 4, \dots, 59\}$

2.21. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie naturalnej mniejszej od 6 przyporządkowuje wartość dwukrotnie większą od tej liczby i pomniejszoną o 1. Napisz wzór tej funkcji, określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

2.22. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt{2 + 4x}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{5-x}}$

d) $f(x) = \sqrt{x+3} - 2\sqrt{4-x}$

e) $f(x) = \sqrt{3x-1} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{4x-8}}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = \sqrt{x+3} - \frac{3x-1}{\sqrt{6-x}}$

h) $f(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}} - \frac{2x}{\sqrt{x+5}}$

2.23. Dany jest zbiór $A = \{-3, -2, 0, \sqrt{2}, 2, 3\}$ i funkcja $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$. Oblicz wartość funkcji f dla tych liczb ze zbioru A , które należą do jej dziedziny.

2.24. Dany jest wzór funkcji f i jej zbiór wartości ZW . Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które mogą tworzyć dziedzinę tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $ZW = \{-2, 0, 1\}$

b) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$, $ZW = \left\{-1, -\frac{2}{3}, 2\right\}$

c) $f(x) = 2^x - 1$, $ZW = \{0, 1, 7\}$

d) $f(x) = x^2$, $ZW = \{0, 1, 2\}$

2.25. Sprzedawca oferował rękawiczki, których ceny w zależności od gatunku materiału były równe: 40 zł, 52 zł, 68 zł, 84 zł i 120 zł. Pewnego dnia zmienił ceny, obniżając każdą o 15%, a następnie dodając 5 zł. Napisz wzór funkcji opisującej zmianę cen rękawiczek. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

2.26. Każdej dodatniej liczbie naturalnej można przyporządkować liczbę jej naturalnych dzielników. Narysuj wykres tej funkcji, przyjmując, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych nie większych od 15. Jaką wartość ma funkcja dla argumentów będących liczbami pierwszymi? Podaj największą wartość i najmniejszą wartość tej funkcji w rozpatrywanym zbiorze.

2.27. Dany jest graniastosłup prawidłowy n -kątny. Wysokość tego graniastosłupa wynosi 1, a suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 60. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która liczbie n przyporządkowuje długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

2.29. a) $D = \langle -6; 5 \rangle$, $ZW = (-2; 6)$; brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: $-4, -1$; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -4 \rangle \cup (-1; 5)$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; -1)$; funkcja malejąca w przedziale $\langle -6; -1 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 5 \rangle$; $f(-6) = 5$, $f(0) = 2$, $f(2) = 4$; równanie $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup \langle 6; \infty \rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; 0) \cup \langle 3; 4 \rangle \cup (5; 6)$, 2 rozwiązania dla $m \in \langle 0; 3 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$

b) $D = (-6; -2) \cup (0; \infty) \cup \{-1\}$, $ZW = (-2; \infty)$; brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: $-2, -1, 2$; $h(x) > 0$ dla $x \in (-6; -2) \cup (2; \infty)$; $h(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-6; -2)$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$; $x = -6 \notin D$, $x = 0 \notin D$, $h(2) = 0$; równanie $h(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; 0) \cup (0; 2) \cup \langle 5; \infty \rangle$, 2 rozwiązania dla $m \in (2; 5)$, 3 rozwiązania dla $m = 0$

2.28. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{4x^2 - 12x + 9}{x - 1}$

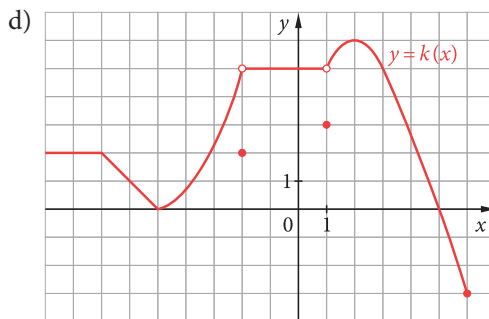
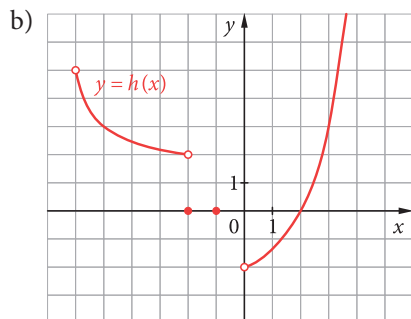
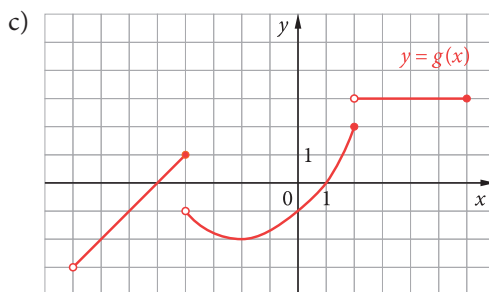
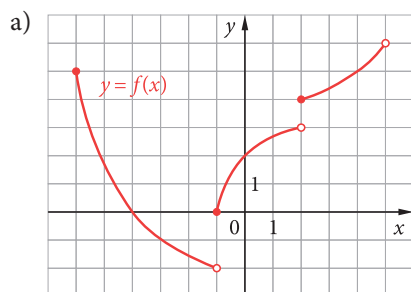
b) $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$

c) $f(x) = (x - 1)(x + 2)\sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3, x \in \mathbf{N}$

2.29. Odczytaj z podanego wykresu:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- najmniejszą wartość i największą wartość funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,
- zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne),
- przedziały monotoniczności funkcji,
- wartości funkcji dla argumentów $-6, 0$ i 2 ,
- liczbę rozwiązań równania $y = m$ w zależności od wartości m .



2.30. Skorzystaj z wykresów funkcji z poprzedniego zadania i podaj

- a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) + 3$.
 b) liczbę rozwiązań równania $-h(x) - 2 = m$ w zależności od wartości m .
 c) przedziały monotoniczności funkcji $y = g(x + 1) - 2$.
 d) wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $y = k(-x) + 1$.

2.29. c) $D = (-8; 6)$, $ZW = (-3; 2) \cup \{3\}$; brak wartości najmniejszej, wartość największa: 3 dla $x \in (2; 6)$; miejsca zerowe: $-5, 1$; $g(x) > 0$ dla $x \in (-5; -4) \cup (1; 6)$; $g(x) < 0$ dla $x \in (-8; -5) \cup (-4; 1)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-8; -4)$ i $(-2; 2)$, malejąca w przedziale $(-4; -2)$, stała w przedziale $(2; 6)$; $g(-6) = g(0) = -1$, $g(2) = 2$; równanie $g(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-3; -2) \cup (1; 2)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-1; 1) \cup \{-2\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; -1)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$
d) $D = (-\infty; 6)$, $ZW = \{-3; 6\}$; wartość najmniejsza: -3 dla $x = 6$, wartość największa: 6 dla $x = 2$; miejsca zerowe: $-5, 5$; $k(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5)$; $k(x) < 0$ dla $x \in (5; 6)$; funkcja stała w każdym z przedziałów $(-\infty; -7)$ i $(-2; 1)$, malejąca w każdym z przedziałów $(-7; -5)$ i $(2; 6)$, rosnąca w każdym z przedziałów $(-5; -2)$ i $(1; 2)$; $k(-6) = 1$, $k(0) = 5$, $k(2) = 6$; równanie $k(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup (6; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \{-3; 0\} \cup \{6\}$, 2 rozwiązania dla $m \in (2; 3) \cup (3; 5) \cup (5; 6) \cup \{0\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (0; 2) \cup \{3\}$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \{2, 5\}$

2.28. a) $\frac{3}{2}$ **b)** -3

c) 0, 1 **d)** 3

2.30. a) $D = \langle -4; 7 \rangle$,
 $ZW = (1; 9)$

b) równanie $-h(x) - 2 = m$ ma:
 0 rozwiązań dla $m \in \langle 0; \infty \rangle$,
 1 rozwiązanie dla
 $m \in (-\infty; -7) \cup \langle -4; -2 \rangle \cup (-2; 0)$,
 2 rozwiązania dla $m \in (-7; -4)$;
 3 rozwiązania dla $m = -2$

c) rosnąca w przedziale $(-9; -5)$,
 malejąca w przedziale $(-5; -3)$,
 niemalejąca w przedziale $(-3; 5)$

d) wartość najmniejsza: -2
 dla $x = -6$, wartość największa: 7
 dla $x = -2$

2.31. $D = \langle -8; 10 \rangle$, $ZW = \langle 3; 8 \rangle$

2.32. a) malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$

b) rosnąca w przedziale $\langle -5; -1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$

2.33. f – rosnąca,
 g – niemonotoniczna,
 h – malejąca

2.34. a) 4 mln

b) Wszystkie funkcje są niemonotoniczne.

c) 2004 r. – ok. 3,5 mln, 2005 r. – ok. 3,8 mln, 2006 r. – ok. 4 mln, 2007 r. – ok. 4,5 mln

d) w 2001 r., 1,4 mln

e) odwiedziny u krewnych lub znajomych

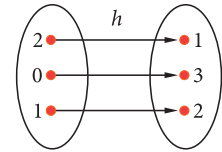
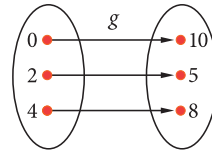
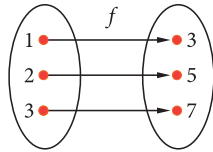
2.31. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -10; 8 \rangle$, a jej zbiorem wartości – przedział $\langle 0; 5 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) + 3$.

2.32. Funkcja $y = g(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$. Określ przedziały monotoniczności funkcji

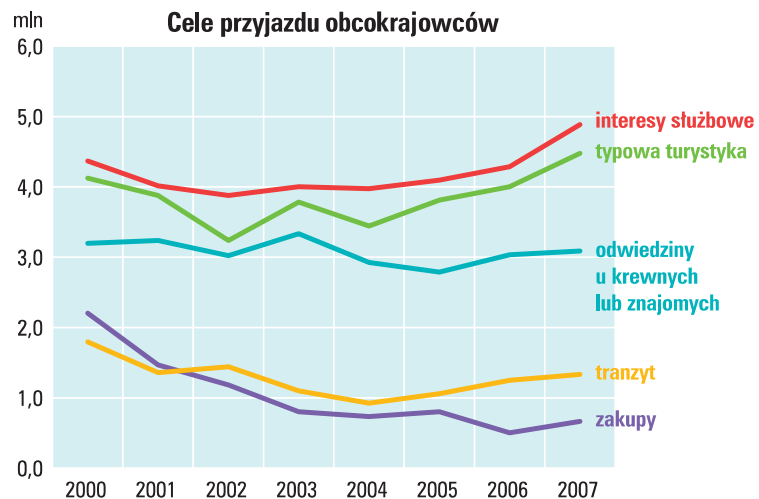
a) $y = -g(x)$.

b) $y = g(-x)$.

2.33. Sprawdź, czy funkcje przedstawione za pomocą diagramów są monotoniczne.

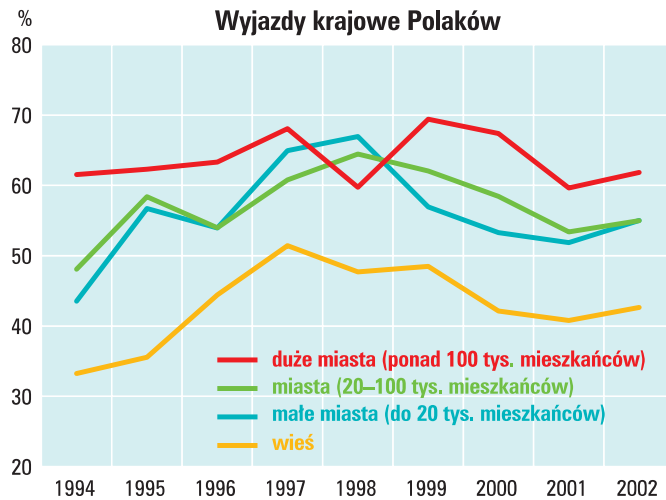


2.34. Na podstawie wykresu przedstawiającego cele przyjazdu obcokrajowców do Polski (źródło: badania i prognozy Instytutu Turystyki, marzec 2004) odpowiedz na pytania.

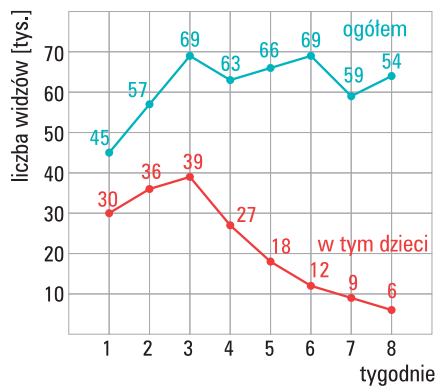


- Ile osób odwiedziło Polskę w 2003 r. w interesach służbowych?
- Która z danych funkcji jest monotoniczna i jaki jest rodzaj tej monotoniczności?
- Podaj prognozowaną na poszczególne lata od 2004 r. do 2007 r. liczbę obcokrajowców, którzy mieli odwiedzić Polskę w celu typowo turystycznym.
- W którym roku liczba obcokrajowców przejeżdżających przez Polskę tranzytem zrównała się z liczbą obcokrajowców robiących w Polsce zakupy? Oszacuj tę liczbę z dokładnością do 0,1 mln.
- Który z celów podróży do Polski jest najbardziej stabilny pod względem liczby przybyszów?

2.35. Na wykresie zaprezentowane jest uczestnictwo Polaków w wyjazdach krajowych (krótko- i długoterminowych) w zależności od miejsca zamieszkania (w procentach liczby mieszkańców). Scharakteryzuj na podstawie wykresu różnice między podanymi czterema kategoriami oraz ich wspólne cechy.

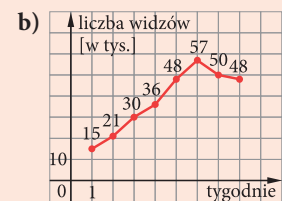


2.36. Na wykresie zilustrowano liczbę widzów animowanego filmu *Upiorny Jacuś*, zanotowaną w ciągu kolejnych ośmiu tygodni od dnia premiery.



- Ilu widzów obejrzało *Upiornego Jacusia* w badanym okresie?
- Sporządź wykres liczby dorosłych widzów tego filmu w kolejnych tygodniach.
- W którym tygodniu przewaga liczby widzów dorosłych nad liczbą dzieci była największa?
- Po ilu tygodniach od dnia premiery łączna liczba widzów dorosłych, którzy obejrzeli ten film, była równa łącznej liczbie dzieci, które go obejrzały?

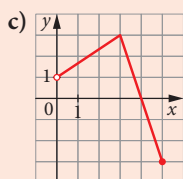
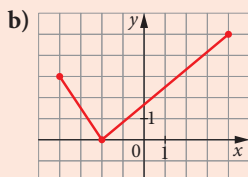
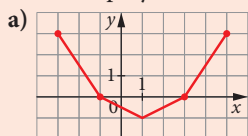
2.36. a) 482 tys.



c) w 6. tygodniu

d) po 5 tygodniach

2.37. Na przykład:

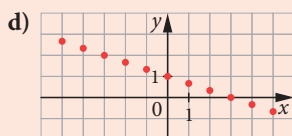
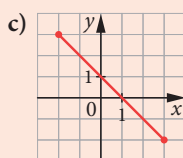
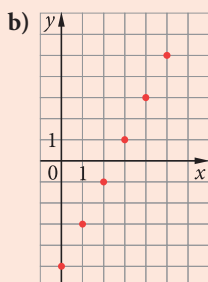
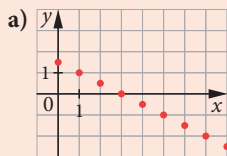


2.38. 145 zł

2.39. a) $1\frac{1}{2}, 63^\circ$

b) $\frac{2}{3}, 124^\circ$

2.40.



2.37. Sporządź wykres przykładowej funkcji $y = f(x)$ spełniającej podane warunki.

- Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 3 \rangle$, miejscami zerowymi funkcji są liczby -1 i 3 .
- Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$, dla argumentu -2 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 , dla argumentu 4 funkcja przyjmuje wartość największą równą 5 .
- Dziedziną funkcji jest przedział $(0; 5)$, funkcja jest rosnąca w przedziale $(0; 3)$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$, miejscem zerowym funkcji jest liczba 4 .
- Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -2; 4 \rangle$, zbiorem wartości jest przedział $(1; 5)$.
- Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -1; 5 \rangle$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 2 \rangle$.

2.38. Odpłatność za kurs wynosi 150 złotych od każdego z 87 uczestników. Jaka byłaby odpłatność, gdyby uczestników było o 3 więcej, a suma wszystkich wpłat nie uległaby zmianie?

2.39. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej miejsce zerowe. Jaką miarę ma kąt nachylenia prostej, która jest wykresem tej funkcji, do osi x ? Wynik podaj dokładnie do 1° .

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$

2.40. Naskicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ i $x \in \mathbb{N}$ c) $f(x) = -x + 1$ i $x \in \langle -2; 3 \rangle$
 b) $f(x) = 2x - 5$, $x \in \mathbb{N}$ i $x \leq 5$ d) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$, $x \in \mathbb{Z}$ i $x \in \langle -5; 5 \rangle$

2.41. Napisz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.

- $f(0) = 3$ i wykres jest nachylony do osi x pod kątem 135° .
- $f(-2) = 0$ i wykres jest nachylony do osi x pod kątem, którego tangens jest równy 2 .

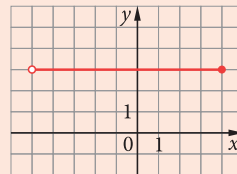
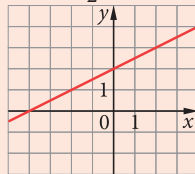
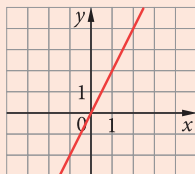
2.42. Sporządź wykres i napisz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że

- jej wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych i punkt $(2, 4)$.
- jej wykres przecina osie układu współrzędnych w punktach $(-4, 0)$ i $(0, 2)$.
- jej dziedziną jest przedział $\langle -5; 4 \rangle$, a zbiorem wartości $\{3\}$.

2.43. Napisz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że jej wykres przecina oś rzędnych w punkcie o drugiej współrzędnej 2 i funkcja przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 6$.

2.41. a) $y = -x + 3$ b) $y = 2x + 4$

2.42. a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ c) $f(x) = 3$ dla $x \in \langle -5; 4 \rangle$



2.43. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

2.44. Napisz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że

- a) jej miejscem zerowym jest 3 i $f(2) = -3$.
 b) $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$ i $f(0) = 4$.
 c) $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 2)$ i $f(1) = -1$.
 d) $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ i $f(1) = 4$.

2.45. Dla jakich wartości m funkcja f jest rosnąca, a dla jakich malejąca?

- a) $f(x) = 3(2 - m)x + 7$ b) $f(x) = -4(m + \sqrt{2})x + m - 3$

2.46. Napisz wzór funkcji liniowej g , której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P .

- a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, $P = (0, -1)$ b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 7$, $P = (5, 2)$

2.47. Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax - 8$ należy punkt $P = (-7, 13)$. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

2.48. Zaznacz część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy funkcji

$f(x) = ax + b$ dla

- a) $a = \frac{1}{3}$ i $b < -1$. b) $a = -3$ i $b \in (-3; 0)$. c) $a < 2$ i $b = 2$.

2.49. Dla jakiej wartości parametru m równanie $2mx + m^2x = 3x + 6$ jest tożsamościowe?

2.50. Dla jakiej wartości parametru k nierówność $(k^2 - 3)(x + 5) < k$ jest sprzeczna?

2.51. Dla jakiej wartości parametru p rozwiązaniem równania $px + 2x - 5p + 4 = 0$ jest liczba 3?

2.52. Rozwiąż równanie lub nierówność.

- a) $\frac{x+2}{6} - \frac{2x-3}{4} = 1$ e) $14 + 3 \left\{ 1 - 2 \left[3 \left(x - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \right\} = 2$
 b) $\frac{3x+2}{2} - 2 = \frac{2(x+5)}{7}$ f) $\frac{x-5}{15} + 1 \leq \frac{2x-1}{20}$
 c) $(x - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 3$ g) $(x+3)^2 - 2(x-1) < (x-5)(x+5) + 20$
 d) $\frac{x-3}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{5x-9}{6}$ h) $(x-1)(\sqrt{2}-3) + \sqrt{2} \geq x\sqrt{2} + 9$

2.53. Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

$$\begin{aligned} 2.53. \quad & 243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27} \\ & 7x = (3^2)^{27} - (3^5)^{11} + (3^4)^{14} \\ & 7x = 3^{54} - 3^{55} + 3^{56} \\ & 7x = 3^{54}(1 - 3 + 3^2) \\ & 7x = 3^{54} \cdot 7 \quad | : 7 \\ & x = 3^{54} \end{aligned}$$

2.44. a) $f(x) = 3x - 9$

b) $f(x) = -4x + 4$

c) $f(x) = x - 2$

d) $f(x) = 3x + 1$

2.45. a) rosnąca dla $m < 2$,
malejąca dla $m > 2$

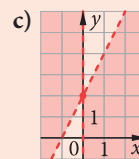
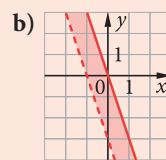
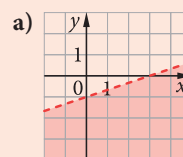
b) rosnąca dla $m < -\sqrt{2}$,
malejąca dla $m > -\sqrt{2}$

2.46. a) $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

b) $g(x) = \frac{2}{5}x$

2.47. $-2\frac{2}{3}$

2.48.



2.49. $m = -2$

2.50. $k = -\sqrt{3}$

2.51. $p = 5$

2.52. a) $x = \frac{1}{4}$

b) $x = 2$

c) $x = 2(2\sqrt{5} - 3)$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x = 1$

f) $x \in \left\langle 21\frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

g) $x \in (-\infty; -4)$

h) $x \in (-\infty; -2)$

2.54. $x = 2^3$

2.55. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) układ sprzeczny

c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

d) układ nieoznaczony: $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -x \end{cases}$

2.57. 263 telefony stacjonarne
i 102 telefony komórkowe

2.58. o 400 zł

2.59. Jacka: $32 \text{ m} \times 25 \text{ m}$
i Artura: $40 \text{ m} \times 28 \text{ m}$
lub
Jacka: $66\frac{2}{3} \text{ m} \times 12 \text{ m}$
i Artura: $74\frac{2}{3} \text{ m} \times 15 \text{ m}$

2.60. $V(t) = 12t + 180$;
 $D = \langle 0; 110 \rangle$; po 1 h 50 min

2.54. Rozwiąż równanie $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot (4^4)^4$. Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^k , gdzie k jest liczbą całkowitą.

2.55. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 1,5 - (x - y) = 0,5(y - x) + 2 \\ 2y - 4 = 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x - y}{2} - \frac{x + y}{4} = 4 \\ \frac{x - y}{2} + \frac{x + 5y}{5} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 3y = \frac{-5(x + y)}{2} - \frac{5y - 25x}{3} \\ 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

2.56. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x + 1) - y = 3 \\ 2x + 3(y - 2) = y - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x - 2) + 2(y - 1) = y - 7 \\ \frac{x + 1}{3} + \frac{y - 1}{2} = \frac{1}{3}(y + 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x + 1)^2 - (y - 2)^2 = x^2 - y^2 + 9 \\ (x - 2)^2 - 4(y - 2) = x^2 + 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x - 1)^2 + 2x = (x - 1)(x + 1) - y \\ 3(x - y) - 2(x + y) = 10 + x \end{cases}$

2.57. W 1999 r. w Polsce na 1000 mieszkańców przypadało 365 telefonów stacjonarnych i komórkowych. Oblicz, ile przypadało telefonów każdego rodzaju, jeżeli telefonów stacjonarnych było o 161 więcej niż komórkowych.

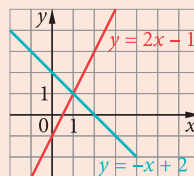
2.58. Państwo Mamutowie zarabiają razem 9200 zł miesięcznie, przy czym ich zarobki są w stosunku 12 : 11. O ile złotych różnią się ich pensje?

2.59. Działka pana Jacka ma kształt prostokąta o polu 800 m^2 . Prostokątna działka pana Artura ma pole powierzchni 1120 m^2 , jest o 8 m dłuższa i o 3 m szersza od działki pana Jacka. Oblicz wymiary obu działek.

2.60. W ogródku Michała znajduje się oczko wodne o pojemności $1,5 \text{ m}^3$, w którym jest 180 litrów wody. Michał postanowił napełnić je po brzegi, dolewając wodę w tempie 12 litrów na minutę. Napisz wzór funkcji V opisującej zależność ilości wody w tym oczku od czasu t napełniania go (w minutach). Określ dziedzinę tej funkcji. Po jakim czasie Michał zakończy pracę?

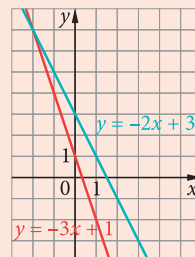
2.56. a)

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$



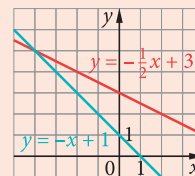
b)

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$



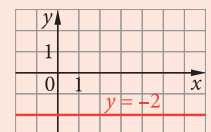
c)

$\begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$



d)

$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -2 \end{cases}$



2.61. W pewnym państwie każdy obywatel płaci 20% podatku od rocznego dochodu powyżej 1000 euro. Kwota dochodu do 1000 euro włącznie jest nieopodatkowana. Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji $p(x)$, która rocznemu dochodowi przyporządkowuje należny podatek.

2.62. Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 3| = 5$ c) $|x + 11| = 0$ e) $|x - 1| = -3$
b) $|x + 5| = 11$ d) $|6 + x| = 2$ f) $|7 - x| = 3$

2.63. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x - 2| < 3$ c) $|x - 2| \geq -1$ e) $|x + 11| < -12$
b) $|x + 5| > 5$ d) $|4 - x| \leq 1$ f) $|21 + x| < 15$

2.64. Rozwiąż równanie.

- a) $||x - 2| - 1| = 3$ b) $||x| - 3| = 2$ c) $||x + 4| - 3| = 1$

2.65. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $||7x - 2| - 1| = 3$.

2.66. Rozwiąż równanie.

- a) $|x + 5| + |x - 7| = 20$
b) $|x| + 2|x - 3| = 12$
c) $|x + 2| - 2|x - 3| = 3$

2.67. Rozwiąż nierówność.

- a) $2|3 - x| - |2x - 1| > 3$
b) $|2x + 4| + |x - 1| \leq 6$
c) $|2x - 5| - |x + 4| \leq 2 - 2x$

2.68. Dana jest funkcja $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$, $x \in \mathbf{R}$.

- a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f dla $x \in (-\infty; -2)$.
b) Naszkicuj wykres funkcji f .
c) Podaj jej miejsca zerowe.
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań.

2.69. Dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 3x + 2y = -3k - 2 \\ 2x - 5y = 17k - 33 \end{cases} \text{ jest para liczb ujemnych?}$$

2.70. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x + y = 7m - 5 \\ 4x - 3y = -m - 15 \end{cases} \text{ jest para liczb } (x, y) \text{ spełniających warunek } |x + y| = 3?$$

2.61.

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{1}{5}(x - 1000) & \text{dla } x > 1000 \end{cases}$$

2.62. a) $x = -2$ lub $x = 8$

b) $x = -16$ lub $x = 6$

c) $x = -11$

d) $x = -8$ lub $x = -4$

e) równanie sprzeczne

f) $x = 4$ lub $x = 10$

2.63. a) $x \in (-1; 5)$

b) $x \in (-\infty; -10) \cup (0; \infty)$

c) nierówność tożsamościowa

d) $x \in \{3; 5\}$

e) nierówność sprzeczna

f) $x \in (-36; -6)$

2.64. a) $x = -2$ lub $x = 6$

b) $x = -5$ lub $x = -1$, lub $x = 1$,
lub $x = 5$

c) $x = -8$ lub $x = -6$, lub $x = -2$,
lub $x = 0$

2.65. $\frac{4}{7}$

2.66. a) $x = -9$ lub $x = 11$

b) $x = -2$ lub $x = 6$

c) $x = \frac{7}{3}$ lub $x = 5$

2.67. a) $x \in (-\infty; 1)$

b) $x \in \{-3; 1\}$

c) $x \in (-\infty; -7) \cup \left\langle -1; \frac{11}{3} \right\rangle$

2.68. a) $ZW = \{3\}$

b) Wskazówka: Wzór funkcji można zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ -3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$$

c) $-\frac{1}{2}$

d) $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

2.69. $k \in \left(\frac{5}{3}; 4\right)$

2.70. $m = -0,2$ lub $m = 1$

3. Funkcja kwadratowa, wielomiany i funkcje wymierne

Definicje

- Sumę algebraiczną $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, nazywamy **trójmianem kwadratowym**. Wyrażenie $b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego i oznaczamy literą Δ .
- Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją kwadratową zmiennej x w postaci ogólnej**.
- Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją kwadratową zmiennej x w postaci kanonicznej**.
- **Funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbf{R}$)** nazywamy funkcję postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną, współczynniki $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$.

Funkcję $W(x) = a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, nazywamy **wielomianem stopnia 0**.

Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(x) = 0$ dla każdego argumentu x jest **wielomianem zerowym** i nie ma stopnia.

- **Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$** nazywamy taką liczbę a , dla której $W(a) = 0$.
- Wielomian $W(x)$ **jest podzielny** przez wielomian $P(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$. Wielomian $P(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$, a wielomian $Q(x)$ – **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.
- **Funkcją wymierną zmiennej x** nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie W i P są wielomianami zmiennej x . Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

Twierdzenia

- Postacią kanoniczną funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}.$$

- Wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne $x_w = \frac{-b}{2a}$, $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.
- Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można zapisać w **postaci iloczynowej**, gdy $\Delta \geq 0$:
 - jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$ i $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
 - jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wielomiany W i Q są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.
- Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowymi wielomianami oraz stopień $P(x)$ nie jest większy od stopnia $W(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

gdzie stopień $Q = \text{stopień } W - \text{stopień } P$ oraz stopień R jest mniejszy od stopnia P albo R jest wielomianem zerowym.

Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to wielomian W **jest podzielny** przez wielomian P .

• Twierdzenie Bézouta

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

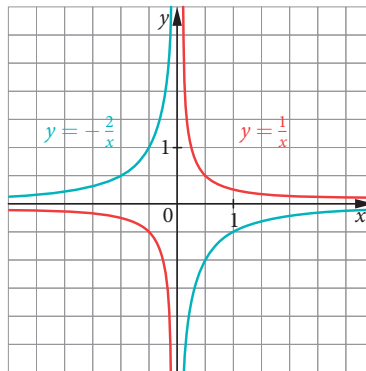
- Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu W , którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu.
- Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, gdzie $q \in \mathbb{N}$,

$q \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem współczynnika a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

- Wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, jest hiperbola.



Wnioski, uwagi, komentarze...

- Jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , to pierwsza współrzędna x_w wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$ jest ich średnią arytmetyczną: $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- **Wzory Viète'a**
Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2 , to:
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$
- Jeżeli $W(x) = (x - a)Q(x) + R$, to $W(a) = R$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. C

3.1. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = x^2 - 4x$ przyjmuje w przedziale $\langle -4; 1 \rangle$ wartość najmniejszą.

- A. $x = -2$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = -4$

3.2. C

3.2. Wskaż wartość współczynnika m paraboli $y = m - x^2$, która przecina oś x w punktach $x = \sqrt{3}$ oraz $x = -\sqrt{3}$.

- A. $m = 9$ B. $m = -3$ C. $m = 3$ D. Nie istnieje takie m .

3.3. D

3.3. Punkt $P = (-1, 3 + m)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -3x^2$ dla

- A. $m = 6$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = -6$.

3.4. A

3.4. Wskaż równanie paraboli symetrycznej względem osi y do paraboli $y = 5x^2 - x + 4$.

- A. $y = 5x^2 + x + 4$ C. $y = -5x^2 - x + 4$
B. $y = -5x^2 + x - 4$ D. $y = 5x^2 + x - 4$

3.5. C

3.5. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + \frac{3}{2}$ są liczby -1 oraz -3 . Wskaż wartości współczynników a i b tej funkcji.

- A. $a = 1, b = 4$ B. $a = \frac{1}{2}, b = 4$ C. $a = \frac{1}{2}, b = 2$ D. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$

3.6. D

3.6. Dana jest parabola $y = x^2 + kx$. Jakie wartości może przyjmować współczynnik k , aby parabola nie miała punktów wspólnych z osią x ?

- A. $k > 0$ B. $k = 0$ C. $k \leq -1$ D. Nie istnieje takie k .

3.7. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 6x + k$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Która prosta jest osią symetrii każdej z tych parabol?

- A. $y = -6$ B. $x = 6$ C. $x = -3$ D. $x = 3$

3.8. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - x}$.

- A. $\langle -2; 2 \rangle$ B. $\langle -2; 1 \rangle$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 1)$

3.9. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)^2 < 4$.

- A. $(-\infty; 5)$ B. $(-\infty; 3)$ C. $(-1; 3)$ D. $(0; 3)$

3.10. Jeden pracownik wykonuje pewną pracę w ciągu 6 dni, a drugi tę samą pracę wykonuje w ciągu 12 dni. W jakim czasie wykonają tę pracę wspólnie?

- A. 3 dni B. 4 dni C. 9 dni D. 18 dni

W zadaniach 3.11, 3.12 ocen prawdziwość podanych zdań.

3.11. Zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 < 0$ jest

- A. przedział domknięty. B. zbiór jednoelementowy. C. zbiór pusty.

3.12. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

- A. Wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki.
B. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - 1$.
C. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x + 1$.

3.13. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.

Funkcja $f(x) = -x^2 + x - 1$

A.	przyjmuje w przedziale $(1; 2)$ wartość największą,	ponieważ	1.	dla funkcji f zachodzi warunek $\Delta < 0$.
B.	nie przyjmuje w przedziale $(1; 2)$ wartości największej,		2.	pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f nie należy do przedziału $(1; 2)$.

3.14. Określ, w jakiej postaci dana jest funkcja kwadratowa f . O ile to możliwe, zapisz funkcję w dwóch pozostałych postaciach.

- a) $f(x) = -(x - 4)^2 + 1$ d) $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1)$
b) $f(x) = 0,5x^2 + x - 4$ e) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
c) $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$ f) $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$

3.14. a) postać ogólna: $f(x) = -x^2 + 8x - 15$, postać iloczynowa: $f(x) = -(x - 3)(x - 5)$

b) postać kanoniczna: $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 4\frac{1}{2}$, postać iloczynowa: $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 2)$

c) postać kanoniczna: $f(x) = 3(x - 1)^2 + 3$, postać iloczynowa nie istnieje

d) postać ogólna: $f(x) = -2x^2 + x + 3$, postać kanoniczna: $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\frac{1}{8}$

e) postać kanoniczna: $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, postać iloczynowa nie istnieje

f) postać kanoniczna: $f(x) = -2(x + 2)^2 + 2$, postać iloczynowa: $f(x) = -2(x + 1)(x + 3)$

3.7. D

3.8. B

3.9. C

3.10. B

3.11. F, F, P

3.12. F, P, F

3.13. B2

3.16. a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$,

$D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 4)$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 7$, $D = \langle 2; 6 \rangle$,
 $ZW = \langle -2; 7 \rangle$

3.17.

a) wartość największa: 5 dla $x = 3$,
 wartość najmniejsza: -7 dla $x = 1$

b) wartość największa: 1 dla $x = 1$,
 wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

3.18. 121

3.19. -9

3.20. $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$

3.21. $P = 6$

3.22. a) $x = 2 - \sqrt{3}$

lub $x = 2 + \sqrt{3}$

b) brak rozwiązań

c) $x = 1\frac{1}{3}$ lub $x = 4$

d) $x = -1$ lub $x = -4$

e) $x \in \mathbf{R}$

f) $x \in \left(-\infty; \frac{-2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \infty\right)$

g) $x \in (1; 5)$

h) $x \in \langle -4; 3 \rangle$

3.15. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej własności.

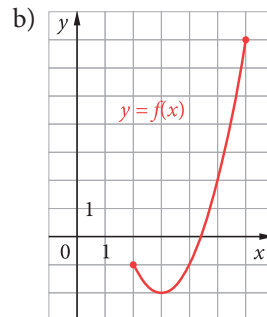
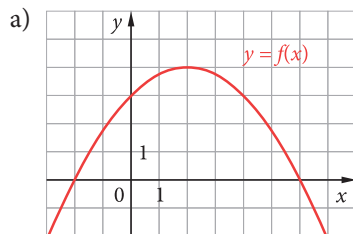
a) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$

d) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$

3.16. Na podstawie podanego wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ podaj jej wzór ogólny, dziedzinę oraz zbiór wartości.



3.17. Oblicz najmniejszą wartość funkcji i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 4$, $\langle 0; 3 \rangle$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$, $\langle 0; 1 \rangle$

3.18. Liczbę 22 rozłożono na dwa składniki. Oblicz największy iloczyn takich składników.

3.19. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych różniących się o 6?

3.20. Z drutu o długości 60 cm zrobiono prostokątną ramkę. Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby jego pole było możliwie największe?

3.21. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 i ramionach długości 5 wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden bok prostokąta zawiera się w podstawie trójkąta. Jakie może być największe pole takiego prostokąta?

3.22. Rozwiąż równanie lub nierówność.

a) $x^2 - 4x + 1 = 0$

e) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \leq 0$

b) $3x^2 + 7 = 5x$

f) $3x^2 \geq 8$

c) $3(x - 1)^2 + 13 = 10x$

g) $(x - 2)^2 + (x - 1)^2 < x^2$

d) $2(3x + 5) + (x + 2)(x - 3) = 0$

h) $(x - 3)^2 \geq (x - 3)(2x + 1)$

3.15. a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -4; \infty \rangle$; miejsca zerowe: $-3, 1$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$; wartość najmniejsza: -4 dla $x = -1$

b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 1)$; miejsca zerowe: $0, 4$; $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 4)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$; rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $\langle 2; \infty \rangle$; wartość największa: 1 dla $x = 2$

c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 0)$; miejsca zerowe: 2 ; $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $\langle 2; \infty \rangle$; wartość największa: 0 dla $x = 2$

d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2; \infty \rangle$; miejsca zerowe: $\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}$, $\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$; $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}; \infty\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}; \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}\right)$;

funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$;
 wartość najmniejsza: -2 dla $x = -1$

3.23. Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

3.24. Plac ma kształt prostokąta, w którym przekątna jest o 1 m dłuższa od dłuższego boku. Gdyby powiększyć o 3 m długość każdego boku tego prostokąta, to długość przekątnej zwiększyłaby się o 4 m. Oblicz wymiary placu.

3.25. Dwa wielokąty mają razem 18 kątów i 58 przekątnych. Co to za wielokąty?

3.26. Trzy ścieżki w ogrodzie tworzą trójkąt prostokątny o obwodzie 120 m. Dwie osoby wychodzą równocześnie z punktu, który jest wierzchołkiem kąta prostego. Każda z nich idzie po ścieżce będącej inną przyprostokątną i spotykają się w środku przeciwprostokątnej. Jakiej długości są ścieżki, jeżeli jedna osoba pokonuje 13 m w tym samym czasie co druga 11 m?

3.27. Suma pól dwóch kwadratów jest równa 104, a różnica długości ich przekątnych jest równa 4. Wyznacz długości boków tych kwadratów.

3.28. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 4x - 12$ i $g(x) = 2x - 9$. Wyznacz metodą algebraiczną i graficzną punkty wspólne wykresów tych funkcji.

3.29. Oblicz wartości współczynników b i c , dla których funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe równe -1 i 3 .

3.30. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ma współrzędne $W = (2, -1)$. Wyznacz wartości współczynników a i b .

3.31. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 16$ należą punkty $A = (-5, 6)$ oraz $B = (-4, 0)$. Wyznacz współczynniki a i b . Oblicz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

3.32. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 + 6x + c$ i $g(x) = -x^2 + bx - 25$ określone dla $x \in \mathbf{R}$. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe. Dla $x = 5$ funkcja g przyjmuje największą wartość. Wyznacz współczynniki b i c . Dla obliczonych wartości b i c rozwiąż nierówność $2f(x) + g(x) \leq 0$.

3.33. Do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty: $K = (-3, -1)$, $L = (0, 8)$, $P = (-5, 3)$. Napisz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres. W jakim zbiorze wartości funkcji f są większe od 3?

3.34. Dane jest równanie $x^2 - 6x + 1 = -2x - m$.

a) Rozwiąż to równanie graficznie dla $m = -6$.

b) Zbadaj, dla jakich wartości m równanie ma dwa rozwiązania, dla jakich – jedno rozwiązanie, a dla jakich – nie ma rozwiązań.

3.23. $-1, 0, 1, 2$

3.24. $12 \text{ m} \times 5 \text{ m}$

3.25. siedmiokąt i jedenastokąt

3.26. 30 m, 40 m, 50 m

3.27. $6\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$

3.28. $(1, -7), (-3, -15)$

3.29. $b = -2, c = -3$

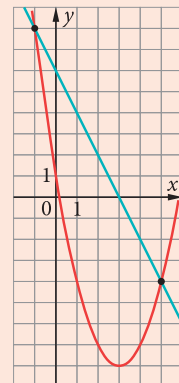
3.30. $a = \frac{1}{2}, b = -2$

3.31. $a = 2, b = 12$; wartość najmniejsza: -2 dla $x = -3$, wartość największa: 6 dla $x = -1$

3.32. $b = 10, c = 4\frac{1}{2}$,
 $x \in \left\langle -8; \frac{2}{3} \right\rangle$

3.33. $f(x) = x^2 + 6x + 8, y > 3$
dla $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$

3.34. a) $x = -1$ lub $x = 5$



b) 2 rozwiązania dla $m < 3$,
1 rozwiązanie dla $m = 3$,
brak rozwiązań dla $m > 3$

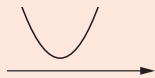
3.35.

wartość najmniejsza: $5\frac{1}{4}$ dla $x = 1$,
 wartość największa: $7\frac{1}{3}$ dla $x = -\frac{2}{3}$

3.36. $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 > 0$ D $m = 3$

$$x^2 + 3x + 11 > 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 11 < 0$$

 $x \in \mathbf{R}$ Dla $m = 3$ funkcja
 $f(x) = x^2 + 3x + 11$ przyjmuje
 tylko wartości dodatnie.
3.37. $b \in (-2; 2)$

3.38. $g(x) = -\frac{5}{9}(x - 2)(x - 8)$

3.39. 194

3.40. $A = (3 - \sqrt{3}, 6)$,

$B = (3 + \sqrt{3}, 6)$, $C = (3, 9)$.

Wskazówka: Wyznacz równanie
 prostej AC.

3.41.

a) $f(x) = x^2 + \frac{m-26}{4}x + \frac{30-m}{4}$

b) $m \in (-\infty; 18 - 8\sqrt{2}) \cup$
 $\cup (18 + 8\sqrt{2}; \infty)$

3.42. $k \in (5; \infty)$ **3.43.** $m \in (4; \infty)$ **3.45.** Równanie $x^2 + 4x + 2 = 0$
 ma dwa rozwiązania x_1, x_2 ,ponieważ $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 = 8 > 0$.

Ze wzorów Viete'a mamy:

$x_1 + x_2 = -4, x_1 x_2 = 2.$

Zatem

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{4}{2} = -2 \in \mathbf{Z}.$$

3.46. $k \in \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\};$

$x = 2$ dla $k = -2$,

$x = 2 + \sqrt{3}$ dla $k = -\sqrt{3}$,

$x = 2 - \sqrt{3}$ dla $k = \sqrt{3}$

3.35. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2mx + 4m + 5$
 dla $x \in \mathbf{R}$. Oblicz najmniejszą wartość i największą wartość tej funkcji w przedziale
 $\langle -2; 1 \rangle$ dla $m = \frac{1}{2}$.

3.36. Wykaż, że dla $m = 3$ nierówność $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 > 0$ jest spełniona
 przez wszystkie liczby rzeczywiste x .

3.37. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną
 parabolę. Wyznacz wszystkie wartości b , dla których wierzchołek takiej paraboli leży
 nad osią x .

3.38. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty; 5)$, a zbiorem
 rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2; 8)$. Wyznacz wzór funkcji g .

3.39. Oblicz sumę czwartych potęg pierwiastków równania $x^2 - 4x + 1 = 0$.

3.40. Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli
 $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest wierzchołkiem paraboli, a bok AB trójkąta jest równoległy
 do osi x . zilustruj opisaną sytuację rysunkiem w układzie współrzędnych i wyznacz
 współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

3.41. We wzorze funkcji kwadratowej współczynnik przy x^2 jest równy 1. Wykres
 tej funkcji przechodzi przez punkty $(1, 2)$ i $(5, m)$.

a) Wyznacz wzór rodziny funkcji kwadratowych spełniających te warunki.

b) Dla jakich wartości parametru m funkcja ma dwa różne miejsca zerowe?**3.42.** Dla jakich wartości parametru k wszystkie wartości funkcji

$f(x) = (k - 4)x^2 - (2 - k)x + \frac{1}{2}k + 1$ są większe od $1\frac{1}{4}$?

3.43. Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji kwadratowej

$f(x) = (3m - 5)x^2 - (2m - 1)x + \frac{1}{4}(3m - 5)$ jest liczbą dodatnią?

3.44. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej k równanie
 $x^2 + 2kx - 6 = k^2 + 2x - 3k$ z niewiadomą x ma dwa różne rozwiązania.

3.45. Wykaż, że suma odwrotności rozwiązań równania $x^2 + 4x + 2 = 0$ jest liczbą
 całkowitą.

3.46. Dla jakich wartości parametru k równanie $2x + k(1 - x^2) = 2 + 2x^2$ z nie-
 wiadomą x ma tylko jedno rozwiązanie? Podaj to rozwiązanie.

3.44. Przekształcamy równanie $x^2 + 2kx - 6 = k^2 + 2x - 3k$. (1)

$x^2 + 2(k - 1)x + (-k^2 + 3k - 6) = 0$ (2)

$\Delta = 4(k - 1)^2 - 4(-k^2 + 3k - 6) = 4(k^2 - 2k + 1 + k^2 - 3k + 6) = 4(2k^2 - 5k + 7)$

$\Delta_k = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25 - 56 < 0,$

więc $2k^2 - 5k + 7 > 0$ dla $k \in \mathbf{R}$, a zatem $\Delta > 0$ dla każdego $k \in \mathbf{R}$, co oznacza,
 że równanie (2), więc i przekształcone równanie (1) ma dwa różne rozwiązania.

3.47. Równanie $x^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$ z niewiadomą x ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}. \text{ Oblicz } a \text{ i } b.$$

3.48. Oblicz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0 \text{ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste } x_1, x_2 \text{ takie, że}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12.$$

3.49. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0 \text{ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste } x_1, x_2 \text{ spełniające}$$

$$\text{warunek } x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2.$$

3.50. Dla jakich wartości parametru m wartości funkcji

$$f(x) = (2m+1)x^2 + (m-1)x + 3m \text{ są mniejsze od odpowiednich wartości funkcji}$$

$$g(x) = (1-m)x + 3 \text{ dla każdego } x?$$

3.51. Dla jakich wartości parametru k nierówność $kx^2 + (k-1)x > 1-k$ jest spełniona przez wszystkie $x \in \mathbb{R}$?

3.52. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 - (m+4)x + m + \frac{5}{2} = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

D

3.53. Wykaż, że jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (m+2)x + k$ ma dwa różne miejsca zerowe i dla argumentu k przyjmuje największą wartość, to $k \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

D

3.54. Dane jest równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$ z niewiadomą x . Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej m wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami całkowitymi.

3.55. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0 \text{ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste } x_1, x_2 \text{ takie, że}$$

$$(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1).$$

3.56. Dla jakich wartości parametru m odwrotność sumy kwadratów pierwiastków równania $x^2 - 3mx + m - 4 = 0$ jest największa?

3.57. Dane są wielomiany: $W(x) = x^2 + 2$, $P(x) = 3x - 2$, $R(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$. Wyznacz wielomian $Q(x) = [W(x)]^3 - 2P(x)R(x)$. Określ stopień wielomianu Q i podaj jego wartość dla $x = \sqrt{2}$.

3.47. $a = 2$, $b = 1$ lub $a = 1$, $b = 2$, lub $a = -2$, $b = -1$, lub $a = -1$, $b = -2$. Wskazówka: Zastosuj wzory Viète'a.

$$\mathbf{3.48.} \quad m \in \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$$

$$\mathbf{3.49.} \quad m \in \langle 0; 3 - \sqrt{7} \rangle$$

$$\mathbf{3.50.} \quad m \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$$

$$\mathbf{3.51.} \quad k \in (1; \infty)$$

$$\mathbf{3.52.} \quad m \in (0; 2)$$

3.54. Niech $m \in \mathbb{Z}$. Przekształcamy równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$.
 $(x+1)(x-1) + m(x+1) = 0$
 $(x+1)(x-1+m) = 0$
 $x = -1$ lub $x = 1-m$
 Oba rozwiązania są liczbami całkowitymi.

$$\mathbf{3.55.} \quad m \in (0; 1) \cup (2; 3)$$

$$\mathbf{3.56.} \quad m = \frac{1}{9}$$

$$\mathbf{3.57.} \quad Q(x) = x^6 - 2x^3 - 2x^2 + 16, \text{ stopień } Q = 6, Q(\sqrt{2}) = 20 - 4\sqrt{2}$$

3.53. Funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe, gdy $\Delta > 0$,

$$\text{czyli } (m+2)^2 + 2k > 0 \quad (*)$$

$$\text{Funkcja } f \text{ przyjmuje największą wartość dla } x_w = \frac{-(m+2)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = m+2 = k.$$

Podstawiamy $k = m+2$ do nierówności (*):

$$k^2 + 2k > 0$$

$$k(k+2) > 0$$

$$\text{Zatem } k \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty).$$

3.58. a) $W(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$

b) $W(x) = x(x-1)^3$

c) $W(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

d) $W(x) = (x-1)(x+1) \cdot (x^2 + 2x + 3)$

3.59. a) $x = 0$ lub $x = 3$

b) $x = -2$ lub $x = 2$, lub $x = 3$

c) $x = -2$ lub $x = 1$, lub $x = 5$

d) $x = -2$ lub $x = 2$

3.60. $x = \frac{1 + \sqrt{11}}{2}$

3.61. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (2; 3)$

b) $x \in (-1; \infty)$

c) $x \in (-2; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$

d) $x \in (-\infty; 2)$

3.62. $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$

3.63. $m = 6$, $x \in \left\{-2, \frac{1}{4}, 3\right\}$

3.64. $a = -5$, $b = 9$

3.65. $x \in (1; 2) \cup (3; \infty)$

3.66.

$W(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 1)$.

Wskazówka: Najpierw

zapisz wielomian w postaci

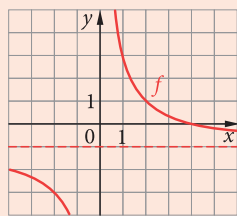
$W(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x^2 + 4x - 1$,

a następnie jako różnicę kwadratów.

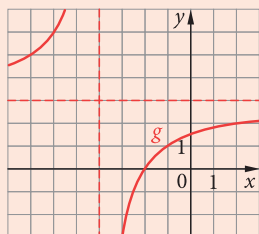
3.67. $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$

3.68.

$\frac{4}{x} - 1 > 0$ dla $x \in (0; 4)$



3.69. $ZW = \mathbf{R} - \{3\}$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$ i $(-4; \infty)$



3.58. Rozłóż wielomian W na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

b) $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

c) $W(x) = x^3 - 7x + 6$

d) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

3.59. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

c) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

d) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

3.60. Wyznacz największe rozwiązanie równania $2x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$.

3.61. Rozwiąż nierówność.

a) $(x-2)(x+5)(x-3) \leq 0$

b) $(x+1)(x-4)^2 \geq 0$

c) $2x^3 + x^2 - 6x > 0$

d) $x^3 - x^2 - 4 < 0$

3.62. W wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-1$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 8x^2 + 4x - 14$ oraz resztę $R(x) = -5$. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

3.63. Reszta z dzielenia wielomianu $4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

3.64. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ taki, że $W(2) = 7$ i reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x-3$ jest równa 10. Oblicz wartości współczynników a i b tego wielomianu.

3.65. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 - bx - 6$. Rozwiąż nierówność $W(x) > 0$.

3.66. Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego, których współczynniki są całkowite oraz współczynniki przy drugich potęgach zmiennej są równe 1.

3.67. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(x-2)(mx^2 - x - m - 1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

3.68. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x} - 1$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $\frac{4}{x} - 1 > 0$.

3.69. Sporządź wykres funkcji $g(x) = -\frac{6}{x+4} + 3$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g .

3.70. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+5}{3x-1}$

b) $\frac{3}{x+5} + 2 = \frac{5x-2}{x-2}$

c) $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x-5}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 0$

d) $\frac{2x-1}{x^2+3x-4} = \frac{1}{2}$

3.71. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x-3}{x+4} \geq 0$

b) $-\frac{2}{x-1} > 1$

c) $\frac{2x-3}{x+1} < \frac{x+6}{2x-2}$

d) $\frac{4x+3}{x+2} \geq \frac{4x}{x-1} - 3$

3.72. Dane są funkcje $h(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = h(-x)$ i $f(x) = h(x) \cdot g(x)$. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie większe od 3?

3.73. Pociąg wyruszył na trasę o długości 280 km z 40-minutowym opóźnieniem. Całą trasę przebył ze średnią prędkością o 10 km/h większą od planowej i w rezultacie zmniejszył opóźnienie do 10 minut. Z jaką średnią prędkością jechał?

3.74. Pociąg miał przebyć 840 km w określonym czasie. W połowie drogi został zatrzymany na pół godziny. Aby przybyć punktualnie na miejsce przeznaczenia, maszynista zwiększył prędkość o 2 km/h. Jak długo pociąg był w drodze?

3.75. Na kolonie nad morzem zgłosiło się 130 dzieci, dla których zaangażowano odpowiednią liczbę wychowawców. Ponieważ przyjęto jeszcze dodatkowo 14 dzieci, a jeden z wychowawców nie zgłosił się do pracy, każdemu z zatrudnionych wychowawców przydzielono po dwoje dzieci więcej, niż planowano na początku. Ilu wychowawców było na tej kolonii i iloma dziećmi każdy z nich się opiekował?

3.76. Pełny zbiornik z wodą o pojemności 90 m^3 można opróżnić przy użyciu dwóch zaworów. W ciągu jednej godziny przez pierwszy zawór wypływa ze zbiornika o $1,5 \text{ m}^3$ wody więcej niż przez drugi. Czas opróżniania zbiornika tylko przez pierwszy zawór jest o 3 godziny krótszy od czasu opróżniania tego zbiornika tylko przez drugi zawór. Oblicz, w ciągu ilu godzin pełen zbiornik zostanie opróżniony, jeśli woda będzie wypływać przez oba zawory jednocześnie.

3.77. Basen jest opróżniany przez otwór w dnie – osuszenie pełnego zbiornika trwa 4 godziny. Do napełniania basenu służą dwa krany. Jeśli woda leci tylko z pierwszego z nich, to napełnienie basenu zajmuje dwie godziny, jeśli tylko z drugiego – jedną godzinę. W ciągu ilu godzin napełni się basen, jeśli otwarte są obydwa krany i otwór w dnie?

3.70. a) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = 3$

b) $x = -\frac{8}{3}$ lub $x = -2$

c) brak rozwiązań

d) $x = -1$ lub $x = 2$

3.71. a) $x \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$

b) $x \in (-1; 1)$

c) $x \in (-1; 0) \cup \left(1; \frac{17}{3}\right)$

d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; \infty)$

3.72. $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup (-1; 1) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

3.73. 80 km/h

3.74. 21 godzin

3.75. Było 12 wychowawców, każdy miał pod opieką 12 dzieci.

3.76. $6\frac{2}{3} \text{ h}$

3.77. 48 min

3.78. 40 dni, o 25%

3.79. 12 sztuk produktu A po 1000 zł i 8 sztuk produktu B po 800 zł

3.80.

$$D = (-\infty; -6) \cup (-2; 0) \cup (0; \infty).$$

Wskazówka: $f(m) = \frac{3m+2}{m+2}$

3.82. $k \in (-5; 1)$

3.83. $a = b = 1;$

$$f(x) < 2 \text{ dla } x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; \infty\right)$$

3.84. $m = -\frac{4}{3}$

3.85. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

3.86. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases},$

lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

3.87.

a) $\begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{41}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

3.88. $m = 0$ lub $m = 7$

3.78. Podczas budowy bloku mieszkalnego należało wywieźć w określonym terminie 8000 m^3 ziemi. Praca została wykonana na 8 dni przed terminem, gdyż robotnicy stale przekraczali dzienny plan o 50 m^3 . Oblicz, na ile dni było zaplanowane wywózienie ziemi i o ile procent przekraczano dzienny plan.

3.79. Firma zaplanowała wytworzenie produktów A i B, łącznie 20 sztuk. Całkowity koszt wytworzenia produktów A ustalono na 12 000 zł, a produktów B – na 6400 zł. Koszt jednostkowy dla A był o 200 zł wyższy niż dla B. Ile sztuk każdego produktu zaplanowano i jakie były ich koszty jednostkowe?

3.80. Liczby x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania

$(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m+2 = 0$ z niewiadomą x dla $m \in \mathbf{R} - \{-2\}$. Wyznacz dziedzinę i naskicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$.

3.81. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3}$.

3.82. Dla jakich wartości parametru k nierówność podwójna $-3 < \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x ?

3.83. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{ax}{bx^2 - 1}$ taka, że $f(2) = \frac{2}{3}$ i $f(-3) = -\frac{3}{8}$. Wyznacz współczynniki a i b tej funkcji. Dla jakich x wartości funkcji f są mniejsze od 2?

3.84. Przedział $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} < m$ z niewiadomą x . Oblicz m .

3.85. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases}$.

3.86. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań $\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ x \cdot y = -2 \end{cases}$.

3.87. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x - |y+1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x + y = 1 \end{cases}$

3.88. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x + my = 3 \\ mx - 8y = 2m \end{cases} \text{ jest para liczb } (x, y) \text{ spełniających warunek } 2x + 7y = 3?$$

3.81. Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3} \quad | \cdot 3(x^2 + x + 1) \quad (x^2 + x + 1 > 0 \text{ dla } x \in \mathbf{R}, \text{ bo } \Delta < 0)$$

$$3x^2 - 3x + 3 \geq x^2 + x + 1$$

$$2x^2 - 4x + 2 \geq 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

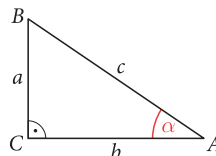
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$, więc wyjściowa nierówność też jest prawdziwa.

4. Funkcje trygonometryczne

Definicje

- W trójkącie prostokątnym ABC , w którym α jest kątem ostrym (oznaczenia jak na rysunku), mamy:

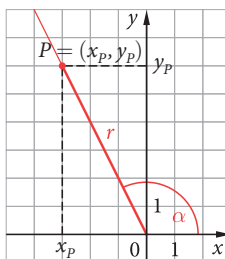
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



- Niech α będzie kątem o wierzchołku w początku układu współrzędnych i początkowym ramieniu pokrywającym się z dodatnią półosią x . Na ramieniu wodzącym kąta α wybieramy dowolny punkt $P = (x_P, y_P)$ różny od wierzchołka, o promieniu wodzącym r . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P} \quad \text{dla } x_P \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$.



- Miarą łukową kąta** jest stosunek długości zawartego w kącie łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta do promienia tego okręgu. Jednostką miary łukowej jest **radian**.

Kąt środkowy w okręgu oparty na łuku o długości równej promieniowi tego okręgu ma miarę 1 radiana.

- Jeżeli miarą łukową kąta α jest liczba t i $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to każdej liczbie rzeczywistej postaci $t + n \cdot 2\pi$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, przyporządkowujemy kąt α .
- Funkcję f o dziedzinie D nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdej liczby $x \in D$ spełnione są dwa warunki:
 - $x + T \in D$ i $x - T \in D$,
 - $f(x + T) = f(x)$.

Każdą z liczb T nazywamy **okresem** funkcji f , a jeżeli wśród nich istnieje najmniejsza dodatnia liczba T_0 , to nazywamy ją **okresem zasadniczym** funkcji f .

Twierdzenia

- Jedynka trygonometryczna**

Dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

- Jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, to $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

- **Wzory redukcyjne**

Dla dowolnego kąta α zachodzą równości:

$$\begin{array}{ll} \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array}$$

Jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

- **Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów α i β zachodzą równości:

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{array}$$

Jeżeli $\alpha, \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $\alpha + \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Jeżeli $\alpha, \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $\alpha - \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

- **Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta**

Dla dowolnego kąta α zachodzą równości:

$$\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{array}$$

Jeżeli $\alpha \neq 45^\circ + k \cdot 90^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

- **Wzór sinusów**

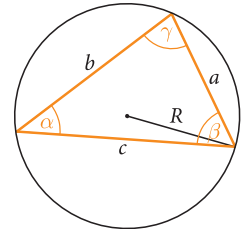
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

- **Twierdzenie sinusów**

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

- **Twierdzenie cosinusów**

W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku równa się sumie kwadratów długości pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{array}$$

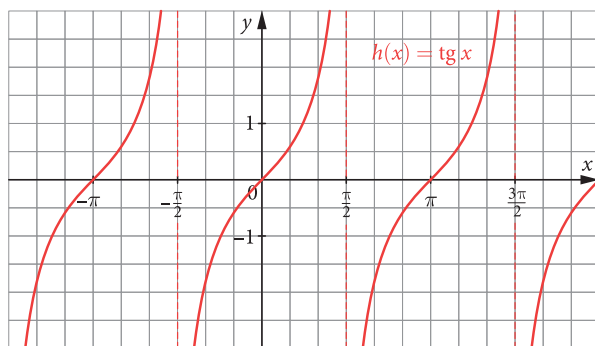
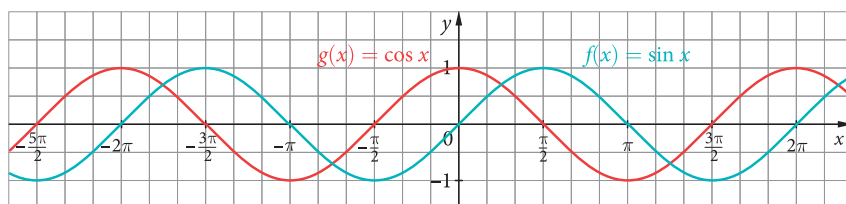
Wnioski, uwagi, komentarze...

- Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0	nie istnieje	0

- Jeśli α oznacza miarę stopniową kąta, a x jest jego miarą łukową, to $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$,
 $\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$.

- Wykresy funkcji trygonometrycznych



- Rozwiązaniami równania $\sin x = a$ dla $a \in \langle -1; 1 \rangle$ są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbb{Z}$.
- Rozwiązaniami równania $\cos x = a$ dla $a \in \langle -1; 1 \rangle$ są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbb{Z}$.
- Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = a$ są liczby postaci $x = x_0 + k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbb{Z}$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.14 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. A

4.1. Ile jest równy iloczyn $\operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ$?

- A. 1 B. 0 C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. 2

4.2. B

4.2. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Wskaż wartość wyrażenia $\frac{1 - 5 \sin \alpha}{1 + 5 \sin \alpha}$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 1

4.3. C

4.3. Wiadomo, że $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Zatem

- A. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. B. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

4.4. A

4.4. Wskaż wartość a , dla której równanie $\cos \alpha = \frac{1}{a^2 - 4a}$ nie ma rozwiązania.

- A. $a = \frac{1}{4}$ B. $a = \frac{1}{3}$ C. $a = -\frac{1}{2}$ D. $a = \frac{11}{2}$

4.5. B

4.5. Ile jest równa liczba $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ$?

- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 90

4.6. D

4.6. Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Zatem

- A. $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$. B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

4.7. D

4.7. Wiadomo, że $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Zatem

- A. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$. B. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{13}{5}$. D. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$.

4.8. A

4.8. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 11, a kąt między nimi ma miarę 120° . Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

- A. $\sqrt{201}$ B. $\sqrt{91}$ C. $\sqrt{146 - 55\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{146 + 55\sqrt{3}}$

4.9. D

4.9. W trójkącie ABC dane są $|AB| = 2\sqrt{5}$ i $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

- A. $5\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

4.10. Boki trójkąta mają długości $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ i 4. Wskaż wartość cosinusa największego kąta w tym trójkącie.

- A. $\frac{7}{4\sqrt{5}}$ B. $-\frac{2}{\sqrt{35}}$ C. $\frac{2}{\sqrt{35}}$ D. $\frac{9}{4\sqrt{7}}$

4.11. Wskaż liczbę równą $\cos 133^\circ$.

- A. $\sin 47^\circ$ B. $\cos 47^\circ$ C. $-\sin 47^\circ$ D. $-\cos 47^\circ$

4.12. Dla której z podanych funkcji oś y nie jest osią symetrii wykresu funkcji?

- A. $y = |\lg x|$ B. $y = \sin |x|$ C. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

4.13. Wskaż miarę łukową kąta $\alpha = 255^\circ$.

- A. $\frac{7\pi}{15}$ B. $\frac{17\pi}{12}$ C. $\frac{17\pi}{15}$ D. $\frac{21\pi}{13}$

4.14. Który z podanych kątów nie jest kątem wypukłym?

- A. $\alpha = \frac{4\pi}{9}$ B. $\beta = 3,01$ C. $\gamma = 3,7$ D. $\delta = \frac{3}{4}$

W zadaniach 4.15–4.18 oceń prawdziwość podanych zdań.

4.15. Kąty wewnętrzne trójkąta mają miary α , β i γ . Zatem

- A. $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$. B. $\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$. C. $\sin \beta = \cos(\alpha + \gamma)$.

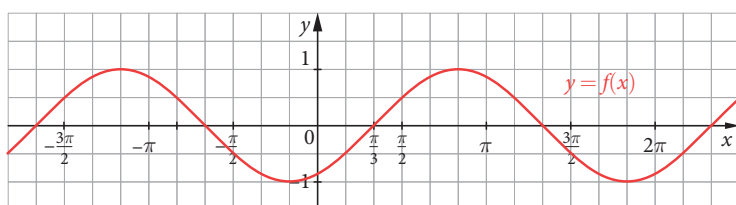
4.16. W trójkącie prostokątnym kąty α i β są ostre oraz $\beta > \alpha$. Zatem

- A. $\sin \alpha < \cos \alpha$. B. $\cos \beta < \cos \alpha$. C. $\sin \alpha < \sin \beta$.

4.17. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB| = 15$, $|CD| = 13$, a każde ramię ma długość 3. Zatem

- A. $\sin \angle ADC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\cos \angle ADC = \frac{1}{3}$. C. $\operatorname{tg} \angle ADC = 2\sqrt{2}$.

4.18. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Funkcję f można opisać za pomocą wzoru

- A. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. B. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. C. $f(x) = \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$.

4.10. B

4.11. D

4.12. C

4.13. B

4.14. C

4.15. P, F, F

4.16. P, P, P

4.17. P, F, F

4.18. P, F, P

4.19. A3

4.20. a) $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

4.21. $\frac{41\sqrt{7}}{18}$

4.22. $\frac{28\sqrt{2}}{81}$

4.23. $-\frac{2}{13}$

4.24. a) $\sin \sphericalangle A = \cos \sphericalangle B = \frac{4}{5}$,

$\sin \sphericalangle B = \cos \sphericalangle A = \frac{3}{5}$,

$\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle B = \frac{3}{4}$

b) $\sin \sphericalangle A = \cos \sphericalangle B = \frac{24}{25}$,

$\sin \sphericalangle B = \cos \sphericalangle A = \frac{7}{25}$,

$\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{24}{7}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle B = \frac{7}{24}$

4.25. a) $\sin \sphericalangle BAC = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\cos \sphericalangle BAC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \frac{2}{3}$

b) $\sin \sphericalangle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\cos \sphericalangle BAC = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \sqrt{15}$

4.26. 67° i 23°

4.27. a) 30° b) 53°

c) Taki trójkąt nie istnieje.

4.19. W trójkącie KLM dane są: $|KL| = 3\sqrt{5}$, $|LM| = 5\sqrt{2}$ i $|MK| = 2\sqrt{3}$.
Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.
 Kąt przy wierzchołku K

A.	jest ostry,	ponieważ	1.	$ LM ^2 > KL ^2 + MK ^2$.
B.	jest prosty,		2.	$ LM ^2 = KL ^2 + MK ^2$.
C.	jest rozwarty,		3.	$ LM ^2 < KL ^2 + MK ^2$.

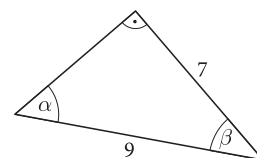
4.20. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α spełniającego podane warunki.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $\cos \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$

4.21. Kąty α i β są ostre oraz $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos \beta = \frac{1}{6}$. Oblicz dokładną wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

4.22. Na podstawie rysunku obok wyznacz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.



4.23. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz wartość

wyrażenia $\frac{4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{3 \cos \alpha + 5 \sin \alpha}$.

4.24. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkącie ABC , w którym $\sphericalangle C = 90^\circ$, a przyprostokątne mają długości

a) $|AC| = 18$ cm i $|BC| = 24$ cm.

b) $|AC| = 21$ cm i $|BC| = 72$ cm.

4.25. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie prostokątnym ABC , w którym

a) $\sphericalangle C = 90^\circ$, $|AC| = 3$, $|BC| = 2$.

b) $\sphericalangle B = 90^\circ$, $|BC| = \sqrt{15}$, $|AC| = 4$.

4.26. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych różnią się o 28 cm, a przeciwprostokątna ma 52 cm. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów ostrych tego trójkąta.

4.27. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta przy podstawie w trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10$ cm, a wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa

a) 5 cm.

b) 8 cm.

c) 12 cm.

4.28. Oblicz.

a) $\cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$

b) $\sin^2 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos^2 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$



4.29. Z jednego brzegu jeziora widać szczyt góry pod kątem 18° względem poziomu, a z drugiego brzegu, oddalonego od pierwszego o 1180 m w kierunku podnóża góry, widać jej szczyt pod kątem 22° względem poziomu. Oblicz wysokość h góry (mierzoną względem tafli wody). Podaj wynik z dokładnością do 10 m.



4.30. Do miseczki w kształcie półkuli o średnicy 18 cm nalano mleko, którego poziom jest o 2 cm niższy od poziomu maksymalnie napełnionego naczynia. Jaki jest największy kąt, o który można przechylić miseczkę tak, aby mleko się nie wylało? Podaj wartość dowolnie wybranej funkcji trygonometrycznej tego kąta. Następnie podaj miarę kąta z dokładnością do 1° .



4.31. Prosta droga wznosi się pod kątem 12° do poziomu. Na jaką wysokość ponad poziom wzniesiemy się po przebyciu 900 m tej drogi? Jakiej długości drogę musimy pokonać, aby wzniesć się na wysokość 250 m? Wyniki podaj z dokładnością do 10 m.



4.32. Podstawą masztu jest punkt O , a jego wierzchołkiem – punkt P . Kąt, pod jakim widać maszt z punktu A ($AO \perp OP$), ma miarę 32° , a kąt, pod jakim widać maszt z punktu B , leżącego na odcinku AO w odległości 15 m od A , ma miarę 68° . Oblicz wysokość masztu. Podaj wynik z dokładnością do 0,1 m.

4.33. Przekątna rombu jest $1\frac{3}{4}$ razy dłuższa od jego boku. Podaj wartości dowolnie wybranych funkcji trygonometrycznych kątów tego rombu oraz miary kątów z dokładnością do 1° .

4.34. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz dokładną wartość tangensa kąta α .

4.35. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$. Oblicz dokładne wartości sinusa i cosinusa kąta α .

4.36. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = 0,3$. Oblicz $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

4.37. Sprawdź, czy dla każdego kąta ostrego α wyrażenie ma stałą wartość. Jeżeli tak, to ją podaj.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + 3(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$

4.28. a) $\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

4.29.

$$h = \frac{1180 \cdot \operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 22^\circ}{\operatorname{tg} 22^\circ - \operatorname{tg} 18^\circ} \approx 1960 \text{ [m]}$$

4.30. $\sin \alpha = \frac{2}{9}$, $\alpha \approx 13^\circ$

4.31. wysokość: 190 m,
długość drogi: 1200 m

4.32. $h = \frac{15 \operatorname{tg} 32^\circ \operatorname{tg} 68^\circ}{\operatorname{tg} 68^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} \approx 12,5 \text{ [m]}$

4.33. cosinus kąta
ostrego: 0,53125, kąt ostry: 58° ,
sinus kąta rozwartego: 0,8472,
kąt rozwarty: 122°

4.34. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

4.35. $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

4.36. $\frac{91}{9}$

4.37. a) tak, 4

b) tak, 0

D 4.38. Udowodnij tożsamość.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - 2$

c) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

d) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = (\operatorname{tg} \alpha - 1) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 \right)$

D 4.39. Udowodnij tożsamość.

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$

c) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

b) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha - \cos \alpha}$

d) $\sin \alpha = \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) (1 - \cos \alpha)$

4.40. $P = \frac{175\pi}{13}$

4.41. $\frac{47}{15}$

4.42. $\frac{1}{6}$

4.43. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5},$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2},$

$\operatorname{tg} \alpha = -1$

c) $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = -\frac{15}{17},$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$

d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \cos \alpha = -\frac{3}{4},$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

4.44. $-\frac{5}{4}$

4.45. $\sqrt{7}$

4.46. $32^\circ, 53^\circ, 95^\circ$

4.47. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

4.48. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

4.40. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB taki, że $\sin \angle BAC = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.**4.41.** Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.**4.42.** W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.**4.43.** Ramię wodzące kąta α przechodzi przez podany punkt P . Wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

a) $P = (-8, 6)$ b) $P = (-7, 7)$ c) $P = \left(-\frac{15}{2}, 4\right)$ d) $P = (-3, \sqrt{7})$

4.44. Oblicz $\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 120^\circ \cdot \sin 150^\circ$.**4.45.** Kąt trójkąta zawarty między bokami o długościach 5 i 4 ma miarę 60° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.**4.46.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 15$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta (z dokładnością do 1°).**4.47.** Wiadomo, że $\cos 2x = -\frac{2}{3}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$. Oblicz $\cos x$.**4.48.** Wiadomo, że $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$. Oblicz $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.38. a) $L = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha =$
 $= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 = P$

b) $L = \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - 2 = P$

c) $L = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = (1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = P$

d) $P = 1 + \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = L$

4.49. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ podaj najmniejszą wartość tej funkcji w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$.

4.50. Wyznacz przedziały, w których funkcja $f(x) = 1 + \cos 2x$ określona dla $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$ jest rosnąca.

4.51. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g(x) = \sin x + \cos x + 2$.

4.52. Dla jakich $x \in \langle 0; 2 \rangle$ określona jest funkcja $f(x) = \sqrt{1 - 2 \cos x}$?

4.53. Dana jest funkcja $f(x) = 1 - 4 \cos^2 x$, $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$. Podaj zbiór, w którym określona jest funkcja $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

4.54. Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ określone jest wyrażenie $\frac{\log(2 \sin x - 1)}{\sqrt{1 - 2 \cos^2 \frac{x}{2}}}$?

4.55. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ rozwiązanie nierówności $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

4.56. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ określona dla $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f . b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

4.57. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f . b) Rozwiąż równanie $2f(x) = 1$.

4.58. Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

4.59. Dla jakich $x \in \mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ zachodzi równość $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$?

4.60. Rozwiąż równanie $2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

4.61. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

4.62. Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3 \cos x$.

4.63. Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

4.64. Rozwiąż równanie $3 \sin^2 x - 4 \sin^2 2x = -3 \cos^2 x$.

$$\mathbf{4.39. a)} L = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{(\sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = P$$

$$\mathbf{b)} P = \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha - 1)}{\cos \alpha (\cos^2 \alpha - 1)} = \frac{\sin \alpha (-\cos^2 \alpha)}{\cos \alpha (-\sin^2 \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = L$$

$$\mathbf{c)} L = \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} = P$$

$$\mathbf{d)} P = \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) (1 - \cos \alpha) = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha = L$$

4.49. -1

4.50. $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle, \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

4.51. $ZW = \langle 2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2} \rangle$

4.52. $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; 2 \right\rangle$

4.53. $\left\langle -\frac{5}{3}\pi; -\frac{4}{3}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$

4.54. $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi \right)$

4.55. $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{7}{6}\pi; 2\pi \right)$

4.56. b) $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$

4.57. a) Wskazówka:

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

4.58. $x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3} \right\}$

4.59. Nie ma takiego x .

4.60. $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\}$

4.61. $x = \frac{7\pi}{6}$ lub $x = \frac{11\pi}{6}$

4.62. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, lub $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

4.63. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

4.64. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$,
lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, lub $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$

$$4.65. x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$$

$$4.66. x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

$$4.67. \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4.68. \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4.69. \alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}\pi; 2\pi \right\rangle$$

4.70. $m = 1$. Wskazówka:
Skorzystaj ze wzoru
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$4.71. \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$4.72. -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$4.73. x = \frac{1}{9}$$

$$4.74. x \in \left(\frac{11}{24}\pi; \frac{17}{24}\pi\right) \cup \left(\frac{35}{24}\pi; \frac{41}{24}\pi\right)$$

$$4.75. -\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$$

$$4.76. \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$$

α – kąt ostry

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{16}{9}$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{16}{9}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{7}{9} \quad | : 2$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{7}{18}$$

$$4.65. \text{Dla jakich } x \in \langle -\pi; \pi \rangle - \{0\} \text{ spełniona jest nierówność } \frac{1}{\operatorname{tg} x} \geq \frac{1}{2 \sin x}?$$

$$4.66. \text{Rozwiąż nierówność } \sin^2 x \geq \cos^2 x.$$

$$4.67. \text{Dla jakich wartości } \alpha \text{ równanie } \frac{x+1}{2x-1} - \frac{2x+1}{x-1} = \cos \alpha \text{ z niewiadomą } x \text{ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty?}$$

$$4.68. \text{Znajdź te wartości parametru } \alpha, \text{ dla których pierwiastki } x_1, x_2 \text{ równania } x^2 - 2x \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 0 \text{ z niewiadomą } x \text{ spełniają równość } x_1^3 + x_2^3 = 0.$$

$$4.69. \text{Dla jakich wartości parametru } \alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle \text{ równanie } 2x^2 - 2(2 \cos \alpha - 1)x + 2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 2 = 0 \text{ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?}$$

$$4.70. \text{Dla jakich wartości parametru } m \text{ jeden pierwiastek równania } x^2 + mx + 2m - 2 = 0 \text{ jest sinusem, a drugi cosinusem tego samego kąta?}$$

$$4.71. \text{Dane jest równanie } (2 \sin \alpha - 1)x^2 - 2x + \sin \alpha = 0 \text{ z niewiadomą } x. \text{ Dla jakich wartości parametru } \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ suma odwrotności pierwiastków tego równania jest równa } 4 \cos \alpha?$$

$$4.72. \text{Oblicz } \frac{\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{3}\right)}.$$

$$4.73. \text{Podaj najmniejsze dodatnie rozwiązanie równania } \sin(12\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4.74. \text{Rozwiąż nierówność } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ w przedziale } \langle 0; 2\pi \rangle.$$

$$4.75. \text{Dane są kąty } \alpha \text{ i } \beta \text{ takie, że } 90^\circ < \alpha < 180^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ, \sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{1}{3}. \text{ Oblicz dokładną wartość } \cos(\alpha + \beta).$$

$$4.76. \text{Dany jest kąt ostry } \alpha \text{ taki, że } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}. \text{ Wykaż, że } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{7}{18}.$$

D * 4.77. Niech α, β i γ oznaczają kąty wewnętrzne trójkąta ABC . Wiadomo, że kąty te spełniają równość $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = 1 - \cos \gamma$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

$$4.77. \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \text{ więc } \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Przekształcamy daną równość:

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = 1 - \cos \gamma$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = 1 - \cos [180^\circ - (\alpha + \beta)]$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = 1 + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = 1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$

Zatem $\alpha - \beta = 0^\circ$, więc $\alpha = \beta$, co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Definicje

- **Funkcją wykładniczą o podstawie a** nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($x \in \mathbb{R}$), a jej wykres nazywamy **krzywą wykładniczą**.
- **Logarytmem przy podstawie a ($a > 0$ i $a \neq 1$) liczby b ($b > 0$)** nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b .
 $\log_a b = c$, gdy $a^c = b$ i $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
 Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.
- **Funkcją logarytmiczną o podstawie a** nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych ($x > 0$), a jej wykres nazywamy **krzywą logarytmiczną**.

Twierdzenia

- Jeżeli liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba x , że $a^x = b$.
- Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $k \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

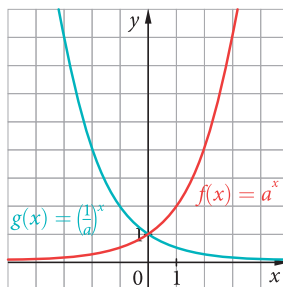
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^k) = k \cdot \log_a x$$
- Dla dowolnych liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$ zachodzi równość: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

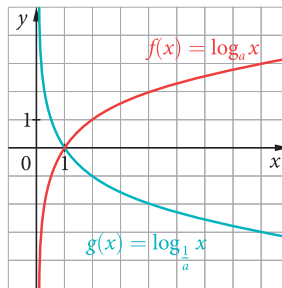
Wnioski, uwagi, komentarze...

- Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ dla $a > 0$, $a \neq 1$ są symetryczne względem osi y .

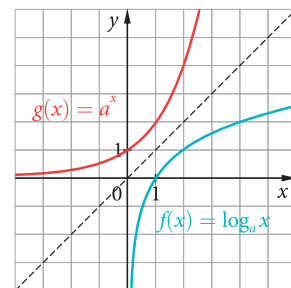


- Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$:
 - $a^x = a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
 - jeżeli $a \in (1; \infty)$, to $a^x > a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > y$,
 - jeżeli $a \in (0; 1)$, to $a^x > a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$.
- Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a b} = b$$
- Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$ są symetryczne względem osi x (rys. 1).
- Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = a^x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$ (rys. 2).



Rys. 1.



Rys. 2.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. D

- 5.1. Wiadomo, że $7^{x+1} = 49$. Wskaż wartość wyrażenia 4^{4x-1} .
- A. 16 B. 1 C. 28 D. 64

5.2. C

- 5.2. Jeżeli $3 = a^x$, to $\frac{3}{a}$ jest równe
- A. $3a^{x-1}$. B. a^{x+1} . C. a^{x-1} . D. 1.

5.3. D

- 5.3. Wiadomo, że $\log_x 9 = \frac{1}{2}$. Wskaż wartość x .
- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. 81

5.4. Wskaż wartość wyrażenia $5^{\log_5 \frac{1}{125}}$.

- A. -3 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{125}$ D. 5

5.4. C

5.5. Wskaż wartość wyrażenia $5^{\frac{2}{\log_9 5}}$.

- A. 3 B. 9 C. $\log_9 2$ D. 81

5.5. D

5.6. Która z liczb jest równa liczbie $3^{\log_9 \frac{1}{81}}$?

- A. $\sqrt{3}$ B. 81 C. $\frac{1}{9}$ D. -9

5.6. C

5.7. Wskaż zależność fałszywą.

- A. $(\log_2 1 + \log_2 2)^2 = 1$
 B. $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 - \log 24 = 0$
 C. $\frac{\log 100 + \log 10}{\log 2 + \log 5} = 3$
 D. $\frac{\log 27}{\log 9} = \log 3$

5.7. D

5.8. Jeden z podanych zbiorów jest zbiorem rozwiązań równania $\log^2 10x = \log^2 100$. Wskaż ten zbiór.

- A. $\{-10, 10\}$ B. $\{1, 10\}$ C. $\{10\}$ D. $\left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$

5.8. D

5.9. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = 7^x$ przyjmuje wartość 14.

- A. $x = \log_7 14$ C. $x = \log_{14} 7$
 B. $x = 2$ D. $x = \log_7 2$

5.9. A

5.10. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość 24.

- A. $x = 3 + \log_2 3$ C. $x = \log_{24} 2$
 B. $x = 12$ D. $x = \log_2 12$

5.10. A

5.11. Wskaż wzór funkcji malejącej.

- A. $f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^x$ C. $f(x) = -4^x$
 B. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$ D. $f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x$

5.11. C

5.12. B

5.12. Wskaż wzór funkcji g , której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ przez symetrię względem osi x .

A. $g(x) = -\left(\frac{5}{3}\right)^x$

C. $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

B. $g(x) = -\left(\frac{3}{5}\right)^x$

D. $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x}$

5.13. A

5.13. Wskaż wzór funkcji g , której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 3^x - 1$ przez symetrię względem osi y .

A. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

C. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

B. $g(x) = -3^x - 1$

D. $g(x) = -3^x + 1$

5.14. A

5.14. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = |\log x|$.

A. $(0; \infty)$

B. $\mathbf{R}$

C. $(0; \infty) - \{1\}$

D. $\mathbf{R} - \{0\}$

5.15. C

5.15. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = 3^{-x} - 2$.

A. $\mathbf{R}$

B. $(0; \infty)$

C. $(-2; \infty)$

D. $(-\infty; -2)$

5.16. D

5.16. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \log |x - 5|$.

A. $\mathbf{R}$

B. $(5; \infty)$

C. $(-\infty; 5)$

D. $\mathbf{R} - \{5\}$

5.17. C

5.17. Narysuj odpowiedni wykres i odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) > -2$.

A. $(5; \infty)$

B. $(-\infty; 5)$

C. $(-4; 5)$

D. $(0; \infty)$

5.18. D

5.18. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = -\log_{0,2} x$

C. $f(x) = |\log_{0,5} x - 2|$

B. $f(x) = \log_{2,3} x$

D. $f(x) = \log_{5,1}(-x)$

W zadaniach 5.19–5.22 oceń prawdziwość podanych zdań.

5.19. F, F, P

5.19. Dana jest funkcja $f(x) = 0,4^{-x} - 1$.

A. Funkcja f jest malejąca.B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; \infty \rangle$.C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.

5.20. Dana jest liczba $a = \log_{12} 3$.

A. Liczba a jest równa liczbie $1 + \log_4 3$.

B. Liczba a jest równa liczbie $\frac{\log_4 3}{1 + 2 \log_4 3}$.

C. Liczba a jest równa liczbie $\frac{1}{1 + 2 \log_3 2}$.

5.21. Dana jest funkcja $f(x) = \left| \left| 3^{x-2} - 2 \right| - 3 \right|$.

A. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

B. Równanie $\left| \left| 3^{x-2} - 2 \right| - 3 \right| = m$ ma trzy rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (1; 3)$.

C. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.

5.22. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{|x|} 10$.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

B. Dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(-x) = f(x)$.

C. $f(x) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 10$.

5.23. Dane są liczby $a = \log_{\frac{2}{3}} 5$ i $b = \log_{\frac{2}{3}} 7$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.**

Prawdziwa jest nierówność

A.	$a < b$,	ponieważ	1.	funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest rosnąca.
B.	$a > b$,		2.	funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest malejąca.

5.24. Oblicz.

a) $\log_3 9 - \log_2 16 + \log 100$

b) $\log_2 0,25 + \log_3 \frac{1}{81} - \log 0,001$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} + \log \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{125}$

d) $\log_2 \sqrt[5]{0,5} - \log \frac{1}{\sqrt[5]{1000}} + \log_7 1$

5.25. Oblicz.

a) $\log_3 6 + \log_3 12 - \log_3 8$

b) $2 \log_2 10 - \log_2 25 - 0,1 \log_2 2^{10}$

c) $\frac{\log_2 25 + \log_3 49}{\log_2 5 + \log_3 7}$

d) $\frac{2 \log_3 6 - \log_3 2}{\log_3 2 + 2}$

5.20. F, F, P

5.21. P, P, F

5.22. P, P, F

5.23. B2

5.24. a) 0 b) -3 c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

5.25. a) 2 b) 1 c) 2 d) 1

5.26. a) 17 b) $\frac{5}{3}$ c) 8 d) $2\sqrt{5}$

5.27. $-3,8$

5.28. $2 - 2p$

5.29. $\frac{6-2t}{3}$

5.30. 24

5.31. $a > b$

5.32. $\log_{70} 4 = 2 - 2a - 2b$
 $P = 2 - 2\log_{70} 5 - 2\log_{70} 7 =$
 $= \log_{70} 70^2 - \log_{70} 5^2 - \log_{70} 7^2 =$
 $= \log_{70} \frac{70^2}{5^2 \cdot 7^2} =$
 $= \log_{70} \left(\frac{70}{5 \cdot 7}\right)^2 \log_{70} 2^2 =$
 $\log_{70} 4 = L$

5.34. wartość największa: -23 dla $x = 3$, wartość najmniejsza: -623 dla $x = 5$

5.35. a) $a = \sqrt{3}$
 c) $m \in \{0\} \cup (2; \infty)$

5.26. Oblicz.

a) $10^{\log 17}$ b) $5^{1-\log_5 3}$ c) $27^{\log_3 2}$ d) $2^{1+\log_4 5}$

5.27. Przyjmij, że $\log_{\frac{1}{2}} 7 = -2,8$, i oblicz $\log_{\frac{1}{2}} 70 - \log_{\frac{1}{2}} 5$.

5.28. Niech $\log_3 5 = p$. Wyznacz $\log_3 0,36$.

5.29. Niech $\log 8 = t$. Wyznacz $\log 25$.

5.30. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2$.
 Oblicz $\sqrt{abc}$.

5.31. Porównaj liczby $a = \log_2 36 + \log_2 30 + \log_2 25$ i $b = 4 + \log_2 28 + \log_2 49$.

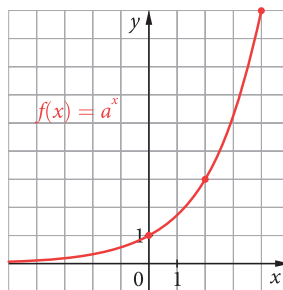
D 5.32. Niech $\log_{70} 5 = a$ i $\log_{70} 7 = b$. Wykaż, że $\log_{70} 4 = 2 - 2a - 2b$.

5.33. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = 2^x - 1$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ e) $f(x) = -3^x - 3$
 b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ d) $f(x) = 4^{-x} + 2$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4$

5.34. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2 - 5^{x-1}$ i podaj największą oraz najmniejszą wartość tej funkcji przyjmowane w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$.

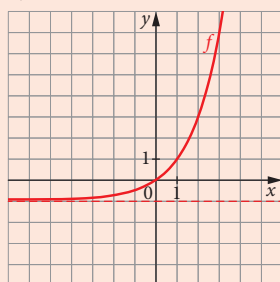
5.35. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Kropkami zaznaczone są punkty kratowe wykresu.



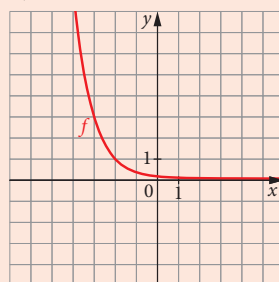
- a) Na podstawie wykresu wyznacz a .
 b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.
 c) Podaj wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

5.33.

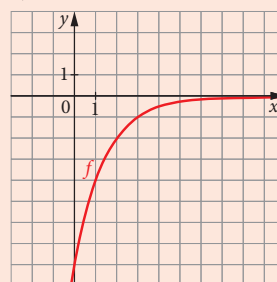
a)



b)

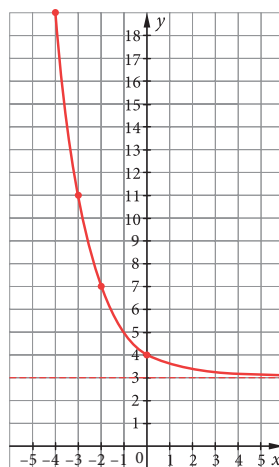


c)



5.36. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = a^x + b$. Kropkami zaznaczone są punkty kratowe wykresu.

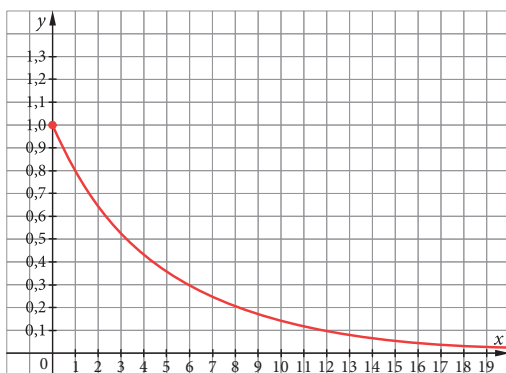
- a) Na podstawie wykresu wyznacz a i b .
b) Podaj wzór funkcji g , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej $y = 2$.



5.37. Pewien gatunek owadów co rok zwiększa trzykrotnie swoją liczebność. Przyjmijmy, że na początku populacja liczyła N osobników.

- a) Zapisz wzór funkcji f opisującej liczebność populacji owadów po upływie x lat.
b) O ile procent zwiększy się liczebność populacji owadów po upływie półtora roku?

5.38. Na wykresie przedstawiono rozpad 1 grama pewnej substancji promieniotwórczej w zależności od czasu x mierzonego w latach.



- a) Wzór funkcji opisującej masę tej substancji, która nie rozpadła się po upływie x lat, ma postać $f(x) = a^x$. Na podstawie wykresu wyznacz współczynnik a .
b) Wyznacz przybliżony okres połowicznego rozpadu tej substancji.

5.39. Rozwiąż graficznie równanie $|3^x - 3| + 1 = -x^2 + 2x$.

5.40. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{dla } x < 0 \\ 2^{-x} - 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ i odczytaj z wykresu najmniejszą wartość funkcji.

5.36. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$

b) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

5.37. a) $f(x) = N \cdot 3^x$

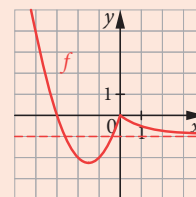
b) o ok. 420%

5.38. a) $a = \frac{4}{5}$

b) 3 lata

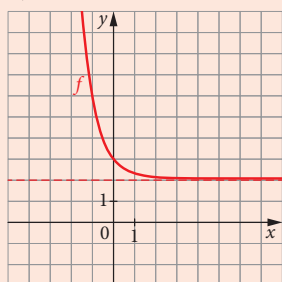
5.39. $x = 1$

5.40. $-\frac{9}{4}$

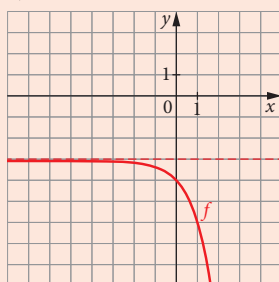


5.33.

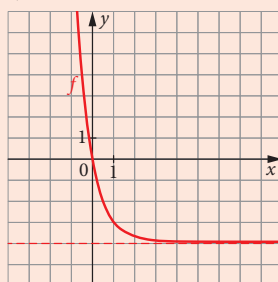
d)



e)



f)



5.41. pięć: $(-1, 3), (0, 2), (0, 3), (0, 5)$ i $(1, 3)$

5.42. $10^{-\frac{4}{5}} \approx 0,158, 10^{\frac{11}{5}} \approx 158,5$

5.43. $m = 2, k = -3;$
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 6)$

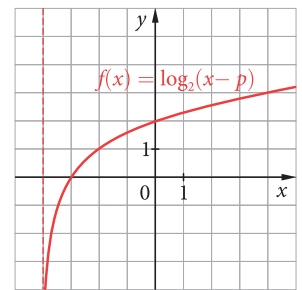
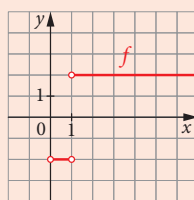
5.44. a) $p = -4$
c) $m > 2$

5.46. 2

5.47. $D = \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$

5.48. $D = (-4; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; \infty)$

5.49. $x \in (-4; -\pi) \cup (0; \pi)$

5.41. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} y > 2^{|x|} \\ y + |x| < 6 \end{cases}$. Ile punktów kratowych, których druga współrzędna jest liczbą pierwszą, należy do otrzymanego zbioru?**5.42.** Wiadomo, że 1,5849 jest przybliżeniem liczby $10^{0,2}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wyznacz przybliżenie liczby $10^{-\frac{4}{5}}$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku oraz przybliżenie liczby $10^{\frac{11}{5}}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.**5.43.** Wykres funkcji $f(x) = \log_2(x+m)+k$ o dziedzinie $D = (-2; \infty)$ przechodzi przez punkt $(2, -1)$. Oblicz m i k , a następnie naszkicuj wykres funkcji. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.**5.44.** Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_2(x-p)$.a) Na podstawie wykresu wyznacz wartość p .b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.c) Podaj wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.*** 5.45.** Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\log x^2}{|\log x|}$.**5.46.** Dana jest funkcja $f(x) = 2 \log_5(x^2 - 4) + \sqrt{\frac{6-2x}{x+5}}$. Wyznacz wartość funkcji dla największej liczby całkowitej należącej do dziedziny f .**5.47.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{2 \cos x}(9 - x^2)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.**5.48.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.**5.49.** Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ określone jest wyrażenie $\frac{\log(16-x^2)}{\sqrt{\sin x}}$?**5.45.**

$$f(x) = \frac{\log x^2}{|\log x|}$$

$$D_f = \{x: x > 0 \text{ i } \log x \neq 0\} = (0; 1) \cup (1; \infty)$$

Jeżeli $\log x < 0$, czyli $x \in (0; 1)$, to $f(x) = \frac{2 \log x}{-\log x} = -2$.

Jeżeli $\log x > 0$, czyli $x \in (1; \infty)$, to $f(x) = \frac{2 \log x}{\log x} = 2$.

6. Ciągi liczbowe

Definicje

- **Ciągiem** nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych. Ciąg nazywamy **liczbowym**, gdy jego wartości są liczbami rzeczywistymi.
- Jeżeli dziedzinę ciągu ograniczymy do pewnego skończonego zbioru początkowych liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy **ciąg skończony**.
- **Ciągiem arytmetycznym** nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r , nazywanej **różnicą** tego ciągu.
- **Ciągiem geometrycznym** nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje w wyniku pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q , nazywaną **ilorazem** ciągu.

Twierdzenia

- Jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mamy:

$a_{n+1} > a_n$, to ciąg (a_n) jest rosnący,

$a_{n+1} < a_n$, to ciąg (a_n) jest malejący,

$a_{n+1} \geq a_n$, to ciąg (a_n) jest niemalejący,

$a_{n+1} \leq a_n$, to ciąg (a_n) jest nierosnący.

Ciąg liczbowy, który spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, jest ciągiem monotonicznym, pozostałe ciągi liczbowe są niemonotoniczne.

- **Wzór ogólny ciągu arytmetycznego** (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
- Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , $n > 1$, prawdziwa jest zależność: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, czyli środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

- **Wzór ogólny ciągu geometrycznego** (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

- Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , $n > 1$, prawdziwa jest zależność: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

Wnioski, uwagi, komentarze...

- W ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi zależność $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 + (n - 1)r$ jest:
 - rosnący dla $r > 0$,
 - malejący dla $r < 0$,
 - stały dla $r = 0$.
- Średnia arytmetyczna wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego.
- Dany jest ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$, w którym $a_1 \cdot q \neq 0$.
 - Jeżeli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący dla $a_1 < 0$ i rosnący dla $a_1 > 0$.
 - Jeżeli $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący dla $a_1 < 0$ i malejący dla $a_1 > 0$.
 - Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym.
 - Jeżeli $q < 0$, to sąsiednie wyrazy ciągu mają różne znaki, zatem ciąg jest niemonotoniczny.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.13 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Liczba ujemnych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = (3n - 17)(2n + 3)$ dla $n \geq 1$ jest równa

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

6.2. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 43?

- A. $a_n = 4n - 121$ C. $c_n = 4n - 123$
B. $b_n = 4n - 122$ D. $d_n = 4n - 124$

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. A

6.2. A

6.3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, gdzie $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Zatem

- A. $a_5 = 125$. B. $a_5 = 177$. C. $a_5 = 207$. D. $a_5 = 225$.

6.4. Dany jest ciąg (a_n) , w którym $a_n = (-1)^n \cdot (21 - 2n)$ dla $n \geq 1$. W tym ciągu

- A. $a_{11} = -1$. B. $a_{11} > 0$. C. $a_{11} = 0$. D. $a_{11} < -1$.

6.5. Piąty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy 11, a trzynasty wyraz jest równy 35. Wskaż trzeci wyraz tego ciągu.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6.6. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą układu warunków: $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = \frac{2}{1 - a_n}$ dla $n \geq 1$. Wskaż czwarty wyraz tego ciągu.

- A. -2 B. 0 C. $\frac{2}{3}$ D. 6

6.7. Wskaż różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 5n - 11$ określonego dla $n \geq 1$.

- A. 5 B. -5 C. -6 D. -11

6.8. Ile wynosi suma $k - 1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n + 1$?

- A. $k^2 + 1$ B. $k^2 - 1$ C. $k^2 - 2k + 1$ D. $(k + 1)^2$

6.9. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy m , a dwunasty jest równy n . Jaką postać ma dziewiąty wyraz tego ciągu?

- A. $\frac{n - m}{2}$ B. $\frac{1}{2}(m + n)$ C. $\frac{1}{3}(m + n)$ D. $\frac{m - n}{3}$

6.10. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 \neq 0$ i iloraz $q \neq 1$. Która z poniższych zależności jest prawdziwa?

- A. $\frac{a_9}{a_7} = \frac{a_{11}}{a_{13}}$ C. $2a_2 = a_1 \cdot a_3$
 B. $a_7 - a_5 = a_{13} - a_{11}$ D. $a_5^2 = a_4 \cdot a_6$

6.11. Wskaż wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego o wyrazach $a_1 = 8$, $a_2 = 32$.

- A. $a_n = 2^{n-1}$ B. $a_n = 8 \cdot 4^n$ C. $a_n = 2^{2n-1}$ D. $a_n = 2^{2n+1}$

6.12. Dla jakiej wartości $x \in \mathbb{N}$ liczby: $x + 1$, $4x + 1$, $10x + 7$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 4$

6.3. D

6.4. B

6.5. C

6.6. D

6.7. A

6.8. B

6.9. B

6.10. D

6.11. D

6.12. B

6.13. C

6.13. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_{17} = 4a_{15}$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 4.

W zadaniach 6.14–6.17 oceń prawdziwość podanych zdań.

6.14. F, P, F

6.14. Ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 5n^2 - 7$, gdzie $n \in \mathbb{N} - \{0\}$,
 A. ma pięć wyrazów mniejszych od 100.
 B. jest monotoniczny.
 C. ma wszystkie wyrazy dodatnie.

6.15. P, F, F

6.15. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = 6\sqrt{3}$ i $a_7 = 54$.
 A. (a_n) jest ciągiem rosnącym.
 B. (a_n) można określić wzorem $a_n = 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}$.
 C. a_{100} jest liczbą wymierną.

6.16. F, P, P

6.16. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$$

 A. Ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.
 B. $a_3 = \frac{8}{13}$
 C. $a_4 < 1$

6.17. P, F, P

6.17. Liczby $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 256$ są
 A. kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
 B. kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
 C. wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

6.18. C, D

6.18. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 4n^2 - 16$. **Wskaż dwa zdania prawdziwe dotyczące tego ciągu.**
 A. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
 B. Ciąg (a_n) nie ma miejsc zerowych.
 C. Tylko jeden wyraz ciągu (a_n) jest ujemny.
 D. W ciągu (a_n) występuje wyraz równy 180.
 E. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
 F. Ciąg (a_n) jest geometryczny.

6.19. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = -\frac{2}{a_n} \end{cases}$.

6.19. A3

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1, 2, 3 albo 4.
W opisanym ciągu zachodzi nierówność

A.	$a_{100} > 0$,	ponieważ	1.	wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
			2.	wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są ujemne.
B.	$a_{100} < 0$,		3.	wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych są dodatnie.
			4.	wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych są ujemne.

6.20. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony podanym wzorem?

a) $a_n = n^2 - 2n - 24$

b) $a_n = \frac{n^2 - 3n - 28}{n + 3}$

6.20. a) pięć b) sześć

6.21. Zbadaj monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$.

6.21. ciąg malejący

D 6.22. Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ jest rosnący.

6.23. Wyznacz parametr k tak, aby ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n + k(n+1)$ był rosnący.

6.23. $k \in (2; \infty)$

6.24. Sprawdź, korzystając z definicji, czy ciąg o wyrazie ogólnym a_n jest arytmetyczny. Jeśli jest, wyznacz jego pierwszy wyraz i różnicę r .

a) $a_n = 3n - 3$ c) $a_n = 5n$ e) $a_n = \frac{3-5n}{2}$

b) $a_n = n(n-1)$ d) $a_n = 7^n$ f) $a_n = \frac{9n^2 - 4}{3n + 2}$

6.24. a) tak, $a_1 = 0$, $r = 3$

b) nie

c) tak, $a_1 = 5$, $r = 5$

d) nie

e) tak, $a_1 = -1$, $r = -\frac{5}{2}$

f) tak, $a_1 = 1$, $r = 3$

6.25. Liczby x , y , 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, ponadto $x + y = 8$. Oblicz x i y .

6.25. $x = -1$, $y = 9$

6.26. W 9-wyrazowym ciągu arytmetycznym suma pierwszych trzech wyrazów jest równa 3, a suma ostatnich trzech jest równa 111. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

6.26. 171

D 6.27. Wykaż, że dla każdego m ciąg $\frac{m+1}{4}$, $\frac{m+3}{6}$, $\frac{m+9}{12}$ jest arytmetyczny.

6.28. Liczby 2, $x - 3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

6.28. $x = 7$

6.22. $a_n = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!n(n+1)}{(n-1)!} = n(n+1) < (n+1)(n+2) = a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, czyli ciąg (a_n) jest rosnący.

6.27. $a_1 = \frac{m+1}{4}$, $a_2 = \frac{m+3}{6}$, $a_3 = \frac{m+9}{12}$

$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$

$P = \frac{1}{2} \left(\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3m+3+m+9}{12} = \frac{4m+12}{24} = \frac{4(m+3)}{24} = \frac{m+3}{6} = a_2 = L$

6.29. $a_{15} = 72$

6.30. -473

6.31. $n = 10$

6.32. $n = 6$ i $S_6 = 135$
lub $n = 33$ i $S_{33} = -594$

6.33. w czternastej

6.34. $3 : 5 : 7$

6.35. $n = 13$

6.36. osiem lub nie istnieje n takie,
że $S_n = -64$

6.37. $x = 4$; dwanaście

6.38. sto

6.29. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15} .

6.30. Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 5$ i $r = -2$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od dwudziestego do trzydziestego włącznie.

6.31. Suma pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 4 jest o 400 mniejsza od sumy następnych n jego wyrazów. Oblicz n .

6.32. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego wynosi 30, różnica jest równa -3 , a ostatni wyraz tego ciągu stanowi $\frac{1}{8}$ sumy wszystkich poprzednich wyrazów. Wyznacz liczbę wyrazów i sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

6.33. Pewien sprinter, biegający na dystansie 100 m, w pierwszej sekundzie po starcie przebiegł 7 m, a w każdej następnej o 0,1 m więcej niż w poprzedniej. W której sekundzie po starcie przekroczył on linię mety?

6.34. Długości boków trójkąta, którego jeden kąt ma miarę 120° , tworzą ciąg arytmetyczny. W jakim stosunku są boki tego trójkąta?

6.35. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = x$, $a_2 = 3x + y$, $a_4 = 5x - 2y - 1$, $a_6 = 17$. Dla jakich n zachodzi równość $S_n = 260$?

6.36. W ciągu arytmetycznym stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego jest równa 40. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -64 ?

6.37. Znajdź wartość x , dla której liczby $\log_4 \sqrt{x}$, $1 + \log_4 x$, $\frac{1}{2} + \log_4 x^3$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ile początkowych wyrazów tego ciągu daje w sumie 105?

6.38. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $8 \cdot \log_3 \sqrt{3}$, a szósty wyraz tego ciągu jest równy $\frac{5 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$. Ile początkowych wyrazów ciągu należy dodać, aby otrzymać 14650?

D 6.39. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 5 + (n - 1)(k - k^2)$, gdzie k jest parametrem. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Dla jakich wartości parametru k ciąg jest malejący?

D 6.40. Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu (a_n) wynosi $S_n = -3n^2 + 6n$. Udowodnij, że jest to ciąg arytmetyczny.

6.39. $a_n = 5 + (n - 1)(k - k^2)$

Dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:

$$a_{n+1} - a_n = 5 + n(k - k^2) - 5 - (n - 1)(k - k^2) = (n - n + 1)(k - k^2) = k - k^2,$$

więc jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $r = k - k^2 = k(1 - k)$.

Ciąg jest malejący, gdy $r < 0$, czyli $k(1 - k) < 0$.

Tak jest dla $k \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

6.40. $S_n = -3n^2 + 6n$

$a_1 = S_1 = -3 + 6 = 3$. Dla $n > 1$ mamy:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -3n^2 + 6n + 3(n-1)^2 - 6(n-1) = -3n^2 + 6n + 3n^2 - 6n + 3 - 6n + 6 = 9 - 6n$$

$9 - 6 \cdot 1 = 3 = a_1$. Zatem $a_n = 9 - 6n$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

$a_{n+1} - a_n = 9 - 6(n+1) - 9 + 6n = -6$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, więc jest to ciąg arytmetyczny (o różnicy -6).

6.41. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dla $n \geq 1$ wynosi $S_n = 2n^2 + n$. Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych.

6.42. Oblicz sumę $7 + (9 - \sqrt{2}) + (11 - 2\sqrt{2}) + \dots + (55 - 24\sqrt{2})$.

6.43. Współczynniki a, b, c równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny o sumie 24. Jednym z pierwiastków tego równania jest liczba $-\frac{1}{5}$. Oblicz a, b, c oraz drugi pierwiastek równania.

6.44. Dany jest stuwyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{4}(n + 19)$. Dla jakiej wartości m stosunek wyrazu stojącego na miejscu m , licząc od początku ciągu, do wyrazu stojącego na miejscu m , licząc od końca tego ciągu, jest równy $\frac{30}{109}$?

6.45. Sprawdź, korzystając z definicji, czy ciąg o wyrazie ogólnym a_n jest geometryczny. Jeśli jest, wyznacz jego pierwszy wyraz i iloraz q .

a) $a_n = 5^n$ b) $a_n = \frac{4}{2^{3n}}$ c) $a_n = 1 + 3^n$ d) $a_n = n^n$

6.46. Liczby 64, x , 4 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

6.47. Dla jakich wartości m liczby postaci: $m + 1$, $1 - 3m$, $5m + 1$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

6.48. Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na górnej półce, a ile – na dolnej.

6.49. W trójkącie prostokątnym poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość h i środkową s . Przeciwprostokątna ma długość c . Liczby h , s i c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, którego iloczyn wyrazów jest równy 8. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

6.50. Piąty wyraz monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) jest odwrotnością wyrazu pierwszego, a wyraz czwarty jest sumą wyrazów drugiego i trzeciego. Oblicz drugi wyraz tego ciągu.

6.51. Ciąg 9, x , 19 jest arytmetyczny, a ciąg x , 42, y , z jest geometryczny. Oblicz x, y i z .

6.52. Ciąg 1, x , $y - 1$ jest arytmetyczny, a ciąg x , y , 12 jest geometryczny. Oblicz x i y .

6.41. 10 150

6.42. $25(31 - 12\sqrt{2})$

6.43. $a = 15$, $b = 8$,
 $c = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

6.44. $m = 11$

6.45. a) tak, $a_1 = 5$, $q = 5$
b) tak, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2^{-3}$
c) nie d) nie

6.46. $\frac{1}{4}$

6.47. $m = 0$ lub $m = 3$

6.48. na górnej: 16 płyt,
na dolnej: 36 płyt

6.49. $\sqrt{6} - 2$

6.50. $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
lub $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

6.51. $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$

6.52. $x = 3$, $y = 6$

D

6.54. $x = 8$ lub $x = \frac{1}{8}$

6.55. $1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

6.56. a) $a_1 = -11$, $r = 2$
b) tak
c) $n = 6$

6.57. $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$
lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$

6.58. o 32 zł mniej

6.59. 7936,38 zł

6.60. a) 144 zł
b) 138 zł
c) 132 zł

6.61. 30 000 zł

6.53. Wykaż, że jeżeli liczby b , c , $2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby ab , b^2 , c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

6.54. Dla jakich wartości $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ liczby: $1 + \log_2 3$, $\log_x 36$, $\frac{4}{3} \log_8 6$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

6.55. Długości trzech odcinków są wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Jaki warunek musi spełniać iloraz q tego ciągu, aby z tych trzech odcinków można było zbudować trójkąt?

6.56. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.

- a) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) .
b) Sprawdź, czy ciąg o wyrazach a_7 , a_8 , a_{11} jest geometryczny.
c) Wyznacz n , dla którego suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) ma najmniejszą wartość.

6.57. Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, a ciąg $(a + 1, b + 4, c + 19)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a , b i c .



6.58. Pani Krystyna wpłaciła do banku 15 000 zł na okres trzech lat. Oprocentowanie roczne w tym banku wynosiło 2,8% z kapitalizacją co pół roku. Po roku bank zmienił oprocentowanie na 2,7%, nie zmieniając okresu kapitalizacji. O ile mniej pieniędzy otrzyma pani Krystyna w wyniku tej zmiany?



6.59. Pan Michał wpłacił 5000 zł do banku, w którym oprocentowanie wkładów wynosiło 2,6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek była roczna. Pieniądze te przeznaczył dla swego chrześniaka, więc postanowił nie ruszać ich przez wiele lat. Oblicz, jaki kapitał zostanie zgromadzony na koncie pana Michała po 18 latach, jeśli wysokość oprocentowania się nie zmieni.



6.60. W banku ogłoszono następujące oprocentowanie lokat w stosunku rocznym: lokata 12-miesięczna – 2,4%, lokata 6-miesięczna – 2,3%, lokata 3-miesięczna – 2,2%. Oblicz, ile wyniosą odsetki po upływie terminu lokaty, jeżeli wpłacimy
a) kwotę 6000 zł na lokatę roczną.
b) kwotę 12 000 na lokatę półroczną.
c) kwotę 24 000 zł na lokatę trzymiesięczną.



6.61. Oprocentowanie lokaty półrocznej wynosi 2,4% w skali roku. Jaką kwotę należy wpłacić na taką lokatę, aby po upływie jej terminu odsetki wyniosły 360 zł?

6.53. $c^2 = b(2b - a)$

Należy wykazać, że:

$$2b^2 = ab + c^2$$

$$P = ab + c^2 = ab + b(2b - a) = ab + 2b^2 - ab = 2b^2 = L$$

7. Figury na płaszczyźnie

Definicje

- **Symetralna** odcinka to prosta prostopadła do niego i przechodząca przez jego środek.
- **Dwusieczna** kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta dzieląca ten kąt na dwa przystające kąty.
- **Wysokością** trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do prostej zawierającej jeden z boków trójkąta, którego jeden koniec należy do tej prostej, a drugi jest przeciwległym wierzchołkiem trójkąta.
- **Środkową** boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.
- Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty są równe, nazywamy **wielokątem foremnym**.
- Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym** w tym okręgu.
- **Kątem wpisanym** w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię kąta ma z tym okręgiem jeszcze jeden punkt wspólny.
- Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta, nazywamy **okręgiem opisanym na tym wielokącie**.
- Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt**.
- **Podobieństwem** o skali $k > 0$ nazywamy każde przekształcenie płaszczyzny, w którym dla dowolnych punktów A, B płaszczyzny oraz ich obrazów A', B' zachodzi równość $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

Twierdzenia

- **Twierdzenie Pitagorasa**
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.
- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**
Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to ten trójkąt jest prostokątny.

- **Cechy przystawiania trójkątów**

- Jeżeli dwa trójkąty mają odpowiednie boki równe, to są przystające. (bbb)
- Jeżeli w dwóch trójkątach dwa boki i kąt między nimi zawarty są odpowiednio równe, to te trójkąty są przystające. (bkb)
- Jeżeli w dwóch trójkątach bok i dwa kąty do niego przylegające są odpowiednio równe, to te trójkąty są przystające. (kbb)

- Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów równo oddalonych od końców tego odcinka.
- Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta. Jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie.
- Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem wszystkich jego punktów wewnętrznych równo oddalonych od ramion tego kąta.
- Dwusieczne trzech kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest jednakowo oddalony od wszystkich boków trójkąta. Jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, tzw. środek ciężkości trójkąta, dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.
- Trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, tzw. ortocentrum.
- Dwa okręgi są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między ich środkami jest równa sumie ich promieni.
- Dwa okręgi są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między ich środkami jest równa wartości bezwzględnej różnicy ich promieni.
- **Twierdzenie o odcinkach stycznych**
Jeżeli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie styczne do tego okręgu w punktach A i B , to $|PA| = |PB|$.
- Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.
- **Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą**
Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α .
- Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to $|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$.

- Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów tego czworokąta są równe.
- Czworokąt wypukły można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

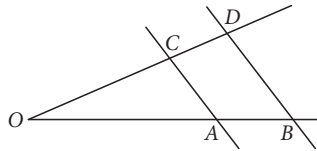
- **Twierdzenie Talesa**

Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa**

Jeżeli ramiona kąta COA są przecięte dwiema prostymi AC i BD w taki sposób, że odcinki OA i AB leżące na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odcinków OC i CD wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}, \text{ to proste } AC \text{ i } BD \text{ są równoległe.}$$



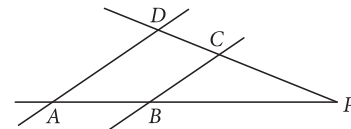
- Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.
- **Cechy podobieństwa trójkątów**
 - Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.
 - Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.
 - Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.
- Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa.
- **Twierdzenie o dwusiecznej**
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.
- W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe, ponieważ są równe połowie tego samego kąta środkowego.
- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

- Jeżeli proste AD i BC są równoległe, to:

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}, \quad \frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PD|}{|CD|}, \quad \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$$



- **Wzory na pole trójkąta**

W dowolnym trójkącie ABC przyjmujemy oznaczenia:

a, b, c – długości boków,

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych,

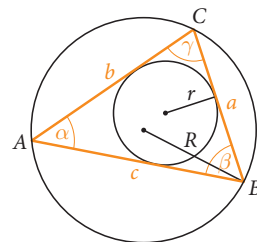
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone odpowiednio na boki:

a, b, c ,

p – połowa obwodu trójkąta,

r – promień okręgu wpisanego,

R – promień okręgu opisanego.



Pole P trójkąta ABC można obliczyć za pomocą każdego ze wzorów:

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$P = p \cdot r$$

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

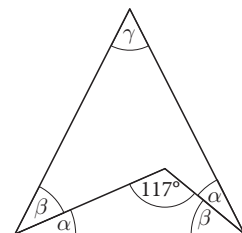
7.1. Trójkąt o bokach $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$

- A. jest ostrokątny. C. jest rozwartokątny.
B. jest prostokątny. D. nie istnieje.

7.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Wskaż miarę kąta γ .

- A. $\gamma = 43^\circ$ C. $\gamma = 54^\circ$
B. $\gamma = 57^\circ$ D. $\gamma = 117^\circ$



Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. C

7.2. C

7.3. Obwód czworokąta wypukłego $ABCD$ jest równy 50 cm. Obwód trójkąta ABD jest równy 46 cm, a obwód trójkąta BCD jest równy 36 cm. Wskaż długość przekątnej BD .

- A. 12 cm C. 14 cm
B. 16 cm D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.

7.4. W trójkącie prostokątnym symetralna przeciwprostokątnej i środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego tworzą kąt 22° . Zatem kąty ostre tego trójkąta mają miary

- A. $56^\circ, 34^\circ$. B. $68^\circ, 22^\circ$. C. $62^\circ, 28^\circ$. D. $54^\circ, 36^\circ$.

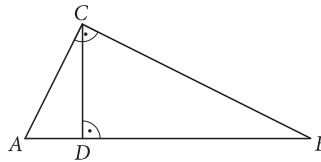
7.5. Średnica koła w rowerze jest równa 50 cm. Ile pełnych obrotów wykona to koło na dystansie 700 m?

- A. 446 B. 892 C. 891 D. 445

7.6. W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku: $|AB| = 10$ i $|AD| : |DB| = 1 : 4$.

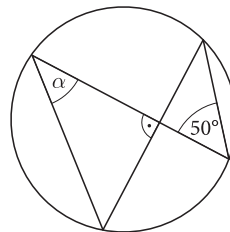
Jakiej długości są przyprostokątne tego trójkąta?

- A. 6 i 8 C. $2\sqrt{5}$ i $8\sqrt{5}$
B. $2\sqrt{10}$ i $2\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{5}$ i $4\sqrt{5}$



7.7. Na rysunku przedstawiono okrąg i niektóre jego cięciwy. Na podstawie podanych informacji wskaż miarę kąta α .

- A. 40° B. 50° C. 60° D. 90°



7.8. W trójkącie ABC mamy $|AC| = |BC|$ oraz $\sphericalangle C = 40^\circ$. Wskaż miarę kąta rozwartego między dwusiecznymi kątów A i B .

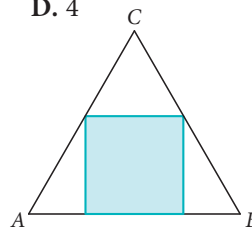
- A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°

7.9. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10$ i $|AB| = 16$, środkowe przecinają się w punkcie S . Wskaż długość odcinka AS .

- A. $4\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{17}$ C. $2\sqrt{17}$ D. 4

7.10. Pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC (zob. rysunek) jest równe 12. Wskaż długość boku trójkąta.

- A. $4\sqrt{3}$ C. $4 + 2\sqrt{3}$
B. $2 + 2\sqrt{3}$ D. 16



7.3. B

7.4. A

7.5. D

7.6. D

7.7. A

7.8. C

7.9. C

7.10. C

7.11. C

7.11. Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 5 cm. Ile jest okręgów o promieniu 3 cm stycznych zewnętrznie do tego okręgu i równocześnie stycznych do prostej l ?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7.12. D

7.12. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają miarę 30° , a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 1. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

7.13. C

7.13. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa 36 i $|AB| = 32$. Wskaż długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B .

- A. 31 B. $18\sqrt{3}$ C. 30 D. $16\sqrt{3}$

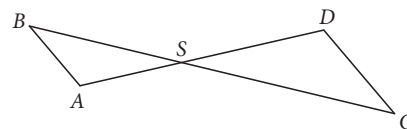
7.14. C

7.14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $|BC| = 10$, $|CA| = 11$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie D . Wskaż długość odcinka AD .

- A. 5 B. 5,5 C. 6 D. $\sqrt{30}$

7.15. C

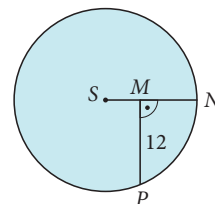
7.15. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że $AB \parallel CD$, $|AB| = 5$, $|BC| = 24$ oraz $|DC| = 7$. Wskaż długość odcinka BS .



- A. 14 B. 12 C. 10 D. 6

7.16. A

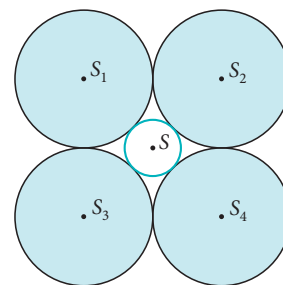
7.16. Pole koła o środku S przedstawionego na rysunku jest równe 169π . Długość odcinka MP wynosi 12. Wskaż długość odcinka NM .



- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

7.17. C

7.17. Dane są cztery koła o równych promieniach, środkach S_1, S_2, S_3, S_4 , parami styczne zewnętrznie. Suma pól tych kół wynosi 16π . Ile jest równy promień okręgu o środku S stycznego zewnętrznie do każdego z wymienionych kół, położonego jak na rysunku?



- A. $4(\sqrt{2} - 1)$ C. $2(\sqrt{2} - 1)$
B. 0,5 D. 1

7.18. Drzewo rzuca cień o długości 12 m. Pionowo ustawiony drążek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 72 cm. Wskaż wysokość drzewa.

- A. $8\sqrt{2}$ m B. 16 m C. $8\sqrt{3}$ m D. 15 m

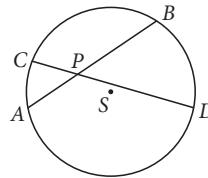
W zadaniach 7.19–7.22 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.19. W trójkącie ABC kąt przyległy do kąta ABC jest dwa razy większy od kąta BAC . Trójkąt ABC jest

- A. ostrokątny. B. równoramienny. C. rozwartokątny.

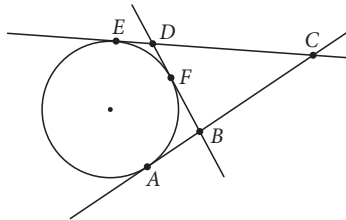
7.20. Cięciwy AB i CD okręgu o środku w punkcie S przecinają się w punkcie P , przy czym $|AB| \neq |CD|$ (zob. rysunek).

- A. $\sphericalangle APD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$
B. Trójkąty APC i DPB są podobne.
C. Trójkąty ACB i DBC są podobne.



7.21. Proste BC , CD i DB są styczne do okręgu odpowiednio w punktach A , E i F (zob. rysunek).

- A. $|AB| = |BF|$
B. $|ED| = |DF|$
C. $|EC| = |AC|$



7.22. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ przekątna BF ma długość 4.

- A. Pole tego sześciokąta jest równe $8\sqrt{3}$.
B. Obwód tego sześciokąta wynosi $8\sqrt{3}$.
C. Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

7.23. W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$ i $|BC| = |AC| = 5$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy

A.	2,	ponieważ	1.	trójkąt ABC jest prostokątny.
B.	4,		2.	wynika to z twierdzenia sinusów.
C.	$4\frac{1}{6}$,		3.	stanowi on $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta opuszczonej na podstawę.

7.24. Liczby 4, 10, c są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz c .

7.25. Liczby 6, 10, c są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz c .

7.18. D

7.19. F, P, F

7.20. F, P, F

7.21. P, P, P

7.22. P, P, P

7.23. C2

7.24. $c = 10$

7.25. $c = 6$ lub $c = 10$

7.26. $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ 7.27. 125° 7.28. 54° 7.29. $P = 3,50$

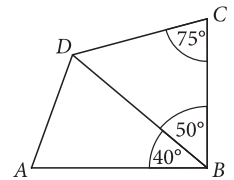
7.30. dwa

7.31. $r = 12,6$ cm7.32. $\alpha = 40^\circ, \beta = 80^\circ,$
 $\gamma = 60^\circ, \delta = 40^\circ$ 7.33. a) $\alpha = 46^\circ$
b) $\alpha = 80^\circ$

7.34. 1,4 cm, 5,6 cm

7.26. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

7.27. Na rysunku podano miary niektórych kątów w czworokącie $ABCD$, w którym $|AB| = |DB|$. Oblicz miarę kąta ADC .



7.28. Pod wpływem silnego wiatru wysoka sosna pochyliła się do poziomu pod kątem 72° . Pod jakim kątem padają promienie słoneczne, jeżeli długość sosny równa jest długości jej cienia?

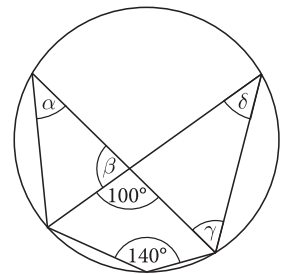


7.29. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3,2$, $|AC| = 2,3$ i $\angle BAC = 72^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta. Podaj wynik z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

7.30. Koło o średnicy 72 cm toczy się po prostej drodze długości 5 m. Ile pełnych obrotów wykona koło?



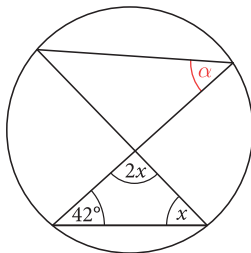
7.31. Pięć jednakowych kół o promieniu 18 cm jest stycznych zewnętrznie do koła o promieniu r . Ponadto każde z nich jest styczne zewnętrzne do dwóch sąsiednich kół. Oblicz r z dokładnością do 0,1 cm.



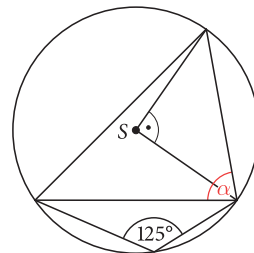
7.32. Na rysunku zaznaczono cięciwy w okręgu i niektóre kąty wyznaczone przez te cięciwy. Oblicz kąty: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

7.33. Na rysunku zaznaczono cięciwy w okręgu i niektóre kąty wyznaczone przez te cięciwy. Oblicz miarę kąta α (punkt S jest środkiem okręgu).

a)



b)



7.34. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 3$ cm i $|BD| = 5$ cm. Bok BC ma długość 7 cm. Na jakie części zostanie podzielony bok BC symetralną boku AB ?

7.35. W trójkącie ABC , w którym $|AB| = 16$, poprowadzono prostą równoległą do AB przecinającą bok AC w punkcie K i bok BC w punkcie L . Odcinek KL ma długość 12, a wysokość CE trójkąta KLC jest równa 15. Oblicz pole trapezu $ABLK$.

7.36. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek RQ równoległy do boku AB (R leży na boku AC , Q leży na boku BC) i odcinek PQ równoległy do boku AC (P leży na boku AB). Dane są długości: $|PB| = 8$, $|QB| = 9$, $|PQ| = 7$, $|RQ| = 4$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

7.37. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8, a $\sphericalangle BAC = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

7.38. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych: $|AC| = 2,4$ i $|AB| = 3,2$. Z punktu K będącego środkiem boku AC poprowadzono odcinek KL ($L \in BC$) prostopadły do boku BC . Z punktu M będącego środkiem boku AB poprowadzono odcinek MN ($N \in BC$) prostopadły do boku BC . Oblicz długości odcinków KL i MN .

7.39. Stosunek długości przekątnych rombu jest równy $4 : 3$. Oblicz stosunek obwodu rombu do sumy długości jego przekątnych.

7.40. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC . Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS , a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS . Oblicz kąty trójkąta ABC .

7.41. Boki trójkąta opisanego na okręgu mają długości równe 10, 14 i 20. Oblicz odległości wierzchołków tego trójkąta od punktów styczności boków z okręgiem.

7.42. W okrąg o promieniu 3 cm wpisano kąt o mierze 30° . W punktach przecięcia okręgu z ramionami kąta poprowadzono styczne do tego okręgu. Oblicz odległość punktu przecięcia stycznych od środka okręgu.

D 7.43. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło o środku S . Przekątna AC jest średnicą koła, a kąt BSD ma miarę 102° . Wykaż, że kąt ostry tego czworokąta jest równy 51° .

7.44. Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok jest 1,5 raza większy od promienia okręgu. Oblicz pole tego trapezu.

7.45. Trapez równoramienny $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu $\frac{3}{2}$ cm. Przekątna AC ma długość 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

7.35. $P = 70$

7.36. $obw = 36$

7.37. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

7.38. $|KL| = |MN| = 0,96$

7.39. $10 : 7$

7.40. $\sphericalangle A = 60^\circ$,
 $\sphericalangle B = 45^\circ$,
 $\sphericalangle C = 75^\circ$

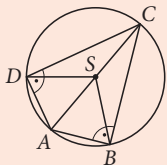
7.41. 2, 8 i 12

7.42. $2\sqrt{3}$ cm

7.44. $P = 72 \text{ cm}^2$

7.45. $obw = 16 \text{ cm}$

7.43.



$\sphericalangle BSD$ to kąt środkowy oparty na łuku BAD .

Kąt wpisany oparty na tym łuku to kąt BCD , jest on dwa razy mniejszy od kąta środkowego, zatem

$$\sphericalangle BCD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BSD = 51^\circ.$$

7.46. 6,72 cm

7.47. $P = 131 \text{ cm}^2$

7.48. $P = \frac{750}{169}$

7.50. $P = 25,18 \text{ cm}^2$

7.51. $P = \frac{25\sqrt{3}}{3}$

7.52. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

7.53. $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

7.54. $\sqrt{2} - 1$

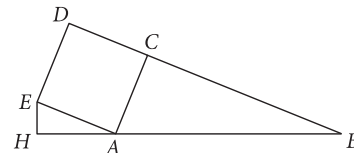
7.55. $\frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

7.46. Środek podstawy trójkąta równoramiennego o ramionach długości 25 cm i podstawie równej 14 cm jest równocześnie środkiem okręgu stycznego do ramion trójkąta. Oblicz promień tego okręgu.

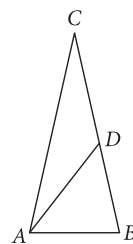


7.47. W trapezie opisanym na okręgu o promieniu 5,23 cm jeden z kątów jest prosty, a kąt ostry ma miarę 46° . Oblicz pole trapezu z dokładnością do 1 cm^2 .

7.48. Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC , w którym $\angle ACB = 90^\circ$, $|AC| = 5$ i $|BC| = 12$, zbudowano kwadrat $ACDE$, jak na rysunku. Punkt H leży na prostej AB i $\angle EHA = 90^\circ$. Oblicz pole trójkąta HAE .



7.49. Punkt D leży na boku BC przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $\angle ADC = 5 \cdot \angle ACD$.



7.50. W trapezie równoramiennym dane są: miara kąta ostrego równa 50° i długość ramienia równa 6 cm. Środek okręgu opisanego na tym trapezie należy do jego podstawy. Oblicz pole trapezu. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

7.51. W trapezie $ABCD$ dane są: $AC = 5$, $\angle DAC = \angle ABC = 30^\circ$. Proste AD i BC , w których zawierają się ramiona trapezu, są prostopadłe. Oblicz pole trapezu.

7.52. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono odcinek AD taki, że punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ADC do pola trójkąta ADB jest równy $1:3$. Wyznacz tangens kąta DAB .

7.53. Oblicz stosunek promienia koła opisanego na ośmiokącie foremnym do promienia koła wpisanego w ten ośmiokąt.

7.54. Prosta równoległa do boku AB trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie M i dzieli trójkąt na części o równych polach. Wyznacz stosunek $|AM| : |MC|$.

7.55. Dany jest trójkąt ABC , w którym wysokość CD równa 5 cm dzieli bok AB na dwie części: $|AD| = 4 \text{ cm}$ i $|DB| = 8 \text{ cm}$. Znajdź długość odcinka równoległego do CD , którego końce leżą na bokach trójkąta i który dzieli ten trójkąt na części o równych polach.

7.49. $|AC| = |BC|$, $|AB| = |BD|$ i $|AD| = |CD|$

Niech $\angle ACD = \alpha$. Wtedy:

$$\angle ADC = 180^\circ - 2\alpha \text{ (bo } |AD| = |CD|)$$

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$

$$\angle DAB = \angle ADB = 2\alpha \text{ (bo } |AB| = |BD|)$$

$$\angle ABD = \angle ABC = \angle CAB = 3\alpha$$

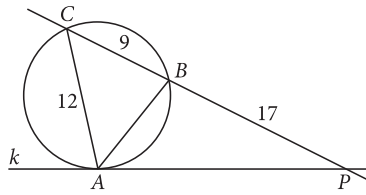
$$\angle ADB = 180^\circ - (2\alpha + 3\alpha) = 180^\circ - 5\alpha$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - (180^\circ - 5\alpha) = 5\alpha$$

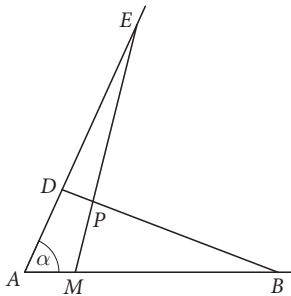
$$\text{Zatem } \angle ADC = 5\angle ACD.$$

7.56. Okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta ostrego i wierzchołki kątów rozwartych rombu dzieli przekątną rombu na odcinki o długościach 25 cm i 7 cm. Oblicz pole rombu.

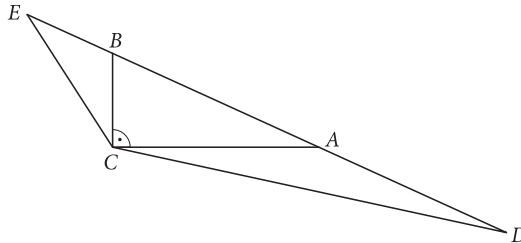
7.57. Dane są trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie, jak na rysunku. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P . Długości odcinków AC , BC i PB podano na rysunku. Oblicz długość odcinka AB .



7.58. Na rysunku 1 przedstawiono kąt α o wierzchołku A . Na jednym ramieniu tego kąta wybrano punkty E i D takie, że $|AE| = 3|AD|$, a na drugim – punkty M i B takie, że $|MB| = 4|AM|$. Odcinek ME przecina odcinek BD w punkcie P . Wykaż, że $|BP| = 6|PD|$.



Rys. 1.



Rys. 2.

7.60. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = |BD| = a$ oraz $|AC| = 2a$. Oblicz długość boku AD oraz cosinus kąta ostrego α utworzonego przez przekątne tego równoległoboku.

7.61. Na okręgu o promieniu 1 opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu.

7.59. Niech $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

$$\alpha = \sphericalangle ACD + \sphericalangle ADC \text{ i } |AC| = |AD|, \text{ więc } \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\beta = \sphericalangle BCE + \sphericalangle BEC \text{ i } |BC| = |BE|, \text{ więc } \sphericalangle BCE = \frac{1}{2}\beta$$

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle BCE + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\beta + 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 135^\circ$$

R – promień okręgu opisanego na trójkącie ECD

$$|ED| = |BE| + |AB| + |AD| = |BC| + |AB| + |AC| = 2p$$

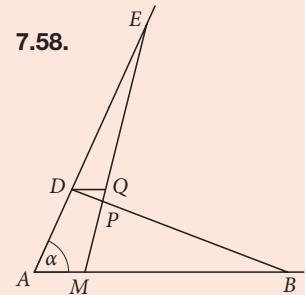
Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ECD :

$$2R = \frac{|ED|}{\sin \sphericalangle ECD} = \frac{2p}{\sin 135^\circ} = \frac{2p}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = p2\sqrt{2}$$

$$\text{Zatem } R = p\sqrt{2}.$$

$$\mathbf{7.56.} \quad P = 384 \text{ cm}^2$$

$$\mathbf{7.57.} \quad \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$$



7.58.

Q – taki punkt na odcinku PE , że $DQ \parallel AB$.

$\triangle DQE \sim \triangle AME$ (cecha kk), więc:

$$\frac{|DQ|}{|AM|} = \frac{|DE|}{|AE|} = \frac{|AE| - |AD|}{|AE|} = 1 - \frac{|AD|}{|AE|} = 1 - \frac{|AD|}{3|AD|} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Zatem } |DQ| = \frac{2}{3}|AM|.$$

$\triangle DQP \sim \triangle BMP$ (cecha kk), więc:

$$\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|MB|}{|QD|} = \frac{4|AM|}{\frac{2}{3}|AM|} = 6,$$

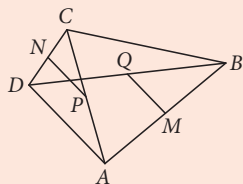
$$\text{czyli } |BP| = 6|DP|.$$

$$\mathbf{7.60.} \quad |AD| = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{7.61.} \quad \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

7.62. $P = 84$ 7.63. $\frac{1}{3}r$

7.64.



Odcinek NP łączy środki boków CD i CA w trójkącie ACD , zatem jest równoległy do AD .

Odcinek MQ łączy środki boków DB i AB w trójkącie ABD , zatem też jest równoległy do AD .

Odcinki NP i MQ są równoległe.

7.65. Kąt APD jest kątem wpisanym w okrąg oparty na półokręgu AD , zatem $\sphericalangle APD = 90^\circ$.

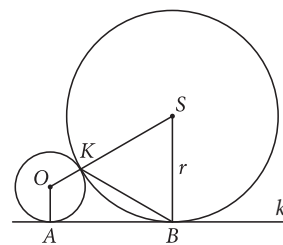
Kąt APB jest również kątem wpisanym w okrąg oparty na półokręgu AB , zatem też ma miarę 90° .

$\sphericalangle APD + \sphericalangle APB = 180^\circ$, zatem B, P, D leżą na jednej prostej.

7.68. ok. 12,16

7.62. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ i $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .

7.63. Okręgi o środkach w punktach O i S są styczne zewnętrznie w punkcie K i styczne do prostej k w punktach A i B , jak na rysunku. Trójkąt BSK jest równoboczny. Wiedząc, że $|SB| = r$, oblicz długość odcinka OA .

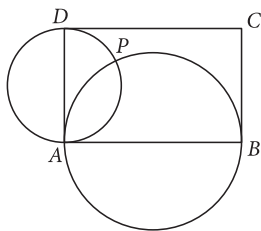


D 7.64. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Udowodnij, że $MQ \parallel PN$.

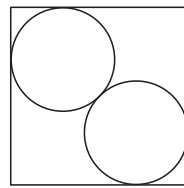
D 7.65. Dany jest prostokąt $ABCD$ (rys. 1). Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P , jak na rysunku. Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.

D 7.66. W kwadrat o boku 1 wpisano dwa przystające okręgi o promieniu r styczne zewnętrznie i styczne do boków kwadratu, jak na rysunku 2. Wykaż, że $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

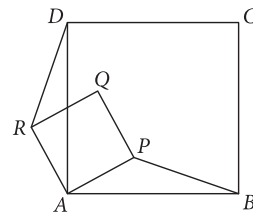
D 7.67. Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ na rysunku 3 są kwadratami. Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Rys. 1.



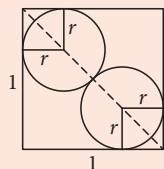
Rys. 2.



Rys. 3.

7.68. Oblicz długość dłuższej przekątnej równoległoboku, którego boki mają długości 9 i 4, a kąt ostry ma miarę 45° .

7.66.


 $d = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu)

 $2r + 2 \cdot r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, czyli $r(2 + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{2(2 - 1)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7.67. Wystarczy wykazać, że trójkąty APB i ARD są przystające.

$|AR| = |AP|$ (boki kwadratu $APQR$)

$|AB| = |AD|$ (boki kwadratu $ABCD$)

$\sphericalangle PAB = 90^\circ - \sphericalangle DAP$ oraz $\sphericalangle RAD = 90^\circ - \sphericalangle DAP$, więc $\sphericalangle PAB = \sphericalangle RAD$.

Z cechy kbk wynika przystawanie tych trójkątów, zatem $|BP| = |DR|$.

8. Geometria analityczna

Definicje

- Uporządkowaną parę punktów (A, B) nazywamy **wektorem o początku A i końcu B** i oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$.
- **Współzrzednymi wektora $\overrightarrow{AB}$** o początku $A = (x_A, y_A)$ i końcu $B = (x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.
- Równanie $y = ax + b$ o zmiennych x, y nazywamy **równaniem prostej w postaci kierunkowej**. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** tej prostej.
- Równanie $Ax + By + C = 0$ o zmiennych x, y , w którym A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**.

Twierdzenia

- Dane są wektory $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$. Zachodzą równości:
 $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$, $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$, $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$ dla $k \in \mathbb{R}$.
- Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ ma długość:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
- Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$
- Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ jest punkt $S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$.
- Prosta $y = ax + b$ jest nachylona do osi x pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$.
- Odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$
- Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ ($a_1a_2 \neq 0$) są:
 - równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
 - prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.

- Prosta l jest równoległa do prostej $k: Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $Ax + By + C_1 = 0$. Ponadto jeżeli $C = C_1$, to $k = l$, a jeżeli $C \neq C_1$, to $k \neq l$.
- Prosta l jest prostopadła do prostej $k: Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $Bx - Ay + C_1 = 0$.
- Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) jest równa $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$) opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku $S = (a, b)$ i promieniu r .
- Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii:
 - osiowej względem osi x jest punkt $A' = (x, -y)$,
 - osiowej względem osi y jest punkt $A' = (-x, y)$,
 - środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Równanie $Ax + By + C = 0$ opisuje:
 - całą płaszczyznę, gdy $A = B = C = 0$,
 - zbiór pusty, gdy $A = B = 0$ i $C \neq 0$,
 - prostą, gdy A i B nie są jednocześnie równe 0.
- Jeżeli mamy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, to najpierw sprawdzamy, czy pierwsze współrzędne tych punktów są równe – jeśli tak, prosta ma równanie postaci $x = c$. Jeśli pierwsze współrzędne tych punktów są różne, korzystamy z postaci kierunkowej równania prostej: $y = ax + b$.
- Prosta o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest wspólnym brzegiem dwóch półpłaszczyzn domkniętych. Jedną z tych półpłaszczyzn opisuje nierówność $Ax + By + C \geq 0$, a drugą – nierówność $Ax + By + C \leq 0$. Nierówności $Ax + By + C > 0$ i $Ax + By + C < 0$ opisują półpłaszczyzny otwarte.
- Równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, o ile $a^2 + b^2 > c$.
- Równanie okręgu:
 - $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$) nazywamy równaniem w postaci kanonicznej,
 - $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 > c$) nazywamy równaniem w postaci ogólnej.

- Nierówność $(x-a)^2 + (x-b)^2 \leq r^2$ ($r > 0$) opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło o środku** $S = (a, b)$ **i promieniu** r . Nierówność $(x-a)^2 + (x-b)^2 > r^2$ opisuje zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.24 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Punkt $(-1, 7)$ jest środkiem odcinka AB , w którym $A = (3 - 2\sqrt{7}, \sqrt{3})$. Wskaż współrzędne punktu B .

- A. $(-5 - 2\sqrt{7}, 7 - \sqrt{3})$ C. $(-5 - 2\sqrt{7}, 14 - \sqrt{3})$
 B. $(5 + 2\sqrt{7}, 14 - \sqrt{3})$ D. $(-5 + 2\sqrt{7}, 14 - \sqrt{3})$

8.2. Odległość punktu przecięcia prostych $y = -3$ oraz $2x + y = 7$ od początku układu współrzędnych jest równa

- A. 8. B. $2\sqrt{17}$. C. $\sqrt{34}$. D. $2\sqrt{2}$.

8.3. Wierzchołkami trójkąta są punkty $A = (-3, 4)$, $B = (1, -2)$, $C = (5, 8)$. Wskaż długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B .

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. $2\sqrt{17}$

8.4. Wskaż równanie prostej, która tworzy z osią x kąt o mierze 120° .

- A. $y = \sqrt{3}x - 3$ B. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ C. $y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$ D. $2y + x + 4 = 0$

8.5. Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (7, 3)$, $C = (1, 7)$.

- A. $(2, 3)$ B. $(1, 4)$ C. $(\frac{3}{2}, 3)$ D. $(1, 3)$

8.6. Ile wynosi pole czworokąta $ABCD$, w którym $A = (-1, -1)$, $B = (6, -1)$, $C = (6, 3)$, $D = (-1, 3)$?

- A. 18 B. 28 C. 30 D. 48

8.7. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach $x - 1 = 0$, $y + 4 = 0$, $2x - y = 0$. Pole tego trójkąta jest równe

- A. $3\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{10}$. C. 9. D. 4,5.

8.8. W równoległoboku $ABCD$, w którym $A = (1, 0)$, $B = (x_B, 0)$ i $C = (x_C, 3)$, kąt BAD ma miarę 30° i $|AB| = |AD|$. Wskaż obwód tego równoległoboku.

- A. $24\sqrt{3}$ B. 24 C. 12 D. $12\sqrt{3}$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. D

8.2. C

8.3. C

8.4. C

8.5. D

8.6. B

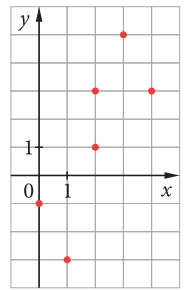
8.7. C

8.8. B

8.9. D

8.9. Która z prostych nie przechodzi przez żaden z punktów kratowych zaznaczonych na rysunku?

- A. $x - y - 1 = 0$ C. $2x - y - 1 = 0$
 B. $4x - y - 7 = 0$ D. $x - 2y + 1 = 0$



8.10. A

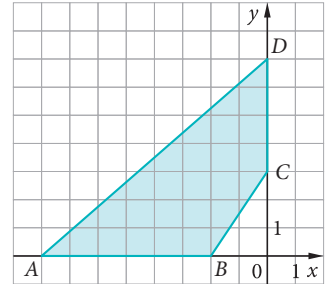
8.10. Wskaż odległość między prostymi $3x + y = 1$ i $3x + y = 6$.

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

8.11. A

8.11. Pole czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równe

- A. 25. C. 12,5.
 B. 50. D. $12\sqrt{3}$.



8.12. B

8.12. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ z osiami układu współrzędnych jest równa

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

8.13. D

8.13. Wskaż punkt nienależący do okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + y^2 - 9 = 0$.

- A. $(1, \sqrt{5})$ B. $(6, 0)$ C. $(1, -\sqrt{5})$ D. $(1, \sqrt{2})$

8.14. B

8.14. Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ oraz $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 6$ jest równa

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{13}$. C. $2 + \sqrt{6}$. D. 10.

8.15. C

8.15. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 \leq 0$?

- A. zbiór pusty C. zbiór jednoelementowy
 B. koło D. okrąg

8.16. A

8.16. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \\ y + x = 2 \end{cases}$?

- A. odcinek B. koło C. półpłaszczyzna D. zbiór pusty

8.17. D

8.17. Prosta o równaniu $3x - y + 20 = 0$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (3, -1)$. Wskaż promień tego okręgu.

- A. 9 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{30}$ D. $3\sqrt{10}$

8.18. Okrąg o równaniu $(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 11$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

- A. $(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 11$ C. $(x - 9)^2 + (y + 4)^2 = 11$
 B. $(x + 9)^2 + (y + 4)^2 = 11$ D. $(x - 4)^2 + (y + 9)^2 = 11$

8.19. Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $P = (5, 0)$ i $Q = (0, -5)$.

- A. $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 5$ C. $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
 B. $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$ D. $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

8.20. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (7, -2)$, $C = (2, 6)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

- A. $(-2, -1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-2, 1)$ D. $(2, -1)$

8.21. Wskaż współrzędne obrazu punktu $P = (1, 5)$ w symetrii środkowej względem punktu $T = (-2, -1)$.

- A. $(-1, -5)$ B. $(1, -5)$ C. $(-5, -7)$ D. $(-4, -6)$

8.22. Dane są wektory $\vec{u} = [2, 1]$, $\vec{v} = [-1, -8]$ oraz punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (4, -3)$. Wskaż zależność prawdziwą.

- A. $\vec{AB} = 2\vec{u} + \vec{v}$ B. $\vec{AB} = -3\vec{u} + \vec{v}$ C. $\vec{AB} = 4\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ D. $\vec{AB} = 3\vec{u} + \vec{v}$

8.23. Punkt P jest środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$. Wskaż zależność prawdziwą.

- A. $\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{DC} - \vec{BC})$ C. $\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{CD} - \vec{BC})$
 B. $\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{DC} - \vec{CB})$ D. $\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$

8.24. Wskaż równanie prostej, która nie jest osią symetrii kwadratu o wierzchołkach $(-5, -1)$, $(1, -5)$, $(5, 1)$, $(-1, 5)$.

- A. $2y = 3x$ B. $x - 5y = 0$ C. $2x + 5y = 0$ D. $2x + 3y = 0$

W zadaniach 8.25–8.29 oceń prawdziwość podanych zdań.

8.25. Dany jest punkt $S = (0, -8)$.

- A. Okrąg $o(S, \sqrt{3})$ można opisać za pomocą równania $x^2 + (y + 8)^2 = 3$.
 B. Punkt $N = (1, -8)$ należy do koła $k(S, \sqrt{3})$.
 C. Punkt $M = (0, \sqrt{3} - 8)$ należy do okręgu $o(S, \sqrt{3})$.

8.18. C

8.19. D

8.20. A

8.21. C

8.22. D

8.23. B

8.24. C

8.25. P, P, P

8.26. P, F, P

8.27. P, P, F

8.28. F, F, P

8.29. F, F, P

8.30. C1

8.31. a) 45° b) 60°
c) 135° d) 150°

8.32. a) tak b) tak c) nie

8.26. Dany jest okrąg o środku $S = (-3, 7)$ i promieniu $r = 5$ oraz prosta $k: 4y - 3x = 12$.A. Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$.B. Prosta k przecina okrąg $o(S, r)$.C. Figura utworzona przez prostą k i okrąg $o(S, r)$ ma dokładnie jedną oś symetrii.

8.27. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu

$$\text{warunków } \begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\ y = 3 + 2x \end{cases}$$

A. jest odcinkiem. B. ma dokładnie dwie osie symetrii. C. jest zbiorem pustym.

8.28. Figurę F tworzą: koło oraz dwa punkty nienależące do tego koła. Figura F

A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.

B. ma zawsze oś symetrii.

C. może mieć oś symetrii.

8.29. Po przekształceniu okręgu F przez symetrię osiową względem osi x otrzymano okrąg F' . Figura będąca sumą okręgów F i F'

A. ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.

B. może mieć tylko jedną oś symetrii.

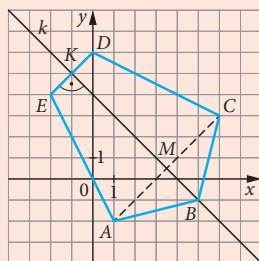
C. może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

8.30. Figura F jest sumą prostej $k: 2x + y + 4 = 0$ i okręgu $o: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 6$.
Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.
Figura F

A.	nie ma osi symetrii,	ponieważ	1.	prosta k przechodzi przez środek okręgu o .
B.	ma jedną oś symetrii,		2.	prosta k jest styczna do okręgu o .
C.	ma dwie osie symetrii,		3.	prosta k nie ma punktów wspólnych z okręgiem o .

8.31. Wyznacz kąt nachylenia do osi x prostej o podanym równaniu.a) $y = x - 3$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y = -x + 2$ d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$ 8.32. Sprawdź, czy punkty A, B, C są współliniowe.a) $A = (1, 2)$, $B = (0, -1)$, $C = (-1, -4)$ b) $A = (-1, 5)$, $B = (2, 2)$, $C = (3, 1)$ c) $A = (0, 0)$, $B = (1, -3)$, $C = (2, -5)$ ◀8.52. Wykaż, że prosta o równaniu $y + x = 4$ jest osią symetrii pięciokąta o wierzchołkach: $A = (1, -2)$, $B = (5, -1)$, $C = (6, 3)$, $D = (0, 6)$, $E = (-2, 4)$.

Odp.:

 $k: y = -x + 4$, $B \in k$, bo $-(-1) + 4 = 5$.Wykażemy, że: $DE \perp k$, $AC \perp k$ oraz K i M to odpowiednio środki odcinków DE i AC .• $a_{DE} = \frac{4-6}{-2-0} = 1$, więc $DE \perp k$.• $a_{AC} = \frac{3+2}{6-1} = 1$, więc $AC \perp k$.• K należy do prostych DE i k .Prosta DE ma równanie $y = x + b$ i punkt D należy do tej prostej, więc $y = x + 6$.

8.33. Napisz równania boków trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C .

a) $A = (-3, -3), B = (3, -1), C = (1, 5)$

b) $A = (-2, 2), B = (0, 5), C = (-2, 11)$

8.34. Sprawdź, czy dane proste k i l pokrywają się, są równoległe i różne, czy się przecinają. Jeśli się przecinają, to wyznacz ich punkt wspólny.

a) $k: y = -\frac{2}{3}x + 4$ $l: 2x + 3y + 4 = 0$

b) $k: x - 3y + 5 = 0$ $l: y = 3x - 5$

c) $k: -2x + 4y - 7 = 0$ $l: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$

8.35. Dane jest równanie prostej $l: 3x + 2y - 4 = 0$. Napisz równanie prostej k

a) równoległej do l i przechodzącej przez punkt $K = (-2, -5)$.

b) prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $M = (-3, 0)$.

8.36. Określ wzajemne położenie prostych l, k, p, q .

$l: 2x - y + 7 = 0, \quad k: \frac{1}{2}x + y - 2 = 0, \quad p: x + 2y - 8 = 0, \quad q: x + 2y - 4 = 0$

8.37. Wyznacz wartość m , dla której proste $(3m - 8)x - 3y - 18 = 0$

i $x - 3y - 12 = 0$ są

a) równoległe.

b) prostopadłe.

8.38. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-3, 1), Q = (5, 3)$.

8.39. Punkt $A = (5, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Punkty A i B są symetryczne względem osi x , a punkty A i C są symetryczne względem osi y .

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .

b) Oblicz pole tego trójkąta.

8.40. Wyznacz równanie prostej, która jest symetryczna do prostej o równaniu $2x - y + 5 = 0$ względem początku układu współrzędnych.

8.41. Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach $P = (0, -2), Q = (6, -8), R = (2, 2)$.

8.42. Oblicz długość środkowej CD w trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, -5), B = (4, -7), C = (3, -1)$.

8.43. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (3, 5)$ i $B = (-7, -1)$ oraz punkt $S = (-5, 4)$ będący środkiem boku BC . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC tego trójkąta.

8.52. (ciąg dalszy)

$K: x + 6 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1, y = 5$

Stąd $K = (-1, 5) = \left(\frac{0-2}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$, czyli K jest środkiem odcinka DE .

• M należy do prostych AC i k .

Prosta AC ma równanie $y = x + c$ i punkt A należy do tej prostej, więc $y = x - 3$.

$M: x - 3 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}, y = \frac{1}{2}$

Stąd $M = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1+6}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$, czyli M jest środkiem odcinka AC .

Punkt B leży na prostej $k: y = -x + 4$, punkty A i C oraz D i E są symetryczne względem tej prostej, zatem jest ona osią symetrii pięciokąta $ABCDE$.

8.33. a) pr. $AB: x - 3y - 6 = 0$,

pr. $BC: 3x + y - 8 = 0$,

pr. $AC: 2x - y + 3 = 0$

b) pr. $AB: 3x - 2y + 10 = 0$,

pr. $BC: 3x + y - 5 = 0$,

pr. $AC: x + 2 = 0$

8.34. a) Proste są równoległe i różne.

b) Proste przecinają się w punkcie

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

c) Proste się pokrywają.

8.35. a) $k: 3x + 2y + 16 = 0$

b) $k: 2x - 3y + 6 = 0$

8.36. $p \parallel k, p \parallel q, k = q$,

$l \perp p, l \perp k, l \perp q$

8.37. a) $m = 3$

b) $m = -\frac{1}{3}$

8.38. $y = -4x + 6$

8.39. a) $B = (5, 3), C = (-5, -3)$

b) $P = 30$

8.40. $2x - y - 5 = 0$

8.41. $obw = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29}$

8.42. $|CD| = \sqrt{29}$

8.43. $y = -\frac{2}{3}x + 7$

8.44. 1

8.45. $obw = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{89}$

8.47. $P = 30$, $obw = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{65}$

8.48. tak; $P = 136$

8.49. pr. AB : $2x + 7y + 22 = 0$,
pr. AC : $7x + 2y - 13 = 0$,
pr. BC : $x - y + 2 = 0$

8.50. a) $x - y + 1 = 0$
b) $3x - 2y - 5 = 0$
c) $P = 30$

8.51. $D = (1, 4)$, $P = 30$

8.52. Poprawna treść zadania oraz jego rozwiązanie patrz s. 298, 299. Zadanie zostanie poprawione w drugim wydaniu podręcznika dla ucznia.

8.53. $A = (3, -1)$, $B = (0, 8)$

8.54. AB : $2x - 3y + 18 = 0$,
 BC : $5x - y - 7 = 0$,
 AC : $x + 5y - 17 = 0$

8.44. Dane są punkty: $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$ i $C = (-2, -3)$. Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC .8.45. Punkty $A = (-1, -6)$ i $B = (4, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (1, -1)$ jest jego środkiem symetrii. Oblicz obwód tego równoległoboku.8.46. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 4)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 6)$.

- a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
b) Oblicz pole tego trójkąta.
c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

8.47. Oblicz pole i obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (-1, 7)$, $C = (3, 0)$.8.48. Sprawdź, czy czworokąt o wierzchołkach $A = (-6, 0)$, $B = (5, -7)$, $C = (4, 6)$, $D = (-7, 13)$ jest rombem. Oblicz pole tego czworokąta.8.49. W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $A = (3, -4)$, wysokość CD : $7x - 2y - 1 = 0$ oraz wysokość BE : $2x - 7y - 6 = 0$. Wyznacz równania prostych zawierających boki tego trójkąta.8.50. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 5)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 8)$. Wyznacz

- a) równanie wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C .
b) równanie środkowej wychodzącej z wierzchołka C .
c) pole trójkąta ABC .

8.51. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A = (-3, 2)$, $B = (6, -1)$, $C = (10, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D oraz oblicz pole równoległoboku.8.52. Wykaż, że prosta o równaniu $y + 2x = 4$ jest osią symetrii pięciokąta o wierzchołkach: $A = (2, -3)$, $B = (4, -2)$, $C = (4, 6)$, $D = (-1, 6)$, $E = (-4, 2)$.8.53. Punkty $C = (2, 2)$ i $D = (1, 5)$ dzielą odcinek AB na trzy równe części. Punkty są położone w kolejności: A, C, D, B . Wyznacz współrzędne początku i końca wektora $\overrightarrow{AB}$.8.54. W układzie współrzędnych dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$, $C = (2, 3)$, a D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C . Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają współrzędne: $\overrightarrow{AB} = [6, 4]$ i $\overrightarrow{CD} = [-2, 3]$. Wyznacz równania boków trójkąta ABC .

8.46. a) $|AB| = \sqrt{(5+3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$

$|BC| = \sqrt{(6-5)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$|AC| = \sqrt{(6+3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$

$|AB|^2 + |BC|^2 = 68 + 17 = 85 = (\sqrt{85})^2 = |AC|^2$

Zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny.

b) $P = 17$

c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{85}{4}$

D

8.55. W czworokącie $ABCD$ dane są $A = (7, 3)$, $C = (-3, 1)$ i $\overline{AB} = [-8, -8]$. Punkt $S = \left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ jest środkiem boku AD . Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

8.56. Dane są punkty $A = (3, -5)$, $B = (-1, 3)$, $C = (1, 7)$. Oblicz długość wektora $2\overline{AB} - 3\overline{AC}$.

8.57. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty $A = (2, 0)$ i $B = (4, 0)$. Wyznacz wszystkie możliwe położenia punktu C , dla których ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB i polu równym 3.

8.58. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} y = -3x^2 + 6x + 4 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

8.59. Napisz równanie okręgu o średnicy AB .

- a) $A = (-7, 3)$, $B = (1, 3)$
 b) $A = (2, 17)$, $B = (-8, -7)$
 c) $A = (-4, 0)$, $B = (6, -8)$

8.60. Wyznacz środek i promień okręgu o podanym równaniu.

- a) $x^2 + y^2 = 144$ b) $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 8$ c) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$

8.61. Punkty $A = (0, -1)$ i $B = (-2, 1)$ należą do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$. Znajdź współrzędne punktu C , leżącego na tym okręgu i takiego, aby trójkąt ABC był równoramienny o podstawie AB .

8.62. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

8.63. Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (3, -5)$

- a) stycznego do osi y .
 b) przechodzącego przez początek układu współrzędnych.

8.64. Punkt $A = (1, 9)$ należy do okręgu stycznego do osi x w punkcie $B = (-2, 0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

8.55. $\overline{AS} = \left[3\frac{1}{2} - 7, 3\frac{1}{2} - 3\right] = \left[-3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\overline{SD} = \overline{AS}$, bo S jest środkiem boku AD , więc $D = \left(3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (0, 4)$.

$\overline{DC} = [-3 - 0, 1 - 4] = [-3, -3] = \frac{3}{8}\overline{AB}$, co oznacza, że $AB \parallel DC$ i punkty B, C leżą z tej samej strony prostej AD , więc czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

8.56. $2\sqrt{101}$

8.57. $C = (3, 3)$ lub $C = (3, -3)$

8.58. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases}$

c) brak rozwiązań

d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

8.59. a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$

b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 169$

c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 41$

8.60.

a) środek: $(0, 0)$, promień: 12

b) środek: $(-7, 3)$, promień: $2\sqrt{2}$

c) środek: $(0, 3)$, promień: $\sqrt{5}$

8.61. $C = (1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$
 lub $C = (1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$

8.62. $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$

8.63. a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$

b) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$

8.64. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$

8.65. $x + 2y = 0$, $4x - 2y - 5 = 0$

8.66. $(1, 1)$, $(3, -3)$, $(-5, -7)$,
 $(-7, -3)$

8.67. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

8.68. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

8.69. a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$,
 $y = 9$
b) $P = 15$

8.70. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$
lub $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - 5\frac{1}{5}\right)^2 = 32$

8.72. $C = (-3, -2)$ lub $C = (5, 6)$

8.73. $(0, -5)$, $(-1, 2)$, $(7, -4)$

8.74. a) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$
b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$
lub $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$

8.65. Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ i $x^2 + y^2 = 4$. Wyznacz równania osi symetrii figury będącej sumą tych okręgów.

8.66. Prostokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$. Bok AB zawiera się w prostej o równaniu $2x + y - 3 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

8.67. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. Przez środek okręgu i początek układu współrzędnych poprowadzono prostą k . Prosta m , prostopadła do k i przechodząca przez punkt $A = (1, 1)$, wyznacza cięciwę PQ danego okręgu. Oblicz długość tej cięciwy.

8.68. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 3)$, $B = (0, 2)$, $C = (-1, 1)$.

8.69. Punkty $A = (7, 7)$, $B = (0, 8)$, $C = (-2, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC .
a) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie $M = (3, 9)$.
b) Oblicz pole tego trójkąta.

8.70. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $P = (-5, 6)$, którego środek leży na prostej $y = 2x + 4$, a promień jest równy $4\sqrt{2}$.

D **8.71.** Okrąg o środku $S = (4, 3)$ przechodzi przez punkt $P = (5, 6)$. Prosta $y = -x + 3$ przecina ten okrąg w punktach A i B . Wykaż, że trójkąt ABP jest prostokątny, i oblicz jego pole.

8.72. Punkt $A = (-2, 5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y = x + 1$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

8.73. Punkt $A = (6, 3)$ jest wierzchołkiem kwadratu wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

8.74. Dane są: okrąg $x^2 + y^2 = 16$, równanie prostej $l: x - y - 4 = 0$ i punkt $A = (8, 0)$. Wyznacz
a) równanie okręgu symetrycznego do danego względem prostej l .
b) równanie prostej stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A .

8.71. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2$, ale
 $(5 - 4)^2 + (6 - 3)^2 = r^2$, więc $r^2 = 10$
 $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10 \\ y = -x + 3 \end{cases}$
 $(x - 4)^2 + (-x)^2 = 10$
 $x^2 - 8x + 16 + x^2 = 10$
 $2x^2 - 8x + 6 = 0$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x - 3)(x - 1) = 0$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
 $A = (3, 0)$, $B = (1, 2)$ oraz $P = (5, 6)$
 $|AB| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$
 $|AP| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$
 $|PB| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$
 $|PB|^2 + |AB|^2 = |AP|^2$, zatem trójkąt ABP jest prostokątny.
 $P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = 8$

8.75. W układzie współrzędnych rozważamy wszystkie punkty P postaci $P = \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}, m\right)$, gdzie $m \in \langle -1; 7 \rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$ dla $Q = \left(\frac{55}{2}, 0\right)$.

8.76. Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi z punktu $A = (2, 0)$.

8.77. Okrąg o środku $S = (5, 4)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o równaniu $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$. Wyznacz równanie wspólnej stycznej obu okręgów.

8.78. Pary liczb (x, y) spełniające układ równań
$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego.

- Wyznacz współrzędne wierzchołków tego czworokąta.
- Wykaż, że ten czworokąt jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym czworokącie.

8.79. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $B = (7, 2)$. Pole trójkąta jest równe 20. Wysokość poprowadzona z wierzchołka A zawiera się w prostej $y = 3x + 1$. Oblicz współrzędne punktów A i C .

8.80. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 3 przechodzącego przez punkt $P = (2, -1)$ i stycznego do osi odciętych, wiedząc, że ten okrąg nie przecina osi rzędnych.

8.81. W trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD można wpisać okrąg. Dane są współrzędne wierzchołków $A = (1, -3)$, $B = (4, 1)$ i $C = (1, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

8.82. Wierzchołki A i C rombu $ABCD$ są punktami przecięcia okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ z prostą o równaniu $y = x$. Pole rombu jest równe 8. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D .

8.83. Wyznacz punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$ i $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 14 = 0$.

8.84. Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ i $x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0$.

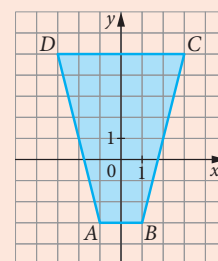
8.75. wartość najmniejsza: $511\frac{1}{4}$,
wartość największa: $651\frac{1}{4}$

8.76. 90° . *Wskazówka:* Nie wyznaczaj równań tych stycznych.

8.77. $x + 2y - 8 - 6\sqrt{5} = 0$

8.78.

- $(-1, -3), (1, -3), (3, 5), (-3, 5)$
- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$AB \parallel CD$

i $|AD| = \sqrt{2^2 + 8^2} = |BC|$,
więc czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

c) $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$

8.79. $A = (0, 1)$ lub $A = (2, 7)$,
 $C = (-5, 6)$

8.80. $(x - 2 - \sqrt{5})^2 + (y + 3)^2 = 9$

8.81. $D = \left(\frac{4}{13}, \frac{1}{13}\right)$

8.82. $B = (4, 0)$, $D = (0, 4)$

8.83. $\left(\frac{2 - 3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$,
 $\left(\frac{2 + 3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

8.84. $x + y - 4 = 0$

9. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Definicje

- Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ (n **silnia**) oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

- Jeżeli $n, k \in \mathbf{N}$ i $k \leq n$, to wyrażenie $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ nazywamy **symbolem Newtona** i oznaczamy $\binom{n}{k}$.

- Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $P(A)$ taka, że:

(1) $P(A) \geq 0$,

(2) dla każdej pary wykluczających się zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

(3) $P(\Omega) = 1$,

to mówimy, że **na zdarzeniach w zbiorze Ω określone jest prawdopodobieństwo P** , a liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia A** .

- Jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne tworzą zbiór Ω i są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A** jest równe stosunkowi liczby zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń ze zbioru Ω :

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

- Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie A nie zajdzie. Zdarzenie przeciwne do A oznaczamy A' .

- Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B** , nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą **układ zupełny zdarzeń**, jeżeli spełniają trzy warunki:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega,$$

$$P(B_i) \neq 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq n,$$

$$B_i \cap B_j \neq \emptyset \text{ dla } i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

- Jeżeli w grze losowej wyniki gracza X przyjmują wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \dots, p_n$, gdzie $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to wartością oczekiwaną EX tej gry nazywamy liczbę:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

- W uporządkowanym niemalejąco szeregu liczb **medianą** nazywamy wyraz środkowy (w szeregu o nieparzystej liczbie wyrazów) lub średnią arytmetyczną dwóch wyrazów środkowych (w szeregu o parzystej liczbie wyrazów).
- **Dominantą** w zestawie danych jest ta wartość, która występuje w nim najczęściej i więcej niż raz.
- Jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wszystkimi wynikami obserwacji, to ich **średnia** jest równa:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Jeżeli wynikiem $x_1, x_2, \dots, x_n$ nadane są odpowiednio dodatnie wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$, to **średnią ważoną** tych wyników jest liczba:

$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

- **Wariancją** σ^2 w zestawie wyników $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy przeciętne odchylenie kwadratowe od wartości średniej $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- **Odchyleniem standardowym** σ w zestawie wyników $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

- **p -tym centylem** w zbiorze liczb nazywamy taką wartość k , że $p\%$ liczb z tego zbioru jest mniejszych lub równych k .

Twierdzenia

• **Reguła mnożenia**

Jeśli pewien wybór zależy od k ($k \in \mathbb{N}$ i $k > 0$) decyzji oraz: podejmując pierwszą decyzję, mamy m_1 możliwości, drugą – mamy m_2 możliwości, ..., ostatnią (k -tą) – mamy m_k możliwości, to wyboru tego można dokonać na $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ sposobów.

- Liczba wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego jest równa n^k .

- Liczba wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego, $k \leq n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

- Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Liczba wszystkich k -elementowych kombinacji ze zbioru n -elementowego, $k \leq n$, jest równa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

- Dla dowolnych liczb naturalnych n i k , $k < n$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- Dla dowolnej liczby naturalnej n :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

• **Dwumian Newtona**

Dla dowolnej liczby naturalnej n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

- Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A, B \subset \Omega$. Wtedy:

$$(1) P(\emptyset) = 0,$$

$$(2) \text{ jeżeli } A \subset B, \text{ to } P(A) \leq P(B),$$

$$(3) \text{ dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega \text{ prawdziwa jest nierówność } P(A) \leq 1,$$

$$(4) P(A) + P(A') = 1,$$

$$(5) \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega \text{ zachodzi równość:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

• **Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym**

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny i $A \subset \Omega$, to:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- **Wzór Bayesa**

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny, $A \subset \Omega$ i $P(A) > 0$, to dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ zachodzi równość:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$

- **Twierdzenie Bernoulliego**

Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ i $0 \leq k \leq n$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$ zachodzi równość $n! = n \cdot (n-1)!$.
- Jeżeli z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy **ze zwracaniem** k razy po jednej kuli, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa n^k .
- Jeżeli z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy **bez zwracania** k razy ($k \leq n$) po jednej kuli, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.
- Jeżeli ustawiamy w ciągu wszystkie elementy zbioru n -elementowego, to liczba wszystkich możliwych ustawień jest równa $n!$.
- Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego jest równa 2^n .
- Żadne zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A nie sprzyja zdarzeniu A' i na odwrót. Inaczej mówiąc, każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ albo sprzyja zdarzeniu A , albo sprzyja zdarzeniu A' .
- W statystyce mamy do czynienia z odwróconym, w stosunku do rachunku prawdopodobieństwa, wnioskowaniem:
 - w rachunku prawdopodobieństwa – na podstawie znajomości całej populacji określamy prawdopodobieństwo wylosowania próbki o określonej własności,
 - w statystyce – na podstawie własności próbki losowej wyciągamy najbardziej prawdopodobne wnioski o nieznanymi własnościach populacji.
- Mediana dzieli uporządkowany szereg danych surowych w taki sposób, że przed nią i za nią jest tyle samo danych.
- **Rozstęp**, czyli odległość między danymi skrajnymi, jest jedną z miar rozproszenia danych.

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. D

9.2. D

9.3. B

9.4. A

9.5. C

9.6. C

9.7. D

9.8. B

W każdym z zadań 9.1–9.12 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są różnymi liczbami nieparzystymi?

- A. 125 B. 100 C. 40 D. 60

9.2. Mamy do dyspozycji 8 skrytek bagażowych. Na ile sposobów możemy rozmieścić w nich 3 różne walizki tak, aby w każdym schowku znajdowała się co najwyżej jedna walizka?

- A. 8^3 B. 3^8 C. $8 \cdot 3$ D. $8 \cdot 7 \cdot 6$

9.3. Przesuwamy się wzdłuż krawędzi sześcianu $ABCD A' B' C' D'$. Na ile sposobów możemy dojść z punktu A do punktu C' , przechodząc po drodze przez dokładnie dwa z pozostałych wierzchołków?

- A. 3 B. 6 C. 8 D. 27

9.4. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wskaż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek będącej liczbą złożoną.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

9.5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których iloczyn jest parzysty.

- A. 0,6 B. 0,64 C. 0,7 D. 0,8

9.6. W urnie znajduje się 12 kul białych i 4 czarne. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul różnego koloru?

- A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{16}$

9.7. Ze zbioru wszystkich krawędzi graniastosłupa wybieramy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to krawędź jednej z podstaw tego graniastosłupa?

- A. Jest za mało danych, żeby to obliczyć. B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

9.8. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie większa od 7?

- A. $\frac{17}{36}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

9.9. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry i trzema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy tylko piątki i orły.

- A. $\frac{1}{32}$ B. $\frac{1}{44}$ C. $\frac{1}{98}$ D. $\frac{1}{288}$

9.10. Z trzech części egzaminu, którym nadano wagi 1, 2 oraz 3, Anna otrzymała odpowiednio 42, 30 i 60 punktów. Końcowy wynik był średnią ważoną wyników trzech części. Ile punktów otrzymała Anna za cały egzamin?

- A. 94 B. 46,5 C. 141 D. 47

9.11. W uporządkowanym szeregu: 1, 2, 2, 2, 6, x , x , 12, 12, 21, 23, 27 mediana wynosi 9. Wskaż liczbę x .

- A. 6 B. 9 C. 12 D. Wyznaczenie x jest niemożliwe.

9.12. Wskaż odchylenie standardowe następującego zestawu danych:

-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

W zadaniach 9.13–9.19 oceń prawdziwość podanych zdań.

9.13. Liczba wszystkich liczb pięciocyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3 oraz

- A. parzystych jest równa 81.
B. nieparzystych jest równa 162.
C. podzielnych przez 4 jest równa 16.

9.14. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby

- A. podzielnej przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$.
B. podzielnej przez 41 jest równe $\frac{2}{89}$.
C. podzielnej przez 12 jest równe $\frac{1}{12}$.

9.15. Rzucamy trzema kostkami sześciennymi. Oznaczmy zdarzenia: A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty, B – iloczyn liczb oczek jest parzysty, C – suma liczb oczek jest nieparzysta, D – suma liczb oczek jest parzysta.

- A. Zdarzenia A i B się wykluczają.
B. Zdarzenia A i D się wykluczają.
C. Zdarzenia B i C się wykluczają.

9.9. D

9.10. D

9.11. B

9.12. D

9.13. P, P, F

9.14. P, F, F

9.15. P, P, F

9.16. F, P, P

9.16. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana jedna z tych liczb jest

- A. równa 3541, wynosi $\frac{1}{625}$.
 B. parzysta, wynosi $\frac{2}{5}$.
 C. większa od 5430, wynosi $\frac{1}{60}$.

9.17. F, F, F

9.17. Liczba $\binom{20}{10}$

- A. jest podzielna przez 111.
 B. jest podzielna przez 1998.
 C. jest podzielna przez 2000.

9.18. F, P, P

9.18. Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, liczba $\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}$

- A. jest równa liczbie $\binom{4n}{2n+1}$.
 B. jest równa liczbie $\binom{2n+1}{n}$.
 C. jest równa liczbie $\binom{2n+1}{n+1}$.

9.19. P, P, P

9.19. Wielomian $W(x) = (2x - 1)^5$ zapisano w postaci uporządkowanej sumy. W tej sumie

- A. współczynnik przy x jest równy 10.
 B. współczynnik przy x^3 jest równy 80.
 C. suma wszystkich współczynników jest równa 1.

9.20. B3

9.20. Mamy 6 różnych książek i 5 różnych pudełek. W każdym z nich mogą się zmieścić wszystkie książki. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**

Liczba sposobów rozmieszczenia tych książek w pudełkach jest równa

A.	30,	ponieważ	1.	zgodnie z regułą mnożenia należy pomnożyć liczbę książek przez liczbę pudełek.
B.	5^6 ,		2.	każdemu pudełku możemy jednoznacznie przyporządkować książkę, która do niego trafi.
C.	6^5 ,		3.	każdej książce możemy jednoznacznie przyporządkować pudełko, do którego trafi.

9.21. Ile jest możliwych wyników danego doświadczenia losowego?

- a) Rzucamy 5 razy monetą i zapisujemy kolejne wyniki.
- b) Rzucamy 3 razy kostką do gry i zapisujemy kolejne wyniki.
- c) W urnie jest 15 ponumerowanych losów. Wyciągamy 2 razy po jednym losie bez zwracania i zapisujemy kolejne wyniki.
- d) W urnie są 4 różnokolorowe kule. Losujemy kolejno 3 razy po jednej kuli ze zwracaniem i zapisujemy kolejne wyniki.
- e) W pudełku są kartki z cyframi 2, 4, 6 i 8. Losujemy kolejno wszystkie kartki i zapisujemy otrzymaną liczbę czterocyfrową.
- f) Rzucamy 13 razy kostką do gry i zapisujemy kolejne wyniki.

9.22. Hasło składa się z ośmiu znaków: trzech liter na początku i pięciu cyfr. Ile takich haseł można ułożyć, mając do dyspozycji 24 litery i wszystkie cyfry?

9.23. Ile jest możliwości wypisania na świadectwie ocen z dziewięciu przedmiotów uczniowi, który otrzymał promocję do następnej klasy?

9.24. W alfabecie Morse'a litery są kodowane za pomocą ciągu znaków: kropek i kresek. Ile liter można zakodować, jeżeli założymy, że do zakodowania każdej z nich możemy użyć co najwyżej czterech znaków?

9.25. W sali do nauki języków obcych jest 15 miejsc. Na ile sposobów może usiąść w tej sali pięciu uczniów? Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc znaczących.

9.26. Na ile sposobów można rozłożyć 5 różnych kart pocztowych w 8 przegródkach, jeżeli

- a) w pojedynczej przegródce może być kilka kart?
- b) w każdej przegródce może być najwyżej jedna karta?

9.27. Z urny zawierającej siedem kul oznaczonych cyframi 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9 losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej kuli i tworzymy trzycyfrowe liczby. Ile otrzymamy w ten sposób liczb

- a) większych od 400?
- b) większych od 650?
- c) mniejszych od 777?

9.28. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, które mają różne cyfry i są

- a) większe od 300?
- b) mniejsze od 520?
- c) mniejsze od 458?

9.21. a) 32 b) 216 c) 210
d) 64 e) 24 f) 6^{13}

9.22. $24^3 \cdot 10^5$

9.23. 5^9

9.24. 30

9.25. 360 000

9.26. a) 8^5
b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

9.27. a) 245 b) 175 c) 228

9.28. a) 504 b) 304 c) 254

9.29. a) 1 b) 4^{45}
c) 4^{40} d) 3^{35}

9.30. 90

9.31. 30

9.32. 2125

9.33. 117 600

9.34. 162

9.35. 5994

9.36. 280

9.37. 3157

9.38. 192 080

9.39. $1968 - 880\sqrt{5}$

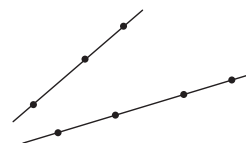
9.40. $\frac{2}{15}$

9.29. Test sprawdzający wiedzę z historii składa się z 45 pytań. Do każdego pytania są cztery odpowiedzi, a wśród nich tylko jedna poprawna. Na ile sposobów uczeń rozwiązujący test może wypełnić tabelę odpowiedzi, jeżeli

- a) odpowie na wszystkie pytania poprawnie?
- b) odpowie (dobrze lub źle) na wszystkie pytania?
- c) poda odpowiedzi tylko do pierwszych 40 pytań?
- d) odpowie poprawnie tylko na pierwszych 10 pytań, a do wszystkich pozostałych poda błędne odpowiedzi?

9.30. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 15 lub przez 20?

9.31. Na jednej prostej zaznaczono 3 punkty, a na drugiej 4 punkty, jak na rysunku. Ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów?



9.32. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie występuje jedna cyfra będąca liczbą nieparzystą i trzy parzyste?

9.33. Oblicz, na ile sposobów można wybrać trzy różne liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ tak, by ich iloczyn był liczbą nieparzystą.

9.34. Ile jest nieparzystych liczb trzycyfrowych, w których zapisie co najmniej jedna cyfra jest jedynką?

9.35. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry w liczbie mogą się powtarzać.

9.36. Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12.

9.37. Oblicz, ile jest liczb dwunastocyfrowych, których suma cyfr jest równa 6 i w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1 i 2.

9.38. Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, natomiast występują dwie piątki i trzy dziewiątki.

9.39. Zapisz w postaci uporządkowanej sumy liczbę $(3 - \sqrt{5})^5$.

9.40. Kuba ma w szufladzie 5 koszulek: białą, niebieską, zieloną, pomarańczową i czarną, oraz 3 pary spodni: niebieskie, brązowe i czarne. Po ciemku wyjmując jedną koszulkę i jedną parę spodni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą one w tym samym kolorze.

9.41. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, które mają różne cyfry i są utworzone z cyfr 0, 1, 5, 8, 9, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej.

9.42. Z pudełka, w którym jest 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym razem wylosujemy kulę z numerem parzystym, a za drugim razem kulę z numerem nieparzystym. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

9.43. Dwaj bracia codziennie losują, który z nich ma sprzątać wspólny pokój. Każdy z nich rzuca kostką. Sprząta ten, kto wyrzuci mniejszą liczbę oczek. Jeżeli obaj wyrzucą tyle samo, pokój pozostaje niesprzątnięty do następnego dnia.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jutro będzie sprzątać młodszy brat.

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez 5 kolejnych dni pokój nie będzie sprzątanym?

9.44. Na kostkach domina są po dwa pola, każde oznaczone liczbą od 0 do 6. Zestaw do gry składa się z kostek, które wykorzystują wszystkie możliwe układy liczb na obu polach i każda kostka ma inny układ pól. Z zestawu wszystkich kostek wyciągamy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na wyjętej kostce są

a) pola z takimi samymi liczbami.

b) pola z co najmniej jedną dwójką lub co najmniej jedną trójką.

9.45. Pan Euzebiusz pamięta, że kod PIN jego karty do bankomatu jest czterocyfrowy i składa się z cyfr 2, 3, 7 i 9, ale zupełnie nie pamięta ich kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uda mu się podjąć gotówkę, jeżeli bankomat nie oddaje karty po trzeciej nieudanej próbie wprowadzenia kodu?

9.46. Rysiek, przechodząc codziennie koło cukierni, rzuca monetą dwuzłotową. Jeżeli wypadnie reszka – przeznaczoną monetę na zakup pączka, jeżeli orzeł – chowa ją do kieszeni i idzie dalej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez tydzień kupi co najmniej jednego pączka?

9.47. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

9.48. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich jest 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

$$9.41. \frac{7}{16}$$

$$9.42. \frac{5}{18}$$

$$9.43. a) \frac{5}{12} \quad b) \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$9.44. a) \frac{1}{4} \quad b) \frac{13}{28}$$

$$9.45. \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

$$9.46. 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{128}$$

$$9.47. \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{18}$$

$$9.48. \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{9 \cdot 6} = \frac{19}{54}$$

9.49. $\frac{4}{9}$

9.50. $1 - \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{7}{10}$

9.51. 0,08 zł

9.52. dla dwóch liczb: $\frac{20 \cdot 19}{80 \cdot 79}$,
dla trzech liczb: $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{80 \cdot 79 \cdot 78}$

9.53. $P(A) = \frac{1}{243}$, $P(B|C) = \frac{1}{162}$

9.54.
 $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11}{4165}$

9.55. $\frac{1}{3}$

9.56. $\frac{5}{108}$

9.57. $\frac{29}{149}$

9.58. $\frac{1}{6}$

9.49. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jedna ściana tej kostki ma jedno oczko, dwie ściany mają po dwa oczka i trzy ściany mają po trzy oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

9.50. Z pojemnika, w którym są dwa losy wygrywające i trzy losy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

9.51. Mateusz losuje kolejno ze zwracaniem dwie kule z pudełka zawierającego dwie kule białe, trzy żółte i pięć niebieskich. Jeżeli wylosuje dwie kule w takim samym kolorze, wygrywa 10 zł. W przeciwnym wypadku przegrywa 6 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

9.52. Podczas gry w jedną z wielu wersji Multi Multi skreślamy 2 liczby spośród 80. Maszyna losuje 20 liczb spośród 80. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie skreślone liczby znajdą się w wybranej dwudziestce? A jakie byłoby, gdybyśmy skreślali 3 liczby?

9.53. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy trzy razy ze zwracaniem po jednym elemencie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg w kolejności losowania. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowane liczby tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 0,5 lub 3, B – wylosowane liczby tworzą ciąg arytmetyczny rosnący, którego różnica jest liczbą parzystą, C – za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą. Oblicz $P(A)$ i $P(B|C)$.

9.54. Tasujemy talię 52 kart i układamy kolejno wszystkie karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że najpierw zostaną wyłożone cztery kiery?

9.55. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.

9.56. Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: iloczyn liczb otrzymanych oczek jest równy 60.

9.57. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia: suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3 pod warunkiem, że ich iloczyn jest podzielny przez 3?

9.58. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: jedną z wylosowanych liczb będzie 8 pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

9.59. Z grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdują się tylko kobiety, jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

9.60. W urnie znajdują się kule białe i czarne, białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile kul jest w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.

9.61. W pudełku znajduje się pięć sześciennych kostek do gry. Trzy z nich są zielone, a dwie czerwone. Z pudełka wyjmujemy losowo trzy kostki, a następnie wykonujemy rzut tymi wyjętymi kostkami, które są zielone. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek wyrzuconych na wszystkich kostkach będzie równa 4.

9.62. Losujemy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$, a następnie rzucamy monetą tyle razy, ile wskazała wylosowana liczba. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła.

9.63. Do pustej urny włożono 8 kul białych i 4 czarne, a następnie wylosowano bez zwracania 5 kul. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po losowaniu stosunek liczby kul czarnych do liczby kul białych w urnie będzie większy niż przed losowaniem?

9.64. W urnie są dwie kule czarne, trzy białe i jedna zielona. Losujemy jedną kulę i zatrzymujemy ją. Jeśli wylosowana kula była zielona, to losujemy jeszcze dwie kule spośród pozostałych w urnie. W przeciwnym razie kończymy losowanie.

- a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy dwie kule czarne.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy dokładnie jedną kulę czarną.

9.65. W pierwszej urnie są 2 kule białe i 3 czarne, w drugiej – 3 kule białe i 2 czarne. Z obu urn losujemy po jednej kuli i, nie oglądając ich, wkładamy do trzeciej urny, początkowo pustej. Następnie losujemy jedną kulę z trzeciej urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że z trzeciej urny wylosujemy kulę białą.

9.66. W urnie jest 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy z urny pięć razy po jednej kuli, zwracając kulę za każdym razem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej dokładnie dwa razy?

9.67. Rzucamy 10 razy parą sześciennych kostek do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie cztery razy sumy liczb oczek równej 9?

9.68. Wilhelm trafia z łuku do tarczy z prawdopodobieństwem 0,6. Ile co najmniej razy powinien strzelić, aby prawdopodobieństwo, że trafi co najmniej raz, było większe od 90%?

9.59. 7 kobiet i 14 mężczyzn

9.60. 4 lub 8

9.61. $\frac{73}{720}$

9.62. $\frac{17}{24}$

9.63. $\frac{14}{33}$

9.64. a) $\frac{1}{60}$
b) $\frac{13}{30}$

9.65. $\frac{1}{2}$

9.66. $\frac{216}{625}$

9.67. $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^6$

9.68. 3 razy

9.69.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

 $P(A \cup B) \leq 1$, więc

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1.$$

$$P(A) - P(A \cap B) \leq 1 - P(B)$$

Mamy:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$\text{Zatem } P(A \cap B') \leq 0,3.$$

$$\mathbf{9.72.} \quad P(A \cap B') = P(A|B) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B')$$

9.73. mediana: 10 lat,

dominanta: 8 lat,

średnia: 10 lat

9.74. a) 6 kg**b)** 50 kg**c)** 50 kg**d)** 49,5 kg

9.75. $x = 7$

9.76. a) Gabrysia: 4 min,

Marysia: 5 min

b) Gabrysia: 2 min,

Marysia: 2 min

D**9.69.** Zdarzenia losowe A, B są zawarte w Ω . Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \leq 0,3$.**D****9.70.** O zdarzeniach losowych $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A \cap B') = 0,7$. Wykaż, że $P(A' \cap B) \leq 0,3$.**D****9.71.** Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to $P(A|B) \geq 0,8$.**D****9.72.** Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Wykaż, że $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$.**9.73.** Dzieci kolejno wchodzące na lodowisko miały: 6, 7, 8, 8, 11, 12, 9, 8, 7, 13, 14, 15, 15, 10, 15, 14, 8, 7, 11, 12, 8, 7, 12 lat. Znajdź medianę, dominantę oraz średnią wieku tych dzieci. Wyniki podaj w pełnych latach.**9.74.** Z samochodu dostawczego wypakowano trzydzieści worków z cukrem i sprawdzono ich wagę. Otrzymano wyniki w kilogramach: 50, 49, 48, 51, 50, 48, 50, 48, 53, 49, 48, 50, 51, 48, 50, 51, 49, 50, 47, 48, 49, 48, 50, 50, 47, 51, 51, 48, 53, 50. Oblicz

a) rozstęp wartości tych danych.

c) dominantę tego zestawu danych.

b) medianę tego zestawu danych.

d) średnią wagę worka cukru.

9.75. Średnia arytmetyczna liczb: 3, 1, 1, 0, x , 0 jest równa 2. Oblicz x .**9.76.** Siostry Gabrysia i Marysia zapisywały czas trwania swoich rozmów telefonicznych w pewnym określonym przez rodziców okresie. Wyniki przedstawiły w tabeli.

Zilustruj te dane na diagramie słupkowym.

Oblicz dla każdej z dziewcząt

a) średni czas jednej rozmowy.

b) odchylenie standardowe czasu rozmowy.

Wyniki podaj w pełnych minutach.

Czas trwania rozmowy (w min)	Liczba rozmów	
	Gabrysi	Marysi
2	17	8
3	21	26
4	25	11
5	13	5
6	8	28
7	12	16
8	3	12
9	0	4
10	1	0

9.70. $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \emptyset$, więc $P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)]$. $A \cap B' \subset A$ i $A' \cap B \subset B$, więc $(A \cap B') \cup (A' \cap B) \subset A \cup B$.

Zatem $P(A \cap B') + P(A' \cap B) \leq P(A \cup B) \leq 1$.

$P(A' \cap B) \leq 1 - 0,7$, czyli $P(A' \cap B) \leq 0,3$.

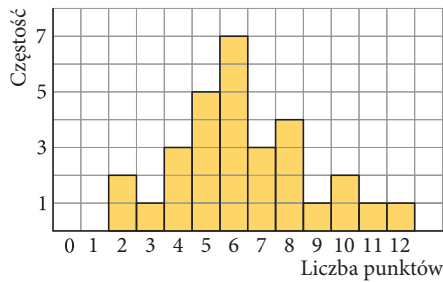
9.71. $P(A \cup B) \leq 1$, więc $-P(A \cup B) \geq -1$.

Stąd:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \geq \frac{0,85 + 0,75 - 1}{0,75} = \frac{0,6}{0,75} = 0,8$$

Zatem $P(A|B) \geq 0,8$.

9.77. W rozgrywkach pewnej dyscypliny sportowej startowało wiele drużyn. Diagram przedstawia liczby punktów zdobytych przez poszczególne drużyny. Na jego podstawie odpowiedz na pytanie.



- Ile drużyn uczestniczyło w zawodach?
- Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyły drużyny?
- Ile wynosi dominanta liczby punktów?
- Ile drużyn zdobyło co najmniej 10 punktów, a ile – co najwyżej 5?
- Ile wynosi średnia liczba punktów zdobytych w tych rozgrywkach przez jedną drużynę?

- 9.77.** a) 30
 b) najmniejsza: 2, największa: 12
 c) 6
 d) co najmniej 10 punktów: 4, co najwyżej 5 punktów: 11
 e) 6,37

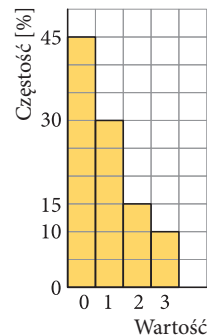


9.78. Bartek przez 50 dni notował czas przejścia z domu do szkoły oraz czas przejścia ze szkoły do domu. Wyniki przedstawił w tabeli.

Czas (w min)	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Częstość	12	18	25	16	13	10	3	2	1

Narysuj diagram częstości ilustrujący te dane. Oblicz średni czas (w pełnych minutach), w jakim Bartek pokonywał trasę szkoła – dom. Znajdź wariancję i odchylenie standardowe danych.

9.79. Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na zamieszczonym obok diagramie częstości.



9.78. $\bar{x} = 17$, $\sigma^2 = 3,24$, $\sigma = 1,85$

9.79. 0,9

10. Stereometria

Definicje

- Dwie płaszczyzny: są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne; **przecinają się**, jeżeli mają wspólną prostą (nazywaną krawędzią przecięcia).
- Mówimy, że prosta: jest **równoległa do płaszczyzny**, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych albo jest w niej zawarta; **przecina płaszczyznę**, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny.
- Jeżeli przez dwie różne proste przechodzi jedna płaszczyzna, to takie proste nazywamy **współpłaszczyznowymi**.
- Dwie proste, przez które nie można poprowadzić jednej płaszczyzny, nazywamy **skośnymi**.
- Dwie różne proste, które są współpłaszczyznowe i równoległe na tej płaszczyźnie, nazywamy **prostymi równoległymi**. Ponadto przyjmujemy, że proste pokrywające się są również równoległe.
- **Prosta a jest prostopadła do prostej b ($a \perp b$) w przestrzeni**, gdy istnieje prosta a' równoległa do prostej a i przecinająca prostą b pod kątem prostym.
- **Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny α ($k \perp \alpha$)**, jeżeli k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie α .
- **Płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β** , jeżeli zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β .
- Dane są: płaszczyzna π i prosta a nierównoległa do tej płaszczyzny. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą b równoległą do prostej a . Prosta b przecina płaszczyznę π w punkcie P' , który nazywamy **rzutem równoległym** punktu P na płaszczyznę π **w kierunku a** .
Jeżeli prosta a jest prostopadła do π , to P' nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu P na płaszczyznę π .
- Jeżeli prosta nie jest prostopadła ani równoległa do płaszczyzny, to **kątem nachylenia prostej do płaszczyzny** nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę.

- Dwie różne półpłaszczyzny P_1, P_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym** o krawędzi m i ścianach P_1 i P_2 .
- **Miarą kąta dwuściennego** nazywamy miarę kąta płaskiego będącego częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.
- **Siatką wielościanu** (rozwinęciem powierzchni wielościanu na płaszczyźnie) nazywamy płaską figurę będącą sumą wielokątów stykających się bokami, a powstałą przez rozcięcie pewnej liczby krawędzi wielościanu tak, aby jego ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie.
- **Graniastosłupem** nazywamy wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.
- Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.
- **Równoległościan** to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.
- **Prostopadłościanem** nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt. Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe, nazywamy **sześcianem**.
- Graniastosłup nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny.
- **Ostrosłupem** nazywamy wielościan, którego jedną ścianą (zwaną podstawą) jest dowolny wielokąt wypukły, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku, nazywanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.
- **Ostrosłup prawidłowy** to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.
- **Wielościanem foremnym** nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba krawędzi.
- Jeżeli figurę płaską f obracamy w przestrzeni o kąt pełny wokół prostej k zawartej w płaszczyźnie figury f , to otrzymaną w ten sposób figurę przestrzenną nazywamy **bryłą obrotową**, a prostą k – jej **osią obrotu**.
- **Walcem** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.

- **Stożkiem** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.
- **Kulą** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej średnicę.
Przekrój płaski kuli przechodzący przez jej środek nazywamy **kołem wielkim**. Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące jej przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**. Płaszczyzna przekroju dzieli jednocześnie sferę na dwie części nazywane **czaszami**.
Wycinkiem kuli nazywamy część kuli ograniczoną sferą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli.
Warstwą kuli nazywamy część kuli zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami przecinającymi kulę.
- **Podobieństwo** o skali k ($k > 0$) jest przekształceniem przestrzeni o tej własności, że dla dowolnych punktów A, B i ich obrazów A', B' zachodzi równość:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$
- Figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' , co zapisujemy symbolicznie $F \sim F'$, gdy istnieje takie podobieństwo P przestrzeni, w którym $P(F) = F'$.
- **Ostrosłup jest opisany na stożku (wpisany w stożek)** $\Leftrightarrow$ podstawa ostrosłupa jest wielokątem opisanym na podstawie stożka (wpisanym w podstawę stożka), a wysokość pokrywa się z wysokością stożka.
- **Wielościan jest wpisany w kulę** $\Leftrightarrow$ wszystkie jego wierzchołki należą do sfery tej kuli.
- **Walec jest wpisany w kulę** $\Leftrightarrow$ okręgi jego podstaw są zawarte w sferze tej kuli.
- **Stożek jest wpisany w kulę** $\Leftrightarrow$ okrąg jego podstawy jest zawarty w sferze i wierzchołek należy do sfery tej kuli.
- **Wielościan jest opisany na kuli** $\Leftrightarrow$ wszystkie jego ściany są styczne do kuli.
- **Walec jest opisany na kuli** $\Leftrightarrow$ jego podstawy i tworzące są styczne do kuli.
- **Stożek jest opisany na kuli** $\Leftrightarrow$ jego podstawa i tworzące są styczne do kuli.

Twierdzenia

- Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

- **Twierdzenie o trzech prostopadłych**

Dana jest płaszczyzna α i prosta l , która nie jest do niej prostopadła. Prosta m jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę α , a k jest dowolną prostą leżącą na płaszczyźnie α . Prosta l jest prostopadła do k wtedy i tylko wtedy, gdy prosta m jest prostopadła do k .

- W ostrosłupie prawidłowym:
 - wszystkie krawędzie boczne są równe i nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem,
 - ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
 - kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
 - kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami są równe.
- Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są równe, to ten ostrosłup jest prawidłowy.
- Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to ten ostrosłup jest prawidłowy.
- Jeżeli bryła F' jest podobna w skali k do bryły F o polu powierzchni P_F i objętości V_F , to:
 - pole powierzchni bryły F' jest równe $P_{F'} = k^2 \cdot P_F$,
 - objętość bryły F' jest równa $V_{F'} = k^3 \cdot V_F$.
- **Twierdzenie Eulera**
W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w , liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość $w + s = k + 2$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π , jeżeli odcinek AB nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π .
- Wyznaczenie kąta ostrego najczęściej polega na wyznaczeniu wartości jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.
- Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych: czworościan foremny, sześcián, ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny.

10.1. C

10.2. B

10.3. B

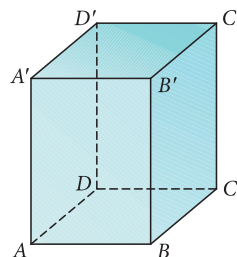
10.4. C

10.5. A

10.6. A

A. 2
B. 3
C. 4
D. nieskończenie wiele

A. $ABCD$ C. $ADD'A'$
B. $ABB'A'$ D. $BCC'B'$



10.3. W prostopadłościanie $ABCD A'B'C'D'$ dane są długości krawędzi: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AA'| = 12$. Ile jest równy cosinus kąta nachylenia przekątnej BD' do płaszczyzny $ABCD$?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\sqrt{\frac{7}{151}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10.4. Długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu pozostają w stosunku $4 : 3 : 1$. Objętość tego prostopadłościanu wynosi 324. Wskaż jego pole powierzchni całkowitej.

- A. 38 B. 60 C. 342 D. Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

10.5. Graniastosłup prosty ma wysokość 10 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm. Wskaż objętość tego graniastosłupa.

- A. 240 cm^3 B. $250\pi\text{ cm}^3$ C. 100 cm^3 D. 480 cm^3

10.6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD$ o podstawie $ABCD$, w którym $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Ile wynosi cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy?

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

10.7. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a i jest nachylona do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa pod kątem 60° . Wskaż objętość ostrosłupa.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

10.8. Długość każdej krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm. Wskaż pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

- A. $36\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $36 + 12\sqrt{3}$ C. $144\sqrt{3}$ D. $36(1 + \sqrt{3})$

10.9. Tworząca stożka o promieniu podstawy 3 ma długość 6. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

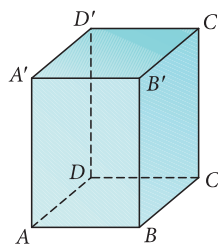
10.10. Powierzchnię boczną stożka tworzy wycinek kołowy o promieniu 12 i kącie środkowym 90° . Wskaż pole powierzchni całkowitej stożka.

- A. 36π B. 45π C. 9π D. $12\sqrt{3}\pi$

10.11. W sześcianie o krawędzi 1 połączono wszystkie wierzchołki dolnej podstawy z jednym wierzchołkiem podstawy górnej. Otrzymano w ten sposób krawędzie ostrosłupa. **Oceń prawdziwość podanych zdań.**

- A. Objętość tak utworzonego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$.
 B. Trzy krawędzie tego ostrosłupa mają długość równą $\sqrt{2}$.
 C. Pole jednej ze ścian tego ostrosłupa jest równe $\frac{1}{2}$.

10.12. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**



Proste DC i AA'

A.	są skośne,	ponieważ	1.	nie mają punktu wspólnego.
B.	nie są skośne,		2.	są niewspółpłaszczyznowe.
C.	są równoległe,		3.	zawierają się w płaszczyznach równoległych.

10.7. B

10.8. D

10.9. C

10.10. B

10.11. P, F, P

10.12. A2

10.15. $10\sqrt{5}$, 25

10.16. 24 cm

10.17. a) ok. 35°
b) ok. 70°

10.18. $V = 207 \text{ cm}^3$

10.19. 60°

10.20. $\frac{2\sqrt{145}}{29}$

10.21.
 $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$

10.22. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 30° , 30° , 120°

- 10.13.** Podaj liczbę ścian, krawędzi, wierzchołków i przekątnych
- prostopadłościanu.
 - graniastosłupa sześciokątnego.
 - czworościanu.
 - ostrosłupa pięciokątnego.

- 10.14.** Narysuj siatkę
- graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
 - ostrosłupa o podstawie prostokątnej, którego spodkiem wysokości jest punkt przecięcia przekątnych prostokąta.
 - ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

10.15. Krawędź podstawy i wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są równe $5\sqrt{5}$. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa.

10.16. Z punktu P oddalonego od płaszczyzny o 10 cm poprowadzono prostą nachyloną do tej płaszczyzny pod kątem 25° i przecinającą ją w punkcie Q . Oblicz długość odcinka PQ z dokładnością do 1 cm.

- 10.17.** Wyznacz miarę kąta
- nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny jego podstawy.
 - między przekątnymi sześcianu.

10.18. Przekątna prostopadłościanu ma długość $d = 11 \text{ cm}$ i tworzy z płaszczyzną podstawy prostopadłościanu kąt $\alpha = 43^\circ$, a z płaszczyzną jednej ze ścian bocznych kąt $\beta = 21^\circ$. Oblicz objętość prostopadłościanu z dokładnością do 1 cm^3 .

10.19. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest cztery razy większe od sumy pól obu podstaw. Wyznacz kąt nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

10.20. W prostopadłościanie $ABCD A'B'C'D'$ dane są długości krawędzi: $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|AA'| = 4$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej BD' do płaszczyzny ścian $BCC'B'$.

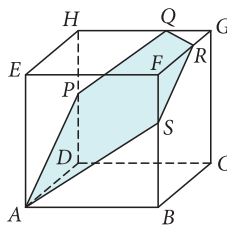
10.21. Przekątna prostopadłościanu ma długość d i jest nachylona do płaszczyzn ścian bocznych pod kątami α i β . Oblicz objętość prostopadłościanu.

10.22. W graniastosłupie prostym trójkątnym dwie przekątne ścian bocznych wychodzące z jednego wierzchołka są prostopadłe i każda z nich ma długość $\sqrt{3}$. Wysokość graniastosłupa jest równa 1. Wyznacz długości krawędzi i kąty podstawy tego graniastosłupa.

- 10.13. a)** 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków, 4 przekątne
b) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków, 18 przekątnych
c) 4 ściany, 6 krawędzi, 4 wierzchołki, 0 przekątnych
d) 6 ścian, 10 krawędzi, 6 wierzchołków, 0 przekątnych

10.23. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH . Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczonej z wierzchołka D na ścianę ACS . Oblicz długości odcinków AW , CW i SW .

10.24. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, jak na rysunku. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S . Oblicz długości odcinków DP i BS .



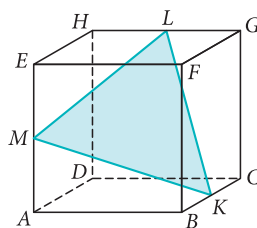
10.25. Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach $a = 2,5$ cm i $b = 1,1$ cm oraz kącie między nimi $\alpha = 25^\circ$. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość $c = 4,4$ cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta = 27^\circ$. Oblicz objętość graniastosłupa z dokładnością do $0,1$ cm³.

10.26. W prostopadłościanie punkt przecięcia przekątnych dolnej podstawy połączono odcinkiem ze środkiem jednej z krawędzi bocznych. Odcinek ten ma długość $d = 5$ cm, jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 19^\circ$, a do jednej ze ścian bocznych pod kątem 2α . Oblicz objętość prostopadłościanu z dokładnością do 1 cm³.

10.27. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 8 poprowadzono płaszczyznę przez dwa przeciwległe wierzchołki dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Wyznacz

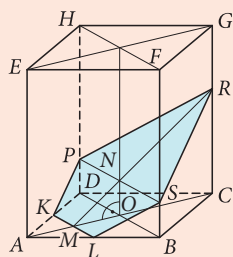
- wysokość graniastosłupa.
- pole otrzymanego przekroju.

10.28. Punkty K , L i M są środkami krawędzi BC , GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1, jak na rysunku. Oblicz pole trójkąta KLM .



10.29. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 6 i kącie ostrym 60° . Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

10.30. L , K – środki krawędzi AB i AD
 M , N – środki odcinków KL i PS
 $|AB| = a$ – długość krawędzi podstawy
 $\alpha = \angle CMR$



Przekrój jest sumą trapezu $KLSP$ i trójkąta PSR .

$$|KL| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |PS| = a\sqrt{2}, |OM| = \frac{a\sqrt{2}}{4}, |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{|OM|}{|MN|} = \cos \alpha, \text{ więc } |MN| = \frac{|OM|}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{4 \cos \alpha}.$$

$$|OC| = 2|OM|, \text{ więc } |NR| = 2|MN| = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha}.$$

$$P_{KLSP} = \frac{|KL| + |PS|}{2} \cdot |MN| = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4 \cos \alpha} = \frac{3a^2}{8 \cos \alpha}$$

$$P_{PSR} = \frac{1}{2} |PS| \cdot |NR| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha} = \frac{a^2}{2 \cos \alpha}$$

$$P_{KLSRP} = P_{KLSP} + P_{PSR} = \frac{3a^2}{8 \cos \alpha} + \frac{a^2}{2 \cos \alpha} = \frac{7a^2}{8 \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{10.23.} \quad |AW| &= |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}, \\ |SW| &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\mathbf{10.24.} \quad |DP| = |BS| = 9$$

$$\mathbf{10.25.} \quad V = 2,3 \text{ cm}^3$$

$$\mathbf{10.26.} \quad V = 144 \text{ cm}^3$$

$$\mathbf{10.27.} \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad &4\sqrt{6} \\ \text{b)} \quad &P = 64 \end{aligned}$$

$$\mathbf{10.28.} \quad P = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

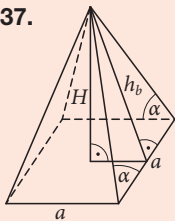
$$\mathbf{10.29.} \quad V = 108\sqrt{3}$$

10.30. Patrz s. 325.

10.32. 4

10.33. $P_c = 162 \text{ cm}^2$ 10.34. $P = 15$ 10.35. $P = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4 \sin \alpha}$ 10.36. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10.37.



$$\frac{h_b}{\frac{1}{2}a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad h_b = \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \alpha$$

$$H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a \operatorname{tg} \alpha\right)^2$$

$$a^2 = \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \cdot H =$$

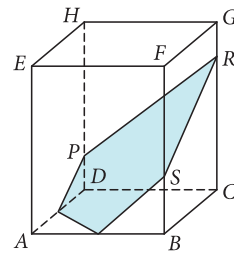
$$= \frac{4H^3}{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$$

$$10.38. V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{12},$$

$$P_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

D

10.30. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku ma długość a . Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Płaszczyzna przekroju przecina trzy krawędzie boczne graniastosłupa. Wykaż, że pole otrzymanego przekroju jest równe $\frac{7a^2}{8 \cos \alpha}$.



D

10.31. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem krawędzi AB i $|AM| = |MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

10.32. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $12\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy 60° . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

E

10.33. Wysokość prawidłowego ostrosłupa czworokątnego jest równa 3,2 cm, a kąt dwuścienny przy podstawie ma miarę 37° . Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa z dokładnością do 1 cm^2 .

10.34. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Odcinek DS jest wysokością ostrosłupa i ma długość 6. Punkt M jest środkiem odcinka DS . Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BCM .

10.35. Przez jedną krawędź czworoscianu foremnego o krawędzi długości a poprowadzono płaszczyznę przecinającą przeciwległą krawędź pod kątem α . Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

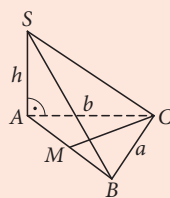
10.36. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1. Wyznacz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

D

10.37. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$). Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4H^3}{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$.

10.38. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

10.31.



Punkty A, B, C są równo oddalone od punktu M , więc M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , AB jest średnicą, a $\angle ACB = 90^\circ$.

$$|BC| = a, \quad |AC| = b, \quad |AB| = c, \quad |AS| = h$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$|SB|^2 = h^2 + c^2$$

$$|SC|^2 = h^2 + b^2$$

$$|BC|^2 = a^2$$

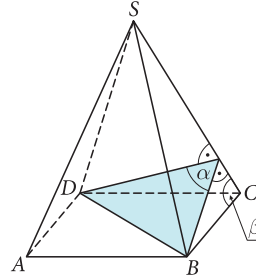
$$|SC|^2 + |BC|^2 = h^2 + b^2 + a^2 = h^2 + c^2 = |SB|^2$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że $\angle SCB = 90^\circ$.

10.39. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

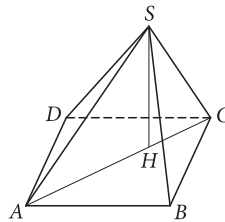
10.40. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2 , a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

D * **10.41.** Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Na rysunku zaznaczono kąty: α – między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi oraz β – przy podstawie ściany bocznej (tzn. między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa). Wykaż, że $\cos \alpha \cdot \tan^2 \beta = -1$.



10.42. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$, w którym $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

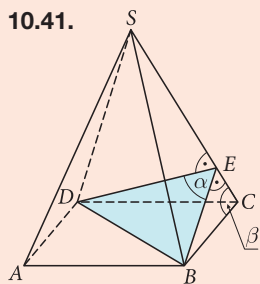
10.43. Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCD S$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa. Punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2 : 1$, jak na rysunku. Krawędzie boczne BS i DS mają długość 1. Oblicz objętość V tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS .



10.44. Dany jest czworościan $ABCS$. Trójkąty ABC i ACS są równoboczne. Ściana ACS jest prostopadła do ściany ABC . Oblicz tangens kąta dwuściennego α między ścianami ABS i ABC .

10.45. W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a . Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od płaszczyzny ściany BCS jest równa d . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

10.46. Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym $\alpha = 54^\circ$. Koło wpisane w ten romb ma promień $r = 2,4 \text{ dm}$. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta = 48^\circ$. Oblicz objętość (z dokładnością do 1 dm^3) i pole powierzchni całkowitej (z dokładnością do 1 dm^2) tego ostrosłupa.



a – długość krawędzi podstawy,
 $|BD| = a\sqrt{2}$, $|BE| = |DE|$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BED mamy:

$$\cos \alpha = \frac{|BE|^2 + |DE|^2 - |BD|^2}{2|BE| \cdot |DE|} = \frac{2|BE|^2 - (a\sqrt{2})^2}{2|BE|^2} =$$

$$= \frac{2|BE|^2 - 2a^2}{2|BE|^2} = \frac{|BE|^2 - a^2}{|BE|^2}$$

$$\tan^2 \beta = \left(\frac{|BE|}{|CE|} \right)^2 = \frac{|BE|^2}{|BC|^2 - |BE|^2} = \frac{|BE|^2}{a^2 - |BE|^2}$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha \cdot \tan^2 \beta = \frac{|BE|^2 - a^2}{|BE|^2} \cdot \frac{|BE|^2}{a^2 - |BE|^2} = -1.$$

$$\mathbf{10.39.} \quad V = \frac{a^3 \cos \alpha}{12\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}$$

$$\mathbf{10.40.} \quad V = 400 \text{ cm}^3$$

$$\mathbf{10.42.} \quad \frac{4\sqrt{82}}{41}$$

$$\mathbf{10.43.} \quad V = \frac{2}{9}, \quad |AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ |CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

10.44. $\tan \alpha = 2$. Wskazówka:
 $\alpha = \angle SKD$, gdzie D jest
środkiem odcinka AC , natomiast
 K dzieli odcinek AB tak, że
 $|AK| : |KB| = 1 : 3$.

$$\mathbf{10.45.} \quad V = \frac{d \cdot a^3}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$$

$$\mathbf{10.46.} \quad V = 25 \text{ dm}^3, \quad P_c = 71 \text{ dm}^2$$

10.47. $P_b = 20\sqrt{313}$

10.48. $V = \frac{64\sqrt{209}}{3}$

10.49. $V = 48$

10.50. $V = 1760\sqrt{210}$

10.51. $P_c = \pi c^2 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)$

10.52. $P = 81\pi \text{ cm}^2$

10.53. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

10.54. $V = \frac{2}{27}\pi \text{ m}^3$

10.55. $V = 84\pi$

10.56. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10.57. $V = \frac{\pi d^3 (1 + \cos \alpha)^3}{3 \tan^2 \alpha}$

10.47. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Pole trójkąta równoramiennego ACS jest równe 120 i $|AC| : |AS| = 10 : 13$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

10.48. Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt F jest środkiem krawędzi AD , odcinek EF jest wysokością ostrosłupa, ponadto $|AE| = 15$ i $|BE| = 17$. Oblicz objętość ostrosłupa.

10.49. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC . Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa, $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$. Oblicz objętość ostrosłupa.

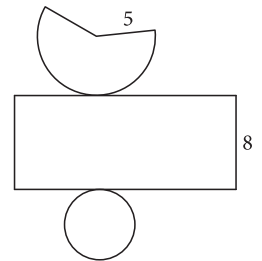
10.50. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

10.51. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej c i kącie ostrym α obraca się wokół przeciwprostokątnej. Oblicz pole powierzchni powstałej bryły.

10.52. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o kącie 120° i promieniu 27 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.

10.53. Objętość stożka o promieniu podstawy 3 jest równa 6π . Wyznacz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

10.54. Kapsuła ładownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły ładownika.



10.55. Na rysunku przedstawiono siatkę bryły o polu powierzchni całkowitej 72π . Oblicz objętość tej bryły.

10.56. Kula i stożek, postawione obok siebie na płaszczyźnie, stykają się powierzchniami. Odcinek łączący środek podstawy stożka ze środkiem kuli przechodzi przez punkt styczności tych powierzchni. Kąt między tworzącą stożka a jego wysokością jest równy 30° . Oblicz stosunek promienia kuli do promienia podstawy stożka.

10.57. W stożek wpisano kulę. Odległość wierzchołka stożka od środka kuli wynosi d , a kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy jest równy α . Wyznacz objętość stożka.

10.58. Z koła o promieniu 8 usunięto wycinek o kącie 45° . Z reszty koła wykonano powierzchnię boczną stożka. Oblicz objętość tego stożka.

10.59. Stosunek wysokości stożka do promienia opisanej na nim kuli wynosi k . Wyraż w zależności od k stosunek objętości V_S stożka do objętości V_K kuli.

10.60. Producent jogurtów sprzedawał 200-gramowe jogurty w pojemnikach w kształcie walca o średnicy podstawy 6 cm.

- a) Jaką wysokość miały te pojemniki? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm. Przyjmij, że 1 g jogurtu ma objętość 1 ml.
b) Po pewnym czasie producent wprowadził na rynek jogurt w nowych, 180-gramowych opakowaniach. Nie zmienił średnicy pojemników, lecz w denku pojawiło się wgłębienie w kształcie półkuli o średnicy 4 cm. Dzięki temu nowe pojemniki miały zbliżoną do poprzednich wysokość. Jaką? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

10.61. Z drewnianego pnia w kształcie walca o obwodzie około 94,2 cm i wysokości 40 cm wycięto prostopadłościenny klocek o wymiarach $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Jaki procent drewna wykorzystano na klocek? Jakie wymiary powinien mieć prostopadłościenny klocek, aby jak najmniej drewna poszło na odpady? Obliczenia wykonaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

10.62. Prostokąt $ABCD$, obracany wokół boku AB , zakreślił walec w_1 . Ten sam prostokąt, obracany wokół boku AD , zakreślił walec w_2 . Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

10.63. W stożek, którego promień podstawy i wysokość są równe a , wpisano ostrosłup. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, a jeden z kątów płaskich przy wierzchołku ostrosłupa jest równy α . Wyznacz objętość ostrosłupa.

10.64. W ostrosłup prawidłowy czworokątny o kącie nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy α wpisano kulę o promieniu r . Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

$$10.58. V = \frac{49\sqrt{15}}{3}\pi$$

$$10.59. V_S : V_K = \frac{1}{4}k^2(2-k), \\ 0 < k < 2$$

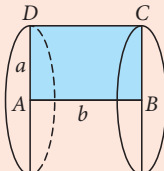
$$10.60. \text{ a) } 7,1 \text{ cm} \quad \text{ b) } 7,0 \text{ cm}$$

10.61. ok. 28,32%, wymiary (w cm) $21,21 \times 21,21 \times 40$.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że ze wszystkich prostokątów o danej przekątnej największe pole ma kwadrat.

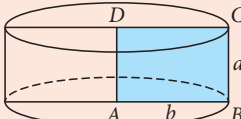
$$10.63. V = \frac{4}{3}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{2 \cos \alpha}$$

$$10.64. P_c = \frac{8r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

10.62.



$$P_1 = 2 \cdot \pi a^2 + 2\pi \cdot a \cdot b$$



$$P_2 = 2\pi b^2 + 2\pi b \cdot a$$

Zatem $2\pi a^2 = 2\pi b^2$.

$$a^2 = b^2$$

$$a = b$$

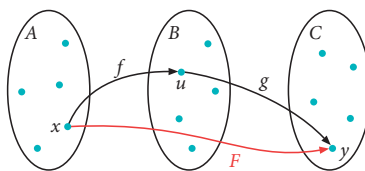
11. Analiza matematyczna

Definicje

- Otoczeniem o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby g na osi nazywamy przedział $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$.
- Granica ciągu (a_n) jest liczbą 0** wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia liczby 0 należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Zapisujemy to: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M .
- Szeregiem geometrycznym** nazywamy ciąg sum częściowych (S_n) o wyrazie ogólnym $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, gdzie (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Jeżeli ciąg (S_n) ma granicę $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, to szereg nazywamy **zbieżnym**, a liczbę S – jego **sumą**.
- Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$ albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 :
 - granicę równą g** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby g ; zapisujemy to: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$,
 - granicę prawostronną (lewostronną) równą g** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach większych (mniejszych) od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby g ; zapisujemy to: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g$),
 - granicę niewłaściwą ∞ ($-\infty$)** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ ($-\infty$); zapisujemy to: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

- Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona na przedziale $(a; \infty)$.
Mówimy, że funkcja f :
 - ma **dla x dążącego do nieskończoności granicę równą g** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do nieskończoności odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do g ; zapisujemy to: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$; analogicznie definiujemy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$,
 - **dla x dążącego do nieskończoności dąży do nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do nieskończoności odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do nieskończoności; zapisujemy to:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; analogicznie definiujemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową** wykresu funkcji.
- Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** wykresu funkcji. Podobnie, jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** wykresu funkcji.
- Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$, to prostą $y = g$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w nieskończoności.
- Jeżeli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w minus nieskończoności.
- Funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbf{R}$ jest **ciągła w punkcie $x_0 \in (a; b)$** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Funkcję ciągłą w każdym punkcie jej dziedziny nazywamy **funkcją ciągłą**.

- Dane są funkcje $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$.
Funkcję $F: A \rightarrow C$ taką, że $F(x) = g(f(x))$, nazywamy **funkcją złożoną** z funkcji f i g (**złożeniem** funkcji f i g) oraz zapisujemy krótko $F = g \circ f$.
Funkcję f nazywamy wtedy **funkcją wewnętrzną**, a funkcję g – **funkcją zewnętrzną**.



- Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, to nazywamy ją **pochodną** funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$, a funkcję f nazywamy **różniczkowalną** w punkcie x_0 . Funkcję różniczkowalną w każdym punkcie zbioru A nazywamy **różniczkowalną w tym zbiorze**.
- Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to **styczną do wykresu** funkcji w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą przechodzącą przez punkt A taką, że jej współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.
- Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru A , to funkcję f' , która każdemu $x \in A$ przyporządkowuje liczbę $f'(x)$, nazywamy **funkcją pochodną** (krócej: pochodną) funkcji f w zbiorze A .
- Funkcja f ma **maksimum (minimum)** w punkcie x_0 , jeśli istnieje takie otoczenie punktu x_0 , że dla wszystkich punktów $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Twierdzenia

- Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ jest zbieżny do zera.

• Działania na granicach ciągów zbieżnych

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = t \cdot a \text{ dla } t \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ o ile } b \neq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}, \text{ o ile wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność } a_n \geq 0.$$

• Własności granic niewłaściwych ciągów rozbieżnych

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oraz:

$$t > 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = \infty,$$

$$t < 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = -\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ i } b > 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ i } b < 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$$

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ oraz:

$$t > 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = -\infty,$$

$$t < 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ i } b > 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ i } b < 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty.$$

- Jeżeli ciąg (a_n) ma wszystkie wyrazy różne od zera i $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
- Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) :
 - spełniają nierówność $a_n > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$,
 - spełniają nierówność $a_n < 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

• Twierdzenie o trzech ciągach

Dane są trzy ciągi: (a_n) , (b_n) i (c_n) .

Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$
- Jeżeli w nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie różnym od 0 iloraz q spełnia warunek $|q| < 1$, to szereg geometryczny (S_n) jest zbieżny i ma sumę $S = \frac{a_1}{1-q}$.
- Dane są funkcje $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ i $g: D \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $D = \mathbf{R}$ albo D jest przedziałem liczbowym, albo sumą przedziałów. Jeżeli istnieją granice właściwe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, to:
 - (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ dla każdego $c \in \mathbf{R}$,
 - (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,
 - (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,
 - (4) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,
 - (5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ przy założeniu, że $g(x) \neq 0$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

- Jeżeli $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} W(x) = W(x_0)$.
- Jeżeli $x_0 > 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.
- Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$
- Jeżeli $x_0 \in \mathbf{R}$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$
- Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 są ciągłe w punkcie x_0 .
- Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 .
- Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
- **Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich**
 Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$.
- **Twierdzenie Weierstrassa**
 Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość największą i w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.
- **Działania na pochodnych**
 Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w zbiorze A . Prawdziwe są wzory:
 - (1) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ dla $k \in \mathbf{R}$,
 - (2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
 - (3) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$,
 - (4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
 - (5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ dla $g(x) \neq 0$.
- Dla każdej liczby rzeczywistej $k \neq 0$ i $k \neq 1$ pochodna funkcji $f(x) = x^k$ jest równa $f'(x) = kx^{k-1}$.
- Niech $F = g \circ f$. Jeżeli istnieją $f'(x_0)$ oraz $g'(u_0)$, gdzie $u_0 = f(x_0)$, to istnieje $F'(x_0)$ i $F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

- Dana jest funkcja f różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.
Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.
- Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ ma ekstremum w punkcie $x_0 \in (a; b)$, to $f'(x_0) = 0$.
- Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ punktu x_0 i różniczkowalna w punkcie x_0 . Jeżeli spełnione są warunki:
 - (1) $f'(x_0) = 0$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum,
 - (2) $f'(x_0) = 0$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Funkcja wymierna postaci $f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$ (W i Q są wielomianami zmiennej x) jest różniczkowalna w każdym punkcie x takim, że $Q(x) \neq 0$, czyli $D = D'$.
- Dana jest funkcja f ciągła i różniczkowalna w przedziale $\langle a; b \rangle$. Aby wyznaczyć wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji w tym przedziale, porównujemy ekstrema lokalne i wartości funkcji na końcach przedziału $\langle a; b \rangle$.
- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$ i jej wartości na końcach przedziału są liczbami o różnych znakach, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a; b)$, że $f(x_0) = 0$.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.17 jest dokładnie jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

11.1. (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{4}{5}$ i sumie $S = 25$. Wskaż wyraz a_2 tego ciągu.

- A. 5 B. 4 C. $\frac{64}{25}$ D. $\frac{16}{5}$

11.2. Wskaż granicę ciągu $a_n = \frac{5^{2n}}{6^n}$.

- A. 0 B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{25}{6}$ D. ∞

Odpowiedzi i rozwiązania

11.1. B

11.2. D

11.11. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = -x^4 + 3x^2$ w punkcie $x_0 = \sqrt{2}$.

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

11.11. A

11.12. W którym punkcie x_0 pochodna funkcji $f(x) = x^2 - 8$ jest równa 8?

- A. $x_0 = 4$ C. $x_0 = -4$ oraz $x_0 = 4$
B. $x_0 = 8$ D. Nie ma takiego punktu.

11.12. A

11.13. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$. Wskaż zależność prawdziwą.

- A. $f'(-2) = 0$ B. $f'(1) = 0$ C. $f'(0) = 0$ D. $f'(-1) = 0$

11.13. B

11.14. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 + x}{3 - x}$. Wskaż zależność prawdziwą.

- A. $f'(0) < 0$ B. $f'(-1) < f'(0)$ C. $f'(1) < f'(-1)$ D. $f'(2) < f'(0)$

11.14. B

11.15. Wskaż współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2}$ w punkcie $x_0 = 0$.

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

11.15. C

11.16. Wskaż dziedzinę D' funkcji pochodnej funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

- A. $D' = \langle -1; 2 \rangle$ C. $D' = (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$
B. $D' = (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$ D. $D' = (-1; 2)$

11.16. D

11.17. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = (2x^2 - x + 1)^3$ w punkcie $x_0 = 1$.

- A. 6 B. 12 C. 24 D. 36

11.17. D

W zadaniach 11.18–11.23 oceń prawdziwość podanych zdań.

11.18. Iloczyn dwóch funkcji nieciągłych

- A. może być funkcją nieciągłą.
B. jest zawsze funkcją nieciągłą.
C. może być funkcją ciągłą.

11.18. P, F, P

11.19. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0 \\ x + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

- A. jest określona w punkcie $x_0 = 0$.
B. jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.
C. jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

11.19. P, P, F

11.20. P, P, P

11.20. Dziedziną funkcji ciągłej f jest przedział $(1; \infty)$.A. Zbiorem wartości funkcji f może być $\mathbf{R}$.B. Zbiorem wartości funkcji f może być przedział $\langle -1; 1 \rangle$.C. Zbiorem wartości funkcji f może być przedział $\langle 1; \infty \rangle$.

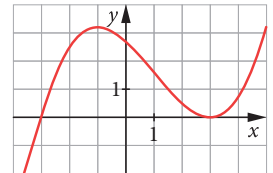
11.21. P, P, F

11.21. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-3}{(x+2)^2}$.A. Wykres funkcji f ma jedną asymptotę poziomą.B. Wykres funkcji f ma jedną asymptotę pionową.C. Wykres funkcji f ma dwie asymptoty poziome.

11.22. P, F, P

11.22. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$.A. Dla każdego $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$.B. $f(-4) < f(4)$ C. $f'(-4) < f'(4)$

11.23. P, F, F

11.23. Na rysunku przedstawiono wykres pochodnej f' funkcji f .A. Funkcja f ma ekstremum w punkcie -3 .B. Funkcja f ma ekstremum w punkcie -1 .C. Funkcja f ma ekstremum w punkcie 3 .

11.24. a) ciąg malejący

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

c) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{11}{20}$

11.24. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$.a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .b) Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.c) Wskaż największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leq a_n \leq b$.11.25. a) 8 b) $\frac{4}{135}$

11.25. Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) \left(\frac{6n+5}{2n-7} + 3\right) \left(1 + \frac{n}{3n-1}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 - 3n + 5)^2}{(3n-5)^3(5n+17)}$

11.26. $k = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

lub $k = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

11.26. Dla jakich wartości parametru k granica ciągu $a_n = \frac{(k^2 - k - 1)n^2 - 5}{n^2 + 2n + 2}$ jest równa 2?11.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$; ciąg rosnący11.27. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$ i zbadaj jego monotoniczność.11.38. Rozpatrujemy ciąg (x_n) taki, że:

$$x_n \in D \text{ dla } n \in \mathbf{N} - \{0\}, x_n \neq x_0 \text{ dla } n \in \mathbf{N} - \{0\} \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + x_n - x_n^3) = 2 + x_0 - x_0^3$, czyli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje.

11.39. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log_2(5-x) = \log_2 4 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_2(x+1) = \log_2 2 = 1$

 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, więc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nie istnieje.11.42. Niech $f(x) = x^2 - 5x + \frac{x+3}{x+2}$. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$.

$$f(0) = \frac{3}{2} > 0, f(1) = 1 - 5 + \frac{4}{3} < 0, f(5) = 25 - 25 + \frac{5+3}{5+2} > 0$$

Zatem w każdym z przedziałów $(0; 1)$ i $(1; 5)$ funkcja f ma co najmniej jeden pierwiastek,więc równanie $x^2 - 5x + \frac{x+3}{x+2} = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$.

11.28. Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 6^n + 8^n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{n}{2}}}$

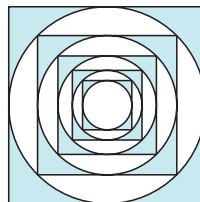
11.29. Oblicz sumę podanego szeregu geometrycznego, jeżeli taka suma istnieje.

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{21} + \dots$

c) $-\sqrt{5} - \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{4} - \frac{25}{8} + \dots$

b) $6 - \frac{18}{5} + \frac{54}{25} - \frac{162}{125} + \dots$

d) $-12 - 6\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{2} - \dots$

11.30. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 24, a suma jego trzech początkowych wyrazów wynosi 21. Wyrazy trzeci i piąty ciągu (a_n) są równe odpowiednio trzeciemu i piątemu wyrazowi pewnego ciągu arytmetycznego (b_n) . Oblicz sumę 25 początkowych wyrazów ciągu (b_n) .**11.31.** Lewa strona nierówności $\frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + \dots < 2$ jest sumą szeregu geometrycznego. Rozwiąż tę nierówność.**11.32.** Lewa strona równania $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 5n + 2}}{2n + 1}$ jest sumą szeregu geometrycznego. Rozwiąż to równanie.**11.33.** W kwadrat o boku 1 wpisano koło, w to koło wpisano kwadrat, w ten kwadrat – następne koło itd., jak na rysunku. Oblicz sumę pól wszystkich zamalowanych obszarów zawartych w tym kwadracie.**11.34.** Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 2, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 5. Oblicz sumę sześciennów wszystkich wyrazów tego ciągu.**11.35.** Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2} + x}$

11.36. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{\sqrt{1+5x}}{2-5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x} - 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2 - 3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 12x^2 + 36x}$

11.43. Niech $f(x) = 16x^5 - 5x + 5$. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w $\mathbf{R}$.

$$f'(x) = 80x^4 - 5 = 5(16x^4 - 1) = 5(4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1)$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right), \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Zatem f rośnie w każdym z przedziałów $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ i maleje w przedziale $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$f(-1) = -16 + 5 + 5 = -6 < 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{32} - \frac{5}{2} + 5 = 3 > 0$$

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe(w przedziale $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$), czyli równanie $16x^5 - 5x + 5$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

11.28. a) 8 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{3}$

11.29. a) 1 b) $\frac{15}{4}$

c) szereg rozbieżny

d) $-24 - 12\sqrt{2}$

11.30. $-\frac{825}{4}$

11.31. $x \in \left(-2; \frac{1}{2}\right)$

11.32. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

11.33. $2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

11.34. $10\frac{10}{49}$

11.35. a) 0 b) 4 c) 2 d) $\frac{2}{3}$

11.36. a) $-\infty$ b) ∞
c) ∞ d) $-\infty$

11.37. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$

11.38. Patrz s. 338.

11.39. Patrz s. 338.

11.40. Funkcja jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R} - \{-2, -1\}$.

11.41. $k = 1$, $m = 7$

11.42. Patrz s. 338.

11.43. Patrz s. 339.

11.45. Funkcja jest ciągła i różniczkowalna w zbiorze $\mathbf{R}$.

11.46. Patrz s. 341.

11.47. $\frac{19}{32}$

11.48.

a) $f'(x) = 3(3x^2 - 5x + 2)^2(6x - 5)$

b) $f'(x) = \frac{-4x - 2}{(x^2 + x + 1)^3}$

c) $f'(x) = \frac{2x + 2}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}}$

d) $f'(x) = \frac{4(1 + \sqrt[3]{x})^3}{3\sqrt[3]{x^2}}$

11.37. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Oblicz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

11.38. Skorzystaj z definicji i wykaż, że funkcja $f(x) = 2 + x - x^3$ o dziedzinie D ma granicę w każdym punkcie $x_0 \in D$.

11.39. Wykaż, że funkcja $f(x) = \begin{cases} \log_2(5-x) & \text{dla } x < 1 \\ \log_2(x+1) & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ nie ma granicy w punkcie $x_0 = 1$.

11.40. Zbadaj ciągłość podanej funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} & \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{-2, -1\} \\ -9 & \text{dla } x = -2 \\ 0 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$$

11.41. Wyznacz takie wartości m i k , aby funkcja f była ciągła w punkcie 3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + kx - 12}{x - 3} & \text{dla } x \neq 3 \\ m & \text{dla } x = 3 \end{cases}$$

11.42. Wykaż, że równanie $x^2 - 5x + \frac{x+3}{x+2} = 0$ ma w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$ co najmniej dwa rozwiązania.

11.43. Wykaż, że równanie $16x^5 - 5x + 5 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

11.44. Wykaż, że funkcja $f(x) = 5 + 3x - x^3$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

11.45. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji f .

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 12x - 12 & \text{dla } x < 2 \\ x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

11.46. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x - |x + 2|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = -2$.

11.47. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{3-2x}{x^2-1}$ w punkcie $x = -3$.

11.48. Wyznacz pochodną podanej funkcji.

a) $f(x) = (3x^2 - 5x + 2)^3$ c) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}$

b) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$ d) $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^4$

11.44. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w $\mathbf{R}$.

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 + x)(1 - x)$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-1; 1), \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

Czyli f rośnie w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ i maleje w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$.

$$f(-1) = 5 - 3 + 1 > 0, \quad f(1) > f(-1), \quad f(3) = 5 + 9 - 27 < 0$$

Zatem funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe (w przedziale $(1; 3)$).

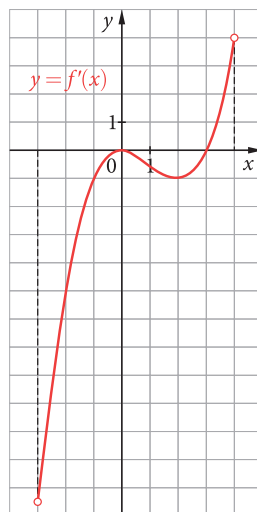
11.49. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ w punkcie $(2, 27)$ ma z tym wykresem jeszcze jeden punkt wspólny. Oblicz współrzędne tego punktu.

11.50. W tabeli podane są wartości funkcji $f: (-3; 4) \rightarrow \mathbb{R}$ dla trzech argumentów.

x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1

Na rysunku przedstawiony jest wykres pochodnej $y = f'(x)$ funkcji f .

- Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.
- Wyznacz ekstremum funkcji f . Podaj argument, dla którego funkcja f przyjmuje to ekstremum.
- Podaj najmniejszą wartość funkcji f .



11.51. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$.

- Wyznacz przedziały monotoniczności tej funkcji.
- Wyznacz wartość największą oraz wartość najmniejszą tej funkcji w przedziale $\langle -2; 6 \rangle$.

11.52. Funkcja f opisana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ i $f(0) = 8$. Wyznacz wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji f w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$.

11.53. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + px + q$ należy punkt $M = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie M jest nachylona do osi x pod kątem 135° . Wyznacz ekstrema tej funkcji.

11.54. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Prosta l jest nachylona do osi x pod kątem, którego sinus jest równy 0,6. Zbadaj, ile jest stycznych do wykresu funkcji f równoległych do prostej l .

11.55. Dla jakich wartości parametru m funkcja f ma ekstremum?

$$f(x) = \frac{m-2}{3}x^3 + (2m-3)x^2 + (5m-6)x$$

11.56. Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$ ma w punkcie $x = 0$ ekstremum równe -2 . Wyznacz a i b .

11.49. $(-1, 0)$

11.50. a) $y = \frac{5}{8}$

b) $y = -1$ dla $x = 3$

c) -1

11.51. a) rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$,

malejąca w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$,
rosnąca w przedziale $\langle 5; \infty \rangle$

b) wartość największa: 8

dla $x = 1$,

wartość najmniejsza: -73

dla $x = -2$

11.52. wartość największa: 8

dla $x = 0$,

wartość najmniejsza: -19 dla $x = 3$

11.53. maksimum: 0 dla $x = -2$,

minimum: $-\frac{4}{3}$ dla $x = 0$

11.54. cztery

11.55. $m \in (1; 3)$

11.56. $a = 0$, $b = 2$

11.46. $f(x_0) = -4$

$$\text{Niech } I(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}.$$

Jeżeli $x < -2$, to $f(x) = 2x + x + 2 = 3x + 2$,

a jeżeli $x > -2$, to $f(x) = 2x - x - 2 = x - 2$.

$$\text{Więc jeżeli } h < 0, \text{ to } I(h) = \frac{3(-2+h) + 2 - (-4)}{h} = \frac{-6 + 3h + 2 + 4}{h} = 3,$$

$$\text{a jeżeli } h > 0, \text{ to } I(h) = \frac{-2 + h - 2 - (-4)}{h} = 1.$$

Zatem $\lim_{h \rightarrow 0^-} I(h) = 3$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} I(h) = 1$, co oznacza, że $\lim_{h \rightarrow 0} I(h)$ nie istnieje,

czyli funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = -2$.

11.57. $m \in (-2; 2)$

11.58. 2

11.59. $0,8 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$

11.60. (1, 1)

11.61. $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

11.62. $2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

11.63. $k = 3 - \sqrt{7}$

11.64. $\frac{4}{11}$, dla $m = -6$

11.65. $m = 3$

11.66. długość podstawy: $\frac{a}{4}$,
długość ramienia: $\frac{3a}{8}$

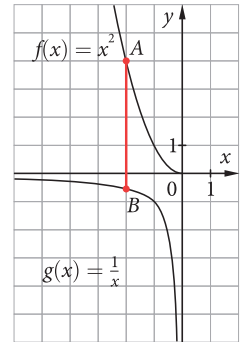
11.57. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^3 - 3x - m = 0$ ma trzy rozwiązania?

11.58. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o podstawie kwadratowej, dla których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24. Jaka wysokość ma prostopadłościan o największej objętości?

11.59. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 12 cm, a stosunek długości krawędzi podstawy jest równy $2 : 3$. Oblicz wymiary, jakie powinien mieć taki prostopadłościan, by jego objętość była możliwie największa.

11.60. Wyznacz punkt na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ leżący najbliżej punktu $A = (3, 0)$.

11.61. Rozpatrujemy odcinki AB równoległe do osi y , których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ dla $x < 0$, a drugi koniec leży na wykresie funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ dla $x < 0$, jak na rysunku. Oblicz długość najkrótszego z tych odcinków.



11.62. Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi y , których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = x^2 + 2$, a drugi koniec – na wykresie funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$. Oblicz długość najkrótszego z tych odcinków.

11.63. Wyznacz wartość parametru k , dla której suma odwrotności pierwiastków równania $x^2 + (k - 3)x + k^2 - k + 1 = 0$ jest największa.

11.64. Dane jest równanie $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$. Dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków tego równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą? Oblicz tę wartość.

11.65. Dane są okręgi $x^2 + y^2 = 4 - m$ i $x^2 + y^2 = m - 2$. Dla jakiej wartości m suma odwrotności kwadratów promieni tych okręgów jest najmniejsza?

11.66. Trójkąt równoramienny o obwodzie a obraca się wokół podstawy. Jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była jak największa?

Skorowidz

Alternatywa (suma) zdarzeń 148

aksjomat 194

asymptota pionowa 331

— — lewostronna 331

— — prawostronna 331

— pozioma 331

Bryła obrotowa 65, 319

bryły podobne 78, 320

Cechy podobieństwa trójkątów 283

— przystawiania trójkątów 282

centyl 305

ciąg 273

— arytmetyczny 273

— geometryczny 273

— liczbowy 273

— malejący 273

— monotoniczny 273

— niemalejący 273

— niemonotoniczny 273

— nierosnący 273

— rosnący 273

— skończony 273

ciągłość funkcji w punkcie 331

cięciwa kuli 68

cosinus kąta 255

czasza kuli 69, 320

czworościan 49

— foremny 59

Dominanta 305

dwudziestościan foremny 59

dwumian Newtona 142, 306

dwunastościan foremny 59

dwusieczna kąta 281

dzielenie z resztą 212, 213

Figura wypukła 37

funkcja ciągła 331

— liniowa 232

— logarytmiczna 265

— okresowa 255

— pochodna 332

— różniczkowalna 332

— wewnętrzna 331

— wielomianowa (wielomian) 244

— wykładnicza 265

— wymierna 244

— zewnętrzna 331

— złożona (złożenie funkcji) 331

Graniastosłup 319

— opisany na walcu 66

— pochyły 39

— prawidłowy 40, 319

— prosty 39, 319

— wpisany w walec 66

— wypukły 38

granica ciągu 330

— funkcji w punkcie 330

— lewostronna funkcji w punkcie 330

— prawostronna funkcji w punkcie 330

— niewłaściwa funkcji 330

Hiperbola 245

hipoteza 194

Iloczyn (koniunkcja) zdarzeń 136

Jedynka trygonometryczna 255

Kąt dwuścienny 31, 319

— nachylenia prostej do płaszczyzny 23, 318

— rozwarcia stożka 67

— środkowy 281

— wpisany 281

koło wielkie kuli 69, 320

kombinacja 130

kombinatoryka 114

koniunkcja (iloczyn) zdarzeń 148

krawędź przecięcia płaszczyzn 8

— wielościanu 37

krzywa logarytmiczna 265

— wykładnicza 265

kula 68, 320

Liczba logarytmowana 265

— pierwsza 222

liczby względnie pierwsze 222

logarytm 265

Maksimum 332

mediana 305

miara łukowa kąta 255

— kąta dwuściennego 31, 319

minimum 332

Nierówność opisująca koło 295

Odchylenie standardowe 305

odcinek kuli 69, 320

odległość między punktami na płaszczyźnie 293

odległość punktu od płaszczyzny 26

— — — prostej 294

okrąg opisany na wielokącie 281

— wpisany w wielokąt 281

okres funkcji 255

— zasadniczy funkcji 255

ostroslup 49, 319

— opisany na stożku 67, 320

— prawidłowy 49, 319

— wpisany w stożek 67, 320

ośmiościan foremny 59

oś obrotu 65, 319

- Permutacja 116
- pierwiastek wielomianu 244
- płaszczyzny prostopadłe 16, 318
 - równoległe 9, 318
- pochodna funkcji w punkcie 332
- podobieństwo na płaszczyźnie 281
 - w przestrzeni 78, 320
- podstawa graniastopuła 38, 319
 - ostrosłupa 49, 319
 - stożka 67
 - walca 66
- podzielność liczb 208
- pojęcie pierwotne 194
- postać iloczynowa funkcji kwadratowej 245
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 244
 - ogólna funkcji kwadratowej 244
- powierzchnia boczna stożka 67
 - — walca 66
- prawdopodobieństwo całkowite 170
 - warunkowe 162, 304
- procent 223
- promień podstawy walca 66
 - wodzący 255
- prosta prostopadła do płaszczyzny 14, 318
 - równoległa do płaszczyzny 10, 318
- proste prostopadłe na płaszczyźnie 293, 294
 - — w przestrzeni 13, 318
 - równoległe na płaszczyźnie 293, 294
 - — w przestrzeni 12, 318
 - skośne 11, 318
 - współpłaszczyznowe 11
- prostopadłościan 40, 319
- próba Bernoulliego 180
- przedziały liczbowe 222
- przekątna wielościanu 37
- przekrój osiowy bryły obrotowej 65
 - płaski wielościanu 42
 - poprzeczny bryły obrotowej 65
- przybliżenie z nadmiarem 224
 - — niedomiarem 224
- Radian 255
- reguła dodawania 114
 - mnożenia 114, 306
- reszta z dzielenia 212, 213
- rozstęp 307
- równanie okręgu 294
 - — w postaci kanonicznej 294
 - — — ogólnej 294
 - prostej w postaci kierunkowej 293
 - — — ogólnej 293
- równoległościan 39, 319
- różnica zdarzeń 148
- rzut prostokątny (prostopadły) 22, 318
 - równoległy 21, 318
- Schemat Bernoulliego 180
- sfera 68
- silnia 117, 304
- sinus kąta 255
- spodek wysokości ostrosłupa 49
- stożek 67, 320
 - opisany na kuli 69, 320
 - ścięty 67
 - wpisany w kulę 69, 320
- styczna do wykresu funkcji 332
- suma początkowych wyrazów ciągu
 - arytmetycznego 273
 - — — geometrycznego 274
 - szeregu geometrycznego 330
 - (alternatywa) zdarzeń 136
- symbol Newtona 130, 304
- symetralna odcinka 281
- sześcián 40, 59, 319
- szereg geometryczny 330
 - — zbieżny 330
- Ściana boczna graniastopuła 38, 319
 - — ostrosłupa 49, 319
 - wielościanu 37
- średnia 305
 - arytmetyczna 223
 - geometryczna 223
 - ważona 305
- średnica kuli 68
- środek kuli 68
- środkowa boku trójkąta 281
- Tangens kąta 255
- teza 194
- trójkąt Pascala 139
- trójmian kwadratowy 244
- twierdzenie Bernoulliego 182, 307
 - Bézouta 245
 - cosinusów 256
 - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 196, 281
 - — — Talesa 283
 - o dwusiecznej 283
 - o kącie między styczną a cięciwą 282
 - o odcinkach stycznych 282
 - o prawdopodobieństwie całkowitym 170, 306
 - o przyjmowaniu wartości pośrednich 334
 - o trzech ciągach 333
 - — — prostopadłych 22, 321
 - Pitagorasa 281
 - sinusów 256
 - Talesa 283
 - (wzór) Eulera 60, 321
 - Weierstrassa 334
- tworząca stożka 67
 - walca 66
- Układ równań nieoznaczony 232
 - — oznaczony 232
 - — sprzeczny 232
 - zupełny zdarzeń 169, 305

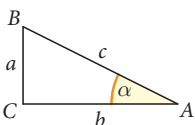
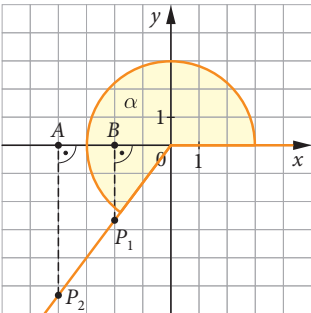
- Walec 65, 319
 — opisany na kuli 69, 320
 — wpisany w kulę 69, 320
 wariacja 119
 — bez powtórzeń 119
 — z powtórzeniami 119
 wariancja 305
 warstwa kuli 69, 320
 wartość bezwzględna liczby 222
 — oczekiwana gry losowej 305
 wektor 293
 wielokąt foremny 281
 wielomian (funkcja wielomianowa) 244
 — stopnia 0 244
 — zerowy 244
 wielomiany równe 245
 wielościan foremny 59, 319
 — opisany na kuli 69, 320
 — wpisany w kulę 69, 320
 — wypukły 37
 wierzchołek ostrosłupa 49, 319
 — stożka 67
 — wielościanu 37
 współczynnik kierunkowy funkcji liniowej 232
 — — prostej 293
 współrzędne wektora 293
 wycinek kuli 69, 320
 wykresy funkcji trygonometrycznych 257
 wyróżnik trójkianu kwadratowego (delta) 244
 wysokość graniastosłupa 38
 — ostrosłupa 49
 — stożka 67
 — trójkąta 281
 — walca 66
 wzory redukcyjne 256
 — skróconego mnożenia 224
 — Viète'a 246
 wzór Bayesa 172, 307
 — dwumianowy Newtona 142
 — (twierdzenie) Eulera 60, 321
 — ogólny ciągu arytmetycznego 273
 — — — geometrycznego 273
 — sinusów 256
 Założenie 194
 zbiór liczb wymiernych 222
 zdarzenia identyczne 148
 — wykluczające (wyluczające) się 148
 — przeciwne 148, 304
 złożenie funkcji (funkcja złożona) 331

Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\log x$	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\log x$	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\log x$	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
$\log x$	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$\log x$	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
$\log x$	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
$\log x$	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
$\log x$	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
$\log x$	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

Wybrane wzory trygonometryczne

Definicje funkcji trygonometrycznych

kąta ostrego	dowolnego kąta
 $\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$	$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$ $\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}, \text{ dla } x_P \neq 0$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_P}{y_P}, \text{ dla } y_P \neq 0$ $r = OP = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ 

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0	nie istnieje	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nie istnieje	0	nie istnieje

α	$(0^\circ; 90^\circ)$	$(90^\circ; 180^\circ)$	$(180^\circ; 270^\circ)$	$(270^\circ; 360^\circ)$
	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Wzory redukcyjne

β	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta =$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta =$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta =$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta =$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Podstawowe zależności trygonometryczne

- **Jedynka trygonometryczna:** $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ i } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Zależności trygonometryczne w trójkącie

• Pole trójkąta

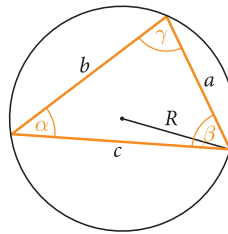
$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad P = \frac{1}{2}ac \sin \beta \quad P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

• Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

• Twierdzenie cosinusów

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$



Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—