

Dowody w matematyce

3

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:
przeprowadza proste dowody geometryczne, np.:

- oblicza kąty z wykorzystaniem:
 - równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych,
 - twierdzenia o sumie kątów trójkąta lub czworokąta,
 - twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego,
- stosuje cechy przystawiania trójkątów do uzasadnienia przystawiania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciąga wnioski z tej własności.

Po tym dziale uczeń:

Potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące:

- własności kątów, wysokości, środkowych, symetralnych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie,
- nierówności trójkąta, przystawiania i podobieństwa trójkątów,
- twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa,
- czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu,
- kątów środkowych i kątów wpisanych oraz długości łuku okręgu i pola wycinka kołowego,
- twierdzenia o odcinkach stycznych,
- własności wektorów, logarytmów i wartości bezwzględnej,
- podzielności liczb całkowitych i dzielenia z resztą,
- nierówności algebraicznych, niewymierności liczb,
- przekształcania wyrażeń zawierających pierwiastki (np. $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$).

Uwagi metodyczne

W szkole podstawowej uczeń się dowiedział, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego...” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie rozwiązywał zadań, w których należało podać przykłady bądź kontrprzykłady, ponieważ takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwalało mu zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie.

W liceum uczeń poznaje dowody niektórych twierdzeń matematycznych związanych z treściami nauczania. Zabieg ten ma na celu uświadomienie uczniom, co to jest dowód oraz jaka jest rola dowodu w matematyce. W tym dziale uczymy technik przeprowadzania dowodu matematycznego.

1. Dowody w geometrii

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu geometrii płaszczyzny

Od początku nauki w szkole średniej spotykamy się z dowodami – zarówno warty zapamiętania ogólnych faktów matematycznych (np. twierdzenie Pitagorasa lub wzory skróconego mnożenia), jak i mniej ogólnych, podawanych często w postaci zadań typu „Udowodnij (...)”. Ten dział w całości poświęcimy dowodzeniu – omówimy kolejno dowodzenie własności figur geometrycznych oraz dowody w arytmetyce i w algebrze. Uzupełnimy również poznane już twierdzenia o obowiązujące dowody, które zostały wcześniej pominięte.

Przypomnijmy:

Twierdzenie matematyczne to zdanie orzekające prawdziwe, które **można udowodnić**, wykorzystując pojęcia pierwotne, znane definicje, aksjomaty oraz wcześniej udowodnione twierdzenia.

- Pojęcie pierwotne** – pojęcie niedefiniowane w danej teorii, uznawane za intuicyjnie zrozumiałe.
- Aksjomat** – w danej teorii stwierdzenie intuicyjnie oczywiste, które przyjmuje się bez dowodu.
- Zdanie zbudowane na wzór twierdzenia, ale nieudowodnione, nazywane jest **hipotezą**.

Większość twierdzeń rozpatrywanych podczas nauki w szkole średniej ma postać:

Jeżeli założenie, to teza.

Założenie opisuje warunki, w których twierdzenie może być stosowane.

Teza to prawdziwe wnioski wynikające z założeń.

Dowód twierdzenia to proces polegający na logicznym wnioskowaniu (dedukcji), prowadzący do wykazania, że podane zdanie jest prawdziwe.

Niektóre twierdzenia mają postać:

A wtedy i tylko wtedy, gdy B.

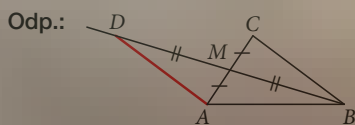
Udowodnienie tak sformułowanego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości dwóch zdań:

Jeżeli A, to B. oraz **Jeżeli B, to A.**

Aby udowodnić własności figur, warto:

- I. wykonać czytelny rysunek, czyli: ← zobacz przykłady 1, 4
 - wprowadzić wygodne oznaczenia,
 - oznaczyć znane kąty, boki itp.,
 - wyróżnić równe odcinki, kąty,
 - użyć różnych kolorów lub rodzajów linii,

◀1.7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM , a następnie na półprostej BM wyznaczono taki punkt D (różny od punktu B), że $|BM| = |MD|$. Udowodnij, że $|BC| = |AD|$.



$\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMA$ (wierzchołkowe)

$\triangle BMC \equiv \triangle DMA$

Zatem $|AD| = |BC|$.

MKP

tematy 4.3, 4.4

Multiteka

- Dowód za milion dolarów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

Generator
testów i sprawdzianów

- II. uzupełnić dany rysunek przydatnymi elementami, aby: ← zobacz przykłady 1, 4
- pokazać podane zależności,
 - zastosować odpowiednie twierdzenia,
- III. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ← zobacz podane przykłady
- IV. wykonać potrzebne przekształcenia i obliczenia. ← zobacz przykłady 2, 3

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach geometrycznych, to:

- własności kątów (kąty: wierzchołkowe, przyległe, utworzone przez prostą przecinającą proste równoległe; suma kątów w wielokącie; kąty w kole; kąt między styczną a cięciwą),
- nierówność trójkąta,
- własności czworokąta wpisanego w okrąg i czworokąta opisanego na okręgu,
- cechy przystawiania trójkątów, cechy podobieństwa trójkątów,
- twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie o środkowych w trójkącie,
- twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów,
- własności wektorów,
- wzory na pola i obwody figur.

Przykład 1

Wykażemy, że jeżeli w trójkącie dwa boki są różnej długości, to na przeciw dłuższego boku leży większy kąt.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$|CB| > |CA|$$

Teza

$$\sphericalangle A > \sphericalangle B$$

Dowód

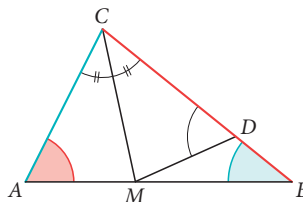
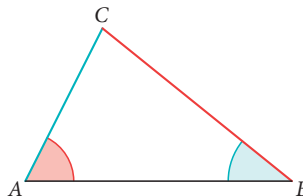
Prowadzimy dwusieczną CM , a na półprostej CB odkładamy odcinek CD tak, żeby $|CD| = |CA|$.

Punkt D należy do boku BC trójkąta i jest różny od wierzchołka B , ponieważ $|CB| > |CA|$.

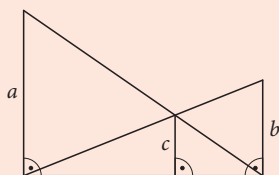
Trójkąty AMC i DMC (zob. rysunek) są przystające na mocy cechy bkb, zatem:

$$\sphericalangle MAC = \sphericalangle MDC$$

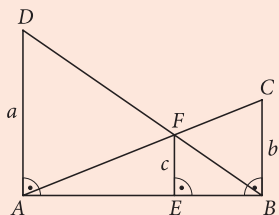
← odpowiednie kąty w trójkątach przystających



1.39.



Odp.:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\text{Wykaż, że } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

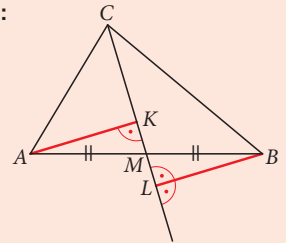
Trójkąt AFD jest podobny do trójkąta CFB oraz trójkąt ABD jest podobny do trójkąta EBF .

$$\frac{a}{b} = \frac{|DF|}{|FB|}, \quad \frac{a}{c} = \frac{|DF| + |FB|}{|FB|} = \frac{|DF|}{|FB|} + 1 = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

1.10. Wykaż, że dwa wierzchołki trójkąta są jednakowo oddalone od prostej, która zawiera środkową poprowadzoną do boku łączącego te wierzchołki.

Odp.:



M – środek boku AB

$$|AM| = |BM|$$

AK – odległość punktu A od środkowej

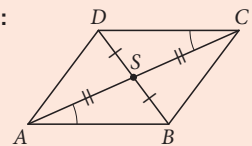
BL – odległość punktu B od środkowej

$\triangle AKM \equiv \triangle BLM$ są prostokątne i przystające.

Zatem $|AK| = |BL|$.

1.13. Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Odp.:



$$|AS| = |SC| \text{ oraz } |BS| = |SD|$$

$\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ (wierzchołkowe)

$$\triangle ASB \equiv \triangle CSD$$

czyli $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD$, zatem

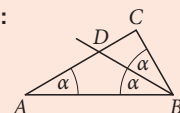
$AB \parallel CD$ (kąty naprzemianległe).

Analogicznie $AD \parallel BC$.

Czworokąt jest równoległobokiem.

1.14. W trójkącie ABC , w którym miara kąta B jest dwa razy większa od miary kąta A , poprowadzono dwusieczną BD . Udowodnij, że trójkąt BDC jest podobny do trójkąta ABC .

Odp.:



$$\sphericalangle ABD = \alpha = \sphericalangle DBC$$

$\sphericalangle CDB$ to kąt zewnętrzny trójkąta ABD , czyli $\sphericalangle CDB = 2\alpha$.

Niech $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Kąty w trójkącie ABC : $\alpha, 2\alpha, \gamma$

Kąty w trójkącie BDC : $\alpha, 2\alpha, \gamma$

Zatem te trójkąty są podobne.

Kąt MDC jest kątem zewnętrznym w trójkącie MBD .

$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$$

← twierdzenie o kącie zewnętrznym trójkąta

$$\sphericalangle A = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$$

← $\sphericalangle MDC = \sphericalangle A$

Zatem $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Koniec dowodu

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Udowodnimy teraz twierdzenie, które podaliśmy w drugiej klasie bez dowodu. Jest ono często stosowane w celu sprawdzenia, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny, ostrokątny, czy rozwartokątny.

W starożytnym Egipcie i Babilonie ok. 4000 lat temu to twierdzenie było wykorzystywane jako sposób wyznaczania kąta prostego.

Twierdzenie

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to kąt leżący naprzeciw tego boku jest prosty.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Teza

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ$$

Dowód

Dowód twierdzenia odwrotnego przeprowadzimy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

Założmy, że dany trójkąt ABC ma boki długości a , b , c spełniające warunek $a^2 + b^2 = c^2$.

Zbudujmy trójkąt $A'B'C'$, w którym:

$$|B'C'| = a, |A'C'| = b, \sphericalangle A'C'B' = 90^\circ$$

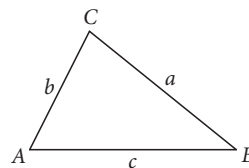
Na mocy twierdzenia Pitagorasa trzeci bok trójkąta $A'B'C'$ ma długość c , zatem:

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$$

← cecha bbb przystawiania trójkątów

czyli $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Koniec dowodu



Zauważmy, że twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego moglibyśmy sformułować jako jedno twierdzenie:

Trójkąt o bokach a , b , c takich, że $a \leq b \leq c$, jest prostokątny o kącie prostym leżącym naprzeciw boku c **wtedy i tylko wtedy, gdy** $a^2 + b^2 = c^2$.

Przykład 2

Sprawdźmy, czy trójkąt o bokach długości 11, 60 i 61 jest prostokątny.

Rozwiązanie

Liczby 11, 60, 61 spełniają nierówność trójkąta, więc trójkąt o bokach podanej długości istnieje.

W trójkącie prostokątnym dwa kąty są ostre, czyli najdłuższym bokiem może być tylko przeciwprostokątna. Wystarczy więc sprawdzić, czy zachodzi równość

$$11^2 + 60^2 = 61^2.$$

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2$$

Zatem, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, badany trójkąt jest prostokątny.

Długość łuku i pole wycinka kołowego

Przypomnijmy:

- Obwód L koła o promieniu r jest równy $L = 2\pi r$.
- Pole P koła o promieniu r jest równe $P = \pi r^2$.
- Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli koło dwa niepokrywające się promienie.

Wyprowadzenie wzorów na obwód i pole koła wymaga bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego, niż przewiduje to podstawa programowa szkoły ponadpodstawowej. Również bez dowodu podamy dwa twierdzenia, które prowadzą do wyznaczenia długości łuku oraz pola wycinka kołowego w kole o promieniu r .

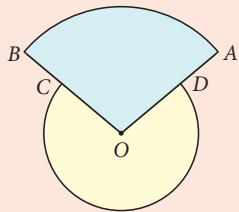
Twierdzenie 1

Długość łuku okręgu jest proporcjonalna do kąta środkowego odpowiadającego temu łukowi.

Twierdzenie 2

Pole wycinka kołowego jest proporcjonalne do kąta środkowego odpowiadającego temu wycinkowi.

- ◀1.19. Dane są dwa wycinki kołowe (zob. rysunek) o promieniach $|OA| = \sqrt{13}$ i $|OD| = \sqrt{5}$. Kąt wypukły AOB ma miarę 100° .



Wykaż, że

- a) pola obu wycinków są równe.
b) długość łuku wycinka AOB jest mniejsza od długości łuku wycinka COD .

Odp.: a) P_1 – pole wycinka AOB ,

P_2 – pole wycinka COD

$$P_1 = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot \sqrt{13}^2 = \frac{65\pi}{18}$$

$$P_2 = \frac{260}{360} \cdot \pi \cdot \sqrt{5}^2 = \frac{65\pi}{18}$$

$$P_1 = P_2$$

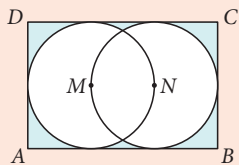
$$\text{b) } L_{AOB} = \frac{100}{360} \cdot 2\pi \sqrt{13} = \frac{5\sqrt{13}}{9} \pi$$

$$L_{COD} = \frac{260}{360} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{5} = \frac{13\sqrt{5}}{9} \pi$$

$$13\sqrt{5} > 5\sqrt{13}$$

$$\text{Zatem } L_{AOB} < L_{COD}.$$

- ◀1.21. Dwa koła, każde o polu równym S , są zawarte w prostokącie $ABCD$ tak jak na rysunku.

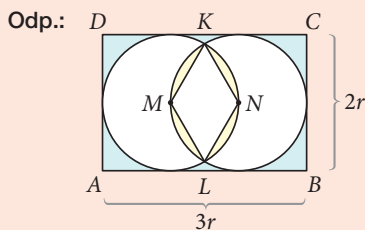


Udowodnij, że pole

- a) prostokąta $ABCD$ jest równe $\frac{6S}{\pi}$.

- b) zamalowanego obszaru jest

$$\text{równe } \frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}.$$



$$S = \pi r^2, \text{ stąd } r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

$$\text{a) } P_{ABCD} = 2r \cdot 3r = \frac{6S}{\pi}$$

- Niech L_W oznacza długość łuku AB wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).

Zauważmy, że jeżeli mamy w tym kole kilka wycinków wyznaczonych przez kąty środkowe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, o łukach odpowiednio $L_{W_1}, L_{W_2}, L_{W_3}, \dots$, to na mocy twierdzenia 1 zachodzą równości:

$$\frac{L_{W_1}}{L_{W_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \frac{L_{W_1}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \frac{L_{W_2}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ itd.}$$

W szczególnym przypadku:

$$\frac{L_W}{\pi r} = \frac{\alpha}{180^\circ}$$

← kąt środkowy o mierze 180° wyznacza półokrąg

i stąd długość L_W łuku AB jest równa:

$$L_W = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$$

Wzór na długość łuku często podawany jest też w postaci:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Niech P_W oznacza pole wycinka kołowego wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).

Podobnie jak poprzednio skorzystamy z równości stosunków wielkości proporcjonalnych:

$$\frac{P_W}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

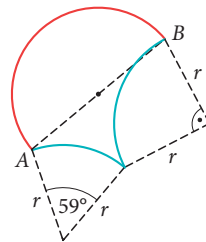
← kąt środkowy o mierze 360° wyznacza okrąg

i stąd pole P_W wycinka kołowego wyznaczonego przez kąt środkowy α wynosi:

$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Przykład 3

Wykażemy, że linia czerwona (półokrąg o promieniu 2,5 cm) łącząca punkty A i B jest dłuższa od sumy dwóch niebieskich łuków wyznaczonych przez kąty 59° i 90° w okręgach o promieniach 2,8 cm (zob. rysunek).



Dowód

Długość (w cm) czerwonego półokręgu jest równa $L_1 = 2,5\pi$.

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 90° , czyli jedna czwarta obwodu koła o promieniu 2,8 cm, wynosi $L_2 = 1,4\pi$.

- b) Pole części wspólnej kół można podzielić na romb o boku r i cztery odcinki kołowe (zamalowane kolorem żółtym).

$$P_{\text{rombu}} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3}, \quad P_{\text{odcinka}} = \frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$$

Pole części wspólnej:

$$P_{\text{wsp}} = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3} + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{3} \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3} = \frac{S}{\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{S}{\pi} \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$

Pole zamalowanego w treści zadania obszaru:

$$P = P_{ABCD} - 2P_{\text{koła}} + P_{\text{wsp}} = \frac{6S}{\pi} - 2S + \frac{S}{\pi} \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} = \frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}$$

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 59° wynosi:

$$L_3 = \frac{59}{180} \pi \cdot 2,8 = \frac{59}{90} \cdot 1,4\pi$$

Długość (w cm) niebieskiej linii równa się:

$$L_2 + L_3 = 1,4\pi + \frac{59}{90} \cdot 1,4\pi = 1,4\pi \left(1 + \frac{59}{90}\right) = 1,4\pi \cdot \frac{149}{90}$$

Porównamy wielkości L_1 i $L_2 + L_3$. W tym celu zbadamy ich iloraz:

$$\frac{L_2 + L_3}{L_1} = \frac{1,4\pi \cdot 149}{90 \cdot 2,5\pi} = \frac{2086}{2250} < 1$$

Zatem $L_2 + L_3 < L_1$.

Koniec dowodu

Związki miarowe w wielokątach

Przykład 4

W kwadracie $ABCD$ punkty E i F są odpowiednio środkami boków AB i BC . Wykażemy, że odcinki DE i DF dzielą przekątną AC na trzy równe części.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

- $ABCD$ jest kwadratem.
- $|AE| = |EB|$
- $|BF| = |FC|$

Teza

$$|AM| = |MN| = |NC|$$

Dowód

Prowadzimy przekątną DB i jej punkt przecięcia z AC oznaczamy literą K , jak na rysunku.

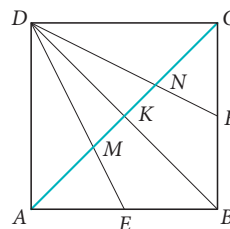
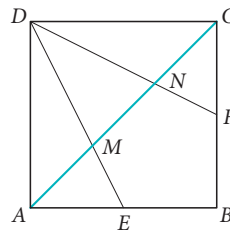
$$|AM| = |NC| \text{ i } |MK| = |KN| \quad \leftarrow \text{prosta } BD \text{ jest osią symetrii kwadratu } ABCD$$

W trójkącie ABD punkt K jest środkiem boku BD . Zatem odcinki AK oraz DE są w tym trójkącie środkowymi i przecinają się w punkcie M . Oznacza to, że:

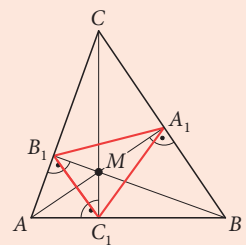
$$|AM| = 2|MK| \quad \leftarrow \text{twierdzenie o punkcie przecięcia środkowych trójkąta}$$

co, wobec równości $|MK| = |KN|$, kończy dowód.

Koniec dowodu



◀ 1.27. W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokości AA_1 , BB_1 i CC_1 (zob. rysunek).



Wykaż, że

- trójkąty AC_1B_1 , C_1BA_1 i B_1A_1C są podobne.
- punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $C_1B_1A_1$.

Odp.: a) $\triangle AC_1C \sim \triangle AB_1B$ (cecha kkk). Stąd $\frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Ponadto $\sphericalangle C_1AB_1 = \sphericalangle CAB$.

Zatem $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ACB$ (cecha bkb). Analogicznie $\triangle A_1C_1B \sim \triangle ACB$ i $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle ACB$. Stąd wynika, że trójkąty AC_1B_1 , A_1C_1B i A_1CB_1 są podobne.

b) W czworokątach AC_1MB_1 , BA_1MC_1 , CB_1MA_1 przeciwległe kąty o wierzchołkach C_1 i B_1 , A_1 i C_1 , B_1 i A_1 są proste, czyli w sumie dają 180° .

Stąd wynika, że na tych czworokątach można opisać okręgi.

$\sphericalangle C_1B_1M = \sphericalangle C_1AM$ – kąty wpisane w pierwszy z tych okręgów oparte na łuku C_1M

$\sphericalangle C_1AM = \sphericalangle BAA_1 = 90^\circ - \sphericalangle B$, więc $\sphericalangle C_1B_1M = 90^\circ - \sphericalangle B$

$\sphericalangle A_1B_1M = \sphericalangle A_1CM$ – kąty wpisane w trzeci z tych okręgów oparte na łuku A_1M

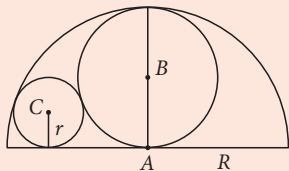
$\sphericalangle A_1CM = \sphericalangle BCC_1 = 90^\circ - \sphericalangle B$, więc $\sphericalangle A_1B_1M = 90^\circ - \sphericalangle B$

Zatem $\sphericalangle C_1B_1M = \sphericalangle A_1B_1M$, co oznacza, że punkt M leży na dwusiecznej kąta $C_1B_1A_1$.

Analogicznie można pokazać, że punkt M leży też na dwusiecznej kąta $B_1C_1A_1$.

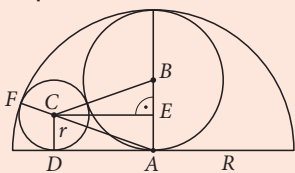
Stąd wynika, że punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $A_1B_1C_1$.

◀ 1.36. W półkole o środku A i promieniu R wpisano okrąg o środku B i promieniu $0,5R$ styczny do średnicy, a następnie okrąg o środku C i promieniu r styczny jednocześnie do wpisanego okręgu oraz do średnicy, jak na rysunku.



Wykaż, że $r = \frac{1}{4}R$.

Odp.:



$$|AB| = \frac{1}{2}R, |CD| = r, |CE| \perp |AB|$$

$$|CB| = r + \frac{1}{2}R$$

$$|AE| = |CD| = r, |BE| = \frac{1}{2}R - r$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów CEB i CEA :

$$|CB|^2 - |BE|^2 = |CE|^2 =$$

$$= |AC|^2 - |AE|^2 =$$

$$\left(r + \frac{1}{2}R\right)^2 - \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2 =$$

$$= (R - r)^2 - r^2$$

$$r^2 + rR + \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{4}R^2 + Rr - r^2 =$$

$$= R^2 - 2Rr + r^2 - r^2$$

$$4Rr = R^2$$

$$r = \frac{1}{4}R$$

Przykład 5

Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Wykażemy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Założenia

Czworokąt $ABCD$ jest wypukły.

Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne.

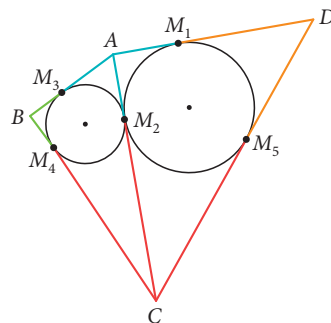
Teza

W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 to punkty styczności z odpowiednimi bokami trójkątów ABC i ADC .



Na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy:

$$|AM_1| = |AM_2| = |AM_3|$$

$$|BM_4| = |BM_3|$$

$$|CM_4| = |CM_2| = |CM_5|$$

$$|DM_1| = |DM_5|$$

Zatem:

$$|AB| + |DC| = |AM_3| + |BM_3| + |DM_5| + |CM_5| =$$

$$= |AM_1| + |BM_4| + |DM_1| + |CM_4| = |BC| + |AD|$$

Wykazaliśmy, że sumy długości przeciwległych boków czworokąta $ABCD$ są równe, co oznacza, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Koniec dowodu

Przypomnijmy twierdzenie udowodnione w podręczniku do klasy drugiej (s. 290).

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeśli CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym BCA , to:

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD| \text{ i } |BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$$

◀ 1.40. Na bokach AB i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty K i M takie, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{3}{2}$. Odcinki BM i CK przecinają się w punkcie P , jak na rysunku obok.

Wykaż, że pole trójkąta PKB stanowi $\frac{8}{95}$ pola trójkąta ABC .

Odp.: Niech D będzie takim punktem na odcinku CP , że $MD \parallel AB$.

$$\sphericalangle DMP = \sphericalangle KBP$$

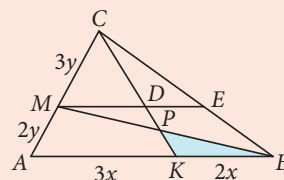
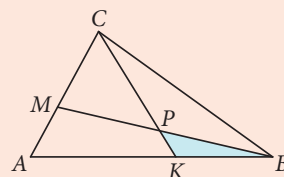
$$\sphericalangle DPM = \sphericalangle KPB \text{ (kąty wierzchołkowe)}$$

Zatem $\triangle PMD \sim \triangle PBK$ (cecha kkk).

$$\frac{|MD|}{|BK|} = \frac{|MD|}{|AK|} \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|CM|}{|CA|} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

Z podobieństwa trójkątów PMD i PBK mamy:

$$\frac{|DP|}{|KP|} = \frac{|MD|}{|BK|} \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{9}{10}, \text{ więc } |DP| = \frac{9}{10}|KP|$$



Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

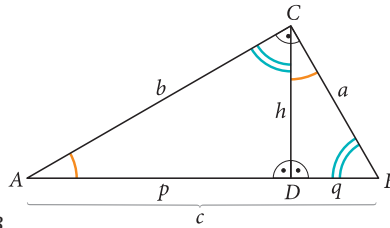
Wykorzystamy następujące proporcje, aby wyprowadzić kolejne związki miarowe dotyczące trójkąta prostokątnego:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{b}{c} &= \frac{p}{b} && \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } DAC \text{ i } CAB \\ \bullet \frac{a}{c} &= \frac{q}{a} && \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } DCB \text{ i } CAB \end{aligned}$$

Stąd:

$$\bullet b^2 = c \cdot p \qquad \bullet a^2 = c \cdot q$$

Koniec dowodu



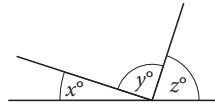
D

Zadania

1.1. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |DC|$. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.

1.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że

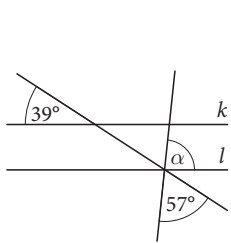
$$\frac{y}{x} = 5 \text{ i } \frac{z}{x} = 4. \text{ Wykaż, że } z = 72.$$



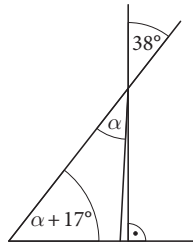
1.3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Proste k i l są równoległe. Udowodnij, że $\alpha = 84^\circ$.

1.4. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Wykaż, że $\alpha = 35^\circ$.

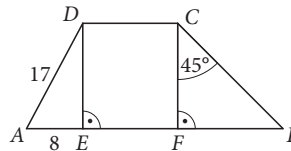
1.5. Dany jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel DC$). Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Wykaż, że $|BC| = 15\sqrt{2}$.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

1.6. Wykaż, że w czworokącie o bokach równej długości przeciwległe kąty są równe.

1.40. (ciąg dalszy)

$$|DK| = |DP| + |KP| = \frac{9}{10}|KP| + |KP| = \frac{19}{10}|KP|$$

$$\frac{|CD|}{|DK|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{3}{2}, \text{ więc } |CD| = \frac{3}{2}|DK| = \frac{57}{20}|KP|$$

$$|CK| = |CD| + |DK| = \frac{57}{20}|KP| + \frac{19}{10}|KP| = \frac{95}{20}|KP|, \text{ stąd } |KP| = \frac{20}{95}|CK|$$

Trójkąty KPB i KCB mają wspólną wysokość opuszczoną z B , więc:

$$P_{PKB} = \frac{20}{95}P_{CKB}$$

Trójkąty CKB i ABC mają wspólną wysokość opuszczoną z C , więc:

$$\frac{P_{CKB}}{P_{ABC}} = \frac{|KB|}{|AB|} = \frac{|KB|}{|AK| + |KB|} = \frac{|KB|}{\frac{3}{2}|KB| + |KB|} = \frac{2}{5}$$

$$P_{PKB} = \frac{20}{95} \cdot \frac{2}{5}P_{ABC} = \frac{8}{95}P_{ABC}$$

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. Wskazówka: Zwróć uwagę, że ten czworokąt jest deltoidem, a przekątna AC dzieli go na trójkąty przystające.

1.2. $x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$

$$\frac{y}{x} = 5, \text{ więc } y = 5x$$

$$\frac{z}{x} = 4, \text{ więc } z = 4x$$

$$x + 5x + 4x = 180$$

$$x = 18, y = 90, z = 72$$

1.3. Wskazówka: Znajdź kąt naprzedmanięgły do kąta 39° .

1.4. Wskazówka: Zapisz sumę miar kątów trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku, którego jeden kąt ma 38° .

1.5. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AED :

$$|DE|^2 + 8^2 = 17^2$$

$$|DE| = |CF| = 15$$

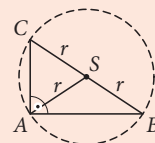
Trójkąt FBC jest prostokątny i równoramienny, więc

$$|CF| = |FB| = 15.$$

$$|BC| = |CF| \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

1.6. Wskazówka: Tym czworokątem jest romb.

1.11.



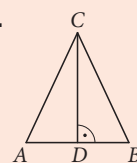
Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej (średnicy okręgu).

$$|AS| = |BS| = |CS| = r$$

$$\text{Zatem } |AS| = \frac{1}{2}|BC|.$$

Trójkąty ASC i ASB są równoramienne.

1.12.



Wskazówka: Skorzystaj z cechy kbk przystawiania dla trójkątów ADC i BDC .

1.7. Patrz s. 194.

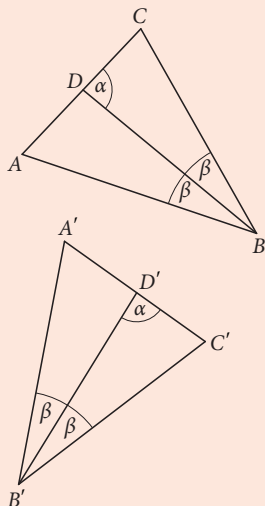
$$\begin{aligned} 1.8. \quad \sphericalangle ADC &= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \\ \sphericalangle DMC &= \sphericalangle DCM = 35^\circ \\ \sphericalangle AMB &= 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ \\ \sphericalangle ABM &= 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ \\ \sphericalangle MBC &= 20^\circ \end{aligned}$$

W trójkącie BMC :

$$\alpha + 55^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 105^\circ$$

1.9.



$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \sphericalangle A'B'D' = \sphericalangle D'B'C'$, więc trójkąty BDC i $B'D'C'$ są przystające, zatem kąty C i C' są równe.

Ponieważ $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $|BC| = |B'C'|$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$, więc $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

1.10. Patrz s. 195.

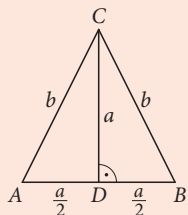
1.11. Patrz s. 201.

1.12. Patrz s. 201.

1.13. Patrz s. 195.

1.14. Patrz s. 195.

1.16.



W trójkącie ADC :

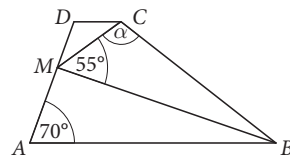
$$b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \sphericalangle A = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

1.17. Wskazówka: Oznacz literami a, b, c, d odległości punktu M od boków prostokąta i zastosuj twierdzenie Pitagorasa w powstałych trójkątach prostokątnych.

1.7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM , a następnie na półprostej BM wyznaczono taki punkt D (różny od punktu B), że $|BM| = |MD|$. Udowodnij, że $|BC| = |AD|$.

1.8. W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel DC$), w którym $\sphericalangle BAD = 70^\circ$, poprowadzono odcinek BM tak, że $|MD| = |DC|$ (zob. rysunek). Odcinek BM jest zawarty w dwusiecznej kąta ABC , a $\sphericalangle BMC = 55^\circ$. Wykaż, że $\alpha = 105^\circ$.



1.9. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne BD i $B'D'$. Wiadomo, że $|BD| = |B'D'|$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'D'C'$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

1.10. Wykaż, że dwa wierzchołki trójkąta są jednakowo oddalone od prostej, która zawiera środkową poprowadzoną do boku łączącego te wierzchołki.

1.11. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego równa jest połowie przeciwprostokątnej i dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

1.12. Wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów wewnętrznych. Wykaż, że trójkąt ten jest równoramienny.

1.13. Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

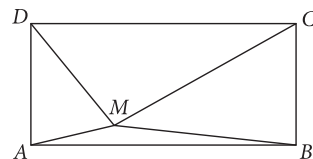
1.14. W trójkącie ABC , w którym miara kąta B jest dwa razy większa od miary kąta A , poprowadzono dwusieczną BD . Udowodnij, że trójkąt BDC jest podobny do trójkąta ABC .

1.15. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 7$, $|AC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że $|AE| = \frac{21\sqrt{3}}{10}$.

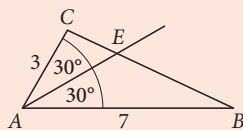
1.16. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CD jest równa podstawie. Wykaż, że $\cos \sphericalangle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

1.17. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ jak na rysunku obok. Udowodnij, że:

$$|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$$



1.15.



$$P_{ABC} = P_{ABE} + P_{ACE}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot |AE| \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |AE| \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{4}|AE| + \frac{3}{4}|AE|$$

$$|AE| = \frac{21\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{21\sqrt{3}}{10}$$

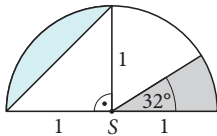
1.18. Promień półkola (rys. 1) jest równy 1. Wykaż, że pole niebieskiej figury jest większe od pola figury szarej.

1.19. Dane są dwa wycinki kołowe (rys. 2) o promieniach $|OA| = \sqrt{13}$ i $|OD| = \sqrt{5}$. Kąt wypukły AOB ma miarę 100° . Wykaż, że

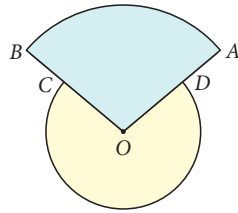
a) pola obu wycinków są równe.

b) długość łuku wycinka AOB jest mniejsza od długości łuku wycinka COD .

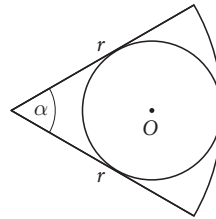
1.20. W wycinek koła o promieniu r wpisano koło o promieniu $\frac{r}{3}$ (rys. 3). Wykaż, że $\alpha = 60^\circ$.



Rys. 1.



Rys. 2.

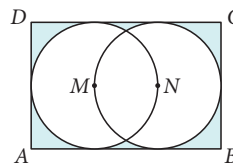


Rys. 3.

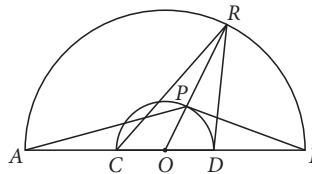
1.21. Dwa koła, każde o polu równym S , są zawarte w prostokącie $ABCD$ tak jak na rysunku. Wykaż, że pole

a) prostokąta $ABCD$ jest równe $\frac{6S}{\pi}$.

b) zamalowanego obszaru jest równe $\frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}$.



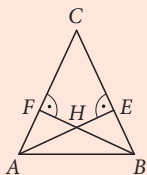
1.22. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe). Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt R leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle CRD = 180^\circ$.



1.23. Proste zawierające wysokości AE i BF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Wiadomo, że $|AH| = |BH|$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

* **1.24.** W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i CF . Wykaż, że symetralna odcinka EF przecina bok AC w jego środku.

1.23.

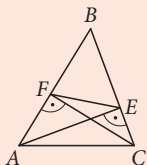


Trójkąt AHB jest równoramienny, więc $\sphericalangle ABH = \sphericalangle BAH$.

Stąd $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \sphericalangle ABH = 90^\circ - \sphericalangle BAH = \sphericalangle ABC$.

Kąty BAC i ABC są równe, więc $|AC| = |BC|$.

1.24.



Ponieważ $\sphericalangle AEC = 90^\circ = \sphericalangle AFC$, więc okrąg o średnicy AC przechodzi przez punkty E i F . Środek O okręgu jest środkiem boku AC .

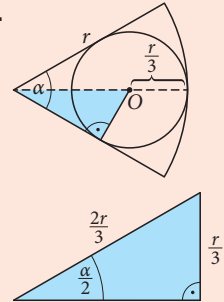
$$\begin{aligned} 1.18. \quad P_{SZ} &= \frac{32}{360} \pi \cdot 1^2 = \frac{4\pi}{45} \\ P_N &= \frac{1}{4} \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{\pi - 2}{4} \\ P_N - P_{SZ} &= \frac{\pi - 2}{4} - \frac{4\pi}{45} = \\ &= \frac{29\pi - 90}{180} > 0 \end{aligned}$$

$$29\pi \approx 91,06$$

$$P_N > P_{SZ}$$

1.19. Patrz s. 198.

1.20.



Środek koła wpisanego w wycinek leży na dwusiecznej kąta α .

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{r}{3}}{\frac{2r}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \quad \alpha = 60^\circ$$

1.21. Patrz s. 198.

1.22. $\triangle ODR \equiv \triangle OPB$, zatem

$$\sphericalangle ORD = \sphericalangle OBP$$

$$\triangle OCR \equiv \triangle OPA, \text{ zatem}$$

$$\sphericalangle ORC = \sphericalangle OAP$$

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CRD} =$$

$$= \sphericalangle APB + (\sphericalangle CRO + \sphericalangle ORD) =$$

$$= \sphericalangle APB + \sphericalangle OAP + \sphericalangle OPB = 180^\circ$$

1.25. Niech

$$a = |AB| = |BC| = |AC|.$$

$$P_{ADC} + P_{BDC} = P_{ABC}, \text{ czyli:}$$

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |DM| + \frac{1}{2}|BC| \cdot |DN| = \frac{1}{2}ah$$

$$\frac{1}{2}a \cdot |DM| + \frac{1}{2}a \cdot |DN| = \frac{1}{2}ah \quad | \cdot \frac{2}{a}$$

$$|DM| + |DN| = h$$

1.26. Wskazówka: Skorzystaj z nierówności trójkąta.

1.27. Patrz s. 199.

1.28. Wskazówka: Zwróć uwagę, że $\triangle MDC \equiv \triangle MAK \equiv \triangle CBK$.

1.29. Wskazówka: Przedłuż ramiona trapezu do punktu przecięcia M , wykaż, że pola trójkątów BDC i CDM są równe i wykorzystaj zależność między polami trójkątów ABM oraz DCM .

1.30. Wskazówka: Uzasadnij równość miar kątów w trójkątach AMB i DMC , a następnie zapisz równość stosunków długości odpowiednich boków w tych trójkątach.

1.32.

$$\triangle ADC \equiv \triangle EDC \text{ (cecha kbk),}$$

wiec $|AD| = |DE|$.

$$\text{Zatem } |DE| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{2}|BE|.$$

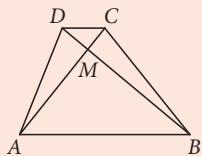
Z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta DCB mamy:

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|DE|}{|BE|} = \frac{1}{2}, \text{ czyli}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}, \quad 2\alpha = 60^\circ.$$

Stąd:

$$\sphericalangle ACB = \frac{3}{2} \cdot 2\alpha = \frac{3}{2} \cdot 60^\circ = 90^\circ.$$

1.34.

Z założenia wynika, że $DC \parallel AB$

$$\text{i } |DC| = \frac{1}{4}|AB|.$$

$$\triangle CMD \sim \triangle AMB$$

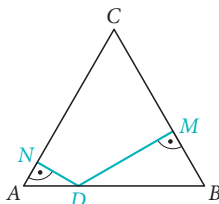
$$\text{Zatem } \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|DM|}{|BM|} = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{4}.$$

1.25. Z dowolnego punktu D należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostopadłe do boków BC i AC odcinki DM i DN – zob. rysunek 1. Wykaż, że suma $|DM| + |DN|$ jest równa wysokości trójkąta ABC .

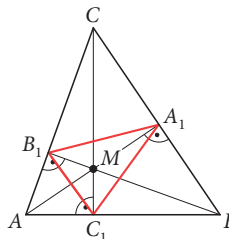
1.26. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu tego trójkąta.

- * **1.27.** W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokości AA_1 , BB_1 i CC_1 (zob. rysunek 2). Wykaż, że
- trójkąty AC_1B_1 , C_1BA_1 i B_1A_1C są podobne.
 - punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $C_1B_1A_1$.

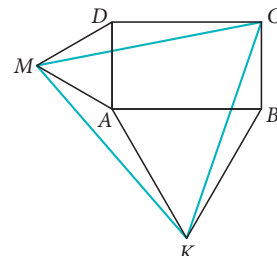
1.28. Na dwóch bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ADM i BAK , jak na rysunku 3. Wykaż, że trójkąt MKC jest równoboczny.



Rys. 1.



Rys. 2.

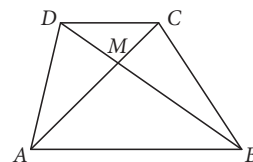


Rys. 3.

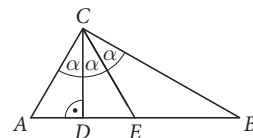
- * **1.29.** Przekątna BD trapezu $ABCD$ jest prostopadła do ramienia AD i zawiera się w dwusiecznej kąta ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABD jest dwa razy większe od pola trójkąta BCD .

1.30. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie M . Wykaż, że $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.

- * **1.31.** Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie M (zob. rysunek). Pole trójkąta ABM jest równe P_1 , pole trójkąta DCM jest równe P_2 . Wykaż, że pole trapezu $ABCD$ jest równe $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.



1.32. W trójkącie ABC wysokość CD i środkowa CE dzielą kąt ACB na trzy równe części (zob. rysunek). Wykaż, że $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.



1.31. $\triangle AMB \sim \triangle CMD$, więc $\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_{AMB}}{P_{CMD}} = \left(\frac{|AM|}{|CM|}\right)^2 = \left(\frac{|BM|}{|DM|}\right)^2$.

$$\text{Stąd } \frac{|AM|}{|CM|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}.$$

$$\frac{P_{AMD}}{P_{CMD}} = \frac{|AM|}{|CM|} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \quad (\text{trójkąty } AMD \text{ i } CMD \text{ mają wspólną wysokość opuszczoną z } D),$$

$$\text{zatem } P_{AMD} = P_{CMD} \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = P_2 \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \sqrt{P_1 P_2}.$$

$$\text{Analogicznie pokazujemy, że } P_{BMC} = \sqrt{P_1 P_2}.$$

Stąd mamy:

$$P_{ABCD} = P_{AMB} + P_{AMD} + P_{BMC} + P_{CBD} = P_1 + 2\sqrt{P_1 P_2} + P_2 = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$$

POLSKA SZKOŁA MATEMATYCZNA

Kiedy w 1918 r. Polska odzyskała niepodległość, jedną z dziedzin wymagających odbudowania była nauka. Z ogromnym sukcesem udało się to polskiej matematyce, która przebojem dołączyła do światowej elity. Dziś o matematykach i ich ogromnych osiągnięciach z tamtego okresu mówi się: **polska szkoła matematyczna**.

Warszawa i Lwów

Największy wpływ na sukces polskiej szkoły matematycznej miały dwa środowiska naukowe, działające na uniwersytetach w Warszawie i we Lwowie. Pierwsze było skupione wokół matematyków: Wacława Sierpińskiego, Zygmunta Janiszewskiego i Stefana Mazurkiewicza, drugie – wokół Hugona Steinhausa i Stefana Banacha.



Stefan
Mazurkiewicz



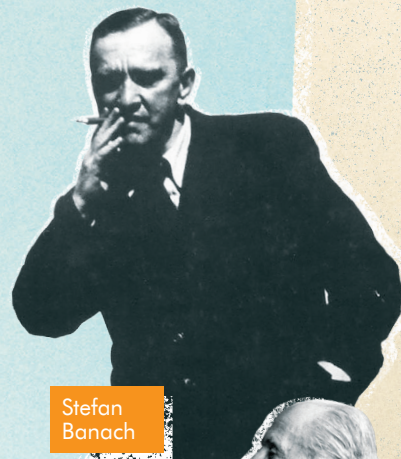
Wacław
Sierpiński



Zygmunt
Janiszewski

Kierunek ich działania nakreślił w 1917 r. Zygmunt Janiszewski w artykule „O potrzebach matematyki w Polsce”. Zgodnie z jego wytycznymi naukowcy zajmowali się głównie nowo odkrytymi obszarami matematyki. Jako pierwsi na świecie założyli czasopismo matematyczne o wąskiej specjalizacji. „**Fundamenta Mathematicae**”, wydawane od 1920 r. w Warszawie, poświęcone było głównie **teorii mnogości**. Lwowskie czasopismo „**Studia Mathematica**”, wydawane od 1929 r., uznano za najważniejsze miejsce prezentowania dokonań z zakresu nowoczesnej **analizy funkcjonalnej**.

Środowisko lwowskich matematyków słynęło z jeszcze innej rzeczy – niepowtarzalnej atmosfery i aury niezwykłości. Matematyczne dyskusje odbywano często nie w salach wykładowych, ale we lwowskich kawiarniach, przy poczęstunku, kawie i trunkach.



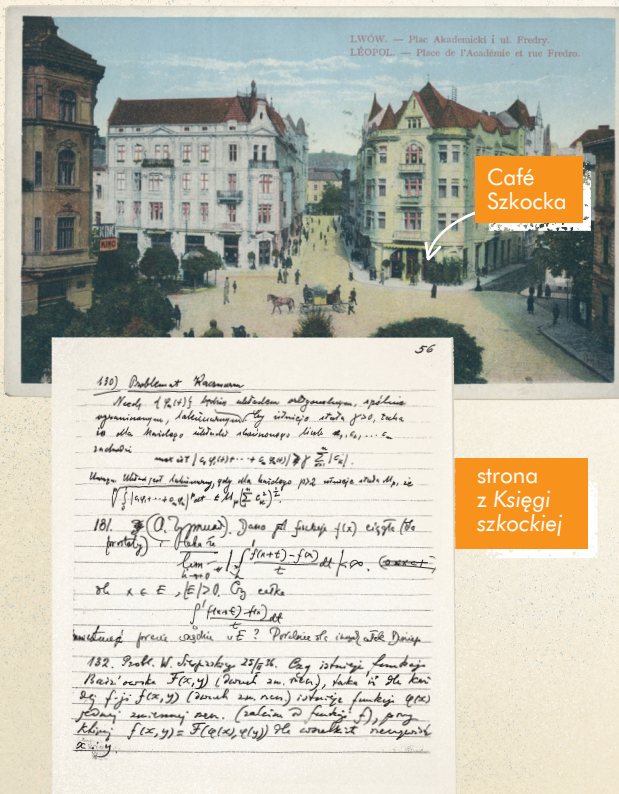
Stefan
Banach



Hugo
Steinhaus

Księga szkocka

Do historii przeszła szczególnie Café Szkocka. Początkowo matematycy zapisywali swoje rozważania ołówkiem na marmurowych blatach stolików i serwetkach. Po wyczyszczeniu blatu przez obsługę kawiarni wszystkie zapiski ginęły bezpowrotnie. Żona Stefana Banacha kupiła więc zeszyt i do tego zeszytu, nazwanego *Księgą szkocką*, przeniosła się dyskusja. Wpisywano tam matematyczne problemy, które pojawiały się w trakcie kawiarnianych spotkań. Za ich rozwiązanie często przewidywana była nagroda.



Café Szkocka

strona z Księgi szkockiej

Przykładowe nagrody



2 małe piwa



mała kawa



10 dag kawioru



obiad u George'a



żywa gęś

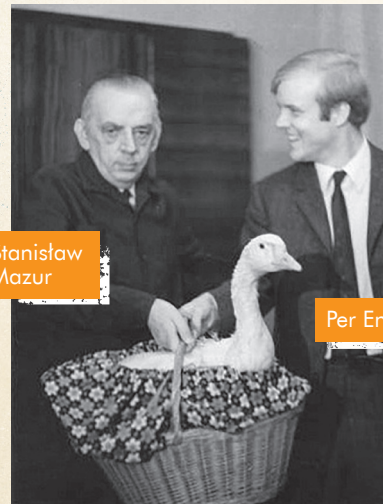
Problemy i twierdzenia

Przy każdym wpisie w *Księdze szkockiej* widnieje nazwisko jego autora. Na przykład tytuł poniższego fragmentu pochodzi od nazwisk dwóch matematyków: Hermana Auerbacha i Stanisława Mazura.

Twierdzenie Auerbach - Mazur

Jeżeli z rogu bilardu o współmiernych bokach wychodzi kula pod kątem 45° , to po skończonej liczbie odbić dojdzie do jednego z trzech pozostałych rogów.

Dla wyjaśnienia dodajmy, że dwa odcinki nazywamy współmiernymi, jeżeli istnieje trzeci odcinek mieszczący się całkowitą liczbę razy w każdym z tych dwóch odcinków.



Stanisław Mazur

Per Enflo

Problematami zapisanymi w *Księdze szkockiej* matematycy zajmują się nawet dziś. Żywą gęś z rąk Stanisława Mazura odebrał w 1972 r. Szwed Per Enflo za rozwiązanie problemu sformułowanego przez Mazura w 1936 r.

2. Dowody w algebrze

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu algebry

Aby rozwiązać zadanie na dowodzenie dotyczące podzielności liczb, nierówności lub innych zależności między liczbami czy wyrażeniami algebraicznymi, warto:

- I. zapisać precyzyjnie założenie i tezę, ← zobacz podane przykłady
- II. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ← zobacz podane przykłady
- III. sprawdzić prawdziwość tezy w rozłącznych przypadkach,
wyczerpujących wszystkie możliwości, ← zobacz przykłady 4, 7, 8
- IV. przekształcić tezę równoważnie, ← zobacz przykład 11
- V. zastosować dowód nie wprost. ← zobacz przykłady 9, 12

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach algebraicznych, to:

- cechy podzielności liczb,
- własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych (w tym: potęgowania, pierwiastkowania, logarytmowania); wzory skróconego mnożenia,
- własności liczb (naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych),
- wzory Viète'a,
- własności ciągu arytmetycznego, geometrycznego,
- twierdzenie Bézouta, twierdzenie o całkowitych i wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- własności funkcji różniczkowalnych.

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Przykład 1

Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Założenie

$n \in \mathbf{Z}$

Teza

Liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Dowód

$$7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 7 \cdot 3^n + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 3^2 = 3^n (7 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 19$$

3^n jest liczbą całkowitą, bo $n \in \mathbf{Z}$, zatem podana liczba jest podzielna przez 19.

Koniec dowodu

Liczba $n \in \mathbf{Z}$ jest **podzielna** przez liczbę $m \in \mathbf{Z} - \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbf{Z}$ taka, że $n = m \cdot k$.

MKP

tematy 4.1, 4.2

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Założenie

$$n \in \mathbb{Z}$$

Teza

Liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Dowód

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

Liczba $n(n-1)(n+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Zatem:

- co najmniej jedna z nich jest parzysta,
- dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3.

Iloczyn liczb podzielnych przez 2 i przez 3 jest liczbą podzielną przez 6.

Koniec dowodu

Przykład 3

Udowodnimy, że różnica czwartych potęg dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 16.

Założenie

$$k \in \mathbb{Z}$$

Teza

Istnieje takie $p \in \mathbb{Z}$, że:

$$(2k-1)^4 - (2k+1)^4 = 16p$$

Dowód

$$\begin{aligned} (2k-1)^4 - (2k+1)^4 &= \\ &= \left[(2k-1)^2 \right]^2 - \left[(2k+1)^2 \right]^2 = && \leftarrow \text{stosujemy wzór na różnicę kwadratów} \\ &= \left[(2k-1)^2 - (2k+1)^2 \right] \cdot \left[(2k-1)^2 + (2k+1)^2 \right] = \\ &= \left[(4k^2 - 4k + 1) - (4k^2 + 4k + 1) \right] \cdot \left[(4k^2 - 4k + 1) + (4k^2 + 4k + 1) \right] = \\ &= -8k(8k^2 + 2) = 16k(-4k^2 - 1) \end{aligned}$$

$k(-4k^2 - 1)$ jest liczbą całkowitą, bo $k \in \mathbb{Z}$. Zatem szukane p istnieje

$$\text{ i } p = k(-4k^2 - 1).$$

Koniec dowodu

Dwie kolejne liczby nieparzyste dla $n \in \mathbb{Z}$ możemy zapisać na wiele sposobów: $2n+1$, $2n+3$ lub $2n+3$, $2n+5$ itd. Na ogół z powodów rachunkowych najwygodniejsza postać to $2n-1$ i $2n+1$.

◀2.6. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 + 5n^3 - 6n$ jest podzielna przez 30.

$$\text{Odp.: } W(n) = n^5 + 5n^3 - 6n = n(n^4 + 5n^2 - 6) = n(n^2 - 1)(n^2 + 6) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 6)$$

Liczba $(n-1)n(n+1)$ jest podzielna przez 6, więc wystarczy pokazać, że jeden z czynników iloczynu $W(n)$ jest podzielny przez 5.

Liczbę n można zapisać w postaci $n = 5k + r$, gdzie $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Jeżeli $r = 0$, to liczba n jest podzielna przez 5.

Jeżeli $r = 1$, to $n-1 = 5k+1-1 = 5k$, czyli czynnik $n-1$ jest podzielny przez 5.

Jeżeli $r = 2$, to $n^2 + 6 = (5k+2)^2 + 6 = 25k^2 + 20k + 10 = 5(5k^2 + 4k + 2)$, czyli czynnik $n^2 + 6$ jest podzielny przez 5.

Jeżeli $r = 3$, to $n^2 + 6 = (5k+3)^2 + 6 = 25k^2 + 30k + 15 = 5(5k^2 + 6k + 3)$, czyli czynnik $n^2 + 6$ jest podzielny przez 5.

Jeżeli $r = 4$, to $n+1 = 5k+4+1 = 5(k+1)$, czyli czynnik $n+1$ jest podzielny przez 5.

Przykład 4

Udowodnimy, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 8.

Założenie

a i b są liczbami całkowitymi nieparzystymi.

Teza

Różnica kwadratów $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 8.

Dowód

Niech $a = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}$ i $b = 2m + 1, m \in \mathbf{Z}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = && \leftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów} \\ &= (2k + 1 - 2m - 1)(2k + 1 + 2m + 1) = \\ &= (2k - 2m)(2k + 2m + 2) = 2(k - m) \cdot 2(k + m + 1) = 4(k - m)(k + m + 1) \end{aligned}$$

Aby wykazać podzielność otrzymanego iloczynu przez 8, wystarczy udowodnić, że jeden z czynników $(k - m)$, $(k + m + 1)$ jest liczbą parzystą.

Zauważmy, że:

- jeśli obie liczby k i m są parzyste lub obie są nieparzyste, to liczba $k - m$ jest parzysta,
- jeśli jedna spośród liczb k i m jest parzysta, a druga nieparzysta, to liczba $k + m + 1$ jest parzysta.

Zatem liczba $4(k - m)(k + m + 1)$ jest podzielna przez 8.

Koniec dowodu**Różnica potęg**

Znamy wzory skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i różnicę sześcianów:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Analogiczny wzór na różnicę czwartych potęg wygląda następująco:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Można go łatwo sprawdzić, wykonując odpowiednie mnożenie.

$$\begin{aligned} (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) &= a^4 - a^3b + a^3b - a^2b^2 + a^2b^2 - ab^3 + ab^3 - b^4 = \\ &= a^4 - b^4 \end{aligned}$$

◀2.14. Liczbę n można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Udowodnij, że liczbę $3n$ również można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Odp.: $n = a^2 - b^2$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$

Mamy pokazać, że istnieją liczby $c, d \in \mathbf{Z}$, takie, że $3n = c^2 - d^2$.

Niech $c = 2a + b$, $d = a + 2b$.

Wtedy $c, d \in \mathbf{Z}$ oraz:

$$\begin{aligned} c^2 - d^2 &= (2a + b)^2 - (a + 2b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - a^2 - 4ab - 4b^2 = 3a^2 - 3b^2 = \\ &= 3(a^2 - b^2) = 3n \end{aligned}$$

Uogólnieniem tych zależności jest wzór na **różnicę n -tych potęg**.

Twierdzenie

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Dowód

Rozważmy wielomian $W(x) = x^n - b^n$.

$W(b) = b^n - b^n = 0$, zatem na mocy twierdzenia Bézouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - b$.

Wielomian $W(x) = x^n - b^n$ ma $n+1$ współczynników, przy czym pierwszym z nich jest 1, ostatnim jest $-b^n$, a każdy z pozostałych $n-1$ współczynników ma wartość 0. Skorzystamy ze schematu Hornera i wykonamy dzielenie $W(x) : (x - b)$.

	1	0	0	...	0	0	$-b^n$
b	1	b	b^2	...	b^{n-2}	b^{n-1}	0

Zatem:

$$W(x) = x^n - b^n = (x - b)(x^{n-1} + bx^{n-2} + b^2x^{n-3} + \dots + b^{n-2}x + b^{n-1})$$

Podstawiamy a w miejsce x i otrzymujemy tezę.

Koniec dowodu

Jeśli zastosujemy wzór na różnicę n -tych potęg dla liczb całkowitych a, b , to otrzymamy następujący wniosek.

Wniosek

Dla dowolnych różnych liczb całkowitych a i b liczba $a^n - b^n$ jest podzielna przez $a - b$.

Przykład 5

Udowodnimy, że liczba $49^{12} - 256^6$ jest podzielna przez 3.

Dowód

$$49^{12} - 256^6 = (7^2)^{12} - (4^4)^6 = 7^{24} - 4^{24}$$

Liczba $7^{24} - 4^{24}$ jest podzielna przez $7 - 4 = 3$.

Koniec dowodu

◀2.12. Wykaż, że liczba $25^{21} - 64^7$ jest podzielna przez 3.

$$\text{Odp.: } 25^{21} - 64^7 = (5^2)^{21} - (2^6)^7 = 5^{42} - 2^{42}$$

Liczba $5^{42} - 2^{42}$ jest podzielna przez $5 - 2 = 3$.

◀2.13. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n liczba $17^{6n} - 5^{9n}$ jest podzielna przez 164.

Odp.: $17^{6n} - 5^{9n} = (17^2)^{3n} - (5^3)^{3n} = 289^{3n} - 125^{3n}$, więc jest to liczba podzielna przez $289 - 125 = 164$.

Przykład 6

Udowodnimy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n liczba $81^{3n} - 32^{4n}$ jest podzielna przez 5.

Założenie

$n \in \mathbf{N} - \{0\}$

Teza

Liczba $81^{3n} - 32^{4n}$ jest podzielna przez 5.

Dowód

$$81^{3n} - 32^{4n} = (3^4)^{3n} - (2^5)^{4n} = 3^{12n} - 2^{20n} = (3^{12})^n - (2^{20})^n$$

Liczba $(3^{12})^n - (2^{20})^n$ jest podzielna przez $3^{12} - 2^{20}$.

Wystarczy wykazać, że liczba $3^{12} - 2^{20}$ jest podzielna przez 5.

$$\begin{aligned} 3^{12} - 2^{20} &= (3^6 - 2^{10})(3^6 + 2^{10}) = (3^3 - 2^5)(3^3 + 2^5)(3^6 + 2^{10}) = \\ &= (27 - 32)(3^3 + 2^5)(3^6 + 2^{10}) = -5 \cdot (3^3 + 2^5)(3^6 + 2^{10}) \end{aligned}$$

Liczby w nawiasach są całkowite, więc liczba $3^{12} - 2^{20}$ jest podzielna przez 5.

Koniec dowodu

Dzielenie z resztą

W szkole podstawowej było omawiane dzielenie z resztą. Przypomnijmy, że na przykład równość:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

można odczytać w następujący sposób:

reszta z dzielenia liczby 17 przez 3 jest równa 2

lub

reszta z dzielenia liczby 17 przez 5 jest równa 2.

Reszta z dzielenia nie może być większa od dzielnika, zatem równość:

$$19 = 5 \cdot 3 + 4$$

oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 5 jest równa 4,

ale

nie oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 3 jest równa 4.

Dzielenie z resztą możemy wykonywać również w zbiorze liczb całkowitych. Przyjęto zasadę, że reszta jest w takim przypadku liczbą nieujemną mniejszą od wartości bezwzględnej dzielnika.

Jeżeli na przykład chcemy wyznaczyć resztę z dzielenia liczby -17 przez 3 , to korzystamy z równości:

$$-17 = (-6) \cdot 3 + 1$$

Zatem **reszta z dzielenia liczby -17 przez 3 jest równa 1 .**

Uogólnieniem tych rozważań jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb całkowitych a i b , $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że

$$a = q \cdot b + r, \text{ gdzie } r \geq 0 \text{ i } r < |b|.$$

Z powyższego twierdzenia będziemy korzystać, zapisując liczby całkowite w odpowiednich postaciach. Na przykład każdą liczbę całkowitą n , która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 , można zapisać w postaci:

$$n = 5k + 3, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Przykład 7

Udowodnimy, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3 .

Założenie

n jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 3 .

Teza

n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 .

Dowód

Skoro liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3 , to są dwie możliwości:

- $n = 3k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$

Wtedy $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$.

- $n = 3m + 2, \quad m \in \mathbb{Z}$

Wtedy $n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$.

W obydwu przypadkach liczbę n^2 można przedstawić w postaci $3p + 1$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, co oznacza, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1 .

Koniec dowodu

◀2.9. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 , liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 . Udowodnij, że różnica czwartych potęg liczb a i b jest podzielna przez 5 .

Odp.: $a = 5n + 2, \quad n \in \mathbb{Z}$

$b = 5m + 3, \quad m \in \mathbb{Z}$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Aby liczba $a^4 - b^4$ była podzielna przez 5 , wystarczy, aby jeden z jej czynników był podzielny przez 5 .

$$a + b = 5n + 2 + 5m + 3 = 5n + 5m + 5 = 5(n + m + 1)$$

Czynnik $a + b$ jest podzielny przez 5 .

Przykład 8

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Założenie

$$n \in \mathbb{Z}$$

Teza

Liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Dowód

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Liczba $n(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 6 jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych (zob. przykład 1). Aby wykazać prawdziwość tezy, wystarczy zatem udowodnić, że liczba $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$ jest podzielna przez 5.

Liczba n przy dzieleniu przez 5 może dawać resztę 0 lub 1, lub 2, lub 3, lub 4. Możemy więc zapisać ją w jednej z pięciu postaci ($k \in \mathbb{Z}$):

- $n = 5k$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) = 5k(5k-1)(5k+1)(25k^2 + 1)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 1$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) = (5k+1)5k(5k+2)(25k^2 + 10k + 2)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 2$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) = (5k+2)(5k-1)(5k+3)(25k^2 + 20k + 5)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 3$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) = (5k+3)(5k+2)(5k+4)(25k^2 + 30k + 10)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 4$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) = (5k+4)(5k+3)(5k+5)(25k^2 + 40k + 17)$ jest podzielna przez 5.

W każdym przypadku iloczyn $n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$ jest więc podzielny przez 5, a skoro jest również podzielny przez 6, to jest podzielny przez 30.

Koniec dowodu

Liczby wymierne i niewymierne

Przykład 9

Wykażemy bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ jest liczbą wymierną.

◀ 2.20. Wykaż bez użycia kalkulatora, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ jest liczbą całkowitą.

Odp.: Zauważmy, że $(\sqrt{2} + 1)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$ oraz $(\sqrt{2} - 1)^3 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$. Zatem:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$$

◀ 2.19. Udowodnij bez użycia kalkulatora, że

$$\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$$

jest liczbą całkowitą.

$$\begin{aligned} \text{Odp.: } & \sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}} = \\ & = \sqrt{3^2 + 6\sqrt{7} + \sqrt{7}^2} + \\ & + \sqrt{5^2 - 10\sqrt{7} + \sqrt{7}^2} = \\ & = \sqrt{(3 + \sqrt{7})^2} + \sqrt{(5 - \sqrt{7})^2} = \\ & = |3 + \sqrt{7}| + |5 - \sqrt{7}| = \\ & = 3 + \sqrt{7} + 5 - \sqrt{7} = 8 \end{aligned}$$

Dowód

Zapiszemy różnicę pod pierwiastkiem w postaci kwadratu i skorzystamy z zależności $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} &= \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5} = \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad \leftarrow 2 - \sqrt{5} < 0\end{aligned}$$

Zatem liczba $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$ jest całkowita, czyli jest wymierna.

Koniec dowodu

Przykład 10

Udowodnimy, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Dowód (nie wprost)

Przypuścimy, że teza jest fałszywa, czyli że liczba $\log_3 7$ jest wymierna.

Zauważmy, że $\log_3 7 > \log_3 3 = 1$, zatem liczba $\log_3 7$ jest dodatnia. Istnieją zatem takie liczby naturalne dodatnie n i k , że $\log_3 7 = \frac{n}{k}$.

$$\begin{aligned}3^{\frac{n}{k}} &= 7 && \leftarrow \text{z definicji logarytmu} \\ 3^n &= 7^k && \leftarrow \text{z własności działań na potęgach}\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równość dwóch liczb naturalnych: 3^n oraz 7^k .

Lewa strona tej równości jest podzielna przez 3, zatem prawa również. Ale gdyby liczba 7^k była podzielna przez 3, to również liczba 7 byłaby podzielna przez 3.

Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Koniec dowodu

Nierówności**Przykład 11**

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$.

Założenia

$$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$$

Teza

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$$

◀2.26. Wykaż, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Odp.: $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$

$$L = a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)(a^2 - b^2) =$$

$$= (a - b)(a - b)(a + b) = (a - b)^2(a + b)$$

$(a - b)^2$ jest liczbą nieujemną, natomiast $a + b \geq 0$ z założenia.

Iloczyn $(a - b)^2(a + b)$ jest zatem liczbą nieujemną.

◀2.29. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$.

Odp.: Wystarczy wykazać, że $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$.

$$L = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2xz + z^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów liczb jest liczbą nieujemną.

◀2.21. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

Odp.: Dowód nie wprost.

Założmy, że $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą wymierną, zatem daje się zapisać w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbf{Z}$ i $q \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}, \quad 2 = \frac{p^3}{q^3}, \quad 2 \cdot q^3 = p^3$$

Lewa strona jest liczbą parzystą,

zatem prawa też. To oznacza,

że p musi być liczbą parzystą,

więc p^3 jest podzielne przez 8.

Aby lewa strona była podzielna

przez 8, q musi być liczbą parzystą.

Dotarliśmy do sprzeczności,

ponieważ ułamek $\frac{p}{q}$ jest

nieskracalny. Zatem $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą niewymierną.

◀2.33. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy < -12$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 24$.

Odp.: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

Jeśli $xy < -12$, to $-2xy > 24$.

$(x + y)^2 \geq 0$ i $-2xy > 24$, więc

$(x + y)^2 + (-2xy) \geq 24$.

Dowód

Przekształcamy równoważnie lewą stronę nierówności:

$$\begin{aligned} L &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + 1 = \\ &= (x - y)^2 + (y + 2)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Pierwsze dwa składniki otrzymanej sumy są nieujemne, zatem lewa strona nierówności jest dodatnia.

Koniec dowodu

Przykład 12

Wykażemy, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 9$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 18$.

Założenia

$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, xy > 9$

Teza

$x^2 + y^2 \geq 18$

Dowód (I sposób)

Zauważmy, że:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

Z założenia $xy > 9$, zatem $2xy > 18$. Ponadto $(x - y)^2 \geq 0$.

Mamy więc $x^2 + y^2 \geq 18$.

Koniec dowodu

Dowód (II sposób, nie wprost)

Przypuśćmy, że dla liczb $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest układ nierówności:

$$xy > 9 \text{ i } x^2 + y^2 < 18$$

Wykażemy, że jest to niemożliwe.

Skoro $xy > 9$, to $-2xy < -18$.

Zatem $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18 \\ -2xy < -18 \end{cases}$. Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &< 0 \\ (x - y)^2 &< 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest fałszywa – otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że podane w zadaniu twierdzenie jest prawdziwe.

Koniec dowodu

Dowód (III sposób, graficzny)

Rozważmy dwa zbiory zawarte w płaszczyźnie kartezjańskiej:

$$A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } xy > 9\}$$

$$B = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 + y^2 \geq 18\}$$

Wystarczy wykazać, że $A \subset B$.

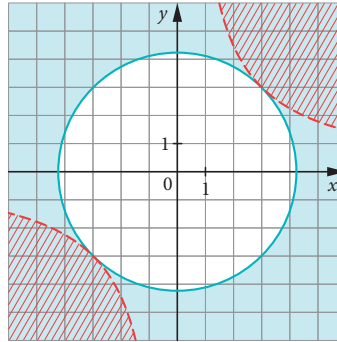
B jest zbiorem wszystkich punktów okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu $3\sqrt{2}$ oraz punktów położonych na zewnątrz tego okręgu.

Wyznaczamy zbiór A .

Rozważamy trzy przypadki.

- Jeżeli $x = 0$, to nierówność $xy > 9$ nie jest spełniona.
- Jeżeli $x > 0$, to nierówność $xy > 9$ jest równoważna nierówności $y > \frac{9}{x}$.
- Jeżeli $x < 0$, to nierówność $xy > 9$ jest równoważna nierówności $y < \frac{9}{x}$.

Równanie $y = \frac{9}{x}$ przedstawia na płaszczyźnie kartezjańskiej hiperbolę. Zbiór A tworzą więc punkty położone nad hiperbolą (dla $x > 0$) lub pod nią (dla $x < 0$). Punktami wspólnymi okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu $3\sqrt{2}$ oraz hiperboli o równaniu $y = \frac{9}{x}$ są punkty $(-3, -3)$ i $(3, 3)$. Z rysunku odczytujemy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B .



Koniec dowodu

D

Zadania

2.1. Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

2.2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2}$ jest podzielna przez 23.

2.3. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych zwiększona o 1 jest liczbą podzielną przez 3.

2.4. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$$2.4. \quad k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2 - 1)^2 = [k \cdot (k^2 - 1)]^2$$

Wystarczy pokazać, że $k \cdot (k^2 - 1)$ jest podzielna przez 6.

$k \cdot (k^2 - 1) = k \cdot (k - 1) \cdot (k + 1)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych. Wśród nich jest co najmniej jedna podzielna przez 2 i dokładnie jedna podzielna przez 3. Zatem ten iloczyn jest podzielny przez 6, a jego kwadrat jest podzielny przez 36.

Odpowiedzi i rozwiązania

$$\begin{aligned} 2.1. \quad & 6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98} = \\ & = 6^{98}(6^2 - 2 \cdot 6 + 10) = 6^{98} \cdot 34 = \\ & = 6^{98} \cdot 2 \cdot 17 \end{aligned}$$

$6^{98} \cdot 2$ jest liczbą całkowitą, zatem dana liczba jest podzielna przez 17.

$$\begin{aligned} 2.2. \quad & 3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2} = \\ & = 4^{2n}(3 + 4 + 16) = 4^{2n} \cdot 23 \end{aligned}$$

4^{2n} jest liczbą całkowitą dla $n \in \mathbf{N}$, zatem dana liczba jest podzielna przez 23.

2.3. $n, n + 1, n + 2$ – trzy kolejne liczby całkowite dla $n \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} & n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + 1 = \\ & = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + 1 = \\ & = 3n^2 + 6n + 6 = 3(n^2 + 2n + 2) \end{aligned}$$

$n^2 + 2n + 2$ jest liczbą całkowitą dla $n \in \mathbf{Z}$, zatem suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

2.5. Wskazówka: Wśród czterech kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba podzielna przez 2, co najmniej jedna podzielna przez 3 i dokładnie jedna podzielna przez 4.

2.6. Patrz s. 209.

2.7. $x = 7n + 5$ – jedna liczba, $n \in \mathbb{Z}$
 $y = 7m + 4$ – druga liczba, $m \in \mathbb{Z}$
 $x \cdot y = (7n + 5)(7m + 4) =$
 $= 49mn + 28n + 35m + 20 =$
 $= 7(7mn + 4n + 5m + 2) + 6 =$
 $= 7k + 6$
 $k = (7mn + 4n + 5m + 2) \in \mathbb{Z}$

2.8. Patrz zadanie 2.7.

2.9. Patrz s. 213.

2.10. Wskazówka: Liczba niepodzielna przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 lub 2.

2.11. Liczba $1918^{10} - 1795^{10}$ jest podzielna przez $1918 - 1795 = 123$.

2.12. Patrz s. 211.

2.13. Patrz s. 212.

2.14. Patrz s. 210.

2.15. $x^2 + y^2 = 13$
 $x^2 - 2xy + y^2 + 2xy = 13$
 $(x - y)^2 + 2xy = 13$
 $3^2 + 2xy = 13$
 $2xy = 4$, czyli $xy = 2$

2.16. $(a^2 + b^2)^2 = 7^2$
 $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49$
 $a^4 + b^4 = 49 - 2(ab)^2$
 $a + b = 1$
 $a^2 + 2ab + b^2 = 1$
 $2ab + 7 = 1$, czyli $ab = -3$
 $a^4 + b^4 = 49 - 2 \cdot (-3)^2 = 49 - 18 = 31$

2.17. Z podanego warunku mamy

$$c = \frac{a+b}{2}. \text{ Zatem}$$

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a}{a - \frac{a+b}{2}} + \frac{b}{b - \frac{a+b}{2}} =$$

$$= \frac{2a}{a-b} + \frac{2b}{b-a} = \frac{2(a-b)}{a-b} = 2.$$

2.18. $4a^2 - 9b^2 + 2a - 3b = 0$
 $(2a - 3b)(2a + 3b) + 2a - 3b = 0$
 $(2a - 3b)(2a + 3b + 1) = 0$
 $2a - 3b = 0 \vee 2a + 3b + 1 = 0$
 $2a = 3b \vee 2a + 3b = -1$
Sprzeczne, ponieważ a i b są dodatnie. Zatem $2a = 3b$.

2.19. Patrz s. 214.

2.5. Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 24.

2.6. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 + 5n^3 - 6n$ jest podzielna przez 30.

2.7. Udowodnij, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 5, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 6.

2.8. Udowodnij, że jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4.

2.9. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. Udowodnij, że różnica czwartych potęg liczb a i b jest podzielna przez 5.

2.10. Udowodnij, że suma kwadratów dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest liczbą niepodzielną przez 3.

2.11. Wykaż, że liczba $1918^{10} - 1795^{10}$ jest podzielna przez 123.

2.12. Wykaż, że liczba $25^{21} - 64^7$ jest podzielna przez 3.

2.13. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n liczba $17^{6n} - 5^{9n}$ jest podzielna przez 164.

2.14. Liczbę n można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Udowodnij, że liczbę $3n$ również można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

2.15. Udowodnij, że jeżeli $x - y = 3$ i $x^2 + y^2 = 13$, to $xy = 2$.

2.16. Udowodnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

2.17. Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.

2.18. Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $4a^2 + 2a = 9b^2 + 3b$. Udowodnij, że $2a = 3b$.

2.19. Udowodnij bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$ jest liczbą całkowitą.

2.37. Wystarczy uzasadnić, że $\frac{|x| + |y|}{2} - \sqrt{|xy|} > 0$.

$$L = \frac{|x| + |y|}{2} - \sqrt{|xy|} = \frac{|x| + |y| - 2\sqrt{|xy|}}{2} = \frac{(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})^2}{2}, \text{ więc } L > 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.42.} \quad a_{n+1} - a_{n-1} &= a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n-2} = a_1 q^{n-2} (q^2 - 1) = \\ &= a_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right) = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 4}{4}\right) = \\ &= a_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = a_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \\ &= a_1 \cdot q^{n-1} = a_n \end{aligned}$$

* **2.20.** Wykaż bez użycia kalkulatora, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

2.21. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

2.22. Wykaż, że liczba $\log 17$ jest niewymierna.

2.23. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

2.24. Wykaż, że dla każdego $a > 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

2.25. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq \frac{1}{3}$.

2.26. Udowodnij, że jeżeli $a+b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

2.27. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b spełniają nierówność $b > a > 1$, to $\frac{a}{a^3+2} > \frac{b}{b^3+2}$.

2.28. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

2.29. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$.

2.30. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x^2+2y^2-4xy+2y+1 \geq 0$.

2.31. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x^2+9y^2-12x-12y+14 > 0$.

2.32. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $9x^2+y^2+30x+14y+74 \geq 0$.

2.33. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy < -12$, prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2 \geq 24$.

2.30. $L = 4x^2 - 4xy + y^2 + y^2 + 2y + 1 = (2x - y)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$
Suma kwadratów liczb jest liczbą nieujemną.

2.31. $L = 4x^2 - 12x + 9 + 9y^2 - 12y + 4 + 1 = (2x - 3)^2 + (3y - 2)^2 + 1 > 0$
Suma kwadratów zwiększona o 1 jest liczbą dodatnią.

2.32. $L = 9x^2 + 30x + 25 + y^2 + 14y + 49 = (3x + 5)^2 + (y + 7)^2 \geq 0$
Suma kwadratów jest liczbą nieujemną.

2.33. Patrz s. 216.

2.36. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

Więc $xy + xz + yz = \frac{1}{2} \left[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right] = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$.

2.20. Patrz s. 214.

2.21. Patrz s. 215.

2.22. Dowód nie wprost.
Patrz zadanie 2.21.

2.23. Obie strony są dodatnie, więc możemy nierówność podnieść stronami do kwadratu.

$$2^{50} - 1 + 2^{50} + 1 + 2\sqrt{(2^{50}-1)(2^{50}+1)} < 2^{52}$$

$$2 \cdot 2^{50} + 2\sqrt{2^{100}-1} < 4 \cdot 2^{50}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1} < 2 \cdot 2^{50} \quad | : 2$$

$$\sqrt{2^{100}-1} < 2^{50}$$

Ponownie podnosimy obie strony do kwadratu.

$$2^{100} - 1 < 2^{100}, \text{ czyli } 0 < 1$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa. Przekształcenia były równoważne, a to dowodzi prawdziwości wyjściowej nierówności.

2.24. Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2} \quad | \cdot 2(a+1)$$

$$2(a^2+1) \geq (a+1)^2$$

$$2a^2+2 \geq a^2+2a+1$$

$$a^2-2a+1 \geq 0$$

$$(a-1)^2 \geq 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też wyjściowa nierówność.

2.25. Patrz zadanie 2.24.

2.26. Patrz s. 215.

2.27. Patrz zadanie 2.24.

2.28. Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$2(a+b+c) > 3(a+b)$$

$$2a+2b+2c > 3a+3b$$

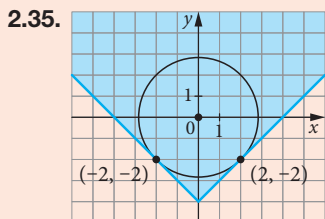
$$2c-a-b > 0$$

$$(c-a)+(c-b) > 0$$

Ponieważ $c > a$ i $c > b$, otrzymana nierówność jest prawdziwa. Zatem prawdziwa jest też wyjściowa nierówność.

2.29. Patrz s. 215.

2.34. Patrz zadanie 2.33.



Niech $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 8\}$

– koło

$B = \{(x, y): |x| - y \leq 4\} =$

$= \{(x, y): y \geq |x| - 4\}$

– niebieski obszar

$A \subset B$, czyli jeżeli $x^2 + y^2 \leq 8$,
to $|x| - y \leq 4$.

2.36. Patrz s. 219.

2.37. Patrz s. 218.

$$\begin{aligned} \mathbf{2.38.} \quad 9\sqrt{A} &= 9 \cdot \sqrt{3^{4\sqrt{2}+2}} = \\ &= 9 \cdot \sqrt{3^{4\sqrt{2}} \cdot 3^2} = 9 \cdot 3^{2\sqrt{2}} \cdot 3 = \\ &= 27 \cdot 3^{2\sqrt{2}} = 3^3 \cdot 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+3} = B \end{aligned}$$

2.39.

$$\begin{aligned} \log_2(8a) &= 10 \text{ i } \log_4 \frac{16}{b} = 3 \\ 8a &= 2^{10} & \log_4 16 - \log_4 b &= 3 \\ a &= 2^7 & 2 - 3 &= \log_4 b \\ & & \log_4 b &= -1 \\ & & b &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\log_2 \left(2^7 \cdot \frac{1}{2^2} \right) = \log_2 2^5 = 5$$

2.40. $\log_3(2^2 \cdot 3) = k$

$$\log_3 2^2 + \log_3 3 = k$$

$$2\log_3 2 = k - 1$$

$$\log_3 2 = \frac{k-1}{2}$$

Zatem:

$$\log_2 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 2} = \frac{2}{\frac{k-1}{2}} = \frac{4}{k-1}$$

2.41. $\log_2(2^2 \cdot 5) = a$

$$\log_2 2^2 + \log_2 5 = a$$

$$\log_2 5 = a - 2$$

$$\log_2(2 \cdot 3 \cdot 5) = b$$

$$1 + \log_2 3 + \log_2 5 = b$$

$$\log_2 3 = b - 1 - \log_2 5 =$$

$$= b - 1 - (a - 2) = b - a + 1$$

Zatem:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{a-2}{b-a+1}$$

2.42. Patrz s. 218.

2.43. Równanie nie ma rozwiązań,

więc $\Delta < 0$, czyli $a^2 + b^2 < 4$.

Zatem $|a| < 2$ i $|b| < 2$.

2.34. Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 3$, prawdziwa jest nierówność $x^4 + y^4 \geq 18$.

2.35. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $x^2 + y^2 \leq 8$, prawdziwa jest nierówność $|x| - y \leq 4$.

2.36. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \leq 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

2.37. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $\frac{|x| + |y|}{2} \geq \sqrt{|xy|}$.

2.38. Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

2.39. Dane są takie dodatnie liczby a i b , że $\log_2(8a) = 10$ i $\log_4 \frac{16}{b} = 3$. Wykaż, że $\log_2(ab) = 5$.

2.40. Niech $\log_3 12 = k$. Wykaż, że $\log_2 9 = \frac{4}{k-1}$.

2.41. Niech $\log_2 20 = a$ i $\log_2 30 = b$. Wykaż, że $\log_3 5 = \frac{a-2}{b-a+1}$.

2.42. Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że w tym ciągu każdy wyraz a_n , $n \geq 2$, jest równy różnicy dwóch sąsiadujących z nim wyrazów.

2.43. Równanie $x^2 + 2ax - b^2 + 4 = 0$ z niewiadomą x nie ma rozwiązań. Wykaż, że $|a| < 2$ i $|b| < 2$.

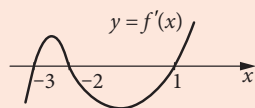
2.44. Udowodnij, że równanie $3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 50 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

2.44. Niech $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 50$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 + 48x^2 + 12x - 72 = 12(x^3 + 4x^2 + x - 6) = 12(x^3 - x^2 + 5x^2 - 5x + 6x - 6) = \\ &= 12[x^2(x-1) + 5x(x-1) + 6(x-1)] = 12(x-1)(x^2 + 5x + 6) = 12(x-1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ dla } x \in \{-3, -2, 1\}$$

x	$x < -3$	-3	$-3 < x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$



Zatem najmniejszą wartością funkcji f jest $f(-3)$ lub $f(1)$.

$$f(-3) = 3 \cdot 81 - 16 \cdot 27 + 6 \cdot 9 + 72 \cdot 3 + 50 = 131 > 0, \quad f(1) = 3 + 16 + 6 - 72 + 50 = 3 > 0$$

Funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc równanie

$$f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 50 = 0 \text{ nie ma rozwiązań.}$$