

# Geometria analityczna

## 2

### Umiejętności

Po szkole podstawowej  
i klasie pierwszej szkoły  
ponadpodstawowej uczeń:

- znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek,
- oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych,
- dla danych punktów kratowych  $A$  i  $B$  znajduje inne punkty kratowe należące do prostej  $AB$ ,
- stosuje wzory na długość okręgu i pole koła,
- rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii,
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
- opisuje zbiory punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej,
- zapisuje równanie prostej w postaci ogólnej,
- wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej i przechodzi przez dany punkt,
- bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań,
- oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych,
- dodaje i odejmuje wektory, mnoży wektor przez liczbę oraz interpretuje geometrycznie działania na wektorach,
- oblicza współrzędne wektora, współrzędne jego końców oraz długość wektora; wykonuje działania na współrzędnych wektorów.

### Po tym dziale uczeń:

- oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych i odległość punktu od prostej,
- wyznacza współrzędne środka odcinka oraz środka ciężkości trójkąta,
- stosuje geometryczną interpretację współczynnika kierunkowego prostej,
- opisuje proste równoległe i prostopadłe za pomocą równań w postaci ogólnej,
- opisuje okrąg za pomocą równania  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  oraz koło za pomocą nierówności  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$  lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$ ,
- określa wzajemne położenie prostej i okręgu (koła) oraz dwóch okręgów; znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz dwóch okręgów,
- wyznacza równanie stycznej do okręgu,
- wyznacza środek symetrii w figurach środkowosymetrycznych, obrazy figur w symetrii środkowej na płaszczyźnie,
- wyznacza oś symetrii w figurach osiowosymetrycznych, obrazy figur w symetrii osiowej na płaszczyźnie,
- wyznacza obrazy figur w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych oraz symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych; klasyfikuje figury ze względu na liczbę osi symetrii.

### Uwagi metodyczne

Równanie prostej w postaci ogólnej ma wiele zalet. Ujednolica równania wszystkich prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej, umożliwia pozbycie się niewygodnych ułamków, a przez wyznaczenie punktów przecięcia z osiami układu pozwala na szybkie i dokładne narysowanie prostej. Ostatnia czynność przydaje się podczas graficznego rozwiązywania układów równań.

◀ 1.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

a)  $2x - y = 0$

b)  $\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$

c)  $2y - 8 = 0$

d)  $3x - 5 = 0$

e)  $-6x - 2y + 1 = 0$

f)  $x - 3y - 4 = 0$

Odp.: a)  $y = 2x$

b)  $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

c)  $y = 4$

d) brak równania w postaci kierunkowej

e)  $y = -3x + \frac{1}{2}$

f)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

# 1. Warto powtórzyć – równanie prostej, wektory

## Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie  $ax + by + c = 0$  o zmiennych  $x$  i  $y$  opisuje:

- całą płaszczyznę, gdy  $a = b = c = 0$ ,
- zbiór pusty, gdy  $a = b = 0$  i  $c \neq 0$ ,
- prostą, gdy  $a$  i  $b$  nie są jednocześnie równe 0.

Każdą prostą na płaszczyźnie możemy opisać za pomocą równania:

$$ax + by + c = 0, \text{ gdzie } a^2 + b^2 \neq 0$$

- Warunek  $a^2 + b^2 \neq 0$  oznacza, że  $a$  i  $b$  nie mogą być **jednocześnie** równe 0.
- Warunek  $ab \neq 0$  oznacza, że **żadna** z liczb  $a, b$  nie może być równa 0.

- Jeżeli  $b \neq 0$ , to równanie  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$  jest wzorem funkcji liniowej zmiennej  $x$  i opisuje na płaszczyźnie prostą, która jest wykresem tej funkcji.
- Jeżeli  $b = 0$  i  $a \neq 0$ , to równanie  $x = -\frac{c}{a}$  opisuje na płaszczyźnie prostą prostopadłą do osi  $x$ , która nie jest wykresem żadnej funkcji.

Równanie  $ax + by + c = 0$ , w którym  $a$  i  $b$  nie są jednocześnie równe zero, czyli równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**, natomiast równanie  $y = mx + n$  **równaniem kierunkowym prostej o współczynniku kierunkowym  $m$  i wyrazie wolnym  $n$** .

### Przykład 1 ◀ zad. 1.6

Przekształćmy dane równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie

a)  $3x - y - 5 = 0$

$$-y = -3x + 5$$

$$y = 3x - 5$$

b)  $x + 4y - 7 = 0$

$$4y = -x + 7$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

Jeżeli prosta ma równanie w postaci kierunkowej, to jest ono tylko jedno.

### Przykład 2 ◀ zad. 1.8

Przekształćmy dane równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

a)  $y = \sqrt{11}x - 6$

$$-\sqrt{11}x + y + 6 = 0$$

◀ wystarczy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę i uporządkować je

◀ 1.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a)  $y = 3x + 1$

c)  $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$

e)  $y = \frac{3}{4}x - 5$

b)  $y = \frac{1}{5}x - 3$

d)  $y = -5x$

f)  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

Odp.: a)  $3x - y + 1 = 0$  b)  $x - 5y - 15 = 0$  c)  $2x + 9y - 6 = 0$

d)  $5x + y = 0$  e)  $3x - 4y - 20 = 0$  f)  $2x + 14y - 7 = 0$

$$b) y = -\frac{6}{7}x + \frac{3}{2}$$

Równanie danej prostej w postaci ogólnej można zapisać na nieskończenie wiele sposobów (jedne równania powstają z innych przez pomnożenie przez liczbę różną od zera).

$$\frac{6}{7}x + y - \frac{3}{2} = 0$$

$$12x + 14y - 21 = 0$$

← jeżeli zależy nam na współczynnikach całkowitych, to obydwie strony równania mnożymy przez 14

### Przykład 3 ◀ zad. 1.10

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez dane punkty.

a)  $(-1, 1)$  i  $(-1, 12)$

b)  $(-1, -4)$  i  $(7, 12)$

#### Rozwiązanie

a) Pierwsze współrzędne obu punktów są takie same, zatem prosta przechodząca przez te punkty jest prostopadła do osi  $x$  i ma równanie  $x = -1$ .

b) Pierwsze współrzędne obu punktów są różne, zatem do rozwiązania zadania wykorzystamy z równania kierunkowego prostej  $y = mx + n$ .

$$\begin{cases} -4 = -m + n \\ 12 = 7m + n \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = m - n \\ 12 = 7m + n \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = m - n \\ 16 = 8m \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}$$

Odp.: a)  $x = -1$  b)  $y = 2x - 2$

### Przykład 4 ◀ zad. 1.11

Wyznamy punkty przecięcia prostej o równaniu  $2x - 5y + 10 = 0$  z osiami układu współrzędnych.

#### Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią  $x$ , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{każdy punkt osi } x \text{ ma współrzędną } y = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia prostej z osią  $x$  ma współrzędne  $(-5, 0)$ .

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią  $y$ , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{każdy punkt osi } y \text{ ma współrzędną } x = 0$$

$$\begin{cases} -5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia prostej z osią  $y$  ma współrzędne  $(0, 2)$ .

Odp.: Punkty przecięcia prostej z osiami to  $(-5, 0)$  i  $(0, 2)$ .

◀ 1.10. Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

a)  $A = (4, -5)$  i  $B = (2, 3)$

b)  $A = (-9, -1)$  i  $B = (3, 3)$

c)  $A = (2, 6)$  i  $B = \left(7, 3\frac{1}{2}\right)$

d)  $A = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$  i  $B = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

Odp.: a)  $y = -4x + 11$

b)  $y = \frac{1}{3}x + 2$

c)  $y = -\frac{1}{2}x + 7$

d)  $y = x + 1\frac{1}{3}$

◀ 1.11. Wyznam punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a)  $x + 2y - 4 = 0$

b)  $3x - y + 6 = 0$

c)  $-2x + 4y - 1 = 0$

d)  $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$

Odp.: a)  $(0, 2), (4, 0)$

b)  $(0, 6), (-2, 0)$

c)  $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

d)  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Punkt  $A = (x_A, y_A)$  jest punktem wspólnym prostej  $k: a_1x + b_1y + c_1 = 0$  i prostej  $l: a_2x + b_2y + c_2 = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równania obu prostych, czyli gdy para liczb  $(x_A, y_A)$  należy do zbioru rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

### Równania prostych równoległych i prostopadłych

Przypomnijmy zależności między równaniami prostych równoległych i prostych prostopadłych.

| Prosta $k$             | Prosta $l$ taka, że<br>$l \parallel k$ | Prosta $p$ taka, że<br>$p \perp k$ |
|------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|
| $y = mx + n, m \neq 0$ | $y = mx + n_1$                         | $y = -\frac{1}{m}x + n_2$          |
| $x = a$                | $x = a_1$                              | $y = a_2$                          |
| $y = b$                | $y = b_1$                              | $x = b_2$                          |

◀1.20. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $A$  i równoległej do prostej  $l$ .

- a)  $A = (2, 3)$ ,  $l: y = 5x - 2$   
b)  $A = (-3, -1)$ ,  $l: y = \frac{2}{3}x - 2$   
c)  $A = (\frac{1}{2}, 3)$ ,  $l: y = -4x + 1\frac{2}{3}$   
d)  $A = (3, -2)$ ,  $l: x = -2$   
e)  $A = (-4, 5)$ ,  $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$   
f)  $A = (\sqrt{2}, 4)$ ,  $l: y = 2\sqrt{2}x + 3$

Odp.: a)  $y = 5x - 7$

b)  $y = \frac{2}{3}x + 1$

c)  $y = -4x + 5$

d)  $x = 3$

e)  $y = -\frac{1}{2}x + 3$

f)  $y = 2\sqrt{2}x$

### Przykład 5 ◀ zad. 1.20, 1.21

Dana jest prosta  $l: y = -3x + 2$ . Przez punkt  $A = (4, 3)$  poprowadzono prostą  $k$  równoległą do prostej  $l$  oraz prostą  $h$  prostopadłą do  $l$ . Napiszemy równania prostej  $k$  i prostej  $h$ .

#### Rozwiązanie

- $k: y = -3x + n$  ← każda prosta równoległa do  $l$  ma równanie tej postaci  
 $3 = -3 \cdot 4 + n$  ←  $A = (4, 3) \in k$   
 $n = 15$   
 $k: y = -3x + 15$

- $h: y = \frac{1}{3}x + c$  ← każda prosta prostopadła do  $l$  ma równanie tej postaci  
 $3 = \frac{4}{3} + c$  ←  $A = (4, 3) \in h$   
 $c = \frac{5}{3}$   
 $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Odp.:  $k: y = -3x + 15$ ,  $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

◀1.21. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $A$  i prostopadłej do prostej  $l$ .

- a)  $A = (6, 5)$        $l: y = -3x + 1$       d)  $A = (-1, -7)$        $l: y = -0,2x + 5,6$   
b)  $A = (0, -4)$        $l: y = 7x + 1$       e)  $A = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$        $l: x = 1\frac{1}{2}$   
c)  $A = (\sqrt{12}, 4)$        $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$       f)  $A = (-3, 1 + \sqrt{2})$        $l: y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 13$

Odp.: a)  $y = \frac{1}{3}x + 3$     b)  $y = -\frac{1}{7}x - 4$     c)  $y = -\sqrt{3}x + 10$

d)  $y = 5x - 2$     e)  $y = 2\frac{1}{2}$     f)  $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1$



## Wektory w układzie współrzędnych

### Definicja

**Współzrzednymi wektora**  $\overrightarrow{AB}$  o początku  $A = (x_A, y_A)$  i końcu  $B = (x_B, y_B)$  nazywamy uporządkowaną parę liczb  $[x_B - x_A, y_B - y_A]$ .

Dwa wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współzrzedne.

### Twierdzenie

Dane są wektory  $\vec{u} = [a, b]$  i  $\vec{v} = [c, d]$ . Wtedy:

•  $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$       •  $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$       •  $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$

**Środkiem odcinka** o końcach  $A = (x_A, y_A)$  i  $B = (x_B, y_B)$  jest punkt:

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

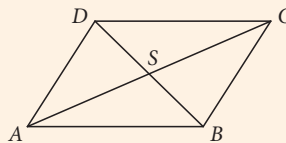
### Przykład 6 ◀ zad. 1.27

Punkty  $A = (-3, 12)$  i  $B = (5, 0)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ , a punkt  $S = (4, 7)$  jest punktem przecięcia jego przekątnych. Wyznamy współzrzedne wierzchołków  $C$  i  $D$  tego równoległoboku.

#### Rozwiązanie

Niech  $C = (x_C, y_C)$ . Punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $AC$ , więc:

$$\begin{aligned} \left( \frac{-3 + x_C}{2}, \frac{12 + y_C}{2} \right) &= (4, 7) \\ \begin{cases} \frac{-3 + x_C}{2} = 4 \\ \frac{12 + y_C}{2} = 7 \end{cases} & \quad x_C = 11, \quad y_C = 2 \end{aligned}$$



Niech  $D = (x_D, y_D)$ . Wówczas  $\overrightarrow{DC} = [11 - x_D, 2 - y_D]$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} && \leftarrow ABCD \text{ jest równoległobokiem} \\ [8, -12] &= [11 - x_D, 2 - y_D] && \leftarrow \overrightarrow{AB} = [8, -12] \\ \begin{cases} 8 = 11 - x_D \\ -12 = 2 - y_D \end{cases} & \quad x_D = 3, \quad y_D = 14 \end{aligned}$$

**Odp.:**  $C = (11, 2)$ ,  $D = (3, 14)$

◀1.27. Punkty  $A = (-8, -5)$  i  $B = (4, -1)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ , a punkt  $P = (0, 3)$  jest środkiem boku  $CD$ . Wyznam współzrzedne wierzchołków  $C$  i  $D$  oraz oblicz długości boków tego równoległoboku.

**Odp.:**  $C = (6, 5)$ ,  $D = (-6, 1)$ ,  $4\sqrt{10}$ ,  $2\sqrt{10}$

◀1.28. Zbadaj współliniowość punktów  $A = (2, 5)$ ,  $B = (-3, 9)$  i  $C = (22, -11)$ .

Odp.: Są współliniowe.

Dwa niezerowe wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba  $k \neq 0$  taka, że  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ .

**Przykład 7** ◀ zad. 1.28

Zbadamy, czy punkty  $A = (-3, 6)$ ,  $B = (-2, 2)$  i  $C = (0, -6)$  są współliniowe.

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy sprawdzić równoległość wektorów  $\vec{AB}$  i  $\vec{AC}$ .

$$\vec{AB} = [1, -4], \quad \vec{AC} = [3, -12]$$

Zatem:

$$\vec{AC} = 3 \cdot \vec{AB}$$

Odp.: Punkty  $A, B, C$  są współliniowe.

Aby zbadać współliniowość punktów  $A, B, C$ , możemy sprawdzać równoległość różnych par wektorów, np. pary  $\vec{AB}$  i  $\vec{BC}$  albo pary  $\vec{AC}$  i  $\vec{BC}$  itd.

### Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. C

1.1. Wskaż równanie, za pomocą którego można opisać wykres funkcji

$$f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}.$$

A.  $-9x + 15y + 10 = 0$

C.  $-9x - 15y + 10 = 0$

B.  $9x - 15y - 10 = 0$

D.  $9x + 15y + 10 = 0$

1.2. D

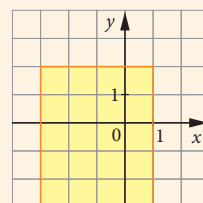
1.2. Wskaż zbiór, którego ilustracją jest figura przedstawiona na rysunku.

A.  $D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 1 \text{ i } y < 2\}$

B.  $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -3 \leq x \leq 2\}$

C.  $D = \{(x, y): -3 < x < 1 \text{ i } y \leq 2\}$

D.  $D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 1 \text{ i } y \leq 2\}$



1.3. C

1.3. Wskaż punkt przecięcia prostej  $18x - 4y - 3 = 0$  z osią  $x$ .

A.  $(0, \frac{1}{6})$

B.  $(-\frac{3}{4}, 0)$

C.  $(\frac{1}{6}, 0)$

D.  $(0, \frac{3}{4})$

**1.4.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równanie  $x + 3y - 2 = 0$  jest równaniem prostej przechodzącej przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.  
 B. Prosta o równaniu  $5x - 7 = 0$  jest równoległa do osi  $y$ .  
 C. Prosta o równaniu  $3y - 3\pi = 0$  nie jest wykresem funkcji.

**1.5.** Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

- a)  $A = \{(x, y): -3 \leq x \leq 1\}$   
 b)  $B = \{(x, y): x \in \langle -2; 4 \rangle \text{ i } y = -\frac{1}{2}x\}$   
 c)  $C = \{(x, y): x < 0 \text{ i } 1 < y < 3\}$   
 d)  $D = \{(x, y): x \in \mathbb{Z} \text{ i } y = 2\}$   
 e)  $E = \{(x, y): x \in \langle -1; 2 \rangle \text{ i } y = 1 - 2x\}$   
 f)  $F = \{(x, y): x \in \langle 0; 3 \rangle \text{ i } y \in \langle -3; 0 \rangle\}$   
 g)  $G = \{(x, y): |x| < 5 \text{ i } y = |x| + 1\}$   
 h)  $H = \{(x, y): |x| < 4 \text{ i } y = \sqrt{|-x|}\}$

**1.6.** Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

- a)  $2x - y = 0$                       c)  $2y - 8 = 0$                       e)  $-6x - 2y + 1 = 0$   
 b)  $\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$                   d)  $3x - 5 = 0$                       f)  $x - 3y - 4 = 0$

**1.7.** Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej o podanym równaniu.

- a)  $5x + y + 1 = 0$                       c)  $3x - 4y + 2 = 0$   
 b)  $x - y + 9 = 0$                       d)  $\pi x - 2y + 3 = 0$

**1.8.** Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

- a)  $y = 3x + 1$                       c)  $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$                       e)  $y = \frac{3}{4}x - 5$   
 b)  $y = \frac{1}{5}x - 3$                       d)  $y = -5x$                       f)  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

**1.9.** Sprawdź, czy oba równania przedstawiają tę samą prostą.

- a)  $x - y + \frac{5}{2} = 0$ ,  $-x + y - 2\frac{1}{2} = 0$                       d)  $4x - 2y + 1 = 0$ ,  $-2x + y - 1 = 0$   
 b)  $-2x + y = 0$ ,  $2x - y = 0$                       e)  $7x - 5 = 0$ ,  $7y - 5 = 0$   
 c)  $-3x + 5y - 1 = 0$ ,  $3x + 5y - 1 = 0$                   f)  $1\frac{1}{2}x + 3y - 4 = 0$ ,  $3x + 6y - 8 = 0$

**1.10.** Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

- a)  $A = (4, -5)$  i  $B = (2, 3)$                       c)  $A = (2, 6)$  i  $B = (7, 3\frac{1}{2})$   
 b)  $A = (-9, -1)$  i  $B = (3, 3)$                       d)  $A = (-1, \frac{1}{3})$  i  $B = (-\frac{1}{3}, 1)$

**1.4.** P, P, F**1.6. a)**  $y = 2x$ 

b)  $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

c)  $y = 4$

d) brak równania w postaci kierunkowej

e)  $y = -3x + \frac{1}{2}$

f)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

**1.7. a)**  $a = -5$ 

b)  $a = 1$

c)  $a = \frac{3}{4}$

d)  $a = \frac{\pi}{2}$

**1.8. a)**  $3x - y + 1 = 0$ 

b)  $x - 5y - 15 = 0$

c)  $2x + 9y - 6 = 0$

d)  $5x + y = 0$

e)  $3x - 4y - 20 = 0$

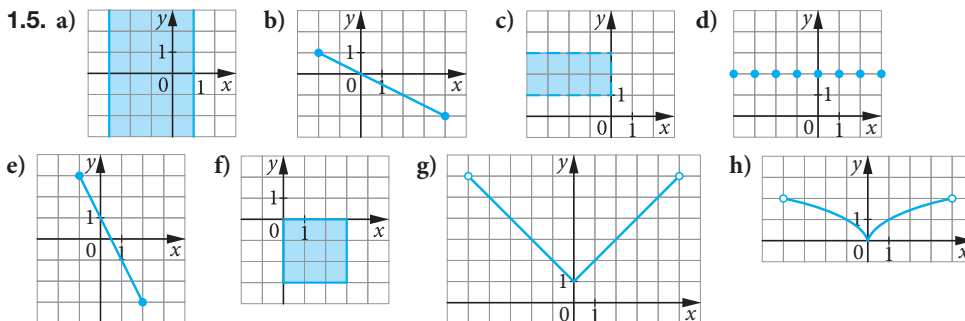
f)  $2x + 14y - 7 = 0$

**1.9. a), b), f)** tak    **c), d), e)** nie**1.10. a)**  $y = -4x + 11$ 

b)  $y = \frac{1}{3}x + 2$

c)  $y = -\frac{1}{2}x + 7$

d)  $y = x + 1\frac{1}{3}$



- 1.11. a)**  $(0, 2), (4, 0)$   
**b)**  $(0, 6), (-2, 0)$   
**c)**  $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$   
**d)**  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

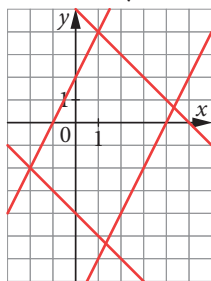
- 1.12. a)** np.  $(-3, 3), (0, 2), \left(1, 1\frac{2}{3}\right), (3, 1), (6, 0)$   
**b)** np.  $\left(-2, \frac{6}{7}\right), \left(-\frac{2}{7}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{7}\right), \left(2, -1\frac{1}{7}\right), \left(-4, 1\frac{6}{7}\right)$

- 1.13. a)**  $(0, 2)$   
**b)**  $(3, -1)$   
**c)**  $(1, -4)$   
**d)** brak punktów wspólnych  
**e)**  $(0, -2)$   
**f)** proste pokrywają się

**1.14.** Szukany zbiór punktów to:

- a)** suma dwóch prostych:  $x = 7$  i  $y = 0$ ,  
**b)** suma dwóch prostych:  $x = -3$  i  $y = x$ ,  
**c)** prosta  $x = 6$ ,  
**d)** suma dwóch prostych:  $x = 1$  i  $x = 3$ ,  
**e)** punkt  $(-5, 2)$ ,  
**f)** prosta  $x = -3$ ,  
**g)** punkt  $(-7, 1)$ ,  
**h)** prosta  $y = -5$ .

- 1.15.** nie ma osi symetrii, ma środek symetrii



- 1.16.**  $m \in \langle -4; 6 \rangle$

- 1.17.**  $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

- 1.18. a)**  $m \in \langle -2; 1 \rangle$   
**b)**  $m \in (-\infty; -2)$   
**c)**  $m \in \langle 1; \infty \rangle$   
**d)** Nie ma takiego  $m$ .

- 1.19. a)**  $m \in (-3; -1)$   
**b)**  $m \in (-\infty; -5)$

**1.11.** Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

- a)**  $x + 2y - 4 = 0$  **c)**  $-2x + 4y - 1 = 0$   
**b)**  $3x - y + 6 = 0$  **d)**  $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$

**1.12.** Napisz pięć par liczb spełniających podane równanie.

- a)**  $x + 3y - 6 = 0$  **b)**  $7x + 14y + 2 = 0$

**1.13.** Wyznacz punkt wspólny prostych  $k$  i  $l$ .

- a)**  $k: 2x - 3y + 6 = 0$  **l:**  $x + 2y - 4 = 0$   
**b)**  $k: -\frac{2}{3}x - y + 1 = 0$  **l:**  $x - y - 4 = 0$   
**c)**  $k: 4x - y - 8 = 0$  **l:**  $x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$   
**d)**  $k: -3x + y - 2 = 0$  **l:**  $1,5x - 0,5y + 2 = 0$   
**e)**  $k: 3x + 0,6y + 1,2 = 0$  **l:**  $2x - 3y - 6 = 0$   
**f)**  $k: 5x + 3y - 6 = 0$  **l:**  $2x + 1,2y - 2,4 = 0$

**1.14.** Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów opisany danym równaniem.

- a)**  $(x - 7)y = 0$  **e)**  $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 0$   
**b)**  $(x + 3)(x - y) = 0$  **f)**  $(x + 3)^2 = 0$   
**c)**  $x^2 - 12x + 36 = 0$  **g)**  $|x + 7| + |y - 1| = 0$   
**d)**  $x^2 - 4x + 3 = 0$  **h)**  $y^2 + 10y + 25 = 0$

**1.15.** Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach:  $y = -x + 5$ ,  $y = 2x - 8$ ,  $y = -x - 4$  oraz  $y = 2x + 2$ . Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

**1.16.** Dla jakich wartości  $m$  wykres funkcji  $f(x) = -|x| + m$  ma co najmniej jeden punkt wspólny z równoległobokiem o wierzchołkach  $(0, -4)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(-2, 0)$ ?

**1.17.** Dla jakich wartości  $m$  wykres funkcji  $f(x) = mx + m + 4$  ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach  $(3, 3)$ ,  $(-3, 3)$ ,  $(-3, -1)$ ,  $(3, -1)$ ?

**1.18.** Dobierz  $m$  tak, aby prosta o równaniu  $(m + 2)x + y = m - 1$  nie miała punktów wspólnych z podaną ćwiartką układu współrzędnych.

- a)** I **b)** II **c)** III **d)** IV

**1.19.** Dla jakich wartości  $m$  prosta o podanym równaniu przechodzi przez pierwszą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych?

- a)**  $(m + 3)x - y + m + 1 = 0$  **b)**  $(1 - m)x - y + m + 5 = 0$



**1.20.** Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $A$  i równoległej do prostej  $l$ .

- a)  $A = (2, 3)$        $l: y = 5x - 2$       d)  $A = (3, -2)$        $l: x = -2$   
 b)  $A = (-3, -1)$        $l: y = \frac{2}{3}x - 2$       e)  $A = (-4, 5)$        $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$   
 c)  $A = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$        $l: y = -4x + 1\frac{2}{3}$       f)  $A = (\sqrt{2}, 4)$        $l: y = 2\sqrt{2}x + 3$

**1.21.** Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $A$  i prostopadłej do prostej  $l$ .

- a)  $A = (6, 5)$        $l: y = -3x + 1$       d)  $A = (-1, -7)$        $l: y = -0,2x + 5,6$   
 b)  $A = (0, -4)$        $l: y = 7x + 1$       e)  $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$        $l: x = 1\frac{1}{2}$   
 c)  $A = (\sqrt{12}, 4)$        $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$       f)  $A = (-3, 1 + \sqrt{2})$        $l: y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 13$

**1.22.** Oblicz współrzędne środka odcinka  $AB$ .

- a)  $A = (2, 3)$ ,  $B = (8, 5)$       c)  $A = (0, -1)$ ,  $B = (-5, 3)$   
 b)  $A = (-1, 4)$ ,  $B = (-3, -2)$       d)  $A = (1, -7)$ ,  $B = (-8, 0)$

**1.23.** Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $AB$  o danym końcu  $A$ . Wyznacz współrzędne punktu  $B$ .

- a)  $A = (3, 4)$ ,  $M = (1, 7)$       c)  $A = (4, -16)$ ,  $M = (-3, -8)$   
 b)  $A = (-1, 5)$ ,  $M = (0, 1)$       d)  $A = (-7, -2)$ ,  $M = (-1, 3)$

**1.24.** Punkty  $M = (2, 0)$  i  $N = (5, -2)$  dzielą odcinek  $AB$  na trzy równe części. Znajdź współrzędne końców tego odcinka.

**1.25.** Wyznacz współrzędne środków boków trójkąta o wierzchołkach:  $A = (3, 1)$ ,  $B = (-5, 5)$ ,  $C = (2, -3)$ .

**1.26.** Dane są współrzędne trzech wierzchołków równoległoboku  $ABCD$ . Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

- a)  $A = (-4, -2)$ ,  $B = (2, 3)$ ,  $C = (3, 8)$       b)  $B = (-3, 0)$ ,  $C = (4, -3)$ ,  $D = (2, 3)$

**1.27.** Punkty  $A = (-8, -5)$  i  $B = (4, -1)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ , a punkt  $P = (0, 3)$  jest środkiem boku  $CD$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $C$  i  $D$  oraz oblicz długości boków tego równoległoboku.

**1.28.** Zbadaj współliniowość punktów  $A = (2, 5)$ ,  $B = (-3, 9)$  i  $C = (22, -11)$ .

**1.20. a)**  $y = 5x - 7$

**b)**  $y = \frac{2}{3}x + 1$

**c)**  $y = -4x + 5$

**d)**  $x = 3$

**e)**  $y = -\frac{1}{2}x + 3$

**f)**  $y = 2\sqrt{2}x$

**1.21. a)**  $y = \frac{1}{3}x + 3$

**b)**  $y = -\frac{1}{7}x - 4$

**c)**  $y = -\sqrt{3}x + 10$

**d)**  $y = 5x - 2$

**e)**  $y = 2\frac{1}{2}$

**f)**  $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1$

**1.22. a)**  $(5, 4)$       **b)**  $(-2, 1)$

**c)**  $\left(-2\frac{1}{2}, 1\right)$       **d)**  $\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$

**1.23. a)**  $B = (-1, 10)$

**b)**  $B = (1, -3)$

**c)**  $B = (-10, 0)$

**d)**  $B = (5, 8)$

**1.24.**  $A = (-1, 2)$ ,  $B = (8, -4)$

**1.25.**  $(-1, 3)$ ,  $\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$ ,  $\left(-1\frac{1}{2}, 1\right)$

**1.26. a)**  $D = (-3, 3)$

**b)**  $A = (-5, 6)$

**1.27.**  $C = (6, 5)$ ,  $D = (-6, 1)$ ,  
 $4\sqrt{10}$ ,  $2\sqrt{10}$

**1.28.** Są współliniowe.

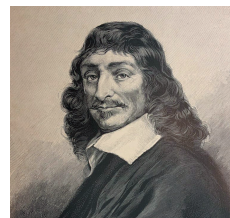
## 2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej

### Umiejętności:

- obliczanie odległości między dwoma punktami
- wyznaczanie współrzędnych środka odcinka

Planimetria jest częścią geometrii zajmującą się badaniem własności figur na płaszczyźnie, a jej początki sięgają czasów przed naszą erą. Około 300 lat p.n.e. w dziele *Elementy* Euklides zawarł znane wówczas twierdzenia planimetrii w formie teorii aksjomatycznej.

W pierwszej i drugiej klasie prezentowaliśmy fragmenty geometrii euklidesowej. Tutaj przedstawimy inny sposób opisywania własności figur na płaszczyźnie, nazywany **geometrią analityczną**. Jej twórcy, żyjącemu w XVII w. Kartezjuszowi, matematyka zawdzięcza m.in. wprowadzenie pojęcia układu współrzędnych. W geometrii analitycznej badanie figur sprowadza się do badania opisujących je liczb i funkcji.



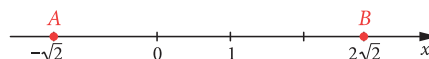
**René Descartes**, Kartezjusz (1596–1650)

– matematyk, fizyk i filozof francuski. Autor licznych dzieł naukowych, m.in. *Rozprawy o metodzie*. W tym traktacie filozoficzno-matematycznym znalazł się pierwszy opis układu współrzędnych na płaszczyźnie; stamtąd pochodzi też słynna maksyma „Myślę, więc jestem” (*Cogito ergo sum*). Kartezjusz wprowadził m.in. pojęcia zmiennej i funkcji, sformułował prawa odbicia i załamania światła oraz zależność między masą a prędkością ciała, zbliżoną do obecnej zasady zachowania pędu.

### Odległość między punktami

Przypomnijmy:

- Płaszczyznę kartezjańską nazywamy płaszczyznę z wprowadzonym na niej prostokątnym układem współrzędnych.
- Odległość między punktami  $A$  i  $B$ , czyli długość odcinka  $AB$ , oznaczamy  $|AB|$ .
- Odległość między punktami  $A = (a)$  i  $B = (b)$  na osi liczbowej jest równa  $|AB| = |a - b|$ .



Zatem gdy  $A = (-\sqrt{2})$  i  $B = (2\sqrt{2})$ , to  $|AB| = |-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ .

#### ZZ i MKP

tematy 2.1, 2.2

#### Multiteka

- Środek ciężkości trójkąta

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.2

**Generator**  
testów i sprawdzianów

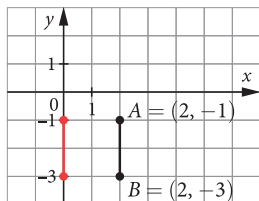
Pokażemy teraz, jak mierzy się odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej. Przeanalizujemy najpierw sytuację, gdy pierwsze lub drugie współrzędne punktów są takie same.

Do obliczania odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej musimy mieć identyczne jednostki na obydwu osiach.

### Przykład 1

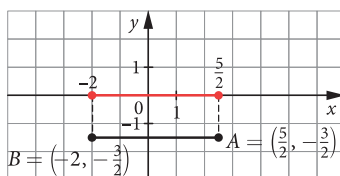
- a) Długość odcinka  $AB$  jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom  $-1$  i  $-3$  na osi  $y$ , czyli:

$$|AB| = |-1 - (-3)| = |2| = 2$$



- b) Długość odcinka  $AB$  jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom  $\frac{5}{2}$  i  $-2$  na osi  $x$ , czyli:

$$|AB| = \left| \frac{5}{2} - (-2) \right| = 4\frac{1}{2}$$



### Przykład 2

Obliczmy odległość między punktami  $A = (1, 2)$  i  $B = (5, -1)$ .

**Rozwiązanie**

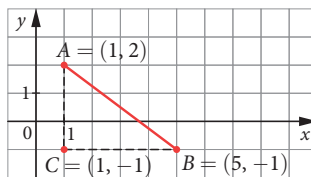
Odcinek  $AB$  jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$$|AC| = |2 - (-1)| = 3, \quad |BC| = |5 - 1| = 4$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2, \quad |AB|^2 = 3^2 + 4^2, \quad \text{czyli } |AB|^2 = 25$$

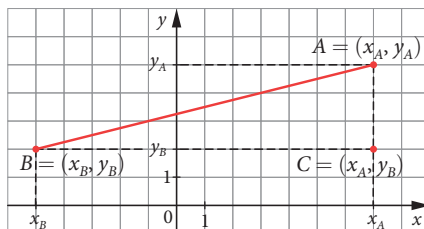
Odp.:  $|AB| = 5$



Powtórzmy rozumowanie z przykładu 2 dla dwóch dowolnych punktów. Przyjmijmy, że na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są dwa punkty o współrzędnych:

$$A = (x_A, y_A) \text{ i } B = (x_B, y_B)$$

Wprowadzony pomocniczo punkt  $C$  ma współrzędne  $C = (x_A, y_B)$ .



Odcinek  $AB$  jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$$|BC| = |x_A - x_B|$$

← drugie współrzędne punktów  $B$  i  $C$  są równe

$$|AC| = |y_A - y_B|$$

← pierwsze współrzędne punktów  $A$  i  $C$  są równe

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$$

$$|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2, \text{ stąd } |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Dla dowolnej liczby  $a \in \mathbf{R}$ :  $|a|^2 = a^2$ .



Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

### Twierdzenie

Jeżeli na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są punkty o współrzędnych  $A = (x_A, y_A)$  i  $B = (x_B, y_B)$ , to odległość między nimi jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Ponieważ  $|a - b| = |b - a|$  oraz  $(a - b)^2 = (b - a)^2$ , otrzymany wzór można zapisać w postaci:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

◀2.4. Oblicz odległość punktu  $P$  od początku układu współrzędnych.

- a)  $P = (-4, 3)$   
 b)  $P = (2, -5)$   
 c)  $P = (-3, -9)$   
 d)  $P = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

Odp.: a) 5 b)  $\sqrt{29}$

c)  $3\sqrt{10}$  d) 6

◀2.5. Oblicz odległość między podanymi punktami.

- a)  $A = (3, 7)$  i  $B = (11, 7)$   
 b)  $P = (-2, 5)$  i  $Q = (5, 5)$   
 c)  $K = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$   
 i  $L = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$   
 d)  $M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  i  $N = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Odp.: a) 8 b) 7 c)  $3\sqrt{2}$  d)  $\frac{2}{3}$

Przykład 3 ◀ zad. 2.4, 2.5

Obliczymy odległość między punktami  $A$  i  $B$  o podanych współrzędnych.

Rozwiązanie

a)  $A = (3, 1)$ ,  $B = (5, 3)$

$$|AB| = \sqrt{(3-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

b)  $A = (-7, -3)$ ,  $B = (17, -13)$

$$|AB| = \sqrt{[17 - (-7)]^2 + [-13 - (-3)]^2} = \sqrt{24^2 + (-10)^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26$$

c)  $A = (-\sqrt{3}, 7)$ ,  $B = (\sqrt{2}, 3 - \sqrt{5})$

$$|AB| = \sqrt{(-\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + [7 - (3 - \sqrt{5})]^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{6} + 2 + (4 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6} + 16 + 8\sqrt{5} + 5} = \sqrt{26 + 2\sqrt{6} + 8\sqrt{5}}$$

**Przykład 4** ◀ zad. 2.7

Obliczmy obwód i pole trójkąta o wierzchołkach:

$$A = (1, 2), B = (-5, -2), C = (-3, -5).$$

**Rozwiązanie**

$$|AB| = \sqrt{(1+5)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$|BC| = \sqrt{(-5+3)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{13}$$

$$|AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{65}$$

Obwód trójkąta jest równy:

$$\begin{aligned} |AB| + |CB| + |CA| &= 2\sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{65} = \\ &= 3\sqrt{13} + \sqrt{65} \end{aligned}$$

Na podstawie rysunku można przypuszczać, że trójkąt

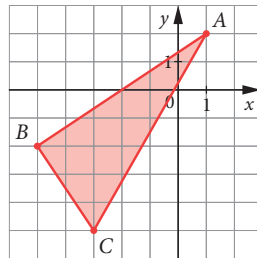
$ABC$  jest prostokątny. Sprawdźmy rachunkowo, czy rzeczywiście tak jest:

$$|AB|^2 + |CB|^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65 = (\sqrt{65})^2 = |CA|^2$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, z kątem prostym przy wierzchołku  $B$ . Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

Odp.: Obwód trójkąta jest równy  $3\sqrt{13} + \sqrt{65}$ , a jego pole wynosi 13.

**Przykład 5** ◀ zad. 2.10

Dane są równania boków trójkąta:

$$AB: 3x - y + 7 = 0, AC: x - y - 1 = 0$$

$$\text{i } BC: x + y - 3 = 0.$$

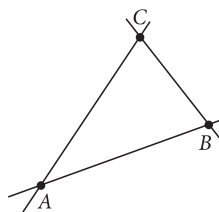
Obliczmy jego obwód.

**Rozwiązanie**

Do obliczenia długości boków trójkąta potrzebne są współrzędne jego wierzchołków. Aby je znaleźć, należy rozwiązać odpowiednie układy równań (rachunki zostawiamy do samodzielnego wykonania).

$$\begin{aligned} &\bullet \begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{punkt przecięcia prostych } AB \text{ i } AC \\ &\quad A = (-4, -5) \\ &\bullet \begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{punkt przecięcia prostych } AB \text{ i } BC \\ &\quad B = (-1, 4) \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętą w naszych podręcznikach zasadą „równanie boku trójkąta” oznacza skrót określenia „równanie prostej, w której zawiera się bok trójkąta”. Podobnie należy rozumieć „równanie wysokości trójkąta”, „równanie dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta” itp.



◀2.7. Oblicz obwód trójkąta o danych wierzchołkach.

a)  $A = (3, 1), B = (4, 3), C = (-2, 6)$

b)  $A = (-2, -2), B = (-1, -7), C = (2, -5)$

c)  $A = (-1, -1), B = (-2, 3), C = (3, 1)$

d)  $A = (3, 3), B = (0, 4), C = (0, 0)$

Odp.: a)  $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

b)  $5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$

c)  $2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$

d)  $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$

◀2.10. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.

a)  $7x + y + 16 = 0,$

$3x + 4y - 36 = 0, 4x - 3y + 2 = 0$

b)  $x + 2y - 6 = 0, x - y - 3 = 0,$   
 $x + 4 = 0$

c)  $4x + 3y - 2 = 0, 3x + 4y + 2 = 0,$   
 $x - y + 3 = 0$

d)  $3x - 4y - 15 = 0,$

$2x - 5y - 10 = 0, 4x - 3y - 6 = 0$

Odp.: a)  $10(2 + \sqrt{2})$

b)  $4(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3)$

c)  $10 + \sqrt{2}$

d)  $15 + \sqrt{29}$



$$\bullet \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{punkt przecięcia prostych } AC \text{ i } BC \\ \text{jest wierzchołkiem } C \text{ trójkąta}$$

$$C = (2, 1)$$

Obliczamy długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (4 + 5)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{(2 + 4)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(2 + 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

Odp.: Trójkąt  $ABC$  ma obwód równy  $3\sqrt{10} + 9\sqrt{2}$ .

### Przykład 6

Obliczymy obwód i pole czworokąta  $ABCD$ , w którym  $A = (4, 1)$ ,  $B = (2, 5)$ ,  $C = (-2, 3)$ ,  $D = (0, -1)$ .

Rozwiązanie

$$|AB| = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$|CD| = \sqrt{2^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$|DA| = \sqrt{4^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

Czworokąt  $ABCD$  jest rombem, a ponadto:

$$|DB| = \sqrt{2^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

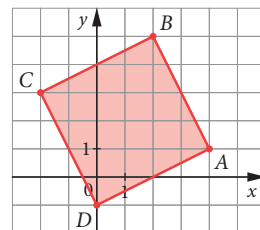
$$|DB|^2 = 40, |AB|^2 = 20, |DA|^2 = 20$$

$$|DB|^2 = |AB|^2 + |DA|^2$$

Czworokąt  $ABCD$  jest rombem o kątach prostych, czyli kwadratem.

Obwód tego kwadratu jest równy  $8\sqrt{5}$ , a pole 20.

Odp.: Obwód czworokąta  $ABCD$  wynosi  $8\sqrt{5}$ , a jego pole 20.



## Środek ciężkości trójkąta

### Przykład 7

W trójkącie o wierzchołkach  $A = (-2, 4)$ ,  $B = (0, -2)$  i  $C = (6, 4)$  poprowadzono środkową boku  $AC$ . Napiszemy równanie tej środkowej.

Środkową boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

**Rozwiązanie**

Szukana środkowa przechodzi przez środek boku  $AC$  oraz wierzchołek  $B$ . Środek boku  $AC$  ma współrzędne  $(2, 4)$ , punkt  $B = (0, -2)$ , zatem środkowa boku  $AC$  jest prostą o równaniu kierunkowym  $y = ax + b$ .

Wyznaczamy współczynniki  $a$  i  $b$ .

$$\begin{cases} 4 = 2a + b \\ -2 = b \end{cases}$$

Stąd  $a = 3$  i  $b = -2$ .

Odp.: Śródkowa boku  $AC$  ma równanie  $y = 3x - 2$ .

Przypomnijmy poznane w drugiej klasie twierdzenie o środkowych w trójkącie.

**Twierdzenie**

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku  $2 : 1$  (licząc od wierzchołka).

Udowodnimy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie**

Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  i  $C = (x_C, y_C)$  jest punkt:

$$S = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

**Dowód**

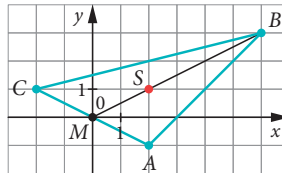
Niech punkt  $M$  oznacza środek boku  $AC$ . Zatem:

$$M = \left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$$

Niech  $S = (x_S, y_S)$  będzie punktem, który dzieli środkową  $BM$  tak, że  $|BS| : |SM| = 2 : 1$ . Zatem  $\vec{BS} = \frac{2}{3} \vec{BM}$ .

$$[x_S - x_B, y_S - y_B] = \frac{2}{3} [x_M - x_B, y_M - y_B]$$

Środkiem odcinka o końcach  $A = (x_A, y_A)$  i  $B = (x_B, y_B)$  jest punkt  $M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ .



$$\begin{cases} x_S - x_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_A + x_C}{2} - \frac{2}{3}x_B \\ y_S - y_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_A + y_C}{2} - \frac{2}{3}y_B \end{cases}$$

Przekształcamy układ równań i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_S - x_B = \frac{x_A + x_C}{3} - \frac{2}{3}x_B \\ y_S - y_B = \frac{y_A + y_C}{3} - \frac{2}{3}y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_S - 3x_B = x_A + x_C - 2x_B \\ 3y_S - 3y_B = y_A + y_C - 2y_B \end{cases} \quad \begin{cases} x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Punkt  $S$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$  i  $S = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$ .

Koniec dowodu

**Współrzędne środka ciężkości trójkąta są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków tego trójkąta.**

◀ **2.14.** Wyznacz środek ciężkości trójkąta  $ABC$ .

a)  $A = (-1, 2)$ ,  $B = (3, 5)$ ,  
 $C = (4, -10)$

b)  $A = (-5, -6)$ ,  $B = (-2, 4)$ ,  
 $C = (16, -1)$

Odp.: a)  $S = (2, -1)$

b)  $S = (3, -1)$

◀ **2.19.** W trójkącie  $ABC$  dane są: punkt  $B = (6, 0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = [-5, 10]$  i środek ciężkości  $S = (1, 1)$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $A$  i  $C$  tego trójkąta.

Odp.:  $A = (-4, -7)$ ,  $C = (1, 10)$

**Przykład 8** ◀ zad. 2.14

Wyznamy środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach  $A = (-5, 8)$ ,  $B = (-1, -2)$  i  $C = (4, 5)$ .

**Rozwiązanie**

Niech  $S$  oznacza środek ciężkości tego trójkąta. Zatem:

$$S = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left( \frac{-5 - 1 + 4}{3}, \frac{8 - 2 + 5}{3} \right) = \left( -\frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

Odp.:  $S = \left( -\frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right)$

**Przykład 9** ◀ zad. 2.19

W trójkącie  $ABC$  dane są: punkt  $A = (-5, 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [11, -10]$  i środek ciężkości  $S = (1, 0)$ . Wyznamy współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$  tego trójkąta.

**Rozwiązanie**

Niech  $B = (x_B, y_B)$ .

$$[11, -10] = [x_B + 5, y_B - 2]$$

$$\begin{cases} 11 = x_B + 5 \\ -10 = y_B - 2 \end{cases}$$

Stąd  $x_B = 6$  i  $y_B = -8$ , czyli  $B = (6, -8)$ .

Do obliczenia współrzędnych wierzchołka  $C$  zastosujemy wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta.

$$(1, 0) = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

$$(1, 0) = \left( \frac{-5 + 6 + x_C}{3}, \frac{2 - 8 + y_C}{3} \right)$$

$$\begin{cases} 3 = 1 + x_C \\ 0 = -6 + y_C \end{cases}$$

Zatem  $C = (2, 6)$ .

Odp.:  $B = (6, -8)$ ,  $C = (2, 6)$

### Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

**2.1.** Odległość punktu  $A = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$  od początku układu współrzędnych wynosi

- A.  $2\sqrt{3}$ .      B. 3.      C.  $\sqrt{6}$ .      D. 6.

**2.2.** Długość odcinka o końcach  $G = (2\sqrt{7}, 0)$  oraz  $R = (\sqrt{7}, -\sqrt{2})$  jest równa

- A. 3.      B.  $2\sqrt{7}$ .      C.  $2\sqrt{14}$ .      D.  $4\sqrt{14}$ .

**2.3.** Obwód trójkąta o wierzchołkach  $A = (-1, -2)$ ,  $B = (2, 2)$ ,  $C = (-2, -1)$  wynosi

- A. 12.      B.  $12 + \sqrt{2}$ .      C.  $10 + \sqrt{2}$ .      D.  $\sqrt{102}$ .

**2.4.** Oblicz odległość punktu  $P$  od początku układu współrzędnych.

- a)  $P = (-4, 3)$       c)  $P = (-3, -9)$   
b)  $P = (2, -5)$       d)  $P = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

**2.5.** Oblicz odległość między podanymi punktami.

- a)  $A = (3, 7)$  i  $B = (11, 7)$       c)  $K = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  i  $L = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$   
b)  $P = (-2, 5)$  i  $Q = (5, 5)$       d)  $M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  i  $N = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

**2.6.** Oblicz długość odcinka  $AB$ .

- a)  $A = (1, -2)$ ,  $B = (4, 2)$       c)  $A = (-6, -1)$ ,  $B = (6, 8)$   
b)  $A = (5, -3)$ ,  $B = (-1, 5)$       d)  $A = (-35, -4)$ ,  $B = (5, 5)$

### Odpowiedzi i rozwiązania

**2.1.** C

**2.2.** A

**2.3.** C

**2.4.** a) 5    b)  $\sqrt{29}$   
c)  $3\sqrt{10}$     d) 6

**2.5.** a) 8    b) 7    c)  $3\sqrt{2}$     d)  $\frac{2}{3}$

**2.6.** a) 5    b) 10    c) 15    d) 41

2.7. a)  $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

b)  $5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$

c)  $2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$

d)  $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$

2.8. a) 18 b)  $32 + \sqrt{10}$

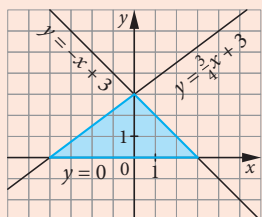
c)  $10\sqrt{2}$  d)  $14 + \sqrt{10}$

2.10. a)  $10(2 + \sqrt{2})$

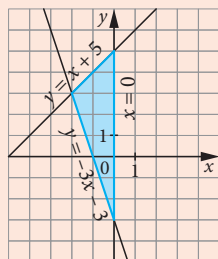
b)  $4(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3)$

c)  $10 + \sqrt{2}$  d)  $15 + \sqrt{29}$

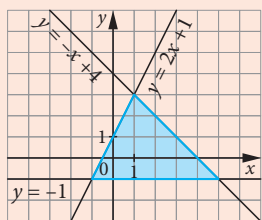
2.11. a)  $P = 10\frac{1}{2}$



b)  $P = 8$



c)  $P = 12$



2.12.  $5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}$

2.13. boki:  $2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}$ , przekątne:  $4\sqrt{2}, 8\sqrt{2}$

2.14. a)  $S = (2, -1)$

b)  $S = (3, -1)$

2.9. a)  $|PQ| = \sqrt{(3-5)^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$|QR| = \sqrt{3^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$|PR| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$|PQ|^2 + |QR|^2 = 40 + 10 = 50 = |PR|^2$

Zatem trójkąt PQR jest prostokątny ( $\angle Q = 90^\circ$ ).

$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |QR| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$

b)  $|PQ| = \sqrt{(2+6)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$|QR| = \sqrt{(-3-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$|PR| = \sqrt{(-3+6)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$|QR|^2 + |PR|^2 = 34 + 34 = 68 = |PQ|^2$

Zatem trójkąt PQR jest prostokątny ( $\angle R = 90^\circ$ ).

$P_{PQR} = \frac{1}{2}|QR| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{34})^2 = 17$

2.7. Oblicz obwód trójkąta o danych wierzchołkach.

a)  $A = (3, 1), B = (4, 3), C = (-2, 6)$

b)  $A = (-2, -2), B = (-1, -7), C = (2, -5)$

c)  $A = (-1, -1), B = (-2, 3), C = (3, 1)$

d)  $A = (3, 3), B = (0, 4), C = (0, 0)$

2.8. Oblicz obwód wielokąta, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty.

a)  $A = (-3, -2), B = (1, 1), C = (5, -2)$

b)  $A = (5, 8), B = (-4, -4), C = (4, 11)$

c)  $A = (0, 0), B = (2, 2), C = (-1, 5), D = (-3, 3)$

d)  $A = (-2, -2), B = (2, 1), C = (2, 5), D = (-1, 1)$

D

2.9. Wykaż, że trójkąt PQR jest prostokątny i oblicz jego pole.

a)  $P = (5, 0), Q = (3, 6), R = (0, 5)$

b)  $P = (-6, -4), Q = (2, -2), R = (-3, 1)$

c)  $P = (4, -3), Q = (2, 5), R = (-2, 4)$

d)  $P = (-4, -6), Q = (6, -1), R = (-6, -2)$

2.10. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.

a)  $7x + y + 16 = 0$

$3x + 4y - 36 = 0$

$4x - 3y + 2 = 0$

b)  $x + 2y - 6 = 0$

$x - y - 3 = 0$

$x + 4 = 0$

c)  $4x + 3y - 2 = 0$

$3x + 4y + 2 = 0$

$x - y + 3 = 0$

d)  $3x - 4y - 15 = 0$

$2x - 5y - 10 = 0$

$4x - 3y - 6 = 0$

2.11. Narysuj trójkąt ograniczony podanymi prostymi i oblicz jego pole.

a)  $y = \frac{3}{4}x + 3$

$y = -x + 3$

$y = 0$

b)  $y = x + 5$

$y = -3x - 3$

$x = 0$

c)  $y = -1$

$y = 2x + 1$

$y = -x + 4$

2.12. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta o wierzchołkach:  $A = (-3, -3), B = (3, 1), C = (-9, 5)$ .2.13. Dane są współrzędne wierzchołków  $A = (-3, 1)$  i  $B = (3, 3)$  oraz punktu przecięcia przekątnych  $S = (1, 5)$  równoległoboku ABCD. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

2.14. Wyznacz środek ciężkości trójkąta ABC.

a)  $A = (-1, 2), B = (3, 5), C = (4, -10)$

b)  $A = (-5, -6), B = (-2, 4), C = (16, -1)$

c)  $|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$|QR| = \sqrt{(2+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$|PR| = \sqrt{(-2-4)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$

$|PQ|^2 + |QR|^2 = 68 + 17 = 85 = |PR|^2$

Zatem trójkąt PQR jest prostokątny ( $\angle Q = 90^\circ$ ).

$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |QR| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$

d)  $|PQ| = \sqrt{(6+4)^2 + (-1+6)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$|QR| = \sqrt{(6+6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{144+1} = \sqrt{145}$

$|PR| = \sqrt{(-6+4)^2 + (-2+6)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|PQ|^2 + |PR|^2 = 125 + 20 = 145 = |QR|^2$

Zatem trójkąt PQR jest prostokątny ( $\angle P = 90^\circ$ ).

$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 25$

**2.15.** W trójkącie  $ABC$  dane są:  $B = (6, 3)$ ,  $C = (-7, 10)$  oraz środek ciężkości  $S = (-2, 4)$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $A$ .

**2.16.** Oblicz długości środkowych w trójkącie  $ABC$ .

- a)  $A = (2, 6)$ ,  $B = (6, -2)$ ,  $C = (-4, -4)$   
 b)  $A = (1, -3)$ ,  $B = (-2, -1)$ ,  $C = (-5, -3)$   
 c)  $A = (2, 4)$ ,  $B = (-2, 2)$ ,  $C = (-1, 4)$   
 d)  $A = (-2, -4)$ ,  $B = (2, -1)$ ,  $C = (0, -2)$

**D 2.17.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta  $ABCD$  o wierzchołkach:  $A = (4, -4)$ ,  $B = (6, 2)$ ,  $C = (-2, 4)$ ,  $D = (-4, 2)$  są wierzchołkami rombu.

**D 2.18.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta  $ABCD$  o wierzchołkach:  $A = (5, -1)$ ,  $B = (1, 5)$ ,  $C = (-3, 1)$ ,  $D = (-1, -3)$  są wierzchołkami kwadratu.

**2.19.** W trójkącie  $ABC$  dane są: punkt  $B = (6, 0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = [-5, 10]$  i środek ciężkości  $S = (1, 1)$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $A$  i  $C$  tego trójkąta.

### Prosto do matury



**1.** Dane są punkty:  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (1, 3)$ ,  $C = (-3, 1)$ ,  $D = (2, -1)$ . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A.  $|AB| < |CD|$       B.  $|AB| \geq |CD|$       C.  $|CB| < |AD|$

**2.** Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o równaniach  $x + y = 0$ ,  $2x + y - 2 = 0$ ,  $2x - y + 6 = 0$ .

**3.** Punkty  $A = (5, 2)$ ,  $B = (0, 7)$  i  $D = (5, -5)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Oblicz obwód i długości przekątnych tego równoległoboku.

**D 4.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach  $G = (4, -3)$ ,  $H = (-1, 2)$ ,  $L = (7, 0)$  jest prostokątny, i oblicz jego pole.

**5.** W trójkącie  $ABC$  dane są: wierzchołek  $C = (2, 7)$ , środek  $M = (0, 5)$  boku  $AC$  i środek  $K = (4, 3)$  boku  $BC$ . Wyznacz równania środkowych trójkąta  $ABC$ .

**2.18.**  $A = (5, -1)$ ,  $B = (1, 5)$ ,  $C = (-3, 1)$ ,  $D = (-1, -3)$

$K, L, M, N$  – środki boków  $AB, BC, CD, DA$

$$K = \left( \frac{5+1}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (3, 2), L = (-1, 3), M = (-2, -1), N = (2, -2)$$

$$|KL| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$|LM| = \sqrt{(-1+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$|MN| = \sqrt{(2+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$|KN| = \sqrt{(3-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Zatem czworokąt  $KLMN$  jest rombem.

$$|KM| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$|KL|^2 + |LM|^2 = 17 + 17 = 34 = |KM|^2, \text{ więc } \sphericalangle KLM = 90^\circ.$$

Zatem czworokąt  $KLMN$  jest kwadratem.

**2.15.**  $A = (-5, -1)$

**2.16.** Długości środkowych poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków  $A, B$  i  $C$ :

a)  $\sqrt{82}, \sqrt{58}, 10,$

b)  $\frac{\sqrt{85}}{2}, 2, \frac{\sqrt{85}}{2},$

c)  $\frac{\sqrt{53}}{2}, \frac{\sqrt{41}}{2}, \sqrt{2},$

d)  $\frac{\sqrt{61}}{2}, \sqrt{13}, \frac{1}{2}.$

**2.17.**  $A = (4, -4)$ ,  $B = (6, 2)$ ,  $C = (-2, 4)$ ,  $D = (-4, 2)$

$K, L, M, N$  – środki boków  $AB, BC, CD, DA$

$$K = \left( \frac{4+6}{2}, \frac{-4+2}{2} \right) = (5, -1),$$

$$L = (2, 3), M = (-3, 3),$$

$$N = (0, -1)$$

$$|KL| = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|LM| = |2+3| = 5$$

$$|MN| = \sqrt{3^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|KN| = |5-0| = 5$$

$|KL| = |LM| = |MN| = |KN| = 5$ , więc czworokąt  $KLMN$  jest rombem.

**2.19.**  $A = (-4, -7)$ ,  $C = (1, 10)$

### Prosto do matury

**1.** F, P, P

**2.**  $4(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

**3.**  $obw = 10\sqrt{2} + 14,$

$$|BD| = 13, |AC| = \sqrt{29}$$

**4.**  $G = (4, -3)$ ,  $H = (-1, 2)$ ,  $L = (7, 0)$

$$|GH| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|HL| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$|GL| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|GH|^2 + |GL|^2 = 50 + 18 = 68 = |HL|^2$$

Zatem trójkąt  $GHL$  jest prostokątny ( $\sphericalangle G = 90^\circ$ ).

$$P = \frac{1}{2}|GH| \cdot |GL| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15$$

**Odp.:**  $P = 15$

**5.** środkowa z  $A$ :  $y = 3$ ,  
 środkowa z  $B$ :  $y = -x + 5$ ,  
 środkowa z  $C$ :  $x = 2$



### 3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

#### Umiejętności:

- stosowanie geometrycznej interpretacji współczynnika kierunkowego prostej
- opisywanie prostych równoległych i prostopadłych za pomocą równań w postaci ogólnej
- obliczanie odległości punktu od prostej

#### Geometryczna interpretacja współczynnika kierunkowego prostej

Przypomnijmy:

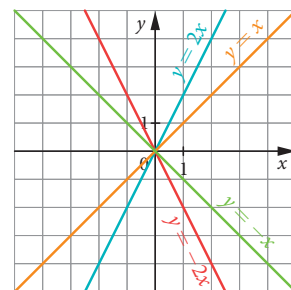
##### Definicja

Współczynnik  $a$ , występujący we wzorze funkcji  $f(x) = ax$  ( $D = \mathbf{R}$ ), nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

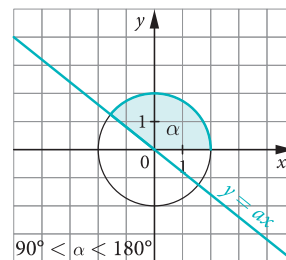
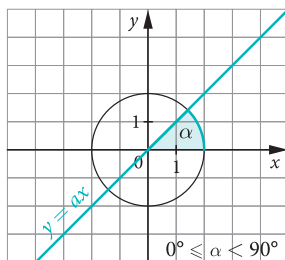
Wykresem funkcji  $f(x) = ax$  jest prosta. Zauważmy, że  $f(0) = 0$  i  $f(1) = a$ , zatem wykres funkcji  $f$  przechodzi przez punkty  $(0, 0)$  oraz  $(1, a)$ .

Jeżeli:

- $a = 0$ , to wykres funkcji pokrywa się z osią  $x$ ,
- $a > 0$ , to wykres zawiera się w I i III ćwiartce układu współrzędnych,
- $a < 0$ , to wykres zawiera się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.



Prosta o równaniu  $y = ax$  wyznacza z osią  $x$  cztery kąty wypukłe. Jeden z nich, na poniższych rysunkach oznaczony  $\alpha$ , nazywamy **kątem nachylenia prostej do osi  $x$** . Mówimy też, że jest to **kąt, jaki prosta tworzy z osią  $x$** .



#### ZZ i MKP

temat 2.3

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

**Generator**  
testów i sprawdzianów

Kąt nachylenia prostej  $y = ax$  do osi  $x$  spełnia zatem następujące warunki:

- jego wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych,
- dodatnia półoś  $x$  jest jego ramieniem początkowym, a ramię końcowe zawiera się w prostej  $y = ax$ ,
- $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$  i  $\alpha \neq 90^\circ$ .

Zauważmy, że jeśli punkt  $P \neq (0, 0)$  należy do wykresu funkcji  $f(x) = ax$ , to jego współrzędne  $(x, y)$  spełniają warunek:

$$\frac{y}{x} = a$$

Z drugiej strony – jeżeli punkt  $P = (x, y)$  leży na końcowym ramieniu kąta  $\alpha$ , który prosta  $y = ax$  tworzy z osią  $x$ , to:

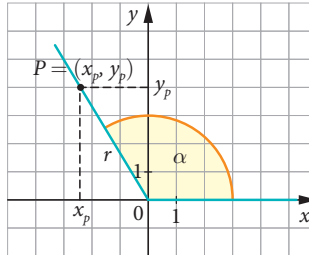
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Zatem **współczynnik kierunkowy  $a$  jest równy tangensowi kąta nachylenia  $\alpha$**  wykresu funkcji  $f(x) = ax$  do osi  $x$ :

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Kąt nachylenia wykresu funkcji  $f(x) = ax$  do osi  $x$  jest kątem:

- zerowym, gdy  $a = 0$ ,
- ostrym, gdy  $a > 0$ ,
- rozwartym, gdy  $a < 0$ .



### Przykład 1 ◀ zad. 3.4

Napiszemy równanie prostej postaci  $y = ax$ , nachylonej do osi  $x$  pod kątem

- a)  $120^\circ$ .                      b)  $45^\circ$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ) = & \text{b) } a &= \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\ &= -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3} & y &= x \\ y &= -\sqrt{3}x \end{aligned}$$

Odp.: a)  $y = -\sqrt{3}x$     b)  $y = x$

### Przykład 2 ◀ zad. 3.5

Wyznamy w przybliżeniu do  $1^\circ$  kąt nachylenia podanej prostej do osi  $x$ .

- a)  $y = 0,4x$                       b)  $y = -4x$

**Rozwiązanie**

a)  $y = 0,4x$ , zatem  $\alpha$  jest takim kątem, że  $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$ .

Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta, którego tangens jest w przybliżeniu równy 0,4:  $\operatorname{tg} 22^\circ \approx 0,4$ .

◀3.4. Napisz równanie prostej postaci  $y = ax$ , która tworzy z osią  $x$  podany kąt.

- a)  $150^\circ$                       c)  $60^\circ$   
b)  $135^\circ$                       d)  $30^\circ$

Odp.: a)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

b)  $y = -x$

c)  $y = \sqrt{3}x$

d)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

◀3.5. Wyznacz kąt nachylenia prostej do osi  $x$ . Wynik podaj z dokładnością do  $1^\circ$ .

- a)  $y = 0,6x$                       c)  $y = 9x$                       e)  $y = 0,06x$   
b)  $y = -2,6x$                       d)  $y = -14x$                       f)  $y = -0,1x$

Odp.: a)  $31^\circ$     b)  $111^\circ$     c)  $84^\circ$     d)  $94^\circ$     e)  $3^\circ$     f)  $174^\circ$

b)  $y = -4x$ , zatem  $\alpha$  jest takim kątem, że  $\operatorname{tg} \alpha = -4$ .

Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta  $\beta$ , którego tangens jest w przybliżeniu równy 4:  $\operatorname{tg} 76^\circ \approx 4$ .

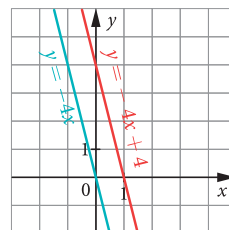
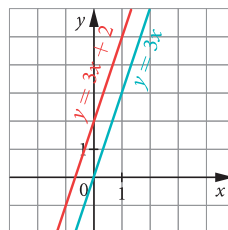
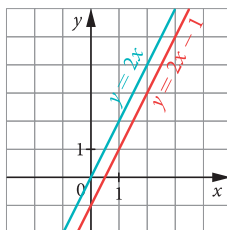
Korzystamy ze wzoru redukcyjnego  $\operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$ .

Zatem:  $-4 = -\operatorname{tg} 76^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 76^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$ , czyli  $\alpha = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$ .

Odp.: a)  $22^\circ$  b)  $104^\circ$

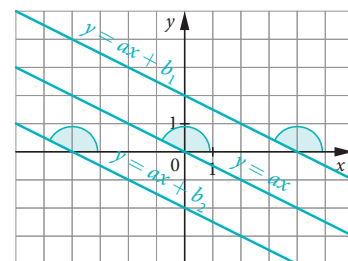
## Równania prostych równoległych na płaszczyźnie

Przypomnijmy: jeżeli wykres funkcji  $y = ax$  przesuniemy równolegle o  $b$  jednostek wzdłuż osi  $y$ , to otrzymamy wykres funkcji  $f(x) = ax + b$ .



Inaczej mówiąc, prosta  $y = ax + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , jest nachylona do osi  $x$  pod takim samym kątem jak prosta  $y = ax$ .

Proste  $k$  i  $l$  na płaszczyźnie nazywamy równoległymi, jeżeli nie mają punktu wspólnego albo gdy mają wszystkie punkty wspólne.



◀ 3.6. Napisz równanie prostej  $l$  nachylonej do osi  $x$  pod kątem  $\alpha$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $P = (4, 18)$

b)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $P = (5, 1)$

c)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $P = (-5, 0)$

d)  $\alpha = 120^\circ$ ,  $P = (\sqrt{3}, 2)$

e)  $\alpha = 0^\circ$ ,  $P = (-3, -2)$

f)  $\alpha = 135^\circ$ ,  $P = (0, -7)$

Odp.: a)  $y = x + 14$

b)  $y = \sqrt{3}x + 1 - 5\sqrt{3}$

c)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}$

d)  $y = -\sqrt{3}x + 5$

e)  $y = -2$

f)  $y = -x - 7$

### Przykład 3 zad. 3.6

Napiszemy równanie prostej nachylonej do osi  $x$  pod kątem  $150^\circ$  i przechodzącej przez punkt  $M = (-3, 5)$ .

#### Rozwiązanie

$$y = ax + b$$

← szukamy współczynników  $a$  i  $b$

$$a = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ więc } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-3) + b$$

← podstawiamy współrzędne punktu  $M$

$$b = 5 + \sqrt{3}, \text{ więc } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$$

Odp.: Szukana prosta ma równanie  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$ .

Udowodnimy twierdzenie, które sformułowaliśmy w klasie pierwszej.

### Twierdzenie

Proste o równaniach kierunkowych  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn. gdy  $a_1 = a_2$ .

### Dowód

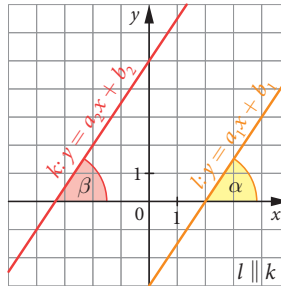
Dwie proste w układzie współrzędnych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich kąty nachylenia do osi  $x$  są równe:

$$\alpha = \beta \quad \leftarrow \text{ kąty odpowiadające}$$

Oznaczmy  $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$  i  $a_2 = \operatorname{tg} \beta$ .

Mamy więc udowodnić dwa twierdzenia:

1. Jeżeli  $\alpha = \beta$ , to  $a_1 = a_2$ .
2. Jeżeli  $a_1 = a_2$ , to  $\alpha = \beta$ .



Pierwsze twierdzenie jest oczywiste: jeżeli  $\alpha = \beta$ , to  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ , czyli  $a_1 = a_2$ .

W drugą stronę: jeżeli  $a_1 = a_2$ , to  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ .

Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami nachylenia prostych do osi  $x$ , czyli  $\alpha, \beta \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle - \{90^\circ\}$ .

Dla takich kątów równość  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$  oznacza, że  $\alpha = \beta$ .

### Koniec dowodu

Zbadamy teraz zależność między równaniami ogólnymi prostych równoległych.

Niech  $k: ax + by + c = 0$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Zastanówmy się, jaką postać mają równania prostych równoległych do prostej  $k$ .

Rozpatrzmy trzy przypadki.

- I. Prosta  $k$  jest równoległa do osi  $y$  (jest prostą pionową,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ ):

$$k: ax + c = 0, \text{ czyli } k: x + \frac{c}{a} = 0, \text{ inaczej: } x + c_1 = 0$$

Prosta  $l$  równoległa do prostej  $k$  jest również prostą równoległą do osi  $y$ , zatem jej równanie ma postać  $x + d = 0$ .

- II. Prosta  $k$  jest równoległa do osi  $x$  (jest prostą poziomą,  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ):

$$k: by + c = 0, \text{ czyli } k: y + \frac{c}{b} = 0, \text{ inaczej: } y + c_1 = 0$$

Prosta  $l$  równoległa do prostej  $k$  jest również prostą równoległą do osi  $x$ , zatem jej równanie ma postać  $y + d = 0$ .

III. Prosta  $k$  nie jest równoległa do żadnej z osi układu współrzędnych ( $ab \neq 0$ ):

$$k: ax + by + c = 0$$

Na mocy udowodnionego wcześniej twierdzenia wiemy, że prosta  $l$  jest równoległa do  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe obydwu prostych są równe.

Wyznaczamy równanie kierunkowe prostej  $k$ :

$$by = -ax - c, \text{ stąd } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Zatem prosta  $l$  ma równanie kierunkowe  $l: y = -\frac{a}{b}x + c_1$ , a po przekształceniu do postaci ogólnej  $l: ax + by - bc_1 = 0$ , inaczej:  $ax + by + d = 0$ .

Zauważmy, że w każdym z trzech przypadków równania prostych  $k$  i  $l$  różnią się tylko wyrazem wolnym. Nasze rozważania zapiszemy w postaci twierdzenia.

### Twierdzenie

Prosta  $l$  jest równoległa do prostej  $k: ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej  $l$  można zapisać w postaci  $ax + by + d = 0$ . Ponadto jeżeli  $c = d$ , to  $k = l$ , a jeżeli  $c \neq d$ , to  $k \neq l$ .

◀3.7. Napisz równanie prostej  $l$  równoległej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $k: 9x - 2y + 1 = 0$ ,  $P = (0, -3)$

b)  $k: 2x + 3y - 10 = 0$ ,  $P = (1, 1)$

c)  $k: 7x + y - 18 = 0$ ,  $P = (5, 0)$

d)  $k: 6x - 5y + 19 = 0$ ,  
 $P = (-2, -3)$

e)  $k: x + 11y - 21 = 0$ ,  
 $P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

f)  $k: 5x + \sqrt{3}y - 18 = 0$ ,  
 $P = (2, -\sqrt{3})$

Odp.: a)  $9x - 2y - 6 = 0$

b)  $2x + 3y - 5 = 0$

c)  $7x + y - 35 = 0$

d)  $6x - 5y - 3 = 0$

e)  $x + 11y - 10\sqrt{2} = 0$

f)  $5x + \sqrt{3}y - 7 = 0$

Przykład 4 ◀ zad. 3.7

Dana jest prosta  $k: 2x - 5y + 1 = 0$ . Wyznaczmy równanie równoległej do niej prostej

a)  $l$  przechodzącej przez punkt  $A = (-3, 4)$ .

b)  $p$  przechodzącej przez punkt  $B = (0, \sqrt{3})$ .

Rozwiązanie

Każdą prostą równoległą do prostej  $k$  można opisać za pomocą równania postaci  $2x - 5y + c = 0$ . Zatem:

a)  $2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 + c = 0$ , stąd  $c = 26$ , czyli  $l: 2x - 5y + 26 = 0$

b)  $-5 \cdot \sqrt{3} + c = 0$ , stąd  $c = 5\sqrt{3}$ , czyli  $p: 2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Odp.: a)  $l: 2x - 5y + 26 = 0$  b)  $p: 2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Przykład 5 ◀ zad. 3.8

Sprawdźmy, czy proste  $l: \frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0$ ,

$m: 2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$  i  $p: -3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$  są równoległe do prostej  $k: -3x + 4y - 2 = 0$ .

Równanie ogólne prostej możemy zapisać na nieskończenie wiele sposobów (możemy mnożyć obydwie jego strony przez dowolną liczbę różną od zera).

◀3.8. Sprawdź, czy proste  $l$  i  $p$  są równoległe do prostej  $k$ .

a)  $k: x - 2y + 9 = 0$

$l: 2x - 4y + 7 = 0$

$p: 3x + 2y - 1 = 0$

b)  $k: -3x + y + 7 = 0$

$l: 9x + 3y - \sqrt{2} = 0$

$p: 6x - 2y + 11 = 0$

c)  $k: \sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 3\sqrt{7} = 0$

$l: -6x - 12y + 7 = 0$

$p: 3x + 6y + \sqrt{2} = 0$

d)  $k: x + y = 0$

$l: 3x - 3y + 5 = 0$

$p: -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 7 = 0$

Odp.: a)  $l \parallel k$ ,  $p \nparallel k$

b)  $l \nparallel k$ ,  $p \parallel k$

c)  $l \parallel k$ ,  $p \parallel k$

d)  $l \nparallel k$ ,  $p \nparallel k$

## Rozwiązanie

- Prosta  $l$  jest równoległa do prostej  $k$ :  $-3x + 4y - 2 = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej  $l$  można zapisać w postaci  $-3x + 4y + c = 0$ , gdzie  $c \in \mathbf{R}$ .

Przekształcamy dane równanie prostej  $l$  tak, żeby współczynnik przy  $x$  wynosił  $-3$ .

$$\begin{aligned} \frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} &= 0 && \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez } -\frac{7}{2} \\ -3x + 4y - \frac{7\sqrt{11}}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Zatem  $c = -\frac{7\sqrt{11}}{2}$ , czyli prosta  $l$  jest równoległa do prostej  $k$  (i różna od  $k$ ).

- Postępujemy podobnie jak poprzednio. Przekształcamy dane równanie prostej  $m$  tak, żeby współczynnik przy  $x$  wynosił  $-3$ .

$$\begin{aligned} 2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} &= 0 && \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez } -\frac{3}{2} \\ -3x + 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Zatem  $c = -2$ , czyli prosta  $l$  jest równoległa do prostej  $k$ , bo jest z nią identyczna.

- Przekształcamy dane równanie prostej  $p$  tak, żeby współczynnik przy  $x$  wynosił  $-3$ .

$$\begin{aligned} -3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} &= 0 && \leftarrow \text{obie strony równania dzielimy przez } \sqrt{5} \\ -3x - 4y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Równania  $-3x - 4y + 2 = 0$  nie doprowadzimy do żądanej postaci.

Rozwiązanie układu równań  $\begin{cases} -3x - 4y + 2 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$  prowadzi do wyznaczenia dokładnie jednego punktu wspólnego prostych  $p$  i  $k$ :  $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Zatem proste  $p$  i  $k$  nie są równoległe.

Odp.: Proste  $l$  oraz  $m$  są równoległe do  $k$ , prosta  $p$  nie jest równoległa do  $k$ .

## Równania prostych prostopadłych na płaszczyźnie

## Twierdzenie

Prosta  $l$  jest prostopadła do prostej  $k$ :  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej  $l$  można zapisać w postaci  $bx - ay + c_1 = 0$ .

## Dowód

Zauważmy, że każde równanie ogólne prostej można przekształcić do postaci, w której przynajmniej jeden ze współczynników przy zmiennych  $x, y$  ma wartość 1.

Rozważymy więc trzy możliwe sytuacje.

◀3.10. Napisz równanie ogólne prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $k: 8x + 3y - 1 = 0$ ,  $P = (-2, -2)$

b)  $k: 5x + 11y = 0$ ,  $P = (-1, -5)$

c)  $k: \sqrt{2}x - 3y + 2\sqrt{2} = 0$ ,  
 $P = (0, \sqrt{2})$

d)  $k: \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1 = 0$ ,  
 $P = (0, 0)$

e)  $k: 6x - 2y + 17 = 0$ ,  $P = (3, -2)$

f)  $k: 4x + 7y + \sqrt{15} = 0$ ,  
 $P = (\sqrt{3}, 1)$

Odp.: a)  $l: 3x - 8y - 10 = 0$

b)  $l: 11x - 5y - 14 = 0$

c)  $l: 3x + \sqrt{2}y - 2 = 0$

d)  $l: \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$

e)  $l: x + 3y + 3 = 0$

f)  $l: 7x - 4y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$

I.  $a = 0$  i  $b = 1$

Prosta  $k$  ma wtedy równanie  $y + c = 0$ , czyli jest równoległa do osi  $x$ . Każda prosta  $l$  prostopadła do  $k$  jest więc prostopadła do osi  $x$ , czyli ma równanie postaci  $x + p = 0$ . Zatem teza twierdzenia jest prawdziwa.

II.  $a = 1$  i  $b = 0$

Prosta  $k$  ma równanie  $x + c = 0$ , czyli jest równoległa do osi  $y$ . Każda prosta  $l$  prostopadła do  $k$  ma więc równanie postaci  $y + q = 0$  lub inaczej  $-y - q = 0$ , czyli teza twierdzenia jest prawdziwa.

III.  $ab \neq 0$

Przekształcamy równanie prostej  $k$  do postaci kierunkowej:  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ .

Korzystamy z twierdzenia udowodnionego w klasie pierwszej: prosta  $l$  prostopadła do prostej  $k: y = mx + p$  ( $m \neq 0$ ) ma równanie postaci  $y = -\frac{1}{m}x + q$ .

Zatem:

$$l: y = \frac{b}{a}x + q \quad l: bx - ay + aq = 0 \quad l: bx - ay + c_1 = 0 \quad \leftarrow c_1 = aq$$

Koniec dowodu

**Przykład 6** ◀ zad. 3.10

Napiszemy równanie prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $k: 2x + 7y = 0$  i przechodzącej przez punkt  $A = (2\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ .

Rozwiązanie

$$l: 7x - 2y + c = 0 \quad \leftarrow l \perp k$$

$$14\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + c = 0 \quad \leftarrow A = (2\sqrt{7}, -\sqrt{7}) \in l$$

$$c = -16\sqrt{7}$$

Odp.:  $l: 7x - 2y - 16\sqrt{7} = 0$

## Odległość punktu od prostej

**Przykład 7**

Obliczymy odległość punktu  $P = (-2, 3)$  od prostej  $l: 3x - 4y + 1 = 0$ .

Rozwiązanie

**Krok 1:** Wyznaczymy równanie prostej  $k \perp l$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

**Krok 2:** Wyznaczymy współrzędne punktu  $Q$  przecięcia prostych  $l$  i  $k$ .

**Krok 3:** Obliczymy długość odcinka  $PQ$ , która jest szukaną odległością punktu  $P$  od prostej  $l$ .



Mamy więc (rachunki pozostawiamy do samodzielnego wykonania):

$$\begin{aligned} 1. & k: 4x + 3y + c = 0 \\ & -8 + 9 + c = 0, \text{ stąd } c = -1 \\ & k: 4x + 3y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$2. \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}, \text{ stąd } Q = \left(\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right).$$

$$3. |PQ| = \sqrt{\left(\frac{1}{25} + 2\right)^2 + \left(\frac{7}{25} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{7225}{25^2}} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5}$$

Odp.: Punkt  $P$  jest odległy od prostej  $l$  o  $\frac{17}{5}$ .

Jeśli przeprowadzimy powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu  $P = (x_0, y_0)$  i dowolnej prostej  $ax + by + c = 0$ , to po rachunkach, których nie będziemy tu podawać, otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

### Twierdzenie

Odległość punktu  $P = (x_0, y_0)$  od prostej o równaniu  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) jest równa:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Przykład 8 ◀ zad. 3.11

Odległość punktu  $P = (1, -5)$  od prostej  $x + 2y - 3 = 0$  jest równa

$$\frac{|1 - 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$



### Przykład 9 ◀ zad. 3.15–3.17

Obliczymy pole trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (-8, 0)$ ,  $B = (5, 1)$ ,  $C = (-2, 2)$ .

Rozwiązanie

I sposób

Wykorzystamy wzór na pole trójkąta:  $P = \frac{1}{2}a \cdot h$ . Jako podstawę przyjmujemy bok  $AB$  (więc  $a = |AB|$ ). Wówczas wysokość  $h$  poprowadzona z wierzchołka  $C$  jest odległością punktu  $C$  od prostej  $AB$ . Mamy zatem:

$$a = |AB| = \sqrt{(5 + 8)^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

◀ 3.11. Wyznacz odległości punktów  $A = (4, 1)$ ,  $B = (0, 2)$ ,  $C = (2, 2)$  od prostej o równaniu  $3x - 4y + 2 = 0$ .

Odp.: punkt  $A$ : 2,  
punkt  $B$ :  $1\frac{1}{5}$ ,  
punkt  $C$ : 0

◀ 3.15. Oblicz pole trójkąta  $ABC$  o podanych wierzchołkach.

a)  $A = (5, 5)$ ,  $B = (-2, 4)$ ,  
 $C = (-1, -3)$   
b)  $A = (-4, -2)$ ,  $B = (1, 5)$ ,  
 $C = (-3, 6)$

Odp.: a)  $P = 25$   
b)  $P = 16,5$

◀ 3.16. Boki trójkąta zawierają się w prostych:  $4x + 3y - 21 = 0$ ,  $x + 2y - 4 = 0$ ,  $3x + y - 7 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

Odp.:  $(6, -1)$ ,  $(0, 7)$ ,  $(2, 1)$ ,  $P = 10$

◀ 3.17. Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt  $ABCD$  i oblicz jego obwód oraz pole.

a)  $A = (4, -2)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  
 $C = (-3, 2)$ ,  $D = (1, -4)$   
b)  $A = (7, 2)$ ,  $B = (5, 4)$ ,  
 $C = (-1, -2)$ ,  $D = (1, -4)$   
c)  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (1, 3)$ ,  
 $C = (-2, 5)$ ,  $D = (-4, 2)$   
d)  $A = (-4, 0)$ ,  $B = (1, -5)$ ,  
 $C = (2, 2)$ ,  $D = (-2, 4)$

Odp.: a)  $obw = \sqrt{13}(4 + \sqrt{2})$ ,  
 $P = 19,5$

b)  $obw = 16\sqrt{2}$ ,  $P = 24$

c)  $obw = 4\sqrt{13}$ ,  $P = 13$

d)  $obw = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ ,  $P = 30$

Równanie prostej  $AB$  zapisujemy w postaci  $y = mx + n$  i po podstawieniu współrzędnych punktów  $A$  i  $B$  mamy:

$$\begin{cases} 0 = -8m + n \\ 1 = 5m + n \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{13}, n = \frac{8}{13}$$

Prosta  $AB$  ma równanie:  $y = \frac{1}{13}x + \frac{8}{13}$ , a w postaci ogólnej:  $x - 13y + 8 = 0$ .

Obliczamy odległość punktu  $C$  od prostej  $AB$ , czyli wysokość trójkąta.

$$h = \frac{|1 \cdot (-2) - 13 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{1^2 + 13^2}} = \frac{20}{\sqrt{170}}$$

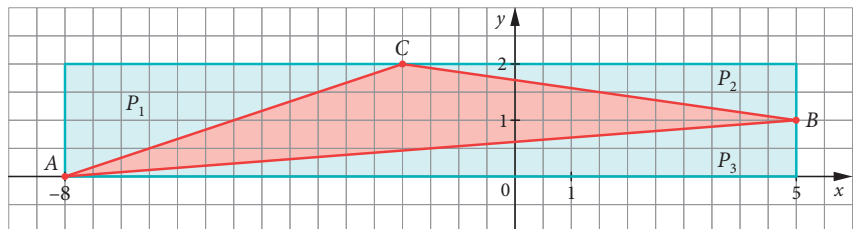
$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{170} \cdot \frac{20}{\sqrt{170}} = 10$$

### II sposób

Opisany powyżej sposób rozwiązania jest jedną z ogólnych metod stosowanych w takich zadaniach. Natomiast w tym konkretnym przypadku na pytanie można odpowiedzieć szybciej, ponieważ wierzchołki trójkąta są punktami kratowymi.

Punkt kratowy to punkt, którego współrzędne są liczbami całkowitymi.

Zaznaczamy odpowiednie figury w układzie współrzędnych.



Aby obliczyć pole trójkąta  $ABC$ , należy od pola  $P$  prostokąta odjąć sumę pól trzech trójkątów (na rysunku oznaczonych  $P_1$ ,  $P_2$  oraz  $P_3$ ).

$$P_{ABC} = P - (P_1 + P_2 + P_3) = 13 \cdot 2 - \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 13 \right) = 10$$

**Odp.:** Pole trójkąta  $ABC$  jest równe 10.

### Przykład 10 ◀ zad. 3.19

Obliczymy odległość między prostymi równoległymi  $k: x + y - 1 = 0$  i  $l: x + y - 3 = 0$ .

Mierzenie odległości między prostymi ma sens tylko wtedy, gdy te proste są równoległe.

◀ 3.19. Wyznacz odległość między prostymi  $k$  i  $l$ .

a)  $k: 3x + 4y = 0$ ,  $l: 3x + 4y + 10 = 0$

b)  $k: x - 2y + 1 = 0$ ,  $l: x - 2y - 4 = 0$

c)  $k: y = x$ ,  $l: y = x - 3$

d)  $k: y = -\frac{1}{3}x + 2$ ,  $l: y = -\frac{1}{3}x - 1$

**Odp.:** a) 2   b)  $\sqrt{5}$    c)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$    d)  $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy jakikolwiek punkt leżący na jednej z prostych, np. punkt przecięcia prostej  $k$  z osią  $y$ :  $(0, 1)$ . Następnie obliczamy odległość tego punktu od drugiej prostej:

$$\frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Odp.: Odległość między prostymi jest równa  $\sqrt{2}$ .

**Przykład 11** ◀ zad. 3.25

Napišemy równania dwusiecznych kątów utworzonych przez przecinające się proste  $k$ :  $x - y + 3 = 0$  i  $m$ :  $7x + y - 5 = 0$ .

**Rozwiązanie**

Punkt  $P = (x, y)$  należy do dwusiecznej jednego z tych kątów wtedy i tylko wtedy, gdy jest równo oddalony od obu prostych. Jego współrzędne spełniają zatem równanie

$$\frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x + y - 5|}{\sqrt{49 + 1}}.$$

Mamy zatem:

$$\frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x + y - 5|}{5\sqrt{2}}$$

$$5|x - y + 3| = |7x + y - 5| \quad \leftarrow |a| = |b|, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = b \text{ lub } a = -b$$

$$5(x - y + 3) = 7x + y - 5 \quad \text{lub} \quad 5(x - y + 3) = -7x - y + 5$$

$$2x + 6y - 20 = 0 \quad \text{lub} \quad 12x - 4y + 10 = 0$$

$$x + 3y - 10 = 0 \quad \text{lub} \quad 6x - 2y + 5 = 0$$

Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe. Zauważmy, że wyznaczone proste spełniają warunek prostopadłości.

Odp.: Szukanymi dwusiecznymi są proste:  $x + 3y - 10 = 0$ ,  $6x - 2y + 5 = 0$ .

**Zadania**

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

**3.1.** Wskaż kąt, który przybliży z dokładnością do  $1^\circ$  kąt nachylenia prostej  $y = -1,6x$  do osi  $x$ .

- A.  $58^\circ$                       B.  $167^\circ$                       C.  $122^\circ$                       D.  $-122^\circ$

**3.2.** Wskaż prostą, która tworzy z osią  $x$  kąt o mierze  $150^\circ$ .

- A.  $\sqrt{3}x + y + 3 = 0$                       C.  $\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$   
B.  $\sqrt{3}x + 3y - 11 = 0$                       D.  $\sqrt{3}x - 3y + 3 = 0$

◀ **3.25.** Boki trójkąta są zawarte w prostych:  $4x + 3y - 21 = 0$ ,  $x + 2y - 4 = 0$ ,  $3x + y - 7 = 0$ .

a) Wyznacz wierzchołki tego trójkąta.

b) Napisz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta.

Odp.: a)  $(2, 1)$ ,  $(6, -1)$ ,  $(0, 7)$

b)  $(3 - \sqrt{2})x + (1 - 2\sqrt{2})y - 7 + 4\sqrt{2} = 0$ ,  $(4 + \sqrt{5})x + (3 + 2\sqrt{5})y - 21 - 4\sqrt{5} = 0$ ,  
 $(15 + 4\sqrt{10})x + (5 + 3\sqrt{10})y - 35 - 21\sqrt{10} = 0$

**Odpowiedzi i rozwiązania**

**3.1.** C

**3.2.** B

## 3.3. C

3.4. a)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$  b)  $y = -x$

c)  $y = \sqrt{3}x$  d)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

3.5. a)  $31^\circ$  b)  $111^\circ$  c)  $84^\circ$   
d)  $94^\circ$  e)  $3^\circ$  f)  $174^\circ$

3.6. a)  $y = x + 14$

b)  $y = \sqrt{3}x + 1 - 5\sqrt{3}$

c)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}$

d)  $y = -\sqrt{3}x + 5$  e)  $y = -2$

f)  $y = -x - 7$

3.7. a)  $9x - 2y - 6 = 0$

b)  $2x + 3y - 5 = 0$

c)  $7x + y - 35 = 0$

d)  $6x - 5y - 3 = 0$

e)  $x + 11y - 10\sqrt{2} = 0$

f)  $5x + \sqrt{3}y - 7 = 0$

3.8. a)  $l \parallel k, p \nparallel k$

b)  $l \nparallel k, p \parallel k$

c)  $l \parallel k, p \parallel k$

d)  $l \nparallel k, p \nparallel k$

3.9.  $|AB| = |CD| = 6,$

$|AD| = |BC| = \sqrt{13},$

$|AC| = \sqrt{73}, |BD| = 5$

3.10. a)  $l: 3x - 8y - 10 = 0$

b)  $l: 11x - 5y - 14 = 0$

c)  $l: 3x + \sqrt{2}y - 2 = 0$

d)  $l: \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$

e)  $l: x + 3y + 3 = 0$

f)  $l: 7x - 4y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$

3.3. Wskaż prostą równoległą do prostej  $x - \sqrt{3}y + \sqrt{2} = 0$ .

A.  $x - y + \sqrt{2} = 0$

C.  $\sqrt{3}x - 3y - 11 = 0$

B.  $x + \sqrt{3}y + \sqrt{7} = 0$

D.  $x - y - 1 = 0$

3.4. Napisz równanie prostej postaci  $y = ax$ , która tworzy z osią  $x$  podany kąt.

a)  $150^\circ$

c)  $60^\circ$

b)  $135^\circ$

d)  $30^\circ$

3.5. Wyznacz kąt nachylenia prostej do osi  $x$ . Wynik podaj z dokładnością do  $1^\circ$ .

a)  $y = 0,6x$

c)  $y = 9x$

e)  $y = 0,06x$

b)  $y = -2,6x$

d)  $y = -14x$

f)  $y = -0,1x$

3.6. Napisz równanie prostej  $l$  nachylonej do osi  $x$  pod kątem  $\alpha$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $\alpha = 45^\circ$   $P = (4, 18)$

d)  $\alpha = 120^\circ$   $P = (\sqrt{3}, 2)$

b)  $\alpha = 60^\circ$   $P = (5, 1)$

e)  $\alpha = 0^\circ$   $P = (-3, -2)$

c)  $\alpha = 30^\circ$   $P = (-5, 0)$

f)  $\alpha = 135^\circ$   $P = (0, -7)$

3.7. Napisz równanie prostej  $l$  równoległej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $k: 9x - 2y + 1 = 0, P = (0, -3)$

d)  $k: 6x - 5y + 19 = 0, P = (-2, -3)$

b)  $k: 2x + 3y - 10 = 0, P = (1, 1)$

e)  $k: x + 11y - 21 = 0, P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c)  $k: 7x + y - 18 = 0, P = (5, 0)$

f)  $k: 5x + \sqrt{3}y - 18 = 0, P = (2, -\sqrt{3})$

3.8. Sprawdź, czy proste  $l$  i  $p$  są równoległe do prostej  $k$ .

a)  $k: x - 2y + 9 = 0$

$l: 2x - 4y + 7 = 0$

$p: 3x + 2y - 1 = 0$

b)  $k: -3x + y + 7 = 0$

$l: 9x + 3y - \sqrt{2} = 0$

$p: 6x - 2y + 11 = 0$

c)  $k: \sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 3\sqrt{7} = 0$

$l: -6x - 12y + 7 = 0$

$p: 3x + 6y + \sqrt{2} = 0$

d)  $k: x + y = 0$

$l: 3x - 3y + 5 = 0$

$p: -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 7 = 0$

3.9. W równoległoboku  $ABCD$  dane są wierzchołek  $C = (10, 4)$  oraz równania boków  $AB: y = 1$  i  $AD: 3x - 2y - 4 = 0$ . Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.3.10. Napisz równanie ogólne prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $k: 8x + 3y - 1 = 0, P = (-2, -2)$

d)  $k: \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1 = 0, P = (0, 0)$

b)  $k: 5x + 11y = 0, P = (-1, -5)$

e)  $k: 6x - 2y + 17 = 0, P = (3, -2)$

c)  $k: \sqrt{2}x - 3y + 2\sqrt{2} = 0, P = (0, \sqrt{2})$

f)  $k: 4x + 7y + \sqrt{15} = 0, P = (\sqrt{3}, 1)$

**3.11.** Wyznacz odległości punktów  $A = (4, 1)$ ,  $B = (0, 2)$ ,  $C = (2, 2)$  od prostej o równaniu  $3x - 4y + 2 = 0$ .

**3.12.** Wyznacz odległości punktów  $A = (2, 0)$ ,  $B = (3, -2)$ ,  $C = (-3, -7)$  od prostej o równaniu  $y = 2x - 1$ .

**3.13.** Wyznacz odległość punktu przecięcia prostych o równaniach  $y = -\frac{5}{2}x + 2$  i  $y = x - 5$  od prostej o równaniu  $y = -x + 3$ .

**3.14.** Wyznacz odległość punktu  $P = (3, 0)$  od prostej przechodzącej przez punkty  $A = (1, -3)$  i  $B = (-4, 9)$ .

**3.15.** Oblicz pole trójkąta  $ABC$  o podanych wierzchołkach.

- a)  $A = (5, 5)$        $B = (-2, 4)$        $C = (-1, -3)$   
 b)  $A = (-4, -2)$        $B = (1, 5)$        $C = (-3, 6)$

**3.16.** Boki trójkąta zawierają się w prostych:  $4x + 3y - 21 = 0$ ,  $x + 2y - 4 = 0$ ,  $3x + y - 7 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

**3.17.** Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt  $ABCD$  i oblicz jego obwód oraz pole.

- a)  $A = (4, -2)$        $B = (2, 1)$        $C = (-3, 2)$        $D = (1, -4)$   
 b)  $A = (7, 2)$        $B = (5, 4)$        $C = (-1, -2)$        $D = (1, -4)$   
 c)  $A = (-1, 0)$        $B = (1, 3)$        $C = (-2, 5)$        $D = (-4, 2)$   
 d)  $A = (-4, 0)$        $B = (1, -5)$        $C = (2, 2)$        $D = (-2, 4)$

**3.18.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  jest prosty oraz  $A = (11, 6)$  i  $B = (0, 9)$ . Przyprostokątna  $CB$  zawiera się w prostej o równaniu  $y = -3x + 9$ . Oblicz współrzędne punktu  $C$  oraz długości boków tego trójkąta.

**3.19.** Wyznacz odległość między prostymi  $k$  i  $l$ .

- a)  $k: 3x + 4y = 0$        $l: 3x + 4y + 10 = 0$   
 b)  $k: x - 2y + 1 = 0$        $l: x - 2y - 4 = 0$   
 c)  $k: y = x$        $l: y = x - 3$   
 d)  $k: y = -\frac{1}{3}x + 2$        $l: y = -\frac{1}{3}x - 1$

**3.20.** Wyznacz równanie symetralnej odcinka  $AB$ .

- a)  $A = (-3, -1)$ ,  $B = (3, 5)$       c)  $A = (1, -1)$ ,  $B = (-2, 5)$   
 b)  $A = (0, 2)$ ,  $B = (8, 0)$       d)  $A = (-5, 6)$ ,  $B = (3, 1)$

**3.23.**  $A = (-2, -2)$ ,  $B = (8, 3)$ ,  $C = (3, 8)$ . Niech  $a_{AB}$ ,  $a_{BC}$  – współczynniki kierunkowe prostych  $AB$  i  $BC$ .

$a_{AB} = \frac{3+2}{8+2} = \frac{1}{2}$ ,  $a_{BC} = \frac{8-3}{3-8} = -1$ , zatem boki  $AB$  i  $BC$  nie są prostopadłe. Trapez jest prostokątny, więc  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ .

Wyznaczamy równania prostych  $DC$  i  $AD$ .

•  $DC \parallel AB$  i  $C \in DC$ , więc prosta  $DC$  ma równanie  $y = \frac{1}{2}x + b$  i  $\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 8$ . Stąd  $b = \frac{13}{2}$ . Zatem  $DC: y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ .

•  $AD \perp AB$  i  $A \in AD$ , więc prosta  $AD$  ma równanie  $y = -2x + c$  i  $-2 \cdot (-2) + b = -2$ . Stąd  $c = -6$ . Zatem  $AD: y = -2x - 6$ .

Wyznaczamy współrzędne punktu  $D$  (punkt wspólny prostych  $DC$  i  $AD$ ).

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \\ y = -2x - 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} = -2x - 6 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ stąd } D = (-5, 4). \text{ Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |AD|.$$

$$|AB| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}, \quad |CD| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, \quad |AD| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 67,5$$

Odp.:  $P = 67,5$

**3.11.** punkt  $A$ : 2, punkt  $B$ :  $1\frac{1}{5}$ ,  
punkt  $C$ : 0

**3.12.** punkt  $A$ :  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ,  
punkt  $B$ :  $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ , punkt  $C$ : 0

**3.13.**  $2\sqrt{2}$

**3.14.** 3

**3.15.** a)  $P = 25$   
b)  $P = 16,5$

**3.16.**  $(6, -1)$ ,  $(0, 7)$ ,  $(2, 1)$ ,  $P = 10$

**3.17.** a)  $obw = \sqrt{13}(4 + \sqrt{2})$ ,  
 $P = 19,5$

b)  $obw = 16\sqrt{2}$ ,  $P = 24$

c)  $obw = 4\sqrt{13}$ ,  $P = 13$

d)  $obw = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ ,  $P = 30$

**3.18.**  $C = (2, 3)$ ,  $|AB| = \sqrt{130}$ ,  
 $|BC| = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = 3\sqrt{10}$

**3.19.** a) 2      b)  $\sqrt{5}$   
c)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       d)  $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

**3.20.** a)  $y = -x + 2$

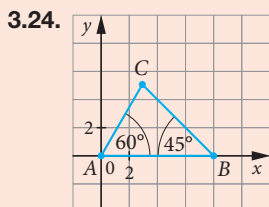
b)  $y = 4x - 15$

c)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$       d)  $y = \frac{8}{5}x + \frac{51}{10}$

**3.21.**  $y = 3x + 1$

**3.22.**  $C = (4, 9)$

**3.23.** Patrz s. 135.



$A = (0, 0), B = (8, 0)$

Prosta  $AC$ :  $y = ax$

Prosta  $BC$ :  $y = bx + c$

$a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

$b = \operatorname{tg} (180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ - 1$   
 $-1 \cdot 8 + c = 0$ , stąd  $c = 8$ .

Punkt  $C$  wyznaczamy jako punkt wspólny prostych  $AC$  i  $BC$ :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x(\sqrt{3} + 1) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x = \frac{8}{\sqrt{3} + 1} \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 4\sqrt{3} - 4$$

$$y = \sqrt{3}(4\sqrt{3} - 4) = 12 - 4\sqrt{3}$$

**Odp.:**  $C = (4\sqrt{3} - 4, 12 - 4\sqrt{3})$

**Prosto do matury**

1. F, P, P

2.  $x - y - 3 = 0$

3.  $P = 10\frac{1}{8}$

4.  $B = (-10, 22), C = (8, 4)$

5.  $x - 3y + 12 = 0, 3x + y - 4 = 0$

**3.21.** W trójkącie  $ABC$  dane są wierzchołki  $A = (2, 7), B = (-1, 4), C = (5, 2)$ . Wyznacz równanie wysokości  $AD$  tego trójkąta.

**3.22.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ) dane są współrzędne wierzchołków  $A = (5, 2)$  i  $B = (-1, 4)$ . Punkt  $C$  leży na prostej  $k: 2x - 3y + 19 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $C$ .

\* **3.23.** W trapezie prostokątnym  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  dane są współrzędne wierzchołków  $A = (-2, -2), B = (8, 3), C = (3, 8)$ . Oblicz pole tego trapezu.

\* **3.24.** W trójkącie  $ABC$  o kątach  $\sphericalangle CAB = 60^\circ$  i  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$  dane są współrzędne wierzchołków  $A = (0, 0)$  i  $B = (8, 0)$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $C$ .

**3.25.** Boki trójkąta są zawarte w prostych:  $4x + 3y - 21 = 0, x + 2y - 4 = 0, 3x + y - 7 = 0$ .

a) Wyznacz wierzchołki tego trójkąta.

b) Napisz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta.

**Prosto do matury**



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Prosta o równaniu  $x - 2y - 1 = 0$  jest

A. równoległa do prostej  $2x - y - 1 = 0$ .

B. prostopadła do prostej  $2x + y + 2 = 0$ .

C. oddalona o  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  od prostej  $x - 2y - 3 = 0$ .

2. Napisz równanie symetralnej odcinka o końcach  $A = (-1, 2)$  i  $B = (5, -4)$ .

3. Oblicz pole trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (1, 2), B = (4, 8)$  i  $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$ .

4. W trójkącie  $ABC$  dane są współrzędne wierzchołka  $A = (-4, -2)$  oraz równania wysokości  $BD: 2x + y - 2 = 0$  i  $CE: x - 4y + 8 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$ .

5. Napisz równania dwusiecznych kątów zawartych między prostymi  $x + y - 4 = 0$  i  $7x - y + 4 = 0$ .

**3.25. a)**  $(2, 1), (6, -1), (0, 7)$

**b)**  $(3 - \sqrt{2})x + (1 - 2\sqrt{2})y - 7 + 4\sqrt{2} = 0, (4 + \sqrt{5})x + (3 + 2\sqrt{5})y - 21 - 4\sqrt{5} = 0,$   
 $(15 + 4\sqrt{10})x + (5 + 3\sqrt{10})y - 35 - 21\sqrt{10} = 0$

## 4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

### Umiejętności:

- opisywanie okręgu za pomocą równania  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$   
lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
- opisywanie koła za pomocą nierówności  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$   
lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$

### Równanie okręgu

Okręgiem o środku  $S$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o  $r$  od punktu  $S$ . Punkt  $P = (x, y)$  należy zatem do okręgu o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$  ( $r > 0$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|SP| = r$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów  $S$  i  $P$  do wzoru na odległość otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Obie strony tego równania są liczbami dodatnimi, zatem możemy je podnieść do kwadratu i otrzymamy:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równania  $f(x) = g(x)$  i  $f^2(x) = g^2(x)$  nie muszą być równoważne, tzn. najczęściej mają różne zbiory rozwiązań. Na przykład rozwiązaniem równania  $x = 2$  jest tylko liczba 2, natomiast rozwiązaniami równania  $x^2 = 4$  są dwie liczby: 2 oraz  $-2$ . Jeżeli chcemy podnieść równanie  $f(x) = g(x)$  stronami do kwadratu i otrzymać równanie równoważne, to równocześnie musimy założyć, że  $f(x)$  i  $g(x)$  mają ten sam znak – są albo niedodatnie, albo nieujemne.

### Wniosek

Równanie  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ,  $r > 0$ , opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **okrąg** o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$ .

Równanie  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ,  $r > 0$  nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

### Przykład 1 ◀ zad. 4.4

Zapiszemy równanie okręgu o danym środku  $S$  i promieniu  $r$ .

◀ 4.1. Napisz równanie okręgu o środku  $S$  i promieniu  $r$ .

a)  $S = (-1, 3)$ ,  $r = 3$

c)  $S = (-2, -5)$ ,  $r = 1$

e)  $S = (6, -4)$ ,  $r = 5$

b)  $S = (0, 0)$ ,  $r = 11$

d)  $S = (0, 5)$ ,  $r = 3\sqrt{2}$

f)  $S = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ,  $r = \sqrt{3}$

Odp.: a)  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

b)  $x^2 + y^2 = 121$

c)  $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 1$

d)  $x^2 + (y - 5)^2 = 18$

e)  $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 25$

f)  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 3$

### Uwagi metodyczne

Zapis równania okręgu z wykorzystaniem pierwiastka na ogół nie stwarza problemów uczniom, ale podniesienie tego równania stronami do kwadratu jest łatwe tylko pozornie, bo nie wolno robić tego mechanicznie. W podręczniku podajemy uwagę, że takie równania najczęściej nie są równoważne. Jest to bardzo ważne. Nie ma wprowadzić w podstawie programowej nawet najprostszych równań pierwiastkowych, ale może warto wpoić uczniom zasadę, że po podniesieniu stron równania do kwadratu każde jego rozwiązanie musimy sprawdzić.

### ZZ i MKP

tematy 2.4, 2.8

### Multiteka

- Okrąg i trójkąt w układzie współrzędnych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

**Generator**  
testów i sprawdzianów

◀4.5. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a)  $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 0$

b)  $x^2 + y^2 = 2$

Odp.: a) punkt  $(-2, 5)$

b) okrąg o środku  $S = (0, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$

### Rozwiązanie

a)  $S = (1, 5), r = 3$

Do wzoru  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  podstawiamy  $a = 1, b = 5, r = 3$  i otrzymujemy równanie  $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$ .

b)  $S = (-2, 3), r = \sqrt{2}$

Równanie tego okręgu ma postać:  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$ .

c)  $S = (3, 0), r = 1$

Równanie okręgu ma postać:  $(x-3)^2 + y^2 = 1$ .

### Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Sprawdźmy, czy dane równanie opisuje okrąg. Jeśli tak, odczytamy współrzędne jego środka i promień.

a)  $x^2 + (y-4)^2 = 1$

b)  $(x + \sqrt{7})^2 + (3-y)^2 = 5$

c)  $(x-3)^2 + (2y-3)^2 = 1$

d)  $(x-5)^2 + (y+8)^2 = -4$

e)  $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$

### Rozwiązanie

a) Równanie opisuje okrąg o środku  $S = (0, 4)$  i promieniu  $r = 1$ .

b) Równanie można zapisać w postaci  $(x + \sqrt{7})^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$ , więc opisuje ono okrąg o środku  $S = (-\sqrt{7}, 3)$  i promieniu  $r = \sqrt{5}$ .

c) Równanie nie opisuje okręgu, ponieważ nie można go zapisać w postaci  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

d) Równanie nie opisuje okręgu. Żadna para liczb  $(x, y)$  go nie spełnia. Równanie opisuje zbiór pusty.

e) Równanie opisuje zbiór jednoelementowy. Tylko współrzędne punktu  $(5, -3)$  spełniają to równanie.

### Przykład 3 ◀ zad. 4.8

Napiszemy równanie okręgu o środku  $S = (1, -9)$  przechodzącego przez punkt  $A = (0, 2)$ .

### Rozwiązanie

Szukane równanie ma postać  $(x-1)^2 + (y+9)^2 = r^2$ .

Promień  $r$  tego okręgu jest równy odległości jego środka  $S$  od punktu  $A$ . Wystarczy obliczyć kwadrat tej odległości:

$$r^2 = (1-0)^2 + (-9-2)^2 = 1^2 + 11^2 = 122$$

Odp.:  $(x-1)^2 + (y+9)^2 = 122$

◀4.8. Do okręgu o środku  $S = (4, 3)$  należy punkt  $A = (8, 0)$ . Napisz równanie tego okręgu.

Odp.:  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$



Równanie okręgu jest często zapisywane w innej postaci. Prowadzące do niej przekształcenia zapiszemy równoległe – dla konkretnego okręgu oraz dla ogólnych danych.

|                                                                                           |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Równanie okręgu:<br>$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$<br>Środek: $S = (2, -1)$<br>Promień: $r = 5$ | Równanie okręgu:<br>$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$<br>Środek: $S = (a, b)$<br>Promień: $r$ |
| Wykonujemy działania po lewej stronie równania.                                           |                                                                                       |
| $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 25$                                                        | $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$                                             |
| Porządkujemy wyrażenie.                                                                   |                                                                                       |
| $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$                                                            | $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$                                         |

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie  $c = a^2 + b^2 - r^2$ , to w prawej kolumnie tabeli otrzymamy równanie postaci:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Takie równanie opisuje okrąg, o ile promień  $r$  niewystępujący bezpośrednio w równaniu jest dodatni. Sprawdźmy, jakie zatem założenia muszą spełnić współczynniki  $a, b$  i  $c$ . Mamy:

$$c = a^2 + b^2 - r^2, \text{ stąd } r^2 = a^2 + b^2 - c$$

zatem  $r > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^2 + b^2 - c > 0$ . Wówczas  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

#### Wniosek

Równanie  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , w którym  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ , o ile spełnione jest założenie  $a^2 + b^2 > c$ .

Równanie  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , gdy  $a^2 + b^2 > c$ , nazywamy **równaniem okręgu w postaci ogólnej**.

#### Przykład 4 ◀ zad. 4.9

Zbadamy, jaki zbiór jest opisany za pomocą podanego równania.

- a)  $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$
- b)  $x^2 + y^2 - 8y + 17 = 0$
- c)  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

◀4.9. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a)  $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$

Odp.: a) zbiór pusty

b) okrąg o środku  $S = (-2, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{3}$

## Rozwiązanie

$$\text{a) } x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0 \quad \leftarrow a = 1, b = -3, c = 6$$

Sprawdzamy, czy  $a^2 + b^2 > c$ :

$$1 + 9 > 6$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = 2$$

Odp.: Jest to równanie okręgu o środku  $S = (1, -3)$  i promieniu 2.

$$\text{b) } x^2 + y^2 - 8y + 17 = 0 \quad \leftarrow a = 0, b = 4, c = 17$$

Sprawdzamy warunek  $a^2 + b^2 > c$ :

$$0 + 16 < 17$$

Odp.: Podane równanie opisuje zbiór pusty.

$$\text{c) } x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0 \quad \leftarrow a = \sqrt{2}, b = 0, c = 2$$

Sprawdzamy warunek  $a^2 + b^2 > c$ :

$$2 + 0 = 2$$

Równanie nie opisuje okręgu. Można je zapisać w postaci  $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 0$ .

Odp.: Za pomocą podanego równania opisany jest punkt o współrzędnych  $(\sqrt{2}, 0)$ .

◀ 4.20. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego boki zawierają się w prostych o równaniach:  $y = 3x - 9$ ,  $2x + y - 1 = 0$  i  $y = -x + 3$ .

Odp.:  $(x + 2)^2 + y^2 = 25$



## Przykład 5 ◀ zad. 4.20

Napiszemy równanie okręgu opisanego na trójkącie o bokach zawartych w prostych  $2x - y + 3 = 0$ ,  $x - y = 0$  oraz  $x - 1 = 0$ .

## Rozwiązanie

## I sposób

Na rysunku mamy pomocniczy szkic sytuacji podanej w zadaniu.

Opiszemy etapy konstruowania okręgu opisanego na trójkącie.

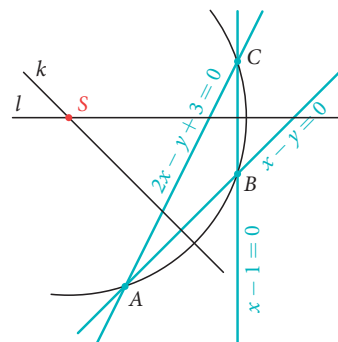
Należy wyznaczyć kolejno:

**Krok 1:** Wierzchołki trójkąta – oznaczmy je  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

**Krok 2:** Równania symetralnych  $k$  i  $l$  dwóch wybranych boków trójkąta  $ABC$ .

**Krok 3:** Punkt  $S$  przecięcia tych symetralnych będący środkiem szukanego okręgu.

**Krok 4:** Odległość punktu  $S$  od jednego z wierzchołków trójkąta, będącą promieniem  $r$  szukanego okręgu.



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

prosta  $AC$ :  $2x - y + 3 = 0$ , prosta  $AB$ :  $x - y = 0$ , prosta  $BC$ :  $x - 1 = 0$ .

Wykonujemy kolejne kroki.

1. Rozwiązujemy trzy układy równań (przekształcenia rachunkowe zostawiamy do samodzielnego wykonania):

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy:  $A = (-3, -3)$ ,  $B = (1, 1)$  i  $C = (1, 5)$ .

2. Wyznaczamy równania symetralnych  $k, l$  boków  $AB$  i  $BC$ .

- $(-1, -1)$  ← współrzędne środka boku  $AB$   
 $k: x + y + c = 0$  ←  $k \perp AB$   
 $c = 2$  ←  $(-1, -1) \in k$   
 $k: x + y + 2 = 0$
- $(1, 3)$  ← współrzędne środka boku  $BC$   
 $l: y + c = 0$  ←  $l \perp BC$   
 $c = -3$  ←  $(1, 3) \in l$   
 $l: y - 3 = 0$

3. Rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

są współrzędne środka szukanego okręgu:  $S = (-5, 3)$ .

4.  $r^2 = |SC|^2 = 36 + 4 = 40$

Odp.:  $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

## II sposób

Wyznaczamy (jak w I sposobie) współrzędne wierzchołków  $A, B, C$  trójkąta.

Niech  $S = (a, b)$  będzie środkiem szukanego okręgu, a  $r$  – jego promieniem. Okrąg przechodzi przez punkty  $A = (-3, -3)$ ,  $B = (1, 1)$  i  $C = (1, 5)$ , więc współrzędne każdego z tych punktów spełniają równanie okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Zauważmy, że prawe strony wszystkich równań są identyczne.

Skoro  $r^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2$ , możemy zapisać podany układ równań w postaci:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} 1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = 9 + 6a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \\ 1 - 2a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = 9 + 6a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a - 8b = 16 \\ -8a - 16b = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = -2 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Obliczamy  $r^2$ :

$$r^2 = (-3 + 5)^2 + (-3 - 3)^2, \text{ czyli } r^2 = 40$$

Zatem  $S = (-5, 3)$  i  $r^2 = 40$ .

Odp.:  $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

### Nierówność opisująca koło

Przypomnijmy:

Punkt  $P = (x, y)$  należy do koła o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$  ( $r > 0$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $|SP| \leq r$ .

#### Wniosek

Nierówność  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ ,  $r > 0$ , opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło** o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$ .

Nierówność  $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$  opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Po przekształceniach analogicznych do wykonanych z równaniem okręgu otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &\leq r^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

czyli:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0, \text{ gdzie } c = a^2 + b^2 - r^2$$

Ta nierówność opisuje koło o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^2 + b^2 - c > 0$ . Dla takich  $a, b, c$  mamy  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

## Wniosek

Nierówność  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$  opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło** o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^2 + b^2 - c > 0$ . Wtedy  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ , a nierówność  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$  opisuje zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

## Przykład 6

Sprawdźmy, które z punktów:  $A = (-2, 2)$ ,  $B = (2, 2 - 2\sqrt{2})$ ,  $C = (3, 5)$ ,  $D = (-1, 0)$  należą do koła o środku  $S = (1, 2)$  i promieniu 3.

## Rozwiązanie

Nierówność opisująca to koło ma postać  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$ .

Aby sprawdzić położenie punktu względem koła, podstawiamy współrzędne punktu do lewej strony tej nierówności.

$$\bullet (-2 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = (-3)^2 + 0 = 9 \leq 9 \quad \leftarrow A = (-2, 2)$$

Punkt  $A$  należy do okręgu o środku  $S = (1, 2)$  i promieniu 3. Okrąg ten jest brzegiem danego koła, więc punkt  $A$  należy do tego koła.

$$\bullet (2 - 1)^2 + (2 - 2\sqrt{2} - 2)^2 = 1 + 8 = 9 \leq 9 \quad \leftarrow B = (2, 2 - 2\sqrt{2})$$

Punkt  $B$  należy do okręgu, który jest brzegiem danego koła, więc należy do tego koła.

$$\bullet (3 - 1)^2 + (5 - 2)^2 = 4 + 9 = 13 > 9 \quad \leftarrow C = (3, 5)$$

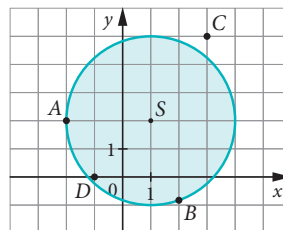
Punkt  $C$  nie należy do koła. Współrzędne punktu  $C$  spełniają nierówność  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 3^2$ , zatem  $C$  leży na zewnątrz koła o środku  $S$  i promieniu 3.

$$\bullet (-1 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 4 + 4 = 8 < 9 \quad \leftarrow D = (-1, 0)$$

Punkt  $D$  należy do koła o środku  $S$  i promieniu 3.

Obok zamieszczamy ilustrację zadania.

Odp.: Punkty  $A$ ,  $B$  oraz  $D$  należą do podanego koła.



## D Przykład 7 zad. 4.22

Wykażemy, że odcinek  $AB$  o końcach  $A = (-1, 6)$ ,  $B = (1, 4)$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o równaniu  $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ .

## 4.22. Rozwiązanie

a)  $A = (3, 1)$ ,  $B = (-2, 3)$ ,  $o: (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$ . Podstawiamy współrzędne punktów  $A$  i  $B$  do lewej strony równania okręgu  $o$ .  
 $A: (3 + 1)^2 + (1 - 6)^2 = 16 + 25 > 25$ ,  $B: (-2 + 1)^2 + (3 - 6)^2 = 1 + 9 = 10 < 25$

Punkt  $A$  leży na zewnątrz, a punkt  $B$  – wewnątrz koła ograniczonego okręgiem  $o$ , więc odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z tym okręgiem.

b)  $A = (6, 1)$ ,  $B = (5, 2)$ ,  $o: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$A: (6 - 3)^2 + (1 - 3)^2 = 9 + 4 = 13 > 9$ ,  $B: (5 - 3)^2 + (2 - 3)^2 = 4 + 1 = 5 < 9$

Odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem  $o$ .

c)  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (-3, -2)$ ,  $o: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

$A: 16 + 1 - 16 + 2 + 1 = 4 > 0$ ,  $B: 9 + 4 - 12 - 4 + 1 = -2 < 0$

Odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem  $o$ .

d)  $A = (0, 4)$ ,  $B = (-2, 2)$ ,  $o: x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$

$A: 16 + 16 - 13 = 19 > 0$ ,  $B: 4 + 4 - 4 + 8 - 13 = -1 < 0$

Odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem  $o$ .

◀ 4.22. Wykaż, że odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o podanym równaniu.

a)  $A = (3, 1)$ ,  $B = (-2, 3)$ ,

$$(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

b)  $A = (6, 1)$ ,  $B = (5, 2)$ ,

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

c)  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (-3, -2)$ ,

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

d)  $A = (0, 4)$ ,  $B = (-2, 2)$ ,

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$$

## Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. A

4.2. A

4.3. B

4.4. a)  $x^2 + y^2 = 121$

b)  $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 1$

c)  $x^2 + (y-5)^2 = 18$

d)  $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 25$

4.5. a) punkt  $(-2, 5)$

b) okrąg o środku  $S = (0, 0)$

i promieniu  $r = \sqrt{2}$

4.6. a)  $S = (-3, -11)$ ,  $r = \sqrt{5}$

b)  $S = (0, 0)$ ,  $r = 14$

4.7. a)  $A$  – tak,  $B$  – nie

b)  $A$  – nie,  $B$  – tak

## Dowód

Sprawdzamy położenie końców odcinka względem okręgu. W tym celu podstawiamy ich współrzędne do równania okręgu. Dla punktu  $A$  mamy:

$$1 + 36 - 10 - 48 + 16 < 0$$

czyli punkt  $A$  leży wewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem.

Dla punktu  $B$  mamy:

$$1 + 16 + 10 - 32 + 16 > 0$$

czyli punkt  $B$  leży na zewnątrz tego koła.

Zatem odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z danym okręgiem.

Koniec dowodu

## Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż punkt leżący na okręgu o równaniu  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$ .

A.  $(3, 0)$       B.  $(3, -4)$       C.  $(-3, -4)$       D.  $(-3, 0)$

4.2. Odległość między środkami okręgów o równaniach  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$  oraz  $(x-3)^2 + y^2 = 8$  jest równa

A.  $\sqrt{26}$ .      B.  $2\sqrt{26}$ .      C. 8.      D.  $4 + \sqrt{8}$ .

4.3. Odcinek o końcach  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (8, 6)$  jest średnicą okręgu o równaniu

A.  $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$ .      C.  $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$ .

B.  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ .      D.  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$ .

4.4. Napisz równanie okręgu o środku  $S$  i promieniu  $r$ .

a)  $S = (0, 0)$        $r = 11$       c)  $S = (0, 5)$        $r = 3\sqrt{2}$

b)  $S = (-2, -5)$        $r = 1$       d)  $S = (6, -4)$        $r = 5$

4.5. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a)  $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 0$       b)  $x^2 + y^2 = 2$

4.6. Odczytaj z równania środek i promień okręgu.

a)  $(x+3)^2 + (y+11)^2 = 5$       b)  $x^2 + y^2 = 196$

4.7. Sprawdź, czy punkty  $A, B$  należą do okręgu o podanym równaniu.

a)  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$        $A = (6, 3)$ ,  $B = (2, 5)$

b)  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$        $A = (2, 0)$ ,  $B = (1, 1)$

**4.8.** Do okręgu o środku  $S = (4, 3)$  należy punkt  $A = (8, 0)$ . Napisz równanie tego okręgu.

**4.9.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a)  $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$

**4.10.** Odczytaj z równania środek i promień okręgu.

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$

d)  $x^2 + y^2 + 8x + 16y + 79 = 0$

**4.11.** Dane są współrzędne środka  $S$  i promień  $r$  okręgu. Zapisz równanie tego okręgu w postaci  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .

a)  $S = (7, -1), r = 3$

b)  $S = (-5, -9), r = \sqrt{5}$

**4.12.** Napisz równanie okręgu o środku w punkcie  $S = (-2, 5)$  stycznego

a) do osi  $x$ .

b) do osi  $y$ .

**4.13.** Napisz równanie okręgu o promieniu 4, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych.

**4.14.** Napisz równanie okręgu, którego promień wynosi 3, środek leży na osi  $y$  i który jest styczny do osi  $x$ .

**4.15.** Napisz równanie okręgu stycznego do osi  $x$  w punkcie  $A = (2, 0)$  i przechodzącego przez punkt

a)  $B = (5, 3)$ .

b)  $B = (7, 5)$ .

**4.16.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A = (9, 8)$  i stycznego do obu osi układu współrzędnych.

**4.17.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A = (-1, 2)$  i współśrodkowego z okręgiem o równaniu  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ .

**4.18.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A = (5, 1)$  i  $B = (2, -2)$ , którego środek leży na prostej  $y - 1 = 0$ .

**4.19.** Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

a)  $A = (5, 1), B = (4, 6), C = (-1, 5)$     b)  $A = (1, 0), B = (5, 2), C = (2, 3)$

**4.20.** Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego boki zawierają się w prostych o równaniach:  $y = 3x - 9$ ,  $2x + y - 1 = 0$  i  $y = -x + 3$ .

**4.21.** Punkty  $P = (1, -1)$  i  $Q = (5, 3)$  są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Napisz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.

**4.8.**  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

**4.9. a)** zbiór pusty

**b)** okrąg o środku  $S = (-2, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{3}$

**4.10. a)**  $S = (1, -2), r = 3$

**b)**  $S = (3, -5), r = 2$

**c)**  $S = (-1, 2), r = 5$

**d)**  $S = (-4, -8), r = 1$

**4.11. a)**  $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$

**b)**  $x^2 + y^2 + 10x + 18y + 101 = 0$

**4.12. a)**  $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$

**b)**  $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$

**4.13.** np.  $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$  (są cztery takie okręgi)

**4.14.**  $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

lub  $x^2 + (y + 3)^2 = 9$

**4.15. a)**  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

**b)**  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$

**4.16.**  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

lub  $(x - 29)^2 + (y - 29)^2 = 841$

**4.17.**  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$

**4.18.**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

**4.19. a)**  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

**b)**  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$

**4.20.**  $(x + 2)^2 + y^2 = 25$

**4.21.**  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$

**5.**  $A = (0, 1), B = (3, 0), C = (4, 3), D = (1, 4)$

•  $|AB| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, |BC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$

$|CD| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, |DA| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Zatem czworokąt  $ABCD$  jest rombem.

•  $|AC| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|AC|^2 = 20 = |AB|^2 + |BC|^2$ , więc  $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ .

Zatem czworokąt  $ABCD$  jest kwadratem.

•  $S$  – środek okręgu (środek odcinka  $AC$ )

$r$  – promień okręgu

$S = (2, 2), r = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \sqrt{5}$

Równanie okręgu:  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$

4.22. Patrz s. 143.

4.24.  $m = 4$ 4.25.  $m < 13$ ,  $S = (3, -2)$ ,  
 $r = \sqrt{13 - m}$ 4.26.  $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 36$ •  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$ 

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 36 \quad |:4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

•  $x \geq 0$  i  $y < 0$ 

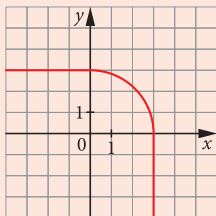
$$(2x)^2 = 36, \text{ stąd } x = 3.$$

•  $x < 0$  i  $y \geq 0$ 

$$(2y)^2 = 36, \text{ stąd } y = 3.$$

•  $x < 0$  i  $y < 0$ 

$$0 = 36, \text{ sprzeczność.}$$

**Prosto do matury**

1. P, P, P

2.  $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$

3.  $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

4.  $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$

5. Patrz s. 145.

**D**4.22. Wykaż, że odcinek  $AB$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o podanym równaniu.

a)  $A = (3, 1)$ ,  $B = (-2, 3)$

$(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$

b)  $A = (6, 1)$ ,  $B = (5, 2)$

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

c)  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (-3, -2)$

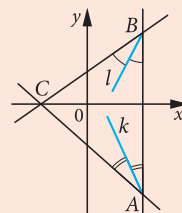
$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

d)  $A = (0, 4)$ ,  $B = (-2, 2)$

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$

\* 4.23. Napisz równanie okręgu wpisanego w trójkąt, którego boki zawierają się w prostych o równaniach:  $x - 5 = 0$ ,  $3x - 4y + 21 = 0$  i  $4x + 3y + 28 = 0$ .4.24. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + 2x + y^2 - 4y + m = 0$  opisuje okrąg o promieniu 1?4.25. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + m = 0$  opisuje okrąg? Jakie są współrzędne środka i promień takiego okręgu?\* 4.26. Zaznacz zbiór wszystkich punktów płaszczyzny kartezjańskiej, których współrzędne spełniają równanie  $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 36$ .**Prosto do matury**

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Okrąg o środku  $S = (-9, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$  można opisać za pomocą równania  $(x + 9)^2 + y^2 = 2$ .B. Punkt  $M = (\sqrt{2} - 9, 0)$  należy do okręgu o środku  $S = (-9, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$ .C. Punkt  $N = (\sqrt{2} - 9, -1)$  leży na zewnątrz koła o środku  $S = (-9, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$ .2. Dane są punkty  $M = (-5, 8)$  i  $N = (3, 2)$ . Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek  $MN$ .3. Napisz równanie okręgu stycznego do osi  $y$ , którego środek jest punktem przecięcia prostych  $2x - y + 4 = 0$  i  $x - 2y + 2 = 0$ .4. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach  $A = (0, 2)$ ,  $B = (9, -1)$ ,  $C = (8, 6)$ .**D**5. Dane są punkty:  $A = (0, 1)$ ,  $B = (3, 0)$ ,  $C = (4, 3)$ ,  $D = (1, 4)$ . Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest kwadratem i napisz równanie opisanego na nim okręgu.4.23. • Oznaczamy punkty przecięcia prostych o równaniach  $x - 5 = 0$ ,  $3x - 4y + 21 = 0$ ,  $4x + 3y + 28 = 0$  jak na rysunku.Wyznaczamy współrzędne punktu C:  $\begin{cases} 3x - 4y + 21 = 0 \\ 4x + 3y + 28 = 0 \end{cases}$ , stąd  $C = (-7, 0)$ .• Środek okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów wewnętrznych  $CAB$  i  $CBA$ . Oznaczamy je literami odpowiednio  $k$  i  $l$ .Wyznaczamy prostą  $k$ :  $|x - 5| = \frac{|4x + 3y + 28|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$ , stąd  $y = \frac{1}{3}x - \frac{53}{3}$  lub  $y = -3x - 1$ .Prosta  $k$  ma ujemny współczynnik kierunkowy, więc  $k$ :  $y = -3x - 1$ .Wyznaczamy prostą  $l$ :  $|x - 5| = \frac{|3x - 4y + 21|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$ , stąd  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{46}{4}$  lub  $y = 2x - 1$ .Prosta  $l$  ma dodatni współczynnik kierunkowy, więc  $l$ :  $y = 2x - 1$ .• Wyznaczamy środek okręgu oraz jego promień:  $\begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ , stąd  $S = (0, -1)$  oraz  $r = |0 - 5| = 5$ .Odp.:  $x^2 + (y + 1)^2 = 25$ 



## 5. Okrąg i prosta. Dwa okręgi

### Umiejętności:

- określanie wzajemnego położenia prostej i okręgu (koła) oraz dwóch okręgów
- wyznaczanie punktów wspólnych prostej i okręgu oraz dwóch okręgów
- wyznaczanie równania stycznej do okręgu

### Okrąg i prosta

Prostą i okrąg możemy opisać za pomocą równań, zatem wyznaczenie punktów wspólnych tych dwóch figur sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

w którym  $r > 0$  oraz  $p^2 + q^2 \neq 0$ .

#### Przykład 1 ◀ zad. 5.5

Z wykresu przedstawiającego okrąg o środku  $S = (2, -3)$  i promieniu  $r = 5$  oraz prostą o równaniu  $4x + 3y + 1 = 0$  możemy odczytać ich punkty wspólne:  $A = (-1, 1)$  i  $B = (5, -7)$ . Sprawdzimy rachunkowo, czy współrzędne tych punktów zostały poprawnie odczytane.

#### Rozwiązanie

Aby sprawdzić, czy współrzędne punktów zostały odczytane poprawnie, podstawiamy je do układu równań opisujących okrąg i prostą.

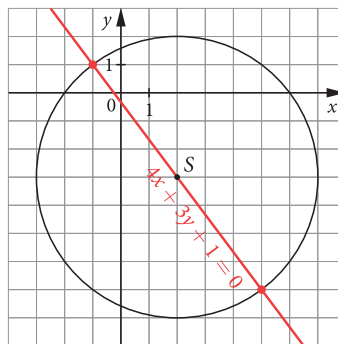
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ 4x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 16 = 25 \\ -4 + 3 + 1 = 0 \end{cases} \leftarrow A = (-1, 1) \quad \begin{cases} 9 + 16 = 25 \\ 20 - 21 + 1 = 0 \end{cases} \leftarrow B = (5, -7)$$

Dla każdego z punktów obydwie równości są prawdziwe. Zatem współrzędne punktów przecięcia okręgu z prostą zostały poprawnie odczytane z rysunku.

#### Przykład 2 ◀ zad. 5.6

Wyznamy punkty wspólne prostej  $2x + y - 7 = 0$  i okręgu  $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 15 = 0$ , a następnie wykonamy ilustrację graficzną rozwiązania.



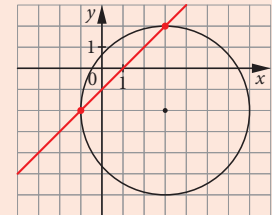
◀ 5.5. Zbadaj graficznie i rachunkowo wzajemne położenie prostej i okręgu o danych równaniach.

a)  $y = x - 1$ ,  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$

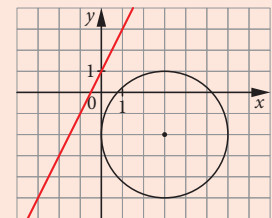
b)  $y = 2x + 1$ ,

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

Odp.: a) Prosta przecina okrąg w punktach  $(-1, -2)$  i  $(3, 2)$ .



b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.



◀ 5.6. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ ,  
 $x - y + 1 = 0$

b)  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ ,  
 $x + y - 8 = 0$

Odp.: a)  $(-2, -1)$ ,  $(2, 3)$

b)  $(1, 7)$ ,  $(4, 4)$

#### ZZ i MKP

tematy 2.5–2.7

#### Multiteka

- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dlauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

**Generator**  
testów i sprawdzianów

## Rozwiązanie

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 + 4x + y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 + 4x + (-2x + 7)^2 - 2(-2x + 7) - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

← podstawiamy  $y = -2x + 7$ 

Jedynym pierwiastkiem drugiego równania jest liczba 2. Zatem rozwiązaniem układu jest jedna para liczb:  $x = 2$ ,  $y = 3$ .

Prosta i okrąg mają więc jeden punkt wspólny, czyli prosta jest styczna do okręgu w punkcie  $(2, 3)$ .

Żeby zilustrować tę sytuację na płaszczyźnie kartezjańskiej, wyznaczmy środek okręgu.

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 15 = 0$$

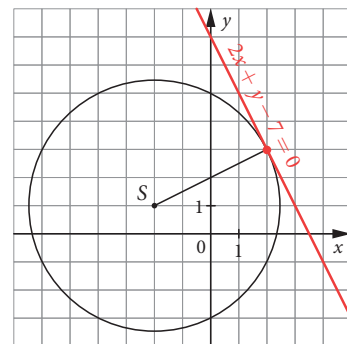
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 15 = 5$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

Równanie opisuje okrąg o środku  $S = (-2, 1)$

i promieniu  $r = \sqrt{20}$ . Rysunek możemy łatwo wykonać bez znajdowania odcinka o długości  $r$ , bo wiemy już, że punkt  $(2, 3)$  leży na okręgu.

**Odp.:** Prosta jest styczna do okręgu w punkcie  $(2, 3)$ .



## Przykład 3

Zbadamy wzajemne położenie prostej  $y = x + 3$  i okręgu  $x^2 + (y + 2)^2 = 9$ .

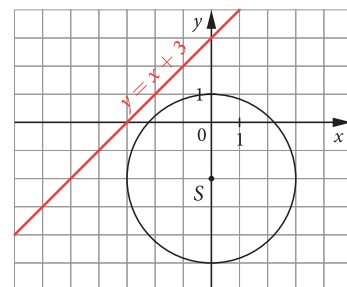
## Rozwiązanie

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + (y + 2)^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + 5x + 8 = 0 \end{cases}$$

Wyróżnik równania kwadratowego jest równy  $\Delta = 25 - 32 = -7$ , czyli równanie nie ma rozwiązań. Zatem układ równań także ich nie ma. Okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych. Można to również odczytać z rysunku.

Innym sposobem rozwiązania jest obliczenie odległości środka okręgu od prostej i porównanie jej z promieniem.

**Odp.:** Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.



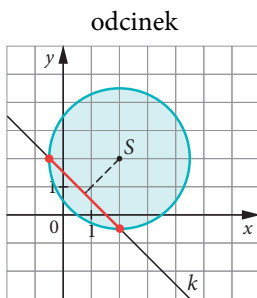
Zbadamy teraz, jaką figurą jest zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

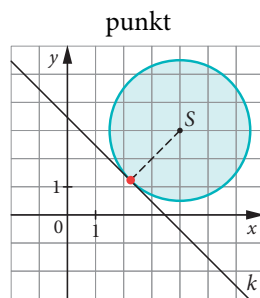
w którym  $r > 0$  oraz  $p^2 + q^2 \neq 0$ .

Pierwszy warunek opisuje koło o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$ , drugi jest równaniem prostej, nazwijmy ją  $k$ . Punkt  $(x, y)$  spełnia podany układ warunków, gdy należy do każdej z tych figur. Są trzy możliwości.

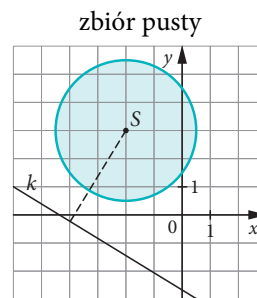
- Odległość punktu  $S = (a, b)$  od prostej  $k$  jest mniejsza od  $r$ :  
wtedy prosta  $k$  przecina koło, czyli punkty wspólne obu figur tworzą odcinek – opisywany zbiór jest odcinkiem (rys. 1).
- Odległość punktu  $S = (a, b)$  od prostej  $k$  jest równa  $r$ :  
wtedy prosta  $k$  jest styczna do koła, czyli jedynym punktem wspólnym tych figur jest punkt styczności – opisywany zbiór jest jednoelementowy (rys. 2).
- Odległość punktu  $S = (a, b)$  od prostej  $k$  jest większa od  $r$ :  
wtedy prosta  $k$  jest rozłączna z kołem, czyli figury nie mają punktów wspólnych – opisywany zbiór jest zbiorem pustym (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

### Przykład 4 ◀ zad. 5.13

Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków  $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 11 \\ y = 3 - 2,5x \end{cases}$ ?

#### Rozwiązanie

Nierówność  $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 11$  opisuje koło o środku  $S = (4, 2)$  i promieniu  $r = \sqrt{11}$ . Natomiast  $y = 3 - 2,5x$  jest równaniem kierunkowym prostej.

◀5.13. Przekątna kwadratu opisanego na okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$  jest zawarta w prostej  $2x - y - 2 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

#### 5.13. Rozwiązanie

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 5; S = (1, 0), r = \sqrt{5} - \text{środek i promień okręgu wpisanego w kwadrat}$$

Wierzchołki kwadratu leżą na okręgu opisanym na tym kwadracie, czyli okręgu o środku  $S$  i promieniu  $R = r\sqrt{2} = \sqrt{10}$ :

$(x-1)^2 + y^2 = 10$ . Szukamy punktów wspólnych okręgu opisanego na kwadracie i prostej zawierającej jego przekątną.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 10 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(x-1) \\ (x-1)^2 + [2(x-1)]^2 = 10 \end{cases}, \text{ stąd } (x-1)^2 = 5, \text{ czyli } x = 1 - \sqrt{2} \text{ lub } x = 1 + \sqrt{2}.$$

Otrzymujemy współrzędne dwóch wierzchołków kwadratu:  $(1 - \sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ ,  $(1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ .

Prosta zawierająca drugą przekątną kwadratu jest prostopadła do danej prostej i przechodzi przez punkt  $S$ :  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 10 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x-1) \\ (x-1)^2 + \left[-\frac{1}{2}(x-1)\right]^2 = 10 \end{cases}, \text{ stąd } (x-1)^2 = 8, \text{ czyli } x = 1 - 2\sqrt{2} \text{ lub } x = 1 + 2\sqrt{2}.$$

Otrzymujemy współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu:  $(1 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(1 + 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

Odp.:  $(1 - \sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ ,  $(1 + 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ,  $(1 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Zapišemy równanie prostej, nazwijmy ją  $k$ , w postaci ogólnej:

$$k: 2,5x + y - 3 = 0$$

czyli  $k: 5x + 2y - 6 = 0$ .

Sprawdzamy, jaka jest zależność między odległością punktu  $S$  od prostej  $k$  a promieniem  $r$  koła.

$$\frac{|20 + 4 - 6|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29} \approx 3,34 \quad \leftarrow \text{odległość środka } S \text{ od prostej } k$$

Zauważmy, że  $\sqrt{11} < 3,32$ , natomiast  $\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3,32$ . Otrzymaliśmy układ nierówności:

$$\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3,32 > \sqrt{11}$$

Zatem prosta o równaniu  $y = 3 - 2,5x$  nie ma punktów wspólnych z kołem opisanym za pomocą nierówności  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 11$ .

**Odp.:** Opisany zbiór jest zbiorem pustym.

#### ◀ 5.15. Okrąg o środku

$S = (-1, -2)$  przechodzi przez punkt  $M = (0, 3)$ . Napisz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie  $M$ .

**Odp.:**  $x + 5y - 15 = 0$



#### Przykład 5 ◀ zad. 5.15

Okrąg o środku  $S = (1, 2)$  przechodzi przez punkt  $M = (-2, 1)$ . Napiszemy równanie stycznej do tego okręgu w punkcie  $M$ .

#### Rozwiązanie

Szukana styczna (oznaczymy ją  $k$ ) jest prostopadła do prostej  $MS$ , jej równanie można zapisać w postaci kierunkowej:

$$k: y = ax + b$$

Do wyznaczenia współczynnika  $a$  potrzebny jest współczynnik kierunkowy  $m$  prostej  $MS$ :  $y = mx + p$ .

$$\begin{cases} 2 = m + p \\ 1 = -2m + p \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktów } S \text{ i } M$$

Stąd  $m = \frac{1}{3}$ . Zauważmy, że do rozwiązania zadania nie jest potrzebna wartość  $p$ .

$$a = -\frac{1}{m} = -3$$

$$k: y = -3x + b$$

$$1 = 6 + b$$

$$k: y = -3x - 5$$

$\leftarrow$  szukana styczna przechodzi przez punkt  $M$

**Odp.:** Styczna ma równanie  $y = -3x - 5$ .

**Przykład 6** ◀ zad. 5.18

Napiszemy równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$  prostopadłych do prostej  $l: x - 2y = 0$ .

**Rozwiązanie**

Zadanie rozwiążemy trzema sposobami. W pierwszym odwołamy się do konstrukcyjnego wyznaczania stycznych, a w pozostałych pokażemy metodę rachunkową.

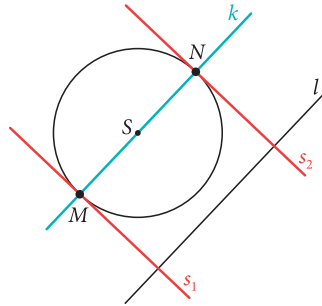
I sposób

Konstrukcja stycznych opisanych w zadaniu przebiega następująco:

**Krok 1:** Przez środek okręgu prowadzimy prostą  $k$  równoległą do  $l$ .

**Krok 2:** Wyznaczamy punkty  $M$  i  $N$  przecięcia okręgu prostą  $k$ . Są to punkty styczności szukanych stycznych (na rysunku oznaczonych  $s_1, s_2$ ).

**Krok 3:** Przez punkty  $M$  i  $N$  prowadzimy proste  $s_1$  i  $s_2$  prostopadłe do  $l$ .



Wykonujemy kolejne kroki.

**1.** Z równania okręgu  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$  odczytujemy jego środek  $S = (1, -3)$ . Następnie znajdujemy równanie prostej  $k$ , równoległej do prostej  $l$  i przechodzącej przez  $S$ .

$$k: x - 2y + c = 0$$

$$1 + 6 + c = 0 \quad \leftarrow S \in k$$

$$k: x - 2y - 7 = 0$$

**2.** Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i otrzymujemy } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Zatem  $M = (3, -2)$ ,  $N = (-1, -4)$ .

**3.** Znajdujemy równania stycznych  $s_1$  i  $s_2$ .

$$s_1: 2x + y + c = 0 \text{ i } 6 - 2 + c = 0 \quad \leftarrow s_1 \perp l \text{ i } M \in s_1$$

$$s_1: 2x + y - 4 = 0$$

$$s_2: 2x + y + c = 0 \text{ i } -2 - 4 + c = 0 \quad \leftarrow s_2 \perp l \text{ i } N \in s_2$$

$$s_2: 2x + y + 6 = 0$$

**◀5.18.** Napisz równania stycznych do okręgu  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$  prostopadłych do prostej  $y = x$ .  
**Odp.:**  $y = -x + 3$ ,  $y = -x - 9$

II sposób

Prosta jest styczna do okręgu o środku  $S$  i promieniu  $r$  wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu  $S$  od tej prostej jest równa  $r$ .

Okrąg dany w zadaniu ma środek  $S = (1, -3)$  i promień  $\sqrt{5}$ .

Każdą prostą prostopadłą do prostej  $l$  można opisać za pomocą równania postaci  $2x + y + c = 0$ . Jeżeli skorzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej, to otrzymamy równanie z niewiadomą  $c$ .

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \quad \leftarrow S = (1, -3), r = \sqrt{5}$$

$$\frac{|c - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|c - 1| = 5$$

$$c - 1 = 5 \text{ lub } c - 1 = -5$$

$$c = 6 \text{ lub } c = -4$$

$|x| = a$  ( $a > 0$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = a$  lub  $x = -a$ .

Równania stycznych to  $2x + y + 6 = 0$  i  $2x + y - 4 = 0$ .

III sposób

Każdą prostą prostopadłą do prostej  $l$  można opisać za pomocą równania postaci  $2x + y + c = 0$ . Szukamy wartości parametru  $c$ , dla których taka prosta prostopadła ma jeden punkt wspólny z okręgiem, czyli układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ 2x + y + c = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ y = -2x - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (-2x - c)^2 - 2x + 6(-2x - c) + 5 = 0 \\ y = -2x - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + (4c - 14)x + c^2 - 6c + 5 = 0 \\ y = -2x - c \end{cases}$$

Otrzymany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik równania kwadratowego jest równy 0. Rozwiązujemy równanie  $\Delta = 0$ :

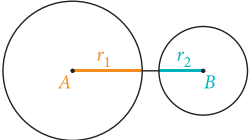
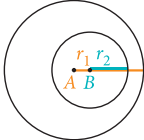
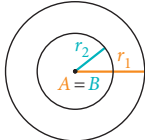
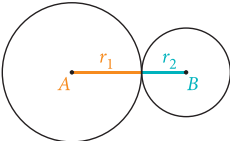
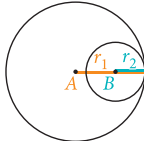
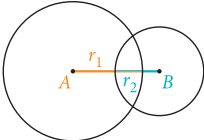
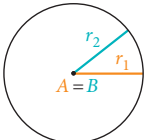
$$(4c - 14)^2 - 20(c^2 - 6c + 5) = 0 \quad c^2 - 2c - 24 = 0$$

i otrzymujemy  $c = -4$  lub  $c = 6$ . Zatem są dwie proste spełniające warunki zadania:  $y = -2x + 4$  oraz  $y = -2x - 6$ .

**Odp.:** Szukane styczne mają równania  $y = -2x + 4$ ,  $y = -2x - 6$ .

## Dwa okręgi

Przypomnijmy warunki, od których zależy liczba punktów wspólnych okręgów  $o_1(A, r_1)$  i  $o_2(B, r_2)$  takich, że  $r_1 \geq r_2$ .

|                          |                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0 punktów wspólnych      | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> AB  &gt; r_1 + r_2</math></li> </ul>                 | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> AB  &lt; r_1 - r_2</math> i <math>r_1 \neq r_2</math></li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> AB  = 0</math> i <math>r_1 \neq r_2</math></li> </ul>  |
| 1 punkt wspólny          | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> AB  = r_1 + r_2</math></li> </ul>                    | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> AB  = r_1 - r_2</math></li> </ul>                                 |                                                                                                                                                                                       |
| 2 punkty wspólne         | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>r_1 - r_2 &lt;  AB  &lt; r_1 + r_2</math></li> </ul>  |                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                       |
| wszystkie punkty wspólne | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> AB  = 0</math> i <math>r_1 = r_2</math></li> </ul>  |                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                       |

### Przykład 7 zad. 5.25

Dane są równania dwóch okręgów. Zbadamy, ile punktów wspólnych mają te okręgi.

a)  $o_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ ,  $o_2: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$

b)  $o_1: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ ,  $o_2: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 5 = 0$

### Rozwiązanie

a) Okrąg  $o_1$  – środek:  $S_1 = (2, -3)$ , promień:  $r_1 = 1$

Okrąg  $o_2$  – środek:  $S_2 = (1, 5)$ , promień:  $r_2 = 2$

$$|S_1S_2| = \sqrt{(1-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{65} > r_1 + r_2 = 3$$

Odp.: Brak punktów wspólnych.

◀ 5.25. Podaj liczbę punktów wspólnych okręgów o danych równaniach.

a)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ ,  
 $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$

b)  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 42 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 30 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 32 = 0$

d)  $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 70 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

Odp.: a) 0 b) 1 c) 2 d) 1

◀ 5.26. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o danych równaniach.

a)  $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 105 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 37 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 56 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 14x + 16y + 33 = 0$

d)  $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 31 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$

Odp.: a) styczne wewnętrznie

b) rozłączne zewnętrznie

c) styczne zewnętrznie

d) przecinają się

◀ 5.27. Wyznacz, jeśli istnieją, punkty wspólne danych okręgów.

a)  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 + 10x + 12y - 4 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 40 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 26 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 27 = 0$

d)  $x^2 + y^2 + 6x + 14y - 24 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 + 4x + 12y - 24 = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 41 = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 4x - 18y = 0$ ,  
 $x^2 + y^2 - 10x + 6y = 0$

Odp.: a)  $(-4, 2)$ ,  $(2, -2)$

b)  $(-5, -3)$ ,  $(3, -1)$

c)  $(2, 1)$

d)  $(-2, 2)$ ,  $(6, -6)$

e) brak punktów wspólnych

f)  $(0, 0)$ ,  $(8, 2)$

b) Okrąg  $o_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 18$ , środek:  $S_1 = (2, -3)$ , promień:  $r_1 = 3\sqrt{2}$

Okrąg  $o_2: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 18$ , środek:  $S_2 = (-3, 2)$ , promień:  $r_2 = 3\sqrt{2}$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} < r_1 + r_2 = 6\sqrt{2} \text{ i } |S_1 S_2| > r_1 - r_2 = 0$$

Odp.: Okręgi mają dwa punkty wspólne.

### Przykład 8 ◀ zad. 5.26

Zbadamy wzajemne położenie okręgów opisanych za pomocą równań  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 = 0$  i  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ .

#### Rozwiązanie

Zapisujemy równania okręgów w postaci kanonicznej:

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \quad (x+1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

$$S_1 = (-4, 2), r_1 = 3 \quad S_2 = (-1, -2), r_2 = 2$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{9 + 16} = 5 = r_1 + r_2$$

Odp.: Okręgi są styczne zewnętrznie.

### Przykład 9 ◀ zad. 5.27

Dane są dwa okręgi:  $x^2 + (y+1)^2 = 20$  i  $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 50$ .

Zbadamy wzajemne położenie tych okręgów, a jeśli się przecinają, wyznaczmy współrzędne ich punktów przecięcia.

#### Rozwiązanie

Wyznaczymy środki i promienie okręgów, a następnie porównamy odległość między środkami okręgów z sumą i różnicą promieni.

Okrąg  $x^2 + (y+1)^2 = 20$  – środek:  $S_1 = (0, -1)$ , promień:  $r_1 = \sqrt{20}$

Okrąg  $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 50$  – środek:  $S_2 = (9, 2)$ , promień:  $r_2 = \sqrt{50}$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} \approx 9,5$$

$$r_1 + r_2 = \sqrt{20} + \sqrt{50} \approx 4,5 + 7,1 = 11,6$$

$$r_2 - r_1 = \sqrt{50} - \sqrt{20} \approx 7,1 - 4,5 = 2,6$$

Zatem  $r_2 - r_1 < |S_1 S_2| < r_1 + r_2$ , czyli okręgi mają dwa punkty wspólne.

Wyznaczymy współrzędne tych punktów. W tym celu rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 20 \\ (x-9)^2 + (y-2)^2 = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 1 = 20 \\ x^2 - 18x + 81 + y^2 - 4y + 4 = 50 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \\ x^2 + y^2 - 18x - 4y + 35 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Aby rozwiązać układ (\*), odejmujemy równania stronami. Otrzymujemy jedno równanie liniowe z dwiema niewiadomymi (wyrażenia  $x^2$  oraz  $y^2$  redukują się):

$$18x + 6y - 54 = 0 \quad (1)$$

Wybieramy jedno równanie z układu (\*), najlepiej to o prostszych współczynnikach:

$$x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \quad (2)$$

Równania (1) i (2) tworzą układ równoważny układowi (\*), który dalej rozwiązujemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 18x + 6y - 54 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ x^2 + (-3x + 9)^2 + 2(-3x + 9) - 19 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{wyznaczamy z pierwszego równania } y$$

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ x^2 + 9x^2 - 54x + 81 - 6x + 18 - 19 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ 10x^2 - 60x + 80 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x + 9 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$$

Stąd  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 3$  oraz  $x_2 = 4$ ,  $y_2 = -3$ .

Odp.: Okręgi przecinają się w punktach o współrzędnych (2, 3) oraz (4, -3).

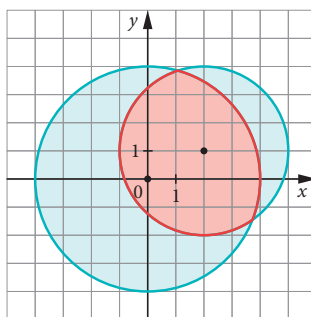
### Przykład 10 ◀ zad. 5.30 a, b, c

Narysujemy na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany układ nierówności.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$$

#### Rozwiązanie

Pierwsza nierówność opisuje koło o środku  $S = (2, 1)$  i promieniu 3, a druga koło o środku  $(0, 0)$  i promieniu 4. Za pomocą układu nierówności opisana jest część wspólna tych kół, na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym.



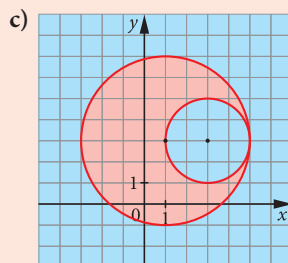
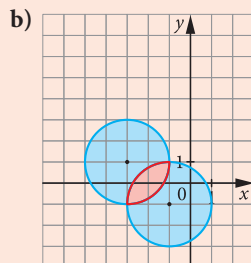
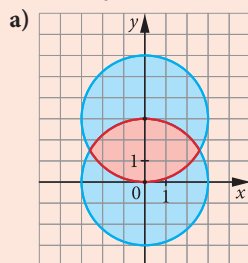
◀ 5.30. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają podany układ warunków.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 16 \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 \geq 4 \end{cases}$

### 5.30. Odp.:

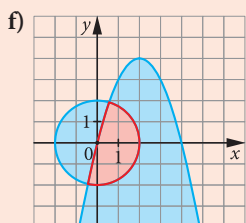
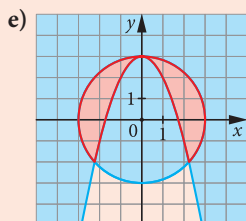


◀5.30. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają podany układ warunków.

e) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq 3 - x^2 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq 4x - x^2 \end{cases}$$

Odp.:



### Odpowiedzi i rozwiązania

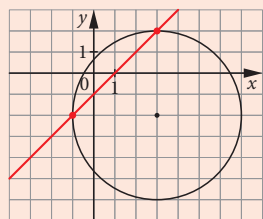
5.1. B

5.2. C

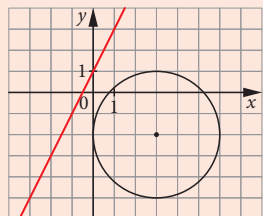
5.3. B

5.4. P, P, F

5.5. a) Prosta przecina okrąg w punktach  $(-1, -2)$  i  $(3, 2)$ .



b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.



5.6. a)  $(-2, -1)$ ,  $(2, 3)$

b)  $(1, 7)$ ,  $(4, 4)$

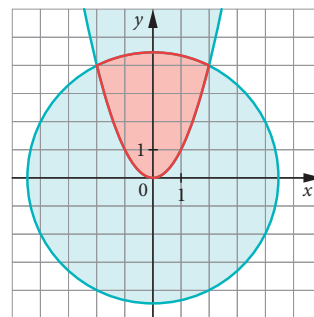
\* Przykład 11 ◀ zad. 5.30 e, f

Narysujemy zbiór punktów opisany za pomocą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 20 \\ y \geq x^2 \end{cases}$$

### Rozwiązanie

Z rysunku można odczytać, a następnie sprawdzić rachunkowo współrzędne punktów przecięcia paraboli i okręgu. Są nimi  $(2, 4)$  oraz  $(-2, 4)$ . Szukany zbiór zaznaczony jest kolorem czerwonym.



### Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż styczną do okręgu o równaniu  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

- A.  $x = 2$       B.  $x = 7$       C.  $y = 2$       D.  $y = 3$

5.2. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków 
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$$
?

- A. dwa punkty      B. punkt      C. odcinek      D. zbiór pusty

5.3. Która prosta przecina okrąg  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$  w dwóch punktach?

- A.  $y = 2$       B.  $x + y - \sqrt{3} = 0$       C.  $x - y + 2 = 0$       D.  $x = 3$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków 
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

- A. jest odcinkiem.      B. ma dokładnie dwie osie symetrii.      C. jest zbiorem pustym.

5.5. Zbadaj graficznie i rachunkowo wzajemne położenie prostej i okręgu o danych równaniach.

a)  $y = x - 1$ ,  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$       b)  $y = 2x + 1$ ,  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

5.6. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a)  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$        $x - y + 1 = 0$

b)  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$        $x + y - 8 = 0$

**5.7.** Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a)  $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$        $x - 5 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$        $2x - y + 4 = 0$

**5.8.** Oblicz długość cięciwy, którą okrąg  $x^2 + 2x + y^2 + 8y + 7 = 0$  wycina z prostej  $y = 2x - 7$ .

**5.9.** Przez środek okręgu  $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 8 = 0$  i punkt  $P = (1, 6)$  poprowadzono prostą przecinającą ten okrąg w dwóch punktach. Wyznacz te punkty.

**5.10.** Okrąg  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 12 = 0$  o środku  $S$  przecina oś  $x$  w punktach  $A$  i  $B$ . Oblicz pole i obwód trójkąta  $ABS$ .

**5.11.** Punkty  $A = (0, -1)$  i  $B = (-2, 1)$  należą do okręgu  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ . Znajdź współrzędne takiego punktu  $C$  należącego do tego okręgu, aby  $|AC| = |BC|$ .

**5.12.** W okrąg  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$  wpisano prostokąt  $ABCD$  w taki sposób, że wierzchołki  $A$  i  $B$  leżą na prostej  $y = 5x - 5$ . Wyznacz wierzchołki tego prostokąta i oblicz jego pole.

\* **5.13.** Przekątna kwadratu opisanego na okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$  jest zawarta w prostej  $2x - y - 2 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

**5.14.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego układu warunków?

a)  $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 \leq 4 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} (x-10)^2 + (y-1)^2 \leq 100 \\ x = 19 \end{cases}$

**5.15.** Okrąg o środku  $S = (-1, -2)$  przechodzi przez punkt  $M = (0, 3)$ . Napisz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie  $M$ .

**5.16.** Napisz równanie okręgu o środku  $S = (-3, 1)$  stycznego do prostej  $2x - y + 1 = 0$ .

**5.17.** Napisz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 = 18$  równoległych do prostej  $y = -x + 2$ .

**5.18.** Napisz równania stycznych do okręgu  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$  prostopadłych do prostej  $y = x$ .

**5.7. a)**  $(5, -4), (5, 4)$

**b)** brak punktów wspólnych

**5.8.**  $2\sqrt{5}$

**5.9.**  $(2, 4), (4, 0)$

**5.10.**  $P = 16, obw = 8(1 + \sqrt{2})$

**5.11.**  $C = (1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$   
lub  $C = (1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$

**5.12.**  $(1, 0), (2, 5), (7, 4), (6, -1), P = 26$

**5.13.** Patrz s. 149.

**5.14. a), b)** odcinek

**5.15.**  $x + 5y - 15 = 0$

**5.16.**  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 7,2$

**5.17.**  $y = -x + 6, y = -x - 6$

**5.18.**  $y = -x + 3, y = -x - 9$

**5.19.**  $y = -x + 2 - 2\sqrt{5}$ ,  
 $y = -x + 2 + 2\sqrt{5}$

**5.20.**  $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 20$ ,  
 $l: y = -2x + 5$

**5.22.** Środkiem okręgu  
 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$   
 jest punkt  $S = (1, -2)$ .  
 $l: mx - y = m + 2$ ,  
 czyli  $y = mx - m - 2$ .  
 Dla  $x = 1$  mamy  $y = -2$ ,  
 czyli  $S \in l$ , co oznacza, że prosta  $l$   
 przechodzi przez środek okręgu,  
 więc zawiera jego średnicę  
 (dla dowolnego  $m \in \mathbb{R}$ ).

**5.23.**  $\sqrt{10}$

**5.24.**  $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 49$ ,  
 punkty:

$(7 - 2\sqrt{6}, 0)$ ,  $(7 + 2\sqrt{6}, 0)$   
 lub  $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 49$ ,  
 punkty:  
 $(-7 - 2\sqrt{6}, 0)$ ,  $(-7 + 2\sqrt{6}, 0)$

**5.25.** a) 0   b) 1   c) 2   d) 1

- 5.26.** a) styczne wewnętrznie  
 b) rozłączne zewnętrznie  
 c) styczne zewnętrznie  
 d) przecinają się

- 5.27.** a)  $(-4, 2)$ ,  $(2, -2)$   
 b)  $(-5, -3)$ ,  $(3, -1)$   
 c)  $(2, 1)$   
 d)  $(-2, 2)$ ,  $(6, -6)$   
 e) brak punktów wspólnych  
 f)  $(0, 0)$ ,  $(8, 2)$

**5.19.** Napisz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$  prostopadłych do prostej  $x - y = 7$ .

**5.20.** Okrąg o środku  $S = (6, 3)$  jest styczny do prostej  $l$  w punkcie  $A = (2, 1)$ . Napisz równania okręgu i prostej  $l$ .

**5.21.** Wykaż, że styczne do okręgu  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$  poprowadzone z początku układu współrzędnych są prostopadłe.

**5.22.** Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru  $m$  prosta  $mx - y = m + 2$  zawiera średnicę okręgu  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ .

**5.23.** Z punktu  $A = (4, -4)$  poprowadzono styczne do okręgu  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ . Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.

**5.24.** Okrąg styczny do osi  $y$  w punkcie  $P = (0, 5)$  wyznacza na osi  $x$  cięciwę o długości  $4\sqrt{6}$ . Napisz równanie tego okręgu i znajdź jego punkty przecięcia z osią  $x$ .

**5.25.** Podaj liczbę punktów wspólnych okręgów o danych równaniach.

|                                    |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$     | $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$    |
| b) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 42 = 0$ | $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 30 = 0$ |
| c) $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$ | $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 32 = 0$ |
| d) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 70 = 0$ | $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$  |

**5.26.** Zbadaj wzajemne położenie okręgów o danych równaniach.

|                                    |                                  |
|------------------------------------|----------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 105 = 0$ | $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 37 = 0$   |
| b) $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$  | $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 56 = 0$  |
| c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$   | $x^2 + y^2 - 14x + 16y + 33 = 0$ |
| d) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 31 = 0$ | $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$    |

**5.27.** Wyznacz, jeśli istnieją, punkty wspólne danych okręgów.

|                                    |                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$  | $x^2 + y^2 + 10x + 12y - 4 = 0$ |
| b) $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 40 = 0$ | $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 26 = 0$  |
| c) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ | $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 27 = 0$  |
| d) $x^2 + y^2 + 6x + 14y - 24 = 0$ | $x^2 + y^2 + 4x + 12y - 24 = 0$ |
| e) $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 41 = 0$ | $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$   |
| f) $x^2 + y^2 - 4x - 18y = 0$      | $x^2 + y^2 - 10x + 6y = 0$      |

**5.21.** Przekształćmy równanie okręgu  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$  do postaci  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ .

$S(1, 3)$ ,  $r = \sqrt{5}$

Styczne prowadzone z początku układu współrzędnych mają postać  $y = ax$ , czyli  $ax - y = 0$ .

Odległość punktu  $S$  od stycznej jest równa  $r$ , czyli:

$$\frac{|a \cdot 1 - 3|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a - 3| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 5(a^2 + 1) \Leftrightarrow 4a^2 + 6a - 4 = 0 \quad |:2$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0, \quad \Delta = 25, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$a_1 a_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ , zatem szukane styczne są prostopadłe.

**5.28.** Dla jakich wartości parametru  $m$  okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$  ma jeden punkt wspólny z okręgiem  $x^2 + y^2 - 2mx - 4y + m^2 - 21 = 0$ ? Dla wyznaczonych wartości  $m$  napisz równania okręgów w postaci kanonicznej. Rozważ wszystkie przypadki.

\* **5.29.** Rozwiąż rachunkowo i graficznie układ równań.

a) 
$$\begin{cases} |x| + y = 2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \\ |x - 1| - y = 0 \end{cases}$$

**5.30.** Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają podany układ warunków.

a) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 4)^2 \leq 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

\* e) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq 3 - x^2 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 16 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \geq 4 \end{cases}$$

\* f) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq 4x - x^2 \end{cases}$$

### Prosto do matury



**1.** Dany jest okrąg o środku  $S = (13, 2)$  i promieniu  $r = 4$  oraz prosta  $k: x - y = 11$ . Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prosta  $k$  jest styczna do okręgu  $o(S, r)$ .

B. Prosta  $k$  przecina okrąg  $o(S, r)$ .

C. Figura złożona z prostej  $k$  i okręgu  $o(S, r)$  ma dokładnie jedną oś symetrii.

**2.** Oblicz długość cięciwy, którą okrąg  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$  wyznacza na prostej  $y = -x + 3$ .

**3.** Napisz równania stycznych do okręgu  $(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 1$  prostopadłych do prostej  $y - 2 = 0$ .

**4.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A = (2, 2)$  oraz przez punkty przecięcia okręgu  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$  z prostą  $y + x = 1$ .

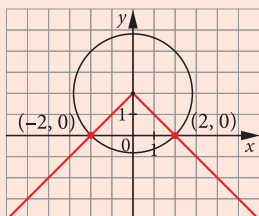
**5.** Wyznacz punkty wspólne okręgów  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 50$  i  $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 41 = 0$ .

**5.29. a)** 
$$\begin{cases} |x| + y = 2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - |x| \\ x^2 + (2 - |x| - 2)^2 = 8 \end{cases}$$

$$x^2 + (-|x|)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$



**b)** 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \\ |x - 1| - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = |x - 1| \\ x^2 + |x - 1|^2 + 2x - 2|x - 1| + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 + 2x - 2|x - 1| + 1 = 0$$

$$2x^2 - 2|x - 1| + 2 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - |x - 1| + 1 = 0$$

• Dla  $x < 1$ :

$$x^2 + x - 1 + 1 = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

• Dla  $x \geq 1$ :

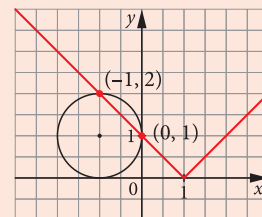
$$x^2 - x + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 9 < 0$$

brak rozwiązań

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ y = |x - 1| \end{cases}$$



**5.28.**

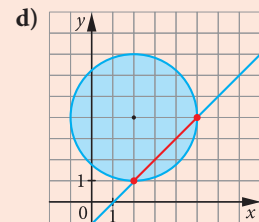
dla  $m = 12$ :  $(x - 12)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ,

dla  $m = 2$ :  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ,

dla  $m = 0$ :  $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ ,

dla  $m = -10$ :  $(x + 10)^2 + (y - 2)^2 = 25$

**5.30. a), b), c)** Patrz s. 155.



e), f) Patrz s. 156.

### Prosto do matury

**1.** F, P, F

**2.**  $4\sqrt{2}$

**3.**  $x = 7, x = 9$

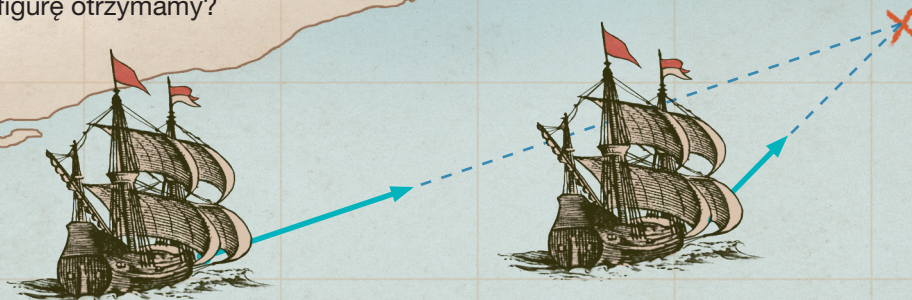
**4.**  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4\frac{1}{2}$

**5.**  $(2, -3), (8, -1)$



## Okrąg Apoloniusza

Na kartce zaznaczamy dwa różne punkty. Są to dwa statki. Oba mogą się poruszać tylko po prostej, w dowolnym kierunku, każdy z inną stałą prędkością. Szybszy statek goni wolniejszy. Naszym zadaniem jest zaznaczenie na kartce wszystkich punktów, w których statki mogą się spotkać. Jaką figurę otrzymamy?



Ta zagadka przedstawia problem matematyczny rozważany przez **Apoloniusza z Perga**:

Dane są punkty  $A$  i  $B$  na płaszczyźnie oraz dodatnia stała  $k \neq 1$ . Jaką figurę na płaszczyźnie tworzą punkty  $P$ , których stosunek odległości od  $A$  i  $B$  jest stały i równy  $k$  ( $\frac{|AP|}{|BP|} = k$ )?

Postawiony problem rozwiążemy dwoma sposobami.

### Sposób I (odległość w układzie współrzędnych)

Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku.

Oznaczmy  $B = (b, 0)$ . Szukamy punktów  $P = (x, y)$  takich, że  $|AP| = k \cdot |BP|$  dla danego  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ .

Mamy:

$$|AP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}, \quad |BP| = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

Warunek  $|AP| = k \cdot |BP|$  zapisujemy w postaci:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

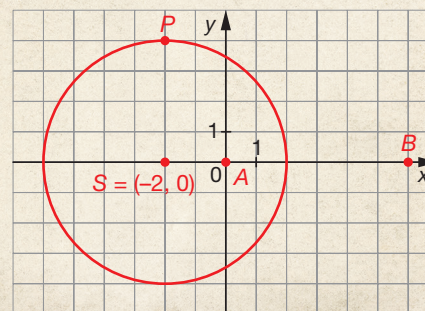
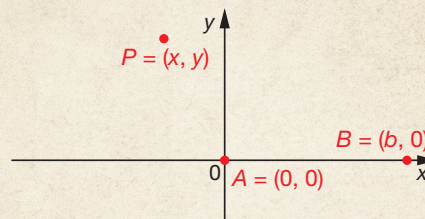
Po podniesieniu obu stron do kwadratu i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2k^2}{(1-k^2)^2}$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie

$\left(-\frac{bk^2}{1-k^2}, 0\right)$  i promieniu  $\left|\frac{bk}{1-k^2}\right|$ . Okrąg ten tworzą punkty  $P$  spełniające warunek podany w zadaniu.

Rozwiązanie dla  $k = \frac{1}{2}$ ,  $b = 6$  pokazano na rysunku obok.





## Sposób II (twierdzenie o dwusiecznej)

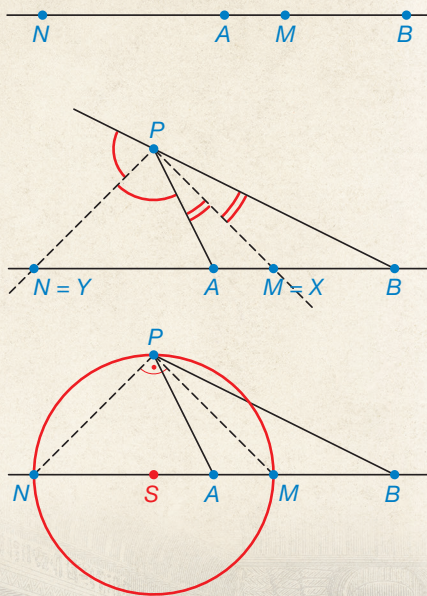
Zauważmy, że dwa spośród szukanych punktów leżą na prostej  $AB$ ; na rysunku oznaczono je  $M$  i  $N$ . Mamy:

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|AN|}{|BN|} = k$$

Teraz rozważmy dowolny punkt  $P$  leżący poza prostą  $AB$  i spełniający warunek  $\frac{|AP|}{|BP|} = k$ . Prowadzimy dwusieczne  $PX$  i  $PY$  odpowiednio kąta  $APB$  i kąta zewnętrznego przy wierzchołku  $P$ . Z twierdzenia o dwusiecznej mamy:

1.  $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$ . Zatem  $X = M$ .
2.  $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$ . Zatem  $Y = N$ .

Oznacza to, że kąt  $MPN$  jest prosty. To z kolei oznacza, że wszystkie punkty  $P$  wraz z punktami  $M$  i  $N$  tworzą okrąg o średnicy  $MN$ .



## Okrąg Apoloniusza

Okrąg będący rozwiązaniem postawionego problemu jest nazywany **okręgiem Apoloniusza**.

Dla danych punktów  $A$  i  $B$  i różnych wartości  $k$  otrzymamy różne okręgi. Żadne dwa z nich się nie przecinają.



Wróćmy do zagadki ze statkami. Zauważmy, że jeżeli każdy z nich płynie ze stałą prędkością po linii prostej, to stosunek ich prędkości jest równy stosunkowi długości przebytych przez nie dróg, czyli odpowiednich odcinków. Dlatego jako rozwiązanie otrzymamy okrąg Apoloniusza.

## 6. Symetria środkowa

### Umiejętności:

- wyznaczanie środka symetrii w figurach środkowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii środkowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

Symetria środkowa była już omawiana w szkole podstawowej. Powtórzmy własności tego przekształcenia, a następnie rozważymy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

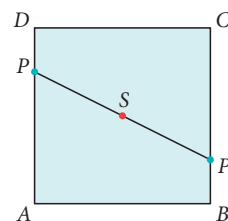
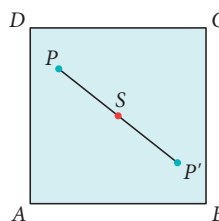
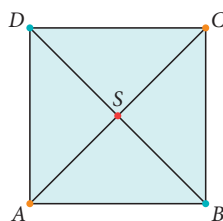
### Symetria środkowa na płaszczyźnie

Punkty  $A$  i  $A'$  są **symetryczne względem punktu  $S$** , gdy  $S$  jest środkiem odcinka  $AA'$ . Punkt  $S$  nazywamy **środkiem symetrii** punktów  $A$  i  $A'$ .



Jeżeli punkt  $A'$  jest symetryczny do punktu  $A$  względem punktu  $S$ , to również punkt  $A$  jest symetryczny do punktu  $A'$  względem punktu  $S$ . Punkt  $S$  jest symetryczny do punktu  $S$  względem punktu  $S$ .

Popatrzmy na kwadrat  $ABCD$  i punkt  $S$  przecięcia jego przekątnych.



Punkty  $A$  i  $C$  są symetryczne względem punktu  $S$ . Podobnie punkty  $B$  i  $D$  są symetryczne względem punktu  $S$ .

Wyberzmy dowolny punkt  $P$  tego kwadratu. Punkt  $P'$  symetryczny do punktu  $P$  względem punktu  $S$  również należy do kwadratu  $ABCD$ .

Podobnie – gdy punkt  $P$  należy do brzegu kwadratu, symetryczny do niego punkt  $P'$  także należy do brzegu kwadratu.

W takiej sytuacji mówimy, że punkt  $S$  jest **środkiem symetrii** kwadratu  $ABCD$ .

O kwadracie powiemy, że jest figurą **środkowosymetryczną**.

#### ZZ i MKP

temat 2.12

#### Multiteka

- Symetria środkowa
- Symetria środkowa w układzie współrzędnych

[dlaNauczyciela.pl](http://dlaNauczyciela.pl) | Kartkówka 2.6

**Generator**  
testów i sprawdzianów

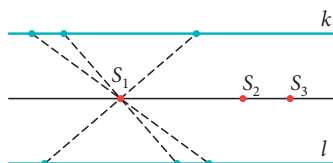


## Definicja

Punkt  $S$  nazywamy **środkiem symetrii figury  $F$** , jeżeli dla każdego punktu  $A$  należącego do  $F$  punkt  $A'$  symetryczny do  $A$  względem  $S$  też należy do  $F$ .  
Figurę  $F$  nazywamy **środkowosymetryczną**.

## Przykład 1 zad. 6.4–6.6

- a) Odcinek jest figurą środkowosymetryczną.  
Środkiem symetrii odcinka jest jego środek.
- b) Okrąg jest figurą środkowosymetryczną.  
Środkiem symetrii okręgu jest jego środek.
- c) Figura złożona z dwóch prostych równoległych  $k, l$  ma nieskończenie wiele środków symetrii.  
Tworzą one prostą równoległą do  $k$  i do  $l$ , jednakowo od nich oddaloną.



Wśród znanych figur geometrycznych wyróżnimy te, które mają środek symetrii, i te, które go nie mają. Na przykład:

| Figury mające środek symetrii | Figury niemające środka symetrii      |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| <br>odcinek                   | <br>półprosta                         |
| <br>prostokąt                 | <br>kąt                               |
| <br>kwadrat                   | <br>trójkąt                           |
| <br>równoległobok             | <br>trapez niebędący równoległobokiem |
| <br>romb                      | <br>deltoid niebędący rombem          |
| <br>okrąg                     |                                       |
| <br>koło                      |                                       |

◀ 6.4. Narysuj dowolny trójkąt. Przekształć go przez symetrię względem środka jednego z boków. Jaką figurę tworzą oba trójkąty?

Odp.: równoległobok

◀ 6.5. Czy prosta jest figurą środkowosymetryczną? Jeżeli tak, to ile ma środków symetrii?

Odp.: Tak, każdy punkt prostej jest jej środkiem symetrii.

◀ 6.6. Czy dana figura ma środek symetrii?

- a) kąt  
b) trapez prostokątny  
c) suma trzech prostych równoległych  
d) suma dwóch odcinków równoległych, rozłącznych i jednakowej długości

Odp.: a) nie

b) nie

c) Tak, tylko wtedy, gdy środkowa prosta jest jednakowo oddalona od dwóch pozostałych prostych.

d) tak

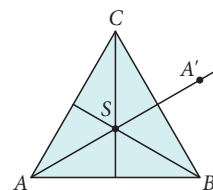
**D Przykład 2**

Wykażemy, że punkt  $S$  przecięcia wysokości trójkąta równobocznego nie jest jego środkiem symetrii.

**Rozwiązanie**

Gdyby tak było, punkt  $A'$  symetryczny do wierzchołka  $A$  względem  $S$  należałby do trójkąta. Tak nie jest, zatem punkt  $S$  nie jest środkiem symetrii trójkąta  $ABC$ .

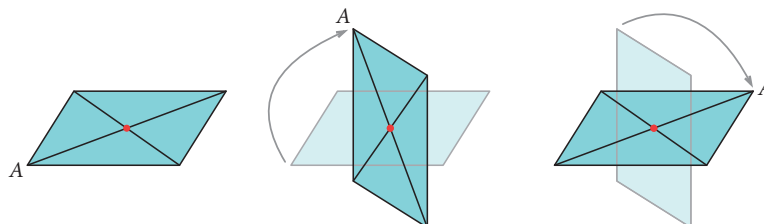
Podobnej próby nie przejdzie żaden inny kandydat na środek symetrii trójkąta równobocznego, a tym bardziej żadnego innego.



Trójkąt **nie** ma środka symetrii.



Figura środkowosymetryczna ma tę własność, że gdy obrócimy ją o  $180^\circ$  wokół jej środka symetrii, to figura przed obrotem i figura po obrocie nałożą się na siebie.



Można to sprawdzić dla wymienionych w tabeli figur środkowosymetrycznych. Nie istnieje natomiast punkt o takiej własności dla półprostej, kąta czy trapezu.

Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi  $P$  przyporządkowuje punkt  $P'$  symetryczny do  $P$  względem ustalonego punktu  $S$ , nazywamy **symetrią środkową o środku  $S$** .

**6.8. Trójkąt  $ABC$** 

przekształcono symetrycznie względem środka boku  $BC$  i otrzymano figurę, która wraz z trójkątem  $ABC$  utworzyła kwadrat. Jakim trójkątem jest trójkąt  $ABC$ ?

**Odp.:** trójkątem równoramiennym prostokątnym, w którym  $\sphericalangle A = 90^\circ$

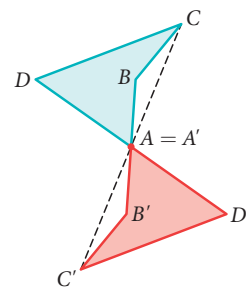
**Przykład 3** zad. 6.8

Narysujemy figurę, która jest obrazem danego czworokąta  $ABCD$  w symetrii środkowej o środku  $A$ .

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta  $ABCD$  jest wierzchołek czworokąta  $A'B'C'D'$ ,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta  $ABCD$  jest punkt należący do brzegu czworokąta  $A'B'C'D'$ ,
- punktu wewnętrznego czworokąta  $ABCD$  jest punkt wewnętrzny czworokąta  $A'B'C'D'$ ,
- punktu  $A$  jest ten sam punkt.



Jeżeli w jakimś przekształceniu obrazem punktu  $P$  jest ten sam punkt  $P$ , to nazywamy go **punktem stałym** tego przekształcenia.

Symetria środkowa względem punktu  $S$  ma jeden punkt stały – jest nim środek tej symetrii.

Figury:  $F$  i jej obraz  $F'$  w symetrii środkowej są **przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu  $r$  – okrąg o promieniu  $r$ , trójkąta  $ABC$  – przystający do niego trójkąt  $A'B'C'$  itd.

### Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

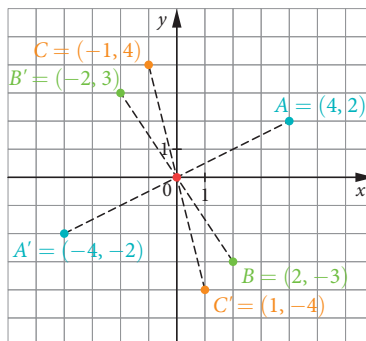
Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię względem dowolnego punktu. Ograniczymy się jednak do omówienia sytuacji, gdy środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Jeśli  $P' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $P = (x, y)$  w symetrii względem punktu  $(0, 0)$ , to:

$$\begin{cases} \frac{x' + x}{2} = 0 \\ \frac{y' + y}{2} = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{współrzędne środka odcinka}$$

czyli  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$



#### Przykład 4 ◀ zad. 6.11

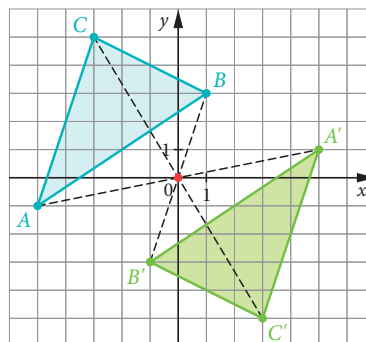
Trójkąt o wierzchołkach  $A = (-5, -1)$ ,  $B = (1, 3)$ ,  $C = (-3, 5)$  przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznaczmy współrzędne wierzchołków obrazu trójkąta  $ABC$  w tej symetrii i narysujemy obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

#### Rozwiązanie

Niech  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  oznaczają odpowiednio wierzchołki obrazu trójkąta  $ABC$  w tym przekształceniu. Zatem zgodnie z podanymi wzorami mamy:

$$A' = (5, 1), B' = (-1, -3), C' = (3, -5)$$

Na rysunku przedstawiamy ilustrację graficzną rozwiązania.



◀6.11. Wyznacz współrzędne środka symetrii odcinka  $PQ$ .

- a)  $P = (3, -2)$ ,  $Q = (-5, 6)$
- b)  $P = (-3, 7)$ ,  $Q = (3, -1)$
- c)  $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$ ,  $Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$
- d)  $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$

Odpo.: a)  $(-1, 2)$   
 b)  $(0, 3)$   
 c)  $(4, 3)$   
 d)  $(1, 4)$

◀6.14. Napisz równanie obrazu danej prostej po przekształceniu jej przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

a)  $y = 3x - 4$

b)  $y = \sqrt{2}x + 11$

c)  $y = -0,3x - \sqrt{7}$

d)  $x - 15 = 0$

e)  $8x - 3y + 5 = 0$

f)  $9x + \sqrt{11}y - 3\sqrt{2} = 0$

Odp.: a)  $y = 3x + 4$

b)  $y = \sqrt{2}x - 11$

c)  $y = -0,3x + \sqrt{7}$

d)  $x + 15 = 0$

e)  $8x - 3y - 5 = 0$

f)  $9x + \sqrt{11}y + 3\sqrt{2} = 0$



### Przykład 5 ◀ zad. 6.14

Wyznamy obraz prostej  $k: y = 2x - 3$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Obrazem prostej jest prosta, zatem należy:

**Krok 1:** Wybrać dwa dowolne punkty  $A$  i  $B$  należące do prostej  $k$ .

**Krok 2:** Przekształcić punkty  $A$  i  $B$  przez symetrię środkową względem punktu  $(0, 0)$ , aby otrzymać punkty  $A'$  i  $B'$ .

**Krok 3:** Wyznaczyć równanie prostej  $k'$  przechodzącej przez punkty  $A'$  i  $B'$ .

Wykonujemy kolejne kroki.

1.  $A = (0, -3) \in k$  i  $B = (1, -1) \in k$

2.  $A' = (0, 3)$ ,  $B' = (-1, 1)$

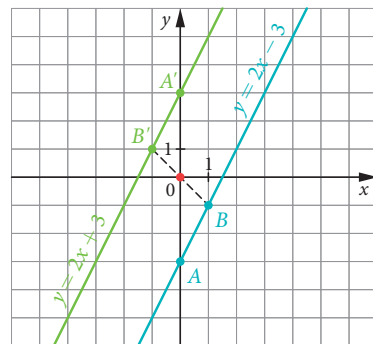
3.  $k': y = ax + b$ , zatem:

$$\begin{cases} 3 = b \\ 1 = -a + b \end{cases}$$

$$\leftarrow \begin{matrix} A' = (0, 3) \in k' \\ B' = (-1, 1) \in k' \end{matrix}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$k': y = 2x + 3$$



Odp.: Obrazem prostej  $k: y = 2x - 3$  jest prosta  $k': y = 2x + 3$ .

Zauważmy, że obrazem prostej w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta do niej równoległa.

Zapiszemy to spostrzeżenie w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

### Twierdzenie

W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych obrazem prostej  $k: y = ax + b$  jest równoległa do niej prosta  $k': y = ax - b$ .

◀6.22. Wyznacz współrzędne obrazu punktu  $P$  w symetrii względem punktu  $T$ .

a)  $P = (-2, 1)$ ,  $T = (-3, 4)$

b)  $P = (-1, 5)$ ,  $T = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Odp.: a)  $(-4, 7)$

b)  $(-2, -4)$

### \* Przykład 6 ◀ zad. 6.22

a) Przekształcimy punkt  $P = (x, y)$  przez symetrię środkową względem punktu  $T = (p, q)$ .

b) Skorzystamy z wyprowadzonych wzorów i znajdziemy obraz punktu  $P = (-\sqrt{7}, 6)$  w symetrii środkowej względem punktu  $T = (2, \sqrt{2})$ .

## Rozwiązanie

- a) Jeśli  $P' = (x', y')$  oznacza obraz punktu  $P = (x, y)$ , a punkt  $T = (p, q)$  jest środkiem odcinka  $PP'$ , to:

$$\begin{cases} p = \frac{x + x'}{2} \\ q = \frac{y + y'}{2} \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{współrzędne} \\ \text{środka odcinka} \end{array}$$

Zauważmy, że szukanie obrazu punktu w symetrii środkowej względem punktu jest tym samym, co znajdowanie końca odcinka, gdy dany jest jego środek i drugi koniec.

Po przekształceniu tych równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$$

- b)  $P = (-\sqrt{7}, 6)$ ,  $T = (2, \sqrt{2})$ ,  $P' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $P$  w symetrii względem punktu  $T$ :

$$\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x' = 4 + \sqrt{7} \\ y' = 2\sqrt{2} - 6 \end{cases}$$

Odp.: a)  $\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$  b)  $P' = (4 + \sqrt{7}, 2\sqrt{2} - 6)$

## Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

**6.1.** Trójkąt  $A'B'C'$  jest obrazem trójkąta o wierzchołkach  $A = (-3, -1)$ ,  $B = (2, 6)$ ,  $C = (-2, 4)$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż środek ciężkości trójkąta  $A'B'C'$ .

A.  $(1, -\frac{11}{2})$       B.  $(1, -3)$       C.  $(3, -9)$       D.  $(0, -3)$

**6.2.** Okrąg o równaniu  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$  przekształcono przez symetrię środkową względem punktu  $(0, 0)$ . Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A.  $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$       C.  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$   
B.  $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$       D.  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

**6.3.** Okrąg o równaniu  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$  jest obrazem okręgu  $F$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie okręgu  $F$ .

A.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$       C.  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$   
B.  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$       D.  $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$

## Odpowiedzi i rozwiązania

**6.1.** B

**6.2.** A

**6.3.** B

**6.4.** równoległobok

**6.5.** Tak, każdy punkt prostej jest jej środkiem symetrii.

**6.6.** a) nie

b) nie

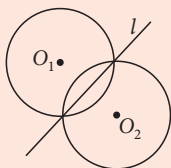
c) Tak, tylko wtedy, gdy środkowa prosta jest jednakowo oddalona od dwóch pozostałych prostych.

d) tak

**6.7.** a), b) trzy

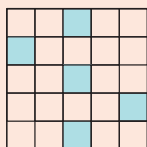
**6.8.** trójkątem równoramiennym prostokątnym, w którym  $\sphericalangle A = 90^\circ$

**6.9.**

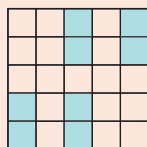


**6.10.**

a) dwie



b) trzy



**6.11.** a)  $(-1, 2)$

b)  $(0, 3)$

c)  $(4, 3)$

d)  $(1, 4)$

**6.4.** Narysuj dowolny trójkąt. Przekształć go przez symetrię względem środka jednego z boków. Jaką figurę tworzą oba trójkąty?

**6.5.** Czy prosta jest figurą środkowosymetryczną? Jeżeli tak, to ile ma środków symetrii?

**6.6.** Czy dana figura ma środek symetrii?

a) kąt

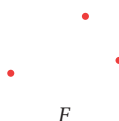
b) trapez prostokątny

c) suma trzech prostych równoległych

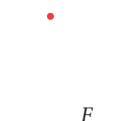
d) suma dwóch odcinków równoległych, rozłącznych i jednakowej długości

**6.7.** Przerysuj figurę  $F$ , a następnie uzupełnij ją jednym punktem tak, aby otrzymana figura miała środek symetrii. Ile odpowiedzi ma to zadanie?

a)



b)

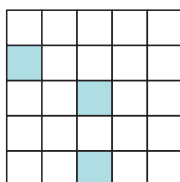


**6.8.** Trójkąt  $ABC$  przekształcono symetrycznie względem środka boku  $BC$  i otrzymano figurę, która wraz z trójkątem  $ABC$  utworzyła kwadrat. Jakim trójkątem jest trójkąt  $ABC$ ?

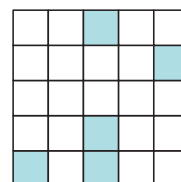
**6.9.** Dany jest okrąg  $O_1$  i prosta sieczna  $l$  nieprzechodząca przez jego środek. Narysuj taki okrąg  $O_2$ , aby figura będąca sumą okręgów  $O_1$ ,  $O_2$  oraz prostej  $l$  miała środek symetrii.

**6.10.** Ile co najmniej kraterów trzeba zamalować, żeby otrzymać figurę środkowosymetryczną?

a)



b)



**6.11.** Wyznacz współrzędne środka symetrii odcinka  $PQ$ .

a)  $P = (3, -2)$ ,  $Q = (-5, 6)$

c)  $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$ ,  $Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$

b)  $P = (-3, 7)$ ,  $Q = (3, -1)$

d)  $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$

**6.12.** Podaj współrzędne obrazów punktów:

$$A = (-5, 4), B = (7, -2), C = (-\sqrt{3}, -5), D = (-6, \sqrt{5})$$

w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

**6.13.** Trójkąt o wierzchołkach  $A = (-6, -2)$ ,  $B = (-1, -4)$ ,  $C = (-4, 2)$  przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta i narysuj obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

**6.14.** Napisz równanie obrazu danej prostej po przekształceniu jej przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

- a)  $y = 3x - 4$                       c)  $y = -0,3x - \sqrt{7}$                       e)  $8x - 3y + 5 = 0$   
 b)  $y = \sqrt{2}x + 11$                       d)  $x - 15 = 0$                       f)  $9x + \sqrt{11}y - 3\sqrt{2} = 0$

**6.15.** Trójkąt, którego boki zawarte są w prostych o równaniach  $2x - 5y - 6 = 0$ ,  $3x - y + 4 = 0$  oraz  $5x + 7y - 54 = 0$ , przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta.

**6.16.** Na płaszczyźnie kartezjańskiej narysuj okrąg  $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 9$ , następnie przekształć go przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i napisz równanie otrzymanego okręgu.

**6.17.** Okrąg o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$  przekształcono przez symetrię środkową względem punktu  $(0, 0)$ . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

- a)  $S = (-2, 3)$ ,  $r = 5$                       c)  $S = (-4, -2)$ ,  $r = \sqrt{2}$   
 b)  $S = (0, -\sqrt{5})$ ,  $r = 1$                       d)  $S = (7, -8)$ ,  $r = 3\sqrt{5}$

**6.18.** Napisz równanie okręgu otrzymanego w wyniku przekształcenia okręgu o podanym równaniu przez symetrię środkową względem punktu  $(0, 0)$ .

- a)  $(x - \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = \sqrt{2}$                       c)  $(x + 11)^2 + (y + 0,1)^2 = 9$   
 b)  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 43 = 0$                       d)  $x^2 + y^2 - 16x + 8y + 78 = 0$

**6.19.** Okrąg  $K_1$  jest obrazem okręgu  $K$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie okręgu  $K$ .

- a)  $K_1: (x - \sqrt{7})^2 + (y - 7)^2 = 3$                       c)  $K_1: (x - 3)^2 + (y + 0,2)^2 = 13$   
 b)  $K_1: x^2 + y^2 + 2x - 22y + 120 = 0$                       d)  $K_1: x^2 + y^2 + 16x + 34y + 348 = 0$

**6.20.** Punkty  $A = (-1, -4)$ ,  $B = (5, 0)$  i  $C = (2, 1)$  przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta  $A'B'C'$ .

**6.21.**  $A = (-3, 2)$ ,  $B = (3, 2\sqrt{3} + 2)$ ,  $C = (3, 2 - 2\sqrt{3})$

$$|AB| = \sqrt{(3+3)^2 + (2\sqrt{3}+2-2)^2} = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{3}, \quad |BC| = |2\sqrt{3}+2-(2-2\sqrt{3})| = 4\sqrt{3},$$

$$|AC| = \sqrt{(3+3)^2 + (2-2\sqrt{3}-2)^2} = 4\sqrt{3}$$

$|AB| = |BC| = |AC|$ , więc trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.

Środek  $S$  okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest jego środkiem ciężkości, więc:

$$S = \left( \frac{-3+3+3}{3}, \frac{2+2\sqrt{3}+2+2-2\sqrt{3}}{3} \right) = (1, 2)$$

Promień  $R$  okręgu opisanego na trójkącie równobocznym  $ABC$  jest równy:  $R = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 4.$

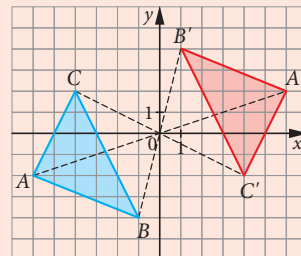
Okrąg symetryczny względem punktu  $(0, 0)$  ma taki sam promień oraz środek  $S' = (-1, -2)$ :

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

**Odp.:**  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$

**6.12.**  $A' = (5, -4)$ ,  $B' = (-7, 2)$ ,  
 $C' = (\sqrt{3}, 5)$ ,  $D' = (6, -\sqrt{5})$

**6.13.**  $A' = (6, 2)$ ,  $B' = (1, 4)$ ,  
 $C' = (4, -2)$



**6.14. a)**  $y = 3x + 4$

b)  $y = \sqrt{2}x - 11$

c)  $y = -0,3x + \sqrt{7}$

d)  $x + 15 = 0$

e)  $8x - 3y - 5 = 0$

f)  $9x + \sqrt{11}y + 3\sqrt{2} = 0$

**6.15.**  $(2, 2)$ ,  $(-1, -7)$ ,  $(-8, -2)$

**6.16.**  $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 9$

**6.17. a)**  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

b)  $x^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 1$

c)  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 2$

d)  $(x+7)^2 + (y-8)^2 = 45$

**6.18. a)**  $(x + \sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = \sqrt{2}$

b)  $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 43 = 0$

c)  $(x-11)^2 + (y-0,1)^2 = 9$

d)  $x^2 + y^2 + 16x - 8y + 78 = 0$

**6.19. a)**  $K: (x + \sqrt{7})^2 + (y+7)^2 = 3$

b)  $K: x^2 + y^2 - 2x + 22y + 120 = 0$

c)  $K: (x+3)^2 + (y-0,2)^2 = 13$

d)  $K: x^2 + y^2 - 16x - 34y + 348 = 0$

**6.20.**  $(-2, 1)$



6.21. Patrz s. 169.

6.22. a)  $(-4, 7)$  b)  $(-2, -4)$ 6.23. a)  $x + y + 2 = 0$ b)  $2x - y - 9 = 0$ 6.24.  $k: y = ax + b$  $A = (0, b)$ ,  $B = (1, a + b)$ , $A, B \in k$  $A', B'$  – obrazy punktów  $A$  i  $B$  w symetrii względem punktu  $(0, 0)$  $A' = (0, -b)$ ,  $B' = (-1, -a - b)$ Prosta  $k'$ , czyli prosta  $A'B'$ , ma równanie  $y = mx + n$ , gdzie:

$$\begin{cases} m \cdot 0 + n = -b \\ m \cdot (-1) + n = -a - b \end{cases}$$

Stąd  $m = a$  i  $n = -b$ .Zatem  $k': y = ax - b$ .**Prosto do matury**

1. F, F, F

2.  $2x - 4y - 5 = 0$ 3.  $(0, -1)$ 4.  $k: x - y + 1 = 0$ 5.  $A_1 = (5, -2)$ ,  $B = (-2, -3)$ ,  
 $P = 38$ 

D

6.21. Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach  $A = (-3, 2)$ ,  $B = (3, 2\sqrt{3} + 2)$ ,  $C = (3, 2 - 2\sqrt{3})$  jest równoboczny. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu opisanego na tym trójkącie.6.22. Wyznacz współrzędne obrazu punktu  $P$  w symetrii względem punktu  $T$ .a)  $P = (-2, 1)$ ,  $T = (-3, 4)$ b)  $P = (-1, 5)$ ,  $T = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 6.23. Wyznacz równanie obrazu prostej  $k$  w symetrii względem punktu  $P$ .a)  $k: x + y - 4 = 0$ ,  $P = (2, -1)$ b)  $k: 2x - y + 3 = 0$ ,  $P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 

D

6.24. Wykaż, że obrazem prostej  $k: y = ax + b$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest równoległa do niej prosta  $k': y = ax - b$ .

D

\* 6.25. Wykaż, że obrazem prostej  $k: y = ax + b$  w symetrii środkowej względem punktu  $P = (p, q)$  jest równoległa do niej prosta  $k': y = ax + c$ .**Prosto do matury**1. Figurę  $F$  tworzą: odcinek  $AB$  oraz punkty  $C$  i  $D$  nienależące do tego odcinka.Oceń prawdziwość podanych zdań. Figura  $F$ 

A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.

B. ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy punkty  $A, B, C, D$  są wierzchołkami równoległoboku.

C. może mieć nieskończenie wiele środków symetrii.

2. Napisz równanie obrazu prostej  $2x - 4y + 5 = 0$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.3. Punkty  $A = (1, -5)$ ,  $B = (3, 1)$  i  $C = (-4, 7)$  przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty  $A', B', C'$ . Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta  $A'B'C'$ .4. Prosta  $k$  jest obrazem prostej  $l: x - y - 5 = 0$  w symetrii środkowej względem punktu  $S = (1, -1)$ . Napisz równanie prostej  $k$ .5. Punkt  $A = (-5, 2)$  przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt  $A_1$ . Punkt  $B_1 = (2, 3)$  jest obrazem punktu  $B$  w tym samym przekształceniu. Podaj współrzędne punktów  $A_1$  i  $B$  oraz oblicz pole czworokąta  $ABA_1B_1$ .6.25.  $k: y = ax + b$  $A = (0, b)$ ,  $B = (1, a + b)$ ,  $A, B \in k$  $A', B'$  – obrazy punktów  $A$  i  $B$  w symetrii względem punktu  $P = (p, q)$  $A' = (2p, 2q - b)$ ,  $B' = (2p - 1, 2q - a - b)$ Prosta  $k'$ , czyli prosta  $A'B'$ , ma równanie  $y = mx + n$ , gdzie:

$$\begin{cases} m \cdot 2p + n = 2q - b \\ m \cdot (2p - 1) + n = 2q - a - b \end{cases}$$

Stąd  $m = a$  i  $n = 2q - b - 2ap$ .Zatem  $k': y = ax + c$ , gdzie  $c = 2q - b - 2ap$ .

## 7. Symetria osiowa

### Umiejętności:

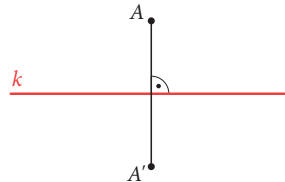
- wyznaczanie osi symetrii w figurach osiowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii osiowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

Symetria osiowa, podobnie jak symetria środkowa, była omawiana w szkole podstawowej. Powtórzmy własności tego przekształcenia, a następnie omówimy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

### Symetria osiowa na płaszczyźnie

Punkty  $A$  i  $A'$  są **symetryczne względem prostej  $k$** , gdy odcinek  $AA'$  jest prostopadły do  $k$  i jego środek należy do  $k$ .

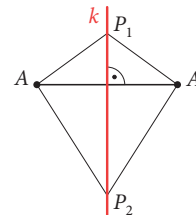
Prostą  $k$  nazywamy **osią symetrii** punktów  $A$  i  $A'$ .



Jeżeli punkt  $A'$  jest symetryczny do punktu  $A$  względem prostej  $k$ , to również punkt  $A$  jest symetryczny do punktu  $A'$  względem prostej  $k$ . Jeżeli punkt  $A$  leży na prostej  $k$ , to  $A' = A$ .



Zauważmy, że oś symetrii punktów  $A$  i  $A'$  jest symetralną odcinka  $AA'$ . Jest zatem zbiorem punktów równo oddalonych od jego końców. Tę własność symetralnej wykorzystujemy do konstrukcji punktu  $A'$  symetrycznego do punktu  $A$  względem prostej  $k$ :



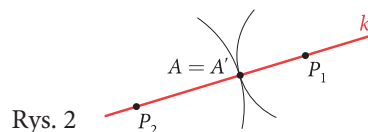
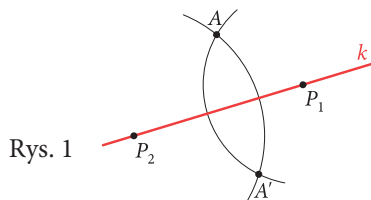
**Krok 1:** Z dowolnego punktu  $P_1$  prostej  $k$  zataczamy okrąg o promieniu  $|P_1A|$ .

$$|P_1A| = |P_1A'|$$

**Krok 2:** Z dowolnego punktu  $P_2$  ( $P_2 \neq P_1$ ) prostej  $k$  zataczamy okrąg o promieniu  $|P_2A|$ .

$$|P_2A| = |P_2A'|$$

**Krok 3:** Jeżeli punkt  $A$  nie leży na prostej  $k$ , to poprowadzone okręgi przecinają się w dwóch punktach. Jednym z nich jest punkt  $A$ , a drugim szukany punkt  $A'$  (rys. 1). Jeżeli punkt  $A$  leży na prostej  $k$ , to  $A' = A$  (rys. 2).



### ZZ i MKP

temat 2.11

### Multiteka

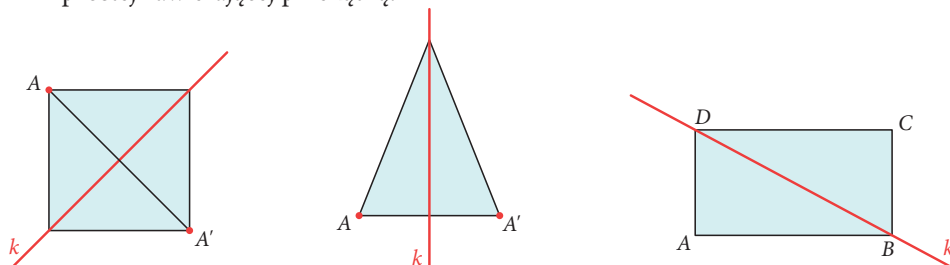
- Symetria
- Tadz Mahal – piękno symetrii
- Symetria osiowa
- Symetria względem osi układu współrzędnych
- Przekształcenia na płaszczyźnie

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

**Generator**  
testów i sprawdzianów

**Przykład 1**

- Przeciwnie wierzchołki kwadratu są symetryczne względem prostej zawierającej tę przekątną kwadratu, do której nie należą.
- Końce podstawy trójkąta równoramiennego są symetryczne względem prostej zawierającej wysokość opuszczoną z trzeciego wierzchołka tego trójkąta.
- Wierzchołki prostokąta, który nie jest kwadratem, **nie są** symetryczne względem prostej zawierającej przekątną.



W przypadku symetrii środkowej wyróżniliśmy figury mające środek symetrii. Teraz zajmiemy się figurami mającymi oś symetrii.

**Definicja**

Prostą  $k$  nazywamy **osią symetrii figury  $F$** , jeżeli dla każdego punktu  $A$  należącego do  $F$  punkt  $A'$  symetryczny do  $A$  względem  $k$  też należy do  $F$ .  
Figurę  $F$  nazywamy **osiowosymetryczną**.

◀ 7.4. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą

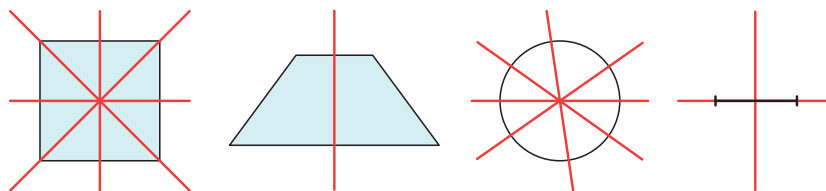
- prostej i okręgu?
- dwóch okręgów?
- dwóch prostych?

Rozważ różne możliwości.

- Odp.:** a) jedną lub dwie  
b) jedną, dwie lub nieskończenie wiele  
c) dwie lub nieskończenie wiele

**Przykład 2** ◀ zad. 7.4, 7.5

- Kwadrat jest figurą osiowosymetryczną. Ma cztery osie symetrii.
- Trapez równoramienny różny od równoległoboku ma jedną oś symetrii.
- Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii – jest nią każda prosta przechodząca przez jego środek.
- Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest prosta, w której ten odcinek się zawiera, a drugą – jego symetralna.



◀ 7.5. Wskaż osie symetrii figury, która jest sumą

- dwóch trójkątów równobocznych o wspólnym boku.
- prostej i punktu nieleżącego na niej.
- dwóch okręgów o różnych promieniach, stycznych zewnętrznie.

**Odp.:** a) prosta zawierająca wspólny bok, prosta przechodząca przez wierzchołki trójkątów nienależące do wspólnego boku

b) prosta prostopadła do danej prostej, przechodząca przez dany punkt

c) prosta przechodząca przez środki obu okręgów

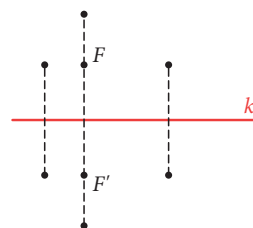
Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi  $P$  przyporządkowuje punkt  $P'$  symetryczny do  $P$  względem ustalonej prostej  $k$ , nazywamy **symetrią osiową o osi  $k$** .

**Przykład 3** ◀ zad. 7.9

Dana jest figura  $F$  i prosta  $k$ . Wyznamy figurę  $F'$ , która jest obrazem figury  $F$  w symetrii o osi  $k$ .

a) Figura  $F$  składa się ze skończonej liczby punktów.

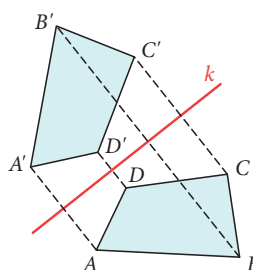
Aby otrzymać figurę  $F'$ , przekształcamy przez symetrię względem prostej  $k$  każdy z tych punktów.



b) Figura  $F$  jest czworokątem  $ABCD$ .

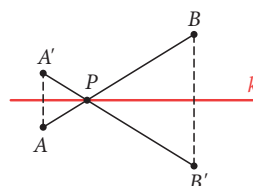
Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta  $ABCD$  jest wierzchołek czworokąta  $A'B'C'D'$ ,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta  $ABCD$  jest punkt należący do brzegu czworokąta  $A'B'C'D'$ ,
- punktu wewnętrznego czworokąta  $ABCD$  jest punkt wewnętrzny czworokąta  $A'B'C'D'$ .



c) Figura  $F$  jest odcinkiem  $AB$  przecinającym prostą  $k$ .

Obrazem odcinka  $AB$  jest odcinek  $A'B'$ . Odcinki  $AB$  i  $A'B'$  przecinają się w punkcie  $P$  leżącym na osi symetrii  $k$ . Jest to punkt, który w wyniku symetrii został przekształcony sam na siebie – czyli punkt stały tego przekształcenia.



Symetria osiowa względem prostej  $k$  ma nieskończenie wiele punktów stałych – każdy punkt prostej  $k$  jest punktem stałym tego przekształcenia.

Figury:  $F$  i jej obraz  $F'$  w symetrii osiowej **są przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu  $r$  – okrąg o promieniu  $r$ , trójkąta  $ABC$  – przystający do niego trójkąt  $A'B'C'$  itd.

◀ 7.9. Patrz s. 177.

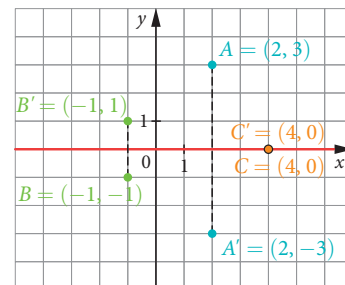
## Symetria osiowa względem osi $x$

Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię osiową względem dowolnej prostej. Ograniczymy się jednak do omówienia dwóch sytuacji, w których osią symetrii jest jedna z osi układu współrzędnych. Zaczniemy od osi  $x$ .

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Punkty położone symetrycznie względem osi  $x$  mają identyczne pierwsze współrzędne, natomiast ich drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli  $P' = (x', y')$  oznacza obraz punktu  $P = (x, y)$  w symetrii względem osi  $x$ , to:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



◀7.13. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $x$ . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a)  $(x - 9)^2 + (y + 11)^2 = 1$

b)  $(x - 1 + \sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c)  $x^2 + (y - 2 - \sqrt{5})^2 = 7$

d)  $x^2 + (y + 1 - 3\sqrt{6})^2 = 9$

Odp.: a)  $(x - 9)^2 + (y - 11)^2 = 1$

b)  $(x - 1 + \sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c)  $x^2 + (y + 2 + \sqrt{5})^2 = 7$

d)  $x^2 + (y - 1 + 3\sqrt{6})^2 = 9$

### Przykład 4 ◀ zad. 7.13

Wyznamy równanie obrazu okręgu  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$  w symetrii osiowej względem osi  $x$ .

#### Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek  $S = (-1, 2)$  i promień  $r = 4$ . Wiemy, że obrazem okręgu w tym przekształceniu jest figura do niego przystająca, czyli okrąg o takim samym promieniu.

Przyjmijmy, że  $S'$  oznacza środek, a  $r'$  – promień okręgu po przekształceniu.

$$S' = (-1, -2), \quad r' = r = 4$$

Odp.:  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

### Przykład 5

Okrąg o równaniu  $(x + \sqrt{3})^2 + (y - 4)^2 = 7$  powstał w wyniku przekształcenia pewnego okręgu przez symetrię względem osi  $x$ . Jaki okrąg został przekształcony?

#### Rozwiązanie

Szukany okrąg ma środek  $S = (x, y)$  i promień  $r$ .

Jeśli  $S'$  oznacza środek, a  $r'$  – promień okręgu po przekształceniu, to:

$$S' = (-\sqrt{3}, 4), \quad \text{zatem } S = (-\sqrt{3}, -4)$$

$$r' = r = \sqrt{7}$$

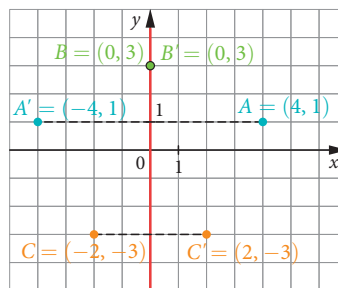
Odp.:  $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 4)^2 = 7$

## Symetria osiowa względem osi $y$

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Punkty położone symetrycznie względem osi  $y$  mają identyczne drugie współrzędne, natomiast ich pierwsze współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli  $P' = (x', y')$  oznacza obraz punktu  $P = (x, y)$  w symetrii względem osi  $y$ , to:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



### Przykład 6 ◀ zad. 7.14

Wyznamy równanie obrazu okręgu  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$  w symetrii osiowej względem osi  $y$ .

**Rozwiązanie**

Dany okrąg ma środek  $S = (3, 1)$  i promień  $r = 2$ .

Przyjmijmy, że  $S'$  oznacza środek, a  $r'$  – promień okręgu po przekształceniu.

$$S' = (-3, 1), \quad r' = r = 2$$

$$\text{Odp.: } (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

### \* Przykład 7 ◀ zad. 7.20, 7.21

Wyznamy obraz punktu  $P = (-1, 2)$  w symetrii osiowej względem prostej  $l: x - 2y - 5 = 0$ .

**Rozwiązanie**

$P' = (x', y')$  jest punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem prostej  $l$ .

Aby konstrukcyjnie wyznaczyć punkt  $P'$ , najpierw prowadzimy prostą  $k$  prostopadłą do  $l$  i przechodzącą przez  $P$ . Punkt  $M$  przecięcia prostych  $k$  i  $l$  jest środkiem odcinka  $PP'$ , stąd możemy wyznaczyć punkt  $P'$ .

$$k: 2x + y + c = 0 \quad \leftarrow k \perp l$$

$$c = 0 \quad \leftarrow P \in k$$

$$k: 2x + y = 0$$

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \text{ więc } M = (1, -2), \text{ stąd } \begin{cases} 1 = \frac{-1 + x'}{2} \\ -2 = \frac{2 + y'}{2} \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -6 \end{cases}.$$

$$\text{Odp.: } P' = (3, -6)$$

◀ 7.14. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $y$ . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

$$\text{a) } (x + 3)^2 + (y - 13)^2 = 12$$

$$\text{b) } x^2 + (y - 7 + \sqrt{11})^2 = 6$$

$$\text{c) } (x + 5 - \sqrt{3})^2 + y^2 = 18$$

$$\text{d) } (x + 0,4)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{7})^2 = 16$$

$$\text{Odp.: a) } (x - 3)^2 + (y - 13)^2 = 12$$

$$\text{b) } x^2 + (y - 7 + \sqrt{11})^2 = 6$$

$$\text{c) } (x - 5 + \sqrt{3})^2 + y^2 = 18$$

$$\text{d) } (x - 0,4)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{7})^2 = 16$$

◀ 7.20. Wyznacz równanie obrazu okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 45 = 0$  w symetrii względem prostej  $y = 2x - 1$ .

$$\text{Odp.: } (x - 3)^2 + y^2 = 50$$

◀ 7.21. Punkt  $M$  jest obrazem początku układu współrzędnych w symetrii względem prostej  $x - 4y + 17 = 0$ . Wyznacz współrzędne punktu  $M$ .

$$\text{Odp.: } M = (-2, 8)$$

## Zadania

## Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. D

7.2. B

7.3. C

7.4. a) jedną lub dwie

b) jedną, dwie lub nieskończenie wiele

c) dwie lub nieskończenie wiele

7.5. a) prosta zawierająca wspólny bok, prosta przechodząca przez wierzchołki trójkątów nienależące do wspólnego boku

b) prosta prostopadła do danej prostej, przechodząca przez dany punkt

c) prosta przechodząca przez środki obu okręgów

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

**7.1.** Trójkąt  $A'B'C'$  jest obrazem trójkąta o wierzchołkach  $A = (3, 2)$ ,  $B = (-3, 6)$ ,  $C = (-6, 1)$  w symetrii osiowej względem osi  $y$ . Wskaż środek ciężkości trójkąta  $A'B'C'$ .

A.  $(-2, 3)$ B.  $(-2, -3)$ C.  $(2, -3)$ D.  $(2, 3)$ 

**7.2.** Okrąg o równaniu  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $x$ . Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A.  $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 9$ C.  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$ B.  $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$ D.  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$ 

**7.3.** Okrąg o równaniu  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $y$ . Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A.  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ C.  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ B.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ D.  $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5$ 

**7.4.** Ile osi symetrii ma figura będąca sumą

a) prostej i okręgu?

b) dwóch okręgów?

c) dwóch prostych?

Rozważ różne możliwości.

**7.5.** Wskaż osie symetrii figury, która jest sumą

a) dwóch trójkątów równobocznych o wspólnym boku.

b) prostej i punktu nieleżącego na niej.

c) dwóch okręgów o różnych promieniach, stycznych zewnętrznie.

**7.6.** Narysuj dwa punkty:  $A$  i  $B$ . Wyznacz taki punkt  $C$ , aby figura składająca się z punktów  $A, B, C$

a) miała jedną oś symetrii. b) miała dwie osie symetrii. c) nie miała osi symetrii.

**7.7.** Narysuj trzy niewspółliniowe punkty:  $A, B, C$ . Wyznacz taki punkt  $D$ , aby figura składająca się z punktów  $A, B, C, D$  miała oś symetrii. Przy jakim położeniu punktów  $A, B, C, D$  figura  $\{A, B, C, D\}$  ma dwie osie symetrii?

**7.8.** Narysuj dwie proste:  $a$  i  $b$  spełniające podany warunek, a następnie dorysuj taką prostą  $c$ , aby figura będąca sumą tych trzech prostych miała oś symetrii. Ile jest takich prostych?

a)  $a, b$  są równoległeb)  $a, b$  przecinają się

7.6. a) np.

B.

b) np.

 $B \equiv C$ 

c) np.

B.

A.

C

A.

A.

C

7.7. np.

D.

B.

C

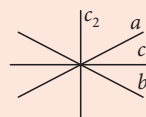
A.

Figura  $\{A, B, C, D\}$  ma dwie osie symetrii, gdy punkty  $A, B, C$  i  $D$  są wierzchołkami rombu lub prostokąta.

7.8. a) nieskończenie wiele

np.  $\frac{a}{b}$   
 $\frac{b}{c}$   
 $\frac{c}{a}$

b) dwie

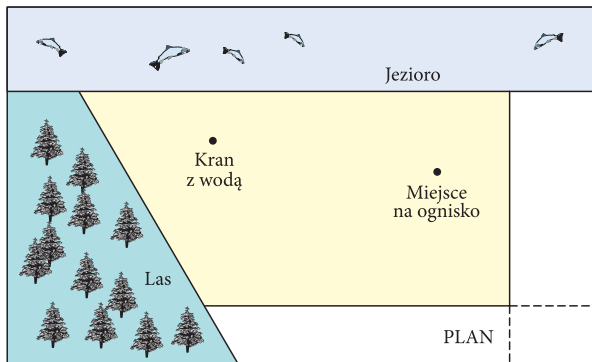




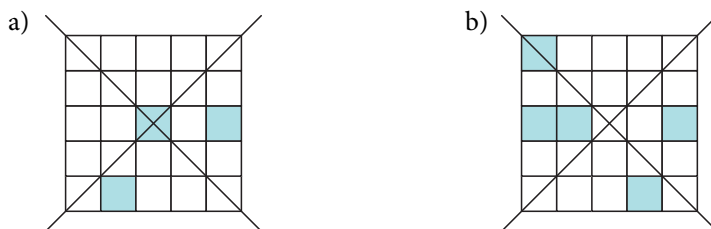
**7.9.** Dana jest figura  $F$  i prosta  $k$ . Wyznacz obraz figury  $F$  w symetrii o osi  $k$ .

- $F$  – kwadrat,  $k$  – prosta zawierająca jeden z boków tego kwadratu
- $F$  – równoległobok,  $k$  – prosta zawierająca dłuższą przekątną tego równoległoboku
- $F$  – okrąg,  $k$  – prosta zawierająca cięciwę tego okręgu
- $F$  – suma dwóch prostych równoległych,  $k$  – prosta przecinająca te dwie proste
- $F$  – trapez równoramienny,  $k$  – prosta prostopadła do ramienia tego trapezu i przechodząca przez wierzchołek jego kąta rozwartego
- $F$  – trójkąt równoramienny,  $k$  – prosta przechodząca przez środek podstawy tego trójkąta i prostopadła do jednego z jego ramion

**7.10.** Poniżej przedstawiony jest plan pola namiotowego na Mazurach. Michał i Bartek chcą rozbić na tym polu namiot. Michał upiera się, by namiot stał w tej samej odległości od kranu z wodą i od ogniska. Bartkowi zależy na tym, by mieć jednakowo blisko do lasu i do jeziora. Gdzie powinni rozbić namiot?



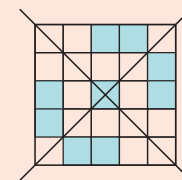
**7.11.** Ile co najwyżej kratek nie będzie zamalowanych, jeżeli uzupełnimy rysunek tak, aby obydwie przekątne były osiami symetrii otrzymanej figury?



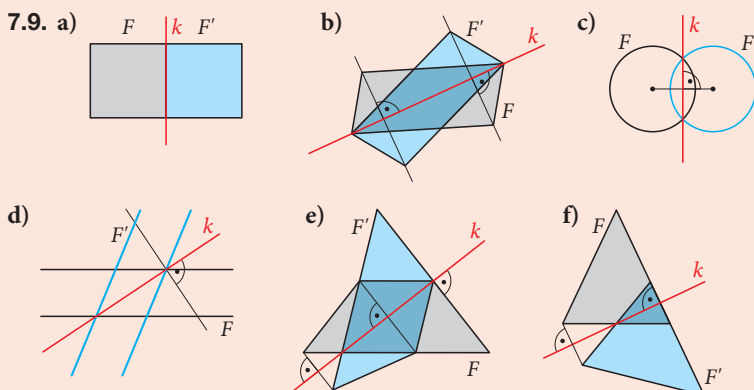
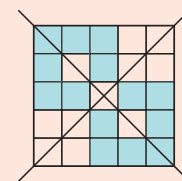
**7.10.** na przecięciu symetralnej odcinka łączącego kran z ogniskiem oraz dwusiecznej kąta między lasem a jeziorem

**7.11.**

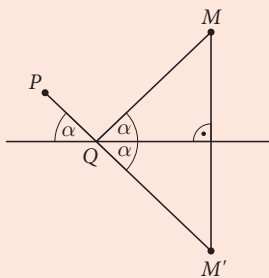
a) szesnaście



b) jedenaście



7.12.



Kąt padania powinien być równy kątowi odbicia. Piłka powinna odbić się od punktu  $Q$  – jest to punkt wspólny brzegu muru i odcinka  $PM'$ , gdzie  $M'$  to obraz punktu  $M$  w symetrii względem brzegu muru.

7.13. a)  $(x - 9)^2 + (y - 11)^2 = 1$

b)  $(x - 1 + \sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c)  $x^2 + (y + 2 + \sqrt{5})^2 = 7$

d)  $x^2 + (y - 1 + 3\sqrt{6})^2 = 9$

7.14. a)  $(x - 3)^2 + (y - 13)^2 = 12$

b)  $x^2 + (y - 7 + \sqrt{11})^2 = 6$

c)  $(x - 5 + \sqrt{3})^2 + y^2 = 18$

d)  $(x - 0,4)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{7})^2 = 16$

7.15. a)  $K: (x + 3)^2 + (y - 17)^2 = 10$

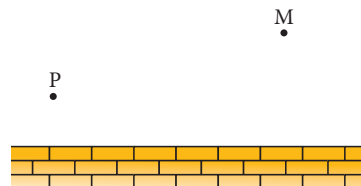
b)  $K: (x + 13)^2 + (y + 10)^2 = 15$

c)  $K: (x + 14)^2 + (y + 16)^2 = 17$

7.16. P, F, F

7.17.  $P = 42$ 

\* 7.12. Paweł chce kopnąć piłkę tak, by odbiła się od muru i trafiła do Marcina. W jakim kierunku powinien ją kopnąć?



7.13. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $x$ . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a)  $(x - 9)^2 + (y + 11)^2 = 1$

c)  $x^2 + (y - 2 - \sqrt{5})^2 = 7$

b)  $(x - 1 + \sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

d)  $x^2 + (y + 1 - 3\sqrt{6})^2 = 9$

7.14. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $y$ . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a)  $(x + 3)^2 + (y - 13)^2 = 12$

c)  $(x + 5 - \sqrt{3})^2 + y^2 = 18$

b)  $x^2 + (y - 7 + \sqrt{11})^2 = 6$

d)  $(x + 0,4)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{7})^2 = 16$

7.15. Obrazem okręgu  $K$  w symetrii  $f$  jest okrąg  $K_1$ . Napisz równanie okręgu  $K$ .

a)  $K_1: (x - 3)^2 + (y + 17)^2 = 10$ ,  $f$  – symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

b)  $K_1: (x + 13)^2 + (y - 10)^2 = 15$ ,  $f$  – symetria osiowa względem osi  $x$

c)  $K_1: (x - 14)^2 + (y + 16)^2 = 17$ ,  $f$  – symetria osiowa względem osi  $y$

7.16. Punkty  $A' = (2, 4)$ ,  $B' = (-6, 6)$ ,  $C' = (0, -8)$  są obrazami wierzchołków trójkąta  $ABC$  w symetrii osiowej względem osi  $x$ .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Punkty  $P = (-3, 1)$ ,  $Q = (1, 2)$ ,  $R = (-2, -5)$  są środkami boków trójkąta  $ABC$ .

B. Środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$  jest punkt  $S = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

C. Środkowa trójkąta  $ABC$  poprowadzona z wierzchołka  $A$  ma długość  $\sqrt{17}$ .

7.17. Punkty  $A = (-3, 6)$ ,  $B = (3, -1)$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $x$  i otrzymano odpowiednio punkty  $A_1$  i  $B_1$ . Oblicz pole czworokąta  $AA_1BB_1$ .

7.18. Okrąg o równaniu  $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 18$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $x$ .

a) Wykaż, że punkt  $A = (1, 4)$  leży na otrzymanym okręgu.

b) Napisz równanie stycznej do otrzymanego okręgu poprowadzonej w punkcie  $A$ .

7.18.  $K: (x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 18$

$S = (4, -7)$ ,  $r = \sqrt{18}$  – środek i promień okręgu  $K$

$K'$  – obraz okręgu  $K$  w symetrii względem osi  $x$

$S' = (4, 7)$ ,  $r = \sqrt{18}$  – środek i promień okręgu  $K'$

$$K': (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 18$$

a)  $A = (1, 4)$ ;  $(1 - 4)^2 + (4 - 7)^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ , więc  $A \in K'$ .

b)  $l: y = ax + b$  – szukana styczna

$l \perp AS'$  i  $A \in l$ :

• współczynnik kierunkowy prostej  $AS'$ :  $m = \frac{4 - 1}{7 - 4} = 1$

•  $a = -\frac{1}{m} = -1$  i  $-1 + b = 4$ , czyli  $b = 5$

Odp.:  $y = -x + 5$

**7.19.** Okręgi o równaniach  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 34$  i  $(x-11)^2 + (y-1)^2 = 85$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ .

- Wyznacz współrzędne punktów  $A$  i  $B$ .
- Znajdź współrzędne obrazów  $A_1$  i  $B_1$  punktów (odpowiednio)  $A$  i  $B$  w symetrii osiowej względem osi  $y$ .
- Oblicz pole czworokąta  $A_1ABB_1$ .

**7.20.** Wyznacz równanie obrazu okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 45 = 0$  w symetrii względem prostej  $y = 2x - 1$ .

**7.21.** Punkt  $M$  jest obrazem początku układu współrzędnych w symetrii względem prostej  $x - 4y + 17 = 0$ . Wyznacz współrzędne punktu  $M$ .

### Prosto do matury



**1.** Po przekształceniu okręgu  $F$  przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych otrzymano okrąg  $F'$ . Oceń prawdziwość podanych zdań.

Figura będąca sumą okręgów  $F$  i  $F'$

- ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.
- może mieć tylko jedną oś symetrii.
- może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

**2.** Punkt  $A = (-4, 3)$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $x$  i otrzymano punkt  $A_1$ , a punkt  $B = (-1, -2)$  przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt  $B_1$ . Podaj współrzędne punktów  $A_1$  i  $B_1$  oraz oblicz pole czworokąta  $AA_1BB_1$ .

**3.** Trójkąt  $ABC$  ograniczony prostymi  $2x - y + 6 = 0$ ,  $x - y = 0$ ,  $x - 2 = 0$  odbito symetrycznie względem osi  $y$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków wielokąta będącego częścią wspólną trójkąta  $ABC$  i jego obrazu. Oblicz pole tego wielokąta.

**4.** Okrąg o środku  $S = (2, -3)$  i promieniu  $r = 4$  przekształcono symetrycznie względem osi  $x$  i otrzymano okrąg o środku  $S_1$ . Okręgi o środkach  $S$  i  $S_1$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Oblicz pole czworokąta  $SAS_1B$ .

**5.** W trójkącie o wierzchołkach  $A = (0, 6)$ ,  $B = (7, -1)$  i  $C = (8, 10)$  poprowadzono wysokość z wierzchołka  $C$ . Następnie przekształcono trójkąt  $ABC$  przez symetrię osiową względem prostej zawierającej tę wysokość. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu trójkąta  $ABC$ .

- 7.19. a)**  $A = (4, -5)$ ,  $B = (2, 3)$   
**b)**  $A_1 = (-4, -5)$ ,  $B_1 = (-2, 3)$   
**c)**  $P = 48$

**7.20.**  $(x-3)^2 + y^2 = 50$

**7.21.**  $M = (-2, 8)$

### Prosto do matury

**1.** F, F, P

**2.**  $A_1 = (-4, -3)$ ,  $B_1 = (1, 2)$ ,  
 $P = 20$

**3.**  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(-2, 2)$ ,  
 $P = 12$

**4.**  $P = 6\sqrt{7}$

**5.**  $A' = (4, 2)$ ,  $B' = (-3, 9)$ ,  
 $C' = (8, 10)$

## 8. Powtórzenie

### Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

#### Odpowiedzi i rozwiązania

1. C
  2. D
  3. B
  4. A
  5. C
  6. B
  7. D
  8. D
  9. B
1. Odległość między punktami  $P = \left(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$  i  $Q = \left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$  jest równa  
A.  $2\sqrt{2}$ .      B. 3.      C.  $4\sqrt{2}$ .      D. 4.
  2. Punkt  $A$  leży na osi  $x$ ,  $B = (-5, 6)$ , a środek odcinka  $AB$  leży na osi  $y$ . Wskaż długość odcinka  $AB$ .  
A.  $2\sqrt{17}$       B. 8      C. 16      D.  $2\sqrt{34}$
  3. W kwadracie  $ABCD$  punkty  $P = (2, 3)$  i  $Q = (7, 4)$  są odpowiednio środkami boków  $AB$  i  $BC$ . Przekątna kwadratu ma długość  
A.  $\sqrt{26}$ .      B.  $2\sqrt{26}$ .      C.  $3\sqrt{26}$ .      D.  $\frac{1}{2}\sqrt{26}$ .
  4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A = (-2, 3)$ ,  $B = (6, -1)$ ,  $C = (0, 7)$ . Wskaż długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka  $C$ .  
A.  $2\sqrt{10}$       B.  $4\sqrt{3}$       C.  $2\sqrt{15}$       D. 8
  5. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt  $A = (-3, 5)$  i równoległej do prostej  $y = \frac{2}{3}x - 4$ .  
A.  $2x + 3y - 9 = 0$       C.  $2x - 3y + 21 = 0$   
B.  $3x - 2y + 19 = 0$       D.  $3x + 2y - 1 = 0$
  6. W trapezie  $ABCD$ , którego podstawa  $AB$  jest zawarta w prostej  $x - 2y + 10 = 0$ , dany jest wierzchołek  $D = (6, 6)$ . Która prosta zawiera podstawę  $CD$ ?  
A.  $y = -\frac{1}{2}x + 3$       B.  $y = \frac{1}{2}x + 3$       C.  $y = -2x + 3$       D.  $y = 2x + 3$
  7. Wskaż odległość między prostymi  $y = 3x - 2$  i  $y = 3x + 1$ .  
A. 3      B.  $\sqrt{10}$       C.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$       D.  $\frac{3}{\sqrt{10}}$
  8. Dany jest okrąg o równaniu  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$ . Wskaż współrzędne środka i promień  $r$  tego okręgu.  
A.  $(3, -2)$ ,  $r = 3$       B.  $(-3, 2)$ ,  $r = 3$       C.  $(-3, -2)$ ,  $r = \sqrt{3}$       D.  $(-3, 2)$ ,  $r = \sqrt{3}$
  9. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$  z osiami układu współrzędnych jest równa  
A. 4.      B. 3.      C. 2.      D. 1.

### Multiteka

- Współrzędne kartezjańskie
- Topologia
- Układ współrzędnych biegunowych

dlanauczyciela.pl | Klasówka 2

**Generator**  
testów i sprawdzianów

**10.** Na okręgu o promieniu 7 leży punkt  $A = (0, -4)$ . Równanie tego okręgu może mieć postać

- A.  $(x - 7)^2 + y^2 = 7$ .  
 B.  $x^2 + (y + 4)^2 = 49$ .  
 C.  $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 49$ .  
 D.  $(x - 4)^2 + y^2 = 7$ .

**10.** C

**11.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 8$ ?

- A. koło o środku  $(3, -1)$  i promieniu  $r = 2\sqrt{2}$   
 B. koło o środku  $(3, -1)$  i promieniu  $r = 8$   
 C. okrąg o środku  $(3, -1)$  i promieniu  $r = 2\sqrt{2}$   
 D. półpłaszczyzna

**11.** A

**12.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków  $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$ ?

- A. dwa punkty      B. punkt      C. odcinek      D. zbiór pusty

**12.** C

**13.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą równania  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 20 = 0$ ?

- A. zbiór pusty      B. okrąg      C. dwie proste      D. płaszczyzna

**13.** A

**14.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 \leq 0$ ?

- A. koło      B. zbiór pusty      C. płaszczyzna      D. punkt

**14.** D

**15.** Prosta o równaniu  $y = -2x - 9$  jest styczna do okręgu o środku w punkcie  $S = (4, 3)$ . Wskaż promień tego okręgu.

- A.  $2\sqrt{5}$       B.  $3\sqrt{5}$       C.  $4\sqrt{5}$       D.  $5\sqrt{5}$

**15.** C

**16.** Wskaż równanie prostej, która nie jest styczna do okręgu  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .

- A.  $3x + 4y - 20 = 0$       C.  $3x - 4y + 12 = 0$   
 B.  $4x + 3y - 16 = 0$       D.  $4x - 3y - 10 = 0$

**16.** C

**17.** Punkty  $A = (-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ ,  $B = (1 + \sqrt{3}, 5 - 2\sqrt{3})$ ,  
 $C = (5 + 3\sqrt{3}, 7 + 3\sqrt{3})$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ .  
 Środkiem symetrii tego równoległoboku jest punkt

- A.  $(-1, 2 - 1,5\sqrt{3})$ .      C.  $(-3 + 2\sqrt{3}, 2 + 5\sqrt{3})$ .  
 B.  $(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ .      D.  $(3 + 2\sqrt{3}, 6 + 0,5\sqrt{3})$ .

**17.** B

- 18. C**
- 18.** Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach  $P = (-3, 0)$  i  $Q = (0, 3)$ .
- A.  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$       C.  $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$   
 B.  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$       D.  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$
- 19. A**
- 19.** Obrazem okręgu o środku  $S = (-3, 5)$  i promieniu 2020 w symetrii względem osi  $y$  jest okrąg o środku  $S_1$ . Odległość między środkami tych okręgów jest równa
- A. 6.      B. 10.      C. 2010.      D. 2020.
- 20. B**
- 20.** Okrąg o równaniu  $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 11$  przekształcono przez symetrię środkową względem punktu  $(0, 0)$ . Wskaż równanie otrzymanego okręgu.
- A.  $(x + 7)^2 + (y + 2)^2 = 11$       C.  $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 11$   
 B.  $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 11$       D.  $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 11$
- 21. B**
- 21.** Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach  $A = (-3, -1)$ ,  $B = (2, 6)$ ,  $C = (-2, 4)$ .
- A.  $\left(-1, \frac{11}{2}\right)$       B.  $(-1, 3)$       C.  $(-3, 9)$       D.  $(0, 3)$
- W zadaniach 22–38 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 22. F, F, P**
- 22.**
- A. Równanie  $2x + 4y + 3 = 0$  opisuje prostą przechodzącą przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.  
 B. Prosta o równaniu  $-3x\pi = 0$  jest równoległa do osi  $x$ .  
 C. Prosta o równaniu  $\sqrt{7}x + \pi y = 2$  jest wykresem funkcji.
- 23. P, F, P**
- 23.** Okrąg o środku  $S = (3, -2)$  i promieniu  $r = \sqrt{3}$  można opisać za pomocą równania
- A.  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 3$ .  
 B.  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$ .  
 C.  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ .
- 24. F, P, F**
- 24.** Dane jest koło opisane za pomocą nierówności  $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 \leq 9$ .
- A. Punkt  $A = (-1, -1)$  należy do tego koła.  
 B. Punkt  $B = (-7, -3)$  leży na zewnątrz tego koła.  
 C. Punkt  $C = (-6, \sqrt{5} - 2)$  leży na zewnątrz tego koła.
- 25. P, P, P**
- 25.** Okrąg o równaniu  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$  jest styczny do
- A. osi  $x$ .      B. prostej  $y = 6$ .      C. prostej  $x = 1$ .

**26.** Nierówność  $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 49 < 0$  opisuje

A. zbiór pusty.

B. koło o środku  $S = (7, -1)$  i promieniu  $r = 1$ .

C. zbiór punktów leżących na zewnątrz koła o środku  $S = (7, -1)$  i promieniu  $r = 1$ .

**26.** F, F, F

**27.** Dany jest okrąg o równaniu  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ .

A. Punkt  $M = (3, -6)$  należy do tego okręgu.

B. Punkt  $P = (3, 3)$  należy do tego okręgu.

C. Okrąg ten jest styczny do obydwu osi układu współrzędnych.

**27.** P, F, P

**28.** Figura opisana za pomocą układu nierówności 
$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 25 \\ 4x + 3y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

A. ma nieskończenie wiele osi symetrii.

B. ma dokładnie jedną oś symetrii.

C. jest środkowosymetryczna.

**28.** P, F, P

**29.** Dany jest okrąg o równaniu  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$ .

A. Prosta  $y = -8$  jest styczna do tego okręgu.

B. Prosta  $y = x$  nie ma punktów wspólnych z tym okręgiem.

C. Prosta  $x = -4$  jest osią symetrii tego okręgu.

**29.** P, F, P

**30.** Dany jest zbiór  $F$  opisany za pomocą układu nierówności 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Do zbioru  $F$  należy

A. punkt o współrzędnych  $(-1, 1)$ .

B. co najmniej pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

C. dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

**30.** P, P, P

**31.** Zbiór opisany za pomocą układu nierówności 
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 \leq 0 \end{cases}$$
 ma

A. dokładnie jedną oś symetrii.

B. co najmniej dwie osie symetrii.

C. nieskończenie wiele osi symetrii.

**31.** F, P, P

**32.** Punkt przecięcia prostych o równaniach  $3x + 2y - 6 = 0$  i  $2x - y - 4 = 0$  należy do zbioru punktów płaszczyzny opisanego za pomocą nierówności

A.  $x^2 + y^2 \leq 3$ .

B.  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

C.  $x^2 + y^2 \leq 5$ .

**32.** F, P, P

**33.** Odległość punktu  $(2, 5)$  od środka okręgu  $(x - 4)^2 + y^2 = 1$  jest

A. równa 3.

B. równa  $\sqrt{21}$ .

C. liczbą wymierną.

**33.** F, F, F



34. F, F, F

35. P, P, F

36. P, F, P

37. P, F, F

38. P, P, P

39. a)  $2\sqrt{26}$ 

b) 4

c) 8,5

d)  $3\sqrt{11}$ 40. a)  $5\sqrt{2}$ 

b) 4

c)  $\sqrt{13}$ d)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 34. Okręgi o równaniach  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$  i  $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 180 = 0$ 

A. są styczne zewnętrznie.

B. przecinają się.

C. nie mają punktów wspólnych.

35. Dany jest okrąg o równaniu  $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 1$ .A. Prosta  $7x + 3y = 0$  zawiera średnicę tego okręgu.B. Prosta  $y = x - 10$  jest osią symetrii tego okręgu.C. Prosta  $y = 2x - 9$  jest styczna do tego okręgu.36. Dany jest okrąg  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$  i prosta  $k: x - y - 2 = 0$ .A. Prosta  $k$  ma dwa punkty wspólne z tym okręgiem.B. Prosta  $k$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z tym okręgiem.C. Odległość środka tego okręgu od prostej  $k$  jest równa  $2\sqrt{2}$ .

37. Figura będąca sumą zbiorów opisanych za pomocą warunków

 $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 \leq 0$  i  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 

A. ma dokładnie jedną oś symetrii.

B. ma nieskończenie wiele osi symetrii.

C. jest kołem.

38. Dany jest układ równań  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-a)^2 = 1 \\ y = |x-1| \end{cases}$  z parametrem  $a$ . Układ tenA. dla pewnej wartości parametru  $a$  ma jedno rozwiązanie.B. dla nieskończenie wielu wartości parametru  $a$  ma cztery rozwiązania.C. dla pewnej wartości parametru  $a$  ma trzy rozwiązania.**Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi**39. Oblicz długość odcinka  $AB$ .a)  $A = (1, 7)$ ,  $B = (3, -3)$ c)  $A = \left(-\frac{11}{100}, 5\frac{1}{2}\right)$ ,  $B = (-0,11, -3)$ b)  $A = \left(-1\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right)$ ,  $B = (0,5, \sqrt{3})$ d)  $A = (-\sqrt{2}, 7)$ ,  $B = (2\sqrt{2}, -2)$ 40. Oblicz odległość punktu  $A$  od prostej  $l$ .a)  $A = (2, -3)$ ,  $l: x - y + 5 = 0$ c)  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ,  $l: 2x + 3y + 10 = 0$ b)  $A = (-1, 4)$ ,  $l: -3x + 4y + 1 = 0$ d)  $A = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  $l: -x + 3y + 5 = 0$

**41.** Napisz równanie okręgu o środku  $S$  przechodzącego przez punkt  $P$ .

a)  $S = (-2, 1)$ ,  $P = (3, 2)$

c)  $S = \left(\frac{1}{3}, -3\right)$ ,  $P = \left(2\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

b)  $S = (4, 0)$ ,  $P = (-2, 5)$

d)  $S = (-3, 3)$ ,  $P = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$

**42.** Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu.

a)  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$

$2x + y - 4 = 0$

b)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

$3x - 2y - 3 = 0$

c)  $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 45$

$x - 4y + 2 = 0$

d)  $(x+7)^2 + y^2 = 34$

$x - y - 2 = 0$

**43.** Zbadaj wzajemne położenie okręgów o podanych równaniach.

a)  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 52$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

b)  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$(x+6)^2 + (y+8)^2 = 100$

c)  $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$

$(x+2)^2 + (y+6)^2 = 18$

d)  $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 10$

$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 90$

**44.** Zbadaj wzajemne położenie okręgów o podanych równaniach.

a)  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 4x + 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + 4x - 30 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

d)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 6 = 0$

$x^2 + y^2 + 10x + 2y + 25 = 0$

**45.** Dla jakich wartości  $m$  prosta o równaniu  $3x + \sqrt{5}y = m$  przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

**46.** Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór:

$$A = \{(x, y): x \in \langle -2; 4 \rangle \text{ i } y \in \langle -4; 3 \rangle\}$$

Jaką figurą geometryczną jest zbiór  $A$ ? Ile wynosi jego pole?

**47.** Dla jakich wartości  $m$  prosta o równaniu  $2x + y = m$  ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach  $(1, 3)$ ,  $(-3, 3)$ ,  $(-3, -2)$ ,  $(1, -2)$ ?

**48.** Dany jest punkt  $P = (6, -4)$ . Punkt  $Q$  jest obrazem punktu  $P$  w symetrii osiowej względem osi  $x$ , a punkt  $R$  – obrazem punktu  $P$  w symetrii osiowej względem osi  $y$ . Oblicz długość odcinka  $QR$ .

**49.** Wyznacz równanie tej spośród osi symetrii okręgu o równaniu  $(x+3)^2 + y^2 = 36$ , która przechodzi przez punkt  $A = (6, 3)$ .

**41. a)**  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 26$

**b)**  $(x-4)^2 + y^2 = 61$

**c)**  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y+3)^2 = 11\frac{1}{9}$

**d)**  $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 24$

**42. a)** Prosta jest styczna do okręgu.

**b)** Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

**c)** Prosta przecina okrąg w dwóch punktach.

**d)** Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

**43. a)** przecinające się

**b)** styczne zewnętrznie

**c)** rozłączne zewnętrznie

**d)** styczne wewnętrznie

**44. a)** przecinające się

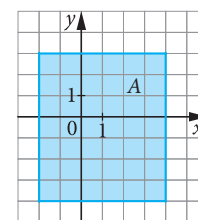
**b)** styczne wewnętrznie

**c)** współśrodkowe

**d)** rozłączne zewnętrznie

**45.**  $m < 0$

**46.** prostokątem o polu 42



**47.**  $m \in \langle -8; 5 \rangle$

**48.**  $|QR| = 4\sqrt{13}$

**49.**  $y = \frac{1}{3}x + 1$

50.  $k': y = 3x + 7$

51.  $(6, 9), (6, 0), (0, 3)$ ,  
 $obw = 6(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$

52.  $C = (-2, 7)$

53.  $D = (2, 2)$

54. a)  $A = (-3, 2), B = (6, 5)$ ,  
 $C = (0, 8)$

b)  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

c)  $y = 5$

55.  $B = (10, -7)$

56.  $C = (4, 5), P = 30$

57.  $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$

58.  $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 50$

59.  $B = (2, 0)$ ,  
 $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 18$

60.  $y = -3x + 11 - 3\sqrt{10}$ ,  
 $y = -3x + 11 + 3\sqrt{10}$

50. Dana jest prosta  $k$  o równaniu  $y = 3x - 7$ . Wyznacz równanie prostej  $k'$ , która jest obrazem prostej  $k$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

### Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

51. Punkt  $B = (12, 6)$  jest wierzchołkiem równoległoboku  $ABCD$ . Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych  $x + 2y - 6 = 0$  i  $x - y + 3 = 0$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku i oblicz jego obwód.

52. W trójkącie równoramiennym  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ , ramię  $BC$  zawiera się w prostej  $y = -\frac{1}{2}x + 6$  i  $A = (-6, -1)$ . Pole tego trójkąta jest równe 40. Oblicz współrzędne punktu  $C$ .

53. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A = (-2, 8), B = (4, -1), C = (5, 4)$ . Z wierzchołka  $C$  poprowadzono wysokość  $CD$ . Wyznacz współrzędne punktu  $D$ .

54. Trójkąt  $ABC$  jest ograniczony prostymi  $AB: x - 3y + 9 = 0, BC: x + 2y - 16 = 0, AC: 2x - y + 8 = 0$ .

a) Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość trójkąta  $ABC$  poprowadzoną z wierzchołka  $C$ .

c) Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka  $B$  tego trójkąta.

55. Punkty  $A = (-8, -13), C = (0, 3)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ , którego wysokości przecinają się w punkcie  $K = (2, -3)$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $B$ .

56. W trójkącie prostokątnym kąt  $ABC$  jest prosty. Wierzchołek  $C$  leży na prostej  $x - 2y + 6 = 0$  oraz  $A = (-3, -4)$  i  $B = (6, -1)$ . Oblicz współrzędne punktu  $C$  oraz pole tego trójkąta.

57. Środek okręgu przechodzącego przez punkty  $A = (3, 1)$  i  $B = (-1, 3)$  należy do prostej  $x - y + 3 = 0$ . Napisz równanie tego okręgu.

58. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach  $A = (4, 4), B = (2, 0), C = (-8, 10)$ .

59. Prosta  $y = -x + 2$  jest styczna do okręgu o środku  $A = (5, 3)$ . Oblicz współrzędne punktu styczności  $B$  oraz napisz równanie tego okręgu.

60. Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$  i prostopadłych do prostej  $x - 3y + 6 = 0$ .

**61.** Okrąg o środku w punkcie  $S = (3, 3)$  jest styczny do obu osi współrzędnych. Prosta  $k$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $P = (2, m)$ ,  $m > 1$ . Wyznacz równanie prostej  $k$ .

**62.** Do okręgu  $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$  poprowadzono styczne z początku układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt przecięcia stycznych.

**63.** Dany jest okrąg o środku  $S = (-2, 5)$ . Cięciwa  $AB$  tego okręgu ma długość  $9\sqrt{2}$  i jest zawarta w prostej  $y = x + 4$ . Napisz równanie okręgu.

**64.** Dane są punkty  $A = (-4, -2)$ ,  $B = (7, 9)$  i  $C = (6, 2)$ . Napisz równanie okręgu o środku w punkcie  $C$  stycznego do prostej  $AB$ .

**65.** Prosta  $x - y - 2 = 0$  przecina okrąg  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 18$  w punktach  $A$  i  $B$ . Napisz równania stycznych do tego okręgu w tych punktach.

**66.** Punkty  $A = (-1, -1)$ ,  $B = (5, 1)$  leżą na okręgu  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$ . Wyznacz na okręgu taki punkt  $C$ , aby trójkąt  $ABC$  był trójkątem równoramiennym o podstawie  $AB$ .

**67.** Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $3x - y + 7 = 0$  i przechodzącej przez środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach  $A = (1, -1)$ ,  $B = (-2, -4)$ ,  $C = (0, 0)$ .

- D 68.** Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  o wierzchołkach  $A = (-2, -2)$ ,  $B = (6, 2)$ ,  $C = (2, 5)$ ,  $D = (-4, 2)$  jest trapezem prostokątnym. Oblicz
- obwód czworokąta.
  - pole czworokąta.
  - długości przekątnych czworokąta.

**69.** Punkty wspólne okręgu  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$  i prostej o równaniu  $5x + 3y - 36 = 0$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $y$ . Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są te punkty i ich obrazy.

- D 70.** Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  o wierzchołkach  $A = (-6, 2)$ ,  $B = (2, -7)$ ,  $C = (6, -4)$ ,  $D = (6, 1)$  ma oś symetrii przechodzącą przez wierzchołek  $A$ .

**71.** Punkty  $A = (1, -4)$  i  $B = (10, -1)$  są wierzchołkami kwadratu  $ABCD$ , a punkt  $S = (4, 2)$  jest jego środkiem symetrii. Wyznacz równania osi symetrii tego kwadratu.

**69.**  $P = 45$

**70.**  $A = (-6, 2)$ ,  $B = (2, -7)$ ,  $C = (6, -4)$ ,  $D = (6, 1)$

$$|AB| = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

$$|BC| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|CD| = |1 + 4| = 5$$

$$|AD| = \sqrt{144 + 1} = \sqrt{145}$$

$|AB| = |AD|$  i  $|BC| = |CD|$ , więc czworokąt  $ABCD$  jest deltoidem, którego osią symetrii jest prosta  $AC$ . Zatem oś symetrii tego czworokąta przechodzi przez wierzchołek  $A$ .

$$71. y = 2x - 6, y = -\frac{1}{2}x + 4, y = -3x + 14, y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$61. k: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**62.**  $P = 12,5$

$$63. (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 45$$

$$64. (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 18$$

$$65. y = -x + 2, y = -x + 14$$

$$66. C = (1 - \sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2})$$

lub  $C = (1 + \sqrt{2}, 3 - 3\sqrt{2})$

$$67. y = 3x + 1$$

**68.**  $A = (-2, -2)$ ,  $B = (6, 2)$ ,  
 $C = (2, 5)$ ,  $D = (-4, 2)$

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki czworokąta  $ABCD$ .

$$a_{AB} = \frac{2 + 2}{6 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{BC} = \frac{5 - 2}{2 - 6} = -\frac{3}{4}$$

$$a_{CD} = \frac{2 - 5}{-4 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{AD} = \frac{2 + 2}{-4 + 2} = -2$$

$AB \parallel CD$  i  $AD \perp AB$ , i  $AD \perp CD$ , więc czworokąt jest trapezem prostokątnym o podstawach  $AB$  i  $CD$ .

$$a) |AB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$|BC| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|CD| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$|AD| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$obw = 5 + 9\sqrt{5}$$

$$b) P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |AD| =$$

$$= \frac{1}{2}(4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} = 35$$

$$c) |AC| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65},$$

$$|BD| = |6 - (-4)| = 10$$

**Odp.:** a)  $obw = 5 + 9\sqrt{5}$

b)  $P = 35$

c)  $|AC| = \sqrt{65}$ ,  $|BD| = 10$

72.  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$

73. a)  $y = -2x + 6$   
b)  $P = 50$

74.  $\sqrt{2}$

75.  $A = (3, -3)$ ,  $B = (1, 1)$ ,  
 $C = (-7, -3)$ ,  $D = (-5, -7)$ ,  
 $P = 40$

76.  $x^2 + y^2 + 6x - 20y + 29 = 0$

77.  $y = 2x - 5$ ,  $y = \frac{1}{2}x - 5$

78.  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 8$   
lub  $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 32$

79.  $y = -\frac{1}{2}x$ ,  $y = 2x - \frac{5}{2}$

80.  $C = (5, 0)$ ,  
 $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 45$

81.  $(5 - 2\sqrt{3}, -3 - 4\sqrt{3})$ ,  
 $(5 + 2\sqrt{3}, -3 + 4\sqrt{3})$

72. Napisz równanie okręgu o środku  $(5, 4)$  stycznego zewnętrznie do okręgu  $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ .

73. Prosta o równaniu  $x - 2y + 2 = 0$  przecina okrąg  $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$  w punktach  $A$  i  $B$ .

a) Napisz równanie symetralnej odcinka  $AB$ .

b) Oblicz pole kwadratu wpisanego w ten okrąg.

74. Dany jest trójkąt  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (1, 7)$ ,  $B = (-5, 1)$ ,  $C = (7, -5)$ . Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  od środka ciężkości tego trójkąta.

75. Prostokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ . Bok  $AB$  jest zawarty w prostej  $2x + y - 3 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków i oblicz pole prostokąta  $ABCD$ .

76. Przez punkty przecięcia paraboli  $y = x^2 - 5x + 6$  z prostą  $x - y + 1 = 0$  poprowadzono okrąg, którego środek leży na prostej  $7x + 3y - 9 = 0$ . Napisz równanie tego okręgu.

77. Napisz równania stycznych poprowadzonych z punktu  $P = (0, -5)$  do okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach  $A = (4, 2)$ ,  $B = (7, 1)$ ,  $C = (6, -2)$ .

78. Okrąg, którego środek leży na prostej  $2x - y = 0$ , jest styczny do prostych  $y = x + 6$  i  $y = -x + 2$ . Znajdź równanie tego okręgu.

79. Dane są okręgi  $x^2 + y^2 = 4$  i  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ . Napisz równania osi symetrii figury będącej sumą tych dwóch okręgów.

80. Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (8, 9)$  i  $B = (-4, 3)$  oraz wierzchołku  $C$  leżącym na osi  $x$ . Kąt  $BCA$  ma miarę  $90^\circ$ . Wyznacz współrzędne punktu  $C$  oraz napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

81. Punkt  $C = (-7, 3)$  jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego  $ABC$ , a punkt  $S = (1, -1)$  jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wyznacz współrzędne wierzchołków  $A$  i  $B$ .