

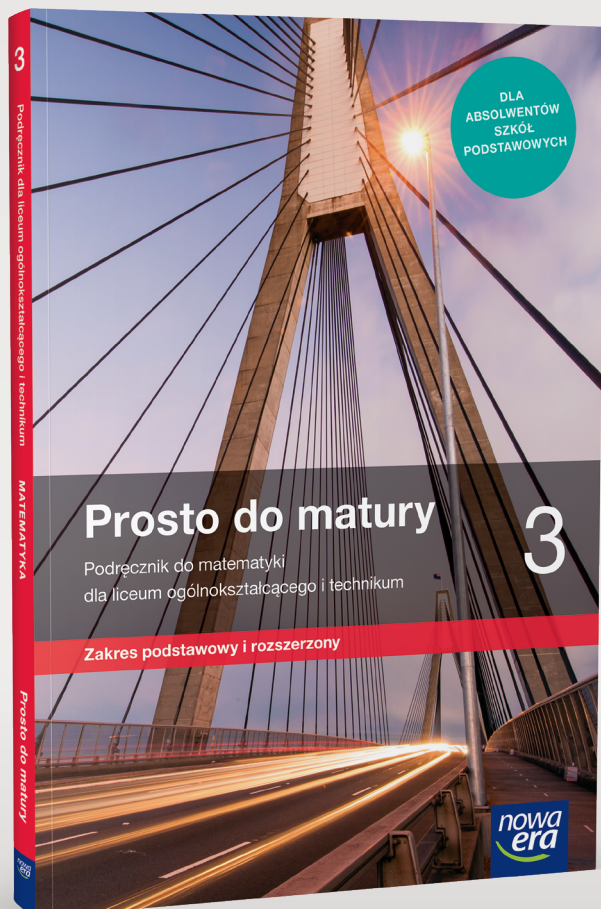
Prosto do matury

# Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy i rozszerzony

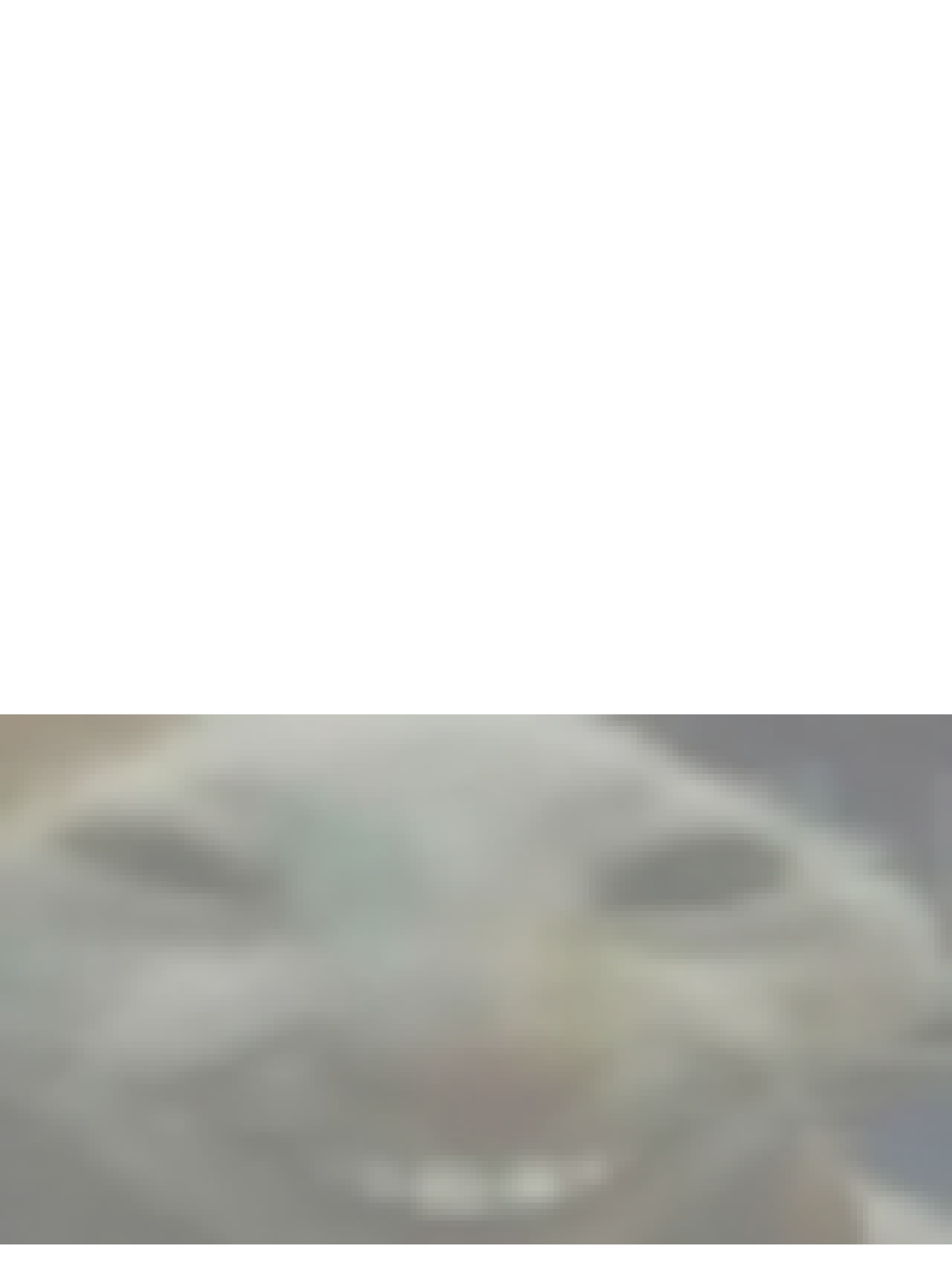


## Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

[dlanauczyciela.pl](http://dlanauczyciela.pl)



Prosto do matury

# Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

**Zakres podstawowy i rozszerzony**

3

# Prosto do matury

*Podręcznik Nauczyciela 3* został przygotowany do podręcznika autorstwa Macieja Antka, Krzysztofa Belki i Piotra Grabowskiego *Prosto do matury 3* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (1013/3/2021).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021  
ISBN 978-83-267-4269-9

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *Prosto do matury* dla klasy 3 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.  
© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

**Autorzy komentarzy merytorycznych:** Maciej Antek, Piotr Grabowski

**Autorzy rozwiązań zadań:** Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska

**Koordinacja prac:** Anna Dubiel

**Redakcja merytoryczna:** Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Anna Dubiel, Beata Zajac, Elżbieta Zięcina

**Współpraca redakcyjna:** Aleksandra Jankowska

**Korekta językowa:** Marta Zuchowicz

**Nadzór artystyczny:** Kaia Pichler

**Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn

**Projekt graficzny:** Klaudia Jarocka-Ciok

**Projekt okładki:** Maciej Galiński, Klaudia Jarocka-Ciok

**Rysunki:** Andrzej Oziębło

**Realizacja projektu graficznego:** Skład systemem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ . BOP sc.

**Opracowanie graficzne infografik:** Marek Błoszko

**Realizacja projektu okładki:** Klaudia Jarocka-Ciok

**Fotografia na okładce:** Getty Images/Julian Tatang/EyeEm.

**Fotografie:** Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 403; BE&W: AKG IMAGES GmbH s. 429, Alamy Stock Photo - Art World s. 374, GL Archive s. 425 (Blaise Pascal), BEW NEWS/cienki s. 222, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 161 (Apoloniusz z Perg), Getty Images: Bongarts/Alexander Hassenstein s. 337, De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 425 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 424, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 160 (statki), E+/Simonbradfield s. 377, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 114; Indigo: Alamy Stock Photo - PA Images s. 336, Pictorial Press Ltd s. 425 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 205; Shutterstock: Aaron Amat s. 213, Abundance s. 204 (ananas), Alexander Raths s. 439, Amatveev s. 189, Artens s. 218, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 237, Fotokostic s. 239, KeepWatch s. 105, KLENY s. 233, maxtar s. 405, Mikbiz s. 387, Mimadeo s. 204 (szyszki), MM\_photos s. 160, 161 (stara kartka), Nguyen Thai s. 204 (szyszka), Sergieiev s. 388, Targn Pleiades s. 371, wavebreakmedia s. 190; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - Liufuyu s. 267, Roob s. 434, Photodisc/James Woodson s. 449, Zoonar/J. Wachala s. 443.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.  
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.  
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa  
[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl), e-mail: [nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)  
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

# Spis treści

|                                                                      |                |
|----------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>Podręcznik Prosto do matury z materiałami dydaktycznymi .....</b> | <b>1</b>       |
| <b>1. Trygonometria .....</b>                                        | <b>7</b>       |
| <b>2. Geometria analityczna .....</b>                                | <b>105</b>     |
| <b>3. Ciągi .....</b>                                                | <b>189</b>     |
| <b>4. Analiza matematyczna .....</b>                                 | <b>267</b>     |
| <b>5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka .....</b>             | <b>371</b>     |
| <br>Skorowidz .....                                                  | <br><b>467</b> |
| Wybrane wzory trygonometryczne .....                                 | <b>469</b>     |
| Tablica wartości funkcji trygonometrycznych .....                    | <b>471</b>     |

## Legenda

### ZZ i MKP

temat 5.10 (klasa 2)

### Multiteka

- Twierdzenie sinusów

dla**nauczyciela**.pl | Kartkówka 1.1

 **Generator**  
testów i sprawdzianów

Podczas pracy z podręcznikiem PDM dodatkowo można korzystać z publikacji z serii **MATeMATyka: Zbiór zadań (ZZ)** i *Maturalne karty pracy (MKP)*. Odnosnik 5.10 (klasa 2) oznacza numer odpowiedniego tematu w tych publikacjach.

**Multiteka** – tu zamieszczamy tytuły zasobów zgromadzonych w Multitece, pomocnych w przeprowadzeniu konkretnych lekcji.

**Materiały sprawdzające wiedzę** są zgromadzone w dwóch miejscach:

- w portalu dla**nauczyciela**.pl – gotowe kartkówki, klasówki i sprawdziany,
- w Genaratorze – narzędziu z bogatą bazą zadań do tworzenia własnych kartkówek, klasówek i sprawdzianów, a także z propozycjami gotowych tego typu materiałów.



Maciej Antek  
Krzysztof Belka  
Piotr Grabowski

# Prosto do matury

Podręcznik do matematyki  
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

# 3

**Zakres podstawowy i rozszerzony**

**nowa  
era** *Twoje mocne strony*

# Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

**dr Moniki Fabijańczyk, dr. Mariana Liskowskiego i dr hab. Anny Cegieli.**

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

**Rok dopuszczenia: 2021**

**Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/3/2021**

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

ISBN 978-83-267-4210-1

**Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna:** Magdalena Spalińska, Anna Dubiel

**Współpraca redakcyjna:** Aleksandra Jankowska, Marcin Minda

**Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik:** Urszula Ciełniak

**Konsultacje merytoryczne:** Jacek Klisowski

**Redakcja językowa:** Marta Zuchowicz, Paulina Szulim

**Korekta językowa:** Anna Wesołowska

**Nadzór artystyczny:** Kaia Pichler

**Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn

**Projekt graficzny:** Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Point

**Projekt okładki:** Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

**Fotoedycja:** Katarzyna Iwan-Malawska

**Rysunki merytoryczne:** Andrzej Oziębło

**Opracowanie graficzne stron działowych:** Maciej Galiński

**Opracowanie graficzne infografik:** Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo

**Realizacja projektu graficznego:** BOP s.c.

**Fotografia na okładce:** Getty Images/Julian Tatant/EyeEm.

**Fotografie:** Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 403; BE&W: AKG IMAGES GmbH s. 429, Alamy Stock Photo - Art World s. 374, GL Archive s. 425 (Blaise Pascal), BEW NEWS/Science s. 222, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 161 (Apoloniusz z Perg), Getty Images: Bongarts/Alexander Hassenstein s. 337, De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 425 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 424, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 160 (staki), E+/Aimondradfield s. 377, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 114; Indigo: Alamy Stock Photo - PA Images s. 336, Pictorial Press Ltd s. 425 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 205; Shutterstock: Aaron Amat s. 213, Abundance s. 204 (ananas), Alexander Rath s. 439, Amalveev s. 189, Artens s. 218, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 237, Fotokostic s. 239, KeepWatch s. 105, KLENY s. 233, maxtar s. 405, Mikbiz s. 387, Mimadeo s. 204 (szyszki), MM\_photos s. 160, 161 (stara kartka), Nguyen Thai s. 204 (szyszka), Sergeiev s. 388, Targn Pleiades s. 371, wawebreakmedia s. 190; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - Liuflyu s. 267, Rob s. 434, Photodisc/James Woodson s. 449, Zoonar/J. Wachala s. 443.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.

Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl), e-mail: [nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobylka

# Spis treści

|                                               |   |
|-----------------------------------------------|---|
| Wstęp .....                                   | 5 |
| Wykaz używanych oznaczeń matematycznych ..... | 6 |

## Dział 1. Trygonometria

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| 1. Twierdzenie sinusów .....                                 | 8  |
| 2. Twierdzenie cosinusów .....                               | 17 |
| 3. Związki miarowe w wielokątach .....                       | 24 |
| 4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta .....             | 34 |
| 5. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta ..... | 47 |
| 6. Miara łukowa kąta .....                                   | 58 |
| 7. Wykresy funkcji trygonometrycznych .....                  | 66 |
| 8. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów .....       | 80 |
| 9. Równania i nierówności trygonometryczne .....             | 89 |
| 10. Powtórzenie .....                                        | 98 |

## Dział 2. Geometria analityczna

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Warto powtórzyć – równanie prostej, wektory .....       | 106 |
| 2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej .....          | 114 |
| 3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej ..... | 124 |
| 4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło .....        | 137 |
| 5. Okrąg i prosta. Dwa okręgi .....                        | 147 |
| 6. Symetria środkowa .....                                 | 162 |
| 7. Symetria osiowa .....                                   | 171 |
| 8. Powtórzenie .....                                       | 180 |

## Dział 3. Ciągi

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Określenie i własności ciągu liczbowego .....            | 190 |
| 2. Ciąg arytmetyczny .....                                  | 206 |
| 3. Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego ..... | 216 |
| 4. Ciąg geometryczny .....                                  | 225 |
| 5. Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego ..... | 235 |
| 6. Oszczędzanie i kredyty w bankach .....                   | 242 |
| 7. Powtórzenie .....                                        | 257 |

## Dział 4. Analiza matematyczna

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 1. Granica ciągu .....                           | 268 |
| 2. Szereg geometryczny zbieżny i jego suma ..... | 282 |

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| 3. Granica funkcji w punkcie                         | 288 |
| 4. Granice niewłaściwe                               | 298 |
| 5. Funkcje ciągłe                                    | 307 |
| 6. Pochodna funkcji w punkcie                        | 315 |
| 7. Pochodna jako funkcja                             | 325 |
| 8. Pochodna funkcji złożonej                         | 338 |
| 9. Monotoniczność i ekstrema funkcji różniczkowalnej | 344 |
| 10. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji | 356 |
| 11. Powtórzenie                                      | 365 |

## Dział 5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa         | 372 |
| 2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa       | 375 |
| 3. Reguła mnożenia                              | 383 |
| 4. Obliczanie prawdopodobieństwa                | 394 |
| 5. Własności prawdopodobieństwa                 | 406 |
| 6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych | 418 |
| 7. Wstęp do statystyki                          | 426 |
| 8. Mediana, średnia i dominanta                 | 432 |
| 9. Miary rozproszenia                           | 447 |
| 10. Powtórzenie                                 | 460 |
| Odpowiedzi                                      | 467 |
| Skorowidz                                       | 492 |
| Wybrane wzory trygonometryczne                  | 494 |
| Tablica wartości funkcji trygonometrycznych     | 496 |

# Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy trzeciej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera ponad półtora tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są \* lub \*\*, zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem , natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązyanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązywane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Po omówieniu każdego rozdziału uczniowie powinni rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to dla nich sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

*Autorzy*

## Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

|                                                                       |                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \in A; x \notin A$                                                 | $x$ należy do zbioru $A$ ; $x$ nie należy do zbioru $A$                                |
| $\{a, b, c\}; \emptyset$                                              | zbiór, którego elementami są $a, b, c$ ; zbiór pusty                                   |
| $\mathbf{N, Z, Q, R}$                                                 | zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych                        |
| $A \subset B$                                                         | zbiór $A$ jest podzbiorem zbioru $B$                                                   |
| $A \cap B$                                                            | część wspólna (iloczyn) zbiorów $A$ i $B$                                              |
| $A \cup B$                                                            | suma zbiorów $A$ i $B$                                                                 |
| $A - B$                                                               | różnica zbiorów $A$ i $B$                                                              |
| $\sqrt[n]{a}$                                                         | pierwiastek stopnia $n$ z liczby $a$                                                   |
| $\log_a b$ ( $\log b$ )                                               | logarytm przy podstawie $a$ ( $10$ ) liczby $b$                                        |
| $(a; b)$                                                              | przedział otwarty, zbiór liczb większych od $a$ i mniejszych od $b$                    |
| $\langle a; b \rangle$                                                | przedział domknięty (zamknięty)                                                        |
| $\langle a; b \rangle; (a; b)$                                        | przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty                    |
| $ a $                                                                 | wartość bezwzględna liczby $a$                                                         |
| $f(x)$                                                                | wartość funkcji $f$ dla argumentu $x$                                                  |
| $D; ZW$                                                               | dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji                                              |
| $o(S, r); k(S, r)$                                                    | okrąg o środku $S$ i promieniu $r$ ; koło o środku $S$ i promieniu $r$                 |
| $P; obw$                                                              | pole figury; obwód figury                                                              |
| $A = (a, b)$                                                          | punkt $A$ o współrzędnych $a$ (tzw. odcięta) i $b$ (tzw. rzędna)                       |
| $AB;  AB $                                                            | odcinek o końcach $A$ i $B$ ; długość odcinka $AB$                                     |
| $a \parallel b; a \perp b$                                            | prosta $a$ jest równoległa do prostej $b$ ; prosta $a$ jest prostopadła do prostej $b$ |
| $\sphericalangle ABC$                                                 | kąt o wierzchołku $B$ i ramionach: półprostej $BA$ i półprostej $BC$                   |
| $\triangle ABC$                                                       | trójkąt $ABC$                                                                          |
| $\sin \alpha$                                                         | sinus kąta $\alpha$                                                                    |
| $\cos \alpha$                                                         | cosinus kąta $\alpha$                                                                  |
| $\operatorname{tg} \alpha$                                            | tangens kąta $\alpha$                                                                  |
| $(a_n); a_n$                                                          | ciąg; $n$ -ty wyraz ciągu $(a_n)$                                                      |
| $S_n; S$                                                              | suma $n$ początkowych wyrazów ciągu; suma szeregu geometrycznego                       |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$                                     | granica ciągu $(a_n)$                                                                  |
| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$                                       | granica funkcji $f$ w punkcie $x_0$                                                    |
| $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$    | granica lewostronna, prawostronna funkcji $f$ w punkcie $x_0$                          |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ | granica funkcji $f$ w $-\infty$ , w $\infty$                                           |
| $f'(x)$                                                               | pochodna funkcji $f$                                                                   |
| $\overrightarrow{AB};  \overrightarrow{AB} $                          | wektor o początku $A$ i końcu $B$ ; długość wektora $\overrightarrow{AB}$              |
| $\vec{u} = [a, b]$                                                    | wektor $\vec{u}$ o współrzędnych $a, b$                                                |
| $\Omega; \overline{\Omega}$                                           | zbiór zdarzeń elementarnych; liczba zdarzeń elementarnych w zbiorze $\Omega$           |
| $\overline{A}$                                                        | liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$                               |
| $P(A)$                                                                | prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$                                               |
| $A'$                                                                  | zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A$                                                   |
| $EX$                                                                  | wartość oczekiwana                                                                     |
| $\bar{x}; \bar{x}_w$                                                  | średnia wyników; średnia ważona wyników                                                |
| $\sigma^2$                                                            | wariancja                                                                              |
| $\sigma$                                                              | odchylenie standardowe                                                                 |

# Trygonometria

## 1

### Umiejętności

#### Po klasie drugiej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) w trójkącie prostokątnym o danych bokach,
- oblicza długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego, jeżeli dane są jeden bok i wartość funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych,
- korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora),
- stosuje w zadaniach podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego i rozwartego,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do obliczania pól i obwodów trójkątów i czworokątów,
- korzysta ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych umieszczonych w układzie współrzędnych,
- konstruuje kąty w układzie współrzędnych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tych kątów,
- udowadnia proste tożsamości trygonometryczne i podaje założenia dotyczące tych tożsamości,
- stosuje wzory redukcyjne do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych.

#### Po tym dziale uczeń:

- znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,
- korzysta z twierdzenia o dwusiecznej, a także ze wzorów na pole trójkąta wyrażonych za pomocą długości boków trójkąta oraz: promienia okręgu wpisanego w trójkąt i promienia okręgu opisanego na trójkącie,
- wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach; stosuje wzory redukcyjne dla dowolnego kąta,
- opisuje własności funkcji trygonometrycznych, wykorzystuje zależności między nimi,
- stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie,
- operuje funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej,
- rysuje wykresy funkcji sinus, cosinus i tangens oraz przekształca te wykresy,
- stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów oraz wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego,
- rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

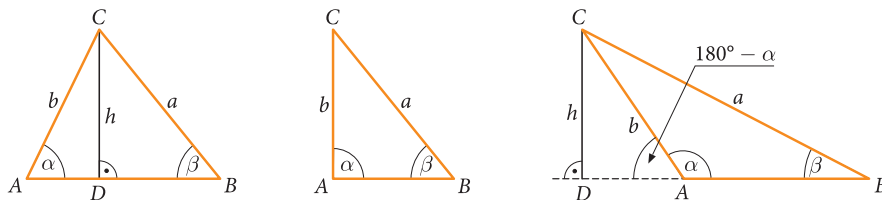
# 1. Twierdzenie sinusów

## Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów

Zadanie polegające na wyznaczeniu wszystkich nieznanymi długości boków oraz miar kątów w trójkącie nazywamy krótko **rozwiązywaniem trójkąta**. W kolejnych tematach zajmiemy się tym zagadnieniem. W tym celu będziemy stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi zachodzące w trójkątach.

Pokażemy, że w każdym trójkącie wysokość można wyrazić w postaci iloczynu długości boku, na który ta wysokość nie jest opuszczona, i sinusa odpowiedniego kąta tego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.



Zauważmy, że:

- jeżeli  $\alpha$  jest kątem ostrym, to  $\sin \alpha = \frac{h}{b}$ , czyli  $h = b \cdot \sin \alpha$ ,
- jeżeli  $\alpha$  jest kątem prostym, to  $h = b$ , czyli  $h = b \cdot \sin \alpha$ , ponieważ  $\sin 90^\circ = 1$ ,
- jeżeli  $\alpha$  jest kątem rozwartym, to  $\sin (180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$ , czyli  $h = b \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$ , więc  $h = b \cdot \sin \alpha$ .

Niezależnie od miary kąta mamy więc równość:

$$h = b \cdot \sin \alpha$$

W identyczny sposób możemy poprowadzić rozumowanie dla boku  $a$  i kąta  $\beta$ . Otrzymamy wówczas równość:

$$h = a \cdot \sin \beta$$

Zatem:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$

Równość tę możemy zapisać w postaci:

$$(1) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \leftarrow \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \sin \beta \neq 0$$

Przypominamy: w tych podręcznikach często zamiast pisać „kąt  $ABC$  o mierze  $\alpha$ ” używamy krótszej formy „kąt  $ABC$  równy  $\alpha$ ” albo „ $\sphericalangle ABC = \alpha$ ”. Podobnie – „wysokość równa 5”, a nie „długość wysokości równa 5”, „trójkąt ma równe przyprostokątne” zamiast „trójkąt ma przyprostokątne równej długości” itd.

### ZZ i MKP

temat 5.10 (klasa 2)

### Multiteka

- Twierdzenie sinusów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

**Generator**  
testów i sprawdzianów

Oznaczmy trzeci bok trójkąta literą  $c$  oraz kąt leżący naprzeciwko niego literą  $\gamma$ . Gdy poprowadzimy wysokość z wierzchołka  $A$  i będziemy rozumować podobnie jak wyżej, otrzymamy  $b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$  lub inaczej:

$$(2) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \leftarrow \sin \gamma \neq 0$$

Z równości (1) i (2) wynika, że:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Otrzymaną równość nazywamy **wzorem sinusów**.

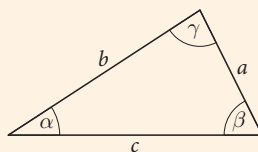
Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

### Twierdzenie

#### Wzór sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinususa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Twierdzenie to stosujemy na przykład do obliczania długości boków trójkąta, jeżeli dana jest jedna z nich oraz dane są kąty trójkąta.

#### Przykład 1 zad. 1.5

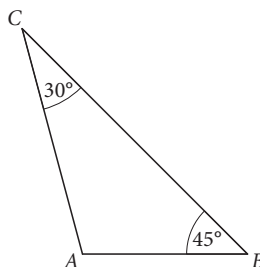
W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 12$ ,  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle BCA = 30^\circ$ . Obliczmy długość boku  $AC$ .

#### Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} &= \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC} \\ \frac{12}{\sin 30^\circ} &= \frac{|AC|}{\sin 45^\circ} \\ \frac{12}{\frac{1}{2}} &= \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ |AC| &= 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Odp.: Bok  $AC$  ma długość  $12\sqrt{2}$ .



◀1.5. Kąty trójkąta  $ABC$  oznaczono  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , a literami  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

a)  $\sin \beta$  dla  $a = 20$ ,  $b = 24$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

b)  $b$  dla  $c = 36$ ,  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .

c)  $\sin \alpha$  dla  $a = 11$ ,  $c = 17$ ,  $\gamma = 71^\circ$ .

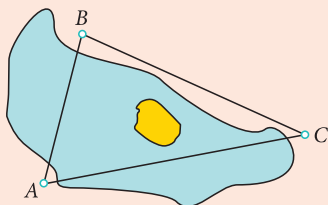
d)  $c$  dla  $a = 16$ ,  $\beta = 26^\circ$ ,  $\gamma = 48^\circ$ .

Odp.: a)  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$  b)  $12\sqrt{6}$

c) 0,612 d) 12,37

◀1.6. Trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku  $A$ . Dane są:  
 $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 8$ ,  $\sin \sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$ .  
 Oblicz miarę kąta  $ACB$ .  
**Odp.:**  $30^\circ$

◀1.8. Gospodarstwa  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są położone nad stawem, jak na rysunku poniżej.



Zmierzono, że  $|BC| = 300$  m,  
 $\sphericalangle C = 35^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 80^\circ$ . Wyznacz  
 odległość między gospodarstwami  
 $A$  i  $B$  z dokładnością do 1 metra.  
**Odp.:** 190 m

### Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Trójkąt  $KLM$  jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku  $M$ . Dane są:  
 $|KL| = 16$ ,  $|KM| = 9\sqrt{2}$ ,  $\sin \sphericalangle LMK = \frac{8}{9}$ . Obliczmy miarę kąta  $KLM$ .

#### Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

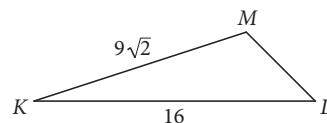
$$\frac{|KL|}{\sin \sphericalangle LMK} = \frac{|KM|}{\sin \sphericalangle KLM}$$

$$\frac{16}{\frac{8}{9}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sin \sphericalangle KLM}, \text{ stąd } \sin \sphericalangle KLM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sphericalangle KLM = 45^\circ \text{ lub } \sphericalangle KLM = 135^\circ \quad \leftarrow \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

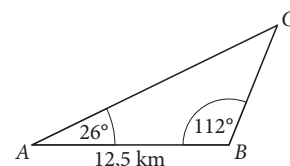
Wiemy, że trójkąt  $KLM$  jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku  $M$ , zatem tylko kąt  $45^\circ$  spełnia warunki zadania.

**Odp.:** Kąt  $KLM$  ma miarę  $45^\circ$ .



### Przykład 3 ◀ zad. 1.8

W górzystym terenie stoją dwie wieże triangulacyjne  $A$  i  $B$ . Odległość między nimi jest równa 12,5 km. Najwyższym w okolicy wierzchołkiem jest Góra Czarownic (oznaczona na rysunku literą  $C$ ). Geodeta zmierzył dwa kąty: z wieży  $A$  kąt  $BAC$  o mierze  $26^\circ$  i z wieży  $B$  kąt  $ABC$  o mierze  $112^\circ$ . Obliczymy przybliżone odległości między Górą Czarownic a wieżami (mierzone w linii prostej i z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



#### Rozwiązanie

Zastosujemy dwa razy wzór sinusów. Miarę kąta leżącego naprzeciwko boku  $AB$  znajdziemy jako dopełnienie do  $180^\circ$ :

$$\gamma = 180^\circ - 26^\circ - 112^\circ = 42^\circ, \text{ zatem } \frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|AC|}{\sin 112^\circ}$$

$$|AC| = \frac{12,5 \cdot \sin 112^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{12,5 \cdot \sin (180^\circ - 68^\circ)}{\sin 42^\circ} = \frac{12,5 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 42^\circ}$$

Odczytujemy z tablic matematycznych przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku:

$$\sin 68^\circ \approx 0,93, \sin 42^\circ \approx 0,67$$

$$\text{Zatem } |AC| \approx \frac{12,5 \cdot 0,93}{0,67} \approx 17,4.$$

Do obliczenia odległości  $|BC|$  wybieramy inną proporcję ze wzoru sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 26^\circ} \quad \leftarrow \sin 26^\circ \approx 0,44$$

$$\text{czyli } |BC| = \frac{12,5 \cdot \sin 26^\circ}{\sin 42^\circ} \approx \frac{12,5 \cdot 0,44}{0,67} \approx 8,2$$

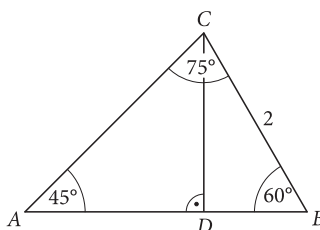
Odp.: Góra Czarownic jest oddalona od wieży A o ok. 17,4 km, a od wieży B o ok. 8,2 km.

#### D Przykład 4 ◀ zad. 1.18

Kąty trójkąta  $ABC$  mają miary  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ , a bok  $BC$  ma długość 2. Skorzystamy ze wzoru sinusów i wykażemy, że  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .

##### Dowód

Zauważmy najpierw, że istnieje dokładnie jeden trójkąt spełniający warunki zadania – możemy go skonstruować, gdy określimy odcinek jednostkowy. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zgodnie z nimi  $CD$  jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta o mierze  $75^\circ$ .



$$|DB| = 1 \text{ i } |DC| = \sqrt{3} \quad \leftarrow \triangle DBC \text{ jest połową trójkąta równobocznego o boku } 2$$

$$|AD| = \sqrt{3} \text{ i } |AC| = \sqrt{6} \quad \leftarrow \triangle ADC \text{ jest połową kwadratu o boku } |DC| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{|AB|}{\sin 75^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ} \quad \leftarrow \text{twierdzenie sinusów dla trójkąta } ABC$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ stąd } \sin 75^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

##### Koniec dowodu

Zauważmy, że jeśli w trójkącie  $ABC$  poprowadzimy wysokość  $BE$  z wierzchołka kąta o mierze  $60^\circ$ , to możemy w podobny sposób wykazać, że:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Spotyka się również następujące zależności:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

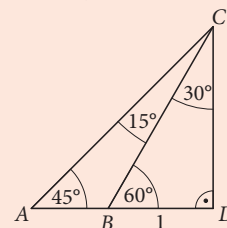
Za pomocą odpowiednich przekształceń można wykazać, że:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

#### ◀ 1.18. Wykaż, że

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

##### Rozwiązanie



W trójkącie  $BDC$ :  $|BC| = 2$ ,

$$|CD| = \sqrt{3}$$

W trójkącie  $ADC$ :

$$|AD| = |CD| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = |AD| - |BD| = \sqrt{3} - 1$$

Z twierdzenia sinusów

w trójkącie  $ABC$ :

$$\frac{|AB|}{\sin 15^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{Stąd } \sin 15^\circ = \frac{|AB| \sin 45^\circ}{|BC|} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Wzór sinusów stosujemy również do wyznaczania promienia okręgu opisanego na trójkącie.

### Twierdzenie

#### Twierdzenie sinusów

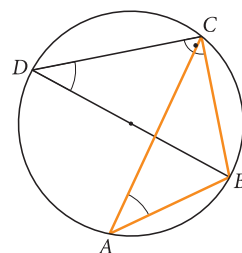
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

#### Założenie

Trójkąt  $ABC$  jest dowolny.

#### Teza

Stosunek długości boku trójkąta  $ABC$  do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości  $2R$ , czyli średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



#### Dowód

Zgodnie ze wzorem sinusów dowód wystarczy przeprowadzić dla jednego kąta. Któryś z kątów trójkąta jest kątem ostrym; oznaczmy jego wierzchołek literą  $A$ . Z innego wierzchołka (np.  $B$ ) prowadzimy średnicę  $BD$ .

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$$

← kąty wpisane oparte na tym samym łuku

$$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{|BD|}$$

← trójkąt  $BDC$  jest prostokątny

$$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{2R}$$

←  $R$  jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$

Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy:

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BDC}$$

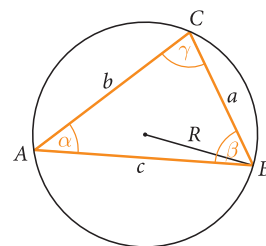
$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC}$$

←  $\sin \sphericalangle BDC = \sin \sphericalangle BAC$

#### Koniec dowodu

Korzystając z oznaczeń przedstawionych na rysunku, możemy treść twierdzenia, łącznie ze wzorem sinusów, zapisać krótko:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



**Przykład 5** ◀ zad. 1.19

Na trójkącie, którego dwa boki mają długości 9 i  $3\sqrt{6}$ , opisano okrąg o promieniu  $3\sqrt{3}$ . Obliczmy miary kątów i długość trzeciego boku trójkąta.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy:

$\alpha, \beta, \gamma$  – kąty leżące odpowiednio naprzeciwko boków  $a, b, c$  trójkąta,

$R$  – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przyjmijmy, że  $a = 9, b = 3\sqrt{6}$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{9}{\sin \alpha} &= 6\sqrt{3} && \leftarrow \text{zgodnie ze wzorem } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R \\ \sin \alpha &= \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ lub } \alpha = 120^\circ \quad \leftarrow \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{3\sqrt{6}}{\sin \beta} &= 6\sqrt{3} \\ \sin \beta &= \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta &= 45^\circ \text{ lub } \beta = 135^\circ && \leftarrow \sin \beta = \sin (180^\circ - \beta) \end{aligned}$$

Suma kątów trójkąta wynosi  $180^\circ$ , zatem  $\alpha + \beta < 180^\circ$  i  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ . Nie istnieje trójkąt o kątach  $\alpha = 60^\circ$  i  $\beta = 135^\circ$  ani trójkąt o kątach  $\alpha = 120^\circ$  i  $\beta = 135^\circ$ .

Możliwe są więc dwa rozwiązania:

I. trójkąt o kątach  $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ$

II. trójkąt o kątach  $\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 15^\circ$

Długość trzeciego boku trójkąta obliczamy ze wzoru  $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ , czyli:

$$c = 2R \sin \gamma$$

$$c = 6\sqrt{3} \sin 75^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{dla I trójkąta}$$

$$c = 6\sqrt{3} \sin 15^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{dla II trójkąta}$$

$$\text{Odp.: } \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ, c = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{lub } \alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 15^\circ, c = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2}$$

◀1.19. Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do  $1^\circ$  i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

Odp.:  $25^\circ, 39^\circ, 116^\circ, 9,0$  cm

lub  $25^\circ, 141^\circ, 14^\circ, 2,4$  cm

## Zadania

W poniższych zadaniach odczytuj wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku, a miary kątów z dokładnością do  $1^\circ$ . Możesz wykorzystywać podane w przykładzie 4 dokładne wartości  $\sin 75^\circ$  i  $\sin 15^\circ$ .

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

## Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. B

1.2. C

1.3. B

1.4.  $4(\sqrt{3} - 1)$ 

1.5. a)  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$  b)  $12\sqrt{6}$   
c) 0,612 d) 12,37

1.6.  $30^\circ$ 

1.7. a)  $\gamma = 43^\circ$ ,  $b = 11,45$  cm,  
 $c = 7,93$  cm  
b)  $\gamma = 57^\circ$ ,  $a = 17,57$  cm,  
 $c = 15,06$  cm  
c)  $\alpha = 33^\circ$ ,  $a = 13,56$  cm,  
 $b = 21,56$  cm

1.1. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 6\sqrt{3}$ ,  $\sphericalangle BCA = 120^\circ$ . Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A.  $3\sqrt{3}$  B. 6 C.  $6\sqrt{3}$  D. 12

1.2. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 24$ ,  $|BC| = 16$ ,  $\sphericalangle BCA = 60^\circ$ . Wskaż wartość  $\sin \sphericalangle CAB$ .

A.  $\frac{1}{3}$  B.  $\frac{2}{3}$  C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  D.  $\sqrt{3}$

1.3. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|BC| = 18$ ,  $\sphericalangle CAB = 45^\circ$ ,  $\sin \sphericalangle BCA = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . Wskaż długość boku  $AB$ .

A.  $4\sqrt{6}$  B. 12 C.  $12\sqrt{2}$  D. 27

1.4. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|BC| = 8$ ,  $\sphericalangle CAB = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle BCA = 120^\circ$ . Oblicz długość boku  $AC$ .

1.5. Kąty trójkąta  $ABC$  oznaczono  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , a literami  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

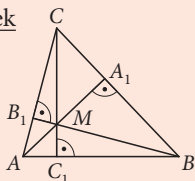
a)  $\sin \beta$  dla  $a = 20$ ,  $b = 24$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . c)  $\sin \alpha$  dla  $a = 11$ ,  $c = 17$ ,  $\gamma = 71^\circ$ .  
b)  $b$  dla  $c = 36$ ,  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ . d)  $c$  dla  $a = 16$ ,  $\beta = 26^\circ$ ,  $\gamma = 48^\circ$ .

1.6. Trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku  $A$ . Dane są:  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 8$ ,  $\sin \sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$ . Oblicz miarę kąta  $ACB$ .

1.7. Oblicz brakujące miary kątów (z dokładnością do  $1^\circ$ ) i długości boków (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) trójkąta  $ABC$ , w którym  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są kątami wewnętrznymi oraz  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – bokami odpowiednio przeciwległymi.

a)  $a = 7$  cm,  $\alpha = 37^\circ$ ,  $\beta = 100^\circ$   
b)  $b = 12,7$  cm,  $\alpha = 78^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$   
c)  $c = 11,3$  cm,  $\gamma = 27^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$

## 1.20. I przypadek



$\sphericalangle AMC_1 = 90^\circ - \sphericalangle MAC_1 =$   
 $= 90^\circ - \sphericalangle A_1AB = \sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle ABC$   
Analogicznie:  $\sphericalangle BMC_1 = \sphericalangle BAC$ .  
Stąd  $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC =$   
 $= 180^\circ - \sphericalangle ACB$ .  
Zatem  $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle ACB$ .  
Analogicznie pokazujemy, że  
 $\sin \sphericalangle BMC = \sin \sphericalangle BAC$ ,  
 $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle ABC$ .

## II przypadek

$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMB_1 = 90^\circ - \sphericalangle MAB_1 = \sphericalangle ACB$   
Analogicznie:  $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC$ .  
Stąd  $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$ .  
Zatem  $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle ACB$ ,  $\sin \sphericalangle BMC = \sin \sphericalangle BAC$ ,  
 $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle ABC$ .

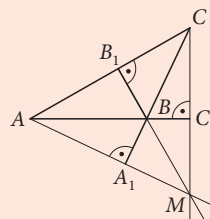
Niech:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R$  – promienie okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $AMC$  i  $ABC$ .  
Z twierdzenia sinusów w trójkątach  $ABM$  i  $ABC$ :

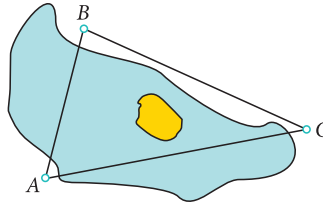
$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle AMB} = 2R_1 \text{ i } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2R$$

Sinusy kątów w równościach powyżej są równe, więc  $R_1 = R$ .

Analogicznie pokazujemy, że  $R_2 = R$  i  $R_3 = R$ .

Zatem  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ .





**1.8.** Gospodarstwa  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są położone nad stawem, jak na rysunku obok. Zmierzone, że  $|BC| = 300$  m,  $\sphericalangle C = 35^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 80^\circ$ . Wyznacz odległość między gospodarstwami  $A$  i  $B$  z dokładnością do 1 metra.

**1.9.** Przekątna równoległoboku ma długość 24 cm i dzieli kąt rozwarty równoległoboku na kąty o miarach  $45^\circ$  i  $75^\circ$ . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

**1.10.** W trapezie równoramiennym  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel DC$ , przekątna  $AC$  ma długość 8 cm,  $\sphericalangle CAB = 22^\circ$  i  $\sphericalangle ACB = 113^\circ$ . Oblicz miary kątów i długości boków trapezu z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

**1.11.** Na brzegu jeziora znajdują się dwie przystanie, oznaczone jako  $A$  i  $B$ , oddalone w linii prostej o 1,6 km. Z każdej z nich widoczna jest ta sama mała wyspa – oznaczmy ją  $W$ . Za pomocą kompasu zmierzono kąty:  $\sphericalangle WAB = 54^\circ$  i  $\sphericalangle ABW = 48^\circ$ . Oblicz odległość wyspy od każdej z tych przystani (z dokładnością do 0,01 km).

**1.12.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , w którym  
a)  $\sphericalangle A = 14^\circ$ ,  $|BC| = 10$  cm.                      b)  $\sphericalangle B = 124^\circ$ ,  $|AC| = 9$  cm.

**1.13.** Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg o środku  $S$ ,  $|AB| = 8$ ,  $\sphericalangle ASC = 140^\circ$  i  $\sphericalangle CSB = 100^\circ$ . Oblicz długości boków  $BC$  oraz  $AC$  (z dokładnością do 0,01).

**1.14.** W trójkącie kąt o mierze  $74^\circ$  przylega do boku długości 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6 cm. Rozwiąż ten trójkąt.

**1.15.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość  $7\sqrt{3}$ , a kąty przyległe do tego boku mają miary  $80^\circ$  i  $40^\circ$ .

**1.16.** Okrąg o promieniu 18 cm jest opisany na trójkącie, którego kąty pozostają w stosunku  $3 : 4 : 5$ . Oblicz długości boków tego trójkąta.

**1.17.** W trapezie równoramiennym przekątna o długości  $3\sqrt{2}$  tworzy z krótszą podstawą kąt  $45^\circ$ , a z ramieniem kąt  $75^\circ$ . Oblicz obwód trapezu oraz długość okręgu na nim opisanego.

D

**1.18.** Wykaż, że  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

**1.19.** Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do  $1^\circ$  i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

**1.23.** Z twierdzenia siunusów:  $\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC}$ .

$$\sin \sphericalangle ABC = \frac{|AC| \sin \sphericalangle BCA}{|AB|} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Czyli  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$  lub  $\sphericalangle ABC = 135^\circ$ .

Stąd  $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 75^\circ$  lub  $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$ .

$$\text{Zatem } \sin \sphericalangle BAC = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ lub } \sin \sphericalangle BAC = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów: } \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC} = \frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

$|BC| = 8 \sin \sphericalangle BAC$ , czyli:

$$|BC| = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ lub } |BC| = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Odp.:  $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  lub  $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

**1.8.** 190 m

**1.9.**  $4(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$  cm i  $8\sqrt{6}$  cm

**1.10.**  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ$ ,  
 $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135^\circ$ ,  
 $|AD| = |BC| = 4,24$  cm,  
 $|AB| = 10,41$  cm,  $|CD| = 4,42$  cm

**1.11.**  $|AW| = 1,22$  km,  
 $|BW| = 1,32$  km

**1.12.** a) ok. 20,7 cm  
b) ok. 5,4 cm

**1.13.**  $|BC| = 7,08$ ,  $|AC| = 8,68$   
lub  $|BC| = 17,92$ ,  $|AC| = 21,98$

**1.14.** 11,54 cm, 9,13 cm,  $50^\circ$ ,  $56^\circ$

**1.15.** 7

**1.16.**  $18\sqrt{2}$  cm,  $18\sqrt{3}$  cm,  
 $9(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  cm

**1.17.**  $obw = 2(3 + 2\sqrt{3})$ ,  
długość okręgu:  $2\pi\sqrt{6}$

**1.18.** Patrz s. 11.

**1.19.**  $25^\circ$ ,  $39^\circ$ ,  $116^\circ$ , 9,0 cm  
lub  $25^\circ$ ,  $141^\circ$ ,  $14^\circ$ , 2,4 cm

1.20. Patrz s. 14.

1.21. Dana jest równość:

$$(1) \frac{|AB|}{\cos \angle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \angle CAB}$$

Z twierdzenia sinusów:

$$(2) \frac{|AB|}{\sin \angle BCA} = \frac{|BC|}{\sin \angle CAB}$$

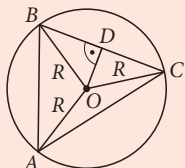
Dzielimy równości (1) i (2) stronami:

$$\frac{\sin \angle BCA}{\cos \angle BCA} = \frac{\sin \angle CAB}{\cos \angle CAB}$$

$$\operatorname{tg} \angle BCA = \operatorname{tg} \angle CAB$$

Zatem  $\angle BCA = \angle CAB$ ,  
czyli trójkąt  $ABC$  jest  
równoramienny.

1.22.



a)  $R = 11$  tys. km,  $\angle BAC = 57^\circ$   
 $|BC| = 2R \sin 57^\circ \approx$   
 $\approx 22\,000 \cdot 0,8387 \approx 18,5$  tys. [km]

b) Satelita  $C$  jest widoczny  
z kamery w satelicie  $B$ ,  
gdy  $|OD| > 6300$  km.

$$\begin{aligned} |OD| &= \sqrt{R^2 - |BD|^2} = \\ &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2} \approx \\ &\approx \sqrt{11\,000^2 - 9250^2} \approx 6000 \text{ [km]} \\ |OD| &< 6300 \text{ km, zatem satelita } C \\ &\text{nie jest widoczny.} \end{aligned}$$

Odp.: a) ok. 18,5 tys. km    b) nie

1.23. Patrz s. 15.

**Prosto do matury**

1. P, F, P

2. 3,7

3.  $33^\circ$ 

$$4. \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

5. Wskazówka: Skorzystaj ze  
wzoru  $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$  oraz  
z twierdzenia sinusów.

D

1.20. Punkt  $M$  jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta  $ABC$ , różnym od jego wierzchołków. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach  $ABM$ ,  $BMC$ ,  $ACM$  i  $ABC$  mają równe promienie.

D

\* 1.21. Wykaż, że jeżeli w trójkącie  $ABC$  zachodzi związek  $\frac{|AB|}{\cos \angle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \angle CAB}$ ,  
to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.

\* 1.22. Po tej samej orbicie okołoziemskiej o promieniu 11 tys. km krążą trzy satelity:  
 $A$ ,  $B$  i  $C$ . Kąt  $BAC$  ma miarę  $57^\circ$ .

a) Wyznacz odległość między satelitami  $B$  i  $C$ .b) Sprawdź, czy satelita  $C$  jest widoczny z kamery umieszczonej w satelicie  $B$ . Przyjmij, że promień Ziemi jest równy 6300 km.

\* 1.23. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 4$ ,  $|AC| = 4\sqrt{2}$ ,  $\angle BCA = 30^\circ$ . Oblicz długość boku  $BC$ .

\* 1.24. W pewnym czworokącie jedna z przekątnych ma długość równą promieniowi okręgu opisanego na tym czworokącie. Iloczyn sinusów wszystkich kątów tego czworokąta jest równy  $\frac{1}{8}$ . Oblicz miary kątów czworokąta.

**Prosto do matury**

1. Niech  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  będą kątami trójkąta  $ABC$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – bokami odpowiednio przeciwległymi oraz  $\alpha = 30^\circ$ . Oceń prawdziwość podanych zdań.

A.  $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$

B.  $\frac{a}{c} = \frac{\sin \gamma}{2}$

C. Długość jednego z boków trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

2. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 4$ ,  $\angle CAB = 50^\circ$ ,  $\angle ABC = 75^\circ$ . Wyznacz długość boku  $BC$  z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

3. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 32$ ,  $|BC| = 26$ ,  $\angle BCA = 42^\circ$ . Wyznacz miarę kąta  $CAB$  z dokładnością do  $1^\circ$ .

4. Przekątna równoległoboku ma długość  $d$  i dzieli jego kąt na dwa kąty o miarach  $\alpha$  oraz  $\beta$ . Wyznacz długości boków tego równoległoboku.

D

5. Wykaż, że pole trójkąta o kątach  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  wpisanego w okrąg o promieniu  $R$  wyraża się wzorem  $P = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ .

1.24. Przyjmujemy, że  $\angle B < \angle D$  i  $\angle C < \angle A$ . $R$  – promień okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ Z twierdzenia sinusów w trójkącie  $ABC$ :

$$\frac{|AC|}{\sin \angle B} = 2R \Leftrightarrow \frac{R}{\sin \angle B} = 2R \Leftrightarrow \sin \angle B = \frac{1}{2}$$

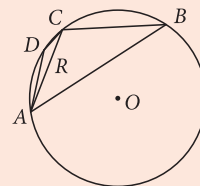
$$\text{Zatem } \angle B = 30^\circ, \angle D = 180^\circ - \angle B = 150^\circ.$$

$$\sin \angle A = \sin(180^\circ - \angle C) = \sin \angle C \text{ oraz } \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C \cdot \sin \angle D = \frac{1}{8}$$

Stąd:

$$\sin^2 \angle C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^2 \angle C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \angle C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Zatem } \angle C = 45^\circ, \angle A = 135^\circ.$$

Odp.:  $30^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ 

## 2. Twierdzenie cosinusów

### Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów

Trójkąt jest jednoznacznie określony, gdy dane są długości jego dwóch boków i kąt między nimi zawarty. Aby wyznaczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

### Twierdzenie

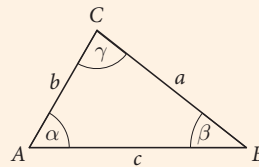
#### Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta o bokach  $a, b, c$  i kątach  $\alpha, \beta, \gamma$  leżących odpowiednio naprzeciw tych boków zachodzą równości:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma$$



### Założenie

Trójkąt  $ABC$  jest dowolny. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w twierdzeniu.

### Teza

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma$$

Twierdzenie cosinusów nazywane jest uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa.

### Dowód

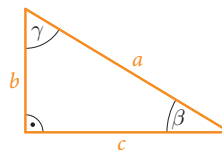
Wyznamy  $a$  w zależności od  $b, c$  oraz kąta  $\alpha$ .

Zauważmy, że gdy  $\alpha$  jest kątem prostym, to teza twierdzenia wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ i } \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

więc:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



### ZZ i MKP

tematy 5.11, 5.12 (klasa 2)

### Multiteka

- Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

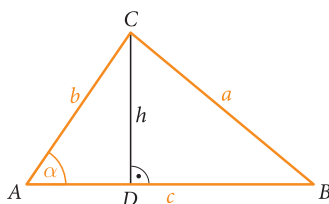
**Generator**  
testów i sprawdzianów

Rozważmy pozostałe dwie sytuacje – gdy  $\alpha$  jest kątem ostrym oraz gdy  $\alpha$  jest kątem rozwartym.

Prowadzimy wysokość  $CD$ .

$$(1) \quad a^2 = |CD|^2 + |DB|^2$$

← w  $\triangle DBC$  na mocy twierdzenia Pitagorasa



Jeżeli  $\alpha < 90^\circ$ , to:

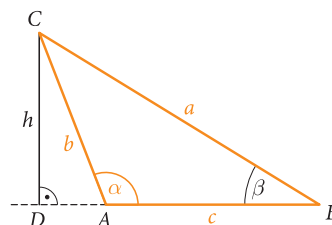
$$\frac{|CD|}{b} = \sin \alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos \alpha$$

więc:

$$|CD| = b \sin \alpha$$

$$|DB| = c - |AD| = c - b \cos \alpha$$



Jeżeli  $\alpha > 90^\circ$ , to:

$$\frac{|CD|}{b} = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

więc:

$$|CD| = b \sin \alpha$$

$$|DB| = c + |AD| = c + b \cos \alpha$$

Niezależnie od rozwartości kąta  $\alpha$  mamy więc:

$$\begin{aligned} |CD|^2 + |DB|^2 &= (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 = \\ &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \\ &= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

Zatem, po podstawieniu do równości (1), mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Wyprowadzenie pozostałych dwóch równości przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

### Wniosek

Jeżeli oznaczymy długości boków trójkąta  $a, b, c$  oraz kąty leżące naprzeciwko nich odpowiednio  $\alpha, \beta, \gamma$ , to prawdziwe są wzory:

$$\bullet \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \bullet \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \bullet \cos \gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$$

**Przykład 1** ◀ zad. 2.5

Dane są długości dwóch boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 4$  oraz  $\sphericalangle ABC = 76^\circ$ . Obliczmy  $|AC|$  z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

**Rozwiązanie**

$$|AC|^2 = 36 + 16 - 48 \cos 76^\circ \approx 40,39 \quad \leftarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$|AC| \approx \sqrt{40,39} \approx 6,36$$

Odp.:  $|AC| \approx 6,36$

**Przykład 2** ◀ zad. 2.8

Wyznamy (z dokładnością do  $1^\circ$ ) kąty trójkąta o bokach długości 7, 8 i 3.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy:  $a = 7$ ,  $b = 8$ ,  $c = 3$ .

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 9 - 49}{48} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 9 - 64}{42} \approx -0,1429$$

$$0,1429 \approx \cos 82^\circ$$

$$-0,1429 \approx -\cos 82^\circ = \cos (180^\circ - 82^\circ) \quad \leftarrow \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\beta \approx 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$\gamma \approx 22^\circ \quad \leftarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Odp.:  $60^\circ, 98^\circ, 22^\circ$

**Przykład 3** ◀ zad. 2.9

Sprawdźmy, czy trójkąt o bokach długości  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} + 2$ ,  $\sqrt{2} + 3$  jest rozwartokątny.

**Rozwiązanie**

Największy kąt trójkąta leży naprzeciwko najdłuższego boku. Najdłuższy bok badanego trójkąta to  $a = \sqrt{2} + 3$ . Niech  $\alpha$  oznacza największy kąt trójkąta. Zbadamy znak cosinusa tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ gdzie } b = \sqrt{2} \text{ i } c = \sqrt{2} + 2$$

Ponieważ  $2bc > 0$ , wystarczy zbadać znak wyrażenia w liczniku ułamka.

$$b^2 + c^2 - a^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 - (\sqrt{2} + 3)^2 = -3 - 2\sqrt{2} < 0$$

Zatem  $\cos \alpha < 0$ , czyli  $\alpha$  jest kątem rozwartym.

Odp.: Badany trójkąt jest rozwartokątny.

◀2.5. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $\sphericalangle C = 54^\circ$ ,  $|BC| = 10$ ,  $|AC| = 8$ . Oblicz długość boku  $AB$  z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Odp.: 8,36

◀2.8. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do  $1^\circ$ .

a) 8, 7, 10

b) 3, 5, 6

c) 24, 11, 18

d)  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ , 3

Odp.: a)  $53^\circ, 44^\circ, 83^\circ$

b)  $30^\circ, 56^\circ, 94^\circ$

c)  $109^\circ, 26^\circ, 45^\circ$

d)  $46^\circ, 59^\circ, 75^\circ$

◀2.9. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

a) 5, 9, 13

b) 8, 15, 17

c)  $3\sqrt{2}$ , 4,  $1 + \sqrt{2}$

d) 7, 8, 9

Odp.: a) rozwartokątny

b) prostokątny

c) ostrokątny

d) ostrokątny

◀ 2.11. Patrz s. 21.

**Przykład 4** ◀ zad. 2.11

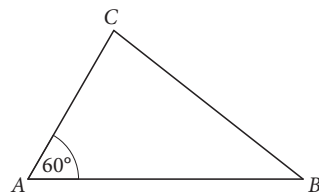
W trójkącie  $ABC$  mamy  $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ . Ponadto zachodzą warunki  $|AB| = 2|AC| - 4$  i  $|BC| = |AC| + 4$ . Wyznaczmy długości boków tego trójkąta.

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy, że  $|AC| = x$ . Wówczas  $|AB| = 2x - 4$  i  $|BC| = x + 4$ . Zauważmy, że aby spełniony był warunek  $|AB| > 0$ , musimy założyć, że  $x > 2$ .

Na mocy twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \sphericalangle BAC \\ (x+4)^2 &= x^2 + (2x-4)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x-4) \cdot \frac{1}{2} \\ x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 2x^2 + 4x \\ 2x^2 - 20x &= 0, \text{ stąd } 2x(x-10) = 0 \end{aligned}$$



Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy  $x = 10$ .

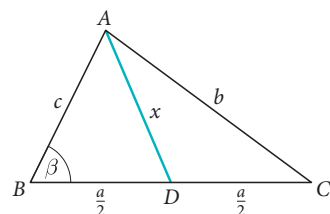
**Odp.:** Boki trójkąta mają długości:  $|AC| = 10$ ,  $|BC| = 14$  i  $|AB| = 16$ .

◀ 2.21. Wyznacz długości środkowych poprowadzonych w trójkącie o bokach długości 10, 12 oraz 9.

**Odp.:**  $\frac{1}{2}\sqrt{407}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{218}$ ,  $\frac{5}{2}\sqrt{14}$

**Przykład 5** ◀ zad. 2.21

W trójkącie  $ABC$  dane są długości boków  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Wyznaczmy długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka  $A$ .

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkt  $D$  jest środkiem boku  $BC$ . Szukamy  $x = |AD|$ .

$$x^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \cos \beta \quad \leftarrow \text{twierdzenie cosinusów w trójkącie ABD}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \leftarrow \text{twierdzenie cosinusów w trójkącie ABC}$$

$$x^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$4x^2 = 4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2$$

$$4x^2 = 2c^2 - a^2 + 2b^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(2c^2 - a^2 + 2b^2), \text{ więc } x = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Zauważmy, że w podobny sposób możemy wyznaczyć długości pozostałych środkowych. Wynoszą one odpowiednio – dla środkowej z wierzchołka  $B$ :  $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ , a z wierzchołka  $C$ :  $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ .

**Odp.:** Środkowa poprowadzona z wierzchołka  $A$  ma długość  $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ .

## Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

**2.1.** Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 4, a kąt między nimi ma miarę  $120^\circ$ . Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

- A.  $\sqrt{21}$       B.  $\sqrt{61}$       C.  $\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$       D.  $\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$

**2.2.** Trójkąt o bokach  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{15}$ ,  $\sqrt{30}$

- A. jest ostrokątny.      C. jest rozwartokątny.  
B. jest prostokątny.      D. nie istnieje.

**2.3.** Wskaż wartość cosinusa kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o podstawie 4 cm i ramionach 5 cm.

- A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{17}{25}$       D.  $\frac{2\sqrt{21}}{5}$

**2.4.** Oblicz cosinusy kątów trójkąta o danych długościach boków.

- a) 5, 14, 15      b) 9, 10, 7      c) 7, 13, 16      d)  $1 + \sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$ , 2

**2.5.** W trójkącie  $ABC$  dane są:  $\sphericalangle C = 54^\circ$ ,  $|BC| = 10$ ,  $|AC| = 8$ . Oblicz długość boku  $AB$  z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

**2.6.** W trójkącie  $ABC$  dane są:  $\sphericalangle A = 120^\circ$ ,  $|AC| = 6$ ,  $|AB| = 12$ . Oblicz długość boku  $BC$  oraz miary kątów trójkąta  $ABC$  z dokładnością do  $1^\circ$ .

**2.7.** Dwa boki trójkąta mają długości 7 i  $3\sqrt{2}$ , a kąt między nimi ma miarę  $45^\circ$ . Oblicz długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów trójkąta z dokładnością do  $1^\circ$ .

**2.8.** Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do  $1^\circ$ .

- a) 8, 7, 10      b) 3, 5, 6      c) 24, 11, 18      d)  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ , 3

**2.9.** Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

- a) 5, 9, 13      b) 8, 15, 17      c)  $3\sqrt{2}$ , 4,  $1 + \sqrt{2}$       d) 7, 8, 9

**2.10.** Oblicz miarę największego kąta w trójkącie, którego boki mają długości  $a = (3 - \sqrt{3})$  cm,  $b = 2\sqrt{3}$  cm,  $c = 3\sqrt{2}$  cm.

**2.11.** W trójkącie  $ABC$  dane są:  $\cos \sphericalangle BAC = \frac{25}{32}$ ,  $|BC| = |AB| - 3$ ,  $|AC| = |AB| - 2$ . Wyznacz długości boków tego trójkąta.

**2.23.**  $ABC$  – trójkąt równoramienny o boku 6 cm,

$$|AM| = |MN| = |NB|$$

$$\triangle AMC \equiv \triangle BNC$$

(cecha bkb:  $|AM| = |BN|$ ,  $\sphericalangle MAC = 60^\circ = \sphericalangle NBC$  i  $|AC| = |BC|$ )

Zatem  $\alpha = \gamma$  i  $|MC| = |NC|$ .

$\sphericalangle AMC > \sphericalangle MAC$ , więc  $|AC| > |MC|$ .

Z twierdzenia sinusów w trójkątach  $AMC$  i  $MNC$ :

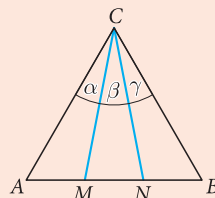
$$\frac{|AM|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle AMC}, \quad \frac{|MN|}{\sin \beta} = \frac{|NC|}{\sin \sphericalangle NMC}$$

Dzielimy powyższe równości stronami (korzystamy z równości  $|AM| = |MN|$

i  $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle NMC$ ):

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{|NC|} = \frac{|AC|}{|MC|} > 1$$

Zatem  $\sin \beta > \sin \alpha$ , czyli  $\beta > \alpha$ .



## Odpowiedzi i rozwiązania

**2.1.** B

**2.2.** C

**2.3.** C

- 2.4. a)**  $\frac{33}{35}$ ,  $\frac{9}{25}$ ,  $-\frac{1}{35}$   
**b)**  $\frac{17}{35}$ ,  $\frac{5}{21}$ ,  $\frac{11}{15}$       **c)**  $\frac{47}{52}$ ,  $\frac{17}{28}$ ,  $-\frac{19}{91}$   
**d)**  $\frac{9\sqrt{2}-4}{16}$ ,  $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$ ,  $\frac{10-3\sqrt{2}}{8}$

**2.5.** 8,36

**2.6.**  $|BC| = 6\sqrt{7}$ ,  $\sphericalangle B = 19^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 41^\circ$

**2.7.** 5,  $37^\circ$ ,  $98^\circ$

**2.8. a)**  $53^\circ$ ,  $44^\circ$ ,  $83^\circ$

**b)**  $30^\circ$ ,  $56^\circ$ ,  $94^\circ$

**c)**  $109^\circ$ ,  $26^\circ$ ,  $45^\circ$

**d)**  $46^\circ$ ,  $59^\circ$ ,  $75^\circ$

**2.9. a)** rozwartokątny

**b)** prostokątny

**c)** ostrokątny

**d)** ostrokątny

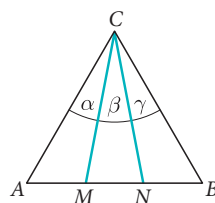
**2.10.**  $120^\circ$

**2.11.**  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 5$ ,  $|AC| = 6$



**2.22.** Środkowe  $AE$  i  $BF$  trójkąta  $ABC$  mają długości odpowiednio 15 oraz 18 i przecinają się pod kątem  $120^\circ$ . Oblicz długość trzeciej środkowej tego trójkąta.

- D 2.23.** W trójkącie równobocznym  $ABC$  o boku długości 6 cm, bok  $AB$  podzielono punktami  $M$  i  $N$  na trzy równe części, jak na rysunku. Wykaż, że  $\beta > \alpha = \gamma$ .



- D \* 2.24.** Udowodnij, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

- D \* 2.25.** Sinusy kątów pewnego trójkąta mają się do siebie jak 2 : 3 : 4. Udowodnij, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

**2.26.** Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu  $R$  mają długości  $R$  i  $\frac{3}{2}R$ . Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta.

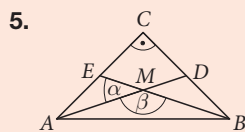
- D \* 2.27.** W trójkącie o kątach  $\alpha, \beta, \gamma$  spełniona jest nierówność  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma < 0$ . Wykaż, że  $\cos \gamma < 0$ .

- \* 2.28.** W trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym bok  $AB$  jest przeciwprostokątną i  $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ , wpisano okrąg styczny do przeciwprostokątnej w punkcie  $D$ . Odcinek  $AD$  ma długość 3. Oblicz  $|CD|$ .

### Prosto do matury



- W trójkącie o bokach  $a, b, c$  kąt  $\alpha$  leżący naprzeciwko boku  $a$  jest rozwarty. Oceń prawdziwość podanych zdań.  
**A.**  $a^2 + b^2 > c^2$       **B.**  $b^2 + c^2 > a^2$       **C.**  $c^2 + a^2 > b^2$
- W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 5$ ,  $|BC| = 2$ ,  $|AC| = 4$ . Wyznacz z dokładnością do  $1^\circ$  miary kątów tego trójkąta.
- Stosunek boków trójkąta wynosi 3 : 5 : 6. Wyznacz cosinus największego kąta w tym trójkącie.
- Punkty  $K$  i  $L$  dzielą przekątną  $AC$  kwadratu  $ABCD$  o boku  $a$  na trzy równe części. Oblicz długość boku rombu  $BLDK$ .
- D** Wykaż, że w równoramiennym trójkącie prostokątnym tangens kąta ostrego między środkowymi poprowadzonymi z wierzchołków kątów ostrych jest równy 0,75.



$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

$$\text{Oznaczamy: } |AE| = |EC| = |CD| = |DB| = a, \quad a > 0.$$

$$|AD| = |BE| = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

Punkt  $M$  dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka,

$$\text{zatem } |EM| = \frac{1}{3}a\sqrt{5}, \quad |AM| = \frac{2}{3}a\sqrt{5}.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie  $AEM$ :  $|AE|^2 = |EM|^2 + |AM|^2 - 2|EM| \cdot |AM| \cdot \cos \alpha$

$$a^2 = \frac{5}{9}a^2 + \frac{20}{9}a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \cos \alpha \quad | : a^2$$

$$1 = \frac{25}{9} - \frac{20}{9} \cos \alpha, \quad \text{stąd } \frac{20}{9} \cos \alpha = \frac{16}{9}, \quad \text{zatem } \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}).$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

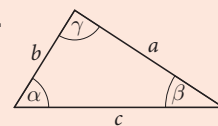
Zatem  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ .

**2.22.**  $3\sqrt{31}$

**2.23.** Patrz s. 21.

**2.24.** Patrz s. 22.

**2.25.**



$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 2 : 3 : 4$$

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \quad \text{stąd } \frac{a}{c} = \frac{1}{2}, \quad \text{czyli } a = \frac{c}{2}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}, \quad \text{stąd } \frac{b}{c} = \frac{3}{4}, \quad \text{czyli } b = \frac{3}{4}c$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{c^2}{4} + \frac{9}{16}c^2 - c^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{3}{4}c} = \frac{\frac{13}{16}c^2 - c^2}{\frac{3}{4}c^2} = \\ &= \frac{-\frac{5}{16}c^2}{\frac{3}{4}c^2} = -\frac{5}{12} < 0 \end{aligned}$$

Stąd  $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$ .

Zatem trójkąt jest rozwartokątny.

$$\mathbf{2.26.} \quad \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{4}R \quad \text{lub} \quad \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}R$$

**2.27.** Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w rozwiązaniu zadania 2.25.

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Zatem  $\cos \gamma < 0$  wtedy i tylko

wtedy, gdy  $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ ,

czyli  $a^2 + b^2 < c^2$ .

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$$

$$\left( \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^2 + \left( \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^2 < 1$$

$$\left( \frac{a}{c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c} \right)^2 < 1$$

$$a^2 + b^2 < c^2$$

Zatem  $\cos \gamma < 0$ .

**2.28.** Patrz s. 22.

### Prosto do matury

**1.** P, F, P

**2.**  $\sphericalangle A = 23^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 49^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 108^\circ$

$$\mathbf{3.} \quad -\frac{1}{15}$$

$$\mathbf{4.} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}a$$

### 3. Związki miarowe w wielokątach

#### Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w wielokątach z użyciem trygonometrii

Udowodnimy następujące twierdzenie.

#### Twierdzenie

##### Twierdzenie o dwusiecznej

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwny bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

#### Założenie

$CD$  jest dwusieczną kąta  $ACB$ .

#### Teza

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

#### Dowód

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AD|}{|DB|}$$

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AC| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha}{|CB| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

$$\text{Zatem } \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

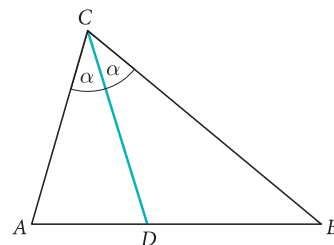
#### Koniec dowodu

Zachodzi też twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego, czyli przyległego do kąta wewnętrznego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wtedy twierdzenie to przyjmuje następującą postać:

Jeżeli prosta zawierająca dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku  $C$  trójkąta

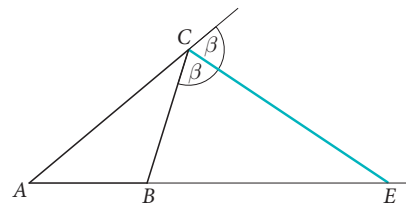
$ABC$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $E$ , to  $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$ .

Dowód tego twierdzenia pominiemy.



← trójkąty  $ADC$  i  $DBC$  mają wspólną wysokość

← pole trójkąta jest równe  $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$



#### ZZ i MKP

tematy 6.7 (klasa 1), 4.7 (klasa 2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

**Generator**  
testów i sprawdzianów

**Przykład 1** ◀ zad. 3.5

Boki trójkąta mają długości  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 5$ ,  $|AC| = 4$ . Obliczmy długości odcinków, na które dwusieczna  $AD$  dzieli bok  $BC$ .

**Rozwiązanie**

Oznaczmy  $|BD| = x$ ,  $|DC| = y$ .

$$\frac{x}{y} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$x + y = 5$$

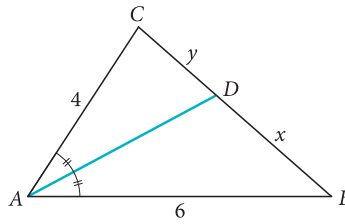
← na mocy twierdzenia o dwusiecznej

← z warunków zadania

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{4} \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Odp.:  $|BD| = 3$ ,  $|DC| = 2$



◀ **3.5.** Boki trójkąta mają długości  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 7$ ,  $|AC| = 12$ . Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.

Odp.:  $AB: 2\frac{18}{19}$  i  $5\frac{1}{19}$ ,  
 $BC: 2,8$  i  $4,2$ ,  
 $AC: 6,4$  i  $5,6$

**Przykład 2** ◀ zad. 3.7

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy 40, a dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $C$  dzieli bok  $AB$  na odcinki o długościach  $|AD| = 6$  i  $|DB| = 10$ . Obliczmy długości boków trójkąta  $ABC$ .

**Rozwiązanie**

$$|AB| = |AD| + |DB| = 16$$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \leftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

Zatem:

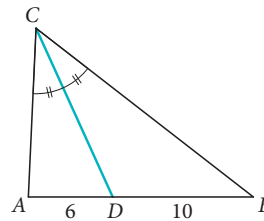
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{6}{10}, \text{ stąd } |AC| = \frac{3}{5}|CB|$$

$$16 + |CB| + \frac{3}{5}|CB| = 40 \quad \leftarrow \text{obwód trójkąta } ABC \text{ jest równy } 40$$

$$\frac{8}{5}|CB| = 24$$

$$|CB| = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15, \quad |AC| = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$$

Odp.:  $|AB| = 16$ ,  $|AC| = 9$ ,  $|CB| = 15$



◀ **3.7.** W trójkącie  $ABC$  dana jest suma długości boków:  $|AB| + |AC| = 33$ . Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $A$  dzieli bok  $BC$  na odcinki o długościach  $|BD| = 12$  i  $|DC| = 10$ . Oblicz długości boków  $AB$  i  $AC$ .

Odp.:  $|AB| = 18$ ,  $|AC| = 15$

Wyprowadzimy teraz wzory łączące długości boków trójkąta i jego pole z promieniami okręgów: wpisanego w ten trójkąt i opisanego na nim.

**Twierdzenie**

Pole  $P$  trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu trójkąta i promienia  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt:

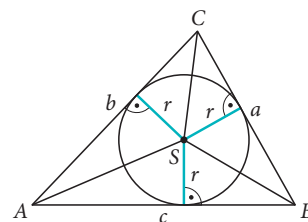
$$P = pr$$

gdzie  $2p$  oznacza obwód trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

**Założenia**

$a, b, c$  są długościami boków trójkąta,  
 $2p$  oznacza obwód trójkąta,  
 $r$  jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**Teza**

Pole  $P$  trójkąta jest równe  $P = pr$ .

**Dowód**

Wyznamy pole tego trójkąta.

$$P = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BCS} + P_{\triangle CAS}$$

$$P = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \quad \leftarrow r \text{ jest wysokością każdego z trójkątów: } ABS, BCS, CAS$$

$$P = \frac{1}{2}r(c + a + b)$$

$$P = pr$$

Koniec dowodu

**Twierdzenie**

Pole  $P$  trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  jest równe:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie  $R$  oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

**Założenia**

$a, b, c$  są długościami boków trójkąta,  
 $R$  jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

**Teza**

Pole  $P$  trójkąta jest równe  $P = \frac{abc}{4R}$ .

**Dowód**

Niech  $\alpha$  oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości  $a$ . Mamy:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

← z twierdzenia sinusów  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

**Koniec dowodu**

Podamy jeszcze wzór (jego wyprowadzenie pominie), za pomocą którego można obliczyć pole trójkąta, gdy dane są tylko długości jego boków.

**Twierdzenie****Wzór Herona**

Pole  $P$  trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  jest równe:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie  $2p$  oznacza obwód trójkąta.

Zauważmy, że w podanym wzorze niezależnie od rodzaju trójkąta wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie. Liczby  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta, więc spełniają nierówność trójkąta:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a,$$

a stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$p - c > 0, \quad p - b > 0, \quad p - a > 0.$$

**Przykład 3** ◀ zad. 3.10, 3.11

Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 5 i 7. Obliczymy promień  $R$  okręgu opisanego na tym trójkącie i promień  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**Rozwiązanie**

Niech  $p$  oznacza połowę obwodu, a  $P$  – pole tego trójkąta. Wówczas:

$$p = 9, \quad P = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \quad r = \frac{P}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Odp.: } R = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \quad r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

◀ **3.10.** Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$\text{Odp.: } 3\frac{1}{4}$$

◀ **3.11.** Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień  $R$  okręgu opisanego na tym trójkącie i promień  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$\text{Odp.: } R = \frac{8}{7}\sqrt{7} \text{ cm}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$$

◀3.15. Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę  $60^\circ$ . Oblicz promień  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odp.:  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

◀3.23. Czworokąt  $ABCD$  jest opisany na okręgu oraz  $|AB| = 6$ ,  $|AD| = 4$ ,  $\cos \sphericalangle BAD = \frac{2}{3}$  i  $\cos \sphericalangle BCD = -\frac{1}{3}$ . Oblicz długości boków  $BC$  i  $CD$  tego czworokąta.

Odp.:  $|BC| = \sqrt{7} + 1$ ,  
 $|CD| = \sqrt{7} - 1$

#### D Przykład 4 ◀ zad. 3.15

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych  $a$  i  $b$  poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Wykażemy, że zawarty w trójkącie odcinek tej dwusiecznej ma długość  $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$ .

##### Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

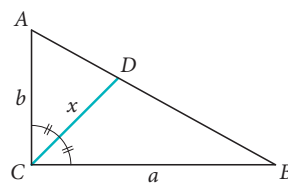
$$P_{BDC} = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{ax\sqrt{2}}{4}, \quad P_{ADC} = \frac{1}{2}b \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

Pole trójkąta  $ABC$  jest sumą pól trójkątów  $BDC$  i  $ADC$ . Zatem:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ax\sqrt{2}}{4} + \frac{bx\sqrt{2}}{4}, \quad \text{czyli } 2ab = x\sqrt{2}(a+b)$$

$$x\sqrt{2} = \frac{2ab}{a+b}, \quad \text{stąd } x = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$$

##### Koniec dowodu



#### Przykład 5 ◀ zad. 3.23

Czworokąt  $ABCD$  jest opisany na okręgu oraz  $|AB| = 5$ ,  $|AD| = 8$ ,  $\sphericalangle BAD = 60^\circ$  i  $\sphericalangle BCD = 120^\circ$ . Obliczmy długości boków  $BC$  i  $CD$  tego czworokąta.

##### Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Czworokąt  $ABCD$  jest opisany na okręgu, więc:

$$|CD| + 5 = x + 8, \quad \text{czyli } |CD| = x + 3$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkątów  $ABD$  i  $CBD$ .

$$d^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \quad \leftarrow \text{w } \triangle ABD$$

$$d^2 = x^2 + (x+3)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+3) \cdot \cos 120^\circ \quad \leftarrow \text{w } \triangle CBD$$

Zatem:

$$25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = x^2 + x^2 + 6x + 9 - 2x(x+3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

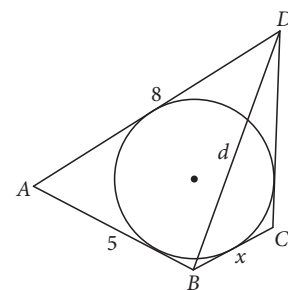
$$3x^2 + 9x - 40 = 0$$

$$\Delta = 561, \quad x_1 = \frac{-9 - \sqrt{561}}{6}, \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{561}}{6}$$

Tylko druga z otrzymanych liczb jest dodatnia, czyli:

$$|BC| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6}, \quad |CD| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6} + 3 = \frac{\sqrt{561} + 9}{6}$$

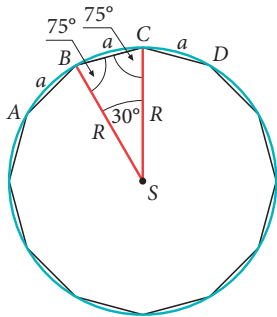
Odp.:  $|BC| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6}$ ,  $|CD| = \frac{\sqrt{561} + 9}{6}$



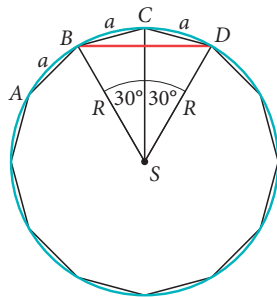
**Przykład 6** ◀ zad. 3.27

Dany jest dwunastokąt foremny o boku  $a$ . Obliczmy

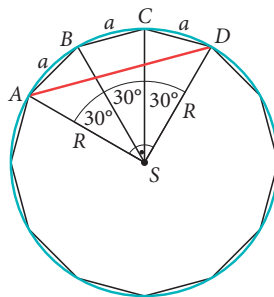
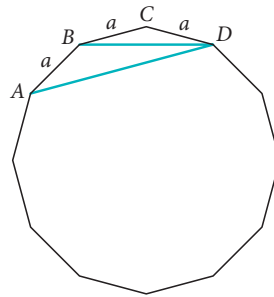
- promień okręgu opisanego na tym dwunastokącie.
- długość przekątnej  $BD$ .
- długość przekątnej  $AD$ .

**Rozwiązanie**

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

- a) Zauważmy, że środek  $S$  okręgu opisanego na dwunastokącie leży na symetralnej boku  $BC$  tego wielokąta. Niech  $R$  będzie promieniem tego okręgu (rys. 1). Dwunastokąt ma wszystkie boki tej samej długości, zatem kąt  $BSC$  ma miarę  $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ . Trójkąt  $BCS$  jest równoramienny o kącie przy podstawie  $75^\circ$ , więc:

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \cos 75^\circ$$

$$R = \frac{a}{2 \cos 75^\circ}$$

$$\leftarrow \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$R = \frac{2a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$$

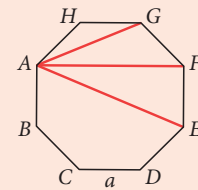
Odp.:  $R = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$

- b) Trójkąty  $BCS$  i  $CDS$  są przystające, więc trójkąt  $BSD$  jest równoboczny (rys. 2) i  $|BD| = R$ , czyli:

$$|BD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$$

Odp.:  $|BD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$

◀ **3.27.** Bok ośmiokąta foremnego  $ABCDEFGH$  ma długość  $a$  (zob. rysunek).



Wyznacz długość

- przekątnej  $AG$ .
- przekątnej  $AF$ .
- przekątnej  $AE$ .

Odp.: a)  $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b)  $a(1 + \sqrt{2})$

c)  $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

## Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. B

3.2. A

3.3. C

3.4.  $5\frac{5}{7}$ ,  $4\frac{2}{7}$ 3.5.  $AB: 2\frac{18}{19}$  i  $5\frac{1}{19}$ ,  
 $BC: 2,8$  i  $4,2$ ,  
 $AC: 6,4$  i  $5,6$ 

3.6. 4 cm

3.7.  $|AB| = 18$ ,  $|AC| = 15$ 3.8.  $\frac{2\sqrt{7}}{3}a$ c) Trójkąt  $ASD$  jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, czyli jest połową kwadratu (rys. 3). Zatem:

$$|AD| = R\sqrt{2}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{3})$$

Odp.:  $|AD| = a(1 + \sqrt{3})$ 

## Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm.

A. 3 cm      B. 2 cm      C. 4 cm      D. 1 cm

3.2. Ile wynosi pole trójkąta o bokach 4, 5, 7?

A.  $4\sqrt{6}$       B.  $6\sqrt{6}$       C. 4      D.  $3\sqrt{6}$ 3.3. W trójkącie  $ABC$  o boku  $|AC| = 18$  dwusieczna  $CD$  dzieli bok  $AB$  w stosunku  $|BD| : |DA| = 1 : 6$ . Wskaż długość boku  $CB$ .A. 1      B.  $\frac{2}{3}$       C. 3      D. 5

3.4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną.

3.5. Boki trójkąta mają długości  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 7$ ,  $|AC| = 12$ . Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.3.6. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 6 cm, a ramiona po 12 cm. Dwusieczne kątów przy podstawie przecinają ramiona w punktach  $M$  i  $N$ . Oblicz długość odcinka  $MN$ .3.7. W trójkącie  $ABC$  dana jest suma długości boków:  $|AB| + |AC| = 33$ . Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $A$  dzieli bok  $BC$  na odcinki o długościach  $|BD| = 12$  i  $|DC| = 10$ . Oblicz długości boków  $AB$  i  $AC$ .3.8. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AC| = 2a$ ,  $|BC| = a$  i  $\angle ACB = 120^\circ$ . Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Wyznacz długość odcinka  $AD$ .3.22. Są dwa przypadki: trójkąt  $ABC$  może być ostrokątny lub rozwartokątny. $P$  – pole rombu  $ABCD$ ,  $a$  – długość boku rombu

$$P = a^2 \sin \alpha$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos \angle ABC = 2a^2(1 - \cos \angle ABC)$$

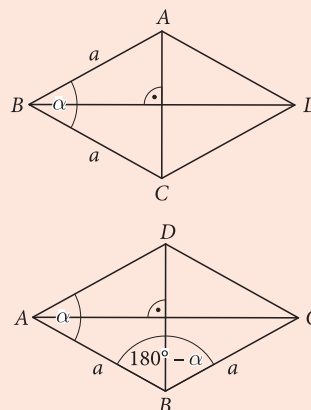
$$\cos \angle ABC = \cos \alpha \text{ lub } \cos \angle ABC = -\cos \alpha$$

$$\text{Zatem } |AC| = a\sqrt{2 - 2\cos \alpha} \text{ lub } |AC| = a\sqrt{2 + 2\cos \alpha}.$$

$$r = \frac{P_{ABC}}{0,5(|AB| + |BC| + |AC|)} = \frac{0,5P}{0,5(2a + |AC|)} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2a + |AC|} = \frac{a \sin \alpha}{2 + \frac{|AC|}{a}}$$

$$\text{Stąd } a = \frac{\left(2 + \frac{|AC|}{a}\right)r}{\sin \alpha}, \text{ czyli } P = \left[\frac{\left(2 + \frac{|AC|}{a}\right)r}{\sin \alpha}\right]^2 \cdot \sin \alpha = \frac{\left(2 + \frac{|AC|}{a}\right)^2}{\sin \alpha} r^2.$$

$$\text{Odp.: } P = \frac{(2 + \sqrt{2 - 2\cos \alpha})^2}{\sin \alpha} r^2 \text{ lub } P = \frac{(2 + \sqrt{2 + 2\cos \alpha})^2}{\sin \alpha} r^2$$



**3.9.** Oblicz pole trójkąta o bokach podanej długości.

- a) 4, 6, 8      b) 8, 11, 13      c) 6, 10, 11      d) 4, 6, 7

**3.10.** Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**3.11.** Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień  $R$  okręgu opisanego na tym trójkącie i promień  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**3.12.** Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę  $32^\circ$ . Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**3.13.** Na boku  $BC$  równobocznego trójkąta  $ABC$  wybrano taki punkt  $D$ , że stosunek pola trójkąta  $ADB$  do pola trójkąta  $ADC$  wynosi  $1 : 2$ . Wyznacz tangens kąta  $DAB$ .

**3.14.** Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu  $\sqrt{3}$  jest równa  $120^\circ$ . Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

**3.15.** Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę  $60^\circ$ . Oblicz promień  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**3.16.** Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 5 cm. Jego pole jest równe  $8 \text{ cm}^2$ . Oblicz długość  $x$  trzeciego boku trójkąta oraz promień  $r$  okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**3.17.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku  $2 : 3$ . Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

**3.18.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym:  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 4$  i  $\sphericalangle ABC = 56^\circ$ . Oblicz długość dwusiecznej  $BD$  w tym trójkącie. Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

**3.19.** W trójkącie  $ABC$  dane są długości boków:  $|AB| = 4 \text{ cm}$ ,  $|BC| = \sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $|AC| = 3 \text{ cm}$ . Oblicz pole trójkąta  $ABC$  oraz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**3.20.** W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy mniejszy od drugiego. Długość okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi  $2\pi \text{ cm}$ . Oblicz pole koła opisanego na trójkącie.

**3.26.**  $\text{tg} \sphericalangle CAB = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{3}{4}$

$r$  – promień okręgu wpisanego w romb  $ABCD$   
Przyjmujemy:  $|OB| = 3x$ ,  $|OA| = 4x$ .

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 6x = 24x^2$$

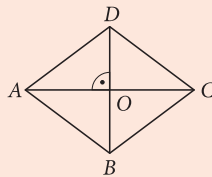
$$|AB| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$$

$|AB| \cdot 2r = P_{ABCD}$ , więc:

$$r = \frac{P_{ABCD}}{2|AB|} = \frac{24x^2}{2 \cdot 5x} = \frac{12}{5}x$$

$$\text{Szukany stosunek: } \frac{P_{ABCD}}{\pi r^2} = \frac{24x^2}{\pi \left(\frac{12}{5}x\right)^2} = \frac{25 \cdot 24}{144\pi} = \frac{25}{6\pi}$$

**Odp.:**  $\frac{25}{6\pi}$



**3.9.** a)  $3\sqrt{15}$     b)  $8\sqrt{30}$     c)  $\frac{45}{4}\sqrt{7}$   
d)  $\frac{3}{4}\sqrt{255}$

**3.10.**  $3\frac{1}{4}$

**3.11.**  $R = \frac{8}{7}\sqrt{7} \text{ cm}$ ,  $r = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$

**3.12.** 2,50

**3.13.**  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

**3.14.**  $3\pi(7 - 4\sqrt{3})$

**3.15.**  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

**3.16.**  $x = \sqrt{17} \text{ cm}$ ,  
 $r = \frac{9 - \sqrt{17}}{4} \text{ cm}$  lub  $x = \sqrt{65} \text{ cm}$ ,  
 $r = (9 - \sqrt{65}) \text{ cm}$

**3.17.**  $\frac{9(3 + \sqrt{5})}{8}$

**3.18.** 4,71

**3.19.**  $P = \frac{\sqrt{23}}{2} \text{ cm}^2$ ,  $\frac{6(7\sqrt{3} + 3)}{23}$

**3.20.**  $2\pi(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

$$3.21. a) r = \frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ cm},$$

$$R = \frac{16\sqrt{15}}{15} \text{ cm} \quad b) \frac{2}{5}$$

3.22. Patrz s. 30.

$$3.23. |BC| = \sqrt{7} + 1, \\ |CD| = \sqrt{7} - 1$$

$$3.24. 3\frac{1}{2}$$

$$3.25. \cos \angle CBD = \frac{11\sqrt{14}}{42}$$

3.26. Patrz s. 31.

$$3.27. a) a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$b) a(1 + \sqrt{2}) \quad c) a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

3.28. Każdy kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę  $108^\circ$  ( $\frac{3}{5} \cdot 180^\circ$ ).

$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$  (bkb)

$$\text{Stąd } \angle BAC = \angle BCA = \angle CBD = \\ = \angle CDB = 36^\circ \quad \left( \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \right).$$

Zatem w czworokącie  $APDE$ :

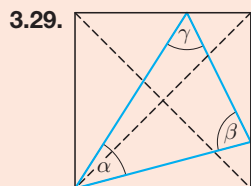
$$\angle EAP = \angle EDP = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

Czworokąt  $APDE$  jest więc deltoidem, ale:

$$\angle APD = 360^\circ - 108^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 108^\circ$$

$$\text{Stąd } \angle APD = \angle AED = 108^\circ.$$

Czworokąt  $APDE$  jest deltoidem, którego przeciwległe kąty mają równe miary, zatem jest rombem.



Każdy bok trójkąta ma długość nie większą niż długość przekątnej kwadratu, czyli  $\sqrt{2}$ .

$$P_\triangle = \frac{1}{2}ab \sin \gamma =$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

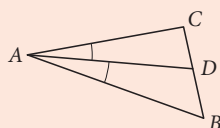
$$\frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1,$$

$$\frac{1}{2}bc \leq 1, \frac{1}{2}ac \leq 1$$

$$\text{Zatem } P_\triangle \leq \sin \alpha,$$

$$P_\triangle \leq \sin \beta, P_\triangle \leq \sin \gamma.$$

3.31.



$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = \angle DAC + \angle ACD = \angle DAB + \angle ACD > \angle DAB$   
 $\angle ADB > \angle DAB$ , zatem  
 $|AB| > |BD|$  (naprzeciwko większego kąta leży większy bok).

3.21. Boki trójkąta  $ABC$  mają długości:  $|AB| = 4 \text{ cm}$ ,  $|AC| = |BC| = 8 \text{ cm}$ .

a) Oblicz promień  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  i promień  $R$  okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku  $AC$  rozcina trójkąt  $ABC$ .

\* 3.22. W rombie  $ABCD$  dana jest miara  $\alpha$  kąta ostrego i promień  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Oblicz pole rombu.

3.23. Czworokąt  $ABCD$  jest opisany na okręgu oraz  $|AB| = 6$ ,  $|AD| = 4$ ,  $\cos \angle BAD = \frac{2}{3}$  i  $\cos \angle BCD = -\frac{1}{3}$ . Oblicz długości boków  $BC$  i  $CD$  tego czworokąta.

3.24. Długości boków czworokąta  $ABCD$  wpisanego w okrąg są równe:  $|AB| = 3$ ,  $|BC| = |CD| = 2$ ,  $|DA| = 4$ . Oblicz długość przekątnej  $BD$  tego czworokąta.

3.25. W trapez równoramienny  $ABCD$ , w którym  $|AB| > |DC|$ , wpisano okrąg o promieniu  $r$ . Punkt styczności  $P$  dzieli ramię  $AD$  na odcinki  $AP$  i  $PD$  w stosunku  $5 : 1$ . Oblicz cosinus kąta  $CBD$ .

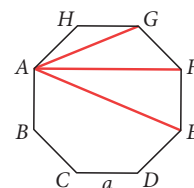
\* 3.26. Tangens kąta zawartego między dłuższą przekątną rombu a jego bokiem jest równy  $\frac{3}{4}$ . Oblicz stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb.

3.27. Bok ośmiokąta foremnego  $ABCDEFGH$  ma długość  $a$  (zob. rysunek). Wyznacz długość

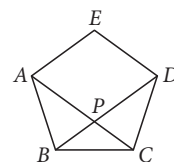
a) przekątnej  $AG$ .

b) przekątnej  $AF$ .

c) przekątnej  $AE$ .



3.28. W pięciokącie foremnym  $ABCDE$  punkt  $P$  jest punktem przecięcia przekątnych  $AC$  i  $BD$ , jak na rysunku. Udowodnij, że czworokąt  $APDE$  jest rombem.



D \* 3.29. W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

\* 3.30. W trójkącie  $ABC$  kąt  $ACB$  ma miarę dwa razy większą niż kąt  $CAB$ . Dane są długości dwóch boków tego trójkąta:  $|BC| = 9$  i  $|AC| = 7$ . Oblicz długość boku  $AB$ .

3.30.  $CD$  – dwusieczna kąta  $ACB$

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$

(cecha kk:  $\angle BAC = \alpha = \angle BCD$  i  $\angle ABC = \angle CBD$ )

$$\text{Zatem } \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BD|} \quad (*)$$

Z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie  $ABC$ :

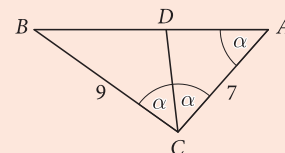
$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Leftrightarrow |BD| = \frac{9}{7}|AD| \Leftrightarrow |BD| = \frac{9}{7}(|AB| - |BD|) \Leftrightarrow |BD| = \frac{9}{16}|AB|$$

Podstawiamy wyznaczone  $|BD|$  do równości (\*).

$$|AB| \cdot \frac{9}{16}|AB| = |BC|^2$$

$$|AB|^2 = \frac{16}{9} \cdot 9^2 = 144$$

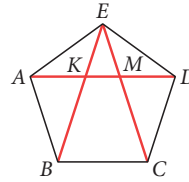
Odp.:  $|AB| = 12$



**3.31.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono dwusieczną  $AD$ . Wykaż, że  $|BD| < |AB|$ .

**3.32.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  wysokość  $CD$  dzieli przeciwprostokątną  $AB$  na odcinki o długościach 4 cm i 16 cm. Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty  $ADC$  i  $CDB$  oraz odległość między środkami tych okręgów.

**3.33.** W pięciokącie foremnym  $ABCDE$  o boku 1 przekątne  $EB$  i  $EC$  przecinają przekątną  $AD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $M$ , jak na rysunku. Wykaż, że  $|KM| = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .



**3.34.** Dwa boki trójkąta o polu  $P$  mają długości  $a$  i  $b$ . Wyznacz promień  $R$  okręgu opisanego na tym trójkącie.

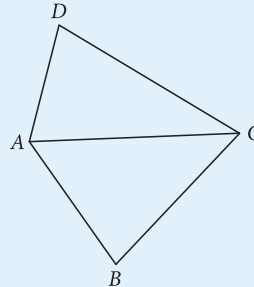
### Prosto do matury



1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy mniejszy od drugiego kąta ostrego.
- Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy krótszy od drugiego.
- Stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi  $1 + \sqrt{3}$ .

2. W czworokącie  $ABCD$  przedstawionym na rysunku obok dane są:  $|AB| = 5$ ,  $|BC| = 6$ ,  $|CD| = 7$ ,  $|DA| = 4$ ,  $|AC| = 7$ . Oblicz pole tego czworokąta.

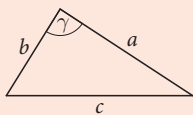


3. Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ ,  $|AB| = 1 + \sqrt{3}$  i  $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ . Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię tego trójkąta.

4. Boki prostokąta  $ABCD$  mają długości  $|AB| = 20$ ,  $|BC| = 25$ . Oblicz odległość między środkami okręgów wpisanych w trójkąty  $ABC$  i  $CDA$ .

5. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono dwie proste, które podzieliły ten kąt na trzy równe kąty. Wyznacz długości odcinków, na które te proste dzielą przeciwprostokątną o długości  $c$ .

**3.34.**



$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \text{ stąd } \sin \gamma = \frac{2P}{ab}.$$

Z jedynki trygonometrycznej:

$$\cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \gamma = 1 - \frac{4P^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2 - 4P^2}{a^2b^2}$$

$$\text{Stąd } \cos \gamma = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}{ab} \text{ lub } \cos \gamma = \frac{-\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}{ab}.$$

Z twierdzenia cosinusów:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

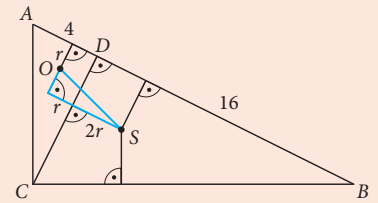
$$\text{Zatem } c^2 = a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2} \text{ lub } c^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}.$$

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{abc}{4R}$  i obliczamy  $R$ .

$$R = \frac{abc}{4P}, \text{ czyli } R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P} \text{ lub } R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P}.$$

**3.31.** Patrz s. 32.

**3.32.**



$$|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} = 8 \text{ [cm]}$$

$$|AC| = \sqrt{|CD|^2 + |AD|^2} = 4\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$$|BC| = \sqrt{|CD|^2 + |DB|^2} = 8\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ADC$

$O, S$  – środki okręgów wpisanych w trójkąty  $ADC$  i  $CDB$

$$r = \frac{P}{p} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 8}{0,5(4 + 8 + 4\sqrt{5})} =$$

$$= 2(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$$

$\triangle CDB \sim \triangle ADC$  w skali  $k = 2$ , więc promień okręgu wpisanego w trójkąt  $CDB$  jest równy

$$2r = 4(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}.$$

$$|OS| = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10} =$$

$$= 2\sqrt{10}(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$$

$$\text{Odp.: } 2(3 - \sqrt{5}) \text{ cm,}$$

$$4(3 - \sqrt{5}) \text{ cm, } 2\sqrt{10}(3 - \sqrt{5}) \text{ cm}$$

**3.33.** Kąt wewnętrzny pięciokąta ma miarę  $108^\circ$ .

$$\sphericalangle AEB = 0,5(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$

$$\sphericalangle KEM = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

Zatem  $EK$  jest dwusieczną kąta  $AEM$ .

$$\sphericalangle AEM = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$$

$$\sphericalangle AME = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$$

$$\text{Stąd } |AM| = |AE| = 1.$$

$$\text{Niech } |KM| = x, x \in (0; 1).$$

$$\text{Wtedy } |AK| = 1 - x \text{ oraz } |EM| = |AK| = 1 - x.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie  $AEM$ :

$$\frac{|AK|}{|KM|} = \frac{|AE|}{|EM|} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \notin (0; 1)$$

$$\text{Zatem } |KM| = x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

### Prosto do matury

1. P, F, P

$$2. 6(\sqrt{5} + \sqrt{6})$$

$$3. 1, \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4. 5\sqrt{123 - 18\sqrt{41}}$$

$$5. \frac{\sqrt{3}-1}{2}c, (2-\sqrt{3})c, \frac{\sqrt{3}-1}{2}c$$

## 4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

### Umiejętności:

- wykorzystywanie definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach
- stosowanie wzorów redukcyjnych

Rozszerzymy definicje funkcji trygonometrycznych tak, aby dotyczyły nie tylko kątów wypukłych.

Do tej pory definiowaliśmy kąt jako część płaszczyzny wyznaczoną przez dwie półproste o wspólnym początku. Zgodnie z taką definicją miara dowolnego kąta  $\alpha$  spełnia nierówność  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ . W niektórych zastosowaniach matematyki potrzebne są jednak kąty o miarach większych od  $360^\circ$  oraz kąty o ujemnych miarach. Jest tak na przykład w sytuacji, w której kąt rozumiemy jako **miarę obrotu**. Jeżeli na przykład wykonamy dwa pełne obroty klucza w zamku, to powiemy, że obróciliśmy go o  $720^\circ$ . W tej sytuacji trzeba jeszcze ustalić, w którą stronę wykonujemy obrót, bo przekręcenie klucza o  $720^\circ$  w jedną stronę przyniesie zupełnie inny efekt niż przekręcenie go w drugą stronę. Umieszczenie kąta w układzie współrzędnych pozwala to jednoznacznie określić:

- kąty odkładane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara mają miarę dodatnią,
- kąty odkładane zgodnie z ruchem wskazówek zegara mają miarę ujemną.

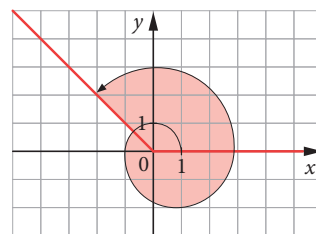
### Przykład 1

Narysujemy w układzie współrzędnych dane kąty.

a)  $\alpha = 495^\circ$

$$495^\circ = 360^\circ + 135^\circ$$

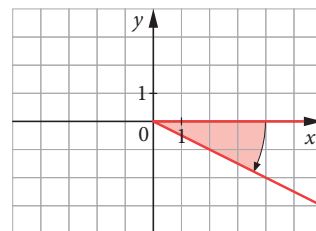
Mówiąc obrazowo, końcowe ramię kąta zatoczyło pełny obrót, a następnie pokryło się z końcowym ramieniem kąta  $135^\circ$ .



b)  $\beta = -30^\circ$

Kąt ujemny odkładamy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Końcowe ramię kąta  $-30^\circ$  pokrywa się z końcowym ramieniem kąta  $330^\circ$ . Jednak te kąty nie są równe. Obrót o  $30^\circ$  w jedną stronę oznacza co innego niż obrót o  $330^\circ$  w drugą stronę.



#### ZZ i MKP

tematy 1.1, 1.2, 1.13

#### Multiteka

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)
- Wzory redukcyjne

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Mówimy, że kąt  $\alpha$  **należy do I (II, III, IV) ćwiartki układu współrzędnych**, jeżeli jego ramię wodzące zawiera się w I (odpowiednio II, III, IV) ćwiartce układu. Ramiona kątów o miarach będących wielokrotnościami  $90^\circ$  (czyli np.  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ ) pokrywają się z półosiami układu, zatem kąty te nie należą do żadnej z ćwiartek układu.

Zauważmy, że po wykonaniu każdego pełnego obrotu o  $360^\circ$  lub o  $-360^\circ$  ramię końcowe kąta  $\alpha$  wróci do położenia, w którym było poprzednio.

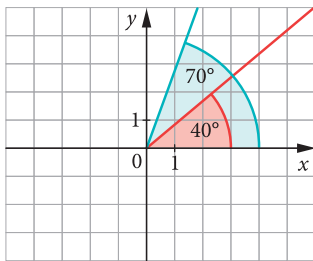
### Wniosek

Dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  ramiona końcowe kątów  $\alpha$  i  $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$  pokrywają się.

### Przykład 2

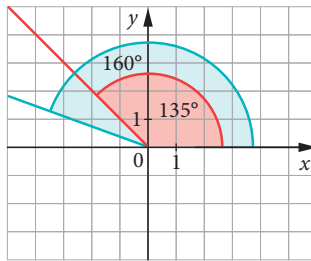
Napiszemy, jaki warunek spełniają kąty  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$  należące do kolejnych ćwiartek układu współrzędnych i zaznaczymy po dwa przykładowe kąty.

I ćwiartka układu



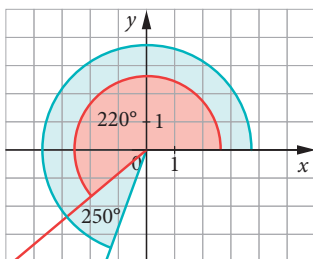
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

II ćwiartka układu



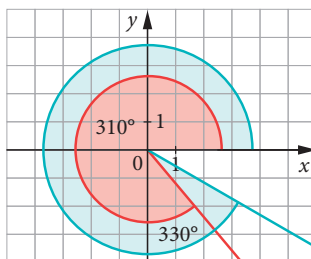
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

III ćwiartka układu



$$180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

IV ćwiartka układu



$$270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

◀4.4. Zapisz miarę kąta w postaci  $k \cdot 360^\circ + \alpha$ , gdzie  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , oraz określ, do której ćwiartki należy ten kąt.

- a)  $966^\circ$
- b)  $1383^\circ$
- c)  $1791^\circ$
- d)  $1918^\circ$
- e)  $-480^\circ$
- f)  $-753^\circ$

Odp.: a)  $2 \cdot 360^\circ + 246^\circ$

b)  $3 \cdot 360^\circ + 303^\circ$

c)  $4 \cdot 360^\circ + 351^\circ$

d)  $5 \cdot 360^\circ + 118^\circ$

e)  $-2 \cdot 360^\circ + 240^\circ$

f)  $-3 \cdot 360^\circ + 327^\circ$

### Przykład 3 ◀ zad. 4.4

Obliczmy, do której ćwiartki układu współrzędnych należą podane kąty.

#### Rozwiązanie

a)  $500^\circ$

$$500^\circ = 360^\circ + 140^\circ$$

Kąt  $360^\circ$  stanowi pełen obrót, a kąt  $140^\circ$  należy do drugiej ćwiartki.

Odp.: Kąt  $500^\circ$  należy do drugiej ćwiartki układu współrzędnych.

b)  $2015^\circ$

$$2015^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 215^\circ$$

Kąt  $5 \cdot 360^\circ$  stanowi 5 pełnych obrotów, a kąt  $215^\circ$  należy do trzeciej ćwiartki.

Odp.: Kąt  $2015^\circ$  należy do trzeciej ćwiartki układu współrzędnych.

c)  $-1410^\circ$

#### I sposób

$$-1410^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 330^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 270^\circ - 60^\circ$$

Kąt  $-3 \cdot 360^\circ$  stanowi 3 pełne obroty, a kąt  $-270^\circ - 60^\circ$  (odkładamy go w ujemnym kierunku) należy do pierwszej ćwiartki.

#### II sposób

$$-1410^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

Kąt  $-4 \cdot 360^\circ$  stanowi 4 pełne obroty, a kąt  $30^\circ$  (odkładamy go w dodatnim kierunku) należy do pierwszej ćwiartki.

Odp.: Kąt  $-1410^\circ$  należy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta są takie same jak wprowadzone wcześniej definicje dla kątów wypukłych.

### Definicja

**Sinusem kąta**  $\alpha$  nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

**Cosinusem kąta**  $\alpha$  nazywamy stosunek odciętej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

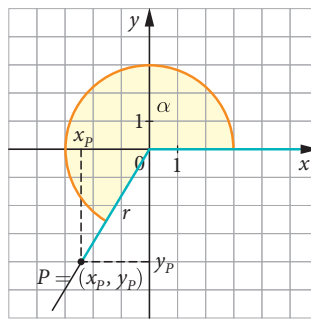
**Tangensem kąta**  $\alpha$  nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu; zakładamy, że ta odcięta jest różna od zera.

Jeżeli punkt  $P = (x_P, y_P)$  leży na ramieniu wiodzącym kąta  $\alpha$ , a  $r$  jest promieniem wiodzącym tego punktu, to:

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

Ponadto, skoro  $P = (x_P, y_P)$ , to:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$



Zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne za pomocą stosunków liczb związanych z punktem wybranym na ramieniu wiodzącym. Wykażemy, że wartości tych stosunków nie zależą od wyboru punktu.

### Twierdzenie

Jeżeli  $P = (x_P, y_P)$  jest punktem na ramieniu wiodzącym kąta  $\alpha$ , a  $r$  jest promieniem wiodzącym punktu  $P$ , to wartości stosunków  $\frac{x_P}{r}$ ,  $\frac{y_P}{r}$ ,  $\frac{y_P}{x_P}$  nie zależą od wyboru punktu  $P$ .

### Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Niech  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $B = (x_1, 0)$ ,  $A = (x_2, 0)$ ,  $|OP_1| = r_1$ ,  $|OP_2| = r_2$ .

### Teza

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

### Dowód

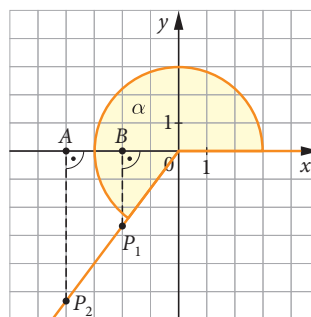
Jeżeli miara kąta  $\alpha$  jest wielokrotnością  $90^\circ$ , to:

- albo ramię wiodzące zawiera się w osi  $y$  i wtedy  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $|y_1| = r_1$ ,  $|y_2| = r_2$ ,
- albo ramię wiodzące zawiera się w osi  $x$  i wtedy  $y_1 = y_2 = 0$ ,  $|x_1| = r_1$ ,  $|x_2| = r_2$ .

W pierwszym przypadku prawdziwe są pierwsze dwie z powyższych proporcji, a trzecia jest nieokreślona. W drugim – wszystkie są prawdziwe.

Załóżmy, że miara kąta  $\alpha$  nie jest wielokrotnością  $90^\circ$ . Wtedy  $BP_1 \parallel AP_2$ , więc na mocy twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|OB|}{|OP_1|} = \frac{|OA|}{|OP_2|}, \quad \frac{|BP_1|}{|OP_1|} = \frac{|AP_2|}{|OP_2|}, \quad \frac{|BP_1|}{|OB|} = \frac{|AP_2|}{|OA|}$$



Wyraźmy długości odcinków za pomocą współrzędnych punktów:

$$|OB| = |x_1|, \quad |OA| = |x_2|, \quad |BP_1| = |y_1|, \quad |AP_2| = |y_2|$$

$$\text{Zatem: } \frac{|x_1|}{r_1} = \frac{|x_2|}{r_2}, \quad \frac{|y_1|}{r_1} = \frac{|y_2|}{r_2}, \quad \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|y_2|}{|x_2|}.$$

Niezależnie od tego, w której ćwiartce znajduje się ramię wodzące kąta, odpowiednie współrzędne punktów  $P_1$  i  $P_2$  mają ten sam znak (tzn. ten sam znak mają liczby  $x_1$  i  $x_2$  oraz ten sam znak mają liczby  $y_1$  i  $y_2$ ). W powyższych proporcjach możemy więc pominąć znaki wartości bezwzględnych:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Koniec dowodu

W zależności od znaków współrzędnych punktów na ramieniu końcowym kąta wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta są dodatnie lub ujemne.

| $\alpha$                   | $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ | $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ | $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ | $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ |
|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\sin \alpha$              | +                             | +                               | -                                | -                                |
| $\cos \alpha$              | +                             | -                               | -                                | +                                |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | +                             | -                               | +                                | -                                |

◀ 4.8. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  spełniający podane warunki.

- $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  i  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
- $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$  i  $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$
- $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$  i  $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$
- $\sin \alpha = -0,2$  i  $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
- $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  i  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
- $\operatorname{tg} \alpha = -4$  i  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

**Przykład 4** ◀ zad. 4.8

Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$ . Skonstruujmy ten kąt.

**Rozwiązanie**

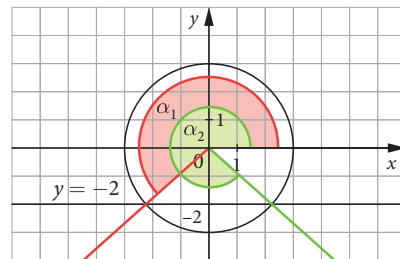
$$\text{a) } \sin \alpha = -\frac{2}{3}$$

$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$ , więc przyjmujemy, że  $y = -2$  i  $r = 3$ .

Konstrukcja przebiega następująco:

- rysujemy okrąg o środku w punkcie  $(0, 0)$  i promieniu  $r = 3$ ,
- rysujemy prostą  $k: y = -2$ ,
- z punktu  $(0, 0)$  prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej  $k$  z okręgiem – jest ona drugim ramieniem kąta (pierwszym jest dodatnia półoś  $x$ ).

Prosta  $k$  przecina okrąg w dwóch punktach, więc otrzymujemy dwa rozwiązania zadania: kąt  $\alpha_1$  oraz kąt  $\alpha_2$ .



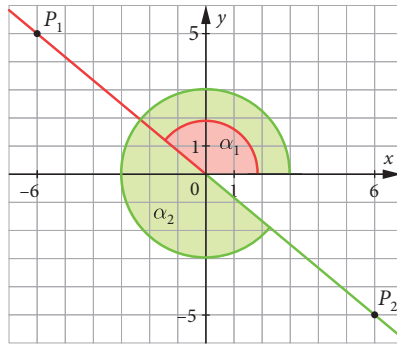
b)  $\operatorname{tg} \alpha = -1,2$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$ , możemy zatem przyjąć, że

$$P_1 = (-6, 5) \text{ oraz } P_2 = (6, -5).$$

Zadanie ma dwa rozwiązania: kąt  $\alpha_1$  i kąt  $\alpha_2$ , a ich ramionami końcowymi są odpowiednio półproste  $OP_1$  i  $OP_2$ .

Zauważmy, że te półproste uzupełniają się do prostej, a punkty  $P_1$  i  $P_2$  są symetryczne względem początku układu współrzędnych.



### Przykład 5 ◀ zad. 4.10

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego drugie ramię przechodzi przez punkt  $P$ .

a)  $P = (-2, -2)$

b)  $P = (8, -6)$

#### Rozwiązanie

a)  $P = (-2, -2)$

Obliczamy promień wodzący punktu  $P$ :

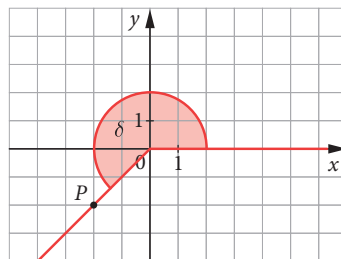
$$r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

Zatem:

$$\sin \delta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \delta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{-2}{-2} = 1$$



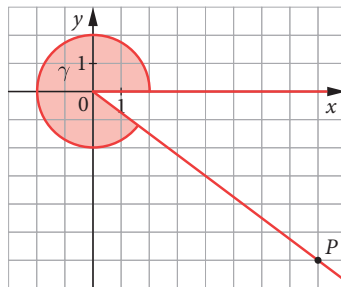
b)  $P = (8, -6)$

$$r = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sin \gamma = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$



◀ 4.10. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

a)  $(6, 8)$

b)  $(-2, 6)$

c)  $(-4, -2)$

d)  $(12, -5)$

e)  $(-11, 0)$

f)  $(8, -15)$

Odp.: a)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$

b)  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -3$

c)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

d)  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$

e)  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$

f)  $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ ,  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{7}{8}$

**Przykład 6**

Niech  $P = (x_P, y_P)$  oznacza punkt leżący na ramieniu wiodzącym kąta  $\alpha$  oraz  $r = |OP| = 1$ . Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha = 270^\circ$ .

Jeżeli promień wiodzący punktu  $P$  jest równy 1, to  $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ .

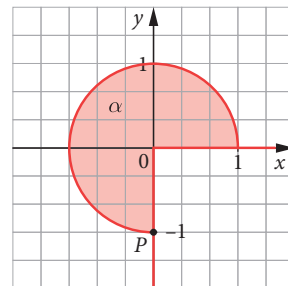
**Rozwiązanie**

Ramię wiodzące kąta pokrywa się z ujemną półosią  $y$ , zatem  $x_P = 0$ ,  $y_P = -1$ . Nie istnieje tangens kąta  $270^\circ$  (nie jest wykonalne dzielenie przez 0), natomiast:

$$\sin 270^\circ = -1, \quad \cos 270^\circ = 0$$

Podobnie obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych innych kątów będących wielokrotnościami  $90^\circ$ . Zauważmy, że ramię końcowe kąta  $360^\circ$ , podobnie jak kąta  $0^\circ$ , pokrywa się z ramieniem początkowym. Zatem  $\sin 360^\circ = \sin 0^\circ$ ,  $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ$ .

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów będących wielokrotnościami  $90^\circ$  przedstawiono w tabeli.



| $\alpha$                   | $0^\circ$ | $90^\circ$   | $180^\circ$ | $270^\circ$  | $360^\circ$ |
|----------------------------|-----------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| $\sin \alpha$              | 0         | 1            | 0           | -1           | 0           |
| $\cos \alpha$              | 1         | 0            | -1          | 0            | 1           |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0         | nie istnieje | 0           | nie istnieje | 0           |

Z wniosku zapisanego na s. 35 wynika prawdziwość następującego twierdzenia.

**Twierdzenie**

Dla dowolnego kąta  $\alpha$  i dowolnego  $k \in \mathbb{Z}$  prawdziwe są wzory:

- $\sin \alpha = \sin (\alpha + k \cdot 360^\circ)$
- $\cos \alpha = \cos (\alpha + k \cdot 360^\circ)$
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + k \cdot 360^\circ)$  dla  $\alpha \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

**Wzory redukcyjne**

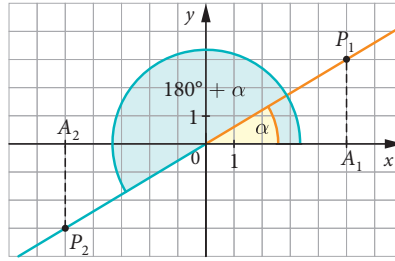
Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można obliczyć za pomocą wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostryego. Służą do tego tzw. **wzory redukcyjne**. W klasie drugiej poznaliście takie wzory dla kątów z drugiej ćwiartki. Teraz wyprowadzimy analogiczne wzory dla kolejnych ćwiartek.

III ćwiartka

Każdy kąt  $\beta \in (180^\circ; 270^\circ)$  możemy zapisać w postaci  $180^\circ + \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem ostrym.

Na przykład:

- $220^\circ = 180^\circ + 40^\circ$        $\alpha = 40^\circ$
- $260^\circ = 180^\circ + 80^\circ$        $\alpha = 80^\circ$
- $185^\circ = 180^\circ + 5^\circ$        $\alpha = 5^\circ$



Ramiona wodzące kątów  $\beta = 180^\circ + \alpha$  oraz  $\alpha$  tworzą w układzie współrzędnych prostą ( $\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$ ,  $\sphericalangle P_1OP_2$  jest kątem półpełnym). Punkty  $P_1$  i  $P_2$  wybrane tak, aby  $|OP_1| = |OP_2|$ , są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Jeżeli przyjmiemy, że  $P_1 = (a, b)$ , to  $P_2 = (-a, -b)$ .  $|OP_1| = |OP_2| = r$ , zatem:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

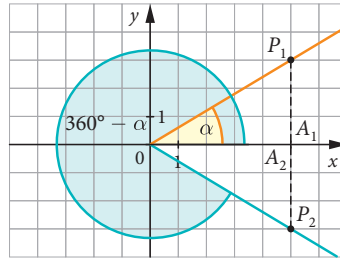
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$$

IV ćwiartka

Każdy kąt  $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$  możemy zapisać w postaci  $360^\circ - \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem ostrym (czyli należącym do pierwszej ćwiartki).

Na przykład:

- $320^\circ = 360^\circ - 40^\circ$        $\alpha = 40^\circ$
- $280^\circ = 360^\circ - 80^\circ$        $\alpha = 80^\circ$
- $355^\circ = 360^\circ - 5^\circ$        $\alpha = 5^\circ$



Ramiona wodzące kątów  $\beta = 360^\circ - \alpha$  oraz  $\alpha$  są w układzie współrzędnych symetryczne względem osi  $x$ . Wynika to z przystawiania odpowiednich trójkątów prostokątnych. Wystarczy wybrać punkty  $P_1$  i  $P_2$  tak, aby  $|OP_1| = |OP_2|$ , jak na rysunku. Wtedy  $\triangle OA_1P_1 \equiv \triangle OA_2P_2$  na mocy cechy kbk ( $\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$ ), a stąd  $|OA_1| = |OA_2|$ . Jeżeli przyjmiemy, że  $P_1 = (a, b)$ , to  $P_2 = (a, -b)$ .

$|OP_1| = |OP_2| = r$ , zatem:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \frac{a}{r} = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Zauważmy, że ramię wodzące kąta  $360^\circ - \alpha$  jest jednocześnie ramieniem wodzącym kąta  $-\alpha$ . Zatem wzory wyprowadzone powyżej można zapisać w postaci:

$$\bullet \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \bullet \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \bullet \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Wyprowadzone wzory redukcyjne zapiszemy w tabeli.

|                           | II ćwiartka                 | III ćwiartka               | IV ćwiartka                 |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $\beta$                   | $180^\circ - \alpha$        | $180^\circ + \alpha$       | $360^\circ - \alpha$        |
| $\sin \beta$              | $\sin \alpha$               | $-\sin \alpha$             | $-\sin \alpha$              |
| $\cos \beta$              | $-\cos \alpha$              | $-\cos \alpha$             | $\cos \alpha$               |
| $\operatorname{tg} \beta$ | $-\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$ |

W przykładzie 3 (s. 36) pokazaliśmy, że każdy kąt  $\alpha$  można zapisać w postaci  $\alpha = k \cdot 360^\circ + \beta$ , gdzie  $0 \leq \beta \leq 360^\circ$  i  $k \in \mathbb{Z}$ . Końcowe ramiona kątów  $\alpha$  i  $\beta$  pokrywają się. Zatem podane wzory redukcyjne umożliwiają obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Tablice z przybliżonymi wartościami tych funkcji dla kątów ostrych, których miara stopniowa jest liczbą całkowitą, znajdują się na końcu podręcznika.

◀4.11. Oblicz. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

a)  $\cos 210^\circ$

b)  $\sin 135^\circ$

c)  $\operatorname{tg} 225^\circ$

d)  $\sin(-300^\circ)$

e)  $\operatorname{tg}(-150^\circ)$

f)  $\cos(-315^\circ)$

Odp.: a)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  c) 1

d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  e)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  f)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

◀4.12. Oblicz. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

a)  $\sin 100^\circ$

b)  $\cos 325^\circ$

c)  $\operatorname{tg} 200^\circ$

d)  $\sin(-296^\circ)$

e)  $\cos(-95^\circ)$

f)  $\operatorname{tg}(-179^\circ)$

Odp.: a) 0,9848 b) 0,8192

c) 0,3640 d) 0,8988

e) -0,0872 f) 0,0175

**Przykład 7** ◀ zad. 4.11, 4.12

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych podanych kątów.

a)  $260^\circ$

b)  $330^\circ$

c)  $945^\circ$

d)  $-301^\circ$

**Rozwiązanie**

a)  $\sin 260^\circ = \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ \approx -0,9848 \quad \leftarrow 260^\circ = 180^\circ + 80^\circ$

$\cos 260^\circ = \cos(180^\circ + 80^\circ) = -\cos 80^\circ \approx -0,1736$

$\operatorname{tg} 260^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 80^\circ) = \operatorname{tg} 80^\circ \approx 5,6713$

b)  $\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5 \quad \leftarrow 330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$

$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 330^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c)  $\sin 945^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 945^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 945^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

d)  $\sin(-301^\circ) = -\sin 301^\circ = -\sin(360^\circ - 59^\circ) = -(-\sin 59^\circ) \approx 0,8572$

$\cos(-301^\circ) = \cos 301^\circ = \cos(360^\circ - 59^\circ) = \cos 59^\circ \approx 0,515$

$\operatorname{tg}(-301^\circ) = -\operatorname{tg} 301^\circ = -\operatorname{tg}(360^\circ - 59^\circ) = -(-\operatorname{tg} 59^\circ) \approx 1,6643$

**Przykład 8** ◀ zad. 4.14

Wyznaczymy z dokładnością do  $1^\circ$  kąt  $\beta$  ( $0^\circ \leq \beta < 360^\circ$ ) spełniający podany warunek.

a)  $\operatorname{tg} \beta = -0,3839$

b)  $\sin \beta = -0,9816$

**Rozwiązanie**

a)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,3839$

$\alpha \approx 21^\circ$

$\beta = 180^\circ - \alpha$  lub  $\beta = 360^\circ - \alpha$

←  $\alpha$  – pomocniczy kąt ostry← wartość kąta  $\alpha$  odczytana z tablic←  $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$ 

**Odp.:**  $\beta = 159^\circ$  lub  $\beta = 339^\circ$

b)  $\sin \alpha = 0,9816$

$\alpha \approx 79^\circ$

$\beta = 180^\circ + \alpha$  lub  $\beta = 360^\circ - \alpha$

←  $\alpha$  – pomocniczy kąt ostry← wartość kąta  $\alpha$  odczytana z tablic←  $\sin \beta = -\sin \alpha$ 

**Odp.:**  $\beta = 259^\circ$  lub  $\beta = 281^\circ$

Wyprowadzimy jeszcze wzory redukcyjne wiążące sinus z cosinusem. Będziemy z nich później korzystać podczas rysowania wykresów.

Przyjmijmy, że  $\alpha$  jest kątem ostrym umieszczonym w układzie współrzędnych. Ramię wodzące kąta  $90^\circ + \alpha$  jest wtedy zawarte w II ćwiartce układu. Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku i wybieramy punkty  $P_1$  i  $P_2$  takie, że  $|OP_1| = |OP_2| = 1$ .

$\sphericalangle A_1OP_2 = 90^\circ + \alpha$ , więc  $\sphericalangle B_2OP_2 = \alpha$ .

Prostokątny trójkąt  $OA_1P_1$  jest przystający do prostokątnego trójkąta  $OB_2P_2$  (na mocy cechy przystawania kbk), więc jest również przystający do trójkąta  $P_2A_2O$ . W takim razie, jeżeli przyjmiemy, że  $P_1 = (a, b)$ , to  $P_2 = (-b, a)$ .

$|OP_1| = |OP_2| = 1$ , zatem:

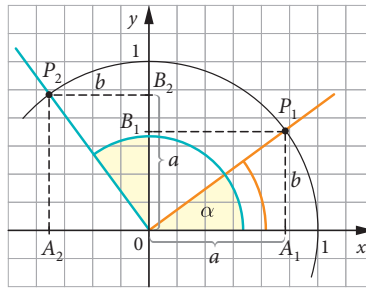
$\cos \alpha = a$

$\sin(90^\circ + \alpha) = a$

czyli:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

W taki sam sposób wykazujemy, że  $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ .



◀4.14. Wyznacz z dokładnością do  $1^\circ$  miarę kąta  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ ) spełniającego podany warunek.

a)  $\cos \alpha = 0,848$

b)  $\sin \alpha = -0,9135$

c)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,404$

d)  $\cos \alpha = -0,97$

e)  $\sin \alpha = 0,6$

f)  $\operatorname{tg} \alpha = -14$

**Odp.:** a)  $\alpha = 32^\circ$  lub  $\alpha = 328^\circ$

b)  $\alpha = 246^\circ$  lub  $\alpha = 294^\circ$

c)  $\alpha = 22^\circ$  lub  $\alpha = 202^\circ$

d)  $\alpha = 166^\circ$  lub  $\alpha = 194^\circ$

e)  $\alpha = 37^\circ$  lub  $\alpha = 143^\circ$

f)  $\alpha = 94^\circ$  lub  $\alpha = 274^\circ$

Do wyprowadzenia każdego z powyższych wzorów redukcyjnych zostały wykorzystane własności figur geometrycznych. Istotne znaczenie miało tu założenie, że  $\alpha$  jest kątem ostrym. Tymczasem można udowodnić (ten dowód pominiemy), że podane wzory redukcyjne są prawdziwe dla dowolnego kąta  $\alpha$  (jedyne zastrzeżenia dotyczą dziedziny tangensa).

### Twierdzenie

#### Wzory redukcyjne

Dla dowolnego kąta  $\alpha$  prawdziwe są następujące równości:

- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

Można również wyprowadzić wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych kątów postaci  $270^\circ \pm \alpha$  (zob. zadanie 4.18 oraz tablice na końcu podręcznika). Ponieważ jednak każdy kąt III lub IV ćwiartki można zapisać w jednej w wymienionych wyżej postaci, z tych wzorów nie będziemy korzystać.

### Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

#### Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. C

4.2. A

4.3. D

- 4.4. a)  $2 \cdot 360^\circ + 246^\circ$   
 b)  $3 \cdot 360^\circ + 303^\circ$   
 c)  $4 \cdot 360^\circ + 351^\circ$   
 d)  $5 \cdot 360^\circ + 118^\circ$   
 e)  $-2 \cdot 360^\circ + 240^\circ$   
 f)  $-3 \cdot 360^\circ + 327^\circ$

4.1. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt  $625^\circ$ ?

- A. do pierwszej    B. do drugiej    C. do trzeciej    D. do czwartej

4.2. Ramię wodzące kąta  $\alpha$  przechodzi przez punkt  $P$  i  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ . Jakie współrzędne może mieć punkt  $P$ ?

- A.  $(-12, -5)$     B.  $(-12, -13)$     C.  $(-13, -12)$     D.  $(-5, -12)$

4.3. Jaka jest wartość  $\cos \alpha$ , jeżeli  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ?

- A.  $\frac{2}{5}$     B.  $\frac{4}{5}$     C.  $-\frac{4}{5}$     D. Nie można tego jednoznacznie określić.

4.4. Zapisz miarę kąta w postaci  $k \cdot 360^\circ + \alpha$ , gdzie  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , oraz określ, do której ćwiartki należy ten kąt.

- a)  $966^\circ$     b)  $1383^\circ$     c)  $1791^\circ$     d)  $1918^\circ$     e)  $-480^\circ$     f)  $-753^\circ$

**4.5.** Wskaż pary kątów, których ramiona wodzące przechodzą przez te same punkty.

- A.  $123^\circ$       D.  $770^\circ$       G.  $-108^\circ$       J.  $-310^\circ$   
 B.  $525^\circ$       E.  $1000^\circ$       H.  $-140^\circ$       K.  $-597^\circ$   
 C.  $612^\circ$       F.  $1300^\circ$       I.  $-195^\circ$       L.  $-800^\circ$

**4.6.** W tabeli przedstawiono przybliżone czasy obrotu wybranych planet wokół własnej osi. Oblicz, o ile stopni obróci się każda z tych planet w ciągu 24 godzin.

| Planeta | Okres obrotu |
|---------|--------------|
| Merkury | 180 dni      |
| Jowisz  | 10 godzin    |
| Neptun  | 18 godzin    |

**4.7.** Do której ćwiartki należy końcowe ramię kąta  $\alpha$  spełniającego podane warunki?

- a)  $\cos \alpha > 0$  i  $\sin \alpha < 0$   
 b)  $\cos \alpha < 0$  i  $\operatorname{tg} \alpha > 0$   
 c)  $\sin \alpha > 0$  i  $\operatorname{tg} \alpha < 0$

**4.8.** Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  spełniający podane warunki.

- a)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  i  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$       d)  $\sin \alpha = -0,2$  i  $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$   
 b)  $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$  i  $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$       e)  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  i  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$   
 c)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$  i  $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$       f)  $\operatorname{tg} \alpha = -4$  i  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

**4.9.** Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ ) o podanej wartości jednej z jego funkcji trygonometrycznych.

- a)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$       c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$       e)  $\cos \alpha = -1$   
 b)  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$       d)  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$       f)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$

**4.10.** Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

- a) (6, 8)    b) (-2, 6)    c) (-4, -2)    d) (12, -5)    e) (-11, 0)    f) (8, -15)

**4.11.** Oblicz. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a)  $\cos 210^\circ$     b)  $\sin 135^\circ$     c)  $\operatorname{tg} 225^\circ$     d)  $\sin(-300^\circ)$     e)  $\operatorname{tg}(-150^\circ)$     f)  $\cos(-315^\circ)$

**4.12.** Oblicz. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a)  $\sin 100^\circ$     b)  $\cos 325^\circ$     c)  $\operatorname{tg} 200^\circ$     d)  $\sin(-296^\circ)$     e)  $\cos(-95^\circ)$     f)  $\operatorname{tg}(-179^\circ)$

**4.13.** Wyznacz z dokładnością do  $1^\circ$  miarę kąta  $\alpha$  o podanych własnościach. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

- a)  $\operatorname{tg} \alpha = -0,9325$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$       d)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,51$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$   
 b)  $\sin \alpha = -0,342$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$       e)  $\sin \alpha = -0,809$  i  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$   
 c)  $\cos \alpha = 0,1$  i  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$       f)  $\cos \alpha = -0,97$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

- 4.10. a)**  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$     **b)**  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -3$   
**c)**  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$     **d)**  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$   
**e)**  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$     **f)**  $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ ,  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{7}{8}$

- 4.11. a)**  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     **b)**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     **c)** 1    **d)**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     **e)**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     **f)**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 4.12. a)** 0,9848    **b)** 0,8192    **c)** 0,3640    **d)** 0,8988    **e)** -0,0872    **f)** 0,0175

- 4.13. a)**  $\alpha = 137^\circ$     **b)**  $\alpha = 200^\circ$     **c)**  $\alpha = 276^\circ$     **d)**  $\alpha = 207^\circ$     **e)**  $\alpha = 306^\circ$     **f)**  $\alpha = 194^\circ$

**4.5.** A i K, B i I, C i G, D i J, E i L, F i H

**4.6.** Merkury o  $2^\circ$ , Jowisz o  $864^\circ$ , Neptun o  $480^\circ$

**4.7. a)** IV    **b)** III    **c)** II

- 4.14.** a)  $\alpha = 32^\circ$  lub  $\alpha = 328^\circ$   
 b)  $\alpha = 246^\circ$  lub  $\alpha = 294^\circ$   
 c)  $\alpha = 22^\circ$  lub  $\alpha = 202^\circ$   
 d)  $\alpha = 166^\circ$  lub  $\alpha = 194^\circ$   
 e)  $\alpha = 37^\circ$  lub  $\alpha = 143^\circ$   
 f)  $\alpha = 94^\circ$  lub  $\alpha = 274^\circ$

- 4.15.** a) 0   b) 0   c) 0  
 d)  $2\sqrt{3} - 3$

- 4.16.** a) -3   b) -4   c) 1   d) 2

**4.18.**  $\cos(270^\circ - \alpha) =$   
 $= \cos(180^\circ + (90^\circ - \alpha)) =$   
 $= -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

#### Prosto do matury

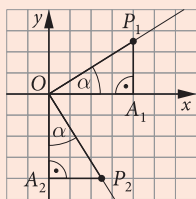
1. F, P, F

2.  $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ ,  
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$

3. a)  $\alpha = 148^\circ$   
 b)  $\alpha = 273^\circ$

4.  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

#### 5. I sposób



$|OP_2| = |OP_1|$ , więc  
 $\triangle OA_2P_2 \equiv \triangle OA_1P_1$ .  
 Jeżeli  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  
 to  $x_2 = y_1$ ,  $y_2 = -x_1$ .  
 $\sin(270^\circ + \alpha) = \frac{y_2}{|OP_2|} = \frac{-x_1}{|OP_1|} = -\cos \alpha$

#### II sposób

$\sin(270^\circ + \alpha) =$   
 $= \sin(180^\circ + (90^\circ + \alpha)) =$   
 $= -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$

**4.14.** Wyznacz z dokładnością do  $1^\circ$  miarę kąta  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ ) spełniającego podany warunek.

- a)  $\cos \alpha = 0,848$                       c)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,404$                       e)  $\sin \alpha = 0,6$   
 b)  $\sin \alpha = -0,9135$                       d)  $\cos \alpha = -0,97$                       f)  $\operatorname{tg} \alpha = -14$

**4.15.** Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a)  $\sin 150^\circ \operatorname{tg} 135^\circ + \cos 210^\circ \operatorname{tg} 330^\circ$                       c)  $2 \sin 120^\circ \sin 135^\circ + \sqrt{2} \cos 150^\circ \operatorname{tg} 225^\circ$   
 b)  $\sin 90^\circ \operatorname{tg} 180^\circ - \cos 0^\circ \operatorname{tg} 180^\circ$                       d)  $2 \operatorname{tg} 240^\circ + 9 \operatorname{tg} 150^\circ \operatorname{tg} 210^\circ$

**4.16.** Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a)  $\frac{2 \sin 120^\circ \cos 135^\circ + 3 \sin 150^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}{\cos 135^\circ \operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 210^\circ \cos 210^\circ}$   
 b)  $\left[ \frac{\operatorname{tg} 120^\circ \cos 120^\circ \sin 120^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \sin 150^\circ \cos 210^\circ}{3 \operatorname{tg} 300^\circ (\operatorname{tg} 210^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ)} \right]^{-1}$   
 c)  $\frac{(\cos 210^\circ \sin 330^\circ - \sin 210^\circ \cos 315^\circ)^2}{0,25 (5 \sin^2 150^\circ + 2 \cos 150^\circ \sin 225^\circ)}$   
 d)  $\frac{\sin 120^\circ \cos 135^\circ \cos 150^\circ + \cos 300^\circ \sin 315^\circ \sin 330^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 120^\circ \cos 315^\circ \sin 330^\circ}$

**4.17.** Udowodnij, że liczba  $\sin(-403^\circ) + \cos(-503^\circ) - \sin 223^\circ + \cos 323^\circ$  jest całkowita.

**4.18.** Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  prawdziwy jest wzór redukcyjny  $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .

#### Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Liczba  $\sin 250^\circ$  równa jest liczbie

- A.  $\sin 70^\circ$ .                      B.  $-\sin 70^\circ$ .                      C.  $-\cos 70^\circ$ .

2. Wyznacz wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta  $\alpha$ , którego ramię wodzące przechodzi przez punkt  $(-8, -15)$ .

3. Wyznacz z dokładnością do  $1^\circ$  miarę kąta  $\alpha$  spełniającego podane warunki. Skorzystaj z tablic matematycznych.

- a)  $\cos \alpha = -0,848$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$                       b)  $\operatorname{tg} \alpha = -19$  i  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

4. Oblicz  $\cos(-150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 330^\circ \cdot \sin 585^\circ$ .

**5.** Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  prawdziwy jest wzór redukcyjny  $\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ .

**4.17.**  $\sin(-403^\circ) + \cos(-503^\circ) - \sin 223^\circ + \cos 323^\circ =$   
 $= -\sin 403^\circ + \cos 503^\circ - \sin 223^\circ + \cos 323^\circ =$   
 $= -\sin(360^\circ + 43^\circ) + \cos(360^\circ + 143^\circ) - \sin(180^\circ + 43^\circ) + \cos(360^\circ - 37^\circ) =$   
 $= -\sin 43^\circ + \cos(180^\circ - 37^\circ) + \sin 43^\circ + \cos 37^\circ =$   
 $= -\sin 43^\circ - \cos 37^\circ + \sin 43^\circ + \cos 37^\circ = 0 \in \mathbb{Z}$

## 5. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

### Umiejętności:

- opisywanie własności funkcji trygonometrycznych
- wykorzystywanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi

### Funkcje okresowe

Jedną z ważniejszych własności funkcji trygonometrycznych jest ich **okresowość**, czyli powtarzalność. Wykres takiej funkcji możemy podzielić na przystające fragmenty, a do opisanie jej własności wystarczy zbadać je w pewnym podzbiorze dziedziny. Prześledźmy to na przykładzie.

#### Przykład 1 ◀ zad. 5.4

W zbiorze liczb całkowitych możemy w następujący sposób określić **dzielenie z resztą**.

Jeżeli liczbę całkowitą  $p$  podzielimy z resztą przez dodatnią liczbę naturalną  $n$ , to liczbę  $p$  możemy zapisać w postaci  $p = k \cdot n + r$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, reszta  $r$  – liczbą naturalną i  $0 \leq r < n$ .

Na przykład:

$10 = 3 \cdot 3 + 1$ , zatem reszta z dzielenia liczby 10 przez liczbę 3 jest równa 1.

$-7 = (-3) \cdot 3 + 2$ , zatem reszta z dzielenia liczby  $-7$  przez liczbę 3 jest równa 2.

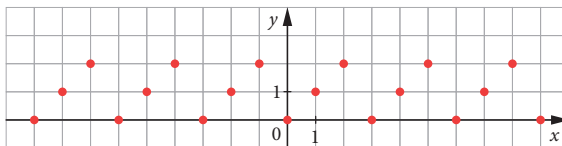
$-27 = (-9) \cdot 3 + 0$ , zatem reszta z dzielenia liczby  $-27$  przez liczbę 3 jest równa 0.

Narysujemy wykres funkcji  $f$ , która każdej liczbie całkowitej  $x$  przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby  $x$  przez 3 i opiszemy własności tej funkcji.

#### Rozwiązanie

Sporządzmy częściową tabelę funkcji  $f$ .

| $x$    | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1  | 2  | 0  | 1  | 2  | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |

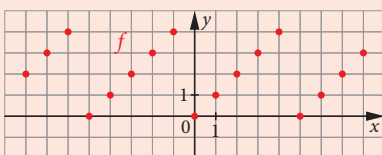


◀ 5.4. Funkcja  $f$  każdej liczbie całkowitej  $x$  przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby  $x$  przez 5.

a) Narysuj wykres funkcji  $f$  dla  $x \in \langle -8; 8 \rangle \cap \mathbb{Z}$ .

b) Opisz następujące własności funkcji  $f$ : dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

Odp.: a)



b)  $D = \mathbb{Z}$ ,  $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;

wartość najmniejsza: 0 dla  $x = 5k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

wartość największa: 4 dla  $x = 5k + 4$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

#### ZZ i MKP

tematy 1.4, 1.11

#### Multiteka

- Zjawiska okresowe w przyrodzie – przyływy i odpływy morza

[dlaNauczyciela.pl](http://dlaNauczyciela.pl) | Kartkówka 1.5

**Generator**  
testów i sprawdzianów

Własności funkcji  $f$ .

- Funkcja jest określona dla każdej liczby całkowitej – jej dziedziną jest zbiór  $\mathbf{Z}$ .
- Zbiorem wartości funkcji jest zbiór  $\{0, 1, 2\}$ .
- Wartość najmniejszą równą 0 funkcja przyjmuje dla wszystkich liczb podzielnych przez 3, czyli dla  $x = 3k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Są to jednocześnie miejsca zerowe tej funkcji.
- Wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla  $x = 3k + 2$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Dla argumentów różniących się o 3 funkcja przyjmuje takie same wartości, zatem dla każdej liczby całkowitej  $x$  prawdziwa jest równość:

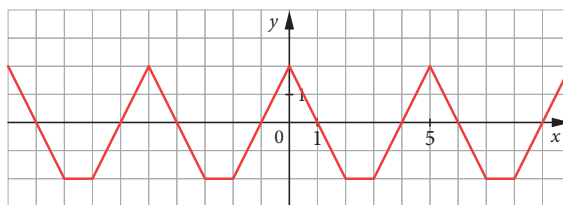
$$f(x + 3) = f(x)$$

Liczbę 3 nazywamy **okresem funkcji**  $f$ . Każda z wielokrotności liczby 3 też jest okresem tej funkcji, ale 3 jest najmniejszą liczbą dodatnią o tej własności. Nazywamy ją **okresem zasadniczym** lub **podstawowym**.

Odpowiadający okresowi fragment wykresu powtarza się wzdłuż osi liczbowej  $x$  nieskończenie wiele razy.

**Przykład 2** ◀ zad. 5.5, 5.6

Funkcja  $f$ , której wykres znajduje się poniżej, ma okres zasadniczy równy 5.



Opiszemy własności tej funkcji.

**Rozwiązanie**

- $D = \mathbf{R}$ ,  $ZW = \langle -2; 2 \rangle$
- Wartość największa: 2, dla argumentów postaci  $x = 5k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Wartość najmniejsza: -2, dla wszystkich argumentów z przedziałów  $\langle 5k + 2; 5k + 3 \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Miejsca zerowe: argumenty postaci  $x = 5k + 1$  lub  $x = 5k + 4$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- $f(x) > 0$  dla  $x \in (5k - 1; 5k + 1)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- $f(x) < 0$  dla  $x \in (5k + 1; 5k + 4)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów  $\langle 5k - 2; 5k \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów  $\langle 5k; 5k + 2 \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja jest stała w każdym z przedziałów  $\langle 5k + 2; 5k + 3 \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Zapis  $\langle 5k + 2; 5k + 3 \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  oznacza rodzinę przedziałów. Jeżeli  $k = 0$ , mamy przedział  $\langle 2; 3 \rangle$ , dla  $k = 1$  przedział  $\langle 7; 8 \rangle$ , dla  $k = -1$  przedział  $\langle -3; -2 \rangle$  itd.



◀ 5.5. Patrz s. 54.

◀ 5.6. Patrz s. 55.

**Definicja**

Funkcję  $f$  określoną na dziedzinie  $D$  nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba  $T \neq 0$ , że dla każdej liczby  $x \in D$  spełnione są dwa warunki:

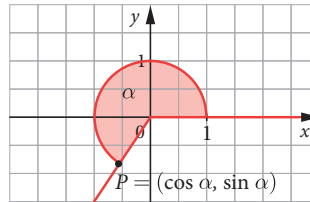
- $x + T \in D$  i  $x - T \in D$ ,
- $f(x + T) = f(x)$ .

Każdą z liczb  $T$  nazywamy **okresem** funkcji  $f$ , a jeżeli wśród nich istnieje najmniejsza dodatnia liczba  $T_0$ , to nazywamy ją **okresem zasadniczym** funkcji  $f$ .

Przykładem funkcji okresowej, która nie ma okresu zasadniczego, jest funkcja stała. Jej okresem jest każda liczba rzeczywista różna od 0.

Założmy, że promień wodzący  $r$  punktu  $P = (x_P, y_P)$  jest równy 1, czyli:

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

**Własności funkcji  $f(\alpha) = \sin \alpha$** 

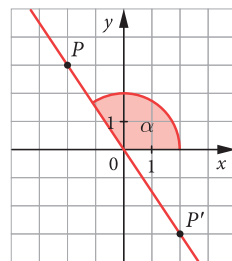
- Funkcja sinus jest określona dla każdego kąta  $\alpha$ .  
Zatem jej dziedziną jest zbiór wszystkich kątów.
- Zmiana kąta o  $360^\circ$  nie zmienia wartości  $y_P$  i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności, zatem funkcja sinus jest okresowa o okresie zasadniczym  $360^\circ$ .
- $-1 \leq y_P \leq 1$ , więc  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ . Ponadto, każda liczba z przedziału  $\langle -1; 1 \rangle$  jest wartością  $y_P$  pewnego punktu  $P$  na okręgu o środku  $O$  i promieniu 1, zatem przedział  $\langle -1; 1 \rangle$  jest zbiorem wartości funkcji sinus.
- Wartość największą równą 1 funkcja sinus przyjmuje dla kątów  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 450^\circ$ ,  $\alpha = 810^\circ$ , ... oraz  $\alpha = -270^\circ$ ,  $\alpha = -630^\circ$ , ..., czyli dla kątów, które można zapisać w postaci  $\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Wartość najmniejsza:  $-1$ , dla kątów  $\alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $\sin \alpha = 0$ , gdy  $y_P = 0$ , czyli gdy ramię wodzące kąta zawiera się w osi  $x$ . Miejscami zerowymi funkcji sinus są zatem kąty  $\alpha = k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  mamy:  
 $\sin \alpha > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  
 $\sin \alpha < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 360^\circ + k \cdot 360^\circ$ .

### Własności funkcji $g(\alpha) = \cos \alpha$

- Funkcja cosinus jest określona dla każdego kąta  $\alpha$ . Zatem jej dziedziną jest zbiór wszystkich kątów  $\alpha$ .
- Zmiana kąta o  $360^\circ$  nie zmienia wartości  $x_P$  i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności – funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie zasadniczym  $360^\circ$ .
- $-1 \leq x_P \leq 1$ , więc  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ . Ponadto, każda liczba z przedziału  $\langle -1; 1 \rangle$  jest wartością  $x_P$  pewnego punktu  $P$  na okręgu o środku  $O$  i promieniu 1, zatem przedział  $\langle -1; 1 \rangle$  jest zbiorem wartości funkcji cosinus.
- Wartość największą równą 1 funkcja cosinus przyjmuje dla kątów  $\alpha = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Wartość najmniejsza:  $-1$ , dla kątów  $\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $\cos \alpha = 0$ , gdy  $x_P = 0$ , czyli gdy ramię wodzące kąta zawiera się w osi  $y$ . Miejscami zerowymi funkcji cosinus są więc kąty  $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  mamy:  
 $\cos \alpha > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $-90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  
 $\cos \alpha < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ .

### Własności funkcji $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$ , zatem funkcja tangens jest określona, gdy  $x_P \neq 0$ , czyli dla kątów  $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Jeżeli na ramieniu wodzącym kąta  $\alpha$  umieścimy punkt  $P = (x_P, y_P)$ , to punkt  $P' = (-x_P, -y_P)$  leży na ramieniu wodzącym kąta  $180^\circ + \alpha$ . Zgodnie z definicją mamy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{-y_P}{-x_P} = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$  dla  $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Kąty różniące się o  $180^\circ$  mają takie same tangensy i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności – tangens jest funkcją okresową o okresie zasadniczym  $180^\circ$ .
- Jeżeli przyjmiemy  $x_P = 1$ , to  $\operatorname{tg} \alpha = y_P$ . Dowolna liczba rzeczywista jest współrzędną  $y_P$  pewnego punktu  $P = (1, y_P)$ , zatem zbiorem wartości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych.
- $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , gdy  $y_P = 0$ . Miejscami zerowymi funkcji tangens są więc kąty  $\alpha = k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Funkcja tangens przyjmuje wartości dodatnie, gdy  $x_P$  oraz  $y_P$  mają ten sam znak, a wartości ujemne, gdy  $x_P$  oraz  $y_P$  mają znaki przeciwne. Dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  mamy:  
 $\operatorname{tg} \alpha > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $0^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  
 $\operatorname{tg} \alpha < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $90^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 180^\circ$ .



Związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta są takie same jak w przypadku kątów wypukłych.

### Twierdzenie

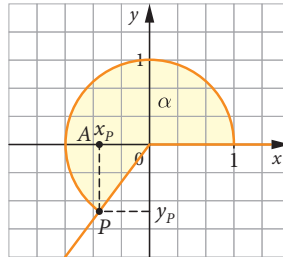
#### Jedynka trygonometryczna

Dla każdego kąta  $\alpha$  prawdziwa jest równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

#### Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i założmy, że promień wodzący punktu  $P = (x_P, y_P)$  jest równy 1. Wtedy  $y_P = \sin \alpha$  i  $x_P = \cos \alpha$ .



- Jeżeli ramię wodzące kąta pokrywa się z jedną z półosi układu współrzędnych, to  $|\sin \alpha| = 1$  i  $\cos \alpha = 0$  lub  $|\cos \alpha| = 1$  i  $\sin \alpha = 0$ .

W obu przypadkach  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

- Jeżeli ramię wodzące kąta nie pokrywa się z żadną z półosi układu współrzędnych, to mamy:

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2 \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

$$|x_P|^2 + |y_P|^2 = 1$$

$$x_P^2 + y_P^2 = 1 \quad \leftarrow |m|^2 = m^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow x_P = \cos \alpha \text{ i } y_P = \sin \alpha$$

#### Koniec dowodu

Wykorzystajmy ponownie oznaczenia przyjęte w definicjach funkcji trygonometrycznych. Jeżeli  $\cos \alpha \neq 0$ , to:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y_P}{r}}{\frac{x_P}{r}} = \frac{y_P}{x_P} = \operatorname{tg} \alpha$$

### Wniosek

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ dla } \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

◀5.10. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , który spełnia podane warunki.

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

b)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$  i  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

c)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

Odp.: a)  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

b)  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$

c)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}}}{3}$ ,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$

d)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

◀5.11. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a)  $\sin \alpha = 0,6$

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

c)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

d)  $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$

Odp.: a)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

lub  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

b)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

lub  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$

lub  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

d)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{4}$

lub  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$

### Przykład 3 ◀ zad. 5.10

Kąt  $\alpha$  spełnia warunki:  $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$  i  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ . Obliczmy  $\cos \alpha$ .

#### Rozwiązanie

##### I sposób

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}, \text{ stąd } \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

To równanie ma dwa rozwiązania:  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  lub  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

Kąt  $\alpha$  należy do III ćwiartki układu współrzędnych, więc wartość cosinusa tego kąta jest ujemna. Zatem tylko drugie rozwiązanie spełnia wszystkie warunki zadania.

##### II sposób

Niech  $P = (x, y)$  oznacza punkt na ramieniu końcowym kąta  $\alpha$ , a  $r$  – promień wodzący tego punktu. Ponieważ  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$  i  $\alpha$  należy do III ćwiartki układu współrzędnych, możemy przyjąć, że  $y = -2$  oraz  $r = 3$ . Wtedy:

$$x^2 + 4 = 9 \quad \leftarrow x^2 + y^2 = r^2 \text{ (twierdzenie Pitagorasa)}$$

$$x^2 = 5, \text{ stąd } x = \sqrt{5} \text{ lub } x = -\sqrt{5}$$

$$P = (-\sqrt{5}, -2) \quad \leftarrow x < 0, \text{ ponieważ } P \text{ jest punktem III ćwiartki}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \leftarrow \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

Odp.:  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

### Przykład 4 ◀ zad. 5.11

Obliczmy wartość cosinusa kąta  $\alpha$  takiego, że  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .

#### Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} \text{ lub } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{24}{25}}$$

Odp.:  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$  lub  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

**Przykład 5**

Obliczmy wartości sinusa oraz cosinusa kąta  $\alpha$  takiego, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

**Rozwiązanie**

Niech  $P = (x, y)$  oznacza punkt na ramieniu końcowym kąta  $\alpha$ , a  $r$  – promień wodzący tego punktu.

$\operatorname{tg} \alpha > 0$ , więc  $\alpha$  jest kątem należącym do I lub III ćwiartki układu współrzędnych.

- Dla  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  przyjmujemy, że  $x = 3$  i  $y = 4$ . Wtedy:

$$r^2 = 25 \quad \leftarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 5 \quad \leftarrow r > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ i } \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

- Dla  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  przyjmujemy, że  $x = -3$  i  $y = -4$ . Wtedy:

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ i } \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

Odp.: Zadanie ma dwa rozwiązania:  $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$  lub  $\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$ .

**D Przykład 6** zad. 5.14

Wykażemy, że dla każdego kąta  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  prawdziwa jest tożsamość:

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

**Dowód**

Sprawdzamy najpierw, czy warunek ograniczający miarę kąta  $\alpha$  wystarczy, aby wszystkie wyrażenia podane w zadaniu były określone. Wypisujemy założenia:

$$1 - \sin^2 \alpha > 0 \text{ i } 1 - \cos^2 \alpha > 0 \text{ i } \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \alpha \neq 0$$

Wszystkie powyższe warunki są spełnione dla  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ .

Przekształcamy lewą stronę podanej równości.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} = \quad \leftarrow \text{korzystamy z jedynki trygonometrycznej} \\ &= \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} - \frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \quad \leftarrow \sqrt{x^2} = |x| \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \quad \leftarrow \text{uwzględniamy znaki funkcji trygonometrycznych w IV ćwiartce} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = P \end{aligned}$$

**Koniec dowodu**

◀ 5.14. Udowodnij, że dla każdego kąta  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  podana równość jest tożsamością.

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

**Rozwiązanie**

Niech  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Wtedy  $\cos \alpha < 0$  i  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ , więc  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$  i  $|\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$ .

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - |\cos \alpha|}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{(1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ P &= \frac{4}{\sin \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{4}{\sin \alpha |\operatorname{tg} \alpha|} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$L = P$ , czyli podana równość jest tożsamością.

## Zadania

## Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. D

5.2. C

5.3. A

5.4. Patrz s. 47.

5.5.  $ZW = \langle -2; 4 \rangle$ ;  
 wartość najmniejsza:  $-2$   
 dla  $x = 9k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
 wartość największa:  $4$   
 dla  $x = 9k + 6$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
 miejsca zerowe:  $x = 9k - 1$   
 lub  $x = 9k - 7$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
 $f(x) > 0$   
 dla  $x \in (9k - 7; 9k - 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
 $f(x) < 0$   
 dla  $x \in (9k - 1; 9k + 2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Liczba 6 jest okresem funkcji  $f$ . Wskaż liczbę, która również jest okresem tej funkcji.

- A. 3                      B. 9                      C. 15                      D. 18

5.2. Wiadomo, że  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  i  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ . Ile jest równy  $\operatorname{tg} \alpha$ ?

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$                       C.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$                       D.  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

5.3. Wskaż wartość, której nie może przyjąć wyrażenie  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$ .

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{3}{2}$                       C. 1                      D.  $\sqrt{3}$

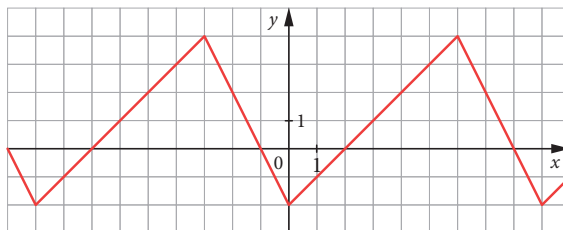
5.4. Funkcja  $f$  każdej liczbie całkowitej  $x$  przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby  $x$  przez 5.

a) Narysuj wykres funkcji  $f$  dla  $x \in \langle -8; 8 \rangle \cap \mathbb{Z}$ .

b) Opisz następujące własności funkcji  $f$ :

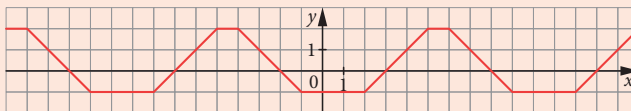
- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

5.5. Na wykresie przedstawiona jest funkcja okresowa  $f$  o dziedzinie  $\mathbb{R}$  i okresie zasadniczym równym 9.

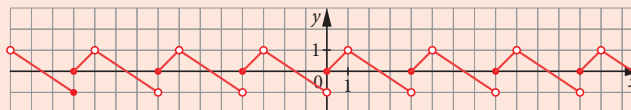


Na podstawie wykresu opisz następujące własności funkcji  $f$ : zbiór wartości, wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, miejsca zerowe oraz przedziały, w których funkcja ma stały znak.

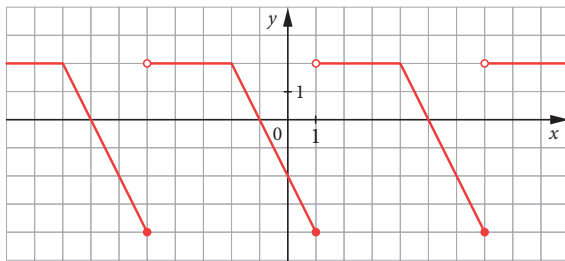
5.7. np.



5.8. np.



**5.6.** Na wykresie przedstawiona jest funkcja okresowa  $f$  o dziedzinie  $\mathbf{R}$  i okresie zasadniczym równym 6.



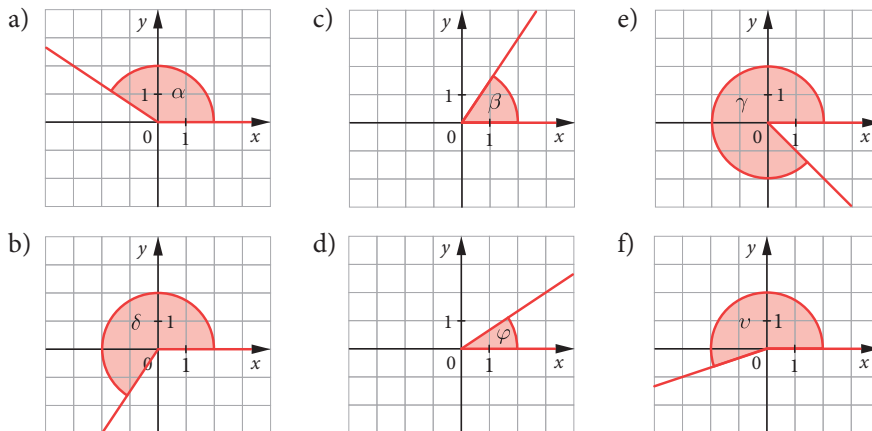
Na podstawie wykresu opisz następujące własności funkcji  $f$ : miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, oraz przedziały monotoniczności.

**5.7.** Naskicuj wykres dowolnej funkcji okresowej, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, zbiorem wartości jest przedział  $\langle -1; 2 \rangle$ , a miejscami zerowymi są wszystkie liczby postaci  $x = 5k + 3$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**5.8.** Naskicuj wykres dowolnej funkcji okresowej  $f$  o następujących własnościach:

- dziedziną  $f$  jest zbiór  $\{x \in \mathbf{R}: x \neq 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ ,
- zbiorem wartości jest przedział  $(-1; 1)$ ,
- $f$  jest rosnąca w każdym z przedziałów  $\langle 4k; 4k + 1 \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**5.9.** Na podstawie rysunku porównaj sinus danego kąta z jego cosinusem.



**5.15. a)** Założenia:  $\alpha$  dowolne.

$$L = \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - 2(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - 2 + 2 \sin^2 \alpha = 3 \sin^2 \alpha - 2 = P$$

Założenia do podpunktów b. c i d:  $\sin \alpha \neq 0$  i  $\cos \alpha \neq 0$ , czyli  $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } P &= \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right) (\operatorname{tg} \alpha + 1) = \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } L &= \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot 1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 = P \end{aligned}$$

$$\text{d) } L = \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = P$$

**5.6.** miejsca zerowe:

$$x = 6k + 5, k \in \mathbf{Z};$$

$$f(x) > 0$$

$$\text{dla } x \in (6k - 5; 6k - 1), k \in \mathbf{Z},$$

$$f(x) < 0$$

$$\text{dla } x \in (6k - 1; 6k + 1), k \in \mathbf{Z};$$

funkcja malejąca w każdym z przedziałów  $\langle 6k - 2; 6k + 1 \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,

stała w każdym z przedziałów  $(6k - 5; 6k - 2)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

**5.7.** Patrz s. 54.

**5.8.** Patrz s. 54.

**5.9. a)**  $\sin \alpha > \cos \alpha$

**b)**  $\sin \delta < \cos \delta$

**c)**  $\sin \beta > \cos \beta$

**d)**  $\sin \varphi < \cos \varphi$

**e)**  $\sin \gamma < \cos \gamma$

**f)**  $\sin v > \cos v$

5.10. Patrz s. 52.

5.11. Patrz s. 52.

5.12. a)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$   
 lub  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$   
 b)  $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$ ,  $\cos \alpha = \frac{15}{17}$   
 lub  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$   
 c)  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$   
 lub  $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$   
 d)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$   
 lub  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$

5.13. a), d), e), f) tak  
 b), c) nie

5.14. Patrz s. 53.

5.15. Patrz s. 55.

5.10. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , który spełnia podane warunki.

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  c)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$   
 b)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$  i  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  d)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

5.11. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a)  $\sin \alpha = 0,6$  c)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$   
 b)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  d)  $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$

5.12. Dana jest wartość tangensa kąta  $\alpha$ . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$  c)  $\operatorname{tg} \alpha = 4$   
 b)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$  d)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

5.13. Sprawdź, czy istnieje kąt  $\alpha$  spełniający podane warunki.

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{7}$  i  $\cos \alpha < 0$  d)  $\sin \alpha < 0$  i  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$   
 b)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2$  e)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$  i  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$   
 c)  $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$  f)  $\operatorname{tg} \alpha = -100$  i  $\cos \alpha > 0$

5.14. Udowodnij, że dla każdego kąta  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  podana równość jest tożsamością.

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

5.15. Udowodnij tożsamość. Podaj konieczne założenia.

a)  $\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 3 \sin^2 \alpha - 2$   
 b)  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right) (\operatorname{tg} \alpha + 1)$   
 c)  $\left( \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) = 1$   
 d)  $\left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

5.16. a) Założenia:  $\sin \alpha \neq 0$  i  $\cos \alpha \neq 0$ , i  $1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \neq 0$ .  
 $1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$  oraz  $\cos \alpha$  i  $\sin \alpha$  nie mogą być jednocześnie równe 0,  
 więc  $1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha > 0$  dla dowolnego  $\alpha$ . Zatem  $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \left[ \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} \right] \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \right)^{-1} = \left( \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cdot \left( \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right)^{-1} =$$

$$= \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 = P$$

b) Założenia:  $1 + \cos \alpha \neq 0$  i  $1 - \cos \alpha \neq 0$ , czyli  $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \left( \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} + \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)^2 + 2(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{[(1 - \cos \alpha) + (1 + \cos \alpha)]^2}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2^2}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{1 - \cos^2 \alpha} = P$$

**D 5.16.** Udowodnij tożsamość. Podaj założenia.

$$a) \left[ \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} \right] \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \right)^{-1} = 1$$

$$b) \left( \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right)^2 = \frac{4}{1 - \cos^2 \alpha}$$

\* **5.17.** Oblicz  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ , wiedząc, że  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ .

### Prosto do matury



**1.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

Istnieje kąt  $\alpha$  spełniający warunki

**A.**  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$  i  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .

**B.**  $\operatorname{tg} \alpha = -3$  i  $\cos \alpha = \sin \alpha$ .

**C.**  $\operatorname{tg} \alpha = -5$  i  $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ , i  $\sin \alpha = -\frac{5}{7}$ .

**2.** Oblicz wartość tangensa kąta  $\alpha$ , wiedząc, że  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{9}$ .

**3.** Kąt  $\alpha$  należy do III ćwiartki układu współrzędnych i  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7}$ . Oblicz wartości sinusa i cosinusa kąta  $\alpha$ .

**D 4.** Wykaż, że podana równość jest tożsamością.

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

Podaj założenia, które musi spełniać kąt  $\alpha$ .

**D 5.** Wykaż, że dla każdego kąta  $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , podane wyrażenie przyjmuje wartość całkowitą.

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1} + (1 + \operatorname{tg}^{-2} \alpha)^{-1}$$

**4.** Założenia:  $1 + \sin \alpha \neq 0$  i  $\cos \alpha \neq 0$ , czyli  $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + (1 + \sin \alpha)^2}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \\ = \frac{2(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} = P$$

$$5. (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1} + (1 + \operatorname{tg}^{-2} \alpha)^{-1} = \left( 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^{-1} + \left( 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)^{-1} = \\ = \left( \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^{-1} + \left( \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)^{-1} + \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)^{-1} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \in \mathbb{Z}$$

**5.16.** Patrz s. 56.

$$5.17. \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \\ = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ = 1 - 2 (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \\ = 1 - 2 \left( -\frac{3}{8} \right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{64} = \\ = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32}$$

$$\text{Odp.: } \frac{23}{32}$$

### Prosto do matury

**1.** F, F, F

**2.**  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8\sqrt{17}}{17}$  lub  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8\sqrt{17}}{17}$

**3.**  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{53}}{53}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{7\sqrt{53}}{53}$

## 6. Miara łukowa kąta

### Umiejętności:

- stosowanie miary łukowej
- zamiana miary łukowej kąta na stopniową i odwrotnie
- operowanie funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej

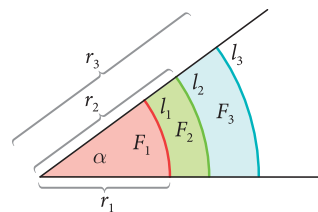
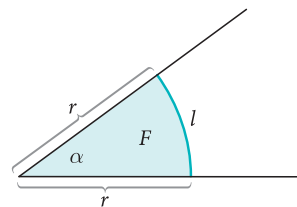
Wprowadzimy teraz inny sposób mierzenia kątów. Z wielu powodów miara stopniowa jest niewygodna. Podział  $1^\circ$  na  $60'$  odbiega od powszechnie stosowanego systemu dziesiętnego. Jeżeli chcemy zaznaczać miary kątów na osi liczbowej, to potrzebny jest przelicznik, pozwalający wyrazić np.  $137^\circ 20' 15''$  jedną liczbą rzeczywistą.

Przyjrzyjmy się rysunkowi kąta  $\alpha$ . Jeśli poprowadzimy okrąg o środku w wierzchołku kąta, otrzymamy figurę oznaczoną literą  $F$  – jest to wycinek koła o promieniu  $r$  i długości łuku  $l$ .

Jeżeli zaznaczymy łuki o różnych promieniach i wspólnym środku w wierzchołku kąta, to odpowiednie wycinki kołowe są figurami podobnymi, zatem równe są stosunki:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} \text{ itd.}$$

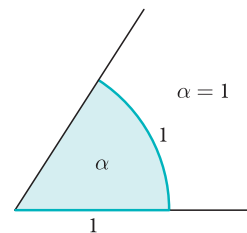
Każdemu kątowi można zatem jednoznacznie przyporządkować liczbę, która jest stosunkiem długości odpowiedniego łuku do promienia tego łuku. Tę liczbę przyjęto jako miarę kąta.



### Definicja

**Miarą łukową** kąta jest stosunek długości zawartego w kącie łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta do promienia tego okręgu.

Kąt, w którym łuk ma długość równą promieniowi ( $l = r$ ), ma w przybliżeniu  $57^\circ 17' 45''$  i jest **kątem jednostkowym** w mierze łukowej.



### ZZ i MKP

temat 1.3

### Multiteka

- Jednostki miar kątów

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.6

**Generator**  
testów i sprawdzianów

**Definicja**

Jednostką miary łukowej jest **radian**. Kąt środkowy w okręgu oparty na łuku o długości promienia tego okręgu ma miarę 1 radiana.

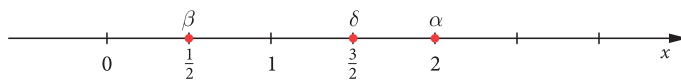
Miarą łukową danego kąta jest liczba zawartych w nim radianów.

Miara łukowa łączy pomiar rozwartości kąta z pomiarem długości.

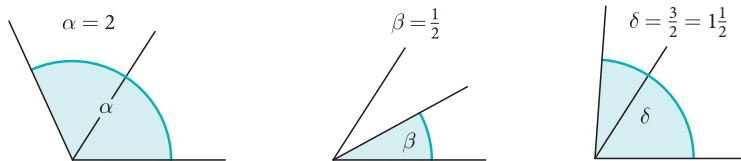
Podawanie miary stopniowej kąta wymaga używania zapisu mianowanego, tzn. symboli  $^{\circ}$ ,  $'$ ,  $''$  (np.  $\alpha = 27^{\circ} 13' 20''$ ). Nie ma takiej potrzeby przy zapisie miary łukowej, która jest ilorazem długości, na przykład „ $\alpha = 2$  radiany” zapiszemy krótko  $\alpha = 2$ .

**Przykład 1**

Na osi liczbowej zaznaczone są liczby:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\delta = \frac{3}{2}$ .



Narysujemy kąty o tych miarach, odkładając kąt jednostkowy.

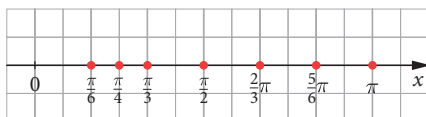
**Przykład 2**

Wyznamy miary łukowe kątów, które często występują w zadaniach.

Jeżeli  $r = 1$ , to długość okręgu jest równa  $2\pi$ . Zatem kąt pełny ma miarę  $2\pi$ .

$$\begin{array}{lllll} 30^{\circ} = \frac{\pi}{6} & 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} & 60^{\circ} = \frac{\pi}{3} & 90^{\circ} = \frac{\pi}{2} & 120^{\circ} = \frac{2}{3}\pi \\ 135^{\circ} = \frac{3}{4}\pi & 150^{\circ} = \frac{5}{6}\pi & 180^{\circ} = \pi & 270^{\circ} = \frac{3}{2}\pi & 360^{\circ} = 2\pi \end{array}$$

Zaznamy teraz niektóre z tych miar na osi liczbowej.



Zauważmy, że  $\pi \approx 3,14 \approx 3$ .  
Dlatego na osi  $x$  będziemy zaznaczać  $180^{\circ} = \pi \approx 3$ .

Jeżeli  $\alpha$  oznacza miarę stopniową kąta, a  $x$  – jego miarę łukową, to na podstawie proporcji  $\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{x}$  w prosty sposób możemy zamienić miarę stopniową na łukową i na odwrót.

#### Wniosek

Jeżeli  $\alpha$  oznacza miarę stopniową kąta, a  $x$  jest jego miarą łukową, to:

$$\bullet \quad x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ} \qquad \bullet \quad \alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$$

### Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Każdemu kątowi  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ) odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista będąca jego miarą łukową i na odwrót – dowolnej liczbie rzeczywistej  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  możemy przyporządkować kąt, którego miarą łukową jest  $t$ . Ponieważ przyporządkowanie to jest jednoznaczne, możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne tak, aby ich argumentami były liczby.

Jeżeli liczba rzeczywista  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  jest miarą łukową kąta  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ), to przyjmujemy, że:

- $\sin t = \sin \alpha$
- $\cos t = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \alpha$  dla  $t \neq \frac{\pi}{2}$  i  $t \neq \frac{3}{2}\pi$

Dowolną liczbę rzeczywistą  $x$  możemy zapisać w postaci  $x = t + n \cdot 2\pi$ , gdzie  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  i  $n \in \mathbf{Z}$ , więc:

- $\sin x = \sin t$
- $\cos x = \cos t$
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

Poznane wcześniej wzory i zależności możemy teraz zapisać dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej. Na przykład:

- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$  dla  $x \in \mathbf{R}$  i  $k \in \mathbf{Z}$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$  dla  $x \in \mathbf{R}$  i  $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  i  $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  i  $k \in \mathbf{Z}$
- **jedynka trygonometryczna:**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  dla  $x \in \mathbf{R}$

**Przykład 3** ◀ zad. 6.5

Wyznaczymy miarę łukową albo stopniową podanego kąta.

**Rozwiązanie**

a)  $\alpha = 37^\circ$

$$x = \frac{37^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

$$x = \frac{37}{180}\pi$$

b)  $\alpha = 240^\circ$

$$x = \frac{240 \cdot \pi}{180}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi$$

c)  $x = 14,5$

$$\alpha = \frac{14,5 \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{2610^\circ}{\pi} \approx 831^\circ$$

**Przykład 4** ◀ zad. 6.7

Miarę  $x$  kąta podaną w radianach zapiszemy w postaci  $\alpha + k \cdot 360^\circ$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  i  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ .

**Rozwiązanie**

a)  $x = \frac{31}{6}\pi$

$$\frac{31}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 5\pi = \frac{\pi}{6} + \pi + 4\pi$$

$$x = 30^\circ + 180^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 210^\circ + 2 \cdot 360^\circ$$

b)  $x = -\frac{83}{4}\pi$

$$-\frac{83}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi - 20\pi$$

$$x = -135^\circ - 10 \cdot 360^\circ = 225^\circ - 11 \cdot 360^\circ$$

Wyrazimy poznane wcześniej wzory redukcyjne w mierze łukowej.

**Twierdzenie****Wzory redukcyjne**

Dla dowolnego kąta o mierze łukowej  $x$  zachodzą równości:

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$
- $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

◀6.5. Zamień miarę stopniową na miarę łukową.

a)  $20^\circ, 15^\circ, 42^\circ, 1^\circ$

b)  $630^\circ, 100^\circ, 300^\circ$

**Odp.:** a)  $20^\circ = \frac{\pi}{9}, 15^\circ = \frac{\pi}{12},$

$42^\circ = \frac{7\pi}{30}, 1^\circ = \frac{\pi}{180}$

b)  $630^\circ = \frac{7\pi}{2}, 100^\circ = \frac{5\pi}{9},$

$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$

◀6.7. Zapisz podaną miarę kąta w postaci  $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  i  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ .

a)  $\frac{33\pi}{4}, \frac{51\pi}{9}, \frac{19\pi}{6}$

b)  $-\frac{35\pi}{9}, -\frac{32\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$

**Odp.:** a)  $\frac{33\pi}{4} = 45^\circ + 4 \cdot 360^\circ,$

$\frac{51\pi}{9} = 300^\circ + 2 \cdot 360^\circ,$

$\frac{19\pi}{6} = 210^\circ + 360^\circ$

b)  $-\frac{35\pi}{9} = 20^\circ - 2 \cdot 360^\circ,$

$-\frac{32\pi}{3} = 240^\circ - 6 \cdot 360^\circ,$

$-\frac{5\pi}{4} = 135^\circ - 360^\circ$

**Przykład 5** ◀ zad. 6.10

Skorzystamy ze wzorów redukcyjnych i obliczymy wartość podanego wyrażenia.

$$\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18}}$$

**Rozwiązanie**

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18} = \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{18}\right) = \sin^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{2\pi}{9} = 1$$

$$\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{1} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

**D** **Przykład 6** ◀ zad. 6.18

Udowodnimy podaną tożsamość.

$$\cos(3\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 5\pi = \operatorname{tg}^2(\pi + x) \cdot \cos^2(\pi - x)$$

**Rozwiązanie**

Zaczynamy od wypisania założeń.

Wyrażenie  $\operatorname{tg}(\pi + x)$  jest określone, jeśli  $\pi + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , czyli  $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pozostałe wyrażenia są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych.

**Dowód**

Przekształcamy najpierw lewą stronę podanej równości.

$$\begin{aligned} L &= \cos(3\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 5\pi = \cos(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos \pi = \\ &= -\cos x \cdot \cos x - \cos \pi = -\cos^2 x + 1 = \sin^2 x \end{aligned}$$

Teraz przekształcamy prawą stronę podanej równości.

$$P = \operatorname{tg}^2(\pi + x) \cdot \cos^2(\pi - x) = \operatorname{tg}^2 x \cdot (-\cos x)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \sin^2 x$$

$L = P$ , czyli podana równość jest tożsamością dla wszystkich  $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Koniec dowodu**

◀ 6.10. Oblicz.

a)  $\sin\frac{7\pi}{4} \cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} \cos\frac{5\pi}{3}$

b)  $\frac{4 \sin\frac{4\pi}{3} \cos^2\frac{7\pi}{4} + 2 \cos\frac{17\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}}$

c)  $\frac{2 \sin\frac{7\pi}{6} \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{4\pi}{3} \cos\frac{5\pi}{3} \sin\frac{4\pi}{3}}$

d)  $\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)^2 - \left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)^2}{2 \sin\frac{7\pi}{4} \cos\frac{5\pi}{4} - 4 \cos\frac{17\pi}{6} \sin\frac{4\pi}{3}}$

Odp.: a) 0   b) 1   c) -8   d) 6

◀ 6.18. Udowodnij tożsamość  $\frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$ . Podaj konieczne założenia.

**Rozwiązanie**

Założenia:

- $\operatorname{tg}(\pi - x)$  jest określony, gdy  $\pi - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $x \neq \frac{\pi}{2} - k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \neq 0$ , gdy  $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $x \neq -k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tożsamość jest określona dla  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot (-\cos x)}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{\sin x} = 1 = P$$

**Przykład 7** ◀ zad. 6.19

Obliczmy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej  $x$ , wiedząc, że  $\cos x = -\frac{2}{3}$  oraz  $\operatorname{tg} x > 0$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} \pi < x < \frac{3}{2}\pi & \leftarrow \cos x < 0 \text{ i } \operatorname{tg} x > 0 \\ \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} & \leftarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3} & \leftarrow \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2} & \leftarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

Odp.:  $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

**Zadania**

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

**6.1.** Wskaż miarę łukową kąta  $15^\circ$ .

- A.  $\frac{\pi}{9}$       B.  $\frac{\pi}{12}$       C.  $\frac{\pi}{15}$       D.  $\frac{\pi}{24}$

**6.2.** Wskaż wartość  $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{6}$ .

- A. 1      B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\sqrt{3}$

**6.3.** Do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt o mierze  $3,5$ ?

- A. do pierwszej      B. do drugiej      C. do trzeciej      D. do czwartej

**6.4.** Oblicz.

- a)  $23^\circ 20' + 46^\circ 40'$       c)  $137^\circ 27' - 15^\circ 19' + 27^\circ 52'$   
b)  $75^\circ 14' - 21^\circ 39'$       d)  $89^\circ 17' + 2 \cdot 35^\circ 14' - 109^\circ 15'$

**6.5.** Zamień miarę stopniową na miarę łukową.

- a)  $20^\circ, 15^\circ, 42^\circ, 1^\circ$       b)  $630^\circ, 100^\circ, 300^\circ$

**◀6.19.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej  $x$  spełniającej podane warunki.

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\cos x < 0$

b)  $\cos x = -\frac{1}{3}$  i  $\operatorname{tg} x < 0$

c)  $\operatorname{tg} x = 2$  i  $\sin x < 0$

d)  $\operatorname{tg} x = -1$  i  $\sin x > 0$

Odp.: a)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b)  $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$

c)  $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

d)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Odpowiedzi i rozwiązania**

**6.1.** B

**6.2.** C

**6.3.** C

**6.4.** a)  $70^\circ$

b)  $53^\circ 35'$

c)  $150^\circ$

d)  $50^\circ 30'$

**6.5.** a)  $20^\circ = \frac{\pi}{9}$ ,  $15^\circ = \frac{\pi}{12}$ ,

$42^\circ = \frac{7\pi}{30}$ ,  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$

b)  $630^\circ = \frac{7\pi}{2}$ ,  $100^\circ = \frac{5\pi}{9}$ ,

$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$

**6.6. a)**  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ ,  $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$ ,  
 $\frac{23\pi}{18} = 230^\circ$

**b)**  $\frac{\pi}{9} = 20^\circ$ ,  $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ ,  $\frac{10\pi}{3} = 600^\circ$

**c)**  $2 = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$ ,  $1,5 = \left(\frac{270}{\pi}\right)^\circ$ ,  
 $0,7 = \left(\frac{126}{\pi}\right)^\circ$

**d)**  $102 = \left(\frac{18360}{\pi}\right)^\circ$ ,  
 $1,25 = \left(\frac{225}{\pi}\right)^\circ$ ,  $7,5 = \left(\frac{1350}{\pi}\right)^\circ$

**6.7. a)**  $\frac{33\pi}{4} = 45^\circ + 4 \cdot 360^\circ$ ,

$\frac{51\pi}{9} = 300^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ ,

$\frac{19\pi}{6} = 210^\circ + 360^\circ$

**b)**  $-\frac{35\pi}{9} = 20^\circ - 2 \cdot 360^\circ$ ,

$-\frac{32\pi}{3} = 240^\circ - 6 \cdot 360^\circ$ ,

$-\frac{5\pi}{4} = 135^\circ - 360^\circ$

**6.8. a)**  $405^\circ = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ ,

$1020^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$ ,  $520^\circ = \frac{8\pi}{9} + 2\pi$

**b)**  $-405^\circ = \frac{7\pi}{4} - 2 \cdot 2\pi$ ,

$-30^\circ = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$ ,

$-780^\circ = \frac{5\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi$

**6.9.**  $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**6.10. a)** 0   **b)** 1   **c)** -8   **d)** 6

**6.12. a)**  $\alpha < \beta$

**b)**  $\alpha < \beta$

**c)**  $\alpha = \beta$

**d)**  $\alpha > \beta$

**6.13. a)**  $\alpha < \beta$

**b)**  $\alpha < \beta$

**c)**  $\alpha = \beta$

**d)**  $\alpha < \beta$

**6.14.**  $\alpha, \beta, \delta$

**6.15. a)** kolejno: II, IV, I, IV

**b)** kolejno: II, I, II, III

**6.6.** Zamień miarę łukową na miarę stopniową.

a)  $\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\pi, \frac{23}{18}\pi$    b)  $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{5}, \frac{10\pi}{3}$    c) 2; 1,5; 0,7   d) 102; 1,25; 7,5

**6.7.** Zapisz podaną miarę kąta w postaci  $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  i  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ .

a)  $\frac{33\pi}{4}, \frac{51\pi}{9}, \frac{19\pi}{6}$    b)  $-\frac{35\pi}{9}, -\frac{32\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$

**6.8.** Zapisz podaną miarę kąta w postaci  $x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  i  $0 \leq x < 2\pi$ .

a)  $405^\circ, 1020^\circ, 520^\circ$    b)  $-405^\circ, -30^\circ, -780^\circ$

**6.9.** Oblicz:  $\sin \frac{5\pi}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$ ,  $\cos \frac{3\pi}{4}$ .

**6.10.** Oblicz.

a)  $\sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$

c)  $\frac{2 \sin \frac{7\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}}{\cos \frac{4\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3}}$

b)  $\frac{4 \sin \frac{4\pi}{3} \cos^2 \frac{7\pi}{4} + 2 \cos \frac{17\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}}$

d)  $\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}\right)^2 - \left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}\right)^2}{2 \sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{4} - 4 \cos \frac{17\pi}{6} \sin \frac{4\pi}{3}}$

**6.11.** Narysuj w układzie współrzędnych kąty o miarach:  $\pi$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ .

**6.12.** Porównaj kąty  $\alpha$  i  $\beta$ .

a)  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ,  $\beta = 18^\circ$

c)  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ ,  $\beta = 18^\circ$

b)  $\alpha = \frac{\pi}{16}$ ,  $\beta = 14^\circ$

d)  $\alpha = \frac{\pi}{7}$ ,  $\beta = 20^\circ$

**6.13.** Porównaj kąty  $\alpha$  i  $\beta$ .

a)  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $\beta = 40^\circ$

c)  $\alpha = 0,6\pi$ ,  $\beta = 108^\circ$

b)  $\alpha = \frac{5\pi}{7}$ ,  $\beta = 200^\circ$

d)  $\alpha = \frac{3\pi}{11}$ ,  $\beta = 50^\circ$

**6.14.** Które z podanych kątów są ostre:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1,5$ ,  $\gamma = 0,6\pi$ ,  $\delta = \frac{37}{75}\pi$ ?

**6.15.** Określ, do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt o podanej mierze.

a)  $\frac{4\pi}{7}$ ,  $\frac{11\pi}{7}$ ,  $\frac{3\pi}{8}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$    b)  $2\frac{1}{2}$ , 0,7,  $\frac{5\pi}{7}$ ,  $\frac{9\pi}{8}$

**6.16.** Oblicz miarę łukową kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o podanej godzinie.

- a)  $6^{00}$                       b)  $13^{00}$                       c)  $16^{10}$                       d)  $9^{12}$

**6.17.** Uporządkuj rosnąco podane kąty.

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = 0,24, \quad \gamma = 10^\circ 32', \quad \delta = \frac{\pi}{22}, \quad \nu = 1^\circ 12', \quad \varphi = 0,13$$

**D 6.18.** Udowodnij tożsamość  $\frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$ . Podaj konieczne założenia.

**6.19.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej  $x$  spełniającej podane warunki.

- a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\cos x < 0$                       c)  $\operatorname{tg} x = 2$  i  $\sin x < 0$   
 b)  $\cos x = -\frac{1}{3}$  i  $\operatorname{tg} x < 0$                       d)  $\operatorname{tg} x = -1$  i  $\sin x > 0$

**6.20.** W kole o promieniu 3,5 cm kąt środkowy oparty jest na łuku długości 2,8 cm. Oblicz miarę stopniową tego kąta z dokładnością do  $1^\circ$ .

**6.21.** Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 15 cm odpowiadającego kątowi środkowemu o podanej mierze.

- a) 3,1                      b) 2,4                      c)  $160^\circ$                       d)  $300^\circ$

### Prosto do matury



**1.** Dane są kąty  $\alpha = 1,75$  oraz  $\beta = 100^\circ$ . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A.  $\alpha < \beta$                       B.  $\alpha > \beta$                       C.  $\alpha \geq \beta$

**2.** Podaj miary łukowe kątów:  $36^\circ$ ,  $200^\circ$ ,  $280^\circ$ .

**3.** Zapisz kąt o mierze  $-1044^\circ$  w postaci  $x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  i  $0 \leq x < 2\pi$ .

**4.** Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych:  $\sin \frac{16\pi}{3}$ ,  $\cos \frac{53\pi}{6}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$ .

**D 5.** Udowodnij tożsamość. Podaj odpowiednie założenia.

$$\cos(\pi - x) \cos(\pi + x) - \sin(2\pi - x) \sin(2\pi + x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

**5. Założenia:**

- $\operatorname{tg} x$  jest określony, gdy  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  jest określony, gdy  $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $x \neq -k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tożsamość jest określona dla  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \cos(\pi - x) \cos(\pi + x) - \sin(2\pi - x) \sin(2\pi + x) = -\cos x \cdot (-\cos x) - (-\sin x) \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$P = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1 = L$$

**6.16.** a)  $\pi$     b)  $\frac{\pi}{6}$     c)  $\frac{13\pi}{36}$   
 d)  $\frac{13\pi}{15}$

**6.17.**  $\nu < \varphi < \delta < \gamma < \beta < \alpha$

**6.18.** Patrz s. 62.

**6.19.** a)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b)  $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$

c)  $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

d)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**6.20.**  $46^\circ$

**6.21.** a) 46,5 cm    b) 36 cm

c)  $13\frac{1}{3}\pi$  cm    d)  $25\pi$  cm

### Prosto do matury

**1.** F, P, P

**2.**  $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ ,  $200^\circ = \frac{10\pi}{9}$ ,  
 $280^\circ = \frac{14\pi}{9}$

**3.**  $\frac{\pi}{5} - 3 \cdot 2\pi$

**4.**  $\sin \frac{16\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $\cos \frac{53\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} = \sqrt{3}$

## 7. Wykresy funkcji trygonometrycznych

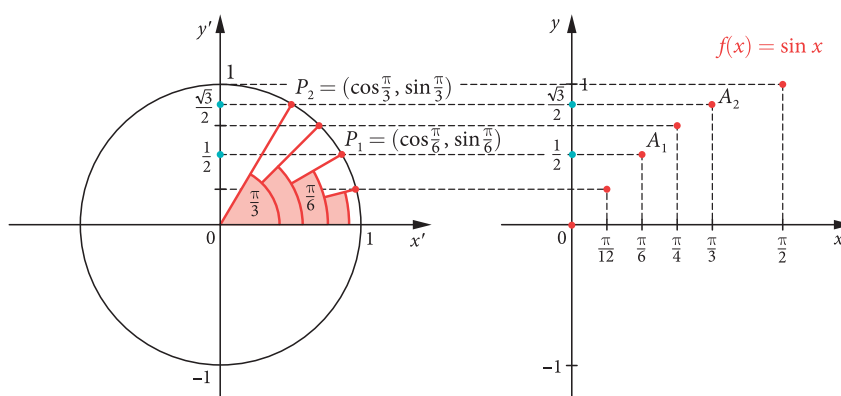
### Umiejętności:

- rysowanie wykresów funkcji sinus, cosinus i tangens
- przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych
- rozwiązywanie elementarnych równań i nierówności trygonometrycznych

### Wykres funkcji $f(x) = \sin(x)$

Przyjrzyjmy się rysunkowi. W układzie współrzędnych  $x'Oy'$  zaznaczamy kąty, a w układzie  $xOy$  punkty wykresu funkcji  $f(x) = \sin x$ .

Przyjmijmy zaokrąglenie  $\pi \approx 3$ , zatem  $\frac{\pi}{3} \approx 1$ ,  $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3}{2}$  itd.



Punkt  $A_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$ , ponieważ jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu  $P_1$  wybranego na ramieniu końcowym kąta  $\frac{\pi}{6}$  (układ  $x'Oy'$ ,  $|OP_1| = 1$ ).

Podobnie – punkt  $A_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$ , bo jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu  $P_2$  wybranego na ramieniu końcowym kąta  $\frac{\pi}{3}$ .

Im więcej kątów odłożymy w układzie  $x'Oy'$ , tym więcej punktów należących do wykresu funkcji  $f(x) = \sin x$  można zaznaczyć w układzie  $xOy$ .

#### ZZ i MKP

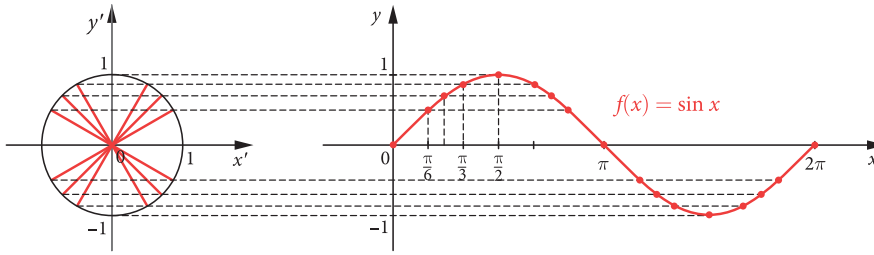
tematy 1.5–1.10

#### Multiteka

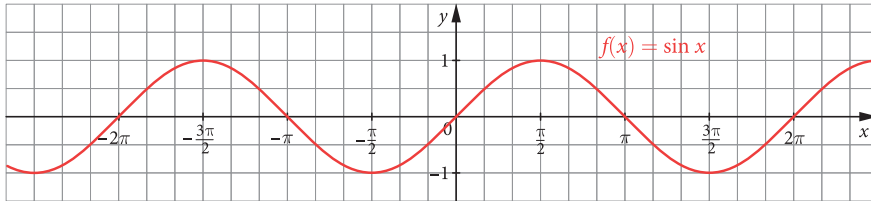
- Wykres funkcji sinus
- Przekształcenia wykresu funkcji sinus (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji sinus (2)
- Wykres funkcji cosinus
- Przekształcenia wykresu funkcji cosinus (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji cosinus (2)
- Wykres funkcji tangens
- Przekształcenia wykresu funkcji tangens (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji tangens (2)
- Ruch po okręgu a sinusoida (1)
- Ruch po okręgu a sinusoida (2)
- Ruch po okręgu a tangensoida
- Wykresy funkcji trygonometrycznych
- Jak brzmi sinusoida?
- Wykres funkcji cotangens
- Przekształcenia wykresu funkcji cotangens (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji cotangens (2)

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.7

Poniżej prezentujemy wykres funkcji  $f(x) = \sin x$  dla kątów z przedziału  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .



Funkcja  $f(x) = \sin x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) jest funkcją okresową o okresie zasadniczym  $2\pi$ , zatem narysowany fragment wykresu będzie się powtarzał nieskończenie wiele razy.



Krzywą będącą wykresem funkcji  $f(x) = \sin x$  nazywamy **sinusoidą**.

Opiszemy własności funkcji  $f(x) = \sin x$ .

- $D = \mathbf{R}$ ,  $ZW = \langle -1; 1 \rangle$
- Funkcja ma wartość największą równą 1 dla każdego  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .  
Funkcja ma wartość najmniejszą równą -1 dla każdego  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci  $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$  oraz ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci  $(\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest:  
rosnąca w każdym z przedziałów postaci  $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  
malejąca w każdym z przedziałów postaci  $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Równanie  $\sin x = m$  ma nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m \in \langle -1; 1 \rangle$ , a dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$  nie ma rozwiązań.

Zamiast zwrotu: krzywa, która jest wykresem funkcji  $y = f(x)$ , często używamy krótszego: krzywa o równaniu  $y = f(x)$ .

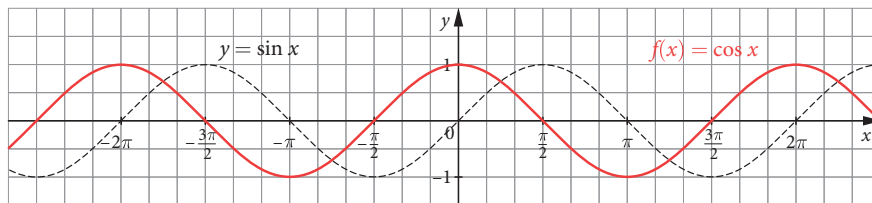
Przypomnijmy:  
Zapis  $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  oznacza rodzinę przedziałów.

### Wykres funkcji $f(x) = \cos(x)$

Do narysowania wykresu funkcji  $f(x) = \cos x$  skorzystamy ze wzoru redukcyjnego:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Wykres funkcji  $f(x) = \cos x$ , tzw. **cosinusoidę**, otrzymamy zatem po przesunięciu sinusoidy  $y = \sin x$  o wektor  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ , czyli o  $\frac{\pi}{2}$  w lewo wzdłuż osi  $x$ .

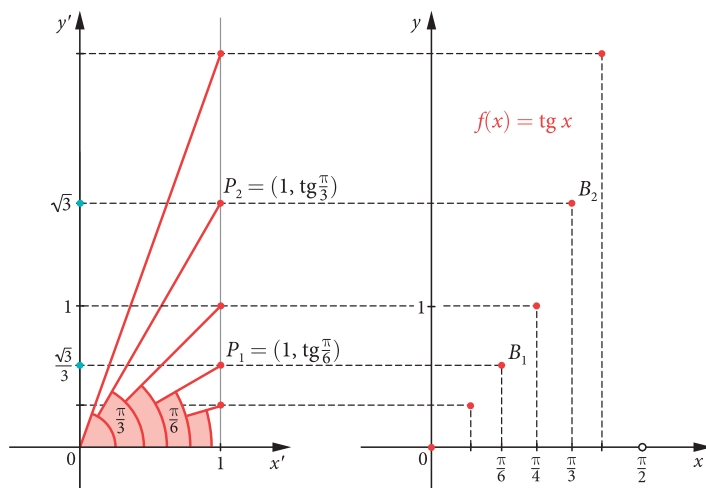


Na podstawie wykresu funkcji  $f(x) = \cos x$  opiszemy jej własności.

- $D = \mathbf{R}$ ,  $ZW = \langle -1; 1 \rangle$
- Funkcja ma wartość największą równą 1 dla każdego  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .  
Funkcja ma wartość najmniejszą równą  $-1$  dla każdego  $x = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$  oraz ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci  $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest:  
rosnąca w każdym z przedziałów postaci  $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  
malejąca w każdym z przedziałów postaci  $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Równanie  $\cos x = m$  ma nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m \in \langle -1; 1 \rangle$ , a dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$  nie ma rozwiązań.

### Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

Ponownie umieszczamy obok siebie dwa układy współrzędnych. W układzie współrzędnych  $x'Oy'$  zaznaczamy kąty, a w układzie  $xOy$  punkty wykresu funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Tym razem skorzystamy z tego, że jeżeli wybierzemy punkt  $P$  na ramieniu końcowym kąta  $\alpha$  tak, aby jego pierwsza współrzędna była równa 1, to jego druga współrzędna jest równa tangensowi kąta  $\alpha$ .

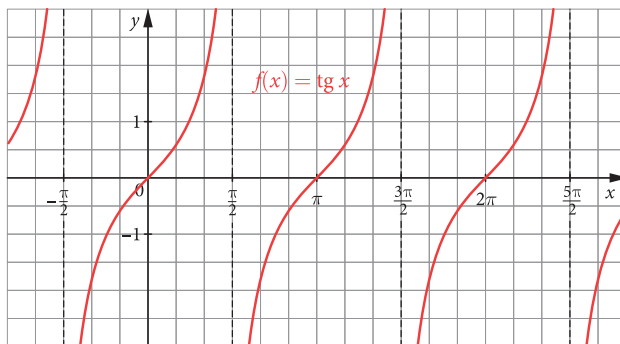


Punkt  $B_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$ , ponieważ jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu  $P_1$  na ramieniu końcowym kąta  $\frac{\pi}{6}$ . Podobnie  $B_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)$ .

Na rysunku zaznaczyliśmy kilka punktów dla kątów z I ćwiartki. Wartości tangensa dla coraz większych kątów ostrych są coraz większe. Im bardziej do dodatniej półosi  $y'$  zbliżają się ramiona wodzące kątów, tym bliżej prostej o równaniu  $x = \frac{\pi}{2}$  znajdują się odpowiadające tym kątom punkty wykresu. Tę prostą będziemy nazywać **asymptotą pionową** wykresu.

Do narysowania następnego fragmentu wykresu można wykorzystać kąty z IV ćwiartki i fakt, że kąty te są przyporządkowane liczbom z przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

Okresem zasadniczym funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} x$  jest  $\pi$ , zatem otrzymany dla  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  wykres powtarzamy w pozostałych przedziałach.



Krzywą będącą wykresem funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} x$  nazywamy **tangensoidą**.

Opiszemy własności funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

- Dziedziną jest zbiór  $\mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Zbiorem wartości jest zbiór  $\mathbf{R}$ .
- Proste o równaniach  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , są asymptotami pionowymi wykresu.
- Funkcja nie ma wartości największej i nie ma wartości najmniejszej.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci  $\left( k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ , a ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci  $\left( \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest rosnąca w każdym z przedziałów postaci  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
- Równanie  $\operatorname{tg} x = m$  ma dla dowolnego  $m \in \mathbf{R}$  nieskończenie wiele rozwiązań.

◀ 7.4. Patrz s. 76.

◀ 7.5. Patrz s. 77.

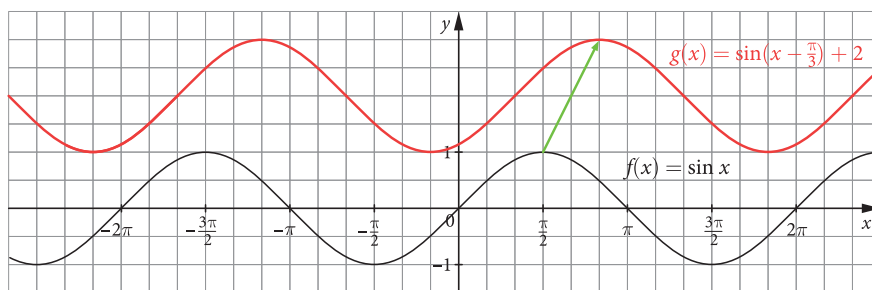
**Przykład 1** ◀ zad. 7.4, 7.5

Narysujemy wykres funkcji  $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ .

**Rozwiązanie**

Wykres funkcji  $g$  otrzymamy w wyniku przesunięcia sinusoidy o równaniu

$y = \sin x$  o wektor  $\left[ \frac{\pi}{3}, 2 \right]$ , czyli o  $\frac{\pi}{3}$  w prawo wzdłuż osi  $x$  i o 2 w górę wzdłuż osi  $y$ .



**Przykład 2** ◀ zad. 7.12

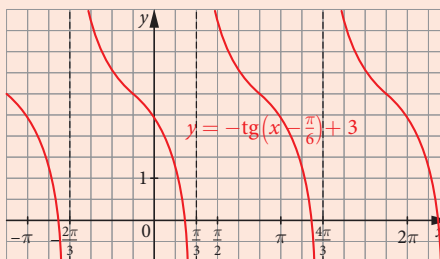
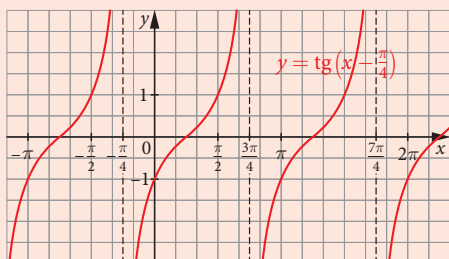
Narysujemy wykres funkcji  $g(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  i wyznaczmy jej miejsca zerowe oraz równania asymptot pionowych wykresu.

◀ 7.12. Narysuj wykres funkcji i podaj równania asymptot pionowych wykresu.

a)  $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$       b)  $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

Odp.: a)  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

b)  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

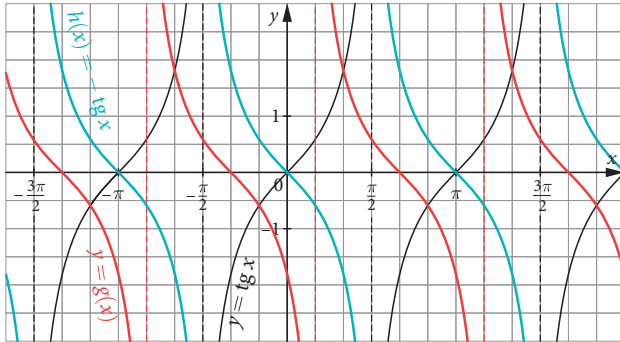


**Rozwiązanie**

Rozwiązujemy zadanie w dwóch krokach.

**Krok 1:** Rysujemy wykres funkcji  $h(x) = -\operatorname{tg} x$  (obraz wykresu funkcji  $y = \operatorname{tg} x$  w symetrii względem osi  $x$ ).

**Krok 2:** Przesuwamy otrzymany w poprzednim kroku wykres o wektor  $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ , czyli o  $\frac{\pi}{3}$  w lewo wzdłuż osi  $x$ .



Z wykresu odczytujemy, że dla funkcji  $g(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ :

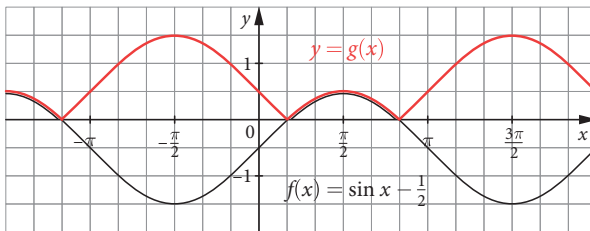
- miejscami zerowymi są liczby postaci  $-\frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- asymptoty pionowe wykresu mają równania postaci  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Przykład 3** ◀ zad. 7.13

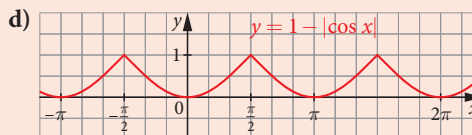
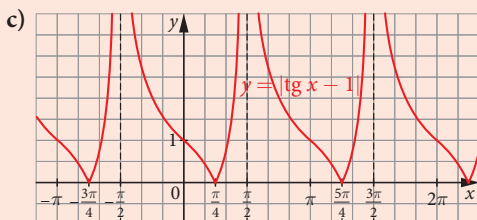
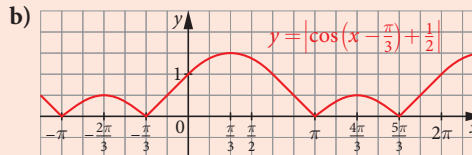
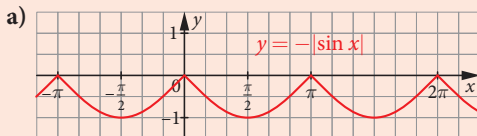
Narysujemy wykres funkcji  $g(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ .

**Rozwiązanie**

Rysujemy wykres funkcji  $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$ . Aby otrzymać wykres funkcji  $g(x) = |f(x)|$ , przekształcamy przez symetrię względem osi  $x$  te fragmenty krzywej o równaniu  $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$ , które leżą poniżej osi  $x$ .

**◀ 7.13. Narysuj wykres funkcji.**

- $y = -|\sin x|$
- $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right|$
- $y = |\operatorname{tg} x - 1|$
- $y = 1 - |\cos x|$

**◀ 7.13. Odp.:**

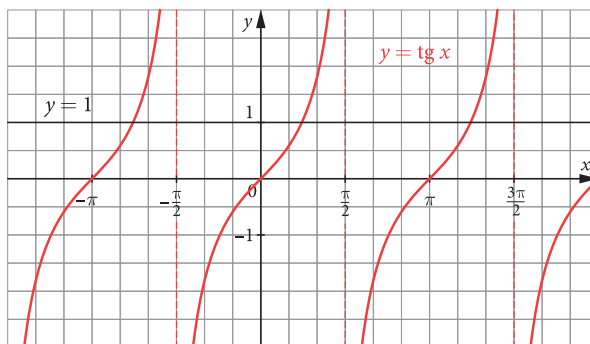
## Elementarne równania i nierówności trygonometryczne

Równanie, w którym niewiadoma występuje tylko jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy **równaniem trygonometrycznym**. Analogicznie – nierówność, w której niewiadoma występuje tylko jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy **nierównością trygonometryczną**.

### Przykład 4

Odczytamy z wykresu funkcji  $y = \operatorname{tg} x$  rozwiązania równania  $\operatorname{tg} x = 1$ .

Rozwiązanie



- ← prowadzimy prostą  $k$  o równaniu  $y = 1$
- ← odczytujemy pierwsze współrzędne punktów przecięcia prostej  $k$  z wykresem

Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Z rysunku możemy odczytać trzy z nich:  $x = -\frac{3}{4}\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  oraz  $x = \frac{5}{4}\pi$ .

Funkcja  $y = \operatorname{tg} x$  jest rosnącą w każdym z przedziałów postaci  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Wystarczy więc odczytać jedno rozwiązanie w którymś z tych przedziałów, np. w przedziale  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , bo pozostałe rozwiązania będą się różniły o wielokrotność okresu zasadniczego tangensa.

Wykres funkcji rosnącej (malejącej) może mieć z prostą równoległą do osi  $x$  co najwyżej jeden punkt wspólny.

**Odp.:** Rozwiązaniami równania są liczby postaci  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

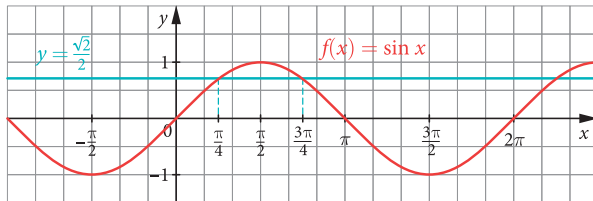
Każda funkcja trygonometryczna jest okresowa, zatem jeżeli ograniczymy się do rozwiązania równania trygonometrycznego w przedziale o długości okresu zasadniczego, to wyznaczymy również pozostałe pierwiastki równania – będą się one różniły o wielokrotność okresu zasadniczego.

## Wniosek

Rozwiązaniami równania  $\operatorname{tg} x = a$  są liczby postaci  $x = x_0 + k\pi$ , gdzie  $x_0$  jest jednym z rozwiązań tego równania i  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Przykład 5

Odczytamy z wykresu funkcji  $y = \sin x$  rozwiązania równania  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



← prowadzimy prostą  
o równaniu  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

W przedziale  $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$  rozwiązaniami równania  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  są liczby  $\frac{\pi}{4}$  oraz  $\frac{3\pi}{4}$ .

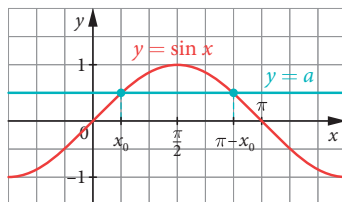
Zatem wszystkie rozwiązania tego równania są postaci  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Odp.:  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

Podsumujmy:

- Równanie  $\sin x = a$  ma rozwiązania pod warunkiem, że  $-1 \leq a \leq 1$ .
- Rozwiązania równań:  $\sin x = -1$ ,  $\sin x = 1$ ,  $\sin x = 0$  zostały już odczytane wcześniej (odpowiednio: argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości najmniejsze, wartości największe oraz miejsca zerowe funkcji).
- Dla  $a \in (-1; 1) - \{0\}$  równanie  $\sin x = a$  ma w przedziale o długości okresu zasadniczego dwa rozwiązania.

Przyjrzyjmy się wykresowi sinusa w przedziale  $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ .



Dla  $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$  równanie  $\sin x = a$  (gdzie  $a \in \langle -1; 1 \rangle$ ) ma jedno rozwiązanie (sinus jest w tym przedziale funkcją rosnącą), dla  $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$  również jedno (sinus jest w tym przedziale funkcją malejącą). Jeżeli pierwsze z tych rozwiązań oznaczmy  $x_0$ , to drugie jest równe  $\pi - x_0$ .

### Wniosek

Rozwiązaniami równania  $\sin x = a$  przy założeniu, że  $-1 \leq a \leq 1$ , są liczby postaci  $x = x_0 + 2k\pi$  oraz  $x = \pi - x_0 + 2k\pi$ , gdzie  $x_0$  jest jednym z rozwiązań tego równania i  $k \in \mathbb{Z}$ .

Cosinusoidę otrzymujemy po przesunięciu sinusoidy w lewo wzdłuż osi  $x$  o  $\frac{\pi}{2}$ , zatem rozwiązania równania  $\cos x = a$  odczytamy z przedziału  $\langle -\pi; \pi \rangle$ .

### Wniosek

Rozwiązaniami równania  $\cos x = a$  przy założeniu, że  $-1 \leq a \leq 1$ , są liczby postaci  $x = x_0 + 2k\pi$  oraz  $x = -x_0 + 2k\pi$ , gdzie  $x_0$  jest jednym z rozwiązań tego równania i  $k \in \mathbb{Z}$ .

◀ 7.21. Rozwiąż równanie.

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos x = -1$

c)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

d)  $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

e)  $2 \cos x + 1 = 0$

f)  $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

Odp.: a)  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

lub  $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b)  $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c)  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d)  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

lub  $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e)  $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

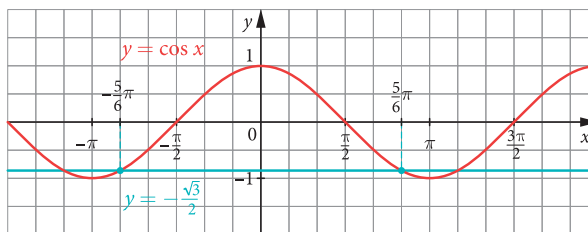
lub  $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f)  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Przykład 6** ◀ zad. 7.21

Rozwiążemy równanie  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Rozwiązanie



W przedziale  $\langle -\pi; \pi \rangle$  rozwiązaniami równania są liczby  $\frac{5\pi}{6}$  i  $-\frac{5\pi}{6}$ . Zatem wszystkie rozwiązania tego równania są postaci  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Odp.:  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Przykład 7** ◀ zad. 7.22

Rozwiążemy równanie  $\sin x = 0,4384$ .

Rozwiązanie

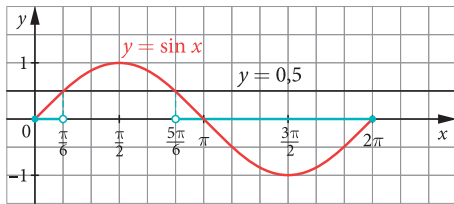
$$0,4384 \approx \sin 26^\circ \text{ i } 26^\circ = \frac{13\pi}{90}$$

Odp.:  $x \approx \frac{13}{90}\pi + 2k\pi$  lub  $x \approx \frac{77}{90}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

**Przykład 8** ◀ zad. 7.23

Narysujemy wykres funkcji  $y = \sin x$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  i odczytamy z niego, które argumenty z tego przedziału spełniają nierówność  $\sin x < 0,5$ .

Rozwiązanie



← prowadzimy prostą o równaniu  $y = 0,5$   
 ← wyznaczamy rozwiązania równania  $\sin x = 0,5$

Poprowadzona prosta przecina ten fragment sinusoidy w dwóch punktach – dla  $x = \frac{\pi}{6}$  oraz  $x = \frac{5\pi}{6}$ . Z wykresu odczytujemy, że  $\sin x < 0,5$  dla  $x \in \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{6}; 2\pi \rangle$ .

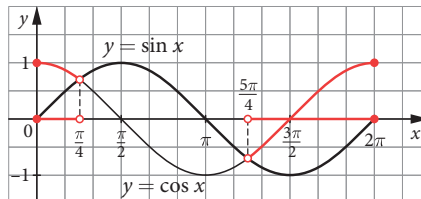
Odp.:  $x \in \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{6}; 2\pi \rangle$

**Przykład 9** ◀ zad. 7.24

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $y = \sin x$  i  $y = \cos x$ . Odczytamy, które argumenty z przedziału  $\langle 0; 2\pi \rangle$  spełniają nierówność  $\cos x > \sin x$ .

Rozwiązanie

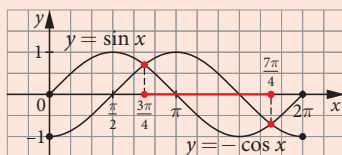
Fragmenty cosinusoidy leżące w rozpatrywanym przedziale powyżej sinusoidy zaznaczone są na rysunku kolorem czerwonym. Na osi  $x$  odczytujemy argumenty spełniające żadaną nierówność.



Odp.:  $x \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{4}; 2\pi \rangle$

◀ 7.24. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = \sin x$  oraz  $g(x) = -\cos x$  i odczytaj, dla jakich argumentów z przedziału  $\langle 0; 2\pi \rangle$  prawdziwa jest nierówność  $\sin x + \cos x \leq 0$ .

Odp.:



$x \in \langle \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \rangle$

◀ 7.22. Rozwiąż równanie.

- a)  $\sin x = 0,829$
- b)  $\cos x = 0,342$
- c)  $\operatorname{tg} x = 1,327$
- d)  $\sin x = -0,6428$
- e)  $\cos x = -0,515$
- f)  $\operatorname{tg} x = -11,43$

Odp.: a)  $x \approx \frac{14}{45}\pi + 2k\pi$

lub  $x \approx \frac{31}{45}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

b)  $x \approx \frac{7}{18}\pi + 2k\pi$

lub  $x \approx -\frac{7}{18}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

c)  $x \approx \frac{53}{180}\pi + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

d)  $x \approx -\frac{2}{9}\pi + 2k\pi$

lub  $x \approx -\frac{7}{9}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

e)  $x \approx \frac{121}{180}\pi + 2k\pi$  lub

$x \approx -\frac{121}{180}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

f)  $x \approx -\frac{17}{36}\pi + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

◀ 7.23. Rozwiąż nierówność dla  $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ .

a)  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

b)  $2 \cos x < \sqrt{3}$

c)  $\sqrt{3} \operatorname{tg} x > 1$

d)  $6 \cos x + 3\sqrt{2} \leq 0$

Odp.:

a)  $x \in \langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \rangle$

b)  $x \in \langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \rangle$

c)  $x \in \langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2} \rangle \cup$

$\cup \langle -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \rangle$

d)  $x \in \langle -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \rangle$

## ◀ 7.25. Rozwiąż nierówność.

- a)  $\sin x + 1 > 0$   
 b)  $\sqrt{2} \cos x \leq 1$   
 c)  $\operatorname{tg} x > -1$   
 d)  $2 \cos x + 1 > 0$

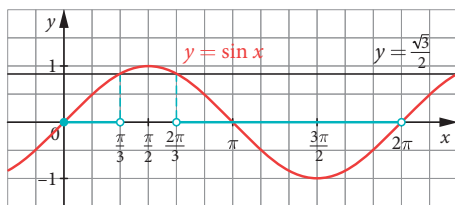
Odp.:

- a)  $x \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$   
 b)  $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle,$   
 $k \in \mathbf{Z}$   
 c)  $x \in \left( -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$   
 d)  $x \in \left( -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right),$   
 $k \in \mathbf{Z}$

## Przykład 10 ◀ zad. 7.25

Rozwiążemy nierówność  $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

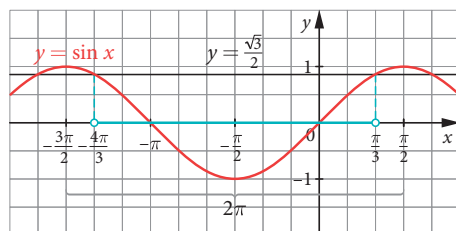
Rozwiązanie



◀ opisujemy najpierw rozwiązania nierówności np. w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  lub jakimkolwiek innym przedziale o długości równej okresowi zasadniczemu funkcji

W przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby należące do sumy przedziałów  $\langle 0; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \left( \frac{2\pi}{3}; 2\pi \right)$ . Zatem wszystkie rozwiązania tej nierówności można zapisać w postaci  $\left\langle 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle \cup \left( \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ .

Rozwiązania tej nierówności można zapisać na wiele sposobów. Gdybyśmy na przykład rozwiązyli na początku nierówność w przedziale  $\left\langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , otrzymalibyśmy rozwiązania zapisane w postaci  $x \in \left( -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ .

Odp.:  $x \in \left( -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ 

## Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

7.1. Wskaż funkcję, która jest rosnąca w przedziale  $\langle \pi; 2\pi \rangle$ .

- A.  $y = \sin x$  C.  $y = \sin(x - \pi)$   
 B.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  D.  $y = \sin(x + 2\pi)$

7.2. Wskaż okres zasadniczy funkcji  $y = |\cos x|$ .

- A.  $\frac{\pi}{2}$  B.  $\pi$  C.  $2\pi$  D.  $4\pi$

7.3. Wskaż liczbę rozwiązań równania  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

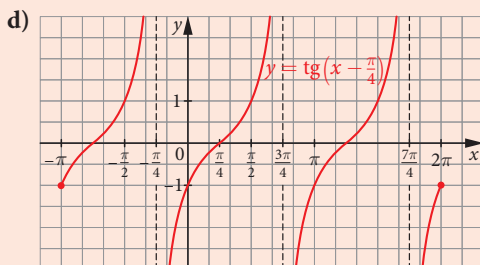
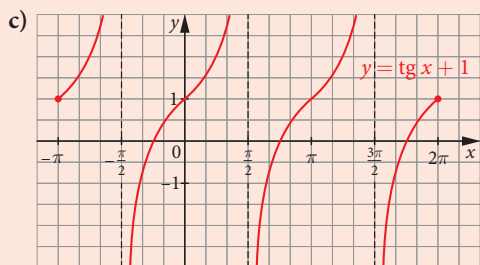
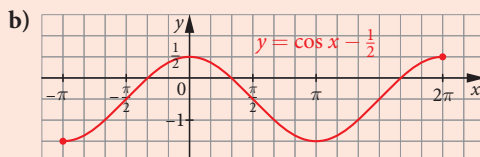
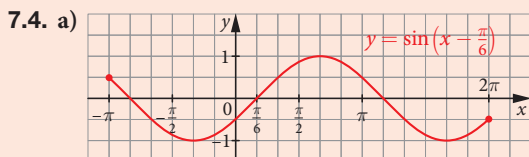
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

## Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. B

7.2. B

7.3. C



**7.4.** Narysuj wykres funkcji dla  $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

a)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c)  $y = \operatorname{tg} x + 1$

b)  $y = \cos x - \frac{1}{2}$

d)  $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

**7.5.** Narysuj wykres funkcji.

a)  $y = -\cos x + \frac{1}{2}$

c)  $y = 3 - \cos x$

b)  $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d)  $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

**7.6.** Wyznacz zbiór wartości funkcji.

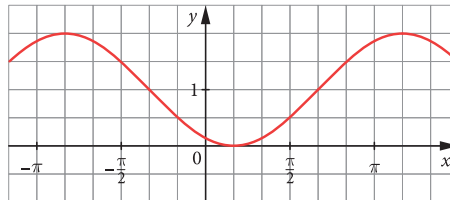
a)  $f(x) = \sin x + 1$

c)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b)  $f(x) = -\sin x$

d)  $f(x) = \sin(x + \pi) - 1$

**7.7.** Funkcja trygonometryczna przedstawiona na wykresie ma okres zasadniczy  $2\pi$ . Podaj przykładowy wzór tej funkcji.



**7.8.** Na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  określ przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

b)  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

**7.9.** Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji  $f$  w podanym przedziale. Dla których argumentów są przyjmowane te wartości?

a)  $f(x) = \sin x$   $x \in \left\langle 0; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$

b)  $f(x) = \sin x$   $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{7}{4}\pi \right\rangle$

c)  $f(x) = \cos x$   $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\rangle$

**7.10.** Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w podanym przedziale. Dla których argumentów są przyjmowane te wartości?

a)  $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2}$   $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$

b)  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$   $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \pi \right\rangle$

**7.4.** Patrz s. 76.

**7.6.** a)  $\langle 0; 2 \rangle$  b)  $\langle -1; 1 \rangle$

c)  $\langle -1; 1 \rangle$  d)  $\langle -2; 0 \rangle$

**7.7.** np.  $f(x) = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + 1$

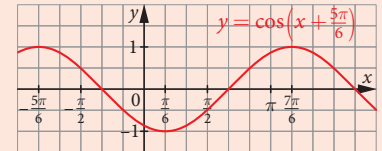
**7.8.** a)

maleje w każdym z przedziałów

$$\left\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle,$$

rośnie w każdym z przedziałów

$$\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

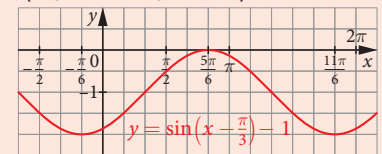


b) maleje w każdym z przedziałów

$$\left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle,$$

rośnie w każdym z przedziałów

$$\left\langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$



**7.9.** a) wartość najmniejsza:  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

dla  $x = \frac{4\pi}{3}$ , wartość największa: 1

dla  $x = \frac{\pi}{2}$

b) wartość najmniejsza: -1

dla  $x = \frac{3\pi}{2}$ , wartość największa: 1

dla  $x = \frac{\pi}{2}$

c) wartość najmniejsza: -1

dla  $x = \pi$ , wartość największa: 0

dla  $x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

**7.10.** a) wartość najmniejsza:

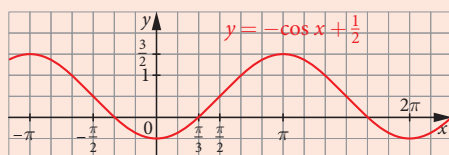
$-\frac{1}{2}$  dla  $x = \frac{\pi}{2}$ , wartość największa:

$1\frac{1}{2}$  dla  $x = \frac{3\pi}{2}$

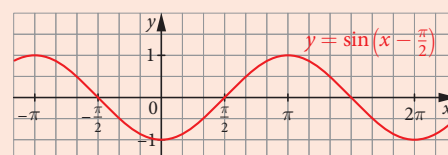
b) wartość najmniejsza: 0 dla  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,

wartość największa: 2 dla  $x = \frac{3\pi}{4}$

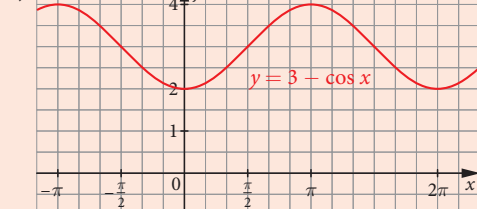
**7.5.** a)



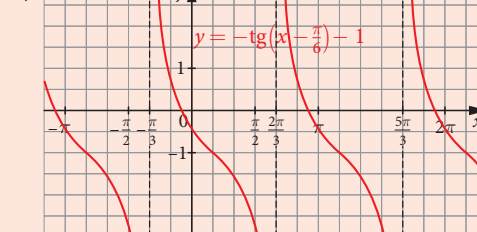
b)



c)



d)



7.11. Patrz s. 79.

7.12. Patrz s. 70.

7.13. Patrz s. 71.

7.15. a), b), c), d) dodatni,  
e), f) ujemny7.16. a), c) dodatni,  
b), d), e), f) ujemny

7.17.

a)  $\sin 5 < \sin 3 < \sin \frac{1}{2} < \sin(-4)$   
b)  $\cos 3 < \cos 2 < \cos(-1) < \cos 6$ 7.19.  $\sin x \geq -1$  dla  $x \in \mathbb{R}$   
i  $\cos x \geq -1$  dla  $x \in \mathbb{R}$ Poza tym jeżeli  $\sin x = -1$ ,  
to  $\cos x = 0$ . Zatem  
 $\sin x + \cos x > -2$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
czyli  $f(x) > 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .  
Stąd wynika, że funkcja  $f$  nie ma  
miejsc zerowych.7.20. a)  $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ b)  $x \in \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$ c)  $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$ d)  $x \in \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ 

7.11. Narysuj wykres funkcji i odczytaj jej miejsca zerowe.

a)  $y = \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

c)  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b)  $y = \cos x + \frac{1}{2}$

d)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$

7.12. Narysuj wykres funkcji i podaj równania asymptot pionowych wykresu.

a)  $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b)  $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

7.13. Narysuj wykres funkcji.

a)  $y = -|\sin x|$

c)  $y = |\operatorname{tg} x - 1|$

b)  $y = \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \right|$

d)  $y = 1 - |\cos x|$

\* 7.14. Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{\cos^2 x - |\cos x|}{\cos x}$  w przedziale  $(-\pi; 3\pi)$  i podaj argumenty, dla których wartości tej funkcji są równe  $\frac{1}{2}$ .

7.15. Na podstawie odpowiednich wykresów ustal znak różnicy.

a)  $\sin 2,5 - \sin 3$

c)  $\sin(-4) - \sin(-1)$

e)  $\cos 7 - \cos(-0,5)$

b)  $\cos 4 - \cos 3$

d)  $\cos(-5) - \cos(-2)$

f)  $\sin 8,5 - \sin 1,5$

7.16. Na podstawie odpowiednich wykresów ustal znak liczby.

a)  $\sin 2 - \cos 4$

c)  $\cos 8 - \sin 4,5$

e)  $\cos(-5) + \cos(-2,5)$

b)  $\cos(-3) - \sin(-4)$

d)  $\sin 2,5 + \cos(-2,5)$

f)  $\cos 1 - \sin 7$

7.17. Skorzystaj z odpowiedniego wykresu funkcji i ustaw podane liczby od najmniejszej do największej.

a)  $\sin 3, \sin(-4), \sin 5, \sin \frac{1}{2}$

b)  $\cos 2, \cos 6, \cos 3, \cos(-1)$

\* 7.18. Narysuj wykres funkcji.

a)  $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - |\sin x|)$

7.19. Czy funkcja  $f(x) = \sin x + \cos x + 2$  ma miejsca zerowe? Odpowiedź uzasadnij.7.20. Rozwiąż równanie dla  $x \in (0; 2\pi)$ .

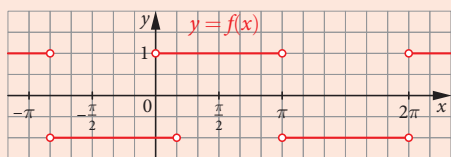
a)  $\sin x = \frac{1}{2}$

c)  $\operatorname{tg} x = 1$

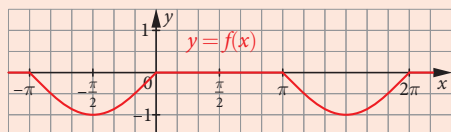
b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.18. a)  $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sin x > 0 \\ -1 & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$



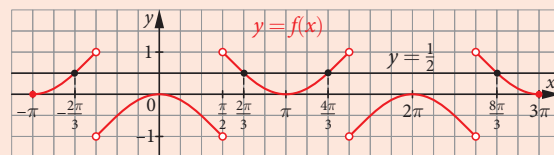
b)  $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - |\sin x|) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sin x > 0 \\ \sin x & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$



7.14. Jeżeli  $\cos x > 0$ , to  $f(x) = \frac{\cos^2 x - \cos x}{\cos x} = \cos x - 1$ .

Jeżeli  $\cos x < 0$ , to  $f(x) = \frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos x} = \cos x + 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 1 & \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \cos x + 1 & \text{dla } x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right) \end{cases}$$



Odp.:  $f(x) = \frac{1}{2}$  dla  $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right\}$

**7.21.** Rozwiąż równanie.

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

e)  $2 \cos x + 1 = 0$

b)  $\cos x = -1$

d)  $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

f)  $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

**7.22.** Rozwiąż równanie.

a)  $\sin x = 0,829$

c)  $\operatorname{tg} x = 1,327$

e)  $\cos x = -0,515$

b)  $\cos x = 0,342$

d)  $\sin x = -0,6428$

f)  $\operatorname{tg} x = -11,43$

**7.23.** Rozwiąż nierówność dla  $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ .

a)  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

b)  $2 \cos x < \sqrt{3}$

c)  $\sqrt{3} \operatorname{tg} x > 1$

d)  $6 \cos x + 3\sqrt{2} \leq 0$

**7.24.** Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = \sin x$  oraz  $g(x) = -\cos x$  i odczytaj, dla jakich argumentów z przedziału  $\langle 0; 2\pi \rangle$  prawdziwa jest nierówność  $\sin x + \cos x \leq 0$ .

**7.25.** Rozwiąż nierówność.

a)  $\sin x + 1 > 0$

b)  $\sqrt{2} \cos x \leq 1$

c)  $\operatorname{tg} x > -1$

d)  $2 \cos x + 1 > 0$

\* **7.26.** Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $\cos x = -\frac{1}{2}$  ma w przedziale  $\langle 0; m \rangle$  dokładnie jedno rozwiązanie?

### Prosto do matury



**1.** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji trygonometrycznej  $f$  o okresie zasadniczym  $2\pi$ .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

Funkcja  $f$  może być opisana za pomocą wzoru

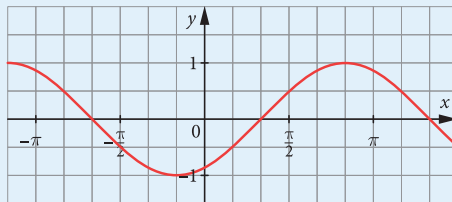
A.  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .    B.  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .    C.  $f(x) = \cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$ .

**2.** Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji  $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2}$  w przedziale  $\left\langle \frac{7\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$ . Podaj argumenty, dla których są przyjmowane te wartości.

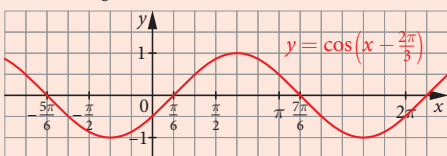
**3.** Rozwiąż równanie  $\operatorname{tg} x = -0,7265$  dla  $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

**4.** Rozwiąż nierówność  $\cos x \leq -\frac{1}{2}$  dla  $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ .

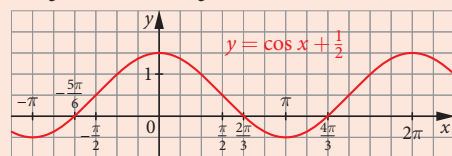
**5.** Rozwiąż równanie  $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ .



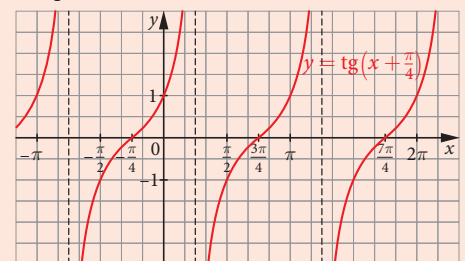
**7.11. a)**  $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



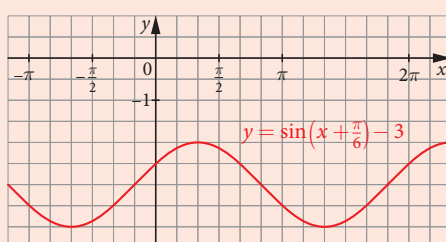
**b)**  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  lub  $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



**c)**  $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



**d)** brak miejsc zerowych



**7.21.** Patrz s. 74.

**7.22.** Patrz s. 75.

**7.23.**

a)  $x \in \left\langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

b)  $x \in \left( -\frac{11\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right) \cup \left( \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right)$

c)  $x \in \left( -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2} \right) \cup$

$\cup \left( -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left( \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left( \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right)$

d)  $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

**7.24.** Patrz s. 75.

**7.25.** Patrz s. 76.

**7.26.** Najmniejsze dodatnie

rozwiązania równania  $\cos x = -\frac{1}{2}$

to  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  i  $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ .

Zatem dane równanie ma

w przedziale  $\langle 0; m \rangle$  co najmniej

jedno rozwiązanie, gdy  $m \geq \frac{2\pi}{3}$ ,

a co najwyżej jedno rozwiązanie, gdy  $m > 0$  i  $m < \frac{4\pi}{3}$ .

Odp.:  $m \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

**Prosto do matury**

**1.** P, F, P

**2.** wartość najmniejsza:  $\frac{1}{2}$

dla  $x = 2\pi$ , wartość największa:  $\frac{3}{2}$

dla  $x = \frac{3\pi}{2}$

**3.**  $x \approx -\frac{\pi}{5}$  lub  $x \approx \frac{4\pi}{5}$  lub  $x \approx \frac{9\pi}{5}$

**4.**  $x \in \left\langle -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

**5.**  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

## 8. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

### Umiejętności:

- stosowanie wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów
- stosowanie wzorów na sinus, cosinus i tangens kąta podwojonego

### Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów

Wzory podane w twierdzeniu wyrażają związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta  $\alpha + \beta$  lub kąta  $\alpha - \beta$  a funkcjami trygonometrycznymi kątów  $\alpha$  i  $\beta$ .

#### Twierdzenie

Dla dowolnych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  prawdziwe są wzory:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

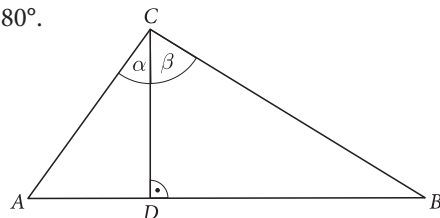
### Dowód

Wzory redukcyjne umożliwiają wyrażenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą funkcji trygonometrycznych odpowiednich kątów ostrych. Wyprowadzenie wzorów podanych w twierdzeniu ograniczymy więc do sytuacji, w której kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są ostre. Ponadto będziemy korzystać z własności trójkąta na płaszczyźnie, zatem kąty  $\alpha$  i  $\beta$  przedstawimy w mierze stopniowej.

Skoro  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami ostrymi, to  $\alpha + \beta < 180^\circ$ .

Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, w których jeden z kątów ma miarę  $\alpha + \beta$ .

Rozważmy trójkąt  $ABC$  przedstawiony na rysunku. Obliczymy jego pole dwoma sposobami.



$$(1) \quad P_{ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$(2) \quad P_{ABC} = P_{ADC} + P_{BDC} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |DC| + \frac{1}{2} |DB| \cdot |DC|$$

Zauważmy, że:

$$|AD| = |AC| \sin \alpha \quad |DB| = |BC| \sin \beta$$

$$|DC| = |BC| \cos \beta \quad |DC| = |AC| \cos \alpha$$

#### ZZ i MKP

temat 1.12

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

**Generator**  
testów i sprawdzianów

Zatem, ze wzoru (2),  $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \sin \alpha \cdot |BC| \cos \beta + \frac{1}{2}|BC| \sin \beta \cdot |AC| \cos \alpha$ . Stąd:

$$(3) \quad P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

Porównujemy równości (1) i (3), i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

czyli

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzór na **sinus sumy dwóch kątów**. Skorzystamy z niego przy dowodzeniu następnych wzorów.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \leftarrow \sin(-\beta) = -\sin \beta, \cos(-\beta) = \cos \beta \end{aligned}$$

Zatem:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Otrzymaliśmy wzór na **sinus różnicy dwóch kątów**.

Podobnie wyprowadzamy wzór na **cosinus sumy dwóch kątów**.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = & \leftarrow \sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma \\ &= \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) = & \leftarrow \sin(\delta - \beta) = \sin \delta \cos \beta - \cos \delta \sin \beta \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta = & \leftarrow \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Zatem:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Wyprowadzenie wzoru na **cosinus różnicy dwóch kątów** pozostawiamy jako zadanie.

**Koniec dowodu**

### Przykład 1

Obliczymy wartości funkcji sinus oraz cosinus kątów  $75^\circ$  i  $15^\circ$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } \cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

◀8.5. Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  spełniają warunki:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\cos \beta = -\frac{3}{4}$ . Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta  $\alpha + \beta$ .

Odp.:  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-15 + \sqrt{77}}{24}$ ,

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{-3\sqrt{11} - 5\sqrt{7}}{24}$ ,

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{27\sqrt{7} - 20\sqrt{11}}{19}$

◀8.6. Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  spełniają warunki:  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $270^\circ < \beta < 360^\circ$ ,  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\sin \beta = -\frac{1}{3}$ . Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta  $\alpha - \beta$ .

Odp.:  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}$ ,

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{9}$ ,

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$

### Przykład 2 ◀ zad. 8.5, 8.6

Obliczymy  $\sin(\alpha + \beta)$  i  $\cos(\alpha + \beta)$  dla  $\alpha$  i  $\beta$  takich, że  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $180^\circ < \beta < 270^\circ$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$  i  $\sin \beta = -\frac{3}{5}$ .

#### Rozwiązanie

Obliczamy wartości  $\sin \alpha$  oraz  $\cos \beta$  występujące w potrzebnych nam wzorach.

•  $\sin^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1$

◀  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$ , stąd  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

◀  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , więc  $\sin \alpha > 0$

•  $\frac{9}{25} + \cos^2 \beta = 1$

$\cos^2 \beta = \frac{16}{25}$ , stąd  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$

◀  $180^\circ < \beta < 270^\circ$ , więc  $\cos \beta < 0$

Zatem:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-3 - 4\sqrt{15}}{20}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-4 + 3\sqrt{15}}{20}$

Odp.:  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-3 - 4\sqrt{15}}{20}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{-4 + 3\sqrt{15}}{20}$

### Tangens sumy i tangens różnicy kątów

Korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, można wyprowadzić wzory na tangens sumy i tangens różnicy kątów.

#### Twierdzenie

Dla dowolnych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  prawdziwe są wzory:

•  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

•  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

Udowodnimy pierwszy z tych wzorów.

#### Dowód

Lewa strona wzoru jest określona, gdy  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Prawa strona jest określona, gdy  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  i  $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$ .

Zastanówmy się, dla jakich kątów spełniony jest ostatni z wymienionych warunków.

Zauważmy, że gdy  $\operatorname{tg} \alpha = 0$  lub  $\operatorname{tg} \beta = 0$ , to  $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$ .

Przyjmijmy, że  $\operatorname{tg} \beta \neq 0$ , czyli  $\beta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Warunek  $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$  można teraz zapisać w postaci  $\operatorname{tg} \alpha \neq \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ . Stąd:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \neq \frac{\cos \beta}{\sin \beta}, \text{ czyli } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \neq 0, \text{ więc } \cos(\alpha + \beta) \neq 0$$

Zatem  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Ten warunek został już uwzględniony jako założenie dotyczące lewej strony wzoru. Ostatecznie wszystkie założenia konieczne w tym wzorze tworzą następujący układ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbf{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, & m \in \mathbf{Z} \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, & l \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Przekształcamy lewą stronę wzoru.

$$\begin{aligned} L = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \leftarrow \text{stosujemy wzory na sinus i cosinus sumy kątów} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \leftarrow \cos \alpha \cos \beta \neq 0, \text{ więc dzielimy każdy składnik przez } \cos \alpha \cos \beta \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

**Koniec dowodu**

Wyprowadzenie wzoru na **tangens różnicy dwóch kątów** pozostawiamy jako zadanie do samodzielnego wykonania.

**Przykład 3**  $\triangleleft$  zad. 8.7

Dane są kąty  $\alpha$  i  $\beta$  takie, że  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$  i  $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{2}$ . Obliczmy wartość funkcji tangens kąta  $\alpha - \beta$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\sqrt{5} - (-\sqrt{2})}{1 + \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{10})}{(1 - \sqrt{10})(1 + \sqrt{10})} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{1 - 10} = \frac{3\sqrt{5} + 6\sqrt{2}}{9} = -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3}$$

**◀ 8.7.** Dane są:  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}$

i  $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$ . Oblicz wartości tangensa kątów  $\alpha + \beta$  oraz  $\alpha - \beta$ .

$$\text{Odp.: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{11}{16},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{19}{4}$$

## Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

Za pomocą wzorów na funkcje trygonometryczne sumy kątów możemy wyprowadzić wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### Twierdzenie

Dla dowolnego kąta  $\alpha$  prawdziwe są wzory:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Dla kątów  $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$  i  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) prawdziwy jest wzór:

- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Można skorzystać z jedyńki trygonometrycznej i wyrazić  $\cos 2\alpha$  za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej zmiennej  $\alpha$ :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

lub

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

◀ 8.7. Patrz s. 83.

### Przykład 4

◀ zad. 8.7

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ . Obliczymy  $\sin 2\alpha$  i  $\cos 2\alpha$ .

#### Rozwiązanie

Obliczamy wartość  $\cos \alpha$ .

$$\frac{49}{625} + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{576}{625}, \quad \text{stąd } \cos \alpha = \frac{24}{25} \quad \leftarrow \cos \alpha > 0$$

Zatem:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{336}{625}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{576}{625} - \frac{49}{625} = \frac{527}{625}$$

$$\text{Odp.: } \sin 2\alpha = \frac{336}{625}, \quad \cos 2\alpha = \frac{527}{625}$$

◀ 8.19. Rozwiązanie a) •  $1 + \cos 2\alpha \neq 0$ , czyli  $\cos 2\alpha \neq -1$ , stąd  $2\alpha \neq \pi + 2k\pi$ , czyli  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

•  $1 + \cos \alpha \neq 0$ , czyli  $\cos \alpha \neq -1$ , stąd  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , •  $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ , stąd  $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Założenia:  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  i  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$L = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = P$$

b) Założenia:  $1 + \cos 2\alpha \neq 0$ , czyli  $\cos 2\alpha \neq -1$ , stąd  $2\alpha \neq \pi + 2k\pi$ , czyli  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \sin \alpha = P$$

c) •  $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \neq 0$ , czyli  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \neq -1$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha \neq -1$ , stąd  $2\alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ , czyli  $\alpha \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

•  $\cos \alpha \neq 0$ , stąd  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Założenia:  $\alpha \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$  i  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$L = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = P$$

**Przykład 5** ◀ zad. 8.18

Obliczmy dokładną wartość tangensa kąta  $22,5^\circ$ .

**Rozwiązanie**

Skorzystamy ze wzoru na tangens kąta podwojonego:  $\operatorname{tg}(2 \cdot 22,5^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 22,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 22,5^\circ}$ .

Niech  $\operatorname{tg} 22,5^\circ = x$ . Otrzymujemy równanie:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2x}{1-x^2}, \text{ stąd } 1-x^2 = 2x \quad \leftarrow \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Delta = 8, \quad x = -1 - \sqrt{2} \text{ lub } x = -1 + \sqrt{2}$$

Tangens kąta  $22,5^\circ$  jest liczbą dodatnią, więc rozwiązaniem równania jest druga z otrzymanych liczb.

Odp.:  $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$

**Przykład 6** ◀ zad. 8.19

Udowodnimy tożsamość  $1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos x}$ .

**Dowód**

Zbadamy najpierw, dla jakich argumentów wyrażenia po obu stronach znaku równości mają sens.

Aby określone były funkcje  $\operatorname{tg} x$  i  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , muszą być spełnione następujące warunki:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{czyli } x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Aby określona była prawa strona równania, należy założyć, że:

$$\cos x \neq 0, \quad \text{czyli } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Ostatecznie  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  i  $x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$ .

Przekształcamy lewą stronę równania.

$$\begin{aligned} L &= 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \quad \leftarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \quad \leftarrow \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y) \\ &= \frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x} = P \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy prawą stronę równania. Zatem dla wszystkich kątów spełniających założenia  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  i  $x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$ , podana równość jest prawdziwa.

**Koniec dowodu**

**◀ 8.19. Ciąg dalszy. d)** Założenia:  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 

$$\begin{aligned} L &= \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = P \end{aligned}$$

e)  $\sin \alpha \neq 0$  i  $\cos \alpha \neq -1$ , i  $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ , stąd  $\alpha \neq k\pi$  i  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ , i  $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$ .

Założenia:  $\alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

$$P = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = L$$

f)  $\sin 2\alpha \neq 0$  i  $\cos 2\alpha \neq -1$ , i  $\cos \alpha \neq 0$ , stąd  $2\alpha \neq k\pi$  i  $2\alpha \neq \pi + 2k\pi$ , i  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$  i  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , i  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$ .

Założenia:  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$

$$L = \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha = P$$

**◀ 8.18. Wykaż, że**

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}.$$

**Rozwiązanie**

$$1 - 2 \sin^2 22,5^\circ = \cos 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin^2 22,5^\circ &= \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$\sin 22,5^\circ > 0$ , więc  $\sin 22,5^\circ =$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

**◀ 8.19. Wykaż, że podane równanie jest tożsamością. Zapisz konieczne założenia.**

a)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

b)  $\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \sin \alpha$

c)  $\frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

d)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

e)  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$

f)  $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

**Przykład 7** ◀ zad. 8.20

Uprościmy wyrażenie  $\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x}$ .

**Rozwiązanie**

Zapiszemy najpierw konieczne założenia.

Wyrażenie  $\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x}$  jest określone, gdy  $1 - \cos 4x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x} &= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - 1 + 2 \sin^2 2x} = && \leftarrow \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x \\ &= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2 \sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2 \cdot 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{8} && \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

**Odp.:** Dla każdego kąta  $x$  spełniającego założenie  $1 - \cos 4x \neq 0$ , wartość podanego wyrażenia jest równa  $\frac{1}{8}$ .

**Zadania**

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

**Odpowiedzi i rozwiązania**

8.1. D

**8.1.** Wiadomo, że  $\alpha$  jest kątem rozwartym i  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Wskaż wartość  $\sin 2\alpha$ .

- A.  $\frac{10}{13}$       B.  $-\frac{10}{13}$       C.  $\frac{120}{169}$       D.  $-\frac{120}{169}$

8.2. B

**8.2.** Wskaż wartość  $\lg 75^\circ$ .

- A.  $\sqrt{3} - 1$       B.  $\sqrt{3} + 2$       C.  $\frac{\sqrt{3} + 1}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3} + 3}{3}$

8.3. C

**8.3.** Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu  $\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ .

- A.  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$       B.  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$       C.  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$       D.  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

**8.4.**  $\frac{-3\sqrt{3} - 2\sqrt{10}}{14}$

**8.4.** Kąt  $\alpha$  jest rozwarty i  $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$ . Oblicz  $\sin(120^\circ + \alpha)$ .

**8.5.**  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-15 + \sqrt{77}}{24}$ ,

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{-3\sqrt{11} - 5\sqrt{7}}{24}$ ,

$\lg(\alpha + \beta) = \frac{27\sqrt{7} - 20\sqrt{11}}{19}$

**8.5.** Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  spełniają warunki:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\cos \beta = -\frac{3}{4}$ . Oblicz wartości sinus, cosinusa i tangensa kąta  $\alpha + \beta$ .

◀ **8.20.** Uprość wyrażenie  $\frac{4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}$ .

**Rozwiązanie**

$$\frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \lg 4x$$

$\cos 4x \neq 0$ , stąd  $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.6.** Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  spełniają warunki:  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $270^\circ < \beta < 360^\circ$ ,  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\sin \beta = -\frac{1}{3}$ . Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta  $\alpha - \beta$ .

**8.7.** Dane są:  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}$  i  $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$ . Oblicz wartości tangensa kątów  $\alpha + \beta$  oraz  $\alpha - \beta$ .

**8.8.** Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ . Oblicz  $\sin 2\alpha$ .

**8.9.** Kąt  $\alpha$  spełnia warunki:  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  oraz  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Oblicz  $\cos 3\alpha$ .

**8.10.** Dany jest  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ . Oblicz  $\operatorname{tg} 4\alpha$ .

**8.11.** Oblicz wartość wyrażenia bez użycia tablic trygonometrycznych.

- a)  $\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$
- b)  $\sin 80^\circ \cdot \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \cdot \sin 50^\circ$
- c)  $\cos 15^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 30^\circ$
- d)  $\cos 70^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ$

**8.12.** Oblicz wartość wyrażenia bez użycia tablic trygonometrycznych.

- a)  $\frac{2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ}{\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ}$
- b)  $\frac{\cos^2 67^\circ 30' - \sin^2 67^\circ 30'}{\sin 112^\circ 30' \cdot \cos 112^\circ 30'}$
- c)  $\frac{\sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ}{\cos (90^\circ - 88^\circ)}$
- d)  $\frac{\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ}{\sin 12^\circ \cdot \sin 78^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ}$

**D 8.13.** Udowodnij wzór  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ . Skorzystaj ze wzoru na cosinus sumy kątów.

**D 8.14.** Udowodnij, że  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ . Zapisz konieczne założenia. Skorzystaj ze wzoru na tangens sumy kątów.

**8.15.** Oblicz wartość wyrażenia. Zapisz konieczne założenia.

$$1 - 2 \cos x + \cos 2x + 4 \cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$$

**8.16.** Oblicz  $\log(\cos 2x + \sin 2x \operatorname{tg} x)$ . Podaj konieczne założenia.

$$\begin{aligned} 8.13. \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha(-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$8.14. \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ i } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ i } \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$8.6. \sin(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{9},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$$

$$8.7. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{11}{16},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{19}{4}$$

$$8.8. \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$8.9. \frac{23}{27}$$

$$8.10. -\frac{24}{7}$$

$$8.11. \text{ a) } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ b) } \frac{1}{2} \quad \text{ c) } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ d) } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$8.12. \text{ a) } -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ b) } 2 \quad \text{ c) } \frac{1}{2} \quad \text{ d) } -2$$

$$8.15. 0, x \in \mathbb{R}$$

$$8.16. 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

8.17. a)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

b)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

8.18.  $1 - 2 \sin^2 22,5^\circ = \cos 45^\circ$

$$\sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 22,5^\circ > 0, \text{ więc } \sin 22,5^\circ =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

8.19. Patrz s. 84, 85.

8.20. Patrz s. 86.

8.17. Zapisz podane wyrażenie w postaci funkcji trygonometrycznej sumy lub różnicy kątów.

a)  $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$

8.18. Wykaż, że  $\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ .

8.19. Wykaż, że podane równanie jest tożsamością. Zapisz konieczne założenia.

a)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

d)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b)  $\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \sin \alpha$

e)  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$

c)  $\frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

f)  $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

\* 8.20. Uprość wyrażenie  $\frac{4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}$ .

\* 8.21. Udowodnij równość  $\cos \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{360^\circ}{5} = \frac{1}{4}$ .

## Prosto do matury

1. F, F, P

2.  $\frac{\sqrt{21} - 4\sqrt{6}}{25}$

3.  $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  lub  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

## Prosto do matury

1. Wiadomo, że  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami ostrymi oraz  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  i  $\sin \beta = \frac{1}{3}$ .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A.  $\sin(\alpha + \beta) = 1$       B.  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3}$       C.  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{10} + 2}{9}$

2. Dane są kąty  $\alpha$  i  $\beta$  takie, że  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ,  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = -0,4$ ,  $\cos \beta = -0,2$ . Oblicz  $\cos(\alpha - \beta)$ .3. Dany jest  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Oblicz  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .4. Wykaż, że równanie  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$  jest tożsamością.

5. Udowodnij tożsamość. Zapisz konieczne założenia.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$$

8.21.  $L = \cos \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{360^\circ}{5} = \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4} = P$

$$4. L = \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = P$$

5. Założenia:

•  $\cos 3\alpha \neq 0$ , stąd  $3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , czyli  $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

•  $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq \frac{1}{3}$ , stąd  $\alpha \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi$  i  $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tożsamość jest określona dla  $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = P$$

## 9. Równania i nierówności trygonometryczne

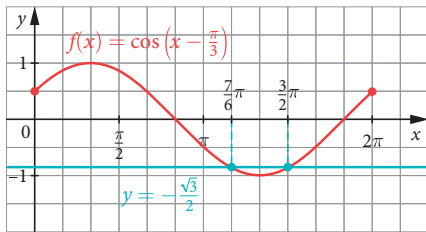
### Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych

### Przykład 1 ◀ zad. 9.4

Narysujemy wykres funkcji  $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$  i odczytamy z niego, dla jakich  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$  spełnione jest równanie  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### Rozwiązanie



← prowadzimy prostą  $k$  o równaniu  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

← odczytujemy pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji  $f$  i prostej  $k$

Z wykresu odczytujemy, że  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  dla  $x = \frac{7}{6}\pi$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

Odp.:  $x = \frac{7}{6}\pi$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi$

Z własności funkcji trygonometrycznych wynika, że:

- $\sin x = \sin t$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = t + 2k\pi$  lub  $x = \pi - t + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\cos x = \cos t$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = t + 2k\pi$  lub  $x = -t + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = t + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; zakładamy, że  $x$  i  $t$  należą do dziedziny funkcji tangens.

### Przykład 2 ◀ zad. 9.5

Skorzystamy z powyższych faktów i rozwiążemy dane równanie.

### Rozwiązanie

a)  $\sin 3x = \sin 2x$

$$3x = 2x + 2k\pi \text{ lub } 3x = \pi - 2x + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi \text{ lub } 5x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Odp.:  $x = 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{5}(2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

### ◀ 9.5. Rozwiąż równanie.

a)  $\operatorname{tg}(x - 1) = \operatorname{tg} 2x$       c)  $\sin 4x = \sin \frac{1}{2}x$

b)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$       d)  $\sin 3x = \cos x$

Odp.: a)  $x = -1 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

b)  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

c)  $x = \frac{4}{7}k\pi$  lub  $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9}k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

d)  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

◀ 9.4. Rozwiąż równanie dla  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .

a)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

c)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Odp.: a)  $x = \frac{\pi}{2}$  lub  $x = \frac{5}{6}\pi$

b)  $x = \frac{2}{3}\pi$     c)  $x = \frac{\pi}{6}$  lub  $x = \frac{7}{6}\pi$

d)  $x = 0$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi$  lub  $x = 2\pi$

### ZZ i MKP

tematy 1.14–1.16

### Multiteka

- Równania trygonometryczne – sinus
- Równania trygonometryczne – cosinus
- Równania trygonometryczne – tangens
- Nierówności trygonometryczne – sinus
- Nierówności trygonometryczne – cosinus
- Nierówności trygonometryczne – tangens

dlauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

b)  $\operatorname{tg}(x - 2) = \operatorname{tg} 6x$

To równanie wymaga zapisania założeń związanych z dziedziną funkcji tangens:

**Dziedziną równania** (nierówności) nazywamy zbiór wszystkich liczb, dla których równanie (nierówność) ma sens.

$$\begin{cases} x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}, \text{ zatem } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Teraz rozwiązujemy równanie.

$$x - 2 = 6x + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$-5x = 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$$

Sprawdzenie, czy wszystkie znalezione rozwiązania należą do dziedziny równania, jest na ogół skomplikowane, gdyż dotyczy zbiorów liczb. Dlatego pokażemy takie rozumowanie tylko dla jednego przykładu. Zastosujemy dowód nie wprost.

Założmy, że istnieją pewne liczby całkowite  $k$  oraz  $m$ , dla których prawdziwa jest równość:

$$-\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2 + m\pi, \text{ stąd } -\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2} + m\pi + \frac{k\pi}{5}, \text{ czyli } -24 = \pi(5 + 10m + 2k)$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ dla dowolnych liczb całkowitych  $k$  oraz  $m$  prawa strona równości jest liczbą niewymierną, a lewa liczbą wymierną. Zatem każde rozwiązanie  $x_0$  równania spełnia pierwsze założenie:  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .

Podobnie można wykazać, że otrzymane rozwiązania spełniają drugie założenie.

Odp.:  $x = -\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$

c)  $\cos \frac{1}{2}x = \sin \frac{1}{3}x$

Korzystamy z odpowiedniego wzoru redukcyjnego i doprowadzamy najpierw równanie do takiej postaci, w której porównywane będą te same funkcje trygonometryczne.

$$\cos \frac{1}{2}x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x \right) \quad \leftarrow \sin t = \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right)$$

Otrzymujemy dwie serie zależności:

$$\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x + 2k\pi \text{ lub } \frac{1}{2}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}x + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } \frac{1}{6}x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Odp.:  $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{12}{5}k\pi$  lub  $x = -3\pi + 12k\pi, k \in \mathbf{Z}$

**Przykład 3** ◀ zad. 9.6

Rozwiążemy równanie  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą  $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ . Wtedy równanie ma postać:

$$\sin t = -\frac{1}{2}$$

Z wykresu funkcji  $y = \sin t$  odczytujemy, że  $\sin t = -\frac{1}{2}$ , gdy:

$$t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Zatem:

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

**Przykład 4** ◀ zad. 9.7

Rozwiążemy równanie  $\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  w przedziale  $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

**Rozwiązanie**

Rozwiążemy najpierw to równanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą  $t = \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}$ . Wtedy równanie ma postać:

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Zatem:

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

**◀ 9.6. Rozwiąż równanie.**

a)  $\sin 5x = 0$

b)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

c)  $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

d)  $2 \sin \frac{x-\pi}{4} + \sqrt{2} = 0$

Odp.: a)  $x = \frac{1}{5}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b)  $x = \frac{5}{8}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c)  $x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d)  $x = 8k\pi \text{ lub } x = 6\pi + 8k\pi, k \in \mathbf{Z}$

**◀ 9.7. Rozwiąż równanie w podanym przedziale.**

a)  $\cos 3x = 0, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

b)  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$

c)  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1, x \in \langle -\pi; 5\pi \rangle$

d)  $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Odp.:

a)  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

b)  $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$

c)  $x \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi\right\}$

d)  $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$

Teraz uwzględniamy fakt, że rozwiązania mają należeć do przedziału  $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ . Podstawiamy w miejsce  $k$  kolejne liczby całkowite.

- Dla  $k = 0$  mamy  $x = -\frac{\pi}{9} \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$  lub  $x = -\frac{\pi}{3} \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ .
- Dla  $k = 1$  mamy  $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}\pi = \frac{11}{9}\pi \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$  lub  $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \pi \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

Można sprawdzić, że po podstawieniu w miejsce  $k$  innych liczb całkowitych otrzymamy wartości  $x$  spoza przedziału  $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

$$\text{Odp.: } x \in \left\{ -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{9}, \pi, \frac{11}{9}\pi \right\}$$

### Przykład 5 ◀ zad. 9.8

$$\text{Rozwiążemy nierówność } \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

#### Rozwiązanie

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą  $t = \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}$ . Wtedy nierówność ma postać:

$$\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z wykresu funkcji  $y = \sin t$  odczytujemy, że rozwiązaniami tej nierówności są wszystkie liczby  $t$  spełniające warunek  $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Zapisujemy tę podwójną nierówność w postaci układu.

$$\begin{cases} t > \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ t < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Wracamy do naszego podstawienia. Mamy do rozwiązania następujący układ nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} > \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x > \pi + 2k\pi \\ \frac{1}{3}x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3\pi + 6k\pi \\ x < 4\pi + 6k\pi \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } x \in (3\pi + 6k\pi; 4\pi + 6k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

### ◀ 9.8. Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } \sin \frac{x}{3} \leq 0 \qquad \text{c) } \operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

$$\text{b) } \cos 2x < -\frac{1}{2} \qquad \text{d) } 2 \cos \frac{x + 3\pi}{4} \geq \sqrt{3}$$

$$\text{Odp.: a) } x \in (3\pi + 6k\pi; 6\pi + 6k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}; \frac{5}{36}\pi + \frac{k\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x \in \left(-\frac{11}{3}\pi + 8k\pi; -\frac{7}{3}\pi + 8k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

**Przykład 6** ◀ zad. 9.9

Rozwiążemy równanie  $\sin 2x - \cos x = 0$ .

**Rozwiązanie**

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynu.

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \quad \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0, \text{ stąd } \cos x = 0 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}$$

Z odpowiednich wykresów odczytujemy rozwiązania równań.

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

**Przykład 7** ◀ zad. 9.10

Rozwiążemy równanie  $\cos 2x + 4 \sin^2 x = 3 \sin x$ .

**Rozwiązanie**

Przekształcamy równanie tak, aby występowała w nim tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$1 - 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 x = 3 \sin x \quad \leftarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą  $t = \sin x$ . Zatem  $t \in \langle -1; 1 \rangle$ .

Wtedy równanie ma postać:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, \quad \Delta = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1$$

Oba rozwiązania spełniają warunek  $t \in \langle -1; 1 \rangle$ , zatem  $\sin x = \frac{1}{2}$  lub  $\sin x = 1$ .

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Przykład 8** ◀ zad. 9.12

Rozwiążemy równanie  $\cos 10x + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że jeżeli przedstawimy  $10x$  jako  $7x + 3x$  i skorzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów, to otrzymamy wyłącznie funkcje trygonometryczne argumentów  $7x$  albo  $3x$ .

$$\cos(7x + 3x) + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

**◀9.12. Rozwiąż równanie.**

- a)  $\sin 5x - \cos 3x \sin 2x = 0$       c)  $4 \cos x \cos 4x = 2 \cos 5x + 1$   
 b)  $\sin 5x + 2 \cos 6x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$       d)  $\cos 9x + 4 \sin 7x \sin x \cos x = 1$

$$\text{Odp.: a) } x = \frac{k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = \frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi \text{ lub } x = -\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**◀9.9. Rozwiąż równanie.**

- a)  $4 \sin^2 x - 1 = 0$   
 b)  $2 \cos^2 x - 1 = 0$   
 c)  $(\sin x + 2)^2 = 1$   
 d)  $3 \cos^2 x - 6 \cos x = 0$   
 e)  $3 \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$   
 f)  $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$

$$\text{Odp.: a) } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**◀9.10. Rozwiąż równanie.**

- a)  $4 \cos^2 x - 4 \cos x = 3$   
 b)  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$   
 c)  $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$   
 d)  $2 \cos^2 x + 5 \cos x = -2$   
 e)  $\sin^3 x - 6 \sin^2 x - \sin x + 6 = 0$   
 f)  $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin^2 x$

$$\text{Odp.: a) } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(7x - 3x) = \frac{1}{2}$$

← korzystamy ze wzoru na cosinus różnicy kątów

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ lub } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

◀ 9.26. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie ma rozwiązanie?

a)  $2 \cos x = 4m^2 - 2$

b)  $\operatorname{tg} x = 5m^2 - 7m + 11$

c)  $\sin x = m^2 - 2m$

d)  $\sin^2 x - \cos^2 x = m^2 - 6m + 10$

Odp.: a)  $m \in \langle -1; 1 \rangle$

b)  $m \in \mathbb{R}$

c)  $m \in \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$

d)  $m = 3$

### Przykład 9 ◀ zad. 9.26

Sprawdźmy, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $\sin x \cos x = 2m^2 - 4m + 2$  ma rozwiązanie.

#### Rozwiązanie

Przekształcamy równanie tak, aby skorzystać ze wzoru na sinus kąta podwojonego.

$$2 \sin x \cos x = 4m^2 - 8m + 4$$

$$\sin 2x = 4m^2 - 8m + 4 \quad \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Wyrażenie po lewej stronie tego równania przyjmuje wszystkie wartości z przedziału  $\langle -1; 1 \rangle$ . Zatem dane równanie będzie miało rozwiązanie, jeżeli spełniona będzie nierówność podwójna:

$$-1 \leq 4m^2 - 8m + 4 \leq 1$$

którą zapiszemy w postaci układu nierówności:

$$\begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 \geq -1 \\ 4m^2 - 8m + 4 \leq 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy kolejno obie powyższe nierówności.

$$4m^2 - 8m + 4 \geq -1$$

$$4m^2 - 8m + 5 \geq 0$$

$$\Delta = -16$$

Wyrażenie  $4m^2 - 8m + 5$  jest zawsze dodatnie, więc pierwsza nierówność jest prawdziwa dla każdej rzeczywistej wartości  $m$ .

$$4m^2 - 8m + 4 \leq 1$$

$$4m^2 - 8m + 3 \leq 0$$

$$\Delta = 16, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{3}{2}$$

Druga nierówność jest prawdziwa dla  $m \in \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$ . Zatem przedział  $\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$  jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

Odp.: Równanie ma rozwiązania dla  $m \in \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$ .

## Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

**9.1.** Wszystkie rozwiązania równania  $\operatorname{tg}^2 x = 1$  można zapisać w postaci

- A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 B.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 C.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 D.  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**9.2.** Wszystkie rozwiązania równania  $\cos \frac{1}{2}x = -1$  można zapisać w postaci

- A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 B.  $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 C.  $x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 D.  $x = 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**9.3.** Wskaż liczbę rozwiązań równania  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**9.4.** Rozwiąż równanie dla  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .

- a)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 b)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$   
 c)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$   
 d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**9.5.** Rozwiąż równanie.

- a)  $\operatorname{tg}(x - 1) = \operatorname{tg} 2x$   
 b)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$   
 c)  $\sin 4x = \sin \frac{1}{2}x$   
 d)  $\sin 3x = \cos x$

**9.6.** Rozwiąż równanie.

- a)  $\sin 5x = 0$   
 b)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$   
 c)  $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$   
 d)  $2 \sin \frac{x - \pi}{4} + \sqrt{2} = 0$

**9.7.** Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

- a)  $\cos 3x = 0, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$   
 b)  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$   
 c)  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1, x \in \langle -\pi; 5\pi \rangle$   
 d)  $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

**9.7. a)**  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

**b)**  $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$

**c)**  $x \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi\right\}$

**d)**  $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$

## Odpowiedzi i rozwiązania

**9.1. C**

**9.2. C**

**9.3. D**

**9.4. a)**  $x = \frac{\pi}{2}$  lub  $x = \frac{5}{6}\pi$

**b)**  $x = \frac{2}{3}\pi$

**c)**  $x = \frac{\pi}{6}$  lub  $x = \frac{7}{6}\pi$

**d)**  $x = 0$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi$  lub  $x = 2\pi$

**9.5. a)**  $x = -1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**b)**  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**c)**  $x = \frac{4}{7}k\pi$  lub  $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9}k\pi,$   
 $k \in \mathbb{Z}$

**d)**  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$   
 $k \in \mathbb{Z}$

**9.6. a)**  $x = \frac{1}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**b)**  $x = \frac{5}{8}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**c)**  $x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**d)**  $x = 8k\pi$  lub  $x = 6\pi + 8k\pi,$   
 $k \in \mathbb{Z}$

**9.10. a)**  $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

lub  $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**b)**  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

lub  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**c)**  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**d)**  $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

lub  $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**e)**  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**f)**  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**9.11. a)**  $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi \right\rangle$

**b)**  $x \in \left\langle -2\pi; -\frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup$

$\cup \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right\rangle$

**c)**  $x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$

**d)**  $x \in (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$

**9.12. a)**  $x = \frac{k\pi}{3}$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**b)**  $x = \frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi$  lub

$x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**c)**  $x = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$  lub

$x = -\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**d)**  $x = \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**9.13.**  $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \right\}$

**9.14.**  $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, 2\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi \right\}$

**9.15.**  $x \in \left\{ 0, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \pi \right\}$

**9.16.**  $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right\}$

**9.17.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**9.18.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**9.8.** Rozwiąż nierówność.

a)  $\sin \frac{x}{3} \leq 0$

b)  $\cos 2x < -\frac{1}{2}$

c)  $\operatorname{tg} \left( 6x - \frac{\pi}{3} \right) > 0$

d)  $2 \cos \frac{x+3\pi}{4} \geq \sqrt{3}$

**9.9.** Rozwiąż równanie.

a)  $4 \sin^2 x - 1 = 0$

b)  $2 \cos^2 x - 1 = 0$

c)  $(\sin x + 2)^2 = 1$

d)  $3 \cos^2 x - 6 \cos x = 0$

e)  $3 \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$

f)  $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$

**9.10.** Rozwiąż równanie.

a)  $4 \cos^2 x - 4 \cos x = 3$

b)  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

c)  $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$

d)  $2 \cos^2 x + 5 \cos x = -2$

e)  $\sin^3 x - 6 \sin^2 x - \sin x + 6 = 0$

f)  $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin^2 x$

**9.11.** Rozwiąż nierówność w podanym przedziale.

a)  $(1 - \sin x)^2 + \cos^2 x \geq 1$  i  $x \in \left\langle 0; 2\frac{1}{2}\pi \right\rangle$

b)  $(\sin x - \cos x)^2 - 2 \sin x (1 - \cos x) \leq \sqrt{2} + 1$  i  $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$

c)  $2 \sin^2 x + \cos^2 x \leq 1$  i  $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$

d)  $2(\sin x - \cos x)^2 + \sin x (4 \cos x - 1) > 3 \sin x + 2$  i  $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$

**9.12.** Rozwiąż równanie.

a)  $\sin 5x - \cos 3x \sin 2x = 0$

b)  $\sin 5x + 2 \cos 6x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $4 \cos x \cos 4x = 2 \cos 5x + 1$

d)  $\cos 9x + 4 \sin 7x \sin x \cos x = 1$

**9.13.** Rozwiąż równanie  $\sin x \cdot \sin 2x - \cos x = 0, x \in \langle 0; \pi \rangle$ .

**9.14.** Rozwiąż równanie  $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x = 2, x \in (0; 3\pi)$ .

**9.15.** Rozwiąż równanie  $\sin 4x + \cos 2x = 2 \sin 2x + 1, x \in \langle 0; \pi \rangle$ .

**9.16.** Rozwiąż równanie  $4 \cos^2 x - 4 \cos^2 x \cdot \sin x + 3 \sin x = 3, x \in (0; 2\pi)$ .

**9.17.** Rozwiąż równanie  $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x + \sin \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) = 0$ .

**9.18.** Rozwiąż równanie  $\sin x \cdot \left[ \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \sqrt{3} \cos x$ .

**9.8. a)**  $x \in \langle 3\pi + 6k\pi; 6\pi + 6k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$  **b)**  $x \in \left( \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$

**c)**  $x \in \left( \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}; \frac{5}{36}\pi + \frac{k\pi}{6} \right), k \in \mathbb{Z}$  **d)**  $x \in \left\langle -\frac{11}{3}\pi + 8k\pi; -\frac{7}{3}\pi + 8k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$

**9.9. a)**  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$  lub  $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**b)**  $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$  lub  $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**c)**  $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  **d)**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**e)**  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  **f)**  $x = k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**9.19.** Rozwiąż nierówność  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$  dla  $0 < x < \pi$ .

**9.20.** Rozwiąż nierówność  $\cos^2 x - 3 \sin x + \frac{3}{4} > 0$  dla  $0 < x < 2\pi$ .

**9.21.** Rozwiąż nierówność  $\frac{1 - 2 \sin x}{\cos 2x} > 0$  dla  $0 < x < \pi$ .

**D 9.22.** Wykaż, że jeżeli  $\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ , to albo  $x - y = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , albo  $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**\* 9.23.** Rozwiąż równanie  $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x$ .

**\* 9.24.** Rozwiąż równanie  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$ .

**\* 9.25.** Rozwiąż równanie  $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$ .

**9.26.** Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie ma rozwiązanie?

a)  $2 \cos x = 4m^2 - 2$

c)  $\sin x = m^2 - 2m$

b)  $\lg x = 5m^2 - 7m + 11$

d)  $\sin^2 x - \cos^2 x = m^2 - 6m + 10$

### Prosto do matury



**1.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

Do zbioru rozwiązań równania  $3 \operatorname{tg}^2 \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$  należą liczby postaci

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**2.** Rozwiąż równanie  $\sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$  w przedziale  $(-\pi; 2\pi)$ .

**3.** Rozwiąż nierówność  $\cos 3x \leq \frac{1}{2}$ .

**4.** Rozwiąż równanie  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ .

**5.** Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $\cos x = m^2 + 4m + 4$  ma rozwiązanie?

**9.20.**  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left( \frac{5}{6}\pi; 2\pi \right)$

**9.21.**  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left( \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right) \cup \left( \frac{5}{6}\pi; \pi \right)$

**9.22.** Można udowodnić, że  $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y)$ .

$$\begin{aligned} P &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \\ &= \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x) \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y = L \end{aligned}$$

Założmy, że  $\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ . Stąd:

$$\sin(x - y) = \sin(x + y) \sin(x - y)$$

$$\sin(x - y) (1 - \sin(x + y)) = 0$$

$$\sin(x - y) = 0 \text{ lub } \sin(x + y) = 1$$

$$x - y = k\pi \text{ lub } x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**9.19.**  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left( \frac{5}{6}\pi; \pi \right)$

**9.23.**  $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x$   
 $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} \left( 2 \sin \frac{x}{2} + \sqrt{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ lub } \sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = k\pi \text{ lub } \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\text{lub } \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Odp.:**  $x = 2k\pi$  lub  $x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$ ,

$$\text{lub } x = \frac{5\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**9.24.**  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

$$\sin \frac{x}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\sin \frac{x}{2} \left( 1 - 2 \sin \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ lub } \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = k\pi \text{ lub } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\text{lub } \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Odp.:**  $x = 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$ ,

$$\text{lub } x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**9.25.**  $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

$$\cos 2x = \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x$$

$$\cos 2x = \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{lub } 2x = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

**Odp.:**  $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$\text{lub } x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**9.26. a)**  $m \in \langle -1; 1 \rangle$

**b)**  $m \in \mathbb{R}$

**c)**  $m \in \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$

**d)**  $m = 3$

### Prosto do matury

**1.** F, F, F

**2.**  $x = -\frac{5}{8}\pi$  lub  $x = \frac{3}{8}\pi$

$$\text{lub } x = \frac{11}{8}\pi$$

**3.**  $x \in \left\langle \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle,$

$$k \in \mathbb{Z}$$

**4.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**5.**  $m \in \langle -3; -1 \rangle$

# 10. Powtórzenie

## Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–12 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

### Odpowiedzi i rozwiązania

1. D
  2. B
  3. B
  4. B
  5. B
  6. C
  7. C
  8. D
  9. C
1. Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 17. Jeden z kątów trójkąta ma miarę  $78^\circ$ . Do którego przedziału należy długość boku leżącego naprzeciw tego kąta?  
A.  $\langle 30; 31 \rangle$       B.  $\langle 31; 32 \rangle$       C.  $\langle 32; 33 \rangle$       D.  $\langle 33; 34 \rangle$
  2. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 24$ ,  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle CAB = 75^\circ$ . Zatem  
A.  $|AC| = 8\sqrt{3}$ .      B.  $|AC| = 8\sqrt{6}$ .      C.  $|AC| = 12\sqrt{6}$ .      D.  $|AC| = 24\sqrt{3}$ .
  3. Boki trójkąta mają długości 7, 12 i 13. Ile wynosi pole tego trójkąta?  
A.  $12\sqrt{3}$       B.  $24\sqrt{3}$       C.  $4\sqrt{273}$       D.  $8\sqrt{273}$
  4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 12 i 16. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?  
A. 3      B. 4      C. 5      D. 6
  5. W trójkącie  $ABC$  dane są długości boków:  $|AB| = 15$ ,  $|AC| = 12$ ,  $|BC| = 18$ . Dwusieczna kąta  $CAB$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $D$ . Wskaż długość odcinka  $CD$ .  
A. 6      B. 8      C. 10      D. 12
  6. Który z podanych kątów nie jest kątem wypukłym?  
A.  $\alpha = \frac{3\pi}{7}$       B.  $\beta = 2,5$       C.  $\gamma = 3,5$       D.  $\delta = \frac{3}{2}$
  7. Niech  $\alpha$  oznacza miarę stopniową kąta  $\frac{3}{8}\pi$ . Wskaż prawdziwą zależność.  
A.  $\alpha < 65^\circ$       B.  $65^\circ < \alpha < 67^\circ$       C.  $67^\circ < \alpha < 68^\circ$       D.  $\alpha > 68^\circ$
  8. Ile jest równa liczba  $\sin 240^\circ$ ?  
A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
  9. Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{\sin 2x \cdot \cos 4x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$ . Ile jest równa wartość  $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ?  
A. 0      B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{3 + \sqrt{3}}{8}$       D.  $\frac{\pi}{12}$  nie należy do dziedziny tej funkcji.

**Multiteka**

- Odległość Ziemi od Słońca i Księżyca

dla nauczyciela.pl | Klasówka 1



**Generator**  
testów i sprawdzianów

10. Wskaż zbiór rozwiązań układu nierówności  $\begin{cases} \cos x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ .

- A.  $\langle 0; \frac{2\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{4\pi}{3}; 2\pi \rangle$       B.  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$       C.  $\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \rangle$       D.  $\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \rangle$

10. A

11. Dla której z podanych funkcji oś  $y$  nie jest osią symetrii jej wykresu?

- A.  $y = \cos x$       B.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$       C.  $y = \sin(x + \pi)$       D.  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

11. C

12. Wskaż największą wartość przyjmowaną przez funkcję  $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$  w przedziale  $\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \rangle$ .

- A.  $1 - \sqrt{3}$       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$       C.  $\sqrt{3} + 1$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

12. D

W zadaniach 13–27 oceń prawdziwość podanych zdań.

13. Boki trójkąta mają się do siebie jak  $3 : 5 : 6$ . Wynika stąd, że

- A. trójkąt ten jest rozwartokątny.  
B. cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy  $-\frac{1}{15}$ .  
C. cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy  $\frac{13}{15}$ .

13. P, P, P

14. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ . Zatem

- A. pole tego trójkąta jest równe  $\frac{1}{2}ac$ .  
B. promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $b$ .  
C.  $\sin \sphericalangle CAB = \frac{a}{2b}$ .

14. F, P, P

15. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = \sqrt{5}$ ,  $|BC| = \sqrt{6}$ ,  $|AC| = \sqrt{7}$ . Zatem

- A.  $\cos \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{30}}{15}$ .      B.  $\cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{\sqrt{35}}$ .      C.  $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$ .

15. P, P, P

16. Miara łukowa kąta  $\alpha$  jest równa 6.

- A. Miara stopniowa kąta  $\alpha$  jest równa  $\frac{1080}{\pi}$ .      B.  $\sin \alpha < 0$       C. Kąt  $\alpha$  jest ostry.

16. P, P, F

17. Do zbioru rozwiązań równania  $\cos x = -\frac{1}{2}$  należą liczby postaci

- A.  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

17. F, F, F

18. F, F, P

19. F, F, P

20. P, P, F

21. P, F, P

22. P, P, F

23. F, P, P

24. F, P, P

25. F, F, F

26. F, P, P

18. Dla dowolnych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  prawdziwy jest wzór

A.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ .    B.  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$ .    C.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$ .

19. Wiadomo, że kąt  $\alpha$  jest rozwarty i  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Zatem

A.  $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$ .    B.  $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ .    C.  $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$ .

20. Liczba  $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  spełnia warunek  $\cos 2a = \frac{1}{4}$ . Zatem

A.  $\sin^2 a = \frac{3}{8}$ .    B.  $a < \frac{\pi}{4}$ .    C.  $a = \frac{\pi}{6}$ .

21. Równanie  $\sin x = ax$  może mieć dla pewnej liczby rzeczywistej  $a$ 

A. dokładnie jedno rozwiązanie.

B. dokładnie dwa rozwiązania.

C. dokładnie trzy rozwiązania.

22. Dla dowolnego kąta  $\alpha$  prawdziwy jest wzór

A.  $\sin 12\alpha = 2 \sin 6\alpha \cos(-6\alpha)$ .

B.  $\sin 12\alpha = \sin 4\alpha \cos 8\alpha - \cos 4\alpha \sin(-8\alpha)$ .

C.  $\sin 12\alpha = \sin 3\alpha \cos 9\alpha + \cos 5\alpha \sin 7\alpha$ .

23. Dany jest taki kąt ostry  $\alpha$ , że  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Wtedy

A.  $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ .    B.  $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$ .    C.  $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}$ .

24. Do zbioru rozwiązań równania  $2 \sin x + 1 = 0$  należą liczby postaci

A.  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .    B.  $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .    C.  $x = \frac{19}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

25. Zbiór rozwiązań równania  $\cos x = 0$  jest równy zbiorowi rozwiązań równania

A.  $\cos 2x = 0$ .    B.  $2 \cos \frac{x}{2} = 0$ .    C.  $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$ .

26. Wszystkie rozwiązania równania  $2 \cos^2 x = 1$  można zapisać w postaci

A.  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  lub  $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
36. \quad & \cos 100^\circ \operatorname{tg} 260^\circ \sin 80^\circ + \cos 440^\circ \cos 620^\circ = \\
& = \cos(180^\circ - 80^\circ) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ + 80^\circ) \cdot \sin 80^\circ + \cos(360^\circ + 80^\circ) \cdot \cos(720^\circ - 100^\circ) = \\
& = -\cos 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \sin 80^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 100^\circ = \\
& = -\cos 80^\circ \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} \cdot \sin 80^\circ + \cos 80^\circ \cdot (-\cos 80^\circ) = \\
& = -\sin^2 80^\circ - \cos^2 80^\circ = -(\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ) = -1 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

27. Zbiór rozwiązań nierówności  $\cos 3x < \frac{1}{2}$  można zapisać w postaci

A.  $(\pi + 6k\pi; 5\pi + 6k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $(\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $(-\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

28. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 6$ ,  $\sphericalangle ABC = 35^\circ$ ,  $\sphericalangle BCA = 74^\circ$ . Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

29. Promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  jest równy 20,  $\sphericalangle CAB = 40^\circ$  i  $\sphericalangle ABC = 22^\circ$ . Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do 0,1.

30. Bok  $BC$  trójkąta  $ABC$  ma długość  $16\sqrt{3}$ , a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 16. Wyznacz miarę  $\sphericalangle CAB$ .

31. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt  $(5, -4)$ .

32. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  taki, że  $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$  oraz  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ .

33. Oblicz wartość sinusa oraz cosinusa kąta  $\alpha$ , wiedząc, że  $\operatorname{tg} \alpha = -2,6$ .

34. Przyporządkuj podane kąty do odpowiednich ćwiartek układu współrzędnych.

$$1299^\circ, \frac{11\pi}{7}, -1, 2, -541^\circ, -\frac{9\pi}{5}, 4, \frac{14\pi}{3}, 3, 14\pi$$

35. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

a)  $\operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 405^\circ + \sin(-300^\circ) \cos 1080^\circ$

b)  $\sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} \cos \frac{13\pi}{3}$

D

36. Wykaż, że wartość wyrażenia  $\cos 100^\circ \operatorname{tg} 260^\circ \sin 80^\circ + \cos 440^\circ \cos 620^\circ$  jest liczbą całkowitą.

37. Kąt  $\alpha$  jest rozwarty i  $\cos \alpha = -\frac{5}{6}$ . Oblicz  $\cos 2\alpha$ .

### Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

38. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 7$ ,  $|BC| = 9$ ,  $|CA| = 10$ . Wyznacz długość środkowej  $BD$ .

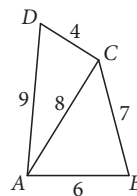
43. Z twierdzenia cosinusów w trójkątach  $ABC$  i  $ADC$ :

$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \sphericalangle ADC = \frac{9^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{33}{72} = \frac{11}{24}$$

$$\cos \sphericalangle ABC \neq -\cos \sphericalangle ADC, \text{ więc } \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC \neq 180^\circ.$$

Zatem na czworokącie  $ABCD$  nie można opisać okręgu.



45. Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku:  $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$ .

$$\text{Zatem } \cos \sphericalangle AKC = \cos \sphericalangle AKB = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ACK: } |AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 - 2|CK| \cdot |AK| \cdot \frac{1}{2}, \quad |AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 - |CK| \cdot |AK|.$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABK i } |AB| = |AC|: |AC|^2 = |KB|^2 + |AK|^2 - |KB| \cdot |KA|.$$

$$\text{Porównujemy powyższe równości i otrzymujemy tezę: } |CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|.$$

27. F, P, F

28. 15,5

29. 76,0

30.  $60^\circ$  lub  $120^\circ$

$$31. \sin \alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41}, \cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}, \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$33. \sin \alpha = -\frac{13\sqrt{194}}{194}, \\ \cos \alpha = \frac{5\sqrt{194}}{194} \\ \text{lub } \sin \alpha = \frac{13\sqrt{194}}{194}, \\ \cos \alpha = -\frac{5\sqrt{194}}{194}$$

34. kolejno:  
III, IV, IV, II, II, I, III, II, III

$$35. \text{ a) } \frac{5\sqrt{3}}{6} \quad \text{ b) } \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{12}$$

36. Patrz s. 100.

$$37. \frac{7}{18}$$

$$38. 2\sqrt{10}$$

39.  $|AC| = \sqrt{97}$ ,  $|BD| = \sqrt{273}$

40. Przyjmujemy:

$\alpha, \beta, \gamma$  – kąty trójkąta,

$\sin \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $\sin \beta = \frac{2}{7}$ ,  $\sin \gamma = \frac{5}{7}$ ,

$a, b, c$  – długości boków leżących naprzeciwko kątów  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Z twierdzenia sinusów:

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$ , stąd  $b = 2a$

$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{1}{5}$ , stąd  $c = 5a$

Nie istnieje trójkąt o bokach

długości:  $a, 2a$  i  $5a$ , bo

$a + 2a < 5a$ , co jest sprzeczne

z nierównością trójkąta.

41. a)  $\sphericalangle CAD = 41^\circ$ ,  $\sphericalangle DAB = 19^\circ$

b) 1

42.  $\sphericalangle A = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 105^\circ$ ,

$\sphericalangle C = 30^\circ$ ,  $P = 32\pi$

43. Patrz s. 101.

44.  $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

45. Patrz s. 101.

46.  $|BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r$ ,

$\cos \sphericalangle CDB = \frac{7\sqrt{89}}{89}$

47. Oznaczamy:

$\alpha$  – kąt leżący naprzeciwko boku  $2a$ ,

$R$  – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Z twierdzenia cosinusów:

$\cos \alpha = \frac{16a^2 + 9a^2 - 4a^2}{2 \cdot 3a \cdot 4a} =$

$= \frac{21a^2}{24a^2} = \frac{7}{8}$

Zatem  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ .

Z twierdzenia sinusów  $\frac{2a}{\sin \alpha} = 2R$ .

Stąd  $R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8a}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}a$ .

48. a)  $120^\circ$  b)  $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

c)  $\sqrt{6}$

39. W równoległoboku  $ABCD$  dane są:  $|AB| = 11$ ,  $|BC| = 8$ ,  $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ . Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

40. Wykaż, że nie istnieje trójkąt, w którym sinusy kątów są równe  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{2}{7}$  i  $\frac{5}{7}$ .

41. Na boku  $BC$  trójkąta równobocznego  $ABC$  obrano taki punkt  $D$ , że  $|CD| : |DB| = 2 : 1$ . Oblicz

a) miary kątów  $CAD$  i  $DAB$  z dokładnością do  $1^\circ$ .

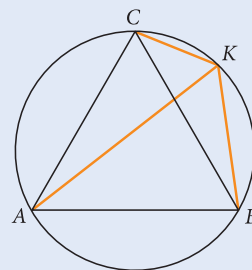
b) stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach  $ACD$  i  $ABD$ .

42. W trójkącie rozwartokątnym  $ABC$  o kącie rozwartym przy wierzchołku  $B$  dane są  $|AB| = 4\sqrt{2}$  i  $|AC| = 4(1 + \sqrt{3})$ . Poprowadzono wysokość  $BD$  i otrzymano trójkąt równoramienny  $ABD$ . Wyznacz kąty trójkąta  $ABC$  oraz pole  $P$  koła opisanego na tym trójkącie.

43. W czworokącie  $ABCD$  dane są:  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 7$ ,  $|CD| = 4$ ,  $|DA| = 9$ ,  $|AC| = 8$ . Wykaż, że na tym czworokącie nie można opisać okręgu.

44. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  miara kąta  $BAC$  jest równa  $30^\circ$ , a podstawa  $AB$  ma długość 8. Oblicz długość środkowej  $AD$  tego trójkąta.

45. Na trójkącie równobocznym  $ABC$  opisano okrąg. Na łuku  $BC$  obrano punkt  $K$ , jak na rysunku obok. Wykaż, że  $|CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|$ .



46. Na okręgu o promieniu  $r$  opisano trapez równoramienny  $ABCD$  o dłuższej podstawie  $AB$  i krótszej  $CD$ . Punkt styczności  $S$  dzieli ramię  $BC$  tak, że  $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$ . Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz  $\cos \sphericalangle CDB$ .

47. Boki trójkąta mają długości  $2a, 3a, 4a$ . Wykaż, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $\frac{8\sqrt{15}}{15}a$ .

48. Odcinki o długościach:  $2\sqrt{3}$ ,  $3 - \sqrt{3}$ ,  $3\sqrt{2}$  są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

c) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

51. Założenia:  $\cos \alpha \neq 0$  i  $\sin \alpha \neq 0$ , stąd  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$  i  $\alpha \neq k\pi$ , czyli  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$L = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \alpha)^2 = \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left( \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 = \left( \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 =$$

$$= (\sin \alpha \cos \alpha)^{-2} = P$$

52.  $L = 4 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left( \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) \left( \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left[ \left( \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left( \cos x \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] =$

$= 4 \left( \frac{3}{4} \sin^2 x - \frac{1}{4} \cos^2 x \right) = 3 \sin^2 x - \cos^2 x = 2 \sin^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x = 2 \sin^2 x + (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1 = P$

53.  $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - \cos x \cdot \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos^2 x + \left( \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 - \cos x \left( \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right) =$

$= \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \sin x \cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2 x \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \cos^2 x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x =$

$= \frac{3}{4} (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ , czyli funkcja  $f$  jest funkcją stałą.

49. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 9$ ,  $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ . Wyznacz długości odcinków, na które dwusieczna kąta  $ABC$  dzieli bok  $CA$ .

50. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach  $2 + \sqrt{3}$  i  $3 + 2\sqrt{3}$ . Wyznacz miary kątów trójkąta.

D 51. Wykaż, że równość  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \alpha)^2 = (\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^{-2}$  jest tożsamością. Podaj założenia, które musi spełniać kąt  $\alpha$ .

D 52. Udowodnij tożsamość  $4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1$ .

D 53. Wykaż, że funkcja  $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  jest funkcją stałą.

54. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x$ .

55. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ . Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji  $f$ .

56. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji  $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| - 2$ .

57. Ustal znak liczby  $\cos 4,5 - \cos 5$  na podstawie odpowiedniego wykresu funkcji.

58. Rozwiąż równanie  $\cos \frac{2}{3}x = \sin \frac{3}{2}x$ .

59. Rozwiąż nierówność  $\cos \frac{1}{3}x < \sin \frac{13}{3}\pi$ .

60. Rozwiąż równanie  $(2 \sin x + 1)^2 + 4 \cos^2 x = 3$ .

61. Rozwiąż nierówność  $\sqrt{2} \cos x + 1 \geq 0$  w przedziale  $\langle -\pi; 3\pi \rangle$ .

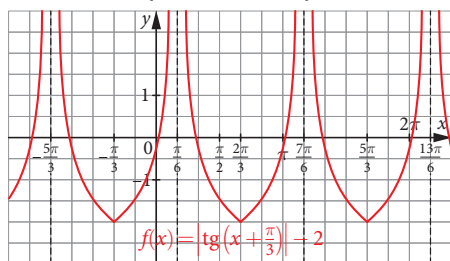
62. Rozwiąż równanie.

a)  $4 \cos 2x = 2 \cos x - 1$

b)  $2 \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \cos x$

c)  $(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos 2x$

56.  $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$



49.  $\frac{6\sqrt{7}}{5}, \frac{9\sqrt{7}}{5}$

50.  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

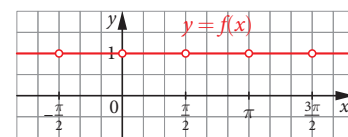
51. Patrz s. 102.

52. Patrz s. 102.

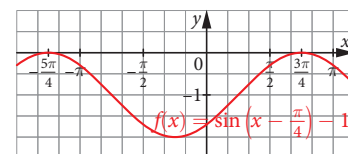
53. Patrz s. 102.

54.  $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$



55.



$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

57. ujemna

58.  $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{12}{5}k\pi$

lub  $x = \frac{3}{13}\pi + \frac{12}{13}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

59.  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 6k\pi; \frac{11}{2}\pi + 6k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$

60.  $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

lub  $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

61.  $x \in \left\langle -\frac{3}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi \right\rangle$

62. a)  $x \approx -41^\circ + k \cdot 360^\circ$

lub  $x \approx 41^\circ + k \cdot 360^\circ$

lub  $x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ$

lub  $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

b)  $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c)  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  lub  $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

63.  $x = -\frac{2}{3}\pi$  lub  $x = \frac{2}{3}\pi$

64.  $x \in \left\{-\pi, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, 2\pi\right\}$

65.  $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$

66.  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$

67.  $x = \frac{\pi}{2}$  lub  $x = \frac{5}{6}\pi$

68.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$  lub  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$   
lub  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$

69. a)  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right)$

b)  $x \in \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right)$

70.  $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

71. a)  $x = 0$  lub  $x = \frac{\pi}{2}$

lub  $x = \frac{3\pi}{2}$

b)  $p \in (-2; 0)$

73.  $m \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle \cup (2; \infty)$

74.  $\alpha = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

75.  $\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$   
lub  $\alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

63. Rozwiąż równanie  $4 \sin^2 x + 4 \cos x = 1$ ,  $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$ .

64. Rozwiąż równanie  $2 \sin^2 x = \sqrt{3} \sin x$ ,  $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ .

65. Rozwiąż równanie  $\sin^2 2x - 4 \cos^2 x + 1 = 0$ ,  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .

66. Rozwiąż równanie  $\cos 2x + 5 \cos x = 2$ .

67. Rozwiąż równanie  $\sqrt{3} \sin x = \cos x + \sqrt{3}$ ,  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .

68. Rozwiąż równanie  $\left| \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

69. Rozwiąż nierówność dla  $0 < x < \pi$ .

a)  $\frac{\cos 2x}{\cos x} < 1$

b)  $\frac{1 + 2 \cos x}{\sin x} < 0$

70. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $\sin x + \cos x = 2m - 1$  ma rozwiązanie?

71. Dane jest równanie postaci  $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$  z parametrem  $p$ .

a) Dla  $p = -1$  wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału  $\langle 0; 5 \rangle$ .

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których dane równanie ma w przedziale  $\langle -\pi; \pi \rangle$  trzy różne rozwiązania.

72. Dana jest funkcja  $f(x) = 1 + \frac{2 \sin 2x + 3 \sin 3x}{\sin x}$ .

a) Wykaż, że jeżeli  $\sin x \neq 0$ , to  $f(x) = 2(6 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)$ .

b) Znajdź zbiór wartości funkcji  $f$ .

73. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $m^2(1 - \sin x) - 4m + 1 + \sin x = 0$  ma rozwiązanie?

74. Dla jakich wartości parametru  $\alpha$  suma sześciątów pierwiastków równania  $x^2 - 2x \cdot \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 0$  jest równa 0?

75. Dla jakich wartości parametru  $\alpha$  najmniejsza wartość funkcji  $f(x) = x^2 - 2x + \cos 2\alpha + \sin \alpha + 3$  wynosi 2?

72.  $f(x) = 1 + \frac{2 \sin 2x + 3 \sin 3x}{\sin x}$

a)  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (2 \cos^2 x - 1) \sin x =$   
 $= \sin x (2 \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1) = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$

Jeżeli  $\sin x \neq 0$ , to:

$f(x) = 1 + \frac{2 \cdot 2 \sin x \cos x + 3 \sin x (4 \cos^2 x - 1)}{\sin x} = 1 + 4 \cos x + 12 \cos^2 x - 3 =$   
 $= 2(6 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)$

b)  $ZW = \left\langle -2\frac{1}{3}; 14 \right\rangle$