

Planimetria

3

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- odróżnia figury wypukłe od figur niewypukłych,
- stosuje w zadaniach:
 - twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie,
 - własności kątów w trójkącie i wielokącie,
 - nierówność trójkąta,
 - twierdzenie Pitagorasa,
 - własność symetralnej odcinka,
 - własność dwusiecznej kąta;
- wskazuje figury przystające,
- dowodzi przystawania dwóch trójkątów na podstawie odpowiedniej cechy,
- oblicza pola pierścieni kołowych.

Po tym dziale uczeń:

- wykonuje elementarne konstrukcje geometryczne,
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów oraz prostej i okręgu,
- oblicza pola wycinków kołowych,
- korzysta z własności: stycznej do okręgu, okręgów stycznych, trójkątów podobnych, środkowych trójkąta, okręgu wpisanego w trójkąt i opisanego na trójkącie oraz wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu,
- stosuje w zadaniach twierdzenia:
 - o zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym,
 - o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku,
 - o kącie wpisanym opartym na średnicy,
 - o odcinkach stycznych do okręgu,
 - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa,
 - Talesa i twierdzenie do niego odwrotne,
 - o kącie między styczną a cięciwą.

Uwagi metodyczne

Uczniowie zajmowali się geometrią wielokrotnie w poprzednich latach nauki i na ogół swobodnie operują związanymi z nią pojęciami. Jednakże zagadnienia, które uczniowie będą obecnie poznawać, są dosyć trudne. Rozpoczynamy od przypomnienia wiadomości o nierówności trójkąta, twierdzeniu Pitagorasa i własności symetralnej odcinka oraz dwusiecznej kąta.

1. Wstęp do planimetrii

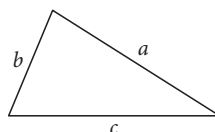
Umiejętności:

- korzystanie z nierówności trójkąta
- korzystanie z twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do niego
- korzystanie z własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta
- wykonywanie podstawowych konstrukcji geometrycznych

Nierówność trójkąta

Z trzech odcinków o długościach a , b , c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy te długości spełniają **nierówność trójkąta**, czyli suma dowolnych dwóch z nich jest większa od trzeciej:

$$\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a \\ a + c > b \end{cases}$$



Ten układ nierówności można zapisać krócej.

Z każdej nierówności wyznaczamy jedną zmienną, np. c :

$$\begin{cases} c < a + b \\ c > a - b \\ c > -a + b \end{cases} \quad \leftarrow \text{ostatnie dwie nierówności oznaczają, że } c > |a - b|$$

Czyli dany układ nierówności można zastąpić nierównością podwójną:

$$|a - b| < c < a + b$$

Podsumujmy: z trzech odcinków o długościach a , b i c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy $|a - b| < c < a + b$.

Zatem dla dowolnych różnych punktów A , B , C na płaszczyźnie prawdziwa jest nierówność:

$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

przy czym punkt B należy do odcinka AC wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|AB| + |BC| = |AC|$$



Przypominamy: używamy w podręczniku zwrotów „bok a trójkąta” zamiast „bok trójkąta o długości a ”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, „trójkąty mają równe przeciwprostokątne” zamiast „trójkąty mają przeciwprostokątne równej długości” itp.

ZZ i MKP

temat 4.1

Multiteka

- Konstrukcja symetralnej odcinka
- Konstrukcja dwusiecznej kąta
- Konstrukcja kąta o mierze 30°
- Grety i dowodzenie

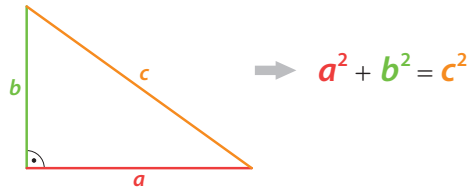
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego

Twierdzenie

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



Wnioski

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c (zob. rysunek powyżej):

- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$,
- najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna: $c > a$ i $c > b$.

Dzięki twierdzeniu Pitagorasa znamy zależność między długościami boków trójkąta prostokątnego. Okazuje się, że jeśli w pewnym trójkącie zachodzi ta zależność, tzn. gdy długości boków a , b , c spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$, to jest to trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości c .

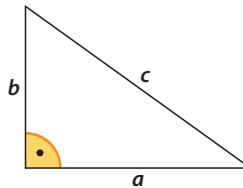
Twierdzenie

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to ten trójkąt jest prostokątny.

Dowód tego twierdzenia poznaćie podczas dalszej nauki matematyki.

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$$



◀ 1.4. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

a) 8, 15, 17

b) $2\sqrt{3}$, $\sqrt{30}$, $3\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{3}$, 8, 2

d) 7, 7, $7\sqrt{2}$

e) 5, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$

f) $2 + \sqrt{2}$, $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$

Odp.: a) tak

b) tak

c) nie

d) tak

e) nie

f) tak

Przykład 1 ◀ zad. 1.4

Sprawdźmy, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

a) 10, 24, 26

b) 7, $\sqrt{53}$, 2

c) 6, 8, 9

d) 3, 4, 7

Rozwiązanie

$$\text{a) } 26^2 = 676, 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$$

$$\text{b) } 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53 = (\sqrt{53})^2$$

$$\text{c) } 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \neq 9^2 = 81$$

d) $3 + 4 = 7$, zatem z tych odcinków nie można zbudować trójkąta.

Odp.: a), b) – tak, c), d) – nie

Symetralna odcinka i jej własności

Definicja

Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.

Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest jego symetralna, a drugą – prosta, w której ten odcinek się zawiera.

Twierdzenie

Jeżeli punkt P leży na symetralnej odcinka AB , to jego odległości od punktów A i B są jednakowe:

$$|AP| = |PB|$$

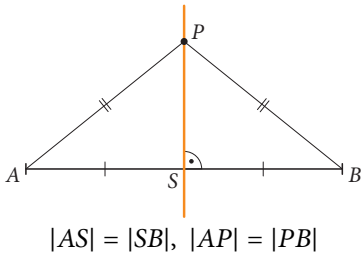
I odwrotnie:

Jeżeli odległości punktu P od punktów A i B są jednakowe, to punkt P leży na symetralnej odcinka AB .

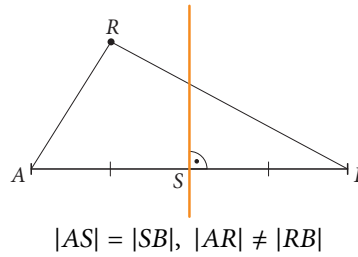
Wniosek

Jeżeli odległości punktu R od końców odcinka AB są różne, to punkt R nie leży na symetralnej odcinka AB .

Punkt P leży na symetralnej odcinka AB .



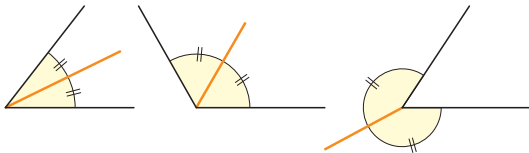
Punkt R nie leży na symetralnej odcinka AB .



Dwusieczna kąta i jej własności

Definicja

Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca ten kąt na dwa kąty przystające.



- Kąty, które mają równe miary, nazywamy kątami równymi.
- Równe kąty, podobnie jak równe odcinki, zaznaczamy w ten sam sposób.

Każdy kąt ma jedną oś symetrii. Dwusieczna kąta zawiera się w jego osi symetrii.

Twierdzenie

Jeżeli punkt P leży na dwusiecznej kąta o mierze mniejszej od 180° , to jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta.

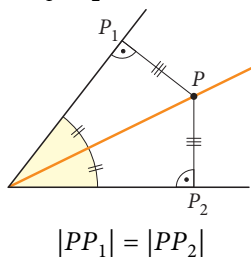
I odwrotnie:

Jeżeli punkt P położony wewnątrz kąta o mierze mniejszej od 180° jest jednakowo oddalony od jego ramion, to P leży na dwusiecznej tego kąta.

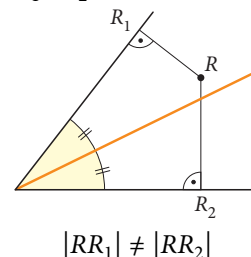
Wniosek

Jeżeli punkt R jest położony wewnątrz kąta o mierze mniejszej od 180° i jego odległości od ramion kąta są różne, to R nie leży na dwusiecznej tego kąta.

Punkt P leży na dwusiecznej kąta P_1OP_2 .



Punkt R nie leży na dwusiecznej kąta R_1OR_2 .



Konstrukcje geometryczne

Zadanie konstrukcyjne polega na zbudowaniu figury o zadanych własnościach.

Do wykonania konstrukcji metodą klasyczną używamy tylko dwóch przyrządów:

- linijki bez podziałki, która służy do wykreślenia linii prostej (korzystamy z własności: przez dwa punkty płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna prosta),
- cyrkla – do odmierzania (odkładania) odcinków równych danemu odcinkowi (korzystamy z własności: punkty płaszczyzny położone w danej odległości r od danego punktu S leżą na okręgu o środku w punkcie S i promieniu r).

W szkole podstawowej poznaliśmy jedną konstrukcję: trójkąta o trzech danych bokach. Teraz przedstawimy dwie kolejne: symetralnej danego odcinka oraz dwusiecznej danego kąta. Ich znajomość pozwala na rozwiązywanie różnorodnych zadań.

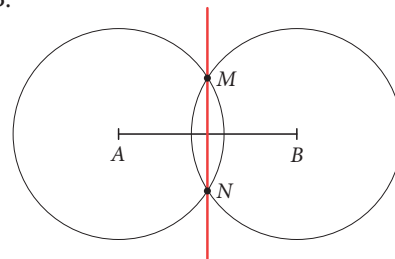
◀1.21. Dany odcinek podziel konstrukcyjnie na cztery równe części.

Przykład 2 ◀ zad. 1.21

Skonstruujemy symetralną danego odcinka AB .

Analiza

Symetralna jest prostą. Zatem do jej wykreślenia potrzebne są dwa różne punkty. Wiemy, że do symetralnej odcinka należą wyłącznie punkty równo oddalone od końców tego odcinka. Najprostszą konstrukcję pokazujemy na rysunku.



Opis konstrukcji

Wykonywana czynność	Otrzymana figura
Z punktów A i B zataczamy okręgi o promieniu $r > 0,5 \cdot AB $.	punkty przecięcia okręgów – oznaczone na rysunku literami M i N
Prowadzimy prostą MN .	prosta MN – szukana symetralna

Dowód poprawności konstrukcji

$$|AM| = |BM| \quad \leftarrow \text{równe promienie zataczanych okręgów}$$

Zatem M należy do symetralnej odcinka AB .

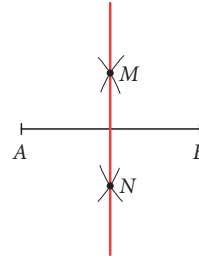
$$|AN| = |BN| \quad \leftarrow \text{równe promienie zataczanych okręgów}$$

Zatem N należy do symetralnej odcinka AB .

Koniec dowodu

Zauważmy, że rozwartość cyrkla (czyli r) musi spełniać warunek $r > 0,5 \cdot |AB|$, aby wykreślane okręgi się przecięły. Przy kreśleniu symetralnej nie będziemy w przyszłości rysować pełnych okręgów – do wyznaczenia potrzebnych punktów wystarczy poprowadzenie odpowiednich łuków. Zatem konstrukcja będzie wyglądać jak na rysunku obok.

Twierdzenie o symetralnej gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania zadania.



Konstrukcja symetralnej odcinka umożliwia rozwiązanie kolejnych zadań konstrukcyjnych, takich jak np.:

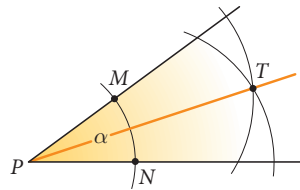
- podział odcinka na połowy,
 - konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej w punkcie należącym do niej,
 - konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej z punktu do niej nienależącego.
- W takich sytuacjach nie rozpisujemy konstrukcji symetralnej na poszczególne etapy, tylko piszemy krótko: poprowadzimy symetralną odcinka.

Przykład 3 ◀ zad. 1.24

Skonstruujemy dwusieczną danego kąta α o mierze mniejszej od 180° .

Analiza

Szukana dwusieczna jest półprostą o początku w wierzchołku kąta. Zatem do jej wykreślenia potrzebny jest jeszcze jeden punkt. Najprostszą konstrukcję pokazujemy na rysunku.

**Opis konstrukcji**

Wykonywana czynność	Otrzymana figura
Z wierzchołka P kąta α odmierzamy na obu jego ramionach równe odcinki.	punkty M i N
Zataczamy łuki okręgów $o(M, r)$ i $o(N, r)$ tak, by przecięły się wewnątrz kąta α .	punkt T
Prowadzimy półprostą PT .	półprosta PT – szukana dwusieczna kąta α

◀ 1.24. Skonstruuj kąt o podanej mierze.

a) 45°

b) $22,5^\circ$

Dowód poprawności konstrukcji

$ PM = PN $	← odłożone równe odcinki
$ MT = NT $	← równe promienie zataczanych okręgów
$\triangle PMT \equiv \triangle PNT$	← cecha bbb przystawania trójkątów (PT – wspólny bok)

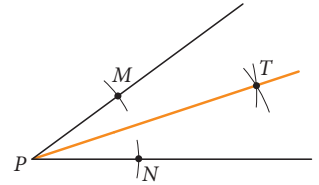
- Okrąg o środku A i promieniu r oznaczamy $o(A, r)$.
- Zamiast pisać „kąt ABC o mierze α ” używamy też formy „kąt ABC równy α ” lub „ $\sphericalangle ABC = \alpha$ ”.

Zatem $\sphericalangle MPT = \sphericalangle NPT$, czyli punkt T należy do dwusiecznej kąta α .

Koniec dowodu

Obok przedstawiamy rysunek konstrukcji w wersji uproszczonej.

Twierdzenie o dwusiecznej gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania zadania.



Przykład 4

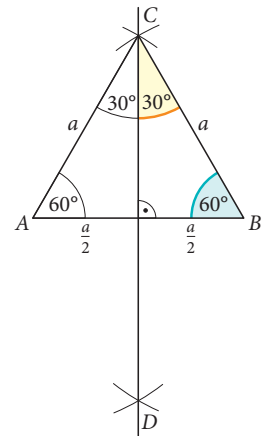
Omówimy jeden ze sposobów konstrukcyjnego wyznaczenia kątów o mierze 30° i 60° .

Rozwiązanie

Oto etapy konstrukcji.

- Na płaszczyźnie rysujemy odcinek AB o pewnej długości a .
- Prowadzimy okręgi $o(A, a)$ i $o(B, a)$ i otrzymujemy punkty ich przecięcia: C i D .
- Prowadzimy prostą CD , będącą symetralną odcinka AB .
- Łączymy odcinkami punkt C z punktami A oraz B – otrzymujemy trójkąt równoboczny ABC .

Każdy z kątów trójkąta równobocznego ma miarę równą 60° . Prosta CD jest osią symetrii tego trójkąta, zatem kąt BCD , podobnie jak kąt ACD , ma miarę 30° .



Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. a) tak b) nie

1.2. Punkty A , B i C są współliniowe, punkt A leży między punktami B i C .

1.1. Czy można zbudować trójkąt o bokach podanej długości?

a) 3,1 cm, 4,5 cm, 2,7 cm b) 2,1 cm, 5,7 cm, 3,3 cm

1.2. Dane są długości odcinków: $|AB| = 6$, $|BC| = 17$, $|CA| = 11$. Zbadaj, a następnie zilustruj wzajemne położenie punktów A , B i C .

1.3. Ile jest trójkątów o bokach równych 1 cm, 3 cm, 4 cm lub 7 cm? Rozważ wszystkie możliwości.

1.4. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

- a) 8, 15, 17 c) $3\sqrt{3}$, 8, 2 e) 5, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$
 b) $2\sqrt{3}$, $\sqrt{30}$, $3\sqrt{2}$ d) 7, 7, $7\sqrt{2}$ f) $2 + \sqrt{2}$, $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$

D 1.5. Przekątne równoległoboku, którego jeden z boków ma długość 10 cm, są równe 12 cm i 16 cm. Wykaż, że ten równoległobok jest rombem.

1.6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 13 i jednej przyprostokątnej długości 5.

1.7. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 29 i jednej przyprostokątnej długości 21.

1.8. Oblicz długość boku

- a) kwadratu o przekątnej długości 3. b) trójkąta równobocznego o polu $9\sqrt{3}$.

1.9. Przekątne rombu mają długości 14 i 48. Oblicz obwód tego rombu.

1.10. Trójkąt równoramienny o podstawie długości 40 ma ramię długości m . Jakie wartości może przyjmować m ?

1.11. Trójkąt równoramienny o ramieniu długości 20 ma podstawę długości m . Jakie wartości może przyjmować m ?

1.12. Podaj przykłady wielokątów, w których symetralna jednego z boków zawiera dwusieczną jednego z kątów wewnętrznych.

1.13. Ile osi symetrii ma podana figura?

- a) trójkąt równoboczny
 b) trójkąt równoramienny i nierównoboczny
 c) kwadrat
 d) prostokąt niebędący kwadratem
 e) romb niebędący kwadratem
 f) trapez równoramienny niebędący równoległobokiem
 g) sześciokąt foremny
 h) pięciokąt foremny

1.14. Które figury spośród wymienionych w zadaniu 1.13 mają środek symetrii?

1.3. 12 (4 równoboczne, 8 równoramiennych)

1.4. a) tak

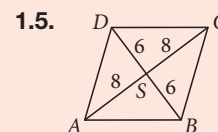
b) tak

c) nie

d) tak

e) nie

f) tak



Dane: $|BS| = |DS| = 6$ cm,
 $AB \parallel CD$, $|AS| = |CS| = 8$ cm,
 $BC \parallel AD$, $|BC| = 10$ cm.
 Ponieważ $|BS|^2 + |CS|^2 = |BC|^2$, to
 $\angle BSC = 90^\circ$ (na mocy twierdzenia
 odwrotnego do twierdzenia
 Pitagorasa).

Równoległobok o prostopadłych
 przekątnych jest rombem.

1.6. 30

1.7. 210

1.8. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) 6

1.9. 100

1.10. $m \in (20; \infty)$

1.11. $m \in (0; 40)$

1.12. np. trójkąt równoramienny,
 pięciokąt foremny

1.13. a) 3 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 2
e) 2 **f)** 1 **g)** 6 **h)** 5

1.14. c), d), e), g)

1.15. 4

1.16. nie

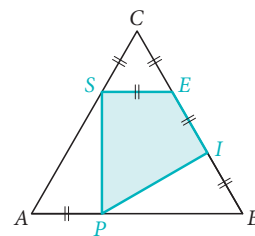
1.17. Muszą spełniać nierówność trójkąta.

1.19. a) dwa
b) jedno

1.20. Wskazówka: W danym czworokącie dorysuj przekątną.

1.26. Wskazówka: Skorzystaj z własności przekątnych rombu.

1.15. Trójkąt ABC jest równoboczny (zob. rysunek). Jego pole jest równe 9. Zaznaczone odcinki mają tę samą długość. Ile wynosi pole czworokąta $PIES$?



1.16. Narysuj sześciokąt foremny. Czy z faktu, że jakiś sześciokąt ma wszystkie kąty równe wynika, że jest on foremny?

1.17. Narysuj trzy odcinki. Skonstruuj trójkąt o bokach równych tym odcinkom. Jaki warunek muszą spełniać narysowane odcinki?

1.18. Narysuj podany wielokąt, a następnie poprowadź konstrukcyjnie jego wszystkie osie symetrii.

- a) trapez równoramienny o podstawach długości 10 cm, 8 cm i wysokości 4 cm
- b) trójkąt równoramienny o ramionach dwa razy dłuższych od podstawy
- c) prostokąt, którego długości boków są w stosunku 2 : 3

1.19. Skonstruuj trójkąt równoramienny o bokach podanej długości. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- a) 5 cm i 6 cm
- b) 5 cm i 2 cm

1.20. Narysuj dowolny czworokąt. Skonstruuj czworokąt przystający do niego.

1.21. Dany odcinek podziel konstrukcyjnie na cztery równe części.

1.22. Narysuj dowolny odcinek AB . Skonstruuj odcinek 2,5 razy dłuższy od odcinka AB .

1.23. Narysuj dowolny odcinek AB . Skonstruuj kwadrat o boku AB .

1.24. Skonstruuj kąt o podanej mierze.

- a) 45°
- b) $22,5^\circ$

1.25. Skonstruuj romb o kącie ostrym 45° i danym boku a .

1.26. Narysuj odcinki a i b różnej długości. Skonstruuj romb o przekątnych a i b .

1.27. Narysuj prostą k . Skonstruuj prostą prostopadłą do k przechodzącą przez wybrany punkt A

- a) leżący na prostej k .
- b) leżący poza prostą k .

2. Okręgi i proste

Umiejętności:

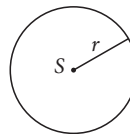
- korzystanie z własności stycznej do okręgu
- korzystanie z własności okręgów stycznych
- stosowanie własności dwusiecznej kąta przy wpisywaniu okręgu w trójkąt
- stosowanie własności symetralnej odcinka przy opisywaniu okręgu na trójkącie

Okrąg i koło

Przypomnijmy znane ze szkoły podstawowej definicje: okręgu i koła.

Definicja

Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r ($r > 0$) nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o r od punktu S i oznaczamy go $o(S, r)$.



Określenia **promień okręgu** będziemy w tym podręczniku używać w dwóch znaczeniach: odcinka łączącego punkt okręgu z jego środkiem albo liczby będącej długością tego odcinka. Z kontekstu powinno jasno wynikać, o które ze znaczeń chodzi.



Odległość geometryczna należy do pojęć pierwotnych geometrii.

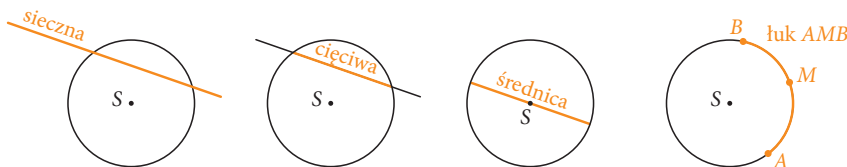


Sieczną okręgu nazywamy prostą przechodzącą przez dwa punkty okręgu, a **cięciwą** nazywamy odcinek siecznej wyznaczony na niej przez punkty okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez środek okręgu.

Łukiem okręgu nazywamy każdą z dwóch części okręgu wyznaczoną przez dwa punkty okręgu łącznie z tymi punktami. Jeżeli chcemy wskazać konkretny łuk, to na ogół podajemy jeszcze jeden punkt do niego należący, np. łuk AMB .

Półokręgiem nazywamy każdy z dwóch łuków wyznaczony przez końce średnicy okręgu.



ZZ i MKP

tematy 5.1, 5.3, 5.5, 5.6

Multiteka

- Wzajemne położenie okręgów
- Prosta i okrąg
- Okrąg wpisany w trójkąt
- Okrąg opisany na trójkącie
- Okrąg i trójkąt
- Długość okręgu
- Okręgi i katedra w Chartres

dlauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

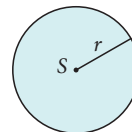
Generator
testów i sprawdzianów

Uwagi metodyczne

Podczas omawiania wzajemnego położenia dwóch okręgów uczniowie powinni korzystać z (przygotowanych wcześniej w domu) dwóch kół wyciętych z kartki, najlepiej lekko przezroczystej, z wyraźnie zaznaczonymi środkami i promieniami. Narzucmy wielkości tych kół (na przykład średnice 16 cm i 6 cm). Dzięki temu wszystkie możliwości będą bardziej czytelne, a w wyniku zbliżania do siebie środków okręgów uwidocznią się poszczególne warunki.

Definicja

Kołem o środku w punkcie S i promieniu r ($r > 0$) nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, które są oddalone od środka S co najwyżej o r , i oznaczamy $k(S, r)$. Punkty koła, które nie leżą na jego **brzegu**, czyli na okręgu $o(S, r)$, nazywamy **punktami wewnętrznymi**, a zbiór wszystkich takich punktów – **wnętrzem koła**.

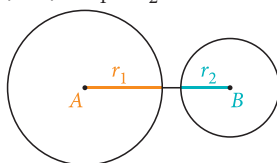


Sieczną, cięciwą i średnicą koła nazywamy sieczną, cięciwę i średnicę jego brzegu.

Dwa okręgi

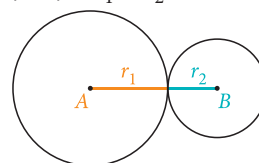
Omówimy wzajemne położenie dwóch okręgów: $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ w zależności od ich promieni i odległości między środkami. Wprowadzimy też odpowiednie nazwy. Przyjmijmy, że $r_1 \geq r_2$.

1. $|AB| > r_1 + r_2$



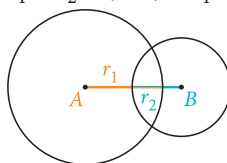
Okręgi **wzajemnie zewnętrzne** (lub **rozłączne zewnętrznie**) nie mają punktów wspólnych.

2. $|AB| = r_1 + r_2$



Okręgi **zewnętrznie styczne** mają jeden punkt wspólny.

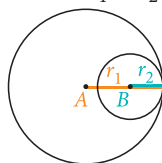
3. $r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$



Okręgi **przecinające się** mają dwa punkty wspólne.

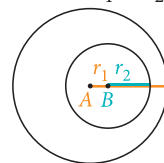
Jeżeli nie jest spełniony warunek $|AB| > r_1 - r_2$, to: $\langle \langle \langle$
albo $|AB| = r_1 - r_2$ i zachodzi warunek z p. 4,
albo $|AB| < r_1 - r_2$ i zachodzi warunek z p. 5.

4. $|AB| = r_1 - r_2 > 0$



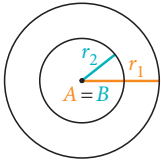
Okręgi **wewnętrznie styczne** mają jeden punkt wspólny.

5. $|AB| < r_1 - r_2$ i $r_1 - r_2 > 0$



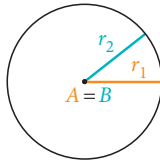
Okręgi **rozłączne wewnętrznie** nie mają punktów wspólnych.

6. $|AB| = 0$ i $r_1 - r_2 > 0$



Okręgi **współśrodkowe**
nie mają punktów wspólnych.

7. $|AB| = 0$ i $r_1 = r_2$



Okręgi **identyczne** (pokrywające się)
mają wszystkie punkty wspólne.

Wniosek

Jeśli dwa okręgi są styczne, to punkt styczności oraz środki tych okręgów leżą na jednej prostej.

Przykład 1

◀ zad. 2.4

Sprawdźmy, jak są położone względem siebie okręgi $o(A, 1)$, $o(B, 3)$ i $o(C, 7)$, jeżeli $|AB| = 4$, $|BC| = 10$ i $|AC| = 8$.

Rozwiązanie

Odległości między danymi środkami są równe sumom odpowiednich promieni ($4 = 1 + 3$, $10 = 3 + 7$, $8 = 1 + 7$), więc te okręgi są parami styczne zewnętrznie.

Przykład 2

◀ zad. 2.5

Określmy, jaka powinna być odległość między punktami A i B , aby okręgi $o(A, 2)$ i $o(B, 5)$ były

- a) styczne wewnętrznie. b) wzajemnie zewnętrzne.

Rozwiązanie

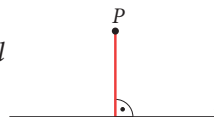
- a) Różnica promieni wynosi 3, jeżeli zatem $|AB| = 3$, to okrąg $o(A, 2)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu $o(B, 5)$.
b) Okręgi będą wzajemnie zewnętrzne, jeżeli odległość między ich środkami będzie większa od sumy promieni, równej 7.

Prosta i okrąg

Przypomnijmy znaną ze szkoły podstawowej definicję.

Definicja

Długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z prostą l to **odległość punktu P od prostej l** .



◀ 2.4. Określ na podstawie danych wzajemne położenie okręgów $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$.

- a) $|AB| = 8$, $r_1 = 5$, $r_2 = 3$
b) $|AB| = 10$, $r_1 = 4$, $r_2 = 5$
c) $|AB| = 15$, $r_1 = 9$, $r_2 = 24$
d) $|AB| = 12$, $r_1 = 8$, $r_2 = 6$
e) $|AB| = 0$, $r_1 = 5$, $r_2 = 9$
f) $|AB| = 11$, $r_1 = 16$, $r_2 = 4$

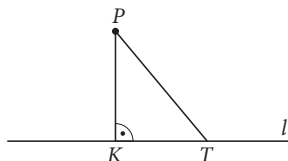
Odps.: a) styczne zewnętrznie
b) rozłączne zewnętrznie
c) styczne wewnętrznie
d) przecinające się
e) współśrodkowe
f) rozłączne wewnętrznie

◀ 2.5. Określ odległość między punktami A i B tak, aby okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ były

- a) styczne zewnętrznie, jeżeli $r_1 = 5$ i $r_2 = 9$.
b) styczne wewnętrznie, jeżeli $r_1 = 2$ i $r_2 = 8$.
c) przecinające się, jeżeli $r_1 = 10$ i $r_2 = 20$.

Odps.: a) $|AB| = 14$
b) $|AB| = 6$
c) $10 < |AB| < 30$

Udowodnimy, że jeżeli $P \notin l$, to najkrótszy odcinek łączący ten punkt z prostą l jest do niej prostopadły. Niech K oznacza koniec odcinka prostopadłego do prostej l łączącego tę prostą z punktem P .



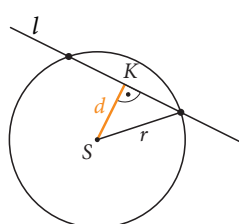
Wybieramy dowolny punkt na prostej l różny od punktu K i oznaczamy go T . Odcinek TP jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym PKT . Z wniosku z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|PT| > |PK|$. Zatem odcinek PK jest najkrótszym odcinkiem łączącym punkt P z prostą l .

Jeżeli punkt $P \in l$, to odległość punktu P od prostej l jest równa 0.

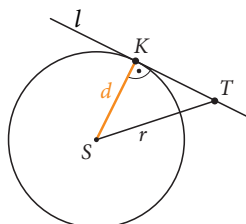
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach poniżej:

K to koniec odcinka prostopadłego do prostej l łączącego tę prostą ze środkiem okręgu $o(S, r)$,

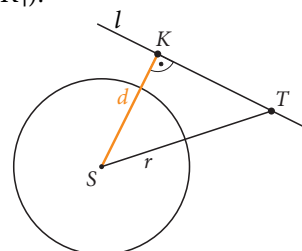
d to odległość środka S okręgu od prostej l (czyli $d = |SK|$).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zauważmy, że jeśli:

- I. $d < r$, to prosta l ma dwa punkty wspólne z okręgiem, bo K jest punktem wewnętrznym koła $k(S, r)$ (rys. 1).
- II. $d = r$, to punkt K jest jedynym punktem wspólnym prostej l i okręgu – każdy inny punkt prostej l , np. T , wyznacza odcinek TS , który jest przeciwprostokątną w trójkącie STK , czyli $|TS| > d = r$ (rys. 2).
- III. $d > r$, to prosta l nie ma żadnego punktu wspólnego z okręgiem – każdy inny punkt prostej l , np. T , wyznacza odcinek TS , który jest przeciwprostokątną w trójkącie STK , czyli $|TS| > d > r$ (rys. 3).

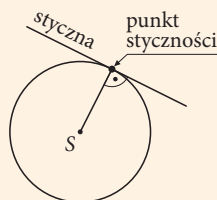
Definicja

Prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy **styczną** do okręgu. Punkt wspólny stycznej i okręgu nazywamy **punktem styczności**.

Z poprzednich rozważań wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek

Styczna do okręgu jest prostopadła do odcinka łączącego punkt styczności ze środkiem tego okręgu.



Położenie prostej względem okręgu wiąże się z liczbą wspólnych punktów obu figur.

Rysunek	Liczba punktów wspólnych	Prosta
	0	zewnętrzna względem okręgu
	1	styczna do okręgu
	2	sieczna – przecina okrąg

Przykład 3 ◀ zad. 2.9

Dane są: okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = 3$ cm oraz dwie proste – l , oddalona od punktu S o 5 cm, i k , oddalona od punktu S o 2 cm.

Prosta l nie ma z okręgiem żadnego punktu wspólnego, a prosta k przecina ten okrąg w dwóch punktach.

◀ **2.9.** Określ, ile punktów wspólnych z okręgiem o promieniu r ma prosta oddalona od środka okręgu o d .

- a) $r = 6, d = 18$
- b) $r = 11, d = 11$
- c) $r = 8, d = 10$
- d) $r = 7, d = 2$
- e) $r = 1,5, d = 1,5$
- f) $r = 7, d = 5$

Odpo.: a) 0 b) 1 c) 0 d) 2
e) 1 f) 2

◀ 2.10. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę AB jest równa 3 cm. Promień okręgu jest równy 6 cm. Oblicz długość cięciwy AB .

Odp.: $6\sqrt{3}$ cm

Przykład 4 ◀ zad. 2.10

Prosta zawierająca cięciwę MN okręgu $o(S, 5)$ jest oddalona od punktu S o 4. Obliczmy długość cięciwy MN .

Rozwiązanie

Popatrzmy na rysunek obok. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę jest równa wysokości SD poprowadzonej w trójkącie równoramiennym MNS o podstawie MN .

$$|DN|^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

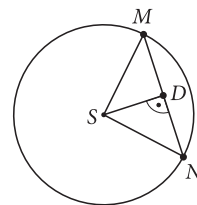
← twierdzenie Pitagorasa w $\triangle SDN$

$$|DN| = 3$$

$$|MN| = 2 \cdot |DN| = 6$$

← trójkąt MNS jest równoramienny

Odp.: $|MN| = 6$

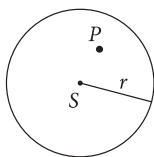


Dane są: punkt P i okrąg $o(S, r)$.

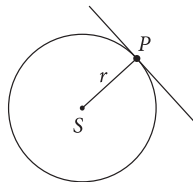
Jeżeli:

- $|SP| < r$, to nie istnieje styczna do okręgu przechodząca przez P ,
- $|SP| = r$, to istnieje jedna styczna do okręgu przechodząca przez P ,
- $|SP| > r$, to istnieją dwie styczne do okręgu przechodzące przez P .

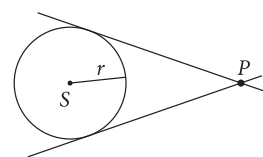
Literą S oznaczamy na rysunkach środek okręgu (chyba że z kontekstu wynika co innego). Czasem, aby rysunek był bardziej przejrzysty, środek okręgu zaznaczony jest tylko kropką.



$$|SP| < r$$



$$|SP| = r$$



$$|SP| > r$$

Uwagi metodyczne

Zwróćmy uwagę na proste do udowodnienia twierdzenie o odcinkach stycznych. Zastosowanie tego twierdzenia często wydatnie skraca zapis rozwiązywania zadania.

Przykład 5

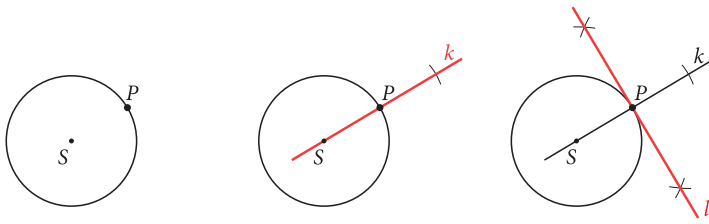
Skonstruujemy styczną do okręgu w punkcie P należącym do tego okręgu.

Rozwiązanie

Styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności, więc:

Krok 1: Przez punkt P i środek S okręgu prowadzimy prostą k .

Krok 2: Przez punkt P prowadzimy prostą l prostopadłą do k .



Konstrukcyjnym wyznaczeniem stycznych przechodzących przez dany punkt P nie-należący do okręgu zajmiemy się w następnym temacie.

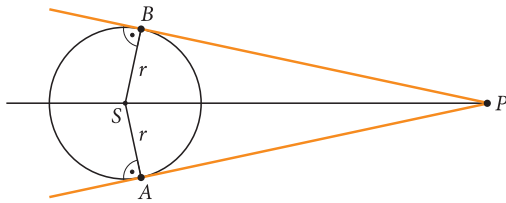
Twierdzenie

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie proste styczne do tego okręgu w punktach A i B , to $|PA| = |PB|$.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Punkt S jest jednakowo (o promień) oddalony od obydwu stycznych. Zatem:

$$\sphericalangle SPA = \sphericalangle SPB$$

← półprosta PS jest dwusieczną kąta APB

$$\sphericalangle SAP = \sphericalangle SBP = 90^\circ$$

← kąt między styczną i promieniem

$$\sphericalangle ASP = \sphericalangle BSP$$

← suma kątów w trójkącie jest równa 180°

$$|AS| = |BS|$$

Stąd $\triangle SPA \equiv \triangle SPB$,

← cecha kbk przystawiania trójkątów

czyli $|PA| = |PB|$.

Koniec dowodu

O okręgu położonym jak na rysunku w powyższym dowodzie mówimy, że jest **wpisany w kąt** APB . Odcinki PA i PB nazywamy **odcinkami stycznymi**, a kąt APB o mierze mniejszej od 180° – **kątem między stycznymi**.

Środek okręgu wpisanego w kąt leży na dwusiecznej tego kąta.



Przykład 6

W okręgu o środku S kąt między promieniami SA i SB jest równy 140° . Wyznamy miarę kąta między stycznymi do okręgu poprowadzonymi w punktach A i B .

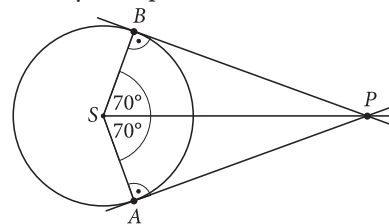
Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. P jest punktem przecięcia stycznych. Aby znaleźć miarę kąta APB , można skorzystać z faktu, że suma kątów czworokąta jest równa 360° :

$$\sphericalangle APB = 360^\circ - 90^\circ - 140^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

Inaczej: $\triangle SAP \equiv \triangle SBP$, zatem $\sphericalangle APB = 2 \cdot \sphericalangle SPB = 2 \cdot (180^\circ - 70^\circ - 90^\circ) = 40^\circ$.

Odp.: $\sphericalangle APB = 40^\circ$

**Okrąg wpisany w trójkąt****Twierdzenie**

W każdym trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Każdy kąt trójkąta jest mniejszy od 180° . Zatem dla każdego z tych kątów punkty na jego dwusiecznej leżą w równej odległości od ramion kąta, czyli boków trójkąta. Dwie dwusieczne, np. kąta CAB i kąta CBA , muszą się przeciąć – punkt ich przecięcia oznaczmy literą S .

Zgodnie z rysunkiem, jeśli A' , B' , C' oznaczają odpowiednie końce odcinków prostopadłych do boków, poprowadzonych z punktu S , to:

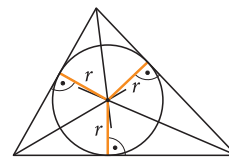
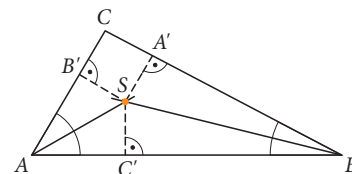
$$|SC'| = |SB'| \quad \leftarrow \text{punkt } S \text{ leży na dwusiecznej kąta } CAB$$

$$|SC'| = |SA'| \quad \leftarrow \text{punkt } S \text{ leży na dwusiecznej kąta } CBA$$

Zatem $|SB'| = |SA'|$ i stąd wniosek, że punkt S leży na dwusiecznej kąta ACB .

Koniec dowodu

Okrąg wpisany w trójkąt to okrąg styczny do wszystkich boków trójkąta. Inaczej mówiąc, jest on wpisany we wszystkie trzy kąty tego trójkąta, zatem jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów. Promień okręgu wpisanego jest równy odległości środka okręgu od każdego z boków trójkąta.



Wniosek

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Przykład 7 ◀ zad. 2.13

W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono literami K, L, M jak na rysunku. Dane są długości odcinków: $|AL| = 3$, $|LB| = 7$, $|AC| = 5$. Obliczmy obwód trójkąta ABC .

Rozwiązanie

$$|AL| = |AK| \quad \leftarrow \text{odcinki styczne}$$

$$|KC| = 5 - 3 = 2 = |CM|$$

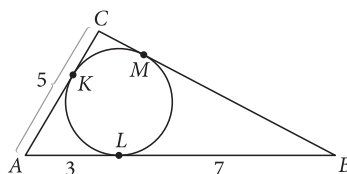
$$|MB| = |LB| = 7 \quad \leftarrow \text{odcinki styczne}$$

$$|BC| = |CM| + |MB| = 2 + 7 = 9$$

Zatem obwód trójkąta ABC jest równy:

$$|AB| + |BC| + |CA| = 10 + 9 + 5 = 24$$

Odp.: 24



Przykład 8 ◀ zad. 2.25

Dwa okręgi o równych promieniach R są styczne zewnętrznie w punkcie S . Każdy z nich jest styczny wewnętrznie do okręgu o środku S . Okrąg o promieniu r i środku M ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdym z wymienionych okręgów (zob. rysunek).

Wykażemy, że $r = \frac{2R}{3}$.

Dowód

Uzupełnijmy rysunek o dwa odcinki: BS i MQ .

W prostokątnym trójkącie MSQ mamy:

$$|MS| = |SB| - |MB| = 2R - r \quad \text{oraz} \quad |QM| = R + r$$

Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa:

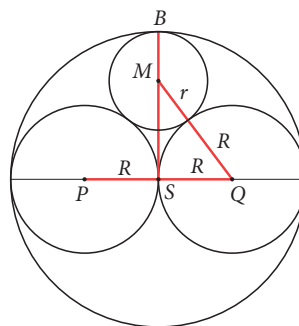
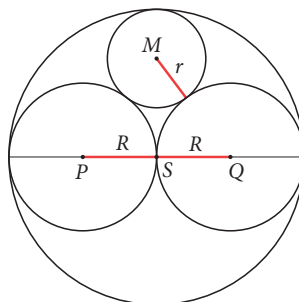
$$(2R - r)^2 + R^2 = (R + r)^2$$

$$4R^2 - 4Rr + r^2 + R^2 = R^2 + 2Rr + r^2$$

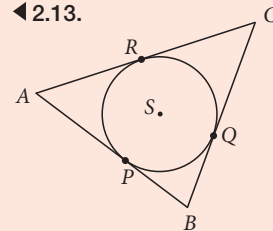
$$4R^2 - 6Rr = 0, \quad \text{czyli} \quad 2R(2R - 3r) = 0$$

Wynika stąd, że $r = \frac{2R}{3}$, bo $R > 0$.

Koniec dowodu



◀ 2.13.



W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono P, Q, R jak na rysunku. Wiadomo, że $|BQ| = 4$ i $|AC| = 11$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

Odp.: 30

◀ 2.25. Trzy okręgi o promieniach równych 3 cm są parami styczne zewnętrznie. Oblicz promień okręgu stycznego wewnętrznie do każdego z tych trzech okręgów.

Odp.: $(2\sqrt{3} + 3)$ cm

Okrąg opisany na trójkącie

Twierdzenie

W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkty należące do symetralnej boku leżą w równej odległości od końców tego boku, czyli wierzchołków trójkąta. Dwie symetralne, np. boku AB i boku AC , muszą się przeciąć – punkt ich przecięcia oznaczmy literą S .

$$|SA| = |SB|$$

← punkt S leży na symetralnej boku AB

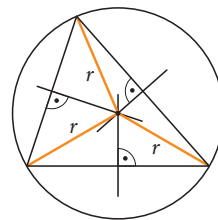
$$|SA| = |SC|$$

← punkt S leży na symetralnej boku CA

Zatem $|SB| = |SC|$, czyli punkt S leży na symetralnej boku BC . Symetralna boku BC przechodzi więc przez S , jako punkt równo oddalony od końców odcinka BC .

Koniec dowodu

Okrąg opisany na trójkącie to okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki trójkąta. Inaczej mówiąc, środek tego okręgu jest jednakowo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta, czyli jest punktem przecięcia symetralnych boków. Promień okręgu opisanego jest równy odległości środka okręgu od każdego z wierzchołków trójkąta.



Wniosek

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

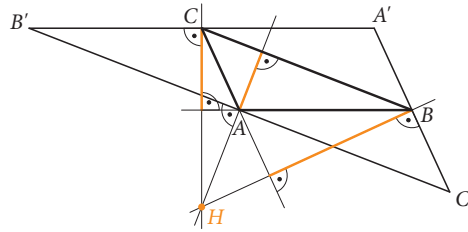
Twierdzenie o symetralnych boków trójkąta stosuje się również w dowodzie następującego twierdzenia o istnieniu innego ważnego punktu – tzw. **ortocentrum**, czyli punktu przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta.

Twierdzenie

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Wskazówka: Przez wierzchołki rozważanego trójkąta ABC poprowadź proste równoległe do jego przeciwległych boków i wykaż, że w nowo powstałym trójkącie $A'B'C'$ proste zawierające wysokości trójkąta ABC są symetralnymi boków (zob. rysunek).



Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

2.1. Okręgi $o(A, \frac{11}{3})$ oraz $o(B, 7)$ są położone tak, że $|AB| = \frac{10}{3}$. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

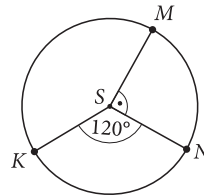
- A. 0 B. 1 C. 2 D. nieskończenie wiele

2.2. Wskaż największą możliwą liczbę punktów przecięcia brzegu prostokąta z okręgiem.

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

2.3. Przez punkty M , N i K poprowadzono styczne do okręgu o środku S . Punkty przecięcia stycznych są wierzchołkami pewnego trójkąta. Jakie kąty ma ten trójkąt?

- A. 45° , 60° , 75° C. 90° , 60° , 30°
B. 90° , 45° , 45° D. 90° , 60° , 75°



2.4. Określ na podstawie danych wzajemne położenie okręgów $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ AB = 8$ $r_1 = 5$ $r_2 = 3$ | d) $ AB = 12$ $r_1 = 8$ $r_2 = 6$ |
| b) $ AB = 10$ $r_1 = 4$ $r_2 = 5$ | e) $ AB = 0$ $r_1 = 5$ $r_2 = 9$ |
| c) $ AB = 15$ $r_1 = 9$ $r_2 = 24$ | f) $ AB = 11$ $r_1 = 16$ $r_2 = 4$ |

2.5. Określ odległość między punktami A i B tak, aby okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ były

- a) styczne zewnętrznie, jeżeli $r_1 = 5$ i $r_2 = 9$.
b) styczne wewnętrznie, jeżeli $r_1 = 2$ i $r_2 = 8$.
c) przecinające się, jeżeli $r_1 = 10$ i $r_2 = 20$.

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. B

2.2. C

2.3. C

- 2.4.** a) styczne zewnętrznie
b) rozłączne zewnętrznie
c) styczne wewnętrznie
d) przecinające się
e) współśrodkowe
f) rozłączne wewnętrznie

- 2.5.** a) $|AB| = 14$
b) $|AB| = 6$
c) $10 < |AB| < 30$

2.6. W pierwszym wierszu $|AB| = 10$, w każdym z pozostałych wierszy jest nieskończenie wiele możliwości.

2.7. 2, 4, 8

2.8. Boki trójkąta ABC mają długości 3, 4 i 5, zatem trójkąt ABC jest prostokątny.
($3^2 + 4^2 = 5^2$)

2.9. a) 0 b) 1 c) 0 d) 2 e) 1
f) 2

2.10. $6\sqrt{3}$ cm

2.11. $4\sqrt{5}$

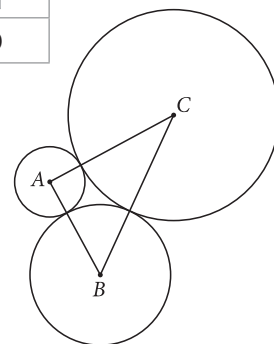
2.12. $|PA| = |PB|$, $|CB| = |CE|$,
 $|DE| = |DA|$

2.6. Przerysuj tabelę i uzupełnij ją. Jeżeli w którymś wierszu jest więcej niż jedno rozwiązanie, podaj trzy przykłady spełniające podane warunki.

Okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$	$ AB $	r_1	r_2
styczne zewnętrznie	?	3	7
wzajemnie zewnętrzne	20	15	?
przecinają się	5	?	2
styczne wewnętrznie	?	4	?
$o(A, r_1)$ zawiera się w $k(B, r_2)$	?	8	10

2.7. Środki trzech okręgów parami zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta o bokach długości 10, 12 i 6. Oblicz promień tych okręgów.

2.8. Trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach odpowiednio 1, 2 i 3 są parami styczne zewnętrznie jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.



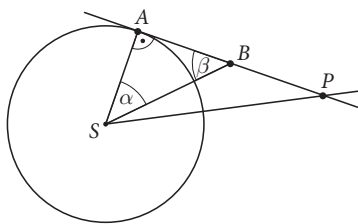
2.9. Określ, ile punktów wspólnych z okręgiem o promieniu r ma prosta oddalona od środka okręgu o d .

a) $r = 6$ $d = 18$ c) $r = 8$ $d = 10$ e) $r = 1,5$ $d = 1,5$
b) $r = 11$ $d = 11$ d) $r = 7$ $d = 2$ f) $r = 7$ $d = 5$

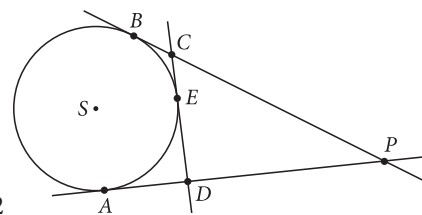
2.10. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę AB jest równa 3 cm. Promień okręgu jest równy 6 cm. Oblicz długość cięciwy AB .

2.11. Z punktu P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A (rys. 1). Odcinek SB jest środkową w trójkącie SPA . Promień okręgu jest równy 4 oraz $\alpha = \beta$. Oblicz długość odcinka SP .

2.12. Dany jest okrąg o środku S i trzy proste styczne do niego, położone jak na rysunku 2. Punkty A, B, E są punktami styczności odpowiednich prostych. Wypisz pary odcinków równych.

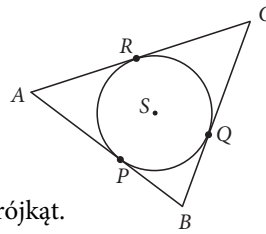


Rys. 1



Rys. 2

2.13. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono P, Q, R jak na rysunku. Wiadomo, że $|BQ| = 4$ i $|AC| = 11$. Oblicz obwód trójkąta ABC .



2.14. Skonstruuj trójkąt o bokach 5 cm, 6 cm i 8 cm, a następnie skonstruuj okrąg
a) opisany na tym trójkącie. b) wpisany w ten trójkąt.

2.15. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 2 cm, a jedna z przyprostokątnych tego trójkąta ma długość 12 cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

* **2.16.** Ile punktów wspólnych może mieć brzeg kwadratu z okręgiem, którego środek należy do prostej zawierającej przekątną kwadratu? Wykonaj odpowiednie rysunki.

2.17. W trójkąt o kątach $34^\circ, 70^\circ, 76^\circ$ wpisano okrąg. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności tego okręgu z bokami danego trójkąta.

2.18. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 360 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 16 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2.19. Punkty A i B należą do okręgu o środku S . Styczna do tego okręgu w punkcie B oraz prosta AS przecinają się w punkcie C i tworzą kąt o mierze 26° . Oblicz miarę kąta CAB . Rozważ dwa przypadki.

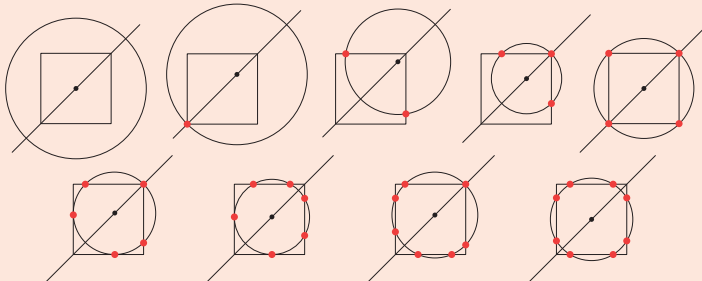
* **2.20.** Punkty A i B dzielą okrąg na dwa łuki różnej długości. Na krótszym z tych łuków obrano punkt C , a następnie w punktach A, B i C poprowadzono trzy styczne do okręgu: odpowiednio l, k, p . Proste l i k przecinają się w punkcie M , a prosta p przecina proste l i k odpowiednio w punktach N i T . Obwód trójkąta MNT jest równy $2a$. Oblicz długość odcinka MA .

D * **2.21.** Punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach a i b . Wykaż, że pole tego trójkąta jest równe $a \cdot b$.

* **2.22.** W kąt prosty wpisano dwa okręgi styczne zewnętrznie. Promień większego z nich jest równy 6 cm. Oblicz promień mniejszego okręgu.

D * **2.23.** Dwa okręgi o środkach A i B oraz różnych promieniach są styczne zewnętrznie i równocześnie styczne wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie C i promieniu r . Wiadomo, że punkty A, B i C nie są współliniowe. Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest równy $2r$.

2.16. od 0 do 8 punktów wspólnych (zob. rysunek)



2.13. 30

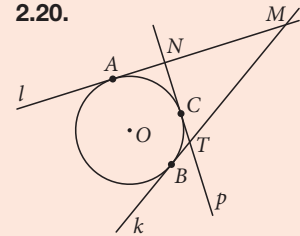
2.15. 5 cm i 13 cm

2.17. $52^\circ, 55^\circ, 73^\circ$

2.18. 2880 cm^2

2.19. 32° lub 122°

2.20.



Dane: $L_{MNT} = 2a$

Oznaczenia:

$b = |BT| = |CT|$

$c = |CN| = |AN|$

$x = |MA| = |MB|$

Wówczas:

$$\begin{cases} |MN| = x - c \\ |NT| = c + b \\ |SM| = x - b \end{cases}$$

więc

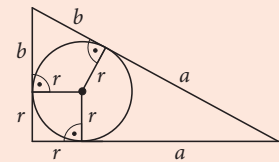
$$L_{MNT} = |MN| + |NT| + |TM| = 2x$$

Równoważnie $L_{MNT} = 2a$,

stąd $x = a$.

Odp.: $|MA| = a$

2.21.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$(a+r)^2 + (b+r)^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$2ar + 2br + 2r^2 = 2ab : 2$$

$$ar + br + r^2 = ab$$

$$P = \frac{1}{2} (a+r)(b+r) =$$

$$= \frac{1}{2} (ab + ar + br + r^2) =$$

$$= \frac{1}{2} (ab + ab) = ab$$

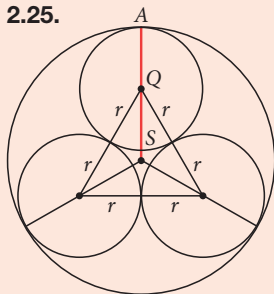
2.22. $6(3 - 2\sqrt{2})$ cm. Wskazówka:

Narysuj odcinek łączący wierzchołek kąta ze środkiem większego okręgu i oblicz długość tego odcinka.

2.23. Wskazówka: Oblicz długości boków trójkąta ABC .

2.24. $4(2\sqrt{3} - 3)$ cm. *Wskazówka:* Środki danych okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz wysokość tego trójkąta.

2.25.



$$r = 3 \text{ cm}$$

R – promień dużego okręgu

$$R = |AS| = |AO| + |OS| =$$

$$= r + \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \cdot r =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \cdot 3 = 2\sqrt{3} + 3$$

Odp.: $(2\sqrt{3} + 3)$ cm

2.26. 13 cm i 49 cm

Prosto do matury

1. P, P, P

2. $o(A, 3)$ i $o(C, 3)$ styczne zewnętrznie,
 $o(A, 3)$ i $o(B, 3)$ rozłączne zewnętrznie,
 $o(B, 3)$ i $o(C, 3)$ rozłączne zewnętrznie

3. 48 cm. *Wskazówka:* Wykorzystaj twierdzenie o odcinkach stycznych.

4. 15

* **2.24.** Trzy okręgi o promieniach równych 6 cm są parami styczne zewnętrznie. Wyznacz średnicę okręgu stycznego zewnętrznie do każdego z tych trzech okręgów.

* **2.25.** Trzy okręgi o promieniach równych 3 cm są parami styczne zewnętrznie. Oblicz promień okręgu stycznego wewnętrznemu do każdego z tych trzech okręgów.

2.26. Z tektury w kształcie prostokąta wycięto dwa półkola o promieniach 13 cm jak na rysunku. Oblicz wymiary tego prostokąta. Wynik zaokrąglij do pełnych centymetrów.



Prosto do matury



1. Prosta l jest styczna do okręgu $o(S, 5)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Istnieją dokładnie trzy okręgi o promieniu 3 styczne zewnętrznie równocześnie do prostej l i do okręgu $o(S, 5)$.

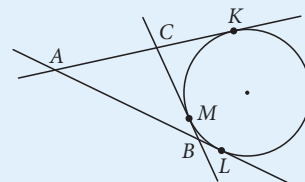
B. Istnieją cztery okręgi o promieniu 3 styczne równocześnie do prostej l i do okręgu $o(S, 5)$.

C. nieskończenie wiele okręgów jest stycznych równocześnie do prostej l i do okręgu $o(S, 5)$.

2. Trójkąt ABC ma boki o długościach $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 9$ cm i $|AC| = 6$ cm. Narysowano trzy okręgi o promieniach 3 cm i o środkach w wierzchołkach trójkąta. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

3. Dane są dwa okręgi współśrodkowe o promieniach równych 25 cm i 7 cm. Oblicz długość tej cięciwy większego okręgu, która jest styczna do mniejszego okręgu.

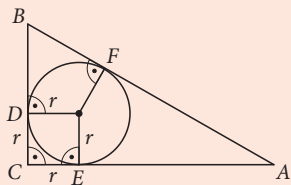
4. Proste AK , AL i BC są styczne do okręgu (zob. rysunek). Obwód trójkąta ABC jest równy 30. Wyznacz długość odcinka AK .



D

5. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c zachodzi związek $a + b - c = 2r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

5.



Niech $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$

$$|AE| = |AC| - |CE| = b - r, \quad |BD| = |BC| - |DC| = a - r$$

Z twierdzenia o stycznych otrzymujemy:

$$c = |AB| = |BF| + |AF| = |BD| + |AE| = a - r + b - r = a + b - 2r, \text{ więc } 2r = a + b - c$$

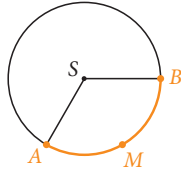
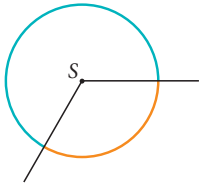
3. Kąty w kole

Umiejętności:

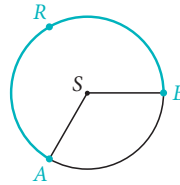
- stosowanie zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym
- korzystanie z własności stycznej do okręgu

Kąt środkowy

Dwie półproste o wspólnym początku wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty. Jeżeli zakreslimy okrąg o środku w wierzchołku tych kątów, to ich ramiona podzielą okrąg na dwa łuki. Aby jednoznacznie wskazać jeden z nich, wprowadzimy oznaczenia literowe.



Łuk AMB o końcach A i B przechodzi przez punkt M .



Łuk BRA o końcach A i B przechodzi przez punkt R .

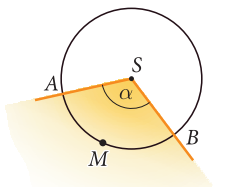
Definicja

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym w tym okręgu**.

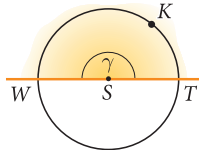
Mówimy, że kąt środkowy jest **wyznaczony przez odpowiedni łuk** okręgu (albo jest **oparty na odpowiednim łuku** okręgu). Oznacza to, że końce łuku leżą na ramionach kąta, a pozostałe punkty łuku są punktami wewnętrznymi kąta.

Przykład 1

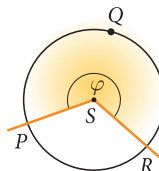
W zapisie literowym łuk AMB i łuk BMA oznaczają to samo, ale zgodnie z często przyjmowaną przez matematyków zasadą, będziemy wymieniać punkty w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara.



Kąt α jest wyznaczony przez łuk AMB .



Kąt γ jest wyznaczony przez łuk TKW .



Kąt φ jest wyznaczony przez łuk RQP .

Uwagi metodyczne

Podczas definiowania kątów środkowych i wpisanych zamiast wyrażenia „oparte na cięciwie” warto używać określenia „oparte na łuku”. Należy także wyraźnie zaznaczać łuk zawarty w obszarze kąta, przedłużając ramiona kąta poza koło.

ZZ i MKP

tematy 5.2, 5.4

Multiteka

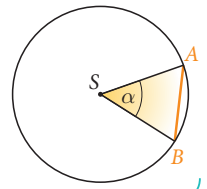
- Pole koła
- Pole wycinka koła – zastosowanie
- Kąty w okręgu
- Recytowanie cyfr liczby π

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

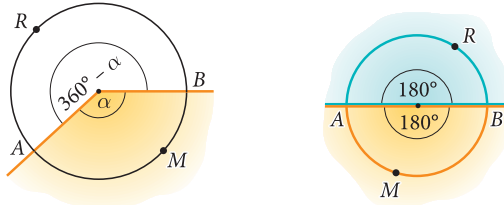
Generator
testów i sprawdzianów

Czasem, gdy kąt środkowy jest wypukły, wygodnie jest wyko-
rzystać cięciwę łączącą końce promieni i powiedzieć, że kąt **jest**
wyznaczony przez tę cięciwę.

Na przykład kąt α na rysunku obok jest wyznaczony przez cię-
ciwę AB .



Jeżeli kąt środkowy wyznaczony przez łuk AMB jest równy α , to kąt środkowy wy-
znaczony przez łuk BRA jest równy $360^\circ - \alpha$. Jedyna sytuacja, w której oba takie kąty
są wypukłe, zachodzi wówczas, gdy oba łuki są półokręgami.



Wniosek 1

Kąt środkowy oparty na półokręgu jest kątem pełnym.

Miara kąta środkowego zależy od długości łuku, który ten kąt wyznacza.

Przypomnijmy: 1° to miara $\frac{1}{90}$ kąta prostego.

Przykład 2 ◀ zad. 3.4, 3.5

- 90° to miara kąta prostego, czyli kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy $\frac{1}{4}$ okręgu,
- 60° to miara kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy $\frac{1}{6}$ okręgu,
- 150° to miara kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy $\frac{5}{12}$ okręgu itd.

Obliczymy, przez jaki kąt środkowy jest wyznaczony łuk o długości $\frac{2}{3}$ okręgu:

$$\frac{2}{3} \cdot 360^\circ = 240^\circ$$

Jest to kąt środkowy o mierze 240° .

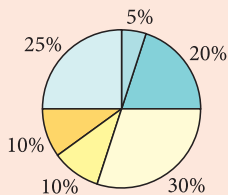
Wniosek 2

Dwa kąty środkowe w tym samym okręgu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy
opierają się na równych łukach.

◀ 3.4. Na okręgu odmierzone
kolejno łuki AB , BC i CA , których
długości są w stosunku $1 : 7 : 10$.
Wyznacz miary kątów środkowych
opartych na tych łukach.

Odp.: 20° , 140° , 200°

◀ 3.5.



Dany jest diagram kołowy. Oblicz
miary kątów zaznaczonych
kolorami wycinków kołowych.

Odp.: 5% na diagramie odpowiada
kątowni o mierze 18° ,

10% – 36° ,

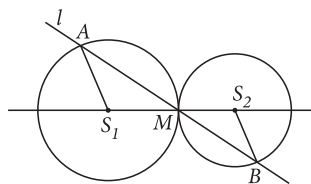
20% – 72° ,

25% – 90° ,

30% – 108° .

Przykład 3

Okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie. Prosta l przechodzi przez punkt styczności M i przecina okręgi w punktach A i B tak jak na rysunku. Wykażemy, że wypukłe kąty środkowe wyznaczone przez cięciwy MA i MB są równe.

**Dowód**

Trójkąty AS_1M i BS_2M są równoramienne (w każdym z nich ramionami są promienie), zatem każdy z nich ma przy podstawie równe kąty. Punkty S_1, M, S_2 są współliniowe. Kąty S_1MA i S_2MB są wierzchołkowe, czyli równe, więc wszystkie kąty przy podstawach obu trójkątów są równe. Kąty AS_1M i BS_2M są więc równe jako dopełnienie do 180° .

Koniec dowodu**Części koła**

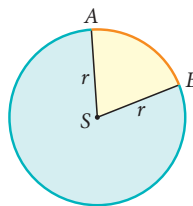
Z kątem środkowym związana jest część koła nazywana wycinkiem.

Definicja

Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na które dzielą koło dwa niepokrywające się promienie.

Pole koła o promieniu r jest równe: $P = \pi r^2$.

Pole wycinka kołowego zależy od miary kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek lub inaczej – od długości łuku, który ten wycinek ogranicza. Na przykład jeśli łuk AB będący brzegiem wycinka kołowego (na rysunku zaznaczony kolorem pomarańczowym) ma długość równą $\frac{1}{5}$ długości okręgu, to pole:



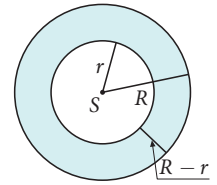
- żółtego wycinka kołowego jest równe: $P_1 = \frac{1}{5}\pi r^2$,
- niebieskiego wycinka jest równe: $P_2 = \frac{4}{5}\pi r^2$.

Zauważmy, że dwa wycinki kołowe kół o równych promieniach są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy łuki wyznaczające te wycinki są tej samej długości, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy kąty środkowe wyznaczające te wycinki mają tę samą miarę.

Przypomnijmy jeszcze pojęcie pierścienia kołowego znane ze szkoły podstawowej.

Definicja

Pierścieniem kołowym o szerokości $R - r$, gdzie $R > r$, nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość d od ustalonego punktu S spełnia warunek $r \leq d \leq R$.



Pole pierścienia kołowego jest równe: $P = \pi(R^2 - r^2)$.

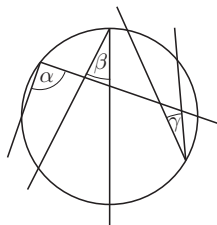
Kąt wpisany**Definicja**

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię kąta ma z tym okręgiem jeszcze jeden punkt wspólny.

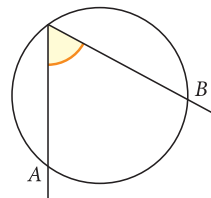
Na rysunku 1 zaznaczono kilka kątów wpisanych w okrąg.

Ramiona kąta wpisanego dzielą okrąg na dwa łuki (rys. 2). Łuk, do którego nie należy wierzchołek kąta, nazywamy **łukiem wyznaczonym przez kąt**. Mówimy również, że kąt wpisany **jest oparty** na tym łuku.

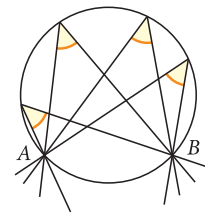
Zwróćmy uwagę na to, że na jednym łuku jest opartych nieskończenie wiele kątów wpisanych (rys. 3).



Rys. 1.



Rys. 2.

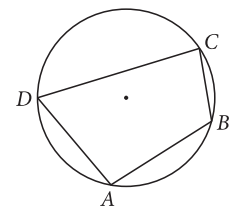


Rys. 3.

Przykład 4

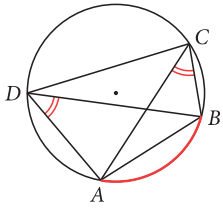
Wszystkie wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu tak jak na rysunku. Zaznaczmy wszystkie kąty wpisane o wierzchołkach będących wierzchołkami tego czworokąta i oparte na łuku

- AB nieprzechodzącym przez C .
- BC nieprzechodzącym przez D .
- ABC .

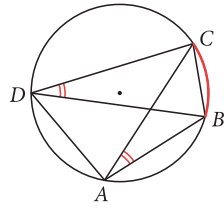


Rozwiązanie

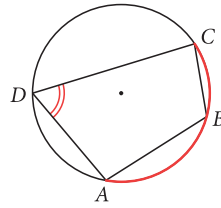
a) Na łuku AB nieprzechodzącym przez C oparte są: $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB$.



b) Na łuku BC nieprzechodzącym przez D oparte są: $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$.



c) Na łuku ABC oparty jest $\sphericalangle ADC$.



Przykład 5

W okręgu o promieniu 2 cm poprowadzimy cięciwę o długości

a) $a = 2$ cm.

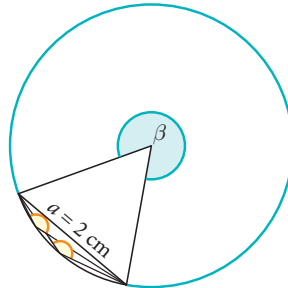
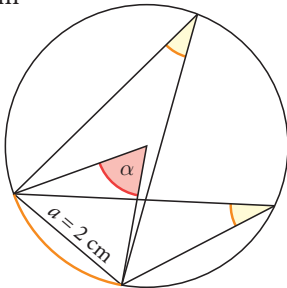
b) $a = 3$ cm.

Dla każdego z łuków wyznaczonych przez poprowadzoną cięciwę narysujemy kąt środkowy i dwa kąty wpisane oparte na tym łuku.

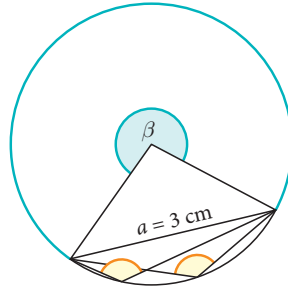
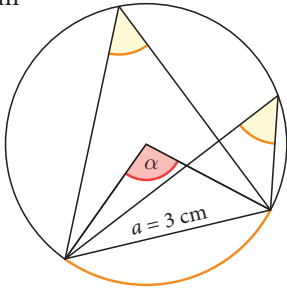
Rozwiązanie

Aby rysunki były bardziej czytelne, zaznaczmy oddzielnie rozwiązanie dla łuku mniejszego od półokręgu (w tym przypadku kąt środkowy oznaczyliśmy α) oraz rozwiązanie dla łuku większego od półokręgu (kąt środkowy oznaczyliśmy β).

a) $a = 2$ cm



b) $a = 3$ cm



Między kątem wpisanym i kątem środkowym opartymi na tym samym łuku zachodzi zależność wyrażona w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

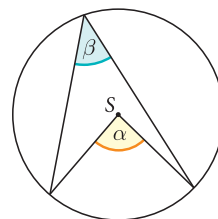
Dowód

Oznaczmy parę kątów, o których jest mowa w twierdzeniu:

α – kąt środkowy

β – kąt wpisany, oparty na tym samym łuku co kąt α

Mamy wykazać, że $\alpha = 2\beta$.

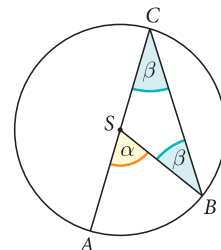


Kąty wpisane mogą być różnie położone, co widać np. na rysunkach z przykładu 5. Dowód twierdzenia przeprowadzimy w trzech przypadkach, które wyczerpią wszystkie możliwości.

I. Ramię kąta wpisanego przechodzi przez środek okręgu.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\begin{aligned} \sphericalangle CBS &= \beta && \leftarrow \text{trójkąt } CBS \text{ jest równoramienny} \\ \sphericalangle CSB &= 180^\circ - 2\beta && \leftarrow \text{suma kątów w trójkącie} \\ \sphericalangle CSB &= 180^\circ - \alpha && \leftarrow \text{kąt } CSB \text{ jest kątem przyległym do kąta } \alpha \\ \alpha &= 2\beta \end{aligned}$$



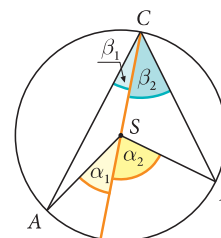
II. Środek okręgu jest punktem wewnętrznym kąta wpisanego.

Prowadzimy półprostą CS.

Półprosta CS dzieli kąt środkowy α na kąty α_1 i α_2 , a kąt wpisany β na kąty β_1 i β_2 jak na rysunku obok.

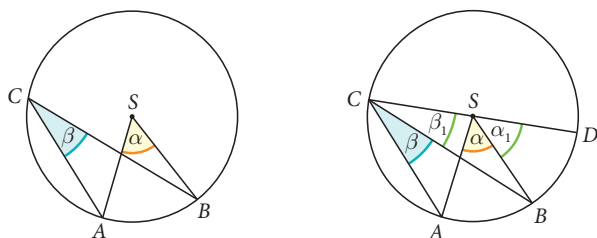
Możemy dla tych kątów zastosować związek udowodniony w punkcie 1.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 2\beta_2 && \leftarrow \text{po zasłonięciu części rysunku na lewo od prostej CS} \\ \alpha_1 &= 2\beta_1 && \leftarrow \text{po zasłonięciu części rysunku na prawo od prostej CS} \\ \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta \end{aligned}$$



III. Środek okręgu leży poza kątem wpisanym.

Ponownie prowadzimy półprostą CS i oznaczamy kąty α_1 , β_1 jak na rysunku.



$$\alpha_1 = 2\beta_1$$

$$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$$

$$\alpha + 2\beta_1 = 2(\beta + \beta_1)$$

$$\alpha + 2\beta_1 = 2\beta + 2\beta_1$$

$$\alpha = 2\beta$$

← kąt środkowy i kąt wpisany oparte na łuku BD

← kąt środkowy i kąt wpisany oparte na łuku AD

← podstawiamy do drugiego równania $\alpha_1 = 2\beta_1$

Koniec dowodu

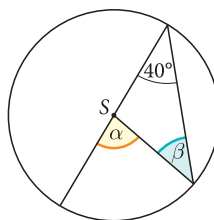
Przykład 6 ◀ zad. 3.18

Punkt S jest środkiem okręgu. Wyznamy miary kątów α i β .

Rozwiązanie

α jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co wpisany kąt o mierze 40° . Zatem $\alpha = 80^\circ$.

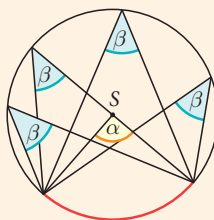
Kąt β ma miarę 40° , jako drugi kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego.



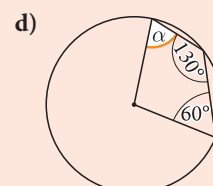
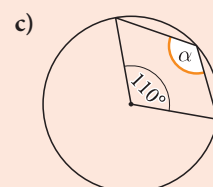
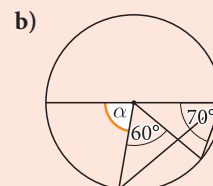
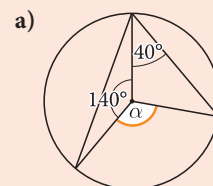
W okręgu wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe połowie tego samego kąta środkowego, więc na mocy udowodnionego twierdzenia mamy następujący wniosek.

Wniosek 3

Wszystkie kąty wpisane w dany okrąg i oparte na tym samym łuku są równe.



◀ 3.18. Wyznacz miarę kąta α .



Odp.: a) 120° b) 80° c) 125°
d) 70°

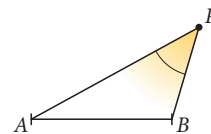
Po połączeniu wniosku 2 (s. 232) i wniosku 3 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są one równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.

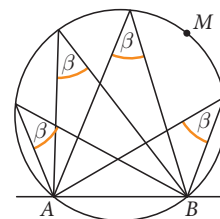
Definicja

Punkty A , B i P są niewspółliniowe. Kąt APB nazywamy **kątem, pod którym widać odcinek AB z punktu P** .



Ograniczmy rozważania do półpłaszczyzny wyznaczonej przez punkty AMB (rys. obok).

Wówczas, zgodnie z ostatnim wnioskiem, z każdego punktu łuku AMB widać odcinek AB pod kątem β . Wykażemy, że żaden inny punkt tej półpłaszczyzny takiego warunku nie spełnia.



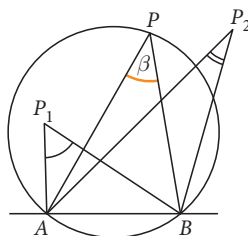
Jeżeli punkt półpłaszczyzny nie należy do łuku AMB , to leży albo wewnątrz części koła ograniczonej tym łukiem, jak np. punkt P_1 , albo na zewnątrz tej części, jak np. punkt P_2 (rys. 1).

W pierwszym przypadku (rys. 2) mamy $\angle AP_1B > \beta$ jako kąt zewnętrzny trójkąta PP_1B nieprzylegający do wewnętrznego kąta β – udowodnienie tego faktu zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

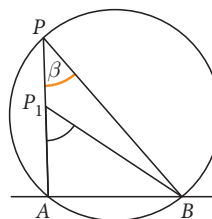
Czyli z punktu P_1 widać odcinek AB pod kątem większym niż β .

W drugim przypadku (rys. 3) mamy $\beta > \angle AP_2B$ jako kąt zewnętrzny trójkąta PP_2B nieprzylegający do wewnętrznego kąta PP_2B .

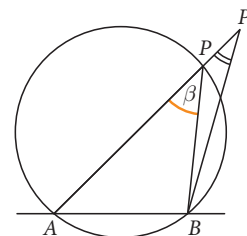
Czyli z punktu P_2 widać odcinek AB pod kątem mniejszym niż β .



Rys. 1



Rys. 2

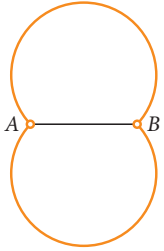


Rys. 3

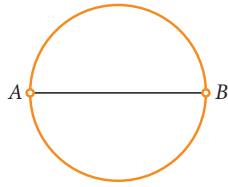
Oczywiście aby otrzymać zbiór wszystkich punktów, z których odcinek AB widać pod kątem β , należy uzupełnić łuk AMB o łuk symetryczny do niego względem prostej AB . Zwróćmy uwagę, że punkty A i B nie należą do tego zbioru.

Ostatecznie – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, z których odcinek AB widać pod danym kątem β , ma, w zależności od rozwartości kąta, następujący kształt:

β jest kątem ostrym



β jest kątem prostym

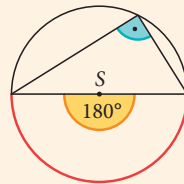


β jest kątem rozwartym



Wniosek 4

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

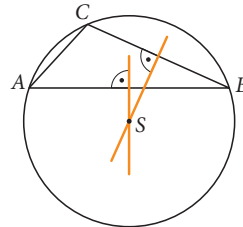
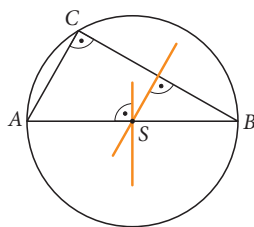
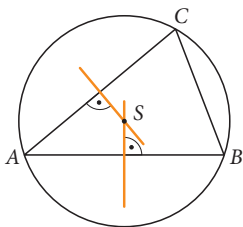


Przykład 7

Wyznamy konstrukcyjnie środek okręgu opisanego na danym trójkącie.

Rozwiązanie

Aby znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy wyznaczyć punkt przecięcia symetralnych dwóch boków tego trójkąta. Na rysunkach przedstawiono rozwiązanie zadania.



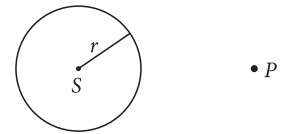
Zauważmy, że środek okręgu opisanego leży:

- wewnątrz trójkąta ostrokątnego,
- na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego,
- na zewnątrz trójkąta rozwartokątnego.

Wynika to bezpośrednio z powyższych rozważań o zbiorach punktów, z których dany odcinek widać pod danym kątem.

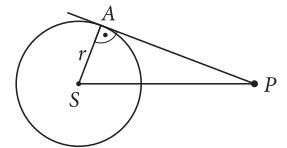
Przykład 8

Dany jest okrąg o środku S i promieniu r oraz punkt P ($|PS| > r$). Skonstruujemy styczną do tego okręgu przechodzącą przez punkt P .



Rozwiązanie

Do narysowania szukanej prostej potrzebny jest drugi punkt. Przeanalizujemy sposób wyznaczenia takiego punktu.

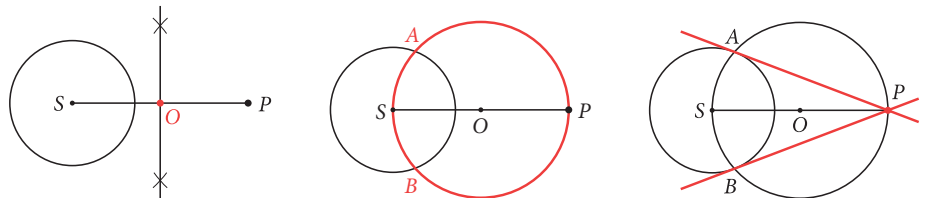


Przypuśćmy, że prosta AP jest styczna do danego okręgu w punkcie A . Wiemy, że promień okręgu poprowadzony z punktu styczności jest prostopadły do stycznej. Kąt SAP jest prosty, więc jest kątem wpisanym opartym na półokręgu o średnicy SP .

Zatem przecięcie danego okręgu z okręgiem o średnicy SP wyznacza drugi punkt potrzebny do narysowania prostej stycznej.

Oto kolejne etapy konstrukcji.

- Prowadzimy symetralną odcinka SP , aby wyznaczyć jego środek – punkt O .
- Rysujemy okrąg $o(O, |OS|)$ – w przecięciu tego okręgu z danym okręgiem otrzymujemy punkty A i B .
- Prowadzimy proste PA i PB , które są szukanymi stycznymi.



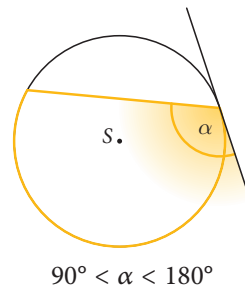
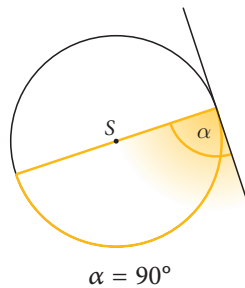
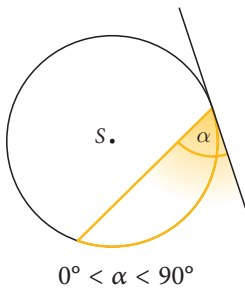
Zadanie ma dwa rozwiązania – z punktu P możemy poprowadzić dwie styczne.

Kąt między styczną a cięciwą

Definicja

Dane są okrąg oraz styczna do tego okręgu. **Kątem między styczną a cięciwą** nazywamy kąt o wierzchołku w punkcie styczności, którego jedno ramię jest zawarte w stycznej, a drugie ramię zawiera cięciwę okręgu poprowadzoną z punktu styczności.

Kąt między styczną a cięciwą może być kątem ostrym, prostym lub rozwartym, co zostało zilustrowane na rysunkach poniżej. Zauważmy, że kąt przyległy do kąta α jest również kątem między styczną a cięciwą.



Twierdzenie

Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą

Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α .

Dowód

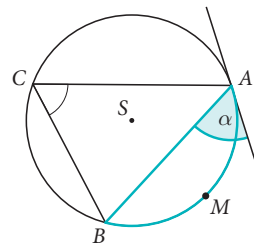
Oznaczmy:

A – punkt styczności

AB – cięciwa

α – kąt między styczną a cięciwą

Kolorem zaznaczamy łuk okręgu, o którym mówi twierdzenie, czyli łuk zawarty w obszarze kąta α .



Kąt α może być ostry, prosty lub rozwarty. Dowód twierdzenia przeprowadzimy zatem w trzech przypadkach.

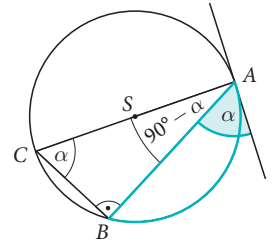
I. Kąt α jest ostry.

Jeżeli α jest kątem ostrym, to po zaznaczeniu średnicy AC otrzymamy trójkąt ABC jak na rysunku.

Kątem wpisanym opartym na łuku zawartym w obszarze kąta α jest kąt BCA .

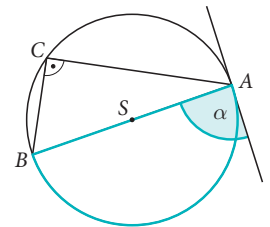
Wystarczy zatem udowodnić, że $\alpha = \sphericalangle BCA$, bo każdy inny kąt wpisany na mocy wniosku 3 jest równy kątowi BCA .

$$\begin{aligned}\sphericalangle CBA &= 90^\circ && \leftarrow \text{kąt wpisany oparty na średnicy} \\ \sphericalangle BAC &= 90^\circ - \alpha && \leftarrow \text{styczna jest prostopadła do promienia} \\ \sphericalangle BCA &= \alpha && \leftarrow \text{własność sumy kątów w trójkącie}\end{aligned}$$



II. Kąt α jest prosty.

Jeżeli α jest kątem prostym, to łuk zawarty w jego obszarze jest półokręgiem, a każdy kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.



III. Kąt α jest rozwarty.

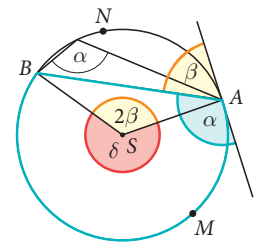
Jeżeli α jest kątem rozwartym, to przyległy do niego kąt β jest ostry. Kąt środkowy wyznaczony przez łuk BMA oznaczyliśmy δ .

Prawdziwość tezy dla kąta β została udowodniona, co oznacza, że kąt wpisany oparty na łuku ANB ma miarę β . Zatem w trójkącie ASB kąt ASB ma miarę 2β .

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \alpha && \leftarrow \text{kąt przyległy} \\ \delta &= 360^\circ - 2\beta = 360^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha\end{aligned}$$

Skoro kąt środkowy oparty na łuku BMA ma miarę 2α , to kąt wpisany oparty na tym łuku ma miarę α .

Koniec dowodu



**Przykład 9** zad. 3.29

Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie B i tworzy z cięciwami AB i BC odpowiednio kąty 40° i 80° jak na rysunku. Wyznaczmy miary kątów trójkąta ABC .

Rozwiązanie

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$$

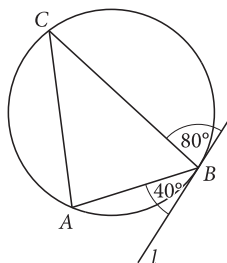
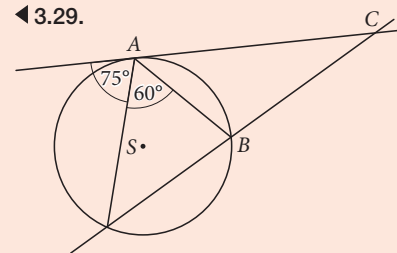
$\sphericalangle BCA$ jest kątem wpisanym opartym na łuku AB , czyli jest równy kątowi między styczną a cięciwą zawierającą ten łuk. Zatem:

$$\sphericalangle BCA = 40^\circ$$

Kąt CAB wyznaczamy podobnie (albo korzystamy z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie) i otrzymujemy:

$$\sphericalangle CAB = 80^\circ$$

Odp.: $\sphericalangle A = 80^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 40^\circ$

**3.29.**

Prosta AC jest styczna do okręgu o środku S . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC przedstawionego na rysunku.

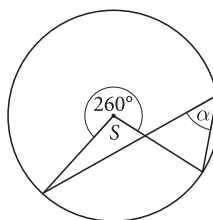
Odp.: $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle B = 105^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wyznacz miarę kąta α .

- A. 130° B. 100° C. 50° D. 45°

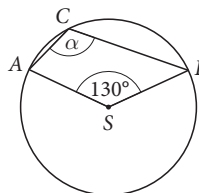


3.2. Jaką miarę ma kąt wpisany oparty na łuku o długości równej $\frac{4}{9}$ obwodu koła?

- A. 20° B. 40° C. 80° D. 160°

3.3. Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S jak na rysunku. Wyznacz miarę kąta α .

- A. 100° C. 115°
B. 110° D. 125°



3.4. Na okręgu odmierzone kolejno łuki AB , BC i CA , których długości są w stosunku $1 : 7 : 10$. Wyznacz miary kątów środkowych opartych na tych łukach.

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. C

3.2. C

3.3. C

3.4. 20° , 140° , 200°

3.5. 5% na diagramie odpowiada
kątowni o mierze 18° ,

10% – 36° ,

20% – 72° ,

25% – 90° ,

30% – 108° .

3.6. a) 24π

b) $\frac{1}{30}\pi$

c) 11π

d) $\frac{80}{9}\pi$

3.7. 72°

3.8. kawałek pizzy dużej

3.9. 16π

3.10. $\frac{11}{\pi}$

3.11. 81π . *Wskazówka:* Zauważ, że pole tego pierścienia można wyrazić bez wyznaczania promieni ograniczających go okręgów.

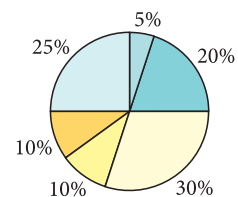
3.12. 80°

3.13. $50^\circ, 100^\circ$

3.14. $\triangle ASB$: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20^\circ$,
 $\sphericalangle S = 140^\circ$;
 $\triangle ACB$: $\sphericalangle A = 20^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$,
 $\sphericalangle C = 70^\circ$

3.15. a) $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 120^\circ$,
 $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 140^\circ$, $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 100^\circ$
b) po 120°

3.5. Dany jest diagram kołowy. Oblicz miary kątów zaznaczonych kolorami wycinków kołowych.



3.6. Oblicz pole wycinka kołowego o promieniu r i kącie środkowym α wyznaczającym ten wycinek.

a) $r = 12$, $\alpha = 60^\circ$

c) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 330^\circ$

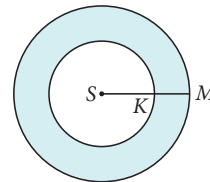
b) $r = 1$, $\alpha = 12^\circ$

d) $r = 8$, $\alpha = 50^\circ$

3.7. Pole wycinka kołowego o promieniu 15 jest równe 45π . Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek.

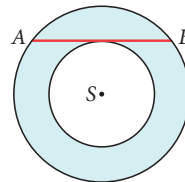
3.8. Przyjmijmy, że kawałki pizzy są wycinkami kołowymi. Który z dwóch kawałków ma większą powierzchnię: kawałek pizzy dużej o średnicy 42 cm i kącie środkowym 30° czy kawałek pizzy średniej o średnicy 32 cm i kącie środkowym 45° ?

3.9. W pierścieniu kołowym przedstawionym na rysunku obok $|SK| = 3$ i $|KM| = 2$. Oblicz pole tego pierścienia.



3.10. Długości okręgów ograniczających pierścień kołowy są równe 10 i 12. Oblicz pole tego pierścienia.

3.11. Dany jest pierścień kołowy o środku S. Cięciwa AB zewnętrznego okręgu jest styczna do wewnętrznego okręgu i ma długość 18 (zob. rysunek). Oblicz pole tego pierścienia.



3.12. Cięciwy AB i BC okręgu są równej długości i tworzą kąt ABC o mierze 100° . Oblicz miarę wypukłego kąta środkowego wyznaczonego przez cięciwę AB.

3.13. Kąt wpisany jest o 50° mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Oblicz miary obydwu kątów.

3.14. Kąt między średnicą AC i cięciwą AB okręgu o środku S ma miarę 20° . Wyznacz miary kątów wewnętrznych w trójkątach ASB i ACB.

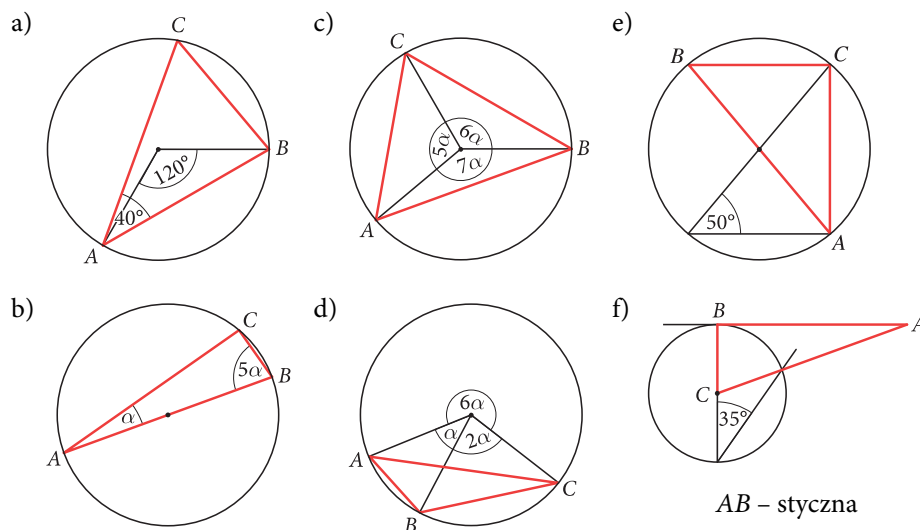
3.15. Na okręgu zaznaczono kolejno punkty A, B, C, D, E i F w taki sposób, że łuki AB, BC i CD są jednakowej długości, a każdy z łuków DE, EF i FA jest dwa razy dłuższy od łuku AB.

a) Wyznacz miary kątów sześciokąta ABCDEF.

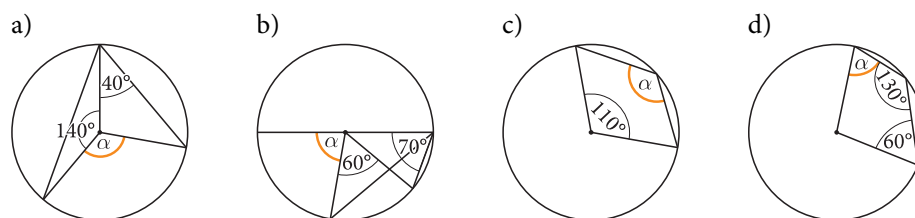
b) Jakie kąty miałby taki sześciokąt, gdyby łuki były ustawione na przemian: dłuższy, krótszy, dłuższy itd.?

3.16. W kąt $\alpha = 50^\circ$ wpisano okrąg, który jest styczny do ramion kąta w punktach A i B. Na krótszym łuku AB okręgu wybrano punkt M. Oblicz miarę kąta AMB.

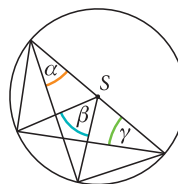
3.17. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.



3.18. Wyznacz miarę kąta α .



3.19. Kąty α i γ są kątami wpisanymi, a kąt β jest kątem środkowym – jak na rysunku. Wykaż, że $\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = 90^\circ$.



3.20. Dwa okręgi o środkach O i S są styczne zewnętrznie w punkcie P. Przez punkt P poprowadzono prostą przecinającą te okręgi odpowiednio w punktach A i B tak, że kąt środkowy AOP ma miarę równą 100° . Wyznacz kąty trójkąta PBS.

3.16. 115°

3.17.

- a) $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$
 b) $\sphericalangle A = 15^\circ$, $\sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle C = 90^\circ$
 c) $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 50^\circ$, $\sphericalangle C = 70^\circ$
 d) $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 120^\circ$, $\sphericalangle C = 20^\circ$
 e) $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 50^\circ$, $\sphericalangle C = 90^\circ$
 f) $\sphericalangle A = 20^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 70^\circ$

3.18. a) 120° b) 80° c) 125°
 d) 70°

3.19. $2\alpha + \beta + 2\gamma = 180^\circ$
 (kąt półpełny o wierzchołku S),
 więc $\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = 90^\circ$

3.20. $\sphericalangle P = \sphericalangle B = 40^\circ$, $\sphericalangle S = 100^\circ$

3.21. $\sphericalangle A = 120^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$,
 $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 110^\circ$

3.22. $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 105^\circ$,
 $\sphericalangle C = 130^\circ$, $\sphericalangle D = 75^\circ$; kąt ostry
 między przekątnymi: 85° .

Wskazówka: Niech P oznacza
 punkt przecięcia przekątnych.
 Wyznacz kąty wpisane BAC
 i ABD , a następnie zastosuj
 twierdzenie o sumie kątów
 w trójkącie ABP .

3.23. *Wskazówka:* Punkty D i F
 leżą na okręgu o średnicy AB .

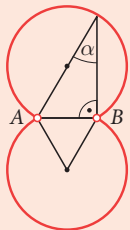
3.25. *Wskazówka:* Jeżeli
 oznaczymy dane punkty
 literami A i B , to wierzchołek
 kąta prostego szukanego trójkąta
 będzie leżał na okręgu o średnicy
 AB . W zależności od liczby
 punktów przecięcia tego okręgu
 z brzegiem danego koła zadanie
 ma: 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie
 lub 0 rozwiązań.

3.27. 80°

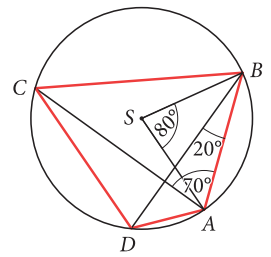
3.28. $\alpha = 28^\circ$, $\beta = 98^\circ$

3.29. $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle B = 105^\circ$,
 $\sphericalangle C = 30^\circ$

3.30. *Wskazówka:* Zob. rysunek.



* **3.21.** Wszystkie wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na
 okręgu jak na rysunku obok. Wyznacz miary kątów tego
 czworokąta.



* **3.22.** Na okręgu odmieramy kolejno łuki AB , BC i CD
 odpowiadające kątom środkowym 120° , 30° i 70° . Wy-
 znacz miary kątów czworokąta $ABCD$ oraz kąta, pod ja-
 kim przecinają się jego przekątne.

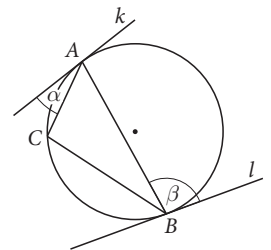
3.23. Skonstruuj trójkąt ABC , w którym dane są: bok AB oraz wysokości AD i BF .

3.24. Skonstruuj trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ i dane są:
 bok AB oraz wysokość AD , przy założeniu, że $|AD| < |AB|$.

* **3.25.** Wpisz konstrukcyjnie w dane koło trójkąt prostokątny tak, aby jego przypro-
 stokątne przechodziły przez dwa dane punkty wewnętrzne tego koła.

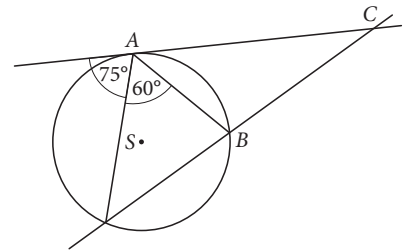
3.26. W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B są ostre. Boki AC i BC są
 średnicami dwóch okręgów. Wykaż, że drugi punkt przecięcia tych okręgów leży na
 boku AB .

3.27. Kąt między cięciwami AB i AC w okręgu ma miarę
 40° . Wyznacz miarę kąta ostrego między stycznymi do
 tego okręgu poprowadzonymi w punktach B i C .



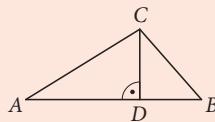
3.28. W trójkącie ABC dane są $\sphericalangle ABC = 28^\circ$,
 $\sphericalangle BAC = 54^\circ$. Wyznacz miary kątów α i β , jakie tworzą
 boki trójkąta ze stycznymi k i l poprowadzonymi do okrę-
 gu opisanego na trójkącie ABC (zob. rysunek).

3.29. Prosta AC jest styczna do okręgu
 o środku S . Wyznacz miary kątów trójkąta
 ABC przedstawionego na rysunku.



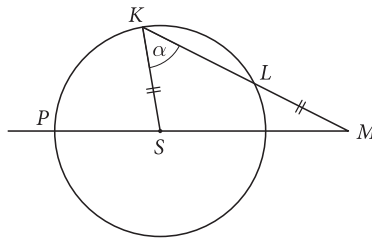
* **3.30.** Dane są odcinek AB oraz kąt ostry α . Wyznacz konstrukcyjnie zbiór punktów
 płaszczyzny, z których odcinek AB widać pod kątem α .

3.26.

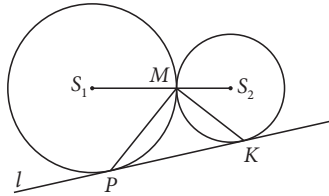


Niech punkt D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z punktu C . Punkt D leży na
 odcinku AB , $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, więc punkt D leży na okręgu o średnicy BC . Oznacza to,
 że punkt D jest punktem wspólnym okręgów o średnicach AC i BC .

- * **3.31.** Dany jest okrąg o środku S . Prosta PM zawiera jego średnicę, a punkty K i L na okręgu są takie, że $|KS| = |LM|$ oraz $\sphericalangle SKM = \alpha$ (zob. rysunek). Wyznacz miarę kąta PSK .



- D * **3.32.** Okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie M . Prosta l jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach P i K jak na rysunku. Wykaż, że kąt PMK jest prosty.



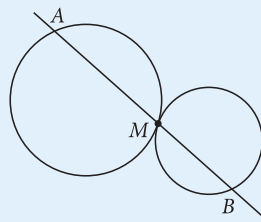
- D * **3.33.** Wykaż, że dla każdego trójkąta ABC okrąg o średnicy AB przecina okrąg o średnicy BC w punkcie M należącym do prostej AC .

Prosto do matury



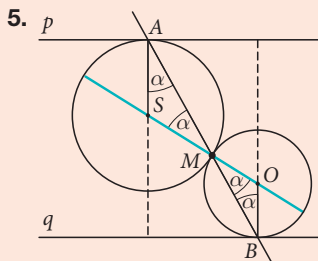
- Środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na boku AB . Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Trójkąt ABC jest równoramienny.
B. $\sphericalangle ACB = 90^\circ$
C. AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC .
- Na okręgu odmieramy kolejno łuki AB i BC odpowiadające kątom środkowym 55° i 125° . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .
- W kąt o mierze 20° wpisano okrąg. Punkty styczności ramion kąta z okręgiem połączono cięciwami z pewnym punktem okręgu. Wyznacz miarę kąta między tymi cięciwami. Rozpatrz dwa przypadki.
- Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono cięciwę AC o długości równej promieniowi okręgu oraz średnicę AB . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .

- D **5.** Przez punkt styczności M dwóch okręgów poprowadzono prostą przecinającą je w punktach A i B jak na rysunku obok. Wykaż, że styczne poprowadzone do okręgów odpowiednio w punktach A i B są równoległe.



Prosto do matury

- F, P, P
- $\sphericalangle A = 62,5^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 27,5^\circ$
- 80° lub 100°
- $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 30^\circ$, $\sphericalangle C = 90^\circ$

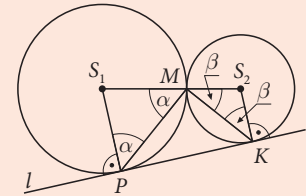


Trójkąty ASM i BOM są równoramienne (i podobne), $\sphericalangle SAM$ i $\sphericalangle OBM$ są kątami naprzemianległymi wewnętrznymi, zatem proste AS i OB są równoległe. Proste p oraz q są stycznymi do $o(A, |AS|)$ i $o(O, |OB|)$. $p \perp AS$, $q \perp OB$, $AS \parallel OB$, więc $p \parallel q$.

3.31. $|SL| = |SK|$ i $|LM| = |SK|$, więc $|SL| = |ML|$.
W $\triangle KSL$ mamy:
 $\sphericalangle KLS = \alpha$, $\sphericalangle KSL = 180^\circ - 2\alpha$
W $\triangle SLM$ mamy:
 $\sphericalangle SLM = 180^\circ - \sphericalangle KLS = 180^\circ - \alpha$
 $\sphericalangle LSM = \sphericalangle LMS =$
 $= \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle SLM) =$
 $= \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \frac{1}{2}\alpha$
 $\sphericalangle PSK = 180^\circ - (\sphericalangle KSL + \sphericalangle LSM) =$
 $= 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

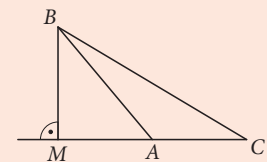
Odp.: $\sphericalangle PSK = \frac{3}{2}\alpha$

3.32.



$\sphericalangle PS_1M = 180^\circ - 2\alpha$
 $\sphericalangle KS_2M = 180^\circ - 2\beta$
W czworokącie PKS_2S_1 mamy:
 $90^\circ + 90^\circ + 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha =$
 $= 360^\circ$
 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad | : 2$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\sphericalangle PMK = 180^\circ - (\alpha + \beta) =$
 $= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

3.33.



Punkt M – spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej z punktu B .
 $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, więc punkt D leży na okręgu o średnicy AB .
 $\sphericalangle CDB = 90^\circ$, więc punkt D leży na okręgu o średnicy BC .
Zatem punkt D jest punktem wspólnym tych okręgów i leży na prostej AC .

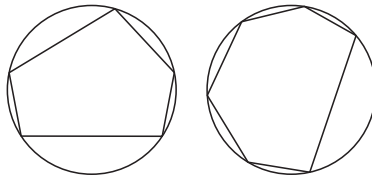
4. Wielokąt wpisany w okrąg

Umiejętności:

- stosowanie twierdzeń charakteryzujących czworokąty wpisane w okrąg

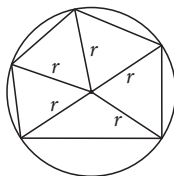
Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta, nazywamy **okręgiem opisanym na tym wielokącie**.

W takiej sytuacji mówimy również, że dany **wielokąt jest wpisany w okrąg**.



Jeżeli wielokąt jest wpisany w okrąg, to jest on wielokątem wypukłym.

Środek okręgu opisanego na wielokącie jest oddalony o promień od każdego z jego wierzchołków. Inaczej mówiąc, środek takiego okręgu jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków. Leży więc na symetralnej każdego boku takiego wielokąta.



Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równo oddalonych od końców tego odcinka.

◀4.4. Symetralne trzech boków pewnego czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?

Odp.: tak

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

	Wielokąt na którym można opisać okrąg	Wielokąt na którym nie można opisać okręgu
czworokąt		
pięciokąt		

ZZ i MKP

temat 5.7

Multiteka

- Okrąg opisany na czworokącie
- Okrąg i czworokąt

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.4

Generator
testów i sprawdzianów

Wniosek

Na wielokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich boków tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Wiemy już, że na każdym trójkącie można opisać okrąg. Sprawdzenie, czy na wielokącie, który nie jest trójkątem, można opisać okrąg, jest zadaniem na ogół bardzo trudnym, często wręcz niewykonalnym. Jednak dla czworokątów mamy proste kryterium pozwalające rozstrzygnąć, czy można opisać okrąg na danym czworokącie.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.

Twierdzenie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i każda z nich wynosi 180° .

Udowodnimy dwa twierdzenia:

- Jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów są równe.
- Jeżeli sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

Założenie I

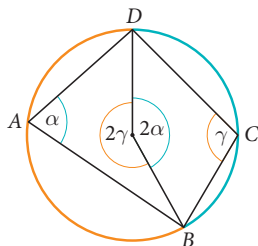
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

Teza I

Sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe.

Dowód I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\sphericalangle D + \sphericalangle B = 180^\circ$$

← kąt środkowy oparty na łuku BCD jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, czyli kąta DAB czworokąta

← kąt środkowy oparty na łuku DAB jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, czyli kąta BCD czworokąta

$$\leftarrow 2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$$

← suma wszystkich kątów czworokąta jest równa 360°

Pokazaliśmy więc, że sumy przeciwległych kątów takiego czworokąta są równe.

Założenie II

Sumy miar przeciwległych kątów czworokąta $ABCD$ są równe.

Teza II

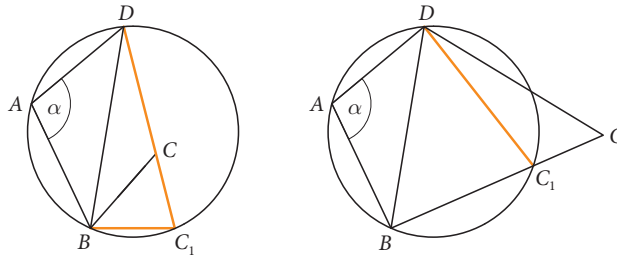
Czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.

Dowód II

Na dowolnie wybranym trójkącie, którego wierzchołkami są wierzchołki czworokąta $ABCD$, można opisać okrąg. Na przykład opiszmy okrąg na trójkącie ABD i zbadajmy, jakie jest możliwe położenie punktu C .

Niech $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle C = \gamma$ i $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

Gdyby punkt C nie leżał na okręgu opisanym na trójkącie ABD , to zachodziłaby jedna z dwóch sytuacji pokazanych na rysunkach poniżej.



Wtedy na podstawie pierwszej części twierdzenia wiemy, że:

$$\sphericalangle BC_1D = 180^\circ - \alpha = \gamma$$

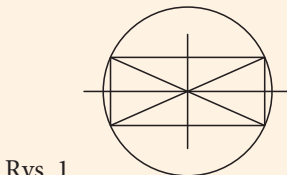
Zatem $\sphericalangle C \neq \gamma$, co jest niezgodne z założeniem.

Udowodnienie tego, że $\sphericalangle C \neq \gamma$ pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania; *Wskazówka:* Zbadaj miary kątów trójkątów CBC_1 i CDC_1 .

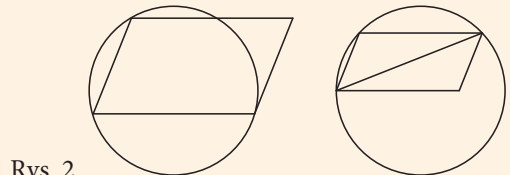
Koniec dowodu

Wnioski

- Na każdym prostokącie można opisać okrąg. Środek okręgu opisanego na prostokącie jest punktem przecięcia jego przekątnych (rys. 1).
- Na równoległoboku, który nie jest prostokątem, nie można opisać okręgu (rys. 2).



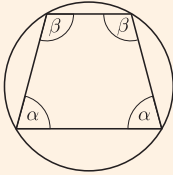
Rys. 1.



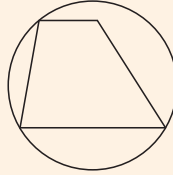
Rys. 2.

Wnioski

- Na trapezie równoramiennym różnym od równoległoboku można opisać okrąg (rys. 3).
- Na trapezie nierównoramiennym nie można opisać okręgu (rys. 4).



Rys. 3.



Rys. 4.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Zbadamy, czy na czworokącie o danych miarach kątów można opisać okrąg.

- a) czworokąt $ABCD$: $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 110^\circ$, $\sphericalangle C = 130^\circ$
 b) czworokąt $KLMN$: $\sphericalangle K = 60^\circ$, $\sphericalangle L = 90^\circ$, $\sphericalangle M = 100^\circ$

Rozwiązanie

- a) $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$, zatem na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
 b) $\sphericalangle K + \sphericalangle M = 60^\circ + 100^\circ = 160^\circ$, zatem na czworokącie $KLMN$ nie można opisać okręgu.

Przykład 3 ◀ zad. 4.7

W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi zależność:

$$\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 4 : 1 : 2$$

Obliczymy miary kątów tego czworokąta.

Rozwiązanie

Podaną proporcję miar kątów możemy zapisać w postaci:

$$\sphericalangle A = 4x, \quad \sphericalangle B = x, \quad \sphericalangle C = 2x$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ \text{ i } \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ \quad \leftarrow \text{na czworokącie } ABCD \text{ można opisać okrąg}$$

$$4x + 2x = 180^\circ, \text{ stąd } x = 30^\circ$$

$$\sphericalangle A = 4x = 120^\circ, \quad \sphericalangle B = x = 30^\circ, \quad \sphericalangle C = 2x = 60^\circ$$

$$\sphericalangle D = 180^\circ - \sphericalangle B = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

Do obliczenia miary kąta D można również skorzystać z równości $\sphericalangle D = 5x$, wynikającej z warunku: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D$.

$$\text{Odp.: } \sphericalangle A = 120^\circ, \quad \sphericalangle B = 30^\circ, \quad \sphericalangle C = 60^\circ, \quad \sphericalangle D = 150^\circ$$

4.7. Dany jest stosunek miar trzech kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg.

Oblicz miary kątów tego czworokąta.

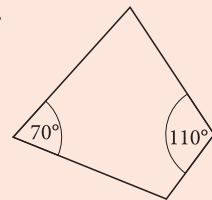
- a) $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 5 : 3 : 4$
 b) $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 3 : 4 : 2$

$$\text{Odp.: a) } \sphericalangle A = 100^\circ, \quad \sphericalangle B = 60^\circ, \quad \sphericalangle C = 80^\circ, \quad \sphericalangle D = 120^\circ$$

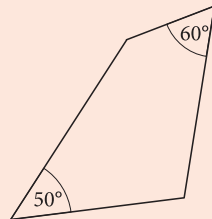
$$\text{b) } \sphericalangle A = 108^\circ, \quad \sphericalangle B = 144^\circ, \quad \sphericalangle C = 72^\circ, \quad \sphericalangle D = 36^\circ$$

◀ 4.5. Na których z narysowanych czworokątów można opisać okrąg?

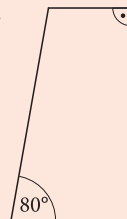
A.



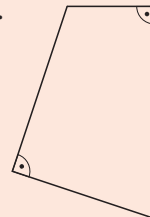
B.



C.



D.



Odp.: A, D

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. C

4.2. C

4.3. C

4.4. tak

4.5. A, D

- 4.6. a) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 125^\circ$,
 $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 55^\circ$
 b) $\sphericalangle A = 75^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$,
 $\sphericalangle C = 105^\circ$, $\sphericalangle D = 100^\circ$
 c) $\sphericalangle A = 85^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$, $\sphericalangle C = 95^\circ$,
 $\sphericalangle D = 110^\circ$

- 4.7. a) $\sphericalangle A = 100^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$,
 $\sphericalangle C = 80^\circ$, $\sphericalangle D = 120^\circ$
 b) $\sphericalangle A = 108^\circ$, $\sphericalangle B = 144^\circ$,
 $\sphericalangle C = 72^\circ$, $\sphericalangle D = 36^\circ$

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg mają się do siebie jak 6 : 5 : 4. Wskaż miarę czwartego kąta tego czworokąta.

- A. 72° B. 80° C. 90° D. 100°

4.2. Dwa największe kąty czworokąta wpisanego w okrąg mogą mieć miary

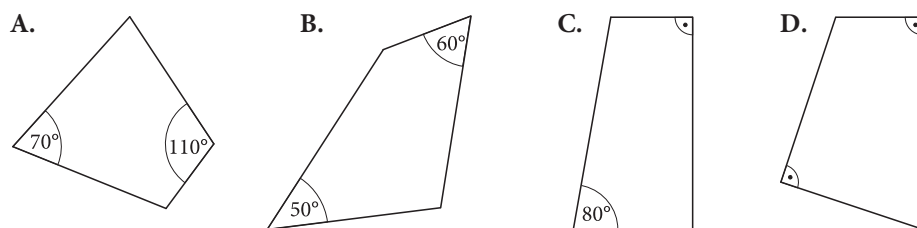
- A. 60° i 90° . B. 85° i 95° . C. 95° i 105° . D. 100° i 190° .

4.3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i AD jest średnicą tego okręgu. Wiadomo, że $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Jaką miarę ma kąt BAD ?

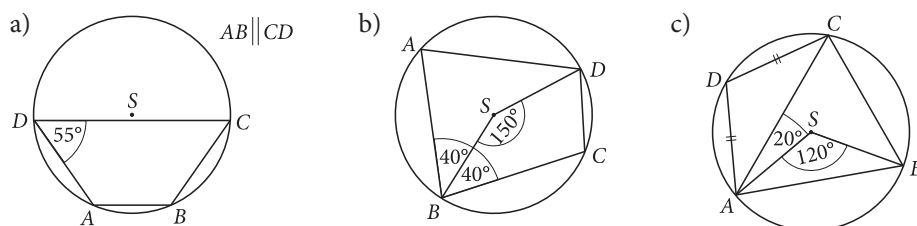
- A. 40° B. 50° C. 60° D. Nie można tego obliczyć.

4.4. Symetralne trzech boków pewnego czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?

4.5. Na których z narysowanych czworokątów można opisać okrąg?



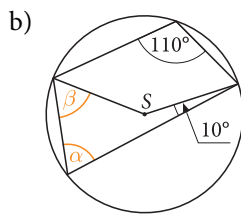
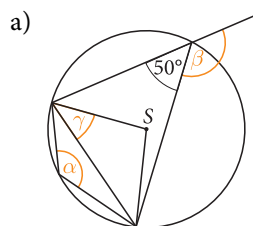
4.6. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.



4.7. Dany jest stosunek miar trzech kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

- a) $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 5 : 3 : 4$ b) $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 3 : 4 : 2$

4.8. Oblicz miary zaznaczonych kątów.



4.9. Skorzystaj z podanych informacji i wyznacz miary kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg.

a) $\sphericalangle A = 10^\circ$, $\sphericalangle B - \sphericalangle D = 70^\circ$

c) $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 113^\circ$, $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 177^\circ$

b) $\sphericalangle A = 4\sphericalangle B$, $\sphericalangle C = 5\sphericalangle B$

d) $\sphericalangle D - \sphericalangle B = 120^\circ$, $\sphericalangle C - \sphericalangle B = 90^\circ$

4.10. Zbadaj, czy istnieje czworokąt, na którym można opisać okrąg i którego kąty mają podane miary.

a) $45^\circ, 48^\circ, 135^\circ, 145^\circ$

c) $39^\circ, 52^\circ, 128^\circ, 141^\circ$

b) $85^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 95^\circ$

d) $15^\circ, 76^\circ, 104^\circ, 165^\circ$

4.11. Czy można opisać okrąg na czworokącie, w którym miary kolejnych kątów są w podanym stosunku?

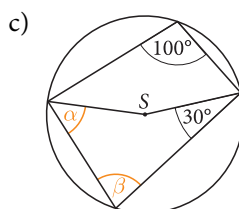
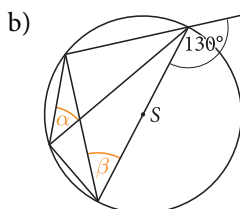
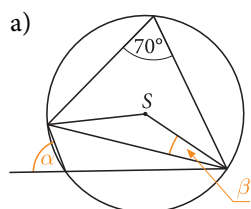
a) $3:4:3:4$

b) $1:2:2:1$

c) $5:5:4:4$

d) $1:2:5:4$

4.12. Oblicz miary kątów α i β .



4.13. Jedna z podstaw trapezu jest jednocześnie średnicą okręgu opisanego na tym trapezie. Promień okręgu jest równy 5, a przekątna trapezu ma długość 8. Oblicz długość ramienia trapezu.

D * **4.14.** Dwa odcinki równej długości AB i KM przecinają się w punkcie P takim, że $|PA| = |PM|$. Udowodnij, że na czworokącie $AMBK$ można opisać okrąg.

D * **4.15.** Kąt A w trójkącie ABC ma miarę 60° . Dwusieczne BF i CD przecinają się w punkcie M . Wykaż, że

a) na czworokącie $ADMF$ można opisać okrąg.

b) $|MD| = |MF|$.

4.16. Skonstruuj deltoid, który można wpisać w okrąg, mając dane jego obydwie przekątne.

4.8. a) $\alpha = \beta = 130^\circ$, $\gamma = 40^\circ$

b) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$

4.9. a) $\sphericalangle A = 10^\circ$, $\sphericalangle B = 125^\circ$,
 $\sphericalangle C = 170^\circ$, $\sphericalangle D = 55^\circ$

b) $\sphericalangle A = 80^\circ$, $\sphericalangle B = 20^\circ$,
 $\sphericalangle C = 100^\circ$, $\sphericalangle D = 160^\circ$

c) $\sphericalangle A = 55^\circ$, $\sphericalangle B = 58^\circ$, $\sphericalangle C = 125^\circ$,
 $\sphericalangle D = 122^\circ$

d) $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 30^\circ$,
 $\sphericalangle C = 120^\circ$, $\sphericalangle D = 150^\circ$

4.10. a) nie **b), c), d)** tak

4.11. a) nie **b), c), d)** tak

4.12. a) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 20^\circ$

b) $\alpha = \beta = 40^\circ$

c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 80^\circ$

4.13. 6

4.14. Wskazówka: Wykaż, że czworokąt $AMBK$ jest trapezem równoramiennym.

4.15. a) Wskazówka: Wykaż, że $\sphericalangle FMD = 120^\circ$.

b) Wskazówka:

AM jest dwusieczną kąta A czworokąta $ADMF$ wpisanego w okrąg,

więc $\sphericalangle MFD = \sphericalangle MAD = 30^\circ$ oraz $\sphericalangle MDF = \sphericalangle MAF = 30^\circ$ (kąty wpisane oparte na tych samych łukach).

4.16. Wskazówka: Dłuższa przekątna deltoidu jest średnicą okręgu opisanego na tym deltoidzie.

Prosto do matury

1. P, P, F

2. a) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 130^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 80^\circ$ 3. $\sphericalangle A = 115^\circ$, $\sphericalangle B = 95^\circ$,
 $\sphericalangle C = 65^\circ$, $\sphericalangle D = 85^\circ$

4. a) nie b) tak

5. Wskazówka: Zauważ, że dwa przeciwległe kąty tego czworokąta są proste.

Prosto do matury



1. Deltoid jest wpisany w okrąg.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

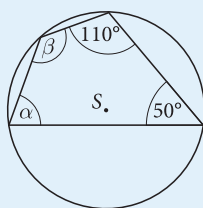
A. Co najmniej dwa z kątów deltoidu są proste.

B. Średnica okręgu opisanego na deltoidzie jest równa jednej z przekątnych deltoidu.

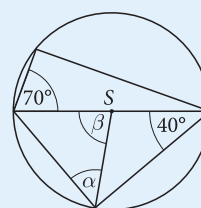
C. Deltoid jest kwadratem.

2. Punkt S jest środkiem okręgu. Oblicz miary kątów α i β .

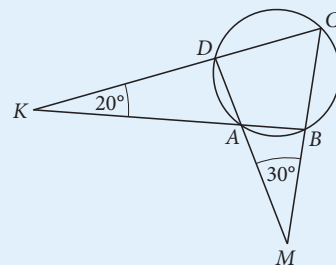
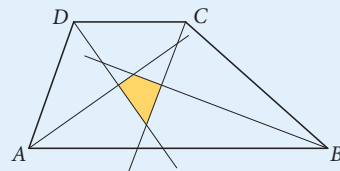
a)



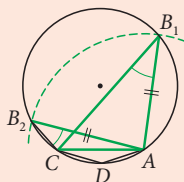
b)

3. Wyznacz miary kątów wpisanego w okrąg czworokąta $ABCD$ (zob. rysunek), o którym wiadomo, że:

- $\sphericalangle CKB = 20^\circ$ i ramiona tego kąta przechodzą przez punkty D i A ,
- $\sphericalangle DMC = 30^\circ$ i ramiona tego kąta przechodzą przez punkty A i B .

4. Miary kątów A, B, C i D czworokąta $ABCD$ są w podanym stosunku. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?a) $3 : 4 : 5 : 6$ b) $3 : 4 : 6 : 5$ 5. Czworokąt zaznaczony na rysunku jest wyznaczony przez dwusieczne kątów trapezu $ABCD$. Wykaż, że można na nim opisać okrąg.4.17. Wskazówka: Skonstruuj trójkąt ABC i opisz na nim okrąg. Punkt D jest punktem przecięcia tego okręgu i drugiego ramienia kąta C . Zadanie ma 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

4.18.

Wskazówka: Skonstruuj najpierw zbiór punktów, z których odcinek AC widać pod kątem B . Zadanie ma 0 rozwiązań, 1 rozwiązanie lub 2 rozwiązania. Rysunek jest ilustracją konstrukcji, gdy istnieją dwa rozwiązania.

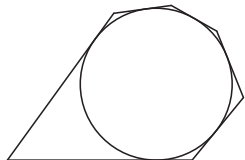
5. Wielokąt opisany na okręgu

Umiejętności:

- stosowanie twierdzeń charakteryzujących czworokąty opisane na okręgu

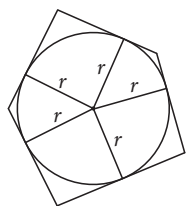
Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt**.

W takiej sytuacji mówimy również, że **wielokąt jest opisany na okręgu**.



Jeżeli wielokąt jest opisany na okręgu, to jest wielokątem wypukłym.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest oddalony o promień od każdego boku tego wielokąta. Inaczej mówiąc, środek takiego okręgu jest oddalony o promień od ramion każdego z kątów wewnętrznych tego wielokąta, czyli jest punktem wspólnym wszystkich dwusiecznych kątów tego wielokąta.



Zbiorem punktów należących do kąta wypukłego i równo oddalonych od jego ramion jest dwusieczna tego kąta.

Przykład 1 zad. 5.4

	Wielokąt w który można wpisać okrąg	Wielokąt w który nie można wpisać okręgu
czworokąt		
pięciokąt		

◀5.4. Dwusieczne trzech kątów pewnego czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie. Czy w ten czworokąt można wpisać okrąg?

Odp.: tak

ZZ i MKP

temat 5.8

Multiteka

- Okrąg wpisany w czworokąt
- Okrąg i czworokąt

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 3.5

Generator
testów i sprawdzianów

Wniosek

W wielokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Wiemy, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg. Podobnie jak w wypadku okręgu opisanego na wielokącie, sprawdzenie, czy w dany wielokąt można wpisać okrąg, może być zadaniem niewykonalnym. Również i tu dysponujemy kryterium pozwalającym rozstrzygnąć ten problem dla czworokątów.

Twierdzenie

Czworokąt wypukły można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Udowodnimy dwa twierdzenia:

- Jeżeli czworokąt wypukły jest opisany na okręgu, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.
- Jeżeli sumy długości przeciwległych boków czworokąta wypukłego są równe, to w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Założenie I

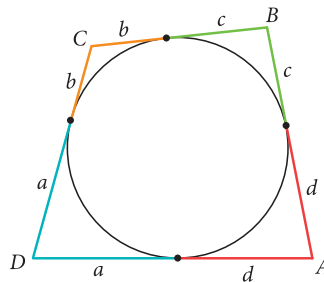
Wypukły czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu.

Teza I

Sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Dowód I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



← odcinki łączące wierzchołki czworokąta z odpowiednimi punktami styczności są równe (zaznaczono je tym samym kolorem i podpisano tą samą literą)

$$|AB| = d + c, |DC| = a + b, |AD| = d + a, |BC| = c + b$$

Mamy zatem:

$$|AB| + |DC| = a + b + c + d = |AD| + |BC|$$

Założenie II

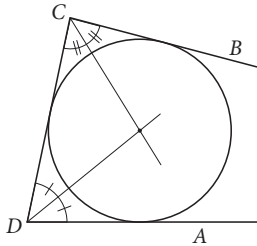
Sumy długości przeciwległych boków wypukłego czworokąta $ABCD$ są równe.

Teza II

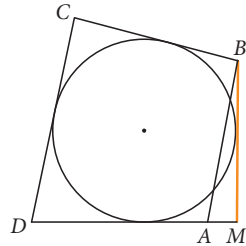
Czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu.

Dowód II

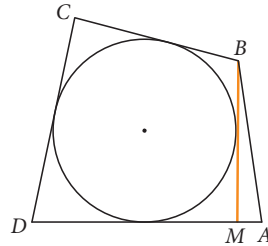
Narysujmy okrąg styczny do trzech boków czworokąta: AD , DC i CB . Taki okrąg na pewno istnieje, bo kąty D i C są mniejsze od kątów półpełnych, czyli ich dwusieczne przetną się wewnątrz rozpatrywanego obszaru (rys. 1).



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Wykażemy, że czwarty bok czworokąta, czyli odcinek AB , jest styczny do tego okręgu. Gdyby nie był, to zaszłaby jedna z dwóch sytuacji przedstawionych na rysunkach 2 i 3. Wtedy styczna do okręgu poprowadzona np. z wierzchołka B przecięłaby prostą zawierającą bok DA w punkcie M różnym od punktu A i na okręgu opisany byłby czworokąt $MBCD$. Zgodnie z udowodnionym poprzednio twierdzeniem byłoby więc:

$$|DM| + |BC| = |MB| + |DC|$$

Równocześnie zgodnie z założeniem zachodzi równość:

$$|DA| + |BC| = |AB| + |DC|$$

Jeżeli odejmiemy od pierwszej równości drugą, to otrzymamy:

$$|DM| - |DA| = |MB| - |AB|$$

W pierwszym przypadku (rys. 2), wykorzystując otrzymaną równość, mamy:

$$|AM| = |MB| - |AB|, \text{ czyli } |AM| + |AB| = |MB|$$

Jest to sprzeczne z nierównością trójkąta – zatem taka sytuacja zajść nie może.

W drugim przypadku (rys. 3) równość $|DM| - |DA| = |MB| - |AB|$ oznacza, że:

$$|AM| = |AB| - |MB|, \text{ czyli } |AM| + |MB| = |AB|$$

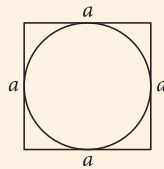
Tu również mamy sprzeczność z nierównością trójkąta.

Tym samym wykazaliśmy, że czwarty bok czworokąta, czyli odcinek AB , jest styczny do rozważanego okręgu.

Koniec dowodu

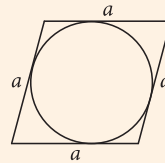
Wnioski

- W kwadrat można wpisać okrąg (rys. 1).
- W romb można wpisać okrąg (rys. 2).
- W deltoid można wpisać okrąg (rys. 3).



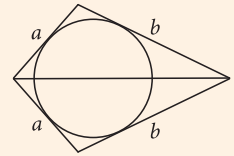
$$a + a = a + a$$

Rys. 1.



$$a + a = a + a$$

Rys. 2.



$$a + b = a + b$$

Rys. 3.

◀5.5. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować czworokąt, w który da się wpisać okrąg.

- a) 5 cm, 8 cm, 9 cm, 12 cm
 b) 4,7 cm, 6,3 cm, 6,8 cm, 8,5 cm
 c) 11,2 cm, 13,3 cm, 15,2 cm, 17,3 cm
 d) $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm, $(5\sqrt{3} - \sqrt{2})$ cm

Odp.: a) tak b) nie c) tak d) tak

◀5.6. Trapez równoramienny, którego podstawy są równe 15,8 cm i 8,2 cm, jest opisany na okręgu. Oblicz długość ramienia tego trapezu.

Odp.: 12 cm

Przykład 2 ◀ zad. 5.5

Sprawdźmy, czy w czworokąt wypukły $ABCD$ o podanych długościach boków można wpisać okrąg.

- a) $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 6$, $|DA| = 2$

$$|AB| + |CD| = 3 + 6 = 9$$

$$|BC| + |DA| = 4 + 2 = 6$$

$$|AB| + |CD| \neq |BC| + |DA|$$

W ten czworokąt nie można wpisać okręgu.

- b) $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 6$, $|DA| = 5$

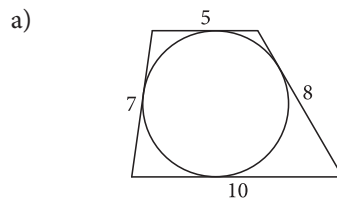
$$|AB| + |CD| = 3 + 6 = 9$$

$$|BC| + |DA| = 4 + 5 = 9$$

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$$

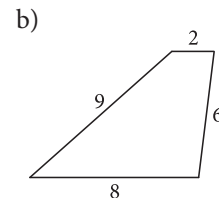
W ten czworokąt można wpisać okrąg.

Przykład 3 ◀ zad. 5.6



$$10 + 5 = 8 + 7$$

W ten trapez można wpisać okrąg.



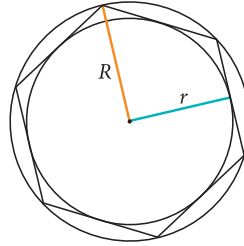
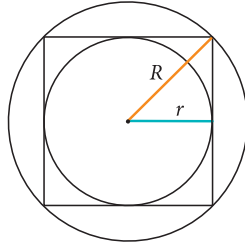
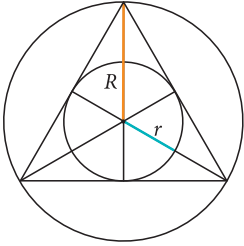
$$8 + 2 \neq 9 + 6$$

W ten trapez nie można wpisać okręgu.

Przykład 4

W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg. Środek okręgu wpisanego w wielokąt foremny jest również środkiem okręgu opisanego na tym wielokącie. Zilustrujemy to na przykładach (R oznacza promień okręgu opisanego, a r – wpisanego).

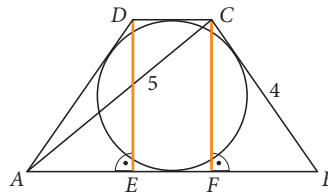
- a) trójkąt równoboczny b) kwadrat c) sześciokąt foremny

**Przykład 5** zad. 5.9

Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość 4, a przekątna trapezu ma długość 5. Wyznamy promień okręgu wpisanego w ten trapez.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Promień okręgu wpisanego w trapez jest połową jego wysokości. Jeżeli poprowadzimy wysokości trapezu z punktów D i C , to powstanie prostokąt $EFCD$.



Oznaczmy $|EF| = |DC| = a$.

$$|AB| + |DC| = |AD| + |BC| = 8$$

← sumy długości przeciwległych boków są równe

$$|AE| + a + |FB| + a = 8$$

$$2|AE| + 2a = 8$$

← $|AE| = |FB|$

$$|AE| + a = 4$$

$$|AF| = 4$$

← $|AE| + a = |AF|$

$$|FC| = 3$$

← na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AFC

Szukany promień jest więc równy $\frac{3}{2}$.

Odp.: $\frac{3}{2}$

◀ 5.9. W trapez równoramienny wpisany jest okrąg. Punkt styczności dzieli ramię trapezu na odcinki o długościach 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu.

Odp.: $2\sqrt{6}$ cm

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. B

5.2. D

5.3. D

5.4. tak

5.5. a) tak b) nie c) tak
d) tak

5.6. 12 cm

5.7. a) 30 cm b) 28 cm
c) 50 cm d) 54 cm

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu dane są długości boków: $|AB| = 12$, $|BC| = 15$, $|CD| = 18$. Długość boku $|DA|$

A. jest równa 12.

C. jest równa 18.

B. jest równa 15.

D. zależy od kątów czworokąta.

5.2. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu dane są długości boków: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 4$. Zatem promień okręgu wpisanego w ten czworokąt

A. jest równy 1,5.

C. jest równy 2,5.

B. jest równy 2.

D. zależy od kątów czworokąta.

5.3. Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość 36. Zatem żadna z podstaw tego trapezu nie może mieć długości równej

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. 70.

D. 80.

5.4. Dwie wysokości trzech kątów pewnego czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie. Czy w ten czworokąt można wpisać okrąg?

5.5. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować czworokąt, w który da się wpisać okrąg.

a) 5 cm, 8 cm, 9 cm, 12 cm

b) 4,7 cm, 6,3 cm, 6,8 cm, 8,5 cm

c) 11,2 cm, 13,3 cm, 15,2 cm, 17,3 cm

d) $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm, $(5\sqrt{3} - \sqrt{2})$ cm

5.6. Trapez równoramienny, którego podstawy są równe 15,8 cm i 8,2 cm, jest opisany na okręgu. Oblicz długość ramienia tego trapezu.

5.7. Oblicz obwód czworokąta opisanego na okręgu, w którym

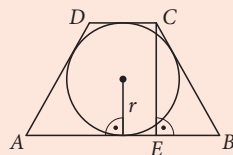
a) przeciwległe boki mają długości 7 cm i 8 cm.

b) stosunek długości trzech kolejnych boków jest równy $2 : 4 : 5$, a czwarty bok ma długość 6 cm .

c) różnica długości przeciwległych boków jest równa 15 cm, a ich stosunek wynosi 1 : 4.

d) stosunek długości trzech kolejnych boków wynosi $3 : 5 : 6$, a suma tych długości jest równa 42 cm.

5.18.



$|AB| = a, |CD| = b, a \geq b$

$$|AD| = |BC| \text{ i } |AD| + |BC| = a + b, \text{ wi\u0105c } |BC| = \frac{a+b}{2}, |BE| = \frac{a-b}{2}$$

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a+b+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-a+b}{2}} = \sqrt{ab}$$

$$r = \frac{1}{2}|CE| = \frac{\sqrt{ab}}{2} \text{ (ten sam wynik otrzymamy, gdy } a < b)$$

5.8. Jedna podstawa trapezu ma 6 cm, druga 3 cm, a jedno ramię ma 4 cm. Wiadomo, że w trapez ten można wpisać okrąg.

- a) Jaką długość ma drugie ramię trapezu?
b) Skonstruuj trapez spełniający warunki zadania i wpisz w niego okrąg.

5.9. W trapez równoramienny wpisany jest okrąg. Punkt styczności dzieli ramię trapezu na odcinki o długościach 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu.

5.10. Trapez równoramienny $ABCD$ o ramionach AD i BC opisano na okręgu o promieniu 15. Punkt styczności P dzieli ramię AD na odcinki, których długości są w stosunku 3 : 4. Wyznacz długości boków trapezu.

5.11. Bok rombu ma 10 cm, a jego dłuższa przekątna 16 cm. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten romb.

5.12. Jakim procentem pola koła opisanego na sześciokącie foremnym jest pole koła wpisanego w ten sześciokąt?

D 5.13. Środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ jest równocześnie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.

D * 5.14. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Z punktu P przecięcia przekątnych tego czworokąta poprowadzono wysokości PK, PL, PM, PN odpowiednio w trójkątach ABP, BCP, CDP oraz DAP . Udowodnij, że w czworokąt $KLMN$ można wpisać okrąg.

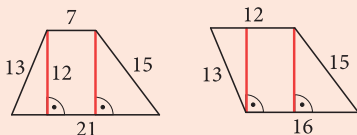
*** 5.15.** W trapez o polu 168 i ramionach długości 13 i 15 można wpisać okrąg. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

*** 5.16.** W trapez równoramienny o obwodzie równym 20 i przekątnej $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

*** 5.17.** Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległościach 1 cm i 2 cm od końców dłuższego ramienia tego trapezu. Oblicz pole trapezu.

D 5.18. Na okręgu o promieniu r opisany jest trapez równoramienny o podstawach a i b . Wykaż, że $r = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{2}$.

5.15. 21 i 7 lub 16 i 12. *Wskazówka:* Rozpatrz dwa przypadki (zob. rysunek).



5.16. 2

5.17. $3,6 \text{ cm}^2$

5.8. a) 5 cm **b)** *Wskazówka:* Zauważ, że trapez jest prostokątny.

5.9. $2\sqrt{6} \text{ cm}$

5.10. $|AB| = 20\sqrt{3}$,
 $|BC| = |AD| = \frac{35\sqrt{3}}{2}$,
 $|DC| = 15\sqrt{3}$

5.11. 4,8 cm

5.12. 75%

5.13. *Wskazówka:* Wykaż, że $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ oraz $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$.

5.14. Zauważ, że:

1. Na czworokącie $AKPN$ można opisać okrąg (przeciwległe kąty K i N są proste), zatem $\sphericalangle KAP = \sphericalangle KNP = \alpha$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

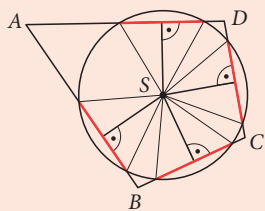
2. Podobnie na czworokącie $DNPM$ można opisać okrąg, zatem $\sphericalangle PNM = \sphericalangle PDM = \beta$.

3. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku.

4. $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle BDC = \beta$, więc $\alpha = \beta$. Oznacza to, że w czworokącie $KLMN$ punkt P należy do dwusiecznej kąta N .

5. Analogicznie wykazujemy, że punkt P należy do dwusiecznych pozostałych kątów czworokąta $KLMN$. Zatem wszystkie dwusieczne przecinają się w punkcie P , który jest środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $KLMN$.

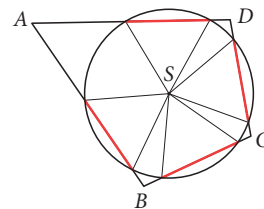
5.19.



Trójkąty równoramienne o wierzchołku S i podstawie oznaczonej kolorem czerwonym są przystające (cecha bbb), więc ich wysokości opuszczone z punktu S są równe. Oznacza to, że punkt S jest równo oddalony od boków czworokąta $ABCD$, zatem jest środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$.

D

* 5.19. Okrąg o środku S przecina wszystkie boki czworokąta $ABCD$ i wycina z nich odcinki równej długości (zob. rysunek). Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



Prosto do matury



- Dany jest trapez równoramienny o ramionach długości 5 cm. Oceń prawdziwość podanych zdań.
 - Jeżeli w ten trapez jest wpisany okrąg, to podstawy trapezu są równe.
 - Jeżeli w ten trapez jest wpisany okrąg, to podstawy trapezu mogą być równe.
 - Jeżeli ten trapez jest opisany na okręgu, to obwód trapezu jest równy 20 cm.
- Czy w czworokąt $ABCD$ o podanych długościach boków można wpisać okrąg?
 - $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$, $|DA| = 8$
 - $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|CD| = 7$, $|DA| = 8$
- W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg. Punkty styczności tego okręgu z bokami AB , BC , CD i DA oznaczono odpowiednio literami E , F , G i H . Dane są długości odcinków $|AE| = 4$ cm, $|FB| = 5$ cm, $|GC| = 2$ cm i $|DH| = 1$ cm. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.
- Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok ma długość $\frac{3}{2}r$. Oblicz pole tego trapezu.
- W czworokącie $ABCD$ boki BC i AD są równe, a punkty E i F są odpowiednio środkami tych boków. Wykaż, że jeżeli w każdy z czworokątów $ABEF$ i $FECD$ można wpisać okrąg, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Prosto do matury

1. F, P, P

2. a) nie b) tak

3. 24 cm

4. $4\frac{1}{2}r^2$

5. Wskazówka: Wykaż, że $|AB| = |DC|$, korzystając z równości sum długości przeciwległych boków czworokątów $ABEF$ i $FECD$.

6. Twierdzenie Talesa

Umiejętności:

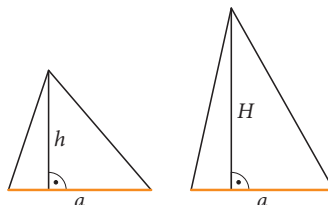
- stosowanie twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków
- stosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa do badania równoległości prostych

Zbadajmy zależności między polami trójkątów i pewnymi odcinkami w tych trójkątach.

Rozpatrzmy dwa trójkąty o równych podstawach a i wysokościach h oraz H . Obliczmy stosunek pól P_1 i P_2 tych trójkątów.

$$P_1 = \frac{ah}{2}, \quad P_2 = \frac{aH}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{h}{H}$$



Przypomnijmy – **stosunkiem odcinków** nazywamy stosunek długości tych odcinków.

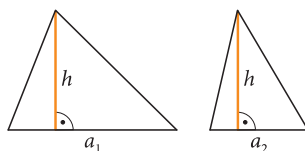


Stosunek pól takich trójkątów jest równy stosunkowi ich wysokości.

Podobną sytuację mamy w przypadku dwóch trójkątów o równych wysokościach.

$$P_1 = \frac{a_1 h}{2}, \quad P_2 = \frac{a_2 h}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2}$$



Stosunek pól takich trójkątów jest równy stosunkowi ich podstaw.

Omówione wyżej zależności będą przydatne do udowodnienia **twierdzenia Talesa**.

Tales z Miletu (ok. 620 – ok. 540 p.n.e.), grecki filozof i matematyk, sformułował kilka ważnych twierdzeń geometrycznych. Najbardziej znane dotyczy równości stosunków odcinków otrzymanych przy podziale ramion kąta prostymi równoległymi.

Twierdzenie

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

ZZ i MKP

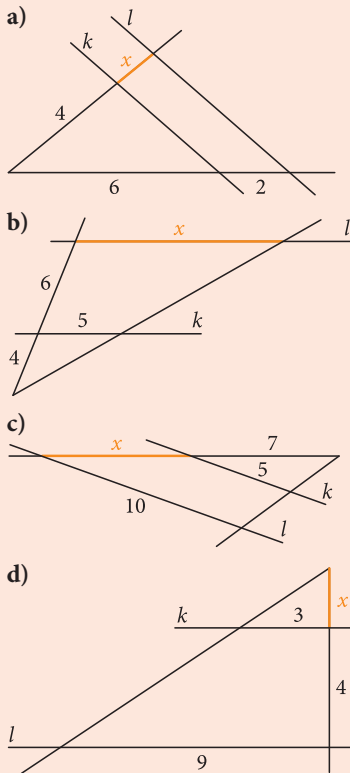
temat 6.3 (klasa 1)

Multiteka

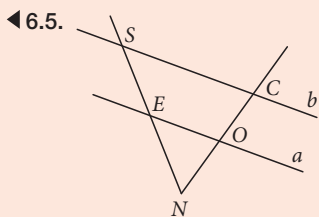
- Dowód twierdzenia Talesa z wykorzystaniem pól trójkątów
- Dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.6

◀ 6.4. Proste k i l są równoległe. Oblicz x .



Odp.: a) $1\frac{1}{3}$ b) 12,5 c) 7 d) 2



Proste a i b na rysunku są równoległe. Oblicz

- a) $|NE|$, jeżeli $|NS| = 33$, $|NO| = 16$, $|NC| = 44$.
 b) $|CO|$, jeżeli $|NC| = 3$, $|NS| = 18$, $|ES| = 0,6$.
 c) $|EO|$, jeżeli $|SN| = 14$, $|SE| = 8$, $|SC| = 35$.
 d) $|SC|$, jeżeli $|EO| = 3$, $|EN| = 1,5$, $|SE| = 2$.
 e) $|NC|$, jeżeli $|NO| = 4$, $|SE| = 1,2$, $|SN| = 1,8$.
 f) $|EO|$, jeżeli $|SE| : |EN| = 2 : 5$, $|SC| = 14$.

Odp.: a) 12 b) 0,1 c) 15 d) 7
 e) 12 f) 10

Przyjmijmy oznaczenia zgodne z rysunkiem.

Założenie

$$AA' \parallel BB'$$

Teza

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

Dowód

Trójkąty OAA' i ABA' mają różne podstawy OA i AB oraz wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A' , zatem:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle ABA'}}$$

$AA' \parallel BB'$, zatem trójkąty ABA' i $AB'A'$ mają wspólną podstawę AA' oraz równe wysokości poprowadzone z wierzchołków B oraz B' , czyli:

$$P_{\triangle ABA'} = P_{\triangle AB'A'}$$

Po podstawieniu do poprzedniej równości mamy:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}}$$

$$\frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

← trójkąty OAA' i $AB'A'$ mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A

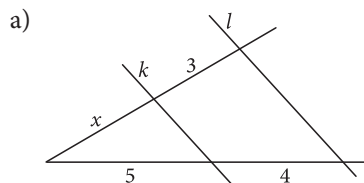
Zatem:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}, \text{ czyli } \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

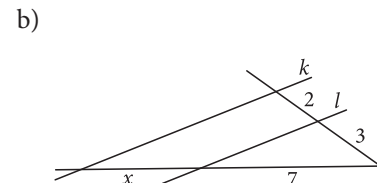
Koniec dowodu

Przykład 1 ◀ zad. 6.4, 6.5

Proste k i l są równoległe. Obliczymy długość odcinka x .



$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}, \text{ więc } x = \frac{15}{4}$$



$$\frac{3}{2} = \frac{7}{x}, \text{ więc } x = \frac{14}{3}$$

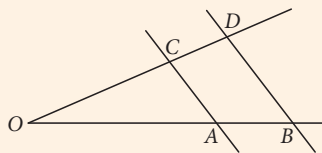
Zachodzi również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Twierdzenie

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli ramiona kąta COA są przecięte dwiema prostymi AC i BD w taki sposób, że odcinki OA i AB leżące na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odcinków OC i CD wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta:

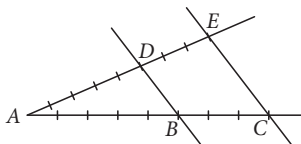
$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$, to proste AC i BD są równoległe.



Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Przykład 2

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{3}$ oraz $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{5}{3}$, więc prosta DB jest równoległa do prostej EC .

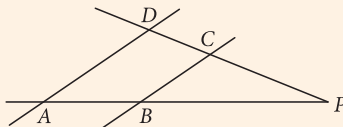


Na podstawie twierdzenia Talesa można zapisać proporcje innych odcinków.

Wniosek

Jeżeli proste AD i BC są równoległe jak na rysunku poniżej, to:

- (1) $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}$
- (2) $\frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PD|}{|CD|}$
- (3) $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$



Do udowodnienia równości (1) wystarczy zauważyć, że:

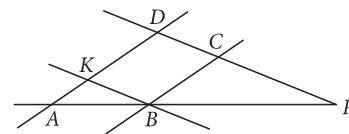
$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PB| + |BA|}{|PB|} = \frac{|PB|}{|PB|} + \frac{|BA|}{|PB|} = 1 + \frac{|BA|}{|PB|}$$

Na mocy twierdzenia Talesa $\frac{|BA|}{|PB|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, więc prawdziwa jest równość:

$$1 + \frac{|BA|}{|PB|} = 1 + \frac{|CD|}{|PC|} = \frac{|PC| + |CD|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PC|}$$

Analogicznie udowadniamy równość (2).

Do udowodnienia równości (3) uzupełnimy rysunek prostą BK równoległą do prostej PD po to, aby zastosować wzór (2) do kąta DAP przeciętego równoległymi prostymi BK i PD .



Mamy więc równość:

$$\frac{|AD|}{|KD|} = \frac{|AP|}{|BP|}$$

w której zamiast $|KD|$ możemy podstawić $|BC|$, bo czworokąt $BCDK$ jest równoległobokiem.

$$\text{Zatem } \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}.$$

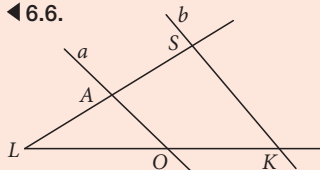
Zauważmy też, że równości podane w twierdzeniu Talesa oraz we wniosku możemy przedstawiać w różnych postaciach, zgodnie z zasadami działań na ułamkach (zob. ramka obok).

Założmy, że a, b, c, d są różne od 0.

Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to:

$$\begin{aligned} & \bullet a \cdot d = b \cdot c \\ & \bullet \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad \bullet \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{aligned}$$

6.6.



Proste a i b przecięły ramiona kąta o wierzchołku L tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki LO i OK , a na drugim LA i AS (zob. rysunek). Skorzystaj z podanych informacji i sprawdź, czy proste a i b są równoległe.

a) $|LO| : |LK| = 2 : 3$, $|LA| = 4$, $|AS| = 6$

b) $|LO| : |LK| = 1 : 8$, $|OA| = 2$, $|KS| = 16$

c) $|LK| = \sqrt{2} + 1$, $|OK| = 1$, $|LA| : |AS| = \sqrt{2}$

d) $|LO| = 3\sqrt{2}$, $|OK| = 2\sqrt{2} - 1$, $|OA| : |KS| = 2 + \sqrt{2}$

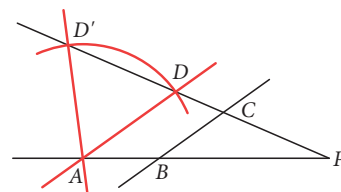
Odp.: a) nie b) za mało danych, żeby to stwierdzić c) tak d) nie

Przykład 3 zad. 6.6

Dwie proste przecinają ramiona kąta o wierzchołku P tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki PB i PA (B leży między P i A), na drugim PC i PD (C leży między P i D) oraz $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$. Sprawdźmy, czy na podstawie podanych informacji można stwierdzić, że proste BC i AD są równoległe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli proste BC i AD są równoległe, to równość podana w założeniach jest prawdziwa na mocy powyższego wniosku – punkt (3). Można podać jednak przykład pokazujący, że wnioskowanie w drugą stronę nie jest prawdziwe. Popatrzmy na rysunek.

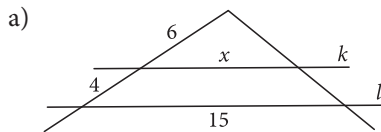


Odcinki AD i AD' są tej samej długości, czyli punkt D' spełnia założenia zadania – w szczególności $\frac{|AD'|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$, natomiast proste BC i AD' nie są równoległe.

Odp.: Na podstawie podanych informacji nie można stwierdzić, czy proste BC i AD są równoległe.

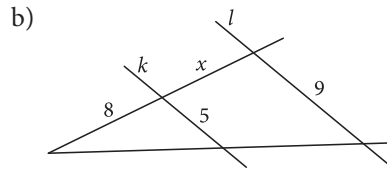
Przykład 4 ◀ zad. 6.7

Proste k i l są równoległe. Obliczmy długość odcinka x .



$$\frac{x}{6} = \frac{15}{4+6}$$

$$10x = 15 \cdot 6, \text{ czyli } x = 9$$



$$\frac{5}{8} = \frac{9}{8+x}$$

$$5(8+x) = 72, \text{ czyli } x = 6,4$$

Jeżeli mamy podany odcinek jednostkowy, to możemy konstruować odcinki o długości będącej iloczynem lub ilorazem długości danych odcinków.

Przykład 5 ◀ zad. 6.9

Dane są odcinki o długościach a i b oraz odcinek jednostkowy. Zbudujmy odcinek o długości ab .

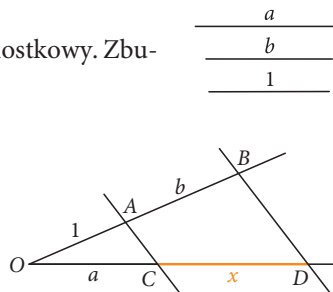
Rozwiązanie

Oznaczmy iloczyn ab literą x . Wówczas:

$$x = ab, \text{ czyli } x \cdot 1 = ab$$

Tę równość zapisujemy w postaci proporcji, np.:

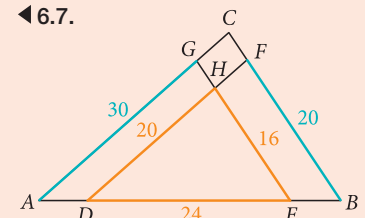
$$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$$



Kolejne etapy konstrukcji odcinka o długości ab opiszemy w tabeli.

Wykonywana czynność	Otrzymana figura
Rysujemy kąt o wierzchołku O i na jednym jego ramieniu odkładamy kolejno: odcinek jednostkowy OA i taki odcinek AB , że $ AB = b$.	punkty A i B
Na drugim ramieniu kąta odkładamy taki odcinek OC , że $ OC = a$.	punkt C
Prowadzimy prostą AC , a następnie przez punkt B równoległą do niej prostą BD .	- punkt D, jako punkt przecięcia prostej równoległej do AC z drugim ramieniem kąta - szukany odcinek CD – zgodnie z twierdzeniem Talesa mamy $CD = ab$

Poprawność konstrukcji wynika z twierdzenia Talesa.

6.7.

W trójkącie ABC poprowadzono odcinki DF i EG tak, że $DF \parallel AC$ i $EG \parallel BC$ (zob. rysunek). Oblicz długości boków trójkąta ABC .

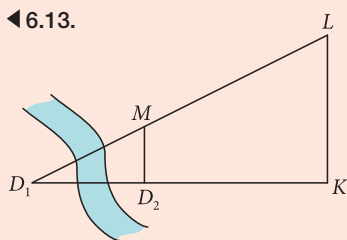
Odp.: $|AB| = 42$, $|BC| = 28$, $|AC| = 35$

6.9. Narysuj odcinek jednostkowy oraz odcinki o długościach a i b , a następnie skonstruuj odcinek o podanej długości.

- $\frac{a}{b}$
- $\frac{1}{a}$
- $\frac{a+b}{a \cdot b}$

Odp.: Wskazówka: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 267.

◀ 6.13.



Chcemy zmierzyć odległość między drzewami D_1 i D_2 , ale nie możemy zrobić tego bezpośrednio, bo rozdziela je rzeka. Na podstawie rysunku opisz sposób, w jaki można wyznaczyć tę odległość. Oblicz $|D_1D_2|$, gdy $|D_2M| = 4$ m, $|D_2K| = 12$ m i $|KL| = 10$ m.

Odp.: 8 m



Przykład 7 ◀ zad. 6.13

Na jeziorze umocowana jest boja (oznaczona na rysunku literą K). Podamy sposób obliczenia jej odległości od punktu D znajdującego się na brzegu.

Rozwiązanie

Wytyczamy na brzegu dwa punkty A i B oraz na linii brzegu punkt C w taki sposób, że odcinki AB i CD są równoległe, punkty K, D i B są współliniowe oraz punkty K, C i A są współliniowe. Mierzmy długości $|DB|$, $|AB|$ i $|CD|$.

$$\frac{|KD|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

← na mocy wniosku z twierdzenia Talesa

$$\frac{|KD|}{|KD| + |DB|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

← $|KB| = |KD| + |DB|$

$$|KD| \cdot |AB| = |CD| \cdot (|KD| + |DB|)$$

Z tego równania obliczamy niewiadomą wielkość $|KD|$.

$$\text{Odp.: } |KD| = \frac{|CD| \cdot |DB|}{|AB| - |CD|}$$

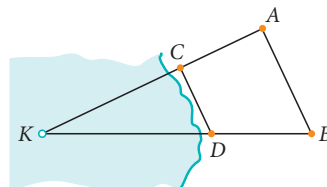
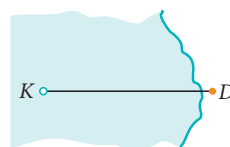
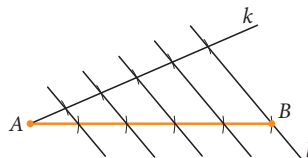
Z wyprowadzonych wzorów wynika, że jeśli przetniemy ramiona kąta dowolnie wieloma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone na jednym ramieniu są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta. Ten fakt wykorzystujemy przy konstrukcyjnym podziale odcinka na n równych części.

Przykład 6

Podzielimy dany odcinek AB na pięć równych części.

Rozwiązanie

- Z punktu A prowadzimy półprostą k i odkładamy na niej pięć równych odcinków tak, że koniec jednego jest początkiem następnego odcinka.
- Przez koniec ostatniego odcinka i punkt B prowadzimy prostą l .
- Prowadzimy proste równoległe do l przez końce odłożonych na półprostej k odcinków – dzielą one odcinek AB w żądany sposób.



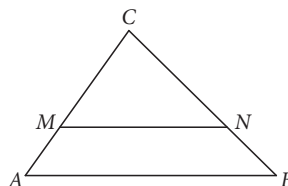
Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

- 6.1.** W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, stosunek długości podstaw $|DC| : |AB| = 1 : 3$, a proste zawierające nierównoległe boki AD i BC przecinają się w punkcie S . Zatem stosunek długości $|SD| : |SA|$
- A. jest równy $1 : 3$. C. jest równy $1 : 4$.
B. jest równy $2 : 3$. D. jest niemożliwy do określenia, bo jest za mało danych.

- 6.2.** W trójkącie ABC poprowadzono odcinek MN jak na rysunku. Jeżeli $MN \parallel AB$, $|BN| = 5$, $|NC| = 10$ oraz $|AC| = 12$, to

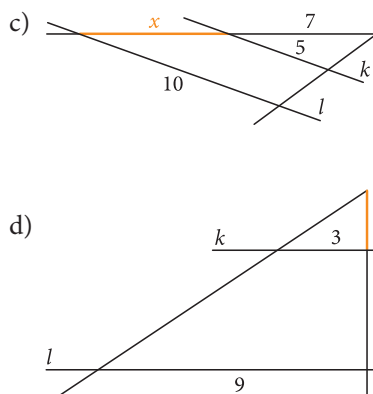
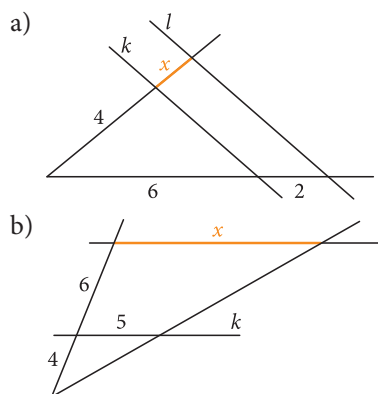
- A. $|AM| = 4$, $|MC| = 8$ i $|MN| = 14$.
B. $|AM| = 8$, $|MC| = 4$ i $|MN| = 14$.
C. $|AM| = 5$, $|MC| = 7$ i jest za mało danych do obliczenia $|MN|$.
D. $|AM| = 4$, $|MC| = 8$ i jest za mało danych do obliczenia $|MN|$.



- 6.3.** W trójkącie ABC punkt M leży na boku AC , a punkt N – na boku BC . Które z poniższych danych wykluczają równoległość odcinków AB i MN ?

- A. $|MC| = 3$, $|AM| = 12$, $|CN| = 13$
B. $|MC| = 3$, $|AC| = 15$, $|AB| = 20$, $|MN| = 5$
C. $|MC| = 3$, $|AC| = 15$, $|CN| = 5$, $|MN| = 5$
D. $|BC| = 20$, $|AC| = 15$, $|AB| = 25$, $|MN| = 5$

- 6.4.** Proste k i l są równoległe. Oblicz x .



Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. A

6.2. D

6.3. B

6.4. a) $1\frac{1}{3}$ b) 12,5 c) 7 d) 2

- 6.5.** a) 12 b) 0,1 c) 15 d) 7
e) 12 f) 10

- 6.6.** a) nie
b) za mało danych, żeby to stwierdzić
c) tak
d) nie

- 6.7.** $|AB| = 42$, $|BC| = 28$,
 $|AC| = 35$

- 6.8.** a) $4\frac{2}{7}$ b) 5

- 6.9.** Wskazówka: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 267.

- 6.10.** a) Wskazówka: Zauważ, że podany warunek jest równoważny warunkowi $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{x}$.

- b) Wskazówka: $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a+b} = (a+b) - \frac{2ab}{a+b}$

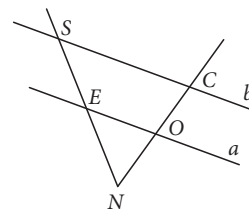
- 6.11.** Wskazówka: Przeanalizuj przykład 6 ze s. 268.

- a) Wskazówka: Odłóż na półprostej odcinki o długościach 2 i 5.

- b) Wskazówka: Zauważ, że odcinek o długości $\sqrt{2}$ jest przekątną kwadratu o boku 1.

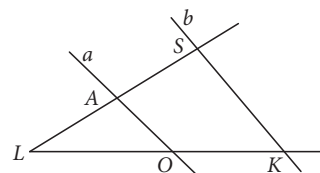
- 6.5.** Proste a i b na rysunku są równoległe. Oblicz

- a) $|NE|$, jeżeli $|NS| = 33$, $|NO| = 16$, $|NC| = 44$.
b) $|CO|$, jeżeli $|NC| = 3$, $|NS| = 18$, $|ES| = 0,6$.
c) $|EO|$, jeżeli $|SN| = 14$, $|SE| = 8$, $|SC| = 35$.
d) $|SC|$, jeżeli $|EO| = 3$, $|EN| = 1,5$, $|SE| = 2$.
e) $|NC|$, jeżeli $|NO| = 4$, $|SE| = 1,2$, $|SN| = 1,8$.
f) $|EO|$, jeżeli $|SE| : |EN| = 2 : 5$, $|SC| = 14$.



- 6.6.** Proste a i b przecięły ramiona kąta o wierzchołku L tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki LO i OK , a na drugim LA i AS (zob. rysunek). Skonstruuj z podanych informacji i sprawdź, czy proste a i b są równoległe.

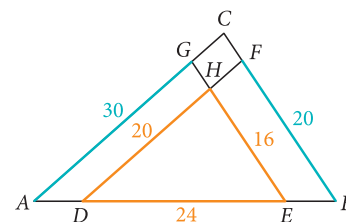
- a) $|LO| : |LK| = 2 : 3$, $|LA| = 4$, $|AS| = 6$
b) $|LO| : |LK| = 1 : 8$, $|OA| = 2$, $|KS| = 16$
c) $|LK| = \sqrt{2} + 1$, $|OK| = 1$, $|LA| : |AS| = \sqrt{2}$
d) $|LO| = 3\sqrt{2}$, $|OK| = 2\sqrt{2} - 1$, $|OA| : |KS| = 2 + \sqrt{2}$



- 6.7.** W trójkącie ABC poprowadzono odcinki DF i EG tak, że $DF \parallel AC$ i $EG \parallel BC$ (zob. rysunek). Oblicz długości boków trójkąta ABC .

- 6.8.** Na prostej leżą kolejno punkty A, B, C, D tak, że zachodzi proporcja $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$. Oblicz

- a) $|AB|$, jeżeli $|BC| = 3$, $|CD| = 7$.
b) $|BC|$, jeżeli $|CD| = 5$, $|AB| = 10$.



- 6.9.** Narysuj odcinek jednostkowy oraz odcinki o długościach a i b , a następnie skonstruuj odcinek o podanej długości.

- a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{a+b}{a \cdot b}$

- * **6.10.** Narysuj odcinki o długościach a i b , a następnie skonstruuj odcinek x taki, że

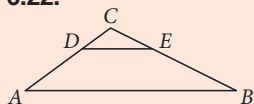
- a) $x = \frac{a^2}{a+b}$ b) $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$

- * **6.11.** Dany odcinek a podziel konstrukcyjnie w podanym stosunku.

- a) $2 : 5$ b) $3 : 2\sqrt{2}$ c) $2 : \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ e) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$

- 6.12.** Dany jest odcinek o długości m . Skonstruuj kwadrat, trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny takie, że obwód każdej z tych figur jest równy m .

6.22.



$$|AB| = 36, |BC| = 24, |AC| = 18$$

$$|AD| + |CE| = 20$$

Niech $|AD| = x$.

$$|CE| = 20 - x$$

$$|BE| = |BC| - |CE| =$$

$$= 24 - (20 - x) = x + 4$$

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BC|}, \text{ czyli } \frac{x}{18} = \frac{x+4}{24}$$

$$24x = 18x + 18 \cdot 4$$

$$6x = 18 \cdot 4 \mid : 6$$

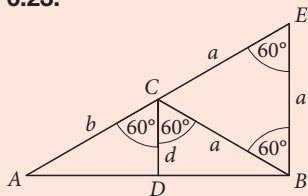
$$x = 12, |CD| = 18 - 12 = 6$$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$|DE| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$$

Odp.: $|DE| = 12$

6.23.



Oznaczamy $d = |CD|$.

Prowadzimy $BE \parallel CD$, zatem:

$$\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCD = 60^\circ$$

(kąty naprzemianległe)

$$\text{oraz } \sphericalangle BEC = \sphericalangle ACD = 60^\circ$$

(kąty odpowiadające).

$\triangle BCE$ jest równoboczny o boku a .

Z twierdzenia Talesa:

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{d}{a},$$

$$\text{zatem } d = \frac{ab}{a+b}.$$

6.24. Wskazówka: Poprowadź prostą DM do przecięcia z przedłużeniem boku AB w punkcie K i udowodnij, że trójkąt BKM jest przystający do trójkąta CDM .

* **6.22.** Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 36$, $|BC| = 24$ i $|AC| = 18$. Przez pewien punkt D na boku AC poprowadzono prostą równoległą do AB przecinającą bok BC w punkcie E takim, że $|AD| + |CE| = 20$. Oblicz długość odcinka DE .

* **6.23.** W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 120° , $|AC| = b$ i $|BC| = a$. Wyznacz długość dwusiecznej CD .

D * **6.24.** Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD . Wykaż, że $MN \parallel AB$ oraz $|MN| = \frac{|AB| + |DC|}{2}$.

Prosto do matury

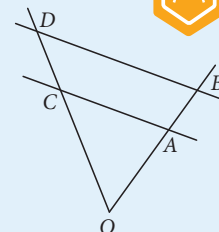
1. Proste AC i BD na rysunku obok są równoległe.

Oceń prawdziwość podanych proporcji.

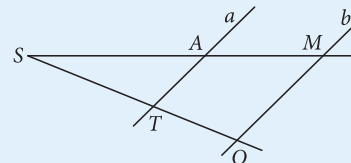
A. $\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$

B. $\frac{|DB|}{|CA|} = \frac{|DC|}{|CO|}$

C. $\frac{|DB|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|OA|}$



2. Przedstawione na rysunku proste a i b są równoległe. Oblicz $|ST|$, jeżeli $|TO| = 12$ cm, $|AM| = 16$ cm, $|SA| = 24$ cm.

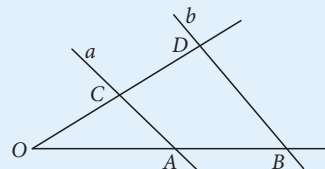


3. Proste a i b przecinają ramiona kąta o wierzchołku O w punktach A, B oraz C, D jak na rysunku. Skorzystaj z podanych informacji i sprawdź, czy te proste są równoległe.

a) $|OA| = 2,5$ cm, $|AB| = 1,5$ cm, $|AC| = 0,5$ dm, $|DB| = 0,8$ dm

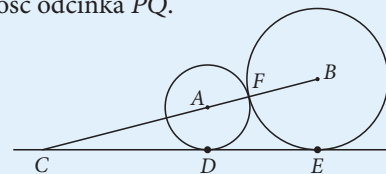
b) $|OA| = 5,1$ cm, $|OB| = 6,8$ cm, $\frac{|OC|}{|CD|} = 3$

c) $|OA| = 26$ cm, $|AB| = 4$ cm, $|OC| = 13$ cm, $|OD| = 16$ cm



4. W trójkącie ABC na boku AC obrano punkt P , przez który poprowadzono prostą k równoległą do boku AB . Prosta k przecięła bok BC w punkcie Q . Wiadomo, że $|AB| = 15$ cm i $|AP| : |PC| = 2 : 3$. Oblicz długość odcinka PQ .

5. Dwa okręgi o promieniach 9 i 15 są styczne zewnętrznie w punkcie F i styczne do prostej CE jak na rysunku. Oblicz długość odcinka AC .



Prosto do matury

1. F, F, P

2. 18 cm

3. a) tak b) tak c) nie

4. 9 cm

5. 36. Wskazówka: Poprowadź promienie AD i BE .

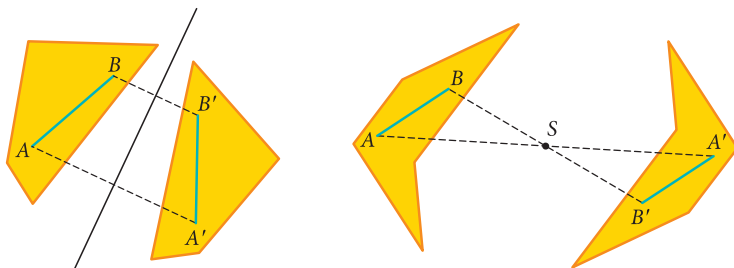
7. Podobieństwo

Umiejętności:

- rozpoznawanie figur podobnych
- wykorzystywanie zależności między polami figur podobnych
- wykorzystywanie (także w praktyce) własności figur podobnych

Symetrię osiową oraz symetrię środkową cechuje **zachowanie odległości**. Oznacza to, że dla dowolnych punktów A, B odległość między A i B jest taka sama jak odległość między ich obrazami A' i B' w tych przekształceniach, czyli:

$$|AB| = |A'B'|$$



Jeżeli figura F' powstaje z figury F w wyniku przekształcenia zachowującego odległości, to F' i F nazywamy **figurami przystającymi**.

Teraz zajmiemy się podobieństwem figur. Tego typu przekształcenia na ogół odległości nie zachowują, tylko je zwiększają albo zmniejszają.

Definicja

Jeżeli dana jest pewna liczba dodatnia k , to **podobieństwem** o skali k nazywamy każde takie przekształcenie płaszczyzny, w którym dla dowolnych punktów A, B płaszczyzny oraz ich obrazów A', B' zachodzi równość:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

Dwie figury nazywamy **podobnymi**, jeśli istnieje podobieństwo przekształcające jedną z nich na drugą. Fakt, że figura F_1 jest podobna do figury F_2 , zapisujemy symbolicznie $F_1 \sim F_2$.

O figurach przystających mówimy potocznie, że są równe (lub: identyczne), o figurach podobnych – że mają ten sam kształt.

ZZ i MKP

tematy 6.4, 6.6 (klasa 1)

Multiteka

- Historia złotej proporcji
- Mona Lisa i złota proporcja

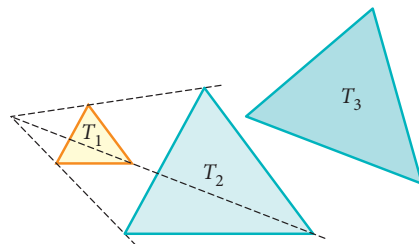
dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 3.7

Generator
testów i sprawdzianów

Powiemy, że figury F_2 oraz F_1 są **podobne w skali k** , jeżeli figura F_2 jest obrazem figury F_1 w podobieństwie o skali k . Zauważmy, że jeżeli figury F_2 oraz F_1 są podobne w skali k , to figury F_1 oraz F_2 są podobne w skali $\frac{1}{k}$.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Boki trójkąta T_1 są równoległe do boków trójkąta T_2 , więc (zgodnie z twierdzeniem Talesa) boki T_1 są proporcjonalne do odpowiednich boków T_2 . Trójkąt T_3 jest przystający do trójkąta T_2 , więc boki T_1 są proporcjonalne także do odpowiednich boków T_3 . Zatem:



- trójkąty T_1 i T_2 mają odpowiednie boki proporcjonalne,
- trójkąty T_1 i T_3 mają odpowiednie boki proporcjonalne,
- trójkąty T_2 i T_3 mają odpowiednie boki równe, więc proporcjonalne.

Trójkąty T_1 , T_2 i T_3 mają ten sam kształt. Udowodnieniem, że są podobne, zajmiemy się w następnym temacie.

Przykład 1

- a) Dowolne dwa odcinki są podobne.
Skalą podobieństwa jest stosunek długości tych odcinków.

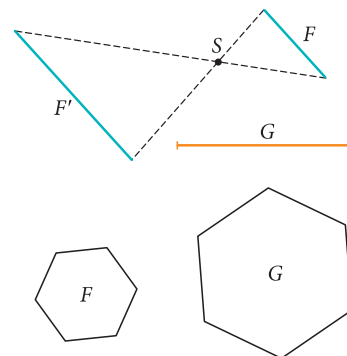
$$F \sim F'$$

$$G \equiv F', \text{ więc } G \sim F'$$

$$F \sim G$$

- b) Dwa wielokąty foremne o tej samej liczbie boków są podobne.

$$F \sim G$$



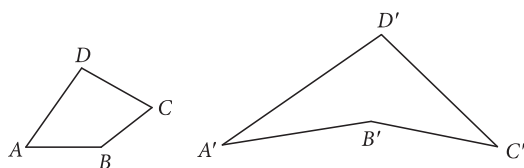
Twierdzenie

Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.

Twierdzenie podajemy bez dowodu, pokażemy tylko na przykładzie, że sama proporcjonalność boków albo sama równość kątów nie wystarczy, by np. czworokąty były podobne.

Przykład 2 ◀ zad. 7.8

Dwa czworokąty narysowane poniżej mają odpowiednie boki proporcjonalne.



Można sprawdzić, że:

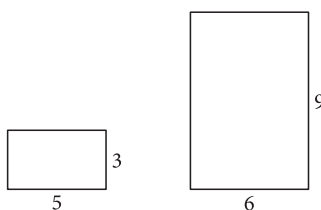
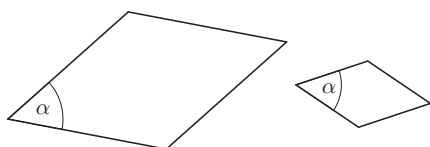
$$|A'B'| = 2|AB|, |B'C'| = 2|BC|, |C'D'| = 2|CD| \text{ oraz } |D'A'| = 2|DA|$$

Czworokąty te nie są jednak podobne, ponieważ mają różne kąty wewnętrzne, np. $\sphericalangle ABC \neq \sphericalangle A'B'C'$.

Przykład 3

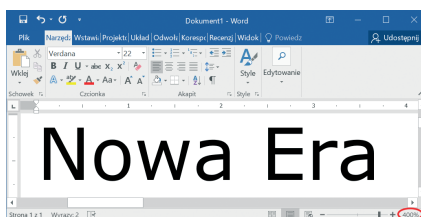
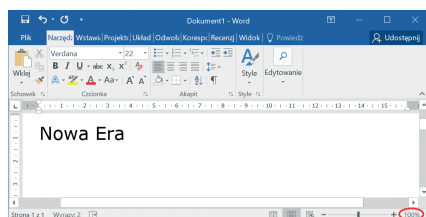
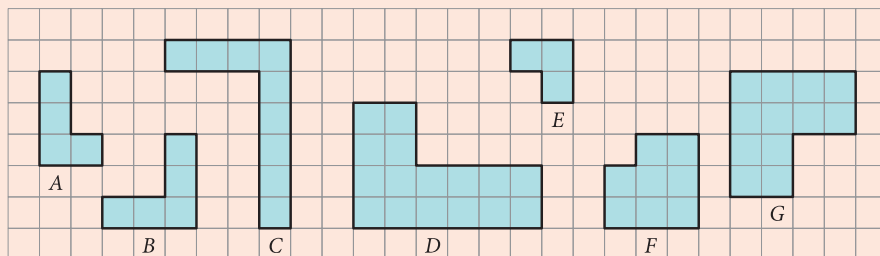
a) Dwa romby są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same kąty.

b) Prostokąt o wymiarach 3×5 nie jest podobny do prostokąta o wymiarach 6×9 , ponieważ $\frac{3}{6} \neq \frac{5}{9}$.



Z podobieństwem (proporcjonalnym powiększaniem lub zmniejszaniem obiektów) mamy do czynienia na co dzień.

- Gdy chcemy zwiększyć litery na ekranie monitora, klikamy na odpowiednią skalę i komputer zgodnie z nią zwiększa obraz.

**◀ 7.8. Które z narysowanych figur są podobne?**

Odp.: A i D, G i E

◀ 7.15.



Na podstawie fragmentu mapy w skali 1 : 75 000 oblicz przybliżoną długość drogi ze stacji PKP w Leluchowie na szczyt Dubne niebieskim szlakiem.

Odp.: ok. 5 km

◀ 7.16.



Odległość z Łeby do Lęborka wynosi około 30 km. Oblicz przybliżoną skalę zamieszczoną powyżej mapy.

Odp.: 1 : 375 000

- Jeżeli wykonujemy odbitki zdjęć, to czasami robimy je w różnych wymiarach. Sfotografowany obiekt jest na wszystkich takich odbitkach podobny do obrazu, jaki mamy w pierwotnym zapisie.

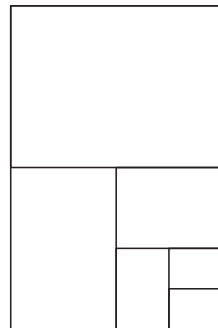


- Arkusze papieru produkuje się na ogół w kształcie prostokąta o takich bokach, że po rozcięciu go na połowy równoległe do krótszego boku otrzymuje się dwa mniejsze prostokąty podobne do prostokąta wyjściowego.

Jeżeli boki dużego prostokąta oznaczmy a, b ($a > b$), to mniejszy prostokąt ma boki $\frac{1}{2}a, b$ i zachodzi proporcja

$$b : a = \frac{1}{2}a : b. \text{ Stąd } b^2 = \frac{1}{2}a^2, \text{ czyli } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prostokąt o opisanej własności ma więc boki pozostające w stosunku równym $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

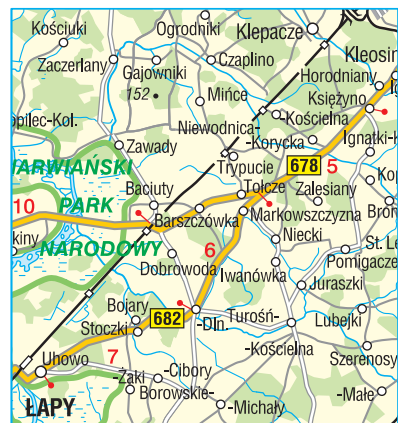


Podobieństwo znajduje zastosowanie np. przy wykonywaniu wszelkiego rodzaju map. Podana na nich skala zapisywana jest najczęściej w postaci $1 : k$, co oznacza, że rzeczywiste wymiary w terenie są k razy większe od zmierzonych na mapie.

Przykład 4 ◀ zad. 7.15, 7.16

Na mapie w skali 1 : 250 000 długość drogi kolejowej z Uhowa do Klepaczy ma 6,2 cm. Zatem w rzeczywistości odległość między tymi miejscowościami jest równa:

$$6,2 \text{ cm} \cdot 250\,000 = 15,5 \text{ km}$$



Jeżeli odcinki o długościach a i b przekształcono przez podobieństwo w skali k , to ich obrazy mają długości odpowiednio ka i kb . Zatem stosunek odcinków po przekształceniu jest taki sam jak przed przekształceniem. Mówimy, że podobieństwo **zachowuje stosunek długości**. Z tego faktu wynika na przykład stały stosunek długości okręgu do jego średnicy (bo każde dwa okręgi są podobne).

- Stosunek obwodu koła do jego średnicy jest stały, równy liczbie niewymiernej π :

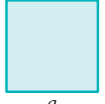
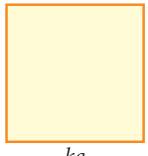
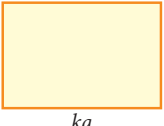
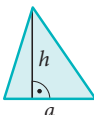
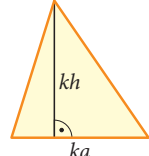
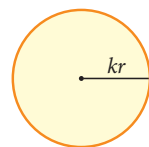
$$\frac{\text{obw}_{k(O,r)}}{2r} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

- Stosunek pola koła do kwadratu jego promienia jest stały, równy **tej samej** liczbie π :

$$\frac{P_{k(O,r)}}{r^2} = \frac{\pi r^2}{r^2} = \pi$$

Obydwa te fakty zauważył i udowodnił żyjący w III w. p.n.e. Archimedes z Syrakuz.

Zbadajmy zależność między polami pewnych figur G i F podobnych w skali k .

Figura F	Pole P_F	Figura G	Pole P_G	$\frac{P_G}{P_F}$
kwadrat 	$P_F = a^2$		$P_G = (k \cdot a)^2 = k^2 a^2$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$
prostokąt 	$P_F = ab$		$P_G = (ka)(kb) = k^2 ab$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$
trójkąt 	$P_F = \frac{ah}{2}$		$P_G = \frac{(ka)(kh)}{2} = \frac{k^2 ah}{2}$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$
koło 	$P_F = \pi r^2$		$P_G = \pi (kr)^2 = k^2 \pi r^2$	$\frac{P_G}{P_F} = k^2$

Powyższe obserwacje są ilustracją twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

◀ **7.18.** Gorczański Park Narodowy zajmuje około 7000 ha. Jaką powierzchnię będzie miał jego obraz na mapie w skali 1 : 50 000? Wynik podaj w dm^2 i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

Odp.: 2,8 dm^2

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. C

7.2. A

7.3. A

7.4. P, P, F

7.5. a) 4×10

b) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{4} \times \frac{15}{8}$

Przykład 5 ◀ zad. 7.18

Morze Czarne (łącznie z Morzem Azowskim) ma powierzchnię $460\,000\text{ km}^2$. Obliczmy, jaki obszar zajmie obraz tego morza na mapie w podanej skali.

a) 1 : 1 000 000

Będzie to powierzchnia o polu $1\,000\,000^2$ razy mniejszym, czyli:

$$\frac{460\,000}{1\,000\,000\,000\,000}\text{ km}^2 = \frac{460\,000\,000\,000}{1\,000\,000\,000\,000}\text{ m}^2 = \frac{46}{100}\text{ m}^2 = \frac{460\,000}{100}\text{ cm}^2 = 4600\text{ cm}^2$$

b) 1 : 40 000 000

$$\frac{460\,000}{40\,000\,000^2}\text{ km}^2 = \frac{46 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{(4 \cdot 10^7)^2}\text{ m}^2 = \frac{46 \cdot 10^{10}}{16 \cdot 10^{14}}\text{ m}^2 = \frac{46 \cdot 10^{14}}{16 \cdot 10^{14}}\text{ cm}^2 \approx 2,9\text{ cm}^2$$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Obwód trójkąta ABC jest równy 18, a jego pole 15. Jaki jest obwód trójkąta o polu równym 60, podobnego do trójkąta ABC ?

A. 9 B. 72 C. 36 D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.

7.2. Trójkąt przekształcono przez podobieństwo w takiej skali, że jego obwód zwiększył się o 30%. O ile procent wzrosło pole trójkąta?

A. o 69% B. o 90% C. o 300% D. o 900%

7.3. Jaką trzeba przyjąć skalę, żeby obrazem kwadratu o polu 84 km^2 był na mapie kwadrat o polu 84 mm^2 ?

A. 1 : 1 000 000 B. 1 : 10 000 000 C. 1 : 1000 D. 1 : 10^{12}

7.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Każda symetria jest podobieństwem.

B. Dowolne dwa kwadraty są podobne.

C. Pole powierzchni sali na planie w skali 1 : 500 jest 25 000 razy mniejsze niż w rzeczywistości.

7.5. Prostokąt o wymiarach 2×5 przekształcono przez podobieństwo o podanej skali k . Jakie są wymiary obrazu prostokąta?

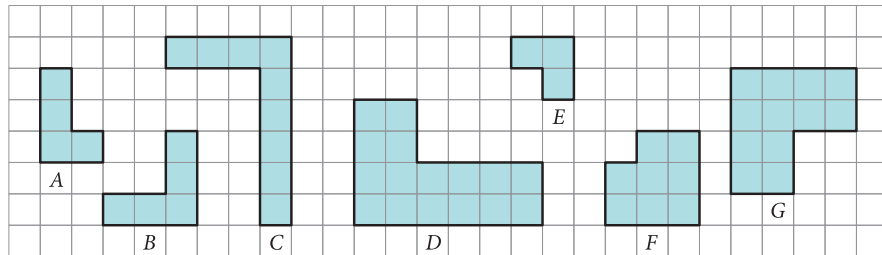
a) $k = 2$ b) $k = \frac{1}{3}$ c) $k = \frac{3}{8}$

7.6. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 cm i 4 cm, a jego wysokość jest równa 3 cm. Narysuj trapez podobny do danego w skali $k = \frac{3}{2}$.

7.7. Podaj skalę, w jakiej przekształcono

- prostokąt o wymiarach 2×5 na prostokąt o wymiarach 6×15 .
- romb o boku 3 i kącie 80° na romb o boku 2 i kącie 80° .
- koło o promieniu 3,4 na koło o promieniu 17.
- kwadrat o boku 3 na kwadrat o przekątnej 6.

7.8. Które z narysowanych figur są podobne?



7.9. Czy podane figury są podobne? Dla figur podobnych podaj skalę podobieństwa.

- trójkąt równoboczny o boku 3,7 cm i trójkąt równoboczny o boku 18,5 cm
- prostokąt o wymiarach 21×8 i prostokąt o wymiarach $3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3}$
- trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i ramieniu 10 cm i trójkąt równoramienny o ramieniu 30 cm i wysokości opuszczonej na podstawę równej 24 cm
- równoległobok o bokach 7 i 8 oraz równoległobok o bokach 3 i 4
- trapez prostokątny o podstawach 6 i 10 oraz wysokości 7 i trapez prostokątny o podstawach 3 i 5 oraz polu 12
- koło o obwodzie 3π i koło o polu 3π

7.10. Wyznacz skalę, w jakiej należy przekształcić prostokąt o podanych wymiarach, aby otrzymać prostokąt o obwodzie 12 cm.

- $2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$
- $6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$
- $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$
- $1 \text{ cm} \times 1,1 \text{ dm}$

7.11. Prostokąt $ABCD$ jest podobny do prostokąta $A'B'C'D'$ w skali $k = \frac{6}{5}$. Oblicz obwody tych prostokątów, jeżeli $|AB| = 12 \text{ cm}$ i $|A'C'| = 26 \text{ cm}$.

7.12. W jakiej skali należy przekształcić prostokąt o przekątnych długości 20 cm i kącie między nimi 60° , aby otrzymać podobny prostokąt o danym obwodzie lub polu?

- $obw = 5(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$
- $obw = 10 \text{ cm}$
- $P = \sqrt{3} \text{ cm}^2$

7.13. Czworokąt C_1 o kolejnych bokach długości 1, 3, 5 i 7 jest podobny do czworokąta C_2 , w którym suma długości najdłuższego i najkrótszego boku jest równa 16. Oblicz stosunek obwodu czworokąta C_1 do obwodu czworokąta C_2 .

7.7. a) $k = 3$

b) $k = \frac{2}{3}$

c) $k = 5$

d) $k = \sqrt{2}$

7.8. A i D, G i E

7.9. a) tak, $k = 5$

b) tak, $k = \frac{1}{6}$

c) tak, $k = 3$

d) nie

e) nie

f) tak, $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

7.10. a) $k = \frac{6}{7}$

b) $k = \frac{2}{3}$

c) $k = 2$

d) $k = \frac{1}{2}$

7.11. $obw_{ABCD} = 81,6 \text{ cm}$,
 $obw_{A'B'C'D'} = 68 \text{ cm}$

7.12. a) $k = \frac{1}{4}$

b) $k = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

c) $k = \frac{1}{10}$

7.13. 1 : 2

7.14. 4 cm

7.15. ok. 5 km

7.16. 1 : 375 000

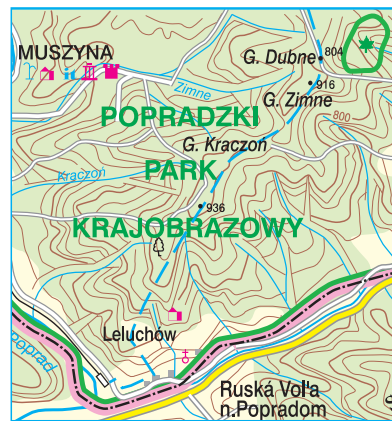
7.17. podobieństwo o skali
 $k = 2\frac{1}{2}$ 7.18. 2,8 dm²7.19. $k = 1,4$

7.20. 20 cm

7.21. 11 : 5

7.14. W równoległoboku $ABCD$ mamy $|AB| = 6$ cm i $|BC| = 9$ cm. Przez punkt M leżący na boku AD poprowadzono prostą równoległą do AB i odcinającą równoległobok $ABNM$ podobny do równoległoboku $ABCD$. Ile wynosi odległość punktu M od punktu A ?

7.15. Na podstawie podanego obok fragmentu mapy w skali 1 : 75 000 oblicz przybliżoną długość drogi ze stacji PKP w Leluchowie na szczyt Dubne niebieskim szlakiem.



7.16. Odległość z Łeby do Lęborka wynosi około 30 km. Oblicz przybliżoną skalę zamieszczonej obok mapy.



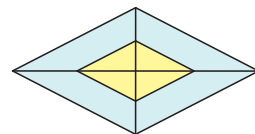
7.17. Julka ma kawałek mapy terenowej w skali 1 : 5000. Chce ją powiększyć tak, aby mieć potrzebny fragment w skali 1 : 2000. Przez jakie podobieństwo powinna przekształcić wybrany fragment mapy?

7.18. Gorczański Park Narodowy zajmuje około 7000 ha. Jaką powierzchnię będzie miał jego obraz na mapie w skali 1 : 50 000? Wynik podaj w dm² i zaokrąglaj do jednego miejsca po przecinku.

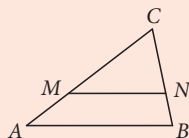
7.19. Wielokąt przekształcono przez podobieństwo tak, że jego pole zwiększyło się o 96%. Jaka była skala tego podobieństwa?

7.20. Pola dwóch wielokątów podobnych wynoszą 75 cm² i 48 cm². Obwód mniejszego wielokąta jest równy 16 cm. Wyznacz obwód większej figury.

7.21. Na rysunku przedstawiono dwa romby o wspólnym środku symetrii i bokach odpowiednio równoległych. Stosunek pola figury niebieskiej do pola figury żółtej jest równy 96 : 25. Oblicz stosunek obwodów tych rombów.



7.25.



Dane: $MN \parallel AB$, $P_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC}$

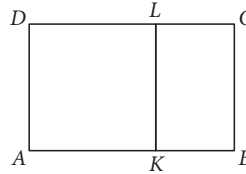
$\triangle CMN \sim \triangle ABC$ w skali $k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

stąd $\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|AC|}{|MC|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|AM| + |MC|}{|MC|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|AM|}{|MC|} + 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

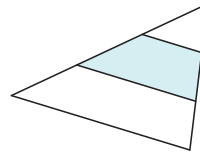
$\Leftrightarrow \frac{|AM|}{|MC|} = \sqrt{2} - 1$

* **7.22.** Podział odcinka na takie dwie części, że stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części, nazywamy **złotym podziałem odcinka**. Oblicz, na jakie części podzielimy w opisany sposób odcinek o długości 1.

* **7.23.** W prostokącie $ABCD$ poprowadzono odcinek KL , który podzielił prostokąt na kwadrat $AKLD$ i prostokąt $KBCL$ (zob. rysunek). Prostokąt $KBCL$ jest podobny do prostokąta $ABCD$. Wyznacz skalę tego podobieństwa.



* **7.24.** Pole trójkąta jest równe 36. Poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego boku trójkąta, które podzieliły każdy z pozostałych dwóch boków na trzy równe części (zob. rysunek). Oblicz pole trapezu, którego podstawami są te odcinki.



* **7.25.** Przez punkt M leżący na boku AC trójkąta ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która podzieliła ten trójkąt na dwa wielokąty o równych polach. W jakim stosunku punkt M dzieli odcinek AC ?

Prosto do matury



1. Wielokąt o obwodzie 24 cm i polu 9 cm^2 przekształcono przez podobieństwo o skali 3. Ocen prawdziwość podanych zdań.

- A. Obwód wielokąta wzrósł o 72 cm.
- B. Pole wielokąta wzrosło do 27 cm^2 .
- C. Stosunek długości najdłuższego boku wielokąta do najkrótszego boku wielokąta wzrósł trzykrotnie.

2. Wielokąt o polu 750 cm^2 przekształcono przez podobieństwo tak, że pole jego obrazu jest mniejsze o 630 cm^2 . Ile wynosi skala podobieństwa?

D 3. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami ramion BC i AD . Wykaż, że czworokąty $ABKL$ i $KCDL$ są trapezami równoramiennymi i że żaden z nich nie jest podobny do trapezu $ABCD$.

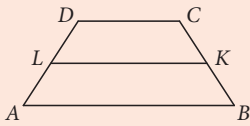
E 4. Jezioro Śniardwy ma $113,8 \text{ km}^2$ powierzchni. Jaką powierzchnię zajmie jego obraz na mapie w skali $1 : 80\,000$? Wynik podaj w cm^2 i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

5. Bok AD równoległoboku $ABCD$ ma długość a . Trzy proste równoległe do tego boku podzieliły równoległobok na cztery przystające równoległoboki podobne do równoległoboku $ABCD$. Wyznacz długość boku AB .

Prosto do matury

1. F, F, F

2. $k = 0,4$

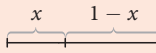
3.  Wiadomo, że $KL \parallel AB \parallel CD$ (rozwiązanie zadania 6.24). Zatem czworokąty $ABKL$ i $KCDL$ są trapezami równoramiennymi, ponieważ $|AL| = |LD| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|BC| = |BK| = |KC|$.

Natomiast $\frac{|AL|}{|AB|} < \frac{|AD|}{|AB|}$ oraz $\frac{|DL|}{|DC|} < \frac{|DA|}{|DC|}$,

więc te trapezy nie są podobne do trapezu $ABCD$.

4. $177,8 \text{ cm}^2$

5. $2a$

7.22. 
 $\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}, x \in (0; 1)$

$$x = (1-x)^2$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \Delta = 5$$

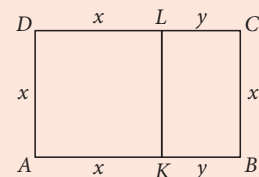
$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin (0; 1),$$

więc $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$$1-x = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Odp.: Krótsza część ma długość $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, dłuższa część ma długość $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

7.23.



k – skala podobieństwa

$$k = \frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$$

$$y^2 + xy = x^2$$

$$y^2 + xy - x^2 = 0 \quad | : x^2$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1 = 0$$

$$k^2 + k - 1 = 0, \Delta = 1 + 4 = 5$$

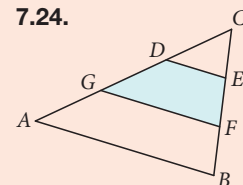
$$k_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0, k_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{czyli } k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Odp.: Skala podobieństwa to

$$k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

7.24.



Dane: $|AG| = |GD| = |DC|$
 $|BF| = |FE| = |EC|$

Rozwiązanie:

$$P_{\triangle ABC} = 36$$

$$\triangle CGF \sim \triangle ABC \text{ w skali } k_1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{więc } P_{\triangle CGF} = \frac{4}{9} \cdot 36 = 16$$

$$\triangle CDE \sim \triangle CGF \text{ w skali } k_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{więc } P_{\triangle CDE} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4, \text{ zatem}$$

$$P_{DEFG} = P_{\triangle CGF} - P_{\triangle CDE} = 12.$$

Odp.: Trapez ma pole równe 12.

Tunel na wyspie Samos

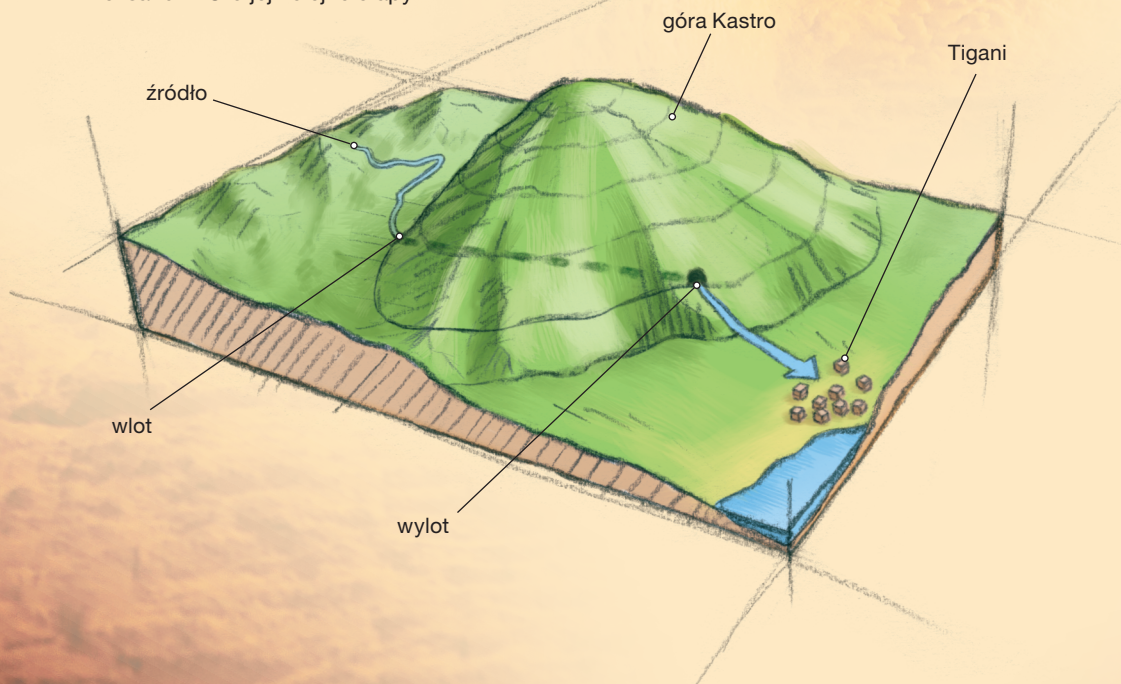
Na greckiej wyspie Samos zachowała się budowla sprzed 2500 lat, która do dzisiaj zachwyca inżynierów i naukowców.

Eupalinos z Megary

W VI w. p.n.e., na polecenie tyrana Polikratesa, Eupalinos z Megary wybudował na Samos podziemny akwedukt doprowadzający wodę do miasta Tigani (obecnie Pythagorion). Najdłuższą częścią tej budowli jest tunel o długości 1036 m, wydrążony we wnętrzu góry Kastro. Choć prace górnicze prowadziły dwie ekipy, z obu stron góry jednocześnie, powstał tunel biegnący w linii prostej.

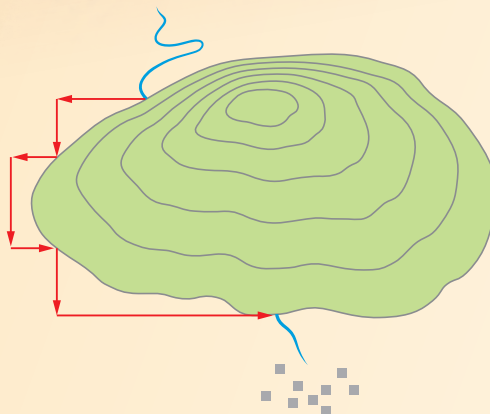
Metoda Eupalinosa

Nie zachowały się zapiski z tamtych czasów, więc nie wiemy na pewno, jak rozumował Eupalinos. Przyjmuje się jednak, że wykorzystał tę samą metodę, którą 500 lat później opisał w swoim dziele Heron z Aleksandrii. Oto jej kolejne etapy.



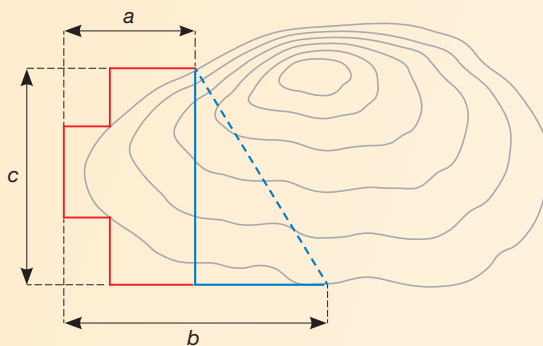
1 Wyznaczenie końców tunelu

Począwszy od miejsca, gdzie miał się znajdować wlot tunelu, Eupalinos wyznaczał kolejno odcinki wzajemnie do siebie prostopadłe (na rysunku kolor czerwony). Kontynuował to tak długo, aż doszedł do miejsca, w którym najdogodniej było zrobić wylot tunelu. Wszystkie pomiary musiał wykonać na tej samej wysokości nad poziomem morza.



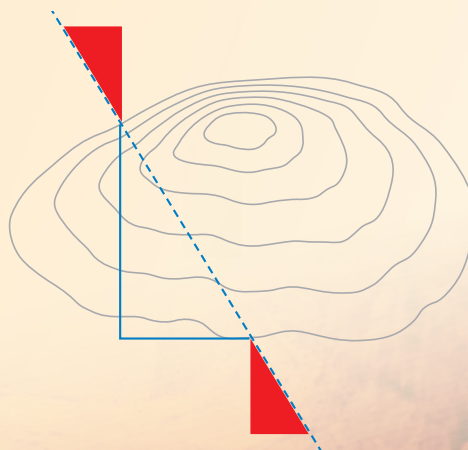
2 Wyznaczenie przebiegu tunelu

Na podstawie swoich pomiarów Eupalinos obliczył długości $b - a$ oraz c (zob. rysunek). W ten sposób wyznaczył długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna leży wzdłuż szukanego tunelu.



3 Wskazanie kierunku drążenia

Na koniec Eupalinos przygotował modele mniejszych trójkątów, podobnych do wyznaczonego. Umieścił je poziomo u wylotów tunelu tak, by ich przeciwprostokątne leżały na przedłużeniu przeciwprostokątnej trójkąta wyznaczonego we wnętrzu góry. Pracujący górnicy mieli drążyć tunel w kierunku wskazanym przez te przeciwprostokątne. Modele trójkątów były stale umieszczone przed wejściem do tunelu, by podczas pracy można było weryfikować kierunek drążenia.



Uwagi metodyczne

Ostatnim tematem z tej serii są trójkąty podobne. Uczniowie znają już pojęcie podobieństwa, ale nowością są dla nich cechy podobieństwa trójkątów. Przy okazji wyprowadzamy też zagadnienie związków miarowych w trójkącie prostokątnym, a jako ciekawostkę podajemy wniosek dotyczący nierówności pomiędzy średnimi liczb – geometryczną i arytmetyczną.

8. Trójkąty podobne

Umiejętności:

- rozpoznawanie trójkątów podobnych
- wykorzystywanie cech podobieństwa trójkątów
- wykorzystywanie własności środkowych trójkąta
- wykorzystywanie (także w praktyce) własności trójkątów podobnych

Cechy podobieństwa trójkątów

- Jeśli dwa trójkąty są podobne, to ich odpowiednie boki są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.
- Jeśli w dwóch trójkątach odpowiednie boki są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe, to te trójkąty są podobne.

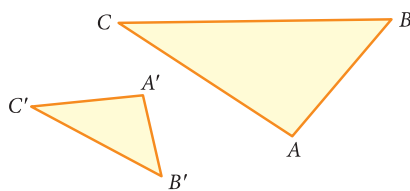
Każde z powyższych zdań jest prawdziwe na mocy twierdzenia ze s. 274.

Okazuje się, że nie musimy badać proporcjonalności wszystkich boków i równości wszystkich kątów, aby wykazać, że dwa trójkąty są podobne. Prostsza metodą uzasadnienia zapewnia każde z trzech poniższych twierdzeń, nazywanych **cechami podobieństwa trójkątów**.

Twierdzenie

Cecha bok-bok-bok podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



Proporcjonalność odpowiednich boków oznacza też, że odpowiednie kąty są równe.

Dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ można tę cechę zapisać symbolicznie:

$$\text{jeżeli } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

$$\text{to } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Zapis $p = q = t$ oznacza, że prawdziwe są trzy równości: $p = q$, $q = t$ i $p = t$.

ZZ i MKP

temat 6.5 (klasa 1)

Multiteka

- Tunel na wyspie Samos
- Wyznaczanie wysokości budynków z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów
- Fraktale
- Płatek śniegu Kocha

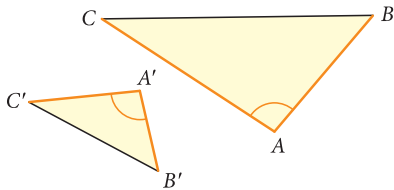
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.8

Zauważmy, że analogiczne twierdzenie dla czworokątów nie zachodzi – zobacz przykład 2 s. 275.

Twierdzenie

Cecha bok-kąt-bok podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków innego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.



Proporcjonalność par boków i równość kątów między nimi oznacza też proporcjonalność pozostałych boków i równość pozostałych kątów.



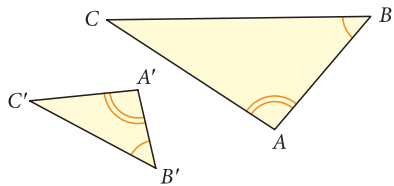
Dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ można tę cechę zapisać symbolicznie:

$$\text{jeżeli } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \text{ i } \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B' \\ \text{to } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Twierdzenie

Cecha kąt-kąt podobieństwa trójkątów (kk)

Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom innego trójkąta, to trójkąty te są podobne.



Równość odpowiednich kątów oznacza też, że odpowiednie boki są proporcjonalne.



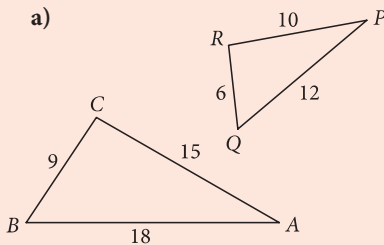
Dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ można tę cechę zapisać symbolicznie:

$$\text{jeżeli } \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B' \text{ i } \sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A' \\ \text{to } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

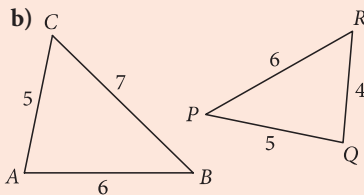
Zauważmy, że analogiczne twierdzenie dla czworokątów nie zachodzi – zobacz przykład 3b s. 275.

◀8.6. Sprawdź, czy trójkąty ABC i PQR są podobne.

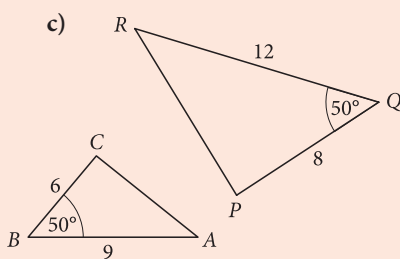
a)



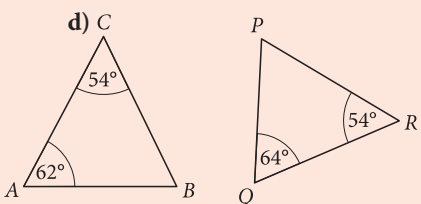
b)



c)



d)

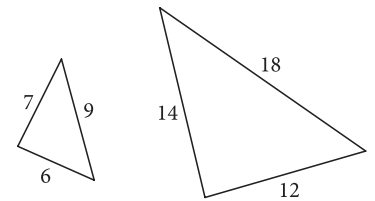


Odp.: a) tak b) nie c) tak
d) tak

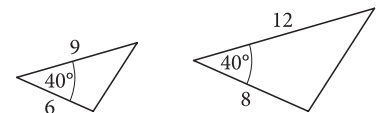
Przykład 1 ◀ zad. 8.6

Zbadamy podobieństwo trójkątów przedstawionych na rysunku.

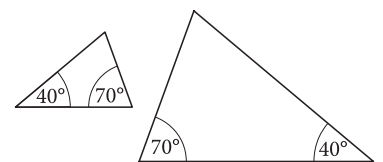
a) Odpowiednie boki trójkątów są proporcjonalne: $\frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{9}{18}$, więc trójkąty o bokach tej długości są podobne.



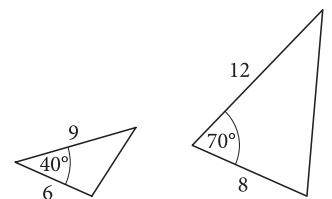
b) Dwa boki pierwszego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ i kąty między tymi bokami są równe 40° , zatem te trójkąty są podobne.



c) Kąty obu trójkątów są odpowiednio równe (trzeci – jako dopełnienie do 180°), więc te trójkąty są podobne.



d) Dwa boki pierwszego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$, ale kąty między tymi bokami nie są równe: $40^\circ \neq 70^\circ$. Żadna z cech przystawania nie opisuje takiej sytuacji. Zauważmy jednak, że gdyby te trójkąty miały być podobne, musiałyby być trójkątami o kątach $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$, czyli równoramennymi o kącie 40° między ramionami. Zatem mniejszy z podanych trójkątów nie mógłby mieć boków o długościach 6 i 9 zawartych w ramionach kąta 40° . Oznacza to, że te trójkąty nie są podobne.



Przykład 2

Dane są miary niektórych kątów w trójkątach ABC i DEF : $\sphericalangle A = 38^\circ$, $\sphericalangle B = 96^\circ$, $\sphericalangle D = 96^\circ$, $\sphericalangle E = 48^\circ$. Sprawdźmy, czy te trójkąty są podobne.

Rozwiązanie

Kąty B i D są równe. Ponieważ $\sphericalangle A \neq \sphericalangle E$, rozpatrywane trójkąty są podobne tylko wtedy, gdy kąt C trójkąta ABC jest równy kątowi E w trójkącie DEF .

$$\sphericalangle C = 180^\circ - (38^\circ + 96^\circ) = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$$

Sprawdziliśmy, że $\sphericalangle C \neq \sphericalangle E$, więc rozpatrywane trójkąty nie są podobne.

Odp.: Trójkąty ABC i DEF nie są podobne.

**Przykład 3** zad. 8.7

Boki trójkąta T_1 mają długości 3 cm, 6 cm i 8 cm. Najkrótszy bok w trójkącie T_2 , podobnym do T_1 , ma 21 cm. Znajdziemy długości pozostałych boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Podobieństwo zachowuje stosunki odcinków, więc obrazem najkrótszego boku w T_1 jest najkrótszy bok w T_2 . Zatem skalą podobieństwa jest w tym wypadku liczba $\frac{21}{3} = 7$, a pozostałe boki mają długości $7 \cdot 6 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$ oraz $7 \cdot 8 \text{ cm} = 56 \text{ cm}$.

Odp.: Pozostałe boki mają długości 42 cm i 56 cm.

Jeżeli mamy dwa trójkąty podobne, to ważną umiejętnością jest poprawne ustalenie proporcji ich boków. Możemy postępować według podanych niżej zasad.

- Oznaczamy równe kąty w obu trójkątach tymi samymi symbolami.
- W mianownikach trzech ułamków wpisujemy boki jednego trójkąta.

$$\frac{?}{a} = \frac{?}{b} = \frac{?}{c}$$

- Sprawdzamy, które boki drugiego trójkąta leżą naprzeciwko równych (odpowiednio) kątów.

$$\frac{n}{a} = \frac{?}{b} = \frac{?}{c}$$

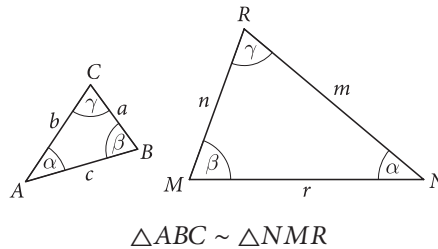
← w trójkącie ABC bok a leży naprzeciwko kąta α , a w trójkącie NMR naprzeciwko kąta α leży bok n , zatem w pierwszym liczniku wpisujemy n

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = \frac{?}{c}$$

← bok b leży naprzeciwko kąta β , zatem w drugim liczniku wpisujemy m

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = \frac{r}{c}$$

← bok c leży naprzeciwko kąta γ , zatem w trzecim liczniku wpisujemy r

**Przykład 4**

Prostokątne trójkąty ABC i EDC , takie jak na rysunku obok, mają równe kąty: kąt prosty i wspólny kąt przy wierzchołku C , więc również kąt B jest równy kątowi D . Zatem trójkąty te są podobne: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Zapiszemy, które z boków są proporcjonalne.

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|?|}{|BC|} = \frac{|?|}{|AC|}$$

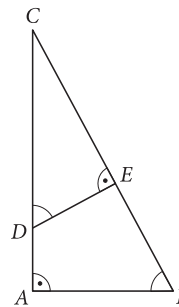
← bok DE leży naprzeciwko kąta C

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|?|}{|AC|}$$

← bok DC leży naprzeciwko kąta prostego

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|AC|}$$

← bok EC leży naprzeciwko kąta D , który jest równy kątowi B



◀8.7. Trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach a_1, b_1, c_1 tak, że boki a, b, c są proporcjonalne odpowiednio do boków a_1, b_1, c_1 . Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

	a	b	c	a_1	b_1	c_1
a)	12	3	11	?	?	$7\frac{1}{3}$
b)	7	?	$2\frac{1}{2}$	?	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$

Odp.: a) $a_1 = 8$, $b_1 = 2$ b) $b = 5\frac{1}{2}$, $a_1 = 3\frac{1}{2}$

Uwagi metodyczne

Uczniowie bardzo często mają trudności z prawidłowym zapisaniem proporcji boków trójkątów podobnych. Nieprawidłowy zapis w zasadzie dyskwalifikuje dalsze rozwiązanie zadania. W przykładach 3 i 4 starannie tłumaczmy, w jaki sposób można zapisać takie proporcje. Bez odwoływania się do rysunku można ten problem rozwiązać, wymieniając wierzchołki obu podobnych trójkątów w kolejności odpowiadającej równym kątom. Warto rozwiązać na tablicy jeszcze kilka podobnych przykładów.

Własności trójkątów podobnych

Do wykazywania podobieństwa figur użyteczne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 i figura F_2 jest podobna do figury F_3 , to F_1 jest podobna do F_3 .

◀ 8.8. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AK , BL i CM . Punkt przecięcia wysokości oznaczono H . Znajdź trójkąty podobne do podanego trójkąta.

- a) AMC
b) CLB
c) CHK

Odp.: a) $\triangle ALB$, $\triangle HLC$, $\triangle HMB$
b) $\triangle HKB$, $\triangle CKA$, $\triangle HLA$
c) $\triangle AHM$, $\triangle CBM$, $\triangle ABK$

Przykład 5 ◀ zad. 8.8

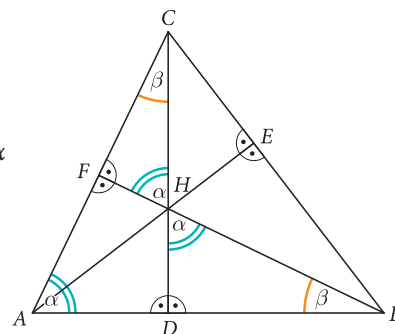
W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE , BF i CD . Wskażemy trójkąty podobne do trójkąta ADC i wypiszemy odpowiednie proporcje boków.

Rozwiązanie

Będziemy korzystać z równości kątów (nie mamy żadnych informacji o długościach boków). Jeśli kąt CAD oznaczmy literą α , a kąt ACD – literą β , to w trójkącie ADC mamy $\beta = 90^\circ - \alpha$ jako dopełnienie do 180° .

Zatem:

- w prostokątnym trójkącie HFC :
 $\sphericalangle FHC = \alpha$
- w prostokątnym trójkącie HDB :
 $\sphericalangle DHB = \alpha$
 $\sphericalangle DBH = \beta$



← kąt wierzchołkowy do kąta FHC

← jako dopełnienie do 180°

Kąty α , 90° i β ma również trójkąt AFB .

Mamy zatem rodzinę trójkątów podobnych:

$$\triangle ADC \sim \triangle HFC \sim \triangle HDB \sim \triangle AFB$$

Wypiszemy proporcje boków par trójkątów podobnych, z których jeden jest trójkątem ADC .

$$\frac{|HF|}{|AD|} = \frac{|FC|}{|DC|} = \frac{|HC|}{|AC|} \quad \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ADC \text{ i } HFC$$

$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|HB|}{|AC|} \quad \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ADC \text{ i } HDB$$

$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|FB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ADC \text{ i } AFB$$

Analogicznie możemy zapisać proporcje dla pozostałych par trójkątów podobnych: HFC i HDB , HFC i AFB , HDB i AFB .

Przykład 6 ◀ zad. 8.10

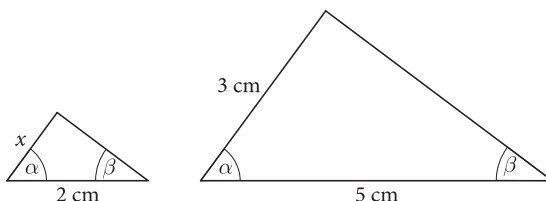
Trójkąty na rysunku obok są podobne. Wyznamy x .

Rozwiązanie

Boki są proporcjonalne, zatem:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{5}, \text{ stąd } x = \frac{6}{5}$$

Odp.: $x = 1,2$ cm

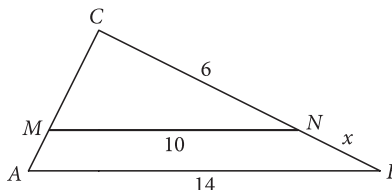
**Przykład 7** ◀ zad. 8.11

Odcinek MN jest równoległy do AB (zob. rysunek). Wyznamy x .

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \sphericalangle CMN &= \sphericalangle CAB && \leftarrow \text{kąty odpowiadające} \\ \sphericalangle MNC &= \sphericalangle ABC && \leftarrow \text{kąty odpowiadające} \\ \triangle MNC &\sim \triangle ABC && \leftarrow \text{cecha kk podobieństwa trójkątów} \\ \frac{|AB|}{|MN|} &= \frac{|BC|}{|NC|} && \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ABC \text{ i } MNC \\ \frac{14}{10} &= \frac{x+6}{6}, \text{ stąd } 10(x+6) = 6 \cdot 14 \end{aligned}$$

Odp.: $x = 2,4$



Jeżeli w trójkącie prostokątnym poprowadzimy wysokość z wierzchołka kąta prostego, to z równości kątów wynika, że każdy z dwóch małych trójkątów jest podobny do dużego. Mamy zatem:

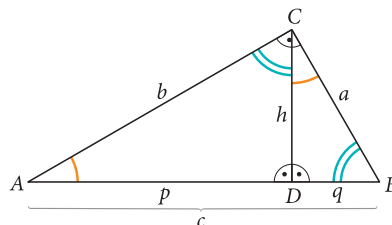
$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Możemy zapisać następujące proporcje:

- $\frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{p}{b}$ $\leftarrow$ z podobieństwa trójkątów DAC i CAB
- $\frac{a}{c} = \frac{q}{a} = \frac{h}{b}$ $\leftarrow$ z podobieństwa trójkątów DCB i CAB
- $\frac{a}{b} = \frac{q}{h} = \frac{h}{p}$ $\leftarrow$ z podobieństwa trójkątów DCB i DAC

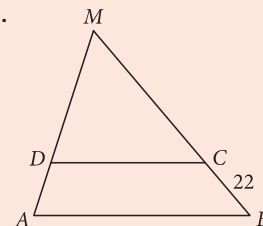
Zauważmy, że z proporcji $\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$ wynika równość $h^2 = pq$.



◀8.10. Boki trójkąta ABC są równe 8 cm, 10 cm i 11 cm. Najdłuższy bok trójkąta PQR , podobnego do trójkąta ABC , ma 33 cm. Wyznam pozostałe boki trójkąta PQR .

Odp.: 24 cm, 30 cm

◀8.11.



Stosunek podstaw w trapezie $ABCD$ przedstawionym na rysunku jest równy $|AB| : |CD| = 7 : 5$. Ramię BC ma długość 22 cm. Oblicz długość odcinka CM .

Odp.: 55 cm

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Jeżeli $w \geq 0$ i $z \geq 0$, to liczbę $m = \sqrt{w \cdot z}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb w i z . Dlatego mówimy, że w trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na które ta wysokość dzieli przeciwprostokątną:
 $h = \sqrt{pq}$.

◀8.14. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma 36 cm. Dzieli ona przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku 4 : 9. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odp.: $18\sqrt{13}$ cm, $12\sqrt{13}$ cm, 78 cm

Przykład 8 ◀ zad. 8.14

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $a = 3$ cm i $b = 4$ cm. Obliczmy wysokość h poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

Rozwiązanie

Skorzystamy z wyprowadzonej wyżej proporcji dla trójkąta prostokątnego ABC :

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$$

w którym $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zatem:

$$h = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Odp.: Wysokość ma 2,4 cm.

Przykład 9

Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 2 cm i 4 cm. Skonstruujemy taki trójkąt.

Rozwiązanie

Pokażemy dwa sposoby rozwiązania zadania.

I sposób

Możemy skorzystać z wyprowadzonego związku i obliczyć wysokość:

$$h = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

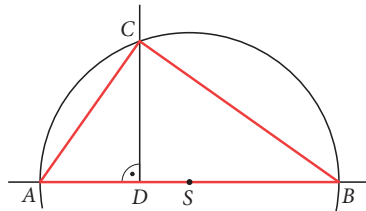
a następnie skonstruować odcinek h (np. jako przekątną kwadratu o boku 2 cm). Dalsze rozwiązanie pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

II sposób

Wiemy, że kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty. Jeżeli narysujemy okrąg, którego średnicą jest przeciwprostokątna (jej długość to $2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$), to szukany wierzchołek kąta prostego będzie leżał na tym okręgu.

Oto etapy konstrukcji.

- Na prostej odmierzymy kolejno dwa dane odcinki ($|AD| = 2\text{ cm}$ i $|DB| = 4\text{ cm}$), ich suma jest przeciwprostokątną szukanego trójkąta.
- Znajdujemy środek S przeciwprostokątnej.
- Rysujemy półokrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = |SA|$.
- Z punktu D wystawiamy prostopadłą do AB . Jej punkt przecięcia z półokręgiem jest szukanym wierzchołkiem C trójkąta.
- Rysujemy boki AC i BC szukanego trójkąta.



Do wykonania konstrukcji drugą metodą nie musimy obliczać wysokości trójkąta.



Przykład 10 ◀ zad. 8.23

Dwie cięciwy okręgu przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich na odcinki o długościach podanych na rysunku. Obliczmy x .

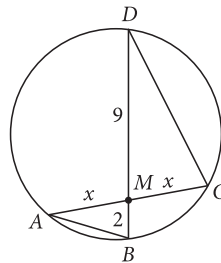
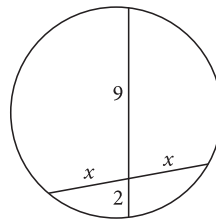
Rozwiązanie

Uzupełniamy rysunek takimi dwoma odcinkami, aby występujące w treści zadania części cięciw były bokami pewnych trójkątów.

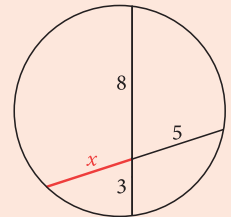
Wprowadzamy oznaczenia literowe wierzchołków tych trójkątów.

$$\begin{aligned}
 \sphericalangle AMB &= \sphericalangle CMD && \leftarrow \text{kąty wierzchołkowe} \\
 \sphericalangle BAC &= \sphericalangle BDC && \leftarrow \text{kąty wpisane oparte na łuku } BC \\
 \triangle ABM &\sim \triangle DCM && \leftarrow \text{cecha kk podobieństwa trójkątów} \\
 \frac{x}{2} &= \frac{9}{x} && \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ABM \text{ i } DCM \\
 x^2 &= 9 \cdot 2 \text{ (i } x > 0)
 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } x = 3\sqrt{2}$$



◀ 8.23.



Dane są okrąg i jego dwie cięciwy jak na rysunku. Oblicz x .

Odp.: $x = 4,8$. *Wskazówka:* Skorzystaj z równości odpowiednich kątów wpisanych.

Środek ciężkości trójkąta

Zanim wprowadzimy pojęcie środka ciężkości trójkąta, udowodnimy pomocnicze twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

Twierdzenie

Twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.

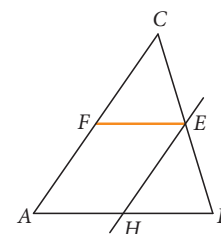
Teza

- Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku.
- Długość tego odcinka jest równa połowie długości trzeciego boku.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkty E i F są środkami boków BC i AC trójkąta, więc $\frac{|BE|}{|EC|} = 1 = \frac{|AF|}{|FC|}$. Zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $FE \parallel AB$, czyli pierwszy punkt tezy został udowodniony.



Teraz przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do boku AC – przecina ona bok AB w punkcie oznaczonym literą H . Skoro E jest środkiem BC , to na mocy twierdzenia Talesa punkt H jest środkiem AB , a ponadto czworokąt $AHEF$ jest równoległobokiem. Zatem:

$$|EF| = |AH| = \frac{1}{2}|AB|$$

Koniec dowodu

Przypomnijmy, że środkowa trójkąta jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Twierdzenie

Twierdzenie o środkowych w trójkącie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1 (licząc od wierzchołka).

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.

Teza

- Trzy środkowe trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.
- Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka.

Dowód

Poprowadźmy w trójkącie ABC dwie środkowe np. z wierzchołków A i B , oraz oznaczmy ich punkt przecięcia literą M . Pokażemy, że punkt M spełnia wymagania tezy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkty E i F są odpowiednio środkami odcinków BC i AC , zatem na mocy twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta mamy:

$$EF \parallel AB \text{ oraz } |EF| = \frac{1}{2}|AB|$$

Jeśli L i K oznaczają odpowiednio środki boków BM i AM w trójkącie ABM , to na mocy tego samego twierdzenia mamy:

$$LK \parallel AB \text{ oraz } |LK| = \frac{1}{2}|AB|$$

czyli

$$LK \parallel EF \text{ oraz } |LK| = |EF|$$

$$\sphericalangle MKL = \sphericalangle MEF \quad \leftarrow \text{ kąty naprzemianległe}$$

$$\sphericalangle KLM = \sphericalangle MFE \quad \leftarrow \text{ kąty naprzemianległe}$$

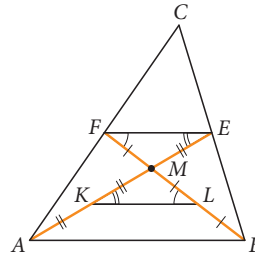
Zatem $\triangle MKL \equiv \triangle MEF$ na mocy cechy kbk przystawiania trójkątów.

Stąd $|FM| = |ML| = \frac{1}{2}|MB|$ oraz $|EM| = |MK| = \frac{1}{2}|MA|$.

Środkowe AE i BF podzieliły się zatem w żądanej proporcji $2 : 1$.

Identyczny dowód możemy przeprowadzić dla innej pary środkowych, np. AE i CD . Wniosek będzie taki sam – obydwie środkowe dzielą się w proporcji $2 : 1$. Oznacza to, że środkowa CD przetnie AE w wyznaczonym poprzednio punkcie M .

Zatem punkt M spełnia wszystkie warunki tezy, czyli jest środkiem ciężkości trójkąta ABC .

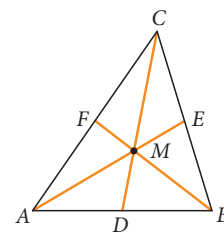
Koniec dowodu

Zgodnie z podanym twierdzeniem środek ciężkości M trójkąta ABC dzieli jego środkowe AE , BF i CD w taki sposób, że:

$$|AM| = 2 \cdot |ME|$$

$$|BM| = 2 \cdot |MF|$$

$$|CM| = 2 \cdot |MD|$$



Środek ciężkości trójkąta ma ciekawą interpretację fizyczną. Załóżmy, że figura w kształcie trójkąta jest wykonana z jednorodnego materiału. Jeśli położymy ją na ostrej podpórce ustawionej pod środkiem ciężkości, to płaszczyzna trójkąta pozostanie pozioma.



Z twierdzenia o środkowych wynikają istotne zależności miarowe w trójkącie równobocznym.

Twierdzenie

W trójkącie równobocznym o boku długości a :

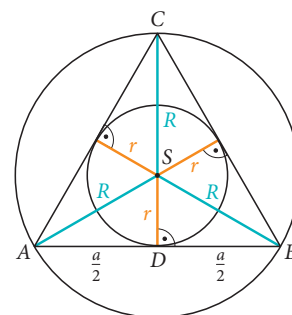
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Osie symetrii trójkąta równobocznego pokrywają się z symetralnymi boków tego trójkąta i zawierają jego środkowe, dwusieczne kątów oraz wysokości.

Zatem środek ciężkości S trójkąta równobocznego jest również środkiem okręgu wpisanego (punkt przecięcia dwusiecznych), środkiem okręgu opisanego (punkt przecięcia symetralnych) oraz ortocentrum (punkt przecięcia wysokości).



$$|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

← wysokość trójkąta równobocznego

$$r = |DS| = \frac{1}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

← twierdzenie o środkowych

$$R = |SC| = \frac{2}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

← twierdzenie o środkowych

Koniec dowodu

Przykład 11 ◀ zad. 8.33

W trójkącie ABC środkowa AE przecina pod kątem prostym środkową BF w punkcie M . Wiemy, że $|AE| = 9$ oraz $|BF| = 12$. Wyznamy długość trzeciej środkowej.

Rozwiązanie

Kąt AMB jest prosty, zatem AB jest średnicą półokręgu, do którego należy punkt M (zob. rysunek).

Na mocy twierdzenia o środkowych w trójkącie wiemy, że środkowa CD łącząca wierzchołek C ze środkiem D boku AB zawiera punkt M . Zatem odcinek DM ma długość równą promieniowi półokręgu.

$$|AM| = \frac{2}{3}|AE| = 6 \quad \leftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

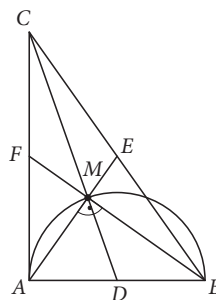
$$|BM| = \frac{2}{3}|BF| = 8 \quad \leftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

$$|AB| = \sqrt{|BM|^2 + |AM|^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

$$|DM| = \frac{1}{2}|AB| = 5 \quad \leftarrow \text{promień półokręgu}$$

$$|DC| = 3 \cdot |DM| = 15 \quad \leftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

Odp.: $|DC| = 15$



◀8.33. Środkowe trójkąta równoramiennego mają długości 120, 87, 87. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

Odp.: 84

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Wskaż długości boków trójkąta podobnego do trójkąta o bokach 14 cm, 10 cm i 12 cm.

A. 28 cm, 20 cm, 22 cm

C. 7 cm, 5 cm, 6 cm

B. 12 cm, 8 cm, 10 cm

D. 17 cm, 13 cm, 15 cm

8.2. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE tak, że punkt D leży na boku AC , a punkt E – na boku AB . Odcinek DE jest równoległy do BC . Wiadomo, że $|DC| = 14$, $|AC| = 22$ i $|BC| = 31$. Wskaż długość odcinka DE .

A. 19,8

B. 11,3

C. $19\frac{8}{11}$

D. $11\frac{3}{11}$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. C

8.2. D

8.3. A

8.4. F, P, F

8.5. a) nie b) tak

8.6. a) tak b) nie c) tak
d) tak8.7. a) $a_1 = 8$, $b_1 = 2$ b) $b = 5\frac{1}{2}$, $a_1 = 3\frac{1}{2}$

8.3. W dwóch trójkątach równoramiennych kąty między ramionami są równe. Podstawa i opuszczona na nią wysokość jednego trójkąta mają odpowiednio 4 dm i 7 dm, a podstawa drugiego trójkąta ma długość 8 dm. Ile wynosi pole drugiego trójkąta?

- A. 56 dm^2 B. 7 dm^2 C. 16 dm^2 D. 28 dm^2

8.4. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE równoległy do boku AB . Punkt D leży na boku AC , a punkt E – na boku BC . Wiadomo, że $|AB| = 9$, $|DE| = 3$, $|BE| = 4$.

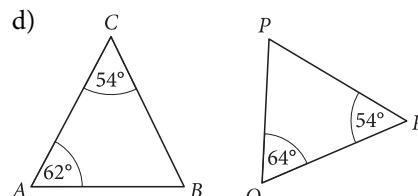
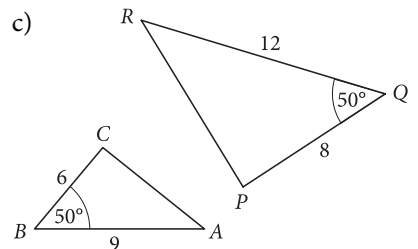
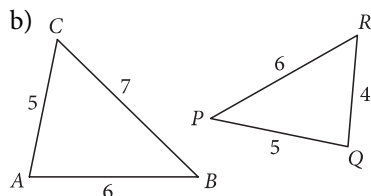
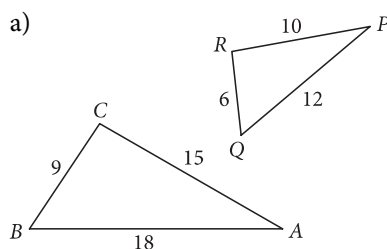
Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $|CE| = 7$
 B. $|CE| = 2$
 C. Jest za mało danych, aby wyznaczyć długość boku CE .

8.5. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach e, f, g .

- a) $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ b) $a = 15$, $b = 20$, $c = 7$
 $e = 3$, $f = 1,5$, $g = 2$ $e = 10$, $f = 3,5$, $g = 7,5$

8.6. Sprawdź, czy trójkąty ABC i PQR są podobne.



8.7. Trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach a_1, b_1, c_1 tak, że boki a, b, c są proporcjonalne odpowiednio do boków a_1, b_1, c_1 . Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

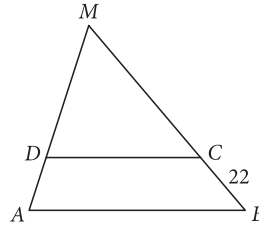
	a	b	c	a_1	b_1	c_1
a)	12	3	11	?	?	$7\frac{1}{3}$
b)	7	?	$2\frac{1}{2}$	?	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$

8.8. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AK , BL i CM . Punkt przecięcia wysokości oznaczono H . Znajdź trójkąty podobne do podanego trójkąta.

- a) AMC b) CLB c) CHK

8.9. Drzewo rzuca cień 6 razy dłuższy od cienia Wojtka mierzącego 172 cm wysokości. Jaka jest wysokość drzewa?

8.10. Boki trójkąta ABC są równe 8 cm, 10 cm i 11 cm. Najdłuższy bok trójkąta PQR , podobnego do trójkąta ABC , ma 33 cm. Wyznacz pozostałe boki trójkąta PQR .



8.11. Stosunek podstaw w trapezie $ABCD$ przedstawionym na rysunku jest równy $|AB| : |CD| = 7 : 5$. Ramię BC ma długość 22 cm. Oblicz długość odcinka CM .

8.12. Trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AC| = 8$ i $|BC| = 6$ jest podobny do trójkąta, którego jeden z boków ma długość równą 6. Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta.

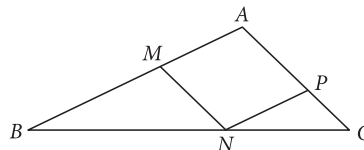
8.13. W trójkącie ABC poprowadzono równoległe do boku AB odcinek DE tak, że punkt D leży na boku AC , a punkt E – na boku BC . Wyznacz x .

- a) $|AC| = 10$, $|DC| = 4$, $|DE| = 5$, $|AB| = x$
b) $|AB| = 10$, $|DE| = 5$, $|DC| = 7$, $|AD| = x$

8.14. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma 36 cm. Dzieli ona przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku $4 : 9$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

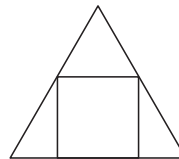
8.15. Podziel prostokąt dwoma odcinkami na trzy trójkąty podobne.

- D** * **8.16.** W trójkąt ABC wpisany jest romb $AMNP$ jak na rysunku. Wykaż, że $|AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}$.

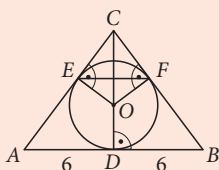


* **8.17.** W trójkąt równoboczny o boku 12 cm wpisano kwadrat jak na rysunku. Wyznacz długość boku kwadratu.

* **8.18.** Trójkąt T_1 jest podobny do trójkąta T_2 w skali k , a trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali $4k$. Ile wynosi k ?



* **8.19.** W równoramiennym trójkącie ABC podstawa AB jest równa 12 cm, a ramiona AC i BC mają po 10 cm. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z ramionami trójkąta.



O – środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, $|AC| = |BC| = 10$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych: $|BF| = |BD| = 6$, więc $|CF| = 4$;

zatem $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ (kkk) w skali $k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, stąd $|EF| = \frac{2}{5}|AB| = \frac{2}{5} \cdot 12 = \frac{24}{5} = 4,8$.

Odp.: Szukany odcinek ma długość 4,8 cm.

- 8.8.** a) $\triangle ALB$, $\triangle HLC$, $\triangle HMB$
b) $\triangle HKB$, $\triangle CKA$, $\triangle HLA$
c) $\triangle AHM$, $\triangle CBM$, $\triangle ABK$

8.9. 10,32 m

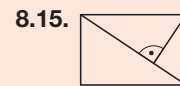
8.10. 24 cm, 30 cm

8.11. 55 cm

8.12. 8, 10 lub $4\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$
lub $3\frac{3}{5}$, $4\frac{4}{5}$

8.13. a) $x = 12,5$
b) $x = 7$

8.14. $18\sqrt{13}$ cm, $12\sqrt{13}$ cm, 78 cm



8.16. Założenie:
 $|AM| = |MN| = |NP| = |AP|$
Teza: $|AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}$

Dowód:

Z twierdzenia Talesa: $(MN \parallel AC)$:

$$\frac{|BM|}{|AM|} = \frac{|BN|}{|NC|} \text{ oraz } (PN \parallel AB):$$

$$\frac{|NC|}{|BN|} = \frac{|CP|}{|AP|}, \text{ zatem } \frac{|BM|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|CP|}.$$

Ponadto $|AP| = |AM|$,

$$\text{więc } \frac{|BM|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|CP|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |AM|^2 = |MB| \cdot |CP| \Leftrightarrow$$

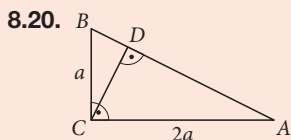
$$\Leftrightarrow |AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}.$$

8.17. $(24\sqrt{3} - 36)$ cm.

Wskazówka: Wysokość trójkąta jest równa $6\sqrt{3}$ cm. Niech x oznacza bok kwadratu.

Z podobieństwa odpowiednich trójkątów wynika np. proporcja

$$\frac{x}{6\sqrt{3}} = \frac{6 - 0,5x}{6}.$$



Dane: $BC \perp AC$, $|AC| = 2|BC|$
(oznaczamy $|BC| = a$, $|AC| = 2a$)
Zatem $\triangle BCD \sim \triangle ACD$ (kk)

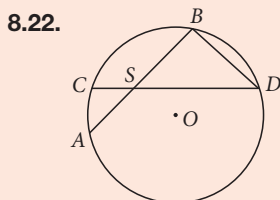
w skali $k = \frac{1}{2}$,

$$\text{stad } \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AD| = 2|CD| \text{ i } |BD| = \frac{1}{2}|CD|,$$

$$\text{więc } \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}|CD|}{2|CD|} = \frac{1}{4} = 1:4.$$

8.21. $2\sqrt{2}$ cm



$x > 0$, oznaczamy $|AS| = x$,

$|BS| = 3x$

Dane: $|AS| = 6$ cm, $|BS| = 8$ cm,

$|CS| : |SD| = 1 : 3$

Rozwiązanie: $\triangle ACS \sim \triangle DBS$ (kkk)

$$\frac{|CS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{8}{3x}$$

$$3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

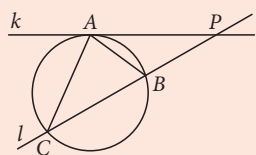
$$x = 4 \text{ (bo } x > 0\text{)}.$$

Odp.: Odcinki drugiej cięciwy mają długości 4 cm i 12 cm.

8.23. $\frac{8}{5} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = 4,8$

Odp.: $x = 4,8$

8.24.



$\triangle ABP \sim \triangle CAP$ (cecha kk),
ponieważ $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPA$ (ten sam kąt) i $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ACP$

(twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą).

Zatem $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|}$, więc

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|.$$

8.25. $x = 3,8$. Wskazówka: Połącz końce cięciwy o długości x z końcami cięciwy o długości 7 tak, aby powstały dwa trójkąty. Wykaż ich podobieństwo i wykorzystaj

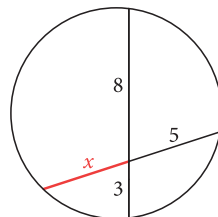
$$\text{równość } \frac{x+5}{11} = \frac{4}{5}.$$

D * **8.20.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wykaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w tym trójkącie dzieli przeciwprostokątną w stosunku 1 : 4.

8.21. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych $|AB| = 12$ cm i $|BC| = 4$ cm. Prosta prostopadła do boku AB rozcina trójkąt ABC na dwie figury o równych polach. Oblicz długość wspólnego boku tych figur.

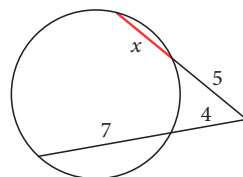
* **8.22.** Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 cm i 6 cm, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 1 : 3. Oblicz długości odcinków drugiej cięciwy.

* **8.23.** Dane są okrąg i jego dwie cięciwy jak na rysunku. Oblicz x .

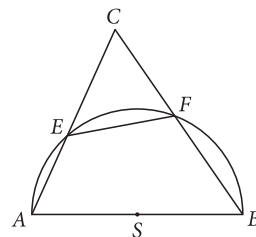


D * **8.24.** Z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzono prostą k styczną do tego okręgu w punkcie A i prostą l przecinającą okrąg w punktach B i C . Wykaż, że $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$.

* **8.25.** Dane są okrąg i dwa odcinki o wspólnym końcu jak na rysunku. Oblicz x .



D * **8.26.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku S , jak na rysunku. Punkty E i F są punktami przecięcia okręgu odpowiednio z odcinkami AC i BC . Wykaż, że trójkąt FEC jest podobny do trójkąta ABC .



D * **8.27.** Wykaż, że jeżeli dwa trójkąty wpisane w ten sam okrąg są podobne, to są przystające.

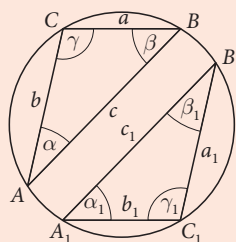
* **8.28.** Na okręgu o promieniu $15\sqrt{5}$ opisano kwadrat $ABCD$. Środek E boku DC połączono z wierzchołkiem A odcinkiem, który przecina okrąg w punkcie M . Oblicz długość odcinka EM .

D * **8.29.** Przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ poprowadzono prostą, która przecięła przekątną BD w punkcie K , prostą DC w punkcie M oraz prostą BC w punkcie P . Udowodnij, że $|AK|^2 = |KP| \cdot |KM|$.

8.30. Na płaszczyźnie dane są trzy niewspółliniowe punkty. Skonstruuj trójkąt, w którym te trzy punkty są środkami boków.

8.26. Wskazówka: $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AFE$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku, $\sphericalangle EFC = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle ABE = 90^\circ - \sphericalangle ABE = \sphericalangle EAB$.

8.27.



Jeżeli kąty wpisane w dany okrąg są równe, to cięciwy, na których są oparte te kąty, także są równe. Zatem jeśli dwa trójkąty wpisane w ten sam okrąg są podobne, to mają one równe odpowiednie kąty, a ponieważ mają też równe odpowiednie boki, więc na mocy cechy bbb są przystające.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \beta_1 = \beta \\ \gamma_1 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = b \\ c_1 = c \end{cases} \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$$

8.31. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest prosty. Środkowa BD o długości 6 cm dzieli ten kąt tak, że $\angle DBA : \angle CBD = 2 : 1$. Oblicz miary kątów, długości boków i pole tego trójkąta.

8.32. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16, a każde z ramion ma długość 17. Oblicz długości środkowych tego trójkąta.

8.33. Środkowe trójkąta równoramiennego mają długości 120, 87, 87. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

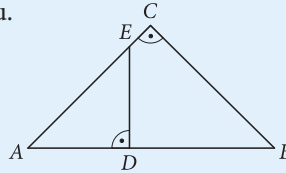
D * **8.34.** W trójkącie ABC środkowa CD jest równa połowie boku AB . Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Prosto do matury



1. W trójkącie ABC dane są punkty D i E jak na rysunku. Oceń prawdziwość podanych zależności.

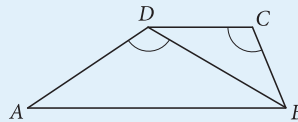
A. $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$ B. $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ C. $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$



D **2.** W trójkącie ABC kąt ACB jest prosty. Na przyprostokątnych AC i BC tego trójkąta obrano odpowiednio punkty Q i P . Na boku AB wyznaczono punkty R i S takie, że odcinki QR i PS są prostopadłe do przeciwprostokątnej. Udowodnij, że trójkąty ARQ i PSB są podobne.

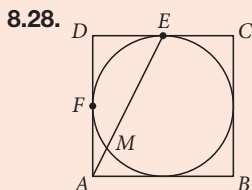
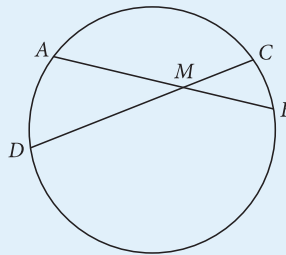
3. W trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i wysokości 8 cm wpisano okrąg i poprowadzono styczną do niego równoległą do podstawy trójkąta. Oblicz promień okręgu i długość odcinka stycznej zawartego w trójkącie.

4. W trapezie $ABCD$ długość podstawy CD jest równa 18, a długości ramion AD i BC są odpowiednio równe 25 i 15. Kąty ADB i DCB , zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.



D **5.** Cięciwy AB i CD w okręgu przecinają się w punkcie M jak na rysunku. Wykaż, że:

$$|MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$$



$$\begin{aligned} |DE| &= r = 15\sqrt{5}, \quad |AD| = 2r \\ |AE| &= \sqrt{|AD|^2 + |DE|^2} = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = \\ &= r \cdot \sqrt{5} = 15\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 75 \end{aligned}$$

Z zadania 8.24 wynika, że $|AF|^2 = |AM| \cdot |AE|$, czyli:

$$(15\sqrt{5})^2 = (75 - |EM|) \cdot 75 : 75$$

$$75 - |EM| = 15, \quad |EM| = 60$$

Odp.: $|EM| = 60$

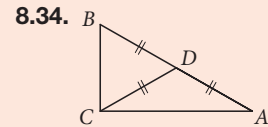
8.29. Wskazówka: Skorzystaj z podobieństwa trójkątów ABK i MDK oraz BPK i DAK .

8.30. Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

8.31. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$,
 $\angle C = 30^\circ$; $|AB| = 6$ cm,
 $|BC| = 6\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 12$ cm;
 $P = 18\sqrt{3}$ cm²

8.32. $15, \frac{3}{2}\sqrt{89}, \frac{3}{2}\sqrt{89}$

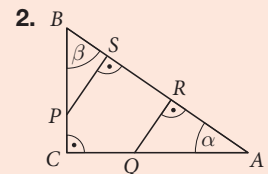
8.33. 84



Założenie: $|DA| = |DB| = |DC|$
 Teza: $\triangle ABC$ jest prostokątny.
 Dowód: Z założenia wynika, że D jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$, zatem AB jest przeciwprostokątną trójkąta, więc $\angle ACB = 90^\circ$.

Prosto do matury

1. P, P, F



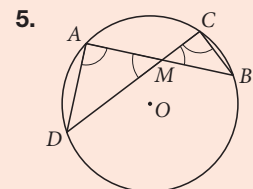
Założenie: $PS \perp AB$; $QR \perp AB$;
 $P \in BC$; $Q \in AC$; $R, S \in AB$
 Teza: $\triangle ARQ \sim \triangle PSB$

Dowód:

$\triangle ARQ \sim \triangle ABC$
 oraz $\triangle PSB \sim \triangle ABC$, bo są to trójkąty prostokątne o wspólnym kącie ostrym (α dla $\triangle ARQ$ i $\triangle ABC$, β dla $\triangle PSB$ i $\triangle ABC$).
 Zatem $\triangle ARQ \sim \triangle ABC \sim \triangle PSB$,
 stąd $\triangle ARQ \sim \triangle PSB$.

3. promień: 3 cm, odcinek stycznej: 3 cm

4. 108



Założenie: na rysunku

Teza: $|MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$

Dowód:

$\triangle ADM \sim \triangle B$ cm

$$\text{Zatem } \frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MB|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$$

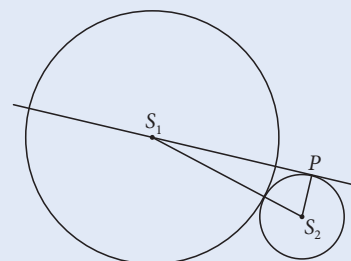
9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–22 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

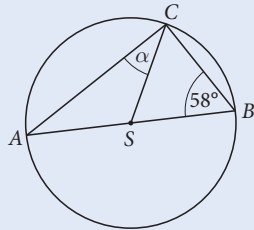
1. C
 2. D
 3. C
 4. B
 5. B
 6. D
 7. C
1. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, miara kąta CAB wynosi 70° . Odcinek BD zawiera się w dwusiecznej kąta ABC . Odcinek BE jest wysokością opuszczoną z wierzchołka B . Wskaż miarę kąta EBD .
A. 20° B. 18° C. 15° D. $10,1^\circ$
 2. Z odcinków o długościach: 1 , $m + 4$, $2m + 1$ można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że
A. $m = -3$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.
 3. Pięciokąt $ABCDE$ jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ACE .
A. $\triangle ECD$ B. $\triangle BCD$ C. $\triangle BCE$ D. $\triangle ABC$
 4. Okręgi o środkach S_1 i S_2 oraz promieniach odpowiednio 3 i 1 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do mniejszego okręgu w punkcie P przechodzi przez środek S_1 większego okręgu (zob. rysunek). Wskaż obwód trójkąta S_1S_2P .
A. $8,8$ C. $5\sqrt{15}$
B. $5 + \sqrt{15}$ D. $15 + \sqrt{5}$
 5. Ile wynosi promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 10 cm i 24 cm?
A. 17 cm B. 13 cm C. 12 cm D. 5 cm
 6. Kąt wpisany w okrąg jest o 70° mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Jaka jest miara kąta środkowego?
A. 35° B. 70° C. 110° D. 140°
 7. Jaką miarę ma kąt wypukły utworzony przez wskazówki zegara o godzinie 10^{20} ?
A. 150° B. 165° C. 170° D. 180°



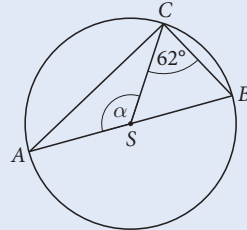
Uwagi metodyczne

Zadania z geometrii są na ogół dla uczniów dość trudne. Często właśnie podczas omawiania tych zagadnień po raz pierwszy stykają się oni z prawdziwymi zadaniami na dowodzenie. Rozwiązanie zadania wymaga dostrzeżenia czegoś na rysunku lub nawet dorysowania na nim jakiegoś elementu. Niekiedy skutecznym sposobem osiągnięcia celu jest szukanie rozwiązania metodą prób i błędów, ale jeszcze częściej pomocny jest **starannie** wykonany kolorowy rysunek (taki, na którym wszystko widać). Dotyczy to raczej trudniejszych zadań, w których zależności geometryczne nie są oczywiste, ale z pewnością może również pomóc słabszym uczniom w pokonywaniu trudności nawet przy pozornie łatwych zadaniach. Podręcznik obfituje w zadania elementarne, ale jest też w nim dużo zadań z gwiazdką. Radzimy dozować je ostrożnie, żeby nie wywołać w uczniach poczucia, że „geometrię w szkole średniej trzeba po prostu przeczekać”.

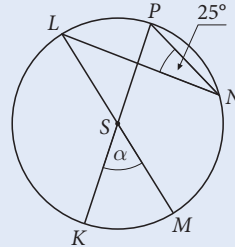
8. Na rysunku 1 punkt S jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt α ?
 A. 29° B. 30° C. 31° D. 32°



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

9. Na rysunku 2 punkt S jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt α ?
 A. 114° B. 118° C. 122° D. 124°
10. Na rysunku 3 punkt S jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt α ?
 A. 25° B. 30° C. 40° D. 50°

8. D

9. D

10. D

11. Punkt A leżący na okręgu o środku S jest końcem cięciwy AB oraz punktem styczności okręgu z prostą l . Jeden z dwóch kątów między cięciwą AB a prostą l ma miarę 36° . Jaka jest miara wypukłego kąta środkowego ASB ?
 A. 18° B. 36° C. 45° D. 72°

11. D

12. Cięciwy AB i CD okręgu o środku S przecinają się w punkcie P . Który z wymienionych warunków jest prawdziwy?

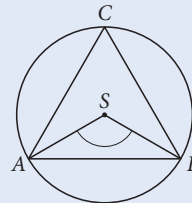
12. D

- A. $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BPD$ C. $2 \sphericalangle ABD = \sphericalangle APD$
 B. $\sphericalangle ASD = 2 \sphericalangle APD$ D. $\sphericalangle DCB = \sphericalangle PAD$

13. Okręgi $o_1(A, r_1)$ i $o_2(B, r_2)$ są styczne zewnętrznie w punkcie C . Przez punkt C poprowadzono prostą przecinającą okrąg o_1 w punkcie K , a okrąg o_2 w punkcie L . Kąt AKC ma miarę 46° . Jaka miarę ma kąt LBC ?
 A. 44° B. 46° C. 88° D. 134°

13. C

14. W okrąg o środku S wpisano trójkąt równoboczny ABC . Wskaż miarę zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB .
 A. 160° B. 140° C. 120° D. 30°



14. C

15. Punkty A, B, C należą do okręgu o środku w punkcie S . Kąt ABC ma miarę 112° . Jaka jest miara kąta ASC w czworokącie $ABCS$?
 A. 68° B. 112° C. 136° D. 224°

15. C

16. B

16. Dane są trzy koła parami styczne zewnętrznie. Pola tych kół są równe 4π , 9π i 16π . Ile wynosi obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych kół?

- A. 15 B. 18 C. 20 D. 25

17. B

17. Które z podanych zdań jest prawdziwe?

- I. Każde dwa prostokąty są podobne.
 II. Każde dwa okręgi są podobne.
 III. Dwa trójkąty o równym polu są podobne.

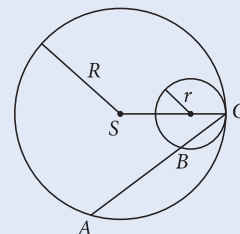
- A. tylko I B. tylko II C. tylko III D. żadne

18. B

18. Okrąg o promieniu $r = 5$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu $R = 15$ jak na rysunku obok.

Wiadomo, że $|BC| = 8$. Jaką długość ma cięciwa AC ?

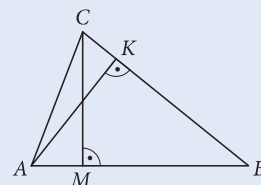
- A. 16 C. 20
 B. 24 D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.



19. B

19. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AK i CM jak na rysunku. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|MB|}{|KB|}$ C. $\frac{|AB|}{|AK|} = \frac{|BC|}{|CM|}$
 B. $\frac{|BK|}{|MB|} = \frac{|AB|}{|CM|}$ D. $|MB| \cdot |AK| = |BK| \cdot |CM|$



20. C

20. Dwie proste równoległe przecinają ramiona kąta o wierzchołku w punkcie O . Na jednym ramieniu tego kąta powstały odcinki OA i AB równej długości, a na drugim odcinki OC i CD (punkt C leży między punktami O i D). Odcinek BD ma długość $12\frac{1}{3}$. Wskaż długość odcinka AC .

- A. $12\frac{1}{3}$ C. $6\frac{1}{6}$
 B. $6\frac{2}{3}$ D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.

21. B

21. Trójkąt o bokach długości $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$ jest podobny do trójkąta, którego boki mają długości

- A. 27, 48, 75. B. 9, 12, 15. C. $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$.

22. B

22. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne i mają pola odpowiednio równe 36 cm^2 i 80 cm^2 . Wskaż skalę podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC .

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ C. $2\frac{2}{9}$ D. $\frac{9}{20}$

W zadaniach 23–32 oceń prawdziwość podanych zdań.

- 23.** Na pewnym czworokącie można opisać okrąg. Zatem
 A. suma przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180° .
 B. sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.
 C. przekątne tego czworokąta są równe. **23. P, F, F**
- 24.** W czworokącie wypukłym poprowadzono dwusieczne czterech kątów wewnętrznych. Wynika stąd, że
 A. dwusieczne te przecinają się w jednym punkcie.
 B. dwusieczne dokładnie trzech kątów mogą przeciąć się w jednym punkcie.
 C. dwusieczne te mogą nie przecinać się w jednym punkcie. **24. F, F, P**
- 25.** Dane są dwa przystające trójkąty prostokątne. W pierwszym z nich poprowadzono symetralną krótszej przyprostokątnej, a w drugim dłuższej. Symetralne podzieliły każdą z figur na trójkąt i czworokąt. Wynika stąd, że
 A. pola otrzymanych czworokątów są równe.
 B. obwody otrzymanych czworokątów są równe.
 C. oba czworokąty są przystające. **25. P, F, F**
- 26.** W pewnym czworokącie środek okręgu wpisanego pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych. Zatem
 A. czworokąt ten musi być rombem.
 B. czworokąt ten musi być prostokątem.
 C. czworokąt ten musi mieć środek symetrii. **26. P, F, P**
- 27.** W trójkącie ABC wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C są równe. Wynika stąd, że
 A. środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na wysokości poprowadzonej z wierzchołka B .
 B. wszystkie wysokości trójkąta ABC są równe.
 C. trójkąt ABC jest ostrokątny. **27. P, F, F**
- 28.** Boki czworokąta wypukłego mają kolejno długości 1, 2, 4, 3. Zatem
 A. na tym czworokącie można opisać okrąg.
 B. w ten czworokąt można wpisać okrąg.
 C. jeden z kątów tego czworokąta jest prosty. **28. F, P, F**
- 29.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ literą M oznaczono punkt przecięcia przekątnych. Wiadomo, że $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$. Zatem
 A. czworokąt $ABCD$ ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
 B. na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
 C. pola trójkątów MAB i MCD są równe. **29. P, F, P**

30. F, P, P

31. P, F, F

32. P, P, F

33. 40° , 140°

34. a) rozłączne zewnętrznie
 b) wewnętrznie styczne
 c) rozłączne wewnętrznie
 d) przecinające się

35. $\alpha = \beta = 75^\circ$, $\gamma = 150^\circ$ 36. $o(A, 6)$ 37. $o(A, 4)$ 38. $o(A, 7)$ 39. 152°

30. Obwód pierwszego prostokąta jest równy 100 cm, a obwód drugiego prostokąta jest o 100 cm większy niż pierwszego. Wynika stąd, że

- A. pole drugiego prostokąta jest zawsze większe od pola pierwszego prostokąta.
 B. pola obu prostokątów mogą być takie same.
 C. pole drugiego prostokąta może być mniejsze od pola pierwszego prostokąta.

31. Czworokąt przekształcono przez podobieństwo, w wyniku czego jego pole wzrosło o 44%. Zatem

- A. obwód tego czworokąta wzrósł o 20%.
 B. obwód tego czworokąta wzrósł o 22%.
 C. skala tego podobieństwa była równa $\sqrt{0,44}$.

32. Dwie cięciwy AB i CD jednego okręgu przecinają się w punkcie P .

- A. Trójkąt ACP jest podobny do trójkąta DBP .
 B. Trójkąt ADP jest podobny do trójkąta CBP .
 C. Trójkąt ACP jest podobny do trójkąta ADP .

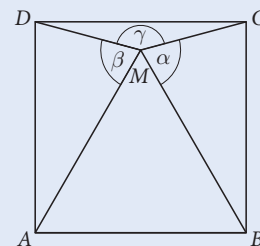
Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

33. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 40° . Wyznacz miary kątów utworzonych przez dwie różne wysokości tego równoległoboku poprowadzone z jednego wierzchołka.

34. Określ wzajemne położenie okręgów $o_1(A, r_1)$ i $o_2(B, r_2)$.

- a) $|AB| = 12$ $r_1 = 8$ $r_2 = 3$ c) $|AB| = 1$ $r_1 = 3$ $r_2 = 5$
 b) $|AB| = 8$ $r_1 = 10$ $r_2 = 2$ d) $|AB| = 6$ $r_1 = 5$ $r_2 = 4$

35. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, a trójkąt ABM trójkątem równobocznym (zob. rysunek). Wyznacz miary kątów α , β , γ .



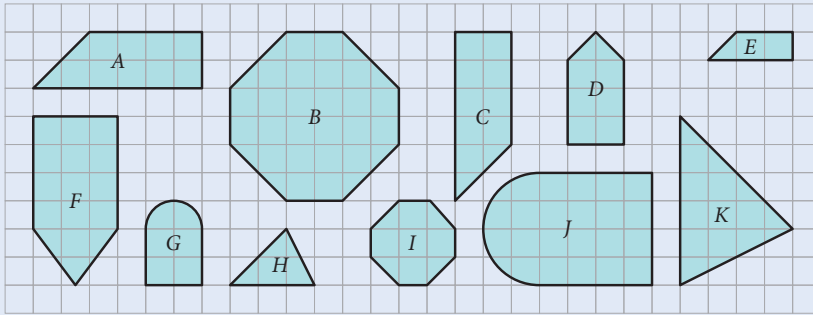
36. Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów o promieniu $r = 4$ stycznych zewnętrznie do okręgu $o(A, 2)$?

37. Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów o promieniu $r = 3$ stycznych wewnętrznie do okręgu $o(A, 7)$?

38. Dane są dwa okręgi $o_1(A, 9)$ i $o_2(A, 5)$. Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów stycznych równocześnie do obydwu tych okręgów?

39. Na trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |CB|$, a kąt między ramieniem i podstawą ma 52° , opisano okrąg o środku S . Wyznacz miarę wypukłego kąta środkowego ASB .

40. Które z narysowanych figur są podobne?



41. Prostokąt o wymiarach $18 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ jest podobny do prostokąta, którego jeden z boków ma długość 6 cm . Oblicz skalę podobieństwa i obwód drugiego prostokąta.

42. Obwody dwóch wielokątów podobnych są równe 80 cm i 60 cm . Długości najkrótszych boków tych wielokątów różnią się o 5 cm . Oblicz te długości.

43. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c jest podobny do trójkąta o bokach e, f, g .

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= 2\sqrt{2}, b = 3 + \sqrt{2}, c = 6 - \sqrt{2} & \text{b) } a &= 8\frac{2}{3}, b = 9,1, c = 17\frac{1}{3} \\ e &= 2, f = 1,5\sqrt{2} + 1, g = 3\sqrt{2} - 1 & e &= 1\frac{1}{3}, f = 2,4, g = 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

44. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, punkt K jest środkiem boku AD . Oblicz stosunek pola trójkąta CKB do pola trapezu $ABCD$.

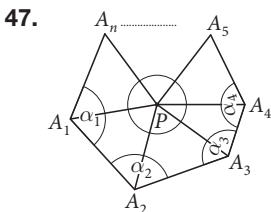
45. Wielokąt o polu 60 cm^2 przekształcono przez podobieństwo tak, że pole jego obrazu jest o 75 cm^2 większe od pola początkowego wielokąta. Oblicz skalę tego podobieństwa.

46. Boki trójkąta mają długości $12, 14$ i 18 . Wyznacz stosunek odpowiednich wysokości opuszczonych na te boki.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

D 47. Udowodnij, że suma miar kątów n -kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

D 48. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę o długości 18 cm jest równa 12 cm . Wykaż, że średnica tego okręgu wynosi 30 cm .



Założenie: wielokąt $A_1A_2A_3 \dots A_n$ jest wypukły.

Teza: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$

Dowód:

I sposób

Dzielimy n -kąt wypukły na $(n - 2)$ trójkątów rozłącznych, prowadząc wszystkie przekątne z wierzchołka A_1 (lub jakiegokolwiek innego), czyli prowadząc przekątne $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, \dots, A_1A_{n-1}$. Wówczas suma miar kątów tych $(n - 2)$ trójkątów jest równa sumie $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$, czyli $(n - 2) \cdot 180^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$.

II sposób

Niech P będzie punktem wewnętrznym wielokąta. Punkty $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (wierzchołki n -kąta wypukłego) łączymy z punktem P , dzieląc wielokąt $A_1A_2A_3 \dots A_n$ na n trójkątów: $A_1A_2P, A_2A_3P, A_3A_4P, \dots, A_nA_1P$.

Suma miar kątów wewnętrznych tych trójkątów jest równa sumie miar kątów n -kąta $A_1A_2A_3 \dots A_n$ zwiększonej o kąt pełny wierzchołka P . Zatem $n \cdot 180^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + 360^\circ$, stąd $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

40. $AiC, AiE, CiE, BiI, GiJ, HiK$

$$41. k = \frac{1}{3}, \text{ obw} = 22 \text{ cm}$$

$$\text{lub } k = \frac{2}{5}, \text{ obw} = 26,4 \text{ cm}$$

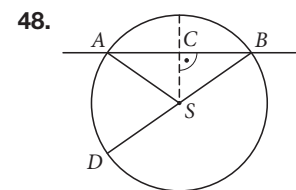
42. 20 cm i 15 cm

43. a) tak b) nie

$$44. \frac{1}{2}$$

$$45. k = \frac{3}{2}$$

46. $21 : 18 : 14$



Założenie: $|AB| = 8 \text{ cm}$,

$|CS| = 12 \text{ cm}$

Teza: $|BD| = 30 \text{ cm}$

Dowód:

$\triangle ABS$ jest równoramienny ($|AS| = |BS|$).

Zatem CS jest wysokością tego trójkąta dzielącą bok AB na dwa równe odcinki ($|AC| = |BC| = 9 \text{ cm}$),

stąd (w $\triangle BCS$): $|BS|^2 =$

$$= 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 = 15^2,$$

więc $|BS| = 15 \text{ cm}$

– promień okręgu.

Zatem $|BD| = 2 \cdot |BS| = 30 \text{ cm}$.

49. $15(2\sqrt{2} + 3)$ cm

50. 20° , 60° , 100°

51. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 55^\circ$, $\sphericalangle C = 70^\circ$
lub $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 35^\circ$, $\sphericalangle C = 110^\circ$

52. $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 25$;
pozostałe wysokości: 24

53. $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 110^\circ$,
 $\sphericalangle C = 70^\circ$, $\sphericalangle D = 120^\circ$

54. $16\sqrt{3} + \frac{32}{3}\pi$

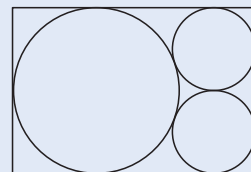
55. 26 cm lub 52 cm lub 39 cm

56. 144π cm²

57. 432 cm²

58. a) 12π cm b) 6 cm

49. Maszyna wycina kółka z prostokątnych kawałków blachy według wzoru pokazanego na rysunku. Krótszy bok kawałka blachy potrzebnego do wycięcia takich kórek ma długość 60 cm. Oblicz długość dłuższego boku tego prostokąta.



50. Trójkąt ABC o kątach 40° , 60° , 80° wpisano w okrąg, a następnie poprowadzono styczne do tego okręgu odpowiednio w punktach A , B , C . Wyznacz kąty trójkąta utworzonego przez te styczne.

51. Trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$, wpisany jest w okrąg o środku S . Wiadomo, że $\sphericalangle BAS = 20^\circ$. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .

52. Na okręgu o promieniu 7,5 opisany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C jest równa 20. Oblicz długości boków i pozostałe wysokości tego trójkąta.

53. Dwusieczna kąta A w trójkącie ABC przecina opisany na nim okrąg w punkcie D . Wiadomo, że $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Oblicz miary kątów czworokąta $ABDC$.

54. W kole o środku S i średnicy 16 poprowadzono cięciwę CD równoległą do średnicy AB . Kąt CSD ma miarę 120° . Oblicz pole części koła między cięciwą CD i średnicą AB .

55. Długości boków trójkąta ABC wynoszą 6 cm, 8 cm i 12 cm. Wyznacz obwód trójkąta podobnego do trójkąta ABC , w którym jeden z boków ma długość 12 cm.

56. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o polu 324 cm² ma długość 36 cm. Oblicz pole koła stycznego do przyprostokątnych, którego środek leży na przeciwprostokątnej.

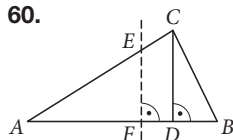
57. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę ma 24 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 9 cm. Oblicz pole trójkąta.

58. W trójkąt równoramienny o ramieniu długości 20 cm i wysokości opuszczonej na podstawę równej 16 cm wpisano okrąg. Następnie poprowadzono styczną do okręgu równoległą do podstawy trójkąta. Oblicz

a) długość wpisanego okręgu.

b) długość odcinka stycznej zawartego w trójkącie.

60.



Dane: $|AD| = 36$ cm, $|DB| = 14$ cm, $EF \perp AB$, $CD \perp AB$,

$P_{\triangle AEF} = P_{BCEF}$

Szukane: $|AF|$, $|FB|$

Oznaczamy: $h = |CD|$, $h > 0$;

$|AB| = 50$ cm

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = 25h$.

Zatem pole trójkąta $AEF = \frac{1}{2} \cdot 25h = 12,5h$ oraz pole trójkąta $AEF = \frac{1}{2}|AF| \cdot |EF|$,

więc $|AF| \cdot |EF| = 25h$. Z twierdzenia Talesa (z podobieństwa trójkątów AEF i ACD):

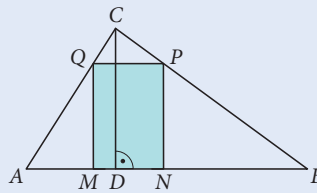
$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|EF|}{|CD|} \Leftrightarrow \frac{|AF|}{36} = \frac{|EF|}{h} \Leftrightarrow |EF| = \frac{|AF| \cdot h}{36} \quad (*)$$

Podstawiając $|EF|$ z (*) do równości $|AF| \cdot |EF| = 25h$, otrzymujemy:

$$|AF| \cdot \frac{|AF| \cdot h}{36} = 25h, \text{ więc } |AF|^2 = 36 \cdot 25, \text{ stąd } |AF| = 6 \cdot 5 = 30, |FB| = |AB| - |AF| = 20.$$

Odp.: 30 cm i 20 cm

59. W trójkącie ABC poprowadzono wysokość CD jak na rysunku. Wiadomo, że $|AB| = 12$, $|CD| = 6$, $|MN| = 3$. Oblicz pole prostokąta $MNPQ$.



* 60. Wysokość CD dzieli bok AB trójkąta ABC na dwa odcinki o długościach 36 cm i 14 cm. Prostopadle do boku AB poprowadzono prostą, która dzieli trójkąt na dwie części o równych polach. Jakie są długości odcinków, na które ta prosta dzieli bok AB trójkąta?

D 61. Udowodnij, że jeżeli czworokąt wypukły ma oś symetrii, to można na nim opisać okrąg lub można wpisać w niego okrąg.

D 62. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt. Wykaż, że kąty, pod którymi widać boki tego trójkąta z punktu S , są rozwarte.

D * 63. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC . Poprowadzono wysokość CD tego trójkąta. Wykaż, że kąt ACD jest równy kątowi SCB .

D 64. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S . Wykaż, że pola trójkątów ASD i BSC są równe.

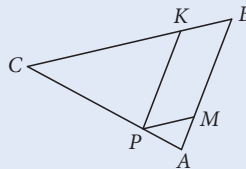
65. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S . Punkt S dzieli odcinek AC tak, że $|CS| : |SA| = 2 : 3$, a pole trójkąta BCS jest równe 12. Oblicz pole trapezu.

66. W trapezie równoramiennym o polu 135 jedna podstawa jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz pola trójkątów, na jakie dzieli trapez jego przekątne.

67. Pola trzech wielokątów podobnych są równe 80 cm^2 , 180 cm^2 i 245 cm^2 , a suma obwodów tych figur jest równa 1,7 m. Oblicz obwód najmniejszego wielokąta.

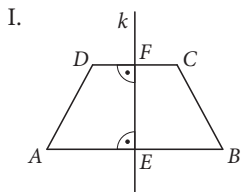
68. Piotr chce narysować na kartce formatu A4 ($21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$) możliwie duży plan swojego pokoju, który ma wymiary $2,8 \text{ m} \times 3,6 \text{ m}$. Jaką skalę powinien przyjąć?

69. Proste PK i MP są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC jak na rysunku. Wiadomo, że $|AM| = 4$, $|AP| = 5$, $|PC| = 15$, $|BK| = 6$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

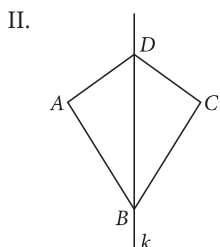


D 70. Przekątne trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przecinają się w punkcie P . Prosta równoległa do podstaw i przechodząca przez punkt P przecina ramiona trapezu w punktach M i N . Udowodnij, że punkt P jest środkiem odcinka MN .

61. Należy rozpatrzyć dwa przypadki.



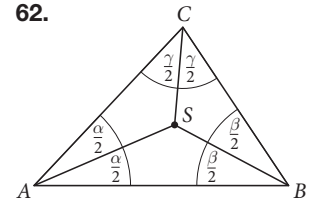
Żaden wierzchołek czworokąta nie leży na osi symetrii.
 $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CDA$,
 więc $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$.
 Zatem na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg
 ($ABCD$ to trapez równoramienny).



Dwa wierzchołki czworokąta leżą na osi symetrii.
 $|AB| = |CB|$ i $|AD| = |CD|$,
 więc $|AB| + |CD| = |CB| + |AD|$.
 Zatem jeżeli czworokąt jest wypukły, to można w niego
 wpisać okrąg ($ABCD$ to deltoid).

59. $13\frac{1}{2}$

62.

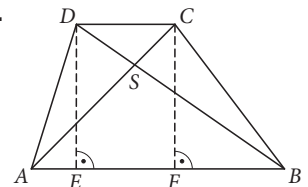


Punkt S jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów wewnętrznych.

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} > 90^\circ \\ \sphericalangle BSC &= 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} > 90^\circ \\ \sphericalangle CSA &= 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2} > 90^\circ\end{aligned}$$

63. Wskazówka: Przedłuż promień CS do średnicy CM i rozważ kąty trójkąta MBC .

65.



Założenie: $AB \parallel CD$ i na rysunku

Teza: $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle BSC}$

Dowód:

$$\begin{aligned}P_{\triangle ABD} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE| = \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot |CF| = P_{\triangle ABC}\end{aligned}$$

Zatem $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle BSC}$.

66. 60, 30, 15, 30

67. 40 cm

68. $1 : 13\frac{1}{3}$

69. 60

70. Wskazówka: Niech punkt M należy do boku AD , a punkt N do BC . Z podobieństwa trójkątów CDP i ABP wynika równość:

$$\frac{|PD|}{|BP|} = \frac{|PC|}{|AP|}.$$

Skorzystaj

z podobieństwa trójkątów AMP i ADC oraz trójkątów BNP i BCD , aby zbadać proporcje

$$\frac{|DC|}{|MP|} \text{ oraz } \frac{|DC|}{|PN|}.$$

71. Wskazówka: Poprowadź prostą, która jest równoległa do podstaw trapezu i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Skorzystaj z zadania 70.

73. Wskazówka: Poprowadź odcinek MF (punkt F leży na boku AC) równoległe do boku BC i rozważ trójkąt AMF .

74. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 70^\circ$, $\sphericalangle C = 40^\circ$
lub $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20^\circ$, $\sphericalangle C = 140^\circ$

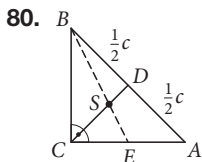
75. 20,5

76. $(3 + 3\sqrt{3})$ cm

77. $5\sqrt{3}$

78. 8. **Wskazówka:** Zauważ, że kąt między dwoma promieniami okręgu opisanego poprowadzonymi do końców jednego z ramion trójkąta jest równy 30° .

79. 4,5 cm



Założenie: $|AC| = |BC|$, $AC \perp BC$,
 $|AB| = c$, D – środek okręgu
opisanego na trójkącie ABC ,
 S – środek ciężkości

Teza: $|DS| = \frac{1}{6}c$

Dowód:

CD , BE – środkowe trójkąta ABC ,
więc $|CS| : |SD| = |BS| : |SE| = 2 : 1$.
Zatem

$$|SD| = \frac{1}{3}|CD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot c = \frac{1}{6} \cdot c,$$

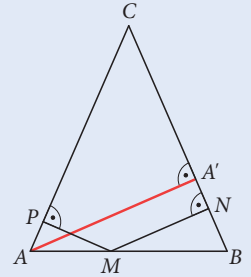
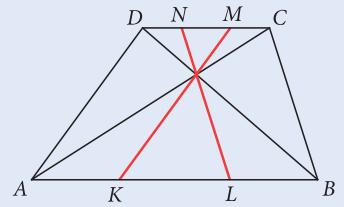
co kończy dowód.

81. $\frac{1}{3}$

D * **71.** Proste KM i NL są równoległe do odpowiednich boków trapezu $ABCD$ jak na rysunku. Wykaż, że $|AK| = |LB|$.

D **72.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym ABC kąt pomiędzy wysokością a środkową poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego jest równy różnicy kątów ostrych trójkąta ABC .

D * **73.** W równoramiennym trójkącie ABC , w którym $|AC| = |CB|$, z dowolnie wybranego punktu M podstawy AB poprowadzono odcinki MN oraz MP prostopadłe do ramion BC i AC trójkąta (zob. rysunek). Wykaż, że $|MN| + |MP| = |AA'|$, gdzie AA' jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka A .



74. Na trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |CB|$, opisano okrąg o środku S . Wiadomo, że $\sphericalangle ASB = 80^\circ$. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .

75. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 9 i 40.

76. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 6 cm krótszy od boku trójkąta. Wyznacz ten promień.

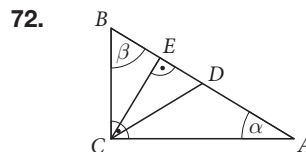
77. Dany jest romb $ABCD$ o boku 15 i kącie przy wierzchołku A równym 60° . Okrąg opisany na trójkącie ABD przecina przekątną AC w punkcie P . Wyznacz długość odcinka PD .

* **78.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 i kącie między ramionami 150° .

79. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o bokach 18 cm, 15 cm, 15 cm.

D **80.** Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej c . Wykaż, że odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa $\frac{1}{6}c$.

81. Punkt D jest środkiem środkowej AM trójkąta ABC . Punkt F jest takim punktem na boku AB , że odcinek DF jest równoległy do boku AC . Wyznacz stosunek $|AF| : |FB|$.



Założenie: $|BD| = |AD|$, $CE \perp AB$

Teza: $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC$

Dowód:

Oznaczamy $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$

Punkt D jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$, więc $|DA| = |DB| = |DC|$,
stąd trójkąty ACD i BCD są równoramienne.

$$\begin{cases} \triangle BCE \sim \triangle ABC, & \text{więc } \sphericalangle BCE = \alpha \\ |DB| = |DC|, & \text{więc } \sphericalangle BCD = \beta \end{cases} \Rightarrow \sphericalangle DCE = \beta - \alpha = \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC$$