

Wielomiany i wyrażenia wymierne

2

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- przekształca złożone wyrażenia algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia w zadaniach na dowodzenie,
- rozwiązuje równania i nierówności, które po przekształceniach wyrażen algebraicznych sprowadzają się do równań i nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- zapisuje przedział liczbowy jako zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności (także z wartością bezwzględną),
- rozwiązuje niestandardowe równanie lub nierówność (także z wartością bezwzględną),
- rozwiązuje równanie z kilkoma parametrami,
- wyznacza wartość parametru, dla którego rozwiązaniem nierówności jest dana liczba, a także określa, dla jakich wartości parametru nierówność jest sprzeczna (tożsamościowa),
- wyznacza wszystkie pary liczb naturalnych (całkowitych) spełniających dane równanie z dwiema niewiadomymi,
- rozwiązuje układ trzech równań liniowych,
- wyznacza wartość parametru, dla której dziedziną funkcji jest dany zbiór,
- rysuje wykresy funkcji liniowej i kwadratowej (także z wartością bezwzględną),
- rozpoznaje wielkości odwrotnie proporcjonalne,
- podaje zależność funkcyjną między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi opisanymi w zadaniu tekstowym,
- rysuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i omawia jej własności.

Po tym dziale uczeń:

- zapisuje wielomiany o danych współczynnikach, porządkuje wielomiany i określa ich stopnie,
- oblicza wartość wielomianu dla danych argumentów,
- dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany,
- rozkłada wielomiany na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia oraz metodą odstawiania i grupowania wyrazów,
- dzieli pisemnie wielomian przez dwumian,
- stosuje w zadaniach twierdzenie Bézouta i schemat Hornera,
- rozwiązuje równania (nierówności) wymierne prowadzące do równań (nierówności) liniowych lub kwadratowych,
- wyznacza wartości parametrów tak, aby dwa wielomiany były równe,
- wyznacza dziedzinę wielomianu,
- rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące dzielenia wielomianów,
- wykonuje wieloetapowe działania na wyrażeniach wymiernych,
- rozwiązuje zadania tekstowe prowadzące do równania wymiernego (np. dotyczące drogi, prędkości i czasu lub wydajności pracy).

Uwagi metodyczne

Na początku warto przypomnieć uczniom pojęcia: wyrażenie algebraiczne, suma algebraiczna, wyrazy sumy algebraicznej, współczynniki i zapisywanie różnych zależności w postaci wyrażen algebraicznych.

Uczniowie nie powinni mieć z tymi pojęciami większych trudności, gdyż zostały one dość dokładnie omówione w szkole podstawowej. Następnie należy się skoncentrować na określeniu funkcji wielomianowej.

1. Określenie funkcji wielomianowej

Umiejętności:

- stosowanie określenia wielomianu stopnia n jednej zmiennej

Przypomnijmy: skończoną sumę jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną** lub **wielomianem**.

Składniki takiej sumy nazywamy jej **wyrazami**.

Przykładami sum algebraicznych są:

$$x + y, 3x^2 + 2x - 1, xy + x^3yt - 5y - 4, x^5 - \sqrt{7}z$$

Jednomian to pojedyncza zmienna lub liczba, lub ich iloczyn, np.:
 $3, 2x, \sqrt{5}xy, -x^3yz, \frac{3}{11}xyt^8$

Zajmiemy się teraz badaniem własności funkcji określanych za pomocą wielomianów. Jedną z liter występujących w wielomianie we wzorze funkcji (najczęściej x) wyróżnimy jako zmienną niezależną. Pozostałe litery będą oznaczały współczynniki. Zauważmy, że ogólne wzory funkcji liniowej i funkcji kwadratowej zmiennej x mają podobną strukturę:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Gdybyśmy chcieli podać ogólny wzór funkcji – analogiczny do wymienionych – ale ze zmienną x w trzeciej potęgze, to zadanie nie byłoby trudne. Szukany wzór ma postać:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Następny, ze zmienną x w czwartej potęgze, to:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Postępowanie to można kontynuować. W przypadku funkcji, w której x występuje w wyższej potęgze (np. dziesiątej), wypisanie wszystkich wyrazów może być uciążliwe. Radzimy sobie wówczas w ten sposób, że np. w wielomianie

$$f(x) = ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + jx + k$$

zamiast kilku środkowych wyrazów wpisujemy wielokropek:

$$f(x) = ax^{10} + bx^9 + cx^8 + \dots + ix^2 + jx + k$$

Z poważniejszym problemem spotkalibyśmy się natomiast podczas zapisywania ogólnego wzoru funkcji tego typu ze zmienną x np. w 30. potęgze. Zabrakłoby bowiem liter alfabetu na oznaczenie wszystkich współczynników. Dlatego przyjęto inny

ZZ i MKP

tematy 2.1, 2.9

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.1

 **Generator**
 testów i sprawdzianów

sposób oznaczania tych liczb. Współczynniki przy kolejnych potęgach x oznaczone są jedną, ustaloną literą, ale opatrzoną numerem zgodnym ze stopniem potęgi, np. $a_{10}x^{10}$, a_5x^5 . Funkcję, w której najwyższą potęgą x jest 4, zapiszemy zatem ogólnie:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Możemy używać dowolnej litery na oznaczenie współczynników, uwzględniając to, że litery x, y, t, z tradycyjnie oznaczają zmienne, np.:

$$f(x) = b_5x^5 + b_4x^4 + \dots + b_1x + b_0$$

$$g(t) = d_6t^6 + d_5t^5 + \dots + d_1t + d_0$$

Przykład 1 ◀ zad. 1.5

Funkcja $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dla $a_3 = -2$, $a_2 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_0 = 5$ ma wzór:

$$f(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x + 5$$

Definicja

Funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbb{R}$) nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gdzie:

- n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną,
- $a_n \neq 0$,
- współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Ponadto przyjmujemy, że funkcja stała $W(x) = c$ ($c \neq 0$) jest **wielomianem stopnia 0**, a funkcja $W(x) = 0$ (stałe równa 0) jest **wielomianem zerowym** i nie ma stopnia.

Zgodnie z przyjętą definicją powiemy, że funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia drugiego, funkcja liniowa ze współczynnikiem przy x różnym od zera – wielomianem stopnia pierwszego, funkcja stała, ale różna od zera – wielomianem stopnia zerowego. Wiemy już, że wykresami wielomianu zerowego oraz wielomianów stopnia zerowego i pierwszego są proste, a wykresami wielomianów stopnia drugiego – parabole. Wykresy wielomianów jednej zmiennej wyższych stopni są bardziej skomplikowane.

Słowa „wielomian” będziemy używali w tym podręczniku w dwóch znaczeniach. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień, gdyż z kontekstu będzie wynikało, czy chodzi o sumę algebraiczną czy o funkcję.

◀1.5. Dane są wszystkie współczynniki wielomianu.

Zapisz ten wielomian w postaci

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Określ jego stopień.

a) $a_5 = 7$, $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$

b) $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = -1$,

$a_0 = 11$ c) $a_5 = -\frac{1}{2}$,

$a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = a_1 = a_0 = 1$

d) $a_3 = a_2 = a_1 = -\sqrt{2}$, $a_0 = 0$

Odp.: a) $7x^5 + x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, stopień wielomianu: 5

b) $2x^3 - 5x^2 - x + 11$, stopień wielomianu: 3

c) $-\frac{1}{2}x^5 + x^2 + x + 1$, stopień wielomianu: 5

d) $-\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x$, stopień wielomianu: 3

◀ 1.6. Wypisz wszystkie współczynniki oraz określ stopień podanego wielomianu.

a) $T(x) = -5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$

b) $Q(x) = -4x^4 + 6x^2 - 7x + 2$

c) $P(x) = \sqrt{2}x - 1$

d) $M(x) = \frac{1}{13}x^{10} + \frac{1}{12}x^5 + 2$

e) $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 5$

f) $H(x) = 5\sqrt{2}$

Odp.: a) $a_4 = -5$, $a_3 = 3$, $a_2 = 2$,
 $a_1 = -1$, $a_0 = 1$,
 stopień wielomianu: 4

b) $a_4 = -4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 6$,
 $a_1 = -7$, $a_0 = 2$,
 stopień wielomianu: 4

c) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_0 = -1$,
 stopień wielomianu: 1

d) $a_{10} = \frac{1}{13}$, $a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$,
 $a_5 = \frac{1}{12}$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$,
 $a_0 = 2$,
 stopień wielomianu: 10

e) $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -3$,
 $a_0 = 5$, stopień wielomianu: 3

f) $a_0 = 5\sqrt{2}$,
 stopień wielomianu: 0

Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Określmy stopień podanego wielomianu i wypiszmy jego współczynniki.

a) $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

b) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia takie jak w definicji, czyli

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

a) $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

Stopień wielomianu W jest równy 3; $a_3 = 4$, $a_2 = -2$, $a_1 = 3$, $a_0 = -5$.

b) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Stopień wielomianu P jest równy 4; $a_4 = 1$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_0 = \sqrt{2}$.

Definicja

Jednomianem stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbf{R}$) nazywamy jednomian postaci ax^n , gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną oraz współczynnik $a \neq 0$. Jednomian postaci c ($c \neq 0$) nazywamy **jednomianem stopnia zero**, a jednomian 0 (stałe równy 0) jest **jednomianem zerowym** i nie ma stopnia.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = 0$ (stałe równa 0) jest zarówno funkcją liniową, jak i wielomianem zerowym oraz jednomianem zerowym.

Przykład 3

$3x^5$ – jednomian stopnia piątego zmiennej x ,

$-\frac{1}{3}t$ – jednomian stopnia pierwszego zmiennej t ,

$(3 - \sqrt{5})x^{11}$ – jednomian stopnia jedenastego zmiennej x .

$2x^{-3}$ nie jest jednomianem, ponieważ $-3 \notin \mathbf{N}$.

Jednomiany tego samego stopnia tej samej zmiennej są **jednomianami podobnymi**. Jednomiany podobne można dodawać; czynność tę nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**. Wynikiem takiego działania jest jednomian, np.:

$$\begin{aligned} 3x^5 + 4x^5 &= 7x^5 \\ -x^3 + \sqrt{3}x^3 + 5x^3 &= (4 + \sqrt{3})x^3 \\ x^7 - 3x^7 + 2x^7 &= 0 \end{aligned}$$

Wielomiany tradycyjnie oznaczamy wielkimi literami z końca alfabetu W , P , Q itp.



Jeżeli jednak stopnie jednomianów są różne, to ich suma nie jest już jednomianem, lecz wielomianem, np. $2x^4 - 7x + \sqrt{2}$.

Porządkowanie wielomianu polega na dodaniu wszystkich jednomianów podobnych, a następnie napisaniu wyrazów w porządku malejącym – od najwyższej do najniższej potęgi (lub rosnącym – czyli odwrotnie).

Przykład 4 ◀ zad. 1.7

Uporządkujemy wielomian $W(x) = 3x^3 - x + 2x^2 - 2x^3 + x - 17 + x^4 + 4$, określimy jego stopień i podamy współczynniki.

Rozwiązanie

$$W(x) = \underline{3x^3} - \underline{x} + \underline{2x^2} - \underline{2x^3} + \underline{x} - \underline{17} + \underline{x^4} + \underline{4}$$

$$W(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 13$$

← redukujemy wyrazy podobne

Odp.: W jest wielomianem stopnia 4.

Jego współczynnikami są liczby:

$$a_4 = 1, a_3 = 1, a_2 = 2, a_1 = 0, a_0 = -13.$$

Współczynnik a_0 nazywamy
wyrazem wolnym wielomianu.

Przykład 5

Wysokość akwarium przedstawionego na zdjęciu nie przekracza 90 cm. Znajdziemy wzór i dziedzinę funkcji V opisującej pojemność tego akwarium w zależności od x .

Rozwiązanie

Pojemność akwarium wyraża się wzorem:

$$V(x) = (x - 7)(x + 3)(x - 4)$$

Wszystkie krawędzie mają dodatnie długości, a wysokość akwarium nie przekracza 90 cm. Warunki te możemy opisać za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} x - 4 \leq 90 \\ x - 4 > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

Zatem $7 < x \leq 94$.

Po wymnożeniu czynników i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy wielomian stopnia trzeciego $V(x) = x^3 - 8x^2 - 5x + 84$, którego dziedziną jest przedział $(7; 94)$. W rzeczywistości trudno sobie wyobrazić akwarium, którego jeden z boków miałby długość niewiele większą od zera – dziedzina funkcji wyznaczona została wyłącznie na podstawie teoretycznych rozważań.



◀ 1.7. Uporządkuj wielomian

$W(x)$, określ jego stopień i podaj współczynniki.

a) $W(x) = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 7x^5 + x^2 - 2\sqrt{3}x$

b) $W(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^3 + 3 - 1\frac{1}{4}x^6 + x^3 + 2x^4$

c) $W(x) = 2x^5 - 8x + 7x^7 + 2x - 8\sqrt{5} - 3x^5$

d) $W(x) = \sqrt{5}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - 3x + 4x^4 - 2\sqrt{5}x^5$

e) $W(x) = 11x - 9x^2 + 1\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 - x + 2$

Odp.: a) stopień wielomianu: 5,

$$a_5 = -7, a_4 = a_3 = 0, a_2 = 4,$$

$$a_1 = -7\sqrt{3}, a_0 = 2\sqrt{3}$$

b) stopień wielomianu: 6,

$$a_6 = -\frac{3}{4}, a_5 = 0, a_4 = 2, a_3 = -1,$$

$$a_2 = a_1 = 0, a_0 = 3$$

c) stopień wielomianu: 7,

$$a_7 = 7, a_6 = 0, a_5 = -1,$$

$$a_4 = a_3 = a_2 = 0, a_1 = -6,$$

$$a_0 = -8\sqrt{5}$$

d) stopień wielomianu: 5,

$$a_5 = -\sqrt{5}, a_4 = 4, a_3 = 0,$$

$$a_2 = 2\sqrt{2}, a_1 = -3, a_0 = 0$$

e) stopień wielomianu: 4,

$$a_4 = 1\frac{1}{3}, a_3 = 0, a_2 = -7, a_1 = 10,$$

$$a_0 = 2$$

Definicja

Funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny i każdemu argumentowi funkcja f przyporządkowuje taką samą wartość jak funkcja g .

Popatrzmy na dwa wielomiany W i Q :

$$W(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3, \quad Q(x) = 2x^4 - x^3 - 2x - 3$$

i porównajmy ich wartości dla $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.

$$W(0) = 0^5 + 0^4 - 3 \cdot 0^3 - 3 = -3$$

$$Q(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^3 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$W(0) = Q(0)$$

$$W(1) = 1^5 + 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 3 = -4$$

$$Q(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

$$W(1) = Q(1)$$

$$W(2) = 2^5 + 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 3 = 21$$

$$Q(2) = 2 \cdot 2^4 - 2^3 - 2 \cdot 2 - 3 = 17$$

$$W(2) \neq Q(2)$$

Wielomiany W i Q nie są równe, ponieważ nie przyjmują jednakowych wartości dla wszystkich argumentów.

Podamy teraz (bez dowodu) twierdzenie dotyczące wielomianów równych.

Twierdzenie

Wielomiany W i Q są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Jeśli więc wielomiany różnią się na przykład współczynnikami przy x^3 , to tej różnicy nie można nadrobić, dobierając odpowiednio współczynniki przy innych potęgach.

Przykład 6 ◀ zad. 1.13

Czy można dobrać współczynnik k tak, aby wielomiany W i P były równe, jeżeli

$$W(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5 \quad \text{ i } \quad P(x) = x^3 + kx^2 + kx - 5?$$

Rozwiązanie

Oba wielomiany są trzeciego stopnia i mają równe współczynniki przy x^3 oraz jednakowe wyrazy wolne. Aby zgadzały się współczynniki przy x^2 , musimy przyjąć, że

◀1.13. Czy można dobrać taką wartość m , aby wielomiany P i Q były równe? Jeśli tak, podaj tę wartość.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + mx + 1$$

b) $P(x) = x^4 + 5x^3 - mx - 7$

$$Q(x) = x^4 + mx^3 - 5x - 7$$

c) $P(x) = x^3 - mx^2 + x - 3$

$$Q(x) = mx^3 + x^2 + x - 3$$

d) $P(x) = 3(m-1)x^2 - (1-m)x + m$

$$Q(x) = 2mx^2 + 2x + m$$

e) $P(x) = x^5 - mx^4 + 5x - 1$

$$Q(x) = mx^5 + x^4 + 5x - 1$$

f) $P(x) = (2-m)x^4 - (2+m)x^3 + 2m$

$$Q(x) = (2+3m)x^4 - 2x^3 + m$$

Odp.: a) $m = 3$ b) $m = 5$ c) nie d) $m = 3$ e) nie f) $m = 0$

$k = -3$. Wówczas $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 5$. Wtedy jednak nie są równe współczynniki przy x .

Odp.: Nie można dobrać takiej liczby k , aby W i P były równe.

Przykład 7 ◀ zad. 1.14

Wyznamy liczby a i b tak, aby wielomiany:

$$W(x) = ax^3 - 2x^2 - 2 \text{ i } P(x) = -x^3 - 2x^2 + bx - 2$$

były równe.

Rozwiązanie

Współczynniki przy x^2 i wyrazy wolne tych wielomianów są równe, więc aby wielomiany W i P były równe, współczynniki przy x^3 i współczynniki przy x w obu wielomianach też muszą być równe.

Odp.: $a = -1$, $b = 0$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytce.

1.1. Wskaż wartość wyrażenia $(2x - y)(2x + y) - 3(x - y)^2 - 2x(3y + x)$ dla $x = \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{2}$.

- A. 11 B. -11 C. -10 D. 12

1.2. Jeden z wymiarów prostokąta jest równy $2x + 2y$. Obwód tego prostokąta wynosi $6x + 8y$. Jaki jest drugi wymiar prostokąta?

- A. $x + 2y$ B. $3x - 2y$ C. $2x + y$ D. $2x + 3y$

1.3. Wskaż wielomian, który otrzymamy po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $3(x - 2) - [2(3x - 1) - 3]$.

- A. $-1 - 3x$ B. $-3x$ C. $1 - 3x$ D. $2x - 1$

1.4. Spośród podanych wyrażeń wybierz wszystkie wielomiany i zapisz je w zeszytce.

- A. $x^3 + 2x - 1$ E. $\frac{1}{t} + 1$
 B. $x - \frac{1}{2}$ F. $\sqrt{2}t^2 - \sqrt{3}t - \sqrt{5}$
 C. $3x^2 + 2x^{-3}$ G. $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$
 D. $\frac{1}{2}t^2 - 7t + \frac{5}{3}$ H. $\frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{3}x^2 - 2$

◀ **1.14.** Dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany W i R były równe.

a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 - 2x + 6$,

$R(x) = 2x^4 + bx^3 - 7x^2 - 2x + 6$

b) $W(x) = x^3 + (a + 2b)x^2 + x + 1$,

$R(x) = x^3 + 3x^2 + (3a + b)x + 1$

c) $W(x) =$

$= 3x^3 - 7x^2 + (3a - b)x + a + 3b - 10$,

$R(x) = 3x^3 - 7x^2 + x + 3 - 2(a + b)$

d) $W(x) =$

$= 5x^3 + 2a(a - 2)x^2 - (7 - 5a)x + 8a$,

$R(x) = 5x^3 + (b + 2)x^2 + (4b + 1)x$

e) $W(x) = -2ax^3 - (1 + b)x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$R(x) = (b - 3)x^3 + a(a - 3)x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x$

Odp.: a) $a = -7$, $b = -3$

b) $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{8}{5}$

c) $a = 1$, $b = 2$

d) $a = 0$, $b = -2$

e) $a = 1$, $b = 1$ lub $a = 4$, $b = -5$

f) $a = 2$, $b = 1$

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. B

1.2. A

1.3. A

1.4. A, B, D, F, G, H

1.5. a) $7x^5 + x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$,
stopień wielomianu: 5

b) $2x^3 - 5x^2 - x + 11$,
stopień wielomianu: 3

c) $-\frac{1}{2}x^5 + x^2 + x + 1$,
stopień wielomianu: 5

d) $-\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x$,
stopień wielomianu: 3

1.6. a) $a_4 = -5$, $a_3 = 3$, $a_2 = 2$,
 $a_1 = -1$, $a_0 = 1$,
stopień wielomianu: 4

b) $a_4 = -4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 6$,
 $a_1 = -7$, $a_0 = 2$,
stopień wielomianu: 4

c) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_0 = -1$,
stopień wielomianu: 1

d) $a_{10} = \frac{1}{13}$, $a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$,

$a_5 = \frac{1}{12}$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$,
 $a_0 = 2$,

stopień wielomianu: 10

e) $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -3$,
 $a_0 = 5$, stopień wielomianu: 3

f) $a_0 = 5\sqrt{2}$,
stopień wielomianu: 0

1.7. a) stopień wielomianu: 5,
 $a_5 = -7$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = 4$,
 $a_1 = -7\sqrt{3}$, $a_0 = 2\sqrt{3}$

b) stopień wielomianu: 6,
 $a_6 = -\frac{3}{4}$, $a_5 = 0$, $a_4 = 2$, $a_3 = -1$,
 $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 3$

c) stopień wielomianu: 7,
 $a_7 = 7$, $a_6 = 0$, $a_5 = -1$,
 $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -6$,
 $a_0 = -8\sqrt{5}$

d) stopień wielomianu: 5,
 $a_5 = -\sqrt{5}$, $a_4 = 4$, $a_3 = 0$,
 $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_1 = -3$, $a_0 = 0$

e) stopień wielomianu: 4,
 $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_2 = -7$, $a_1 = 10$,
 $a_0 = 2$

1.5. Dane są wszystkie współczynniki wielomianu. Zapisz ten wielomian w postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Określ jego stopień.

a) $a_5 = 7$, $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$

b) $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = -1$, $a_0 = 11$

c) $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = a_1 = a_0 = 1$

d) $a_3 = a_2 = a_1 = -\sqrt{2}$, $a_0 = 0$

1.6. Wypisz wszystkie współczynniki oraz określ stopień podanego wielomianu.

a) $T(x) = -5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ d) $M(x) = \frac{1}{13}x^{10} + \frac{1}{12}x^5 + 2$

b) $Q(x) = -4x^4 + 6x^2 - 7x + 2$ e) $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 5$

c) $P(x) = \sqrt{2}x - 1$ f) $H(x) = 5\sqrt{2}$

1.7. Uporządkuj wielomian $W(x)$, określ jego stopień i podaj współczynniki.

a) $W(x) = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 7x^5 + x^2 - 2\sqrt{3}x$

b) $W(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^3 + 3 - \frac{1}{4}x^6 + x^3 + 2x^4$

c) $W(x) = 2x^5 - 8x + 7x^7 + 2x - 8\sqrt{5} - 3x^5$

d) $W(x) = \sqrt{5}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - 3x + 4x^4 - 2\sqrt{5}x^5$

e) $W(x) = 11x - 9x^2 + \frac{1}{3}x^4 + 2x^2 - x + 2$

1.8. Podaj przykład wielomianu stopnia n .

a) $n = 5$ b) $n = 0$ c) $n = 100$ d) $n = 3030$

1.9. Podaj przykład wielomianu postaci $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, który jest stopnia

a) czwartego i którego współczynniki a_1 i a_0 są równe.

b) trzeciego i którego współczynnik $a_0 = 0$.

c) drugiego i którego współczynniki są liczbami niewymiernymi.

d) piątego i którego współczynniki są liczbami parzystymi dodatnimi.

e) siódmego i którego współczynniki są różnymi dodatnimi dzielnikami liczby 48.

f) pierwszego i którego współczynniki są liczbami przeciwnymi.

1.10. Oblicz wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = x_0$.

a) $W(x) = 3x^7 - 25x^5 + x^3 - 1$ $x_0 = 1$

b) $W(x) = \sqrt{3}x^{15} - 17\sqrt{5}x^7 + 2x^4 - \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}$ $x_0 = 0$

c) $W(x) = 12x^5 + 3x^3 - 5x + 10$ $x_0 = -1$

d) $W(x) = x^4 - 2x^2 + \sqrt{3}x - 7$ $x_0 = \sqrt{3}$

e) $W(x) = x^6 - \sqrt{2}x^5 + x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + x + 4$ $x_0 = \sqrt{2}$

f) $W(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 5\frac{1}{2}x + 1$ $x_0 = -2$

1.8. a) np. $5x^5 - 3x^3 + x$

b) np. $3\sqrt{7}$

c) np. $x^{100} - x^{99} + 1$

d) np. $3x^{3030} - 2x^2 + x + 3$

1.9. a) np. $3x^4 + 2x + 2$ **b)** np. $2x^3 + x^2 + 5x$ **c)** np. $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2}$

d) np. $2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 4x + 2$ **e)** np. $12x^7 + x^6 + 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 2x^2 + 4x + 1$

f) np. $5x - 5$

1.10. a) -22 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** 0 **d)** -1 **e)** $\sqrt{2}$ **f)** 0

1.11. Wyznacz współczynniki wielomianu $W(x)$ tak, aby spełniony był podany warunek.

- a) $W(x) = 2x^5 - 3ax^4 + (a-1)x + 2a + 5$ $W(-1) = 14$
 b) $W(x) = 6x^3 - 3(2m+1)x^2 + (3m+2)x - 4$ $W(m) = 2$
 c) $W(x) = -7x^4 + (8a-1)x^2 + 3$ $W(\sqrt{2}) = 5$
 d) $W(x) = -2x^3 - 3a(\sqrt{2}-1)x^2 + 2(\sqrt{2}-1)x - 4$ $W(-2) = 4(2\sqrt{2}+1)$
 e) $W(x) = -3\sqrt{2}x^3 + (2a-1)x^2 + (3a+2)\sqrt{2}x + 3$ $W(\sqrt{2}) = 13$
 f) $W(x) = \frac{1}{4}(a+1)x^6 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)x^3 + (2a-1)x^2 + a\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}$
 $W(-\sqrt{2}) = 6(1+\sqrt{2})$

1.12. Dla jakich wartości p wielomian $W(x)$ jest wielomianem:

I. zerowym, II. stopnia zero?

- a) $W(x) = (p^2 - 1)x + p + 1$
 b) $W(x) = (p^2 - 4)x + p - 2$
 c) $W(x) = (p^2 - 9)x + p + 3$

1.13. Czy można dobrać taką wartość m , aby wielomiany P i Q były równe? Jeśli tak, podaj tę wartość.

- a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ $Q(x) = x^3 - 2x^2 + mx + 1$
 b) $P(x) = x^4 + 5x^3 - mx - 7$ $Q(x) = x^4 + mx^3 - 5x - 7$
 c) $P(x) = x^3 - mx^2 + x - 3$ $Q(x) = mx^3 + x^2 + x - 3$
 d) $P(x) = 3(m-1)x^2 - (1-m)x + m$ $Q(x) = 2mx^2 + 2x + m$
 e) $P(x) = x^5 - mx^4 + 5x - 1$ $Q(x) = mx^5 + x^4 + 5x - 1$
 f) $P(x) = (2-m)x^4 - (2+m)x^3 + 2m$ $Q(x) = (2+3m)x^4 - 2x^3 + m$

1.14. Dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany W i R były równe.

- a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 - 2x + 6$, $R(x) = 2x^4 + bx^3 - 7x^2 - 2x + 6$
 b) $W(x) = x^3 + (a+2b)x^2 + x + 1$, $R(x) = x^3 + 3x^2 + (3a+b)x + 1$
 c) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 + (3a-b)x + a + 3b - 10$,
 $R(x) = 3x^3 - 7x^2 + x + 3 - 2(a+b)$
 d) $W(x) = 5x^3 + 2a(a-2)x^2 - (7-5a)x + 8a$,
 $R(x) = 5x^3 + (b+2)x^2 + (4b+1)x$
 e) $W(x) = -2ax^3 - (1+b)x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $R(x) = (b-3)x^3 + a(a-3)x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x$
 f) $W(x) = -(2a^2 - 7a)x^3 + (1+b)x + a + 3$,
 $R(x) = 3(3-b)x^3 + a(a-1)x + a^2 + b$

1.11. a) $a_4 = 15$, $a_1 = -6$, $a_0 = -5$

b) $a_2 = -21$, $a_1 = 11$

c) $a_2 = 15$

d) $a_2 = 3(\sqrt{2}-1)$

e) $a_2 = 3$, $a_1 = 8\sqrt{2}$

f) $a_6 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 3$,
 $a_1 = 2\sqrt{2}$

1.12. a) I. $p = -1$ II. $p = 1$

b) I. $p = 2$ II. $p = -2$

c) I. $p = -3$ II. $p = 3$

1.13. a) $m = 3$ **b)** $m = 5$ **c)** nie

d) $m = 3$ **e)** nie **f)** $m = 0$

1.14. a) $a = -7$, $b = -3$

b) $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{8}{5}$

c) $a = 1$, $b = 2$

d) $a = 0$, $b = -2$

e) $a = 1$, $b = 1$ lub $a = 4$, $b = -5$

f) $a = 2$, $b = 1$

1.15. a) np. $W(x) = x^5 - x + 1$,
 $Q(x) = -x^5 + x + 1$
 $W(0) = 1 = Q(0)$
 i $W(1) = 1 = Q(1)$

b) np. $W(x) = x^2 + x$,
 $Q(x) = 3x^3 - x$
 $W(0) = 0 = Q(0)$
 i $W(1) = 2 = Q(1)$

1.16. Wskazówka: Wielomianem, który może spełnić warunki zadania i ma najniższy z możliwych stopni, jest funkcja kwadratowa $W(x) = ax^2 + bx + c$. Z układu równań

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 3 \\ 25a + 5b + c = 6 \end{cases}$$
 wyznacz dwa współczynniki w zależności od trzeciego i dobierz odpowiednią wartość niewymierną trzeciego współczynnika. Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

1.17. a) $W(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - 8z + 3$
b) $W(z) = \frac{1}{3}z^3 - 2z^2 + 5z - 1$

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $2x^7 - 5x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}$, stopień wielomianu: 7

3. $a_2 = -14$, $a_1 = 12$, $a_0 = 8$

4. $a = 5$, $b = 1$

5. $a = 1$, $b = 1$,
 stopień wielomianu: 1

*** 1.15.** Różne wielomiany W i Q spełniają warunki $W(0) = Q(0)$ oraz $W(1) = Q(1)$.
 Podaj przykład takich wielomianów W i Q , mających
 a) ten sam stopień. b) różne stopnie.

*** 1.16.** Podaj przykład wielomianu $W(x)$, który ma wszystkie współczynniki niewymierne i który spełnia warunki: $W(3) = 3$ i $W(5) = 6$.

1.17. Dany wielomian $W(x)$ zapisz jako wielomian zmiennej z .

a) $W(x) = 16x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 16x + 3$ $z = 2x$

b) $W(x) = 9x^3 - 18x^2 + 15x - 1$ $z = 3x$

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wyrażenie $2\sqrt{x} - 3$ nie jest wielomianem.

B. Wyrażenie $2x^3 - 3x^2 + x - \frac{1}{x} + 5$ jest wielomianem stopnia trzeciego.

C. Dla $m = 3 + \sqrt{2}$ wielomiany $P(x) = x^3 - 2\sqrt{3}x^2 + 3x + m - \sqrt{2} - 2$
 i $Q(x) = x^3 - 2\sqrt{3}x^2 + (m - \sqrt{2})x + 1$ są równe.

2. Dane są wartości wszystkich współczynników wielomianu:

$$a_7 = 2, a_6 = a_4 = 0, a_5 = -5, a_3 = -\frac{1}{2}, a_2 = a_1 = a_0 = \sqrt{2}$$

Napisz ten wielomian w postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
 Określ jego stopień.

3. Wyznacz współczynniki wielomianu

$$W(x) = x^3 + 2(3a - 1)x^2 + (a^2 - 4a)x + 2a^2$$

tak, aby spełniony był warunek $W(2) = -16$.

4. Jeżeli to możliwe, dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany

$P(x) = ax^3 - 2bx^3 + 3x^2 - 2x + 5$ i $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 - ax + 3bx + 5$
 były równe.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b wyrażenie

$$(a - 1)x^3 + (a + 2b)x + (b - a)x^{-1} + (a + b - 2)x^{-3}$$

jest wielomianem? Określ stopień tego wielomianu.

2. Działania w zbiorze wielomianów

Umiejętności:

- dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów jednej zmiennej

W szkole podstawowej były omawiane i ćwiczone działania dodawania, odejmowania i mnożenia wyrażeń algebraicznych. Poznane zasady zastosujemy teraz do wykonywania różnych działań na wielomianach jednej zmiennej.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Definicja

Jeżeli $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, to:

sumą wielomianów $P(x) + Q(x)$ jest wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

a **różnicą wielomianów** $P(x) - Q(x)$ jest wielomian

$$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - b_m x^m - b_{m-1} x^{m-1} - \dots - b_1 x - b_0$$

W wielomianach $W(x)$ oraz $Z(x)$ należy zredukować wyrazy podobne.

Przykład 1 ◀ zad. 2.6

Dodamy wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) &= x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13 & Q(x) &= -2x^4 + x^3 - x + 8 \\ \text{b) } P(x) &= \sqrt{3}x^7 - 3x + 1 & Q(x) &= x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) + Q(x) &= (x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13) + (-2x^4 + x^3 - x + 8) = \\ &= -x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(x) + Q(x) &= (\sqrt{3}x^7 - 3x + 1) + (x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1) = \\ &= \sqrt{3}x^7 - 3x + 1 + x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1 = \sqrt{3}x^7 + x^4 - \sqrt{2}x^2 \end{aligned}$$

Przykład 2 ◀ zad. 2.6

Od wielomianu $W(x) = 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3$ odejmiemy wielomian $R(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 12x + 1$.

◀2.6. Wyznacz sumę $W + Q$ i różnicę $W - Q$ wielomianów W i Q .

$$\text{a) } W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1, \\ Q(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 5$$

$$\text{b) } W(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 3, \\ Q(x) = x^5 + 4x^3 + 2x - 1$$

$$\text{c) } W(x) = 4x^5 - 6x^3 + 11, \\ Q(x) = 4x^5 + 6x^3 + 3$$

$$\text{d) } W(x) = 12x^4 - 3x + 1, \\ Q(x) = -5x^4 + 3x^2 - 1$$

$$\text{e) } W(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x, \\ Q(x) = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

$$\text{f) } W(x) = 0,3x^3 - 0,7x^2 + 0,1x + 3,1, \\ Q(x) = -2,7x^3 + 1,7x^2 - 0,9x + 2,1$$

$$\text{g) } W(x) = 3x^4 - 0,2x^3 - x^2 + 1,1x - 7, \\ Q(x) = 0,8x^3 + 2x^2 - 3,9x + 1$$

Odp.:

$$\text{a) } W(x) + Q(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 4, \\ W(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$$

$$\text{b) } W(x) + Q(x) = \\ = x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x + 2, \\ W(x) - Q(x) = \\ = -x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$$

$$\text{c) } W(x) + Q(x) = 8x^5 + 14, \\ W(x) - Q(x) = -12x^3 + 8$$

$$\text{d) } W(x) + Q(x) = 7x^4 + 3x^2 - 3x, \\ W(x) - Q(x) = 17x^4 - 3x^3 - 3x + 2$$

$$\text{e) } W(x) + Q(x) = \\ = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - x^2 - 2x - 1, \\ W(x) - Q(x) = \\ = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3 + 4x^2 - 3x + 1$$

$$\text{f) } W(x) + Q(x) = \\ = -2,4x^3 + x^2 - 0,8x + 5,2, \\ W(x) - Q(x) = 3x^3 - 2,4x^2 + x + 1$$

$$\text{g) } W(x) + Q(x) = \\ = 3x^4 + 0,6x^3 + x^2 - 2,8x - 6, \\ W(x) - Q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 8$$

ZZ i MKP

tematy 2.2, 2.3

dlauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(x) - R(x) &= (3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3) - (3x^4 - x^3 + x^2 - 12x + 1) = \\ &= 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 12x - 1 = -5x^3 + 7x^2 + 11x + 2 \end{aligned}$$

W przykładzie 1a suma dwóch wielomianów stopnia czwartego jest wielomianem stopnia czwartego. W przykładzie 2 różnica dwóch wielomianów stopnia czwartego jest wielomianem stopnia trzeciego. Podamy jeszcze przykład dwóch wielomianów stopnia 100, których suma jest wielomianem zerowym.

$$W(x) = 3x^{100} - 5x^{50} + 1, \quad Q(x) = -3x^{100} + 5x^{50} - 1, \quad W(x) + Q(x) = 0$$

Twierdzenie

Wielomian będący sumą (różnicą) dwóch wielomianów W i Q ma stopień nie większy od stopnia wielomianu W i stopnia wielomianu Q ; może on być również wielomianem zerowym.

Mnożenie wielomianów

Iloczyn dwóch wielomianów jest wielomianem będącym sumą wszystkich iloczynów wyrazów jednego wielomianu przez wyrazy drugiego wielomianu. Inaczej mówiąc, aby pomnożyć jeden wielomian przez drugi, każdy wyraz pierwszego wielomianu mnożymy przez każdy wyraz drugiego wielomianu, wyniki dodajemy, a następnie redukujemy wyrazy podobne.

Przykład 3 zad. 2.9

Pomnożymy wielomiany $W(x) = x^3 - x^2 + 6x - 1$ i $Q(x) = 3x^4 - x$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(x) \cdot Q(x) &= (x^3 - x^2 + 6x - 1)(3x^4 - x) = \\ &= 3x^7 - x^4 - 3x^6 + x^3 + 18x^5 - 6x^2 - 3x^4 + x = \\ &= 3x^7 - 3x^6 + 18x^5 - 4x^4 + x^3 - 6x^2 + x \end{aligned}$$

Iloczyn $W \cdot Q$ jest wielomianem stopnia siódmego.

W działaniach na wielomianach obowiązują wszystkie poznane wcześniej prawa działań. W szczególności – wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach, np.:

$$x^3 \cdot 3x^4 = 3x^{3+4} = 3x^7$$

Twierdzenie

Jeżeli W i Q są niezerowymi wielomianami, to stopień wielomianu $W \cdot Q$ będącego ich iloczynem jest sumą stopni wielomianów W i Q .

◀ 2.9. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1,$

$R(x) = -2x^3 + x - 3$

b) $S(x) = -x^3 - 3x^2 + x - 1,$

$R(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

c) $S(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 1,$

$R(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 2$

d) $S(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1,$

$R(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$

e) $S(x) = \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 3,$

$R(x) = x^3 - 3x + \sqrt{3}$

f) $S(x) = x^3 + x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1,$

$R(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$

Odp.:

a) $-6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 6x^2 + x - 3$

b) $-2x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1$

c) $x^6 + 4x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

d) $-4x^6 + 2x^5 - 2(\sqrt{2} + 1)x^4 + \sqrt{2}x^3 - (\sqrt{2} - 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + 1$

e) $\sqrt{3}x^6 + \sqrt{2}x^5 - 3\sqrt{3}x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{6}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$

f) $2x^6 + 2x^5 + (\sqrt{2} - 1)x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - 1$

Przykład 4 ◀ zad. 2.10

Dane są wielomiany: $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, $P(x) = -x^2 + 2x + 8$, $Q(x) = 2x^2 - 5x$.
Wyznaczmy wielomian $2 \cdot W(x) - P(x) \cdot Q(x)$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 2W(x) - P(x) \cdot Q(x) &= 2(x^3 - 2x^2 + x - 3) - (-x^2 + 2x + 8)(2x^2 - 5x) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6 - (-2x^4 + 5x^3 + 4x^3 - 10x^2 + 16x^2 - 40x) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6 + 2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 40x = 2x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 42x - 6 \end{aligned}$$

Podsumujmy:

wielomiany możemy dodawać, odejmować i mnożyć. Wynik takich działań jest zawsze wielomianem.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Dane są wielomiany $W(x) = 5x^4 + 7x^3 - x + 2$ i $P(x) = -5x^4 + 2x - 1$. Wskaż wielomian równy wielomianowi $W(x) + P(x)$.

- A. $5x^4 + 12x - 3$ C. $2x^4 - x + 1$
B. $7x^3 + x + 1$ D. $7x^3 - x + 1$

2.2. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^3 - x + 1$ i $V(x) = -3x^2$. Wskaż wielomian równy wielomianowi $W(x) \cdot V(x)$.

- A. $-6x^6 + 3x^2 - 3$ C. $-6x^5 + 3x^3 - 3x^2$
B. $-2x^3 - 3x^2 - x + 1$ D. $6x^5 - 3x^3 + 3x^2$

2.3. Wskaż iloczyn równy wielomianowi $W(x) = x^6 - 2x^3 - 3$.

- A. $(x^2 + 2)(x^4 + 3)$ C. $(x^3 - 3)(x^3 + 1)$
B. $(x^3 - 2)(x^2 + 1)$ D. $(x^3 + 1)(x^2 - 3)$

2.4. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^7 - 2x^5 + 4x - 1$ i $P(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 1$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 10.
B. Stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest równy 7.
C. Wyraz wolny wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy -1.

◀2.10. Dane są wielomiany:

$$W(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5,$$

$$P(x) = 2x^2 - x + 1,$$

$$Q(x) = 5x + 2. \text{ Wykonaj działania.}$$

- a) $2W(x) + 3P(x) - Q(x)$
b) $2[W(x) - P(x)] + Q(x)$
c) $W(x) - [P(x) + 3Q(x)]$
d) $2W(x) + 3[Q(x) - 2P(x)]$
e) $5Q(x) - [W(x) + 2P(x)]$
f) $3[W(x) - 2P(x)] - [P(x) + 3W(x)]$

Odp.: a) $-2x^3 + 10x^2 - 10x + 11$

b) $-2x^3 + 5x + 10$

c) $-x^3 - 15x - 2$

d) $-2x^3 - 8x^2 + 19x + 10$

e) $x^3 - 6x^2 + 28x + 3$

f) $-14x^2 + 7x - 7$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. B

2.2. C

2.3. C

2.4. P, P, P

2.5. F, P, P

2.6. a) $W(x) + Q(x) =$
 $= -x^3 - 3x^2 + 6x + 4,$
 $W(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$
b) $W(x) + Q(x) =$
 $= x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x + 2,$
 $W(x) - Q(x) =$
 $= -x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$
c) $W(x) + Q(x) = 8x^5 + 14,$
 $W(x) - Q(x) = -12x^3 + 8$
d) $W(x) + Q(x) = 7x^4 + 3x^2 - 3x,$
 $W(x) - Q(x) = 17x^4 - 3x^3 - 3x + 2$
e) $W(x) + Q(x) =$
 $= \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - x^2 - 2x - 1,$
 $W(x) - Q(x) =$
 $= \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3 + 4x^2 - 3x + 1$
f) $W(x) + Q(x) =$
 $= -2,4x^3 + x^2 - 0,8x + 5,2,$
 $W(x) - Q(x) = 3x^3 - 2,4x^2 + x + 1$
g) $W(x) + Q(x) =$
 $= 3x^4 + 0,6x^3 + x^2 - 2,8x - 6,$
 $W(x) - Q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

2.7. a) $-6x^3 + 7x^2 + 3x - 1$
b) $5x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 2$
c) $21x^4 + 20x^3 - 5x^2 + 4$
d) $6x^5 - 2\sqrt{2}x^4 + 3\sqrt{2}x^3 - 2x^2 +$
 $-3x + \sqrt{2}$
e) $-\sqrt{3}x^4 + (2\sqrt{3} - 1)x^3 - 4x^2 +$
 $+ \sqrt{3}x + 3$

2.8. a) $6x^4 + x^3 + 12x^2 - x + 6$
b) $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 2x - 12$
c) $x^4 - 12\frac{1}{6}x^3 + 8\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$
d) $\sqrt{2}x^4 - 9x^3 + 2(3\sqrt{2} + 2)x^2 +$
 $-2(\sqrt{2} + 8)x + 8$
e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^4 + (\sqrt{3} + 1)x^3 - 8x^2 +$
 $+ 3(\sqrt{3} + 2)x - 6\sqrt{3}$

2.9. a) $-6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 +$
 $-6x^2 + x - 3$
b) $-2x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1$
c) $x^6 + 4x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
d) $-4x^6 + 2x^5 - 2(\sqrt{2} + 1)x^4 +$
 $+ \sqrt{2}x^3 - (\sqrt{2} - 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + 1$
e) $\sqrt{3}x^6 + \sqrt{2}x^5 - 3\sqrt{3}x^4 +$
 $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{6}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$
f) $2x^6 + 2x^5 + (\sqrt{2} - 1)x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - 1$

2.5. Dane są dwa różne wielomiany $W(x)$ i $P(x)$, każdy piątego stopnia. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A.** Wielomian $W(x) - P(x)$ może być wielomianem zerowym.
B. Wielomian $W(x) - P(x)$ może być wielomianem stopnia 3.
C. Wielomian $W(x) + P(x)$ może być wielomianem zerowym.

2.6. Wyznacz sumę $W + Q$ i różnicę $W - Q$ wielomianów W i Q .

a) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ $Q(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 5$
b) $W(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 3$ $Q(x) = x^5 + 4x^3 + 2x - 1$
c) $W(x) = 4x^5 - 6x^3 + 11$ $Q(x) = 4x^5 + 6x^3 + 3$
d) $W(x) = 12x^4 - 3x + 1$ $Q(x) = -5x^4 + 3x^2 - 1$
e) $W(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$ $Q(x) = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
f) $W(x) = 0,3x^3 - 0,7x^2 + 0,1x + 3,1$ $Q(x) = -2,7x^3 + 1,7x^2 - 0,9x + 2,1$
g) $W(x) = 3x^4 - 0,2x^3 - x^2 + 1,1x - 7$ $Q(x) = 0,8x^3 + 2x^2 - 3,9x + 1$

2.7. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = -3x^2 + 5x - 1$ $R(x) = 2x + 1$
b) $S(x) = 5x^3 - 2x + 2$ $R(x) = x - 1$
c) $S(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ $R(x) = 3x + 2$
d) $S(x) = 2x^4 + \sqrt{2}x^2 - 1$ $R(x) = 3x - \sqrt{2}$
e) $S(x) = -x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ $R(x) = \sqrt{3}x + 1$

2.8. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 3x^2 - x + 2$ $R(x) = 2x^2 + x + 3$
b) $S(x) = 4x^2 + 2x - 6$ $R(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$
c) $S(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ $R(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x + 1$
d) $S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 4x + 2$ $R(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x + 4$
e) $S(x) = -\sqrt{3}x^2 + 3x - 6$ $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + \sqrt{3}$

2.9. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ $R(x) = -2x^3 + x - 3$
b) $S(x) = -x^3 - 3x^2 + x - 1$ $R(x) = 2x^3 - x^2 + 1$
c) $S(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 1$ $R(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 2$
d) $S(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$ $R(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$
e) $S(x) = \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 3$ $R(x) = x^3 - 3x + \sqrt{3}$
f) $S(x) = x^3 + x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$ $R(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$

2.10. Dane są wielomiany: $W(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$, $P(x) = 2x^2 - x + 1$, $Q(x) = 5x + 2$. Wykonaj działania.

- a) $2W(x) + 3P(x) - Q(x)$ d) $2W(x) + 3[Q(x) - 2P(x)]$
 b) $2[W(x) - P(x)] + Q(x)$ e) $5Q(x) - [W(x) + 2P(x)]$
 c) $W(x) - [P(x) + 3Q(x)]$ f) $3[W(x) - 2P(x)] - [P(x) + 3W(x)]$

2.11. Dane są wielomiany: $P(x) = 2x - 3$, $Q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$, $R(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Wykonaj działania.

- a) $P(x) \cdot R(x) - Q(x)$ d) $R(x) \cdot Q(x) - [P(x)]^2$
 b) $2P(x) \cdot Q(x) - 3R(x)$ e) $[P(x)]^2 \cdot [-R(x)] + 2Q(x)$
 c) $[P(x)]^2 - Q(x)$ f) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

2.12. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Wykonaj działania i uporządkuj wyrazy w wielomianie $Q(x) = W(2) \cdot x^3 + 3x^2 - (W(x) - x + 1) \cdot x - W(3)$.

2.13. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x - 1$, $P(x) = x^2 - 3ax + b$, $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + (5a + b)x - 2a$. Wyznacz a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $W(x) \cdot P(x) = Q(x)$.

2.14. Czy można tak dobrać współczynniki a i b , aby dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodziła równość $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$?

- a) $P(x) = 2x + a$ $Q(x) = 3x^2 + bx + 1$ $W(x) = 6x^3 + x^2 - 10x + 3$
 b) $P(x) = x^2 + ax + 5$ $Q(x) = 2x^2 + bx + 1$ $W(x) = 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 8x + 5$
 c) $P(x) = x^2 - 3x + a$ $Q(x) = x^2 + bx - 2$ $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 10$

2.15. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - ax + b$, $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = -6x^3 + (1 + b)x^2 - 8bx + a - b$. Wyznacz a i b tak, aby wielomian $F(x) = W(x) \cdot P(x) + Q(x)$ był wielomianem zerowym.

2.16. Przedstaw wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów, z których jeden jest równy $Q(x) = x^2 - x + 1$.

2.17. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia piątego, których suma jest wielomianem stopnia trzeciego.

2.18. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia trzeciego, których różnica jest wielomianem stopnia zerowego.

- 2.10. a)** $-2x^3 + 10x^2 - 10x + 11$
b) $-2x^3 + 5x + 10$
c) $-x^3 - 15x - 2$
d) $-2x^3 - 8x^2 + 19x + 10$
e) $x^3 - 6x^2 + 28x + 3$
f) $-14x^2 + 7x - 7$

- 2.11. a)** $5x^3 - 18x^2 + 15x - 6$
b) $4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 15x - 21$
c) $-x^3 + 5x^2 - 14x + 6$
d) $3x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 - x - 6$
e) $-12x^4 + 58x^3 - 93x^2 + 61x - 3$
f) $6x^6 - 25x^5 + 48x^4 - 40x^3 + -20x^2 + 45x - 9$

2.12. $Q(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 11$

2.13. $a = 1$, $b = 2$

2.14. a) tak: $a = 3$, $b = -4$
b) nie **c)** nie

2.15. $a = 4$, $b = -2$

2.16. $W(x) = (x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 4)$

2.17. np. $W(x) = 3x^5$,
 $Q(x) = -3x^5 + 2x^3 - 1$

2.18. np. $W(x) = 5x^3 - 7x^2 + 6$,
 $P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 2$

2.19. $W(1)$ jest równe sumie współczynników wielomianu $W(x)$, bo jeżeli $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, to $W(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$. Ponieważ $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych, to $W(1)$ i $P(1)$ są liczbami całkowitymi, jako sumy liczb całkowitych.

Jeżeli $W(x) \cdot P(x) = x^5$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $W(1) \cdot P(1) = 1$.

Jeżeli iloczyn dwóch liczb całkowitych jest równy 1, to albo $W(1) = P(1) = 1$, albo $W(1) = P(1) = -1$, co kończy dowód.

2.20. a) $W(x) + P(x) = (a+b-2)x^3 + (b-a)x^2 - 4$
 st. $(W(x) + P(x)) = 3 \Leftrightarrow a+b \neq 2$
 st. $(W(x) + P(x)) = 2 \Leftrightarrow (a+b=2 \wedge a \neq b) \Leftrightarrow (a+b=2 \wedge a \neq 1)$
 st. $(W(x) + P(x)) = 0 \Leftrightarrow a=b=1$
b) $W(x) + P(x) = (a+b)x^3 - (2a+b+4)x^2 + (2+a)x + 1$
 st. $(W(x) + P(x)) = 3 \Leftrightarrow (a+b \neq 0)$
 st. $(W(x) + P(x)) = 2 \Leftrightarrow (a+b=0 \wedge a \neq -4)$
 st. $(W(x) + P(x)) = 1 \Leftrightarrow (a=-4 \wedge b=4)$

2.21. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5 = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f)$
 $ad = 1$ i $cf = 5$. $a, d, c, f \in \mathbb{N}$, więc $a = d = 1$, $c = 1$, $f = 5$ (przyjmujemy, że $c < f$).

Zatem:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 + bx + 1)(x^2 + ex + 5) = \\ &= x^4 + ex^3 + 5x^2 + bx^3 + \\ &+ bex^2 + 5bx + x^2 + ex + 5 = \\ &= x^4 + (e+b)x^3 + (6+be)x^2 + \\ &+ (5b+e)x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e+b=5 & (1) \\ be+6=12 & (2) \\ 5b+e=17 & (3) \end{cases}$$

$$(3)-(1): 4b = 12 : 4, b = 3, e = 2$$

Sprawdzamy, że

$$be + 6 = 3 \cdot 2 + 6 = 12.$$

Odp.:

$$W(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2x + 5)$$

2.19. Dane są wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniony jest warunek $W(x) \cdot P(x) = x^5$. Wykaż, że $W(1) = P(1)$.

2.20. Wyznacz stopień wielomianu $W(x) + P(x)$ w zależności od a i b .

a) $W(x) = ax^3 + bx^2 + x - 3$

$P(x) = (b-2)x^3 - ax^2 - x - 1$

b) $W(x) = (a-1)x^3 - (b+4)x^2 + ax - 1$

$P(x) = (b+1)x^3 - 2ax^2 + 2x + 2$

2.21. Wielomian $W(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5$ przedstaw w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach będących liczbami naturalnymi.

2.22. Oblicz sumę współczynników wielomianu.

a) $W(x) = 5x^4 - 11x^3 + 7x^2 + 4x - 2$

b) $W(x) = (3x^3 - 5)(2x^2 + 3x - 4)$

c) $W(x) = (5x^7 - 3x^6 + 12x^4 - 7x^3 + x^2 - 9x)^{27} - 1$

d) $W(x) = (3x^2 + x - 3)^{2020} + (3x^2 - x - 3)^{2021}$

Prosto do matury



1. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^5 - 11x^3 + x - 3$ i $P(x) = -x^8 - 2x^5 + x^2$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 40.

B. Stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest równy 8.

C. Wyraz wolny wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy -3.

2. Dane są wielomiany: $W(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$, $Q(x) = 8x - 5$, $R(x) = x^2 + x + 2$. Wyznacz wielomian $P(x) = 3 \cdot W(x) - 2Q(x) \cdot R(x)$.

3. Dane są wielomiany: $W(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$, $Q(x) = -3x + 1$, $P(x) = x^2 - x + 2$. Wykaż, że wielomian $W(x) + Q(x) \cdot P(x)$ jest wielomianem zerowym.

4. Dane są wielomiany:

$P(x) = 3x^2 - 2ax + b$ i $Q(x) = 9x^4 + 3(b-2a)x^3 + (5b^2-4)x^2 + 8x + 2a^2b$.

Wyznacz a i b tak, aby $[P(x)]^2 = Q(x)$.

5. Dane są wielomiany: $P(x) = ax + 1$, $Q(x) = x^2 + bx - 4$, $W(x) = -4x^3 - 19x^2 + 21x - 4$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

2.22. Suma współczynników wielomianu W jest równa $W(1)$.

a) $W(1) = 5 - 11 + 7 + 4 - 2 = 3$

b) $W(1) = (3-5)(2+3-4) = -2 \cdot 1 = -2$

c) $W(1) = (5-3+12-7+1-9)^{27} - 1 = (-1)^{27} - 1 = -1 - 1 = -2$

d) $W(1) = (3+1-3)^{2020} + (3-1-3)^{2021} = 1^{2020} + (-1)^{2021} = 1 - 1 = 0$

Prosto do matury

1. F, P, F

2. $-4x^3 - 12x^2 - 25x + 29$

3. $W(x) + Q(x) \cdot P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2 + (-3x+1)(x^2-x+2) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2 - 3x^3 + 3x^2 - 6x + x^2 - x + 2 = 0$

4. $a = -1$, $b = 2$

5. $a = -4$, $b = 5$

3. Wzory skróconego mnożenia

Umiejętności:

- stosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 , a^3-b^3

Podnoszenie wielomianu do potęgi (o dodatnim wykładniku naturalnym) jest, podobnie jak potęgowanie liczb, innym zapisem mnożenia.

Przykład 1 ◀ zad. 3.5

Podnieśmy do trzeciej potęgi wielomian $W(x) = x^3 - 2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}(W(x))^3 &= (x^3 - 2)^3 = (x^3 - 2)^2(x^3 - 2) = (x^6 - 4x^3 + 4)(x^3 - 2) = \\ &= x^9 - 2x^6 - 4x^6 + 8x^3 + 4x^3 - 8 = x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8\end{aligned}$$

Przy mnożeniu wielomianów pomocne są **wzory skróconego mnożenia**.

Twierdzenie

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

kwadrat sumy

kwadrat różnicy

różnica kwadratów

Analogiczne wzory dla potęgi o wykładniku równym 3 mają następującą postać.

Twierdzenie

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

sześcian sumy

sześcian różnicy

suma sześciannów

różnica sześciannów

Zauważmy, że w ostatnich dwóch wzorach wyrażenia $a^2 - ab + b^2$ oraz $a^2 + ab + b^2$ przypominają kwadraty różnicy oraz sumy, tylko że przy iloczynie ab nie ma współczynnika 2 (inaczej mówiąc, nie ma tam podwojonych iloczynów a przez b).

Wyrażenia te często nazywamy **niepełnymi kwadratami** różnicy (sumy) a i b .

Uwagi metodyczne

W tym temacie wprowadzamy wzory skróconego mnożenia. Opanowanie omawianych zagadnień wymaga przećwiczenia ich na wielu przykładach. Cenną umiejętnością jest zapisywanie sum algebraicznych w postaci iloczynowej, ponieważ będzie to przydatne podczas rozwiązywania równań wielomianowych.

◀ 3.5. Wykonaj potęgowanie.

a) $(2x+1)^3$, $(2x-3)^3$, $(2x-1)^3$

b) $(4x-3)^3$, $(3x-4)^3$, $(4x-1)^3$

c) $(x^2-1)^3$, $(x^2+2)^3$, $(x^2+1)^3$

d) $(2x^2-5x^3)^3$, $(3x^3-1)^3$,

$(2x^3-5)^3$

Odp.: a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$,

$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$,

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

b) $64x^3 - 144x^2 + 108x - 27$,

$27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$,

$64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

c) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$,

$x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$,

$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

d) $8x^6 - 60x^7 + 150x^8 - 125x^9$,

$27x^9 - 27x^6 + 9x^3 - 1$,

$8x^9 - 60x^6 + 150x^3 - 125$

ZZ i MKP

temat 2.4

Multiteka

- Sześcian sumy i sześcian różnicy dwóch wyrazów
- Trójkąt Pascala
- Trójkąt Pascala – zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 3.6. Wykonaj działania.

- a) $2(x-2)^3 - (2x-1)^3$
 b) $(-3-2x)^3 + (2x+3)^3$
 c) $3(x-2)^3 - 2(2x-1)^3 + 4x(2x-1)^2$
 d) $(3x-1)^3 - 2(x+2)^3 + x(5x+1)^2$
 e) $(x^2+1)^3 - (x^3+1)^2$
 f) $\left[(x+1)^2 + (2-x)(2+x)\right]^3$
 g) $(x^2-2x)^3 - (x^2+2x)^3$
 h) $(2x^2-3x)^3 + (3x-2x^2)^3$
- Odp.: a) $-6x^3 + 18x - 15$
 b) 0
 c) $3x^3 - 10x^2 + 28x - 22$
 d) $50x^3 - 29x^2 - 14x - 17$
 e) $3x^4 - 2x^3 + 3x^2$
 f) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
 g) $-12x^5 - 16x^3$
 h) 0

◀ 3.8. Wykonaj działania.

- a) $(x^2+3x-1)^2 + (7x-2x^2)^2 + -x+1$
 b) $2(x^2-x+1)^2 - (2x^2-5)^2 + -4(x^2-7)$
 c) $(2x^2-x-3)^2 + (3x^2-x-2)^2 + 5(2x-1)^2$
 d) $\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)^2 - \frac{1}{4}(x^2+2x-1)^2 + -3\frac{1}{2}$
 e) $(3x^2-x-1)^2 - (2x^2+5x+1)^2$
 f) $(x^2+x-4)^2 - (x^2-3x+2)^2 + 2(2x-3)$
- Odp.: a) $5x^4 - 22x^3 + 56x^2 - 7x + 2$
 b) $-2x^4 - 4x^3 + 22x^2 - 4x + 5$
 c) $13x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 10x + 18$
 d) $-x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$
 e) $5x^4 - 26x^3 - 34x^2 - 8x$
 f) $8x^3 - 20x^2 + 8x + 6$

Wyprowadzimy dwa wzory dla potęgi o wykładniku 3, pozostałe zostawiamy jako zadanie do samodzielnego wykonania.

- $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = a^3-b^3$

Przykład 2 ◀ zad. 3.6

Wykonamy działania.

- a) $(x-2)^3$ b) $(3x^2-2x)^3$ c) $(x-2)^3 + (x+2)^3$ d) $(5-x)^3 + (x-5)^3$

Rozwiązanie

- a) $(x-2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 b) $(3x^2-2x)^3 = (3x^2)^3 - 3 \cdot (3x^2)^2 \cdot 2x + 3 \cdot 3x^2 \cdot (2x)^2 - (2x)^3 = 27x^6 - 3 \cdot 9x^4 \cdot 2x + 9x^2 \cdot 4x^2 - 8x^3 = 27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3$
 c) $(x-2)^3 + (x+2)^3 = (x-2+x+2) \left[(x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2 \right] = 2x(x^2-4x+4-x^2+4+x^2+4x+4) = 2x(x^2+12) = 2x^3+24x$
 d) $(5-x)^3 + (x-5)^3 = [-(x-5)]^3 + (x-5)^3 = (-1)^3(x-5)^3 + (x-5)^3 = -(x-5)^3 + (x-5)^3 = 0$

Wyprowadzimy wzór na kwadrat sumy trzech składników.

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Szukany wzór ma zatem następującą postać.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \quad \text{kwadrat sumy trzech składników}$$

Przykład 3 ◀ zad. 3.8

Wykonamy podane działania.

- a) $(x^2+2x+1)^2 = (x^2)^2 + (2x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2x + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2x \cdot 1 = x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 + 2x^2 + 4x = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
 b) $(\sqrt{2}x^3 - x - 3)^2 = (\sqrt{2}x^3)^2 + (-x)^2 + (-3)^2 + 2 \cdot (\sqrt{2}x^3) \cdot (-x) + 2 \cdot (\sqrt{2}x^3) \cdot (-3) + 2 \cdot (-x) \cdot (-3) = 2x^6 + x^2 + 9 - 2\sqrt{2}x^4 - 6\sqrt{2}x^3 + 6x = 2x^6 - 2\sqrt{2}x^4 - 6\sqrt{2}x^3 + x^2 + 6x + 9$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wyrażenie $\left[\frac{(\sqrt{2}-1)^3 + 2}{2\sqrt{2}-3} \right]^2$ jest równe wyrażeniu

- A. $25(\sqrt{2}+1)$. B. $5(\sqrt{2}-1)$. C. $5(1-\sqrt{2})$. D. $25(3+2\sqrt{2})$.

3.2. Wielomian $(2x^2-1)^3 - 3(x^3-2)^2 - 5x^2(x^4+1)$ jest równy wielomianowi

- A. $12x^4 + 12x^3 + x^2 - 13$. C. $12x^4 - 12x^3 - x^2 + 13$.
B. $-12x^4 + 12x^3 - x^2 - 13$. D. $-12x^4 + 12x^3 + x^2 - 13$.

3.3. Wskaż objętość sześcianu, którego krawędź ma długość równą $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

- A. $10+7\sqrt{2}$ B. $10+14\sqrt{2}$ C. $10-7\sqrt{2}$ D. $14\sqrt{2}-10$

3.4. Wykonaj potęgowanie.

- a) $(x^3)^7$, $(2y^5)^3$, $(-x^7)^3$, $(-2x^3)^4$
b) $(x-4)^2$, $(x-\sqrt{2}+1)^2$, $(x+3-\sqrt{3})^2$
c) $(3\sqrt{2}x-2\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})^2$, $\left(2\sqrt{7}x+\frac{7x}{\sqrt{7}}\right)^2$

3.5. Wykonaj potęgowanie.

- a) $(2x+1)^3$, $(2x-3)^3$, $(2x-1)^3$ c) $(x^2-1)^3$, $(x^2+2)^3$, $(x^2+1)^3$
b) $(4x-3)^3$, $(3x-4)^3$, $(4x-1)^3$ d) $(2x^2-5x)^3$, $(3x^3-1)^3$, $(2x^3-5)^3$

3.6. Wykonaj działania.

- a) $2(x-2)^3 - (2x-1)^3$ e) $(x^2+1)^3 - (x^3+1)^2$
b) $(-3-2x)^3 + (2x+3)^3$ f) $[(x+1)^2 + (2-x)(2+x)]^3$
c) $3(x-2)^3 - 2(2x-1)^3 + 4x(2x-1)^2$ g) $(x^2-2x)^3 - (x^2+2x)^3$
d) $(3x-1)^3 - 2(x+2)^3 + x(5x+1)^2$ h) $(2x^2-3x)^3 + (3x-2x^2)^3$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. D

3.2. D

3.3. C

3.4. a) x^{21} , $8y^{15}$, $-x^{21}$, $16x^{12}$

b) $x^2 - 8x + 16$,
 $x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + 3 - 2\sqrt{2}$,
 $x^2 + 2(3-\sqrt{3})x + 6(2-\sqrt{3})$
c) $18x^2 - 24x + 8$, $3x^2 + 12x + 12$,
 $63x^2$

3.5. a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$,
 $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$,
 $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
b) $64x^3 - 144x^2 + 108x - 27$,
 $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$,
 $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$
c) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$,
 $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$,
 $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$
d) $8x^6 - 60x^7 + 150x^8 - 125x^9$,
 $27x^9 - 27x^6 + 9x^3 - 1$,
 $8x^9 - 60x^6 + 150x^3 - 125$

3.6. a) $-6x^3 + 18x - 15$

b) 0

c) $3x^3 - 10x^2 + 28x - 22$

d) $50x^3 - 29x^2 - 14x - 17$

e) $3x^4 - 2x^3 + 3x^2$

f) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

g) $-12x^5 - 16x^3$

h) 0

- 3.7. a)** $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
b) $(5 + x)(25 - 5x + x^2)$
c) $x^3(4x - 1)(16x^2 + 4x + 1)$
d) $-2(3x^2 + 1)$
e) $9x(x^2 - 3x + 9)$
f) $2(x - 4)(49x^2 + 16x + 19)$

- 3.8. a)** $5x^4 - 22x^3 + 56x^2 - 7x + 2$
b) $-2x^4 - 4x^3 + 22x^2 - 4x + 5$
c) $13x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 10x + 18$
d) $-x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$
e) $5x^4 - 26x^3 - 34x^2 - 8x$
f) $8x^3 - 20x^2 + 8x + 6$

- 3.9. a)** $W(x) = 3x^2 - 4$,
 $W(\sqrt{3}) = 5$
b) $W(x) = -x + 1$,
 $W(1 - \sqrt{7}) = \sqrt{7}$
c) $W(x) = 12x - 4$,
 $W\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{10} + 4}\right) =$
 $= 2(2 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})$

- 3.10. a)** $W(x) =$
 $= x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 11x + 5$,
 $W\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{16}$
b) $W(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x - 35$,
 $W(-\sqrt{2}) = -41$
c) $W(x) = 3x^4 + 6x^2 - 8$,
 $W(\sqrt{3}) = 37$

- 3.11.** $a = -2$, $b = -18$

3.7. Zastosuj wzory na sumę lub różnicę sześcianów i przekształć wielomian.

- a) $8x^3 - 27$ d) $(x - 1)^3 - (x + 1)^3$
b) $125 + x^3$ e) $(2x - 3)^3 + (x + 3)^3$
c) $64x^6 - x^3$ f) $(5x - 3)^3 - (3x + 5)^3$

3.8. Wykonaj działania.

- a) $(x^2 + 3x - 1)^2 + (7x - 2x^2)^2 - x + 1$
b) $2(x^2 - x + 1)^2 - (2x^2 - 5)^2 - 4(x^2 - 7)$
c) $(2x^2 - x - 3)^2 + (3x^2 - x - 2)^2 + 5(2x - 1)^2$
d) $\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2 - \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 1)^2 - 3\frac{1}{2}$
e) $(3x^2 - x - 1)^2 - (2x^2 + 5x + 1)^2$
f) $(x^2 + x - 4)^2 - (x^2 - 3x + 2)^2 + 2(2x - 3)$

3.9. Przekształć wielomian $W(x)$ do prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = x_0$.

- a) $W(x) = (x\sqrt{7} - 1)(x\sqrt{7} + 1) - (2x + 3)^2 + 4\left(3x + \sqrt{2\frac{1}{4}}\right)$ $x_0 = \sqrt{3}$
b) $W(x) = (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) - \frac{1}{2}(1 - 2x^2) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ $x_0 = 1 - \sqrt{7}$
c) $W(x) = (2x + 1)^2 - 2(x - 2)^2 + 3 - 2x^2$ $x_0 = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{10} + 4}$

3.10. Przekształć wielomian $W(x)$ do prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = x_0$.

- a) $W(x) = (x^2 - 5x + 3)^2 - 4(2x - 1)^2 + 3x$ $x_0 = \frac{1}{2}$
b) $W(x) = 2(x^2 - 4)(x^2 + 4) - 3(x^2 - x - 1)^2 - 2x(x + 1)^2$ $x_0 = -\sqrt{2}$
c) $W(x) = (2x^2 - 3x + 1)^2 - (x^2 + x - 3)^2 + 2x(7x^2 - 6x)$ $x_0 = \sqrt{3}$

3.11. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x + 1$, $P(x) = x + a$

i $Q(x) = 8x^4 - 4x^3 + bx^2 - 11x - 2$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $(W(x))^3 \cdot P(x) = Q(x)$.

* **3.12.** Wielomian $W(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ jest kwadratem wielomianu $Q(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz b i c .

$$\begin{aligned} \mathbf{3.12.} \quad (Q(x))^2 &= (x^2 + bx + c)^2 = x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2bx^3 + 2cx^2 + 2bcx = \\ &= x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2 \\ W(x) &= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\ 2b &= -6 \Leftrightarrow b = -3 \\ b^2 + 2c &= 13 \Rightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2 \\ \text{Odp.: } W(x) &= (Q(x))^2 \Leftrightarrow (b = -3, c = 2) \end{aligned}$$

Pojedynek na równania trzeciego stopnia

Problem równań trzeciego stopnia trapił uczonych co najmniej od czasów Archimedesesa. Dopiero w XVI w. odkryto metodę ich rozwiązywania, a wiąże się z tym pełna dramaturgii historia.

Dwaj główni bohaterowie



Niccolò Tartaglia [czyt. tartalja] (1500?–1557), włoski matematyk, pochodzący z bardzo biednej rodziny. Samouk. Naprawdę nazywał się Fontana, ale posługiwał się przydomkiem Tartaglia (po włosku „jąkała”), gdyż na skutek ran gardła

odniesionych w dzieciństwie miał kłopoty z mówieniem. Nauczyciel matematyki, autor pierwszych matematycznych książek o artylerii i fortyfikacjach.



Gerolamo Cardano (1501–1576), włoski matematyk, lekarz, filozof, profesor uniwersytetu w Bolonii. Pochodzący z bogatej rodziny,

przyjaciół Leonarda da Vinci, autor ponad 200 dzieł.



Dramat w siedmiu aktach



Prolog

Scipio del Ferro, profesor Uniwersytetu w Bolonii, zna sposób rozwiązywania równań typu $x^3 + px = q$ i na łożu śmierci przekazuje go swojemu uczniowi. **Antonio Maria Fior** wykorzystuje tę wiedzę do wygrywania **pojedynków naukowych**.

W XVI w. we Włoszech popularne były pojedynki naukowe. Polegały one na rozwiązywaniu w określonym czasie zestawu zadań przekazanych przez przeciwnika. Ten, kto rozwiązał więcej zadań, wygrywał. Zdobywał nagrodę finansową, zwiększał swój prestiż i zyskiwał mecenasów. Między innymi dlatego naukowcy nie dzielili się swoimi odkryciami, ale strzegli ich bardzo pilnie i przekazywali co najwyżej swoim uczniom.

I

W 1525 r. Fior wyzywa na pojedynek **Tartaglię**, słyszy bowiem pogłoski, że ten odniósł sukces na polu równań sześciennych.

II

Tartaglia wyzwanie przyjmuje. Podczas pracy nad zadaniami odkrywa ogólną metodę rozwiązywania równań $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + px^2 = q$. Wszystkie zadania przeciwnika sprowadzają się do pierwszego równania, więc nie sprawiają Tartaglii żadnego problemu. Fior natomiast nie radzi sobie z dwoma pozostałymi typami równań. Tartaglia wygrywa pojedynek.

W tamtych czasach współczynniki równania i rozwiązania miały być liczbami dodatnimi, dlatego $x^3 + px = q$ było traktowane jak równanie innego typu niż $x^3 = px + q$. Nie stosowano zapisów symbolicznych i nie używano znaków $+$, $-$, $=$ ani pojęcia niewiadomej.

III

O odkryciu Tartaglii dowiaduje się **Gerolamo Cardano**. Próbuje namówić Tartaglię, by podzielił się z nim wiedzą. Ten długo odmawia, ale w końcu ulega i w 1539 r. przekazuje Cardanowi metodę rozwiązywania równań $x^3 + px = q$ i $x^3 = px + q$. Cardano przysięga dochować tajemnicy, a Tartaglia nie podaje rozwiązań wprost, ale szyfruje je w wierszu. Cardano ma kłopoty z odszyfrowaniem wiersza i musi prosić Tartaglię o pomoc.

IV

Cardano pracuje nad dziełem *Ars magna*. Pomaga mu w tym jego uczeń, Ludovico Ferrari. Ferrari znajduje metodę rozwiązywania równań czwartego stopnia.

V

W 1545 r. Cardano wydaje książkę *Ars magna*, a w niej opisuje m.in. metodę Tartaglii. Oczywiście nie szyfrem, tylko wprost. Rozpoczyna się batalia Tartaglii o prawo do odkrycia.

VI

Cardano nie odpowiada na oskarżenia Tartaglii. Zamiast tego Ferrari wyzywa Tartaglię na pojedynek naukowy.

VII

Pojedynek odbywa się w 1548 r., Tartaglia go przegrywa.



Epilog

Dzisiaj metodę szukania pierwiastków równania trzeciego stopnia opracowaną przez Tartaglię nazywamy **wzorami Cardano**.

4. Równania wielomianowe

Umiejętności:

- rozwiązanie równań wielomianowych

Poznaliśmy już definicję pierwiastka trójmianu kwadratowego. Podobnie określamy pierwiastek dowolnego wielomianu.

Definicja

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę a , dla której $W(a) = 0$.

Na przykład liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 8$,

bo $W(2) = 2^3 - 8 = 0$,

a liczby 0, 1 i -1 są pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^3 - x$,

bo $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$.

Definicja

Równaniem wielomianowym (algebraicznym) nazywamy równanie postaci $W(x) = 0$, w którym $W(x)$ jest wielomianem. **Stopniem równania** nazywamy stopień występującego w nim wielomianu.

Na przykład równanie $x^3 - x = 0$ jest równaniem stopnia 3, a równanie $x^5 + 1 = 0$ jest równaniem stopnia 5.

Rozwiązanie równania $W(x) = 0$ oznacza znalezienie wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$.

Ogólne wzory na pierwiastki wielomianów stopnia trzeciego odkrył w XVI w. włoski matematyk  **Niccolò Tartaglia**. Wzory te jednak noszą nazwę **wzorów Cardana**, od nazwiska innego włoskiego matematyka i lekarza, który w 1545 r. opublikował je (bez zgody Tartaglii) w swojej książce. Podał tam również metodę (znalezioną przez Ferrariego, który był jego uczniem) rozwiązywania równania czwartego stopnia poprzez sprowadzenie go do równania stopnia trzeciego.

Nie podamy ogólnych wzorów na pierwiastki wielomianów stopni wyższych niż drugi. Dla stopni trzeciego i czwartego takie ogólne wzory istnieją, ale są bardzo skomplikowane. Udowodniono natomiast, że dla równań stopnia wyższego niż czwarty

ZZ i MKP

tematy 2.5–2.7

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

 **Generator**
testów i sprawdzianów

wzorów na pierwiastki nie ma. Tylko nieliczne typy równań wyższych stopni dają się rozwiązać w prosty sposób. W pozostałych przypadkach można szukać różnymi metodami przybliżeń pierwiastków i najczęściej, korzystając z pomocy komputerów, znajduje się je z zadaną wcześniej dokładnością.

Autorem ostatecznego rozstrzygnięcia problemu rozwiązywalności równań wielomianowych jest wybitny matematyk francuski **Évariste Galois** (1811–1832). Żył bardzo krótko, ale jego naukowe osiągnięcia wyprzedziły stan ówczesnej matematyki o kilkadziesiąt lat. Zajmował się też polityką i jako rewolucjonista trafił do więzienia. Zginął w pojedynku. Jego życie zostało opisane w książce Leopolda Infelda *Wybrańcy bogów*.



Zajmiemy się teraz szukaniem rozwiązań równań stopnia wyższego niż drugi w przypadkach, gdy cel ten można osiągnąć w stosunkowo prosty sposób. Najprościej, podobnie jak w równaniach kwadratowych, znajduje się pierwiastki równania $W(x) = 0$ wówczas, gdy wielomian W jest zapisany w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego.

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

Rozwiążemy równanie $(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$.

Rozwiązanie

Iloczyn ma wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik w tym iloczynie ma wartość 0. Zatem aby wyznaczyć pierwiastki równania, wystarczy znaleźć pierwiastki poszczególnych czynników. Mamy więc:

$$x - 1 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0, \text{ czyli} \\ x = 1 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -2$$

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby: 1, 3 i -2.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Wyznamy pierwiastki wielomianu $Q(x) = x(x + 3)^2$.

Rozwiązanie

$$Q(x) = 0 \\ x(x + 3)^2 = 0 \\ x = 0 \text{ lub } x = -3$$

Jeśli n jest dodatnią liczbą naturalną, to $(x - a)^n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$.

Odp.: Pierwiastkami wielomianu Q są liczby 0 i -3.

◀ 4.4. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

- $W(x) = 2(x - 7)(x + 5)(0,5x - 1)$
- $W(x) = (0,02 - 0,1x)(5x - 2)$
- $W(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)\left(3\frac{1}{3}x - 2\right)$
- $W(x) = (x + \sqrt{2})(2\sqrt{2}x - 2)(3 + x\sqrt{3})$
- $W(x) = 0,1x(2x - 5)(3x + 0,6)$
- $W(x) = -4x^3(x + 1)(x + 6)^2$

Odp.: a) -5, 2, 7

b) 0,2; 0,4

c) $-1\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$

d) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $-\frac{1}{5}, 0, 2\frac{1}{2}$

f) -6, -1, 0

◀ 4.5. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

- $Z(x) = 4(x - 3)(x^2 - 1)$
- $Z(x) = -2(x + 5)^2(x^2 - 6x + 9)$
- $Z(x) = 3x(x^2 - 5x + 6)(2x + 8)$
- $Z(x) = (x^3 - 8)(x^2 + x - 6)$
- $Z(x) = 5(x^3 + 27)(x^2 - 9)$
- $Z(x) = (2x + 3)(x^2 - x - 2)$
- $Z(x) = (8x^3 - 64)(x^2 - 9)$
- $Z(x) = (2x - 6)(x^2 + 11x + 10)$

Odp.: a) -1, 1, 3

b) -5, 3

c) -4, 0, 2, 3

d) -3, 2

e) -3, 3

f) $-1\frac{1}{2}, -1, 2$

g) -3, 2, 3

h) -10, -1, 3

◀4.6. Napisz przykład wielomianu, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

- a) $-2, 5, 1$
 b) $-3, -2, 0, 2$
 c) $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 4, -\sqrt{7}$
 d) $3, -1, \frac{2}{5}$

Odp.: a) np. $(x+2)(x-5)(x-1)$

b) np. $(x+3)(x+2)^2(x-2x)$

c) np. $2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot (x-4)(x+\sqrt{7})$

d) np. $5(x-3)(x+1)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

◀4.11. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -x^3 + a_2x^2 + 5x + a_0$. Wyznacz współczynniki a_2 i a_0 tego wielomianu.

Odp.: $a_2 = -2, a_0 = 6$

Przykład 3 ◀ zad. 4.6

Napiszemy wielomian, który ma dokładnie trzy pierwiastki: 7, 4 i -2 .

Rozwiązanie

Najprostszym rozwiązaniem jest $W(x) = (x-7)(x-4)(x+2)$, ale wielomianów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele. Oto kilka innych:

$$P(x) = 3(x-7)(x-4)(x+2)$$

$$T(x) = (x-7)^2(x-4)^3(x+2)$$

$$Q(x) = (x-7)(x-4)(x+2)(x^2+1)$$

$$Z(x) = \sqrt{3}(x-7)(x-4)^{125}(x+2)(x^4+2)$$

W każdym wielomianie spełniającym warunki naszego zadania **musi** wystąpić iloczyn $(x-7)(x-4)(x+2)$. Jeżeli chcemy tworzyć inne rozwiązania, to możemy:

- mnożyć iloczyn $(x-7)(x-4)(x+2)$ przez dowolną liczbę różną od zera – tak jak w wielomianie P ,
- poszczególne czynniki iloczynu $(x-7)(x-4)(x+2)$ podnosić do dowolnych potęg naturalnych dodatnich – tak jak w wielomianie T ,
- mnożyć iloczyn $(x-7)(x-4)(x+2)$ przez czynnik, który nie ma innych pierwiastków – tak jak w wielomianie Q .

Przykład 4 ◀ zad. 4.11

Wyznamy współczynnik a_0 wielomianu $W(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + a_0$ tak, aby jednym z pierwiastków wielomianu W była liczba -1 .

Rozwiązanie

$$W(-1) = 0, \text{ zatem}$$

$$-2 - 1 - 5 + a_0 = 0 \text{ i stąd } a_0 = 8$$

Odp.: $a_0 = 8$

Rozkład wielomianu na czynniki

Wiemy już, że jeżeli wielomian W jest zapisany w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego, to bez problemu można rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$. Dlatego zajmijmy się teraz rozkładem wielomianu na czynniki. Nie wszystkie wielomiany można rozłożyć na czynniki liniowe. Przykładami takich nierozkładalnych wielomianów są trójmiany kwadratowe, których wyróżnik (Δ) jest ujemny, np. x^2+2 , x^2+x+1 .

Podamy (bez dowodu) twierdzenie dotyczące rozkładu wielomianu na czynniki.

Twierdzenie

Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Zatem **jedynie** wielomiany, których nie można rozłożyć na czynniki, to trójmiany kwadratowe o ujemnym wyróżniku.

Wniosek

Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.

Wielomian stopnia parzystego może nie mieć pierwiastków. Jest wówczas iloczynem wyłącznie nierozkładalnych trójmianów kwadratowych.

Tylko niektóre wielomiany stopnia wyższego niż 2 można w prosty sposób rozłożyć na czynniki. Pokażemy przykłady takich wielomianów.

Przykład 5 ◀ zad. 4.14

Rozłożymy na czynniki podany wielomian.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= x^3 - 2x^2 + x && \leftarrow \text{wspólny czynnik } x \text{ wyłączamy przed nawias} \\ W(x) &= x(x^2 - 2x + 1) && \leftarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } W(x) = x(x - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } W(x) &= 2x^4 + x^3 + 5x^2 && \leftarrow \text{wspólny czynnik } x^2 \text{ wyłączamy przed nawias} \\ W(x) &= x^2(2x^2 + x + 5) && \leftarrow \text{obliczamy wyróżnik } \Delta \text{ trójmianu kwadratowego} \\ \Delta &= 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 && \leftarrow \Delta < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } W(x) = x^2(2x^2 + x + 5)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } W(x) &= 3x^3 - 3x^2 - 6x && \leftarrow \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \\ W(x) &= 3x(x^2 - x - 2) && \leftarrow \text{obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego} \\ x_1 &= -1, \quad x_2 = 2 && \leftarrow \text{zapisujemy trójmian w postaci iloczynowej} \\ x^2 - x - 2 &= (x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } W(x) = 3x(x + 1)(x - 2)$$

◀ **4.14.** Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

$$\text{a) } P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$$

$$\text{b) } P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x$$

$$\text{c) } P(x) = 0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x$$

$$\text{d) } P(x) = 5\pi x^4 - 10\pi x^3 - 15\pi x^2$$

$$\text{e) } P(x) = 0,2x^5 + 0,6x^4 - 2x^3$$

$$\text{f) } P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$$

$$\text{Odp.: a) } P(x) = 2x(x - 2)(x + 3)$$

$$\text{b) } P(x) = x(7x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{c) } P(x) = 0,5x(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{d) } P(x) = 5\pi x^2(x + 1)(x - 3)$$

$$\text{e) } P(x) = 0,2x^3(x - 2)(x + 5)$$

$$\text{f) } P(x) = -x(x - 1)(x - 2)$$

$$\text{d) } W(x) = x^4 + 2x$$

$$W(x) = x(x^3 + 2) \quad \longleftarrow a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

$$\text{Odp.: } W(x) = x(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

Niepełny kwadrat różnicy $a^2 - ab + b^2$, o ile $a \neq 0$ i $b \neq 0$, jest wielomianem nierozkładalnym. 
Jeżeli bowiem w wyrażeniu $a^2 - ab + b^2$ literę a potraktujemy jako zmienną, natomiast b jako liczbę, to wyróżnik Δ takiego trójmianu jest ujemny, bo $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2$. Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w wypadku niepełnego kwadratu sumy, czyli wyrażenia $a^2 + ab + b^2$.

Przyjrzyjmy się ponownie rozkładowi na czynniki wielomianu z przykładu 5c:

$$W(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$$

Zauważmy, że można ten rozkład przedstawić w wielu postaciach, np.:

$$(1) \quad W(x) = 3x(x+1)(x-2)$$

$$(2) \quad W(x) = x(3x+3)(x-2)$$

$$(3) \quad W(x) = 3x(x-2)(x+1)$$

$$(4) \quad W(x) = 3(x+1)x(x-2)$$

które różnią się w rzeczywistości **tylko kolejnością** czynników, ewentualnie położeniem stałej (w rozkładzie (2) liczba 3 nie jest wyłączona z czynnika $3x+3$).

Tę własność rozkładu wielomianu na czynniki formułuje się w postaci twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Rozkład wielomianu na czynniki jest jednoznaczny (z dokładnością do stałej wyłączonej przed nawias).

Dzięki podanym wyżej twierdzeniom mamy **gwarancję istnienia rozkładu wielomianu** na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Twierdzenia te nie wskazują natomiast **sposobu** postępowania prowadzącego do otrzymania takiego rozkładu. 

W dotychczasowych przykładach można było od razu skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia lub wyłączyć wspólny czynnik ze wszystkich składników wielomianu. W następnych przykładach, aby wyłączyć czynnik, będziemy najpierw odpowiednio grupować wyrazy wielomianu.

Przykład 6 ◀ zad. 4.15

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$.

Rozwiązanie

Popatrzymy na pierwsze dwa składniki tego wielomianu: $x^3 + 3x^2$. Jeżeli wyłączymy przed nawias x^2 , to otrzymamy $x^2(x + 3)$. W nawiasie mamy wówczas sumę identyczną jak ta, którą tworzą ostatnie dwa wyrazy wielomianu.

$$W(x) = x^2(x + 3) + x + 3$$

$$W(x) = x^2(x + 3) + 1 \cdot (x + 3) \quad \leftarrow \text{wspólny czynnik } x + 3 \text{ wyłączamy przed nawias}$$

$$W(x) = (x + 3)(x^2 + 1) \quad \leftarrow \text{czynnik } x^2 + 1 \text{ jest nierozkładalny}$$

$$\text{Odp.: } W(x) = (x + 3)(x^2 + 1)$$

Przykład 7 ◀ zad. 4.16

Rozłożymy na czynniki dany wielomian $W(x)$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

$$W(x) = (x^3 - 2x^2) - (4x - 8) \quad \leftarrow \text{grupujemy wyrazy}$$

$$W(x) = x^2(x - 2) - 4(x - 2)$$

$$W(x) = (x - 2)(x^2 - 4) \quad \leftarrow \text{korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów}$$

$$W(x) = (x - 2)(x - 2)(x + 2)$$

$$\text{Odp.: } W(x) = (x - 2)^2(x + 2)$$



$$\text{b) } W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$$

Pokażemy dwa sposoby grupowania wyrazów tego wielomianu.

I sposób

$$\begin{aligned} W(x) &= (7x^3 - 21x) + (2x^2 - 6) = 7x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = \\ &= (x^2 - 3)(7x + 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(7x + 2) \end{aligned}$$

II sposób

$$\begin{aligned} W(x) &= (7x^3 + 2x^2) - (21x + 6) = x^2(7x + 2) - 3(7x + 2) = \\ &= (7x + 2)(x^2 - 3) = (7x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Mamy już ostateczny rozkład wielomianu W . Można jeszcze wyłączyć przed nawias 7, aby wszystkie czynniki były zapisane w postaci wygodnej do odczytania miejsc zerowych wielomianu.

$$\text{Odp.: } W(x) = 7(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})\left(x + \frac{2}{7}\right)$$

◀4.15. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

$$\text{a) } W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\text{b) } W(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

$$\text{c) } W(x) = 125 + 75x + 15x^2 + x^3$$

$$\text{d) } W(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16$$

$$\text{e) } W(x) = -3x^3 - 27x^2 - 81x - 81$$

$$\text{f) } W(x) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$\text{Odp.: a) } W(x) = (x - 2)^3$$

$$\text{b) } W(x) = (2x - 3)^3$$

$$\text{c) } W(x) = (5 + x)^3$$

$$\text{d) } W(x) = 2(x + 2)^3$$

$$\text{e) } W(x) = -3(x + 3)^3$$

$$\text{f) } W(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

◀4.16. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

$$\text{a) } Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$\text{b) } Q(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

$$\text{c) } Q(x) = 8x^3 - 20x^2 - 18x + 45$$

$$\text{d) } Q(x) = 11\frac{1}{4}x^3 - 6\frac{3}{4}x^2 - 20x + 12$$

$$\text{e) } Q(x) = 14x^3 + 2x^2 - 21x - 3$$

$$\text{f) } Q(x) = 6x^3 + \sqrt{8}x^2 - 18x - 6\sqrt{2}$$

$$\text{g) } Q(x) = \sqrt{3}x^3 - x^2 + \sqrt{48}x - 4$$

$$\text{h) } Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - 3x^2 + 1\frac{1}{2}x$$

$$\text{Odp.: a) } Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

$$\text{b) } Q(x) = (x - 5)(x - 2)(x + 2)$$

$$\text{c) } Q(x) = (2x - 5)(2x - 3)(2x + 3)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } Q(x) &= \\ &= (5x - 3)\left(1\frac{1}{2}x - 2\right)\left(1\frac{1}{2}x + 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } Q(x) &= \\ &= \frac{1}{2}(7x + 1)(2x - \sqrt{6})(2x + \sqrt{6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } Q(x) &= \\ &= 2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(3x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{g) } Q(x) = (\sqrt{3}x - 1)(x^2 + 4)$$

$$\begin{aligned} \text{h) } Q(x) &= \\ &= x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

◀ 4.19. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^3 + 30x^2 + 75x = 0$
 b) $18x + 12x^2 + 2x^3 = 0$
 c) $9\pi x - 6\pi x^2 + \pi x^3 = 0$
 d) $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$
 e) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 0$
 f) $-2x^5 - 28x^4 - 98x^3 = 0$
 g) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x = 0$
 h) $\sqrt{2}x^7 - 4x^6 - 6\sqrt{2}x^5 = 0$

Odp.: a) $x = 0$ lub $x = -5$ b) $x = 0$ lub $x = -3$ c) $x = 0$ lub $x = 3$ d) $x = 0$ lub $x = 4$ e) $x = 0$ lub $x = -3$ f) $x = 0$ lub $x = -7$ g) $x = -3$ lub $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$ h) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = 0$
lub $x = 3\sqrt{2}$

◀ 4.22. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 7x + 6$
 b) $W(x) = x^3 - 4x - 3$
 c) $W(x) = x^3 - 21x - 20$
 d) $W(x) = x^3 - 12x + 11$

Odp.:

a) $W(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$ b) $W(x) = (x+1) \cdot$ $\cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ c) $W(x) = (x+4)(x+1)(x-5)$ d) $W(x) = (x-1) \cdot$ $\cdot \left(x - \frac{-1-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}\right)$

Przykład 8 ◀ zad. 4.19

Rozwiążemy podane równanie, rozkładając jego lewą stronę na czynniki.

Rozwiązanie

a) $5x^3 - 4x^2 - 10x + 8 = 0$

$$(5x^3 - 10x) - (4x^2 - 8) = 0$$

$$5x(x^2 - 2) - 4(x^2 - 2) = 0$$

$$(x^2 - 2)(5x - 4) = 0, \text{ czyli } 5(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$$

Odp.: $x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{4}{5}$

b) $x^4 + \sqrt{3}x^3 - x^2 - \sqrt{3}x = 0$

$$x(x^3 + \sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x[(x^3 - x) + (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3})] = 0$$

$$x[x(x^2 - 1) + \sqrt{3}(x^2 - 1)] = 0$$

$$x(x^2 - 1)(x + \sqrt{3}) = 0, \text{ czyli } x(x-1)(x+1)(x + \sqrt{3}) = 0$$

Odp.: $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = -1$ lub $x = -\sqrt{3}$

Przykład 9 ◀ zad. 4.22

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x)$ ma nieparzystą liczbę składników, zatem grupowanie wyrazów nie doprowadzi do wyłonienia wspólnego czynnika. Przedstawmy więc jeden z tych składników jako sumę dwóch: $3x^2 = x^2 + 2x^2$. Zatem:

$$W(x) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2$$

$$W(x) = (x^3 - x^2) - (2x^2 - 2)$$

$$W(x) = x^2(x - 1) - 2(x^2 - 1)$$

$$W(x) = x^2(x - 1) - 2(x - 1)(x + 1)$$

$$W(x) = (x - 1)[x^2 - 2(x + 1)], \text{ czyli } W(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$W(x) = (x - 1)(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$$

← obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego

Odp.: $W(x) = (x - 1)(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$

Metoda podstawiania

Często podczas rozkładania wielomianu na czynniki nie można skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia, wyłączyć wspólnego czynnika ani też pogrupować wyrazów wielomianu. W niektórych sytuacjach możemy posłużyć się **metodą podstawiania**.

Przykład 10 ◀ zad. 4.24

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + x^2 - 20$.

Rozwiązanie

Podstawiamy $x^2 = t$. Wówczas wielomian W staje się zależny od zmiennej t i przyjmuje postać:

$$W(t) = t^2 + t - 20 \quad \leftarrow \text{obliczamy wyróżnik trójkianu kwadratowego zmiennej } t: \\ \Delta = 81$$

$$t_1 = -5, t_2 = 4 \quad \leftarrow \text{obliczamy jego pierwiastki}$$

$$t^2 + t - 20 = (t + 5)(t - 4) \quad \leftarrow \text{zapisujemy trójkian w postaci iloczynowej}$$

Zatem $W(t) = (t + 5)(t - 4)$. Wracamy do podstawienia $x^2 = t$:

$$W(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 4)$$

Czynnik $x^2 + 5$ jest nierozkładalny, a czynnik $x^2 - 4$ rozkładamy, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy ostateczny rozkład wielomianu W na czynniki.

$$\text{Odp.: } W(x) = (x^2 + 5)(x - 2)(x + 2)$$

Przykład 11 ◀ zad. 4.25

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = (x^2 - 4x)^2 - 3x^2 + 12x - 10$.

Rozwiązanie

Podstawiamy $x^2 - 4x = t$. Wówczas:

$$W(t) = t^2 - 3t - 10 \quad \leftarrow \Delta = 49$$

$$t_1 = 5, t_2 = -2 \quad \leftarrow \text{obliczamy pierwiastki trójkianu kwadratowego zmiennej } t$$

$$t^2 - 3t - 10 = (t - 5)(t + 2) \quad \leftarrow \text{zapisujemy trójkian w postaci iloczynowej}$$

Zatem $W(t) = (t - 5)(t + 2)$. Wracamy do podstawienia $x^2 - 4x = t$:

$$W(x) = (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x + 2)$$

Obydwa trójkiany zmiennej x zapisujemy w postaciach iloczynowych:

$$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5), \quad x^2 - 4x + 2 = (x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$$

$$\text{Odp.: } W(x) = (x + 1)(x - 5)(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$$

◀ 4.24. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

$$\text{a) } W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$\text{b) } W(x) = x^4 - 11x^2 + 18$$

$$\text{c) } W(x) = x^4 + 12x^2 - 13$$

$$\text{d) } W(x) = -2x^4 - 12x^2 - 16$$

$$\text{e) } W(x) = 4x^4 - 25x^2 + 6$$

$$\text{f) } W(x) = -36x^4 - 65x^2 + 36$$

Odp.:

$$\text{a) } W(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\text{b) } W(x) = (x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-3)$$

$$\text{c) } W(x) = (x-1)(x+1)(x^2+13)$$

$$\text{d) } W(x) = -2(x^2+2)(x^2+4)$$

$$\text{e) } W(x) = 4(x+\sqrt{6}) \cdot$$

$$\cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - \sqrt{6})$$

$$\text{f) } W(x) = -36\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{9}{4}\right)$$

◀ 4.25. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

$$\text{a) } W(x) = (x^2 + 4x + 5)^2 - 3(x^2 + 4x + 5) + 2$$

$$\text{b) } W(x) = (x^2 - 6x)^2 + 4x^2 - 24x - 5$$

$$\text{c) } W(x) = (x^2 - x + 3)^2 + 2x^2 - 2x - 29$$

$$\text{d) } W(x) = (\sqrt{2}x^2 - 5\sqrt{2}x)^2 + x^2 - 5x - 1$$

Odp.:

$$\text{a) } W(x) = (x+2)^2(x+1)(x+3)$$

$$\text{b) } W(x) = (x-1)(x-5) \cdot (x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})$$

$$\text{c) } W(x) = (x+1)(x-2)(x^2-x+10)$$

$$\text{d) } W(x) = 2\left(x - \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$$

◀4.34. Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^4 + 9$

b) $W(x) = 16x^4 + 1$

c) $W(x) = x^4 + x^2 + 1$

d) $W(x) = x^4 + 3x^2 + 9$

Odp.: a) $W(x) = x^4 + 9 =$
 $= (x^4 + 6x^2 + 9) - 6x^2 =$
 $= (x^2 + 3)^2 - (\sqrt{6} \cdot x)^2 =$
 $= (x^2 + 3 + \sqrt{6} \cdot x) \cdot$
 $\cdot (x^2 + 3 - \sqrt{6} \cdot x) =$
 $= (x^2 + \sqrt{6} \cdot x + 3)(x^2 - \sqrt{6} \cdot x + 3)$

b) $W(x) = 16x^4 + 1 =$
 $= (16x^4 + 8x^2 + 1) - 8x^2 =$
 $= (4x^2 + 1)^2 - (2\sqrt{2} \cdot x)^2 =$
 $= (4x^2 + 1 + 2\sqrt{2} \cdot x) \cdot$
 $\cdot (4x^2 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot x) =$
 $= (4x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot$
 $\cdot (4x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 1)$

c) $W(x) = x^4 + x^2 + 1 =$
 $= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 =$
 $= (x^2 + 1)^2 - x^2 =$
 $= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) =$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

d) $W(x) = x^4 + 3x^2 + 9 =$
 $= (x^4 + 6x^2 + 9) - 3x^2 =$
 $= (x^2 + 3)^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2 =$
 $= (x^2 + 3 + \sqrt{3} \cdot x) \cdot$
 $\cdot (x^2 + 3 - \sqrt{3} \cdot x) =$
 $= (x^2 + \sqrt{3} \cdot x + 3) \cdot$
 $\cdot (x^2 - \sqrt{3} \cdot x + 3)$

Na koniec pokażemy przykład rozkładu na czynniki wielomianu parzystego stopnia, który nie ma miejsc zerowych.

Przykład 12 ◀ zad. 4.34

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + 1$.

Rozwiązanie

Zastosujemy tzw. dopełnienie do kwadratu sumy.

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \left[(x^2)^2 + 2x^2 + 1 \right] - 2x^2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = & \leftarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

Oba czynniki są nierozkładalne.

Odp.: $W(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Suma wszystkich pierwiastków równania $2x(x - 2)(x + 9)(x - 11) = 0$ jest równa

- A. 0. B. 4. C. 22. D. -4.

4.2. Wskaż rozwiązania równania $x^3(3x + 1)(x^3 - 8) = 0$.

- A. -8, 0, -1 B. -8, 0, $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$, 0, 2 D. 0, $\frac{1}{3}$, 2

4.3. Wskaż wielomian, w którego rozkładzie na czynniki występuje $x - 3$.

- A. $W(x) = x^3 - 3x$ C. $W(x) = 2x^5 - 18x^3$
 B. $W(x) = x^4 + 9x^2$ D. $W(x) = x^6 - 9x^5$

4.4. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

- a) $W(x) = 2(x - 7)(x + 5)(0,5x - 1)$ d) $W(x) = (x + \sqrt{2})(2\sqrt{2}x - 2)(3 + x\sqrt{3})$
 b) $W(x) = (0,02 - 0,1x)(5x - 2)$ e) $W(x) = 0,1x(2x - 5)(3x + 0,6)$
 c) $W(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)\left(3\frac{1}{3}x - 2\right)$ f) $W(x) = -4x^3(x + 1)(x + 6)^2$

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. B

4.2. C

4.3. C

4.4. a) -5, 2, 7 b) 0,2; 0,4 c) $-1\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ d) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{1}{5}, 0, 2\frac{1}{2}$ f) -6, -1, 0

4.5. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

- a) $Z(x) = 4(x-3)(x^2-1)$ e) $Z(x) = 5(x^3+27)(x^2-9)$
 b) $Z(x) = -2(x+5)^2(x^2-6x+9)$ f) $Z(x) = (2x+3)(x^2-x-2)$
 c) $Z(x) = 3x(x^2-5x+6)(2x+8)$ g) $Z(x) = (8x^3-64)(x^2-9)$
 d) $Z(x) = (x^3-8)(x^2+x-6)$ h) $Z(x) = (2x-6)(x^2+11x+10)$

4.6. Napisz przykład wielomianu, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

- a) $-2, 5, 1$ b) $-3, -2, 0, 2$ c) $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 4, -\sqrt{7}$ d) $3, -1, \frac{2}{5}$

4.7. Podaj przykłady trzech różnych wielomianów, których pierwiastkami są tylko liczby: $\sqrt{7}, 4, -2, -5$.

4.8. Napisz przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

- a) $-7, -2, 1$ b) $0, 4$ c) $-3, 3$ d) 3

4.9. Podaj przykład wielomianu, którego pierwiastkami

- a) są trzy kolejne liczby nieparzyste. c) są dwie pary liczb przeciwnych.
 b) są dwie liczby pierwsze. d) jest pięć kolejnych liczb całkowitych.

4.10. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są liczby: $-1, 3$ i 4 . Zapisz ten wielomian w postaci $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

4.11. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -x^3 + a_2x^2 + 5x + a_0$. Wyznacz współczynniki a_2 i a_0 tego wielomianu.

4.12. Podaj przykład wielomianu W , którego pierwiastkami są liczby $1, 2$ oraz 3 i który spełnia warunek $W(4) = 12$.

4.13. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 2x^2$ d) $W(x) = x^3 - 4x$
 b) $W(x) = 3x^2 - 3x$ e) $W(x) = -3x^3 + 27x^2$
 c) $W(x) = -7x^3 + 14x^2$ f) $W(x) = -x^3 + 4x^2$

4.14. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ d) $P(x) = 5\pi x^4 - 10\pi x^3 - 15\pi x^2$
 b) $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x$ e) $P(x) = 0,2x^5 + 0,6x^4 - 2x^3$
 c) $P(x) = 0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x$ f) $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

4.5. a) $-1, 1, 3$

b) $-5, 3$

c) $-4, 0, 2, 3$

d) $-3, 2$

e) $-3, 3$

f) $-1\frac{1}{2}, -1, 2$

g) $-3, 2, 3$

h) $-10, -1, 3$

4.6. a) np. $(x+2)(x-5)(x-1)$

b) np. $(x+3)(x+2)^2(x-2x)$

c) np. $2x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right) \cdot (x-4)(x+\sqrt{7})$

d) np. $5(x-3)(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)$

4.7.

np.: $7(x-\sqrt{7})(x-4)(x+2)(x+5),$
 $(x-\sqrt{7})^2(x-4)(x+2)(x+5),$
 $(x-\sqrt{7})(x-4)^4(x+2)(x+5)^5$

4.8. a) np. $8(x+7)(x+2)(x-1)$

b) np. $x^2(x-4)$

c) np. $(x+3)(x-3)^2$

d) np. $3(x-3)^3$

4.9. a) np. $(x-3)(x-5)(x-7)$

b) np. $(x-11)(x-17)$

c) np. $(x^2-1)(x^2-8)$

d) np. $x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

4.10. np. $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x + 6$

4.11. $a_2 = -2, a_0 = 6$

4.12.

np. $W(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)$

4.13. a) $W(x) = x^2(x-2)$

b) $W(x) = 3x(x-1)$

c) $W(x) = -7x^2(x-2)$

d) $W(x) = x(x+2)(x-2)$

e) $W(x) = -3x^2(x-9)$

f) $W(x) = -x^2(x-4)$

4.14. a) $P(x) = 2x(x-2)(x+3)$

b) $P(x) = x(7x^2+2x+1)$

c) $P(x) = 0,5x(x-2)(x-3)$

d) $P(x) = 5\pi x^2(x+1)(x-3)$

e) $P(x) = 0,2x^3(x-2)(x+5)$

f) $P(x) = -x(x-1)(x-2)$

4.15. a) $W(x) = (x-2)^3$

b) $W(x) = (2x-3)^3$

c) $W(x) = (5+x)^3$

d) $W(x) = 2(x+2)^3$

e) $W(x) = -3(x+3)^3$

f) $W(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

4.16. a) $Q(x) = (x-1)(x^2+1)$

b) $Q(x) = (x-5)(x-2)(x+2)$

c) $Q(x) = (2x-5)(2x-3)(2x+3)$

d) $Q(x) = (5x-3)\left(1\frac{1}{2}x-2\right)\left(1\frac{1}{2}x+2\right)$

e) $Q(x) = \frac{1}{2}(7x+1)(2x-\sqrt{6})(2x+\sqrt{6})$

f) $Q(x) = 2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(3x+\sqrt{2})$

g) $Q(x) = (\sqrt{3}x-1)(x^2+4)$

h) $Q(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{3}\right)$

4.17. a) $Q(x) = (x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

b) $Q(x) = (x-2)^2(2x+1)(4x^2-2x+1)$

c) $Q(x) = (3x+2)^2(x-1)(x^2+x+1)$

d) $Q(x) = (x-2)^2(x^2-2x+2) \cdot (x^2+2x+2)$

4.15. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

b) $W(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

c) $W(x) = 125 + 75x + 15x^2 + x^3$

d) $W(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16$

e) $W(x) = -3x^3 - 27x^2 - 81x - 81$

f) $W(x) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

4.16. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

b) $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

c) $Q(x) = 8x^3 - 20x^2 - 18x + 45$

d) $Q(x) = 11\frac{1}{4}x^3 - 6\frac{3}{4}x^2 - 20x + 12$

e) $Q(x) = 14x^3 + 2x^2 - 21x - 3$

f) $Q(x) = 6x^3 + \sqrt{8}x^2 - 18x - 6\sqrt{2}$

g) $Q(x) = \sqrt{3}x^3 - x^2 + \sqrt{48}x - 4$

h) $Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - 3x^2 + 1\frac{1}{2}x$

4.17. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

b) $Q(x) = 8x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x^2 - 4x + 4$

c) $Q(x) = 9x^5 + 12x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 12x - 4$

d) $Q(x) = x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 4x^2 - 16x + 16$

4.18. Przeczytaj tabelę. Wyznacz wielomiany, które należy wstawić w miejsce $?$.

	czynnik	czynnik	czynnik	iloczyn
czynnik	$?$	$?$	$?$	$x^3 + x^2$
czynnik	$?$	$?$	$?$	$x^3 + 5x^2 + 6x$
czynnik	$?$	$?$	$?$	$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
iloczyn	$x^3 - 2x^2$	$x^3 + 6x^2 + 9x$	$?$	

4.19. Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 + 30x^2 + 75x = 0$

b) $18x + 12x^2 + 2x^3 = 0$

c) $9\pi x - 6\pi x^2 + \pi x^3 = 0$

d) $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

e) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 0$

f) $-2x^5 - 28x^4 - 98x^3 = 0$

g) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x = 0$

h) $\sqrt{2}x^7 - 4x^6 - 6\sqrt{2}x^5 = 0$

4.20. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$

b) $4x^3 + 4x^2 - 25x - 25 = 0$

c) $\sqrt{3}x^3 - \sqrt{192} = 0$

d) $2\sqrt{2}x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 9\sqrt{2}x - 3\sqrt{3} = 0$

e) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{27} = 0$

f) $x^4 + \sqrt{2}x^3 - 4x^2 - 4\sqrt{2}x = 0$

4.18.

	czynnik	czynnik	czynnik	iloczyn
czynnik	x	x	$x+1$	$x^3 + x^2$
czynnik	x	$x+3$	$x+2$	$x^3 + 5x^2 + 6x$
czynnik	$x-2$	$x+3$	$x-3$	$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
iloczyn	$x^3 - 2x^2$	$x^3 + 6x^2 + 9x$	$x^3 - 7x - 6$	

4.19. a) $x = 0$ lub $x = -5$ **b)** $x = 0$ lub $x = -3$ **c)** $x = 0$ lub $x = 3$

d) $x = 0$ lub $x = 4$ **e)** $x = 0$ lub $x = -3$ **f)** $x = 0$ lub $x = -7$

g) $x = -3$ lub $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$ **h)** $x = -\sqrt{2}$ lub $x = 0$ lub $x = 3\sqrt{2}$

4.20. a) $x = -3$ **b)** $x = -2\frac{1}{2}$ lub $x = -1$ lub $x = 2\frac{1}{2}$ **c)** $x = 2$ **d)** $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ **e)** $x = \frac{2}{3}$

f) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$

4.21. Rozwiąż równanie.

- a) $(x-4)(x^2+x+3) + (2x-5)(x^2+x+3) = 0$
 b) $(x^2-3)(x+7) = (3-x^2)(x+1)$
 c) $(x^2+4)(x+8) = x^4-16$
 d) $(x-2)(2x+4)(2x+3) = (3-x)(x+2)(6x+9)$

4.22. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 7x + 6$ c) $W(x) = x^3 - 21x - 20$
 b) $W(x) = x^3 - 4x - 3$ d) $W(x) = x^3 - 12x + 11$

4.23. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 13x + 12 = 0$ c) $x^3 + 2x + 3 = 0$
 b) $x^3 - 111x + 110 = 0$ d) $x^3 - 5x + 4 = 0$

4.24. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ d) $W(x) = -2x^4 - 12x^2 - 16$
 b) $W(x) = x^4 - 11x^2 + 18$ e) $W(x) = 4x^4 - 25x^2 + 6$
 c) $W(x) = x^4 + 12x^2 - 13$ f) $W(x) = -36x^4 - 65x^2 + 36$

*** 4.25.** Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = (x^2 + 4x + 5)^2 - 3(x^2 + 4x + 5) + 2$
 b) $W(x) = (x^2 - 6x)^2 + 4x^2 - 24x - 5$
 c) $W(x) = (x^2 - x + 3)^2 + 2x^2 - 2x - 29$
 d) $W(x) = (\sqrt{2}x^2 - 5\sqrt{2}x)^2 + x^2 - 5x - 1$

*** 4.26.** Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ c) $(x^2 + x - 1)^2 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$
 b) $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) - 8 = 0$ d) $(x^2 + 3x + 5)^2 - 2x^2 - 6x - 13 = 0$

4.27. Suma dwóch liczb naturalnych równa się 18, a suma ich sześciątów równa się 1674. Wyznacz te liczby.

4.28. Suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest 12 razy większa od kwadratu środkowej z nich zwiększonego o 2. Wyznacz te liczby.

4.26. a) Podstawiamy $x^2 = t > 0$. Mamy: $t^2 - 2t - 3 = 0$, $\Delta = 16$, $t_1 = -1$, $t_2 = 3$.
 Stąd $x^2 = -1$ (sprzeczne) lub $x^2 = 3$, czyli $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$.

Odp.: $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

b) Podstawiamy $x^2 + 2x = t \geq -1$. Mamy: $t^2 - 7t - 8 = 0$, $\Delta = 81$, $t_1 = -1$, $t_2 = 8$.
 Stąd $x^2 + 2x + 1 = 0$ lub $x^2 + 2x - 8 = 0$, czyli $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = -4$.

Odp.: $x \in \{-4, -1, 2\}$

c) $(x^2 + x - 1)^2 - 4(x^2 + x - 1) - 5 = 0$. Podstawiamy $x^2 + x - 1 = t$.

Mamy: $t^2 - 4t - 5 = 0$, $\Delta = 36$, $t_1 = -1$, $t_2 = 5$.

Stąd $x^2 + x = 0$ lub $x^2 + x - 6 = 0$, czyli $x = 0$ lub $x = -1$ lub $x = -3$ lub $x = 2$.

Odp.: $x \in \{-3, -1, 0, 2\}$

d) $(x^2 + 3x + 5)^2 - 2(x^2 + 3x + 5) - 3 = 0$. Podstawiamy $x^2 + 3x + 5 = t$.

Mamy: $t^2 - 2t - 3 = 0$, $\Delta = 16$, $t_1 = -1$, $t_2 = 3$.

Stąd $x^2 + 3x + 6 = 0$ ($\Delta < 0$) lub $x^2 + 3x + 2 = 0$, czyli $x = -2$ lub $x = -1$.

Odp.: $x \in \{-2, -1\}$

4.21. a) $x = 3$

b) $x = -4$ lub $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$

c) $x = -3$ lub $x = 4$

d) $x = -2$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{13}{5}$

4.22. a) $W(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$

b) $W(x) = (x+1) \cdot$

$\cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

c) $W(x) = (x+4)(x+1)(x-5)$

d) $W(x) = (x-1) \cdot$

$\cdot \left(x - \frac{-1-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}\right)$

4.23. a) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 3$

b) $x = -11$ lub $x = 1$ lub $x = 10$

c) $x = -1$

d) $x = 1$ lub $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ lub

$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

4.24. a) $W(x) =$

$= (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

b) $W(x) =$

$= (x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-3)$

c) $W(x) = (x-1)(x+1)(x^2+13)$

d) $W(x) = -2(x^2+2)(x^2+4)$

e) $W(x) = 4(x+\sqrt{6}) \cdot$

$\cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-\sqrt{6})$

f) $W(x) =$

$= -36\left(x + \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x^2 + \frac{9}{4}\right)$

4.25. a) $W(x) =$

$= (x+2)^2(x+1)(x+3)$

b) $W(x) = (x-1)(x-5) \cdot$

$\cdot (x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})$

c) $W(x) =$

$= (x+1)(x-2)(x^2-x+10)$

d) $W(x) = 2\left(x - \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot$

$\cdot \left(x - \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \cdot$

$\cdot \left(x - \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$

4.27. 7 i 11**4.28.** 3, 4 i 5

4.29. $m = 3$, $n = -12$, $x = -2$

4.30. tak, $a = 6$, $b = 3$, $c = -2$

4.31. Wykres funkcji $y = w(x-2)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = w(x)$ o wektor $[2, 0]$.
Zatem pierwiastki wielomianu $y = w(x-2)$ są równe: $1+2=3$, $3+2=5$, $-5+2=-3$.

Odp.: $-3, 3, 5$

4.32. $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

a, b, c – pierwiastki $W(x)$, czyli $W(a) = 0$, $W(b) = 0$, $W(c) = 0$

Wykorzystujemy iloczynową postać wielomianu $W(x)$:

$$W(x) = (x-a)(x-b)(x-c), \text{ więc}$$

$$W(x) = (x-a)(x^2 - cx - bx + bc) =$$

$$= x^3 - cx^2 - bx^2 + bcx - ax^2 + acx +$$

$$+ abx - abc = x^3 - (a+b+c)x^2 +$$

$$+ (ab+ac+bc)x - abc$$

$$\text{Zatem } a_0 = -abc \Leftrightarrow abc = -a_0.$$

4.33. $W(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$

$$W(x) = x^2(x+5) - 9(x+5) =$$

$$= (x+5)(x+3)(x-3)$$

Jeżeli $x = 2k+1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to

$$W(2k+1) = (2k+6)(2k+4)(2k-2) =$$

$$= 8(k+3)(k+2)(k-1).$$

$$\text{Zatem } 8|W(2k+1).$$

4.34. Patrz s. 118.

4.29. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami równania $x^3 + mx^2 - 4x + n = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz współczynniki m i n , a następnie znajdź trzeci pierwiastek tego równania.

4.30. Sprawdź, czy istnieją takie wartości a, b i c , dla których wielomiany:

$$W(x) = (x-a)(x^2 - x - 6), \quad P(x) = (x-b)(x^2 - 4x - 12)$$

i $Q(x) = (x-c)(x^2 - 9x + 18)$ są równe.

* **4.31.** Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby 1, 3 i -5 . Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x-2)$.

D * **4.32.** Wykaż, że jeżeli pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ są liczby a, b, c , to $a \cdot b \cdot c = -a_0$.

D * **4.33.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej x wartość wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ jest liczbą podzielną przez 8.

* **4.34.** Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^4 + 9$

c) $W(x) = x^4 + x^2 + 1$

b) $W(x) = 16x^4 + 1$

d) $W(x) = x^4 + 3x^2 + 9$

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

B. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

C. Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

2. Rozłóż na czynniki stopnia pierwszego wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$.

3. Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$.

4. Kwadrat pewnej liczby zmniejszonej o 2 jest równy sześcianowi tej liczby. Wyznacz tę liczbę.

5. Wyznacz takie wartości a i b , aby wielomiany $W(x) = (x-a)(x^2 - 8x + 15)$ i $P(x) = (x-b)(x^2 - 2x - 15)$ były równe.

Prosto do matury

1. F, F, P

2. $W(x) = 2x(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

3. $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \sqrt{5}$

4. 1

5. $a = -3$, $b = 3$

5. Dzielenie wielomianów

Umiejętności:

- dzielenie wielomianu przez dwumian $ax + b$

Ostatnim działaniem w zbiorze wielomianów, które omówimy, jest dzielenie.

Definicja

Mówimy, że wielomian $W(x)$ **jest podzielny** przez niezerowy wielomian $P(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wielomian $P(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$, a wielomian $Q(x)$ **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.

Bezpośrednio z tej definicji wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, to stopień $P(x)$ nie może być wyższy od stopnia $W(x)$.

Sposób dzielenia jest bardzo podobny do dzielenia w zbiorze liczb naturalnych.

Podzielimy wielomian $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ przez wielomian $x^2 + 5$.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 \\ (2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5) : (x^2 + 5) \\ -(2x^4 + 10x^2) \\ \hline 3x^3 - x^2 + 15x - 5 \\ -(3x^3 + 15x) \\ \hline -x^2 - 5 \\ -(-x^2 - 5) \\ \hline 0 \end{array}$$

- sprawdzamy, ile razy x^2 mieści się w wyrazie $2x^4$ i wynik, równy $2x^2$, zapisujemy nad kreską
- mnożymy $x^2 + 5$ przez $2x^2$
- od $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ odejmujemy $2x^4 + 10x^2$
- sprawdzamy, ile razy x^2 mieści się w wyrazie $3x^3$
- mnożymy $x^2 + 5$ przez $3x$
- od $3x^3 - x^2 + 15x - 5$ odejmujemy $3x^3 + 15x$
- sprawdzamy, ile razy x^2 mieści się w wyrazie $-x^2$
- mnożymy $x^2 + 5$ przez -1
- od $-x^2 - 5$ odejmujemy $-x^2 - 5$

$$2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5 = (x^2 + 5) \cdot (2x^2 + 3x - 1)$$

ZZ i MKP

tematy 2.8, 2.10

Multiteka

- Dzielenie wielomianów
- Czy wielomian jest podzielny przez dwumian

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Z własności działań na potęgach wynika, że jeżeli $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, to między stopniami wielomianów W , P i Q zachodzi następujący związek:

$$\text{stopień } Q = \text{stopień } W - \text{stopień } P$$

Zauważmy, że dzielenie wielomianów nie zawsze jest wykonalne. Na przykład wielomianu $x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ nie można podzielić przez x (inaczej mówiąc – nie można wyłączyć x przed nawias z podanego wielomianu). Wyłączenie x przed nawias może być tylko częściowe:

$$x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = x(x^2 - 2x + 7) + 1$$

Podobnie jest przy dzieleniu liczb naturalnych. Na przykład liczba 297 nie jest podzielna przez 13, bo $297 = 22 \cdot 13 + 11$. W takiej sytuacji mówimy, że można wykonać dzielenie z resztą. Wynik dzielenia 297 przez 13 to iloraz 22 i reszta 11.

Twierdzenie

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowymi wielomianami oraz stopień $P(x)$ nie jest większy od stopnia $W(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

przy czym:

- stopień $Q = \text{stopień } W - \text{stopień } P$,
- stopień R jest mniejszy od stopnia P albo R jest wielomianem zerowym.

Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to wielomian W jest **podzielny** przez wielomian P .

Przykład 1 zad. 5.6

Podzielimy wielomian $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1$ przez wielomian $x^2 + 5$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 \\ (2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1) : (x^2 + 5) \\ -(2x^4 + 10x^2) \\ \hline 3x^3 - x^2 + 18x - 1 \\ -(3x^3 + 15x) \\ \hline -x^2 + 3x - 1 \\ -(-x^2 - 5) \\ \hline 3x + 4 \end{array}$$

Dzielenie można kontynuować, dopóki stopień wielomianu pod kreską nie stanie się mniejszy niż stopień dzielnika.

← kończymy dzielenie, ponieważ stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika

◀ 5.6. Wykonaj dzielenie wielomianów.

- a) $(x^3 + 3x^2 - 8x + 10) : (x^2 - 2x + 2)$
 b) $(x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x^2 - x - 2)$
 c) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6) : (x^2 - 2x - 3)$
 d) $(x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 2) : (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$

Odp.: a) $x + 5$ b) $x^2 - 3$ c) $x^2 + 3x + 2$ d) $x^2 - x + 2$

Łatwo można sprawdzić, że:

$$2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1 = (x^2 + 5) \cdot (2x^2 + 3x - 1) + (3x + 4)$$

Odp.: Wynikiem dzielenia wielomianów jest iloraz $2x^2 + 3x - 1$ i reszta $3x + 4$.

Przykład 2 ◀ zad. 5.10, 5.11

Wyznamy wielomian $W(x)$, który przy dzieleniu przez $x^3 - 2x + 1$ daje iloraz równy $2x^2 + x$ i resztę równą $x^2 - 3x + 5$.

Rozwiązanie

Z podanych informacji wynika, że szukany wielomian W ma postać:

$$W(x) = (x^3 - 2x + 1) \cdot (2x^2 + x) + x^2 - 3x + 5$$

Po wykonaniu działań, redukcji wyrazów podobnych i uporządkowaniu składników otrzymujemy końcową odpowiedź.

$$\text{Odp.: } W(x) = 2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 5$$

Podzielność wielomianu przez dwumian

Dwumianem nazywamy wielomian stopnia pierwszego. Przyjmijmy, że wielomian $W(x)$ jest stopnia co najmniej drugiego. Podczas dzielenia wielomianu W przez dwumian postaci $x - a$, wyznaczamy takie wielomiany Q i R , że:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Dzielnik jest stopnia pierwszego, więc reszta jest zawsze albo liczbą różną od zera (czyli wielomianem stopnia zero), albo zerem (czyli wielomianem zerowym). Inaczej mówiąc, nie występuje w niej zmienna x . Dlatego możemy wprowadzić ogólny zapis:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Czynność dzielenia zakończy się, gdy w słupku pod kreską zostanie liczba, np.:

$$\begin{array}{r} \overline{x^2 + 5x + 8} \\ (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x - 2) \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 5x^2 - 2x + 1 \\ -(5x^2 - 10x) \\ \hline 8x + 1 \\ -(8x - 16) \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{x^3 - x^2 - x + 1} \\ (x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3) : (x + 3) \\ -(x^4 + 3x^3) \\ \hline -x^3 - 4x^2 - 2x + 3 \\ -(-x^3 - 3x^2) \\ \hline -x^2 - 2x + 3 \\ -(-x^2 - 3x) \\ \hline x + 3 \\ -(x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

◀5.10. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $2x + 1$ daje iloraz $x^2 + 2x - 3$ i resztę 5.

$$\text{Odp.: } 2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

◀5.11. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 5x + 2$ daje iloraz $3x^2 - x + 1$ i resztę $2x - 8$.

$$\text{Odp.: } 3x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 5x - 6$$

◀5.15. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 11$,
 $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^4 + 3x^3 + 5x + 1$,
 $P(x) = x + 2$

c) $W(x) = x^{100} - 2x^{50} + 50$,
 $P(x) = x + 1$

d) $W(x) = x^{1000} - x^{999}$,
 $P(x) = x - 2$

Odp.: a) -15 b) -17 c) 49

d) 2^{999}

Mamy zatem:

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 8) + 17$$

oraz

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = (x + 3) \cdot (x^3 - x^2 - x + 1)$$

Zauważmy, że jeżeli obliczymy wartość wielomianu

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

dla $x = a$, to otrzymamy równość:

$$W(a) = (a - a)Q(a) + R, \text{ czyli } W(a) = R.$$

Wniosek

Jeżeli $W(x) = (x - a)Q(x) + R$, to $W(a) = R$

Zatem, aby obliczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$, nie trzeba wykonywać dzielenia – wystarczy obliczyć wartość wielomianu W dla $x = a$.

Przykład 3 ◀ zad. 5.15

Obliczymy resztę R z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = 3x^4 - 4x^3 + x - 12$, $P(x) = x - 2$

$$R = W(2)$$

$$W(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2 - 12 = 6$$

Odp.: $R = 6$

b) $W(x) = x^4 - x^2 + 20$, $P(x) = x - \sqrt{3}$

$$R = W(\sqrt{3})$$

$$W(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^2 + 20 = 26$$

Odp.: $R = 26$

c) $W(x) = 3x^6 - x^4 - 5x^2 - 10$, $P(x) = x + \sqrt{2}$

$$R = W(-\sqrt{2})$$

$$W(-\sqrt{2}) = 3(-\sqrt{2})^6 - (-\sqrt{2})^4 - 5(-\sqrt{2})^2 - 10 = 24 - 4 - 10 - 10 = 0$$

W tym wypadku wielomian W jest podzielny przez dwumian $x + \sqrt{2}$.

Odp.: $R = 0$

Wróćmy do zapisu:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Z równości $W(a) = R$ wynikają następujące wnioski:

- Jeżeli a jest pierwiastkiem wielomianu W (czyli $W(a) = 0$), to $R = 0$, co oznacza, że wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$.
- Jeżeli wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$ (czyli $R = 0$), to $W(a) = 0$, co oznacza, że a jest pierwiastkiem wielomianu W .

Obydwa te wnioski zapiszemy krótko w postaci jednego twierdzenia.

Twierdzenie

Twierdzenie Bézouta

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Jest to jedno z ważniejszych twierdzeń o wielomianach. Nosi nazwę twierdzenia Bézouta od nazwiska XVIII-wiecznego matematyka francuskiego, choć znane i stosowane było wcześniej.

Przykład 4 ◀ zad. 5.16

Sprawdźmy bez wykonywania dzielenia, czy wielomian W jest podzielny przez dwumian P .

Rozwiązanie

a) $W(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 3$, $P(x) = x - 3$

$$W(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^4 - 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 27 - 27 + 18 - 15 - 3 = 0$$

$$W(3) = 0$$

Odp.: Wielomian W jest podzielny przez $x - 3$.

b) $W(x) = 5x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1$, $P(x) = x + 1$

$$W(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = -5 - 1 - \frac{1}{2} + 1 = -5\frac{1}{2}$$

$$W(-1) \neq 0$$

Odp.: Wielomian W nie jest podzielny przez $x + 1$.

◀5.16. Wykaż, że wielomian W jest podzielny przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$,
 $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = -x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$,
 $P(x) = x + 3$

c) $W(x) = 3x^3 + x^2 - 16x + 4$,
 $P(x) = x - 2$

d) $W(x) = 8x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$,
 $P(x) = x + \frac{1}{2}$

◀5.17. Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $Q(x)$?

a) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + m$,

$Q(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 4$,

$Q(x) = x + 4$

c) $W(x) = mx^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$,

$Q(x) = x + 2$

d) $W(x) = 9x^3 - 3x^2 + mx - 2$,

$Q(x) = x - \frac{2}{3}$

Odp.: a) $m = 1$

b) $m = -3$

c) $m = 4$

d) $m = 1$

◀5.24. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 3$ jest równa 27, a z dzielenia przez $x - 1$ jest równa 3. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - 3)(x - 1)$.

Odp.: $12x - 9$

Przykład 5 ◀ zad. 5.17

Obliczmy, dla jakich wartości parametru m wielomian

$W(x) = x^4 + mx^3 + 3x^2 - 5x - 2$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Rozwiązanie

Aby wielomian W był podzielny przez dwumian $x - 2$, musi zachodzić równość $W(2) = 0$.

$$W(2) = 2^4 + m \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 16 + 8m$$

$$16 + 8m = 0, \text{ stąd } m = -2$$

Odp.: Wielomian W jest podzielny przez $x - 2$ dla $m = -2$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.24

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 1$ jest równa -1 , a z dzielenia przez x jest równa 1 . Obliczmy resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = x(x + 1)$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = x^2 + x$ otrzymamy resztę postaci $R(x) = ax + b$. Zatem rozwiązanie zadania polega na wyznaczeniu współczynników a i b .

Stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika (albo reszta jest wielomianem zerowym).

Z założeń zadania wiemy, że:

- reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x + 1$ jest równa -1 , czyli $W(-1) = -1$,
- reszta z dzielenia $W(x)$ przez x jest równa 1 , czyli $W(0) = 1$.

Wyznaczymy wartości wielomianu

$$W(x) = Q(x) \cdot x(x + 1) + ax + b$$

dla $x = -1$ i $x = 0$.

Mamy:

$$W(0) = Q(0) \cdot 0 \cdot (0 + 1) + a \cdot 0 + b$$

$$W(-1) = Q(-1) \cdot (-1) \cdot (-1 + 1) + a \cdot (-1) + b$$

czyli:

$$W(0) = b$$

$$W(-1) = b - a$$

Otrzymujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} b = 1 \\ b - a = -1 \end{cases} \quad \leftarrow W(0) = 1 \text{ i } W(-1) = -1$$

Stąd $a = 2$, $b = 1$, czyli szukaną resztą z dzielenia jest dwumian $2x + 1$.

Odp.: $R(x) = 2x + 1$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż iloraz z dzielenia wielomianu $x^3 + 2x^2 - x + 6$ przez $x + 3$.

- A. $x^2 + x + 2$ B. $x^2 + x - 2$ C. $x^2 - x + 2$ D. $x^2 - x - 2$

5.2. Wskaż wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 3$ daje iloraz $x + 2$ i resztę 1.

- A. $x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ C. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$
 B. $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ D. $x^3 - 2x^2 - 3x - 5$

5.3. Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^7 - 5x^3 + 4$ przez dwumian $P(x) = x + 1$.

- A. 0 B. 3 C. 8 D. 10

5.4. Dane są wielomiany $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Stopień wielomianu W jest równy 10, stopień wielomianu P jest równy 4, a stopień wielomianu R jest równy 5.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Stopień wielomianu Q jest równy 6.
 B. Wielomian R jest resztą z dzielenia W przez P .
 C. Wielomian R jest resztą z dzielenia W przez Q .

5.5. Podziel wielomian przez dwumian.

- a) $(x^3 + 2x^2 - 7x + 4) : (x - 1)$
 b) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6) : (x + 2)$
 c) $(10x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 10x + 3) : (2x + 3)$
 d) $(3x^5 - 7x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

5.6. Wykonaj dzielenie wielomianów.

- a) $(x^3 + 3x^2 - 8x + 10) : (x^2 - 2x + 2)$
 b) $(x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x^2 - x - 2)$
 c) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6) : (x^2 - 2x - 3)$
 d) $(x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 2) : (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. C

5.2. B

5.3. C

5.4. P, F, P

- 5.5.** a) $x^2 + 3x - 4$
 b) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
 c) $5x^3 + x^2 - 4x + 1$
 d) $3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$

- 5.6.** a) $x + 5$
 b) $x^2 - 3$
 c) $x^2 + 3x + 2$
 d) $x^2 - x + 2$

5.7. $x + 1, x^2 + x + 1,$
 $x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

5.8. a) $W(x) =$
 $= (x + 1)(3x^2 + 2x) + 7$

b) $W(x) =$
 $= (x^2 + x + 3)(x - 3) + x + 8$

c) $W(x) = (x^2 - 3x - 1)(2x + 5) + 2$

d) $W(x) =$
 $= (x^2 + x + 3)(2x^2 - x + 1) - 10x$

5.9. wielomianem stopnia drugiego, pierwszego, zerowego lub wielomianem zerowym

5.10. $2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$

5.11. $3x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 5x - 6$

5.12. np. $5x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 3x - 1$

5.13. np. $x^3 + x^2 - 2x - 8$

5.14. np. $x^3 + 2x^2 - 19x - 20$

5.15. a) -15 **b)** -17 **c)** 49
d) 2^{999}

5.16. a) $W(1) = 1 - 2 + 5 - 4 = 0$, więc $P(x)|W(x)$

b) $W(-3) = -81 + 54 + 36 - 3 - 6 = 90 - 90 = 0$, więc $P(x)|W(x)$

c) $W(2) = 24 + 4 - 32 + 4 = 0$, więc $P(x)|W(x)$

d) $W\left(\frac{-1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 =$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$,
 więc $P(x)|W(x)$

5.7. Podziel każdy z wielomianów $x^2 - 1, x^3 - 1, x^4 - 1, x^5 - 1$ przez dwumian $x - 1$.

5.8. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$. Zapisz wielomian $W(x)$ jako $P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym R oznacza resztę z dzielenia W przez P . Określ stopnie wielomianów W, P, Q i R .

a) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ $P(x) = x + 1$

b) $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ $P(x) = x^2 + x + 3$

c) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 17x - 3$ $P(x) = x^2 - 3x - 1$

d) $W(x) = 2x^4 + x^3 + 6x^2 - 12x + 3$ $P(x) = x^2 + x + 3$

5.9. Którego stopnia wielomianem może być reszta, która powstanie w wyniku dzielenia wielomianu stopnia siódmego przez wielomian stopnia trzeciego?

5.10. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $2x + 1$ daje iloraz $x^2 + 2x - 3$ i resztę 5.

5.11. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 5x + 2$ daje iloraz $3x^2 - x + 1$ i resztę $2x - 8$.

5.12. Podaj przykład wielomianu stopnia czwartego, który przy dzieleniu przez $5x^2 + 4x - 3$ daje resztę $x - 4$.

5.13. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego podzielonego przez dwumian $x - 2$.

5.14. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego podzielonego przez dwumiany $x + 1$ i $x - 4$.

5.15. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 11$ $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^4 + 3x^3 + 5x + 1$ $P(x) = x + 2$

c) $W(x) = x^{100} - 2x^{50} + 50$ $P(x) = x + 1$

d) $W(x) = x^{1000} - x^{999}$ $P(x) = x - 2$

5.16. Wykaż, że wielomian W jest podzielny przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = -x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$ $P(x) = x + 3$

c) $W(x) = 3x^3 + x^2 - 16x + 4$ $P(x) = x - 2$

d) $W(x) = 8x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ $P(x) = x + \frac{1}{2}$

5.17. Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $Q(x)$?

- a) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + m$ $Q(x) = x - 1$
 b) $W(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 4$ $Q(x) = x + 4$
 c) $W(x) = mx^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ $Q(x) = x + 2$
 d) $W(x) = 9x^3 - 3x^2 + mx - 2$ $Q(x) = x - \frac{2}{3}$

5.18. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $Q(x)$ jest równa R ?

- a) $W(x) = x^3 - (8 + m)x^2 + (2m + 11)x + 5m$ $Q(x) = x - 1$ $R = -2$
 b) $W(x) = 2x^4 - (2m - 1)x^3 - (m - 1)x^2 + \frac{1}{2}mx - 5$ $Q(x) = x + 2$ $R = 1$
 c) $W(x) = -x^3 + (m - 2)x^2 - (2m - 3)x + 2m + 2$ $Q(x) = x - 3$ $R = -9$
 d) $W(x) = (5m - 3)x^5 - (m + 1)x^3 + (2m - 2)x^2 - (m - 3)x + 5$
 $Q(x) = x - \frac{1}{2}$ $R = 6$
 e) $W(x) = (m - 1)x^3 + 3mx^2 - (m + 2)x - 2m$ $Q(x) = x + 5$ $R = -6$

5.19. Dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 7$ przez $P(x) = x + a$ jest równa 9?

5.20. Dla jakich wartości parametrów a i b reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ przez wielomian $x - 1$ jest równa 4, a reszta z dzielenia wielomianu W przez wielomian $x + 2$ jest równa 13?

D 5.21. Wykaż, że nie istnieje wartość parametru m , dla której wielomian

$W(x) = x^3 - (m^2 + 1)x^2 + (m - 3)x + 1$ jest podzielny przez dwumian $P(x) = x - 1$.

5.22. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian W jest podzielny przez wielomian Q ?

- a) $W(x) = bx^3 + (a + 2b)x^2 - 2x - 5$ $Q(x) = x^2 - 1$
 b) $W(x) = ax^3 + (4 - a)x^2 - 3(4a + 3b)x - 9$ $Q(x) = x^2 - 9$
 c) $W(x) = -4(a - b)x^3 + (a + b)x^2 - x - \frac{3}{4}$ $Q(x) = x^2 - \frac{1}{4}$
 d) $W(x) = x^5 + bx^4 + (a + 1)x^3 - (6a + b)x^2 - 2ax - 4b$ $Q(x) = x^2 - 1$
 * e) $W(x) = x^4 - (a - 5)x^3 + (5b + 3)x^2 - (b - 4)x - (4a + 5b + 10)$ $Q(x) = x^2 + 25$
 * f) $W(x) = (2a - b)x^4 + (a - b)x^3 + (5a + 3b)x^2 - 9$ $Q(x) = x^2 + 9$

5.17. a) $m = 1$

b) $m = -3$

c) $m = 4$

d) $m = 1$

5.18. a) $m = -1$

b) $m = -2$

c) $m = 5$

d) $m = 7$

e) $m = 3$

5.19. $a = -2$ lub $a = 2$

5.20. $a = 5$, $b = -4$

5.21. $W(x) =$
 $= x^3 - (m^2 + 1)x^2 + (m - 3)x + 1$,
 $P(x) = x - 1$
 $W(1) = 1 - (m^2 + 1) + (m - 3) + 1 =$
 $= -m^2 + m - 2$
 $\Delta = 1 - 8 < 0$, więc równanie
 $W(1) = 0$ nie ma rozwiązań,
 z czego wynika, że wielomian $W(x)$
 nie jest podzielny przez dwumian
 $P(x)$ dla zadanej wartości $m \in \mathbb{R}$.

5.22. a) $a = 1$, $b = 2$

b) $a = 3$, $b = -1$

c) $a = 1$, $b = 2$

d) $a = 2$, $b = -3$

e) $a = 5$, $b = 4$

f) $a = 1$, $b = 1$

5.23. a) $a = 2, b = 5$ **b)** $a = 1, b = -1$ **c)** $a = 4, b = 5$ **d)** $a = -1, b = 4$ **5.24.** $W(x) =$

$$(x-3)(x-1) \cdot Q(x) + ax + b$$

$$W(3) = 3a + b, W(1) = a + b$$

$$W(3) = 27 \text{ i } W(1) = 3, \text{ więc}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 27 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$$2a = 24 \quad |:2$$

$$a = 12, b = 3 - 12 = -9$$

Odp.: Reszta jest równa $12x - 9$.**5.25.**

$$W(x) = (x+2)(x+1) \cdot Q(x) + ax + b$$

$$W(-2) = -2a + b \text{ i } W(-1) = -a + b$$

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ -a + b = 18 \end{cases}$$

$$-a = -20$$

$$a = 20, b = 18 + a = 18 + 20 = 38$$

Odp.: Reszta jest równa $20x + 38$.**5.26.**

$$W(x) = (x+2)(x-2) \cdot Q(x) + ax + b$$

$$W(-2) = -2a + b \text{ i } W(2) = 2a + b$$

$$W(-2) = -1 \text{ i } W(2) = 15$$

$$\begin{cases} -2a + b = -1 \\ 2a + b = 15 \end{cases}$$

$$-4a = -16 \quad | :(-4)$$

$$a = 4, b = 2a - 1 = 8 - 1 = 7$$

Odp.: Reszta jest równa $4x + 7$.**5.23.** Dla jakich wartości parametrów a i b reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest równa $R(x)$?

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b, \quad P(x) = x^2 - 1, \quad R(x) = 3x + 2$

b) $W(x) = x^3 + 2x^2 - ax - 20b, \quad P(x) = x^2 - 3x + 5a, \quad R(x) = 9x - 5$

c) $W(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - (a+1)x + 2(b-1), \quad P(x) = x^2 - 3x + 2, \quad R(x) = -3x + 4$

d) $W(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x + a + 5, \quad P(x) = x^2 - x - 2, \quad R(x) = (3a+1)x + b + 2$

*** 5.24.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 3$ jest równa 27, a z dzielenia przez $x - 1$ jest równa 3. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - 3)(x - 1)$.*** 5.25.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 2$ jest równa -2 , a z dzielenia przez $x + 1$ jest równa 18. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x + 2)(x + 1)$.*** 5.26.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 2$ równa się -1 , a z dzielenia przez $x - 2$ jest równa 15. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 - 4$.**Prosto do matury****1.** Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian W jest podzielny przez $x - 3$.**B.** Wielomian W jest podzielny przez $x^2 - 1$.**C.** Wielomian W ma trzy pierwiastki.**2.** Podziel wielomian $W(x) = 9x^4 - 37x^2 + 4$ przez dwumian $3x + 1$.**3.** Wyznacz wielomian $W(x)$, który przy dzieleniu przez $P(x) = -x^3 + x^2 - x - 2$ daje iloraz $Q(x) = x^2 + x - 1$ i resztę $R(x) = x - 2$.**4.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ jest podzielny przez każdy z dwumianów: $x - 2, x - 3, x + 1, x + 4$.**5.** Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 + (2m - 3)x + 5$ przez $P(x) = x + 2$ jest równa 3?**Prosto do matury****1.** P, P, P

2. $3x^3 - x^2 - 12x + 4$

3. $W(x) = -x^5 + x^3 - 4x^2$

4. $W(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$

$$W(2) = 16 - 60 + 20 + 24 = 0, \quad W(3) = 81 - 135 + 30 + 24 = 0, \quad W(-1) = 1 - 15 - 10 + 24 = 0, \\ W(-4) = 256 - 240 - 40 + 24 = 0$$

Zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez każdy z wielomianów: $x - 2, x - 3, x + 1, x + 4$, więc $W(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)(x + 4)$.**5.** $m = 2$

6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta

Umiejętności:

- stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$
- stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Schemat Hornera

Dzielenie wielomianu przez wielomian zawsze można wykonywać według algorytmu opisanego wcześniej. Ponieważ jednak dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$ ma szczególne znaczenie, podamy szybki sposób na znalezienie ilorazu i reszty w takim działaniu.

Prześledźmy na przykładzie dzielenia $(2x^3 + 5x^2 - 24x - 13) : (x - 3)$, skąd biorą się współczynniki w ilorazie.

Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą wynika następująca równość:

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = (x - 3) \cdot (ax^2 + bx + c) + R$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 11x + 9 \\ (2x^3 + 5x^2 - 24x - 13) : (x - 3) \\ \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\ 11x^2 - 24x - 13 \\ \underline{-(11x^2 - 33x)} \\ 9x - 13 \\ \underline{-(9x - 27)} \\ 14 \end{array}$$

Znalezienie wyniku dzielenia polega na wyznaczeniu współczynników a , b , c oraz reszty R :

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 - 3bx + cx - 3c + R$$

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x + R - 3c$$

Z twierdzenia o wielomianach równych otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2 = a \\ 5 = b - 3a \\ -24 = c - 3b \\ -13 = R - 3c \end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3a + 5 \\ c = 3b - 24 \\ R = 3c - 13 \end{cases} \quad (*)$$

Umieścimy teraz w tabeli współczynniki wielomianu $2x^3 + 5x^2 - 24x - 13$, miejsce zerowe dzielnika (czyli liczbę 3), współczynniki a , b , c oraz resztę R w następujący sposób:

	2	5	-24	-13
3	a	b	c	R

ZZ i MKP

tematy 2.10–2.12

Multiteka

- Schemat Hornera
- Pierwiastki całkowite wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Z równań tworzących układ (*) odczytujemy sposób wyznaczania liczb a , b , c i R w tabeli:

- liczba a : przepisujemy stojącą nad nią w tabeli liczbę 2,
- liczba b : mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę a przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę 5,
- liczba c : mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę b przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę -24 ,
- liczba R : mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę c przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę -13 .

Można to przedstawić graficznie:

	2	5	-24	-13
	↓	↓	↓	↓
3	2	11	9	14

W ten sposób możemy znaleźć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu dowolnego stopnia przez dwumian $x - a$. Opisany sposób postępowania nosi nazwę **schematu Hornera**.

Przykład 1

Wyznamy iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ przez dwumian $x + 2$. Skorzystamy ze schematu Hornera.

Rozwiązanie

Zwróćmy uwagę, że współczynnik przy x^2 jest równy 0.

$$x^4 + 3x^3 - 5x + 4 = 1 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (-5) \cdot x + 4$$

Miejsce zerowe dwumianu $x + 2$ jest liczbą -2 .

	1	3	0	-5	4
	↓	↓	↓	↓	↓
-2	1	1	-2	-1	6

Wielomian otrzymany w wyniku dzielenia jest stopnia trzeciego. Jego współczynniki odczytujemy z tabeli. Ostatnia liczba jest resztą z dzielenia.

Odp.: Iloraz to $x^3 + x^2 - 2x - 1$, reszta jest równa 6.

Przykład 2

Wyznamy iloraz i resztę z dzielenia $(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12) : (x - 4)$.

◀6.6. Zastosuj schemat Hornera i wykonaj dzielenie.

a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 6) : (x + 1)$

c) $(-3x^3 + x^2 - 2x - 32) : (x + 2)$

d) $(x^3 - 23x - 10) : (x - 5)$

e) $(x^4 - 3x^2 + 15x - 9) : (x + 3)$

f) $(x^5 + 32) : (x + 2)$

Odp.: a) $x^2 - 2x + 3$

b) $2x^2 - 9x + 6$

c) $-3x^2 + 7x - 16$

d) $x^2 + 5x + 2$

e) $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

Rozwiązanie

		1	-4	-2	11	-12
		↓	↓	↓	↓	↓
4	1	0	-2	3	0	

Iloraz to $x^3 + 0 \cdot x^2 - 2x + 3$, czyli $x^3 - 2x + 3$.

Reszta jest równa 0, czyli $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = (x - 4)(x^3 - 2x + 3)$.

Odp.: Ilorazem jest $x^3 - 2x + 3$, reszta jest równa 0.

Wykorzystanie twierdzenia Bézouta w rozwiązywaniu równań

Pokażemy przykłady zastosowania twierdzenia Bézouta do rozwiązywania równań.

Przykład 3 ◀ zad. 6.7

Wiadomo, że liczba -4 jest jednym z rozwiązań równania $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$. Wyznamy pozostałe rozwiązania tego równania.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ trudno jest rozłożyć na czynniki metodą grupowania wyrazów i wyłączania przed nawias. Wiemy jednak, że $W(-4) = 0$. Z twierdzenia Bézouta wynika, że W jest podzielny przez $x + 4$. Skorzystamy ze schematu Hornera i wykonamy to dzielenie.

	1	1	-10	8
-4	1	-3	2	0

Zatem $W(x) = (x + 4)(x^2 - 3x + 2)$.

Równanie możemy więc zapisać w postaci iloczynowej.

$$(x + 4)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Delta = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$$

← rozwiązujemy równanie $x^2 - 3x + 2 = 0$

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby: $-4, 1$ i 2 .

Jak widać, znalezienie jednego rozwiązania równania pozwala wykonać dzielenie, a poszukiwanie pierwiastków sprowadza się do rozwiązywania równania stopnia niższego o jeden. Równanie stopnia trzeciego możemy więc łatwo rozwiązać, gdy znamy jego jeden pierwiastek, równanie stopnia czwartego, gdy znamy dwa pierwiastki itd. Problem polega na tym, jak znaleźć choćby jedno rozwiązanie równania wielomianowego.

◀6.7. Wiadomo, że r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznamy pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6, r = -2$

b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6, r = 3$

c) $W(x) = 2x^3 - 11x^2 + 4x + 5, r = 5$

d) $W(x) = 4x^3 - 27x + 27, r = -3$

Odp.: a) $-3, 1$

b) $-2, \frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}, 1$

d) $\frac{3}{2}$

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3 = 0$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, nie widać prostej możliwości zastosowania metody rozkładu na czynniki lewej strony równania. Tym razem nie mamy podanego żadnego pierwiastka naszego równania.

Gdyby pierwiastkiem była pewna liczba całkowita a , to prawdziwa byłaby równość:

$$2a^3 - 10a^2 + 13a - 3 = 0$$

Możemy ją zapisać w innej postaci:

$$2a^3 - 10a^2 + 13a = 3, \text{ czyli } a(2a^2 - 10a + 13) = 3$$

Wszystkie współczynniki wyrażenia w nawiasie są całkowite. Gdy a jest również liczbą całkowitą, to po lewej stronie znaku równości mamy iloczyn dwóch liczb całkowitych: a oraz $(2a^2 - 10a + 13)$. Oznacza to, że każda z tych liczb musi być dzielnikiem liczby 3, stojącej po drugiej stronie znaku równości. Stąd już prosty wniosek: rozwiązania równania, będące liczbami całkowitymi, mogą należeć wyłącznie do zbioru całkowitych dzielników liczby 3, czyli $\{1, -1, 3, -3\}$.

Teraz podstawiamy do równania kolejne liczby z tego zbioru i sprawdzamy, czy któraś z nich jest jego rozwiązaniem:

- gdy $x = 1$, to $2 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 13 - 3 = 2 \neq 0$, więc 1 nie jest rozwiązaniem równania,
- gdy $x = -1$, to $-2 - 10 - 13 - 3 \neq 0$,
- gdy $x = 3$, to $2 \cdot 27 - 10 \cdot 9 + 13 \cdot 3 - 3 = 0$.

Zatem liczba 3 jest pierwiastkiem równania.

Wykonujemy dzielenie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3$ przez dwumian $x - 3$.

	2	-10	13	-3
3	2	-4	1	0

Mamy więc $(x - 3)(2x^2 - 4x + 1) = 0$.

Z rozwiązania równania kwadratowego $2x^2 - 4x + 1 = 0$ otrzymujemy następujące pierwiastki:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Odp.: Równanie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3 = 0$ ma pierwiastki: 3, $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ i $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Całkowite pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych

Udowodnimy twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu W , którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu.

Założenie

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$p, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi

$$W(p) = 0$$

Teza

Liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 .

Dowód

Dowód twierdzenia jest powtórzeniem rozumowania z przykładu 4.

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem równania:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

to

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Zapiszmy tę równość w innej postaci:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p = -a_0$$

czyli

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1) = -a_0$$

Zgodnie z założeniem wszystkie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi, zatem lewa strona równości jest iloczynem dwóch liczb całkowitych:

$$p \text{ oraz } (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1)$$

Każda z nich jest więc dzielnikiem stojącej po prawej stronie liczby całkowitej $-a_0$. Oznacza to, że liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 .

Koniec dowodu

◀ 6.15. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 21x = 0$
 b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 32x - 16 = 0$
 c) $x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 28x - 48 = 0$
 d) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 20x - 7 = 0$
 e) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 11x - 5 = 0$
 f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$
- Odp.: a) $x = -7$ lub $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 0$
 b) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 4$
 c) $x = -4$ lub $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$
 d) $x = -1$ lub $x = 7$
 e) $x = -1$ lub $x = 5$ lub $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
 f) $x = -1$ lub $x = 2$



Przykład 5 ◀ zad. 6.15

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$.

Rozwiązanie

Mnożymy obie strony równania przez 2, aby dostać równanie o współczynnikach całkowitych.

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - x - 6) = 0$$

Zatem $x = 0$ lub $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

W drugim równaniu szukamy całkowitych pierwiastków w zbiorze $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Po sprawdzeniu, że pierwiastkiem jest 3 i wykonaniu odpowiedniego dzielenia mamy:

$$x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x - 3)(x^2 + x + 2)$$

Równanie $x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x = 0$ możemy więc zapisać w postaci:

$$x(x - 3)(x^2 + x + 2) = 0$$

czyli dane początkowo równanie ma postać $\frac{1}{2}x(x - 3)(x^2 + x + 2) = 0$.

Trójmian w ostatnim nawiasie jest nierozkładalny ($\Delta = -7$).

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Gdy współczynniki równania są liczbami wymiernymi, wystarczy pomnożyć obydwie jego strony przez NWW mianowników, aby otrzymać równoważne równanie o współczynnikach całkowitych. Jeżeli więc dane na początku równanie ma pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego nowo powstałego wielomianu.

Twierdzenie ogólniejsze, które podamy bez dowodu, pozwala na znajdowanie wymiernych pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, w którym $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to:

- p jest dzielnikiem współczynnika a_0
 - q jest dzielnikiem współczynnika a_n .
- oraz

◀ 6.16. Rozwiąż równanie.

- a) $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = 0$
 b) $63x^3 + 12x^2 - 17x + 2 = 0$
 c) $50x^3 - 15x^2 - 9x + 2 = 0$
 d) $2x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 6x + 24 = 0$
- Odp.: a) $x = -3$ lub $x = \frac{1}{2}$
 b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{1}{7}$ lub $x = \frac{1}{3}$
 c) $x = -\frac{2}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{2}$
 d) $x = -2$ lub $x = 4$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
 lub $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

Przykład 6 ◀ zad. 6.16

Rozwiążemy równanie $18x^3 + 9x^2 - 5x - 2 = 0$.

Rozwiązanie

Żaden z dzielników liczby 2 nie jest rozwiązaniem tego równania, czyli równanie nie ma pierwiastków całkowitych.

Jeżeli to równanie ma pierwiastek wymierny postaci $\frac{p}{q}$, to zgodnie z twierdzeniem $p \in \{-1, 1, -2, 2\}$, a $q \in \{-2, 2, -3, 3, -6, 6, -9, 9, -18, 18\}$.

Pierwiastek wymierny (ale nie całkowity) może być zatem jedną z czternastu liczb należących do zbioru $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{1}{18}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}\right\}$.

Dla $x = -\frac{1}{2}$ mamy $-\frac{18}{8} + \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - 2 \neq 0$, czyli $-\frac{1}{2}$ nie jest pierwiastkiem równania.

Dla $x = \frac{1}{2}$ mamy $\frac{18}{8} + \frac{9}{4} - \frac{5}{2} - 2 = 0$, czyli $\frac{1}{2}$ jest jednym z pierwiastków równania.

Po podzieleniu wielomianu $18x^3 + 9x^2 - 5x - 2$ przez dwumian $x - \frac{1}{2}$ równanie możemy zapisać w postaci $\left(x - \frac{1}{2}\right)(18x^2 + 18x + 4) = 0$.

Pierwiastkami trójmianu kwadratowego są liczby: $-\frac{2}{3}$ oraz $-\frac{1}{3}$.

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby: $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Pierwiastki wielokrotne

Wiemy, że każdy wielomian W można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Zastanówmy się, jakie czynniki mogą występować w postaci iloczynowej wielomianu stopnia wyższego niż dwa. Rozważmy wielomiany czwartego i piątego stopnia.

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia czwartego, to może być iloczynem:

- czterech czynników liniowych, np. $W(x) = 3(x-3)(x-2)(x+\sqrt{7})(x+1)$,
- dwóch czynników liniowych i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego, np. $W(x) = (5x-8)(x-4)(x^2+1)$,
- dwóch nierozkładalnych czynników kwadratowych, np. $W(x) = (5x^2+2)(x^2+1)$.

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia piątego, to może być iloczynem:

- pięciu czynników liniowych, np. $W(x) = 3(x-3)(x-2)(x+\sqrt{7})\left(x-\frac{3}{7}\right)(x+4)$,
- trzech czynników liniowych i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego, np. $W(x) = 3(x-3)(x-2)(x+\sqrt{7})(5x^2-x+1)$,
- czynnika liniowego i dwóch nierozkładalnych czynników kwadratowych, np. $W(x) = (x+9)(5x^2+8)(x^2+1)$.

Zauważmy, że każdy wielomian może mieć **co najwyżej** tyle czynników liniowych, ile wynosi jego stopień, oraz że w rozkładzie wielomianu stopnia nieparzystego musi wystąpić przynajmniej jeden czynnik liniowy. Może się zdarzyć, że wielomian stopnia parzystego jest iloczynem wyłącznie nierozkładalnych trójmianów kwadratowych. Zatem z twierdzenia o rozkładzie wielomianu na czynniki oraz własności działań na wielomianach wynika następujący wniosek.

Wniosek

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Wniosek ten jest informacją o maksymalnej liczbie **różnych** pierwiastków, której nie należy utożsamiać z liczbą liniowych czynników w rozkładzie. Na przykład wielomian:

- $W(x) = (x - 2)^5$ jest stopnia piątego, rozkłada się na pięć czynników liniowych, ale ma tylko jeden pierwiastek – jest nim liczba 2,
- $Q(x) = (x - 2)^3(x + 1)^4(x - \sqrt{2})(x^2 + 6)$ jest stopnia dziesiątego, ma w rozkładzie osiem czynników liniowych, ale tylko trzy pierwiastki: 2, -1 , $\sqrt{2}$.

Zauważmy, że wielomian $Q(x) = (x - 2)^3(x + 1)^4(x - \sqrt{2})(x^2 + 6)$ jest podzielny np. przez każdy z czynników $(x - 2)$, $(x - 2)^2$, $(x - 2)^3$, ale nie można go już podzielić przez $(x - 2)^4$.

Definicja

Liczbę a nazywamy **n -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$** , gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - a)^n$ i nie jest podzielny przez $(x - a)^{n+1}$.

Zgodnie z tą definicją dla wielomianu $Q(x) = (x - 2)^3(x + 1)^4(x - \sqrt{2})(x^2 + 6)$ liczba:

- 2 jest pierwiastkiem trzykrotnym,
- -1 jest pierwiastkiem czterokrotnym,
- $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem jednokrotnym.

Przykład 7 ◀ zad. 6.19

Czy można dobrać taką wartość parametru m , aby liczba -3 była dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 + 15x + 9$?

Rozwiązanie

Liczba -3 jest pierwiastkiem tego wielomianu, o ile jest prawdziwa równość $W(-3) = 0$. Zatem $-27 + 9m - 45 + 9 = 0$, czyli $m = 7$.

◀ 6.19. Dla jakich wartości parametru m liczba r jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$?

- | | |
|--|---------|
| a) $W(x) = x^3 - mx^2 - 3mx + 27$ | $r = 3$ |
| b) $W(x) = x^4 - (m + 2)x^3 + 4mx^2 - 36x + 16$ | $r = 2$ |
| c) $W(x) = (m - 1)x^4 - 3mx^3 + (m + 2)x^2 + 6x - 5$ | $r = 1$ |
| d) $W(x) = (m + 4)x^3 - (2 - 3m)x^2 + 35x + 8m - 1$ | $r = 5$ |

Odp.: a) $m = 3$ b) $m = 7$ c) $m = 2$ d) $m = -3$

Teraz trzeba sprawdzić, czy wielomian $W(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ jest podzielny przez $(x+3)^2$ i nie jest podzielny przez $(x+3)^3$. Odpowiedź na drugą część pytania jest prosta – wielomian W jest stopnia trzeciego, więc byłby podzielny przez $(x+3)^3$ tylko wówczas, gdyby był sześcianem sumy $x+3$, a nie jest. Po wykonaniu dzielenia przez $(x+3)^2$ otrzymujemy $W(x) = (x+3)^2(x+1)$.

Odp.: Liczba -3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu W dla $m = 7$.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

6.1. Wskaż wielomian, przez który podzielny jest wielomian $x^5 + x + 2$.

- A. $x - 2$ B. $x - 1$ C. $x + 1$ D. $x + 2$

6.2. Wielomian $x^3 - 3x + m$ jest podzielny przez $x - 2$. Wskaż liczbę m .

- A. -14 B. -2 C. 2 D. 14

6.3. Wyraz wolny pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest równy 48. Która liczba nie może być pierwiastkiem tego wielomianu?

- A. 4 B. 9 C. 48 D. -6

6.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Każdy wielomian stopnia piątego

- A. jest podzielny przez pewien dwumian.
B. ma co najmniej jeden pierwiastek.
C. ma co najwyżej pięć pierwiastków.

6.5. Dany jest wielomian $W(x) = -5x^2(x^2 - 7x)^2(x^3 - 14x^2 + 49x)(x^2 - 8x + 7)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Liczba 7 jest pięciokrotnym pierwiastkiem wielomianu W .
B. Wielomian W ma dokładnie trzy pierwiastki.
C. Wielomian W ma jeden pierwiastek jednokrotny.

6.6. Zastosuj schemat Hornera i wykonaj dzielenie.

- a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1)$ d) $(x^3 - 23x - 10) : (x - 5)$
b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 6) : (x + 1)$ e) $(x^4 - 3x^2 + 15x - 9) : (x + 3)$
c) $(-3x^3 + x^2 - 2x - 32) : (x + 2)$ f) $(x^5 + 32) : (x + 2)$

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. C

6.2. B

6.3. B

6.4. P, P, P

6.5. P, P, P

6.6. a) $x^2 - 2x + 3$

b) $2x^2 - 9x + 6$

c) $-3x^2 + 7x - 16$

d) $x^2 + 5x + 2$

e) $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

6.7. a) $-3, 1$

b) $-2, \frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}, 1$

d) $\frac{3}{2}$

6.8. $-3, 3$

6.9. $m = -5, k = 30; -\frac{5}{2}$

6.10. $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

6.11. a) $x = -2$ lub $x = 1$

b) $x = 1$

c) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 3$

d) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 3$

e) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = 1$ lub $x = 2$

f) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

6.12. a) np.

$(x+3)(x+2)(2x-1)(x-1) = 0$

b) np. $(x+1)(3x-1)(6x-3) = 0$

c) np. $x(x+1)(3x-2)(x-2) = 0$

d) np. $(4x-2)(10x-4)(x-7) = 0$

6.13. a) $x = 1$ lub $x = 2$

b) $x = -3$ lub $x = 2$

c) $x = 4$

d) $x = 3$

6.14. a) $x = 1$ lub $x = 3$ lub $x = 4$

b) $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 5$

c) $x = -2$ lub $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ lub

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

d) $x = -4$ lub $x = 2$ lub $x = 5$

6.15. a) $x = -7$ lub $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 0$

b) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 4$

c) $x = -4$ lub $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = 7$

e) $x = -1$ lub $x = 5$ lub

$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

f) $x = -1$ lub $x = 2$

6.7. Wiadomo, że r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ $r = -2$

b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ $r = 3$

c) $W(x) = 2x^3 - 11x^2 + 4x + 5$ $r = 5$

d) $W(x) = 4x^3 - 27x + 27$ $r = -3$

6.8. Liczby 1 i -2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

6.9. Liczby 2 i 3 są pierwiastkami równania $2x^3 + mx^2 - 13x + k = 0$. Znajdź m i k oraz oblicz trzeci pierwiastek równania.

6.10. Liczby $\frac{5 - \sqrt{33}}{2}$ i $\frac{5 + \sqrt{33}}{2}$ są pierwiastkami wielomianu

$W(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 11x + 2$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

6.11. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

d) $(2x - 1)(x + 3)(x - 2) - 2(x^2 + 6) = 0$

b) $x^3 + 9x - 10 = 0$

e) $(x - 4)(-3x^2 - x - 16) - 60 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

f) $(x^2 - 5)(x + 5) - 3(x - 2)(x^2 + 4) + 7 = 0$

6.12. Pierwiastkami równania $3(2x - 7)(9x + 4)(x - 15) = 0$ są liczby $15, \frac{7}{2}, -\frac{4}{9}$. Skorzystaj z tego przykładu i podaj przykład równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są podane liczby.

a) $-3, -2, \frac{1}{2}, 1$ b) $-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ c) $-1, 0, \frac{2}{3}, 2$ d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 7$

6.13. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

c) $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$

b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

d) $3x^3 - 6x^2 - 27 = 0$

6.14. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$

c) $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$

d) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 6x + 13\frac{1}{3} = 0$

6.15. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 21x = 0$

d) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 20x - 7 = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 32x - 16 = 0$

e) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 11x - 5 = 0$

c) $x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 28x - 48 = 0$

f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

6.16. Rozwiąż równanie.

- a) $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = 0$ c) $50x^3 - 15x^2 - 9x + 2 = 0$
 b) $63x^3 + 12x^2 - 17x + 2 = 0$ d) $2x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 6x + 24 = 0$

6.17. Jednym z rozwiązań podanego równania z niewiadomą x jest liczba r . Wyznacz m i rozwiąż to równanie.

- a) $mx^3 - (m+1)x^2 - 9(x-2) = 0$ $r = 2$
 b) $x^3 + 7mx^2 - 2(5m-2)x + 8m = 0$ $r = 2$
 c) $(m-1)x^3 + x^2 - (m+2)x - 2m = 0$ $r = -1$
 d) $\frac{1}{2}mx^3 + (4+m)x^2 - (3m-1)x - 2m = 0$ $r = 4$

6.18. Zbadaj krotność pierwiastka r wielomianu $W(x)$.

- a) $W(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ $r = -1$
 b) $W(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 32x + 16$ $r = 2$
 c) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ $r = 1$
 d) $W(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 14x + 15$ $r = 3$

6.19. Dla jakich wartości parametru m liczba r jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$?

- a) $W(x) = x^3 - mx^2 - 3mx + 27$ $r = 3$
 b) $W(x) = x^4 - (m+2)x^3 + 4mx^2 - 36x + 16$ $r = 2$
 c) $W(x) = (m-1)x^4 - 3mx^3 + (m+2)x^2 + 6x - 5$ $r = 1$
 d) $W(x) = (m+4)x^3 - (2-3m)x^2 + 35x + 8m - 1$ $r = 5$

6.20. Dla jakich wartości a i b liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$?

6.21. Dla jakich wartości parametru m liczba $r = -2$ jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + 2mx^3 - (5m+6)x - 16$?

6.22. Znajdź takie wartości a i b , aby liczba r była dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

- a) $W(x) = ax^4 + bx^3 - 2(4a+b)x^2 + (a-3b)x + 8$ $r = 2$
 b) $W(x) = (a+b)x^3 - (4a+b)x^2 + (7a-1)x - (4a-b)$ $r = 3$

D

6.23. Wykaż, że dla $a \neq 1$ wielomian $W(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+2a)x - a^2$ ma pierwiastek dwukrotny.

6.24. Pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ są liczby 1 i -2 , przy czym -2 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wyznacz współczynniki a, b, c tego wielomianu.

$$\mathbf{6.23.} \quad W(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+2a)x - a^2$$

$$W(1) = 1 - 2a - 1 + a^2 + 2a - a^2 = 0$$

Zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x-1$.

Wykonujemy dzielenie.

	1	$-2a-1$	a^2+2a	$-a^2$
1	1	$-2a$	a^2	0

$$W(x) = (x-1)(x^2 - 2ax + a^2) = (x-1)(x-a)^2$$

Jeżeli $a \neq 1$, to a jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x)$.

$$\mathbf{6.16. a)} \quad x = -3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{b)} \quad x = -\frac{2}{3} \text{ lub } x = \frac{1}{7} \text{ lub } x = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{c)} \quad x = -\frac{2}{5} \text{ lub } x = \frac{1}{5} \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{d)} \quad x = -2 \text{ lub } x = 4 \text{ lub } x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{lub } x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\mathbf{6.17. a)} \quad m = 1, x = -3 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3$$

$$\mathbf{b)} \quad m = -1, x = 1 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 4$$

$$\mathbf{c)} \quad m = 2, x = -2 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 2$$

$$\mathbf{d)} \quad m = -2, x = -1 \text{ lub } x = 4$$

$$\mathbf{6.18. a)} \quad \text{dwukrotny}$$

$$\mathbf{b)} \quad \text{trzykrotny}$$

$$\mathbf{c)} \quad \text{trzykrotny}$$

$$\mathbf{d)} \quad \text{jednokrotny}$$

$$\mathbf{6.19. a)} \quad m = 3$$

$$\mathbf{b)} \quad m = 7$$

$$\mathbf{c)} \quad m = 2$$

$$\mathbf{d)} \quad m = -3$$

$$\mathbf{6.20.} \quad a = 8, b = -4$$

$$\mathbf{6.21.} \quad m = 2$$

$$\mathbf{6.22. a)} \quad a = 1, b = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad a = -2, b = 1$$

$$\mathbf{6.24.} \quad a = 3, b = 0, c = -4$$

6.25. $m \in \{-8, -6, -2, 4\}$

6.26. $a = -4$ lub $a = 2$

6.27. $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 1$
Wielomian W może mieć

pierwiastki wymierne tylko

w zbiorze $\left\{1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$.

$W(1) = 3 + 5 - 1 + 1 = 8 \neq 0$

$W(-1) = -3 + 5 + 1 + 1 = 4 \neq 0$

$W\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} + 5 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 =$

$= \frac{1}{9} + \frac{5}{9} - \frac{3}{9} + 1 = 1\frac{1}{3} \neq 0$

$W\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) + 5 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 =$

$= -\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{3}{9} + 1 = 1\frac{7}{9} \neq 0$

Zatem wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków wymiernych.

6.28. 2, 4, 8

6.29.

$W(x) = x[x^2 - (m+1)x + m]$

$x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 2$, więc

$x^2 - (m+1)x + m =$

$= (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$. Stąd $m = 2$ (bo $-m-1 = -3$, $m = 2$).

Odp.: $m = 2$

6.30.

$W(x) = (x+6)[x^2 - (m-4)x - 4m]$

Pierwiastkami $W(x)$ są liczby:

$-6, 4, 2$ lub $-8, 6, 4$,

lub $-10, 8, 6$

1. $(x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8 =$

$= x^2 + (4-m)x - 4m$

$(4-m = 6 \text{ i } -4m = 8) \Rightarrow m = -2$

2. $(x+8)(x+4) = x^2 + 12x + 32 =$

$= x^2 + (4-m)x - 4m$

$(4-m = 12 \text{ i } -4m = 32) \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -8$

3. $(x+10)(x+8) = x^2 + 18x + 80 =$

$= x^2 + (4-m)x - 4m$

$(4-m = 18 \text{ i } -4m = 80)$

- warunki sprzeczne

Odp.: $m \in \{-8, 2\}$

6.25. Jakie całkowite wartości może przyjąć parametr m , jeśli wiadomo, że równanie $x^3 + (m-2)x - 3 = 0$ ma pierwiastek całkowity?

6.26. Jakie całkowite wartości może przyjąć współczynnik a , jeżeli wiadomo, że wielomian $ax^4 - 3x + 1$ ma pierwiastek całkowity?

6.27. Wykaż, że wielomian $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 1$ nie ma pierwiastków wymiernych.

6.28. Pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + px^2 + 56x + q$ są dodatnie i pozostają w stosunku 1 : 2 : 4. Znajdź te pierwiastki.

* **6.29.** Dla jakich wartości parametru m pierwiastki wielomianu $W(x) = x[x^2 - (m+1)x + m]$ są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi?

* **6.30.** Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x) = (x+6)[x^2 - (m-4)x - 4m]$ ma trzy pierwiastki będące kolejnymi liczbami parzystymi mniejszymi od zera?

Prosto do matury



1. Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian W ma trzy różne pierwiastki całkowite.

B. Wielomian W ma co najwyżej jeden pierwiastek ujemny.

C. Suma wszystkich pierwiastków wielomianu W jest liczbą dodatnią.

2. Rozwiąż równanie $x^3 - 7x - 6 = 0$.

3. Dla jakiej wartości parametru a równania $(x-a)(2x^2 + 5x - 3) = 0$ i $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ mają ten sam zbiór rozwiązań?

4. Liczby $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ są pierwiastkami równania $x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego równania.

5. Dla jakich wartości parametru k pierwiastkami równania $x^3 + (k^2 - 7)x^2 - (k+4)x - 2 = 0$ są liczby 1 i -2?

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $x = -1$ lub $x = -2$ lub $x = 3$

3. $a = 1$

4. $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

5. $k = -3$

7. Nierówności wielomianowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności wielomianowych

W tym rozdziale przedstawimy dwie metody rozwiązywania nierówności wielomianowych: za pomocą **siatki znaków** oraz z użyciem **przybliżonego wykresu** wielomianu. Każdą z nich możemy zastosować pod warunkiem, że rozłożymy wielomian na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Znajomość znaków poszczególnych czynników umożliwia określenie znaku iloczynu.

Siatka znaków

Prześledźmy na przykładach metodę rozwiązywania nierówności wielomianowych wyższych stopni, nazywaną siatką znaków.

Przykład 1 ◀ zad. 7.5 a–d

Rozwiążemy nierówność $(x - 5)(x - 1)(x + 2) > 0$.

Rozwiązanie

Lewa strona nierówności jest rozłożonym na czynniki liniowe wielomianem stopnia trzeciego. Iloczyn trzech czynników jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są dodatnie albo dwa z nich są ujemne i jeden dodatni.

- $x - 5 = 0$ dla $x = 5$ $x - 5 > 0$ dla $x > 5$ $x - 5 < 0$ dla $x < 5$
- $x - 1 = 0$ dla $x = 1$ $x - 1 > 0$ dla $x > 1$ $x - 1 < 0$ dla $x < 1$
- $x + 2 = 0$ dla $x = -2$ $x + 2 > 0$ dla $x > -2$ $x + 2 < 0$ dla $x < -2$

Znaki trzech czynników zbieramy w jednej tabeli. W dolnym wierszu wpisujemy znak iloczynu.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; \infty)$
$x - 5$	–	–	–	–	–	0	+
$x - 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x + 2$	–	0	+	+	+	+	+
iloczyn	–	0	+	0	–	0	+

Odp.: $(x - 5)(x - 1)(x + 2) > 0$ dla $x \in (-2; 1) \cup (5; \infty)$

◀ 7.5. Rozwiąż nierówność.

a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$

b) $(x + 2)(x + 3)(x - 4) \geq 0$

c) $(x - 4)(x - 1)(x + 6) < 0$

d) $(x + 3)(x + 4)(x - 5) \leq 0$

Odp.: a) $x \in (1; 2) \cup (3; \infty)$

b) $x \in (-3; -2) \cup (4; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -6) \cup (1; 4)$

d) $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; 5)$

ZZ i MKP

temat 2.14

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 7.8. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$

b) $x^3 - 5x^2 - x + 5 < 0$

c) $x^3 + 7x^2 + 3x + 21 \geq 0$

d) $x^3 - 3x^2 + x - 3 < 0$

e) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

f) $x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0$

g) $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \leq 0$

h) $-x^3 + 4x^2 - 3x + 12 \leq 0$

Odp.: a) $x \in (-3; -1) \cup (1; \infty)$ b) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 5)$ c) $x \in (-7; \infty)$ d) $x \in (-\infty; 3)$ e) $x \in (2; \infty) \cup \{-2\}$ f) $x \in (1; \infty)$ g) $x \in (-\infty; -3) \cup \{3\}$ h) $x \in (4; \infty)$

Przykład 2 ◀ zad. 7.8

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \leq 0$

Rozkładamy lewą stronę nierówności na czynniki.

$$x^2(x - 4) - 9(x - 4) \leq 0$$

$$(x - 4)(x^2 - 9) \leq 0$$

$$(x - 4)(x - 3)(x + 3) \leq 0$$

Miejscami zerowymi wielomianu są liczby: 4, 3 i -3.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 3)$	3	$(3; 4)$	4	$(4; \infty)$
$x - 4$	-	-	-	-	-	0	+
$x - 3$	-	-	-	0	+	+	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
iloczyn	-	0	+	0	-	0	+

Odp.: $(x - 4)(x - 3)(x + 3) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (3; 4)$

b) $x^3 + 10x^2 + 25x \geq 0$

$$x(x^2 + 10x + 25) \geq 0$$

$$x(x + 5)^2 \geq 0$$

Miejscami zerowymi wielomianu

są liczby 0 i -5.

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	0	$(0; \infty)$
x	-	-	-	0	+
$(x + 5)^2$	+	0	+	+	+
iloczyn	-	0	-	0	+

Odp.: $x^3 + 10x^2 + 25x \geq 0$ dla $x \in (0; \infty) \cup \{-5\}$

c) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 > 0$

$$x^2(x - 3) + 4(x - 3) > 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 4) > 0$$

Czynnik $x^2 + 4$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Jedynym miejscem zerowym wielomianu po lewej stronie nierówności jest liczba 3. Zatem dana nierówność ma taki sam zbiór rozwiązań jak nierówność $x - 3 > 0$.Odp.: $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 > 0$ dla $x \in (3; \infty)$ Dla dowolnej liczby naturalnej n :

- $(x - a)^{2n} > 0$, gdy $x \neq a$
- $(x - a)^{2n+1} > 0$, gdy $x > a$
- $(x - a)^{2n+1} < 0$, gdy $x < a$

Przybliżone wykresy wielomianów

Znamy dokładne wykresy następujących wielomianów: zerowego ($W(x) = 0$), stopnia zero ($W(x) = a_0, a_0 \neq 0$), stopnia pierwszego ($W(x) = a_1x + a_0, a_1 \neq 0$) i stopnia drugiego ($W(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2 \neq 0$). Wykresem każdego z trzech pierwszych jest prosta, a ostatniego – parabola. Zastanówmy się, jakie własności mają wykresy wielomianów wyższych stopni.

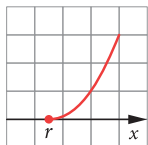
- Dziedzina każdego wielomianu jest zbiór $\mathbf{R}$.
- Ani prosta, ani parabola nie jest nigdzie „rozerwana”. Tę własność ma wykres każdego wielomianu.

Wykres dowolnego wielomianu można, obrazowo mówiąc, narysować bez odrywania ołówka od kartki.

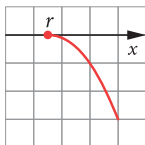
- Wielomian stopnia n

$$W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

ma co najwyżej n pierwiastków. Któryś z nich jest największy – oznaczmy go r . Zatem dla argumentów większych od r wykres nie przecina już osi x . Inaczej mówiąc, dla $x > r$ albo $W(x) > 0$ (wykres jest powyżej osi x), albo $W(x) < 0$ (wykres jest poniżej osi x). Zależy to wyłącznie od znaku współczynnika stojącego przy najwyższej potęgze x .



Jeżeli $a_n > 0$,
to dla $x > r$
mamy $W(x) > 0$.



Jeżeli $a_n < 0$,
to dla $x > r$
mamy $W(x) < 0$.

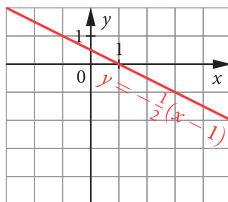
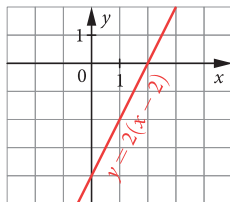
Jeżeli szkicujemy wykres wielomianu od prawej strony, to zaczynamy w:

- I ćwiartce (od góry), gdy $a_n > 0$,
- IV ćwiartce (od dołu), gdy $a_n < 0$.

W naszych podręcznikach wszystkie wykresy potrzebne do rozwiązywania nierówności wyższego stopnia rysujemy od strony prawej do lewej.

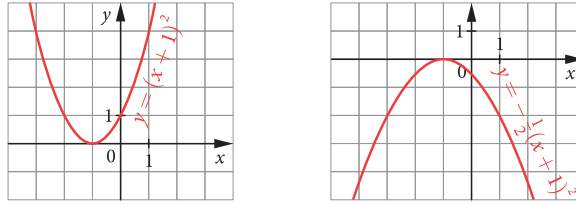
- Z faktu, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków, wynika jeszcze jedna własność wykresu – ma on co najwyżej n punktów wspólnych z osią x .

Przyjrzyjmy się, jak wygląda wykres wielomianu w pobliżu miejsca zerowego. Dla pierwiastków jednokrotnych zachodzi jedna z dwóch możliwości, np.:



W obydwu sytuacjach wartości wielomianu mają różne znaki dla argumentów leżących odpowiednio blisko miejsca zerowego po jego dwóch stronach.

Jeżeli pierwiastek jest dwukrotny, to też mamy dwie możliwości, np.:



Tym razem wartości funkcji są tego samego znaku dla argumentów leżących po obydwu stronach miejsca zerowego – wykres odbija się od osi x .

Jeśli x_0 jest pierwiastkiem o nieparzystej krotności, to w punkcie $(x_0, 0)$ wykres wielomianu przecina oś x ; jeśli x_0 jest pierwiastkiem o parzystej krotności, to w punkcie $(x_0, 0)$ wykres wielomianu odbija się od osi x .

Wiemy, że czynniki z pierwiastkami parzystej krotności nie zmieniają znaku wielomianu, więc powyższe obserwacje możemy uogólnić na wielomiany dowolnego stopnia i dowolne krotności ich pierwiastków.

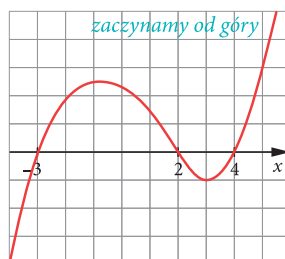
Opisane własności wykresów (przeprowadzenie ich dowodów wymaga bardziej zaawansowanej wiedzy) pozwalają na naszkicowanie przybliżonego wykresu wielomianu i to tylko wówczas, gdy wielomian jest rozłożony na czynniki. Z takiego wykresu można jednak w prosty sposób odczytać znak wielomianu dla danego argumentu.

Przykład 3

Odczytamy rozwiązanie nierówności $5(x-2)(x+3)(x-4) > 0$ z przybliżonego wykresu wielomianu $W(x) = 5(x-2)(x+3)(x-4)$.

Rozwiązanie

- Wielomian W jest trzeciego stopnia i ma trzy jednokrotne pierwiastki: -3 , 2 i 4 .
- Współczynnik przy x^3 jest dodatni – szkic zaczynamy z prawej strony od góry.



Odp.: $x \in (-3; 2) \cup (4; \infty)$

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest w postaci iloczynowej, to wyznaczenie współczynnika przy najwyższej potęgze x sprowadza się do wymnożenia odpowiednich współczynników z kolejnych nawiasów. Na przykład w wielomianie stopnia 9

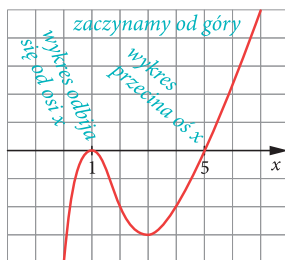
$W(x) = -2(x-3)(3x+1)(4-x)(1-2x)^4(\sqrt{7}x^2-x+4)$ współczynnik a_9 jest równy $(-2) \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-2)^4 \cdot \sqrt{7}$. Przy rozwiązywaniu nierówności w praktyce potrzebna jest tylko informacja o znaku tej liczby.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność, korzystając z przybliżonego wykresu wielomianu.

Rozwiązanie

a) $(x-1)^2(x-5) \geq 0$



Odp.: $x \in \langle 5; \infty \rangle \cup \{1\}$

b) $-2(x+1)^2(x-3) > 0$



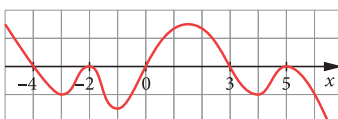
Odp.: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 3)$

c) $x^2(x-\sqrt{3})\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-1)^3 < 0$



Odp.: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup (1; \sqrt{3})$

d) $-5x(x+4)^3(x+2)^4(x-3)(x-5)^2 \geq 0$



Odp.: $x \in (-\infty; -4) \cup \{0; 3\} \cup \{-2, 5\}$

Podsumujmy: rozwiązanie nierówności wielomianowej $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) \leq 0$ za pomocą przybliżonego wykresu wielomianu otrzymamy w kolejnych krokach.

Krok 1: Rozkładamy wielomian W na **czynniki**, znajdujemy wszystkie jego **pierwiastki** i zaznaczamy je na osi x .

Krok 2: Sprawdzamy **znak współczynnika** stojącego przy najwyższej potęgze x – jeżeli jest dodatni, to wykres zaczynamy od góry (po prawej stronie największego pierwiastka), jeżeli ujemny, to od dołu.

Krok 3: W pierwiastkach o nieparzystej krotności **przecinamy** linię wykresu oś x , w pierwiastkach o parzystej krotności linię wykresu **odbijamy** od osi x .

Krok 4: Z tak narysowanego „wężyka” odczytujemy **znaki wartości funkcji**, czyli rozwiązanie nierówności.

Z omówionych własności wykresów wielomianów wynika, że:

- żaden wielomian **nieparzystego stopnia** nie przyjmuje w całej dziedzinie wartości największej ani najmniejszej. Zbiorem wartości takiego wielomianu jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$,
- każdy wielomian **parzystego stopnia** przyjmuje wartość największą albo wartość najmniejszą, przy czym jeżeli współczynnik stojący przy najwyższej potęgde x jest: dodatni, to taki wielomian przyjmuje wartość najmniejszą, ujemny, to taki wielomian przyjmuje wartość największą.

Jeśli mamy rozwiązać równanie lub nierówność wielomianową wyższego stopnia, warto sprawdzić, czy nie można zastosować jakiegoś podstawienia, by obniżyć w ten sposób stopień rozpatrywanego wielomianu.

◀ 7.18. Rozwiąż nierówność.

a) $(x^2 - 1)(x^2 + 4) \leq 24$

b) $(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x) > 105$

c) $6(x^2 + 2x + 2)^2 - (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3) < 6(x^2 + 2x + 3)$

Odp.: a) $x \in (-2; 2)$

b) $x \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty)$

c) $x \in (-2; 0)$. Wskazówka:

Podstaw $t = x^2 + 2x + 2$.

Przykład 5 ◀ zad. 7.18

Rozwiążmy nierówność $(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 6) - 3 < 0$.

Rozwiązanie

Nierówność jest stopnia czwartego, ale jeśli podstawimy

$$t = x^2 - 4x + 4,$$

to sprowadzimy ją do nierówności kwadratowej.

$$t(t + 2) - 3 < 0$$

$$t^2 + 2t - 3 < 0$$

$$\leftarrow t_1 = -3, t_2 = 1$$

$$t \in (-3; 1)$$

Wracamy do niewiadomej x i otrzymujemy do rozwiązania układ nierówności.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 < 1 \\ x^2 - 4x + 4 > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - 4x + 7 > 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (1; 3) \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

czyli ostatecznie $x \in (1; 3)$.

Odp.: $x \in (1; 3)$

Zadania

W zadaniach 7.1–7.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.1. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^4 > 1$ jest

- A. $(1; \infty)$. B. $\mathbf{R} - \{1\}$. C. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

7.2. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - \frac{1}{x}$ jest zbiór

- A. $D = \mathbf{R} - \{0\}$. B. $D = (-1; \infty)$. C. $D = (-1; \infty) - \{0\}$.

7.3. Dany jest wielomian $W(x) = x^{10} + 2x^5 + 1$.

- A. Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $W(x) \geq 0$.
 B. Tylko jedna liczba całkowita spełnia nierówność $W(x) \leq 0$.
 C. Zbiorem wartości wielomianu W jest przedział $(0; \infty)$.

7.4. Dany jest wielomian $W(x) = x(x-2)(x-\sqrt{5})$.

- A. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \leq 0$ ma element największy.
 B. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \geq 0$ ma element najmniejszy.
 C. Zbiór liczb wymiernych spełniających nierówność $W(x) \geq 0$ ma element najmniejszy.

7.5. Rozwiąż nierówność.

- a) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ e) $(x+5)(1-x)(x+1) \geq 0$
 b) $(x+2)(x+3)(x-4) \geq 0$ f) $(x+8)(x-6)x(x+4) < 0$
 c) $(x-4)(x-1)(x+6) < 0$ g) $(x-1)(x+9)(7-x)x \geq 0$
 d) $(x+3)(x+4)(x-5) \leq 0$ h) $(1-x)(2-x)(3+x)(4+x) \geq 0$

7.6. Rozwiąż nierówność.

- a) $(x+6)(x-3)^2 > 0$ e) $(x-3)^2 x^2 \geq 0$
 b) $(x+2)^2(x+5) < 0$ f) $(x+1)^2(x-2)^2 \leq 0$
 c) $(x-2)(x+1)^2 \geq 0$ g) $-3(x+3)^3(x-5)^2 < 0$
 d) $(x+4)^2(x-4) \leq 0$ h) $-\frac{1}{2}(x+1)^2 x^3(x-8)(x+7)^2 > 0$

7.7. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^3 > 27$ e) $x^4 + x^2 \leq 2x^3$
 b) $x^3 \leq 9x$ f) $x^3 + 6x^2 + 9x \geq 0$
 c) $x^4 < 1$ g) $x^4 + 25x^2 < 10x^3$
 d) $x^4 > x^2$ h) $x^4 + 4x^2 \geq 4x^3$

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. F, F, P

7.2. F, F, F

7.3. P, P, F

7.4. P, F, P

- 7.5. a)** $x \in (1; 2) \cup (3; \infty)$
b) $x \in \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$
c) $x \in (-\infty; -6) \cup (1; 4)$
d) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -3; 5 \rangle$
e) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle -1; 1 \rangle$
f) $x \in (-8; -4) \cup (0; 6)$
g) $x \in \langle -9; 0 \rangle \cup \langle 1; 7 \rangle$
h) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$

- 7.6. a)** $x \in (-6; \infty) - \{3\}$
b) $x \in (-\infty; -5)$
c) $x \in \langle 2; \infty \rangle \cup \{-1\}$
d) $x \in (-\infty; 4)$
e) $x \in \mathbf{R}$
f) $x \in \{-1, 2\}$
g) $x \in (-3; 5) \cup (5; \infty)$
h) $x \in (0; 8)$

- 7.7. a)** $x \in (3; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 0; 3 \rangle$
c) $x \in (-1; 1)$
d) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
e) $x \in \{0, 1\}$
f) $x \in \langle 0; \infty \rangle \cup \{-3\}$
g) brak rozwiązań
h) $x \in \mathbf{R}$

7.8. a) $x \in (-3; -1) \cup (1; \infty)$ **b)** $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 5)$ **c)** $x \in (-7; \infty)$ **d)** $x \in (-\infty; 3)$ **e)** $x \in (2; \infty) \cup \{-2\}$ **f)** $x \in (1; \infty)$ **g)** $x \in (-\infty; -3) \cup \{3\}$ **h)** $x \in (4; \infty)$ **7.9. a)** $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 5)$ **b)** $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 7)$ **c)** $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 8)$ **d)** $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 3)$ **e)** $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 6)$ **f)** $x \in (-7; -4) \cup (3; \infty)$ **g)** $x \in (-1; 1) \cup (9; \infty)$ **h)** $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 3)$ **7.10. a)** $x \in (0; 1) \cup (4; \infty)$ **b)** $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 2)$ **c)** $x \in (-\infty; -3) \cup \{0\}$ **d)** $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$ **e)** $x \in (-\infty; 3)$ **f)** $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$ **g)** $x \in (-\infty; 1)$ **h)** $x \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ **7.11. a)** $x \in (-4; 1) \cup (5; \infty)$ **b)** $x \in (-\infty; -7) \cup (2; 3)$ **c)** $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 4)$ **d)** $x \in (2; \infty)$ **e)** $x \in (-4; \infty)$ **f)** $x \in (-\infty; 2)$ **7.12. a)** $x \in \left(\frac{-5 - \sqrt{53}}{2}; 0\right) \cup$ $\cup \left(\frac{-5 + \sqrt{53}}{2}; \infty\right)$ **b)** $x \in (-\infty; -1) \cup \{0\}$ **c)** $x \in (-3; 0) \cup (3; \infty)$ **d)** $x \in (0; \infty)$ **e)** $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (3; \infty)$ **f)** $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-1; \sqrt{5})$ **7.13. a)** $D = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ **b)** $D = (0; \infty)$ **c)** $D = (-3; 1) \cup (4; \infty)$ **d)** $D = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$ **e)** $D = (-4; 0) \cup (4; \infty)$ **f)** $D = (-2; \infty) - \{1\}$ **7.14. a)** $b = -4, c = 3$ **b)** $b = -4, c = 4$ **c)** $c > \frac{b^2}{4}$ (np. $b = -4$ i $c = 5$)lub $c = \frac{b^2}{4}$ i $b \geq 6$ (np. $b = 6$ i $c = 9$)**d)** Nie ma takich b i c .**7.8. Rozwiąż nierówność.****a)** $x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$ **b)** $x^3 - 5x^2 - x + 5 < 0$ **c)** $x^3 + 7x^2 + 3x + 21 \geq 0$ **d)** $x^3 - 3x^2 + x - 3 < 0$ **7.9. Rozwiąż nierówność.****a)** $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 < 0$ **b)** $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 < 0$ **c)** $-x^3 + 7x^2 + 10x - 16 \geq 0$ **d)** $x^3 - 7x - 6 < 0$ **7.10. Rozwiąż nierówność.****a)** $x^3 - 5x^2 + 4x > 0$ **b)** $3x^3 + 9x^2 - 30x < 0$ **c)** $2x^3 + 6x^2 \leq 0$ **d)** $-4x^3 + 8x^2 + 12x \geq 0$ **7.11. Rozwiąż nierówność.****a)** $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 > 0$ **b)** $x^3 + 2x^2 - 29x + 42 < 0$ **c)** $x^3 - 2x^2 - 8x \leq 0$ **7.12. Rozwiąż nierówność.****a)** $4x^3 + 20x^2 - 28x > 0$ **b)** $x^3 + x^2 \leq 0$ **c)** $2x^3 - 18x \geq 0$ **7.13. Wyznacz dziedzinę D funkcji.****a)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}$ **e)** $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$ **f)** $x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0$ **g)** $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \leq 0$ **h)** $-x^3 + 4x^2 - 3x + 12 \leq 0$ **e)** $-x^3 + 28x + 48 > 0$ **f)** $x^3 + 8x^2 - 5x - 84 \geq 0$ **g)** $x^3 - 9x^2 - x + 9 > 0$ **h)** $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 < 0$ **e)** $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0$ **f)** $-x^3 - x^2 + x + 1 > 0$ **g)** $x^3 - 1 < 0$ **h)** $8x^3 - 27 > 0$ **d)** $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 > 0$ **e)** $x^3 - 12x + 16 \geq 0$ **f)** $x^3 - 3x - 2 \leq 0$ **d)** $-x^3 - x^2 - 7x < 0$ **e)** $5x^3 - 15x^2 - 10x + 30 > 0$ **f)** $-3x^3 - 3x^2 + 15x + 15 \geq 0$ **d)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ **e)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^3 - 32x}}$ **f)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}$ **7.14. Dla jakich wartości współczynników b i c zbiorem rozwiązań nierówności $(x+3)(x^2+bx+c) > 0$ jest podany zbiór A ?****a)** $A = (-3; 1) \cup (3; \infty)$ **b)** $A = (-3; 2) \cup (2; \infty)$ **c)** $A = (-3; \infty)$ **d)** $A = (-\infty; -5) \cup (-3; 7)$

7.15. Rozwiąż nierówność.

a) $|x^3 - 3x + 1| < 1$

b) $x^2(x^2 - 5)(|x| - 1) + 6|x| \leq 6$

c) $|x|(x^2 - 3) - 2 \leq 0$

d) $|x|(x^2 + x) > x + 1$

e) $|x^3 - x^2 - x + 1| < 9x + 9$

f) $|x^3 - 4x| \geq 3x^2$

7.16. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^3 \geq 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 - x \leq 0 \\ (x - 1)(x - 3)(x - 5) < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2 - 2x + 1)(x - 3) < 0 \\ (x + 2)^2(x^2 - 14x + 49) \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4x > 0 \\ (2x - 1)(x - 5) \leq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \leq 0 \\ x^3 - 9x > 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3 - 13x + 12 < 0 \\ |2x - 1| > 3 \end{cases}$

7.17. Ułóż nierówność wielomianową, której zbiorem rozwiązań jest zbiór A.

a) $A = (2; 3) \cup (4; \infty)$

b) $A = (-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; \infty)$

c) $A = (-\infty; -3) \cup (2; \infty) \cup \{-1\}$

d) $A = (-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2)$

7.18. Rozwiąż nierówność.

a) $(x^2 - 1)(x^2 + 4) \leq 24$

b) $(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x) > 105$

c) $6(x^2 + 2x + 2)^2 - (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3) < 6(x^2 + 2x + 3)$

7.19. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x - 5)^3(3x + k) < 0$ nie ma rozwiązań?**D 7.20.** Wykaż, że nierówności $x^3 + x^2 - x - 10 > 0$ i $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 < 0$ mają te same zbiory rozwiązań.**D 7.21.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^6 - x^5 + x^4 + 3x^2 - 3x + 3$ przyjmuje wartości dodatnie dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.**D * 7.22.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.**7.20.** Wystarczy rozwiązać obie nierówności.

(1) $x^3 + x^2 - x - 10 > 0$

	1	1	-1	-10
2	1	3	5	0

$(x - 2)(x^2 + 3x + 5) > 0, \Delta = 9 - 20 < 0, x - 2 > 0, x \in (2; \infty)$

(2) $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 < 0$

	-1	6	-12	8
2	-1	4	-4	0

$-(x - 2)(x^2 - 4x + 4) < 0, -(x - 2)(x - 2)^2 < 0, -(x - 2)^3 < 0, x \in (2; \infty)$

Zbiorem rozwiązań każdej z nierówności jest przedział $(2; \infty)$, więc mają one ten sam zbiór rozwiązań.

7.15. a) $x \in (-2; -\sqrt{3}) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$

b) $x \in \langle -\sqrt{3}; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle -1; 1 \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \sqrt{3} \rangle$

c) $x \in \langle -2; 2 \rangle$

d) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

e) $x \in (-1; 4)$

f) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$

7.16. a) brak rozwiązań

b) $x \in \langle 4; 5 \rangle$

c) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3)$

d) $x \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle \cup (4; 5)$

e) $x \in (-3; 0)$

f) $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 3)$

7.17. a) np. $(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$

b) np. $x(x + 3)(x + 2)(x - 1) > 0$

c) np. $(x + 3)(x + 1)^2(x - 2)^3 \geq 0$

d) np. $(x + 3)(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 2) < 0$

7.18. a) $x \in \langle -2; 2 \rangle$

b) $x \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty)$

c) $x \in (-2; 0)$. Wskazówka:

Podstaw $t = x^2 + 2x + 2$.

7.19. $k = -15$

7.21.

$$W(x) = x^6 - x^5 + x^4 + 3x^2 - 3x + 3 = x^4(x^2 - x + 1) + 3(x^2 - x + 1) = (x^4 + 3)(x^2 - x + 1)$$

$$x^2 - x + 1 > 0 \ (\Delta < 0) \text{ i } x^4 + 3 > 0 \text{ dla } x \in \mathbf{R}, \text{ więc } W(x) > 0 \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

7.22.

$$W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = (x^4 - 2x^3 + x^2) + (2x^2 - 2x + 2) = x^2(x^2 - 2x + 1) + (2x^2 - 2x + 2) = x^2(x - 1)^2 + 2(x^2 - x + 1)$$

$$x^2(x - 1)^2 \geq 0 \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

oraz $2(x^2 - x + 1) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$,

bo $\Delta = 1 - 4 < 0$.

Zatem $W(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.

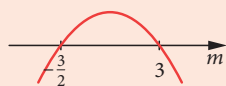
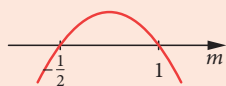
7.23. $W(x) = x(x - m)(x + 2m)$
Miejsca zerowe wielomianu $W(x)$ to 0, m i $-2m$.

Warunek z zadania jest spełniony, gdy $W(1) < 0$, $W(3) < 0$ i w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$ nie ma miejsc zerowych wielomianu $W(x)$.

Otrzymujemy układ nierówności:

$$\begin{cases} 1(1-m)(1+2m) < 0 \\ 3(3-m)(3+2m) < 0 \\ m < 1 \text{ lub } m > 3 \\ -2m < 1 \text{ lub } -2m > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty) \\ m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; \infty) \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty) \\ m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right) \end{cases}$$



Odp.: $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; \infty)$

7.24. $W(x) = x^{2n} + x - 27$
($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)

$$W(0) = -27 < 0$$

Ponieważ wielomian W jest parzystego stopnia, przyjmuje wartości dodatnie dla odpowiednio małych x oraz dla odpowiednio dużych x , a zatem musi mieć co najmniej dwa miejsca zerowe.

* **7.23.** Dla jakich wartości parametru m dla każdej liczby rzeczywistej z przedziału $\langle 1; 3 \rangle$ prawdziwa jest nierówność $x(x - m)(x + 2m) < 0$?

* **7.24.** Wykaż, że każdy z wielomianów postaci $x^{2n} + x - 27$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$) ma co najmniej dwa miejsca zerowe.

Prosto do matury



1. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 21$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \leq 0$ ma element największy.

B. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $W(x) \geq 0$ ma element najmniejszy.

C. $W(-4) \cdot W(4) < 0$

2. Rozwiąż nierówność $(2 - x)(3x + 7)(x - \sqrt{2}) \leq 0$.

3. Rozwiąż nierówność $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 > 0$.

4. Ułóż nierówność wielomianową, której zbiorem rozwiązań jest $A = (-2; 1) \cup (1; 3)$.

5. Wykaż, że nierówność $2x^4 - 4x^2 + 3 > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $x \in \left\langle -2\frac{1}{3}; \sqrt{2} \right\rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$

3. $x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$

4. np. $(x + 2)(1 - x)^2(x - 3) < 0$

5. Wskazówka: Podstaw $t = x^2$.

8. Wyrażenia wymierne

Umiejętności:

- wykonywanie działań na wielomianach wielu zmiennych
- wyznaczanie dziedziny wyrażenia wymiernego z jedną zmienną
- rozszerzanie i skracanie wyrażenia wymiernego
- sprowadzanie wyrażen wymiernych do wspólnego mianownika

Wielomiany wielu zmiennych

Do tej pory zajmowaliśmy się przede wszystkim jednomianami i wielomianami jednej zmiennej. W szczególności określony został stopień takiego jednomianu oraz wielomianu. Definicję tę można rozszerzyć. Zaczniemy od określenia stopnia jednomianu dwóch zmiennych.

Definicja

Jeżeli jednomian zmiennych x, z jest postaci $ax^n z^m$ i $a \neq 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą, zwaną współczynnikiem jednomianu, a wykładniki n oraz m są ustalonymi liczbami naturalnymi, to **stopniem jednomianu** jest liczba $n+m$.

Podobnie definiujemy stopień jednomianu trzech i więcej zmiennych. Na przykład jednomian $-2\sqrt{3}z^3 y^4$ jest stopnia siódmego ($3+4=7$), a jednomian $-t^2 xz$ jest stopnia czwartego.

Aby obliczyć wartość jednomianu dla danych wartości zmiennych, podstawiamy je do wyrażenia w miejsce odpowiednich liter. Na przykład jednomian $-3x^2 y$ dla $x = -1$ i $y = 2$ przyjmuje wartość $-3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = -6$.

Jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami nazywamy **podobnymi**.

Definicja

Stopniem wielomianu (sumy algebraicznej) nazywamy największy ze stopni jednomianów będących jego składnikami po redukcji wyrazów podobnych.

Przykład 1 ◀ zad. 8.7

Wielomian $-2x^3 y^2 + x^2 y^3 - 3x + y^4 + 3$ zmiennych x, y jest sumą pięciu jednomianów, z których pierwsze dwa są stopnia piątego, trzeci – stopnia pierwszego, czwarty – stopnia czwartego, a piąty – stopnia zerowego. Zatem wielomian ten jest stopnia piątego.

◀ 8.7. Określ stopień podanego wielomianu.

a) $a^2 bc - 2ab + 3bc^2$

c) $-4x^3 t - 6tv + \sqrt{7}x^6 x^4 - 11xvst$

b) $7x^2 y - 5x^4 y^2 + 10y^9 - 3$

d) $x^3 zy + x^2 z^2 y + xz^2 y^2 + xz^3 y + xzy^3 + x^2 zy^2$

Odp.: a) 4 b) 9 c) 10 d) 5

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.8

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀8.10. Wykonaj działania, a następnie przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x - y)(x + y) - (x^2 - xy - y^2)$

b) $(x + 2y)^2 - (x - y)^2 - 2xy$

c) $(x - xy + 3)(2xy + y + 1)$

d) $(xy + 1)^3 - x(3y^2 + x) + (x - y)(x + y)$

e) $2xy + 3x^2 - 2(x^2 + 7xy - y^2) + 10xy - 2y^2$

f) $3x^2 + 2y^2 + -(2x^2y - 2xy - 4xy^2) +$

$-(2xy + 7x^2y) + 9x^2y - 2y^2$

g) $7(xy - y^2) + 2(xy - x^2) + 5xy + 3(x^2 - 5xy) + 7y^2$

h) $2x^2 - y^2 - 3(2xy - x^2 - y^2) + 2(x^2y - x^2) - (y^2 + 2x^2y) + 6xy$

i) $(2x - y)(2x + y) + -3(xy - y^2 + x^2) - 2y^2$

j) $(x - y)^2 - 3(x + y)(x - y) + 2(x^2 + xy)$

k) $(x - y + 2)(x + y - 1) + -2x(x + y) - y(y - x) + x^2 + 2y^2$

l) $2(x - x^2y) - (x - y - 2)^2 + -4(x - y) + 2(x^2y - xy) + y^2$

Odp.: a) xy

b) $3y^2 + 4xy$

c) $2x^2y - 2x^2y^2 - xy^2 + 6xy + 3y + x + 3$

d) $x^3y^3 + 3x^2y^2 + 3xy - 3xy^2 - y^2 + 1$

e) $x^2 - 2xy$

f) $3x^2 + 4xy^2$

g) $x^2 - xy$

h) $3x^2 + y^2$

i) $x^2 - 3xy$

j) $4y^2$

k) $x + 3y - xy - 2$

l) $2x - x^2 - 4$

Przykład 2 ◀ zad. 8.10

Wykonamy wskazane działania i zredukujemy wyrazy podobne.

a) $(w - t)(w + t) - (w^2 - 3) = w^2 - t^2 - w^2 + 3 = 3 - t^2$

b) $xy^2 - 2x^2y - 2xy + 3 - y(xy - 4x - 1) = xy^2 - 2x^2y - 2xy + 3 - xy^2 + 4xy + y = -2x^2y + 2xy + y + 3$

Przykład 3 ◀ zad. 8.12

Rozłożymy na czynniki podany wielomian.

a) $3x^2 + xy - 6x - 2y = (3x^2 - 6x) + (xy - 2y) = 3x(x - 2) + y(x - 2) = (x - 2)(3x + y)$

b) $9x^2z^6 - 4y^4 = (3xz^3 - 2y^2)(3xz^3 + 2y^2)$

Wyrażenia wymierne

Wśród wyrażeń algebraicznych istotną rolę odgrywają wyrażenia postaci $\frac{W}{Q}$, gdzie

W oraz Q są wielomianami i Q nie jest wielomianem zerowym. Nazywamy je **wyrażeniami wymiernymi**. Swoją budową przypominają liczby wymierne. Każdy wielomian jest również wyrażeniem wymiernym.

Za pomocą wyrażeń wymiernych zapisujemy różne wzory i zależności w opisie zjawisk fizycznych lub chemicznych.

Przykład 4 ◀ zad. 8.14

Martyna miała w baku samochodu m litrów benzyny. Siedem dni jeździła tą samą trasą długości a km, spalając średnio p litrów benzyny na kilometr. Jaka część początkowego zapasu benzyny została w baku po upływie tego tygodnia?

Rozwiązanie

$$ap$$

← dzienne zużycie benzyny

$$7ap$$

← tygodniowe zużycie benzyny

$$m - 7ap$$

← tyle litrów benzyny zostało w baku po tygodniu

$$\frac{m - 7ap}{m}$$

← taka część początkowego zapasu benzyny pozostała w baku po tygodniu

Odp.: $\frac{m - 7ap}{m}$

Napisanie założeń do danego wyrażenia wymiernego jest tym samym, co określenie jego **dzielnicy**. Dla wyrażenia wymiernego jednej zmiennej jest nią podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla wyrażenia wymiernego dwóch zmiennych – zbiór par liczb, dla wyrażenia wymiernego trzech zmiennych – zbiór trójek liczb itd.

◀8.12. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $2x^2 + 4xy + 2y^2$

b) $4x - 4y - 6x^2 + 6y^2$

c) $(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)(2x^2 + 2y^2)$

d) $16 - x^2 - 6xy - 9y^2$

e) $25x^2 - 10xy + y^2 - 4x^2y^2$

f) $x^2 - 8xy + 15y^2$

g) $y^2 + 10xy + 16x^2$

h) $3x^2 + 4xy + y^2$

Odp.: a) $2(x + y)^2$ b) $2(x - y)(2 - 3x - 3y)$ c) $(x^2 + y^2)(3y - x)$

d) $(4 - x - 3y)(4 + x + 3y)$ e) $(5x - y - 2xy)(5x - y + 2xy)$ f) $(x - 5y)(x - 3y)$

g) $(y + 2x)(y + 8x)$ h) $(x + y)(3x + y)$

◀8.14. Katarzyna Kangur dostała 1 marca pensję w wysokości k złotych. Po pierwszym tygodniu tego miesiąca zostało jej s złotych. Jaką część pensji wydała przez pierwszy tydzień marca?

Odp.: $\frac{k - s}{k}$

Przykład 5

Napiszemy założenia dla podanego wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{x+8}{4-x^2}$

Założenie: $4-x^2 \neq 0$, czyli $x \neq -2$ i $x \neq 2$

Dziedziną tego wyrażenia wymiernego jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$.

b) $\frac{2x+y}{y-x}$

Założenie: $y-x \neq 0$, czyli $y \neq x$

Dziedziną tego wyrażenia wymiernego jest zbiór par różnych liczb rzeczywistych.

Dwa wyrażenia wymierne **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny i dla dowolnych argumentów wartości tych wyrażeń są równe. Na przykład wyrażenia $\frac{x^2}{x}$ oraz x nie są równe. Dziedziną pierwszego jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$, a drugiego zbiór $\mathbf{R}$. Natomiast wyrażenia $\frac{x}{x^2}$ i $\frac{1}{x}$ są równe – każde z nich ma dziedzinę $\mathbf{R} - \{0\}$ i dla wszystkich $x \neq 0$ zachodzi równość $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Działania na wyrażeniach wymiernych są podobne do działań na ułamkach. Zanim zajmiemy się dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem takich wyrażeń, powtórzmy, jak się je skraca, rozszerza i sprowadza do wspólnego mianownika.

Skracanie wyrażenia wymiernego polega na podzieleniu licznika i mianownika przez to samo, różne od zera, wyrażenie. Aby wyrażenie po skróceniu było równe danemu wyrażeniu, najpierw określamy jego dziedzinę.

Przyjmujemy to jako zasadę – wszystkie założenia dotyczące danego wyrażenia wymiernego robimy, zanim zaczniemy wykonywać na nim jakiekolwiek działania.

Przykład 6 ◀ zad. 8.20

Skróćmy podane wyrażenie.

Rozwiązanie

a) $\frac{2ab^2}{4a^2} = \frac{b^2}{2a}, a \neq 0$

b) $\frac{xy^4z^2}{x^4y^2z^2} = \frac{y^2}{x^3}, xyz \neq 0$

c) $\frac{x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{x(x+2)}{x(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}, x \neq 0 \text{ i } x \neq 3$

◀ **8.20.** Skróć wyrażenie wymierne, jeżeli to możliwe. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{1-a}{a-1}, \frac{3a-6b}{a^2-2ab}, \frac{2a^2-3ab}{2ab-3b^2}, \frac{4x^2-9y^2}{2x^3+3x^2y}$

b) $\frac{2x-1}{2-4x}, \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x}, \frac{x^2-2x-8}{2x^2+3x-2}$

c) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12x+12}, \frac{3x^4-17x^3+10x^2}{6x^2-34x+20}, \frac{x^3+27}{2x^2-6x+18}$

d) $\frac{x^5-x^3-27x^2+27}{x^4-3x^3-x^2+3x}, \frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3+8}$

Odp.: a) $-1, a \neq 1; \frac{3}{a}, a \neq 0,$

$a \neq 2b; \frac{a}{b}, b \neq 0, b \neq \frac{2}{3}a; \frac{2x-3y}{x^2},$
 $x \neq 0, x \neq -\frac{3}{2}y$

b) $-\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}; \frac{x^2-1}{x}, x \neq 0,$

$x \neq 1, x \neq -1; \frac{x-4}{2x-1}, x \neq -2,$

$x \neq \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}, x \neq 2; \frac{x^2}{2}, x \neq \frac{2}{3}, x \neq 5;$

$\frac{x+3}{2}, x \in \mathbf{R}$

d) $\frac{x^2+3x+9}{x}, x \neq -1, x \neq 0,$

$x \neq 1, x \neq 3; \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{x^3 - p^3}{x^2 - p^2} &= \frac{(x-p)(x^2 + xp + p^2)}{(x-p)(x+p)} = \frac{x^2 + xp + p^2}{x+p}, \quad x \neq p \text{ i } x \neq -p \\ \text{e)} \quad \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10} &= \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)} = \frac{x-3}{x+5}, \quad x \neq -2 \text{ i } x \neq -5 \\ \text{f)} \quad \frac{x^3 + 8}{2x^2 + x - 6} &= \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{2(x+2)(x-\frac{3}{2})} = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x-3}, \quad x \neq -2 \text{ i } x \neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli w liczniku i mianowniku wyrażenia występują sumy algebraiczne (przykłady c-f), to skrócenie takiego wyrażenia jest możliwe dopiero po przedstawieniu każdej z tych sum w postaci iloczynowej.

Aby dodać (odjąć) dwa wyrażenia wymierne, trzeba najpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika. To zadanie często wymaga **rozszerzenia** ułamka, czyli pomnożenia licznika i mianownika przez to samo, różne od zera, wyrażenie.

◀8.21. Zastąp $\boxed{?}$ odpowiednim wyrażeniem, aby rozszerzyć wyrażenie wymierne. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{x}{x-1} &= \frac{\boxed{?}}{5x^2 - 5x} \\ \text{b)} \quad \frac{x}{x-1} &= \frac{\boxed{?}}{5x^2 - 5} \\ \text{c)} \quad \frac{x}{x-1} &= \frac{\boxed{?}}{x^3 - 1} \\ \text{d)} \quad \frac{x}{x-1} &= \frac{\boxed{?}}{2x^2 - 4x + 2} \end{aligned}$$

Odp.: a) $5x^2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$
 b) $5x^2 + 5x$, $x \neq -1$, $x \neq 1$
 c) $x^3 + x^2 + x$, $x \neq 1$
 d) $2x^2 - 2x$, $x \neq 1$

Przykład 7 ◀ zad. 8.21

Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{x+2}{x-3}$ o dziedzinie $\mathbf{R} - \{3\}$. Rozszerzenie tego wyrażenia przez wielomian P może oznaczać zmianę dziedziny wyrażenia – poprzez dodatkowe wykluczenie wszystkich miejsc zerowych P .

Poniżej przedstawiamy trzy różne rozszerzenia wyrażenia $\frac{x+2}{x-3}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{x+2}{x-3} &= \frac{x(x+2)}{x(x-3)} && \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{0, 3\} \\ \bullet \quad \frac{x+2}{x-3} &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} && \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{1, 3\} \\ \bullet \quad \frac{x+2}{x-3} &= \frac{(x^2+5)(x+2)}{(x^2+5)(x-3)} && \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{3\} \end{aligned}$$

Sprowadzanie wyrażenń wymiernych do wspólnego mianownika

Wyrażenia wymierne sprowadzamy do wspólnego mianownika na tej samej zasadzie co ułamki. Wyjaśnimy to na przykładach.

Przykład 8 ◀ zad. 8.22

Sprowadzimy do wspólnego mianownika podane wyrażenia.

$$\text{a)} \quad \frac{x+1}{x+2} \text{ i } \frac{2x}{x-2} \qquad \text{b)} \quad \frac{2}{x-3} \text{ i } \frac{x+1}{2x^2-18}$$

◀8.22. Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika. Podaj założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{x+2}{2x-4}, \frac{x+1}{3x-6} & \qquad \text{c)} \quad \frac{x^2-1}{5x^2+10x+5}, \frac{x-3}{2x^2-x-3} & \qquad \text{e)} \quad \frac{2}{3x^2-12}, \frac{5}{2x^2+8x+8} \\ \text{b)} \quad \frac{x-1}{2x^2-12x+18}, \frac{5}{x-3} & \qquad \text{d)} \quad \frac{1}{x^2-1}, \frac{2}{x^2-x}, \frac{3}{x^3+x^2} & \qquad \text{f)} \quad \frac{x}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^3+1} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: a)} \quad \frac{3x+6}{6(x-2)}, \frac{2x+2}{6(x-2)}, \quad x \neq 2 \quad \text{b)} \quad \frac{x-1}{2(x-3)^2}, \frac{10x-30}{2(x-3)^2}, \quad x \neq 3$$

$$\text{c)} \quad \frac{2x^2-5x+3}{5(x+1)(2x-3)}, \frac{5x-15}{5(x+1)(2x-3)}, \quad x \neq -1, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{d)} \quad \frac{x^2}{x^2(x^2-1)}, \frac{2x^2+2x}{x^2(x^2-1)}, \frac{3x-3}{x^2(x^2-1)}, \quad x \neq -1, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1$$

$$\text{e)} \quad \frac{4x+8}{6(x+2)^2(x-2)}, \frac{15x-30}{6(x+2)^2(x-2)}, \quad x \neq -2, \quad x \neq 2$$

$$\text{f)} \quad \frac{x(x^3+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{2x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{3x(x^3-1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \quad x \neq -1, \quad x \neq 1$$

Rozwiązanie

- a) Pierwszy ułamek wymaga założenia, że $x \neq -2$, a drugi, że $x \neq 2$.

Wielomiany w mianownikach nie mają wspólnych czynników. Nie można ich też rozłożyć. Wspólnym mianownikiem może być w tym przypadku iloczyn $(x+2)(x-2)$. Znając wspólny mianownik, rozszerzamy ułamki:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)(x-2)} \quad \text{przy założeniu, że } x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2 + 4x}{(x-2)(x+2)} \quad \text{przy założeniu, że } x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

Zazwyczaj wygodnie jest zostawić wspólny mianownik w postaci iloczynu. Jest to przydatne zwłaszcza przy dalszych przekształceniach wyrażeń.

- b) Mianownika pierwszego wyrażenia nie można zapisać prościej, zakładamy tylko, że $x \neq 3$. Natomiast wielomian z mianownika drugiego wyrażenia można rozłożyć:

$$2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3)$$

Okazuje się, że pierwszy mianownik jest dzielnikiem drugiego mianownika, podobnie jak np. w ułamkach $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{28}$. Wspólnym mianownikiem może więc być $2(x-3)(x+3)$, przy założeniu, że $x \neq 3$ i $x \neq -3$.

Wyrażenie $\frac{x+1}{2x^2-18}$ nie zmieni się, natomiast pierwsze będzie równe:

$$\frac{2 \cdot 2(x+3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{4x+12}{2(x-3)(x+3)}$$

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

8.1. Wskaż stopień wielomianu $z^9 - (\sqrt{3})^3 z^8 w + w^9 z$ zmiennych w i z .

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

8.2. W wielomianie $8xyz - 2x^2yz + 11x^2yz - 4xyz + 5xyz^2 - 9x^2yz$ przeprowadzono redukcję wyrazów podobnych. Wskaż wynik tego działania.

- A. $x^2yz + 5xyz^2$ C. $4xyz - x^2yz + 5xyz^2$
B. $4xyz$ D. $4xyz + 5xyz^2$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. C

8.2. D

8.3. C

8.4. F, P, P

8.5. F, F, F

8.6. a) 3 b) 9 c) 4 d) 7

8.7. a) 4 b) 9 c) 10 d) 5

8.8. a) $xy^3 - x^2y + 5xy - 4x + 1$
 b) 0
 c) $2abc + 3$
 d) x^2yz^2
 e) $x^2y - xy$
 f) $3xy - 2x^2ytz^2$

8.9. a) 43 b) -33 c) 3 d) 29

8.3. Ułamek $\frac{2x}{x+1}$ rozszerzono tak, że jego mianownikiem jest teraz wyrażenie $x^3 + 1$. Wskaż licznik otrzymanego ułamka.

A. $2x^3 + 2x^2 + 2$ B. $2x^2 + x$ C. $2x^3 - 2x^2 + 2x$ D. $2x^2 + 2x$

8.4. Dany jest wielomian $x^2y^4 - 2xy - \sqrt{3}x^2y$ zmiennych x i y .
 Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień tego wielomianu jest równy 8.
 B. Stopień tego wielomianu jest równy 6.
 C. Wartość tego wielomianu dla $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{3}$ jest równa $2(12 + \sqrt{6})$.

8.5. Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{x^3 + 8}{2x^2 + x - 6}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R}$.
 B. Wartość tego wyrażenia jest równa 0 dla $x = -2$.
 C. Wyrażenia $\frac{x^3 + 8}{2x^2 + x - 6}$ oraz $\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 3}$ są równe.

8.6. Określ stopień podanego jednomianu.

a) $4xyz$ b) $x^2y^3v^4$ c) $\sqrt{3}y^2xt$ d) $-6xyt^4z$

8.7. Określ stopień podanego wielomianu.

a) $a^2bc - 2ab + 3bc^2$
 b) $7x^2y - 5x^4y^2 + 10y^9 - 3$
 c) $-4x^3t - 6tv + \sqrt{7}x^6x^4 - 11xvst$
 d) $x^3zy + x^2z^2y + xz^2y^2 + xz^3y + xzy^3 + x^2zy^2$

8.8. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $2xy^3 - 3x^2y + 5xy - xy^3 + 2x^2y - 4x + 1$
 b) $xy^2 - 2x^2y + 5xy^2 + 7x^2y - 3xy^2 - 4x^2y - 2xy^2 - x^2y - xy^2$
 c) $abc + a^2b - 2bc + 3abc + 5 - a^2b + 3bc - 2abc - bc - 2$
 d) $-1\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{1}{2}x^2yz^2 - \frac{2}{3}x^2y^2z^2 - 1\frac{1}{2}x^2yz^2 + 2x^2y^2z^2$
 e) $-3x^2y + 2xy^2 - 5xy + x^2y - 2xy^2 + 2xy + 3x^2y + 2xy$
 f) $2\sqrt{2}xy^2tz - 3x^2ytz^2 - \sqrt{2}xy^2tz + 3xy - \sqrt{2}xy^2tz + x^2ytz^2$

8.9. Oblicz wartość wielomianu dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2y - 3xy + 1$ $x = -2, y = 3$
 b) $2xyz^4 - 3z^2 + xy - 9$ $x = 1, y = -2, z = \sqrt{2}$
 c) $-4x^3 + 2y^2 - 4xy + x$ $x = -1, y = -2$
 d) $10 - ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}b^2$ $a = 4, b = -2$

8.10. Wykonaj działania, a następnie przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

- a) $(x - y)(x + y) - (x^2 - xy - y^2)$
- b) $(x + 2y)^2 - (x - y)^2 - 2xy$
- c) $(x - xy + 3)(2xy + y + 1)$
- d) $(xy + 1)^3 - x(3y^2 + x) + (x - y)(x + y)$
- e) $2xy + 3x^2 - 2(x^2 + 7xy - y^2) + 10xy - 2y^2$
- f) $3x^2 + 2y^2 - (2x^2y - 2xy - 4xy^2) - (2xy + 7x^2y) + 9x^2y - 2y^2$
- g) $7(xy - y^2) + 2(xy - x^2) + 5xy + 3(x^2 - 5xy) + 7y^2$
- h) $2x^2 - y^2 - 3(2xy - x^2 - y^2) + 2(x^2y - x^2) - (y^2 + 2x^2y) + 6xy$
- i) $(2x - y)(2x + y) - 3(xy - y^2 + x^2) - 2y^2$
- j) $(x - y)^2 - 3(x + y)(x - y) + 2(x^2 + xy)$
- k) $(x - y + 2)(x + y - 1) - 2x(x + y) - y(y - x) + x^2 + 2y^2$
- l) $2(x - x^2y) - (x - y - 2)^2 - 4(x - y) + 2(x^2y - xy) + y^2$

8.11. Wykonaj działania, przeprowadź redukcję wyrazów podobnych, a następnie oblicz wartość wielomianu dla podanych wartości zmiennych.

- a) $(x + 3y)(x - 3y) + (x + 2y)^2 - (2x^2 - 5y^2)$ $x = \sqrt{8}$ i $y = \sqrt{2}$
- b) $(x + 2y)(x - 2y) - 4x(x - y) + (x - 2y)^2 + 4xy$ $x = 0,5$ i $y = -0,5$
- c) $3x[5xy^2(x - 1) + 2y(3x^2y - 2xy) - 3xy^2(4x - 3)] + 2x^3y^2$ $x = -1$ i $y = 3$

8.12. Rozłóż wielomian na czynniki.

- a) $2x^2 + 4xy + 2y^2$
- b) $4x - 4y - 6x^2 + 6y^2$
- c) $(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)(2x^2 + 2y^2)$
- d) $16 - x^2 - 6xy - 9y^2$
- e) $25x^2 - 10xy + y^2 - 4x^2y^2$
- f) $x^2 - 8xy + 15y^2$
- g) $y^2 + 10xy + 16x^2$
- h) $3x^2 + 4xy + y^2$

D

8.13. Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 > 0$.

8.14. Katarzyna Kangur dostała 1 marca pensję w wysokości k złotych. Po pierwszym tygodniu tego miesiąca zostało jej s złotych. Jaką część pensji wydała przez pierwszy tydzień marca?

8.15. Rysiek przeznaczył na pomalowanie płotu a dni. Z zaplanowaną wydajnością malował b dni. Jaką część pracy ma jeszcze do wykonania?

8.13. Założenie: $x, y \in \mathbf{R}$

Teza: $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 > 0$

Dowód:

$4x^2 + 4xy + y^2 + 1 = (2x + y)^2 + 1 > 0$, bo $(2x + y)^2 \geq 0$ dla $x, y \in \mathbf{R}$

8.10. a) xy

b) $3y^2 + 4xy$

c) $2x^2y - 2x^2y^2 - xy^2 + 6xy + 3y + x + 3$

d) $x^3y^3 + 3x^2y^2 + 3xy - 3xy^2 - y^2 + 1$

e) $x^2 - 2xy$

f) $3x^2 + 4xy^2$

g) $x^2 - xy$

h) $3x^2 + y^2$

i) $x^2 - 3xy$

j) $4y^2$

k) $x + 3y - xy - 2$

l) $2x - x^2 - 4$

8.11. a) $4xy$, 16

b) $-2x^2 + 4xy$, $-1,5$

c) $-x^3y^2$, 9

8.12. a) $2(x + y)^2$

b) $2(x - y)(2 - 3x - 3y)$

c) $(x^2 + y^2)(3y - x)$

d) $(4 - x - 3y)(4 + x + 3y)$

e) $(5x - y - 2xy)(5x - y + 2xy)$

f) $(x - 5y)(x - 3y)$

g) $(y + 2x)(y + 8x)$

h) $(x + y)(3x + y)$

8.14. $\frac{k-s}{k}$

8.15. $\frac{a-b}{a}$

8.16. $\frac{bm - at - bt}{a}$

8.17. o $\frac{k}{24}$ zł

8.18. $\frac{x}{x+y}$

8.19. $\frac{nk-r}{n}$ zł

8.20. a) $-1, a \neq 1; \frac{3}{a}, a \neq 0,$
 $a \neq 2b; \frac{a}{b}, b \neq 0, b \neq \frac{2}{3}a; \frac{2x-3y}{x^2},$

$x \neq 0, x \neq -\frac{3}{2}y$

b) $-\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}; \frac{x^2-1}{x}, x \neq 0,$
 $x \neq 1, x \neq -1; \frac{x-4}{2x-1}, x \neq -2,$
 $x \neq \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}, x \neq 2; \frac{x^2}{2}, x \neq \frac{2}{3}, x \neq 5;$
 $\frac{x+3}{2}, x \in \mathbf{R}$

d) $\frac{x^2+3x+9}{x}, x \neq -1, x \neq 0,$
 $x \neq 1, x \neq 3; \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

8.21. a) $5x^2, x \neq 0, x \neq 1$

b) $5x^2+5x, x \neq -1, x \neq 1$

c) $x^3+x^2+x, x \neq 1$

d) $2x^2-2x, x \neq 1$

8.16. Zenobia Żubr przeznaczyła teren o powierzchni a hektarów na uprawę choinek. Z zakupionych m sadzonek zostało jej jeszcze t drzewek. Do terenu uprawy dołączyła więc b ha, ale wówczas zabrakło jej sadzonek. Ile sadzonek powinna dokupić?

8.17. Ośmioro sąsiadów postanowiło kupić wspólną kosiarkę do trawy za k złotych. Dwóch z nich wycofało się z umowy. O ile złotych wzrosła składka każdego z pozostałych sąsiadów?

8.18. Pewna drużyna piłki nożnej wygrała x meczów i przegrała y meczów. Jaką częścią liczby rozegranych meczów są mecze wygrane?

8.19. Hilary Pajączek handluje drożdżówkami, które kupuje w piekarni. Jednego dnia sprzedał n sztuk po k złotych i zarobił na tym r złotych. Jaka była cena jednej drożdżówki w piekarni?

8.20. Skróć wyrażenie wymierne, jeżeli to możliwe. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{1-a}{a-1}, \frac{3a-6b}{a^2-2ab}, \frac{2a^2-3ab}{2ab-3b^2}, \frac{4x^2-9y^2}{2x^3+3x^2y}$

b) $\frac{2x-1}{2-4x}, \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x}, \frac{x^2-2x-8}{2x^2+3x-2}$

c) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12x+12}, \frac{3x^4-17x^3+10x^2}{6x^2-34x+20}, \frac{x^3+27}{2x^2-6x+18}$

d) $\frac{x^5-x^3-27x^2+27}{x^4-3x^3-x^2+3x}, \frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3+8}$

8.21. Zastąp $\boxed{?}$ odpowiednim wyrażeniem, aby rozszerzyć wyrażenie wymierne. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{x-1} = \frac{\boxed{?}}{5x^2-5x}$

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{\boxed{?}}{x^3-1}$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{\boxed{?}}{5x^2-5}$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{\boxed{?}}{2x^2-4x+2}$

8.22. Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika. Podaj założenia.

a) $\frac{x+2}{2x-4}, \frac{x+1}{3x-6}$

d) $\frac{1}{x^2-1}, \frac{2}{x^2-x}, \frac{3}{x^3+x^2}$

b) $\frac{x-1}{2x^2-12x+18}, \frac{5}{x-3}$

e) $\frac{2}{3x^2-12}, \frac{5}{2x^2+8x+8}$

c) $\frac{x^2-1}{5x^2+10x+5}, \frac{x-3}{2x^2-x-3}$

f) $\frac{x}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^3+1}$

8.22. a) $\frac{3x+6}{6(x-2)}, \frac{2x+2}{6(x-2)}, x \neq 2$

b) $\frac{x-1}{2(x-3)^2}, \frac{10x-30}{2(x-3)^2}, x \neq 3$

c) $\frac{2x^2-5x+3}{5(x+1)(2x-3)}, \frac{5x-15}{5(x+1)(2x-3)}, x \neq -1, x \neq \frac{1}{2}$

d) $\frac{x^2}{x^2(x^2-1)}, \frac{2x^2+2x}{x^2(x^2-1)}, \frac{3x-3}{x^2(x^2-1)}, x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$

e) $\frac{4x+8}{6(x+2)^2(x-2)}, \frac{15x-30}{6(x+2)^2(x-2)}, x \neq -2, x \neq 2$

f) $\frac{x(x^3+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{2x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{3x(x^3-1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, x \neq -1, x \neq 1$



8.23. Wyznacz takie wartości parametrów a i b , aby wyrażenia $\frac{x^2-7}{x^2-x-12}$ oraz $\frac{x^2-7}{(x-a)(x-b)}$ były równe.

8.24. Wyznacz takie wartości parametrów a, b i c , aby wyrażenia $\frac{11}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ oraz $\frac{11}{x^3-6x^2+11x-6}$ były równe.

* **8.25.** Ile jest par liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie $yx - 2y - x = 4$?

* **8.26.** Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) spełniające równanie $xy + 5x - 3y = 53$.

8.27. Wyznacz takie dodatnie liczby naturalne x i y , dla których wartość wielomianu $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y$ jest równa 24.

D * **8.28.** Wykaż, że jedyną parą dodatnich liczb naturalnych x i y , dla których wartość wielomianu $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1$ wynosi 9, jest para $(1, 2)$.

* **8.29.** Znajdź takie dodatnie liczby naturalne x i y , dla których wartość wielomianu $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$ jest równa 512.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wartość wyrażenia $(2x-y)(2x+y) - 3(x-y)^2 - 2x(3y+x)$ dla $x = \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{2}$

A. jest liczbą całkowitą. B. jest równa 11. C. jest liczbą ujemną.

2. Skróć wyrażenie wymierne $\frac{6x^2+5x-6}{4x^2-9}$. Podaj odpowiednie założenia.

3. W klasie Joli m dziewcząt waży w sumie s kg, a średnia waga c chłopców jest równa p kg. Jaka jest średnia waga ucznia tej klasy?

4. Wyznacz takie wartości parametrów a i b , aby wyrażenia $\frac{a}{x-1}$ oraz $\frac{x+b}{x^2-2x+1}$ były równe.

D **5.** Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 \geq 0$.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $\frac{3x-2}{2x-3}$, $x \neq -1\frac{1}{2}$, $x \neq 1\frac{1}{2}$

3. $\frac{s+pc}{m+c}$ kg

4. $a = 1$, $b = -1$ dla $x \neq 1$

5. Założenie: $x, y \in \mathbf{R}$ Teza: $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 \geq 0$

Dowód:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 = (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 4y + 4) = (x+y)^2 + (y+2)^2 \geq 0,$$

bo $(x+y)^2 \geq 0$, $(y+2)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

8.23. $a = -3$, $b = 4$

lub $a = 4$, $b = -3$

8.24. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

lub $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$

lub $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$

lub $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$

lub $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$

lub $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

8.25. $yx - 2y - x = 4$

$$yx - 2y - x + 2 = 6$$

$$y(x-2) - (x-2) = 6$$

$$(y-1)(x-2) = 6$$

Liczby x i y są całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $x-2$ i $y-1$ są całkowite. Zatem liczba szukanych par jest równa liczbie całkowitych dzielników liczby 6, których jest 8: $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$, bo szukane pary są rozwiązaniami układów postaci:

$$\begin{cases} x-2 = k \\ y-1 = l \end{cases} \text{ gdzie } kl = 6.$$

Odp.: 8 par

8.26. $xy + 5x - 3y = 53$

$$x(y+5) - 3(y+5) = 38$$

$$(x-3)(y+5) = 38$$

$y \in \mathbf{N}$, więc $y+5 \geq 5$, a zatem $y+5 \in \{19, 38\}$

$$\begin{cases} y+5 = 19 \\ x-3 = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y+5 = 38 \\ x-3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 14 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 4 \\ y = 33 \end{cases}$$

Odp.: $(4, 33)$ i $(5, 14)$

8.27. $x = 1$, $y = 3$

lub $x = 2$, $y = 2$ lub $x = 3$, $y = 1$

8.28. $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 9$

$$(2x+y)^2 - 2(2x+y) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(2x+y-2) = 8$$

Zatem jeśli $x, y \in \mathbf{N}_+$, to jedyną możliwością spełnienia równania jest: $2x+y = 4$. ($2x+y-2 = 2$, $4 \cdot 2 = 8$), czyli $y = 4-2x$; $x, y \in \mathbf{N}_+$

$$(x \geq 1 \text{ i } 4-2x \geq 1) \Leftrightarrow (x \geq 1$$

$$\text{ i } x \leq \frac{3}{2}) \Rightarrow x = 1. \text{ Stąd } y = 2.$$

Zatem jedyną parą liczb naturalnych dodatnich, dla których wartość wielomianu $W(x, y) =$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1$$

jest równa 9, to para $(1, 2)$.

8.29. $x^2 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 512$,

$$x, y \in \mathbf{N}_+ \quad (x+3y)^3 = 512, \quad 512 = 8^3$$

$$\text{Stąd: } x+3y = 8 \Leftrightarrow x = 8-3y$$

$$(y \geq 1 \text{ i } 8-3y \geq 1) \Leftrightarrow (y \geq 1 \text{ i } y < \frac{7}{3})$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 5; \quad y = 2 \Rightarrow x = 2$$

Odp.: $(x, y) \in \{(2, 2), (5, 1)\}$

9. Działania na wyrażeniach wymiernych

Umiejętności:

- dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Zasady wykonywania tych działań są takie same jak przy dodawaniu i odejmowaniu liczb wymiernych zapisanych w postaci ułamków. Jeżeli dwa wyrażenia wymierne mają identyczne mianowniki, to – aby je dodać – dodajemy wyrażenia w ich licznikach (mianownik pozostaje bez zmian):

$$\frac{W}{Q} + \frac{P}{Q} = \frac{W + P}{Q}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0$$

Aby natomiast od pierwszego wyrażenia wymiernego odjąć drugie o identycznym mianowniku, należy od wyrażenia w pierwszym liczniku odjąć wyrażenie w drugim liczniku (mianownik pozostaje bez zmian):

$$\frac{W}{Q} - \frac{P}{Q} = \frac{W - P}{Q}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0$$

Prześledźmy na przykładach dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych.

Przykład 1 ◀ zad. 9.5

Wykonamy dodawanie $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq -1$ i $x \neq 2$.

Przekształcamy składniki sumy tak, aby były wyrażeniami o identycznych mianownikach. Wspólnym mianownikiem jest iloczyn $(x+1)(x-2)$.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

Odp.: $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$, $x \neq -1$ i $x \neq 2$

Przykład 2 ◀ zad. 9.6

Wykonamy odejmowanie $\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x-2}{3-2x}$.

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{-(b-a)} = -\frac{1}{b-a} \quad \left(\text{głośnik} \right)$$

◀9.5. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x+1}{2x+3} + \frac{x+2}{2x+3}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{3x}$

c) $\frac{x-2}{3x+3} + \frac{2x+1}{2x+2}$

d) $\frac{2x}{x-5} + \frac{5-x}{x}$

Odp.: a) 1, $x \neq -\frac{3}{2}$

b) $\frac{x+5}{3x}$, $x \neq 0$

c) $\frac{8x-1}{6(x+1)}$, $x \neq -1$

d) $\frac{x^2+10x-25}{x(x-5)}$, $x \neq 0$, $x \neq 5$

ZZ i MKP

tematy 3.5, 3.6

dlanauuczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

◀9.6. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{1}{x-7} - \frac{5}{x+4}$

c) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}$

d) $\frac{10x+1}{6x^2} - \frac{3}{2x}$

Odp.: a) $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$ b) $\frac{-4x+39}{(x-7)(x+4)}$, $x \neq -4$, $x \neq 7$

c) $\frac{8x}{4x^2-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$ d) $\frac{x+1}{6x^2}$, $x \neq 0$

Rozwiązanie

Mianowniki różnią się tylko znakiem: $3 - 2x = -(2x - 3)$.

Zatem:

$$\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x-2}{3-2x} = \frac{x+1}{2x-3} + \frac{x-2}{2x-3} = \frac{2x-1}{2x-3}, \text{ przy założeniu, że } x \neq \frac{3}{2}$$

Odp.: $\frac{2x-1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$

Przykład 3 ◀ zad. 9.7

Wykonamy odejmowanie $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{x}{(x+2)^2}$$

Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} - \frac{x(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} &= \leftarrow \text{sprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika} \\ = \frac{(x^2+2x+x+2) - (x^2-2x)}{(x+2)^2(x-2)} &= \frac{x^2+3x+2-x^2+2x}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{5x+2}{(x+2)^2(x-2)} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{5x+2}{(x+2)^2(x-2)}, x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$

Przykład 4 ◀ zad. 9.8

Wykonamy działania $\frac{x+3}{2x-4} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x^2-2x}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+3}{2x-4} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x^2-2x} = \frac{x+3}{2(x-2)} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x(x-2)}$$

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2(x-2)} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x(x-2)} &= \leftarrow \text{jako wspólny mianownik przyjmujemy } 4x(x-2) \\ = \frac{(x+3) \cdot 2x}{4x(x-2)} + \frac{(x+2)(x-2)}{4x(x-2)} - \frac{(x^2-1) \cdot 4}{4x(x-2)} &= \frac{(2x^2+6x) + (x^2-4) - (4x^2-4)}{4x(x-2)} \\ = \frac{-x^2+6x}{4x(x-2)} &= \leftarrow \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias w liczniku i skracamy ułamek} \\ = \frac{x(-x+6)}{4x(x-2)} = \frac{-x+6}{4(x-2)} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{-x+6}{4(x-2)}, x \neq 0 \text{ i } x \neq 2$

◀ 9.8. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{2x+2} - \frac{x-1}{3x-3} + 1$ c) $\frac{2x}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{5x}$ e) $\frac{4-5x}{5x-3} + \frac{5x^2-23x+12}{25x^2-9} - \frac{x-4}{5x+3} + 1$ g) $\frac{x}{x^2-6x-16} - \frac{x-3}{x^2-8x} + \frac{x+4}{4x^2+8x}$

b) $\frac{8x}{2x-1} - \frac{6x}{2x+1} - 1$ d) $\frac{4-x}{x+1} - \frac{1-2x}{x-1} + \frac{5-x^2}{x^2-1}$ f) $\frac{2x-1}{x^2+2x} - \frac{2x}{x-3} + \frac{x^3+7x-3}{x^3-x^2-6x}$ h) $\frac{3}{x^3+1} + \frac{2}{2x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-1}$

Odp.: a) $\frac{7x+4}{6(x+1)}, x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ b) $\frac{14x+1}{4x^2-1}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\frac{14x^2-x-5}{5x^2(x+1)}, x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ d) $\frac{6x}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

e) $\frac{1}{5x-3}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\}$ f) $\frac{-x}{x-3}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 3\}$ g) $\frac{x^2-8}{4x(x-8)(x+2)}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 8\}$

h) $\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}, x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

◀ 9.7. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-3} + \frac{7}{3-x}$

b) $\frac{x+5}{3x-1} + \frac{2-4x}{1-3x}$

c) $\frac{x+3}{2x-7} + \frac{x+2}{7-2x}$

d) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{3-9x}$

e) $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4x-4}$

f) $\frac{2x+1}{3x^2-12} - \frac{x-1}{2x^2+4x}$

g) $\frac{x-2}{x^2-6x+9} + \frac{x+2}{9-x^2}$

h) $\frac{2x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x-16}{2x^2-32}$

Odp.: a) $\frac{2x-7}{x-3}, x \neq 3$

b) $\frac{5x+3}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2x-7}, x \neq \frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{3(3x-1)}, x \neq \frac{1}{3}$

e) $\frac{7x+1}{4(x-1)^2}, x \neq 1$

f) $\frac{x^2+11x-6}{6x(x-2)(x+2)},$

$x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

g) $\frac{2x}{(x+3)(x-3)^2}, x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

h) $\frac{x+32}{2(x-4)(x+4)}, x \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Mnożenie ułamków jest na ogół prostsze niż ich dodawanie. Wystarczy pomnożyć licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik. Dzielenie ułamka $\frac{a}{b}$ przez ułamek $\frac{c}{d}$ zastępujemy mnożeniem $\frac{a}{b}$ przez odwrotność dzielnika, czyli przez ułamek $\frac{d}{c}$. Wyniki tych operacji można ewentualnie jeszcze skrócić. W wypadku wyrażeń wymiernych jest podobnie, musimy tylko pamiętać o zrobieniu odpowiednich założeń.

$$\frac{W}{Q} \cdot \frac{T}{P} = \frac{W \cdot T}{Q \cdot P}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0 \text{ i } P \neq 0$$

$$\frac{W}{Q} : \frac{T}{P} = \frac{W}{Q} \cdot \frac{P}{T} = \frac{W \cdot P}{Q \cdot T}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0, P \neq 0 \text{ i } T \neq 0$$

◀9.11. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x-1}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{3x}$

b) $\frac{5x-3}{3x+6} \cdot \frac{x^2+2x}{10x-6}$

c) $\frac{2x^2-x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{3x}$

d) $\frac{3x-5}{x^2+3x} \cdot \frac{2x^2-7x}{6x-10}$

e) $\frac{x^2+x-2}{2x^2+5x-3} \cdot \frac{x^2+4x+3}{x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2-4}$

f) $\frac{x^2-9}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2-x}{x^2}$

Odp.: a) $\frac{x-1}{6x}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) $\frac{x}{6}, x \in \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{3}{5}\right\}$

c) $\frac{1-2x}{3}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

d) $\frac{2x-7}{2(x+3)}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, 0, 1\frac{2}{3}\right\}$

e) $\frac{x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, -2, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

f) $\frac{x-3}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 1, 2\}$

◀9.12. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-5} : \frac{10x-10}{5x-25}$

b) $\frac{4x^2-9}{2x^2-3x} : \frac{15+10x}{3x^2}$

c) $\frac{x^3-8}{x^3+8} : \frac{4x-8}{4x+8}$

d) $\frac{x^2+x-6}{x+5} : \frac{x-2}{x^2+2x-15}$

Odp.: a) $\frac{x}{x-1}, x \neq 1, x \neq 5$

b) $\frac{3x}{5}, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$

c) $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}, x \neq -2, x \neq 2$

d) $x^2-9, x \neq -5, x \neq 2, x \neq 3$

Przykład 5 ◀ zad. 9.11

Wykonamy mnożenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+2}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+2} =$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x+2} =$$

$$= \frac{x}{x+1}$$

◀ poszczególne wielomiany rozkładamy, jeśli to możliwe, na czynniki

◀ zapisujemy założenia: $x \neq -1, x \neq 1, x \neq -2$

Odp.: $\frac{x}{x+1}, x \neq -1, x \neq 1, x \neq -2$

Przykład 6 ◀ zad. 9.12

Wykonamy dzielenie $\frac{5x-3}{x^2+5x+6} : \frac{3-5x}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie

$$\frac{5x-3}{x^2+5x+6} : \frac{3-5x}{x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{5x-3}{(x+2)(x+3)} : \frac{3-5x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{5x-3}{(x+2)(x+3)} \cdot \frac{(x+2)^2}{3-5x} =$$

$$= \frac{-(3-5x)(x+2)}{(x+3)(3-5x)} = -\frac{x+2}{x+3}$$

◀ rozkładamy trójmiany kwadratowe na czynniki

◀ zapisujemy założenia: $x \neq -3, x \neq -2, x \neq \frac{3}{5}$

◀ mnożymy przez odwrotność

◀ skracamy ułamek

Odp.: $-\frac{x+2}{x+3}, x \neq -3, x \neq -2, x \neq \frac{3}{5}$

Przykład 7 ◀ zad. 9.13

Wykonamy działania $\frac{x^2 - 12x + 36}{4x^2 - 16} \cdot \frac{6x - 18}{2x^2 - 12x} : \frac{x - 3}{x^2 + 2x}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 12x + 36}{4x^2 - 16} \cdot \frac{6x - 18}{2x^2 - 12x} : \frac{x - 3}{x^2 + 2x} = \\ & = \frac{(x - 6)^2}{4(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{6(x - 3)}{2x(x - 6)} \cdot \frac{x(x + 2)}{x - 3} = \quad \leftarrow \text{założenie: } x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 3, 6\} \\ & = \frac{3(x - 6)}{4(x - 2)} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{3(x - 6)}{4(x - 2)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 3, 6\}$

Przykład 8 ◀ zad. 9.14

Wykonamy działania $\left(\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 - 1)$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 - 1) = \\ & = \left(\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{x(x - 1)}\right) : \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 - 1) = \quad \leftarrow \text{wykonujemy działania} \\ & \quad \text{w nawiasach przy} \\ & \quad \text{założeniu, że} \\ & \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \\ & = \frac{x - 1 + x + 1}{x(x + 1)(x - 1)} : \frac{x^2 + x + 1}{x^2}(x^3 - 1) = \\ & = \frac{2x}{x(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1) = \frac{2x^2}{x + 1} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{2x^2}{x + 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wskaż wynik działania i odpowiednie założenia dla wyrażenia $\frac{x}{x + 2} - \frac{x + 2}{x + 9}$.

- A. $\frac{5x - 4}{(x + 2)(x + 9)}$, $x \neq 9$, $x \neq 2$ C. $\frac{13x + 4}{(x + 2)(x + 9)}$, $x \neq -9$, $x \neq -2$
 B. $\frac{2x^2 + 13x + 4}{(x + 2)(x + 9)}$, $x \neq -9$, $x \neq -2$ D. $\frac{5x - 4}{(x + 2)(x + 9)}$, $x \neq -9$, $x \neq -2$

◀9.14. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

- a) $\left(\frac{3}{x^2 + x - 2} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\right) : \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 2}\right)$
 b) $\left[\left(\frac{x + 2}{4x^2 + 4x + 1} + \frac{x + 2}{4x^2 - 1}\right) \cdot \frac{4x + 2}{3x^2 + 6x} - \frac{4}{2x - 1}\right] \cdot (4x + 2)$
 c) $\left(\frac{x + 1}{3x - 3} - \frac{4}{3x^2 - 3} - \frac{x + 10}{3x + 3}\right) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{7}$
 d) $\left[\left(\frac{5x}{1 - 5x} + \frac{3x}{5x + 1}\right) : \frac{15x + 12}{1 - 10x + 25x^2}\right] \cdot \frac{3}{5x - 1}$

Odp.: a) 2, $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\}$ b) $\frac{-8(6x + 1)}{3(2x - 1)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$
 c) $\frac{-x - 1}{3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ d) $\frac{-2x}{5x + 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$

◀9.13. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

- a) $\left(4 + \frac{3x^2}{1 - x^2}\right) : \left(2 - \frac{x}{x + 1}\right)$
 b) $\left(3x - \frac{6}{3 - x}\right) : \left(\frac{2}{x^2 - 3x} + 1\right)$
 c) $\left(\frac{x - 3}{4x + 6} - \frac{x - 2}{6x + 9}\right) \cdot \left(\frac{x + 3}{3x - 15} + \frac{2x + 1}{4x - 20}\right)$
 d) $\left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 4x - 5} - \frac{x^2 - x}{x^2 + 6x + 5}\right) : \left(\frac{2}{x^2 - 1} + 2\right)$

Odp.: a) $\frac{x - 2}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$
 b) $3x$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$
 c) $\frac{5}{72}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$
 d) $\frac{2}{x + 5}$, $x \in \mathbb{R} - \{-5, -1, 0, 1\}$

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. D

9.2. B

9.3. B

9.4. P, P, F

9.5. a) $1, x \neq -\frac{3}{2}$ b) $\frac{x+5}{3x}, x \neq 0$ c) $\frac{8x-1}{6(x+1)}, x \neq -1$ d) $\frac{x^2+10x-25}{x(x-5)}, x \neq 0, x \neq 5$ 9.6. a) $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}, x \neq -2, x \neq -1$ b) $\frac{-4x+39}{(x-7)(x+4)}, x \neq -4, x \neq 7$ c) $\frac{8x}{4x^2-1}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$ d) $\frac{x+1}{6x^2}, x \neq 0$ 9.7. a) $\frac{2x-7}{x-3}, x \neq 3$ b) $\frac{5x+3}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2x-7}, x \neq 3\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{3(3x-1)}, x \neq \frac{1}{3}$ e) $\frac{7x+1}{4(x-1)^2}, x \neq 1$ f) $\frac{x^2+11x-6}{6x(x-2)(x+2)},$ $x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$ g) $\frac{2x}{(x+3)(x-3)^2}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$ h) $\frac{x+32}{2(x-4)(x+4)}, x \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$ 9.2. Wskaż wszystkie założenia potrzebne do wykonania działań $\frac{x-4}{3x+9} \cdot \frac{x-1}{5x-10}$.A. $x \neq -3$ C. $x \neq 1$ B. $x \neq -3, x \neq 2$ D. $x \neq -3, x \neq 2, x \neq 1, x \neq 4$ 9.3. Wynikiem działania $\frac{x^2-y^2}{4x^2y} : \frac{x+y}{xy}$ przy założeniu, że $xy \neq 0, x+y \neq 0$, jestA. $\frac{(x^2-y^2)(x+y)}{4x^3y}$.B. $\frac{x-y}{4x}$.C. $\frac{x-y}{4}$.D. $\frac{x-y}{4x^3y}$.9.4. Dane jest wyrażenie $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x+2}{x-2}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.A. Dziedzina tego wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$.B. Wartość tego wyrażenia dla $x = 1$ jest równa 3.C. Wyrażenia $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x+2}{x-2}$ oraz $\frac{x+2}{x}$ są równe.

9.5. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x+1}{2x+3} + \frac{x+2}{2x+3}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{3x}$ c) $\frac{x-2}{3x+3} + \frac{2x+1}{2x+2}$ d) $\frac{2x}{x-5} + \frac{5-x}{x}$

9.6. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$ b) $\frac{1}{x-7} - \frac{5}{x+4}$ c) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}$ d) $\frac{10x+1}{6x^2} - \frac{3}{2x}$

9.7. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-3} + \frac{7}{3-x}$ e) $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4x-4}$ b) $\frac{x+5}{3x-1} + \frac{2-4x}{1-3x}$ f) $\frac{2x+1}{3x^2-12} - \frac{x-1}{2x^2+4x}$ c) $\frac{x+3}{2x-7} + \frac{x+2}{7-2x}$ g) $\frac{x-2}{x^2-6x+9} + \frac{x+2}{9-x^2}$ d) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{3-9x}$ h) $\frac{2x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x-16}{2x^2-32}$

9.8. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{2x+2} - \frac{x-1}{3x-3} + 1$ e) $\frac{4-5x}{5x-3} + \frac{5x^2-23x+12}{25x^2-9} - \frac{x-4}{5x+3} + 1$ b) $\frac{8x}{2x-1} - \frac{6x}{2x+1} - 1$ f) $\frac{2x-1}{x^2+2x} - \frac{2x}{x-3} + \frac{x^3+7x-3}{x^3-x^2-6x}$ c) $\frac{2x}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{5x}$ g) $\frac{x}{x^2-6x-16} - \frac{x-3}{x^2-8x} + \frac{x+4}{4x^2+8x}$ d) $\frac{4-x}{x+1} - \frac{1-2x}{x-1} + \frac{5-x^2}{x^2-1}$ h) $\frac{3}{x^3+1} + \frac{2}{2x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-1}$ 9.8. a) $\frac{7x+4}{6(x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ b) $\frac{14x+1}{4x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\frac{14x^2-x-5}{5x^2(x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ d) $\frac{6x}{x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ e) $\frac{1}{5x-3}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\}$ f) $\frac{-x}{x-3}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 3\}$ g) $\frac{x^2-8}{4x(x-8)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 8\}$ h) $\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

9.9. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{3}{4x^2 - 10x + 4} + \frac{2}{1 - 4x^2} - \frac{1}{4x^2 - 12x + 8} \\ \text{b)} & \frac{x+2}{2x^2 - 7x + 3} - \frac{2x+1}{2x^2 + 5x - 3} + \frac{x^2 - 14}{2x^3 - x^2 - 18x + 9} \end{aligned}$$

9.10. Wyznacz takie wartości parametrów a i b , aby podane wyrażenia były równe.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{a}{x-2} - \frac{b}{x+2} \quad \text{i} \quad \frac{7x-2}{x^2-4} \quad \text{c)} \quad \frac{a}{x-5} - \frac{ax+b}{3x+1} \quad \text{i} \quad \frac{2(x^2-9x+4)}{3x^2-14x-5} \\ \text{b)} & \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \quad \text{i} \quad \frac{3x+1}{x^2-x-6} \quad \text{d)} \quad \frac{ax-a}{(x^2-4)(x-1)} + 2b \quad \text{i} \quad \frac{2x^3-2x^2-3x+3}{x^3-x^2-4x+4} \end{aligned}$$

9.11. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{x-1}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{3x} \quad \text{d)} \quad \frac{3x-5}{x^2+3x} \cdot \frac{2x^2-7x}{6x-10} \\ \text{b)} & \frac{5x-3}{3x+6} \cdot \frac{x^2+2x}{10x-6} \quad \text{e)} \quad \frac{x^2+x-2}{2x^2+5x-3} \cdot \frac{x^2+4x+3}{x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2-4} \\ \text{c)} & \frac{2x^2-x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{3x} \quad \text{f)} \quad \frac{x^2-9}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2-x}{x^2} \end{aligned}$$

9.12. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{2x}{x-5} : \frac{10x-10}{5x-25} \quad \text{c)} \quad \frac{x^3-8}{x^3+8} : \frac{4x-8}{4x+8} \\ \text{b)} & \frac{4x^2-9}{2x^2-3x} : \frac{15+10x}{3x^2} \quad \text{d)} \quad \frac{x^2+x-6}{x+5} : \frac{x-2}{x^2+2x-15} \end{aligned}$$

9.13. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(4 + \frac{3x^2}{1-x^2}\right) : \left(2 - \frac{x}{x+1}\right) \quad \text{c)} \quad \left(\frac{x-3}{4x+6} - \frac{x-2}{6x+9}\right) \cdot \left(\frac{x+3}{3x-15} + \frac{2x+1}{4x-20}\right) \\ \text{b)} & \left(3x - \frac{6}{3-x}\right) : \left(\frac{2}{x^2-3x} + 1\right) \quad \text{d)} \quad \left(\frac{x^2+x}{x^2+4x-5} - \frac{x^2-x}{x^2+6x+5}\right) : \left(\frac{2}{x^2-1} + 2\right) \end{aligned}$$

9.14. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(\frac{3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+3x+2}\right) : \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ \text{b)} & \left[\left(\frac{x+2}{4x^2+4x+1} + \frac{x+2}{4x^2-1}\right) \cdot \frac{4x+2}{3x^2+6x} - \frac{4}{2x-1}\right] \cdot (4x+2) \\ \text{c)} & \left(\frac{x+1}{3x-3} - \frac{4}{3x^2-3} - \frac{x+10}{3x+3}\right) \cdot \frac{x^2+2x+1}{7} \\ \text{d)} & \left[\left(\frac{5x}{1-5x} + \frac{3x}{5x+1}\right) : \frac{15x+12}{1-10x+25x^2}\right] \cdot \frac{3}{5x-1} \end{aligned}$$

9.9.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{18x-21}{4(2x-1)(2x+1)(x-2)(x-1)}, \\ & x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\} \\ \text{b)} & \frac{5}{x^2-9}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{-3, \frac{1}{2}, 3\right\} \end{aligned}$$

9.10. a) $a = 3, b = -4$

b) $a = 2, b = 1$

c) $a = -2, b = 2$

d) $a = 5, b = 1$

9.11. a) $\frac{x-1}{6x}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) $\frac{x}{6}, x \in \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{3}{5}\right\}$

c) $\frac{1-2x}{3}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

d) $\frac{2x-7}{2(x+3)}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, 0, 1\frac{2}{3}\right\}$

e) $\frac{x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, -2, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

f) $\frac{x-3}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 1, 2\}$

9.12. a) $\frac{x}{x-1}, x \neq 1, x \neq 5$

b) $\frac{3x}{5}, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$

c) $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}, x \neq -2, x \neq 2$

d) $x^2-9, x \neq -5, x \neq 2, x \neq 3$

9.13. a) $\frac{x-2}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$

b) $3x, x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$

c) $\frac{5}{72}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$

d) $\frac{2}{x+5}, x \in \mathbb{R} - \{-5, -1, 0, 1\}$

9.14. a) $2, x \in \mathbb{R} - \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$

b) $\frac{-8(6x+1)}{3(2x-1)},$

$x \in \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{-x-1}{3}, x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

d) $\frac{-2x}{5x+1}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

- 9.15. a) $\frac{8x-4}{x+5}$, $x \neq -5$, $x \neq 2$
 b) 1, $x \neq -7$, $x \neq -1$, $x \neq 7$
 c) $\frac{x+1}{x+2}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 0$
 d) $2-x$, $x \neq 1$, $x \neq 2$

- 9.16. a) = b) $\neq$ c) $\neq$ d) =
 e) = f) =

9.15. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{\frac{x+1}{2x-4} + \frac{x-5}{6x-12}}{\frac{x+2}{3x-6} - \frac{x+1}{4x-8}}$ b) $\frac{\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+7} - 1}{\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7} - 1}$ c) $\frac{x}{x + \frac{x}{x+1}}$ d) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}}}$

9.16. Niech $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Który znak: = czy $\neq$ należy wstawić zamiast $?$, aby otrzymać zależność prawdziwą?

a) $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} ? 1$ c) $\frac{y}{x} : \frac{x}{2y} ? \frac{1}{2}$ e) $\frac{x}{y} + 1 ? \frac{x+y}{y}$
 b) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} ? 1$ d) $\frac{x-y}{y} ? \frac{x}{y} - 1$ f) $\frac{2x}{y} - \frac{1}{x} ? \frac{2x^2-y}{xy}$

* 9.17. Wykonaj działania $\left(\frac{2}{x^2-ax-6a^2} - \frac{1}{x^2-2ax-3a^2}\right)(x^2+3ax+2a^2)$. Podaj odpowiednie założenia.

Prosto do matury



Prosto do matury

1. P, F, P

2. $\frac{x+2}{12(x+1)}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$

3. $\frac{x-1}{x+4}$, $x \neq -4$, $x \neq -3$, $x \neq 4$

4. 6, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$

5. $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wartość wyrażenia $\frac{x^2}{x^2-y^2} : \frac{x^3-x^2y}{x^2-2xy+y^2}$ dla $x = \frac{1}{9}$ i $y = \frac{2}{9}$

A. jest liczbą całkowitą. B. jest równa 2. C. jest liczbą pierwszą.

2. Wykonaj działania $\frac{x}{4x+4} + \frac{x+1}{6x-6} - \frac{x^2+1}{3x^2-3}$. Podaj odpowiednie założenia.

3. Wykonaj działania $\frac{x^2+2x-3}{x^2-16} : \frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$. Podaj odpowiednie założenia.

4. Wykonaj działania $\left[\left(1 + \frac{x-2}{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{x-1} + 2\right) - \frac{4}{x+1}\right] \cdot \frac{3x+3}{2x}$.

Podaj odpowiednie założenia.

5. Wyznacz takie wartości parametrów a , b i c , aby wyrażenia $\frac{ax+b}{2x-1} + \frac{c}{3x+2}$ i $\frac{3x^2-13}{6x^2+x-2}$ były równe.

$$\begin{aligned} 9.17. & \left(\frac{2}{x^2-ax-6a^2} - \frac{1}{x^2-2ax-3a^2}\right) \cdot (x^2+3ax+2a^2) = \\ & = \left(\frac{2}{(x-3a)(x+2a)} - \frac{1}{(x-3a)(x+a)}\right) (x+a)(x+2a) = \\ & = \frac{2x+2a-x-2a}{(x+a)(x+2a)(x-3a)} (x+a)(x+2a) = \frac{x}{x-3a}; \text{ dla } x \neq -2a, x \neq -a, x \neq 3a \end{aligned}$$

10. Równania wymierne

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań wymiernych

Równanie postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$, w którym W i Q są wielomianami zmiennej x i Q nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **równaniem wymiernym** z niewiadomą x . Wszystkie pierwiastki wielomianu W , które należą do dziedziny, czyli spełniają założenie $Q(x) \neq 0$, są rozwiązaniami równania.

Przykład 1

- a) Równanie $\frac{x-3}{x+2} = 0$ jest równaniem wymiernym o dziedzinie równej $\mathbf{R} - \{-2\}$. Jego rozwiązaniem jest liczba 3.
- b) Równanie $\frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0$ jest równaniem wymiernym o dziedzinie równej $\mathbf{R} - \{1, 2\}$. Pierwiastek wielomianu $W(x) = x - 1$ nie należy do dziedziny, zatem równanie to nie ma rozwiązania.

Przykład 2

Dziedziną równania $\frac{1}{x} = 3$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$. Aby rozwiązać to równanie, nie musimy przekształcać go do postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$. Jeżeli bowiem pomnożymy obydwie strony równania przez x , to otrzymamy $1 = 3x$, stąd $x = \frac{1}{3}$.

Jeżeli w równaniu wymiernym mamy sumę kilku wyrażeń, to na ogół, po wyznaczeniu dziedziny, mnożymy obydwie strony równania przez wspólny mianownik wszystkich składników. Po rozwiązaniu otrzymanego w ten sposób równania wielomianowego musimy sprawdzić, które z jego pierwiastków należą do dziedziny równania wymiernego.

Przykład 3 ◀ zad. 10.6

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

- a) $\frac{2x+1}{x-4} = 5$, $D = \mathbf{R} - \{4\}$
 $2x+1 = 5(x-4)$, stąd $x = 7$ i $7 \in D$

Odp.: $x = 7$

◀ 10.6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+1}{x-2} = 3$

c) $\frac{-x+3}{4x-5} = \frac{2}{3}$

e) $\frac{2x-3}{x^2-4x+4} = -1$

b) $\frac{3x-2}{2x+1} = -2$

d) $\frac{3x-5}{-6x+7} = -\frac{1}{2}$

f) $\frac{4x+6}{2x^2+x-3} = 4$

Odp.: a) $x = 7$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{19}{11}$ d) brak rozwiązań e) $x = 1$ f) $x = \frac{3}{2}$

ZZ i MKP

tematy 3.7, 3.13, 3.14

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.10

Generator
testów i sprawdzianów

$$\text{b)} \quad \frac{x}{x+2} - \frac{18}{(x-1)(x+2)} + \frac{x+5}{x-1} = 0$$

$$D = \mathbf{R} - \{1, -2\}$$

Obydwe strony równania mnożymy przez $(x-1)(x+2)$, czyli przez wspólny mianownik wszystkich wyrażen wymiernych.

$$x(x-1) - 18 + (x+5)(x+2) = 0$$

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są $x_1 = 1$ i $x_2 = -4$.

$x_1 \notin D$, więc rozwiązaniem równania wymiernego jest tylko drugi pierwiastek.

$$\text{Odp.: } x = -4$$

$$\text{c)} \quad \frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} = \frac{22}{x^2 - 6x + 8} \quad \leftarrow \text{rozkładamy wielomian w mianowniku na czynniki}$$

$$\frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} = \frac{22}{(x-4)(x-2)}$$

$$D = \mathbf{R} - \{4, 2\}$$

$$(x+7)(x-2) + (x-7)(x-4) - 22 = 0$$

Po wykonaniu działań, uporządkowaniu i podzieleniu obydwu stron równania przez 2 otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

którego pierwiastkami są $x_1 = -1 \in D$, $x_2 = 4 \notin D$.

$$\text{Odp.: } x = -1$$

◀10.10. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną. Zakładamy, że wszystkie zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

$$\text{a)} \quad F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}, \quad M$$

$$\text{b)} \quad B = \frac{mg}{I \cdot l}, \quad I$$

$$\text{c)} \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT, \quad p$$

$$\text{d)} \quad \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}, \quad R$$

$$\text{e)} \quad k = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \quad R$$

$$\text{f)} \quad E = \frac{mv^2}{2} + mgh, \quad m$$

$$\text{Odp.: a)} \quad M = \frac{Fr^2}{Gm}$$

$$\text{b)} \quad I = \frac{mg}{Bl}$$

$$\text{c)} \quad p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

$$\text{d)} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{e)} \quad R = \frac{qr}{4\pi\epsilon kr + q}$$

$$\text{f)} \quad m = \frac{2E}{2gh + v^2}$$

Przykład 4 ◀ zad. 10.10

Ze wzoru $a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$ wyznaczmy podaną zmienną. Zakładamy, że zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

Rozwiązanie

a) zmienna E

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$$

◀ obydwe strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$

$$(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2) = nE$$

◀ obydwe strony równania dzielimy przez n

$$\text{Odp.: } E = \frac{(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2)}{n}$$

b) zmienna i_2

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$$

← obydwie strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$
i dzielimy przez $a_1 + a_2$

$$ni_1 + i_2 = \frac{nE}{a_1 + a_2}$$

← przenosimy ni_1 na drugą stronę

$$\text{Odp.: } i_2 = \frac{nE}{a_1 + a_2} - ni_1$$

c) zmienna n

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$$

← obydwie strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$

$$(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2) = nE$$

← mnożymy przez wyraz ze zmienną n

$$ni_1(a_1 + a_2) + i_2(a_1 + a_2) = nE$$

← przenosimy wyrazy ze zmienną n na jedną stronę

$$nE - ni_1(a_1 + a_2) = i_2(a_1 + a_2)$$

← wyłączamy n przed nawias

$$n[E - i_1(a_1 + a_2)] = i_2(a_1 + a_2)$$

$$\text{Odp.: } n = \frac{i_2(a_1 + a_2)}{E - i_1(a_1 + a_2)}$$

Przykład 5 ◀ zad. 10.11

$$\text{Rozwiążemy równanie } \frac{1}{x} + \frac{2}{|x-1|-1} = \frac{2}{x-2}.$$

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę równania. W tym celu rozpatrujemy potrzebne założenia:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ |x-1|-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

$|x-1|-1=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x-1|=1$, czyli $x-1=1$ lub $x-1=-1$,
zatem gdy $x=0$ lub $x=2$.

Ostatecznie dziedziną równania jest więc zbiór $\mathbf{R} - \{0, 2\}$.

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej:

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{dla } x < 1 \\ x-1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Zatem:

I. dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ równanie ma postać:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{-x+1-1} = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x-2}$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{2}{x-2}$$

◀ 10.11. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{|x|+x^3}{x+1} = 0$

b) $\frac{|x-3|}{x+2} = x+5$

c) $\frac{|x|}{x-3} = \frac{2x}{|x-2|}$

d) $\left| \frac{x}{x-3} \right| = 2$

Odp.: a) $x=0$

b) $x=-7$ lub $x=-1$

c) $x=0$ lub $x=4$

d) $x=2$ lub $x=6$

$$-x + 2 = 2x$$

$$2 = 3x$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ i } \frac{2}{3} \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$$

II. dla $x \in (1; 2) \cup (2; \infty)$ równanie ma postać:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1-1} = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{1}{x} = 0, \text{ a to równanie nie ma rozwiązań.}$$

$$\text{Odp.: } x = \frac{2}{3}$$

◀10.14. Kierowca samochodu obliczył, że zdąży dojechać w ciągu 2 godzin na konferencję, jeżeli będzie jechał ze średnią prędkością 55 km/h. Niestety przez pierwsze 20 minut jechał z prędkością tylko 45 km/h. Z jaką średnią prędkością musi pokonać resztę trasy, żeby przyjechać na czas?

Odp.: 57 km/h



Przykład 6 ◀ zad. 10.14

Samochód przejechał w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Rozwiązanie

Korzystamy ze związku $t = \frac{s}{v}$ między drogą, prędkością i czasem.

t – czas przejazdu (w godzinach)

v – średnia prędkość (w km/h)

$$s = 210 \text{ km}$$

$\frac{210}{v}$ wyraża czas przejazdu z prędkością, o której mowa w zadaniu

$\frac{210}{v+10}$ wyraża czas przejazdu ze zwiększoną prędkością

Z treści zadania wynika, że:

$$\frac{210}{v} = \frac{210}{v+10} + \frac{1}{2}$$

Po pomnożeniu obydwu stron równania przez mianowniki i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie:

$$v^2 + 10v - 4200 = 0$$

którego pierwiastkami są liczby: $v_1 = -70$, $v_2 = 60$. Zgodnie z treścią zadania $v > 0$, zatem rozwiązaniem jest tylko druga liczba.

Odp.: Samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h.

$$\begin{aligned} s &= v \cdot t \\ v &= \frac{s}{t} \\ t &= \frac{s}{v} \end{aligned}$$

Przykład 7 ◀ zad. 10.18

Pani Zenobia Żubr zatrudniła do przycinania drzewek owocowych pracowników trzech firm ogrodniczych. Gdyby podpisała umowę tylko z firmą P, to praca zostałaby wykonana w czasie o 5 dni dłuższym, niż przewidywała to oferta firmy K. Natomiast firma N przycięłaby drzewka w czasie o 2 dni dłuższym niż podwojony czas pracy firm K i P łącznie. Ile dni zajęłaby praca każdej z firm pracującej osobno, jeżeli wspólnie wykonały pracę w ciągu 2 dni?

**Rozwiązanie**

Zakładamy, że każda z firm wykonuje swoją dzienną normę bez zmian (bez takiego założenia zadania nie można rozwiązać). Oznaczmy:

x – liczba dni pracy w ofercie firmy K. Zatem $x > 0$.

Wówczas:

$x + 5$ to liczba dni pracy w ofercie firmy P,

$2(x + x + 5) + 2$ to liczba dni pracy w ofercie firmy N.

Zatem w ciągu jednego dnia firmy wykonują część pracy równą:

$\frac{1}{x}$ – norma firmy K,

$\frac{1}{x+5}$ – norma firmy P,

$\frac{1}{4(x+3)}$ – norma firmy N.

Przycięcie wszystkich drzewek zajęło pracownikom trzech firm pracującym wspólnie 2 dni, czyli w ciągu jednego dnia wykonali połowę pracy. Zatem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{4(x+3)} = \frac{1}{2}$$

W kolejnych przekształceniach otrzymujemy:

$$4(x+5)(x+3) + 4x(x+3) + x(x+5) = 2x(x+5)(x+3)$$

$$4(x^2 + 8x + 15) + 4x^2 + 12x + x^2 + 5x - 2x(x^2 + 8x + 15) = 0$$

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0, \text{ czyli } (x-3)(2x^2 + 13x + 20) = 0$$

Obydwa pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 + 13x + 20$ są ujemne, więc jedynym rozwiązaniem zadania jest $x = 3$.

Odp.: Firma K przycięłaby drzewka w 3 dni, firma P w 8 dni, firma N w 24 dni.

◀ **10.18.** Sieć sklepów dysponuje trzema rodzajami samochodów dostawczych, które mają rozwiązać partię komputerów z centralnego magazynu do poszczególnych sklepów na terenie całego kraju. Ciężarówkami alfa można wykonać to zadanie w czasie o 4 dni krótszym niż ciężarówkami beta. Do rozwiezienia komputerów tylko półciężarówkami gamma trzeba aż o 9 dni więcej niż w przypadku wykorzystania alf. Ile dni zajmie wykonanie zadania każdym typem samochodów oddzielnie, jeżeli wszystkim razem zajęłoby to 3 dni?

Odp.: alfa: 6 dni, beta: 10 dni, gamma: 15 dni

Zadania

W każdym z zadań 10.1–10.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. B

10.1. Jan podróżował przez T godzin ze średnią prędkością R km/h i przez t godzin ze średnią prędkością r km/h. Jaką miał średnią prędkość (w km/h) na całej trasie?

- A. $\frac{R}{T} + \frac{r}{t}$ B. $\frac{RT + rt}{T + t}$ C. $\frac{RT + rt}{2}$ D. $\frac{Rt + rt}{R + r}$

10.2. D

10.2. Wskaż równanie, które nie ma rozwiązania.

- A. $\frac{1}{x-1} = 1$ B. $\frac{x-1}{x} = 2$ C. $\frac{1}{x} = x$ D. $\frac{x}{x-1} = 1$

10.3. A

10.3. Wiadomo, że $m = \frac{1}{a+b}$. Ile jest równe $\frac{5}{b}$?

- A. $\frac{5m}{1-ma}$ B. $\frac{5(a+m)}{1+a}$ C. $\frac{m+a}{5a}$ D. $\frac{m}{5a(1+m)}$

10.4. F, P, P

10.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $na + x = \frac{x}{y}$ oraz $naxy \neq 0$. Zatem

- A. $y = \frac{na+x}{x}$. B. $a = \frac{x(1-y)}{ny}$. C. $n = \frac{x-yx}{ay}$.

10.5. F, F, P

10.5. Jeden robotnik wykonuje pewną pracę w x dni, drugi tę samą pracę wykonuje w y dni. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Obaj robotnicy, pracując wspólnie, wykonają tę pracę w ciągu

- A. $\frac{x+y}{xy}$ dni. B. $\frac{1}{x+y}$ dni. C. $\frac{xy}{x+y}$ dni.

10.6. a) $x = 7$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{19}{11}$

d) brak rozwiązań

e) $x = 1$ f) $x = \frac{3}{2}$

10.6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+1}{x-2} = 3$

b) $\frac{3x-2}{2x+1} = -2$

c) $\frac{-x+3}{4x-5} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{3x-5}{-6x+7} = -\frac{1}{2}$

e) $\frac{2x-3}{x^2-4x+4} = -1$

f) $\frac{4x+6}{2x^2+x-3} = 4$

10.7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x+3}{1-x}$

b) $\frac{7-x}{x+3} = \frac{x-2}{x+7}$

c) $\frac{3x-1}{5-x} - \frac{x}{x-2} = 0$

d) $\frac{x+2}{x+4} = \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-12}$

e) $\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{6x}{5x-1} = 0$

f) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{2x-1}{4x+3}$

g) $\frac{x+1}{x+5} - \frac{2x+3}{4x+11} = 0$

h) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x+2}{x+3}$

10.8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x-5}{x^2+4x+3}$

b) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+2}{x-4} = \frac{18}{x^2-5x+4}$

c) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$

d) $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x+10}{x-4} + \frac{2}{x^2-7x+12} = 0$

e) $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x-4} = \frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x}$

f) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+11}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6} = 0$

10.9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+11}{x^2-x-20} + 2 = \frac{2x-2}{x+4}$

b) $\frac{x-1}{x-5} - \frac{2}{x^2-11x+30} = \frac{x}{x-6}$

c) $5 - \frac{x-1}{x+2} = \frac{6}{x^2+6x+8} + \frac{4x+11}{x+4}$

d) $\frac{4}{x^2-6x+5} + \frac{x-6}{x-5} = \frac{x}{x-1} - 1$

e) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x^2}{x-6} - \frac{x^2-7x+9}{x^2-9x+18} = 0$

f) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} + 1$

10.10. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną. Zakładamy, że wszystkie zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

a) $F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$ M

d) $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$ R

b) $B = \frac{mg}{I \cdot l}$ I

e) $k = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$ R

c) $\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = RT$ p

f) $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$ m

10.11. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{|x|+x^3}{x+1} = 0$

c) $\frac{|x|}{x-3} = \frac{2x}{|x-2|}$

b) $\frac{|x-3|}{x+2} = x+5$

d) $\left| \frac{x}{x-3} \right| = 2$

10.7. a) $x = -\frac{2}{3}$

b) $x = -5\frac{1}{2}$ lub $x = 5$

c) $x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

d) $x = \frac{2}{3}$

e) $x = \frac{1}{8}$ lub $x = 1$

f) $x = 0$ lub $x = 3$

g) $x = -2$ lub $x = 1$

h) brak rozwiązań

10.8. a) $x = 0$

b) $x = -1$

c) brak rozwiązań

d) $x = -4$

e) $x = -3$

f) $x = -5$

10.9. a) $x = 3$

b) $x = 2$

c) brak rozwiązań

d) $x = 3$

e) $x = -1$ lub $x = 1$

f) $x = 0$

10.10. a) $M = \frac{Fr^2}{Gm}$

b) $I = \frac{mg}{Bl}$

c) $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$

d) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

e) $R = \frac{qr}{4\pi\epsilon kr + q}$

f) $m = \frac{2E}{2gh + v^2}$

10.11. a) $x = 0$

b) $x = -7$ lub $x = -1$

c) $x = 0$ lub $x = 4$

d) $x = 2$ lub $x = 6$

10.12. 4 zł

10.12. Gdy jabłka staniały o 1 zł za kg, to za 24 zł można ich było kupić o 2 kg więcej niż poprzednio. Jaka była początkowa cena 1 kilograma jabłek?

10.13. 15 szklanek

10.13. Trzy litry soku rozlano do szklanek – do każdej szklanki tyle samo. Gdyby do każdej szklanki wiano o 50 ml mniej, można by było napełnić o 5 szklanek więcej. Ile szklanek początkowo napełniono sokiem?

10.14. 57 km/h

10.14. Kierowca samochodu obliczył, że zdąży dojechać w ciągu 2 godzin na konferencję, jeżeli będzie jechał ze średnią prędkością 55 km/h. Niestety przez pierwsze 20 minut jechał z prędkością tylko 45 km/h. Z jaką średnią prędkością musi pokonać resztę trasy, żeby przyjechać na czas?

10.15. 96 km

10.15. Marcin jechał samochodem z domu do hurtowni ze średnią prędkością 60 km/h, a wracał ze średnią prędkością 40 km/h. Cały przejazd zajął mu łącznie 4 godziny. Jak daleko jest z domu Marcina do hurtowni?

10.16. 78 km/h

10.16. Anna jechała samochodem ze stałą prędkością. W pewnym momencie wyprzedziła rowerzystę poruszającego się ze stałą prędkością 18 km/h. Następnie zatrzymała się na 10 minut. Potem jechała dalej z tą samą co poprzednio prędkością i po pewnym czasie znowu wyprzedziła tego samego rowerzystę. Z jaką prędkością jechała Anna, jeżeli między kolejnymi momentami wyprzedzania rowerzysty upłynęło 13 minut?

10.17. 295 km

10.17. Pociąg osobowy wyjechał z miasta A do miasta B o godzinie 12⁴⁵ i jechał ze średnią prędkością 60 km/h. O godzinie 13³⁰ z miasta B do miasta A wyjechał pociąg pospieszny i jechał ze średnią prędkością 90 km/h. Pociągi minęły się o godzinie 15¹⁰. Jaka odległość dzieli miasta A i B?

10.18. alfa: 6 dni, beta: 10 dni,
gamma: 15 dni

10.18. Sieć sklepów dysponuje trzema rodzajami samochodów dostawczych, które mają rozwieźć partię komputerów z centralnego magazynu do poszczególnych sklepów na terenie całego kraju. Ciężarówkami alfa można wykonać to zadanie w czasie o 4 dni krótszym niż ciężarówkami beta. Do rozwiezienia komputerów tylko półciężarówkami gamma trzeba aż o 9 dni więcej niż w przypadku wykorzystania alf. Ile dni zajmie wykonanie zadania każdym typem samochodów oddzielnie, jeżeli wszystkim razem zajęłoby to 3 dni?

10.19. stara: 24 godziny,
nowa: 8 godzin

10.19. Właściciel ośrodka wypoczynkowego kupił nową kosiarkę. Można za jej pomocą skosić trawę na terenie całego ośrodka w czasie o 4 godziny krótszym niż połowa czasu pracy starej kosiarki. Jeżeli obydwie kosiarki pracują równocześnie, to cała trawa jest skoszona po upływie 6 godzin. Ile czasu kosi całą trawę każda z kosiarek osobno?

10.20. Członkowie klubu wysokogórskiego myją okna na zewnątrz wysokich budynków i w ten sposób zarabiają na wyprawę. Kiedy Zenon pracuje sam, myje okna na jednej ścianie budynku 8 godzin. Kiedy pracują wspólnie z Józefem, to praca ta zajmuje im 6 godzin. Ile godzin potrzebowałby Józef na samodzielne umycie okien na tej ścianie?

10.21. Na szczyt góry wywożą narciarzy trzy wyciągi – gondolowy, krzesełkowy i orczykowy. Gondole wywożą grupę 1200 narciarzy w czasie o 2 godziny krótszym niż wyciąg krzesełkowy oraz 3 razy szybciej niż orczyk. Jeżeli wszystkie wyciągi są czynne, to grupa 1200 narciarzy wjeżdża na szczyt w czasie 2 godzin. Ilu narciarzy wywozi na szczyt w ciągu godziny każdy z wyciągów?

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Zbiór rozwiązań równania $\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}$

- A. jest dwuelementowy.
- B. ma nieskończenie wiele elementów.
- C. jest równy $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

2. Rozwiąż równanie $\frac{x-7}{x-2} = \frac{x+3}{x+7}$.

3. Rozwiąż równanie $\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+3} = \frac{x+2}{x+1}$.

4. Kwotę 3360 zł przeznaczono na premie świąteczne dla pracowników. W ostatniej chwili zdecydowano, że premię otrzyma o dwóch pracowników mniej i wtedy okazało się, że pozostali otrzymają po 40 zł więcej. Wszystkie wypłacone premie były równe. Ilu pracowników je otrzymało?

5. Ogrodnik miał przyciąć 200 drzewek owocowych w określonym terminie. Pracował systematycznie, a ponieważ udało mu się każdego dnia przyciąć o 5 drzewek więcej niż wcześniej zaplanował, skończył pracę 2 dni przed terminem. Ile dni pracował?

10.20. 24 godziny

10.21. gondolowy: 300,
krzesełkowy: 200, orczykowy: 100

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $x = -43$

3. $x = 2$

4. 12 pracowników

5. 8 dni

11. Nierówności wymierne

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności wymiernych

Jeżeli W i Q są wielomianami zmiennej x i Q nie jest wielomianem zerowym, to każdą z nierówności postaci:

$$\frac{W(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{W(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \frac{W(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{W(x)}{Q(x)} \leq 0$$

nazywamy **nierównością wymierną** z niewiadomą x .

Badanie znaku ilorazu można zastąpić badaniem znaku iloczynu, ponieważ:

- $\frac{a}{b} > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b > 0$.
- $\frac{a}{b} < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b < 0$.

Przy założeniu, że $b \neq 0$.

Zatem rozwiązywanie nierówności wymiernej najlepiej sprowadzić do rozwiązywania nierówności wielomianowej. Zaprezentujemy to na przykładach.

Przykład 1

Rozwiążemy podaną nierówność.

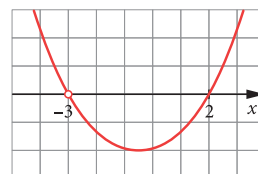
Rozwiązanie

a) $\frac{x-2}{x+3} > 0, \quad D = \mathbf{R} - \{-3\}$

Nierówność $\frac{x-2}{x+3} > 0$ zastępujemy nierównością

$$(x-2)(x+3) > 0 \quad \text{dla } x \in D.$$

Po lewej stronie nierówności mamy trójmian kwadratowy zapisany w postaci iloczynowej. Jego pierwiastkami są liczby 2 i -3. Na wykresie zaznaczyliśmy punkt $(-3, 0)$ pustym kółeczkiem, ponieważ $-3 \notin D$. Współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc ramiona paraboli są skierowane do góry. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności wymiernej.



Odp.: $\frac{x-2}{x+3} > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

ZZ i MKP

temat 3.8

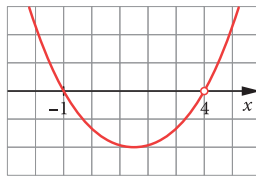
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.11

Generator
testów i sprawdzianów

b) $\frac{x+1}{x-4} \leq 0, \quad D = \mathbf{R} - \{4\}$

$$(x+1)(x-4) \leq 0 \text{ i } x \in D$$

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc ramiona paraboli są skierowane do góry. Ponieważ x nie może być równy 4, zbiorem rozwiązań jest przedział lewostronnie domknięty $\langle -1; 4 \rangle$.



Odp.: $\frac{x+1}{x-4} \leq 0$ dla $x \in \langle -1; 4 \rangle$

c) $\frac{1}{x} \geq 3, \quad D = \mathbf{R} - \{0\}$

Doprowadzamy tę nierówność do takiej postaci, w której po jednej stronie jest wyrażenie wymierne, a po drugiej 0.

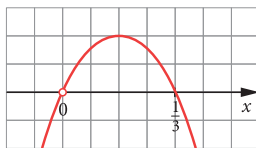
$$\frac{1}{x} - 3 \geq 0, \text{ czyli } \frac{1-3x}{x} \geq 0$$

Teraz możemy zapisać nierówność w postaci równoważnej.

$$x(1-3x) \geq 0 \text{ i } x \in D$$

Pierwiastkami tego trójmianu są liczby 0 i $\frac{1}{3}$.

Współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc ramiona paraboli są skierowane do dołu. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.



Odp.: $\frac{1}{x} \geq 3$ dla $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$

Nie możemy pomnożyć obydwu stron nierówności wymiernej przez mianownik ułamka, który w niej występuje – zazwyczaj jest on wyrażeniem z niewiadomą, więc jego znak zależy od wartości tej niewiadomej. Jeżeli jednak pomnożymy obydwie strony nierówności przez **kwadrat** mianownika (dla każdej liczby należącej do dziedziny nierówności jest on dodatni), to kierunek nierówności się nie zmieni i otrzymamy równoważną postać iloczynową nierówności. Jest to inny sposób rozwiązywania nierówności wymiernych.

Przykład 2 ◀ zad. 11.8

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $\frac{3}{x+5} < \frac{2}{x-1}, \quad D = \mathbf{R} - \{-5, 1\}$

$$\frac{3}{x+5} - \frac{2}{x-1} < 0 \quad \leftarrow \text{wyrażenia wymierne przenosimy na jedną stronę nierówności}$$

Wykonujemy odejmowanie wyrażeń wymiernych, następnie porządkujemy wielomian w liczniku, wielomian w mianowniku zostawiamy w postaci iloczynowej.

◀ 11.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x-1}{x-3} \leq \frac{2x-1}{x-2}$

b) $\frac{3x+1}{4x-2} \leq \frac{x+2}{2x-1}$

c) $\frac{3x-1}{x-1} \leq \frac{x+7}{x+1}$

d) $\frac{x+2}{x+5} < \frac{3x+8}{5(x+2)}$

Odp.: a) $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup (2; 3)$

b) $x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right]$

c) $x \in (-1; 1)$

d) $x \in \left(-5; -2\frac{1}{2}\right) \cup (-2; 4)$

$$\frac{3(x-1)-2(x+5)}{(x+5)(x-1)} < 0, \text{ czyli } \frac{x-13}{(x+5)(x-1)} < 0$$

Nierówność wymierną zastępujemy nierównością wielomianową ograniczoną do wcześniej wyznaczonej dziedziny.

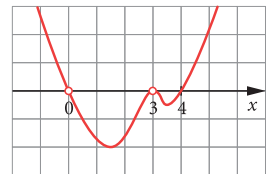
$$(x-13)(x+5)(x-1) < 0 \text{ i } x \in \mathbf{R} - \{-5, 1\}$$

Rysujemy przybliżony wykres wielomianu; punkty nienależące do dziedziny zaznaczamy na osi x pustymi kółeczkami.



$$\text{Odp.: } x \in (-\infty; -5) \cup (1; 13)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x-2}{x} + \frac{x-9}{x-3} &\leq \frac{18}{3x-x^2} \\ \frac{x-2}{x} + \frac{x-9}{x-3} - \frac{18}{-x(x-3)} &\leq 0, \quad D = \mathbf{R} - \{0, 3\} \\ \frac{(x-2)(x-3) + x(x-9) + 18}{x(x-3)} &\leq 0 \end{aligned}$$

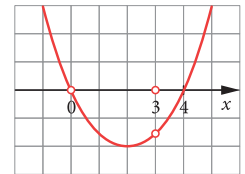


$$\frac{2x^2 - 14x + 24}{x(x-3)} \leq 0, \text{ czyli } 2(x^2 - 7x + 12)x(x-3) \leq 0 \text{ i } x \in D$$

$$x(x-4)(x-3)^2 \leq 0, \text{ zatem } x \in (0; 3) \cup (3; 4)$$

Gdybyśmy nie zastąpili od razu ułamka $\frac{2x^2 - 14x + 24}{x(x-3)}$ iloczynem jego licznika i mianownika, tylko rozłożyli trójmian w liczniku i skrócili, to rysunek byłby trochę inny, ale odpowiedź oczywiście taka sama:

$$\begin{aligned} \frac{2(x-4)(x-3)}{x(x-3)} &\leq 0, \text{ czyli } \frac{2(x-4)}{x} \leq 0 \text{ i } x \in \mathbf{R} - \{0, 3\} \\ 2x(x-4) &\leq 0 \text{ i } x \in \mathbf{R} - \{0, 3\} \end{aligned}$$



$$\text{Odp.: } x \in (0; 3) \cup (3; 4)$$

◀11.17. Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

$$\text{Odp.: } m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$$



Przykład 3 ◀ zad. 11.17

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m-1)x^2 - (5m-2)x + 2m = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

Rozwiązanie

Przypomnijmy – równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ trzech warunków:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

Współczynnikami rozważanego równania są:

$$a = 2m - 1, b = -(5m - 2), c = 2m$$

Zatem:

- $a \neq 0$, czyli $2m - 1 \neq 0$, stąd $m \neq \frac{1}{2}$
- $\Delta > 0$, czyli $b^2 - 4ac > 0$:
 $(5m - 2)^2 - 4 \cdot (2m - 1) \cdot 2m > 0$, czyli $(3m - 2)^2 > 0$, stąd $m \neq \frac{2}{3}$
- $\frac{c}{a} < 0$, czyli $\frac{2m}{2m - 1} < 0$, stąd $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Wszystkie warunki są spełnione dla $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Odp.: Równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków dla $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Wzory Viète'a

Jeżeli współczynniki równania $ax^2 + bx + c = 0$ spełniają warunki $a \neq 0$ i $b^2 - 4ac > 0$, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ i } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

gdzie x_1, x_2 oznaczają pierwiastki tego równania.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyty.

11.1. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $\frac{3}{x} > 1$.

- A. $(-\infty; 3)$ B. $(-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ C. $(0; 3)$ D. R

11.2. Wiadomo, że $x > 0$, $y > 0$ i $\frac{y}{x} < 1$. Wynika stąd, że

- A. $x < y$. C. $x = y$.
 B. $x > y$. D. jest za mało danych, aby porównać x i y .

11.3. Wiadomo, że $a > b > 0$. Wynika stąd, że

- A. $\frac{a+b}{b} > 1 + \frac{a}{b}$. C. $\frac{a+b}{b} < 1 + \frac{a}{b}$.
 B. $\frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b}$. D. jest za mało danych, żeby porównać $\frac{a+b}{b}$ oraz $1 + \frac{a}{b}$.

11.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{7}$. Zatem

- A. $x < 7$. B. $x \in \langle 0; 7 \rangle$. C. $x \leq 7$.

11.5. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{1}{x} < 5$ b) $\frac{\sqrt{3}}{x} \geq -1$ c) $\frac{1}{2x} > -\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Odpowiedzi i rozwiązania

11.1. C

11.2. B

11.3. B

11.4. F, P, P

11.5. a) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{5}; \infty\right)$

b) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \infty)$

c) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup (0; \infty)$

d) $x \in \langle -\sqrt{5}; 0 \rangle$

11.6. a) $(3; 7)$ **b)** $x \in (-\infty; 4) \cup (5; \infty)$ **c)** $x \in \left(-\frac{17}{10}; -\frac{3}{2}\right)$ **d)** $x \in \left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\rangle$ **11.7. a)** $x \in \left(\frac{3}{2}; 5\right)$ **b)** $x \in (-\infty; -4) \cup (9; \infty)$ **c)** $x \in \left(-\frac{5}{2}; \infty\right)$ **d)** $x \in \left\langle -\frac{5}{8}; -\frac{3}{5} \right\rangle$ **11.8. a)** $x \in \{-1; 1\} \cup (2; 3)$ **b)** $x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$ **c)** $x \in (-1; 1)$ **d)** $x \in \left(-5; -2\frac{1}{2}\right) \cup (-2; 4)$ **11.9. a)** $x \in (-8; -6) \cup (-3; 7)$ **b)** $x \in (-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (8; \infty)$ **c)** $x \in (2; 3) \cup (5; 7) \cup (11; \infty)$ **d)** $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1) \cup (1; \infty)$ **11.10. a)** $x \in (1; 3)$ **b)** $x \in \left(-2; -\frac{1}{4}\right) \cup (2; 4)$ **c)** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ **d)** $x \in (-\infty; -5) \cup (1; 3)$ **e)** $x \in (1; \infty)$ **f)** $x \in (-4; -1) \cup (2; \infty)$ **11.11.** $x \in (3; 5) \cup \{0\}$ **11.12. a)** $x \in \langle -2; 2 \rangle - \{0\}$ **b)** $x \in (-2, 5; 0, 5) - \{-1\}$ **c)** $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$ **d)** $x \in \langle -2; 1 \rangle$ **11.13.** $x \in (-2; -1)$ **11.14.** Dana nierówność jest równoważna nierówności:

$$|x+1| > 2|x|+2$$

1) $x \in (-\infty; -1)$

$$-x-1 > -2x+2$$

$$x > 3, \text{ sprzeczność}$$

2) $x \in \langle -1; 0 \rangle$

$$x+1 > -2x+2$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}, \text{ sprzeczność}$$

3) $x \in (0; \infty)$

$$x+1 > 2x+2$$

$$x \leq -1, \text{ sprzeczność}$$

Zatem dana nierówność jest sprzeczna.

11.6. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2}{3-x} \leq -\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{x-5} \geq -3$

c) $\frac{-2}{2x+3} > 5$

d) $\frac{3}{4x-2} \leq -1$

11.7. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+2}{2x-3} > 1$

b) $\frac{3x-1}{x+4} \geq 2$

c) $\frac{4x-3}{2x+5} < 2$

d) $\frac{1}{5x+3} \leq -8$

11.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x-1}{x-3} \leq \frac{2x-1}{x-2}$

b) $\frac{3x+1}{4x-2} \leq \frac{x+2}{2x-1}$

c) $\frac{3x-1}{x-1} \leq \frac{x+7}{x+1}$

d) $\frac{x+2}{x+5} < \frac{3x+8}{5(x+2)}$

11.9. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+2}{x+8} < 1 + \frac{3-x}{x+3}$

c) $\frac{16}{x-3} - \frac{15}{x-2} \leq \frac{2}{x-5}$

b) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} < \frac{1}{20}$

d) $\frac{x+3}{3x+3} - \frac{x-1}{x+5} < \frac{2}{3}$

11.10. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x+1}{x+1} > 2 + \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x-8} < \frac{x+2}{4-x} - \frac{x+3}{x+2}$

c) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x} \leq \frac{x^2+2x+3}{x^2}$

d) $\frac{3x^2-24x-3}{x^2-4x+3} + 1 > \frac{4x-10}{x-1}$

e) $\frac{2}{x^2+x+1} < \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^3+3x^2+3x+2}$

f) $\frac{3x^3-4}{x^3-4x^2+6x-4} - 3 > \frac{1}{x-2} + \frac{10x-1}{x^2-2x+2}$

11.11. Rozwiąż podwójną nierówność $-1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{3}{x-3}$.**11.12.** Rozwiąż nierówność.

a) $\left|\frac{2}{x}\right| \geq 1$

b) $\left|\frac{3}{x+1}\right| > 2$

c) $\left|\frac{x}{x-2}\right| < 5$

d) $\left|\frac{x^2}{x-2}\right| \leq 1$

11.13. Rozwiąż nierówność $\frac{|x-1|}{x+2} \geq 2$.**11.14.** Wykaż, że nierówność $\frac{|x+1|}{|x|+1} > 2$ nie ma rozwiązań.**11.21.** Niech $f(x) = x^2 + (m+2)x - 2m$.

$$f(-3) = 9 + (m+2) \cdot (-3) - 2m = 9 - 3m - 6 - 2m = 3 - 5m$$

$$f(-3) = 0, \text{ gdy } m = \frac{3}{5}$$

$$\Delta = (m+2)^2 + 8m = m^2 + 12m + 4$$

$$\Delta_m = 144 - 16 = 128, \sqrt{\Delta_m} = 8\sqrt{2},$$

$$m_1 = \frac{-12-8\sqrt{2}}{2} = -6-4\sqrt{2}, m_2 = \frac{-12+8\sqrt{2}}{2} = -6+4\sqrt{2}$$

$$\text{Jeżeli } m = \frac{3}{5}, \text{ to } \Delta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 12 \cdot \frac{3}{5} + 4 > 0.$$

Zatem równanie $\frac{f(x)}{x+3} = 0$ ma jedno rozwiązanie, gdy $m = \frac{3}{5}$ (wtedy jedno z rozwiązań równania $f(x) = 0$ nie należy do dziedziny równania wymiernego) lub gdy $\Delta = 0$.

$$\text{Odp.: } m \in \left\{-6-4\sqrt{2}, -6+4\sqrt{2}, \frac{3}{5}\right\}$$

- 11.15.** Rozwiąż nierówność $\frac{3}{|x-3|+1} > |x-3| - 1$.
- 11.16.** Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x+5}{|x+2|} > 3$.
- 11.17.** Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?
- 11.18.** Dla jakich wartości parametru m równanie $4mx^2 - 4(1-2m)x + 9m - 8 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?
- 11.19.** Dla jakich wartości parametru m równanie $(1-m)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki należące do przedziału $(-2; 2)$?
- * **11.20.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x^2 - 2mx + 1}{x - 2} = 0$ ma dwa rozwiązania?
- * **11.21.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x^2 + (m+2)x - 2m}{x + 3} = 0$ ma jedno rozwiązanie?
- * **11.22.** Dla jakich wartości parametru k równanie $\frac{kx - 6}{x^2 - x - 2} = 0$ nie ma rozwiązań?

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $x > 0$, $y > 0$, $a = \frac{1}{x+y}$ i $b = \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. Zatem

A. $a \leq b$. B. $a > b$. C. $a = b$.

2. Rozwiąż nierówność $\frac{x+2}{x-3} > 2 - \frac{2x-4}{x+1}$.

3. Rozwiąż nierówność $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x+14}{x} + \frac{2}{x^2+x} \leq 0$.

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx - 2m - 3 = 0$ ma rozwiązanie większe od 1?

5. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma jest większa od 3?

Prosto do matury

1. P, F, P
2. $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$
3. $x \in \langle -8; -1 \rangle \cup (-1; 0)$
4. $m \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
5. $m \in (-1; 0)$

11.15. $x \in (1; 5)$. Wskazówka: Zauważ, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ spełniona jest nierówność $|x-3|+1 > 0$, zatem nierówność możesz zapisać w postaci równoważnej $3 > (|x-3|-1)(|x-3|+1)$. Następnie podstaw $t = |x-3|$.

11.16. -1

11.17. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

11.18. $m \in \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{9}; 1\right)$

11.19.
 $m \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$

11.20. Równanie $\frac{x^2 - 2mx + 1}{x - 2} = 0$ ma dwa rozwiązania wtedy, gdy równanie $x^2 - 2mx + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania i gdy liczba 2 nie jest jego rozwiązaniem, czyli:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ 2^2 - 2m \cdot 2 + 1 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m-1)(m+1)$
 $\Delta > 0$ dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$



(2) $4 - 4m + 1 \neq 0$
 $m \neq 1\frac{1}{4}$

Odp.:

$m \in (-\infty; -1) \cup \left(1; 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}; \infty\right)$

11.21. Patrz s. 184.

11.22. $x^2 - x - 2 = 0$,
 $\Delta = 1 + 8 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$
 $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

Niech $f(x) = kx - 6$. Równanie

$\frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = 0$ nie ma rozwiązań,

gdy $f(-1) = 0$ lub $f(2) = 0$,

lub gdy równanie $f(x) = 0$ nie ma rozwiązań.

$k \cdot (-1) - 6 = 0$ lub $k \cdot 2 - 6 = 0$
lub $k = 0$

Odp.: $k \in \{-6, 3, 0\}$

12. Warto powtórzyć – proporcjonalność odwrotna

Definicja

Zależność między dwiema dodatnimi zmiennymi x i y taką, w której iloczyn a tych wielkości jest stały, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**.

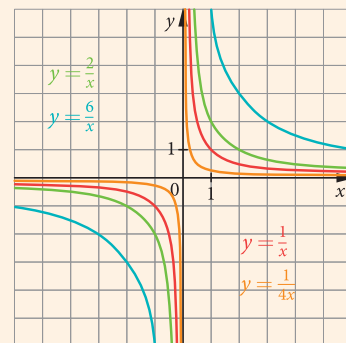
$$xy = a, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Mówimy wówczas, że x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Wykres każdej funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$) nazywamy **hiperbolą**. W dalszych rozważaniach zapisów „hiperbola o równaniu $y = \frac{a}{x}$ ” oraz „wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ ” na ogół nie rozróżniamy.

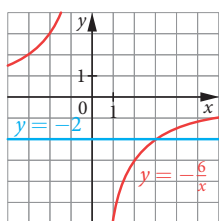
Własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, o ile $a > 0$:

- $D = \mathbf{R} - \{0\}$,
- $ZW = \mathbf{R} - \{0\}$,
- funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, funkcja nie przyjmuje wartości największej,
- funkcja nie ma miejsc zerowych,
- $f(x) > 0$ dla $x > 0$,
 $f(x) < 0$ dla $x < 0$,
- w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$ funkcja jest malejąca, ale funkcja nie jest monotoniczna,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m = 0$ nie ma rozwiązań,
dla $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ ma jedno rozwiązanie.



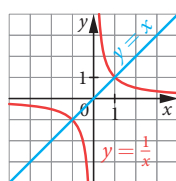
Zauważmy, że $|y| = \frac{|a|}{|x|}$. Jeżeli wartość bezwzględna x jest coraz większa, to wartość bezwzględna y maleje do zera – na wykresie funkcji punkty hiperboli są coraz bliższe osi x . Mówimy, że oś x jest **asymptotą poziomą** wykresu. Z kolei gdy wartość bezwzględna x zbliża się do zera, to wartość bezwzględna y nieograniczenie rośnie – na wykresie punkty hiperboli są coraz bliższe osi y . Mówimy, że oś y jest **asymptotą pionową** wykresu.

12.5. a)



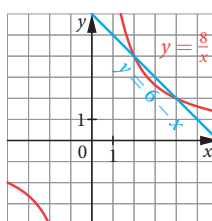
$$x \in (0; 3)$$

b)



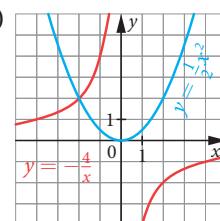
$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$$

c)



$$x \in (-\infty; 0) \cup (2; 4)$$

d)



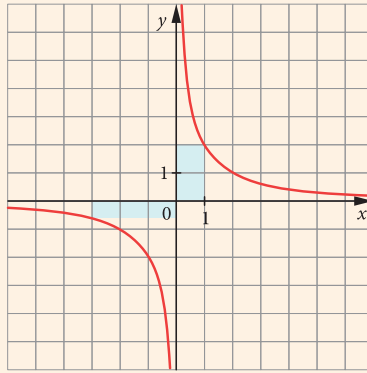
$$x \in (-2; 0)$$

Dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ leżącego na hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ prostokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(x, 0)$, P , $(0, y)$ ma pole równe $|a|$.

Jest prosta konsekwencja równości:

$$|x| \cdot |y| = |a|$$

ponieważ boki rozważanego prostokąta mają długości równe $|x|$ oraz $|y|$.



Zadania

12.1. Naskicuj wykres i podaj własności funkcji.

- a) $y = \frac{4}{x}$ c) $y = \frac{-1}{3x}$ e) $y = \left| \frac{-6}{x} \right|$
 b) $y = \frac{-4}{x}$ d) $y = \frac{6}{x}$ f) $y = \left| \frac{1}{2x} \right|$

12.2. Dla jakich wartości parametru a wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez dany punkt?

- a) $A = (2, -1)$ b) $A = (-3, 1)$ c) $A = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ d) $A = \left(\frac{5}{2}, -\frac{2}{5}\right)$

12.3. Zacieniuj zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, przez które przechodzą wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdy

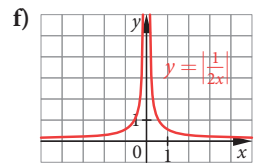
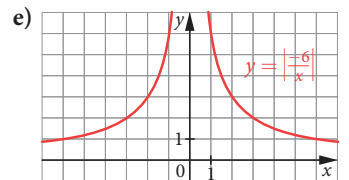
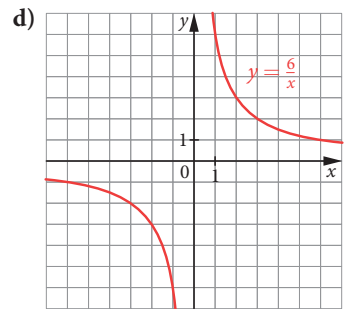
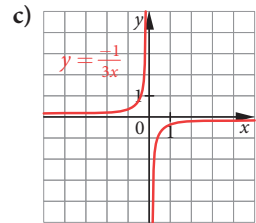
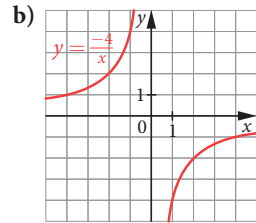
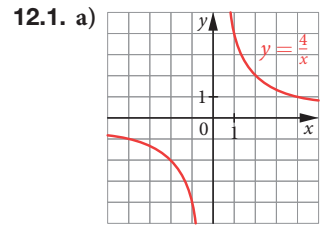
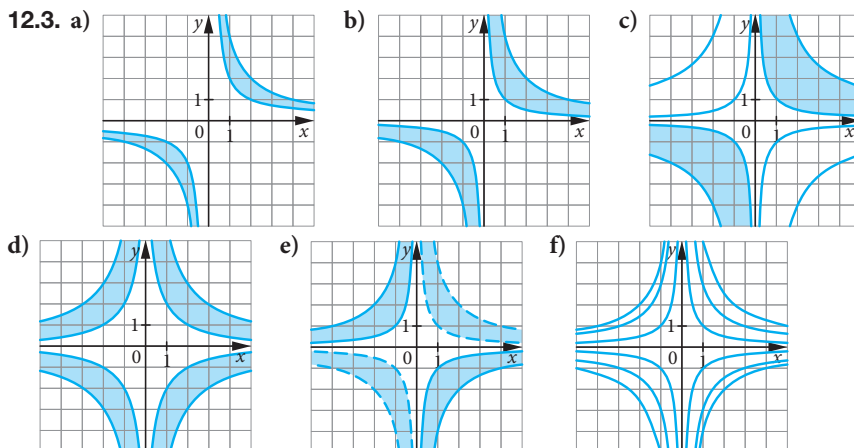
- a) $a \in \langle 2; 4 \rangle$. d) $a \in \langle -6; -2 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$.
 b) $a \in \langle 1; 4 \rangle$. e) $a \in \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$.
 c) $a \in \langle 1; 8 \rangle \cup \{-1, -8\}$. f) $a \in \{-4, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

12.4. Wymień wszystkie punkty o obydwu współrzędnych całkowitych, przez które przechodzi wykres funkcji $y = f(x)$.

- a) $f(x) = \frac{4}{x}$ b) $f(x) = -\frac{6}{x}$ c) $f(x) = -\frac{10}{x}$ d) $f(x) = \frac{5}{x}$

12.5. Rozwiąż graficznie nierówność.

- a) $-\frac{6}{x} \leq -2$ b) $\frac{1}{x} \geq x$ c) $\frac{8}{x} < 6 - x$ d) $-\frac{4}{x} > \frac{1}{2}x^2$



12.2. a) $a = -2$

b) $a = -3$

c) $a = -1$

d) $a = -1$

12.4. a) $(1, 4), (2, 2), (4, 1), (-1, -4), (-2, -2), (-4, -1)$

b) $(1, -6), (2, -3), (3, -2), (6, -1), (-1, 6), (-2, 3), (-3, 2), (-6, 1)$

c) $(1, -10), (2, -5), (5, -2), (10, -1), (-1, 10), (-2, 5), (-5, 2), (-10, 1)$

d) $(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$

12.5. Patrz s. 186.

13. Funkcja wymierna

Umiejętności:

- wyznaczanie dziedziny funkcji wymiernej
- rozwiązywanie układów równań prowadzących do równań kwadratowych

Umiemy już wykonywać działania na wyrażeniach wymiernych. Wprowadzimy teraz pojęcie funkcji wymiernej jednej zmiennej.

Definicja

Funkcją wymierną zmiennej x nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, w której W i P są wielomianami zmiennej x .

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

Zgodnie z definicją każdy wielomian jest funkcją wymierną. Podobną sytuację mamy w zbiorze liczb – każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

Przykład 1

a) Funkcja $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ jest funkcją wymierną – ilorazem wielomianów

$W(x) = 2x + 5$ i $P(x) = x - 1$. Jej dziedziną jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{1\}$.

b) Funkcja $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ jest funkcją wymierną – ilorazem wielomianów

$W(x) = 3$ i $P(x) = x^2 + 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbf{R}$.

c) Funkcja $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 6}{3}$ jest funkcją wymierną. W mianowniku mamy wielomian stały, zatem f jest wielomianem i dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbf{R}$.

Przykład 2 ◀ zad. 13.5

Wyznaczymy dziedzinę i naszkicujemy wykres

funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Przypomnijmy: dziedzinę funkcji wyznaczamy **przed** wykonaniem przekształceń we wzorze funkcji.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbf{R} - \{1\}$. Jeżeli rozłożymy wielomian w liczniku do postaci

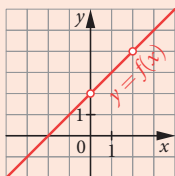
$(x-1)(x+1)$, to wzór funkcji $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ można uprościć.

Ostatecznie otrzymujemy wzór $f(x) = x + 1$ dla $x \neq 1$.

◀13.5. Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$$

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$



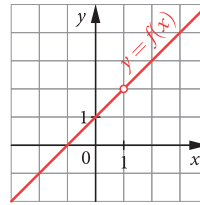
ZZ i MKP

temat 3.9

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.13

Generator
testów i sprawdzianów

Zauważmy, że funkcje $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ i $g(x) = x+1$ mają różne dziedziny, nie są zatem funkcjami równymi. Natomiast dla wszystkich argumentów $x \neq 1$ obydwie funkcje przyjmują identyczne wartości. Wykresem funkcji $y = g(x)$ jest prosta, a wykresem funkcji $y = f(x)$ jest prosta bez jednego punktu.



Przykład 3 ◀ zad. 13.6

Wyznaczmy dziedzinę D podanej funkcji.

Rozwiązanie

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ dla $x = 1$ lub $x = 2$, więc dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{1, 2\}$.

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{1, 2\}$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

$$(x^3 - 8) - (6x^2 - 12x) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x - 2)^3 = 0$$

Miejszem zerowym mianownika jest liczba 2.

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{2\}$

Rysowanie wykresów funkcji wymiernych wymaga opanowania bardziej zaawansowanej matematyki. Do tego zagadnienia wrócimy w następnych klasach. Teraz omówimy metodę rysowania wykresu funkcji wymiernej jednego rodzaju.

W poprzednim roku zajmowaliśmy się funkcją zmiennej x postaci $y = \frac{a}{x}$ o współczynniku $a \neq 0$. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$, a jej wykresem – hiperbola. Po przesunięciu tej hiperboli o wektor $[p, q]$, otrzymujemy wykres funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$. Wzór tej funkcji można przekształcić tak, aby był ilorazem dwóch funkcji liniowych. Wystarczy dodać obydwa składniki, np.:

$$\frac{2}{x-4} + 5 = \frac{2+5(x-4)}{x-4} = \frac{5x-18}{x-4}, \quad \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{5} = \frac{-15+3(x+1)}{5(x+1)} = \frac{3x-12}{5x+5}$$

◀ **13.6.** Wyznacz dziedzinę funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 5}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x - 4}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x}{x^3 - 27}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}$$

Odp.: a) $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$

b) $D = \mathbf{R}$

c) $D = \mathbf{R} - \{-1, 1, 2\}$

d) $D = \mathbf{R} - \{-1\}$

e) $D = \mathbf{R} - \{3\}$

f) $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 4\}$

Funkcję wymierną będącą ilorazem dwóch funkcji liniowych, ale niebędącą funkcją liniową, nazywamy funkcją homograficzną. Sprawdzimy, jakie warunki muszą spełniać a, b, c, d , aby funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ była istotnie nowym rodzajem funkcji.

Musimy przyjąć, że $c \neq 0$, bo w przeciwnym wypadku funkcja $y = \frac{ax+b}{d}$ byłaby funkcją liniową. Trzeba wykluczyć również sytuację, w której po skróceniu ułamka zmienna x w ogóle zniknie, np.:

$$\frac{5x+15}{2x+6} = \frac{5(x+3)}{2(x+3)} = \frac{5}{2} \text{ dla } x \neq -3$$

Zatem współczynniki nie mogą być proporcjonalne, czyli $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Jeżeli warunek ten zapiszemy w postaci $ad - bc \neq 0$, to będziemy mieli również gwarancję, że współczynniki b i d nie będą równocześnie zerami.

Definicja

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję wymierną określoną wzorem

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ jeżeli } c \neq 0 \text{ oraz } ad - bc \neq 0.$$

Zajmiemy się teraz takim przekształceniem wzoru funkcji homograficznej, aby jej wykres można było łatwo narysować.

◀13.10. Przekształć podaną funkcję homograficzną do postaci

$$f(x) = \frac{a}{x-p} + q.$$

a) $f(x) = \frac{3x-5}{x}$

b) $f(x) = \frac{3x}{x-5}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{4x+20}{x+3}$

Odp.: a) $f(x) = \frac{-5}{x} + 3, x \neq 0$

b) $f(x) = \frac{15}{x-5} + 3, x \neq 5$

c) $f(x) = \frac{-1}{x-1} + 1, x \neq 1$

d) $f(x) = \frac{8}{x+3} + 4, x \neq -3$

Przykład 4 ◀ zad. 13.10

Przekształćmy podaną funkcję homograficzną do postaci $y = \frac{a}{x-p} + q$.

Rozwiązanie

a) $y = \frac{2x+3}{x}, x \neq 0$

◀ przedstawiamy wzór funkcji jako sumę dwóch ułamków, z których jeden można skrócić

$$\frac{2x+3}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$$

◀ $a = 3, p = 0, q = 2$

Odp.: $y = \frac{3}{x} + 2$

b) $y = \frac{x}{x-3}, x \neq 3$

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$$

◀ $a = 3, p = 3, q = 1$

Odp.: $y = \frac{3}{x-3} + 1$

$$c) y = \frac{3x+2}{x+2}, \quad x \neq -2$$

$$\frac{3x+2}{x+2} = \frac{3(x+2)-6+2}{x+2} = 3 + \frac{-4}{x+2}$$

$$\leftarrow a = -4, p = -2, q = 3$$

$$\text{Odp.: } y = \frac{-4}{x+2} + 3$$

$$d) y = \frac{4x+3}{3x-6}, \quad x \neq 2$$

$$\begin{aligned} \frac{4x+3}{3x-6} &= \frac{4x+3}{3(x-2)} = \frac{\frac{1}{3}(4x+3)}{x-2} = \frac{\frac{1}{3}[4(x-2)+8+3]}{x-2} = \\ &= \frac{\frac{4}{3}(x-2) + \frac{11}{3}}{x-2} = \frac{\frac{11}{3}}{x-2} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\leftarrow a = \frac{11}{3}, p = 2, q = \frac{4}{3}$$

$$\text{Odp.: } y = \frac{\frac{11}{3}}{x-2} + \frac{4}{3}$$

Takie same przekształcenia jak w omówionych przykładach można przeprowadzić na ogólnych danych. Zatem każdą funkcję homograficzną można zapisać w postaci:

$$y = \frac{a}{x-p} + q.$$

Wniosek

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Przykład 5 zad. 13.13

Sporządzimy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = \frac{-4x-14}{x+2}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2\}$.

Przekształcamy najpierw wzór funkcji:

$$\frac{-4x-14}{x+2} = \frac{-4x-8+8-14}{x+2} = \frac{-4(x+2)-6}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{-6}{x+2} - 4$$

$$\leftarrow a = -6, p = -2, q = -4$$

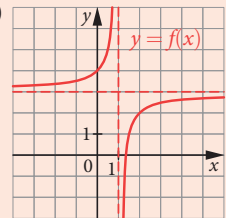
Aby otrzymać wykres funkcji f , należy zatem hiperbolę o równaniu $y = \frac{-6}{x}$ przesunąć o wektor $[-2, -4]$.

◀ **13.13.** Narysuj wykres funkcji i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, równania asymptot.

$$a) f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$$

$$b) f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

Odp.: a)



$$D = \mathbf{R} - \{1\}, \quad ZW = \mathbf{R} - \{3\};$$

$$\text{miejsce zerowe: } \frac{4}{3};$$

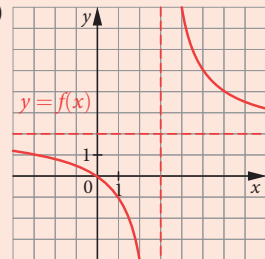
$$f(x) > 0 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right),$$

$$f(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(1; \frac{4}{3}\right);$$

funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1)$ i $(1; \infty)$;
asymptoty: $x = 1, y = 3$

b)



$$D = \mathbf{R} - \{3\}, \quad ZW = \mathbf{R} - \{2\};$$

$$\text{miejsce zerowe: } 0;$$

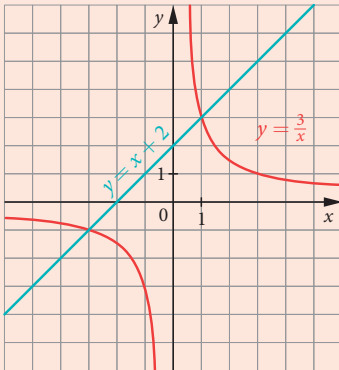
$$f(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty),$$

$$f(x) < 0 \text{ dla } x \in (0; 3);$$

funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 3)$ i $(3; \infty)$;
asymptoty: $x = 3, y = 2$

◀13.17. Odczytaj z wykresu rozwiązania układu równań, a następnie sprawdź je rachunkowo.

a)
$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$$



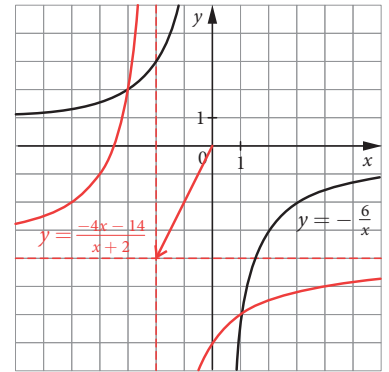
b)
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x(x + 2)(x - 1) \end{cases}$$



Odp.: a) $x = -3, y = -1$
 lub $x = 1, y = 3$
 b) $x = -2, y = 0$
 lub $x = -1, y = 2$
 lub $x = 2, y = 8$

Własności funkcji:

- dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2\}$,
- zbiorem wartości funkcji f jest $\mathbf{R} - \{-4\}$,
- asymptotami wykresu są proste o równaniach $x = -2$ i $y = -4$,
- miejscem zerowym jest $x = -\frac{7}{2}$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{7}{2}; -2\right)$,
- $f(x) < 0$ dla $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup (-2; \infty)$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
 - w przedziale $(-\infty; -2)$ jest rosnąca,
 - w przedziale $(-2; \infty)$ jest rosnąca.



Rozwiązywanie układów równań wymiernych z dwiema niewiadomymi jest najczęściej zadaniem trudnym i często niewykonalnym metodami rachunkowymi. Obecnie nie ma potrzeby ćwiczenia takich umiejętności – tę pracę wykonują za nas komputery. Odpowiednio zaprogramowane, znajdują rozwiązania z niemal dowolną dokładnością. Dlatego poznamy metodę rozwiązywania układów równań tylko w najprostszych sytuacjach, kiedy całe zadanie można sprowadzić do rozwiązywania równań kwadratowych.

Dla przykładu pokazujemy, jak sobie radzić z układem równań wymiernych, jeżeli dysponujemy np. kalkulatorem graficznym lub prostym programem komputerowym, za pomocą którego można narysować wykresy funkcji.

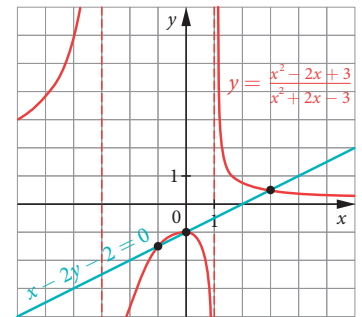
Przykład 6 ◀ zad. 13.17

Odczytamy z wykresu rozwiązania danego układu równań.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3} \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Na rysunku czerwona krzywa jest wykresem funkcji $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$, a niebieska – prostą o równaniu $x - 2y - 2 = 0$.



Wykresy przecinają się w trzech punktach: $(3, \frac{1}{2})$, $(0, -1)$ oraz $(-1, -\frac{3}{2})$.

Podstawiamy do układu równań pary liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

i sprawdzamy, że istotnie każda z nich spełnia obydwa równania.

Podczas rozwiązywania układu równań wymiernych, z których jedno jest równaniem liniowym, możemy użyć metody podstawiania. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 7 ◀ zad. 13.18

Rozwiążemy układ równań
$$\begin{cases} y = \frac{2}{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq 1$.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \leftarrow \text{do pierwszego równania podstawiamy } y \text{ z drugiego równania}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{x-1} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \leftarrow \text{mnożymy obie strony pierwszego równania przez } 2(x-1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

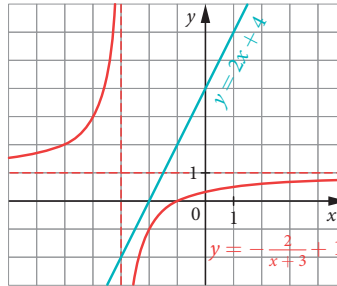
Odp.: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Aby odpowiedzieć na pytanie, ile rozwiązań ma układ równań, czasem wystarczy zrobić rysunek.

Przykład 8

Wykres obok przedstawia hiperbolę o równaniu $y = -\frac{2}{x+3} + 1$ oraz nieprzecinającą ją prostą o równaniu $y = 2x + 4$. Zatem układ równań

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{x+3} + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{nie ma rozwiązań.}$$



◀ 13.18. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{4}{y} \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{21}{x} \\ y = x + 4 \end{cases}$

Odp.: a) $x = 4, y = 2$

lub $x = -2, y = -4$

b) $x = -7, y = -3$

lub $x = 3, y = 7$

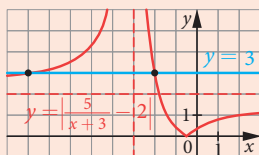
◀13.23. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $\left| \frac{5}{x+3} - 2 \right| = 3$

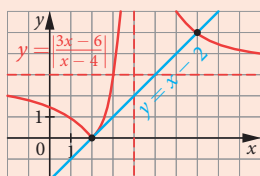
b) $\left| \frac{3x-6}{x-4} \right| = x-2$

c) $\left| \frac{-3x+23}{x-5} \right| = 5$

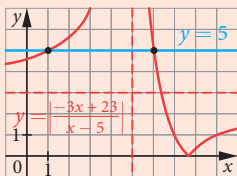
Odp.: a) $x = -8$ lub $x = -2$



b) $x = 2$ lub $x = 7$



c) $x = 1$ lub $x = 6$



Przykład 9 ◀ zad. 13.23

Rozwiążemy graficznie równanie $\left| \frac{2}{x+1} - 3 \right| = 1$.

Rozwiązanie

Aby rozwiązać graficznie podane równanie, musimy znaleźć w układzie współrzędnych punkty, których pierwsza współrzędna spełnia to równanie. Pokażemy dwa sposoby szukania takich punktów.

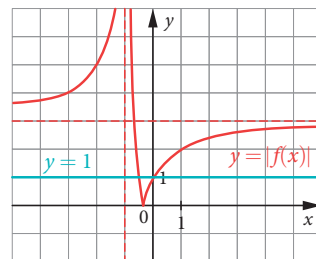
Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x+1} - 3$. Asymptotami wykresu tej funkcji homograficznej są proste: $x = -1$ i $y = -3$, a jej dziedziną zbiór $\mathbf{R} - \{-1\}$.

I sposób

Rysujemy wykresy:

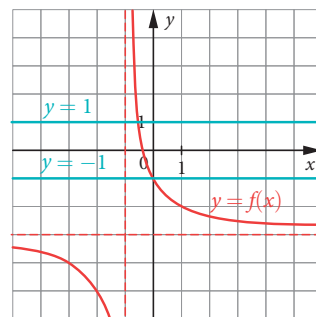
$y = |f(x)|$ i prostą $y = 1$,

a następnie odczytujemy współrzędne ich punktów przecięcia.



II sposób

$|f(x)| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = 1$ lub $f(x) = -1$, więc w układzie współrzędnych z narysowanym wykresem funkcji $y = f(x)$ prowadzimy dwie proste: $y = 1$ oraz $y = -1$ i odczytujemy współrzędne punktów przecięcia tych prostych z wykresem funkcji.



W każdym z opisanych sposobów otrzymujemy dwa punkty o pierwszych współrzędnych: $x = -\frac{1}{2}$ oraz $x = 0$. Koniecznym krokiem rozwiązania graficznego jest sprawdzenie, czy te współrzędne spełniają podane równanie.

Jeżeli $x = -\frac{1}{2}$, to $\left| \frac{2}{-\frac{1}{2}+1} - 3 \right| = |4 - 3| = 1$,

jeżeli $x = 0$, to $\left| \frac{2}{0+1} - 3 \right| = |2 - 3| = 1$.

Odp.: $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$

Zadania

W każdym z zadań 13.1–13.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyście.

13.1. Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x+5}{x^2+5x}$ może być zbiór

- A. $\mathbf{R} - \{0\}$ B. $\mathbf{R} - \{0, 5\}$ C. $\mathbf{R} - \{-5, 0\}$ D. $\mathbf{R}$

13.2. Wskaż funkcję wymierną.

- A. $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$ B. $f(x) = \frac{3x + \sqrt{2}}{5x - 1}$ C. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ D. $f(x) = \frac{x^3 - 4}{\sqrt{x} + 1}$

13.3. Wskaż funkcję, która nie jest funkcją wymierną.

- A. $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}x^4 - 3x}{x^2}$ B. $f(x) = \sqrt{7}$ C. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ D. $f(x) = \frac{x^3 - 4^x}{5}$

13.4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}$.
 B. Miejscem zerowym funkcji f jest $x = -1$.
 C. $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -1$.

13.5. Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$.

13.6. Wyznacz dziedzinę funkcji.

- a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x}$ d) $f(x) = \frac{x - 4}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$
 b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 5}$ e) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 27}$
 c) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ f) $f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}$

13.7. Podaj przykład funkcji wymiernej, której dziedziną jest podany zbiór.

- a) $\mathbf{R} - \{-2\}$ b) $\mathbf{R} - \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ c) $\mathbf{R} - \{-2, 1\}$ d) $\mathbf{R} - \{-5, -2, 2, 5\}$

13.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$ c) $f(x) = \frac{x-4}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$
 b) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ d) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}$

Odpowiedzi i rozwiązania

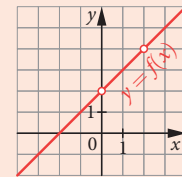
13.1. C

13.2. B

13.3. D

13.4. P, P, P

13.5. $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$



13.6. a) $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$

b) $D = \mathbf{R}$

c) $D = \mathbf{R} - \{-1, 1, 2\}$

d) $D = \mathbf{R} - \{-1\}$

e) $D = \mathbf{R} - \{3\}$

f) $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 4\}$

13.7. a) np. $f(x) = \frac{2x-7}{(x^2+1)(x+2)}$

b) np. $f(x) = \frac{3x-1}{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}$

c) np. $f(x) = \frac{x^2+2}{(x+2)(x-1)}$

d) np. $f(x) = \frac{10x-5}{(x+5)(x+2)(x-2)(x-5)}$

13.8. a) brak miejsc zerowych

b) 0

c) 4

d) brak miejsc zerowych

13.9. a) $x = -3\frac{2}{3}$

b) $x = 3, x = 1$ c) $x = -\frac{1}{2}$

d) Nie ma takich argumentów.

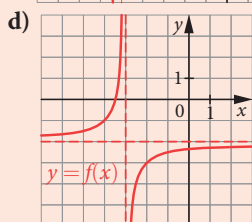
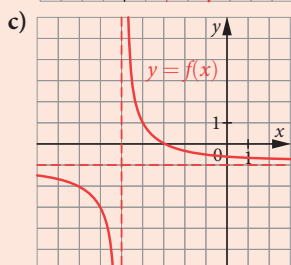
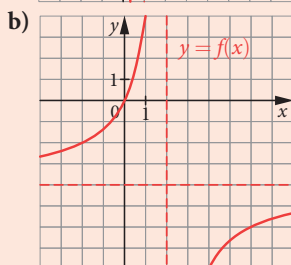
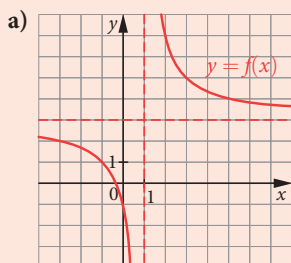
13.10. a) $f(x) = \frac{-5}{x} + 3, x \neq 0$

b) $f(x) = \frac{15}{x-5} + 3, x \neq 5$

c) $f(x) = \frac{-1}{x-1} + 1, x \neq 1$

d) $f(x) = \frac{8}{x+3} + 4, x \neq -3$

13.11.



13.9. Wyznacz argumenty, dla których wartość funkcji $y = f(x)$ jest równa t .

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x+7} \quad t = -3$ c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x} \quad t = 1$

b) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-6x+8} \quad t = -1$ d) $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+15} \quad t = 2$

13.10. Przekształć podaną funkcję homograficzną do postaci $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$.

a) $f(x) = \frac{3x-5}{x}$ b) $f(x) = \frac{3x}{x-5}$ c) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{4x+20}{x+3}$

13.11. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{-4x}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{-x-3}{x+5}$ d) $f(x) = \frac{-2x-7}{x+3}$

13.12. Wyznacz równania asymptot wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{11x+21}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{-8x-43}{x+6}$

13.13. Narysuj wykres funkcji i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, równania asymptot.

a) $f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

13.14. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{3}{|x-2|}$ b) $f(x) = \left| \frac{2x+2}{x+3} \right|$ c) $f(x) = \left| \frac{x-3}{x+2} \right|$ d) $f(x) = \frac{x+3}{|x|}$

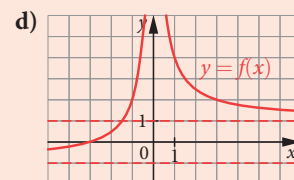
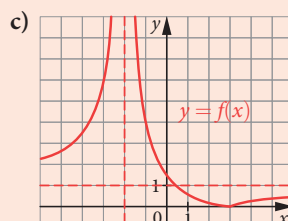
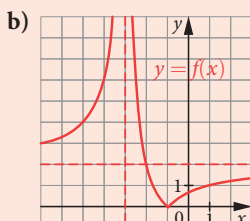
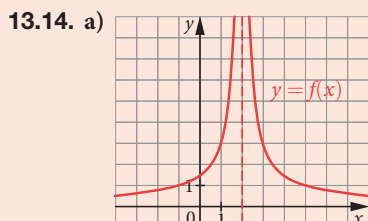
13.15. Określ dziedzinę, wyznacz miejsca zerowe i narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$
b) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x+6}{x-2}$ d) $f(x) = \frac{6x-18}{x^2-9}$

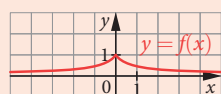
* 13.16. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, równania osi symetrii wykresu.

13.12. a) $x = -2, y = 11$ b) $x = -6, y = -8$

13.13. Patrz s. 191.



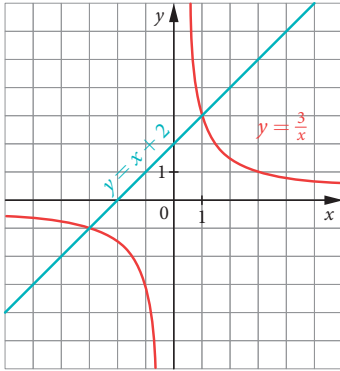
13.16.



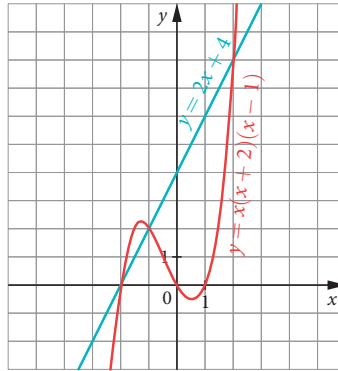
$D = \mathbf{R}$, $ZW = (0; 1)$; brak miejsc zerowych; $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, malejąca w przedziale $(0; \infty)$.
Wskazówka: Zauważ, że $f(x) = f(-x)$.

13.17. Odczytaj z wykresu rozwiązania układu równań, a następnie sprawdź je rachunkowo.

a)
$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x(x + 2)(x - 1) \end{cases}$$



13.18. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{4}{y} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = \frac{21}{x} \\ y = x + 4 \end{cases}$$

13.19. Rozwiąż graficznie układ równań, a następnie sprawdź wynik rachunkowo.

a)
$$\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x^2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = \frac{5}{|x|} \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

13.20. Rozwiąż graficznie nierówność.

a)
$$\frac{9 - x^2}{x + 3} \geq 2$$

b)
$$\frac{x - 2}{x^2 - 2x} \leq 2$$

13.21. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

a)
$$f(x) = \frac{4x^2 - 6x}{2x - 3}$$

b)
$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x - 4}$$

* **13.22.** Rozwiąż graficznie równanie.

a)
$$\frac{x + 3}{x - 1} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

c)
$$\frac{-5x + 8}{x - 2} = x^2 - 4$$

b)
$$\frac{2x + 4}{x + 3} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

d)
$$\frac{2x - 2}{x + 1} = -2x^2 + 2$$

13.17. a) $x = -3, y = -1$

lub $x = 1, y = 3$

b) $x = -2, y = 0$

lub $x = -1, y = 2$

lub $x = 2, y = 8$

13.18. a) $x = 4, y = 2$

lub $x = -2, y = -4$

b) $x = -7, y = -3$

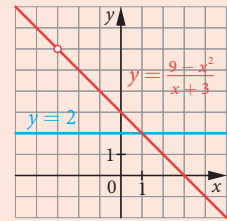
lub $x = 3, y = 7$

13.19. a) $x = 2, y = 4$

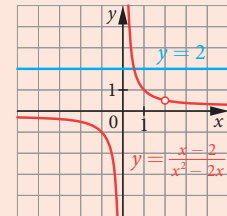
b) $x = 1, y = 5$

13.20.

a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$



b) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; \infty)$



13.21. a) $ZW = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $ZW = \langle -1; 0 \rangle \cup (0; 15) \cup (15; \infty)$

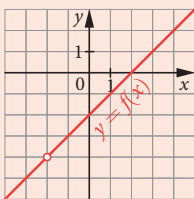
13.22. a) $x = -3$ lub $x = 5$

b) $x = -5$ lub $x = -1$

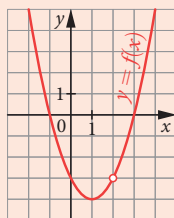
c) $x = 0$ lub $x = 1$

d) $x = 1$

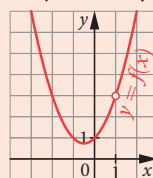
13.15. a) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$, miejsce zerowe: 2



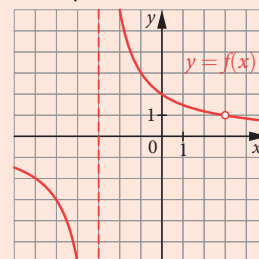
b) $D = \mathbb{R} - \{2\}$, miejsca zerowe: -1, 3



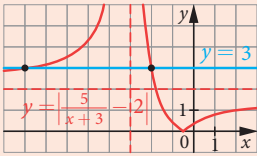
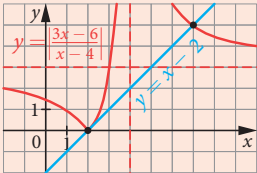
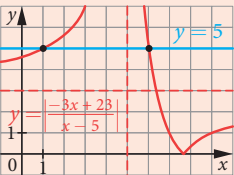
c) $D = \mathbb{R} - \{1\}$, brak miejsc zerowych



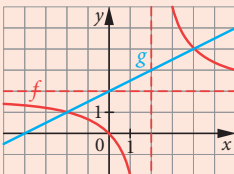
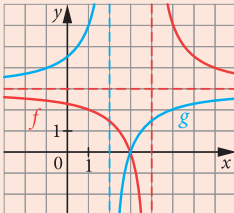
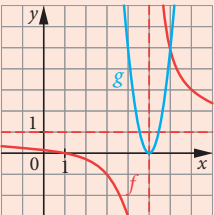
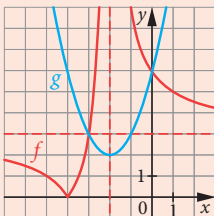
d) $D = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$, brak miejsc zerowych



13.23.

a) $x = -8$ lub $x = -2$ b) $x = 2$ lub $x = 7$ c) $x = 1$ lub $x = 6$ 

13.24.

a) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 4)$ b) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4)$ c) $x \in (-\infty; 5) \cup (6; \infty)$ d) $x \in (-3; -2) \cup (-2; 0)$ 13.25. $m \in \langle 0; 4 \rangle$ 13.26. Wskazówka: Zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od m .

* 13.23. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $\left| \frac{5}{x+3} - 2 \right| = 3$

b) $\left| \frac{3x-6}{x-4} \right| = x-2$

c) $\left| \frac{-3x+23}{x-5} \right| = 5$

13.24. Sporządź wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj rozwiązanie podanej nierówności.

a) $f(x) = \frac{2x}{x-2}$

$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$f(x) \geq g(x)$

b) $f(x) = \frac{3x-9}{x-4}$

$g(x) = \frac{3x-9}{x-2}$

$f(x) < g(x)$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

$g(x) = 5(x-5)^2$

$f(x) \leq g(x)$

d) $f(x) = \left| \frac{-3x-12}{x+2} \right|$

$g(x) = (x+2)^2 + 2$

$f(x) > g(x)$

13.25. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{mx^2-mx+1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych?D * 13.26. Wykaż, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$.B. $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-1; 1)$.C. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.2. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = 2x + 2 \end{cases}$, a następnie sprawdź wynik rachunkowo.3. Wyznacz dziedzinę D i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-5x-6}$.4. Podaj przykład funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{-5, -2\sqrt{2}, 7\}$.D 5. Wykaż, że wykresem funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ 7 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ jest prosta.

Prosto do matury

1. P, P, P

2. $x = -2, y = -2$
lub $x = 1, y = 4$ 3. $D = \mathbf{R} - \{-1, 6\}$,
brak miejsc zerowych4. np. $f(x) = \frac{x+1}{(x+5)(x+2\sqrt{2})(x-7)}$ 5. $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$, więc $\frac{x^2+3x-10}{x-2} = \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = x+5$ Jeśli $x = 2$, to $x+5 = 7$.Zatem $f(x) = x+5$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc wykres funkcji f jest prostą.

14. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–33 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż wartość wielomianu $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ dla $x = -1$.
 A. -7 B. -3 C. 1 D. 0
2. Funkcja $f(x) = (p+1)x + 5$ jest wielomianem stopnia 0, gdy
 A. $p = 1$. B. $p = 0$. C. $p = -1$. D. $p > 0$.
3. Wielomian $(2x+3)^3$ zapisano w postaci sumy tak, że jeden z podanych jednomianów jest jej składnikiem. Wskaż ten jednomian.
 A. $2x^3$ B. $18x^2$ C. $54x$ D. 9
4. Wskaż liczbę równą $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$.
 A. 1 B. $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ C. $9\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$ D. $9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$
5. Jaka jest wartość wielomianu $x^2y^4 - 2xy - \sqrt{3}x^2y$ dla $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{3}$?
 A. 0 B. $2(12 + \sqrt{6})$ C. $6\sqrt{3}$ D. -2
6. Wskaż zbiór rozwiązań równania $x^3 - 3x + 2 = 0$.
 A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{-2, 1\}$ C. $\{-1, 1, -2\}$ D. $\emptyset$
7. Ile pierwiastków ma wielomian $x^3 + 2x^2 + x$?
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
8. Którego z podanych wielomianów nie da się rozłożyć na czynniki?
 A. $x^6 + 1$ B. $x^4 + 1$ C. $x^3 + 1$ D. $x^2 + 1$
9. Równanie $x^3 - x^2 - x + 10 = 0$
 A. nie ma rozwiązań. C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
 B. ma dokładnie jedno rozwiązanie. D. ma dokładnie trzy rozwiązania.
10. Równanie $2x(x^2 - 9)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$
 A. nie ma rozwiązań. C. ma dokładnie pięć rozwiązań.
 B. ma dokładnie cztery rozwiązania. D. ma dokładnie sześć rozwiązań.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. A

2. C

3. C

4. D

5. B

6. B

7. C

8. D

9. B

10. C

- 11. C** **11.** Wskaż wyrażenie, które nie występuje w rozkładzie na czynniki wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$.
 A. $x - 2$ B. $x + 2$ C. $x - 4$ D. $x + 4$
- 12. A** **12.** Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ przez dwumian $x + 2$.
 A. 5 B. 3 C. 0 D. -1
- 13. B** **13.** Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^9 + x^4 - 1$ przez dwumian $x + 1$.
 A. -3 B. -1 C. 1 D. 3
- 14. B** **14.** Dla jakiej wartości m wielomian $W(x) = x^3 - 2mx^2 + 3x - 6$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x - 2$?
 A. -2 B. 1 C. 0 D. 2
- 15. B** **15.** Wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 1$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$, gdy
 A. $a = 3, b = 3$. B. $a = -3, b = 3$. C. $a = 0, b = 3$. D. $a = 1, b = -3$.
- 16. B** **16.** Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)(x - 2)^3$. Jaką krotność ma ten pierwiastek?
 A. trzy B. cztery C. pięć D. sześć
- 17. D** **17.** Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x^3 \geq x$.
 A. $\langle 1; \infty \rangle$ C. $\emptyset$
 B. $(-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$ D. $\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$
- 18. B** **18.** Wskaż dziedzinę funkcji $y = \sqrt{x^3(x^2 - 3x)}$.
 A. $\mathbb{R}$ C. $(-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 B. $\langle 3; \infty \rangle \cup \{0\}$ D. $\langle 0; 3 \rangle$
- 19. A** **19.** Wiadomo, że $a > b > c > 0$. Wynika stąd, że
 A. $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$. C. $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$.
 B. $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$. D. jest za mało danych, żeby porównać $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$.
- 20. C** **20.** Grzegorz zaplanował porządkowanie strychu przez a godzin. Przepracował już b godzin, $b < a$. Jaka część zaplanowanego czasu pracy mu została?
 A. $a - b$ B. $\frac{1}{a - b}$ C. $\frac{a - b}{a}$ D. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

- 21.** Dla $x \neq 0$ i $y \neq 0$ wyrażenie $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ można zapisać jako **21. D**
- A. 0. B. -1. C. $\frac{x-y}{xy}$. D. $\frac{x^2-y^2}{xy}$.
- 22.** Który z ułamków jest równy sumie $\frac{r}{x} + \frac{y}{m}$? Zakładamy, że $x \neq 0$ i $m \neq 0$. **22. D**
- A. $\frac{ry}{xm}$ B. $\frac{r+y}{xm}$ C. $\frac{rm+xy}{x+m}$ D. $\frac{rm+xy}{xm}$
- 23.** Jeżeli ułamek $\frac{2x}{x+1}$ rozszerzymy tak, aby w jego mianowniku było wyrażenie x^3+1 , to w liczniku otrzymamy **23. C**
- A. $2x^3+2x^2+2$. B. $2x^2+x$. C. $2x^3-2x^2+2x$. D. $2x^2+2x$.
- 24.** Wskaż dziedzinę wyrażenia $\frac{x}{x-1} : \frac{x+2}{x-5}$. **24. C**
- A. $R - \{1, 5\}$ B. $R - \{-2, 1\}$ C. $R - \{-2, 1, 5\}$ D. $R - \{-2, 0, 1, 5\}$
- 25.** Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{x(x-1)}{x+3} = 0$. **25. C**
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 26.** Wskaż równanie mające ten sam zbiór rozwiązań co równanie $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$. **26. D**
- A. $(x^2-1)(x-1) = 0$ C. $x-1 = 0$
 B. $(x^2-1) = 0$ D. $x+1 = 0$
- 27.** Jaki jest zbiór rozwiązań nierówności $\frac{3}{x} > -1$? **27. C**
- A. $(-3; \infty)$ B. $(-\infty; -3)$ C. $(-\infty; -3) \cup (0; \infty)$ D. $\emptyset$
- 28.** Który z wykresów funkcji przechodzi przez początek układu współrzędnych? **28. C**
- A. $y = -\frac{1}{x} + 2$ B. $y = \frac{1}{x+1} + 1$ C. $y = \frac{2}{x+1} - 2$ D. $y = \frac{4}{x}$
- 29.** Która liczba jest miejscem zerowym funkcji $y = \frac{3}{x-4} + 5$? **29. A**
- A. 3,4 B. -1,8 C. 2,7 D. 4,4
- 30.** O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{x-2}{x-5}$? **30. A**
- A. $[5, 1]$ C. $[-5, -3]$
 B. $[-5, 1]$ D. Nie istnieje taki wektor.

- 31.** D
- 32.** A
- 33.** B
- 34.** F, P, F
- 35.** F, P, F
- 36.** P, F, P
- 37.** F, P, F
- 38.** P, F, P
- 39.** P, P, P
- 31.** Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.
 A. $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ B. $\mathbb{R} - \{-2\}$ C. $\mathbb{R} - \{1\}$ D. $\mathbb{R} - \{2\}$
- 32.** Wskaż dziedzinę funkcji $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$.
 A. $\mathbb{R} - \{-4\}$ B. $\mathbb{R}$ C. $\mathbb{R} - \{-4, 4\}$ D. $\mathbb{R} - \{0\}$
- 33.** Jaki jest zbiór wartości funkcji $y = \left| \frac{x-3}{x} \right|$?
 A. $(0; \infty)$ B. $\langle 0; \infty)$ C. $(0; \infty) - \{1\}$ D. $\mathbb{R}$
- W zadaniach 34–45 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 34.** Wyrażenie $x^3 - y^3$ to
 A. sześcián różnicy liczb x i y .
 B. różnica sześciánów liczb x i y .
 C. trzecia potęga różnicy liczb x i y .
- 35.** Dane są wielomiany $W(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + 11x + 3$ i $P(x) = -6x^4 + 5x^2 + x$.
 A. Stopień wielomianu $W(x) + P(x)$ jest równy 9.
 B. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 9.
 C. Współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 3.
- 36.** Dany jest wielomian $W(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2$.
 A. Wielomian $W(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.
 B. Jedynym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest $x = 0$.
 C. Suma pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest równa $\frac{1}{2}$.
- 37.** Dane są wielomiany $W(x) = (a+1)x^3 - 3x^2 + (a-b+2)x - 1$ i $Q(x) = (4+b)x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
 A. Istnieje dokładnie jedna para wartości parametrów a i b , dla których wielomiany W i Q są równe.
 B. Istnieje nieskończenie wiele par wartości parametrów a i b , dla których wielomiany W i Q są równe.
 C. Wielomiany W i Q są równe dla dowolnych wartości parametrów a i b .
- 38.** Wielomian $W(x) = x^4 - x - \sqrt{3}$
 A. ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny.
 B. przyporządkowuje każdej liczbie niewymiernej liczbę niewymierną.
 C. przyporządkowuje każdej liczbie wymiernej liczbę niewymierną.
- 39.** Dana jest funkcja $f(x) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 6x + 5)$.
 A. $f(-10) > 0$ B. $f(4) \leq 0$ C. $f(5) \geq 0$

- 40.** Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2mx^2 + 3x - 6$.
 A. Dla dowolnej całkowitej wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu W przez $x - 2$ jest liczbą całkowitą podzieloną przez 4.
 B. Wielomian W jest podzielny przez $x - 2$ dla $m = 1$.
 C. Dla $m < 1$ reszta z dzielenia wielomianu W przez $x - 2$ jest liczbą dodatnią.

- 41.** Równanie wielomianowe trzeciego stopnia może mieć
 A. trzy pierwiastki. B. dwa pierwiastki. C. jeden pierwiastek.

- 42.** Wiadomo, że $ab = a^2$ i $a \neq 0$. Zatem
 A. $a - b = 2$. B. $a - b = 0$. C. $a - b$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

- 43.** Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$, określonej w zbiorze $\mathbf{R} - \{2\}$, ma
 A. co najwyżej jedną oś symetrii.
 B. co najmniej dwie osie symetrii.
 C. środek symetrii.

- 44.** Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x - x^3}{|x|}$.
 A. Funkcja f nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
 B. $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$.
 C. Początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji f .

- 45.** Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x^3-8}$.
 A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$.
 B. Dla wszystkich $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ wartości funkcji f są dodatnie.
 C. Wartość funkcji f jest równa 4 dla dokładnie dwóch argumentów.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- 46.** Dane są wielomiany: $W(x) = 4x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 2x - 7$, $Q(x) = 2x - 3$ i $R(x) = x^2 - x$. Wyznacz $W(x) - (Q(x))^2 \cdot R(x)$.

- 47.** Wyznacz liczbę m tak, aby reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx - 1$ przez wielomian $Q(x) = x - 2$ była równa 5.

- 48.** Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $Q(x) = 3\pi x^4 + 6x^2$ d) $Q(x) = 7x^8 - 21x^6$
 b) $Q(x) = 14x^5 + 21x^3$ e) $Q(x) = 2x^4 - 16x$
 c) $Q(x) = 24x^6 - 36x^4$ f) $Q(x) = x^6 - 1$

40. P, P, P

41. P, P, P

42. F, P, F

43. F, P, P

44. P, P, P

45. P, P, F

46. $3x^2 + 11x - 7$

47. $m = 7$

48. a) $Q(x) = 3x^2(\pi x^2 + 2)$
b) $Q(x) = 7x^3(2x^2 + 3)$
c) $Q(x) = 12x^4(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$
d) $Q(x) = 7x^6(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
e) $Q(x) = 2x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
f) $Q(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1)$

49. a) $W(x) = (x+3)(x-3)(x+2)$

b) $W(x) = 2x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 5)$

c) $W(x) = (x-3)^2(x+3)^2$

d) $W(x) = -(x-1)(x+1)(x^2+2)$

e) $W(x) = (x-1)(x+3)(x-5)$

f) $W(x) = (x+2)(x^2-5x+7)$

50. $a_2 = -4$, $a_1 = -11$, $a_0 = 30$

51. np. $(x+2)(5x-2)(7x-1) = 0$

52. a) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 4$

b) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{4}$ lub $x = 1$

c) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{4}$ lub $x = 1$

e) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -1\frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{5}$

f) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 2\frac{3}{5}$

g) $x = -3$ lub $x = 3$ lub $x = 5$

h) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$ lub $x = 2\frac{1}{2}$

53. a) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = 2$

b) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 3$

c) $x = -5$ lub $x = 1$

d) $x = -2\frac{1}{2}$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 2\frac{1}{2}$

e) $x = -1$ lub $x = 2 - \sqrt{2}$ lub $x = 2 + \sqrt{2}$ lub $x = 5$

f) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = \sqrt{7}$

54. a) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$

b) $x \in (-3; 1) \cup (1; \infty)$

c) $x \in (-\infty; 3)$

d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{1}{2}; 2)$

e) $x \in \langle -4\frac{1}{2}; -2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$

f) $x \in (-3; -2\frac{1}{2}) \cup (-2\frac{1}{2}; \infty)$

55. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

b) $a = 1$, $b = 2$

57. $a = -24$, $b = -12$

58. $x^2 + 3x + 1$ lub $-x^2 - 3x - 1$

59. $a = -8$, $b = 12$

49. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

b) $W(x) = 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 20x$

c) $W(x) = x^4 - 18x^2 + 81$

d) $W(x) = -x^4 - x^2 + 2$

e) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

f) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 14$

50. Liczby -3 , 2 i 5 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Wyznacz współczynniki tego wielomianu.

51. Podaj przykład równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są liczby -2 , $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$.

52. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0$

b) $4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

d) $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$

e) $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$

f) $5x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 13x = 0$

g) $-x^3 + 5x^2 + 9x - 45 = 0$

h) $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 20x = 0$

53. Rozwiąż równanie.

a) $(x + \sqrt{7})(x - 2)^2 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$

c) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$

d) $4x^4 - 29x^2 + 25 = 0$

e) $3(x^2 - 4x) - (x^2 - 4x)^2 + 10 = 0$

f) $(x^4 - 5x^2 + 2)^2 - 14(x^4 - 5x^2 + 2) = 32$

54. Rozwiąż nierówność.

a) $x^8 > 16$

b) $(x+3)(x-1)^2 > 0$

c) $x^3 - 2x^2 - 9 \leq 0$

d) $4x^5 - 17x^3 + 4x < 0$

e) $2x^3 + 9x^2 - 8x - 36 \geq 0$

f) $-4x^3 - 32x^2 - 85x - 75 < 0$

55. Wyznacz takie wartości parametrów a i b , aby podane równanie było spełnione przez wszystkie liczby należące do jego dziedziny.

a) $\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$

b) $\frac{3x-10}{x^2-7x+12} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-4}$

56. Wiadomo, że $a + \frac{1}{a} = 3$. Wykaż, że $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

57. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomiany $W(x) = (3x-1)^3 + ax$ i $P(x) = (3x+1)(9x^2+bx-1)$ są równe?

58. Znajdź wielomian, którego kwadrat równa się $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$.

59. Dla jakich wartości parametrów a i b liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 + ax + b$?

56. Założenie: $a + \frac{1}{a} = 3$

Teza: $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$

Dowód:

$$a + \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = 27 \Leftrightarrow a^3 + 3a + 3 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = 27$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 27 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 27 - 3 \cdot 3 = 18$$

Zatem $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$.

60. Jednym z pierwiastków równania $(m-1)x^3 + \frac{1}{3}mx^2 - (2m-1)x + m-1 = 0$ z niewiadomą x jest liczba $\frac{1}{2}$. Rozwiąż to równanie.

61. Pierwiastkami wielomianu $x^3 + ax^2 - bx - 6$ są liczby -1 oraz 3 . Wyznacz współczynniki a i b . Czy ten wielomian ma inne pierwiastki?

D * **62.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej x wartość wielomianu $W(x) = x^3 - x$ jest liczbą podzielną przez 6.

63. $W(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia, $W(0) = 9$, $W(1) = 12$ i $W(-1) = 16$. Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem tego wielomianu. Wyznacz $W(x)$.

64. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad |x^3 - 3x + 1| \leq 1 & \text{c)} \quad |x|(x^2 - 7) + 6 > 0 \\ \text{b)} \quad |x^3 - 2x^2 + x - 1| > 1 & \text{d)} \quad x^3 + 2x^2 > 4|x + 2| \end{array}$$

65. Dla jakich argumentów x wartości funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -2x^2 + 5x - 3$?

66. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{5x^2 - 6x - x^3} + (x+5)\sqrt{x^3 - 1}$.

67. Wyznacz najmniejszą liczbę niewymierną (o ile istnieje) spełniającą nierówność $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 15x \leq 0$.

68. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ jest równa 0 oraz $W(0) = 6$ i $W(2) = -4$. Rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.

69. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - bx - 6$ jest podzielny przez dwumian $x-2$, a dla $x=1$ ma wartość równą -8 . Dla jakich x wielomian ten ma wartość nieujemną?

D **70.** Wykaż, że jeśli wielomian $W(x) = x^3 + 3px + q$ ma pierwiastek dwukrotny, to $4p^3 + q^2 = 0$.

D * **71.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \neq 0$ każdy z wielomianów postaci $W(x) = x^{2n} + x - 27$ ma co najmniej dwa miejsca zerowe.

72. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{3x}{x+1} = \frac{1}{2x} & \text{c)} \quad \frac{x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x-4}{2x-6} = 1 \\ \text{b)} \quad \frac{3}{x+5} - \frac{1}{x-7} = \frac{2-2x}{x^2 - 2x - 35} & \text{d)} \quad \frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{2}{x^2 + 2x} = \frac{x}{x^2 - 4} \end{array}$$

70. $W(x) = x^3 + 3px + q$

Niech a będzie pierwiastkiem dwukrotnym, a b – drugim pierwiastkiem.

$$W(x) = (x-a)^2(x-b) = (x^2 - 2xa + a^2)(x-b) = x^3 - bx^2 - 2ax^2 + 2abx + a^2x - a^2b = x^3 - (2a+b)x^2 + (2ab+a^2)x - a^2b$$

Zatem $-(2a+b) = 0$ i $2ab + a^2 = 3p$ i $-a^2b = q$.

Stąd mamy $b = -2a$.

$$p = \frac{1}{3}a(2b+a) = \frac{1}{3}a(-4a+a) = -a^2$$

$$q = -a^2(-2a) = 2a^3$$

$$4p^3 + q^2 = 4(-a^2)^3 + (2a^3)^2 = -4a^6 + 4a^6 = 0$$

60. $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$

61. $a = 0$, $b = 7$; tak, -2

62. Założenie: $n \in \mathbb{Z}$,

$$W(x) = x^3 - x$$

Teza: $6|W(n)$

Dowód:

$$W(n) = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

Zatem $W(n)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, z których co najmniej jedna jest parzysta i dokładnie jedna jest podzielna przez 3. Wynika stąd, że iloczyn tych liczb jest liczbą podzielną przez 6.

$$\textbf{63. } W(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9$$

$$\textbf{64. a) } x \in \langle -2; -\sqrt{3} \rangle \cup \langle 0; \sqrt{3} \rangle$$

$$\textbf{b) } x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$$

$$\textbf{c) } x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$$

$$\textbf{d) } x \in (2; \infty)$$

$$\textbf{65. } x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$$

$$\textbf{66. } D = \langle 2; 3 \rangle$$

$$\textbf{67. } -\sqrt{5}$$

$$\textbf{68. } x \in (-\infty; -2) \cup \langle 1; 3 \rangle$$

$$\textbf{69. } x \in \langle -3; -1 \rangle \cup (2; \infty)$$

$$\textbf{71. } W(x) = x^{2n} + x - 27$$

$$W(0) = -27 < 0$$

$$W(-6) \geq (-6)^2 - 6 - 27 = 3 > 0$$

$$W(6) = 6^2 + 6 - 27 = 15 > 0$$

Wykres wielomianu musi zatem przeciąć oś x w punkcie z przedziału $(-6; 0)$ oraz w punkcie z przedziału $(0; 6)$, więc wielomian $W(x)$ ma co najmniej dwa miejsca zerowe.

$$\textbf{72. a) } x = -\frac{1}{3} \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

b) brak rozwiązań

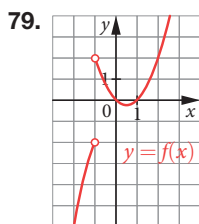
$$\textbf{c) } x = 2 \text{ lub } x = 5$$

$$\textbf{d) } x = 4$$

73. 2 godziny i 3 godziny

74. autobus; 1,5 km

75. 100 km/h

76. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3)$ b) $x \in \{-2; -1\}$ c) $x \in (2; 4) \cup (4; \infty)$ d) $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$ e) $x \in (-3; 0)$ f) $x \in (-8; -1) \cup (-1; 0)$ 77. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ 78. $m \in (0; 3)$ 80. a) $|x|$ b) $\frac{x^2+3}{|x|}$

81. $(x^2+x+2)^2-3x^2-3x-10=0$
 $(x^2+x+2)^2-3(x^2+x+2)-4=0$

$$x^2+x+2=t$$

$$t^2-3t-4=0$$

$$\Delta=9+16=25, \sqrt{\Delta}=5$$

$$t_1=-1, t_2=4$$

$$x^2+x+2=-1 \text{ lub } x^2+x+2=4$$

$$x^2+x+3=0 \text{ lub } x^2+x-2=0$$

$$\Delta=1-12<0 \text{ lub } \Delta=1+8=9,$$

$$x_1=-2, x_2=1$$

Odp.: $x=-2$ lub $x=1$

73. Jedna drukarka drukuje cały nakład ulotek w czasie o godzinę dłuższym niż druga. Wydrukowanie wszystkich ulotek na obydwu drukarkach pracujących równocześnie zajęło 1 godzinę i 12 minut. Ile czasu drukowałyby wszystkie ulotki każda z drukarek, pracując oddzielnie?

74. Autobus miejski pokonuje odległość 7 km ze średnią prędkością 42 km/h. Po drodze zatrzymuje się na 13 przystankach – na każdym średnio 30 sekund. Jednocześnie z autobusem na tę samą trasę wyrusza rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Który pojazd pierwszy pokona całą trasę? Jaki dystans zostanie wtedy do przejechania drugiemu pojazdowi?

75. Pociąg zatrzymany na czerwonym świetle stał 20 minut. Następnie przejechał 100 km z prędkością o 20 km/h większą od zaplanowanej, dzięki czemu zmniejszył opóźnienie do 5 minut. Z jaką prędkością przejechał te 100 km?

76. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x^2-2x+9}{x+1} < 3$

d) $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x+9}{x-5} + \frac{2}{x^2-9x+20} \geq 0$

b) $\frac{3x+7}{x^2+6x+9} \geq 1$

e) $\frac{2x^2+x+1}{x^2+3x} < \frac{2}{3}$

c) $\frac{x^2-x-12}{x-4} > 5$

f) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x+14}{x} + \frac{2}{x^2+x} \leq 0$

77. Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $(2m+1)x^2-(m+3)x+2m+1=0$ jest większa od 1?

78. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^4-(2m+6)x^2+9-m^2=0$ ma cztery różne rozwiązania?

79. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3-x}{|x+1|}$.

80. Zapisz w prostszej postaci podane wyrażenie.

a) $\sqrt{(x^2+9y^2)^2-81y^4} : \sqrt{x^2+18y^2}$ b) $\sqrt[4]{\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)^2+12\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)+36}$

* 81. Rozwiąż równanie $(x^2+x+2)^2-3x^2-3x-10=0$.

* 82. Wykaż, że równanie $\frac{x^6-\sqrt{7}}{x}=1$ ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny.

82. Równanie $\frac{x^6-\sqrt{7}}{x}=1$ jest równoważne równaniu $x^6-x-\sqrt{7}=0$

(0 nie jest rozwiązaniem tego równania).

Niech $f(x)=x^6-x-\sqrt{7}$.

$$f(-2)=64-2-\sqrt{7}>0, f(0)=-\sqrt{7}<0, f(2)=64-2-\sqrt{7}>0$$

Zatem równanie $f(x)=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(-2; 0)$ i co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(0; 2)$ (bo funkcja f jest ciągła).

Jeżeli $f(x_0)=0$, to $x_0 \notin \mathbb{Q}$, bo wtedy $\sqrt{7}=x_0^6-x_0$, a $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Zatem równanie ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny.