

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy i rozszerzony

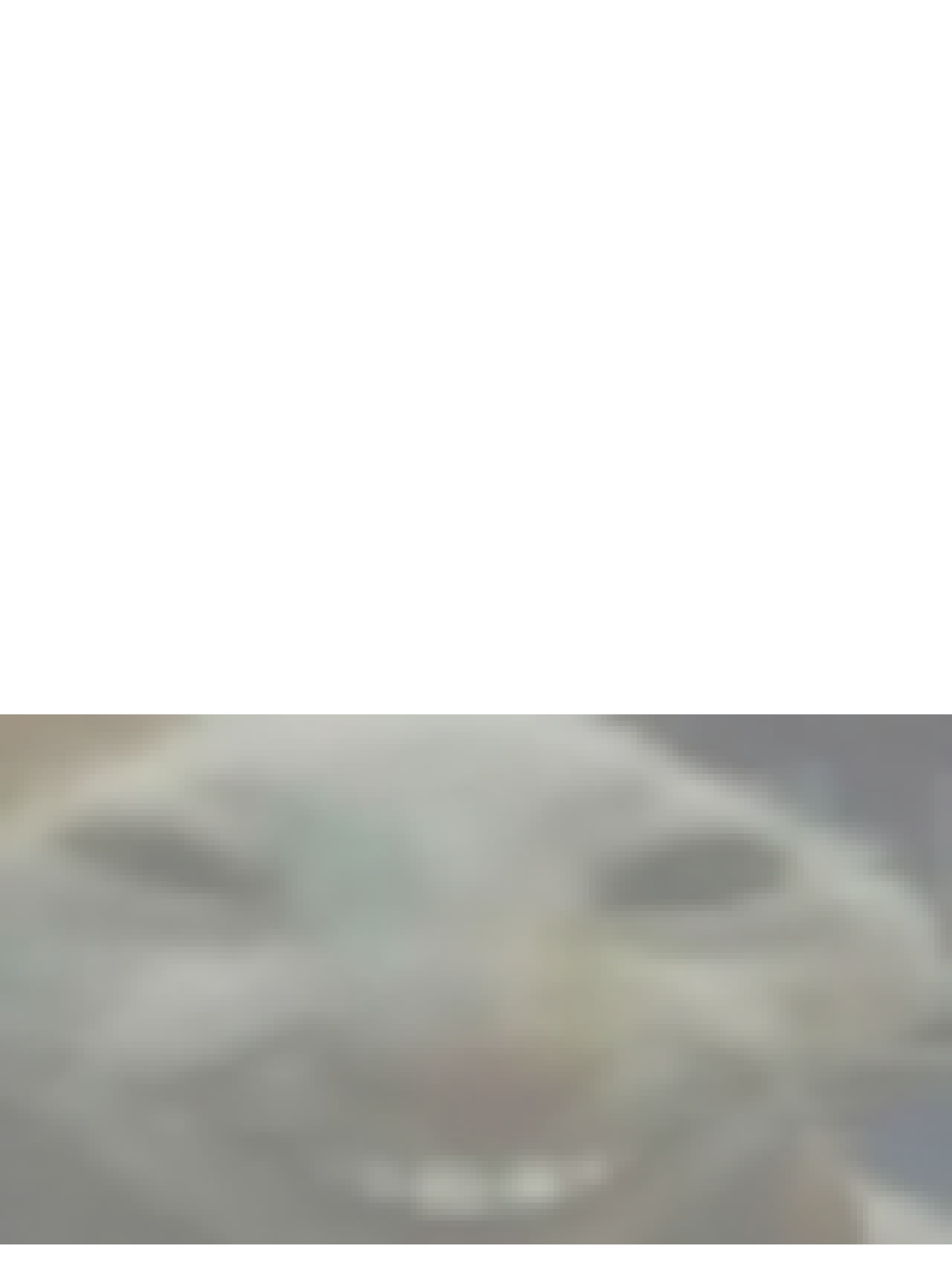


Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl



Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy i rozszerzony

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela 2 został przygotowany do podręcznika autorstwa Macieja Antka, Krzysztofa Belki i Piotra Grabowskiego *Prosto do matury 2* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (1013/2/2020).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-3894-4

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *Prosto do matury* dla klasy 2 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020

Autorzy komentarzy merytorycznych: Maciej Antek, Piotr Grabowski.

Autorzy rozwiązań zadań: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska.

Koordinacja prac: Anna Dubiel.

Redakcja merytoryczna: Anna Dążek.

Redakcja językowa i korekta: Anna Lisiecka, Paulina Szulim, Anna Wesołowska.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki: Andrzej Oziębło.

Realizacja projektu graficznego: Skład systemem T_EX. BOP sc.

Realizacja projektu okładki: Ultra.

Fotografia na okładce: Getty Images/Photographer's Choice/Harald Sund.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo – CPA Media Pte Ltd s. 390 (Galleusz), Pictorial Press Ltd s. 108 (Tartaglia), Science History Images s. 108 (Cardano), The Picture Art Collection s. 111; East News: Joanna Gajcy s. 45; Getty Images: E+/LeoPatrizi s. 17, Moment – PATSTOCK s. 276, wellsie82 s. 341, Moment Open/Photo by Vincent Ting s. 309, Stone/GK Hart/Vikki Hart s. 91, ullstein bild s. 30; Indigo: agefotostock/Luis Castañeda s. 207, Alamy Stock Photo – Juergen Nowak s. 282-283, Pictorial Press Ltd s. 390 (dzieło Napiera), Danita Delimont Agency/Paul Souders/DanitaDelimont.com s. 7; Shutterstock: Adam Gryko s. 175, Africa Studio s. 390 (pióro), blackzheep s. 391 (tablet), David Pereiras s. 87, dvande s. 391 (suwak logarytmiczny), Paladint2 s. 390–391 (stara kartka), Slava Gerj s. 108-109 (szkic Wenejii), Tatiana Popova s. 335, theshots.co s. 334, Tito Wong s. 365, travis manley s. 162, Vitaly Korovin s. 109 (stara kartka).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Alcje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Spis treści

Podręcznik Prosto do matury z materiałami dydaktycznymi	1
1. Zastosowania funkcji kwadratowej.....	7
2. Wielomiany i wyrażenia wymierne	87
3. Planimetria	207
4. Funkcje trygonometryczne.....	309
5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	365
Skorowidz	418

Legenda

Podczas pracy z podręcznikiem PDM dodatkowo można korzystać z publikacji z serii **MATeMATyka: Zbiór zadań (ZZ)** i **Maturalne karty pracy (MKP)**. Odnosiniki 1.8, 1.9 oznaczają numery odpowiednich tematów w tych publikacjach.

Multiteka – tu zamieszczamy tytuły zasobów zgromadzonych w Multitece, pomocnych w przeprowadzeniu konkretnych lekcji.

Materiały sprawdzające wiedzę są zgromadzone w dwóch miejscach:

- w portalu dlanauczyciela.pl – gotowe kartkówki, klasówki i sprawdziany,
- w Genaratorze – narzędziu z bogatą bazą zadań do tworzenia własnych kartkówek, klasówek i sprawdzianów, a także z propozycjami gotowych tego typu materiałów.

ZZ i MKP

tematy 1.8, 1.9

Multiteka

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.2



Generator
testów i sprawdzianów

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy i rozszerzony

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr Marii Borowskiej, dr Moniki Fabijańczyk i dr hab. Anny Cegięły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-3894-4

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Kliśowski

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Korekta językowa: Anna Wesołowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Point

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Ilustracje: Wojciech Sendal

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Elżbieta Buczkowska, Natalia Helman, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Photographer's Choice/Harald Sund.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo – CPA Media Pte Ltd s. 390 (Gallieus), Pictorial Press Ltd s. 108 (Tartaglia), Science History Images s. 108 (Cardano), The Picture Art Collection s. 111; East News: Joanna Gajcy s. 45; Getty Images: E+/LeoPatrizi s. 17, Moment – PATSTOCK s. 276, wellsie82 s. 341, Moment Open/Photo by Vincent Ting s. 309, Stone/GK Hart/Vikki Hart s. 91, ullstein bild s. 30; Indigo: agefotostock/Luis Castañeda s. 207, Alamy Stock Photo – Juergen Nowak s. 282-283, Pictorial Press Ltd s. 390 (dzielo Napiera), Danita Delmont Agency/Paul Souders/DanitaDelmont.com s. 7; Shutterstock: Adam Gryko s. 175, Africa Studio s. 390 (pióro), blacksheep s. 391 (tablety), David Pereiras s. 87, dvanle s. 391 (suwak logarytmiczny), Paladint12 s. 390–391 (stara kartka), Slava Gerj s. 108-109 (szkiełko Weneckie), Tatiana Popova s. 335, theshots.co s. 334, Tito Wong s. 365, travis manley s. 162, Vitaly Korovin s. 109 (stara kartka).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontakt: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Zastosowania funkcji kwadratowej

1. Warto powtórzyć – własności funkcji, funkcja kwadratowa	8
2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej	12
3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej	22
4. Wzory Viète'a	30
5. Nierówności kwadratowe	37
6. Zadania prowadzące do równań kwadratowych	43
7. Równania kwadratowe z parametrem	50
8. Nierówności kwadratowe z parametrem	57
9. Własności funkcji kwadratowej – podsumowanie	62
10. Powtórzenie	76

Dział 2. Wielomiany i wyrażenia wymierne

1. Określenie funkcji wielomianowej	88
2. Działania w zbiorze wielomianów	97
3. Wzory skróconego mnożenia	103
4. Równania wielomianowe	110
5. Dzielenie wielomianów	123
6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta	133
7. Nierówności wielomianowe	145
8. Wyrażenia wymierne	155
9. Działania na wyrażeniach wymiernych	164
10. Równania wymierne	171
11. Nierówności wymierne	180
12. Warto powtórzyć – proporcjonalność odwrotna	186
13. Funkcja wymierna	188
14. Powtórzenie	199

Dział 3. Planimetria

1. Wstęp do planimetrii	208
2. Okręgi i proste	217
3. Kąty w kole	231
4. Wielokąt wpisany w okrąg	248
5. Wielokąt opisany na okręgu	255

6. Twierdzenie Talesa	263
7. Podobieństwo	273
8. Trójkąty podobne	284
9. Powtórzenie	300

Dział 4. Funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	310
2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	321
3. Warto powtórzyć – pola i obwody figur	328
4. Zastosowania funkcji trygonometrycznych	336
5. Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego	343
6. Własności funkcji trygonometrycznych	353
7. Powtórzenie	359

Dział 5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

1. Warto powtórzyć – potęgi	366
2. Funkcja wykładnicza	368
3. Warto powtórzyć – logarytmy	378
4. Własności logarytmów	381
5. Funkcja logarytmiczna. Zastosowania logarytmów	392
*6. Równania i nierówności wykładnicze	400
*7. Równania i nierówności logarytmiczne	404
8. Powtórzenie	409

Odpowiedzi	418
------------	-----

Skorowidz	454
-----------	-----

Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9	455
--	-----

Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	456
---	-----

* Temat wykraczający poza podstawę programową.

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy drugiej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera ponad półtora tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są * lub **, zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem , natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązyanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązywane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego rozdziału uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A$; $x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$	zbiór, którego elementami są a, b, c
$\mathbf{N, Z, Q, R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$\emptyset$	zbiór pusty
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$	logarytm przy podstawie a liczby b
$\log b$	logarytm przy podstawie 10 liczby b
$a < b$ ($a > b$)	liczba a jest mniejsza (większa) od liczby b
$a \leq b$	liczba a jest nie większa, tzn. równa lub mniejsza od liczby b
$a \geq b$	liczba a jest nie mniejsza, tzn. równa lub większa od liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b \rangle$	przedział lewostronnie domknięty
$\langle a; b \rangle$	przedział prawostronnie domknięty
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D	dziedzina funkcji
ZW	zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r
$k(S, r)$	koło o środku S i promieniu r
P	pole figury
obw	obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB	odcinek o końcach A i B
$ AB $	długość odcinka AB
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a i b
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
Δ	delta; wyróżnik trójmianu kwadratowego
$\sin \alpha$	sinus kąta α
$\cos \alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg} \alpha$	tangens kąta α
$F_1 \equiv F_2$	figura F_1 jest przystająca do figury F_2
$F_1 \sim F_2$	figura F_1 jest podobna do figury F_2

Zastosowania funkcji kwadratowej

1

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- rysuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$ i podaje jej własności,
- interpretuje współczynnik a funkcji $y = ax^2$,
- rysuje wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej,
- określa własności (zbiór wartości, przedziały monotoniczności, wartość ekstremalną) funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej,
- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej na podstawie informacji o jej wykresie,
- przekształca wzór funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do ogólnej, i odwrotnie,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli,
- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej na podstawie informacji o jej wykresie.

Po tym dziale uczeń:

- określa liczbę pierwiastków równania kwadratowego na podstawie znaku wyróżnika,
- wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie różnych informacji o jej własnościach,
- rozwiązuje równania kwadratowe (w tym z wartością bezwzględną), stosując wzory Viète'a,
- rozwiązuje nierówności kwadratowe (w tym z wartością bezwzględną) zapisane w postaci iloczynowej i ogólnej,
- rozwiązuje graficznie i rachunkowo układy równań prowadzące do równań kwadratowych (w tym z wartością bezwzględną),
- wyznacza punkty wspólne paraboli i prostej,
- rysuje wykresy funkcji kwadratowych (w tym z wartością bezwzględną) i opisuje ich własności,
- analizuje równania i nierówności kwadratowe z parametrami: wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów, określa warunki, dla których rozwiązania mają żadaną własność,
- rozwiązuje zadania tekstowe prowadzące do szukania wartości ekstremalnych funkcji kwadratowej.

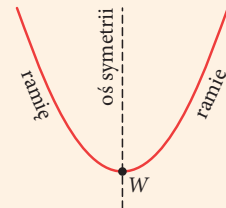
Uwagi metodyczne

Tematy „Warto powtórzyć” obejmują treści zawarte w programie pierwszej klasy szkoły ponadpodstawowej, których powtórzenie jest niezbędne do opanowania omawianych zagadnień. To od nauczyciela zależy, czy przeznaczy na te treści oddzielne lekcje, omówi je z grupą uczniów na zajęciach wyrównawczych, czy zada je jako pracę domową.

1. Warto powtórzyć – własności funkcji, funkcja kwadratowa

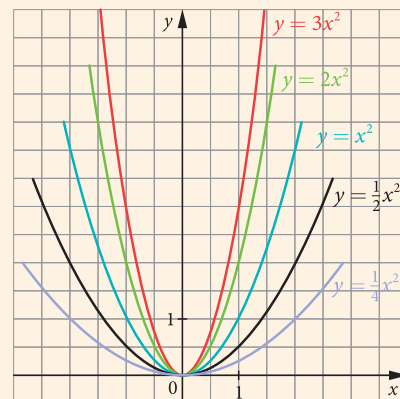
Parabola o równaniu $y = x^2$ jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. W dalszych rozważaniach tych zapisów na ogół nie będziemy rozróżniać.

Parabola ma dwa **ramiona** oraz **wierzchołek**, czyli punkt przecięcia paraboli z jej osią symetrii (na rysunku oznaczony literą W).



Własności funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a > 0$:

- zbiorem wartości jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$,
- funkcja ma wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$,
funkcja nie ma wartości największej,
- miejscem zerowym jest $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$, więc wykres znajduje się w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych,
- w przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$ jest rosnąca, zatem funkcja nie jest monotoniczna,
- osią symetrii wykresu jest oś y ,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < 0$ nie ma rozwiązań,
dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m > 0$ ma dwa rozwiązania.



Wykres funkcji $y = -ax^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = ax^2$ względem osi x .

Wierzchołkiem każdej paraboli o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$, jest początek układu współrzędnych.

Definicja

Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x w postaci kanonicznej.

Parabola o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$, ma taki sam kształt jak parabola $y = ax^2$, a jej wierzchołkiem jest punkt $W = (p, q)$.

Przykład 1

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $W = (3, -1)$ przechodząca przez punkt $P = (1, 7)$. Napiszemy wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

Wiemy, że $W = (3, -1)$, zatem do postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ podstawiamy $p = 3$, $q = -1$.

$$f(x) = a(x - 3)^2 - 1$$

$$7 = a(1 - 3)^2 - 1$$

← punkt P należy do wykresu funkcji

$$8 = 4a, \text{ więc } a = 2$$

Odp.: $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1$

Definicja

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x w postaci ogólnej.

Twierdzenie

- Postacią kanoniczną funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

- Wierzchołek paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ma współrzędne:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

Przykład 2

Wyznamy współrzędne wierzchołka oraz równanie osi symetrii wykresu funkcji $f(x) = 3x^2 + 30x + 73$.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji jest parabola. Aby rozwiązać zadanie, przekształcimy wzór funkcji dany w postaci ogólnej $f(x) = 3x^2 + 30x + 73$ do postaci kanonicznej.

Uwagi metodyczne

Zadania z tematu „Warto powtórzyć” pozwalają utrwalić umiejętność odczytywania własności funkcji na podstawie jej wykresu oraz wzoru. Dzięki temu uczniowie będą mogli sobie przypomnieć takie pojęcia jak: dziedzina, zbiór wartości, wartość największa i wartość najmniejsza, miejsca zerowe, zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$, przedziały monotoniczności oraz liczba rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m . Jeżeli uczniowie nie pamiętają potrzebnych definicji ani ich geometrycznej interpretacji, polećmy im, aby w domu **samodzielnie** powtórzyli materiał z odpowiednich fragmentów podręcznika. Nie uczmy wszystkiego od początku (nawet w bardzo słabej klasie)! Jest to generalna uwaga, ponieważ często uczniowie oczekują lub wręcz się domagają ponownego wykładu na temat treści, które już dawno powinni opanować. Jeżeli będziemy ulegać takim żądaniom, nie wdrożymy uczniów do samodzielnej pracy.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$,

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{7}$

1.2. $D = (-6; 7)$, $ZW = (-2; 4)$; wartość największa: 4 dla $x = 7$, brak wartości najmniejszej; miejsca zerowe: $-4, 2, 6$;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; 2) \cup (6; 7)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -4) \cup (2; 6)$;

funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-6; -2)$ i $(4; 7)$, malejąca w przedziale $(-2; 4)$;
 $f(x) = m$ ma:
 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$,
 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; -1) \cup (2; 4)$,
 2 rozwiązania dla $m \in \{-1, 2\}$,
 3 rozwiązania dla $m \in (-1; 2)$

1.3. $D = \langle 2; 12 \rangle$, $ZW = \langle -4; 4 \rangle$

1.4. wartość największa: 7 dla $x = -2$, wartość najmniejsza: -8 dla $x = -11$

I sposób

Stosujemy metodę nazywaną dopełnianiem do kwadratu.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 30x + 73 &= 3(x^2 + 10x) + 73 = 3\left[(x^2 + 2 \cdot 5x + 25) - 25\right] + 73 = \\ &= 3\left[(x + 5)^2 - 25\right] + 73 = 3(x + 5)^2 - 75 + 73 = 3(x + 5)^2 - 2 \end{aligned}$$

Zatem $f(x) = 3(x + 5)^2 - 2$,

czyli $x_w = -5$, $y_w = -2$, a osią symetrii wykresu jest prosta $x = -5$.

II sposób

Korzystamy ze wzorów podanych w twierdzeniu. Mamy $a = 3$, $b = 30$, $c = 73$.

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{6} = -5$$

Aby obliczyć y_w , albo wyznaczamy wartość $\Delta = b^2 - 4ac = 900 - 12 \cdot 73 = 24$

i wówczas $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-24}{4 \cdot 3} = -2$,

albo znajdujemy $y_w = f(x_w) = f(-5) = 3 \cdot 25 - 150 + 73 = -2$.

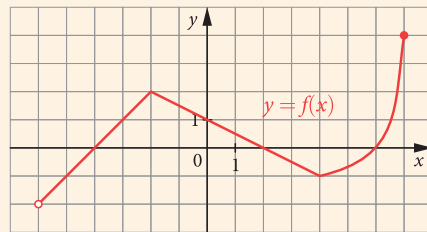
Odp.: Ośią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta $x = -5$, wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-5, -2)$.

Zadania

1.1. Dane są zbiór $A = \left\{-1, 0, \frac{3}{2}, 5\right\}$ i funkcja $f(x) = \frac{2x}{x-5}$. Oblicz wartość funkcji f dla tych liczb ze zbioru A , które należą do dziedziny funkcji f .

1.2. Odczytaj z wykresu funkcji f :

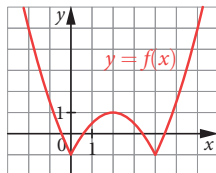
- dziedzinę D i zbiór wartości ZW ,
- wartości największą i najmniejszą,
- miejsca zerowe,
- przedziały monotoniczności,
- zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$,
- liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .



1.3. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle 0; 10 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -3; 5 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x-2) - 1$.

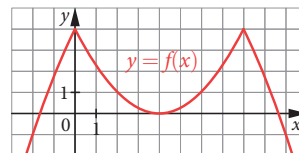
1.4. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 3$ i przyjmuje wartość najmniejszą równą -11 dla $x = -6$. Podaj wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji $f(x+5) + 3$ oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

1.15. $m \in (-1; 1)$



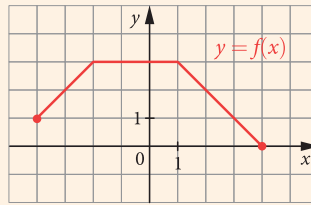
1.16. $ZW = (-\infty; 4)$,

rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $\langle 4; 8 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle 0; 4 \rangle$ i $\langle 8; \infty \rangle$



1.5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = g(x)$.

- a) $g(x) = -f(x)$ d) $g(x) = f(x - 3) + 2$
 b) $g(x) = f(x) - 1$ e) $g(x) = f(-x) - 3$
 c) $g(x) = |f(x + 4)|$ f) $g(x) = |f(x) - 2|$



1.6. Przedstaw podane wyrażenie w postaci iloczynu. Wykorzystaj wzory skróconego mnożenia.

- a) $(b - 3)^2 - 1$ b) $p^2 - 4p + 4 - s^2$ c) $w^2 - 4z^2 + 12z - 9$

1.7. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x}}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{6-2x}}$

1.8. Podaj zbiór wartości i określ przedziały monotoniczności funkcji f .

- a) $f(x) = -(x + 1)^2 - 11$ b) $f(x) = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$ c) $f(x) = -\sqrt{5}\left(x + \sqrt{3}\right)^2$

1.9. Wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (-3, 1)$ przechodząca przez punkt $A = (1, 5)$. Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej.

1.10. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = -x^2 - x$ b) $f(x) = -9x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = 0,25x^2 + 0,5x + 0,75$

1.11. O funkcji kwadratowej f wiadomo, że: jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 3]$, osią symetrii wykresu jest prosta o równaniu $x = 2$, wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 1)$. Napisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

1.12. Narysuj wykres funkcji.

- a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ b) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$

1.13. Dla jakiej wartości m równanie ma jedno rozwiązanie?

- a) $57x^2 - 11 = m$ b) $7(x + 11)^2 + 32 = m$ c) $-3x^2 - x + 1 = m$

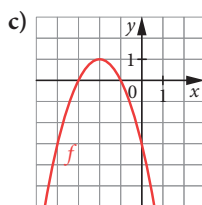
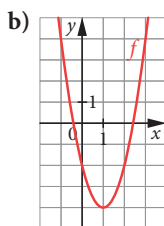
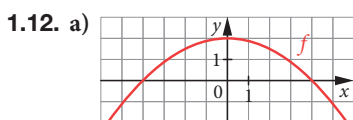
1.14. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ należą punkty $K = (-3, -8)$ oraz $M = (6, 19)$. Wyznacz współczynniki b i c .

1.15. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2\right| - 1$. Dla jakich wartości m równanie $\left|\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2\right| - 1 = m$ ma 4 rozwiązania?

1.16. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 4 - \left|\frac{1}{4}x^2 - 2x\right|$. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności tej funkcji.

- 1.10.** a) $W = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ b) $W = \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ c) $W = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

1.11. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

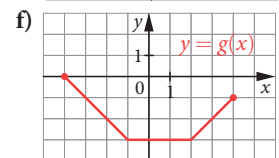
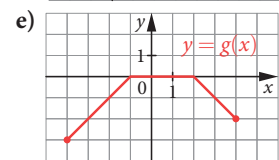
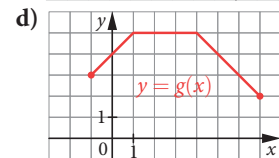
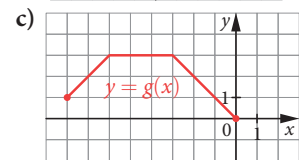
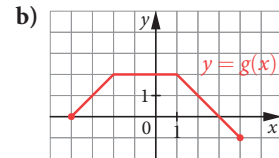
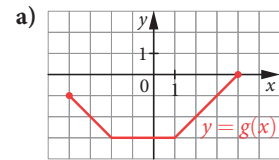


- 1.13.** a) $m = -11$ b) $m = 32$

c) $m = \frac{13}{12}$

- 1.14.** $b = 2, c = -5$

1.5.



- 1.6.** a) $(b - 4)(b - 2)$

b) $(p - s - 2)(p + s - 2)$

c) $(w - 2z + 3)(w + 2z - 3)$

- 1.7.** a) $D = \langle 2; \infty \rangle$

b) $D = (-\infty; 1)$

c) $D = \langle -2; 3 \rangle$

1.8. a) $ZW = (-\infty; -11)$,
rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$,
malejąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$

b) $ZW = \left\langle \frac{3}{8}; \infty \right\rangle$,

malejąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$,

rosnąca w przedziale $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

c) $ZW = (-\infty; 0)$,

rosnąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3})$,

malejąca w przedziale $\langle -\sqrt{3}; \infty \rangle$

1.9. $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1 =$
 $= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$

Uwagi metodyczne

Proponujemy przeznaczyć aż cztery godziny lekcyjne na szukanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej, czyli tzw. wielkości ekstremalnych. Ten temat jest ważny ze względu na szerokie zastosowanie praktyczne, co pokazujemy w przykładach i zadaniach.

◀2.5. Oblicz, na jaką wysokość wzniesie się piłka tenisowa odbita rakietą pionowo z wysokości 1 m, z prędkością początkową 20 m/s. Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie 1.

Odp.: 21 m

2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- odczytywanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej określonej w przedziale domkniętym

Przykład 1 ◀ zad. 2.5

Kowboje na Dzikim Zachodzie popisywali się strzelaniem do rzuconej pionowo w górę monety. Sekret tej sztuki polegał na tym, by trafić monetę w momencie, gdy była w najwyższym punkcie i przez chwilę jak gdyby zatrzymywała się w powietrzu. Z fizyki wiadomo, że ruch monety w górę jest jednostajnie opóźniony, a osiąganą przez nią wysokość (jeśli pominiemy opór powietrza) obliczymy ze wzoru:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Przyjmijmy, że: $h_0 = 1$ m – wysokość, z jakiej wyrzucona była moneta,

$v_0 = 6$ m/s – prędkość początkowa monety,

$g = 10$ m/s² – przyspieszenie ziemskie.

Wtedy, po podstawieniu danych i uporządkowaniu wzoru, mamy:

$$h(t) = -5t^2 + 6t + 1$$

Obliczymy, po jakim czasie moneta osiągnie największą wysokość i jaka ona będzie.

Dziedziną funkcji jest (mierzony w sekundach) czas trwania eksperymentu, czyli przedział od $t = 0$ do $t = t_k$ – chwili, w której moneta znajdzie się na ziemi.

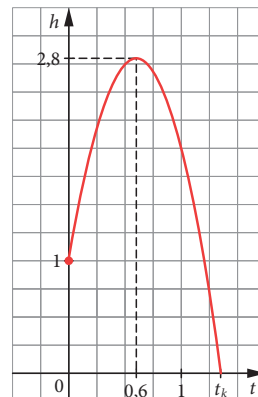
Wykresem funkcji jest parabola skierowana ramionami do dołu.

Znajdźmy współrzędne (t_w, h_w) wierzchołka.

$$t_w = \frac{-6}{-10} = 0,6$$

$$h_w = h(t_w) = h(0,6) = -5(0,6)^2 + 6 \cdot 0,6 + 1 = 2,8$$

Moneta osiągnie najwyższe położenie równe 2,8 m po upływie 0,6 s.

**ZZ i MKP**

tematy 1.8, 1.9

Multiteka

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Istotnym zastosowaniem matematyki jest rozwiązywanie problemów dotyczących **optymalizacji**. Funkcje opisujące rzeczywistość są na ogół bardzo skomplikowane, ale spróbujemy zilustrować to zagadnienie za pomocą uproszczonego modelu.

Jednym z zadań konstruktora mostu jest pogodzenie sprzecznych warunków – jak najlepszej jakości materiałów i jak najniższych kosztów budowy. Ponadto przyszli użytkownicy chcą, aby most się nie zawalił i stał wiele lat. Wszystkie te uwarunkowania są powiązane. Załóżmy, że konstruktorowi udało się przedstawić koszty budowy jako funkcję rodzaju materiałów. Aby wyznaczyć dziedzinę, musiał uwzględnić zadaną wytrzymałość planowanego mostu. Teraz powinien znaleźć argument, dla którego funkcja osiąga wartość najmniejszą. Jeśli natomiast wyznaczył funkcję opisującą wytrzymałość w zależności od materiałów, to w dziedzinie uzależnionej od kosztów musi szukać argumentu, dla którego wartość jest największa.

Funkcja kwadratowa jest jedną z tych funkcji, dla których zadanie wyznaczenia wartości największej lub najmniejszej (tzw. **wielkości ekstremalnych**) przy ustalonej dziedzinie jest proste.

Kowboje, rzecz jasna, nie wykonywali takich obliczeń jak w przykładzie 1 – swoje umiejętności nabywali dzięki praktyce. Również starożytni Rzymianie, którzy zbudowali jedne z najdłużej istniejących mostów, nie potrzebowali do tego badania funkcji. My jednak, żeby choć trochę zbliżyć się do aktualnych zastosowań matematyki, zajmmy się znajdowaniem wartości ekstremalnych różnych funkcji kwadratowych.

Przykład 2 ◀ zad. 2.6

Poszukamy wartości największej i wartości najmniejszej funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 5$ określonej w różnych dziedzinach D oraz wskażemy argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie

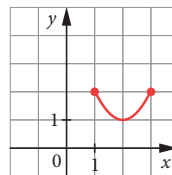
a) $D = \langle 1; 4 \rangle$

Wykres funkcji jest fragmentem paraboli o wierzchołku (x_w, y_w) . Wartości ekstremalne funkcja może przyjąć albo dla argumentu x_w , albo na końcach przedziału $\langle 1; 4 \rangle$. Współrzędne wierzchołka to $x_w = 2$ i $y_w = f(2) = 1$. Natomiast $f(1) = 2$ i $f(4) = 5$. Zatem najmniejsza wartość funkcji to 1, dla $x = 2$; największa wartość funkcji to 5, dla $x = 4$.



b) $D = \langle 1; 3 \rangle$

Dla takiej dziedziny $x_w \in D$ oraz $f(1) = 2$ i $f(3) = 2$. Najmniejszą wartością funkcji jest liczba 1, przyjmowana dla $x = 2$. Natomiast wartość największą, równą 2, funkcja przyjmuje dla dwóch argumentów: $x = 1$ oraz $x = 3$.



◀ 2.6. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w podanym przedziale. Podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = 2x^2 - 16x + 25$, $\langle 2; 5 \rangle$

b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 6$, $\langle -1; 2 \rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$, $\langle -8; -6 \rangle$

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 9$, $\langle -1; 3 \rangle$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $\langle 1; 5 \rangle$

f) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$, $\langle -3; \infty \rangle$

Odp.: a) wartość najmniejsza: -7 dla $x = 4$,
wartość największa: 1 dla $x = 2$

b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -1$,
wartość największa: 9 dla $x = 1$

c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -6$,
wartość największa: 7 dla $x = -8$

d) wartość najmniejsza: -14 dla $x = -1$,
wartość największa: -5 dla $x = 2$

e) wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$,
wartość największa: 3 dla $x = 1$

f) brak wartości najmniejszej,
wartość największa: 3 dla $x = -1$

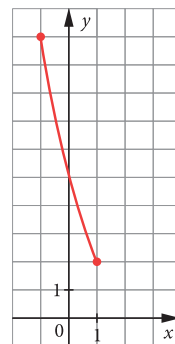
c) $D = \langle -1; 1 \rangle$

Teraz $x_w \notin D$.

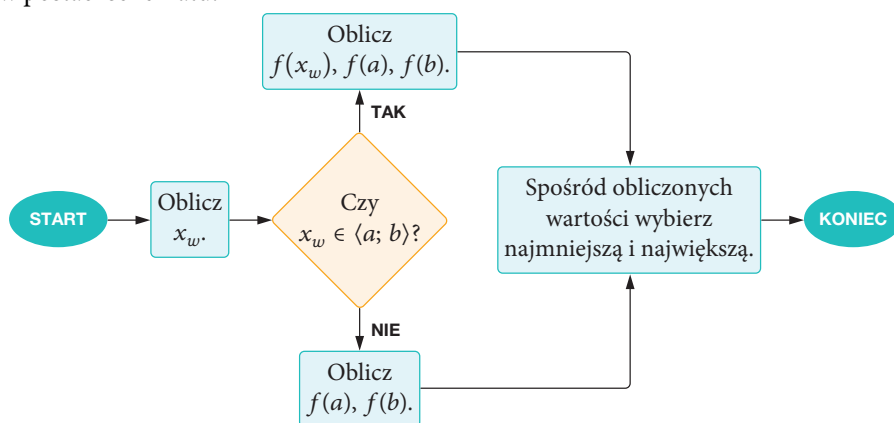
Obliczymy wartości funkcji na końcach dziedziny.

$$f(-1) = 10$$

$$f(1) = 2$$

Najmniejszą wartością funkcji jest liczba 2, przyjmowana dla argumentu $x = 1$.Największą wartość, równą 10, funkcja przyjmuje dla $x = -1$.

Jeżeli ograniczymy dziedzinę funkcji kwadratowej $y = f(x)$ do przedziału domkniętego $\langle a; b \rangle$, to przyjmie ona swoje wartości – największą i najmniejszą – albo na końcach przedziału, albo dla x_w . Metodę znajdowania tych wartości można przedstawić w postaci schematu.

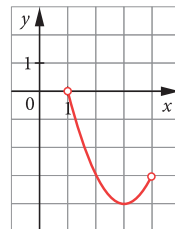
**Przykład 3** ◀ zad. 2.7

Znajdziemy wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $g(x) = x^2 - 6x + 5$ o dziedzinie $D = (1; 4)$.

RozwiązanieParabola $y = x^2 - 6x + 5$ ma wierzchołek w punkcie (x_w, y_w) .

$$x_w = 3 \in D, \text{ zatem } y_w = g(3) = -4$$

Punkty $(1, 0)$ i $(4, -3)$ nie należą do wykresu funkcji, ponieważ $1 \notin D$ i $4 \notin D$. Funkcja maleje w przedziale $(1; 3)$ i rośnie w przedziale $(3; 4)$, więc $y = -4$ jest najmniejszą wartością funkcji.

**Odp.:** Najmniejsza wartość: -4 , dla $x = 3$. Wartości największej funkcja nie ma.

◀2.7. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ w podanej dziedzinie D , o ile funkcja przyjmuje te wartości.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$ $D = (-2; 1)$

b) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ $D = (-4; 1)$

c) $f(x) = 3x^2 + 12x - 7$ $D = (-4; 0)$

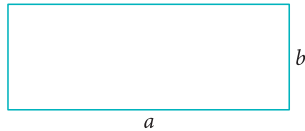
d) $f(x) = -x^2 + 4x + 122$ $D = (-5; 2)$

Odp.: a) brak wartości największej i wartości najmniejszejb) wartość największa: 14 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszejc) wartość najmniejsza: -19 dla $x = -2$, brak wartości największej

d) brak wartości największej i wartości najmniejszej

Przykład 4 ◀ zad. 2.20

Z drutu długości 20 cm budujemy prostokątną ramkę. Zbadamy pole tworzonego prostokąta jako funkcję długości jednego z jego boków. Sprawdzimy, czy wśród tak powstających prostokątów jest taki, który ma największe pole.

**Rozwiązanie**

Pole prostokąta o bokach a, b wyraża się wzorem $P = a \cdot b$, zatem zależy od dwóch zmiennych – długości dwóch sąsiednich boków.

Z treści zadania wiemy jednak, że $2a + 2b = 20$. Możemy więc uzależnić jedną zmienną od drugiej, np. $a = 10 - b$.

Wówczas, po podstawieniu ostatniej równości do wzoru na pole prostokąta, otrzymamy zależność pola tylko od jednej zmiennej.

$$P(b) = (10 - b) \cdot b$$

$$P(b) = -b^2 + 10b$$

Zastanówmy się, jaka jest dziedzina tej funkcji.

Długości obydwu boków muszą być liczbami dodatnimi:

$$b > 0 \text{ i } a = 10 - b > 0$$

Zatem $b \in (0; 10)$ i ten przedział jest dziedziną D .

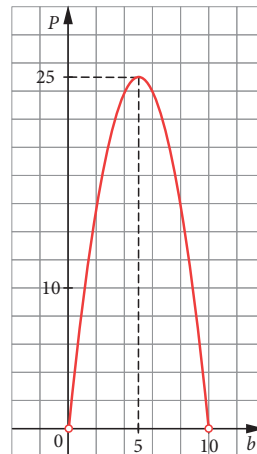
Oznaczmy jako b_w pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji P .

$$b_w = 5 \in (0; 10)$$

$$P(5) = -25 + 50 = 25$$

Funkcja P ma wartość największą, gdy $b = 5$.

Wówczas $a = 10 - 5 = 5$.



Punkty $(0, 0)$ oraz $(10, 0)$ nie należą do wykresu, ponieważ 0 oraz 10 nie należą do dziedziny funkcji. Interpretacja geometryczna tego faktu jest następująca: gdyby b było równe 0, to zamiast prostokątnej ramki mielibyśmy dwa „sklejone” odcinki, każdy długości 10; jeżeli z kolei mielibyśmy $b = 10$, to sytuacja byłaby analogiczna – odcinek a miałby długość 0 i znów z prostokąta zrobiłby się odcinek. W jednym i drugim wypadku pole takiej „ramki” jest równe 0.

Odp.: Ze wszystkich prostokątów o obwodzie 20 cm największe pole ma kwadrat o boku 5 cm.

Uwagi metodyczne

Bardzo proste zadanie z przykładu 4. warto wykorzystać do przedstawienia problemu w praktyce, zwłaszcza do wyznaczenia dziedziny badanej funkcji. Można poprosić uczniów o przyniesienie giętkiego drutu długości 20 cm, aby mogli na lekcji tworzyć z niego różne prostokąty. Odpowiedź na pytanie o zakres zmienności jednego z boków powinna być wówczas dużo łatwiejsza. Tu mała dygresja. Mamy być może inne (niż większość autorów) zdanie na temat pokazywania zastosowań matematyki w szkolnych podręcznikach. Starannie wystrzegamy się podawania wymyślonych, sztucznych przykładów. Wolimy obejść się bez nich i na przykład ekstrema badać na mniejszej liczbie zadań tekstowych. Autentyczne zastosowania matematyki wydają się nam o wiele za trudne, aby ćwiczyć je w szkole, nawet ponadpodstawowej.

◀2.20. Prostokąt ma boki długości 16 cm i 10 cm. Dłuższy bok zmniejszamy o x cm, a krótszy zwiększamy o x cm. Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

Odp.: $x = 3$

◀2.21. Bilet wstępu do muzeum kosztuje 20 zł. Przygotowano specjalną ofertę dla grup liczących powyżej 15 osób. Grupa 16-osobowa płaci 19,50 zł za jeden bilet, grupa 17-osobowa płaci 19 zł za jeden bilet, grupa 18-osobowa płaci 18,50 zł za jeden bilet itd. Grupy nie mogą być liczniejsze niż 35 osób. Jak liczna grupa zapłaci najwięcej za bilety?

Odp.: 27 lub 28 osób

◀2.22. Fotograf zrobił zdjęcie klasie liczącej 33 uczniów. Cenę zdjęcia określił następująco: jeżeli odbitkę zamówi nie więcej niż 10 osób, to cena będzie równa 8 zł. Zamówienie zdjęcia przez każdą następną osobę spowoduje, że każdy zamawiający będzie płacić o 10 groszy mniej. Zakładając, że zrobienie odbitki kosztuje fotografa 1 zł, oblicz, przy jakiej liczbie zamówień jego zysk będzie największy. Ile ten zysk będzie równy?

Odp.: Zysk będzie największy, gdy wszyscy zamówią zdjęcia; wyniesie 155 zł 10 gr.

Przykład 5 ◀ zad. 2.21, 2.22

Grupa studentów planuje wyjazd do Francji na narty. Autokar, który chcą wynająć, zabiera maksymalnie 40 pasażerów. Najwyższą ceną, jaką każdy z uczestników może zapłacić za przejazd, jest 450 zł. Właścicielka autokaru zgadza się go wynająć po 450 zł od osoby, jeżeli pojedzie co najmniej 20 osób. Przedstawiciel grupy uzgadnia z nią, że jeżeli zbierze więcej niż 20 chętnych na wyjazd, to przy każdej kolejnej osobie cena wynajmu będzie mniejsza o 10 zł dla każdego uczestnika. Zatem, jeżeli pojedzie tylko 20 osób, to właścicielka autokaru otrzyma:

$$20 \cdot 450 \text{ zł} = 9000 \text{ zł, jeżeli 21 osób, to } 21 \cdot 440 \text{ zł} = 9240 \text{ zł itd.}$$

Jeżeli x oznacza liczbę uczestników, o którą zwiększy się 20-osobowa grupa, to:

$20 + x$ jest liczbą wyjeżdżających studentów,

$450 - 10x$ jest ceną przejazdu dla każdego z nich,

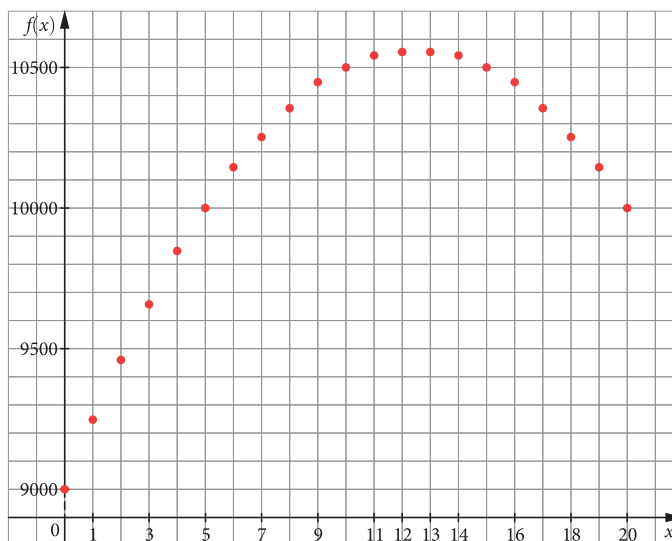
a właścicielka autokaru otrzyma:

$$(20 + x)(450 - 10x) \text{ zł za jego wynajęcie.}$$

Przyjmijmy, że $f(x) = (20 + x)(450 - 10x)$, gdzie $x \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, i poszukajmy odpowiedzi na następujące pytania:

- Jaka liczba uczestników wyjazdu zapewni właścicielce autokaru najwyższą kwotę?
- Jaką maksymalną kwotę może otrzymać?
- Czy umowa ze studentami jest dla właścicielki korzystna?

Narysujmy wykres funkcji f .



Wartość największą funkcja f osiąga dla $x_w = 12,5$. Ta liczba nie należy do dziedziny, więc na pierwsze pytanie otrzymujemy dwie odpowiedzi.

Właścicielka autokaru otrzyma najwięcej pieniędzy dla $x = 12$ lub $x = 13$, czyli gdy autokarem będzie jechało 32 lub 33 uczestników.

Ta maksymalna kwota to: $32 \cdot 330 \text{ zł} = 10\,560 \text{ zł}$ (albo $33 \cdot 320 \text{ zł} = 10\,560 \text{ zł}$).

Zauważmy, że $f(0) = 9000$, a $f(20) = 40 \cdot 250 = 10\,000$.

Zatem umowa ze studentami jest dla właścicielki korzystna niezależnie od liczby dodatkowych pasażerów.



Przykład 6

Kajetan, kierownik wyprawy w Himalaje, zatrudniał tragarzy do niesienia bagażu. Umówił się z 10 osobami, że każda z nich otrzyma 800 dolarów za wykonaną pracę. Ładunek okazał się na tyle ciężki, że tragarze zaprotestowali. Trzeba było zatrudnić dodatkowe osoby. Według nowej umowy każdy tragarz miał otrzymywać o 40 dolarów mniej przy zwiększanej o każdą następną osobę liczbie zatrudnionych. Ostatecznie okazało się, że trzeba było zapłacić najmniej korzystną dla wyprawy kwotę. Jaką łączną liczbę tragarzy przyjął Kajetan?



Rozwiązanie

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę dodatkowo zatrudnionych tragarzy, to:

- $10 + x$ jest liczbą wszystkich zatrudnionych,
- $800 - 40x$ jest zarobkiem każdego z nich.

Koszt wynajęcia tragarzy jest więc równy $(10 + x)(800 - 40x)$ dolarów. Zmienna x musi spełniać dwa warunki:

- $x \geq 0$
- $800 - 40x > 0$ ← zarobek każdego tragarza musi być większy od zera

Zatem dziedziną funkcji $f(x) = 40(10 + x)(20 - x)$ jest zbiór liczb naturalnych z przedziału $\langle 0; 20 \rangle$.

Wartość największą funkcja f przyjmuje dla:

$$x_w = 5$$

Koszt niesienia bagażu był najwyższy przy pięciu dodatkowo przyjętych tragarzach, czyli Kajetan zatrudnił ich w sumie piętnastu i zapłacił:

$$f(15) = 15 \cdot 600 = 9000 \text{ (dolarów)}$$

Odp.: 15 tragarzy.

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. F, F, P

2.2. F, P, P

2.3. P, P, P

2.4. F, P, F

2.5. 21 m

2.6. a) wartość najmniejsza: -7 dla $x = 4$,
 wartość największa: 1 dla $x = 2$
 b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -1$,
 wartość największa: 9 dla $x = 1$
 c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -6$,
 wartość największa: 7 dla $x = -8$
 d) wartość najmniejsza: -14 dla $x = -1$,
 wartość największa: -5 dla $x = 2$
 e) wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$,
 wartość największa: 3 dla $x = 1$ lub $x = 5$
 f) brak wartości najmniejszej,
 wartość największa: 3 dla $x = -1$

2.7. a) brak wartości największej i wartości najmniejszej
 b) wartość największa: 14 dla $x = -3$,
 brak wartości najmniejszej
 c) wartość najmniejsza: -19 dla $x = -2$,
 brak wartości największej
 d) brak wartości największej i wartości najmniejszej

W każdym z zadań 2.1–2.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

2.1. Dana jest funkcja $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$. Funkcja f ma wartość największą w dziedzinie D , gdy

A. $D = (0; 1)$. B. $D = (-3; -2)$. C. $D = (2; 3)$.

2.2. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

A. W przedziale $\langle -3; 0 \rangle$ funkcja f ma wartość najmniejszą równą 1 .

B. W przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ funkcja f ma wartość najmniejszą równą 1 .

C. W przedziale $\langle -3; 3 \rangle$ funkcja f ma wartość najmniejszą równą $\frac{2}{3}$.

2.3. Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = kx^2 - 2kx$

A. dla $k = 3$ ma wartość najmniejszą równą -3 .

B. dla $k = -7$ ma wartość największą równą 7 .

C. dla każdego $k > 0$ ma wartość najmniejszą równą $-k$.

2.4. Suma liczb a i b jest równa 24 . Iloczyn tych liczb

A. nie przekracza 120 .

B. jest największy, gdy $a = b$.

C. jest najmniejszy, gdy $a = b$.

2.5. Oblicz, na jaką wysokość wzniesie się piłka tenisowa odbita raketą pionowo z wysokości 1 m, z prędkością początkową 20 m/s. Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie 1.

2.6. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w podanym przedziale. Podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = 2x^2 - 16x + 25$ $\langle 2; 5 \rangle$ d) $f(x) = -x^2 + 4x - 9$ $\langle -1; 3 \rangle$

b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 6$ $\langle -1; 2 \rangle$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ $\langle 1; 5 \rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$ $\langle -8; -6 \rangle$ f) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ $\langle -3; \infty \rangle$

2.7. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ w podanej dziedzinie D , o ile funkcja przyjmuje te wartości.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$ $D = (-2; 1)$ c) $f(x) = 3x^2 + 12x - 7$ $D = (-4; 0)$

b) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ $D = (-4; 1)$ d) $f(x) = -x^2 + 4x + 122$ $D = (-5; 2)$

2.8. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{dla } x < 3 \\ -x^2 + 10x - 15 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą tej funkcji oraz argumenty, dla których są one przyjmowane w podanym zbiorze D .

a) $D = \langle -13; 7 \rangle$ b) $D = \mathbb{N}$ c) $D = \langle -2; 8 \rangle$ d) $D = \langle 7; 8 \rangle$

2.9. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, która przyjmuje wartość najmniejszą równą -7 dla $x = 4$, a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 25)$.

2.10. Wykresem funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (-4, -1)$. Oblicz b i c .

2.11. Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola przechodząca przez punkty $(-3, -3)$ i $(0, -9)$. Wierzchołek paraboli jest punktem, którego pierwsza współrzędna jest równa -2 . Wyznacz współczynniki a, b i c .

2.12. Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, których iloczyn jest największy.

2.13. Liczbę 30 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza.

2.14. Oblicz największy iloczyn takich dwóch liczb, których suma jest równa
a) 22. b) 50. c) m .

2.15. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych różniących się o 10?

2.16. Liczbę 6 rozłóż na sumę takich trzech składników, by pierwszy był dwa razy większy od drugiego i by suma kwadratów wszystkich trzech składników była możliwie najmniejsza.

2.17. Liczbę 24 rozłóż na sumę takich czterech składników, by pierwszy był większy od drugiego o 1, drugi był większy od trzeciego o 1 i by suma kwadratów wszystkich czterech składników była możliwie najmniejsza.

2.18. Liczbę a rozłóż na sumę takich dwóch składników, aby suma kwadratu pierwszego składnika i połowy kwadratu drugiego składnika była możliwie najmniejsza.

2.8. a) wartość najmniejsza: 0 dla $x = -3$,
wartość największa: 10 dla $x = -13$ lub $x = 5$
b) brak wartości najmniejszej, wartość największa: 10 dla $x = 5$
c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -2$,
wartość największa: 10 dla $x = 5$
d) wartość najmniejsza: 1 dla $x = 8$,
wartość największa: 6 dla $x = 7$

2.9. $a = 2, b = -16, c = 25$

2.10. $b = 4, c = 7$

2.11. $a = -2, b = -8, c = -9$

2.12. $100 = 50 + 50$

2.13. $30 = 15 + 15$

2.14. a) 121 **b)** 625 **c)** $\frac{1}{4}m^2$

2.15. -25

2.16. $6 = \frac{18}{7} + \frac{9}{7} + \frac{15}{7}$

2.17. $24 = 7 + 6 + 5 + 6$

2.18. $a = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a$

2.19. Niech $a + b = 8$. Wtedy

$$b = 8 - a.$$

$$f(a) = ab = a(8 - a) = -a^2 + 8a =$$

$$= -(a^2 - 8a + 16) + 16 =$$

$$= -(a - 4)^2 + 16,$$

więc największą wartością $f(a)$ jest 16.

2.20. $x = 3$

2.21. 27 lub 28 osób

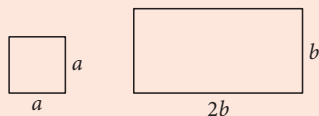
2.22. Zysk będzie największy, gdy wszyscy zamówią zdjęcia; wyniesie 155 zł 10 gr.

2.23. 35 autokarów

2.24. 12 zł; 72 osób

2.25. boisko o wymiarach $10 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ podzielone w połowie dłuższego boku

2.26.



$$4a + 6b = 12, \text{ więc}$$

$$a = \frac{12 - 6b}{4} = 3 - \frac{3}{2}b$$

$$12 - 6b > 0, \text{ więc } b < 2$$

$$P(b) - \text{suma pól}, b \in (0; 2)$$

$$P(b) = a^2 + 2b^2 = \left(3 - \frac{3}{2}b\right)^2 + 2b^2 =$$

$$= 9 - 9b + \frac{9}{4}b^2 + 2b^2 = \frac{17}{4}b^2 - 9b + 9$$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot \frac{17}{4} \cdot 9 = -72$$

$$y_w = \frac{-\Delta}{4 \cdot \frac{17}{4}} = \frac{72}{17}$$

Odp.: Największa możliwa suma pól to $\frac{72}{17}$.

D

2.19. Wykaż, że 16 jest największą wartością iloczynu dwóch liczb, których suma wynosi 8.

2.20. Prostokąt ma boki długości 16 cm i 10 cm. Dłuższy bok zmniejszamy o x cm, a krótszy zwiększamy o x cm. Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

2.21. Bilet wstępu do muzeum kosztuje 20 zł. Przygotowano specjalną ofertę dla grup liczących powyżej 15 osób. Grupa 16-osobowa płaci 19,50 zł za jeden bilet, grupa 17-osobowa płaci 19 zł za jeden bilet, grupa 18-osobowa płaci 18,50 zł za jeden bilet itd. Grupy nie mogą być liczniejsze niż 35 osób. Jak liczna grupa zapłaci najwięcej za bilety?

2.22. Fotograf zrobił zdjęcie klasie liczącej 33 uczniów. Cenę zdjęcia określił następująco: jeżeli odbitkę zamówi nie więcej niż 10 osób, to cena będzie równa 8 zł. Zamówienie zdjęcia przez każdą następną osobę spowoduje, że każdy zamawiający będzie płacił o 10 groszy mniej. Zakładając, że zrobienie odbitki kosztuje fotografa 1 zł, oblicz, przy jakiej liczbie zamówień jego zysk będzie największy. Ile ten zysk będzie równy?

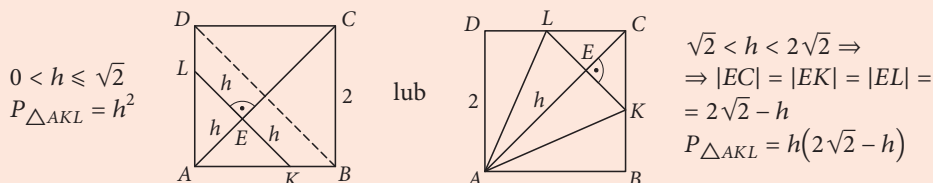
2.23. Autokary wycieczkowe pokonują trasę z Luksoru do Hurghady w strzeżonym przez wojsko konwoju, w którym nie może być więcej niż 40 pojazdów. Najmniejsza łączna kwota, którą wszyscy jadący muszą zapłacić, jest równa 6000 \$. Jeżeli konwój jest złożony z 30 autokarów, to przejazd kosztuje po 200 \$ od jednego pojazdu. Z każdym dołączonym autokarem cena spada o 5 \$ od jednego pojazdu. Jak liczna grupa autokarów jest dla konwojentów najkorzystniejsza?

2.24. Samorząd szkolny postanowił zorganizować dyskotekę dla uczniów sześciu klas. Na podstawie przeprowadzonej ankiety organizatorzy oszacowali, że przy cenie biletu wynoszącej 9 zł z każdej klasy przyjdzie 15 osób. Każdorazowe zwiększenie ceny biletu o złotówkę spowoduje, że z każdej klasy przyjdzie o 1 osobę mniej. Jaką cenę powinni ustalić, aby suma ze sprzedaży biletów była największa? Ilu osób należy się wówczas spodziewać?

2.25. Dysponujemy farbą w ilości wystarczającej do namalowania na placu 60 m linii. Za pomocą tej linii mamy wyznaczyć prostokątne, przedzielone na połowy boisko. Jaką długość i szerokość powinno mieć to boisko, aby jego powierzchnia była możliwie największa? W obliczeniach pomin wymiary malowanej linii.

* **2.26.** Suma obwodów kwadratu i prostokąta o stosunku boków 2 : 1 wynosi 12. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć suma pól tych figur?

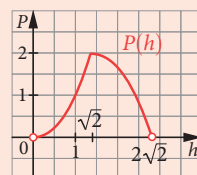
2.27. Przedstawmy treść zadania na rysunkach. Niech $h = |AE|$:



$P(h)$ – funkcja przedstawiająca pole $\triangle AKL$ w zależności od h

$$P(h) = \begin{cases} h^2 & \text{gdy } h \in (0, \sqrt{2}) \\ -h^2 + 2\sqrt{2}h & \text{gdy } h \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Jej wykres:



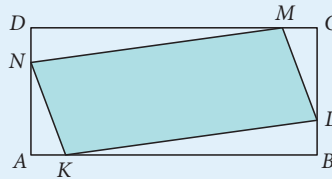
Największe pole jest dla $h = \sqrt{2}$.

- * **2.27.** W kwadrat $ABCD$ o boku 2 wpisano trójkąt równoramienny AKL w taki sposób, że wysokość trójkąta zawarta jest w przekątnej AC . Zapisz pole tego trójkąta jako funkcję jego wysokości h . Narysuj wykres tej funkcji. Wyznacz wysokość trójkąta o największym polu.
- * **2.28.** Suma obwodów kwadratu i trójkąta równobocznego wynosi 1. Jakie długości powinny mieć boki tych figur, aby suma ich pól była najmniejsza?

Prosto do matury



- Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
 - W przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -5 .
 - W przedziale $\langle 1; 10 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 4 .
 - W przedziale $\langle -1; 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 7 .
- Wyznacz wartości: najmniejszą oraz największą funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x + 2$ w przedziale $\langle 0; 10 \rangle$.
- Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych należących do przedziału $\langle -40; 40 \rangle$ i różniących się o 12 ?
- Prostokąt $ABCD$ ma boki długości $|AB| = 36$ cm i $|BC| = 16$ cm. Punkty K, L, M, N położone są na bokach prostokąta $ABCD$ w taki sposób, że $|AK| = |BL| = |CM| = |DN| = a$ cm. Dla jakiej wartości a pole czworokąta $KLMN$ jest najmniejsze?



2.27. Patrz s. 20.

2.28. b – długość boku kwadratu
 $3a + 4b = 1$,

$$\text{więc } b = \frac{1-3a}{4}, \quad 1-3a > 0$$

$P(a)$ – suma pól, $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{aligned} P(a) &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + b^2 = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1-3a}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1-6a+9a^2}{16} = \\ &= \frac{1}{16} \left[(4\sqrt{3}+9)a^2 - 6a + 1 \right] \end{aligned}$$

$P(a)$ jest najmniejsze, gdy

$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{6}{2(4\sqrt{3}+9)}}{1} = \\ &= \frac{3(9-4\sqrt{3})}{(9+4\sqrt{3})(9-4\sqrt{3})} = \\ &= \frac{3(9-4\sqrt{3})}{81-48} = \frac{3(9-4\sqrt{3})}{33} = \\ &= \frac{9-4\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wtedy } b &= \frac{1-3 \cdot \frac{9-4\sqrt{3}}{11}}{4} = \\ &= \frac{11-27+12\sqrt{3}}{44} = \frac{12\sqrt{3}-16}{44} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}-4}{11} \end{aligned}$$

Odp.: Bok kwadratu: $\frac{3\sqrt{3}-4}{11}$,

bok trójkąta: $\frac{9-4\sqrt{3}}{11}$.

Prosto do matury

- P, F, P
- wartość najmniejsza: -22 dla $x = 6$, wartość największa: 2 dla $x = 0$
- -36
- $a = 13$
- 8 lub 9 domów, w przypadku 9 domów po 160 zł od abonenta

Uwagi metodyczne

Bardzo ważną umiejętnością jest odczytywanie miejsc zerowych z postaci iloczynowej wielomianu, dlatego radzimy przećwiczyć je na różnych przykładach, od trójmianu $(x-3)(x+2)$ po $-3(2x+1)(\sqrt{3}-5x)$.

Od razu warto pokazać uczniom, jak się określa znak współczynnika przy najwyższej potęgę x . Będzie to później bardzo pomocne przy rozwiązywaniu nierówności.

Unikniemy w ten sposób sytuacji, w której uczniowie rozwiązywaliby nierówności kwadratowe „na okrągło”, tzn. przekształcali trójmian z postaci iloczynowej do ogólnej po to, aby zastosować wzory na pierwiastki.

Konsekwentnie trzymamy się definicji dotyczącej liczby pierwiastków – funkcja kwadratowa ma albo dwa miejsca zerowe, albo jedno miejsce zerowe, albo nie ma miejsc zerowych. Nie wprowadzamy pojęcia „dwa identyczne” (przy wyróżniku równym zero).

3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą
- zapisywanie funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej.

Zauważmy, że czynność ta to nic innego jak rozwiązywanie **równania kwadratowego** $ax^2 + bx + c = 0$. Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **pierwiastkami** tego równania.

Przykład 1 ◀ zad. 3.6

Rozwiążemy podane równanie.

a) $x^2 - 3x = 0$

c) $(x+2)^2 - 7 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $(x+5)^2 + 3 = 0$

Rozwiązanie

a) Lewą stronę równania możemy rozłożyć na czynniki: $x(x-3) = 0$.

Mamy więc $x = 0$ lub $x - 3 = 0$.

Odp.: $x = 0$ lub $x = 3$

b) Możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia i zapisać podane równanie w postaci $(x-3)^2 = 0$.

Jedynym pierwiastkiem równania jest więc liczba 3.

Odp.: $x = 3$

c) $(x+2)^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$

$$[(x+2) - \sqrt{7}] \cdot [(x+2) + \sqrt{7}] = 0$$

$$x+2 - \sqrt{7} = 0 \text{ lub } x+2 + \sqrt{7} = 0$$

Odp.: $x = -2 + \sqrt{7}$ lub $x = -2 - \sqrt{7}$

d) W równaniu $(x+5)^2 + 3 = 0$ wartość wyrażenia po lewej stronie znaku równości jest dodatnia dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Odp.: Równanie nie ma pierwiastków.

$a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Wzory skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) && \text{różnica kwadratów} \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 && \text{kwadrat różnicy} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 && \text{kwadrat sumy} \end{aligned}$$

ZZ i MKP

temat 1.1

Multiteka

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 3.6. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.

a) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$

c) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

b) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

d) $-6x^2 + 7x = 0$

Odp.: a) $x = 4$ b) $x = \frac{2}{5}$ c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{6}$

Funkcja kwadratowa może nie mieć miejsc zerowych, mieć jedno miejsce zerowe lub dwa miejsca zerowe. Zbadamy, od czego zależy wystąpienie każdej z tych sytuacji oraz wyprowadzimy wzory pozwalające obliczyć miejsca zerowe. W tym celu zapiszemy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) w postaci iloczynu. Najpierw sprowadzamy funkcję do postaci kanonicznej i wyłączamy a przed nawias:

$$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$$

Dalsze postępowanie uzależniamy od znaku Δ – wyróżnika trójmianu kwadratowego.

I. Jeżeli $\Delta > 0$, to istnieje $\sqrt{\Delta}$, więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym możemy zapisać jako różnicę kwadratów i rozłożyć na czynniki (zob. przykład 1c).

$$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$$

$$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \quad \leftarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$f(x) = a \left[x - \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x - \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]$$

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$f(x) = 0 \text{ gdy } x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ lub } x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0, \text{ czyli dla:}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ lub } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

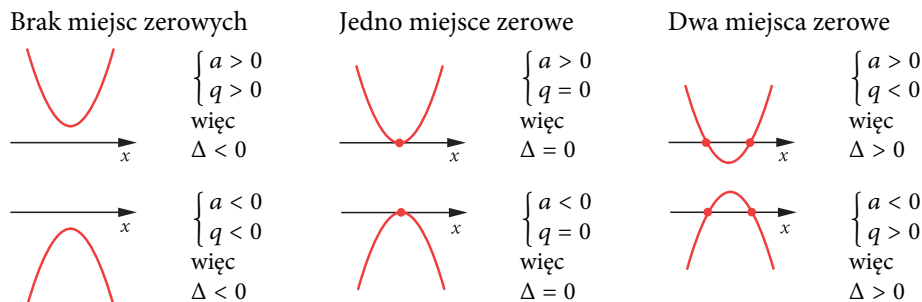
II. Jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji jest $x = \frac{-b}{2a}$ (zob. przykład 1b).

III. Jeżeli $\Delta < 0$, to $\frac{-\Delta}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią. Wyrażenie $\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}$ jest dodatnie dla każdej wartości x (zob. przykład 1d). Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Rozważymy teraz, w jaki sposób liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej wpływa na znak Δ .

Z postaci kanonicznej wynika, że $\Delta = -4aq$, gdzie q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$.

Na rysunkach przedstawione są możliwe położenia paraboli względem osi x w zależności od liczby miejsc zerowych funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

- **nie** ma pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma **jeden** pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$; wówczas $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
- ma **dwa** pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$; wówczas

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ oraz } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

W dalszych przykładach i zadaniach stosujemy oznaczenia współczynników przyjęte w treści twierdzenia.

Przykład 2

◀ zad. 3.10, 3.11

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $2x^2 - x + 1 = 0$

Współczynniki trójmianu po lewej stronie to $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$$

Ponieważ $\Delta < 0$, równanie nie ma rozwiązań.

b) $3x^2 + 2\sqrt{15}x = -5$ ← porządkujemy równanie

$$3x^2 + 2\sqrt{15}x + 5 = 0 \quad \leftarrow a = 3, b = 2\sqrt{15}, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{15})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 15 - 4 \cdot 15 = 0$$

Ponieważ $\Delta = 0$, jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Zauważmy, że jeżeli $\Delta = 0$,
to $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-b}{2a}$.

3.10. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$

b) $x^2 - 10x + 21 = 0$

c) $16x^2 + 24x + 9 = 0$

d) $3x^2 + x - 4 = 0$

e) $x^2 + x - 1 = 0$

f) $x^2 - 4x - 1 = 0$

Odp.: a) $x = -7$ lub $x = -1$

b) $x = 3$ lub $x = 7$

c) $x = -\frac{3}{4}$

d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 1$

e) $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

f) $x = 2 - \sqrt{5}$ lub $x = 2 + \sqrt{5}$

3.11. Rozwiąż równanie.

a) $-6x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 - 4x + 7 = 0$

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $4x^2 - 12x + 1 = 0$

f) $-4x^2 + 9x - 9 = 0$

Odp.: a) brak rozwiązań

b) brak rozwiązań

c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$

d) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$

e) $x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$

f) brak rozwiązań

$$c) \ x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$$

Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

Sposób oznaczania pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) symbolami x_1 oraz x_2 jest tradycyjnie przyjęty. Nieistotne jest, czy oznaczmy $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ symbolem x_1 czy x_2 (czy wprowadzimy jeszcze inne oznaczenie).



Z wyprowadzenia wzorów na pierwiastki równania kwadratowego wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można zapisać w postaci iloczynowej, gdy $\Delta \geq 0$, a mianowicie:

- jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$ i $x_0 = -\frac{b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Przykład 3 zad. 3.13

Zapiszemy podaną funkcję w postaci iloczynowej (jeżeli to możliwe).

Rozwiązanie

$$a) \ f(x) = -3x^2 + x + 2$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-6} = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-6} = 1$$

$$\text{Odp.: } f(x) = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$$

Podczas sprowadzania wzoru funkcji kwadratowej do postaci iloczynowej należy pamiętać o zapisaniu współczynnika a przed nawiasami.



$$b) \ f(x) = 2x^2 - x + 4$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$$

Odp.: Funkcja f nie ma postaci iloczynowej.

$$c) \ f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$$

$$\Delta = 24 - 24 = 0, \quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Odp.: } f(x) = 3\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$$

◀3.13. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

$$a) \ f(x) = -x^2 + 3x + 3$$

$$b) \ f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$c) \ f(x) = -6x^2 + x + 2$$

$$d) \ f(x) = 12x^2 - 12x + 3$$

Odp.: a) $f(x) =$

$$= -\left(x - \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)$$

$$b) \ f(x) = 2\left(x + 1\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$c) \ f(x) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$d) \ f(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

◀ 3.18. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$

b) $x^2 = |x - 3| - 1$

c) $x^2 + |2x - 2| = 1$

d) $x^2 - |5x - 10| = 4$

e) $x^2 + |x - 3| = 9$

f) $x^2 - |2x - 6| = 2$

Odp.: a) $x = -1$ lub $x = 1$ b) $x = -2$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ d) $x = -7$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ e) $x = -2$ lub $x = 3$ f) $x = -4$ lub $x = 2$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. P, F, P

3.2. F, F, P

Przykład 4 ◀ z. 3.18

Rozwiążemy równanie $x^2 + 3 = |2x + 1| + x$.

Rozwiązanie

$$\text{Zauważmy, że } |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{dla } x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Równanie $x^2 + 3 = |2x + 1| + x$ rozwiążemy więc oddzielnie w dwóch przedziałach.

I. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

$$x^2 + 3 = -2x - 1 + x$$

$$x^2 + x + 4 = 0$$

 $\Delta = 1 - 16 < 0$, zatem w przedziale $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ równanie nie ma rozwiązań.

II. $x \in \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$

$$x^2 + 3 = 2x + 1 + x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{2} = 1 \text{ i } 1 \in \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \text{ i } 2 \in \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$$

Odp.: $x = 1$ lub $x = 2$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

3.1. Pierwiastkami równania $-x^2 + 4x + 3 = 0$ są

A. dwie liczby niewymierne.

B. dwie liczby dodatnie.

C. liczby $2 - \sqrt{7}$ i $2 + \sqrt{7}$.3.2. Równanie $3x^2 - 2x - 1 = 0$

A. nie ma pierwiastków.

B. ma dwa pierwiastki całkowite.

C. ma dwa pierwiastki o różnych znakach.

3.3. Równanie $x^2 + 4x - k = 0$

- A. dla $k = -5$ nie ma pierwiastków.
 B. dla $k = 4$ ma jeden pierwiastek.
 C. dla $k = \sqrt{2}$ ma dwa pierwiastki.

3.4. Liczba 3 jest pierwiastkiem równania $x^2 + bx + c = 0$. Wynika stąd, że

- A. c jest liczbą całkowitą podzieloną przez 3.
 B. $b^2 \geq 4c$.
 C. Liczba $\frac{c}{3}$ też jest pierwiastkiem tego równania.

3.5. Jaką liczbę należy wpisać w miejsce $?$, aby podane równanie miało tylko jedno rozwiązanie?

- a) $x^2 - ?x + 81 = 0$ c) $-9x^2 + x + ? = 0$
 b) $x^2 - 6x + ? = 0$ d) $?x^2 - x + 16 = 0$

3.6. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.

- a) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$ c) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
 b) $25x^2 - 20x + 4 = 0$ d) $-6x^2 + 7x = 0$

3.7. Wykorzystaj postać iloczynową równania i odczytaj jego pierwiastki.

- a) $3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \pi) = 0$ c) $-2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3) = 0$
 b) $-4x(x + 3\sqrt{2}) = 0$ d) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + \sqrt{2}) = 0$

3.8. Współczynniki a , p i q funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ spełniają podane warunki. Podaj liczbę miejsc zerowych tej funkcji.

- a) $a > 0$, $q = 0$, $p \in \mathbf{R}$ c) $a < 0$, $q > 0$, $p \in \mathbf{R}$
 b) $a > 0$, $q > 0$, $p \in \mathbf{R}$ d) $a < 0$, $p > 0$, $q \in \mathbf{R}$

3.9. Bez rozwiązywania równania podaj liczbę jego pierwiastków.

- a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ c) $5x^2 + x - 1 = 0$
 b) $7x^2 - 3x + 10 = 0$ d) $-4x^2 + 20x - 25 = 0$

3.10. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 8x + 7 = 0$ d) $3x^2 + x - 4 = 0$
 b) $x^2 - 10x + 21 = 0$ e) $x^2 + x - 1 = 0$
 c) $16x^2 + 24x + 9 = 0$ f) $x^2 - 4x - 1 = 0$

3.3. P, F, P

3.4. F, P, P

3.5. a) 18 lub -18 b) 9

c) $-\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{64}$ lub 0

3.6. a) $x = 4$

b) $x = \frac{2}{5}$

c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{6}$

3.7. a) $x = -\pi$ lub $x = \frac{1}{2}$

b) $x = -3\sqrt{2}$ lub $x = 0$

c) $x = -3$ lub $x = \frac{5}{2}$

d) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{3}$

3.8. a) jedno b) zero

c) dwa d) zero lub jedno lub dwa

3.9. a) jeden b) zero

c) dwa d) jeden

3.10. a) $x = -7$ lub $x = -1$

b) $x = 3$ lub $x = 7$

c) $x = -\frac{3}{4}$

d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 1$

e) $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

f) $x = 2 - \sqrt{5}$ lub $x = 2 + \sqrt{5}$

3.11. a) brak rozwiązań**b)** brak rozwiązań

c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$

d) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$

e) $x = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

f) brak rozwiązań

3.12. a) $x = \frac{2}{5}$ lub $x = 1$

b) $x = 1$ lub $x = 2\frac{7}{8}$

c) $x = 1\frac{2}{3}$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = 2\frac{1}{3}$

3.13. a) $f(x) =$

$$= -\left(x - \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$$

b) $f(x) = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) $f(x) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $f(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

3.14. a) $f(x) = x^2 + 7x - 18$

b) $f(x) = -2x^2 + 6$

c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x^2 + \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{5}x + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{25}$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 6$

3.16. $b = 7, c = 5$

3.17. a) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = -1$

lub $x = 1$ lub $x = \sqrt{7}$

b) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -1$

lub $x = 1$ lub $x = \sqrt{2}$

c) $x = -1$ lub $x = 2$

lub $x = 3$ lub $x = 6$

d) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{2}$

e) $x = -4$ lub $x = -2$ lub $x = 0$

f) $x = -3$ lub $x = 2$

3.11. Rozwiąż równanie.

a) $-6x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 - 4x + 7 = 0$

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $4x^2 - 12x + 1 = 0$

f) $-4x^2 + 9x - 9 = 0$

3.12. Rozwiąż równanie.

a) $(3x - 5)(2x + 1) + (7x - 5)^2 = -2$

b) $(1 - 5x)(x - 2) - (2 + 3x)(2 - 3x) = 7(2x - 3)^2 + 2x$

c) $4\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - 3(x - 2)(3x + 2) = (7 - x)^2 - 16$

d) $11(3x^2 + 3) - 11 = 4(x + 5)^2 - (1 - 2x)^2$

3.13. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 3$

b) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

c) $f(x) = -6x^2 + x + 2$

d) $f(x) = 12x^2 - 12x + 3$

3.14. Dane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej f oraz jej współczynnik a . Zapisz tę funkcję w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $a = 1$ $x_1 = -9$ $x_2 = 2$

b) $a = -2$ $x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = \sqrt{3}$

c) $a = 3 - 2\sqrt{2}$ $x_0 = -0,2$

d) $a = 1$ $x_1 = 1 - \sqrt{7}$ $x_2 = 1 + \sqrt{7}$

3.15. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f . Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji f oraz punktu P przecięcia paraboli z osią y . Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

d) $f(x) = -x^2 - x + \frac{15}{4}$

3.16. Pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$ są liczby przeciwnne do pierwiastków równania $x^2 - 7x + 5 = 0$. Wyznacz b i c .**3.17.** Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 - 4| = 3$

b) $|3 - 2x^2| = 1$

c) $|x^2 - 5x| = 6$

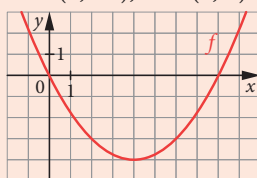
d) $|2x^2 + x| = 1$

e) $|x^2 + 4x + 2| = 2$

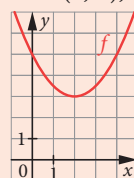
f) $|x^2 + x - 2| = 4$

3.15. a) miejsca zerowe: 0, 8;

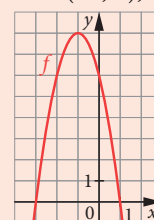
$W = (4, -4), P = (0, 0)$

**b)** brak miejsc zerowych;

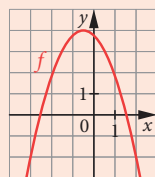
$W = (2, 3), P = (0, 5)$

**c)** miejsca zerowe: -3, 1;

$W = (-1, 8), P = (0, 6)$

**d)** miejsca zerowe: $-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$;

$W = \left(-\frac{1}{2}, 4\right), P = \left(0, 3\frac{3}{4}\right)$



3.18. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$
 b) $x^2 = |x - 3| - 1$
 c) $x^2 + |2x - 2| = 1$

- d) $x^2 - |5x - 10| = 4$
 e) $x^2 + |x - 3| = 9$
 f) $x^2 - |2x - 6| = 2$

3.19. Rozwiąż równanie.

- a) $\left| \left| x^2 - 2 \right| - 3 \right| = 4$
 b) $\left| \left| x^2 - 7 \right| - 6 \right| = 3$

- c) $\left| \left| x^2 - 7x \right| - 2 \right| = 4$
 d) $\left| \left| x^2 + 4x \right| - 2 \right| = 2$

3.20. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{5}{-x^2 - 2x + 3}$

b) $f(x) = \frac{3}{2x^2 - 3x + 5}$

3.21. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 10|x| - 6}$

b) $f(x) = \frac{3}{|x^2 - x| - 30}$

Prosto do matury

1. Jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej f jest liczba 2. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(1, 2)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wyróżnik funkcji f jest równy 0.

B. Funkcję f można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = (x - 2)^2$.

C. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie o współrzędnej 4.

2. Rozwiąż równanie $(2x - 1)^2 - (3x - 5)^2 = (x + 1)(5 - x) + 1$.

3. Zapisz funkcję $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ w postaciach: kanonicznej oraz iloczynowej.

4. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 4|x| - 5}$.

5. Pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ i $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Wyznacz b i c .

3.18. a) $x = -1$ lub $x = 1$

b) $x = -2$ lub $x = 1$

c) $x = 1$

d) $x = -7$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

e) $x = -2$ lub $x = 3$

f) $x = -4$ lub $x = 2$

3.19. a) $x \in \{-3, 3\}$

b) $x \in \{-4, -\sqrt{10}, -2, 2, \sqrt{10}, 4\}$

c) $x \in \left\{ \frac{7 - \sqrt{73}}{2}, 1, 6, \frac{7 + \sqrt{73}}{2} \right\}$

d) $x \in \left\{ -2(1 + \sqrt{2}), -4, -2, 0, -2(1 - \sqrt{2}) \right\}$

3.20. a) $D = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

b) $D = \mathbb{R}$

3.21.

a) $D = \mathbb{R} - \{5 - \sqrt{31}, -5 + \sqrt{31}\}$

b) $D = \mathbb{R} - \{-5, 6\}$

Prosto do matury

1. P, F, F

2. $x = 2\frac{1}{2}$ lub $x = 3$

3. $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$,
 $f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$

4. $D = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$

5. $b = -1$, $c = \frac{1}{16}$

4. Wzory Viète'a

Umiejętności:

- stosowanie wzorów Viète'a

Podamy teraz pewne zależności między pierwiastkami równania kwadratowego a współczynnikami funkcji kwadratowej. Zależności te noszą nazwę **wzorów Viète'a**.

François Viète (1540–1603) – francuski prawnik i matematyk, jest uznawany za ojca współczesnej algebry. Jako pierwszy używał w swoich pracach liter do oznaczania współczynników równań, wprowadził też symbole $+$ i $-$. Podczas wojny francusko-hiszpańskiej znalazł klucz do szyfru używanego w listach przez króla hiszpańskiego Filipa II.



Twierdzenie

Wzory Viète'a

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Zwrot „wtedy i tylko wtedy” oznacza, że prawdziwe są dwa twierdzenia:

I. Jeżeli równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

II. Jeżeli liczby x_1, x_2 spełniają warunek $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, to są one pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Udowodnimy obydwa twierdzenia.

Dowód I

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ma pierwiastki, o ile $\Delta \geq 0$. Wtedy:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Zatem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ZZ i MKP

temat 1.6

Multiteka

- Jak wprowadzano symbole w matematyce

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

Dowód II

Jeżeli liczby x_1, x_2 spełniają warunek $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, to $b = -a(x_1 + x_2)$ oraz $c = a(x_1 \cdot x_2)$. Zatem równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma postać

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1 \cdot x_2) = 0$$

Oznaczmy wyrażenie po lewej stronie tego równania przez $f(x)$. Wówczas

$$f(x_1) = ax_1^2 - a(x_1 + x_2)x_1 + a(x_1 \cdot x_2) = 0 \text{ oraz}$$

$$f(x_2) = ax_2^2 - a(x_1 + x_2)x_2 + a(x_1 \cdot x_2) = 0, \text{ czyli liczby } x_1 \text{ i } x_2 \text{ są pierwiastkami badanego równania.}$$

Koniec dowodu

Uwaga: Dla każdego trójmianu kwadratowego można zapisać ilorazy $-\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$, ale wyrażają one sumę i iloczyn pierwiastków równania wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$.

Wzorów Viète'a możemy używać do rozwiązywania w pamięci niektórych równań kwadratowych.

Przykład 1 ◀ zad. 4.5

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 152x + 300 = 0$

Poszukujemy liczb x_1, x_2 , które spełniają podany układ równań.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -152 \\ x_1 \cdot x_2 = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -150 \end{cases}$$

Odp.: $x = -2$ lub $x = -150$

b) $x^2 - 3x + 5 = 0$

$$\Delta = 9 - 20 < 0$$

Odp.: Równanie nie ma rozwiązań.

← w tym wypadku szybciej wykażemy brak pierwiastków, gdy zbadamy znak Δ

Przykład 2 ◀ zad. 4.7

Bez obliczania pierwiastków podanego równania określimy ich znaki.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 37x - 5 = 0$

$$\Delta = 37^2 + 20 > 0$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki.

$$x_1 \cdot x_2 = -5 < 0$$

Odp.: Pierwiastki równania mają różne znaki.

Liczby p i q mają **różne znaki** wtedy i tylko wtedy, gdy: $p \cdot q < 0$

Liczby p i q są **dodatnie** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} p \cdot q > 0 \\ p + q > 0 \end{cases}$$

Liczby p i q są **ujemne** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} p \cdot q > 0 \\ p + q < 0 \end{cases}$$

◀4.5. Rozwiąż równanie.

Skorzystaj ze wzorów Viète'a i postaraj się odgadnąć rozwiązanie.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 20 = 0$

c) $x^2 + 40x + 300 = 0$

d) $x^2 - 4x - 21 = 0$

Odp.: a) $x = 1$ lub $x = 6$

b) $x = 2$ lub $x = 10$

c) $x = -30$ lub $x = -10$

d) $x = -3$ lub $x = 7$

◀4.7. Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki. Jeżeli ma, ustal ich znaki.

a) $3x^2 - x - 7 = 0$

b) $\frac{1}{16}x^2 - 5x + 20 = 0$

c) $-x^2 + x + 1 = 0$

d) $-3x^2 - 50x - 1 = 0$

Odp.: a) pierwiastki o różnych znakach

b) dwa pierwiastki dodatnie

c) pierwiastki o różnych znakach

d) dwa pierwiastki ujemne

$$\text{b) } x^2 - 131x + 47 = 0$$

$$\Delta = 131^2 - 4 \cdot 47 > 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = 47 > 0$$

← oba pierwiastki są tego samego znaku

$$x_1 + x_2 = 131 > 0$$

Odp.: Pierwiastki równania są dodatnie.

$$\text{c) } x^2 + \sqrt{126}x + 13 = 0$$

$$\Delta = 126 - 52 > 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = 13 > 0$$

← oba pierwiastki są tego samego znaku

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{126} < 0$$

Odp.: Pierwiastki równania są ujemne.

Podsumujemy:

jeżeli w równaniu $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$ i $\Delta > 0$, iloczyn pierwiastków jest:

- ujemny, to pierwiastki są przeciwnych znaków,
- dodatni, to pierwiastki są tego samego znaku i wówczas, aby odpowiedzieć na pytanie, czy obydwa są dodatnie czy ujemne, badamy znak ich sumy.

◀4.12. Funkcja kwadratowa $f(x)$

ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że

$$x_1 + x_2 = -2\frac{1}{2} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = -1\frac{1}{2}.$$

Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $P = (1, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

Odp.: $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$



Przykład 3 ◀ zad. 4.12

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 . Suma miejsc zerowych jest równa 4, a ich iloczyn wynosi -5 . Do wykresu funkcji f należy punkt $A = (3, -8)$. Napiszemy wzór funkcji f w postaci ogólnej.

Rozwiązanie

I sposób

Obliczamy miejsca zerowe.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases}$$

Ten układ równań można rozwiązać w pamięci.

$$x_1 = 5, x_2 = -1$$

Korzystamy z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = a(x - 5)(x + 1)$$

$$-8 = a(3 - 5)(3 + 1)$$

← punkt $A = (3, -8)$ należy do wykresu funkcji

$$a = 1$$

$$f(x) = (x - 5)(x + 1)$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

II sposób

Zapisujemy wszystkie informacje o funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, w postaci układu równań. Korzystamy ze wzorów Viète'a.

$$\begin{cases} \frac{-b}{a} = 4 & \leftarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = -5 & \leftarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ -8 = 9a + 3b + c & \leftarrow \text{punkt } A = (3, -8) \text{ należy do wykresu funkcji} \end{cases}$$

Wyznaczamy z drugiego równania np. $c = -5a$ i podstawiamy je do trzeciego. Otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = 4 \\ 9a + 3b - 5a = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 3b = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases}$$

Odp.: $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Przykład 4 ◀ zad. 4.18, 4.19

Równanie $x^2 - 3x - 7 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ($\Delta > 0$). Obliczymy sumę odwrotności tych pierwiastków.

Rozwiązanie

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} \quad \leftarrow \text{korzystamy ze wzorów Viète'a}$$

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = -7$$

Odp.: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{7}$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

4.1. Pierwiastki równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczbami ujemnymi. Wynika z tego, że
A. $b < 0$. **B.** $b \leq 0$. **C.** $c < 0$.

4.2. Pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$ są liczbami dodatnimi. Zatem
A. $a < 0$. **B.** $b > 0$. **C.** $c > 0$.

4.3. Dane jest równanie $3x^2 + x - 11 = 0$.

- A.** Suma pierwiastków tego równania jest równa $-\frac{1}{3}$.
B. Pierwiastki tego równania są liczbami wymiernymi.
C. Pierwiastki tego równania są liczbami o przeciwnych znakach.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. F, F, F

4.2. F, F, F

4.3. P, F, P

◀ **4.18.** Dane jest równanie $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania. Wyraż podaną wielkość w zależności od współczynników a, b i c .

a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

b) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

c) $(x_1 - x_2)^2$

d) $(x_1 + \sqrt{3})^2 + (x_2 + \sqrt{3})^2$

Odp.: **a)** $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$, $c \neq 0$

b) $\frac{b^2 - 2ac}{ac}$, $c \neq 0$

c) $\frac{b^2 - 4ac}{a^2}$

d) $\frac{b^2 - 2ac - 2\sqrt{3}ab + 6a^2}{a^2}$

◀ **4.19.** Jeżeli istnieją pierwiastki x_1, x_2 podanego równania, oblicz wartość t .

a) $x^2 - 11x + 7 = 0$, $t = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

b) $x^2 - x - 10 = 0$, $t = (x_1 - x_2)^2$

c) $x^2 + 13x + 3 = 0$, $t = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

d) $x^2 - 4x + 5 = 0$,
 $t = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

Odp.: **a)** $t = 2\frac{9}{49}$

b) $t = 41$

c) $t = 54\frac{1}{3}$

d) Nie istnieją pierwiastki.

4.4. P, P, P

4.5. a) $x = 1$ lub $x = 6$

b) $x = 2$ lub $x = 10$

c) $x = -30$ lub $x = -10$

d) $x = -3$ lub $x = 7$

4.6. a) np. $x^2 - 5x - 24 = 0$

b) np. $18x^2 - 27x + 10 = 0$

c) np. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0$

d) np. $2x^2 - 2\sqrt{7}x + 3 = 0$

4.7. a) pierwiastki o różnych znakach

b) dwa pierwiastki dodatnie

c) pierwiastki o różnych znakach

d) dwa pierwiastki ujemne

4.8. a) $a > 0$, $b < 0$

b) $a > 0$, $b > 0$

c) $a < 0$, $b > 0$

d) $a < 0$, $b < 0$

4.9. a) np. $b = -3$, $c = -4$

b) Nie ma takich liczb.

c) np. $b = 3$, $c = 1$

4.10. $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $b = -32$
lub $x_1 = -1$, $x_2 = -7$, $b = 32$

4.11. a) nie

b) np. $x^2 + 8x - 33 = 0$

4.12. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

4.4. Dane jest równanie $x^2 + 7x + 8 = 0$.

A. Iloczyn pierwiastków tego równania jest równy 8.

B. Suma kwadratów pierwiastków tego równania jest równa 33.

C. Pierwiastki tego równania są liczbami niewymiernymi.

4.5. Rozwiąż równanie. Skorzystaj ze wzorów Viète'a i postaraj się odgadnąć rozwiązanie.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

c) $x^2 + 40x + 300 = 0$

b) $x^2 - 12x + 20 = 0$

d) $x^2 - 4x - 21 = 0$

4.6. Podaj przykład równania postaci $ax^2 + bx + c = 0$, które ma dane pierwiastki.

a) $x_1 = 8$, $x_2 = -3$

c) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -3\sqrt{3}$

b) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{5}{6}$

d) $x_1 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$

4.7. Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki. Jeżeli ma, ustal ich znaki.

a) $3x^2 - x - 7 = 0$

c) $-x^2 + x + 1 = 0$

b) $\frac{1}{16}x^2 - 5x + 20 = 0$

d) $-3x^2 - 50x - 1 = 0$

4.8. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$. Znaki pierwiastków oraz współczynnika c są podane. Ustal znaki współczynników a i b .

a) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ i $c > 0$

c) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ i $c < 0$

b) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ i $c > 0$

d) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ i $c < 0$

4.9. Podaj, o ile istnieje, przykład takich liczb b i c , aby $bc > 0$ oraz równanie $x^2 + bx + c = 0$ miało dwa różne pierwiastki

a) różnych znaków.

b) dodatnie.

c) ujemne.

4.10. Pierwiastkami równania $4x^2 + bx + 28 = 0$ są dwie liczby całkowite. Wyznacz te pierwiastki oraz współczynnik b .4.11. Czy istnieje równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są liczby x_1, x_2 spełniające podane warunki? Jeżeli tak, podaj przykład takiego równania.

a) $x_1 \cdot x_2 = 5$

$x_1 + x_2 = 3$

b) $x_1 \cdot x_2 = -33$

$x_1 + x_2 = -8$

4.12. Funkcja kwadratowa $f(x)$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 + x_2 = -2\frac{1}{2}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = -1\frac{1}{2}$. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $P = (1, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.13. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$, malejąca w przedziale $\left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ i ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , których iloczyn jest równy 2. Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(0, -2)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.14. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 i spełnia następujące warunki: suma pierwiastków jest równa -6 , suma odwrotności pierwiastków jest równa $-\frac{3}{4}$, a wartość funkcji dla argumentu 2 jest równa 12. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.15. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest przedział $(-2; \infty)$. Wiadomo, że funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 + x_2 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = 0$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.16. Do wykresu funkcji kwadratowej f należy punkt $Q = (-1, -6)$. Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 \cdot x_2 = -2$ oraz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{x_1 \cdot x_2}$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

4.17. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , których suma jest równa 1, a suma ich sześciąt wynosi 61. Wykresem tej funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = \left(\frac{1}{2}, -20\frac{1}{4}\right)$. Wyznacz wzór funkcji f .

4.18. Dane jest równanie $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania. Wyraż podaną wielkość w zależności od współczynników a, b i c .

a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ b) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ c) $(x_1 - x_2)^2$ d) $(x_1 + \sqrt{3})^2 + (x_2 + \sqrt{3})^2$

4.19. Jeżeli istnieją pierwiastki x_1, x_2 podanego równania, oblicz wartość t .

a) $x^2 - 11x + 7 = 0$ $t = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$
 b) $x^2 - x - 10 = 0$ $t = (x_1 - x_2)^2$
 c) $x^2 + 13x + 3 = 0$ $t = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$
 d) $x^2 - 4x + 5 = 0$ $t = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

4.13. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

4.14. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

4.15. $f(x) = 2x^2 - 4x$

4.16. $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$

4.17. $f(x) = x^2 - x - 20$

4.18. a) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}, c \neq 0$

b) $\frac{b^2 - 2ac}{ac}, c \neq 0$

c) $\frac{b^2 - 4ac}{a^2}$

d) $\frac{b^2 - 2ac - 2\sqrt{3}ab + 6a^2}{a^2}$

4.19. a) $t = 2\frac{9}{49}$

b) $t = 41$

c) $t = 54\frac{1}{3}$

d) Nie istnieją pierwiastki.

4.20. $-\frac{20}{21}$

4.21. Z założenia mamy:

$$x_1 + x_2 = b, \quad x_1 x_2 = c,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = d, \quad x_1^2 x_2^2 = e$$

a) $e = (x_1 x_2)^2 = c^2$

b) $d = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = b^2 - 2c$

Ponieważ pierwsze równanie ma

pierwiastki, $\Delta = b^2 - 4c \geq 0$,

a stąd $b^2 \geq 4c$.

Zatem $d \geq 4c - 2c$, czyli $d \geq 2c$.

4.22. $x_1 + x_2 = -k$

x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami

danego równania, więc $\Delta > 0$,

czyli:

$$k^2 - 4 > 0$$

$$(-k)^2 > 4$$

$$(x_1 + x_2)^2 > 4$$

Udowodniliśmy nawet mocniejszą nierówność.

4.23. $\Delta = 12^2 - 4m > 0$,

więc $m < 36$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 =$$

$$= 12^2 - 2m = 144 - 2m$$

4.24. $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = -1$

Zatem:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 =$$

$$= (-m)^2 - 2 \cdot (-1) = m^2 + 2 \geq 2 > 1$$

4.25. x_1, x_2 – miejsca zerowe

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$$

Zatem oba pierwiastki są ujemne.

4.20. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $3x^2 - 7x - 9 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3x_1^2 + 7x_1 x_2 + 3x_2^2}{2x_1 x_2^2 + 2x_1^2 x_2}$.

4.21. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - bx + c = 0$, a liczby x_1^2, x_2^2 są pierwiastkami równania $x^2 - dx + e = 0$. Wykaż, że

a) $e = c^2$.

b) $d \geq 2c$.

4.22. Liczby x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + kx + 1 = 0$. Wykaż, że $(x_1 + x_2)^2 \geq 4$.

4.23. Wykaż, że jeżeli liczby x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $x^2 - 12x + m = 0$, to $m < 36$ i $x_1^2 + x_2^2 = 144 - 2m$.

4.24. Wykaż, że dla każdego $m \in \mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + mx - 1 = 0$ jest większa od 1.

4.25. Współczynniki a, b i c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ są różne od zera i wszystkie mają ten sam znak. Wykaż, że jeśli funkcja f ma miejsca zerowe, to są one ujemne.

Prosto do matury



1. Dane jest równanie $x^2 + 7x + k = 0$ z parametrem k .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $k = 13$ iloczyn pierwiastków tego równania jest równy 13.

B. Dla $k = -5$ pierwiastki tego równania są przeciwnych znaków.

C. Dla $k = 10$ pierwiastki tego równania są ujemne.

2. Suma i iloczyn pierwiastków równania $2x^2 + 3x - 7 = 0$ są pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$. Wyznacz b i c .

3. Suma pierwiastków równania $x^2 + bx + c = 0$ jest równa 3, a ich iloczyn jest równy 1. Wyznacz te pierwiastki.

4. Suma pierwiastków trójmianu kwadratowego jest równa -5 , iloczyn tych pierwiastków jest równy -14 , a dla $x = 3$ wartość trójmianu wynosi 50. Wyznacz ten trójmian kwadratowy.

5. Dane jest równanie $x^2 + bx + c = 0$ z niewiadomą x , którego pierwiastkami są liczby x_1, x_2 . Napisz równanie, którego pierwiastkami są liczby

a) $5x_1$ oraz $5x_2$.

b) x_1^2 oraz x_2^2 .

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $b = 5$, $c = 5\frac{1}{4}$

3. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

4. $5x^2 + 25x - 70$

5. a) $x^2 + 5bx + 25c = 0$ b) $x^2 - (b^2 - 2c)x + c^2 = 0$

5. Nierówności kwadratowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą

Rozwiązanie **nierówności kwadratowej**, czyli nierówności postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, dla $a \neq 0$, jest tym samym zadaniem co odczytanie z wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ lub $f(x) \leq 0$.

Przykład 1 ◀ zad. 5.5

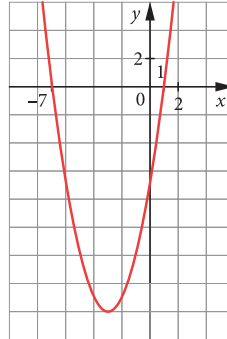
Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 6x \leq 7$ ← porządkujemy nierówność
 $x^2 + 6x - 7 \leq 0$ ← obliczamy pierwiastki
 $\Delta = 36 + 28 = 64$
 $x_1 = 1, x_2 = -7$

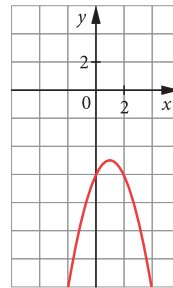
Rysujemy parabolę $y = x^2 + 6x - 7$ i odczytujemy rozwiązanie nierówności.

Odp.: $x^2 + 6x - 6 \leq 7$ dla $x \in \langle -7; 1 \rangle$



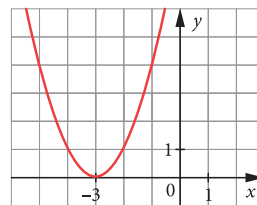
b) $2x - 6 > x^2$
 $-x^2 + 2x - 6 > 0$
 $\Delta = 4 - 24 = -20$
 $\Delta < 0$, więc funkcja $f(x) = -x^2 + 2x - 6$ nie ma miejsc zerowych. Poza tym parabola $y = -x^2 + 2x - 6$ ma ramiona skierowane do dołu, zatem cała znajduje się poniżej osi x.

Odp.: Nierówność $2x - 6 > x^2$ nie ma rozwiązań.



c) $x^2 + 6x + 9 > 0$
 $(x + 3)^2 > 0$

Odp.: $x^2 + 6x + 9 > 0$ dla $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$



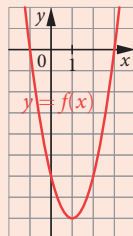
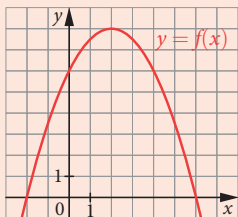
5.5. Odp.:

c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 6)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$

d) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$



Uwagi metodyczne

Radzimy rozwiązywać nierówności za pomocą wykresu. Ćwiczyliśmy wcześniej przez tyle czasu odczytywanie znaku wartości funkcji z jej wykresu po to, aby obecnie móc tę umiejętność wykorzystać. Oczywiście do rozwiązania nierówności potrzebny jest tylko szkic wykresu, więc nie tracimy czasu na dokładne rysunki.

◀5.5. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z niego, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) > 0$, a dla jakich $f(x) < 0$.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

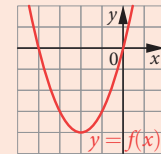
d) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

Odp.:

a) $f(x) > 0$

dla $x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$,

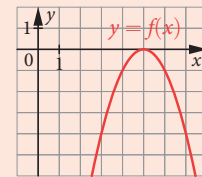
$f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0)$



b) nierówność $f(x) > 0$

nie ma rozwiązań,

$f(x) < 0$ dla $x \in \mathbb{R} - \{5\}$



Zz i MKP

temat 1.2

Multiteka

- Nierówność kwadratowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

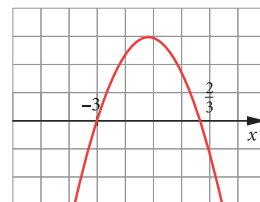
Zauważmy, że nie musimy dokładnie rysować paraboli, aby rozwiązać nierówność kwadratową. Aby zrobić szkic rysunku, z którego odczytamy zbiór rozwiązań, wystarczy zaznaczenie miejsc zerowych na osi x oraz informacja o zwrocie ramion paraboli. W szczególności nie ma potrzeby znajdowania współrzędnych wierzchołka.

d) $(2 - 3x)(x + 3) > 0$

Z postaci iloczynowej odczytujemy pierwiastki:

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -3$$

Współczynnik przy x^2 jest równy -3 , zatem ramiona paraboli są skierowane do dołu.



Odp.: $(2 - 3x)(x + 3) > 0$ dla $x \in \left(-3; \frac{2}{3}\right)$

Przykład 2 zad. 5.15

Wyznamy dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{42 - x - x^2} - 3x + 7$.

Rozwiązanie

Argumenty funkcji f spełniają dwa warunki:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0 \quad \text{ i } \quad 42 - x - x^2 \geq 0 \quad \leftarrow \text{wyrażenia pod pierwiastkami są nieujemne}$$

Rozwiążemy każdą z nierówności oddzielnie, część wspólna obydwu zbiorów rozwiązań jest szukaną dziedziną funkcji.

- $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

$$\Delta = 4 + 12 = 16, \quad x_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$(x + 3)(x - 1) \geq 0 \quad \leftarrow \text{pierwiastki trójmianu: } -3, 1, \text{ ramiona paraboli skierowane w górę}$$

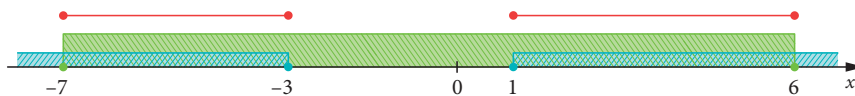
$$x \in (-\infty; -3] \cup [1; \infty)$$

- $42 - x - x^2 \geq 0$

$$\Delta = 1 + 168 = 169, \quad x_1 = \frac{1 - 13}{-2} = 6, \quad x_2 = \frac{1 + 13}{-2} = -7$$

$$-(x - 6)(x + 7) \geq 0 \quad \leftarrow \text{pierwiastki trójmianu: } 6, -7, \text{ ramiona paraboli skierowane w dół}$$

$$x \in [-7; 6]$$



Odczytujemy część wspólną obu zbiorów rozwiązań: $x \in [-7; -3] \cup [1; 6]$.

Odp.: Dziedziną funkcji f jest zbiór $[-7; -3] \cup [1; 6]$.

◀5.15. Wyznamy dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2} + \sqrt{1 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$

Odp.:

a) $D = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$

b) $D = (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$

c) $D = [-3; 1]$

d) $D = (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$

Przykład 3 ◀ zad. 5.17

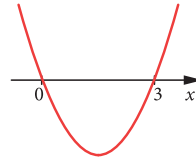
Rozwiążemy nierówność $|x^2 - 3x| - x^2 + 2 > 0$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$x^2 - 3x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$

$$x^2 - 3x \leq 0 \text{ dla } x \in \langle 0; 3 \rangle$$



Nierówność $|x^2 - 3x| - x^2 + 2 > 0$ rozwiążemy zatem oddzielnie dla dwóch zbiorów.

- Dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ mamy:

$$x^2 - 3x - x^2 + 2 > 0$$

$$-3x > -2, \text{ czyli } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$$

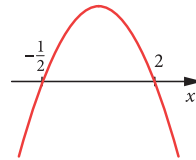
Uwzględniamy warunek $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ i otrzymujemy $x \in (-\infty; 0)$.

- Dla $x \in \langle 0; 3 \rangle$ mamy:

$$-x^2 + 3x - x^2 + 2 > 0, \text{ czyli } -2x^2 + 3x + 2 > 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Zatem } -2x^2 + 3x + 2 > 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right).$$



Uwzględniamy warunek $x \in \langle 0; 3 \rangle$ i otrzymujemy $x \in \langle 0; 2 \rangle$.

Końcowe rozwiązanie otrzymujemy po zsumowaniu obu otrzymanych zbiorów:

$$(-\infty; 0) \cup \langle 0; 2 \rangle = (-\infty; 2)$$

Odp.: $x \in (-\infty; 2)$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

5.1. Przedział $\langle -3; 1 \rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności

A. $-(x-3)(x+1) \geq 0$. B. $(-x-3)(x-1) \geq 0$. C. $(x+3)(2x-2) \leq 0$.

5.2. Zbiór rozwiązań nierówności

A. $6x^2 \leq 0$ jest jednoelementowy.

B. $-6x^2 + 2\sqrt{6} - 1 > 0$ jest jednoelementowy.

C. $6x^2 - 4\sqrt{3}x + 2 \leq 0$ jest jednoelementowy.

5.3. Nierówność $3x^2 - 6x + k > 0$

A. dla $k = -3$ nie ma rozwiązań.

B. dla $k = 3$ nie ma rozwiązań.

C. dla $k = 6$ nie ma rozwiązań.

◀ **5.17.** Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5|x| + 4 > 0$

b) $x^2 + 7|x| + 10 < 0$

c) $x^2 - 4x + 2|x-2| + 1 > 0$

d) $|x^2 + 2x| > (x+2)^2$

e) $|2x-1| < x^2 - 3x + 5$

f) $|2x+1| \geq x^2 - x + 3$

Odp.:

a) $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

b) brak rozwiązań

c) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$

d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$

e) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$

f) $x \in \langle 1; 2 \rangle$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. F, P, P

5.2. P, F, P

5.3. F, F, F

5.4. P, P, P

- 5.5. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0)$
 b) nierówność $f(x) > 0$ nie ma rozwiązań, $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} - \{5\}$
 c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 6)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$
 d) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$

- 5.6. a) $x \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
 b) $x \in (-7; \sqrt{2})$
 c) $x \in (2; 3)$
 d) $x \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \infty\right)$
 e) $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
 f) $x \in (2; 4)$

- 5.7. a) $x \in (0; 2)$
 b) $x \in (-2; 2)$
 c) brak rozwiązań
 d) $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$
 e) $x \in \mathbf{R}$
 f) $x = 1$

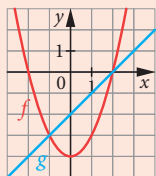
- g) $x \in \left(-3; \frac{1}{2}\right)$
 h) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$

- 5.8. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$
 b) $x = 7$
 c) $x \in (1; 2)$
 d) brak rozwiązań
 e) $x \in (-1; 4)$
 f) $x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{13}{17}\right)$
 g) $x \in \left(\frac{17}{8}; \frac{9}{4}\right)$
 h) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{11}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; \infty\right)$

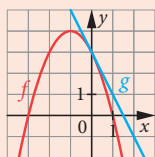
- 5.9. $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

- 5.11. $x \in (0; 3)$

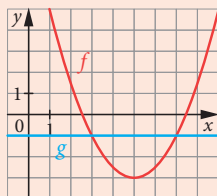
- 5.10. a) I. $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 II. $x \in (-1; 2)$
 III. $x \in \{-1, 2\}$



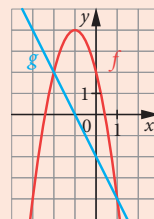
- b) I. brak rozwiązań
 II. $x \in \mathbf{R} - \{0\}$
 III. $x = 0$



- c) I. $x \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$
 II. $x \in (3; 7)$
 III. $x \in \{3, 7\}$



- d) I. $x \in (-2; 1)$
 II. $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
 III. $x \in \{-2, 1\}$



5.4. Przedział $(-3; 1)$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

- A. $x^2 + x - 12 < 0$. B. $-x^2 + 3x - 2 \leq 0$. C. $x^2 - x + 3 > 0$.

5.5. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z niego, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) > 0$, a dla jakich $f(x) < 0$.

- a) $f(x) = x^2 + 4x$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$
 b) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$ d) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

5.6. Rozwiąż nierówność.

- a) $(3 - 2x)(x + 5) \leq 0$ c) $(3 - x)(2 - x) \leq 0$ e) $(x - 2)^2 \geq 4$
 b) $(\sqrt{2} - x)(x + 7) > 0$ d) $(3x - 2\sqrt{2})(x + 5) \geq 0$ f) $(x - 3)^2 < 1$

5.7. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 < 2x$ e) $4x^2 + 2x + 1 > 0$
 b) $x^2 \leq 4$ f) $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$
 c) $4x > x^2 + 4$ g) $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$
 d) $-3x^2 + 8x - 4 \geq 0$ h) $5x^2 + 2x - 3 > 0$

5.8. Rozwiąż nierówność.

- a) $2(x + 1)^2 - (x - 3)^2 \geq 11x - 1$ e) $(x - 4)(2x + 5) < (x - 4)(2 - x)$
 b) $(x - 2)^2 + 5 \leq 5(2x - 8)$ f) $(3x + 2)(5x - 1) > (11x - 7)(6x + 4)$
 c) $(x + 3)(3 - x) > 3(x - 2)^2 + 5$ g) $(8x - 17)^2 \leq 8x - 17$
 d) $\left(\frac{x - 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6 - x}{2}\right)^2 > (x - 3)^2$ h) $(5x - 6)^2 > (6 - 5x)(5 + 6x)$

5.9. Wyznacz wszystkie całkowite rozwiązania nierówności $3x^2 - 9x - 2 < 0$.

5.10. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj rozwiązania nierówności lub równania:

- I. $f(x) > g(x)$, II. $f(x) < g(x)$, III. $f(x) = g(x)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$ sposobem rachunkowym.

- a) $f(x) = x^2 - 4$ $g(x) = x - 2$
 b) $f(x) = 3 - 2x - x^2$ $g(x) = 3 - 2x$
 c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 9\frac{1}{2}$ $g(x) = -1$
 d) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$ $g(x) = -2x - 2$

5.11. Wyznacz dodatnie wartości zmiennej x , dla których wartości funkcji $g(x) = 3x^2 - 6$ są nie większe od wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + 3$.

5.12. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, jeżeli

$$A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 + 4x - 5 > 0\} \text{ i } B = \{x \in \mathbf{R}: -3x^2 + 7x \geq 0\}.$$

5.13. Dla jakich wartości parametru m druga współrzędna wierzchołka paraboli $y = x^2 - (m+2)x + m + 3$ jest większa od drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli $y = x^2 - 3x + m + 3$?

5.14. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ 3x > x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 11x + 18 < 0 \\ 4x^2 > 81 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 \leq 0 \\ 3x^2 - 16x + 20 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (11x - 5)(17x - 4) \geq 0 \\ (3x - 2)(2x + 3) \leq 5 \end{cases}$

5.15. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2} + \sqrt{1 - x}$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$

5.16. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 4|} - 5} - \frac{3x + 1}{\sqrt{7 - x}}$

b) $f(x) = \sqrt{|x^2 - |x||} - 6 + \frac{2}{\sqrt{x + 6}}$

5.17. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5|x| + 4 > 0$

d) $|x^2 + 2x| > (x + 2)^2$

b) $x^2 + 7|x| + 10 < 0$

e) $|2x - 1| < x^2 - 3x + 5$

c) $x^2 - 4x + 2|x - 2| + 1 > 0$

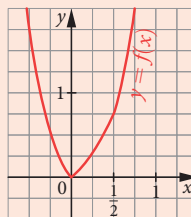
f) $|2x + 1| \geq x^2 - x + 3$

5.18. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |2x^2 - x| + 3x^2$.

5.19. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ |1 - x^2| & \text{dla } x > 0 \end{cases}$.

Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania?

5.18. Wskazówka: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle \\ x^2 + x & \text{dla } x \in (0; \frac{1}{2}) \end{cases}$



5.19. $m \in (0; 1)$. Wskazówka: Naskicuj wykres funkcji f .

5.12. $A \cup B = (-\infty; -5) \cup \langle 0; \infty \rangle$,

$$A \cap B = \left(1; 2\frac{1}{3}\right),$$

$$A - B = (-\infty; -5) \cup \left(2\frac{1}{3}; \infty\right),$$

$$B - A = \langle 0; 1 \rangle$$

5.13. $m \in (-5; 1)$

5.14. a) $x \in (0; 2)$

b) $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup \left(3\frac{1}{3}; 6\right)$

c) $x \in \left(-9; -\frac{9}{2}\right)$

d) $x \in \left(-\frac{11}{6}; \frac{4}{17}\right) \cup \left(\frac{5}{11}; 1\right)$

5.15.

a) $D = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$

b) $D = (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$

c) $D = \langle -3; 1 \rangle$

d) $D = (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$

5.16. a) $D = (-\infty; -3) \cup (3; 7)$

b) $D = (-6; -3) \cup \langle 3; \infty \rangle$

5.17.

a) $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

b) brak rozwiązań

c) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$

d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$

e) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$

f) $x \in \langle 1; 2 \rangle$

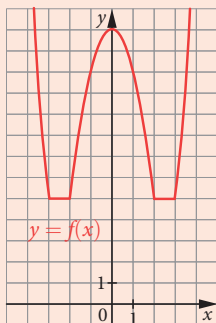
5.20. $m = 13$. Wskazówka:
Rozpatrz cztery przypadki:

1. $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$



5.21. $ZW = \langle -3; \infty \rangle$

5.22. $m = 4$ lub $m = 5$

5.23. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$

5.24. $m \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$

* **5.20.** Naszkiej wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 9| + |x^2 - 4|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = m$ ma trzy rozwiązania?

5.21. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x - 1$.

5.22. Dla jakich wartości parametru m równanie $|x^2 - 4| - 2x = m$ ma trzy rozwiązania?

5.23. Dla jakich wartości parametru m równanie $3x + m^2 - 3m + 2 = 0$ ma rozwiązanie ujemne?

5.24. Dla jakich wartości parametru m równanie $|x - 1| = -6m^2 - 5m + 6$ ma dwa rozwiązania?

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Nierówność $3x^2 - 5x + 4 > 0$ jest prawdziwa dla $x \in \mathbb{R}$.

B. Nierówność $-100x^2 - 60x - 9 < 0$ jest prawdziwa dla $x \in \mathbb{R}$.

C. Dokładnie jedna liczba rzeczywista spełnia nierówność $\frac{1}{4}x^2 + 1 \leq x$.

2. Rozwiąż nierówność $2x^2 - x + 1 > 0$.

3. Rozwiąż nierówność $(3 - \pi)(2x - 3)(\sqrt{2} + x) < 0$.

4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wartość funkcji jest mniejsza od 2.

5. Naszkiej wykres funkcji $f(x) = x^2 - |x^2 - 2x|$ i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

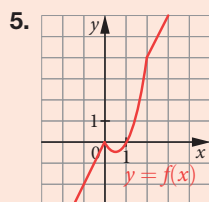
Prosto do matury

1. P, F, P

2. $x \in \mathbb{R}$

3. $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \left(1\frac{1}{2}; \infty\right)$

4. $x \in \left(\frac{2 - \sqrt{10}}{3}; \frac{2 + \sqrt{10}}{3}\right)$



1 rozwiązanie dla $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; \infty)$,

2 rozwiązania dla $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$,

3 rozwiązania dla $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

6. Zadania prowadzące do równań kwadratowych

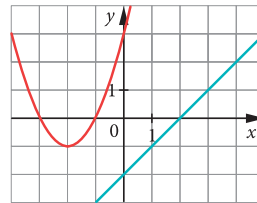
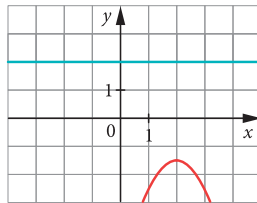
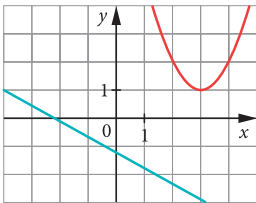
Umiejętności:

- rozwiązywanie układów równań prowadzących do równań kwadratowych
- wykorzystywanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

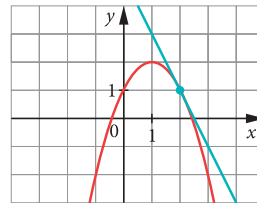
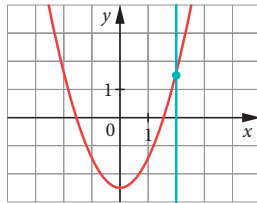
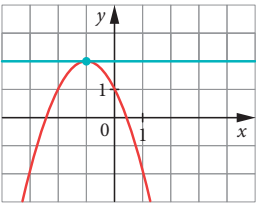
Punkty przecięcia paraboli i prostej

Wykresem równania $y = ax^2 + bx + c$ (jeżeli $a \neq 0$) jest parabola. Wykresem równania $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (jeżeli a_1 i b_1 nie są jednocześnie równe 0) jest prosta. Ile punktów wspólnych mogą mieć prosta i parabola? Z własności geometrycznych tych figur wynika, że są trzy możliwości.

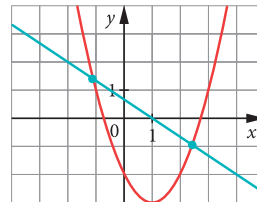
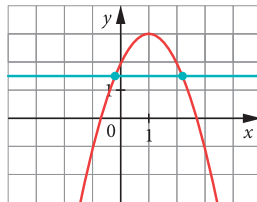
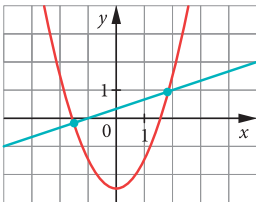
I. Prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą, np.:



II. Prosta ma jeden punkt wspólny z parabolą, np.:



III. Prosta ma dwa punkty wspólne z parabolą, np.:



ZZ i MKP

tematy 1.4, 1.8, 1.9

Multiteka

• Układy równań

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Generator
testów i sprawdzianów

◀6.6. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \\ y = x - 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Odp.: a) brak rozwiązań

b) $x = -1$, $y = -3$

c) $x = 0$, $y = -6$ lub $x = 6$, $y = 0$

d) $x = 1$, $y = 2$ lub $x = 3$, $y = 2$

Przykład 1 ◀ zad. 6.6

Wyznamy współrzędne punktów przecięcia paraboli i prostej, rozwiązując rachunkowo układ równań, a następnie przedstawimy ilustrację geometryczną zadania.

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Równanie $x^2 - x - 2 = 0$ jest równaniem kwadratowym, które ma dwa pierwiastki ($\Delta = 9$):

$$x_1 = -1 \text{ oraz } x_2 = 2$$

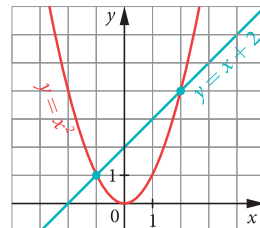
Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Każda z nich jest parą współrzędnych punktu

przecięcia prostej $y = x + 2$ z parabolą $y = x^2$.

Mamy zatem dwa takie punkty: $(-1, 1)$ oraz $(2, 4)$.



b) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 4x + y + 3 = 0 \end{cases}$

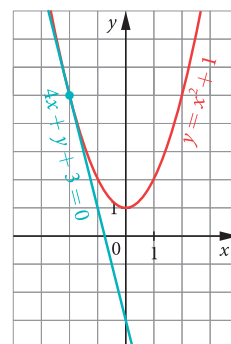
$$\begin{cases} y = -4x - 3 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -4x - 3 \\ (x + 2)^2 = 0 \end{cases}$$

Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek $x = -2$, więc rozwiązaniem układu jest jedna para liczb.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Prosta i parabola mają jeden punkt wspólny: $(-2, 5)$.



Układ równań, z których jedno jest równaniem prostej, a drugie – paraboli, zawsze możemy przekształcić do układu składającego się z równania liniowego z dwiema niewiadomymi i równania kwadratowego z jedną niewiadomą. W konsekwencji dany układ równań może mieć dwa rozwiązania albo jedno rozwiązanie, albo może nie mieć rozwiązań – w zależności od liczby pierwiastków równania kwadratowego.

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Wiele zadań tekstowych prowadzi do równań kwadratowych lub opisanych wyżej układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe. Taka sytuacja występuje też często w zagadnieniach z fizyki.



Przykład 2 ◀ zad. 6.14

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 371. Wyznaczmy te liczby.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trzy kolejne liczby nieparzyste możemy zapisać jako $2n + 1$, $2n + 3$ i $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Otrzymujemy zatem równanie:

$$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = 371$$

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 = 371$$

$$12n^2 + 36n - 336 = 0, \text{ czyli } n^2 + 3n - 28 = 0$$

$$\Delta = 121, \quad n_1 = -7, \quad n_2 = 4$$

Oba rozwiązania są liczbami całkowitymi, więc zadanie ma dwa rozwiązania. Po podstawieniu -7 oraz 4 w miejsce n otrzymujemy dwa zestawy liczb.

Odp.: Szukane liczby to: $-13, -11$ i -9 lub $9, 11$ i 13 .

Przykład 3 ◀ zad. 6.22

Na dziedzińcu zamku w Niedzicy znajduje się studnia o głębokości 60 m, wykuta w litej skale. Obliczymy, ile czasu spada kamień wrzucony do tej studni z prędkością początkową 10 m/s. Wynik podamy z dokładnością do 0,1 s.



Rozwiązanie

Użyjemy wzoru na drogę przebytą przez ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

s oznacza drogę przebytą przez kamień (w metrach), t – czas spadania (w sekundach), v_0 – prędkość początkową (w m/s), zaś $g = 10 \text{ m/s}^2$ to przyspieszenie ziemskie.

Otrzymujemy równanie: $10t + 5t^2 = 60$, dla $t > 0$.

$$5t^2 + 10t - 60 = 0, \text{ czyli } t^2 + 2t - 12 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \quad t_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{2} = -1 - \sqrt{13}, \quad t_2 = -1 + \sqrt{13}$$

Tylko druga liczba jest dodatnia, zatem rozwiązaniem zadania jest $-1 + \sqrt{13} \approx 2,6$.

Odp.: Kamień spada 2,6 sekundy.

◀6.14. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Odp.: 2, 4, 6 lub $-6, -4, -2$.

Wskazówka: Oznacz szukane liczby: $2(a - 1)$, $2a$, $2(a + 1)$.

◀6.22. Do studni opuszczono kamień i po upływie 3,5 s usłyszano plusk. Oblicz przybliżoną głębokość studni. Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

Odp.: ok. 56 m

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

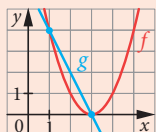
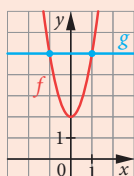
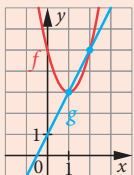
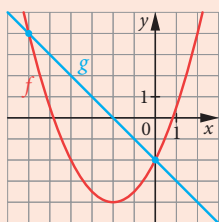
6.1. D

6.2. C

6.3. B

6.4. D

6.5.

a) $x = 1$ lub $x = 3$ b) $x = -1$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ lub $x = 2$ d) $x = 0$ lub $x = -6$ 

W każdym z zadań 6.1–6.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

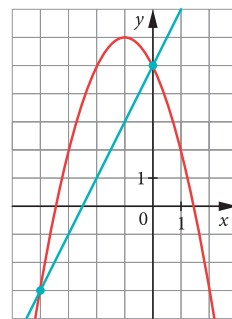
6.1. Na rysunku przedstawiona jest graficzna ilustracja układu równań. Który to układ?

A. $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 5 \\ y = x + 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$



6.2. Dany jest układ równań $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + m \end{cases}$ z parametrem m .

Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Dla $m = 10$ układ ma jedno rozwiązanie.

B. Dla $m = 0$ układ ma jedno rozwiązanie.

C. Dla $m = -10$ układ nie ma rozwiązań.

D. Dla $m = -1$ układ ma dwa rozwiązania.

6.3. Dany jest układ równań $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 9x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Ten układ równań nie ma rozwiązań.

B. Ten układ równań ma co najmniej jedno rozwiązanie.

C. Rozwiązaniami tego układu równań są pary liczb naturalnych.

D. Rozwiązaniem tego układu równań jest $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$.

6.4. Suma dwóch liczb jest równa 1, a suma kwadratów tych liczb pomniejszonych o 3 wynosi 5. Który układ równań opisuje tę sytuację?

A. $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 - 3 = 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a - 3 + b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

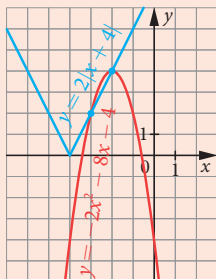
D. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

6.5. Sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

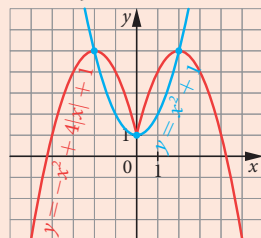
a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ $g(x) = -2x + 6$ c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ $g(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 + 2$ $g(x) = 5$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ $g(x) = -x - 2$

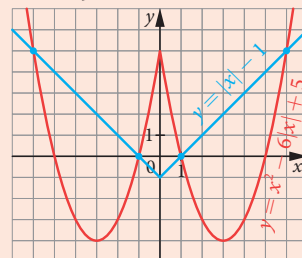
6.8. a) $x = -3, y = 2$ lub $x = -2, y = 4$



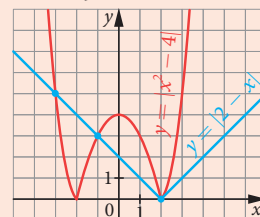
b) $x = -2, y = 5$ lub $x = 0, y = 1$ lub $x = 2, y = 5$



c) $x = -6, y = 5$ lub $x = -1, y = 0$ lub $x = 1, y = 0$ lub $x = 6, y = 5$



d) $x = -3, y = 5$ lub $x = -1, y = 3$ lub $x = 2, y = 0$



6.6. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \\ y = x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 4 \\ y = 2 \end{cases}$

6.7. Rozwiąż graficznie układ równań. Otrzymane wyniki sprawdź metodą rachunkową.

a) $\begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 2 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$

* d) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -3x^2 + 12x - 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 2 \\ y + 7 = 0 \end{cases}$

* e) $\begin{cases} y = 4x^2 - 8x + 2 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

* f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \end{cases}$

* **6.8.** Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

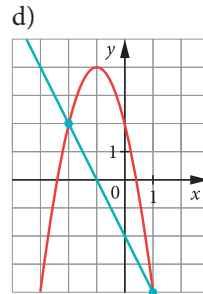
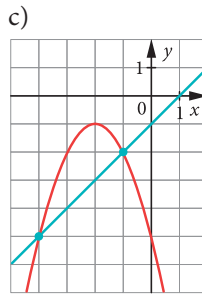
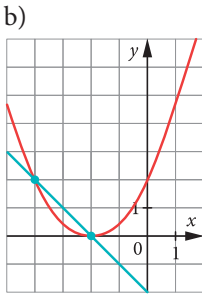
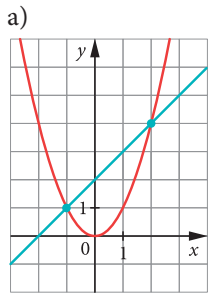
a) $\begin{cases} y = -2x^2 - 8x - 4 \\ y = 2|x + 4| \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 6|x| + 5 \\ y = |x| - 1 \end{cases}$

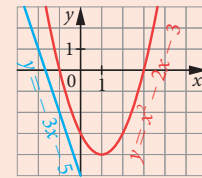
b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4|x| + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = |x^2 - 4| \\ y = |2 - x| \end{cases}$

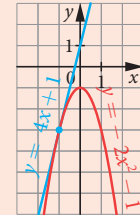
6.9. W układzie współrzędnych narysowane są parabola i prosta. Napisz układ równań, którego ilustracją jest przedstawiony rysunek.



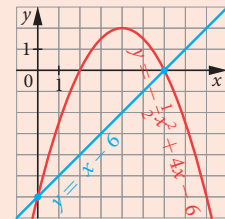
6.6. a) brak rozwiązań



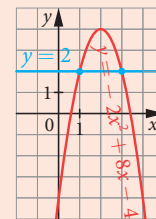
b) $x = -1, y = -3$



c) $x = 0, y = -6$ lub $x = 6, y = 0$



d) $x = 1, y = 2$ lub $x = 3, y = 2$



6.8. Patrz s. 46.

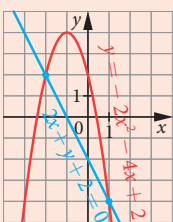
6.9. a) np. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$

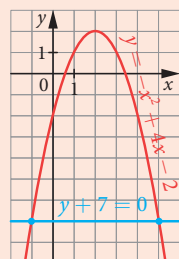
c) np. $\begin{cases} y = -x^2 - 4x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

d) np. $\begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 2 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$

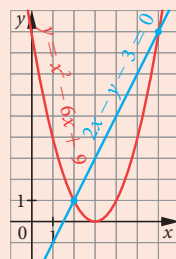
6.7. a) $x = -2, y = 2$
lub $x = 1, y = -4$



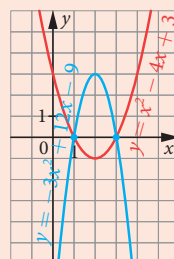
b) $x = -1, y = -7$
lub $x = 5, y = -7$



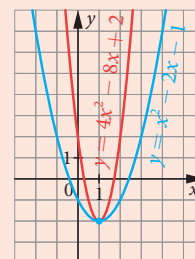
c) $x = 2, y = 1$
lub $x = 6, y = 9$



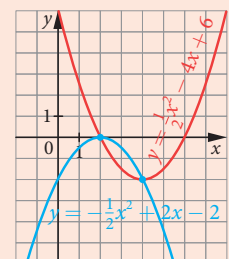
d) $x = 1, y = 0$
lub $x = 3, y = 0$



e) $x = 1, y = -2$



f) $x = 2, y = 0$
lub $x = 4, y = -2$



6.10. np. $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$

6.11.

a) np. $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\frac{1}{3} \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} y = x^2 + 10x + 22 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y = x^2 - 18 \\ x = -4 \end{cases}$

6.12. a) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), (0, 0), (4, 2)$
b) 3

6.13. $p = 3, q = -1$ lub $p = -1, q = 3$

6.14. 2, 4, 6 lub -6, -4, -2.
Wskazówka: Oznacz szukane liczby: $2(a-1), 2a, 2(a+1)$.

6.15. 17, 18, 19

6.16. 12 i 4

6.17. 8 cm, 5 cm, 5 cm

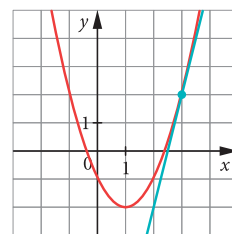
6.18. 5,2 cm i 3,4 cm

6.19. 40 cm i 42 cm

6.20. 84 cm

6.21. 6 i 9 lub -10 i -7

6.10. W układzie współrzędnych narysowane są parabola i prosta. Napisz układ równań, którego ilustracją jest przedstawiony obok rysunek. Sprawdź rachunkowo, że ten układ ma tylko jedno rozwiązanie.



6.11. Podaj przykład układu równań, który opisuje parabolę i prostą

a) o dwóch wspólnych punktach (1, 3) i (4, -3).

b) o jednym wspólnym punkcie (-4, -2).

6.12. Trójkąt wpisano w parabolę $y = \frac{1}{8}x^2$ w ten sposób, że jeden z jego wierzchołków jest wierzchołkiem paraboli, a dwa pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tej paraboli prostą $y = \frac{1}{4}x + 1$.

a) Wyznacz wierzchołki trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta.

6.13. Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są pierwiastkami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + p + q = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz p i q .

6.14. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 56. Wyznacz te liczby.

6.15. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 974. Wyznacz te liczby.

6.16. Suma dwóch liczb jest dwa razy większa od wartości bezwzględnej ich różnicy, a suma kwadratów tych liczb wynosi 160. Wyznacz te liczby.

6.17. W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona do podstawy jest równa 3 cm. Obwód trójkąta wynosi 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

6.18. Pole prostokąta jest równe $17,68 \text{ cm}^2$, a różnica długości jego boków wynosi 1,8 cm. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

6.19. Obwód rombu jest równy 116 cm, a różnica długości jego przekątnych równa się 2 cm. Oblicz długości przekątnych rombu.

6.20. Przeciwpromienna pewnego trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 2 cm, a od drugiej o 25 cm. Wyznacz obwód tego trójkąta.

6.21. Jeżeli do iloczynu dwóch liczb dodamy mniejszą z liczb, to otrzymamy 60. Jeżeli do tego iloczynu dodamy większą z nich, to otrzymamy 63. Jakie to liczby?

6.22. Do studni opuszczono kamień i po upływie 3,5 s usłyszano plask. Oblicz przybliżoną głębokość studni. Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

6.23. Ile boków ma wielokąt wypukły, który ma 90 przekątnych?

6.24. Dwa wielokąty wypukłe mają razem 28 boków i 158 przekątnych. Ile boków ma każdy z tych wielokątów?

* **6.25.** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych niepodzielnych przez 4 wynosi 1004. Wyznacz te liczby.

* **6.26.** Suma kwadratu wieku ojca i kwadratu wieku syna wynosi 2570. Za 4 lata iloczyn wieku ojca i wieku syna będzie o 280 większy niż jest obecnie. Ile lat ma teraz ojciec, a ile syn?

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

$$\text{Układ równań } \begin{cases} y = -x^2 - 4x - 1 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
B. ma dokładnie dwa rozwiązania.
C. jest spełniony przez parę liczb $(-3, 2)$.

2. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Przedstaw interpretację graficzną rozwiązania.

3. Podaj przykład układu równań, który opisuje parabolę i prostą o dwóch wspólnych punktach: $(-4, 4)$ i $(0, -2)$.

4. W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności. Iloczyn tej liczby i sumy jej cyfr jest równy 364. Jaka to liczba?

5. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych wynosi 1883. Wyznacz te liczby.

6.26. x – obecny wiek syna (w latach)

y – obecny wiek ojca (w latach), $x < y$; $x, y \in \mathbb{N}_+$

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 2570$$

$(x + 4)$ – wiek syna za 4 lata (w latach), $(y + 4)$ – wiek ojca za 4 lata (w latach)

$$(2) \quad (x + 4)(y + 4) = 280 + xy$$

$$16 + xy + 4x + 4y = 280 + xy \Leftrightarrow 4x + 4y = 264 \quad | :4$$

$$\begin{cases} x + y = 66 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2570 & (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 66 - x \\ x^2 + (66 - x)^2 = 2570 \end{cases}$$

$x > 0$ i $66 - x > x$, stąd $x > 0$ i $x < 33$. Zatem $D = (0; 33) \cap \mathbb{N}$.

$$(1) \quad 2x^2 - 132x + 66^2 - 2570 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 66x + 893 = 0$$

$$\Delta = 66^2 - 4 \cdot 893 = 4 \cdot 33^2 - 4 \cdot 893 = 4 \cdot (1089 - 893) = 4 \cdot 196, \quad \sqrt{\Delta} = 2 \cdot 14 = 28$$

$$x_1 = \frac{66 - 28}{2} = \frac{38}{2} = 19, \quad x_2 = \frac{66 + 28}{2} = \frac{94}{2} = 47 \notin D, \quad x = 19 \Rightarrow y = 47$$

Odp.: Obecnie syn ma 19 lat, a ojciec 47 lat.

6.22. ok. 56 m

6.23. 15

6.24. 12 i 16

6.25. Liczba parzysta niepodzielna przez 4 ma postać $2 \cdot (2k + 1)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Trzy kolejne liczby parzyste niepodzielne przez 4 to: $2(2k - 1)$, $2(2k + 1)$, $2(2k + 3)$.

Stąd otrzymujemy równanie:

$$4(2k - 1)^2 + 4(2k + 1)^2 + 4(2k + 3)^2 = 1004$$

$$k_1 = \frac{-1 - 9}{2} = -5, \quad k_2 = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

$$k = -5 \Rightarrow 2(2k - 1) = -22,$$

$$2(2k + 1) = -18, \quad 2(2k + 3) = -14$$

$$k = 4 \Rightarrow 2(2k - 1) = 14,$$

$$2(2k + 1) = 18, \quad 2(2k + 3) = 22$$

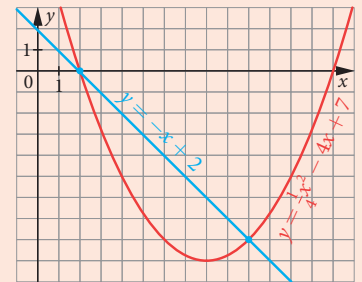
Odp.: Szukane liczby to: $-22, -18, -14$ lub $14, 18, 22$.

Prosto do matury

1. P, F, P

$$2. \quad x = 2, \quad y = 0$$

$$\text{lub } x = 10, \quad y = -8$$



$$3. \text{ np. } \begin{cases} y = -\frac{3}{8}x^2 - 3x - 2 \\ y = -\frac{3}{2}x - 2 \end{cases}$$

4. 52

5. 23, 25, 27 lub $-27, -25, -23$

◀ 7.5. Rozwiąż równanie z niewiadomą x i parametrem m .

a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 6 = 0$

b) $x^2 + 2mx + m^2 - 9 = 0$

c) $(m - 1)x^2 + 2mx + m + 5 = 0$

d) $\left(\frac{1}{4}m + 2\right)x^2 - 3mx + 9m = 0$

e) $4m^2x^2 + 4mx + 1 = 0$

f) $m^2x^2 - 3mx + 2m + 3 = 0$

Odp.: a) dla $m = \frac{5}{4}$: $x = \frac{11}{4}$,

dla $m > \frac{5}{4}$:

$x = \frac{2m + 3 - \sqrt{12m - 15}}{2}$ lub

$x = \frac{2m + 3 + \sqrt{12m - 15}}{2}$,

dla $m < \frac{5}{4}$: brak rozwiązań

b) dla $m \in \mathbb{R}$: $x = -m - 3$ lub

$x = -m + 3$

c) dla $m = 1$: $x = -3$,

dla $m = \frac{5}{4}$: $x = -5$,

dla $m < \frac{5}{4}$ i $m \neq 1$:

$x = \frac{-m - \sqrt{5 - 4m}}{m - 1}$ lub

$x = \frac{-m + \sqrt{5 - 4m}}{m - 1}$,

dla $m > \frac{5}{4}$: brak rozwiązań

d) dla $m = -8$: $x = -3$,

dla $m = 0$: $x = 0$,

dla $m < 0$ i $m \neq -8$:

$x = \frac{6m - 12\sqrt{-2m}}{m + 8}$ lub

$x = \frac{6m + 12\sqrt{-2m}}{m + 8}$,

dla $m > 0$: brak rozwiązań

e) dla $m \neq 0$: $x = -\frac{1}{2m}$,

dla $m = 0$: brak rozwiązań

f) dla $m = -\frac{3}{8}$: $x = -4$,

dla $m < -\frac{3}{8}$: $x = \frac{3 - \sqrt{-8m - 3}}{2m}$

lub $x = \frac{3 + \sqrt{-8m - 3}}{2m}$,

dla $m > -\frac{3}{8}$: brak rozwiązań

7. Równania kwadratowe z parametrem

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań kwadratowych z parametrem
- zastosowanie wzorów Viète'a

Rozwiązywanie równania z parametrem polega na wyznaczaniu liczby oraz postaci pierwiastków tego równania w zależności od wartości parametru.

We wszystkich omawianych przykładach i zadaniach x oznacza niewiadomą, a pozostałe litery to parametry.

Przykład 1 ◀ zad. 7.5

Rozwiążemy równanie $kx^2 - (2k - 1)x + k - 3 = 0$.

Rozwiązanie

I. Dla $k = 0$ otrzymujemy równanie pierwszego stopnia:

$$x - 3 = 0$$

którego rozwiązaniem jest $x = 3$.

II. Dla $k \neq 0$ mamy do rozwiązania równanie kwadratowe, w którym liczba rozwiązań zależy od wyróżnika Δ .

$$\Delta = (2k - 1)^2 - 4k(k - 3) = 8k + 1$$

- $\Delta < 0$ dla $k < -\frac{1}{8}$ ← brak pierwiastków
- $\Delta = 0$ dla $k = -\frac{1}{8}$ ← jeden pierwiastek

$$x_0 = \frac{2k - 1}{2k} = 5$$

- $\Delta > 0$ dla $k \neq 0$ i $k > -\frac{1}{8}$ ← dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{2k - 1 + \sqrt{8k + 1}}{2k}, \quad x_2 = \frac{2k - 1 - \sqrt{8k + 1}}{2k}$$

Odp.: Jeżeli $k = 0$, to $x = 3$.

Jeżeli $k = -\frac{1}{8}$, to $x = 5$.

Jeżeli $k \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right) \cup (0; \infty)$, to $x = \frac{2k - 1 + \sqrt{8k + 1}}{2k}$ lub $x = \frac{2k - 1 - \sqrt{8k + 1}}{2k}$.

Dla $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$ równanie nie ma rozwiązań.

ZZ i MKP

temat 1.7

Multiteka

- Równanie kwadratowe z parametrem

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 + 6mx + 3 = 0$ nie ma rozwiązań?

Rozwiązanie

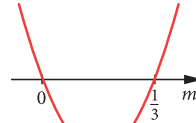
I. Dla $m = 0$ równanie ma postać $0x^2 + 0x + 3 = 0$, czyli $3 = 0$. Jest to równanie sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań, zatem $m = 0$ spełnia warunki zadania.

II. Dla $m \neq 0$ równanie jest kwadratowe i nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest ujemny.

$$\Delta = (6m)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 = 36m^2 - 12m$$

$$36m^2 - 12m < 0$$

$$3m\left(m - \frac{1}{3}\right) < 0, \text{ czyli } m \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$$



Podsumowując, równanie $mx^2 + 6mx + 3 = 0$ nie ma rozwiązań, gdy $m \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Odp.: $m \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$

Zastosowanie wzorów Viète'a

Wzory Viète'a są wygodnym narzędziem służącym do badania znaków pierwiastków oraz własności różnych wyrażeń, które można zapisać za pomocą sumy lub iloczynu pierwiastków danego równania kwadratowego.

Przykład 3 ◀ zad. 7.15

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 + (2k+1)x + k-2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Rozwiązanie

Równanie $x^2 + (2k+1)x + k-2 = 0$ dla każdej wartości parametru k jest równaniem kwadratowym. Aby miało dwa różne pierwiastki, jego wyróżnik musi być dodatni. Pierwiastki te będą liczbami ujemnymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn będzie dodatni i suma ujemna. Skorzystamy ze wzorów Viète'a, aby zapisać te warunki.

$$\Delta > 0 \text{ i } \frac{c}{a} > 0 \text{ i } -\frac{b}{a} < 0 \quad \leftarrow a = 1, b = 2k+1, c = k-2$$

Po podstawieniu wartości współczynników otrzymujemy układ nierówności.

$$\begin{cases} 4k^2 + 4k + 1 - 4k + 8 > 0 \\ k - 2 > 0 \\ -(2k+1) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4k^2 + 9 > 0 \\ k > 2 \\ k > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Pierwsza z nierówności układu jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą. Dane równanie ma zatem dwa różne rozwiązania ujemne dla $k \in (2; \infty)$.

Odp.: $k \in (2; \infty)$

◀7.15. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Odp.: $m \in (-\infty; -3)$

◀ 7.21. Dla jakich wartości parametru t suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 2tx + t^2 - t - 2 = 0$ jest najmniejsza?

Odp.: $t = -\frac{1}{2}$



Przykład 4 ◀ zad. 7.21

Wyznamy taką wartość parametru m , aby suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - (m-2)x - 3 - m = 0$ była najmniejsza.

Rozwiązanie

Współczynniki tego równania muszą spełnić dwa warunki:

I. $\Delta > 0$ ◀ warunek istnienia dwóch różnych pierwiastków

II. $x_1^2 + x_2^2$ ma przyjmować wartość najmniejszą.

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(-3-m) = m^2 + 16 \quad \leftarrow \text{wyróżnik dodatni dla każdego } m \in \mathbb{R}$$

Wyrazimy zależność $x_1^2 + x_2^2$ od współczynników trójmianu $ax^2 + bx + c$. Skorzystamy ze wzorów Viète'a.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (m-2)^2 - 2(-3-m) \quad \leftarrow a = 1, b = -(m-2), c = -3-m$$

$$x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m + 10$$

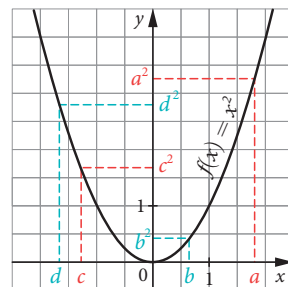
Suma kwadratów pierwiastków jest więc funkcją kwadratową zmiennej m . Wykresem tej funkcji jest parabola skierowana ramionami do góry. Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą dla $m = 1$.

Odp.: $m = 1$

Rozważanie zagadnień z parametrem często wiąże się z rozwiązywaniem nierówności. Jedną ze stosowanych wówczas metod jest podniesienie obydwu stron nierówności do kwadratu. Nie można tej operacji wykonywać bez pewnych założeń, bo na przykład $-5 < 3$, ale $25 > 9$. W jakiej sytuacji możemy zatem obie strony nierówności podnieść do kwadratu bez zmiany jej zwrotu, jeżeli chcemy otrzymać nierówność równoważną? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wykorzystamy informacje o monotoniczności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$. Jak wiemy, w przedziale $(0; \infty)$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $(-\infty; 0)$ – malejąca. Oznacza to, że:

- dla $a > 0$ i $b > 0$ nierówność $a > b$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $a^2 > b^2$,
- dla $c < 0$ i $d < 0$ nierówność $c > d$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $c^2 < d^2$.

Natomiast niczego nie można wywnioskować na temat zależności między kwadratami liczb o przeciwnych znakach.



Wniosek

Jeżeli obydwie strony nierówności są nieujemne, to możemy podnieść je do kwadratu bez zmiany zwrotu tej nierówności i otrzymamy w ten sposób nierówność równoważną.



Przykład 5 ◀ zad. 7.26

Wykażemy, że dla każdej wartości parametru $m \in \mathbf{R}$ równanie $x^2 + (6-m)x + 2(3-m) = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 oraz wyznaczmy te wartości m , dla których pierwiastki równania spełniają warunek $|x_1 - x_2| < 3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} x^2 + (6-m)x + 2(3-m) &= 0 & (1) \\ \Delta &= (6-m)^2 - 4 \cdot 2(3-m) = m^2 - 4m + 12 & \leftarrow \Delta_m = 16 - 48 = -32 \end{aligned}$$

Wyróżnik Δ_m trójmianu $m^2 - 4m + 12$ jest ujemny, zatem dla każdego $m \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $\Delta > 0$. Oznacza to, że równanie (1) ma dwa różne pierwiastki niezależnie od wartości parametru m .

Nierówność $|x_1 - x_2| < 3$ zapiszemy w równoważnej postaci, aby skorzystać ze wzorów Viète'a. Obie strony nierówności są dodatnie – podnosimy je do kwadratu:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| < 3 & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (x_1 - x_2)^2 < 9 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 < 9 & \leftarrow \text{przekształcamy tak, aby otrzymać } (x_1 + x_2)^2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 < 9 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9 & \leftarrow \text{stosujemy wzory Viète'a} \\ (6-m)^2 - 8(3-m) < 9 & \leftarrow a = 1, b = 6-m, c = 2(3-m) \\ m^2 - 4m + 3 < 0, & \text{ czyli } m \in (1; 3) \end{aligned}$$

Odp.: $m \in (1; 3)$

Zadania

W zadaniach 7.1–7.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.1. Równanie $x^2 - kx = 0$

- A. dla pewnej wartości k nie ma pierwiastków.
 B. dla pewnej wartości k ma dokładnie jeden pierwiastek.
 C. dla dowolnej wartości $k \in \mathbf{R}$ ma dwa różne pierwiastki.

7.2. Równanie $ax^2 + bx + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie. Zatem

- A. $b^2 - 12a > 0$. B. $a > 0$. C. $b > 0$.

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. F, P, F

7.2. P, P, F

◀ **7.26.** Dany jest trójmian kwadratowy

$\frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + 3 - m$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 4$.

Odp.: $\frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + 3 - m = 0$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ |x_1 - x_2| < 4 & (2) \\ x_1x_2 > 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Delta = m^2 + 4m - 5$$

$$\Delta_m = 16 + 20 = 36, \sqrt{\Delta_m} = 6$$

$$m_1 = \frac{-4-6}{2} = -5,$$

$$m_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$$



$$m \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$$

$$(2) (x_1 - x_2)^2 < 16$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 16$$

$$\left(\frac{m+1}{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3-m}{\frac{1}{2}} < 16 \quad | : 4$$

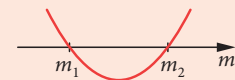
$$m^2 + 2m + 1 - 6 + 2m < 4$$

$$m^2 + 4m - 9 < 0,$$

$$\Delta_m = 16 + 36 = 52, \sqrt{\Delta_m} = 2\sqrt{13}$$

$$m_1 = \frac{-4-2\sqrt{13}}{2} = -2 - \sqrt{13},$$

$$m_2 = \frac{-4+2\sqrt{13}}{2} = -2 + \sqrt{13}$$



$$m \in (-2 - \sqrt{13}; -2 + \sqrt{13})$$

$$(3) \frac{3-m}{\frac{1}{2}} > 0, \text{ stąd } m < 3$$

Zatem:

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty) \\ m \in (-2 - \sqrt{13}; -2 + \sqrt{13}) \\ m < 3 \end{cases}$$

$$m \in (-2 - \sqrt{13}; -5) \cup (1; -2 + \sqrt{13})$$

7.3. P, P, F**7.4.** P, F, P**7.5. a)** dla $m = \frac{5}{4}$: $x = \frac{11}{4}$,dla $m > \frac{5}{4}$:

$$x = \frac{2m+3-\sqrt{12m-15}}{2}$$

$$\text{lub } x = \frac{2m+3+\sqrt{12m-15}}{2},$$

dla $m < \frac{5}{4}$: brak rozwiązań**b)** dla $m \in \mathbb{R}$: $x = -m - 3$ lub $x = -m + 3$ **c)** dla $m = 1$: $x = -3$,dla $m = \frac{5}{4}$: $x = -5$,dla $m < \frac{5}{4}$ i $m \neq 1$:

$$x = \frac{-m - \sqrt{5-4m}}{m-1}$$

$$\text{lub } x = \frac{-m + \sqrt{5-4m}}{m-1},$$

dla $m > \frac{5}{4}$: brak rozwiązań**d)** dla $m = -8$: $x = 3$,dla $m = 0$: $x = 0$,dla $m < 0$ i $m \neq -8$:

$$x = \frac{6m-12\sqrt{-2m}}{m+8}$$

$$\text{lub } x = \frac{6m+12\sqrt{-2m}}{m+8},$$

dla $m > 0$: brak rozwiązań**e)** dla $m \neq 0$: $x = -\frac{1}{2m}$,dla $m = 0$: brak rozwiązań**f)** dla $m = -\frac{3}{8}$: $x = -4$,

$$\text{dla } m < -\frac{3}{8}: x = \frac{3-\sqrt{-8m-3}}{2m}$$

$$\text{lub } x = \frac{3+\sqrt{-8m-3}}{2m},$$

dla $m > -\frac{3}{8}$: brak rozwiązań

7.6. 0 rozwiązań dla $m \in (0; 1)$,
1 rozwiązanie dla $m \in \{-1, 0\}$,
2 rozwiązania dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (1; \infty)$

7.7.

$$m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{2}{5}\right) \cup (1; \infty)$$

7.8. a) dla $m = -3$: $x = -3$,dla $m = 2$: $x = 2$ **b)** dla $m = -1$: $x = 0$,

$$\text{dla } m = 2 - \sqrt{5}: x = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{dla } m = 2 + \sqrt{5}: x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

7.9. a) $m \in \left\langle -1\frac{2}{3}; 1 \right\rangle$ **b)** $m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \langle 2; \infty \rangle$ **7.3.** Równanie $mx^2 + x - 1 = 0$ **A.** dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie.**B.** dla $m = -\frac{1}{4}$ ma jedno rozwiązanie.**C.** dla $m = \sqrt{2}$ nie ma rozwiązań.**7.4.** Współczynnik m jest taką liczbą, dla której równanie $x^2 - mx + m = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek x_0 . Wynika stąd, że**A.** $x_0 \in \mathbb{Z}$.**B.** $x_0 < 0$.**C.** x_0 jest liczbą parzystą.**7.5.** Rozwiąż równanie z niewiadomą x i parametrem m .

$$\text{a) } x^2 - (2m+3)x + m^2 + 6 = 0$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{4}m + 2\right)x^2 - 3mx + 9m = 0$$

$$\text{b) } x^2 + 2mx + m^2 - 9 = 0$$

$$\text{e) } 4m^2x^2 + 4mx + 1 = 0$$

$$\text{c) } (m-1)x^2 + 2mx + m + 5 = 0$$

$$\text{f) } m^2x^2 - 3mx + 2m + 3 = 0$$

7.6. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $(m^2 - 1)x^2 - 2(m-1)x - 1 = 0$ w zależności od wartości parametru m .**7.7.** Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?**7.8.** Dla jakich wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie? Dla znalezionych wartości m oblicz pierwiastki danego równania.

$$\text{a) } x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 6 = 0$$

$$\text{b) } (m-1)x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 + m = 0$$

7.9. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie?

$$\text{a) } x^2 - (m-1)x + m^2 - 1 = 0$$

$$\text{b) } mx^2 - 4(m-1)x + m = 0$$

7.10. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m równanie

$$\text{a) } x^2 - (2m-1)x + m - 3 = 0 \text{ ma dwa różne pierwiastki.}$$

$$\text{b) } mx^2 - (m+5)x + 5 = 0 \text{ ma co najmniej jeden pierwiastek.}$$

$$\text{c) } x^2 - 4mx + 4m^2 = 0 \text{ ma jeden pierwiastek.}$$

7.11. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2(m+1)x + m + \frac{7}{4} = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 + x_2 > 0$?**7.12.** Dla jakich wartości parametru m równanie $-x^2 + mx - m^2 + 2m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 + x_2 = x_1x_2 + 1$?

$$\text{7.10. a) } x^2 - (2m-1) \cdot x + m - 3 = 0$$

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m-3) = 4(m-1)^2 + 9 > 0 \text{ dla } m \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } mx^2 - (m+5) \cdot x + 5 = 0$$

Dla $m = 0$ mamy równanie $-5x + 5 = 0$, które ma jedno rozwiązanie.

$$\text{Dla } m \neq 0 \text{ mamy } \Delta = (m+5)^2 - 20m = (m-5)^2 \geq 0.$$

Zatem równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie dla $m \in \mathbb{R}$.

$$\text{c) } x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$$

$$\text{I sposób: } x^2 - 4mx + 4m^2 = (x-2m)^2$$

$$\text{II sposób: } \Delta = 16m^2 - 16m^2 = 0, \text{ więc równanie ma jedno rozwiązanie.}$$

$$\text{7.11. } m \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$\text{7.12. } m = 1$$

7.13. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2(2m - 3)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku?

7.14. Dla jakich wartości parametru m dane równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ b) $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

7.15. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

7.16. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - mx + m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

7.17. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji

$f(x) = mx^2 + 2(m - 1)x + m + 2$ i $g(x) = x^2 - mx - 1$ przecinają się w dwóch punktach? Czy istnieje taka wartość m , dla której punkty przecięcia wykresów tych funkcji są położone symetrycznie względem osi rzędnych?

7.18. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = 2x^2 + x - m$ i $g(x) = mx^2 - 2mx + 3$ przecinają się w dwóch punktach, których odcięte mają różne znaki?

7.19. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których iloczyn jest równy połowie ich sumy?

7.20. Dla jakich wartości parametru m suma dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ jest mniejsza od iloczynu tych pierwiastków?

7.21. Dla jakich wartości parametru t suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 2tx + t^2 - t - 2 = 0$ jest najmniejsza?

7.22. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 + 1 = 0$ jest równa 19?

7.23. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - (m - 5)x + m^2 - 6m + 5 = 0$ jest większa od 7?

7.24. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $3x^2 + (1 - 3m)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 takie, że

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{41}}{3}.$$

7.13. $m \in \left(1; 1\frac{1}{4}\right) \cup (2; \infty)$

7.14. a) Nie ma takiego m .
b) $m \in (1; 2)$

7.15. $m \in (-\infty; -3)$

7.16. $m \in (6; \infty)$

7.17. nie; $m \in (-\infty; 1) \cup \left(1; 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}; \infty\right)$

7.18. $m \in (-3; 2)$

7.19. $m = 3,5$

7.20. $m \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup \left(\sqrt{6}; 5\frac{1}{4}\right)$

7.21. $t = -\frac{1}{2}$

7.22. $m = -1$

7.23. $m \in \left(-\frac{1}{3}; 4\right)$

7.24. $m \in \left\{-\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right\}$

7.25. $m \in \langle -\sqrt{2}; -1 \rangle$

7.26. Patrz s. 53.

7.27. Patrz zad. 7.26.

7.28. $x^2 + (2m-2)x + m - 2 = 0$

$\Delta > 0$ (1)

$|x_1| + |x_2| < 2$ (2)

(1) $\Delta = (2m-2)^2 - 4(m-2) =$

$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m + 8 =$

$= 4m^2 - 12m + 12 =$

$= 4(m^2 - 3m + 3)$

$\Delta_m = 9 - 12 < 0$



$\Delta > 0$ dla $m \in \mathbb{R}$

(2) $(|x_1| + |x_2|)^2 < 4$

$x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1||x_2| < 4$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| < 4$

$(2m-2)^2 - 2(m-2) + 2|m-2| < 4$

$4m^2 - 8m + 4 - 2m + 4 + 2|m-2| < 4$

$4m^2 - 10m + 4 + 2|m-2| < 0 \quad | : 2$

$2m^2 - 5m + 2 + |m-2| < 0$

I przypadek

$m \in (-\infty; 2)$

$2m^2 - 5m + 2 + 2 - m < 0$

$2m^2 - 6m + 4 < 0 \quad | : 2$

$m^2 - 3m + 2 < 0$

$\Delta = 1$

$m_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad m_2 = \frac{3+1}{2} = 2$



$m \in (1; 2)$

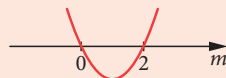
II przypadek

$m \in \langle 2; \infty \rangle$

$2m^2 - 5m + 2 + m - 2 < 0$

$2m^2 - 4m < 0$

$2m \cdot (m-2) < 0$



$m \in (0; 2)$

brak rozwiązań

Odp.: $m \in (1; 2)$

7.25. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$x^2 - 2mx + m^2 + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek

$x_1x_2 \leq m+3 \leq x_1^2 + x_2^2$.

* **7.26.** Dany jest trójmian kwadratowy $\frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + 3 - m$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 4$.

* **7.27.** Dany jest trójmian kwadratowy $x^2 + (m-3)x - m^2 + 2m + 3$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| > 4$.

* **7.28.** Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (2m-2)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| < 2$?

Prosto do matury



1. Funkcja $y = f(k)$ określa iloczyn dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - kx - k^2 - 10k = 0$ w zależności od wartości parametru k .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedzina funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

C. Funkcja f osiąga wartość największą dla $k = -5$.

2. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - x + m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

3. Dla jakich wartości parametru k równanie $(k+1)x^2 - 4kx + k + 1 = 0$ ma jeden pierwiastek?

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

5. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m-6)x + m - 7 = 0$ jest najmniejsza?

Prosto do matury

1. F, F, F

2. $m \in \left(-\infty; 3\frac{1}{4}\right)$

3. $k \in \left\{-1, -\frac{1}{3}, 1\right\}$

4. $m \in \left(5\frac{1}{2}; \infty\right)$

5. $m = 7$

8. Nierówności kwadratowe z parametrem

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z parametrem

Przykład 1 ◀ zad. 8.7

Dla jakich wartości parametru m nierówność $mx^2 - (2m - 1)x + 2m - 1 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:

$$a = m, \quad b = -(2m - 1), \quad c = 2m - 1$$

Nierówność $ax^2 + bx + c > 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą x w dwóch przypadkach.

$$\text{I. } a = 0 \text{ i } b = 0 \text{ i } c > 0 \quad \leftarrow 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c > 0$$

$$\text{II. } a > 0 \text{ i } \Delta < 0 \quad \leftarrow \text{ramiona paraboli skierowane do góry i brak pierwiastków}$$

Zauważmy, że $a = 0$ dla $m = 0$, ale wówczas $b \neq 0$, czyli pierwszy przypadek nie jest możliwy. Rozważmy drugą możliwość.

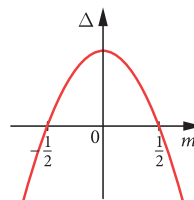
Rozwiążemy układ nierówności:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m > 0 \\ (2m - 1)^2 - 4m(2m - 1) < 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{wylączamy wspólny czynnik } (2m - 1) \text{ przed nawias}$$

Δ jest trójmianem kwadratowym zmiennej m , zatem, aby rozwiązać nierówność $\Delta < 0$, musimy znaleźć miejsca zerowe i odczytać rozwiązanie z odpowiedniego wykresu.

$$\begin{cases} m > 0 \\ (2m - 1)(-2m - 1) < 0 \end{cases} \quad \leftarrow m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \end{cases}$$



Odp.: Podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, gdy $m \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

◀8.7. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich wartości $x \in \mathbb{R}$?

$$\text{a) } 3x^2 + 2x - m > 0$$

$$\text{b) } mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$$

$$\text{c) } (m - 1)x^2 + (m - 1)x + m > 0$$

$$\text{d) } (2m - 3)x^2 + 4mx + m - 1 < 0$$

$$\text{e) } x^2 + 2mx + 2m^2 + 8m + 7 > 0$$

$$\text{f) } (m + 3)x^2 + 2(m + 1)x + 4(m + 1) < 0$$

$$\text{Odp.: a) } m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{b) } m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{c) } m \in (1; \infty)$$

$$\text{d) } m \in \left(-3; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{e) } m \in (-\infty; -7) \cup (-1; \infty)$$

$$\text{f) } m \in \left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$$

ZZ i MKP

temat 1.7

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

◀8.13. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x-3)(x-k) < 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle -1; 2 \rangle$?

Odp.: $k \in (-\infty; -1)$

Przykład 2 ◀ zad. 8.13

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(x+3m)(x-m-2) < 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby z przedziału $\langle 1; 5 \rangle$?

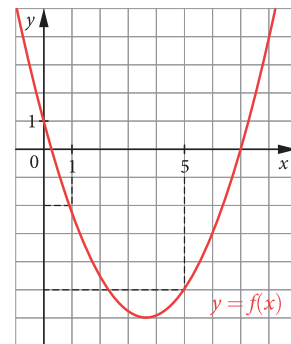
Rozwiązanie

Zauważmy, że po lewej stronie nierówności mamy trójmian kwadratowy zmiennej x w postaci iloczynowej, czyli dla każdej wartości m trójmian ten ma miejsca zerowe. Oznaczmy $f(x) = (x+3m)(x-m-2)$.

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem warunek zadania będzie spełniony, gdy dla $x = 1$ oraz $x = 5$ wartości funkcji f będą ujemne.

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(5) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1+3m)(-m-1) < 0 \\ (5+3m)(3-m) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right) \\ m \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (3; \infty) \end{cases}$$



Obydwa warunki są spełnione dla $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (3; \infty)$.

Odp.: Nierówność $(x+3m)(x-m-2) < 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby z przedziału $\langle 1; 5 \rangle$, gdy $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (3; \infty)$.

Przykład 3 ◀ zad. 8.19

Wyznamy zbiór rozwiązań nierówności $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 > 0$ w zależności od parametru m .

Rozwiązanie

I. $m = 2$

Nierówność ma wówczas postać $-4x + 3 > 0$, czyli $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$.

II. $m \neq 2$

Nierówność jest kwadratowa i zbiór jej rozwiązań zależy od znaku współczynnika przy x^2 oraz od znaku wyróżnika.

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m-2)(m+1) = 4m^2 - 4(m^2 - m - 2) = 4(m+2)$$

Zatem współczynnik przy x^2 zmienia znak w $m = 2$, a wyróżnik w $m = -2$.

Zaznamy na osi m przedziały, w których należy rozważyć rozwiązanie nierówności $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 > 0$.

◀8.19. Określ zbiór rozwiązań nierówności $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 < 0$ w zależności od wartości parametru m .

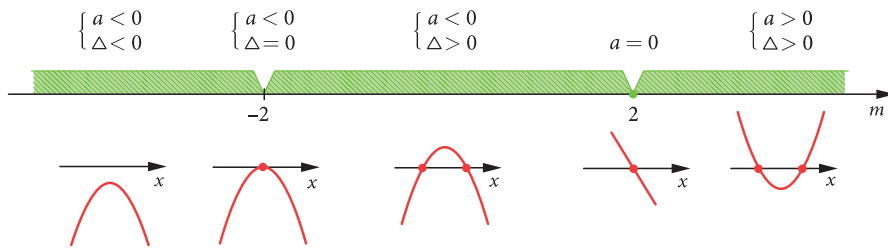
Odp.: dla $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$: $x \in \mathbf{R}$,

dla $m = -\frac{1}{3}$: $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$,

dla $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$: $x \in \left(-\infty; \frac{m+1+\sqrt{3m+1}}{m}\right) \cup \left(\frac{m+1-\sqrt{3m+1}}{m}; \infty\right)$,

dla $m = 0$: $x \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$,

dla $m \in (0; \infty)$: $x \in \left(\frac{m-1-\sqrt{3m+1}}{m}; \frac{m+1+\sqrt{3m+1}}{m}\right)$



- Dla $m \in (-\infty; -2)$ nierówność nie ma rozwiązań.
- Dla $m \in (-2; 2)$ rozwiązania nierówności tworzą przedział pomiędzy miejscami zerowymi trójmianu.

$$x_1 = \frac{2m - 2\sqrt{m+2}}{2(m-2)} = \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}, \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}$$

Żeby zapisać rozwiązanie nierówności danej w zadaniu, musimy stwierdzić, który z pierwiastków x_1, x_2 jest większy. W tym celu zbadamy znak różnicy $x_1 - x_2$.

$$x_1 - x_2 = \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2} - \frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2} = \frac{-2\sqrt{m+2}}{m-2}$$

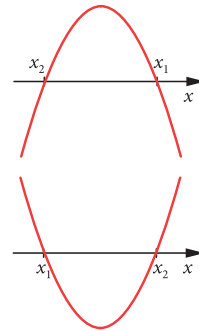
Mianownik $m - 2$ jest ujemny, czyli $x_1 > x_2$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 > 0$

jest więc przedział $\left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right)$.

- Dla $m \in (2; \infty)$ rozwiązania nierówności tworzą sumę przedziałów. Zauważmy, że tym razem $x_1 < x_2$. Zatem:

$$x \in \left(-\infty; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right) \cup \left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \infty\right)$$



Odp.: Dla $m \in (-\infty; -2)$ nierówność nie ma rozwiązań. Jeżeli $m \in (-2; 2)$, to

$$x \in \left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right). \text{ Jeżeli } m = 2, \text{ to } x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right).$$

$$\text{Jeżeli } m \in (2; \infty), \text{ to } x \in \left(-\infty; \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}\right) \cup \left(\frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}; \infty\right).$$

Zadania

W zadaniach 8.1–8.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

8.1. Nierówność $mx^2 + mx + 1 \geq 0$

A. dla $m = 0$ nie ma rozwiązań.

B. dla $m = 1$ ma jedno rozwiązanie.

C. dla $m = -1$ nie ma rozwiązań.

D. dla $m = 5$ nie ma rozwiązań.

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. F, F, F, F

8.2. F, F, F, P

8.3. P, F, P

8.4. F, P, F

8.5. dla $m < 0$: $x \in (-\infty; 2m) \cup (-2m; \infty)$,dla $m = 0$: $x \in \mathbf{R} - \{0\}$,dla $m > 0$: $x \in (-\infty; -2m) \cup (2m; \infty)$ 8.6. dla $k > 0$: $x \in \langle -1; 1 \rangle$,dla $k = 0$: $x \in \mathbf{R}$,dla $k < 0$: $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$ 8.7. a) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ b) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ c) $m \in \langle 1; \infty \rangle$ d) $m \in \left(-3; \frac{1}{2}\right)$ e) $m \in (-\infty; -7) \cup (-1; \infty)$ f) $m \in \left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$ 8.8. $m \in (-\infty; -1) \cup \left\langle \frac{17}{23}; \infty \right\rangle$ 8.9. $m \in \left(-8 - 2\sqrt{15}; -8 + 2\sqrt{15}\right)$ 8.10. $m \in \left\langle \frac{3}{4}; \infty \right\rangle$ 8.11. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \langle 1; \infty \rangle$ 8.12. $m \in \langle 0; \infty \rangle$ 8.13. $k \in (-\infty; -1)$ 8.19. $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 < 0$ • Dla $m = 0$ mamy nierówność $-2x - 1 < 0$, stąd $x \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$.• Dla $m \neq 0$ nierówność jest kwadratowa. $\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m-1) = 4(3m+1)$ $\Delta < 0$ dla $m < -\frac{1}{3}$ (1) $\Delta = 0$ dla $m = -\frac{1}{3}$ (2) $\Delta > 0$ dla $m > -\frac{1}{3}$ i $m \neq 0$ (3)(1) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. Wtedy $m < 0$ i $\Delta < 0$. $x \in \mathbf{R}$ (2) $m = -\frac{1}{3}$. Wtedy $m < 0$, $\Delta = 0$. $x_0 = \frac{m+1}{m} = -2$ $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ 8.2. Zbiorem rozwiązań nierówności $kx^2 + kx > 0$ A. dla $k = 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych. C. dla $k > 0$ jest przedział $(-1; 0)$.B. dla $k < 0$ jest przedział $(-\infty; 0)$.D. dla $k = -1$ jest przedział $(-1; 0)$.8.3. Zbiorem rozwiązań nierówności $m(x+3)(x-m) < 0$ A. dla $m > 0$ jest zbiór $(-3; m)$.B. dla $m < 0$ jest zbiór $(-3; m)$.C. dla $m < -3$ jest zbiór $(-\infty; m) \cup (-3; \infty)$.8.4. Nierówność $kx^2 + x + k > 0$ nie ma rozwiązańA. dla $k \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.B. dla $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.C. dla $k \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.8.5. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4m^2 > 0$ w zależności od wartości parametru m .8.6. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $kx^2 - k \leq 0$ w zależności od wartości parametru k .8.7. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich wartości $x \in \mathbf{R}$?a) $3x^2 + 2x - m > 0$ d) $(2m-3)x^2 + 4mx + m - 1 < 0$ b) $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$ e) $x^2 + 2mx + 2m^2 + 8m + 7 > 0$ c) $(m-1)x^2 + (m-1)x + m > 0$ f) $(m+3)x^2 + 2(m+1)x + 4(m+1) < 0$ 8.8. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(3m^2 + m - 2)x^2 + (m+1)x + 2 < 0$ nie ma rozwiązań?8.9. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(x-2)(x+m) > 3m$ jest spełniona dla wszystkich wartości $x \in \mathbf{R}$?8.10. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(mx-3)(x-2) < -m$ nie ma rozwiązań?8.11. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + (m-3)x + m^2 - 2m + 2}$. Dla jakich wartości parametru m dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych?8.12. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{mx^2 + mx + m + 2}}$ jest zbiór liczb rzeczywistych?8.13. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x-3)(x-k) < 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle -1; 2 \rangle$?(3a) $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. Wtedy $m < 0$, $\Delta > 0$.

$$x_1 = \frac{2(m+1) - 2\sqrt{3m+1}}{2m} = \frac{m+1 - \sqrt{3m+1}}{m},$$

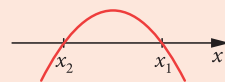
$$x_2 = \frac{2(m+1) + 2\sqrt{3m+1}}{2m} = \frac{m+1 + \sqrt{3m+1}}{m}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-2\sqrt{3m+1}}{m} > 0, \text{ więc } x_1 > x_2$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{m+1 + \sqrt{3m+1}}{m}\right) \cup \left(\frac{m+1 - \sqrt{3m+1}}{m}; \infty\right)$$

(3b) $m \in (0; \infty)$. Wtedy $m > 0$, $\Delta > 0$. x_1, x_2 jak w punkcie (3a), ale $x_1 < x_2$.

$$x \in \left(-\infty; \frac{m+1 - \sqrt{3m+1}}{m}\right) \cup \left(\frac{m+1 + \sqrt{3m+1}}{m}; \infty\right)$$



8.14. Dla jakich wartości parametru m nierówność $x^2 + (m-1)x - m > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb ze zbioru $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$?

8.15. Dla jakich wartości parametru k nierówność $3x^2 + 13x - 10 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle 3k; 3k+10 \rangle$?

D 8.16. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $4x^2 + (12-4m)x + m^2 - 6m + 10 > 0$.

D 8.17. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność $a^2 + 5b^2 - 4ab - 6b + 9 \geq 0$.

D 8.18. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby k prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 4(k+1)x + (k+1)(k+4) > 0$.

*** 8.19.** Określ zbiór rozwiązań nierówności $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 < 0$ w zależności od wartości parametru m .

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Zbiorem rozwiązań nierówności $mx^2 - m^2x < 0$

A. dla $m > 0$ jest przedział $(0; m)$.

B. dla $m < 0$ jest zbiór $(-\infty; 0) \cup (m; \infty)$.

C. dla $m < 0$ jest zbiór $(-\infty; m) \cup (0; \infty)$.

2. Dla jakich wartości parametru m nierówność $3x^2 + mx + 1 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

3. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(k^2 - k - 6)x^2 + 3(k+2)x + 1 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

4. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(x-2m)(x-m-3) > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle 0; 4 \rangle$?

D 5. Wykaż, że dla każdego $m \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x^2 + (m-2)x + m^2 - 2m + 2$ przyjmuje dla wszystkich argumentów $x \in \mathbb{R}$ tylko wartości dodatnie.

8.14. $m \in \langle -5; 2 \rangle$

8.15. $k \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{2}{9}; \infty\right)$

8.16. Niech

$$f(x) = 4x^2 + (12-4m)x + m^2 - 6m + 10.$$

$$\Delta = (12-4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - 6m + 10) =$$

$$= -16 < 0, \text{ więc } f(x) > 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

8.17. $a^2 + 5b^2 - 4ab - 6b + 9 =$
 $= (a^2 - 4ab + 4b^2) + (b^2 - 6b + 9) =$
 $= (a-2b)^2 + (b-3)^2 \geq 0$
dla $a, b \in \mathbb{R}$

8.18. Niech

$$f(x) = 5x^2 - 4(k+1)x + (k+1)(k+4).$$

$$\Delta = 16(k+1)^2 - 20(k+1)(k+4) =$$

$$= 4(k+1)[4(k+1) - 5(k+4)] =$$

$$= 4(k+1)[4k+4 - 5k-20] =$$

$$= 4(k+1)(-k-16) =$$

$$= -4(k+1)(k+16)$$

Jeżeli $k > 0$, to $\Delta < 0$.
Zatem $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

8.19. Patrz s. 60.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $m \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$

3. $k \in (-6; -2)$

4. $m \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

5. $f(x) = x^2 + (m-2)x + m^2 - 2m + 2$

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(m^2 - 2m + 2) = m^2 - 4m + 4 - 4m^2 + 8m - 8 = -3m^2 + 4m - 4$$

$$\Delta_m = 16 - 48 < 0$$

Zatem $\Delta < 0$ dla $m \in \mathbb{R}$.

Oznacza to, że $f(x) > 0$ dla $m \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$.



9. Własności funkcji kwadratowej – podsumowanie

Umiejętności:

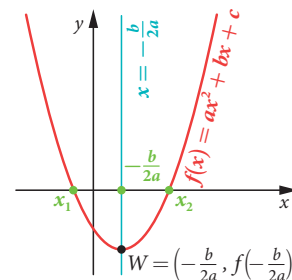
- szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności lub wykresu
- szkicowanie wykresu funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami
- odczytywanie własności funkcji z jej wykresu

Przypomnijmy – jeżeli $f(x) = ax^2 + bx + c$ i $a \neq 0$, to:

- $x_w = -\frac{b}{2a}$ ← pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli
- $x = -\frac{b}{2a}$ ← równanie osi symetrii paraboli

Jeżeli ponadto $\Delta \geq 0$, to można pokazać, że:

- $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ ← średnia arytmetyczna miejsc zerowych



◀9.1. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

Odp.: Patrz s. 71.

Przykład 1 ◀ zad. 9.1

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy wielkości przydatne przy rysowaniu wykresu:

- miejsca zerowe funkcji,
- współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli,
- współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią y .

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = -1, x_2 = -3$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad y_w = f(x_w) = f(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 3)$, ma ramiona skierowane do góry oraz kształt taki, jak parabola o równaniu $y = x^2$ (bo we wzorze funkcji współczynnik przy x^2 jest równy 1).

Jeżeli $0 \in D$, to punkt $(0, f(0))$ należy do wykresu funkcji $y = f(x)$.
Dla funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest to punkt $(0, c)$.

ZZ i MKP

temat 1.5

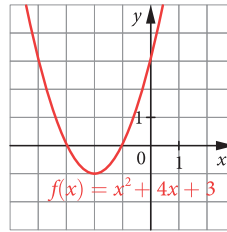
Multiteka

• Układy równań

dla nauzyciela.pl | Kartkówka 1.9

Generator
testów i sprawdzianów

Na podstawie narysowanego wykresu opisujemy własności funkcji f :



- dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$,
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; \infty \rangle$,
- funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -1 dla $x = -2$ i nie przyjmuje wartości największej,
- miejscami zerowymi funkcji są argumenty $x_1 = -1$, $x_2 = -3$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -1)$,
- osią symetrii wykresu jest prosta $x = -2$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
w przedziale $(-\infty; -2)$ funkcja jest malejąca,
w przedziale $(-2; \infty)$ funkcja jest rosnąca,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < -1$ nie ma rozwiązań,
dla $m = -1$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m > -1$ ma dwa rozwiązania.

Przykład 2 ◀ zad. 9.2 a, b

Narysujemy wykres i opisujemy własności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 & \text{dla } x \in (2; 7) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wykres funkcji f jest sumą fragmentów dwóch parabol.

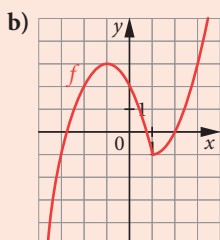
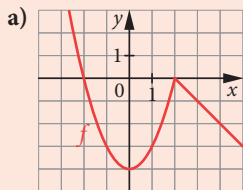
Pierwsza z nich, o równaniu $y = x^2 - 4$, ma wierzchołek o współrzędnych $(0, -4)$ i przecina oś x w punktach o pierwszych współrzędnych $x = -2$ oraz $x = 2$.

Do wykresu funkcji f wybieramy te punkty pierwszej paraboli, których pierwsze współrzędne spełniają warunek $x \in (-\infty; 2)$, w tym punkt $(2, 0)$.

Druga parabola, o równaniu $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$, ma wierzchołek o współrzędnych $(4, 2)$. Pierwsze współrzędne punktów przecięcia tej paraboli z osią x są rozwiązaniami równania $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$. Są to liczby $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 6$.

Do wykresu funkcji f wybieramy te punkty drugiej paraboli, których pierwsze współrzędne spełniają warunek $x \in (2; 7)$.

9.2. Odp.:



$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-2, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (2; \infty)$; funkcja malejąca w każdym
z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $\langle 2; \infty \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$; brak
wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma:
1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$, 2 rozwiązania dla
 $m \in \{-4, 0\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-4; 0)$

$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-1 - \sqrt{3}$, $-1 + \sqrt{3}$, 2 ;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla
 $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}; 2)$; funkcja rosnąca w każdym
z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $\langle 1; \infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$;
brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma:
1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, 2 rozwiązania dla
 $m \in \{-1, 3\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-1; 3)$

◀9.2. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x + 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ dla $x = 2$ jest równa 0, czyli jest równa wartości funkcji f w punkcie 2. Zatem w punkcie o współrzędnych $(2, 0)$ fragment wykresu funkcji $y = x^2 - 4$ przechodzi we fragment wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

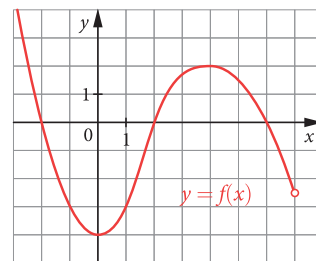
Obliczamy jeszcze wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ dla $x = 7$.

$$-\frac{1}{2} \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 - 6 = -\frac{49}{2} + 22 = -2\frac{1}{2}$$

Skoro $7 \notin D$, to punkt $(7, -2\frac{1}{2})$ będzie na wykresie zaznaczony pustym kółeczkiem.

Odczytujemy z wykresu własności funkcji:

- dziedziną jest zbiór $(-\infty; 7)$,
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -4; \infty \rangle$,
- funkcja ma wartość najmniejszą równą -4 dla $x = 0$ i nie ma wartości największej,
- miejscami zerowymi funkcji są argumenty: $x = -2$, $x = 2$, $x = 6$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 6)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (6; 7)$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
w przedziale $(-\infty; 0)$ jest malejąca,
w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$ jest rosnąca,
w przedziale $\langle 4; 7 \rangle$ jest malejąca,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < -4$ nie ma rozwiązań,
dla $m = -4$ oraz dla $m > 2$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m \in (-4; -2\frac{1}{2}) \cup \{2\}$ ma dwa rozwiązania,
dla $m \in (-2\frac{1}{2}; 2)$ ma trzy rozwiązania.



9.2. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

c) $f(x) =$

$$= \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{dla } x \leq -1 \\ x + 3 & \text{dla } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 6x - 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

d) $f(x) =$

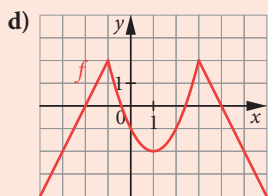
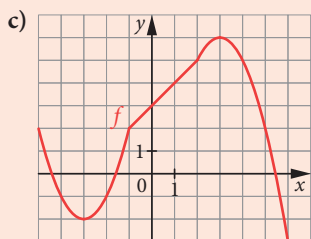
$$= \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{dla } -1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

Przykład 3 ◀ zad. 9.2 c, d

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ -x^2 - 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$$

9.2. Odp.:

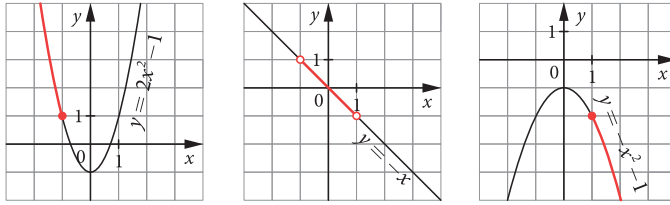


$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-3 - \sqrt{2}$, $-3 + \sqrt{2}$, $3 + \sqrt{6}$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{6})$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3 - \sqrt{2}; -3 + \sqrt{2}) \cup (3 + \sqrt{6}; \infty)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -3)$ i $\langle 3; \infty \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2, 6\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 6)$

$D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 2)$; miejsca zerowe: -2 , $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, 4 ; $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; 4)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \cup (4; \infty)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $\langle 1; 3 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle -1; 1 \rangle$ i $\langle 3; \infty \rangle$; brak wartości najmniejszej, wartość największa: 2 dla $x = -1$ i $x = 3$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$, 3 rozwiązania dla $m = -2$, 4 rozwiązania dla $m \in (-2; 2)$

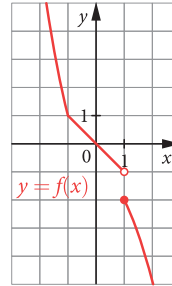
Rozwiązanie

Z trzech wykresów poszczególnych funkcji wybieramy odpowiednie fragmenty.



Rysujemy wykres funkcji f (obrazowo mówiąc, sklejony z wybranych fragmentów) i na jego podstawie opisujemy własności funkcji:

- dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$,
- zbiorem wartości jest zbiór $(-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$,
- funkcja nie ma wartości najmniejszej i nie ma wartości największej,
- miejscem zerowym funkcji jest argument $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (0; \infty)$,
- funkcja jest malejąca,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m \in (-2; -1)$ nie ma rozwiązań.

**Przykład 4** ◀ zad. 9.11

Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku $W = (-2, 4)$ przechodzącą przez punkt $P = (-3, 3)$. Wyznamy wzór tej funkcji.

RozwiązanieI sposób

Najpierw wyznaczamy postać kanoniczną danej funkcji. Znamy współrzędne wierzchołka paraboli, więc do obliczenia pozostaje tylko współczynnik a .

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Podstawiamy do wzoru współrzędne punktu $P = (-3, 3)$.

$$3 = a(-3 + 2)^2 + 4$$

Zatem $a = -1$ i $f(x) = -(x + 2)^2 + 4$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci ogólnej: $f(x) = -x^2 - 4x$.

◀9.11. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $(4, 6)$ i przechodzi przez punkt $(1, 3)$. Wyznacz współczynniki a, b, c .

Odp.: $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{8}{3}, c = \frac{2}{3}$

◀9.15. Wykres funkcji

$f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty A, B, C . Wyznacz współczynniki a, b, c .

a) $A = (0, 1), B = (-1, -1), C = (2, 11)$

b) $A = (1, -4), B = (2, -3), C = (-1, 0)$

c) $A = (-2, -3), B = (-1, -1), C = (1, 3)$

Odp.: a) $a = 1, b = 3, c = 1$

b) $a = 1, b = -2, c = -3$

c) $a = 0, b = 2, c = 1$

II sposób

Podane własności funkcji możemy zapisać w postaci układu równań.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \\ f(-3) = 3 \end{cases}$$

← pierwsza współrzędna wierzchołka W

← druga współrzędna wierzchołka W

← punkt $P = (-3, 3)$ należy do wykresu f

$$\begin{cases} b = 4a \\ 4a - 2b + c = 4 \\ 9a - 3b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 4a - 8a + c = 4 \\ 9a - 12a + c = 3 \end{cases}$$

← podstawiamy $4a$ w miejsce b w drugim i trzecim równaniu

$$\begin{cases} b = 4a \\ -4a + c = 4 \\ -3a + c = 3 \end{cases}$$

Ostatnie dwa równania tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Po rozwiązaniu tego układu (np. metodą przeciwnych współczynników) otrzymujemy $a = -1$ i $c = 0$. Zatem $b = -4$, a wzór funkcji ma postać $f(x) = -x^2 - 4x$.

Odp.: $f(x) = -x^2 - 4x$

Przykład 5 ◀ zad. 9.15

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $A = (1, -2), B = (0, -5)$ i $C = (-2, -5)$. Wyznaczmy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} -2 = a + b + c \\ -5 = c \\ -5 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

← punkty A, B, C należą do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi rozwiążemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} c = -5 \\ a + b - 5 = -2 \\ 4a - 2b - 5 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -5 \\ a + b = 3 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases}$$

Stąd $a = 1$ i $b = 2$.

Odp.: $f(x) = x^2 + 2x - 5$

Jeżeli wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$ jest parabolą, to $a \neq 0$.

Przykład 6 ◀ zad. 9.20

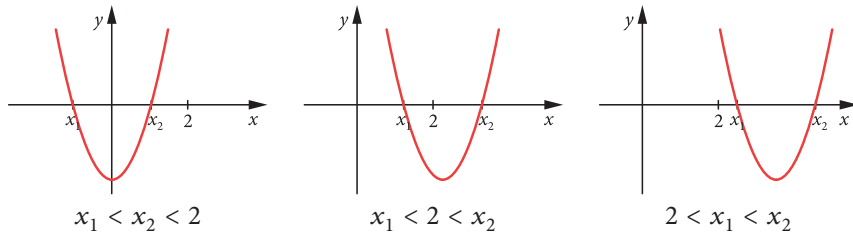
Wyznaczmy takie wartości parametru m , aby funkcja

$$f(x) = x^2 + 2(2m - 3)x + m - 1$$

miała dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 < 2 < x_2$.

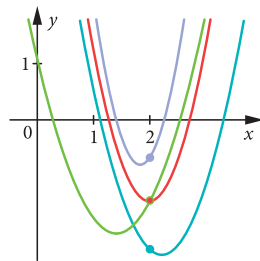
Rozwiązanie

Zastanówmy się, jakie położenie paraboli gwarantuje spełnienie warunków zadania. Ponieważ ramiona paraboli są skierowane do góry, to gdy $\Delta > 0$, możemy utworzyć trzy nierówności z pierwiastkami $x_1 < x_2$ i liczbą 2.



Jeśli $x_1 < x_2 < 2$ lub $2 < x_1 < x_2$, to $f(2) > 0$. Natomiast w przypadku $x_1 < 2 < x_2$ spełniona jest nierówność $f(2) < 0$.

Istnieje nieskończenie wiele parabol przechodzących przez przykładowy punkt $(2, f(2))$, gdzie $f(2) < 0$. Popatrzmy na kilka z nich.



Warunek $f(2) < 0$ wystarczy do rozwiązania zadania, ponieważ wynika z niego:

- istnienie dwóch pierwiastków (nie ma potrzeby badania znaku Δ),
- położenie tych pierwiastków na osi x po dwóch stronach liczby 2.

Zatem dana funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 < 2 < x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(2) < 0$.

$$f(2) = 4 + 4(2m - 3) + m - 1 = 9m - 9$$

$$f(2) < 0 \text{ dla } m \in (-\infty; 1)$$

Odp.: $m \in (-\infty; 1)$

◀9.20. Dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x) = mx^2 - 2(m - 3)x + 6m - 18$$

ma dwa różne miejsca zerowe

x_1, x_2 spełniające nierówność

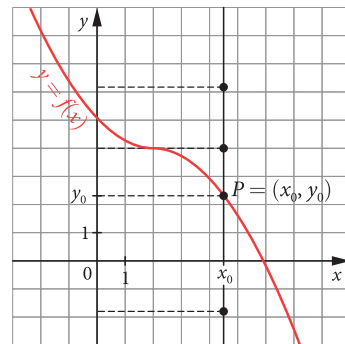
$$x_1 < -2 < x_2?$$

Odp.: $m \in \left(0; \frac{15}{7}\right)$

Nierówność $y > f(x)$

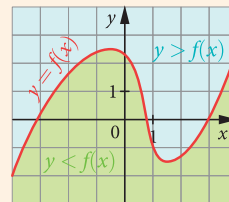
Wykresem funkcji $y = f(x)$ na płaszczyźnie kartezjańskiej jest zbiór punktów o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie x jest argumentem funkcji f .

Na rysunku mamy wykres pewnej funkcji $y = f(x)$. Jeżeli przez punkt $P = (x_0, y_0)$ tego wykresu poprowadzimy pionową prostą, to jej punkty leżące powyżej P mają drugą współrzędną większą od y_0 , a punkty leżące poniżej P mają drugą współrzędną mniejszą od y_0 . To samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla dowolnego punktu należącego do wykresu funkcji.



Wniosek

Jeżeli na płaszczyźnie kartezjańskiej narysowany jest wykres funkcji $y = f(x)$, $x \in D$, to punkty leżące powyżej tego wykresu tworzą zbiór opisany za pomocą nierówności $y > f(x)$, a punkty leżące poniżej wykresu – zbiór opisany za pomocą nierówności $y < f(x)$.

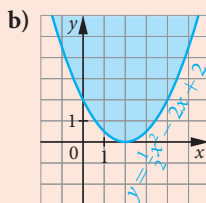
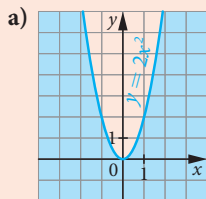


◀9.24. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają podaną nierówność.

a) $y \leq 2x^2$

b) $y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

Odp.:

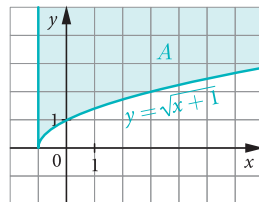


Przykład 7 ◀ zad. 9.24

Zaznaczmy na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór $A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geq \sqrt{x+1}\}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji $y = \sqrt{x+1}$ jest zbiór $[-1; \infty)$, zatem do szukanego zbioru mogą należeć tylko takie punkty, których odcięta $x \geq -1$.



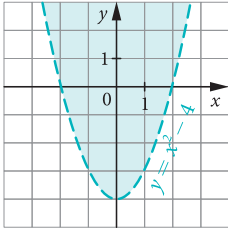
Wniosek

Parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) jest wspólnym brzegiem dwóch części płaszczyzny kartezjańskiej. Jedną z nich, utworzoną przez punkty leżące **na** paraboli **i powyżej** niej opisuje nierówność $y \geq ax^2 + bx + c$, a drugą, utworzoną przez punkty leżące **na** paraboli **i poniżej** niej opisuje nierówność $y \leq ax^2 + bx + c$.

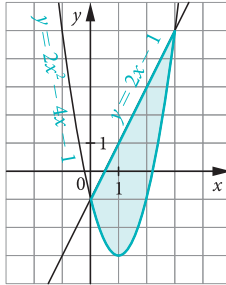
Przykład 8 ◀ zad. 9.24, 9.25

Zaznaczmy na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność lub układ nierówności.

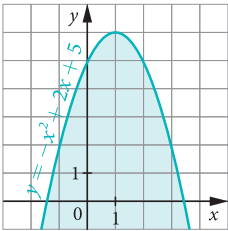
a) $y > x^2 - 4$



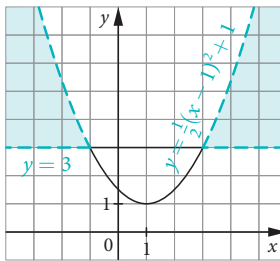
c) $2x^2 - 4x - 1 \leq y \leq 2x - 1$



b) $y \leq -x^2 + 2x + 5$



d) $3 < y < \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

**Przykład 9** ◀ zad. 9.27

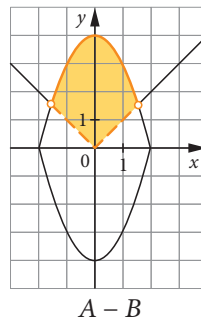
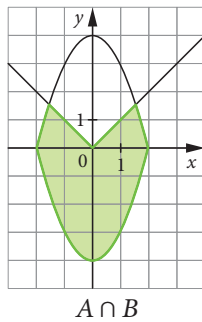
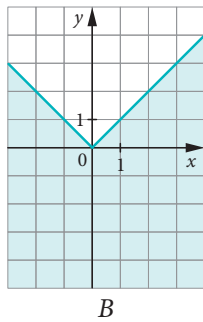
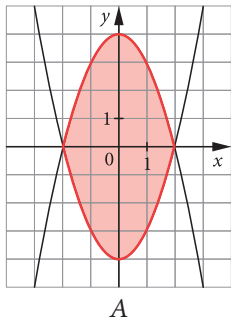
Dane są zbiory:

$$A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 - 4 \leq y \leq -x^2 + 4\},$$

$$B = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leq |x|\}.$$

Narysujemy na płaszczyźnie zbiory: A , B , $A \cap B$ oraz $A - B$.

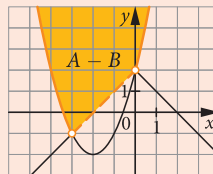
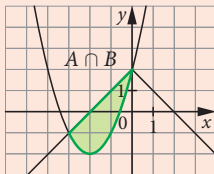
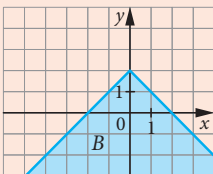
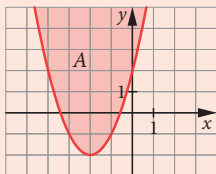
Rozwiązanie

**◀ 9.27. Dane są zbiory:**

$$A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geq x^2 + 4x + 2\} \text{ i } B = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leq 2 - |x|\}.$$

Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiory: A , B , $A \cap B$ oraz $A - B$.

Odp.:

**◀ 9.24. Patrz s. 68.**

◀ 9.25. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór opisany za pomocą układu nierówności.

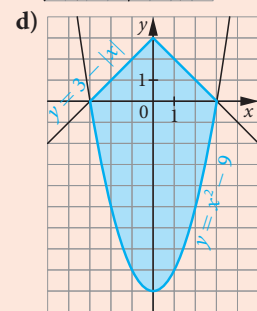
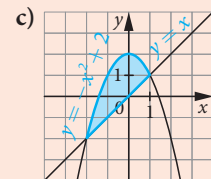
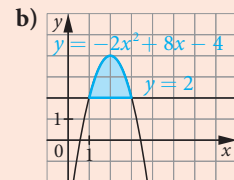
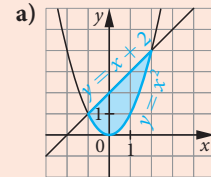
a) $\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \geq x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \leq -2x^2 + 8x - 4 \\ y \geq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq -x^2 + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \leq 3 - |x| \\ y \geq x^2 - 9 \end{cases}$

Odp.:



**Przykład 10** zad. 9.29

Funkcja f przyporządkowuje każdej wartości m liczbę rozwiązań równania $(m+2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$ z niewiadomą x . Napiszemy wzór funkcji f i naszkicujemy jej wykres.

Rozwiązanie

I. Jeżeli $m+2=0$, to równanie nie jest równaniem kwadratowym.

Dla $m=-2$ mamy:

$$-12x - 9 = 0$$

← równanie liniowe, które ma jedno rozwiązanie

$$\text{Zatem } f(-2) = 1.$$

II. Jeżeli $m+2 \neq 0$, to równanie jest równaniem kwadratowym i liczba jego rozwiązań zależy od znaku Δ . Zakładamy, że $m \neq -2$.

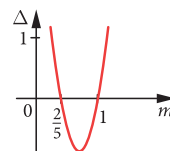
$$\Delta = 36m^2 - 4(m+2)(4m-1)$$

$$\Delta = 20m^2 - 28m + 8$$

$$\Delta = 4(5m^2 - 7m + 2)$$

$$\leftarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{2}{5}$$

$$\Delta = 20(m-1)\left(m - \frac{2}{5}\right)$$



Z wykresu odczytujemy:

$\Delta > 0$ dla $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{2}{5}\right) \cup (1; \infty)$ ← równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania

$\Delta < 0$ dla $m \in \left(\frac{2}{5}; 1\right)$

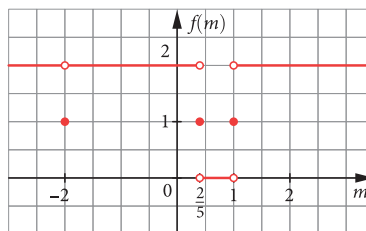
← równanie kwadratowe, które nie ma rozwiązań

$\Delta = 0$ dla $m = \frac{2}{5}$ lub $m = 1$

← równanie kwadratowe, które ma jedno rozwiązanie

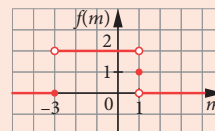
Zatem:

$$f(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in \left(\frac{2}{5}; 1\right) \\ 1 & \text{dla } m = -2 \text{ lub } m = \frac{2}{5} \text{ lub } m = 1 \\ 2 & \text{dla } m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{2}{5}\right) \cup (1; \infty) \end{cases}$$



◀ 9.29. Funkcja f przyporządkowuje każdej wartości parametru m liczbę rozwiązań równania $(m+3)x^2 + (m+3)x + m = 0$. Wyznacz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

$$\text{Odp.: } f(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty) \\ 1 & \text{dla } m = 1 \\ 2 & \text{dla } m \in (-3; 1) \end{cases}$$



Zadania

9.1. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

9.2. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x + 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{dla } x \leq -1 \\ x + 3 & \text{dla } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 6x - 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{dla } -1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

9.3. Sporządź wykres funkcji i odczytaj z wykresu rozwiązanie podanej nierówności.

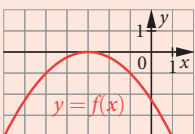
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{dla } x < 1 \\ x - 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad f(x) < 8$

b) $g(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 4 & \text{dla } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{dla } x > 3 \end{cases} \quad g(x) > 2$

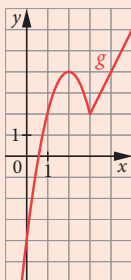
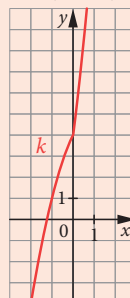
c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty) \\ -2x^2 + 8x + 1 & \text{dla } x \in (0; 4) \end{cases} \quad h(x) \leq 7$

d) $k(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 4 & \text{dla } x \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad -4 < k(x) < 4$

9.1. d)

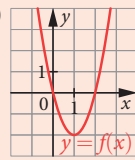


$D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 0)$; miejsca zerowe: -3 ; $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $(-3; \infty)$; wartość największa: 0 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m > 0$, 1 rozwiązanie dla $m = 0$, 2 rozwiązania dla $m < 0$

9.3. a) $x \in (-1; 9)$ b) $x \in (1; 3) \cup (3; \infty)$ c) $x \in (-2; 1) \cup (3; 6)$ d) $x \in (-2; 0)$ 

Odpowiedzi i rozwiązania

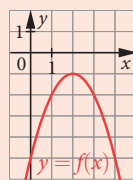
9.1. a)



$D = \mathbf{R}$, $ZW = \{-2; \infty\}$; miejsca zerowe: $0, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$, rosnąca w przedziale $(1; \infty)$; wartość najmniejsza: -2 dla $x = 1$, brak wartości największej;

 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m < -2$, 1 rozwiązanie dla $m = -2$, 2 rozwiązania dla $m > -2$

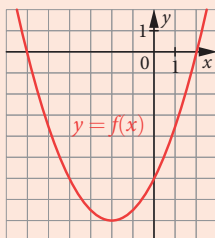
b)



$D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; -1)$; brak miejsc zerowych; $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $(2; \infty)$; wartość największa: -1 dla $x = 2$, brak wartości najmniejszej;

 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m > -1$, 1 rozwiązanie dla $m = -1$, 2 rozwiązania dla $m < -1$

c)

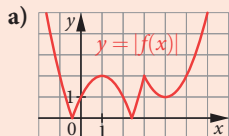


$D = \mathbf{R}$, $ZW = \{-8; \infty\}$; miejsca zerowe: $-6, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -6) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, rosnąca w przedziale $(-2; \infty)$; wartość najmniejsza: -8 dla $x = -2$, brak wartości największej;

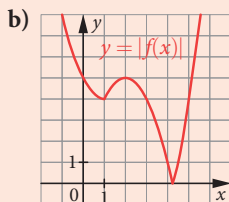
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m < -8$, 1 rozwiązanie dla $m = -8$, 2 rozwiązania dla $m > -8$

9.2. Patrz s. 63, 64.

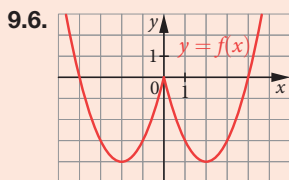
9.5.



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
 2 rozwiązania dla $m \in (2; \infty) \cup \{0\}$,
 4 rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup \{2\}$,
 5 rozwiązań dla $m = 1$,
 6 rozwiązań dla $m \in (1; 2)$



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
 1 rozwiązanie dla $m = 0$,
 2 rozwiązania dla $m \in (0; 4) \cup (5; \infty)$,
 3 rozwiązania dla $m \in \{4, 5\}$,
 4 rozwiązania dla $m \in (4; 5)$



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4)$,
 2 rozwiązania dla $m \in (0; \infty) \cup \{-4\}$,
 3 rozwiązania dla $m = 0$,
 4 rozwiązania dla $m \in (-4; 0)$

9.7. $b = -8$, $c = 2$ 9.8. $a = -1$, $b = -6$ 9.9. $b = 6$, $c = -3$ 9.10. $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 9.11. $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = \frac{2}{3}$ 9.12. $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$

9.4. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 18x - 21 & \text{dla } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x + 4 & \text{dla } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty) \\ -2x^2 + 4x + 4 & \text{dla } x \in \langle 0; 2 \rangle \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 12x + 13 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

9.5. Sporządź wykres funkcji $y = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & \text{dla } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 17 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

9.6. Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4|x|$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

9.7. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 4x^2 + bx + c$ jest parabola przechodząca przez punkty $A = (0, 2)$ i $B = (-1, 14)$. Wyznacz współczynniki b i c w równaniu paraboli.

9.8. Oś symetrii paraboli $y = ax^2 + bx - 4$ przechodzącej przez punkt $A = (-2, 4)$ jest prosta $x = -3$. Wyznacz współczynniki a i b w równaniu paraboli.

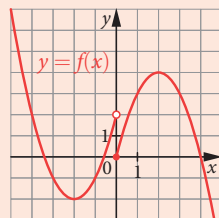
9.9. Wierzchołkiem paraboli $y = -3x^2 + bx + c$ jest punkt $B = (1, 0)$. Wyznacz współczynniki b i c w równaniu paraboli.

9.10. Parabola, której wierzchołek leży na osi y , przechodzi przez punkty $A = (2, 1)$ i $B = (-4, 7)$. Wyznacz równanie tej paraboli.

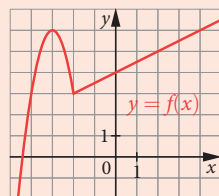
9.11. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $(4, 6)$ i przechodzi przez punkt $(1, 3)$. Wyznacz współczynniki a , b , c .

9.12. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 2 dla $x = 2$. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(4, 6)$. Wyznacz współczynniki a , b , c .

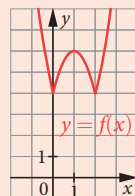
9.4. a)



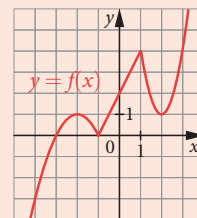
b)



c)



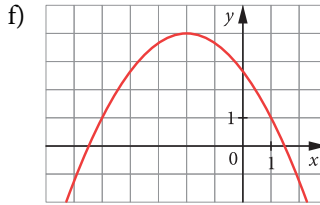
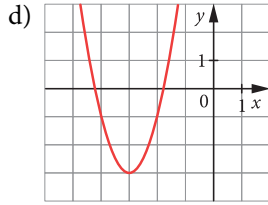
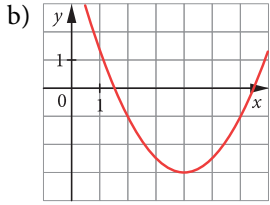
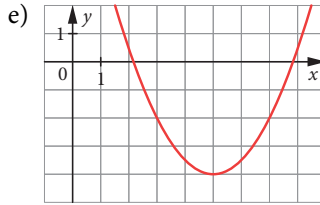
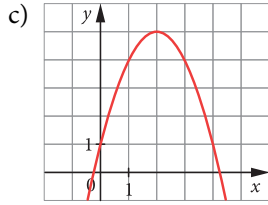
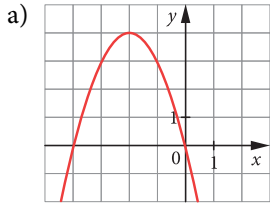
d)



Liczba rozwiązań równania					
	zero	jedno	dwa	trzy	cztery
a)	-	$m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$	$m \in \{-2, 4\}$	$m \in (-2; 0) \cup \langle 2; 4 \rangle$	$m \in \langle 0; 2 \rangle$
b)	-	$m \in (-\infty; 3) \cup (6; \infty)$	$m \in \{3, 6\}$	$m \in (3; 6)$	-
c)	$m \in (-\infty; 4)$	-	$m \in (6; \infty) \cup \{4\}$	$m = 6$	$m \in (4; 6)$
d)	-	$m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$	$m \in \{0, 4\}$	$m \in (0; 4)$	-

9.13. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $(1, -2)$ i $(0, 1)$. Jej osią symetrii jest prosta $x = 2$. Wyznacz współczynniki a, b, c .

9.14. Podaj wzór funkcji kwadratowej f , której wykres przedstawiono na rysunku.



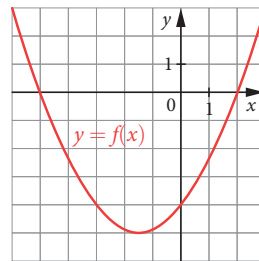
9.15. Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty A, B, C . Wyznacz współczynniki a, b, c .

- a) $A = (0, 1)$ $B = (-1, -1)$ $C = (2, 11)$
 b) $A = (1, -4)$ $B = (2, -3)$ $C = (-1, 0)$
 c) $A = (-2, -3)$ $B = (-1, -1)$ $C = (1, 3)$

9.16. Wyznacz współczynniki b i c funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ o podanych własnościach.

- a) Jej miejscami zerowymi są liczby -3 i 1 .
 b) Jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 5)$, a liczba 5 jest miejscem zerowym.

9.17. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz współczynniki a, b, c .



9.18. Wykaż, że funkcja kwadratowa, której wykres przechodzi przez punkty $K = (-5, 10)$, $L = (-3, 5)$, $M = (3, 2)$, nie ma miejsc zerowych.

*** 9.19.** Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2; 4)$?

$$\begin{cases} f(-2) > 0 & (1) \\ f(4) > 0 & (2) \\ \Delta > 0 & (3) \\ -2 < x_w < 4 & (4) \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$$

$$(1) f(-2) = 4 + 4m + m^2 - 1 = m^2 + 4m + 3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4, \sqrt{\Delta} = 2$$

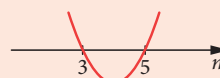
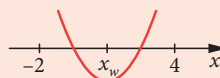
$$m_1 = \frac{-4-2}{2} = -3, m_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$m \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$$

$$(2) f(4) = 16 - 8m + m^2 - 1 = m^2 - 8m + 15$$

$$\Delta = 64 - 60 = 4, m_1 = \frac{8-2}{2} = 3, m_2 = \frac{8+2}{2} = 5$$

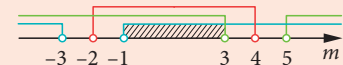
$$m \in (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$$



$$(3) \Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4 > 0$$

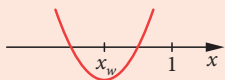
$$(4) x_w = \frac{2m}{2} = m, -2 < m < 4$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty) \\ m \in (-\infty; 3) \cup (5; \infty) \\ m \in (-2; 4) \end{cases}$$



Odp.: $m \in (-1; 3)$

9.21. $f(x) = x^2 + (2k+4)x + 6k+3$



$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ x_w < 1 & (2) \\ f(1) > 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Delta = (2k+4)^2 - 4(6k+3) = 4(k-1)^2$$

$$\Delta > 0 \text{ dla } k \neq 1$$

$$(2) -\frac{2k+4}{2} < 1, \text{ stąd } k > -3$$

$$(3) f(1) = 1 + 2k + 4 + 6k + 3 = 8k + 8 = 8(k+1)$$

$$f(1) > 0 \text{ dla } k > -1$$

$$k \neq 1 \text{ i } k > -3 \text{ i } k > -1$$

$$\text{Odp.: } k \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$$

9.22. $m \in (-\infty; 4) \cup \left(4; \frac{1}{4}\right)$

(rozwiązanie – patrz zad. 9.21)

9.23.

$$f(x) = -2x^2 + 3mx + m^2 - m + 5$$

$$f(1) = -2 + 3m + m^2 - m + 5 =$$

$$= m^2 + m + 3 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{4} > 0$$

dla $m \in \mathbb{R}$

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny i $f(1) > 0$, funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 < 1 < x_2$.

9.24. Patrz s. 68.

9.25. Patrz s. 69.

9.26. a) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \leq 2 - x^2 \\ y \geq x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \geq x^2 + 4x + 2 \\ y \leq -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y > -1 \\ y < \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y > x^2 - 2x - 2 \end{cases}$

* 9.20. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + 6m - 18$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1 < -2 < x_2$?

* 9.21. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = x^2 + (2k+4)x + 6k+3$ ma dwa różne miejsca zerowe mniejsze od 1?

* 9.22. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 - (2m-1)x + m^2 - 4$ ma dwa różne miejsca zerowe mniejsze od 4?

D * 9.23. Wykaż, że dla każdej wartości parametru m funkcja

$f(x) = -2x^2 + 3mx + m^2 - m + 5$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1 < 1 < x_2$.

9.24. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają podaną nierówność.

a) $y \leq 2x^2$

b) $y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

9.25. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór opisany za pomocą układu nierówności.

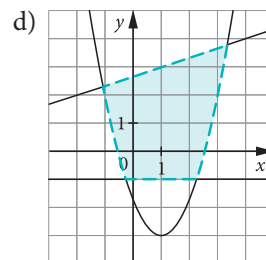
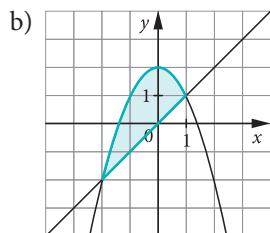
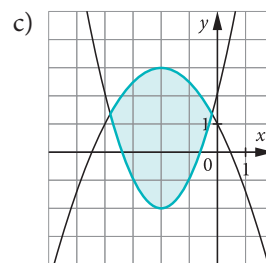
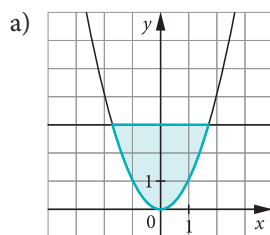
a) $\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \geq x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \leq -2x^2 + 8x - 4 \\ y \geq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq -x^2 + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \leq 3 - |x| \\ y \geq x^2 - 9 \end{cases}$

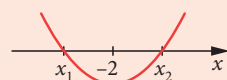
9.26. Na rysunku przedstawione są fragmenty parabol lub prostych. Opisz za pomocą układu nierówności zbiór zaznaczony kolorem.



9.20.

$$f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + 6m - 18$$

$$f(-2) = 4m - 2(m-3) \cdot (-2) + 6m - 18 = 14m - 30$$



lub



$$\begin{cases} m > 0 \\ f(-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ 14m - 30 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ m < \frac{15}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ 14m - 30 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{15}{7} \end{cases} \quad (\text{sprzeczność})$$

$$\text{Odp.: } m \in \left(0; \frac{15}{7}\right)$$

9.27. Dane są zbiory:

$$A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \geq x^2 + 4x + 2\} \text{ i } B = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y \leq 2 - |x|\}.$$

Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiory: A , B , $A \cap B$ oraz $A - B$.

9.28. Funkcja $y = f(m)$ przyporządkowuje sumę kwadratów pierwiastków równania $x^2 - mx + m^2 - 2m + 1 = 0$ każdej wartości parametru m , dla której istnieją dwa różne pierwiastki tego równania. Wyznacz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

9.29. Funkcja f przyporządkowuje każdej wartości parametru m liczbę rozwiązań równania $(m + 3)x^2 + (m + 3)x + m = 0$. Wyznacz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

9.30. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3 - |x| & \text{dla } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$.

Określ liczbę pierwiastków równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m . Narysuj wykres funkcji $g(m) = k$, gdzie k oznacza liczbę pierwiastków równania $f(x) = m$, $m \in \mathbf{R}$.

Prosto do matury



1. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - x + 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

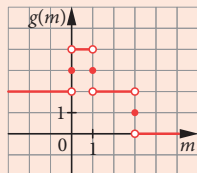
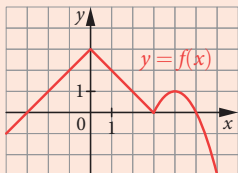
- A. Funkcja $g(x) = |f(x)|$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.
- B. Funkcja $h(x) = |f(x) - 1|$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.
- C. Równanie $|f(x) - 2| = 1$ ma trzy rozwiązania.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 4 & \text{dla } x < -2 \\ \frac{1}{4}x^2 - x + 1 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$.

Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

- 3.** Do wykresu funkcji kwadratowej $y = f(x)$ należą punkty: $(-1, 5)$, $(3, 1)$ i $(5, 2)$. Wyznacz wzór tej funkcji.
- 4.** Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $\langle -2; \infty \rangle$. Oś symetrii jej wykresu jest prosta $x = 3$. Wykres przecina oś y w punkcie o drugiej współrzędnej 1. Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.
- 5.** Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -4 i 2 , a jej wykres przecina oś y w punkcie o drugiej współrzędnej -1 . Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

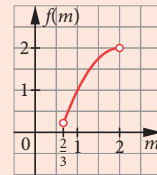
9.30.



- 0 pierwiastków dla $m \in (3; \infty)$,
- 1 pierwiastek dla $m = 3$,
- 2 pierwiastki dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$,
- 3 pierwiastki dla $m \in \{0, 1\}$,
- 4 pierwiastki dla $m \in (0; 1)$

9.27. Patrz s. 69.

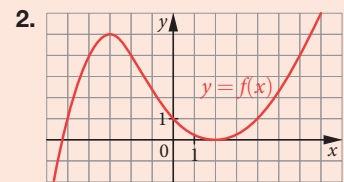
9.28. $f(m) = -(m - 2)^2 + 2$
dla $m \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$



9.29. Patrz s. 70.

Prosto do matury

1. P, F, F



- 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$,
- 2 rozwiązania dla $m \in \{0, 5\}$,
- 3 rozwiązania dla $m \in (0; 5)$

3. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$

5. $ZW = \left\langle -1\frac{1}{8}; \infty \right\rangle$

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. B
1. Wskaż postać iloczynową trójmianu kwadratowego $-9 + 6x - x^2$.
A. $(-3 + x)^2$
B. $-(x - 3)^2$
C. $-(x + 3)^2$
D. Ten trójmian nie ma postaci iloczynowej.
2. B
2. Wskaż miejsca zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})(x + 1)$.
A. 2, $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$, -1 C. $-\sqrt{2}$, 1 D. $\sqrt{2}$, 1
3. B
3. Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = x^2 + 2x$ przyjmuje w przedziale $\langle -4; 1 \rangle$ największą wartość?
A. $x = -1$ B. $x = -4$ C. $x = 1$ D. $x = 1$ lub $x = -3$
4. D
4. Jakie wartości może przyjmować współczynnik k w równaniu paraboli $y = x^2 - kx$, aby nie miała ona punktów wspólnych z osią x ?
A. $k < 0$ C. $k \geq 1$
B. $k = 0$ D. Nie istnieje takie k .
5. A
5. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x$ o dziedzinie $D = \langle 1; 4 \rangle$ i cztery zdania dotyczące tej funkcji.
I. Funkcja f przyjmuje wartość największą dla $x = 2$.
II. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4$.
III. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.
IV. Funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej.
Które zdania są prawdziwe?
A. tylko I i IV B. tylko I i II C. tylko II i III D. tylko III i IV
6. D
6. Równanie $x^2 + 5 = 9$
A. nie ma pierwiastków.
B. ma dwa dodatnie pierwiastki.
C. ma dwa ujemne pierwiastki.
D. ma dwa pierwiastki o przeciwnych znakach.

7. Wskaż postać iloczynową funkcji $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.

A. $f(x) = (x+2)(x+4)$

C. $f(x) = (x-2)(x-4)$

B. $f(x) = -(x-2)(x-4)$

D. Ta funkcja nie ma postaci iloczynowej.

7. B

8. Postać iloczynowa funkcji $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x - 2\sqrt{2}$ to

A. $f(x) = (\sqrt{2}x - 4)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

B. $f(x) = (\sqrt{2}x - 4)(\sqrt{2}x + 1)$.

C. $f(x) = \sqrt{2}(x-2)(x+1)$.

D. $f(x) = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

8. A

9. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ są liczby $x = -1$ oraz $x = -5$. Ile są równe współczynniki tej funkcji?

A. $a = 1, b = -4$

C. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

B. $a = -2, b = \frac{7}{2}$

D. $a = \frac{1}{2}, b = 3$

9. D

10. Wskaż nierówność prawdziwą dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

A. $3(x-2)^2 - 1 \leq 0$

C. $-0,4(x+3)^2 - 0,5 < 0$

B. $-5(x+2)^2 + 3 > 0$

D. $7(x-11)^2 + 2 \leq 0$

10. C

11. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$.

A. $\mathbb{R}$

C. $\left\langle -2; \frac{1}{3} \right\rangle$

B. Ta nierówność nie ma rozwiązań.

D. $\left\langle -2; \frac{1}{3} \right\rangle$

11. D

12. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-\frac{3}{7}\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) > 0$.

A. $\left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$

B. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right)$

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$

12. B

13. O funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ wiadomo, że ma dwa ujemne miejsca zerowe oraz że $f(0) = -1$. Jakie znaki mają współczynniki a, b i c ?

A. Jest za mało danych, żeby to określić.

B. $a < 0$ i $b < 0$ i $c < 0$

C. $a > 0$ i $b > 0$ i $c < 0$

D. $a < 0$ i $b < 0$ i $c > 0$

13. B

14. C

15. D

16. B

17. C

18. A

14. Parabola $y = m - x^2$ przecina oś x w punktach $x = 2$ oraz $x = -2$. Jaka wartość ma współczynnik m ?

A. $m = 2$ B. $m = 1$ C. $m = 4$ D. Nie istnieją takie m .

15. Wskaż układ równań, który ma dwa rozwiązania.

A. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -(x-2)^2 - 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -3 \\ y = (x+5)^2 - 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x \\ y = (x+2)^2 + 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = x \\ y = -(x+1)^2 - 1 \end{cases}$

16. Wskaż układ równań, który ma jedno rozwiązanie.

A. $\begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -2x \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

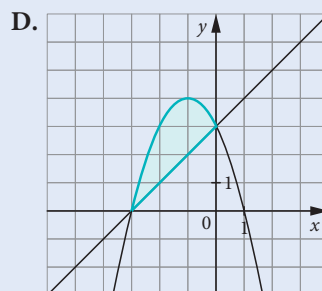
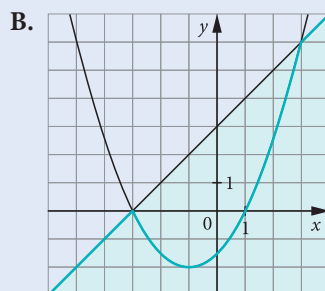
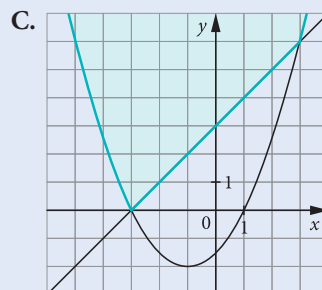
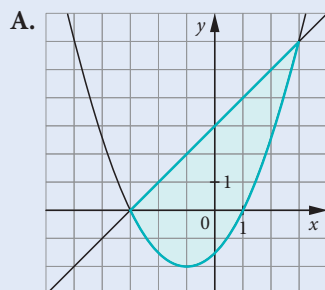
D. $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$

17. Ile rozwiązań ma równanie $|x| + x^2 = 4$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

18. Wskaż wykres będący ilustracją zbioru rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$$



W zadaniach 19–33 oceń prawdziwość podanych zdań.

19. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ są liczby 3 i 7. Wynika z tego, że

- A. $a > 0$. B. $p = 5$. C. $q = -4$.

19. F, P, F

20. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest liczba 2. Wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji ma współrzędne (5, 3). Wynika z tego, że

- A. drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 8.
B. $a < 0$.
C. $c < 0$.

20. P, P, P

21. Funkcja $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

- A. jest rosnąca.
B. ma trzy miejsca zerowe.
C. przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 1$.

21. F, P, F

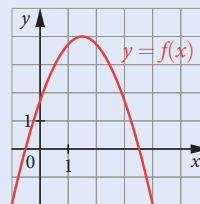
22. Parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przecina oś y w punkcie (0, -6), a jej wierzchołek ma współrzędne (-2, 7). Wynika z tego, że

- A. $a < 0$. B. $b < 0$. C. $\Delta < 0$.

22. P, P, F

23. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres jest dany na rysunku obok, ma miejsca zerowe x_1, x_2 . Na podstawie wykresu można wywnioskować, że

- A. $a < 0$ i $c > 0$ i $x_1 \cdot x_2 < 0$.
B. $a < 0$ i $b > 0$.
C. $b > 0$ i $c > 0$ i $\Delta \geq 0$.



23. P, P, P

24. Dana jest funkcja $f(x) = -2(x + 7)^2 + 3$.

- A. W przedziale $(-\infty; 7)$ funkcja f jest rosnąca.
B. W przedziale $\langle 7; \infty)$ funkcja f jest malejąca.
C. Prosta $x = -7$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .

24. F, P, P

25. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$.

- A. Równanie $f(x) = m$ ma dla dowolnej wartości m co najmniej jedno rozwiązanie.
B. Dla $m \in (1; 2)$ równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.
C. Równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania tylko dla $m = 1$.

25. P, P, F

26. F, P, P

26. Dana jest funkcja $f(x) = |(x-3)(x+1)|$.

- A. Dla pewnej wartości m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie.
 B. Równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania dla $m > 4$ lub $m = 0$.
 C. Dla pewnej wartości m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

27. F, P, P

27. Dane jest równanie $x^2 - 2|x| = m$ z parametrem m .

- A. Dla pewnej wartości m równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.
 B. Dla pewnej wartości m równanie to ma dokładnie trzy rozwiązania.
 C. Dla nieskończenie wielu wartości m równanie to ma dokładnie cztery rozwiązania.

28. F, P, F

28. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma wszystkie współczynniki dodatnie. Wynika stąd, że

- A. funkcja f ma dwa miejsca zerowe tego samego znaku.
 B. funkcja f nie ma dodatnich miejsc zerowych.
 C. wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f należy do półpłaszczyzny opisanej nierównością $y < 0$.

29. P, P, P

29. Suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + x - 4 = 0$ jest

- A. większa od $2\sqrt{17}$.
 B. kwadratem liczby całkowitej.
 C. pierwiastkiem równania $x^2 - 7x - 18 = 0$.

30. P, P, F

30. Funkcje $f(x) = x^2 + 3x + m$ i $g(x) = 3x + m$ mają wspólne miejsce zerowe x_0 . Wynika stąd, że

- A. $x_0 = 0$.
 B. $m = 0$.
 C. nieskończenie wiele wartości współczynnika m spełnia warunek zadania.

31. F, P, P

31. W trójmianie $x^2 + px + q$ współczynniki p i q są przeciwnymi liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że

- A. trójmian ten ma dwa pierwiastki.
 B. trójmian ten może mieć jeden pierwiastek.
 C. trójmian ten może nie mieć pierwiastków.

32. F, F, P

32. Jedno z miejsc zerowych funkcji $f(x) = -x^2 + bx + c$ jest większe od 5, a drugie jest mniejsze od 2. Wynika stąd, że

- A. $f(5) > 0$ i $f(2) < 0$. B. $f(5) < 0$ i $f(2) < 0$. C. $f(5) > 0$ i $f(2) > 0$.

33. P, F, F

33. Sumę odwrotności rozwiązań równania $x^2 + kx - 5 = 0$ określa wyrażenie

- A. $\frac{k}{5}$. B. $\frac{5}{k}$. C. $-\frac{1}{k}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

34. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale i podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

- a) $f(x) = x^2 - 10x + 22$ $\langle 3; 6 \rangle$
 b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ $\langle -4; 0 \rangle$
 c) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ $\left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{6} \right\rangle$
 d) $f(x) = -\sqrt{2}x^2 - x + 3$ $\langle -2; -1 \rangle$

35. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

- a) $f(x) = 25x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 4x - 1$
 b) $f(x) = 9x^2 + x$ e) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$
 c) $f(x) = 9x^2 + 4$ f) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

36. Funkcję kwadratową f daną w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej zapisz w pozostałych możliwych postaciach.

- a) $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$ c) $f(x) = -3(x - 2)(x + 1)$
 b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 1$ d) $f(x) = 5x^2 - 15x$

37. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ d) $x^2 - 3 \cdot 2^{16}x + 2^{33} = 0$
 b) $-2x^2 - 4x + 3 = 0$ e) $2^{11}x^2 - 3^5x + 2^{17} = 0$
 c) $9x^2 - 12\sqrt{5}x + 20 = 0$ f) $x^2 - (3^{20} + 1)x + 3^{20} = 0$

38. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 < 81$ e) $x^2 - 11x + 24 < 0$
 b) $x^2 + x > 0$ f) $x + 6 \leq 2x^2$
 c) $-2(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ g) $-8x^2 + 13x - 6 < 0$
 d) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \leq 0$ h) $-3x^2 - 6\sqrt{2}x + 90 < 0$

39. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby 2 i 8, a wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(-1, 3)$. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

40. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej iloczyn tej liczby i liczby o 3 od niej mniejszej.

- a) Podaj wzór funkcji f .
 b) Zbadaj, ile rozwiązań ma równanie $f(x) + 3 = 0$.

34.

	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	1 dla $x = 3$	-3 dla $x = 5$
b)	6 dla $x = 0$	-10 dla $x = -4$
c)	$-\frac{7}{4}$ dla $x = \frac{1}{6}$	$-\frac{25}{12}$ dla $x = -\frac{1}{6}$
d)	$4 - \sqrt{2}$ dla $x = -1$	$5 - 4\sqrt{2}$ dla $x = -2$

35. a) $f(x) = 25\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$

b) $f(x) = x(9x + 1)$

c) brak postaci iloczynowej

d) $f(x) = (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$

e) brak postaci iloczynowej

f) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)$

36. a) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 8$,
 $f(x) = 2(x + 5)(x + 1)$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 19$,
 brak postaci iloczynowej

c) $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$,
 $f(x) = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{3}{4}$

d) $f(x) = 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 11\frac{1}{4}$,
 $f(x) = 5x(x - 3)$

37. a) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = 1$

b) $x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$

c) $x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

d) $x = 2^{16}$ lub $x = 2^{17}$

e) brak rozwiązań

f) $x = 1$ lub $x = 3^{20}$

38. a) $x \in (-9; 9)$

b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

c) $x \in \left\langle -4; \frac{1}{2} \right\rangle$

d) $x = \sqrt{2}$

e) $x \in (3; 8)$

f) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \langle 2; \infty \rangle$

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x \in (-\infty; -5\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}; \infty)$

39. $f(x) = \frac{1}{9}(x - 2)(x - 8)$

40. a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) brak rozwiązań

41. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
 b) wartość największa: 4 dla $x = 1$,
 wartość najmniejsza: 0 dla $x = 3$
 c) $f(x) = -(x+1)(x-3)$

42. a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$
 d) $f(x) =$
 $-(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

43. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

44. a) miejsca zerowe: $-5, -1$;
 $W = (-3, 4), P = (0, -5)$
 b) miejsca zerowe: $1, 5$;
 $W = (3, -2), P = \left(0, \frac{5}{2}\right)$

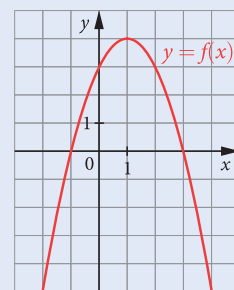
45. $11 = 3 + \frac{9}{2} + \frac{7}{2}$

46. $p = \frac{5}{12}p + \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}p$

47. 115 zł

48. $x = \frac{|a-b|}{2} \text{ cm}$

41. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Na podstawie tego wykresu
 a) rozwiąż nierówność $f(x) < 3$.
 b) podaj wartości: największą i najmniejszą funkcji f w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$.
 c) wyznaczn wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

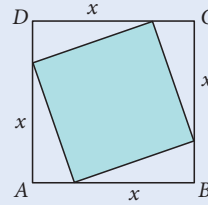


Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

42. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.
 a) Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej.
 b) Naszkicuj wykres funkcji f .
 c) Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji są mniejsze od -14 .
 d) Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.
43. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby -2 i 4 , a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty; 3]$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.
44. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f . Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz punktu P przecięcia paraboli z osią y . Naszkicuj ten wykres.
 a) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$
45. Rozłóż liczbę 11 na sumę takich trzech składników, że drugi jest o 3 większy od połowy pierwszego, a suma kwadratów wszystkich trzech składników jest możliwie najmniejsza.
46. Rozłóż liczbę p na sumę takich trzech składników, by pierwszy był większy od drugiego o $\frac{p}{6}$ i by suma kwadratów wszystkich trzech składników była najmniejsza.
47. Sklep kupuje w hurtowni buty po 80 zł za parę i sprzedaje średnio 30 par miesięcznie po 120 zł za parę. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny pary butów o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 parę. Jaką cenę butów powinien ustalić sprzedawca, aby jego zysk miesięczny był największy?
48. W prostokącie o wymiarach $a \text{ cm} \times b \text{ cm}$ jeden bok zwiększono o $x \text{ cm}$, a drugi zmniejszono o $x \text{ cm}$. Dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta będzie największe?

49. Suma długości boku trójkąta i wysokości opuszczonej na ten bok wynosi 10 cm. Ile centymetrów powinien mierzyć bok, a ile wysokość, aby pole takiego trójkąta było największe?

D 50. Bok kwadratu $ABCD$ jest równy a . Na każdym z boków tego kwadratu odłożono odcinek o długości x (jak na rysunku). Wykaż, że pole pokolorowanego obszaru jest najmniejsze, gdy $x = \frac{a}{2}$.



51. Grupa uczniów zorganizowała turniej. Każdy z uczestników rozegrał z każdym z pozostałych uczestników 2 partie. Rozegrano 72 partie. Ilu uczniów wzięło udział w turnieju?

52. Dane są trzy liczby naturalne takie, że największa z nich stanowi 150% najmniejszej, a trzecia liczba jest o 2 większa od najmniejszej. Suma kwadratów wszystkich trzech liczb jest równa 2149. Wyznacz te liczby.

53. Jeśli liczbę a zmniejszymy o $a\%$, otrzymamy 16. Wyznacz liczbę a .

54. Rozwiąż równanie.

a) $|5x^2 - 12x| = 9$

c) $|x - 1| + |x + 1| = x^2 - 3x$

b) $|3x^2 - 2x - 2| = 1$

d) $||x^2 - 5x| - 2| = 4$

55. Rozwiąż nierówność.

a) $|x^2 + x - 3| < 3$

c) $|x - 3| - |x| \leq x^2 - 5$

b) $|x^2 - 4| > 3x$

d) $||x^2 + x| - 1| \leq 1$

56. Dla jakiej wartości m zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x^2 + 15x + m$ jest przedział $(-10; \infty)$?

57. Funkcja $f(x) = 2(x - p)^2 + q$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (1; 3)$. Wyznacz p i q .

58. Ułóż równanie kwadratowe o całkowitych współczynnikach, którego jednym z pierwiastków jest podana liczba.

a) $1 - \sqrt{2}$

b) $3 + \sqrt{7}$

49. bok: 5 cm, wysokość: 5 cm

50. $P(x) = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(a - x)$,

$D = (0; a)$

$P = P(x) = a^2 - 2ax + 2x^2 =$
 $= 2x^2 - 2ax + a^2$

Pole obszaru P jest najmniejsze, gdy funkcja $P(x)$ przyjmuje najmniejszą wartość, czyli gdy

$x = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$.

51. 9 uczniów

52. 22, 24, 33

53. $a = 80$ lub $a = 20$

54. a) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = 3$

b) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 1$

lub $x = \frac{1 - \sqrt{10}}{3}$ lub $x = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$

c) $x = 5$ lub $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$

d) $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$
lub $x = 6$

55. a) $x \in (-3; -1) \cup (0; 2)$

b) $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2; \infty)$

d) $x \in (-2; 1)$

56. $m = 8\frac{3}{4}$

57. $p = 2$, $q = -2$

58. a) np. $x^2 - 2x - 1 = 0$

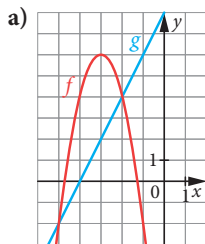
b) np. $x^2 - 6x + 2 = 0$

59. $b = -16$ lub $b = 16$, $c = 12$

60. a) $-1, 1, 3$

b) brak

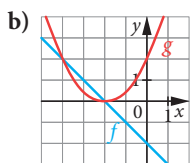
61.



I. $x \in (-5; -2)$

II. $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; \infty)$

III. $x \in \{-5, -2\}$

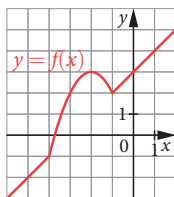


I. $x \in (-4; -2)$

II. $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$

III. $x \in \{-4, -2\}$

62.



1 rozwiązanie dla

$m \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,

2 rozwiązania dla $m = 2$

lub $m = 3$,

3 rozwiązania dla $m \in (2; 3)$

59. Funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki spełniające następujące warunki: ich iloczyn jest równy 6, a suma ich kwadratów jest równa 52. Wyznacz b i c .

60. Wyznacz (jeśli istnieją) miejsca zerowe funkcji.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 12x + 19 & \text{dla } x < -2 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{dla } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 + 4x + 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

61. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązania nierówności lub równania:

I. $f(x) > g(x)$,

II. $f(x) < g(x)$,

III. $f(x) = g(x)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$ sposobem rachunkowym.

a) $f(x) = -2x^2 - 12x - 12$

$g(x) = 2x + 8$

b) $f(x) = -x - 2$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

62. Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 3 & \text{dla } x \in \langle -4; -1 \rangle \\ x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) \end{cases}$$

Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

63. Rozwiąż układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

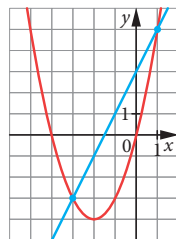
64. Dane jest równanie kwadratowe $x^2 + bx + c = 0$. Suma pierwiastków tego równania jest równa 4, zaś suma kwadratów pierwiastków tego równania jest równa 14. Wyznacz sumę sześcianów pierwiastków tego równania.

65. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ o współczynniku $b < 0$ ma dwa różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy -8 . Funkcja ta przyjmuje największą wartość równą $4\frac{1}{2}$. Wyznacz

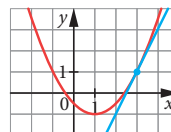
a) współczynniki b i c .

b) miejsca zerowe funkcji f .

63. a) $x = -3, y = -3$ lub $x = 1, y = 5$



b) $x = 3, y = 1$



64. 52

65. a) $b = -1, c = 4$ b) $-4, 2$

66. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

c) $y = |x^2 - 4x| - 3$

b) $y = |2x^2 - 7x + 3|$

d) $y = \left| -\frac{1}{4}x^2 + x \right| + 1$

67. Dla jakich wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie?

a) $x^2 + 2(2m - 3)x + m - 1 = 0$

b) $(2m - 1)x^2 - (5m - 2)x + 2m = 0$

68. Dla jakich wartości parametru m funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?

a) $f(x) = (m + 1)x^2 - 4mx + 2m + 3$

b) $f(x) = (m + 1)x^2 - 4mx + m + 1$

D

69. Wykaż, że równanie $x^2 - (k - 1)x - 4 - k = 0$ dla każdej wartości parametru k ma dwa różne pierwiastki.

70. Dla jakiej wartości parametru k równanie $(2k - 1)x^2 + (k + 1)x + k - 4 = 0$ ma jeden pierwiastek?

71. Dla jakich wartości m jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = 3x^2 - 5x + m^2 - 4$ jest zero?

72. Narysuj wykres funkcji f , która każdej wartości m przyporządkowuje liczbę rozwiązań podanego równania.

a) $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 4 = 0$

b) $mx^2 + (m - 3)x + 2 - m = 0$

73. Dla jakich wartości parametru m równanie

a) $x^2 - 2(2m - 5)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku?

b) $x^2 - 2(2m - 1)x + 3m + 11 = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

c) $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

d) $2x^2 + (3m - 1)x + m^2 - 5m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

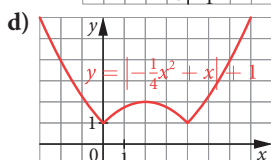
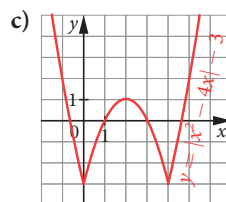
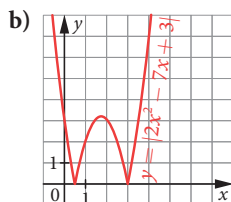
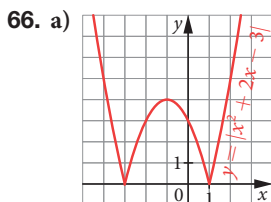
74. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

75. Funkcja $y = f(m)$ przyporządkowuje wartości m iloczyn różnych pierwiastków równania $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$, a funkcja $y = g(m)$ – sumę tych pierwiastków.

a) Określ dziedzinę funkcji f i g .

b) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g .

c) Dla jakiej wartości m zachodzi równość $g(m) = f(m)$?



67. a) $m = 1\frac{1}{4}$ lub $m = 2$

b) $m = \frac{1}{2}$ lub $m = \frac{2}{3}$

68.

a) $m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$

b) $m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$

69. $x^2 - (k - 1)x - 4 - k = 0$

$\Delta = (k - 1)^2 + 4(4 + k) =$

$= k^2 - 2k + 1 + 16 + 4k =$

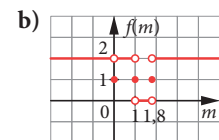
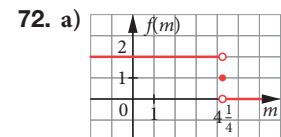
$= k^2 + 2k + 1 + 16 =$

$= (k + 1)^2 + 16 > 0$ dla $k \in \mathbb{R}$,

więc dla dowolnej wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki.

70. $k \in \left\{\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, 5\right\}$

71. $m = -2$ lub $m = 2$



73. a) $m \in \left(2; \frac{9}{4}\right) \cup (3; \infty)$

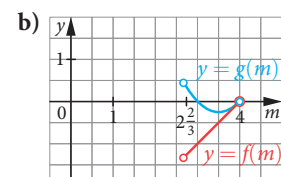
b) $m \in \left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$

c) $m \in (2; \infty)$

d) $m \in (-17 + 8\sqrt{5}; 1) \cup (4; \infty)$

74. $m \in (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3)$

75. a) $D_f = D_g = \left(2\frac{2}{3}; 4\right)$



c) Nie ma takiego m .

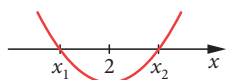
76. a) $m = 7$ b) $m = 1$ 77. $m \in (-6; 3)$. Wskazówka:Zauważ, że $x_1 = m + 3$ i $x_2 = m + 7$.78. $k \in (-\infty; -7) \cup (1; \infty)$

79.

$$f(x) = (k-2)x^2 + 2(1-k)x + k-2$$

$$f(2) = (k-2) \cdot 2^2 + 2(1-k) \cdot 2 + k-2 = 4k-8+4-4k+k-2 = k-6$$

I przypadek

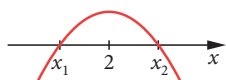


$$\begin{cases} k-2 > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k-2 > 0 \\ k-6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 2 \\ k < 6 \end{cases}$$

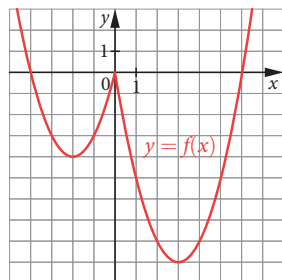
II przypadek



$$\begin{cases} k-2 < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k-2 < 0 \\ k-6 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < 2 \\ k > 6 \end{cases} \text{ (sprzeczność)}$$

Odp.: $k \in (2; 6)$ 80. $m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{7}; \infty\right)$ 81. $m \in (3; \infty)$ 82. $m \in \left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$ 83. $k = -\frac{5}{3}$ 84. miejsca zerowe: $-4, 0, 6$; dla $m \in \{-4, 0\}$ 

Wskazówka:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 6x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

85. $m = -2$ 76. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania jest najmniejsza?

a) $x^2 + (m-6)x + m-7 = 0$

b) $x^2 + (2-m)x - m-3 = 0$

77. Dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania

$$x^2 - 2(m+5)x + m^2 + 10m + 21 = 0$$

należą do przedziału $(-3; 10)$?78. Dla jakich wartości parametru k liczba 2 leży między pierwiastkami równania $-x^2 + 3kx + k^2 - 3 = 0$?* 79. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = (k-2)x^2 + 2(1-k)x + k-2$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 < 2 < x_2$?80. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m^2 + 3m)x^2 - (m+3)x + 2 > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?81. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?82. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(3m-5)x^2 - (2m+1)x + \frac{1}{4}(3m-5) < 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?83. Dla jakich wartości parametru k nierówność $(x+5)(3k-x) \leq 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?84. Wyznacz miejsca zerowe i narysuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - x - 5|x|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania?85. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (4-m^2)x^2 + (1-m)x + 3m-5$ jest rosnąca?86. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiory $A, B, A \cap B$.

a) $A = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \text{ i } y \geq |x^2 - 4|\}$,

$$B = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \text{ i } y \leq |x|\}$$

b) $A = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \text{ i } y \geq (x+2)^2 - 3\}$,

$$B = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \text{ i } y \leq \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1\}$$

