

Ciągi

3

Umiejętności

Po klasach pierwszej i drugiej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- podaje na podstawie wykresu funkcji jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności itp.,
- sporządza wykres funkcji określonej różnymi sposobami,
- z wykresu funkcji odczytuje rozwiązania nierówności typu $f(x) < m$, dla ustalonej wartości m , oraz równań i nierówności typu $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$,
- oblicza miejsca zerowe funkcji na podstawie jej wzoru,
- rysuje wykresy funkcji, w tym liniowych i wykładniczych,
- określa wartość najmniejszą i wartość największą funkcji na podstawie jej wykresu (w całej dziedzinie albo w pewnym jej podzbiórze).

Po tym dziale uczeń:

- wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym lub w wzorem rekurencyjnym,
- bada własności ciągu liczbowego (m.in. miejsca zerowe, przedziały monotoniczności),
- rozpoznaje, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny,
- stosuje wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- oblicza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- stosuje zależność między trzema wyrazami ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym (oblicza: procent składany, podatek, zysk z lokat, wysokość rat oraz koszt kredytu).

Uwagi metodyczne

Wprawdzie w formalnej definicji ciągu używamy pojęcia funkcji, ale warto od samego początku zwrócić uwagę na sposób **numerowania** elementów określonego zbioru. Jest to najczęściej stosowane w życiu codziennym słowo odnoszące się do ciągów. Uczniowie prawdopodobnie bez trudu podadzą odpowiednie przykłady. Numerowanie elementów zbiorów skończonych jest poza tym dobrym przygotowaniem do zrozumienia pojęcia ciągu skończonego. Przed wprowadzeniem formalnej definicji ciągu radzimy poćwiczyć odnajdowanie zależności pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu. Można tu wykorzystać rozmaite testy pozwalające odgadnąć regułę tworzenia następnych wyrazów lub zaproponować uczniom wymyślenie takich łamigłówek i wspólną zabawę.

1. Określenie i własności ciągu liczbowego

Umiejętności:

- wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym lub w wzorem rekurencyjnym
- badanie własności ciągu liczbowego

W życiu codziennym często porządkujemy jakieś zbiory według przyjętych kryteriów – ustawiamy się w kolejki, układamy kolejno książki na półce, siadamy na określonym na bilecie miejscu w teatrze, rezerwujemy numerek do lekarza itp. Takie porządkowanie elementów (ludzi, książek, krzeseł itd.) najczęściej polega na przypisaniu każdemu z nich odpowiedniego miejsca, mówiąc prościej – **ponumerowaniu** wszystkich elementów określonego zbioru. Ujmując rzecz matematycznie – określamy funkcje przyporządkowujące kolejnym liczbom naturalnym elementy takiego zbioru.

**Definicja**

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych. Ciąg nazywamy **liczbowym**, gdy jego wartości są liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli dziedzinę ciągu ograniczymy do pewnego skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy **ciąg skończony**. Na przykład ciąg numerów domów przy ulicy Grodzkiej w Krakowie jest ciągiem skończonym, a ciąg kolejnych naturalnych potęg liczby 3 – **ciągiem nieskończonym**.

Dalej zajmimy się wyłącznie ciągami liczbowymi, dlatego najczęściej będziemy pomijać określenie „liczbowy”.

Przykład 1

Oto kilka przykładów ciągów:

- 2, 3, 5, 7, 11, ... – kolejne liczby pierwsze,
- 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ... – coraz dokładniejsze przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego liczby π ,

ZZ i KPU

tematy 3.1–3.4

Multiteka

- Rekurencja
- Wykresy wybranych ciągów
- Ciąg Fibonacciego

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

Generator
testów i sprawdzianów

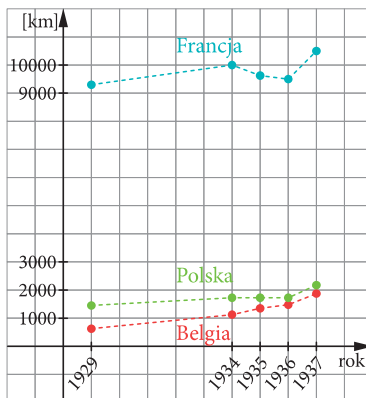
- 100, 99, 98, 97, 96, ... – liczba dni, które pozostały do matury począwszy od studiów,
- 68,24; 82,60; 56,86; 70,85; 64,32; ... – wysokość (w zł) rachunków telefonicznych w kolejnych miesiącach.

Przykład 2

Narysujemy wykresy trzech funkcji, które są przedstawione poniżej w postaci tabeli. Dane zostały zaokrąglone do dwóch lub trzech cyfr znaczących.

Lotnictwo na liniach pasażerskich w wybranych państwach					
Państwo	Przebyta droga w tys. km				
	1929 r.	1934 r.	1935 r.	1936 r.	1937 r.
Polska	1400	1700	1700	1700	2200
Belgia	600	1100	1300	1500	1900
Francja	9400	10 000	9700	9600	10 500

Źródło: Mały rocznik statystyczny 1938, GUS, Warszawa



Rozwiązanie

W tym przykładzie argumentami są liczby naturalne tworzące zbiór $\{1929, 1934, 1935, 1936, 1937\}$.

Wykres każdej z tych funkcji składa się z pięciu punktów. Przerywane linie (tzw. linie trendu) łączące te punkty służą zwiększeniu czytelności wykresu. Łatwiej wtedy zauważyć, że np. funkcja *Belgia* jest rosnąca, funkcja *Polska* niemalejąca, a *Francja* – niemonotoniczna.

Każdy ciąg jest funkcją, zatem można stosować do jego opisywania tę samą symbolikę, co przy opisywaniu innych funkcji. Jednak to, że ciągi mają tak uporządkowaną budowę, zdecydowało, że przyjęto inną terminologię i inny sposób zapisu.

- Ciągi nazywane są zwykle początkowymi lub końcowymi literami alfabetu.
- Zamiast „wartość funkcji dla argumentu n ” mówimy „ n -ty wyraz ciągu”.
- Jeżeli wartość ciągu a dla argumentu 1 jest równa 5, to zamiast zapisu:

$$a(1) = 5 \text{ stosujemy zapis } a_1 = 5$$

i czytamy: „pierwszy wyraz ciągu a jest równy 5”.

Podczas wypisywania kolejnych wyrazów ciągu korzystamy z podstawowej własności zbioru liczb naturalnych – **po każdej liczbie n następuje bezpośrednio liczba $n + 1$.**

Kolejne wyrazy nieskończonego ciągu możemy zatem symbolicznie zapisać:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

Czasami do dziedziny ciągu dołączona jest liczba 0 i wówczas pojawia się wyraz a_0 .

Taki ciąg będziemy oznaczać (a_n) . Zapis a_n oznacza n -ty wyraz ciągu.

O funkcji, która wszystkim argumentom przyporządkowuje tę samą wartość, mówimy – funkcja stała. Również ciąg liczbowy, którego wszystkie wyrazy są równe, nazywamy **ciągami stałym**.

Uwaga: W każdym zadaniu polegającym na odgadnięciu reguły tworzenia kolejnych wyrazów ciągu **tylko** na podstawie kilku wyrazów danych możliwa jest więcej niż jedna odpowiedź. Reguł może być wiele, a do każdej odpowiedzi można wymyślić jakąś regułę. Zadania takie możemy więc traktować tylko jako zabawę, a „poprawna” odpowiedź to odgadnięcie, co autor zagadki miał na myśli.

Wzór ogólny ciągu liczbowego

Przykład 3

Rozważamy ciąg liczb o danych własnościach. Podamy kilka początkowych wyrazów oraz tzw. **wzór ogólny** tego ciągu (inaczej mówiąc – wzór funkcji).

- liczby naturalne parzyste
- liczby naturalne nieparzyste
- naturalne potęgi liczby -1
- liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 8 dają resztę 3

Rozwiązanie

- a) Wszystkie liczby naturalne parzyste tworzą ciąg: 0, 2, 4, 6 ... Ponadto:

$$0 = 2 \cdot 0, \quad 2 = 2 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3 \text{ itd.}$$

zatem najprostszym wzorem funkcji jest $a_n = 2n$. Zauważmy, że w tym ciągu występuje wyraz a_0 .

- b) Ciąg: 1, 3, 5, 7, ... Ponadto:

$$1 = 2 \cdot 1 - 1, \quad 3 = 2 \cdot 2 - 1, \quad 5 = 2 \cdot 3 - 1, \quad 7 = 2 \cdot 4 - 1 \text{ itd.}$$

zatem wzór ogólny tego ciągu to $b_n = 2n - 1$.

- c) Ciąg: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ Ponadto:

$$c_1 = -1 = (-1)^1, \quad c_2 = 1 = (-1)^2, \quad c_3 = -1 = (-1)^3, \quad c_4 = 1 = (-1)^4 \text{ itd.}$$

zatem wzór ogólny tego ciągu to $c_n = (-1)^n$.

d) Ciąg: 3, 11, 19, 27, 35, ... Ponadto:

$$d_0 = 3 = 8 \cdot 0 + 3, \quad d_1 = 11 = 8 \cdot 1 + 3, \quad d_2 = 19 = 8 \cdot 2 + 3 \text{ itd.}$$

zatem można opisać ten ciąg za pomocą wzoru $d_n = 8n + 3$.

Przykład 4

(c_n) jest ciągiem odwrotności kolejnych liczb nieparzystych:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{1}{5}, \quad c_4 = \frac{1}{7}, \dots$$

Wyznaczmy setny wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

Jeśli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jaką wartość ma setny wyraz tego ciągu, to musimy albo wypisać sto kolejnych wyrazów (zaczynając od c_1), albo skorzystać ze wzoru ogólnego tego ciągu.

n -tą liczbę nieparzystą można zapisać jako $2n - 1$, więc:

$$c_n = \frac{1}{2n - 1}$$

Jest to wzór ogólny ciągu c , więc setny wyraz tego ciągu to $c_{100} = \frac{1}{2 \cdot 100 - 1} = \frac{1}{199}$.

Przykład 5

◀ zad. 1.2

Ciąg (d_n) określony jest wzorem ogólnym $d_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$. Zatem:

$$d_1 = \frac{1}{9}(10^1 - 1) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{9}(10^2 - 1) = \frac{1}{9} \cdot 99 = 11,$$

$$d_3 = \frac{1}{9}(10^3 - 1) = \frac{1}{9} \cdot 999 = 111 \text{ itd.}$$

Czyli n -ty wyraz tego ciągu to liczba całkowita zapisana za pomocą dokładnie n jedynek.

Przykład 6

◀ zad. 1.3, 1.4

Dla ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}$ obliczymy a_{10} , a_{16} , a_{139} oraz a_{m+2} .

Rozwiązanie

$$a_{10} = \frac{2 \cdot 10 - 3}{10 + 1} = \frac{17}{11}$$

$$a_{16} = \frac{2 \cdot 16 - 3}{16 + 1} = \frac{29}{17}$$

$$a_{139} = \frac{2 \cdot 139 - 3}{139 + 1} = \frac{275}{140} = \frac{55}{28}$$

$$a_{m+2} = \frac{2(m+2) - 3}{(m+2) + 1} = \frac{2m+1}{m+3}$$

Nie zawsze można podać wzór na n -ty wyraz ciągu. Na przykład nie ma wzoru pozwalającego obliczyć dowolny wyraz ciągu kolejnych liczb pierwszych.



Często zamiast „ciąg określony wzorem ogólnym” mówimy „ciąg o wyrazie ogólnym”.



◀1.3. Wyznacz wyrazy a_9 , a_{11} , a_{k+1} , a_{3m} , a_{m+k} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a_n = 2n^2 & \text{c)} a_n = \frac{(-1)^n}{n} \\ \text{b)} a_n = \frac{1}{n} & \text{d)} a_n = \frac{4n-3}{n+5} \end{array}$$

Odp.: a) $a_9 = 162$, $a_{11} = 242$,

$$a_{k+1} = 2(k+1)^2, \quad a_{3m} = 18m^2,$$

$$a_{m+k} = 2(m+k)^2$$

$$\text{b)} a_9 = \frac{1}{9}, \quad a_{11} = \frac{1}{11}, \quad a_{k+1} = \frac{1}{k+1},$$

$$a_{3m} = \frac{1}{3m}, \quad a_{m+k} = \frac{1}{m+k}$$

$$\text{c)} a_9 = -\frac{1}{9}, \quad a_{11} = -\frac{1}{11},$$

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}, \quad a_{3m} = \frac{(-1)^{3m}}{3m},$$

$$a_{m+k} = \frac{(-1)^{m+k}}{m+k}$$

$$\text{d)} a_9 = \frac{33}{14}, \quad a_{11} = \frac{41}{16},$$

$$a_{k+1} = \frac{4k+1}{k+6}, \quad a_{3m} = \frac{12m-3}{3m+5},$$

$$a_{m+k} = \frac{4m+4k-3}{m+k+5}$$

◀1.4. Podaj początkowe pięć wyrazów ciągu (a_n) .

$$\text{a)} a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-2}$$

$$\text{b)} a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\text{c)} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{d)} a_n = 1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2$$

Odp.: a) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$,

$$a_4 = 4$$

$$\text{b)} a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 14,$$

$$a_4 = 30, \quad a_5 = 55$$

$$\text{c)} a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{11}{6},$$

$$a_4 = \frac{25}{12}, \quad a_5 = \frac{137}{60}$$

$$\text{d)} a_1 = 1, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 6,$$

$$a_4 = -10, \quad a_5 = 15$$

◀1.2. Wyznacz początkowe trzy wyrazy ciągu o podanym wzorze ogólnym.

$$\text{a)} a_n = 2n + 1$$

$$\text{d)} d_n = n^n$$

$$\text{g)} g_n = \sqrt{2n+6}$$

$$\text{b)} b_n = 3^n$$

$$\text{e)} e_n = \frac{5n-3}{n+1}$$

$$\text{h)} h_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1}$$

$$\text{c)} c_n = (2n-1)^3$$

$$\text{f)} f_n = 6 - n^2$$

$$\text{i)} i_n = |n+1| - |n-1|$$

Odp.: a) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$ b) $b_1 = 3$, $b_2 = 9$, $b_3 = 27$ c) $c_1 = 1$, $c_2 = 27$, $c_3 = 125$

$$\text{d)} d_1 = 1, \quad d_2 = 4, \quad d_3 = 27 \quad \text{e)} e_1 = 1, \quad e_2 = 2\frac{1}{3}, \quad e_3 = 3 \quad \text{f)} f_1 = 5, \quad f_2 = 2, \quad f_3 = -3$$

$$\text{g)} g_1 = 2\sqrt{2}, \quad g_2 = \sqrt{10}, \quad g_3 = 2\sqrt{3} \quad \text{h)} h_1 = 2, \quad h_2 = 3, \quad h_3 = 4 \quad \text{i)} i_1 = 2, \quad i_2 = 2, \quad i_3 = 2$$

Przykład 7

Jeżeli chcemy, aby funkcja $f(n) = \frac{1}{n-2}$ była ciągiem o dziedzinie $\mathbf{N} - \{0\}$, to możemy zapisać jej wzór w inny sposób.

Kolejne wartości tej funkcji dla $n \in \mathbf{N} - \{0, 2\}$ to: $-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Wystarczy przyjąć, że:

$$b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = \frac{1}{2}, b_4 = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{1}{4}, \dots$$

i otrzymujemy ciąg (b_n) o identycznym zbiorze wartości co funkcja f , którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{N} - \{0\}$.

Ogólny wzór tego ciągu zapiszemy na przykład w taki sposób:

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ \frac{1}{n-1} & \text{dla } n > 2 \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach w podobnych sytuacjach nie będziemy zmieniać numeracji wyrazów ciągu – będziemy używać sformułowania typu „dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n-2}$ i dziedzinie $\mathbf{N} - \{0, 2\}$ ”.

Podsumujmy:

- Jeżeli ciąg jest skończony i ma k wyrazów, to możemy je ponumerować liczbami $1, 2, 3, \dots, k$ (czyli przyjąć jako jego dziedzinę zbiór $\{1, 2, 3, \dots, k\}$).
- Jeżeli ciąg jest nieskończony, to możemy kolejne jego wyrazy numerować kolejnymi liczbami naturalnymi tak, aby jego dziedziną był zbiór $\mathbf{N} - \{0\}$.

Wzór rekurencyjny ciągu liczbowego

Do określenia ciągu może też służyć **wzór rekurencyjny** (inaczej – indukcyjny), który ma następującą postać:

- podany jest pierwszy wyraz lub kilka początkowych wyrazów,
- podana jest informacja, w jaki sposób należy wyznaczyć kolejny wyraz ciągu w zależności od wyrazów go poprzedzających.

Aby obliczyć jakiś wyraz ciągu, musimy więc wyznaczyć najpierw wszystkie wyrazy poprzednie.

Na przykład definiujemy:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = -2a_n + 1 \end{cases} \quad \text{dla } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Zatem:

$$a_2 = -2a_1 + 1 = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$$

$$a_3 = -2a_2 + 1 = -2 \cdot 5 + 1 = -9$$

$$a_4 = -2a_3 + 1 = -2 \cdot (-9) + 1 = 19 \text{ itd.}$$

Czasem w prosty sposób da się odgadnąć wzór rekurencyjny, którym można zastąpić podany wzór ogólny. Na przykład dla ciągu (d_n) określonego w przykładzie 5 za pomocą wzoru ogólnego $d_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$ mamy:

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = 10d_n + 1 \quad \text{dla } n \in \mathbf{N} - \{0\} \end{cases}$$

Zastąpienie wzoru rekurencyjnego wzorem ogólnym (i na odwrót) wymaga dowodu. Przeprowadza się go metodą tzw. indukcji matematycznej, która nie wchodzi w zakres aktualnego programu szkoły średniej.

Przykład 8 ◀ zad. 1.9–1.11

Jednym z najciekawszych ciągów opisanych rekurencyjnie jest **ciąg Fibonacciego**, zdefiniowany w następujący sposób:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu (poza F_0 i F_1) są sumą dwóch wyrazów poprzednich:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Można też spotkać definicję ciągu, w której pominięty jest wyraz F_0 – wówczas zależność rekurencyjna jest definiowana dla $n \geq 3$:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Liczby naturalne tworzące taki ciąg, nazywane **liczbami Fibonacciego**, pojawiają się niezwykle często w przyrodzie – zainteresowanych odsyłamy na s. 136 oraz do bogatej literatury dostępnej np. w internecie.

Leonardo Fibonacci (ok. 1175–1250) – włoski matematyk pochodzący z Pizy, jeden z najwybitniejszych uczonych średniowiecza; wprowadził do Europy cyfry arabskie. W 1202 r. wydał słynną *Liber abaci* (*Księga rachunków*), poświęconą arytmetyce i algebrze, a w 1220 r. dzieło *Practica geometriae* o zastosowaniu algebry do geometrii.

Własności ciągów

Ciągi liczbowe możemy badać tak jak każdą funkcję liczbową – sprawdzać monotoniczność, miejsca zerowe itp. Możemy również rysować na płaszczyźnie kartezjańskiej ich wykresy.

◀1.11. Podaj przykład wzoru rekurencyjnego ciągu na podstawie jego początkowych pięciu wyrazów.

a) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, \dots$

b) $b_1 = 5, b_2 = 9, b_3 = 17, b_4 = 33, b_5 = 65, \dots$

c) $c_1 = 13, c_2 = -13, c_3 = 13, c_4 = -13, c_5 = 13, \dots$

d) $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 6, d_4 = 24, d_5 = 120, \dots$

Odp.: a) np. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = 2b_n - 1 \end{cases}$

c) np. $\begin{cases} c_1 = 13 \\ c_{n+1} = -c_n \end{cases}$ d) np. $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1) \cdot d_n \end{cases}$

◀1.9. Wyznacz początkowe pięć wyrazów ciągu o podanym wzorze rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = (b_n)^{-1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = (c_n)^2 - 3c_n + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = 2^{\frac{1}{2}d_n} \end{cases}$

Odp.: a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 9, a_5 = 17$

b) $b_1 = 5, b_2 = \frac{1}{5}, b_3 = 5, b_4 = \frac{1}{5}, b_5 = 5$

c) $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 5, c_4 = 11, c_5 = 89$

d) $d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 2, d_5 = 2$

◀1.10. Wyznacz początkowe sześć wyrazów ciągu o danym wzorze rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 5 \\ b_{n+2} = b_{n+1} - b_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 \\ c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 5 \\ d_{n+2} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \end{cases}$

Odp.: a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21$

b) $b_1 = 1, b_2 = 5, b_3 = 4, b_4 = -1, b_5 = -5, b_6 = -4$

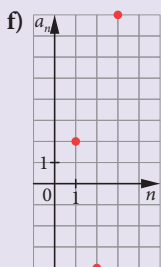
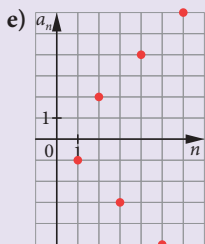
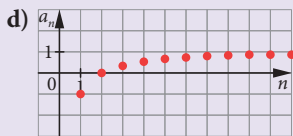
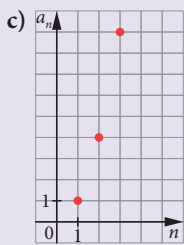
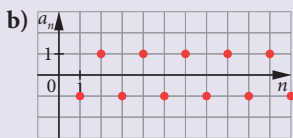
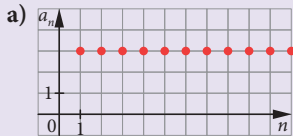
c) $c_1 = 2, c_2 = 5, c_3 = 10, c_4 = 50, c_5 = 500, c_6 = 25\,000$

d) $d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = \frac{5}{3}, d_4 = \frac{1}{3}, d_5 = \frac{1}{5}, d_6 = \frac{3}{5}$

◀1.12. Naskicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

- a) $a_n = 3$
 b) $a_n = (-1)^n$
 c) $a_n = n^2$
 d) $a_n = \frac{n-2}{n}$
 e) $a_n = (-1)^n \cdot n$
 f) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$

Odp.:



Przykład 9 ◀ zad. 1.12, 1.13

Narysujemy wykres ciągu o podanym wzorze.

a) $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ b) $b_n = \frac{n+1}{n}$

Rozwiązanie

a) Obliczymy kilka początkowych wyrazów ciągu.

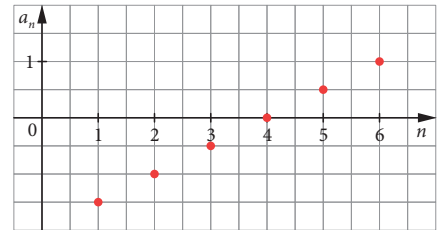
$$a_1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{2}, \quad a_6 = 1, \quad \dots$$

Kolejne wyrazy ciągu pokrywają się z wartościami funkcji

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \text{ dla } x \in \mathbb{N} \text{ i } x > 0.$$

Na podstawie własności tej funkcji możemy wnioskować, że:

- ciąg ten jest rosnący,
- jego jedynym miejscem zerowym jest 4,
- tylko początkowe trzy wyrazy są ujemne,
- najmniejszą wartością jest $-\frac{3}{2}$,
- wartości największej ciąg nie przyjmuje.



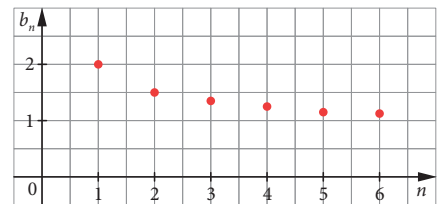
b) Wzór ogólny tego ciągu można zapisać w postaci $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

$$\text{Zatem } b_1 = 2, \quad b_2 = 1\frac{1}{2}, \quad b_3 = 1\frac{1}{3},$$

$$b_4 = 1\frac{1}{4}, \quad b_5 = 1\frac{1}{5}, \quad b_6 = 1\frac{1}{6}, \quad \dots$$

Możemy wykazać, że:

- ciąg ten jest malejący,
- ciąg nie ma miejsc zerowych,
- wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- największą wartością ciągu jest 2,
- wartości najmniejszej ciąg nie przyjmuje.



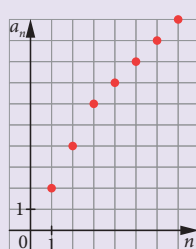
Przypomnijmy, że funkcja jest rosnąca wtedy, gdy dla dowolnych dwóch argumentów większemu z nich przyporządkowuje większą wartość. Zatem twierdzenie opisujące warunki, jakie musi spełniać nieskończony ciąg liczbowy, aby był monotoniczny, możemy sformułować następująco.

◀1.13. Naskicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

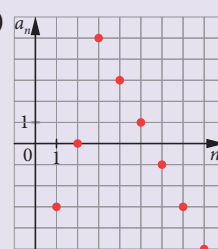
a) $a_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{dla } n=1 \\ 2n & \text{dla } 1 < n \leq 3 \\ n+3 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} n^2-4 & \text{dla } 1 \leq n \leq 3 \\ -2n+11 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

Odp.: a)



b)



Twierdzenie

Jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mamy:

- $a_{n+1} > a_n$ – to ciąg jest rosnący, • $a_{n+1} \geq a_n$ – to ciąg jest niemalejący,
- $a_{n+1} < a_n$ – to ciąg jest malejący, • $a_{n+1} \leq a_n$ – to ciąg jest nierosnący.

W praktyce, aby zbadać monotoniczność ciągu (a_n) , najczęściej badamy znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$, a mianowicie, jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mamy:

- $a_{n+1} - a_n > 0$ – to ciąg jest rosnący, • $a_{n+1} - a_n \geq 0$ – to ciąg jest niemalejący,
- $a_{n+1} - a_n < 0$ – to ciąg jest malejący, • $a_{n+1} - a_n \leq 0$ – to ciąg jest nierosnący.

Ciąg liczbowy, który spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, jest **ciągami monotonicznym**, pozostałe ciągi liczbowe są niemonotoniczne.

Przykład 10 ◀ zad. 1.14, 1.15

Zbadamy monotoniczność podanego ciągu.

Rozwiązanie

$$a) \ a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{n+3}{n+2}, \text{ więc}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

Wyrażenie $a_{n+1} - a_n$ zawsze ma wartość ujemną (dla dowolnej liczby naturalnej n mianownik tego ułamka jest dodatni, a w liczniku jest liczba ujemna).

Zatem $a_{n+1} - a_n < 0$, co jest równoważne nierówności $a_{n+1} < a_n$.

Odp.: (a_n) jest ciągiem malejącym.

$$b) \ b_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Postępujemy podobnie jak wyżej.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{2(n+1)+1}{n+1+1} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \\ &= \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Tym razem dla dowolnej liczby naturalnej n wyrażenie $b_{n+1} - b_n$ jest dodatnie.

Odp.: Ciąg (b_n) jest rosnący.

◀1.15. Wykaż, że ciąg (a_n) jest niemonotoniczny.

- a) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
 b) $a_n = (-1)^n \cdot n$ d) $a_n = |n - 10|$

Rozwiązanie

$$a) \ (a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

(a_n) jest ciągiem naprzemiennym, więc nie jest monotoniczny.

$$b) \ (a_n) = (-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$$

$a_1 < a_2$ i $a_2 > a_3$, więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

$$c) \ (a_n) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

$a_1 < a_2$ i $a_2 > a_3$, więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

$$d) \ (a_n) = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, \dots)$$

$a_9 > a_{10}$ i $a_{10} < a_{11}$, więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

◀1.14. Zbadaj monotoniczność ciągu.

$$a) \ a_n = n^2 - 1$$

$$b) \ a_n = \frac{n-3}{n+4}$$

$$c) \ a_n = \frac{n+5}{n+2}$$

$$d) \ a_n = -n^2 + 17n - 60$$

$$e) \ a_n = (-1)^n(2 - 5n)$$

$$f) \ a_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n+3 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$a) \ a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 1 - n^2 + 1 = 2n + 1 > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

$$b) \ a_{n+1} - a_n = \frac{n-2}{n+5} - \frac{n-3}{n+4} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n - 8 - (n^2 + 2n - 15)}{(n+4)(n+5)} =$$

$$= \frac{7}{(n+4)(n+5)} > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

$$c) \ a_{n+1} - a_n = \frac{n+6}{n+3} - \frac{n+5}{n+2} =$$

$$= \frac{n^2 + 8n + 12 - (n^2 + 8n + 15)}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{-3}{(n+3)(n+2)} < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

$$d) \ a_{n+1} - a_n = -(n+1)^2 + 17n +$$

$$+ 17 - 60 + n^2 - 17n + 60 =$$

$$= -n^2 - 2n - 1 + 17 + n^2 = 16 - 2n$$

$$a_{n+1} - a_n > 0 \text{ dla } n < 8, \text{ więc ciąg}$$

(a_n) nie jest monotoniczny.

$$e) \ a_1 = -(-3) = 3, \ a_2 = -8,$$

$$a_3 = -(2 - 15) = 13$$

$$a_1 > a_2 \text{ i } a_2 < a_3, \text{ więc ciąg } (a_n)$$

nie jest monotoniczny.

$$f) \ a_1 = 1, \ a_2 = 5, \ a_3 = 9, \ a_4 = 7$$

$$a_2 < a_3 \text{ i } a_3 > a_4, \text{ więc ciąg } (a_n)$$

nie jest monotoniczny.

◀1.16. Wyznacz miejsca zerowe ciągu.

a) $a_n = 3n - 1$

b) $a_n = n^2 - 11n + 30$

c) $a_n = 2n^2 - 6n - 8$

d) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n - 10}$ dla $n > 1$

Odp.: a) brak miejsc zerowych

b) $n = 5$ lub $n = 6$

c) $n = 4$

d) $n = 2$

◀1.17. Wyznacz miejsce zerowe ciągu (a_n) określonego podanym wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n - 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = a_1 + 1 - 5 = 6$$

$$a_3 = a_2 + 2 - 5 = 3$$

$$a_4 = a_3 + 3 - 5 = 1$$

$$a_5 = a_4 + 4 - 5 = 0$$

$$a_6 = a_5 + 5 - 5 = 0$$

$$a_{n+1} - a_n = n - 5$$

$$a_{n+1} > a_n \text{ dla } n - 5 > 0,$$

$$\text{czyli } n > 5.$$

Wynika stąd, że:

$$0 = a_6 < a_7 < a_8 < \dots$$

$$\text{czyli } a_n > 0 \text{ dla } n \geq 7.$$

$$\text{Odp.: } n = 5 \text{ lub } n = 6$$

◀1.18. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy x ?

a) $a_n = 5n - 3$, $x = 32$

b) $a_n = (-2)^n$, $x = -32$

c) $a_n = n(n - 4) - 20$, $x = 25$

d) $a_n = (n^2 - 3)(n^2 - 9)(n + 5)$, $x = 0$

e) $a_n = \sqrt{2n - 1}$, $x = 5$

f) $a_n = n(n^2 - 3n + 2)$, $x = 6$

Odp.: a) a_7 b) a_5 c) a_9

d) a_3 e) a_{13} f) a_3

◀1.19. Dany jest ciąg, którego wyrazem a_n jest liczba przekątnych w n -kącie wypukłym. Czy któryś z wyrazów tego ciągu jest równy 17?

Odp.: Nie. Wskazówka: Liczba przekątnych n -kąta wypukłego ($n \geq 3$) jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

c) $c_n = n^2 - 13n + 40$

$$c_{n+1} - c_n = [(n+1)^2 - 13(n+1) + 40] - (n^2 - 13n + 40) = 2n - 12 = 2(n - 6)$$

Dla $n < 6$ różnica ma znak ujemny, a dla $n > 6$ dodatni.

Odp.: Ciąg (c_n) jest niemonotoniczny.

d) $d_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 4n & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$

W tym ciągu trudniej jest opisać różnicę sąsiednich wyrazów. Przyjrzyjmy się kilku początkowym wyrazom:

$$d_1 = 1, d_2 = 8, d_3 = 9, d_4 = 16,$$

$$d_5 = 25, d_6 = 24, \dots$$

$$\text{Zatem } d_5 > d_4 \text{ i } d_6 < d_5.$$

Odp.: Ciąg (d_n) jest niemonotoniczny.

Odpowiedź można też uzasadnić, korzystając z własności wykresu ciągu (d_n) . Otóż jego wyrazom o nieparzystych numerach odpowiadają punkty na paraboli $y = x^2$, natomiast wyrazom o parzystych numerach – punkty na prostej $y = 4x$. Wykres ciągu „przeskakuje” więc z paraboli na prostą i z prostej na parabolę.

Przykład 11 ◀ zad. 1.16, 1.17

Znajdziemy miejsca zerowe ciągu o wzorze ogólnym $d_n = 3n^2 - 19n + 6$.

Rozwiązanie

Z rozwiązania równania $3n^2 - 19n + 6 = 0$ dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mamy $n = 6$ lub $n = \frac{1}{3}$.

Tylko pierwsza z tych liczb spełnia warunki zadania (druga nie jest liczbą naturalną).

Odp.: Miejscem zerowym tego ciągu jest liczba 6.

Przykład 12 ◀ zad. 1.18, 1.19

Sprawdzimy, czy któryś z wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 8n + 11$ jest równy -1 .

Rozwiązanie

$$n^2 - 8n + 11 = -1 \text{ i } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \text{ czyli } n^2 - 8n + 12 = 0$$

$$n_1 = 2, n_2 = 6$$

◀ obydwa pierwiastki są dodatnimi liczbami naturalnymi

W tym ciągu są więc dwa wyrazy równe -1 : drugi i szósty.

Odp.: $a_2 = -1$ oraz $a_6 = -1$

Jeżeli dwa ciągi liczbowe mają tę samą dziedzinę, to możemy je, tak jak inne funkcje liczbowe, dodawać, odejmować, mnożyć, mnożyć przez liczbę oraz dzielić przy założeniu, że wyrazy dzielnika są różne od zera. W ten sposób otrzymujemy nowe ciągi. Prześledźmy to na przykładzie.

◀1.25. Zbadaj monotoniczność każdego z ciągów: $a_n = \frac{3n-1}{n}$, $b_n = \frac{1-n}{n}$.

Podaj wzór na n -ty wyraz ciągu (c_n) i zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ d) $c_n = a_n \cdot b_n$

Rozwiązanie

$$\bullet a_n = 3 - \frac{1}{n}, a_{n+1} - a_n = 3 - \frac{1}{n+1} - 3 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem (a_n) jest rosnący.

$$\bullet b_n = \frac{1}{n} - 1, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} + 1 = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem (b_n) jest malejący.

$$\text{a) } c_n = a_n + b_n = \frac{3n-1}{n} + \frac{1-n}{n} = \frac{2n}{2} = 2$$

Zatem (c_n) jest stały.

Przykład 13 zad. 1.25

Dane są dwa ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = n + 2$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Wówczas:

- $c_n = a_n + b_n = n + 2 + \frac{1}{n}$
- $d_n = a_n - b_n = n + 2 - \frac{1}{n}$
- $e_n = a_n \cdot b_n = (n + 2) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n}$
- $f_n = \frac{a_n}{b_n} = (n + 2) \cdot n = n^2 + 2n$
- $g_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{(n + 2) \cdot n}$
- $h_n = -3a_n = -3(n + 2) = -3n - 6$

Zadania

1.1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n^2 - 4n - 1$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Drugi wyraz ciągu (a_n) równa się -1 .
 B. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
 C. Istnieje wyraz ciągu (a_n) o wartości równej 0.

1.2. Wyznacz początkowe trzy wyrazy ciągu o podanym wzorze ogólnym.

- a) $a_n = 2n + 1$ d) $d_n = n^n$ g) $g_n = \sqrt{2n + 6}$
 b) $b_n = 3^n$ e) $e_n = \frac{5n - 3}{n + 1}$ h) $h_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1}$
 c) $c_n = (2n - 1)^3$ f) $f_n = 6 - n^2$ i) $i_n = |n + 1| - |n - 1|$

1.3. Wyznacz wyrazy $a_9, a_{11}, a_{k+1}, a_{3m}, a_{m+k}$ ciągu o podanym wzorze ogólnym.

- a) $a_n = 2n^2$ b) $a_n = \frac{1}{n}$ c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = \frac{4n - 3}{n + 5}$

1.4. Podaj początkowe pięć wyrazów ciągu (a_n) .

- a) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-2}$ c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
 b) $a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ d) $a_n = 1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2$

1.5. W którym z podanych ciągów setny wyraz jest równy 1?

$$a_n = (-1)^{3n+1} \quad b_n = (-1)^{2n+1} \quad c_n = (-1)^{n-2} \quad d_n = (-1)^n$$

1.6. Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) znajdujących się pomiędzy podanymi wyrazami.

- a) a_3 i a_7 d) a_{n-2} i a_n g) a_{n+2} i a_{n+15}
 b) a_{13} i a_{27} e) a_{n-1} i a_{n+5} h) a_{n-k} i a_n
 c) a_{20} i a_{35} f) a_{n-7} i a_{n-1} i) a_n i a_{n+k}

◀ 1.25. Ciąg dalszy.

$$b) c_n = a_n - b_n = \frac{3n-1}{n} - \frac{1-n}{n} = \frac{4n-2}{n} = 4 - \frac{2}{n}, \quad c_{n+1} - c_n = 4 - \frac{2}{n+1} - 4 + \frac{2}{n} = \frac{-2n+2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem (c_n) jest rosnący.

$$c) c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1-n}{n} : \frac{3n-1}{n} = \frac{1-n}{3n-1}, \quad c_{n+1} = \frac{1-(n+1)}{3(n+1)-1} = \frac{-n}{3n+2}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{-n}{3n+2} - \frac{1-n}{3n-1} = \frac{-n(3n-1) + (n-1)(3n+2)}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{-2}{(3n-1)(3n+2)} < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem (c_n) jest rosnący.

$$d) c_n = a_n \cdot b_n = \frac{3n-1}{n} \cdot \frac{1-n}{n} = \frac{-3n^2+4n-1}{n^2} = -3 + \frac{4n-1}{n^2}, \quad c_{n+1} = -3 + \frac{4(n+1)-1}{(n+1)^2} = -3 + \frac{4n+3}{(n+1)^2}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{4n+3}{(n+1)^2} - \frac{4n-1}{n^2} = \frac{n^2(4n+3) + (n+1)^2(4n-1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{-4n^2-2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem (c_n) jest malejący.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. P, F, F

1.2. a) $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7$

b) $b_1 = 3, b_2 = 9, b_3 = 27$

c) $c_1 = 1, c_2 = 27, c_3 = 125$

d) $d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 27$

e) $e_1 = 1, e_2 = 2\frac{1}{3}, e_3 = 3$

f) $f_1 = 5, f_2 = 2, f_3 = -3$

g) $g_1 = 2\sqrt{2}, g_2 = \sqrt{10}, g_3 = 2\sqrt{3}$

h) $h_1 = 2, h_2 = 3, h_3 = 4$

i) $i_1 = 2, i_2 = 2, i_3 = 2$

1.3. a) $a_9 = 162, a_{11} = 242,$

$a_{k+1} = 2(k+1)^2, a_{3m} = 18m^2,$

$a_{m+k} = 2(m+k)^2$

b) $a_9 = \frac{1}{9}, a_{11} = \frac{1}{11}, a_{k+1} = \frac{1}{k+1},$

$a_{3m} = \frac{1}{3m}, a_{m+k} = \frac{1}{m+k}$

c) $a_9 = -\frac{1}{9}, a_{11} = -\frac{1}{11},$

$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}, a_{3m} = \frac{(-1)^{3m}}{3m},$

$a_{m+k} = \frac{(-1)^{m+k}}{m+k}$

d) $a_9 = \frac{33}{14}, a_{11} = \frac{41}{16}, a_{k+1} = \frac{4k+1}{k+6},$

$a_{3m} = \frac{12m-3}{3m+5}, a_{m+k} = \frac{4m+4k-3}{m+k+5}$

1.4. a) $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = -2,$

$a_4 = 4, a_5 = -8$

b) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 14,$

$a_4 = 30, a_5 = 55$

c) $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{11}{6},$

$a_4 = \frac{25}{12}, a_5 = \frac{137}{60}$

d) $a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = 6,$

$a_4 = -10, a_5 = 15$

1.5. $c_{100} = 1, d_{100} = 1$

1.6. a) trzy **b)** trzynaście

c) czternaście **d)** jeden

e) pięć **f)** pięć **g)** dwanaście

h) $k-1$ **i)** $k-1$

1.7. a) $a_n + a_{n+1}$ **b)** $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ **c)** $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ **d)** $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ **e)** $\frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{5}$ **f)** $a_{k-2} + a_{k-1} + a_k$ **g)** $a_{n-k+1} \cdot a_{n-k+2} \cdot a_{n-k+3}$ **1.8. a)** $a_{n+k}, a_{n+k+1}, a_{n+k+2}$ **b)** $a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3}$ **c)** $a_{3(n+7)+1}, a_{3(n+7)+2}, a_{3(n+7)+3}$ **d)** $a_{5(n-2)+1}, a_{5(n-2)+2}, a_{5(n-2)+3}$ **1.9. a)** $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5,$ $a_4 = 9, a_5 = 17$ **b)** $b_1 = 5, b_2 = \frac{1}{5}, b_3 = 5, b_4 = \frac{1}{5},$ $b_5 = 5$ **c)** $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 5, c_4 = 11,$ $c_5 = 89$ **d)** $d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 2,$ $d_5 = 2$ **1.10. a)** $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5,$ $a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21$ **b)** $b_1 = 1, b_2 = 5, b_3 = 4, b_4 = -1,$ $b_5 = -5, b_6 = -4$ **c)** $c_1 = 2, c_2 = 5, c_3 = 10, c_4 = 50,$ $c_5 = 500, c_6 = 25\,000$ **d)** $d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = \frac{5}{3}, d_4 = \frac{1}{3},$ $d_5 = \frac{1}{5}, d_6 = \frac{3}{5}$ **1.11. a)** np. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ **b)** np. $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = 2b_n - 1 \end{cases}$ **c)** np. $\begin{cases} c_1 = 13 \\ c_{n+1} = -c_n \end{cases}$ **d)** np. $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1) \cdot d_n \end{cases}$ **1.7.** Dany jest ciąg (a_n) określony dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Zapisz symbolicznie

a) sumę dwóch kolejnych wyrazów ciągu.

b) średnią arytmetyczną dwóch kolejnych wyrazów ciągu.

c) iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu.

d) średnią arytmetyczną wyrazu bezpośrednio poprzedzającego wyraz a_n i wyrazu następnego po wyrazie a_n .e) średnią arytmetyczną pięciu kolejnych wyrazów ciągu, z których środkowym wyrazem jest a_n .f) sumę trzech kolejnych wyrazów ciągu następujących po wyrazie a_{k-3} .g) iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu następujących po wyrazie a_{n-k} .**1.8.** Zapisz symbolicznie kolejne trzy wyrazy ciągu (a_n) występujące bezpośrednio po podanym wyrazie.a) a_{n+k-1} b) a_{2n} c) $a_{3(n+7)}$ d) $a_{5(n-2)}$ **1.9.** Wyznacz początkowe pięć wyrazów ciągu o podanym wzorze rekurencyjnym.a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = (c_n)^2 - 3c_n + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = (b_n)^{-1} \end{cases}$ d) $\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = 2^{\frac{1}{2}d_n} \end{cases}$ **1.10.** Wyznacz początkowe sześć wyrazów ciągu o danym wzorze rekurencyjnym.a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 \\ c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 5 \\ b_{n+2} = b_{n+1} - b_n \end{cases}$ d) $\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 5 \\ d_{n+2} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \end{cases}$ *** 1.11.** Podaj przykład wzoru rekurencyjnego ciągu na podstawie jego początkowych pięciu wyrazów.a) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, \dots$ b) $b_1 = 5, b_2 = 9, b_3 = 17, b_4 = 33, b_5 = 65, \dots$ c) $c_1 = 13, c_2 = -13, c_3 = 13, c_4 = -13, c_5 = 13, \dots$ d) $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 6, d_4 = 24, d_5 = 120, \dots$ **1.17.** $a_1 = 10$ $a_2 = a_1 + 1 - 5 = 10 + 1 - 5 = 6$ $a_3 = a_2 + 2 - 5 = 6 + 2 - 5 = 3$ $a_4 = a_3 + 3 - 5 = 3 - 2 = 1$ $a_5 = a_4 + 4 - 5 = 1 - 1 = 0$ $a_6 = a_5 + 5 - 5 = 0 + 0 = 0$ $a_{n+1} - a_n = n - 5$ $a_{n+1} > a_n$ dla $n - 5 > 0$, czyli $n > 5$.Wynika stąd, że $0 = a_6 < a_7 < a_8 < \dots$, czyli $a_n > 0$ dla $n \geq 7$.**Odp.:** $n = 5$ lub $n = 6$

1.12. Naskicuj wykres ciągu o podanym wyrażeniu ogólnym.

- a) $a_n = 3$ c) $a_n = n^2$ e) $a_n = (-1)^n \cdot n$
 b) $a_n = (-1)^n$ d) $a_n = \frac{n-2}{n}$ f) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$

1.13. Naskicuj wykres ciągu o podanym wyrażeniu ogólnym.

- a) $a_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{dla } n=1 \\ 2n & \text{dla } 1 < n \leq 3 \\ n+3 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} n^2-4 & \text{dla } 1 \leq n \leq 3 \\ -2n+11 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

*** 1.14.** Zbadaj monotoniczność ciągu.

- a) $a_n = n^2 - 1$ d) $a_n = -n^2 + 17n - 60$
 b) $a_n = \frac{n-3}{n+4}$ e) $a_n = (-1)^n(2-5n)$
 c) $a_n = \frac{n+5}{n+2}$ f) $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n+3 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

D * 1.15. Wykaż, że ciąg (a_n) jest niemonotoniczny.

- a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = (-1)^n \cdot n$ c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ d) $a_n = |n-10|$

1.16. Wyznacz miejsca zerowe ciągu.

- a) $a_n = 3n - 1$ c) $a_n = 2n^2 - 6n - 8$
 b) $a_n = n^2 - 11n + 30$ d) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n - 10}$ dla $n > 1$

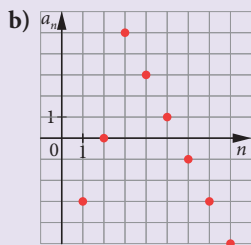
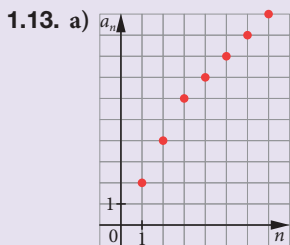
*** 1.17.** Wyznacz miejsce zerowe ciągu (a_n) określonego podanym wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n - 5 \end{cases}$$

1.18. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy x ?

- a) $a_n = 5n - 3$ $x = 32$
 b) $a_n = (-2)^n$ $x = -32$
 c) $a_n = n(n-4) - 20$ $x = 25$
 d) $a_n = (n^2 - 3)(n^2 - 9)(n+5)$ $x = 0$
 e) $a_n = \sqrt{2n-1}$ $x = 5$
 f) $a_n = n(n^2 - 3n + 2)$ $x = 6$

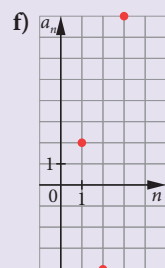
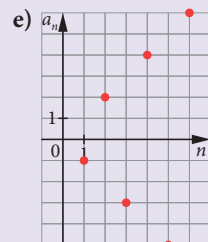
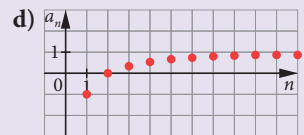
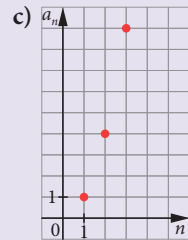
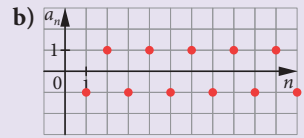
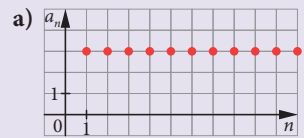
1.19. Dany jest ciąg, którego wyrazem a_n jest liczba przekątnych w n -kącie wypukłym. Czy któryś z wyrazów tego ciągu jest równy 17?



- 1.18. a)** a_7 **b)** a_5 **c)** a_9 **d)** a_3 **e)** a_{13} **f)** a_3

1.19. Nie. *Wskazówka:* Liczba przekątnych n -kąta wypukłego ($n \geq 3$) jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

1.12.



1.14. Patrz s. 129.

1.15. Patrz s. 129.

1.16. a) brak miejsc zerowych

b) $n = 5$ lub $n = 6$

c) $n = 4$ **d)** $n = 2$

1.17. Patrz s. 132.

- * 1.28. Podaj przykład takich dwóch nieskończonych ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , aby ciąg $(a_n \cdot b_n)$ był
- a) rosnący. b) malejący. c) niemonotoniczny.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Liczba ujemnych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = (2n - 7)(n + 7)$ dla $n \geq 1$ jest równa
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
2. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 5?
- A. $a_n = 3n - 6$ C. $a_n = n^2 - 6n + 5$
 B. $a_n = 4 - n$ D. $a_n = \frac{2n - 5}{n + 1}$
3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, gdzie $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
 Zatem
- A. $a_2 = 4$. B. $a_3 = 14$. C. $a_5 = 25$. D. $a_7 = 49$.
4. Dany jest ciąg (a_n) , w którym $a_3 = 2\frac{1}{2}$ oraz $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
 Oceń prawdziwość podanych zdań.
- A. $a_2 = \frac{2}{3}$ B. Wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie. C. $a_4 = \frac{7}{5}$
5. Oblicz, ile wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 2n^2 - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, jest mniejszych od 99.
6. Wyznacz czwarty wyraz ciągu o podanym wzorze rekurencyjnym.
- $$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2} \end{cases}$$
- D 7. Dany jest ciąg kolejnych dodatnich liczb nieparzystych (a_n) oraz ciągi (b_n) i (c_n) określone następująco:

$$b_n = a_n + a_{n+1}, \quad c_n = b_{n+1} - b_n.$$

Wykaż, że (c_n) jest ciągiem stałym.

1.27. a) $c_n = a_n + b_n$

$(a_n), (b_n)$ – ciągi rosnące, więc $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (c_n) jest rosnący.

b) $c_n = a_n - b_n$

(a_n) – ciąg rosnący, (b_n) – ciąg malejący, więc $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n < 0$,

czyli $b_n - b_{n+1} > 0$, dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_n - b_{n+1}) > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (c_n) jest rosnący.

c) $c_n = a_n - b_n$, (a_n) – ciąg malejący, (b_n) – ciąg rosnący, więc $a_{n+1} - a_n < 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$,

czyli $b_n - b_{n+1} < 0$, dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_n - b_{n+1}) < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (c_n) jest malejący.

Odp.: a) rosnący b) rosnący c) malejący

1.28. a) np. $a_n = n$, $b_n = \frac{n-1}{n}$

$a_n \cdot b_n = n - 1$ – ciąg rosnący

b) np. $a_n = n$, $b_n = -\frac{1}{n}$

$a_n \cdot b_n = -n$ – ciąg malejący

c) np. $a_n = n - 3$, $b_n = n - 6$

$a_n \cdot b_n = (n - 3)(n - 6)$ – ciąg

niemonotoniczny, bo funkcja

$f(x) = (x - 3)(x - 6)$ nie jest

monotoniczna dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$.

Prosto do matury

1. C

2. C

3. B

4. P, F, P

5. siedem

6. $a_4 = \frac{27}{23}$

7. $a_n = 2n - 1$ – ciąg kolejnych dodatnich liczb nieparzystych, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$b_n = a_n + a_{n+1} =$$

$$= 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 = 4n,$$

$$n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n = 4(n + 1) - 4n = 4,$$

$$n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem (c_n) jest ciągiem stałym.

Ciąg Fibonacciego

Leonardo z Pizy (ok. 1180 – ok. 1250), zwany Fibonaccim, to włoski matematyk, jeden z najwybitniejszych uczonych średniowiecza, który do europejskiej matematyki wprowadził cyfry arabskie. W dziele *Liber abaci* (*Księga rachunków*) z 1202 r. wyjaśnił, jak za ich pomocą zapisywać liczby i wykonywać obliczenia.

Jako prosty sposób przetestowania wprowadzonego przez siebie systemu liczbowego zamieścił w *Księdze* m.in. zadanie dotyczące wzrostu populacji królików:

Ile par będzie liczyła po upływie roku hodowla wywodząca się od jednej pary dorosłych królików, przy założeniu, że każda para co miesiąc wydaje na świat nową parę, a króliki mają potomstwo po dwóch miesiącach od własnych narodzin?

Rozwiązanie prowadzi do tzw. **ciągu Fibonacciego**, którego pierwsze dwa wyrazy są równe 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Zauważmy, że przy rozwiązywaniu zadania opuszcza się pierwszy wyraz tego ciągu. Zatem po roku hodowla będzie liczyła 377 par królików.

Sekwencje wyrazów ciągu Fibonacciego niezwykle często pojawiają się w przyrodzie.

Spiralne wzory

Nasiona i liście wielu gatunków roślin układają się w spiralny wzór, w którym łatwo zauważyć lewo- i prawoskrętne spirale. U większości roślin liczba tych spiral jest równa dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego, np. łuski sosnowej szyszki tworzą 8 i 13 spiral, a nasiona słonecznika – 21 i 34, 34 i 55 lub 55 i 89 spiral.

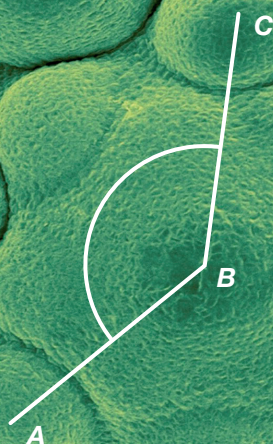


W ananasie, który ma sześciokątne łuski, można dostrzec aż trzy rodzaje spiral. Jest ich zwykle 5, 8 i 13 lub 8, 13 i 21.



Na zdjęciu pokazano merystem kalafiora wraz z tworzącymi się zawiązkami. Środek merystemu oznaczono literą *B*.

Złoty kąt między zawiązkami *A* i *C* pozwala wywnioskować, że te dwa zawiązki powstawały jeden po drugim.



Merystemy a złota liczba i ciąg Fibonacciego

Rozwój rośliny jest skutkiem nieustannego dzielenia się tzw. merystemów wierzchołkowych, czyli grup komórek znajdujących się na szczytach pędów i korzeni. W miarę przybywania komórek te najbardziej oddalone od środka merystemu tracą zdolność podziału i zaczynają się różnicować w tkanki i organy, a z niektórych, tzw. komórek inicjalnych, powstają zawiązki liści i kwiatów. Okazuje się, że dwa kolejne zawiązki wraz ze środkiem merystemu wyznaczają złoty kąt.

Związek złotego kąta ze złotą liczbą rozwiązuje zagadkę popularności ciągu Fibonacciego w przyrodzie. Ilorazy dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu są bowiem coraz bliższe złotej liczby:

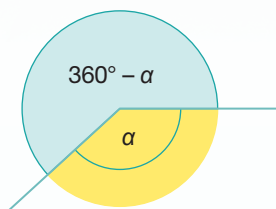
$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{5}{3} = 1,(6), \quad \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{21}{13} = 1,(615384), \dots$$

Złotym kątem nazywamy kąt α , który dzieli kąt pełny w takim stosunku, że:

$$\frac{360^\circ}{360^\circ - \alpha} = \frac{360^\circ - \alpha}{\alpha} = \varphi$$

gdzie φ jest **złotą liczbą**:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033\dots$$



Złoty kąt jest w przybliżeniu równy $137,5^\circ$.

2. Ciąg arytmetyczny

Umiejętności:

- rozpoznawanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny
- stosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego

Przedstawimy teraz ciągi, w których kolejne wyrazy powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej liczby, stałej dla danego ciągu. Na przykład:

- $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}, \dots$
- $10, 7, 4, 1, -2, \dots$
- $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$

W każdym z nich określiliśmy podobną regułę wyznaczania następnych wyrazów. W pierwszym różnica między dwoma kolejnymi wyrazami jest równa 3, czyli następnymi wyrazami są $17\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23\frac{1}{2}$ itd. W drugim od każdego wyrazu trzeba odejmować 3 (albo dodawać do niego -3), w trzecim przykładzie – do każdego wyrazu dodawać liczbę $\frac{1}{3}$.

Definicja

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r nazywanej **różnicą** ciągu.

Zatem w nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) o danym wyrazie a_1 i ustalonej liczbie $r \in \mathbf{R}$ mamy następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n + r \text{ dla każdego } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Przykład 1

Weźmy dowolną funkcję liniową, np. $f(x) = -4x + 7$, i ograniczmy jej dziedzinę tylko do liczb naturalnych dodatnich. Powstanie wówczas ciąg o wzorze ogólnym:

$$a_n = -4n + 7$$

Obliczmy jego początkowe wyrazy.

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -5, \quad a_4 = -9, \quad a_5 = -13$$

ZZ i KPU

tematy 3.5, 3.6

Multiteka

- Wykres ciągu arytmetycznego i geometrycznego

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

Generator
testów i sprawdzianów

Różnica między wypisanymi kolejnymi wyrazami ciągu jest stała, równa -4 . Sprawdzimy, czy tak jest dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu.

Jeżeli $a_n = -4n + 7$, to $a_{n+1} = -4(n+1) + 7 = -4n + 3$

oraz $a_{n+1} - a_n = -4n + 3 - (-4n + 7) = -4$.

Niezależnie od tego, które kolejne dwa wyrazy weźmiemy, różnica między nimi jest stała, równa -4 . Zatem (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -4$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.1

Sprawdźmy, czy ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 + 1$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie

Badamy różnicę sąsiednich wyrazów ciągu.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= ((n+1)^2 + 1) - (n^2 + 1) = \\ &= n^2 + 2n + 2 - n^2 - 1 = 2n + 1 \end{aligned}$$

Różnica między sąsiednimi wyrazami nie jest stała (zależy od zmiennej n), więc badany ciąg nie jest arytmetyczny.

Można szybciej wykazać, że ciąg (a_n) **nie jest** arytmetyczny: znajdujemy jego trzy kolejne wyrazy, np. $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$, i zauważamy, że $5 - 2 \neq 10 - 5$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Przykład 3 ◀ zad. 2.5

O ciągu arytmetycznym (a_n) wiemy, że: $a_1 = 11$, $r = 6$. Zatem:

$$a_2 = a_1 + r = 17$$

$$a_3 = a_2 + r = 23$$

$$a_4 = a_3 + r = 29 \text{ itd.}$$

Ile wynosi a_{50} ?

Rozwiązanie

Przjrzyjmy się, jak powstają kolejne wyrazy dowolnego ciągu arytmetycznego.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r \text{ itd.}$$

Pięćdziesiąty wyraz tego ciągu powstaje więc przez dodanie do liczby 11 czterdziestu dziewięciu szóstek, czyli:

$$a_{50} = 11 + 49 \cdot 6 = 305$$

Odp.: $a_{50} = 305$

◀2.1. Które z ciągów o podanych wzorach ogólnych to ciągi arytmetyczne?

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n+2}{5}, \quad b_n = \frac{n-5}{7-n}, \\ c_n &= (1-2n)^2 + 4(1-n^2), \\ d_n &= (2-3n)^2 + 2(2+n^2) \end{aligned}$$

Odp.: $(a_n), (c_n)$

◀2.5. Dane są: pierwszy wyraz a_1 i różnica r ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz a_n .

a) $a_1 = 30$, $r = -3$, $n = 25$

b) $a_1 = \frac{2}{3}$, $r = \frac{5}{3}$, $n = 11$

c) $a_1 = 2$, $r = \sqrt{2} - 1$, $n = 8$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $r = 1\frac{1}{2}$, $n = 5$

e) $a_1 = 0,4$, $r = 0,1$, $n = 11$

f) $a_1 = \sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$, $n = 6$

Odp.: a) $a_{25} = -42$

b) $a_{11} = 17\frac{1}{3}$

c) $a_8 = 7\sqrt{2} - 5$

d) $a_5 = 6\frac{1}{2}$

e) $a_{11} = 1,4$

f) $a_6 = 6\sqrt{5}$

Rozumowanie z przykładu uogólnimy i zapiszemy w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Na przykład w ciągu arytmetycznym, w którym $a_1 = -4$ i $r = \frac{1}{4}$, trzydziesty wyraz jest równy:

$$a_{30} = a_1 + 29r = -4 + 29 \cdot \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Przykład 4

Wyznamy sto dwudziestą siódmą liczbę w ciągu arytmetycznym:

$$3, 7, 11, 15, 19, \dots$$

Rozwiązanie

Oznacmy ten ciąg (b_n) . Jest to ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $b_1 = 3$ i różnicy $r = 4$. Szukaną liczbę wyznaczamy więc za pomocą wzoru ogólnego ciągu:

$$b_{127} = 3 + 126 \cdot 4 = 507$$

Odp.: $b_{127} = 507$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy w ciągu arytmetycznym (c_n) , w którym $c_1 = 1$ i $r = 7$, występuje liczba 232, a jeśli tak, to na którym miejscu.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy istnieje taka naturalna liczba n , dla której $c_n = 232$.

$$232 = 1 + (n - 1) \cdot 7 \qquad \leftarrow c_n = c_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$7n = 238$$

$$n = 34$$

Zatem $c_{34} = 232$.

Odp.: Liczba 232 występuje w tym ciągu na trzydziestym czwartym miejscu.

Przykład 6 ◀ zad. 2.10

Wyznamy ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym suma wyrazów trzeciego i jedenastego jest równa 128, a suma wyrazów czwartego i ósmego jest równa 106.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} a_3 + a_{11} = 128 \\ a_4 + a_8 = 106 \end{cases} \quad \leftarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\begin{cases} a_1 + 2r + a_1 + 10r = 128 \\ a_1 + 3r + a_1 + 7r = 106 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = 11 \end{cases}$$

Odp.: $a_1 = -2$ oraz $r = 11$

Wyznaczenie ciągu arytmetycznego polega na ogół na podaniu jego pierwszego wyrazu i różnicy.

Własności ciągu arytmetycznego

Przyjrzyjmy się wyrazom pewnego ciągu arytmetycznego.

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...

Jeżeli weźmiemy jego dowolne trzy kolejne wyrazy, np. 11, 14, 17, i obliczymy średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych $\left(\frac{11+17}{2} = \frac{28}{2} = 14\right)$, to otrzymamy wyraz środkowy. Tę samą prawidłowość zaobserwujemy dla innych trzech kolejnych wyrazów, np. 8, 11, 14 lub 20, 23, 26. Taką własność ma dowolny ciąg arytmetyczny.

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o co najmniej trzech wyrazach jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Założenie I

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Teza I

Dla każdego $n > 1$ prawdziwa jest równość: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

◀2.10. Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa -10 , a suma wyrazów czwartego i dziewiątego jest równa -22 .

Odp.: pierwszy wyraz: 11, różnica: -4

◀2.19. Wyznacz taką liczbę x , aby ciąg 23, x , 33 był ciągiem arytmetycznym.

Odp.: $x = 28$

◀2.20. Wyznacz takie x , aby liczby: $4x^2 - 1$, $6x + 1$, $x^2 + 7$ były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Odp.: $x = 0,4$ lub $x = 2$

Dowód I

Niech r – różnica ciągu arytmetycznego (a_n) . Wówczas trzy kolejne wyrazy ciągu:

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$$

możemy zapisać również w postaci: $a_n - r, a_n, a_n + r$.

Średnia arytmetyczna wyrazów a_{n-1} i a_{n+1} jest równa:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Założenie II

Dla każdego $n > 1$ prawdziwa jest równość: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Teza II

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Dowód II

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \quad \leftarrow \text{z założenia}$$

$$\text{czyli } a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

To oznacza, że dla każdego $n > 1$ różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest stała. Oznaczmy ją r . Zatem dla $n > 1$ mamy $a_n = a_{n-1} + r$, czyli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Koniec dowodu

Przykład 7 ◀ zad. 2.19, 2.20

Dla jakiej wartości x liczby $x + 4$, $4x$, $x^2 + 8$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Rozwiązanie

Wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{(x + 4) + (x^2 + 8)}{2} = 4x$$

Zatem:

$$x + 4 + x^2 + 8 = 8x$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3$$

Zadanie ma dwa rozwiązania, a odpowiadające im ciągi to: 8, 16, 24 oraz 7, 12, 17.

Odp.: $x = 4$ lub $x = 3$

Zauważmy, że jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , to wyrazy:

$$\dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$$

możemy inaczej zapisać:

$$\dots, \boxed{a_n - 3r}, \boxed{a_n - 2r}, \boxed{a_n - r}, a_n, \boxed{a_n + r}, \boxed{a_n + 2r}, \boxed{a_n + 3r}, \dots$$

Gdy obliczymy średnie arytmetyczne dwóch wyrazów tak samo oddalonych od a_n , otrzymamy wyraz a_n , np.:

$$\frac{(a_n - r) + (a_n + r)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

$$\frac{(a_n - 2r) + (a_n + 2r)}{2} = a_n$$

i ogólnie:

$$\frac{(a_n - kr) + (a_n + kr)}{2} = a_n$$

Wniosek

W ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi zależność:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Przykład 8

Obliczmy wyrazy x, y i z ciągu arytmetycznego: 215, $x, y, z, -11$.

Rozwiązanie

$$y = \frac{215 - 11}{2} = 102$$

$$x = \frac{215 + y}{2} = \frac{215 + 102}{2} = 158\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{y - 11}{2} = \frac{102 - 11}{2} = 45\frac{1}{2}$$

Odp.: $x = 158\frac{1}{2}$, $y = 102$, $z = 45\frac{1}{2}$

◀ 2.23. Podaj równanie prostej zawierającej wykres ciągu arytmetycznego (a_n)

a) o wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = -3$.

b) o wyrazach $a_3 = 4$ i $a_5 = 10$.

Odp.: a) $y = -3x + 4$

b) $y = 3x - 5$

Przykład 9 ◀ zad. 2.23

Sporządźmy wykres ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 5$, $r = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

$$a_1 = 5, a_2 = 5\frac{1}{2}, a_3 = 6, a_4 = 6\frac{1}{2}, a_5 = 7 \text{ itd.}$$

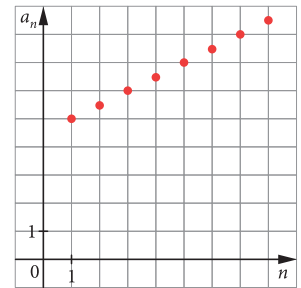
Punkty wykresu układają się wzdłuż prostej – wykresu pewnej funkcji liniowej. Aby znaleźć jej równanie, popatrzmy na wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$a_n = \frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2}$$

Punkty wykresu ciągu (a_n) należą zatem do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.



Powtórzmy rozumowanie z przykładu 9 na ogólnych danych.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = a_1 + n \cdot r - r$$

$$a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Po zamianie oznaczeń otrzymujemy wzór funkcji liniowej $f(x) = r \cdot x + (a_1 - r)$ ze współczynnikami r oraz $a_1 - r$. Jak widać, ciąg arytmetyczny jest ściśle związany z funkcją liniową. Każdy ciąg arytmetyczny jest zatem monotoniczny.

Wniosek

Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 + (n - 1)r$ jest:

- rosnący dla $r > 0$,
- malejący dla $r < 0$,
- stały dla $r = 0$.

Zadania

2.1. Które z ciągów o podanych wzorach ogólnych to ciągi arytmetyczne?

$$a_n = \frac{3n+2}{5}, \quad b_n = \frac{n-5}{7-n}, \quad c_n = (1-2n)^2 + 4(1-n^2), \quad d_n = (2-3n)^2 + 2(2+n^2)$$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. $(a_n), (c_n)$

2.2. Które z podanych ciągów są ciągami arytmetycznymi?

$$(a_n): 6, 10, 14, 18, 22$$

$$(c_n): 1, -2, 1, -2, 1$$

$$(b_n): 1, 2, 4, 7, 11, 16$$

$$(d_n): \pi, \pi, \pi, \pi, \pi$$

2.3. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

a) 1, 5

b) 2, -3

c) 4, $2\frac{1}{2}$

d) 7, 7

2.4. Jakie liczby należy wstawić w miejsca $?$, aby otrzymany ciąg był arytmetyczny?

a) 3, 5, $?$, 9, $?$, $?$

c) 2,1; 2,6; $?$; $?$; 4,1; $?$

b) $\frac{1}{2}$, $?$, $1\frac{1}{2}$, $?$, $2\frac{1}{2}$, $?$, $3\frac{1}{2}$

d) -5, $?$, $?$, $?$, 3, 5

2.5. Dane są: pierwszy wyraz a_1 i różnica r ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz a_n .

a) $a_1 = 30$, $r = -3$, $n = 25$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $r = 1\frac{1}{2}$, $n = 5$

b) $a_1 = \frac{2}{3}$, $r = \frac{5}{3}$, $n = 11$

e) $a_1 = 0,4$, $r = 0,1$, $n = 11$

c) $a_1 = 2$, $r = \sqrt{2} - 1$, $n = 8$

f) $a_1 = \sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$, $n = 6$

2.6. Podaj liczbę wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego.

a) -1, 6, ..., 69

c) $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, ..., $3\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ..., 5

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$, ..., $\frac{1+15\sqrt{2}}{2}$

2.7. Sprawdź, czy dla podanej funkcji $y = f(x)$ ciąg wartości $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ jest ciągiem arytmetycznym.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$

2.8. Podaj przykład ciągu arytmetycznego

a) nieskończonego o wszystkich wyrazach niewymiernych.

b) czterowyrazowego, którego wyrazy są liczbami pierwszymi.

2.9. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 13, a jego dziesiąty wyraz jest równy 25. Wyznacz piętnasty wyraz tego ciągu.

2.10. Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa -10, a suma wyrazów czwartego i dziewiątego jest równa -22.

2.11. Suma wyrazów szóstego i ósmego pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 40, a iloczyn wyrazów drugiego i trzeciego też jest równy 40. Wyznacz ten ciąg.

2.2. (a_n) , (d_n)

2.3. a) 9, 13, 17 b) -8, -13, -18

c) $1, -\frac{1}{2}, -2$ d) 7, 7, 7

2.4. a) 7, 11, 13

b) 1, 2, 3

c) 3,1; 3,6; 4,6

d) -3, -1, 1

2.5. a) $a_{25} = -42$ b) $a_{11} = 17\frac{1}{3}$

c) $a_8 = 7\sqrt{2} - 5$ d) $a_5 = 6\frac{1}{2}$

e) $a_{11} = 1,4$ f) $a_6 = 6\sqrt{5}$

2.6. a) jedenaście

b) dziewiętnaście

c) czternaście

d) osiem

2.7. a) tak b) nie

2.8. a) np. $\sqrt{2} + 1$, $\sqrt{2} + 2$, $\sqrt{2} + 3$, ...

b) np. 5, 11, 17, 23

2.9. 40

2.10. pierwszy wyraz: 11, różnica: -4

2.11. pierwszy wyraz: 2, różnica: 3
lub pierwszy wyraz: -16, różnica: 6

2.12. 30

2.13. 32

2.14. sześć

2.15. $a_1 = -5, r = 3$

2.16. 930 minut (15,5 godziny)

2.17. nie

2.18. a) tak b) nie

2.19. $x = 28$ 2.20. $x = 0,4$ lub $x = 2$ 2.21. a) 12, 16, 20
b) 9, 12, 15

2.12. Ostatni wyraz 10-wyrazowego rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 37. Różnica wyrazów piątego i czwartego jest równa 4. Oblicz $a_4 + a_5$.

2.13. Suma początkowych trzech wyrazów 8-elementowego ciągu arytmetycznego jest równa 18, a ostatnich trzech jest równa 78. Oblicz sumę dwóch środkowych wyrazów tego ciągu.

2.14. W skończonym ciągu arytmetycznym pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni jest od niego sześć razy większy. Różnica ciągu wynosi 3. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.15. Suma pierwszego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 2, a iloraz szóstego i pierwszego jest równy -2 . Wyznacz ten ciąg.

2.16. Rysiek miał ogromne zaległości w czytaniu lektur z języka polskiego. Przyrzekł więc sobie, że w klasie maturalnej każdego dnia poświęci trochę czasu literaturze. Zaczął od pół godziny 1 września i postanowił każdego następnego dnia czytać o 10 minut dłużej niż poprzedniego. Do ilu minut czytania dziennie doszedłby w tym systemie po 3 miesiącach?

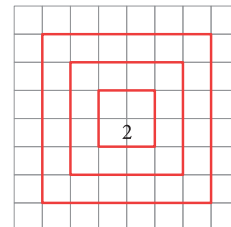


2.17. Serial *Myślenie szkodzi* emitowany jest sześć razy w tygodniu. Pan Ferdynand Koliberek może oglądać go tylko w soboty. Obejrzał odcinek pięćdziesiąty siódmy. Czy obejrzy odcinek setny?

2.18. Na rysunku przedstawione są kwadraty o bokach, których długości tworzą ciąg arytmetyczny.

a) Czy obwody narysowanych kwadratów tworzą ciąg arytmetyczny?

b) Czy pola tych kwadratów tworzą ciąg arytmetyczny?



2.19. Wyznacz taką liczbę x , aby ciąg 23, x , 33 był ciągiem arytmetycznym.

2.20. Wyznacz takie x , aby liczby: $4x^2 - 1$, $6x + 1$, $x^2 + 7$ były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

2.21. Długości boków trójkąta prostokątnego są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i spełniają podany warunek. Oblicz długości boków tego trójkąta.

a) obwód trójkąta jest równy 48

b) różnica długości przyprostokątnych jest równa 3

2.22. Pan Ignacy handluje używanym sprzętem elektronicznym. Co miesiąc obniża cenę jednego z modeli komputera o a zł. Jeżeli sprzęt nie znajdzie nabywcy w ciągu 10 miesięcy, jest oddawany bezpłatnie fundacji charytatywnej. Cenę początkową komputera ustalono na 1800 zł. W ostatnim miesiącu pan Ignacy chciałby sprzedać go za 450 zł.



- Jaka powinna być wielkość a ?
- Za ile można ten komputer kupić w trzecim miesiącu oferty?
- W którym miesiącu cena komputera jest niższa o 50% od ceny początkowej?

2.23. Podaj równanie prostej zawierającej wykres ciągu arytmetycznego (a_n)

- o wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = -3$.
- o wyrazach $a_3 = 4$ i $a_5 = 10$.

2.24. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (2 - n)^2$. Czy ciąg $c_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym?

* **2.25.** Wiadomo, że (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi. Zbadaj, czy ciąg o wyrazie ogólnym c_n jest ciągiem arytmetycznym.

- $c_n = a_n + b_n$
- $c_n = a_n - b_n$
- $c_n = a_n \cdot b_n$

* **2.26.** Sprawdź, czy ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = a_n + b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

- $a_n = (n + 1)^2$ $b_n = 1 - n^2$
- $a_n = n^2 + 3n - 1$ $b_n = (1 - n)(2 + n)$
- $a_n = (n + 2)^2$ $b_n = n^2 - 2$
- $a_n = 2 + (n + 3)^2$ $b_n = 2 - (n + 3)^2$

* **2.27.** W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_m = m^2$ oraz $a_k = k^2$ dla pewnych liczb k i m ($m \neq k$). Oblicz różnicę r tego ciągu.

* **2.28.** W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_m = k$ oraz $a_k = m$ dla pewnych liczb k i m ($m \neq k$). Oblicz różnicę r tego ciągu oraz wyraz a_p .

2.29. W trójwyrazowym ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest równy 0. Ile wynosi suma wszystkich wyrazów tego ciągu?

* **2.30.** Wypisz wszystkie skończone ciągi arytmetyczne o wyrazach całkowitych, których pierwszym wyrazem jest liczba 5, a ostatnim liczba 17.

2.25. (a_n) i (b_n) to ciągi arytmetyczne, więc istnieją liczby r i s takie, że

$$a_{n+1} = a_n + r \text{ i } b_{n+1} = b_n + s \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

$$\text{a) } c_n = a_n + b_n$$

$$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = (a_n + r) + (b_n + s) = (a_n + b_n) + (r + s) = c_n + (r + s) \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (c_n) jest arytmetyczny.

$$\text{b) } c_n = a_n - b_n$$

$$c_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n + r) - (b_n + s) = (a_n - b_n) + (r - s) = c_n + (r - s) \text{ dla } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Zatem ciąg (c_n) jest arytmetyczny.

$$\text{c) } c_n = a_n \cdot b_n$$

Ciąg (c_n) może być arytmetyczny (np. gdy jeden z ciągów (a_n) lub (b_n) jest stały), ale nie musi (np. gdy $a_n = b_n = n$).

Odp.: a) tak b) tak c) może być, ale nie musi

- 150
- 1500 zł
- w siódmym

$$\text{2.23. a) } y = -3x + 4$$

$$\text{b) } y = 3x - 5$$

2.24. tak

2.26. Patrz s. 148.

$$\text{2.27. } a_m = a_1 + (m - 1)r$$

$$a_k = a_1 + (k - 1)r$$

$$a_m - a_k = (m - 1)r - (k - 1)r = (m - k)r$$

$$\text{Stąd } r = \frac{a_m - a_k}{m - k} = \frac{m^2 - k^2}{m - k} =$$

$$= \frac{(m - k)(m + k)}{m - k} = m + k.$$

$$\text{Odp.: } r = m + k$$

$$\text{2.28. } a_m - a_k = (m - k)r$$

$$\text{Stąd } r = \frac{a_m - a_k}{m - k} = \frac{k - m}{m - k} = -1.$$

$$a_1 = a_m - (m - 1)r =$$

$$= k - (m - 1)(-1) = k + m - 1$$

$$a_p = a_1 + (p - 1)r =$$

$$= k + m - 1 + (p - 1)(-1) = k + m - p$$

$$\text{Odp.: } r = -1, a_p = k + m - p$$

2.29. 0

2.30. Patrz s. 148.

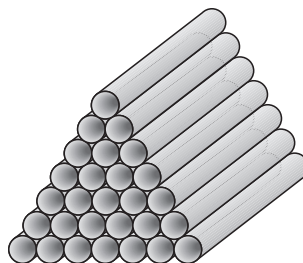
3. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Umiejętności:

- stosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Wyobraźmy sobie, że na placu budowy składowane są rury kanalizacyjne w piramidach, jak na rysunku. Osoba planująca pracę powinna wiedzieć, ile rur liczy jedna taka piramida. Nietrudno zauważyć, że każde wyższe piętro piramidy ma o jedną rurę mniej niż to, na którym jest oparte, a na szczycie leży jedna rura. Ile jest wszystkich rur w jednej piramidzie?

Obliczmy: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.



Umiejętność sumowania wyrazów ciągu jest potrzebna w różnych zadaniach, także praktycznych.

Oznaczmy sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Zatem:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ itd.}$$

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Założenie

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r oraz $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Teza

Dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ prawdziwa jest równość: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

ZZ i KPU

tematy 3.7, 3.8

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

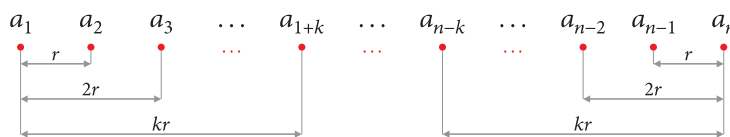
Generator
testów i sprawdzianów

Uwagi metodyczne

Zwracamy uwagę na sposób wyprowadzenia wzorów na sumy n początkowych wyrazów ciągów arytmetycznego (obok) i geometrycznego (s. 168) – bez stosowania indukcji matematycznej.

Dowód

W ciągu arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ o różnicy r mamy:



$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n$$

Ogólnie – dla $k \in \mathbb{N}$ i $1 < k < n$ mamy:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n$$

czyli suma wyrazów jednakowo oddalonych od wyrazu pierwszego i ostatniego jest stała i równa się sumie wyrazu pierwszego i ostatniego.

Zapiszmy na dwa sposoby sumę n wyrazów:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Dodajemy stronami obie równości i otrzymujemy:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Po prawej stronie mamy n składników, z których każdy jest równy $a_1 + a_n$.

Stąd:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Koniec dowodu

Liczbę rur w piramidzie można było zatem wyznaczyć dużo prościej:

$$\frac{7+1}{2} \cdot 7 = 28$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego można zapisać w innej postaci. Korzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)r)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

i otrzymujemy:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 1

Obliczmy sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Rozwiązanie

Liczy naturalne od 1 do 100 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = 1$, różnica $r = 1$ oraz $a_{100} = 100$. Zatem:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$$

Odp.: Szukana suma jest równa 5050.

Przykład 2 ◀ zad. 3.2

Wyznamy sumę trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 17$ i różnica $r = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Obliczamy trzydziesty wyraz ciągu:

$$a_{30} = a_1 + 29r = 17 + 29 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$$

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30, \text{ więc:}$$

$$S_{30} = \frac{17 + 2\frac{1}{2}}{2} \cdot 30 = 19\frac{1}{2} \cdot 15 = 292\frac{1}{2}$$

$$\text{Odp.: } S_{30} = 292\frac{1}{2}$$

Przykład 3 ◀ zad. 3.4, 3.5

Obliczmy sumę wyrazów $a_7 + a_8 + \dots + a_{19} + a_{20}$ ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 14$ i różnica $r = -3$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{19} + a_{20} = S_{20} - (a_1 + a_2 + \dots + a_6) = S_{20} - S_6$$

Mamy:

$$a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = -43, \quad a_6 = 14 + 5 \cdot (-3) = -1$$

Zatem:

$$S_{20} = \frac{14 - 43}{2} \cdot 20 = -290, \quad S_6 = \frac{14 - 1}{2} \cdot 6 = 39$$

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{19} + a_{20} = S_{20} - S_6 = -290 - 39 = -329$$

Odp.: Szukana suma jest równa -329.

◀3.4. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = -5$ i różnica $r = 4$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od jedenastego do trzydziestego włącznie.

Odp.: 1460

◀3.5. Dla ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 1$ oblicz

a) sumę początkowych pięćdziesięciu wyrazów.

b) sumę wyrazów od a_{20} do a_{40} .

Odp.: a) 1375 b) 672

◀3.2. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

- | | | |
|-------------------------|--------------------|-----------|
| a) $a_1 = 3$ | $r = 2$ | $n = 8$ |
| b) $a_1 = -10$ | $r = 3$ | $n = 20$ |
| c) $a_1 = 50$ | $r = -\frac{1}{2}$ | $n = 17$ |
| d) $a_1 = 4,35$ | $r = 0$ | $n = 100$ |
| e) $a_1 = 35$ | $r = -2$ | $n = 7$ |
| f) $a_1 = \sqrt{2}$ | $r = 2\sqrt{2}$ | $n = 5$ |
| g) $a_1 = 3\frac{1}{2}$ | $r = -\frac{1}{4}$ | $n = 8$ |
| h) $a_1 = 0,2$ | $r = 0,1$ | $n = 12$ |

Odp.: a) $S_8 = 80$ b) $S_{20} = 370$ c) $S_{17} = 782$ d) $S_{100} = 435$

e) $S_7 = 203$ f) $S_5 = 25\sqrt{2}$ g) $S_8 = 21$ h) $S_{12} = 9$

Przykład 4

Wypożyczalnia rowerów jest czynna od 9⁰⁰ do 20⁰⁰. Wypożyczenie roweru na godzinę kosztuje 3 zł, a każda następna godzina jest tańsza o 20 gr od poprzedniej. Ile kosztuje wypożyczenie roweru na jeden dzień?

Rozwiązanie

Od 9⁰⁰ do 20⁰⁰ jest 11 godzin. Mamy więc obliczyć sumę jedenastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ i różnica $r = -0,2$.

Najpierw wyznaczamy ostatni składnik sumy.

$$a_{11} = a_1 + 10r = 3 + 10 \cdot (-0,2) = 1$$

Oznacza to, że za jedenastą godzinę wypożyczenia roweru płacimy złotówkę.

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 1}{2} \cdot 11 = 22$$

Odp.: Za cały dzień musimy zapłacić 22 zł.

**Przykład 5** ◀ zad. 3.13

Lewa strona równania $(2x + 3) + (4x + 3) + \dots + (30x + 3) = 105$, $x \neq 0$, jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiążemy to równanie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $a_1 = 2x + 3$, $a_2 = 4x + 3$.

$$r = (4x + 3) - (2x + 3) = 2x \quad \leftarrow \text{różnica } r = a_2 - a_1$$

Należy teraz obliczyć, którym wyrazem rozpatrywanego ciągu jest ostatni składnik sumy.

$$30x + 3 = 2x + 3 + (n - 1) \cdot 2x \quad \leftarrow a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$30x = 2x + n \cdot 2x - 2x \quad \leftarrow x \neq 0$$

$$n = 15$$

Lewa strona równania jest sumą piętnastu wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_{15} = 105$$

$$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = 105$$

$$\frac{(2x + 3) + (30x + 3)}{2} \cdot 15 = 105, \text{ stąd } x = \frac{1}{4}$$

Odp.: Rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1}{4}$.

◀ **3.13.** Lewa strona równania jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $x + (x + 2) + (x + 4) + \dots + (x + 24) = 143$

b) $0,5 + (0,5 + x) + \dots + (0,5 + 19x) = -180$

c) $7 + 9 + 11 + \dots + x = 432$

d) $x + (x + 3) + \dots + (x + 54) = 570$

e) $-7 + 1 + 9 + \dots + (x + 1) = 119$

Odp.: **a)** $x = -1$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = 41$ **d)** $x = 3$ **e)** $x = 40$

Przykład 6 ◀ zad. 3.14, 3.15

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i różnicy $r = 3$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby przekroczyć 100?

Rozwiązanie

Szukamy odpowiedzi na pytanie, dla jakiej najmniejszej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $S_n > 100$.

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n > 100$$

Ponieważ $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$, otrzymujemy:

$$\frac{3n+1}{2} \cdot n > 100$$

$$3n^2 + n - 200 > 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 200 = 2401, \sqrt{\Delta} = 49$$

$$n_1 = \frac{-1-49}{6} = -\frac{25}{3}, n_2 = \frac{-1+49}{6} = 8$$

Zatem $3n^2 + n - 200 > 0$ dla $n \in \left(-\infty; -\frac{25}{3}\right) \cup (8; \infty)$.

Ponieważ $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, otrzymujemy rozwiązanie: $n \in \{9, 10, 11, \dots\}$.

Odp.: Trzeba dodać co najmniej 9 wyrazów.

Zauważmy, że przekształcenie wzoru $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ do postaci $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$ prowadzi do poniższego wniosku.

Wniosek

Średnia arytmetyczna wszystkich wyrazów skończonego n -wyrazowego ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazów: pierwszego i ostatniego.

Zadania

3.1. Wiadomo, że dla pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) suma $S_{30} = 252$, a suma $S_{31} = 296$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a_{31} = 44$

B. Średnia arytmetyczna początkowych trzydziestu wyrazów tego ciągu wynosi 126.

C. Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

◀ **3.14.** Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = -10$ i różnica $r = 3$. Zbadaj, czy istnieje liczba naturalna n spełniająca podany warunek. Jeśli tak, to ją podaj.

a) $S_n = 279$

b) $S_n = 510$

Odp.: **a)** tak, $n = 18$

b) nie

◀ **3.15.** W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 5$ i różnica $r = 2$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać 192?

Odp.: dwanaście

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. P, F, P

- 3.2.** a) $S_8 = 80$
 b) $S_{20} = 370$
 c) $S_{17} = 782$
 d) $S_{100} = 435$
 e) $S_7 = 203$
 f) $S_5 = 25\sqrt{2}$
 g) $S_8 = 21$
 h) $S_{12} = 9$

- 3.3.** a) 3240
 b) 5202
 c) -180
 d) $253\sqrt{3}$

3.4. 1460

- 3.5.** a) 1375
 b) 672

- 3.6.** a) 494 550
 b) 594
 c) 1188

3.7. 55

3.8. 55

3.9. 1092

- 3.10.** a) $n = 11$
 b) $n = 13$
 c) $n = 6$
 d) $n = 8$

3.2. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

- | | | |
|-------------------------|--------------------|-----------|
| a) $a_1 = 3$ | $r = 2$ | $n = 8$ |
| b) $a_1 = -10$ | $r = 3$ | $n = 20$ |
| c) $a_1 = 50$ | $r = -\frac{1}{2}$ | $n = 17$ |
| d) $a_1 = 4,35$ | $r = 0$ | $n = 100$ |
| e) $a_1 = 35$ | $r = -2$ | $n = 7$ |
| f) $a_1 = \sqrt{2}$ | $r = 2\sqrt{2}$ | $n = 5$ |
| g) $a_1 = 3\frac{1}{2}$ | $r = -\frac{1}{4}$ | $n = 8$ |
| h) $a_1 = 0,2$ | $r = 0,1$ | $n = 12$ |

3.3. Oblicz sumę wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego.

- | | |
|-----------------------|--|
| a) 6, 9, 12, ..., 138 | c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, \dots, -18\frac{1}{2}$ |
| b) 2, 6, 10, ..., 202 | d) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots, 22\sqrt{3}$ |

3.4. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = -5$ i różnica $r = 4$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od jedenastego do trzydziestego włącznie.

3.5. Dla ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 1$ oblicz

- a) sumę początkowych pięćdziesięciu wyrazów.
 b) sumę wyrazów od a_{20} do a_{40} .

3.6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych

- a) trzycyfrowych.
 b) mniejszych od 100 i podzielnych przez 9.
 c) dwucyfrowych podzielnych przez 4.

3.7. Oblicz średnią arytmetyczną liczb 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

3.8. Oblicz średnią arytmetyczną wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych.

3.9. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 3$ i różnica $r = 8$. Oblicz sumę tych dwunastu spośród początkowych wyrazów tego ciągu, których numery są liczbami nieparzystymi.

3.10. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r , w którym

- | | | |
|------------------|--------------|-------------|
| a) $S_n = -5,5,$ | $a_1 = -3,$ | $a_n = 2.$ |
| b) $S_n = 585,$ | $a_1 = 57,$ | $a_n = 33.$ |
| c) $S_n = 126,$ | $a_1 = 31,$ | $r = -4.$ |
| d) $S_n = -228,$ | $a_1 = -18,$ | $r = -3.$ |

3.19. $S_n = 78, S_{n+4} = 210, r = 4$

$$S_{n+4} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = (a_n + r) + (a_n + 2r) + (a_n + 3r) + (a_n + 4r) = 4a_n + 10r = 4a_n + 10 \cdot 4 = 4a_n + 40$$

$$4a_n + 40 = 210 - 78, \text{ stąd } a_n = 23.$$

$$a_1 = a_n - (n-1)r = 23 - 4(n-1) = 27 - 4n$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = S_n$$

$$\frac{27 - 4n + 23}{2} \cdot n = 78$$

$$(25 - 2n)n = 78$$

$$2n^2 - 25n + 78 = 0, \quad \Delta = 25^2 - 4 \cdot 78 = 1$$

$$n_1 = \frac{25-1}{4} = 6, \quad n_2 = \frac{25+1}{4} = 6,5 \notin \mathbb{N}$$

$$n = 6, \quad a_1 = 27 - 4 \cdot 6 = 3$$

Odp.: $a_1 = 3, n = 6$

3.11. W ciągu arytmetycznym (a_n) piąty wyraz jest równy 17, a wyraz dwudziesty czwarty jest od niego $4\frac{6}{17}$ razy większy. Oblicz sumę wyrazów stojących między tymi wyrazami.

3.12. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma 10 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 25, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 15. Wyznacz ten ciąg.

3.13. Lewa strona równania jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $x + (x + 2) + (x + 4) + \dots + (x + 24) = 143$

b) $0,5 + (0,5 + x) + \dots + (0,5 + 19x) = -180$

c) $7 + 9 + 11 + \dots + x = 432$

d) $x + (x + 3) + \dots + (x + 54) = 570$

e) $-7 + 1 + 9 + \dots + (x + 1) = 119$

3.14. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = -10$ i różnica $r = 3$. Zbadaj, czy istnieje liczba naturalna n spełniająca podany warunek. Jeśli tak, to ją podaj.

a) $S_n = 279$

b) $S_n = 510$

3.15. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 5$ i różnica $r = 2$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać 192?

3.16. Między liczby 38 i 26 wstaw pięć liczb tak, aby razem z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny. Oblicz sumę wszystkich siedmiu liczb.

3.17. Ile liczb trzeba wstawić między 6 i -20 , aby otrzymać ciąg arytmetyczny, dla którego suma wszystkich wyrazów jest równa -140 ?

3.18. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 3, a suma kwadratów liczb skrajnych jest równa 20. Wyznacz te liczby.

* **3.19.** Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r = 4$ jest równa 78, a suma początkowych $n + 4$ wyrazów tego ciągu jest równa 210. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu oraz n .

* **3.20.** W malejącym pięciowyrazowym ciągu arytmetycznym iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 260, a suma pozostałych wyrazów wynosi 54. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

3.20. $a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r$ – malejący ciąg arytmetyczny o różnicy $r < 0$

$$\begin{cases} (a - 2r)(a + 2r) = 260 \\ (a - r) + a + (a + r) = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4r^2 = 260 \\ 3a = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 4r^2 = 18^2 - 260 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ r^2 = 16 \end{cases}$$

$$a = 18, r = -4 \text{ (bo } r < 0)$$

$$a - 2r = 18 + 8 = 26, a - r = 18 + 4 = 22,$$

$$a + r = 18 - 4 = 14, a + 2r = 18 - 8 = 10$$

Odp.: 26, 22, 18, 14, 10

3.11. 819

3.12. $a_1 = -5, r = 2$

3.13. a) $x = -1$

b) $x = -1$

c) $x = 41$

d) $x = 3$

e) $x = 40$

3.14. a) tak, $n = 18$ b) nie

3.15. dwanaście

3.16. 36, 34, 32, 30, 28; suma: 224

3.17. osiemnaście

3.18. $-2, 1, 4$ lub $4, 1, -2$

3.19. Patrz s. 154.

3.21. po 16 dniach

3.22. nie

3.23. tak, po 11 dniach

3.24. 140 patyczków, 18 domków

3.25. po 21 dniach roboczych
i 3 niedzielach, czyli po 24 dniach

3.26. a) $a_n = -38$, $S_n = -155$

b) $a_1 = -3$, $S_n = 84$

c) $a_1 = -11$, $r = 3$

d) $n = 115$, $S_n = 25\,645$

e) $n = 10$, $a_n = -16$

3.27. $a_n = 2n - 1$

$a_1 = 1$, $a_{k+1} = 2(k+1) - 1 = 2k + 1$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k+1) =$$

$$= \frac{1 + 2k + 1}{2} \cdot (k+1) = (k+1)^2$$

3.21. W oblężonym Zbarażu było 1000 beczek prochu. Pierwszego dnia zużyto ich 100, ale każdego następnego zużywano o 5 beczek mniej. Po ilu dniach zapas prochu się skończył?

3.22. Tomek ma pomalować 36 m^2 ściany. Przez pierwsze 15 minut pomalował 4 m^2 , a potem w czasie każdego kolejnego kwadransa malował o $0,2 \text{ m}^2$ mniej niż przez poprzedni kwadrans. Czy zdąży skończyć pracę w ciągu 3 godzin?



3.23. Mateusz uczył się słówek z języka obcego. Zaczął od 40 i każdego następnego dnia zmniejszał liczbę słówek o 2. Czy w ten sposób opanował 330 słówek? Jeśli tak, to po ilu dniach?

3.24. Ola układa z patyczków domki tak, jak na rysunku. Ile patyczków potrzebuje na ułożenie ciągu dziesięciu domków? Ile domków tworzących taki ciąg można ułożyć z 400 patyczków?



3.25. W poniedziałek kioskarz wziął do sprzedaży 20 egzemplarzy nowego dziennika. Każdego następnego dnia (poza niedzielą) zwiększał liczbę egzemplarzy o 5. Po pewnym czasie rozliczył się z siecią kolportażu za pobrane 1470 egzemplarzy gazety. Po ilu dniach od rozpoczęcia sprzedaży nastąpiło rozliczenie?

3.26. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r . Jakimi liczbami należy zastąpić $?$, aby otrzymać prawdziwe zależności?

	a_1	r	n	a_n	S_n
a)	7	-5	10	?	?
b)	?	5	7	27	?
c)	?	?	13	25	91
d)	-5	4	?	451	?
e)	2	-2	?	?	-70

3.27. Wykaż, że suma $k+1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 1$ jest równa $(k+1)^2$.

* **3.28.** Dopisz trzy następne wyrazy ciągu arytmetycznego i oblicz sumę S_5 .

a) $\sqrt{12} + 1$, $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

c) $|1 - 2\sqrt{5}|$, $\frac{5}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{18}$, $\frac{2}{\sqrt{2} - 1}$

d) $|2 - \sqrt{27}|$, $\frac{11}{2\sqrt{3} + 1}$

3.28. a) $a_1 = 2\sqrt{3} + 1$, $a_2 = 2 + \sqrt{3}$, $r = a_2 - a_1 = (2 + \sqrt{3}) - (2\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3}$, $a_3 = 2 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 3$, $a_4 = 4 - \sqrt{3}$,

$$a_5 = 5 - 2\sqrt{3}, S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2\sqrt{3} + 1 + 5 - 2\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 15$$

b) $a_1 = 3\sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2} + 2$, $r = 2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$, $a_3 = 2\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}$, $a_4 = 6$, $a_5 = 8 - \sqrt{2}$,

$$S_5 = \frac{3\sqrt{2} + 8 - \sqrt{2}}{2} \cdot 5 = 5(4 + \sqrt{2})$$

c) $a_1 = 2\sqrt{5} - 1$, $a_2 = \sqrt{5}$, $r = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 1 = 1 - \sqrt{5}$, $a_3 = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} = 1$, $a_4 = 2 - \sqrt{5}$, $a_5 = 3 - 2\sqrt{5}$, $S_5 = \frac{2\sqrt{5} - 1 + 3 - 2\sqrt{5}}{2} \cdot 5 = 5$

d) $a_1 = 3\sqrt{3} - 2$, $a_2 = 2\sqrt{3} - 1$, $r = 2\sqrt{3} - 1 - 3\sqrt{3} + 2 = 1 - \sqrt{3}$, $a_3 = 2\sqrt{3} - 1 + 1 - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2 - \sqrt{3}$,

$$S_5 = \frac{3\sqrt{3} - 2 + 2 - \sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$$

Odp.: a) 3, $4 - \sqrt{3}$, $5 - 2\sqrt{3}$; $S_5 = 15$ **b)** $\sqrt{2} + 4$, 6, $8 - \sqrt{2}$; $S_5 = 5(4 + \sqrt{2})$

c) 1, $2 - \sqrt{5}$, $3 - 2\sqrt{5}$; $S_5 = 5$ **d)** $\sqrt{3}$, 1, $2 - \sqrt{3}$; $S_5 = 5\sqrt{3}$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1. Wskaż wartość sumy $21 + 22 + 23 + \dots + 49$.
A. 115 B. 980 C. 1015 D. 1050
2. Suma pierwszych siedmiu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 35. Wynika z tego, że
A. $a_1 = 5$. B. $a_3 = 5$. C. $a_4 = 5$. D. $a_7 = 5$.
3. Wskaż sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) .
A. $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$ B. $\frac{a_{n-1} + a_n}{2} \cdot n$ C. $\frac{a_2 + a_{n-2}}{2} \cdot n$ D. $\frac{a_2 + a_{n-1}}{2} \cdot n$
4. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = \frac{1}{3}$ i suma $S_{17} = 51$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Różnicą tego ciągu jest $r = \frac{1}{3}$.
B. Średnia arytmetyczna początkowych siedemnastu wyrazów tego ciągu jest liczbą pierwszą.
C. $a_{17} = \frac{17}{3}$
5. W ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz $a_1 = 2$ i różnica $r = \frac{1}{2}$. Oblicz sumę dziewięciu kolejnych wyrazów tego ciągu, z których pierwszym jest wyraz a_3 .
6. Sklep meblowy oferuje zakup mebli na raty za 8400 zł (w tę kwotę wliczono już odsetki). Spłaty rat można dokonać na dwa sposoby:
• wariant A: pierwsza rata będzie równa 1120 zł, a każda następna będzie o 20 zł niższa od poprzedniej,
• wariant B: wszystkie raty będą równe i wyniosą $8\frac{1}{3}\%$ ceny 8400 zł.
Ile będzie rat w przypadku wariantu A i ile wyniesie najmniejsza rata? Ile będzie równa rata i ile rat trzeba będzie spłacić w przypadku wariantu B?
- D** 7. Wykaż, że ciąg (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = n^2 + 3n$ dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, jest ciągiem arytmetycznym. Podaj jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r .

7. $S_n = n^2 + 3n$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$

Dla $n \geq 2$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n) - [(n-1)^2 + 3(n-1)] = n^2 + 3n - n^2 + 2n - 1 - 3n + 3 = 2n + 2$$

Dla $n = 1$:

$$a_n = a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 1 + 2$$

Zatem $a_n = 2n + 2$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, czyli ciąg (a_n) jest arytmetyczny (jako funkcja liniowa zmiennej n).

$$r = a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 2 - (2n+2) = 2 \text{ dla } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Odp.: $a_1 = 4$, $r = 2$

Prosto do matury

1. C
2. C
3. D
4. P, P, P
5. 45
6. A: 8 rat, 980 zł, B: 12 rat, 700 zł

4. Ciąg geometryczny

Umiejętności:

- rozpoznawanie, czy dany ciąg jest geometryczny
- stosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego

Kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej stałej wartości. Jeśli dodawanie zastąpimy mnożeniem, to otrzymamy drugi charakterystyczny rodzaj ciągu – ciąg geometryczny. W tym ciągu zamiast stałej różnicy między wyrazami mamy stały iloraz kolejnych wyrazów.

Definicja

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q nazywaną **ilorazem** ciągu.

Jeżeli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o danym wyrazie a_1 i ustalonej liczbie $q \in \mathbb{R}$, to prawdziwa jest następująca zależność rekurencyjna:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Szczególnym przypadkiem ciągu geometrycznego jest ciąg postaci $(a, 0, 0, 0, \dots)$, czyli taki, w którym iloraz $q = 0$ (a również może być równe 0). W dalszych rozważaniach będziemy się zajmowali przede wszystkim takimi ciągami geometrycznymi, w których wszystkie wyrazy są różne od zera.

Przykład 1 ◀ zad. 4.3

Wypiszemy sześć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q .

Rozwiązanie

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $a_1 = -7, q = 1$ | $-7, -7, -7, -7, -7, -7$ |
| b) $a_1 = 2, q = -3$ | $2, -6, 18, -54, 162, -486$ |
| c) $a_1 = 1, q = 2$ | $1, 2, 4, 8, 16, 32$ |
| d) $a_1 = 80, q = \frac{1}{2}$ | $80, 40, 20, 10, 5, \frac{5}{2}$ |
| e) $a_1 = -1, q = \frac{1}{3}$ | $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, -\frac{1}{243}$ |

◀4.3. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

- a) 2, 6 b) $5\sqrt{5}, 5$ c) 4, -2 d) $-\frac{27}{16}, -\frac{9}{8}$

Odp.: a) 18, 54, 162 b) $\sqrt{5}, 1, \frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ d) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

ZZ i KPU

tematy 3.9, 3.10

Multiteka

- Wykres ciągu arytmetycznego i geometrycznego

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.4



Przykład 2

W pewnym doświadczeniu bakterie podwajają swoją liczebność co 3 godziny. Jeśli na początku było ich k , to po kolejnych trzygodzinnych okresach ich liczebność będzie równa:

$$2k, 4k, 8k, 16k, 32k, 64k, 128k, 256k, \dots$$

Są to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

Przykład 3

Jeżeli ograniczymy dziedzinę funkcji wykładniczej $f(x) = 2^{x-3}$ do zbioru liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy ciąg o wzorze ogólnym:

$$a_n = 2^{n-3}$$

Obliczmy jego początkowe wyrazy.

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = 4$$

Jest to ciąg geometryczny, którego iloraz jest równy 2.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Wzór ogólny ciągu geometrycznego można uzyskać podobnie jak w przypadku ciągu arytmetycznego.

W ciągu arytmetycznym:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + \dots + r}_{(n-1) \text{ składników}} = a_1 + (n-1)r$$

W ciągu geometrycznym:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

...

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n-1) \text{ czynników}} = a_1 q^{n-1}$$

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

◀4.5. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: wyraz a_1 , iloraz q i liczba wyrazów n . Oblicz a_n .

a) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 6$

b) $a_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 4$

c) $a_1 = -100$, $q = 0,1$, $n = 3$

d) $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $q = 2\sqrt{5}$, $n = 6$

Odp.: a) $a_6 = -4$

b) $a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $a_3 = -1$

d) $a_6 = 2000$

◀4.6. Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) . Podaj wzór ogólny tego ciągu.

a) $a_1 = 3$, $a_6 = 96$

b) $a_2 = 1$, $a_4 = \frac{1}{4}$

c) $a_3 = 3$, $a_5 = 27$

d) $a_4 = -\frac{1}{2}$, $a_6 = -\frac{1}{8}$

Odp.: a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_n = 2^{2-n}$ lub $a_n = (-2)^{2-n}$

c) $a_n = 3^{n-2}$ lub $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-2}$

d) $a_n = -2^{3-n}$ lub $a_n = (-2)^{3-n}$

Na przykład w ciągu geometrycznym:

- (a_n) , w którym $a_1 = 3$ i iloraz $q = 4$:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 3 \cdot 4^9 = 786\,432$$

- (b_n) , w którym $b_1 = 10$ i iloraz $q = -0,3$:

$$b_{12} = b_1 q^{11} = 10 \cdot (-0,3)^{11} = -0,0000177147$$

- (c_n) , w którym $c_1 = -\frac{1}{2}$ i iloraz $q = 2$:

$$c_{11} = c_1 q^{10} = -\frac{1}{2} \cdot 2^{10} = -512.$$

Przykład 4 ◀ zad. 4.5, 4.6

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_2 = -3$ oraz $a_5 = -\frac{3}{8}$. Wyznaczmy wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie

$$a_2 = a_1 \cdot q = -3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = -\frac{3}{8}$$

Z powyższych równości wynika, że $a_1 \cdot q \neq 0$. Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = -3 \\ a_1 \cdot q^4 = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

◀ dzielimy stronami pierwsze równanie przez drugie

$$\frac{1}{q^3} = 8, \text{ stąd } q = \frac{1}{2}, \text{ zatem } a_1 = -6.$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{6}{2^{n-1}}$$

Odp.: $a_n = -\frac{6}{2^{n-1}}$

Przykład 5

Pewien wirus komputerowy przenosi się za pośrednictwem poczty elektronicznej. Jeśli przyjmiemy, że każdy, kto dostał zainfekowaną wiadomość, prześle ją swoim trzem znajomym posiadającym niezainfekowane komputery, to liczba nowych zarażonych komputerów po kolejnych krokach jest równa odpowiednio 3, 9, 27, 81, ... Są to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ i iloraz $q = 3$. Obliczmy dwudziesty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

$$a_{20} = a_1 q^{19} = 1 \cdot 3^{19} \approx 1,162 \cdot 10^9$$

Po dwudziestu krokach jeden komputer mógłby więc zarazić ponad miliard innych!

Liczby otrzymane w wyniku takich obliczeń mogą być zaskakująco duże. W takich sytuacjach często mówi się, że jakieś zjawisko szerzy się w **postępie geometrycznym**. Nazwa ta wzięła się od używanego dawniej określenia ciągu – „postęp”.

Przykład 6

Każdy z nas ma 1 ojca, 2 dziadków, 4 pradziadków, 8 prapradziadków itd. Zatem liczba naszych męskich przodków $n + 1$ pokoleń wstecz powinna być równa 2^n (ciąg geometryczny). Jeśli przyjmiemy około 25 lat na jedno pokolenie, otrzymamy liczbę około 2^{40} naszych męskich przodków żyjących w czasach Bolesława Chrobrego (1000 lat = $40 \cdot 25$ lat).



Problem w tym, że $2^{40} \approx 1100$ miliardów, czyli ponad sto razy tyle, ile liczy obecna ludność Ziemi. A przecież nie uwzględniliśmy żadnych przodków żeńskich! Wyjaśnienie nie jest trudne. W rzeczywistości naszych przodków nie było aż tylu. Gałęzie drzewa genealogicznego każdego z nas bardzo często zrastają się ze sobą. Wielu przodków liczylśmy kilka razy, raz np. jako praprapra...dziadka ze strony matki, raz jako praprapra...dziadka ze strony ojca.

Przykład 7

Sporządzimy wykres ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 9$ i iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

$$a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{1}{9} \text{ itd.}$$

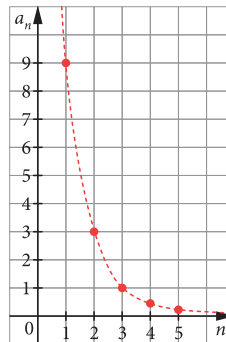
Punkty wykresu układają się wzdłuż charakterystycznej krzywej – wykresu pewnej funkcji wykładniczej. Aby znaleźć jej równanie, popatrzmy na wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

Ciąg geometryczny jest związany z funkcją wykładniczą, podobnie jak ciąg arytmetyczny z funkcją liniową.



Własności ciągu geometrycznego

Zastanówmy się, kiedy ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach różnych od zera jest monotoniczny. Badanie znaku różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q - 1)$$

prowadzi do następującego wniosku.

Ciąg liczbowy, który ma na zmianę wyrazy dodatnie i ujemne, nazywamy **ciągami naprzemiennymi**.

Wniosek

Dany jest ciąg geometryczny o wzorze ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ taki, że $a_1 \cdot q \neq 0$.

- Jeżeli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący dla $a_1 < 0$, rosnący dla $a_1 > 0$.
- Jeżeli $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący dla $a_1 < 0$, malejący dla $a_1 > 0$.
- Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym, czyli monotonicznym.
- Jeżeli $q < 0$, to sąsiednie wyrazy ciągu mają różne znaki i taki ciąg jest niemonotoniczny.

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Charakterystyczną własność mają również wyrazy ciągu geometrycznego. Jeżeli wszystkie wyrazy geometrycznego ciągu (a_n) są różne od zera, to dla dowolnego $n > 1$ (poza numerem ostatniego wyrazu w ciągu skończonym) prawdziwe są równości:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{oraz} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

czyli:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Powyższa równość jest prawdziwa również w sytuacji, gdy (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wszystkich (lub o wszystkich poza pierwszym) wyrazach równych 0.

Twierdzenie

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , $n > 1$, prawdziwa jest zależność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Jeśli wyrazy ciągu geometrycznego są dodatnie, to każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią geometryczną wyrazów z nim sąsiadujących, czyli $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

Średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{ab}$.



Powyższy wniosek można uogólnić, postępując podobnie jak w wypadku średniej arytmetycznej w ciągu arytmetycznym. Jeżeli wyrazy geometrycznego ciągu (a_n) są dodatnie, to $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Bezpośrednio z definicji wynika również, że jeżeli w zbiorze trzech różnych od 0 liczb $\{a, b, c\}$ kwadrat jednej z nich jest równy iloczynowi dwóch pozostałych, to liczby te tworzą ciąg geometryczny, np.:

- jeżeli $a^2 = b \cdot c$, to geometryczne są ciągi b, a, c oraz c, a, b ,
- jeżeli $b^2 = a \cdot c$, to geometryczne są ciągi a, b, c oraz c, b, a itd.

Jeśli w ciągu geometrycznym (a_n) wszystkie wyrazy są różne od 0 oraz jeśli $k < l$, to:

$$\frac{a_l}{a_k} = q^{l-k}$$

Aby udowodnić tę zależność, można skorzystać ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego.

Przykład 8 ◀ zad. 4.9, 4.10

Jaką liczbę należy wstawić pomiędzy 3 i 9, aby otrzymać trójwyrazowy ciąg geometryczny?

Rozwiązanie

Oznaczmy szukaną liczbę x . Ciąg 3, x , 9 jest geometryczny, gdy:

$$x^2 = 3 \cdot 9$$

Zatem $x = 3\sqrt{3}$ lub $x = -3\sqrt{3}$.

Odp.: $3\sqrt{3}$ lub $-3\sqrt{3}$

Przykład 9 ◀ zad. 4.19

Między liczby -5 i 45 wstawimy takie dwie liczby x, y , aby ciąg $-5, x, y$ był ciągiem arytmetycznym, a ciąg $x, y, 45$ – ciągiem geometrycznym.

Rozwiązanie

Ciąg $-5, x, y$ jest ciągiem arytmetycznym, gdy $x = \frac{-5 + y}{2}$.

Ciąg $x, y, 45$ jest ciągiem geometrycznym, gdy $y^2 = 45x$.

◀4.19. Dany jest ciąg 2, x , 18, y . Wyznacz x i y tak, aby liczby 2, x , 18 w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny, a liczby x , 18, y – ciąg arytmetyczny.

Odp.: $x = 6, y = 30$ lub $x = -6, y = 42$

◀4.9. Wstaw między liczby a i b taką dodatnią liczbę x , aby ciąg a, x, b był geometryczny.

a) $a = 5, b = 75$

b) $a = -3, b = -12$

c) $a = \sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$

Odp.: a) $x = 5\sqrt{15}$

b) $x = 6$

c) $x = 2$

◀4.10. Wstaw między liczby a i b taką liczbę x , aby ciąg a, x, b był geometryczny.

a) $a = 3, b = 27$

b) $a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{12}$

c) $a = \sqrt{3}, b = 3\sqrt{3}$

Odp.: a) $x = -9$ lub $x = 9$

b) $x = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{12}$

c) $x = -3$ lub $x = 3$

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} x = \frac{-5+y}{2} \\ y^2 = 45x \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = \frac{-5+y}{2} \\ y^2 = 45 \cdot \frac{-5+y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-5+y}{2} \\ 2y^2 - 45y + 225 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \Delta = 225$$

$$\begin{cases} x = \frac{-5+y}{2} \\ y_1 = \frac{15}{2}, \quad y_2 = 15 \end{cases}$$

Zadanie ma więc dwa rozwiązania.

Odp.: $x = \frac{5}{4}, y = \frac{15}{2}$ lub $x = 5, y = 15$

Przykład 10

Wyznamy wyrazy ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich: 3, x , y , z , 12. Ile wynosi iloraz tego ciągu?

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy wyraz y .

$$y = \sqrt{3 \cdot 12} = 6 \quad \leftarrow a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

Teraz możemy wyznaczyć wyrazy x oraz z .

$$x = \sqrt{3y} = \sqrt{3 \cdot 6} = 3\sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{y \cdot 12} = \sqrt{6 \cdot 12} = 6\sqrt{2}$$

Iloraz tego ciągu jest równy $\frac{x}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

Odp.: wyrazy ciągu: 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$, 12, iloraz ciągu: $\sqrt{2}$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. P, F, P

4.1. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 \neq 0$ i iloraz $q < 0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \cdot a_n < 0$.

B. Jeżeli $q < -1$, to ciąg (a_n) jest malejący.

C. Co najmniej dwa wyrazy tego ciągu są dodatnie.

4.2. Które z podanych ciągów są ciągami geometrycznymi?

$$(a_n): 1, 2, -4, -8, 16$$

$$(c_n): \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$$

$$(b_n): 1, -2, 4, -8, 16, -32$$

$$(d_n): \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}$$

4.3. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

a) 2, 6

b) $5\sqrt{5}, 5$

c) 4, -2

d) $-\frac{27}{16}, -\frac{9}{8}$

4.4. Jakie liczby należy wstawić w miejsca $?$, aby otrzymany ciąg był geometryczny?

a) 2, 4, $?$, 16, 32, $?$, 128

c) $\sqrt{5}, ?$, $4\sqrt{5}, ?$, $16\sqrt{5}, 32\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, ?$, $13\frac{1}{2}, ?$, $121\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{7}, 7, ?$, $?$, $49\sqrt{7}$

4.5. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: wyraz a_1 , iloraz q i liczba wyrazów n . Oblicz a_n .

a) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $q = -\sqrt{2}$ $n = 6$

b) $a_1 = 2\sqrt{3}$ $q = \frac{1}{2}$ $n = 4$

c) $a_1 = -100$ $q = 0,1$ $n = 3$

d) $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $q = 2\sqrt{5}$ $n = 6$

4.6. Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) . Podaj wzór ogólny tego ciągu.

a) $a_1 = 3$ $a_6 = 96$ c) $a_3 = 3$ $a_5 = 27$

b) $a_2 = 1$ $a_4 = \frac{1}{4}$ d) $a_4 = -\frac{1}{2}$ $a_6 = -\frac{1}{8}$

4.7. Sprawdź, czy ciąg (a_n) o podanym wzorze ogólnym jest geometryczny.

a) $a_n = \frac{1}{2}n + 1$ b) $a_n = 2^n$ c) $a_n = (\sqrt{3})^n$ d) $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$

D 4.8. Wykaż, że liczby $3 + 2\sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$, 1 tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz q tego ciągu.

4.9. Wstaw między liczby a i b taką dodatnią liczbę x , aby ciąg a, x, b był geometryczny.

a) $a = 5$, $b = 75$

b) $a = -3$, $b = -12$

c) $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$

4.10. Wstaw między liczby a i b taką liczbę x , aby ciąg a, x, b był geometryczny.

a) $a = 3$, $b = 27$

b) $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{12}$

c) $a = \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{3}$

4.8. Przyjmujemy: $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = -1 - \sqrt{2}$, $c = 1$.

Pokażemy, że $b^2 = ac$.

$$b^2 = (-1 - \sqrt{2})^2 \cdot 1 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} = ac$$

Zatem podane liczby tworzą ciąg geometryczny. Jego iloraz to:

$$q = \frac{1}{-(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = 1 - \sqrt{2}$$

Odp.: $q = 1 - \sqrt{2}$

4.2. $(b_n), (d_n)$

4.3. a) 18, 54, 162 b) $\sqrt{5}, 1, \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ d) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

4.4. a) 8, 64 b) $4\frac{1}{2}, 40\frac{1}{2}$

c) $2\sqrt{5}, 8\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{7}, 49$

4.5. a) $a_6 = -4$

b) $a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $a_3 = -1$

d) $a_6 = 2000$

4.6. a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_n = 2^{2-n}$ lub $a_n = (-2)^{2-n}$

c) $a_n = 3^{n-2}$ lub $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-2}$

d) $a_n = -2^{3-n}$ lub $a_n = (-2)^{3-n}$

4.7. a) nie b) tak

c) tak d) tak

4.9. a) $x = 5\sqrt{15}$

b) $x = 6$

c) $x = 2$

4.10. a) $x = -9$ lub $x = 9$

b) $x = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{12}$

c) $x = -3$ lub $x = 3$

4.11. $x = 64$, $y = 256$

4.12. $a_1 = \frac{3}{2}$, $q = 2$ lub $a_1 = \frac{3}{2}$, $q = -2$

4.13. 5

4.14. ok. 107 km

4.15. po trzech latach

4.16. 26 liczb trzycyfrowych,
20 liczb czterocyfrowych,
18 liczb n -cyfrowych dla $n > 4$

4.18. 2, 6, 18

4.19. $x = 6$, $y = 30$ lub $x = -6$,
 $y = 42$

4.20. $x - r$, x , $x + r$ – ciąg
arytmetyczny
 $x - r - 1$, x , $x + r + 5$ – ciąg
geometryczny

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 24 \\ (x - r - 1)(x + r + 5) = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania:

$$3x = 24, \text{ czyli } x = 8.$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość
 x do drugiego równania:

$$(8 - r - 1)(8 + r + 5) = 8^2$$

$$(7 - r)(13 + r) = 64$$

$$r^2 + 6r - 27 = 0$$

$$(r + 9)(r - 3) = 0$$

$$r = -9 \text{ lub } r = 3$$

$$\text{Dla } r = -9: x - r = 17, x + r = -1$$

$$\text{Dla } r = 3: x - r = 5, x + r = 11$$

Odp.: 17, 8, -1 lub 5, 8, 11

4.21. Patrz s. 167.

4.11. Wstaw między liczby 16 i 1024 takie liczby x i y , aby ciąg 16, x , y , 1024 był ciągiem geometrycznym.

4.12. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 6, a siódmy 96. Wyznacz wyraz a_1 i iloraz q tego ciągu.

4.13. Piąty wyraz ciągu geometrycznego jest równy 5, natomiast wyrazy szósty i siódmy są równe. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu.

4.14. Duży arkusz papieru o grubości 0,1 mm został złożony na pół, potem jeszcze raz na pół, ponownie na pół itd. Oblicz hipotetyczną grubość złożonego papieru po 30 złożeniach.

4.15. W salonie samochodowym nowe auto kosztuje 72 342 zł. Od chwili, gdy samochód po zakupie wyjeżdża z salonu, jego wartość systematycznie maleje. Po każdym roku eksploatacji cena spada przeciętnie do 80% ceny poprzedniej. Po ilu latach cena tego samochodu spadnie o ponad 30 000 zł?



4.16. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry tworzą ciąg geometryczny? Ile jest liczb czterocyfrowych o tej własności? Jaka jest odpowiedź na takie pytanie dla liczb n -cyfrowych, gdy $n > 4$?

* **4.17.** Wyznacz wszystkie trójwyrazowe ciągi geometryczne o wyrazach naturalnych, których suma wyrazów jest równa 91.

4.18. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Suma pierwszej i trzeciej z nich jest równa 20, a kwadrat drugiej jest równy 36. Wyznacz te liczby.

4.19. Dany jest ciąg 2, x , 18, y . Wyznacz x i y tak, aby liczby 2, x , 18 w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny, a liczby x , 18, y – ciąg arytmetyczny.

* **4.20.** Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 24. Jeżeli pierwszą z nich zmniejszymy o 1, trzecią zwiększymy o 5, a drugą pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

* **4.21.** Ciąg składa się z pięciu liczb dodatnich, których suma jest równa 33. Pierwsze trzy wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny, trzy środkowe tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Drugą liczbą jest 4. Wyznacz wyrazy tego ciągu.

4.17. (a , b , c) – ciąg geometryczny o wyrazach naturalnych, czyli $a \in \mathbb{N}$, $b = aq$, $c = aq^2$ i $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a + aq + aq^2 = 91 \Leftrightarrow a \left(1 + \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right) = 91 \Leftrightarrow a (m^2 + mn + n^2) = 91n^2$$

Zapisujemy rozkłady na czynniki pierwsze liczby 91: $1 \cdot 91 = 7 \cdot 13 = 13 \cdot 7 = 91 \cdot 1$.

Liczby n^2 oraz $m^2 + mn + n^2$ są względnie pierwsze, więc $(m^2 + mn + n^2) \mid 91$, czyli $m^2 + mn + n^2 \in \{1, 7, 13, 91\}$.

• $m^2 + mn + n^2 = 1$: wtedy $m = 0$, $n = 1$, $a = 91$, $b = 0$, $c = 0$. Otrzymujemy ciąg: (91, 0, 0).

• $m^2 + mn + n^2 = 7$: wtedy $m = 1$, $n = 2$ lub $m = 2$, $n = 1$, czyli $a = 52$ lub $a = 13$. Otrzymujemy ciągi: (52, 26, 13), (13, 26, 52).

• $m^2 + mn + n^2 = 13$: wtedy $m = 1$, $n = 3$ lub $m = 3$, $n = 1$, czyli $a = 63$ lub $a = 7$. Otrzymujemy ciągi: (63, 21, 7), (7, 21, 63).

• $m^2 + mn + n^2 = 91$: wtedy $m = 1$, $n = 9$ lub $m = 9$, $n = 1$, lub $m = 5$, $n = 6$, lub $m = 6$, $n = 5$, czyli $a = 81$ lub $a = 1$, lub $a = 36$ lub $a = 25$. Otrzymujemy ciągi: (81, 9, 1), (1, 9, 81), (36, 30, 25), (25, 30, 36).

Odp.: (1, 9, 81), (7, 21, 63), (13, 26, 52), (25, 30, 36), (36, 30, 25), (52, 26, 13), (63, 21, 7), (81, 9, 1), (91, 0, 0)

4.22. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q ($q \neq 1$). Sprawdź, czy ciąg o wzorze ogólnym $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest geometryczny, jeżeli tak – wyznacz jego iloraz.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dany jest dziewięciowyrazowy ciąg geometryczny o dodatnich wyrazach, w którym pierwszy wyraz jest równy 2, a ostatni wyraz jest równy 162. Szósty wyraz tego ciągu jest równy

- A. 36. B. $18\sqrt{3}$. C. 54. D. $36\sqrt{3}$.

2. Która liczba nie jest wyrazem ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 6$ i ilorazie $q = -2$?

- A. -3 B. 24 C. 96 D. -192

3. Która para liczb wyznacza malejący ciąg geometryczny (a_n) ?

- A. $a_1 = \sqrt{2} - 1$, $q = 2$ C. $a_1 = \sqrt{2} - 1$, $q = -2$
B. $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $q = 2$ D. $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $q = -2$

4. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 \neq 0$ oraz iloraz $q \neq 0$ i $q \neq 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Szósty wyraz tego ciągu jest równy $a_4 q^2$.
B. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $a_4 q^5$.
C. Drugi wyraz tego ciągu jest równy $\frac{a_1 a_{11}}{a_{10}}$.

5. Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy -4, a jego piąty wyraz jest równy $-\frac{1}{2}$. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

6. Trzy liczby, których suma jest równa 39, są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jeżeli pierwszą z nich zwiększymy trzykrotnie, drugą zwiększymy dwukrotnie, a trzecią pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

D 7. Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby $\log a, \log b, \log c$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

4.21. r, s – różnice ciągów arytmetycznych

Wyrazy ciągu: $4 - r, 4, 4 + r, 4 + r + s, 4 + r + 2s$

$$\begin{cases} 4 - r + 4 + 4 + r + 4 + r + s + 4 + r + 2s = 33 \\ 4(4 + r + s) = (4 + r)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r + 3s = 13 \\ 16 + 4r + 4s = 16 + 8r + r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{13 - 2r}{3} \\ r^2 + 4r - 4s = 0 \end{cases}$$

$$r^2 + 4r - 4 \cdot \frac{13 - 2r}{3} = 0 \quad | \cdot 3 \Leftrightarrow 3r^2 + 20r - 52 = 0$$

$$\Delta = 20^2 + 12 \cdot 52 = 1024, \quad \sqrt{\Delta} = 32$$

$$r_1 = \frac{-20 - 32}{6} = \frac{-26}{3} = -8\frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{-20 + 32}{6} = 2$$

$4 + r_1 = 4 - 8\frac{2}{3} < 0$, zatem $r = 2$ (bo wyrazy ciągu są dodatnie).

$s = \frac{13 - 2 \cdot 2}{3} = 3$, więc wyrazy szukanego ciągu to: 2, 4, 6, 9, 12.

Odp.: 2, 4, 6, 9, 12

4.22. (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q .

Prosto do matury

1. B

2. A

3. B

4. P, F, P

5. $-\frac{1}{16}$

6. 13, 13, 13 lub 3, 9, 27

7. a, b, c – ciąg geometryczny
 $a > 0, b > 0, c > 0$

Niech q – iloraz ciągu geometrycznego.

Wtedy $b = aq, c = aq^2$.

$$\log b = \log aq = \log a + \log q$$

$$\log c = \log aq^2 = \log a + 2 \log q$$

Zatem liczby $\log a, \log b, \log c$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $\log q$.

5. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Umiejętności:

- stosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego
- stosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Wyprowadzimy teraz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Ponownie korzystamy z oznaczenia sumy n początkowych wyrazów ciągu (a_n) :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

$$\bullet S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ dla } q \neq 1 \quad \bullet S_n = n \cdot a_1 \text{ dla } q = 1$$

Założenie

(a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q oraz $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Teza

Dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ prawdziwa jest równość: $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ dla $q \neq 1$ oraz $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$.

Dowód

- Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem geometrycznym stałym. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu są równe a_1 i oczywiście $S_n = n \cdot a_1$.
- Jeżeli $q \neq 1$, to sumy kolejnych wyrazów ciągu (a_n) możemy (korzystając ze wzoru na n -ty wyraz) zapisać w postaci:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_1 q$$

$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$

...

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad (1)$$

ZZ i KPU

tematy 3.11, 3.12

Multiteka

- Ulubiona gra cesarza

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.5

Generator
testów i sprawdzianów

Obie strony ostatniej równości mnożymy przez q :

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (2)$$

Po odjęciu stronami równości (2) od równości (1) otrzymamy:

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a_1 - a_1q^n \\ S_n(1 - q) &= a_1(1 - q^n) \end{aligned}$$

Założyliśmy, że $q \neq 1$, więc:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Koniec dowodu

Na przykład suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 6$ i iloraz $q = -3$, wynosi:

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 6 \cdot \frac{1 - (-3)^5}{1 - (-3)} = 6 \cdot \frac{1 + 243}{4} = 366$$

Z kolei suma $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10}$, czyli suma 10 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 5$ i iloraz $q = 5$, jest równa:

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 5 \cdot \frac{5^{10} - 1}{5 - 1} = 12\,207\,030$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \langle \langle \rangle \rangle$$

Przykład 1 ◀ zad. 5.2, 5.3

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ wyraz $a_1 = -2$, a suma n początkowych wyrazów $S_n = -\frac{80}{27}$. Obliczmy n .

Rozwiązanie

Podstawiamy dane do wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

$$-\frac{80}{27} = -2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}, \text{ stąd } \frac{40}{27} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{40}{27} \cdot \frac{2}{3} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{80}{81}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81}$$

Odp.: $n = 4$

◀ **5.2.** Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q .

a) $a_1 = 5, q = 2, n = 6$

b) $a_1 = -27, q = \frac{1}{3}, n = 5$

c) $a_1 = 8, q = 1, n = 10$

d) $a_1 = \frac{1}{2}, q = -1, n = 100$

e) $a_1 = -64, q = -2, n = 6$

f) $a_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{2}, n = 8$

g) $a_1 = -2, q = 1 - \sqrt{2}, n = 3$

h) $a_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, q = \sqrt{2}-1, n = 4$

Odp.: a) $S_6 = 315$

b) $S_5 = -40\frac{1}{3}$

c) $S_{10} = 80$

d) $S_{100} = 0$

e) $S_6 = 1344$

f) $S_8 = 15(\sqrt{2} + 2)$

g) $S_3 = 2(3\sqrt{2} - 5)$

h) $S_4 = 2(3 - 2\sqrt{2})$

◀ **5.3.** Oblicz sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego.

a) $3, 3^2, \dots, 3^6$

b) $6, 3, \dots, \frac{3}{16}$

c) $\sqrt{3}, 3, \dots, 27$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, 8$

e) $3\sqrt{5}, 15, \dots, 375$

f) $\pi, 2\pi, \dots, 32\pi$

Odp.: a) 1092

b) $11\frac{13}{16}$

c) $13(3 + \sqrt{3})$

d) $\frac{31 + 15\sqrt{2}}{2}$

e) $93(5 + \sqrt{5})$

f) 63π

Przykład 2

Dwaj bracia otworzyli butelkę wody mineralnej. Starszy nalał do kubka połowę zawartości butelki i ją wypił, potem młodszy połowę tego, co zostało, starszy znów połowę tego, co zostało itd. Kiedy młodszy brat po raz piąty dostał butelkę, wypił już wszystko. Jaką część wody wypił każdy z nich?

Rozwiązanie

Obliczmy, jaką część wody wypił kolejno każdy z braci:

- starszy $\frac{1}{2}$ wody, która była w butelce,
- młodszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
- starszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
- młodszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ itd.

Starszy brat wypił więc:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \text{ zawartości butelki}$$

Jest to suma 5 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ i iloraz $q = \frac{1}{4}$. Zatem:

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{341}{512}$$

Ponieważ $\frac{341}{512} \approx 66,6\%$, dla młodszego pozostało ok. 33,4% zawartości butelki.

Odp.: Starszy brat wypił ok. 66,6% zawartości butelki, a młodszy resztę, czyli ok. 33,4% zawartości.

Przykład 3

Zgodnie z legendą bramin, który wynalazł szachy, żądał od szacha perskiego tyle ziaren pszenicy, ile znajduje się na szachownicy, jeśli zostanie pokryta zgodnie z zasadą: na pierwszym polu jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim cztery itd., czyli na każdym następnym dwa razy więcej niż na poprzednim. Szachownica liczy 64 pola, więc liczba ziaren jest sumą 64 wyrazów ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz $q = 2$.



Zatem:

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$$

Przyjmijmy, że jedno ziarno ma masę ok. 0,03 g. Zgromadzona pszenica ważyłaby więc:

$$0,03 \cdot 18 \cdot 10^{18} \text{ g} = 5,4 \cdot 10^{11} \text{ t} = 540 \text{ miliardów ton}$$

Na świecie zbiera się obecnie co roku ok. 700 milionów ton pszenicy. Na szachownicy powinno się w takim razie zmieścić ponad 700 razy więcej.

Zadania

5.1. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$S_n = 3 \cdot \frac{1 - 5^n}{4}. \text{ Oceń prawdziwość podanych zdań.}$$

A. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 3.

B. Iloraz tego ciągu jest równy 5.

C. Ten ciąg jest rosnący.

5.2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q .

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------|-----------|
| a) $a_1 = 5$ | $q = 2$ | $n = 6$ |
| b) $a_1 = -27$ | $q = \frac{1}{3}$ | $n = 5$ |
| c) $a_1 = 8$ | $q = 1$ | $n = 10$ |
| d) $a_1 = \frac{1}{2}$ | $q = -1$ | $n = 100$ |
| e) $a_1 = -64$ | $q = -2$ | $n = 6$ |
| f) $a_1 = \sqrt{2}$ | $q = \sqrt{2}$ | $n = 8$ |
| g) $a_1 = -2$ | $q = 1 - \sqrt{2}$ | $n = 3$ |
| h) $a_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ | $q = \sqrt{2} - 1$ | $n = 4$ |

5.3. Oblicz sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $3, 3^2, \dots, 3^6$ | d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, 8$ |
| b) $6, 3, \dots, \frac{3}{16}$ | e) $3\sqrt{5}, 15, \dots, 375$ |
| c) $\sqrt{3}, 3, \dots, 27$ | f) $\pi, 2\pi, \dots, 32\pi$ |

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. F, P, F

5.2. a) $S_6 = 315$

b) $S_5 = -40\frac{1}{3}$

c) $S_{10} = 80$

d) $S_{100} = 0$

e) $S_6 = 1344$

f) $S_8 = 15(\sqrt{2} + 2)$

g) $S_3 = 2(3\sqrt{2} - 5)$

h) $S_4 = 2(3 - 2\sqrt{2})$

5.3. a) 1092

b) $11\frac{13}{16}$

c) $13(3 + \sqrt{3})$

d) $\frac{31 + 15\sqrt{2}}{2}$

e) $93(5 + \sqrt{5})$

f) 63π

5.4. 2047

5.5. a) $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$

$$3 \cdot \frac{1 - (\sqrt{3})^n}{1 - \sqrt{3}} = 3(40 + 13\sqrt{3})$$

$$(\sqrt{3})^n - 1 = (40 + 13\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)$$

$$(\sqrt{3})^n = 1 + 40\sqrt{3} - 40 + 39 - 13\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3})^n = 27\sqrt{3} = (\sqrt{3})^7$$

$$n = 7$$

b) $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{3} : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

$$a_1 q^{n-1} = a_n, \text{ czyli:}$$

$$12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{243}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^6}$$

$$n - 1 = 6, \text{ stąd } n = 7.$$

c) $6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = 24 \quad | : 6$

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 4 = (\sqrt{2})^4$$

$$n - 1 = 4, \text{ stąd } n = 5.$$

d) $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = 8$

$$a_5 = a_3 q^2 = 4 \cdot 8 = 32$$

$$\text{Zatem } n = 5.$$

Odp.: a) $n = 7$ b) $n = 7$

c) $n = 5$ d) $n = 5$

5.6. a) $S_5 = -5 \frac{13}{16}$

b) $k = 7$

c) $-1 \cdot \frac{1 - q^4}{1 - q} = -\frac{40}{27}$

$$\frac{(1 - q)(1 + q)(1 + q^2)}{1 - q} = \frac{40}{27}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 = 1 + \frac{1 + 3 + 9}{27}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Dzielimy wielomian

$$q^3 + q^2 + q - \frac{13}{27} \text{ przez dwumian}$$

$$q - \frac{1}{3} \text{ i otrzymujemy } q^2 + \frac{4}{3}q + \frac{13}{9}.$$

Ten trójmian nie ma miejsc zerowych, ponieważ

$$\Delta = \frac{16}{9} - 4 \cdot \frac{13}{9} < 0. \text{ Zatem}$$

$$\text{jedynym rozwiązaniem jest } q = \frac{1}{3}.$$

Odp.: $q = \frac{1}{3}$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$

5.7. 4, 8, 16, 32

5.8. ok. 75,5 m

5.9. $1365\pi \text{ cm}^2$

5.10. 20 ha

5.11. 37 448

5.4. Oblicz sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby 1024.

* 5.5. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Wyznacz n .

a) $a_2 = 3\sqrt{3} \quad q = \sqrt{3} \quad S_n = 3(40 + 13\sqrt{3})$

b) $a_3 = \frac{4}{3} \quad q = \frac{1}{3} \quad a_n = \frac{4}{243}$

c) $a_1 = 6 \quad q = \sqrt{2} \quad a_n = 24$

d) $a_1 = \frac{1}{2} \quad a_3 = 4 \quad a_n = 32$

5.6. W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q dane są trzy spośród wielkości: a_1, q, k, S_k . Oblicz czwartą z nich.

a) $a_1 = -3, \quad q = \frac{1}{2}, \quad k = 5$ * c) $a_1 = -1, \quad k = 4, \quad S_4 = -\frac{40}{27}$

b) $a_1 = 10, \quad q = -2, \quad S_k = 430$ d) $q = 3, \quad k = 5, \quad S_5 = \frac{121}{2}$

5.7. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 4(2^n - 1)$.

5.8. Samochód rozpoczął hamowanie. W ciągu pierwszej sekundy przejechał 20 m, a w ciągu każdej następnej przejeżdżał $\frac{3}{4}$ odległości przebytej w poprzedniej sekundzie. Jaką drogę przebył po 10 sekundach?

5.9. Promienie sześciu rozłącznych kół tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2. Promień największego z nich jest równy 32 cm. Ile jest równa suma pól tych kół?

5.10. W ciągu pięciu dni rolnik zaorał 38,75 ha ziemi. Każdego dnia orał kawałek o 50% mniejszy niż powierzchnia zaorana poprzedniego dnia. Jaką powierzchnię zaorał pierwszego dnia?



5.11. W każdym z 8 wielkich pudełek jest 8 dużych pudełek. W każdym dużym pudełku jest 8 średnich pudełek. W każdym średnim pudełku jest 8 małych pudełek, a w każdym małym pudełku jest 8 malutkich pudełek. Ile jest wszystkich pudełek?

5.14. • (a_n) – ciąg arytmetyczny, $a_1 = 2, r = \frac{1}{2}, \quad a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

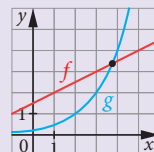
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}}{2} \cdot n = \frac{7 + n}{4} \cdot n = \frac{n(n+7)}{4}$$

• (b_n) – ciąg geometryczny, $b_1 = \frac{1}{2}, q = -2, \quad b_n = b_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot (-2)^{n-1} =$

$$= 2^{-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-2}, \quad S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-2)^n}{6}$$

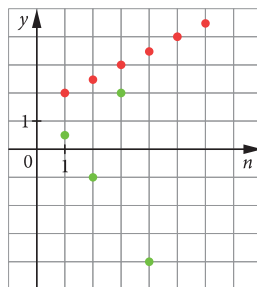
Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i leżą na wykresie funkcji

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, a dodatnie wyrazy ciągu (b_n) mają nieparzyste numery i leżą na wykresie funkcji $g(x) = 2^{x-2}$. Dla $x > 0$ obie funkcje są rosnące i przecinają się w jednym punkcie, którego współrzędna x nie jest liczbą naturalną. Zatem ciągi (a_n) i (b_n) nie mają równych wyrazów.



5.12. Szef firmy postanowił przyznać premie pięciu najlepszym pracownikom. Wysokość nagród była zróżnicowana w taki sposób, że każda z nich, poczynając od drugiej, była równa 80% poprzedniej. Jaka była wysokość każdej z premii, jeżeli okazało się, że kwota przeznaczona na wszystkie wyniosła 18 909 zł?

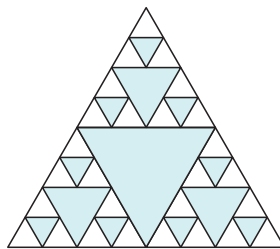
5.13. W równaniu $x + 3x + 9x + \dots + 3^{n-1}x = 120$ kolejne współczynniki przy niewiadomej x tworzą ciąg geometryczny. Pierwiastkiem równania jest 3. Wyznacz n .



* **5.14.** Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów dwóch ciągów: arytmetycznego i geometrycznego. Podaj wzory na wyraz ogólny i sumę n wyrazów S_n każdego z tych ciągów. Czy któreś wyrazy obydwu ciągów są równe?

* **5.15.** W redakcji gazety pracuje równocześnie kilka drukarek. Najmniej wydajna z nich drukuje 13 stron w ciągu 10 minut, a najbardziej wydajna drukuje w tym samym czasie 351 stron. Wszystkie razem wydrukowały 520 stron przez 10 minut. Ile drukarek pracowało i ile stron każda z nich wydrukowała, jeżeli okazało się, że liczby stron wydrukowanych przez poszczególne drukarki utworzyły ciąg geometryczny?

* **5.16.** Dany jest trójkąt równoboczny o boku 1. Połączono środki jego boków i otrzymano cztery trójkąty równoboczne. Środkowy z nich został zamalowany, a każdy z trzech pozostałych znów podzielono na cztery trójkąty. Z każdej czwórki zamalowano środkowy i powtórzono podział pozostałych trójkątów. Całą operację powtórzono 6 razy. Na rysunku przedstawiona jest figura otrzymana z trójkątów zamalowanych w trzech krokach.



- Wyznacz długość boku trójkąta zamalowanego w szóstym kroku.
- Oblicz pole zamalowanej figury otrzymanej po sześciu krokach.

* **5.17.** Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + x = 3\frac{31}{32}$

c) $3 - 6 + \dots - x = -63$

b) $\frac{1}{2} + 1 + \dots + x = 127,5$

d) $2 + 2\sqrt{2} + \dots + x = 62 + 30\sqrt{2}$

5.15. a_n – liczba stron wydrukowana przez drukarkę numer n

(a_n) – ciąg geometryczny o ilorazie q

$$a_1 = 13, a_n = 351, S_n = 520$$

$$\bullet a_n = a_1 q^{n-1}, \text{ stąd } q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{351}{13} = 27.$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Leftrightarrow 520 = 13 \cdot \frac{27q - 1}{q - 1} \quad | \cdot \frac{q - 1}{13} \Leftrightarrow 40(q - 1) = 27q - 1$$

$$13q = 39, \text{ stąd } q = 3.$$

$$\bullet 3^{n-1} = 27$$

$$n - 1 = 3, \text{ stąd } n = 4.$$

$$\bullet a_2 = 13 \cdot 3 = 39, a_3 = 39 \cdot 3 = 117$$

Odp.: cztery drukarki; pierwsza: 13 stron, druga: 39, trzecia: 117, czwarta: 351

5.12. 5625 zł, 4500 zł, 3600 zł, 2880 zł, 2304 zł

5.13. $n = 4$

5.14. Patrz s. 172.

5.16. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ – długość boku trójkąta zamalowanego w n -tym kroku

a) $a_6 = \frac{1}{64}$

b) Po n -tym kroku zostaje 3^n niezamalowanych trójkątów o boku a_n . Szukane pole:

$$\begin{aligned} 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - 3^6 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} &= \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6\right] &= \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{729}{4096}\right) &= \frac{3367\sqrt{3}}{4 \cdot 4096} = \\ = \frac{3367\sqrt{3}}{16384} \end{aligned}$$

Odp.: a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{3367\sqrt{3}}{16384}$

5.17. Patrz s. 174.

Prosto do matury



Prosto do matury

1. D
2. C
3. C
4. P, F, P
5. $S_7 = 21\frac{1}{2}$
6. 420,20 zł
7. $\frac{1}{6}$

5.17. a) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + x = 3\frac{31}{32}$

$$a_1 = 2, q = \frac{1}{2}, a_n = x, S_n = 3\frac{31}{32}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = x, \text{ stąd } \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x}{4}.$$

$$a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = S_n$$

$$2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{31}{32}$$

$$4 \left(1 - \frac{x}{4}\right) = \frac{127}{32} \quad | : 4$$

$$1 - \frac{x}{4} = \frac{127}{128}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{128}, \text{ czyli } x = \frac{1}{32}.$$

b) $\frac{1}{2} + 1 + \dots + x = 127,5, \quad a_1 = \frac{1}{2}, q = 2, a_n = x, S_n = 127,5, \quad \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = x, \text{ stąd } 2^n = 4x.$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 127,5 \Leftrightarrow 4x - 1 = 255 \Leftrightarrow 4x = 256 \quad | : 4 \Leftrightarrow x = 64$$

c) $3 - 6 + \dots - x = -63, \quad a_1 = 3, q = -2, a_n = -x, S_n = -63, \quad 3 \cdot (-2)^{n-1} = -x, \text{ stąd } (-2)^n = \frac{2}{3}x.$

$$3 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = -63 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3}x = -63 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 64 \quad | \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 96$$

d) $2 + 2\sqrt{2} + \dots + x = 62 + 30\sqrt{2}, \quad a_1 = 2, q = \sqrt{2}, a_n = x, S_n = 62 + 30\sqrt{2}, \quad 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = x, \text{ stąd } (\sqrt{2})^n = \frac{x}{\sqrt{2}}.$

$$2 \cdot \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} = 62 + 30\sqrt{2} \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 = (31 + 15\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow x = \sqrt{2}(1 + 31\sqrt{2} - 31 + 30 - 15\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 32$$

Odp.: a) $x = \frac{1}{32}$ b) $x = 64$ c) $x = -96$ d) $x = 32$

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Która liczba jest sumą piętnastu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 3$ i $q = -1$?

- A. -45 B. -3 C. 0 D. 3

2. W czasie pierwszego festynu na cele charytatywne zebrano 300 zł. W czasie każdego następnego festynu zbierano dwukrotnie więcej niż w czasie poprzedniego. Ile pieniędzy zebrano łącznie podczas pierwszych pięciu festynów?

- A. 4500 zł B. 4800 zł C. 9300 zł D. 9900 zł

3. Która liczba jest sumą dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i ilorazie $q = -\sqrt{2}$?

- A. $93(\sqrt{2} + 1)$ B. $93(\sqrt{2} - 1)$ C. $93(-\sqrt{2} + 1)$ D. $93(-\sqrt{2} - 1)$

4. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 155.
B. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $5 \cdot 2^9$.
C. Suma stu początkowych wyrazów tego ciągu jest podzielna przez 5.

5. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{2}$ i ilorazie $q = -2$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu geometrycznego.

6. Zamieszczenie całostronicowej reklamy w lokalnym tygodniku kosztuje 125 zł. Za powtórzenie jej w następnym numerze płaci się 80% stawki obowiązującej w poprzednim numerze. Ile łącznie kosztuje zamieszczenie takiej reklamy w pięciu kolejnych numerach?

7. Iloraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi $6\frac{2}{3}$. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu.

6. Oszczędzanie i kredyty w bankach

Umiejętności:

- obliczanie procentu składanego
- obliczanie podatku
- obliczanie zysku z lokat
- obliczanie wysokości rat oraz kosztu kredytu

Procent składany

Z wprowadzonym w poprzednich tematach ciągiem geometrycznym ściśle wiąże się pojęcie procentu składanego, zgodnie z którym obliczane jest oprocentowanie lokat i kredytów w bankach. Przeanalizujemy jego działanie na przykładzie.

Przykład 1

Pewien bank po każdym roku oszczędzania dopisuje odsetki w wysokości 8%*, obliczane od aktualnego na koniec roku stanu konta (tzw. roczna kapitalizacja). Adela wpłaciła 10 000 zł na konto w tym banku. Po pierwszym roku oszczędzania bank dopisał jej 8% z tej kwoty, czyli 800 zł. Po następnym – doliczono kolejne 8%, liczone już od kwoty 10 800 zł, czyli $8\% \cdot 10\,800 = 864$ [zł]. Po dwóch latach Adela miała więc na koncie 11 664 zł. Bank co roku mnoży jej oszczędności przez 1,08.

Zatem dla wpłaconych 10 000 zł będą to w kolejnych latach kwoty:

- po pierwszym roku: $10\,000 \cdot 1,08 = 10\,800$ [zł],
- po drugim roku: $10\,800 \cdot 1,08 = 10\,000 \cdot 1,08 \cdot 1,08 = 10\,000 \cdot 1,08^2 = 11\,664$ [zł],
- po trzecim roku: $11\,664 \cdot 1,08 = 10\,000 \cdot 1,08^2 \cdot 1,08 = 10\,000 \cdot 1,08^3 = 12\,597,12$ [zł] itd.

Sposób obliczania kapitału po każdym roku powoduje, że kolejne liczby tworzą ciąg geometryczny. Łatwo więc możemy zapisać zależność między liczbą lat a stanem konta Adeli. Otóż po n latach oszczędzania będzie to kwota w wysokości $10\,000 \cdot 1,08^n$ zł. Ten system naliczania odsetek nazywamy **procentem składanym**.

* Wszystkie dane użyte w przykładach oraz zadaniach dotyczące wysokości stóp procentowych itp. są fikcyjne i służą wyłącznie do ćwiczeń.

Uwagi metodyczne

Okazją do dokładnego powtórzenia wiadomości o procentach jest temat związany z bankowością.

W podręczniku bardzo dokładnie omawiamy pojęcie procentu składanego oraz jego zastosowanie do naliczania odsetek oraz rat kredytów. Zwracamy uwagę na:

- zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w wypadku procentu składanego przy liczeniu odsetek od lokat oraz rat kredytów bankowych,
- zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego w wypadku spłaty kredytu bankowego w systemie rat malejących.

Pominęliśmy problem uwzględniania w obliczeniach podatku od dochodu, ponieważ jego wysokość może się zmieniać.

Zauważmy, że:
 $a + 8\%a = a + 0,08a = 1,08a$



ZZ i KPU

temat 3.13

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.6

Generator
testów i sprawdzianów

◀6.8. Działka leśna zawiera 7000 m^3 masy drzewnej. Z obserwacji wynika, że roczny przyrost masy drzewnej jest równy przeciętnie 2%. Ile m^3 masy drzewnej będzie zawierała ta działka po upływie 10 lat?

Odp.: ok. 8533 m^3

Banki muszą obliczać odsetki za pomocą procentu składanego. Gdyby zamiast tego proponowały stałą wielkość (np. 10% wpłaconej kwoty) dopisywaną do oszczędności po każdym roku, tylko najbardziej leniwi lub niedouczeni klienci nie ruszaliby swoich oszczędności. Myślący klient podejmowałby kapitał z odsetkami zaraz po ich naliczeniu, od razu wpłacał powiększoną o odsetki kwotę na konto i tym samym wymuszał na banku procent składany! Bankom przybyłoby tylko dużo kosztownej pracy.

Przykład 2 ◀ zad. 6.8

Liczebność populacji pewnego gatunku owadów zmniejsza się co roku o 5%. Obecnie populacja ta liczy około 500 000 osobników. Obliczmy, ile owadów tego gatunku będzie za 100 lat. Zakładamy, że tendencja spadkowa w tym okresie utrzyma się na takim samym poziomie.

Rozwiązanie

Zmniejszenie pewnej wielkości o 5% oznacza pomnożenie jej przez 0,95. Zatem:

$$500\,000 \cdot 0,95^{100} \approx 2960$$

Przy podanym tempie spadku liczebności po 100 latach gatunek tych owadów praktycznie zaniknie.

Zauważmy, że:
 $a - 5\%a = a - 0,05a = 0,95a$

Przykład 3

Gdyby Mieszko I, z myślą o potomkach swoich poddanych, założył fundację „Polska 2000”, przeznaczył na ten cel 1 grosz i złożył go w banku oferującym 10% rocznie, to wartość takiej lokaty po 1000 latach byłaby równa:

$$1 \cdot 1,1^{1000} \approx 2,47 \cdot 10^{41} \text{ [gr]}$$

Każdy z 36 milionów Polaków otrzymałby około $6,86 \cdot 10^{31}$ zł. Taka kwota wypłacona w banknotach stułotowych nie zmieściłaby się w sześcienniej paczce o krawędzi 100 000 km.

Aby obliczyć np. $1,1^{1000}$, trzeba zastosować logarytmy albo użyć kalkulatora naukowego lub komputera. Mniejsze potęgi, np. $1,08^{10}$, można oczywiście wyznaczyć za pomocą najprostszego kalkulatora, używając kilkakrotnie mnożenia. W większości modeli da się wykonać taką operację, korzystając wielokrotnie z klawisza „=”.

Na przykład łatwo można obliczyć tym sposobem, że $1,1^{25} \approx 10,8$ i oszacować, że:

$$1,1^{1000} = (1,1^{25})^{40} \approx 10,8^{40} > 10^{40}$$

Oszczędzanie w bankach

Klient banku spotyka się z takimi pojęciami jak: stopa procentowa, oprocentowanie stałe lub zmienne, oprocentowanie kredytów, lokat – w skali roku lub miesiąca. Wiemy już, że oprocentowanie kont i lokat jest w bankach obliczane zgodnie z zasadami procentu składanego. Na wysokość oprocentowania, inaczej mówiąc – stopy procentowej, mają wpływ różne czynniki, np.: sytuacja gospodarcza kraju, poziom inflacji, stopień zadłużenia państwa. Ponadto od uzyskanych dochodów (czyli doliczonych do kapitału odsetek) musimy zwykle zapłacić podatek. W roku 2020 wynosił on 19%.

Przykład 4

W styczniu 2012 r. Wanda ulokowała 3000 zł na okres jednego roku w banku, w którym oprocentowanie takiej lokaty wynosiło 2%. Od dopisanych odsetek trzeba było zapłacić 19% podatku. Obliczmy, ile pieniędzy miała Wanda z tej lokaty po upływie roku.

Rozwiązanie

Odsetki dopisano jej w wysokości:

$$2\% \cdot 3000 = 60 \text{ [zł]}$$

Podatek od dochodu (najczęściej od razu odprowadzany do urzędu skarbowego przez bank) był równy:

$$19\% \cdot 60 = 11,40 \text{ [zł]}$$

Zatem po upływie roku Wanda podjęła z banku kwotę w wysokości:

$$3000 + 60 - 11,40 = 3048,60 \text{ [zł]}$$

Odp.: 3048,60 zł

Obciążenie zysków z lokat podatkiem 19-procentowym oznacza w praktyce, że tylko 81% odsetek trafia do kieszeni podatnika. Aby zatem obliczyć zyski w 2020 r., trzeba było wszystkie stopy procentowe mnożyć przez współczynnik 0,81. W dalszych rozważaniach pominiemy zupełnie ten współczynnik – na sposób obliczania kapitału nie ma on żadnego wpływu. Ponadto przyjmujemy zasadę zaokrąglania końcowego wyniku z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku zgodnie z obowiązującymi w matematyce regułami.

Czas, po którym doliczane są odsetki, nosi nazwę **okresu rozrachunkowego** lub **okresu kapitalizacji**. W przykładzie 4 okres ten był równy jeden rok. W praktyce często bywa krótszy.

Przykład 5

Porównajmy trzy rodzaje oszczędzania. Zakładamy w trzech różnych bankach konto – w każdym z kwotą początkową 1000 zł. Interesuje nas zysk po roku oszczędzania. W tabeli podajemy dane dotyczące poszczególnych banków.

	I bank	II bank	III bank
Okres kapitalizacji	jeden rok	pół roku	jeden kwartał
Stopa procentowa	8%	4%	2%
Stan konta po roku (w zł)	$1000 \cdot 1,08 = 1080$	$1000 \cdot 1,04^2 = 1081,60$	$1000 \cdot 1,02^4 \approx 1082,43$
Zysk (w zł)	80,00	81,60	82,43

Banki, chcąc zachęcić klientów, oferują różne okresy kapitalizacji. Często oprocentowanie podawane jest w stosunku rocznym z dodatkową informacją o okresie kapitalizacji. Jeżeli np. stopa procentowa (w stosunku rocznym) jest równa 10% i okres kapitalizacji wynosi 1 kwartał, to bank co kwartał doliczy do oszczędności 2,5% stanu konta. Trzy warianty z przykładu 5 można więc traktować jako trzy sposoby naliczania odsetek przy stopie procentowej 8% w skali roku i trzech różnych okresach kapitalizacji (rocznej, półrocznej i kwartalnej). Jak widać, przy niskiej stopie procentowej różnice nie są duże.

◀6.12. Cezary wpłacił do banku 3000 zł. Oprocentowanie wynosi 1,2% rocznie, a kapitalizacja odsetek następuje co kwartał. Ile pieniędzy będzie miał Cezary po roku oszczędzania?

Odp.: 3036,16 zł

Przykład 6 ◀ zad. 6.12

Ewa wpłaciła do banku 5000 zł. Obliczymy, ile będzie mieć pieniędzy na koncie po trzech latach, przy rocznej stopie procentowej 2% i kapitalizacji kwartalnej (oczywiście, przy założeniu, że nie dokona w tym czasie żadnych wypłat ani wpłat).

Rozwiązanie

Co kwartał zyski wyniosą:

$$\frac{1}{4} \cdot 2\% = 0,5\% \text{ wartości kapitału}$$

Trzy lata to dwanaście kwartałów, więc stan konta po tym okresie będzie równy:

$$5000 \cdot 1,005^{12} \approx 5308,39 \text{ [zł]}$$

Odp.: 5308,39 zł

W powyższych przykładach założyliśmy, że bank oferuje **oprocentowanie stałe**. W praktyce taka sytuacja zachodzi rzadko. Banki zmieniają wysokość oprocentowania (**oprocentowanie zmienne**) w zależności od wielu czynników – najogólniej mówiąc – w zależności od stanu gospodarki i kondycji państwa. Najczęściej podstawą do określenia wysokości oprocentowania są stopy procentowe ogłaszane przez Radę Polityki Pieniężnej.



Przykład 7 ◀ zad. 6.17

Grzegorz wpłacił na roczną lokatę 4000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 2% w skali roku, ale po dziewięciu miesiącach wzrosło do 2,5% w skali roku. Jaką kwotę miał Grzegorz na swojej lokacie po upływie roku?

Rozwiązanie

Po początkowych dziewięciu miesiącach, czyli $\frac{9}{12}$ roku, odsetki wynosiły:

$$\frac{9}{12} \cdot 2\% \cdot 4000 = 60 \text{ [zł]}$$

Po kolejnych trzech miesiącach odsetki wynosiły:

$$\frac{3}{12} \cdot 2,5\% \cdot 4000 = 25 \text{ [zł]}$$

Zatem Grzegorz miał łącznie $4000 + 60 + 25 = 4085$ [zł].

Odp.: 4085 zł

Zazwyczaj klienci banków zakładają konta, na które mogą na bieżąco wpłacać pieniądze i w każdej chwili je wypłacać. Przy takich rachunkach – płatnych na każde żądanie (tzw. rachunki a vista) – odsetki naliczane są za każdy dzień oszczędzania, licząc od następnego dnia po dokonaniu wpłaty do dnia poprzedzającego wypłatę. Oprocentowanie takich rachunków jest z reguły bardzo niskie albo zerowe.

Przykład 8

Obliczmy, jaki zysk przyniesie kwota 1000 zł umieszczona przez 20 dni na rachunku a vista oprocentowanym 0,5% w skali roku.

Rozwiązanie

$$20 \text{ dni to } \frac{20}{360}, \text{ czyli } \frac{1}{18} \text{ roku bankowego}$$

Rok bankowy ma 360 dni. 

Zysk będzie więc równy:

$$0,5\% \cdot 1000 \cdot \frac{1}{18} \approx 0,28 \text{ [zł]}, \text{ czyli } 28 \text{ gr}$$

Odp.: 28 gr

Lokaty w bankach są z reguły oprocentowane niezbyt wysoko. Można również oszczędzać np. w otwartym funduszu emerytalnym. Fundusze takie inwestują powierzone pieniądze i dlatego zyski z wpłaconych pieniędzy mogą (ale nie muszą!) być dość wysokie. Zgromadzony kapitał powinien być wypłacany klientowi po osiągnięciu wieku emerytalnego w postaci comiesięcznej emerytury. Jej wysokość zależy

◀6.17. Grażyna wpłaciła na roczną lokatę 5000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 1,8% w skali roku, ale po czterech miesiącach zostało zmienione na 1,7% w skali roku. Kapitalizacja odsetek wynosiła jeden rok. Jaką kwotę miała Grażyna na swojej lokacie po upływie roku?

Odp.: 5086,67 zł

◀ **6.19.** Fundusz emerytalny przewiduje coroczny zysk w wysokości 4% z kapitalizacją roczną. Ile oszczędności zgromadzimy po 38 latach, jeśli będziemy wpłacać 120 zł miesięcznie? Przez ile lat można z tych pieniędzy wypłacać miesięcznie kwotę 1000 zł? (Pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki.)

Odp.: 128 749 zł;
przez 10 lat i 8 miesięcy

od wielu czynników – zgromadzonej kwoty, czasu oszczędzania itp., ale i sytuacji gospodarczej kraju. Zatem może się również zdarzyć, że zamiast spodziewanego zysku klient poniesie stratę – warto sobie z tego zdawać sprawę.

Oczywiście trudno jest planować zyski funduszu na wiele lat do przodu, ale przed zawarciem umowy klientowi najczęściej prezentuje się (przy określonych założeniach początkowych) rachunek symulacyjny.

Przykład 9 ◀ zad. 6.19

Jeżeli założymy, że pewien fundusz osiąga zysk w wysokości 5% rocznie, a klient będzie wpłacał 100 zł miesięcznie przez 25 lat, to – przyjmując roczną kapitalizację – zgromadzi on na rachunku kwotę (w zł):

po pierwszym roku: $1200 \cdot 1,05$

po drugim roku: $(1200 \cdot 1,05 + 1200) \cdot 1,05 =$
 $= 1200 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05$

po trzecim roku: $(1200 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05 + 1200) \cdot 1,05 =$
 $= 1200 \cdot 1,05^3 + 1200 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05$

po czwartym roku: $(1200 \cdot 1,05^3 + 1200 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05 + 1200) \cdot 1,05 =$
 $= 1200 \cdot 1,05^4 + 1200 \cdot 1,05^3 + 1200 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05$ itd.

Po 25 latach klient zgromadzi na swoim koncie kwotę (w zł) równą:

$$1200 \cdot 1,05^{25} + 1200 \cdot 1,05^{24} + \dots + 1200 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05$$

co inaczej możemy zapisać w postaci:

$$1200 \cdot (1,05^{25} + 1,05^{24} + \dots + 1,05^2 + 1,05) = 1200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1 - 1,05^{25}}{1 - 1,05} \approx 60\,136,14 \text{ [zł]}$$

Suma ta wystarczy do wypłacania emerytury np. w wysokości 1000 zł przez 60 miesięcy, czyli 5 lat (pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty pozostającej na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki).

Inwestując w fundusze towarzystwa funduszy inwestycyjnych, klient kupuje w biurze maklerskim tzw. jednostki udziałowe. Są to umowne „cegiełki”, służące do rozliczeń z funduszem. Podobnie jak w banku, klient otrzymuje (na ogół raz w miesiącu) informację o stanie konta, ale na wyciągu podane jest saldo jednostek uczestnictwa, a nie kwota pieniężna. Cena jednostki zmienia się w zależności od wielu czynników: sytuacji gospodarczej kraju, sytuacji na giełdzie, kondycji finansowej przedsiębiorstw, w które się zainwestowało, umiejętności osób zarządzających funduszem itd.

Oto przykład niektórych pozycji na wydruku stanu konta założonego w funduszu inwestycyjnym:

◀6.20. W pewnym banku zasady udzielania kredytów są następujące:

- oprocentowanie w wysokości 5,4% kwoty kredytu pobierane jest od razu,
- kwotę kredytu spłaca się w równych ratach miesięcznych.

Oblicz, ile pieniędzy wypłaci bank oraz jakiej wysokości będzie każda rata, jeżeli zaciągniemy w tym banku kredyt w wysokości

- 6000 zł na okres 1 roku.
- 8200 zł na okres 2 lat.
- 11 760 zł na okres 2 lat i 4 miesięcy.

Odp.: a) 5676 zł, 500 zł
b) 7757,20 zł, 341,17 zł
c) 11 124,96 zł, 420 zł

◀6.21. Kredyt na mieszkanie w wysokości 178 000 zł ma być spłacany w równych ratach miesięcznych przez 15 lat z oprocentowaniem 4,8% w skali roku w systemie procentu składanego. Oblicz wysokość jednej raty.

Odp.: 1389,14 zł

Przykład 11 ◀ zad. 6.20

Bank przyznał klientowi kredyt w wysokości 10 000 zł na jeden rok. Oprocentowanie w wysokości 5% pobierane jest od razu przy udzieleniu kredytu. Bank pobrał zatem od razu:

$$5\% \cdot 10\,000 = 500 \text{ [zł]}$$

Kredyt ma być spłacony w 12 miesięcznych równych ratach. Klient będzie zatem spłacał go w ratach równych:

$$\frac{1}{12} \cdot 10\,000 \approx 833,33 \text{ [zł]}$$

Jeżeli okres kredytowania jest dłuższy niż w przykładzie, to oprocentowanie może być wyższe, ale górną granicę określa ustawa^{**}.

Zazwyczaj sposób spłaty kredytu jest znacznie bardziej skomplikowany. Banki doliczają odsetki zgodnie z zasadą procentu składanego. Oprocentowaniu takiemu podlega każda niespłacona część kredytu. Zdarza się, że klient chce spłacać pożyczkę **w równych ratach kapitałowych**. Jak zatem obliczyć wysokość takiej raty?

Prześledźmy proces spłaty kredytu na prostym przykładzie, w którym wszystko można wyliczyć „na piechotę”. Później postaramy się nasze rozumowanie uogólnić.

Przykład 12 ◀ zad. 6.21

Karolina zaciągnęła kredyt w wysokości 2000 zł, oprocentowany na 6% w skali roku z miesięczną kapitalizacją. Wyznamy wysokość jednej raty i obliczymy kwotę, jaką Karolina odda bankowi, jeżeli spłaci kredyt

- w pięciu miesięcznych równych ratach.
- w dziesięciu miesięcznych równych ratach.

Rozwiązanie

a) Gdyby kredyt nie był oprocentowany, to comiesięczna rata równałaby się 400 zł. Bank jednak dolicza odsetki w wysokości 6% w skali roku z miesięczną kapitalizacją.

Co miesiąc niespłacona kwota kredytu zwiększa się o 0,5%, jest więc mnożona przez $1 + 0,005 = 1,005$. Proces naliczania odsetek zaczyna się z chwilą otrzymania kredytu.

W momencie, gdy Karolina dostała do ręki 2000 zł, do spłacenia miała kwotę:

$$2000 \cdot 1,005 \text{ [zł]}$$

Przypomnijmy, że wartość w zwiększona o $p\%$ jest równa $w + \frac{p}{100} \cdot w = w \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

^{**} W Polsce obowiązuje tzw. ustawa antylichwiarska, która uzależnia wysokość oprocentowania kredytu od wysokości stóp procentowych NBP.

Po upływie miesiąca Karolina spłaciła pierwszą ratę, oznaczmy ją R . Do zwrotu pozostało jeszcze $(2000 \cdot 1,005 - R)$ [zł]. Do tej kwoty bank znów doliczył odsetki w wysokości 0,5%, zatem dług do zwrotu po spłacie pierwszej raty był równy:

$$(2000 \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005$$

Po następnym miesiącu sytuacja się powtórzyła. Karolina płaciła kolejne raty, a bank doliczał odsetki do reszty długu.

$$((2000 \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 \quad \leftarrow \text{po spłacie 2. raty}$$

$$(((2000 \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 \quad \leftarrow \text{po spłacie 3. raty}$$

$$((((2000 \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 \quad \leftarrow \text{po spłacie 4. raty}$$

Po zapłaceniu 5. raty dług Karoliny był równy 0.

$$((((2000 \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R) \cdot 1,005 - R = 0$$

Z powyższego równania wyznaczmy wysokość raty R .

Po wykonaniu kolejnych działań otrzymujemy:

$$2000 \cdot 1,005^5 - R \cdot 1,005^4 - R \cdot 1,005^3 - R \cdot 1,005^2 - R \cdot 1,005 - R = 0 \quad (1)$$

$$2000 \cdot 1,005^5 = R \cdot (1,005^4 + 1,005^3 + 1,005^2 + 1,005 + 1) \quad (2)$$

$$2000 \cdot 1,005^5 = R \cdot \frac{1,005^5 - 1}{1,005 - 1} \quad \leftarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n = 5, \quad a_1 = 1, \quad q = 1,005$$

Zatem:

$$R = \frac{2000 \cdot 0,005 \cdot 1,005^5}{1,005^5 - 1} \approx 406,02 \text{ [zł]}$$

Karolina odda bankowi $5 \cdot 406,02 = 2030,10$ [zł].

Odp.: 2030,10 zł

b) Jeśli zwrot kredytu rozłożono na 10 równych rat, zasada postępowania jest identyczna, więc w odpowiedniku równania (1) niewiadoma R pojawi się 10 razy. Równanie (2) będzie teraz miało postać:

$$2000 \cdot 1,005^{10} = R \cdot (1,005^9 + 1,005^8 + \dots + 1,005^2 + 1,005 + 1)$$

a wyznaczona z niego rata wynosi:

$$R = \frac{2000 \cdot 0,005 \cdot 1,005^{10}}{1,005^{10} - 1} \approx 205,54 \text{ [zł]}$$

Pełna kwota spłacona wtedy bankowi to 2055,40 zł.

Odp.: 2055,40 zł

Uogólnienie przykładów zapiszemy w postaci wzoru, którego pełne wyprowadzenie pominiemy.

◀6.22. Leon uzyskał kredyt mieszkaniowy w wysokości 150 000 zł oprocentowany na 6% w skali roku w systemie procentu składanego. Będzie go spłacał w równych ratach kwartalnych przez 30 lat. Oblicz wysokość kwartalnej raty i całą sumę, jaką Leon odda po trzydziestu latach.

Odp.: rata: 2702,78 zł, zwrócona kwota: 324 333,60 zł

◀6.23. Robert będzie spłacać przez 2 lata kredyt w wysokości 10 000 zł w miesięcznych ratach malejących. Jeżeli pierwsza rata wyniosła 526 zł, to jakie jest oprocentowanie kredytu w skali roku?

Odp.: 13,1%

Jeżeli kredyt w wysokości K złotych ma być spłacany w n równych miesięcznych ratach, z oprocentowaniem (w systemie procentu składanego) z miesięczną stopą procentową $p\%$, to jedna rata jest równa:

$$R = \frac{K \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Jeżeli okres kredytowania jest bardzo długi, to suma, którą trzeba spłacić, może stanowić nawet wielokrotność kwoty pożyczki.

Przykład 13 ◀ zad. 6.22

Sabina wzięła z banku kredyt mieszkaniowy w wysokości 100 000 zł oprocentowany na 7,5% w skali roku (w systemie procentu składanego). Będzie go spłacać w równych ratach przez 25 lat. Obliczmy wysokość comiesięcznej raty oraz łączną kwotę, jaką Sabina wpłaci do banku przez 25 lat.

Rozwiązanie

Miesięczna stopa procentowa wynosi:

$$\frac{1}{12} \cdot 7,5\% = 0,625\%$$

a liczba wszystkich rat:

$$n = 25 \cdot 12 = 300$$

Wysokość comiesięcznej raty jest zatem równa:

$$R = 100\,000 \cdot \frac{0,625}{100} \cdot \frac{1,00625^{300}}{1,00625^{300} - 1} \approx 739,00 \text{ [zł]}$$

Przez 25 lat Sabina wpłaci do banku $300 \cdot 739 = 221\,700$ [zł], czyli ponad 2 razy więcej niż wynosi kwota otrzymanego kredytu.

Odp.: 739 zł, 221 700 zł

Jeszcze inną metodą spłacania kredytu są tzw. **raty malejące**.

Przykład 14 ◀ zad. 6.23

Jeżeli kredyt w wysokości 15 000 zł, zaciągnięty na 4 lata przy oprocentowaniu 13,13% w skali roku, będziemy spłacali w równych ratach miesięcznych, to wysokość jednej raty wyniesie ok. 403 zł. Oddamy zatem bankowi $48 \cdot 403 = 19\,344$ zł.

Inaczej będzie przy ratach malejących. Oto jak oblicza się ich wysokość.

1. Dzieląc kwotę kredytu przez liczbę rat, otrzymujemy „bazę” każdej raty:

$$\frac{15\,000}{48} = 312,50 \text{ [zł]}$$

2. Obliczamy miesięczną stopę procentową:

$$\frac{13,13\%}{12} \approx 1,094\%$$

Stała wysokość odsetek od „bazy” jest więc równa:

$$1,094\% \cdot 312,50 \approx 3,42 \text{ [zł]}$$

3. Ustalamy wysokości kolejnych rat, mnożąc miesięczne odsetki przez liczbę niespłaconych rat i dodając tę kwotę do bazy:

$$3,42 \cdot 48 + 312,50 = 164,16 + 312,50 = 476,66 \text{ [zł]} \quad \leftarrow \text{pierwsza rata}$$

$$3,42 \cdot 47 + 312,50 = 160,74 + 312,50 = 473,24 \text{ [zł]} \quad \leftarrow \text{druga rata}$$

$$3,42 \cdot 46 + 312,50 = 157,32 + 312,50 = 469,82 \text{ [zł]} \quad \leftarrow \text{trzecia rata}$$

...

$$3,42 \cdot 2 + 312,50 = 6,84 + 312,50 = 319,34 \text{ [zł]} \quad \leftarrow \text{przedostatnia rata}$$

$$3,42 \cdot 1 + 312,50 = 315,92 \text{ [zł]} \quad \leftarrow \text{ostatnia rata}$$

Obliczmy kwotę wpłaconą do banku w tym systemie.

Średnia miesięczna dopłata do bazy jest równa

$$\frac{3,42 \cdot 48 + 3,42 \cdot 47 + 3,42 \cdot 46 + \dots + 3,42 \cdot 2 + 3,42 \cdot 1}{48} = \frac{3,42 \cdot (48 + 47 + \dots + 2 + 1)}{48} =$$

$$= \frac{3,42 \cdot \frac{1+48}{2} \cdot 48}{48} = 83,79 \text{ [zł]} \quad \leftarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n = 48, \quad a_1 = 1, \quad a_{48} = 48$$

Średnia miesięczna rata wynosi

$$312,50 + 83,79 = 396,29 \text{ [zł]}$$

i jest niższa niż rata (403 zł) płacona w systemie rat równych. W systemie rat malejących oddamy bankowi w sumie ok. 19 021 zł.

System rat malejących jest (w ostatecznym rachunku) korzystniejszy dla klienta, pod warunkiem, że może on sobie pozwolić na – niekiedy dużo wyższe niż przy ratach równych – raty początkowe.

Nie omówiliśmy wszystkich metod, jakie stosują banki przy spłacaniu kredytów. Podane przykłady powinny zachęcić przyszłych kredytobiorców do wnikliwego analizowania warunków umowy z bankiem przed jej podpisaniem oraz do wybrania najkorzystniejszej oferty.

Banki są ustawowo zobowiązane do podawania oprocentowania realnego (RRSO – rzeczywista roczna stopa oprocentowania). Na jego wysokość składają się (oprócz oprocentowania nominalnego) różne opłaty, np.: opłata za rozpatrzenie wniosku, za obsługę kredytu, ubezpieczenie czy prowizja. Jeżeli bank nie dopełni tego obowiązku i w umowie nie będzie wymaganych informacji, to klient jest zwolniony od płacenia wszelkich dodatkowych odsetek i prowizji.

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. P, P, P

6.2. 10,368

6.3. a) 313,84 zł b) 179,59 zł
c) 359,17 zł d) 380,47 zł

6.4. po osiemnastu latach

6.5. po czterech latach

6.6. o ok. 99,39%

6.7. o ok. 19,25%

6.8. ok. 8533 m³

Zadania

Uwaga: W odpowiedziach do zadań nie uwzględniamy podatku od odsetek. Wszystkie kwoty są zaokrąglane zgodnie z regułami matematyki.



6.1. Monika wpłaciła do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał z oprocentowaniem 4% w skali roku. Przez dwa lata Monika nie dokonywała żadnych wpłat ani wypłat. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Po roku Monika miała na koncie 1560,91 zł.

B. Po półtora roku Monika miała na koncie 1592,28 zł.

C. Po dwóch latach Monika miała na koncie 1624,29 zł.

6.2. Liczbę 5 zwiększono o 20%. Otrzymałą liczbę ponownie zwiększono o 20% itd. Operację tę wykonano czterokrotnie. Jaką liczbę otrzymano?



6.3. Wpłacamy x zł na lokatę oprocentowaną $p\%$ miesięcznie, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Jaka kwota będzie na tej lokacie po upływie roku?

a) $x = 100$, $p = 10$

c) $x = 200$, $p = 5$

b) $x = 100$, $p = 5$

d) $x = 300$, $p = 2$



6.4. Składamy 1000 zł w banku oferującym 4% rocznie z roczną kapitalizacją. Po ilu latach kwota oszczędności przekroczy 2000 zł?



6.5. W pewnym mieście żyje 25 000 mieszkańców. Po ilu latach liczba mieszkańców przekroczy 27 000, jeżeli roczny przyrost będzie przez kilka lat równy 2,1%?

6.6. Po zastosowaniu szczepionki na pewien rodzaj wirusa atakującego drób liczba zachorowań wśród kurcząt zmalała o 72% rocznie. O ile procent zmaleje zachorowalność po czterech latach, jeśli spadek zachorowalności się nie zmieni?

6.7. Liczba klientów supermarketu maleje co kwartał o 5%, ale średnia kwota wydawana przez klienta w tym supermarkecie wzrasta co kwartał o 10%. O ile procent wzrosną wpływy supermarketu po upływie roku?



6.8. Działka leśna zawiera 7000 m³ masy drzewnej. Z obserwacji wynika, że roczny przyrost masy drzewnej jest równy przeciętnie 2%. Ile m³ masy drzewnej będzie zawierała ta działka po upływie 10 lat?

Uwagi metodyczne

Rozwiązywanie zadań związanych z bankowością jest wyjątkowo żmudne i zwykle wymaga użycia kalkulatora. Aby jednak zrozumieć zasady obliczania odsetek czy wysokości rat, trzeba przeliczyć samodzielnie kilka przykładów. Rozwiązywanie tych problemów można również wykorzystać do opracowania odpowiedniego programu komputerowego w ramach zajęć z informatyki.

6.9. W serialu *Alternatywy 4* kierownik elektrociepłowni otrzymuje informację, że podczas ogrzewania odległego osiedla traci się 50% ciepła przy spalaniu węgla, kolejne 50% przy przesyłaniu go nieszczelnymi rurami i wreszcie 50% z powodu niezamieszkałych lokali. Jak wylicza, straty wynoszą 150% ciepła, więc szybko wyłącza ogrzewanie! Załóżmy, że oszacowanie strat każdego rodzaju jest poprawne. Oblicz, ile procent wynoszą rzeczywiste straty ciepła.



6.10. Adam wpłacił 2000 zł na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 1,2% w skali roku i z roczną kapitalizacją odsetek. Jaki będzie stan jego konta po roku?



6.11. Bogumił wpłacił 4000 zł na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 1,6% w skali roku i z roczną kapitalizacją odsetek. Oblicz stan jego konta
a) po roku. b) po dwóch latach. c) po pięciu latach.



6.12. Cezary wpłacił do banku 3000 zł. Oprocentowanie wynosi 1,2% rocznie, a kapitalizacja odsetek następuje co kwartał. Ile pieniędzy będzie miał Cezary po roku oszczędzania?



6.13. Jaką kwotę otrzymamy po pół roku, jeżeli wpłacimy 8000 zł na lokatę półroczną, której oprocentowanie wynosi 1,4% w skali roku? O ile procent zwiększy się kwota wpłacona na początku?



6.14. Danka założyła lokatę w wysokości 4000 zł ze zmiennym oprocentowaniem. Przez pierwsze dwa lata oprocentowanie lokaty było równe 1,8%, w trzecim roku 1,6%, a w czwartym 1,5%, z roczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy miała Danka na tej lokacie po czterech latach?



6.15. Porównaj wysokości odsetek, jakie otrzyma Edward od kwoty 8000 zł z oprocentowaniem 1,8% w skali roku i kapitalizacją:
I. raz na miesiąc, II. raz na kwartał, III. raz na rok.



6.16. Filip wpłaca co miesiąc 200 zł na tzw. lokatę systematycznego oszczędzania. Oprocentowanie lokaty jest równe 1,3% w skali roku, z roczną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotę będzie dysponował Filip
a) po roku?
b) po dwóch latach?
c) po dwóch latach i czterech miesiącach?



6.17. Grażyna wpłaciła na roczną lokatę 5000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 1,8% w skali roku, ale po czterech miesiącach zostało zmienione na 1,7% w skali roku. Kapitalizacja odsetek wynosiła jeden rok. Jaką kwotę miała Grażyna na swojej lokacie po upływie roku?

6.9. 87,5%

6.10. 2024 zł

6.11. a) 4064 zł b) 4129,02 zł
c) 4330,41 zł

6.12. 3036,16 zł

6.13. 8056 zł, o 0,7%

6.14. 4274,80 zł

6.15. I. 145,19 zł, II. 144,97 zł,
III. 144 zł; III < II < I

6.16. a) 2431,20 zł b) 4894,01 zł
c) 5694,01 zł

6.17. 5086,67 zł

6.18. a) 186 392 zł
b) 196 857 zł
c) 76 104 zł

6.19. 128 749 zł;
przez 10 lat i 8 miesięcy

6.20. a) 5676 zł, 500 zł
b) 7757,20 zł, 341,17 zł
c) 11 124,96 zł, 420 zł

6.21. 1389,14 zł

6.22. rata: 2702,78 zł,
zwrócona kwota: 324 333,60 zł

6.23. 13,1%

6.24. Paweł, 212 zł

6.25. 2,5 roku (30 rat
miesięcznych)



6.18. Zaraz po studiach Janusz podpisał umowę z funduszem emerytalnym na wpłacanie kwoty a zł miesięcznie. Fundusz przewiduje, że jego coroczny zysk wyniesie $p\%$. Zakładamy, że Janusz będzie systematycznie oszczędzał przez 40 lat do osiągnięcia wieku emerytalnego. Oblicz, jaką kwotę zgromadzi (przy kapitalizacji rocznej), gdy
a) $a = 200$, $p = 3$. b) $a = 100$, $p = 6$. c) $a = 50$, $p = 5$.



6.19. Fundusz emerytalny przewiduje coroczny zysk w wysokości 4% z kapitalizacją roczną. Ile oszczędności zgromadzimy po 38 latach, jeśli będziemy wpłacać 120 zł miesięcznie? Przez ile lat można z tych pieniędzy wypłacać miesięcznie kwotę 1000 zł? (Pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki.)



6.20. W pewnym banku zasady udzielania kredytów są następujące:

- oprocentowanie w wysokości 5,4% kwoty kredytu pobierane jest od razu,
- kwotę kredytu spłaca się w równych ratach miesięcznych.

Oblicz, ile pieniędzy wypłaci bank oraz jakiej wysokości będzie każda rata, jeżeli zaciągniemy w tym banku kredyt w wysokości

- a) 6000 zł na okres 1 roku.
b) 8200 zł na okres 2 lat.
c) 11 760 zł na okres 2 lat i 4 miesięcy.



6.21. Kredyt na mieszkanie w wysokości 178 000 zł ma być spłacany w równych ratach miesięcznych przez 15 lat z oprocentowaniem 4,8% w skali roku w systemie procentu składanego. Oblicz wysokość jednej raty.



6.22. Leon uzyskał kredyt mieszkaniowy w wysokości 150 000 zł oprocentowany na 6% w skali roku w systemie procentu składanego. Będzie go spłacał w równych ratach kwartalnych przez 30 lat. Oblicz wysokość kwartalnej raty i całą sumę, jaką Leon odda po trzydziestu latach.



6.23. Robert będzie spłacać przez 2 lata kredyt w wysokości 10 000 zł w miesięcznych ratach malejących. Jeżeli pierwsza rata wyniosła 526 zł, to jakie jest oprocentowanie kredytu w skali roku?



6.24. Paweł był klientem banku, w którym kredyt można wziąć z oprocentowaniem 9,5% w skali roku i spłacać go w równych ratach miesięcznych w systemie procentu składanego. Bank Piotra zaproponował kredyt z oprocentowaniem 10% w skali roku ze spłatą w systemie miesięcznych rat malejących. Obaj panowie wzięli kredyty w wysokości 100 000 zł na 4 lata. Który z nich poniósł większe koszty kredytu? Ile wynosiła różnica? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 zł.



6.25. Patrycja wzięła kredyt w wysokości 16 000 zł i spłaca go w miesięcznych ratach malejących. Na ile lat została rozłożona spłata tego kredytu, jeżeli wiemy, że oprocentowanie w skali roku jest równe 10,5%, a ostatnia rata wynosi 538 zł?

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Cenę telewizora równą 1200 zł obniżono dwukrotnie, za każdym razem o 10%. Ile obecnie kosztuje telewizor?

- A. 960 zł B. 972 zł C. 990 zł D. 1180 zł

2. Wpłacamy do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, przy oprocentowaniu 4% w skali roku. Przez trzy lata nie dokonujemy żadnych wpłat ani wypłat. Ile złotych będziemy mieli po trzech latach?

- A. $1500 \cdot 1,04^3$ B. $1500 \cdot 1,04^{14}$ C. $1500 \cdot 1,01^4$ D. $1500 \cdot 1,01^{12}$

3. Przez kilka lat produkcja pewnego przedsiębiorstwa systematycznie rosła o 7% w skali roku. Ile wyniósł procentowy wzrost produkcji po trzech latach?

- A. 21% B. 20,5% C. 22,5% D. 24%

4. Zakładamy, że liczba mieszkańców pewnego miasta co roku wzrasta o 5%. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Po trzech latach liczba mieszkańców wzrośnie o 15%.
B. Po dziewięciu latach liczba mieszkańców wzrośnie o ponad połowę.
C. Po piętnastu latach liczba mieszkańców się podwoi.

5. Liczbę 8 zwiększono o 12%. Otrzymałą liczbę ponownie zwiększono o 12%. Operację tę wykonano pięciokrotnie. Jaką liczbę otrzymano?

-  6. Komputer taniał trzykrotnie o 10% i obecnie kosztuje 1749,60 zł.
a) Jaka była początkowa cena komputera?
b) O ile procent łącznie staniał ten komputer?

-  7. Agnieszka zaciągnęła kredyt w wysokości 10 000 zł. Będzie go spłacała w równych ratach miesięcznych przez 1,5 roku. Oprocentowanie kredytu wynosi 7,2% w skali roku (w systemie procentu składanego). Oblicz wysokość jednej raty.

Prosto do matury

1. B

2. D

3. C

4. F, P, P

5. ok. 14,1

6. a) 2400 zł
b) o 27,1%

7. 587,76 zł

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–24 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. B
 2. C
 3. C
 4. B
 5. D
 6. A
 7. D
1. Dany jest ciąg (a_n) , w którym $a_n = \frac{15-2n}{3n}$ dla $n \geq 1$. Liczba wszystkich nieujemnych wyrazów tego ciągu jest równa
A. 8. B. 7. C. 6. D. 5.
 2. Dany jest ciąg (a_n) , w którym $a_n = (-1)^n \cdot (11-n)$ dla $n \geq 1$. W tym ciągu
A. $a_{11} = -1$. B. $a_{11} > 0$. C. $a_{11} = 0$. D. $a_{11} < -1$.
 3. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-8}{n^2+1}$ dla $n \geq 1$. Wyraz a_3 tego ciągu jest równy
A. $-\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.
 4. Czwarty wyraz ciągu (a_n) , określonego za pomocą układu warunków: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{1}{3+a_n}$ dla $n \geq 1$, jest równy
A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{13}{43}$. C. $\frac{4}{13}$. D. $\frac{43}{13}$.
 5. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3}$ dla $n \geq 1$. W tym ciągu wyraz a_7 jest równy
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 6. Wskaż różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 3n - 2$ określonego dla $n \geq 1$.
A. 3 B. 5 C. 2 D. 1
 7. Dane są wyrazy: $a_1 = 8$ i $a_2 = 13$ ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$. W tym ciągu
A. $a_{14} = 88$. B. $a_{15} = 88$. C. $a_{16} = 88$. D. $a_{17} = 88$.

- 8.** W ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy $\frac{5}{6}$, określonym dla $n \geq 1$, szesnasty wyraz jest równy 13. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy
- A. 3. B. $4\frac{2}{3}$. C. 8. D. $9\frac{2}{3}$.
- 9.** Liczby 5, -2, -9 są pierwszymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać
- A. $a_n = -7n + 12$. B. $a_n = -2n + 7$. C. $a_n = 7n - 12$. D. $a_n = 2n - 7$.
- 10.** Drugi wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ jest równy -13, a ósmy 5. Pierwszym wyrazem tego ciągu jest
- A. 10. B. -10. C. 16. D. -16.
- 11.** Która z liczb jest równa sumie wszystkich dodatnich parzystych liczb dwucyfrowych?
- A. 2430 B. 2340 C. 2432 D. 2452
- 12.** W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_2 + a_5 + a_8 = 18\sqrt{2}$. Wynika stąd, że
- A. $a_5 = \frac{8}{\sqrt{2}}$. B. $a_5 = \frac{12}{\sqrt{2}}$. C. $a_5 = 5\sqrt{2}$. D. $a_5 = 7\sqrt{2}$.
- 13.** Wskaż zależność prawdziwą dla każdego ciągu arytmetycznego.
- A. $a_4 + a_7 = a_{11}$ C. $a_2 + a_7 = 2a_9$
 B. $a_4 + a_8 = a_5 + a_6$ D. $a_6 + a_{10} = a_2 + a_{14}$
- 14.** W pięciokącie miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 30° . Największy kąt tego pięciokąta ma miarę
- A. 168° . B. 160° . C. 138° . D. 170° .
- 15.** Dane są dwa wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$: $a_2 = 9$ i $a_5 = 0$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa
- A. 29. B. 30. C. 12. D. 15.
- 16.** W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 2$ i $a_6 = -64$. Iloraz tego ciągu jest równy
- A. 2. B. 5. C. -5. D. -2.
- 17.** Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_1 = 3$ i $a_5 = \frac{1}{27}$. Iloraz tego ciągu jest równy
- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. 3. D. 9.

8. C

9. A

10. D

11. A

12. B

13. D

14. A

15. B

16. D

17. A

- 18. D** **18.** Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = \sqrt{3}$, $a_3 = 3\sqrt{3}$. Dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy
 A. $9\sqrt{3}$. B. -27 . C. -243 . D. $81\sqrt{3}$.
- 19. B** **19.** Dany jest sześciowyrazowy ciąg geometryczny o ujemnym ilorazie. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\sqrt{3}$, a ostatni jest równy -27 . Trzecim wyrazem tego ciągu jest
 A. $-3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. -9 . D. 9 .
- 20. B** **20.** Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = 5\sqrt{5}$. Wzór na n -ty wyraz tego ciągu ma postać
 A. $a_n = \frac{(\sqrt{5})^n}{5}$. B. $a_n = \frac{5^n}{\sqrt{5}}$. C. $a_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n$. D. $a_n = (\sqrt{5})^n$.
- 21. A** **21.** Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_5 = 5a_3$. Iloraz tego ciągu jest równy
 A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. 5 . D. $\frac{1}{5}$.
- 22. A** **22.** Liczby 2 , $x - 3$, $\frac{1}{2}$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich. Wskaż wartość x .
 A. 4 B. -4 C. 3 D. -1
- 23. B** **23.** Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2(n+2)}{3}$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten jest
 A. arytmetyczny i jego różnica wynosi $r = \frac{3}{2}$.
 B. arytmetyczny i jego różnica wynosi $r = \frac{2}{3}$.
 C. geometryczny i jego iloraz wynosi $q = \frac{1}{3}$.
 D. geometryczny i jego iloraz wynosi $q = \frac{4}{3}$.
- 24. A**  **24.** Monika wpłaciła do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, a oprocentowanie wynosi 4% w skali roku. Jaka kwota będzie na koncie Moniki po dwóch latach?
 A. 1624,29 zł B. 1662,59 zł C. 1650 zł D. 1524,30 zł

W zadaniach 25–42 oceń prawdziwość podanych zdań.

25. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 3n - 1$. W tym ciągu

- A. $a_{n-2} = 3n - 2$. B. $a_{n+2} = 3n + 5$. C. $a_{n-1} = 3n - 4$.

25. F, P, P

26. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 10n + 18$. Wynika stąd, że

A. (a_n) ma dokładnie pięć wyrazów ujemnych.

B. $a_3 = a_7$ oraz $a_4 = a_6$.

C. (a_n) przyjmuje wartość najmniejszą.

26. P, P, P

27. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 2n^2 - 9$. W tym ciągu

A. wszystkie wyrazy są dodatnie.

B. są tylko dwa wyrazy ujemne.

C. wszystkie wyrazy są liczbami nieparzystymi.

27. F, P, P

28. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = n^2 - 3n + 2$. Wynika stąd, że

A. $a_{10} = 72$.

B. (a_n) jest ciągiem rosnącym.

C. (a_n) jest ciągiem monotonicznym.

28. P, F, P

29. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. W tym ciągu

A. $a_4 = 28$.

B. $a_9 = a_8 + 81$.

C. $a_6 = 90$.

29. F, P, F

30. Liczba r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Zatem

A. $a_8 = a_4 + 4r$.

B. $a_{12} = a_6 + 6r$.

C. $a_{n+3} = a_5 + (n-2)r$.

30. P, P, P

31. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wynika stąd, że

A. $a_{10} - a_8 = a_4 - a_2$. B. $\frac{a_1 + a_2 + a_4 + a_5}{4} = a_3$. C. $a_5 - a_2 = \frac{1}{2}(a_6 - a_2)$.

31. P, P, F

32. Suma wszystkich liczb nieparzystych od 1 do 99 włącznie jest

A. parzysta.

B. podzielna przez 5.

C. kwadratem pewnej liczby naturalnej.

32. P, P, P

33. Dane są trzy kolejne wyrazy pewnego ciągu liczbowego: $5p - 1$, $p^2 + 2p - 3$, $2p^2 - p - 5$.

A. Dla pewnego $p \in \mathbf{R}$ wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny.

B. Dla każdego $p \in \mathbf{R}$ wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny.

C. Wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny tylko dla $p = 2$.

33. P, P, F

34. P, F, P

34. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od 0 i ilorazie $q \neq 1$.A. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $a_5 q^5$.B. Trzynasty wyraz tego ciągu jest równy $a_5 q^7$.C. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{a_1 a_{100}}{a_{98}}$.

35. P, P, P

35. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = 8$, $a_2 = 32$. W tym ciąguA. $a_n = 8 \cdot 4^{n-1}$.B. $a_n = 2^{2n+1}$.C. $a_n = 2 \cdot 4^n$.

36. P, F, P

36. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od 0 i ilorazie $q \neq 1$.

W tym ciągu

A. $\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$.B. $a_7 - a_5 = a_{13} - a_{11}$.C. $a_4^2 = a_3 \cdot a_5$.

37. P, F, P

37. Liczby $x + 1$, $4x + 1$, $10x + 7$, gdzie $x \in \mathbb{N}$, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Wynika stąd, żeA. x jest liczbą pierwszą.B. co najmniej dwie liczby x spełniają warunek zadania.C. x jest liczbą parzystą.

38. F, P, P

38. Liczby $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ są kolejnymi wyrazami ciągu

A. arytmetycznego.

B. geometrycznego.

C. monotonicznego.

39. P, F, P

39. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

W tym ciągu

A. $a_3 = \frac{11}{14}$.B. $a_3 = 4$.C. $a_4 > 1$.

40. F, P, P

40. Liczby $\log a$, $\log b$, $\log c$, gdzie a , b i c są różnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny. Zatem liczby a , b i c tworzą (w podanej kolejności)

A. ciąg arytmetyczny.

B. ciąg geometryczny.

C. ciąg monotoniczny.

41. P, F, P

41. Liczby $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 256$ są

A. kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

B. kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

C. wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

42. Michał podjął pracę wakacyjną na następujących warunkach: 300 zł za pierwszy tydzień i podwyżka 5% po każdym przepracowanym tygodniu.

A. Wynagrodzenie Michała za trzeci tydzień pracy wynosiło 330,75 zł.

B. Wynagrodzenie Michała za czwarty tydzień pracy wynosiło ponad 350 zł.

C. Po 5 tygodniach pracy Michał zarobił w sumie 1657,69 zł.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

43. Podaj przykład wzoru ogólnego skończonego ciągu (a_n) o danych kolejnych wyrazach.

a) 2, 3, 4, 5, 6, 7

e) 2, 4, 6, 8, 10

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$

f) -3, -4, -5, -6, -7

c) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}$

g) 1, 2, 4, 8, 16

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$

h) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$

44. Ogólny wyraz ciągu dany jest wzorem $a_n = \frac{2n-10}{n+1}$.

a) Ile wyrazów ujemnych ma ten ciąg?

b) Który wyraz ciągu jest równy $1\frac{1}{4}$?

c) Dla jakich wartości n wyrazy ciągu są większe od 1?

45. Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 3,98.

46. Zbadaj monotoniczność ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 3n - 100$

c) $a_n = (-2)^n \cdot n^2$

e) $a_n = 2^{-n}$

b) $a_n = \frac{3n-1}{n}$

d) $a_n = 2 + 4n - n^2$

f) $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

47. Sporządź wykres ciągu (a_n) .

a) $a_n = 2n - 3$

c) $a_n = n^2 - 6n + 7$

b) $a_n = \frac{3-n}{n}$

d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

48. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_{13} = 19$ oraz $a_{28} = 64$. Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

42. P, F, P

43. a) np. $a_n = n + 1$

b) np. $a_n = \frac{1}{n}$

c) np. $a_n = \frac{n+1}{n}$

d) np. $a_n = \sqrt{n}$

e) np. $a_n = 2n$

f) np. $a_n = -n - 2$

g) np. $a_n = 2^{n-1}$

h) np. $a_n = \frac{1}{2n+1}$

44. a) cztery

b) a_{15}

c) $n > 11$

45. czterdzieści dziewięć

46. a) rosnący

b) rosnący

c) niemonotoniczny

d) niemonotoniczny

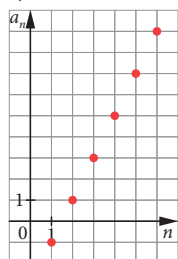
e) malejący

f) malejący

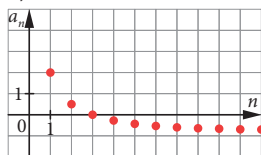
48. $a_1 = -17$, $r = 3$

47.

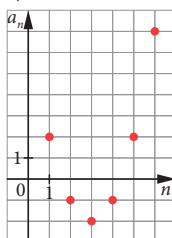
a)



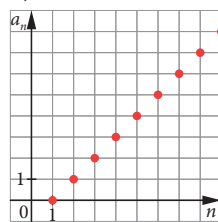
b)



c)



d)



49. $a_1 = 7, r = 13$

50. 20

51. $S_{10} = 255$

52. a) tak, $a_1 = 12, q = 4$

b) nie

c) tak, $a_1 = -\pi, q = 1$

d) tak, $a_1 = -\frac{3}{2}, q = -\frac{1}{2}$

54. $a_4 = 2\frac{1}{4}, a_5 = 2\frac{5}{9}, a_6 = 2\frac{4}{5}$

56. $a_1 = -5, r = 3$

57. -98

58. $a_1 = 3, r = \frac{1}{4}$ lub $a_1 = 7\frac{3}{4}, r = -\frac{1}{4}$

59. $n \leq 66$

60. $a_1 = -5, k = 12$

49. W pewnym ciągu arytmetycznym wyrazy a_1, a_3, a_5 są odpowiednio równe liczbom $2x - 19, 3x - 6, 2x + 33$. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę r tego ciągu.

50. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$ dane są $a_1 = 5$ i $S_6 = 60$. Oblicz różnicę $a_{22} - a_{12}$.

51. Liczba 3 jest pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, a piątym jego wyrazem jest 23. Oblicz sumę S_{10} tego ciągu.

52. Skorzystaj z definicji i sprawdź, czy ciąg określony danym wzorem ogólnym jest ciągiem geometrycznym. Jeśli tak – podaj jego wyraz a_1 i iloraz q .

a) $a_n = 3 \cdot 4^n$ b) $a_n = n^4$ c) $a_n = -\pi$ d) $a_n = \frac{3}{(-2)^n}$

D 53. Wykaż, że liczby $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}, a_2 = 10 - 7\sqrt{2}, a_3 = 34 - 24\sqrt{2}$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz jego iloraz q .

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

54. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{5n-2}{n+4}$ dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu spełniające warunek $2 < a_n < 3$.

D 55. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

56. Suma drugiego i szóstego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 8, a wyraz ósmy jest kwadratem wyrazu czwartego. Wyznacz ten ciąg.

57. Czwarty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy -2, a dziesiąty -26. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od wyrazu czwartego do dziesiątego włącznie.

58. W dwudziestowyrazowym ciągu arytmetycznym (a_n) iloczyn wyrazów skrajnych równa się $23\frac{1}{4}$, a suma dwóch środkowych jest równa $10\frac{3}{4}$. Wyznacz ten ciąg.

59. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = 4$ i $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n , dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

60. Różnicą ciągu arytmetycznego jest liczba $r = 3$, a średnia arytmetyczna wyrazów $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ jest równa 10. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę k , dla której $a_k = 28$.

53. $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}, a_2 = 10 - 7\sqrt{2}, a_3 = 34 - 24\sqrt{2}$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{30 + 20\sqrt{2} - 21\sqrt{2} - 28}{9 - 8} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{34 - 24\sqrt{2}}{10 - 7\sqrt{2}} = \frac{2(17 - 12\sqrt{2})}{10 - 7\sqrt{2}} \cdot \frac{10 + 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}} = \frac{2(170 + 119\sqrt{2} - 120\sqrt{2} - 168)}{100 - 98} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}, \text{ zatem liczby } a_1, a_2, a_3 \text{ tworzą ciąg geometryczny.}$$

55. $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1), a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)^2 \text{ dla } n \geq 1$$

Zatem suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

61. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$ siódmy wyraz jest równy 63, a suma jedenastu początkowych wyrazów ciągu jest równa 308. Oblicz a_1 .

62. Liczby $x, 6, y$ są w podanej kolejności pierwszymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego i $y - x = 18$. Oblicz sumę S_8 tego ciągu.

63. Za przejazd taksówką firmy Supertaxi płaci się 8 zł opłaty początkowej oraz 1,80 zł za każdy przejechany kilometr. W firmie Extrataxi opłata początkowa wynosi 6 zł, a koszt jednego kilometra to 2,20 zł.

- a) W której firmie zapłacimy mniej za przejazd trasą długości 6 km?
b) Przy jakiej liczbie kilometrów w obu firmach zapłacimy tyle samo?

*** 64.** Iloczyn pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 16, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 55. Oblicz sumę dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu.

65. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 81, a suma $n+4$ początkowych wyrazów tego ciągu równa się 124. Różnicą ciągu jest liczba $\frac{1}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz i wartość n .

66. Suma pierwszego i drugiego wyrazu ciągu geometrycznego wynosi 3, a suma drugiego i trzeciego wyrazu jest równa -6 . Wyznacz ten ciąg. Sprawdź, czy jest on monotoniczny.

67. Liczby 12, x, y w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby 12, y, x w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz x i y .

68. Dla jakich wartości m liczby postaci: $2m - 1, 3m, m^2 + 1$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny?

69. Dla jakich wartości m liczby postaci: $m + 1, 1 - 3m, 5m + 1$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

70. Która oferta jest korzystniejsza: otrzymać pierwszego dnia 20 gr i przez następnych 5 dni codziennie 3 razy więcej niż poprzedniego dnia czy otrzymać pierwszego dnia 20 gr i przez następnych 19 dni codziennie o 30 gr więcej niż poprzedniego dnia?

71. Liczba miłośników twórczości Euzebiusza Pajączka zwiększa się średnio o połowę co trzy lata. Ile razy zwiększy się przez najbliższych 15 lat?

61. $a_1 = -147$

62. $S_8 = 228$

63. a) w Supertaxi
b) 5 km

65. $a_1 = -3\frac{1}{2}, n = 27$ lub $a_1 = 4, n = 12$

66. pierwszy wyraz: -3 , iloraz: -2 ; nie jest monotoniczny

67. $x = 3, y = -6$ lub $x = 12, y = 12$

68. $m = 0$ lub $m = 4$

69. $m = 0$ lub $m = 3$

70. pierwsza

71. ok. 7,6 razy

64. (a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 16 \\ a_2 \cdot a_4 = 55 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1(a_1 + 2r) = 16 \\ (a_1 + r)(a_1 + 3r) = 55 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 2a_1r = 16 \\ a_1^2 + 4a_1r + 3r^2 = 55 \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i wyznaczamy a_1 : $a_1 = \frac{39 - 3r^2}{2r}$.

Podstawiamy otrzymane a_1 do pierwszego równania układu:

$$\frac{39 - 3r^2}{2r} \cdot \left(\frac{39 - 3r^2}{2r} + 2r \right) = 16 \quad | \cdot 4r^2 \Leftrightarrow (39 - 3r^2)(39 + r^2) = 64r^2 \Leftrightarrow 3r^4 + 142r^2 - 1521 = 0, \quad t = r^2 \geq 0$$

$$3t^2 + 142t - 1521 = 0, \quad \Delta = 196^2, \quad t_1 = \frac{-142 - 196}{6} < 0, \quad t_2 = \frac{-142 + 196}{6} = 9$$

$r^2 = 9$, czyli $r = 3$ lub $r = -3$. Jeżeli $r = 3$, to $a_1 = 2$, a jeżeli $r = -3$, to $a_1 = -2$.

$$S_{12} = \frac{2a_1 + 11r}{2} \cdot 12, \text{ więc } S_{12} = \frac{2 \cdot 2 + 11 \cdot 3}{2} \cdot 12 = 222 \text{ lub } S_{12} = \frac{2 \cdot (-2) + 11 \cdot (-3)}{2} \cdot 12 = -222$$

Odp.: 222 lub -222

72. 16 zł, 24 zł, 36 zł

73. a) $a_1 = 17$, $r = -2$

b) $a_8 = 17 + 7 \cdot (-2) = 3$

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{1}{3}, \frac{a_9}{a_8} = \frac{1}{3}, \frac{a_8}{a_5} = \frac{a_9}{a_8} = \frac{1}{3}$$

Zatem ciąg (a_5, a_8, a_9) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie

$$q = \frac{1}{3}.$$

c) $n = 9$

74. $a = 5$, $b = 2$, $c = 128$

75. $a = 4$, $b = 12$, $c = 36$

76. 3472,88 zł

77. 20 zł

78. a) 1296 zł

b) 4207,33 zł

c) 18 774,58 zł

79. lokata A

80. 855 zł, 850,63 zł, 846,25 zł, średnia rata 804,69 zł

72. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 76 zł. Najdroższa z tych książek kosztowała o 4 zł mniej niż dwie pozostałe razem. Ile kosztowała każda książka?

73. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_5 = 9$, $a_9 = 1$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n) .

b) Wykaż, że ciąg o wyrazach a_5 , a_8 , a_9 jest ciągiem geometrycznym, i oblicz jego iloraz q .

c) Wyznacz n , dla którego suma S_n ciągu arytmetycznego (a_n) ma największą wartość.

74. Ciąg o wyrazach dodatnich a , $4b$, 11 jest arytmetyczny, a ciąg o wyrazach b , 8 , $6a + b$, c jest geometryczny. Oblicz a , b i c .

75. Liczby a , b , c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem rosnącego ciągu geometrycznego. Suma tych liczb jest równa 52. Ciąg o wyrazach $a+2$, b , $c-18$ jest arytmetyczny. Wyznacz liczby a , b , c .



76. Składamy w banku 3000 zł na lokatę ze stałym oprocentowaniem 5% w stosunku rocznym i roczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy będziemy mieć po trzech latach?



77. Oprocentowanie lokaty trzymiesięcznej wynosi 1,6% w skali roku. Ile zyska pani Anna, która wpłaciła na taką lokatę 5000 zł?



78. Marta wpłaca co miesiąc 100 zł na lokatę systematycznego oszczędzania. Oprocentowanie lokaty wynosi 8% w skali roku. Kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku od momentu otworzenia lokaty. Jaką kwotę Marta zgromadzi na koncie po upływie

a) roku?

b) trzech lat?

c) dziesięciu lat?



79. Pan Kowalski planuje wyjazd na wakacje letnie w następnym roku, więc postanowił założyć lokatę w wysokości 2000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru trzy rodzaje lokat: lokata A – oprocentowanie w stosunku rocznym 5%, kapitalizacja odsetek po roku, lokata B – oprocentowanie w stosunku rocznym 4,8%, kapitalizacja odsetek co pół roku, lokata C – oprocentowanie w stosunku rocznym 4,6%, kapitalizacja odsetek co kwartał. Wykonaj odpowiednie obliczenia i oceń, która z tych lokat jest najkorzystniejsza dla pana Kowalskiego.



80. W pewnym banku oprocentowanie kredytów w skali roku wynosi 7%, a ich spłata odbywa się w miesięcznych ratach malejących. Antoni wziął w tym banku kredyt w wysokości 18 000 zł i chce go spłacić w ciągu dwóch lat. Oblicz wysokość pierwszych trzech rat spłaty. Ile wynosi średnia wszystkich rat wpłaconych do banku przez Antoniego?