

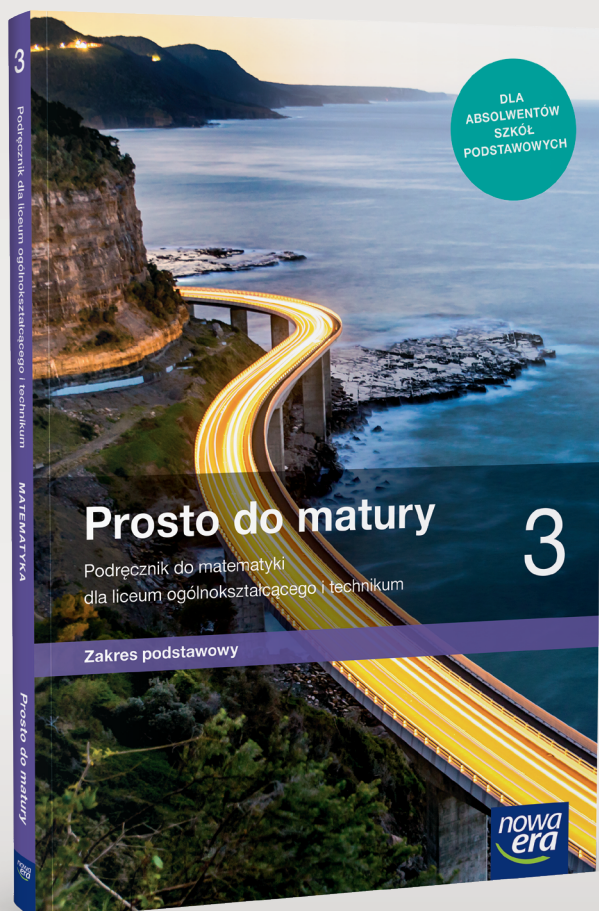
Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

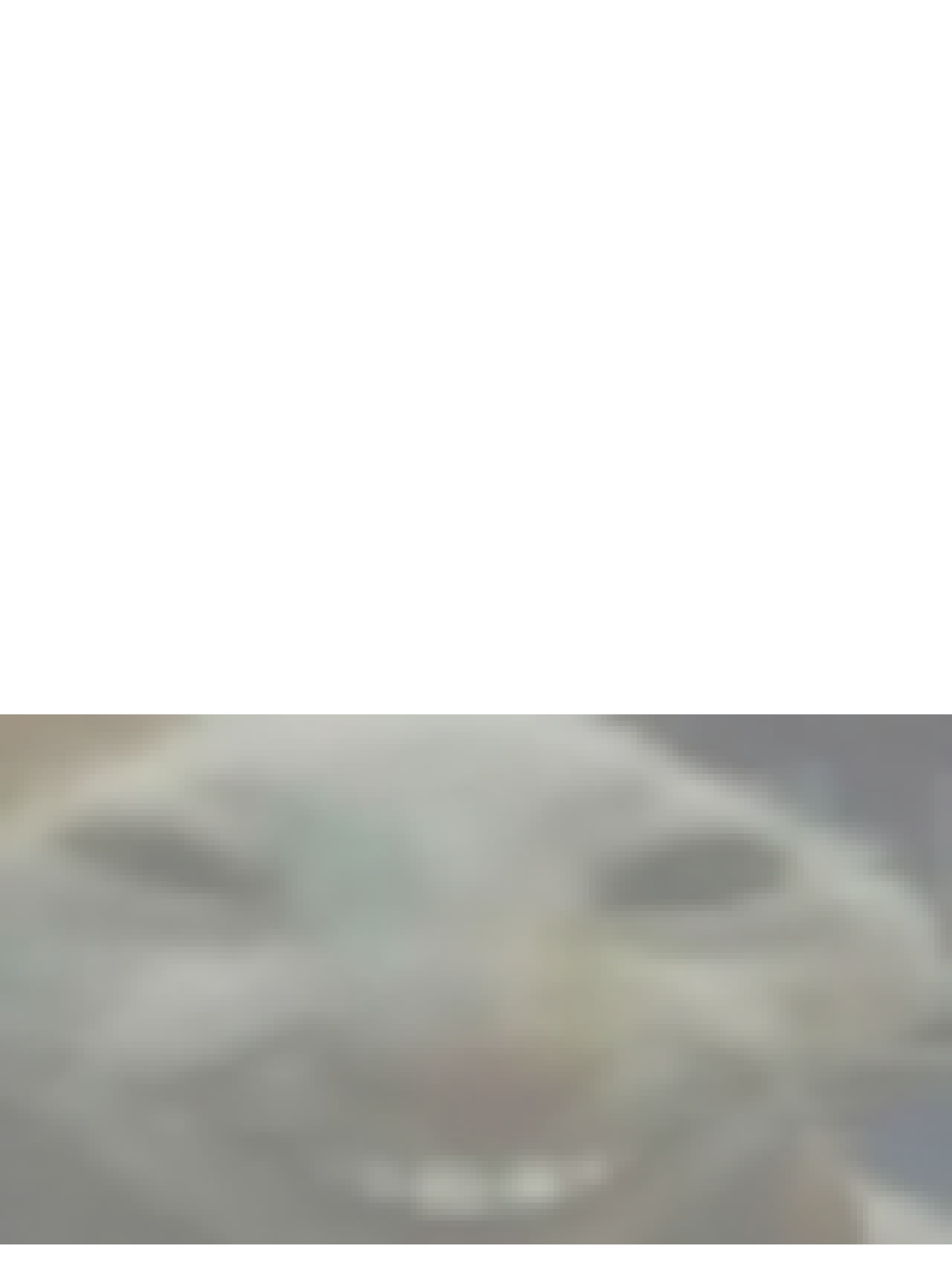


Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl



Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela 3 został przygotowany do podręcznika autorstwa Macieja Antka, Krzysztofa Belki i Piotra Grabowskiego *Prosto do matury 3* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (1008/3/2021).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4268-2

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *Prosto do matury* dla klasy 3 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

Autorzy komentarzy merytorycznych: Maciej Antek, Piotr Grabowski

Autorzy rozwiązań zadań: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Anna Dubiel

Korekta językowa: Marta Zuchowicz

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka-Ciok

Projekt okładki: Maciej Galiński, Klaudia Jarocka-Ciok

Rysunki: Andrzej Oziębło

Realizacja projektu graficznego: Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. BOP sc.

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko

Realizacja projektu okładki: Klaudia Jarocka-Ciok

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/Logan Campbell.

Fotografie: Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 231; BE&W: AKG IMAGES GmbH s. 253, Alamy Stock Photo - Art World s. 202, GL Archive s. 249 (Blaise Pascal), BEW NEWS/cienki s. 156, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 105 (Apoloniusz z Pergaj); Getty Images: De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 249 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 248, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 104 (statki), E+/simonbradfield s. 205, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 46; Indigo: Alamy Stock Photo/Pictorial Press Ltd s. 249 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 137; Shutterstock: Aaron Amat s. 146, Abundance s. 136 (ananas), Alexander Raths s. 263, Amatveev s. 121, Artens s. 152, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 170, Fotokostic s. 172, KeepWatch s. 39, KELENY s. 166, Mikbiz s. 215, Mimadeo s. 136 (szyszka), MM_photos s. 104, 105 (stara kartka), Monika Wisniewska s. 147, Nguyen Thai s. 136 (szyszka), Ruslan Guzov s. 161, Sergieiev s. 216, Targn Pleiades s. 199, wavebreakmedia s. 122; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto/Robb s. 258, Photodisc/James Woodson s. 273, Zoonar/J.Wachala s. 267.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Spis treści

Podręcznik Prosto do matury z materiałami dydaktycznymi	1
1. Trygonometria	7
2. Geometria analityczna	39
3. Ciągi	121
4. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka	199
 Skorowidz	 291
Wybrane wzory trygonometryczne	293
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	294

Legenda

ZZ i KPU
temat 5.8 (klasa 2)

Multiteka
• Twierdzenie sinusów

dla**nauczyciela**.pl | Kartkówka 1.2

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Podczas pracy z podręcznikiem PDM dodatkowo można korzystać z publikacji z serii **MATeMATyka: Zbiór zadań (ZZ)** i **Karty pracy ucznia (KPU)**. Odnośnik 5.8 (klasa 2) oznacza numer odpowiedniego tematu w tych publikacjach.

Multiteka – tu zamieszczamy tytuły zasobów zgromadzonych w Multitece, pomocnych w przeprowadzeniu konkretnych lekcji.

Materiały sprawdzające wiedzę są zgromadzone w dwóch miejscach:

- w portalu dlauczyciela.pl – gotowe kartkówki, klasówki i sprawdziany,
- w Genaratorze – narzędziu z bogatą bazą zadań do tworzenia własnych kartkówek, klasówek i sprawdzianów, a także z propozycjami gotowych tego typu materiałów.

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

mgr. Zbigniewa Bobińskiego, dr Marii Borowskiej i dr Katarzyny Kozłowskiej.

Zakres kształcenia: podstawowy

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1008/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4211-8

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Ewa Muszyńska

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Korekta językowa: Anna Wesolowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Point

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Opracowanie graficzne stron działowych: Maciej Galiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/Logan Campbell.

Fotografie: Agnieszka Kozłowska s. 231, BE&W: AKG IMAGES GmbH s. 253, Alamy Stock Photo - Art World s. 202, GL Archive s. 249 (Blaise Pascal), BEW NEWS/Scienzi s. 156, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 105 (Apoloniusz z Perga); Getty Images: De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 249 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 248, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 104 (statki), E+/simonbradfield s. 205, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 46; Indigo: Alamy Stock Photo/Pictorial Press Ltd s. 249 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 137, Shutterstock: Aaron Amat s. 146, Abundancia s. 136 (ananas), Alexander Raths s. 263, Amatev s. 121, Artens s. 152, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 170, Fotokazic s. 172, KeepItWatch s. 39, KELEW s. 166, Mikb s. 215, Minus s. 136 (czyszczyk), MM_photos s. 104, 105 (stara kartka), Monika Wisniewska s. 147, Nguyen Thai s. 136 (scyzyska), Ruslan Guzov s. 161, Sergiejew s. 216, Targi Pleiades s. 199, wavebreakmedia s. 122; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto/Rob s. 258, Photodisc/James Woodson s. 273, Zoonar/J. Wachala s. 267.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontakt: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobylka

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Trygonometria

1. Warto powtórzyć – funkcje trygonometryczne kąta wypukłego	8
2. Twierdzenie sinusów	12
3. Twierdzenie cosinusów	21
4. Związki miarowe w wielokątach	27
5. Powtórzenie	36

Dział 2. Geometria analityczna

1. Warto powtórzyć – równanie prostej	40
2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej	46
3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej	58
4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło	71
5. Okrąg i prosta	79
6. Symetria środkowa	87
7. Symetria osiowa	95
8. Symetrie wielokątów	106
9. Powtórzenie	114

Dział 3. Ciągi

1. Określenie i własności ciągu liczbowego	122
2. Ciąg arytmetyczny	138
3. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	149
4. Ciąg geometryczny	158
5. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	168
6. Oszczędzanie i kredyty w bankach	175
7. Powtórzenie	190

Dział 4. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa	200
2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	203
3. Reguła mnożenia	211
4. Obliczanie prawdopodobieństwa	222
5. Własności prawdopodobieństwa	234
6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych	242

7. Wstęp do statystyki	250
8. Mediana, średnia i dominanta	256
9. Miary rozproszenia	271
10. Powtórzenie	284
Odpowiedzi	291
Skorowidz	307
Wybrane wzory trygonometryczne	309
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	310

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy trzeciej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego.

Książka zawiera około tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczono ✨ lub ✨, zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem D, natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Po każdym temacie proponujemy zestaw siedmiu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego tematu uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Uwaga: W zadaniach testowych, w których należy wybrać jedną odpowiedź spośród czterech podanych, wybrana odpowiedź nie musi być jedynym istniejącym rozwiązaniem postawionego problemu.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A$; $x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$; $\emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c ; zbiór pusty
$\mathbf{N, Z, Q, R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b)$	przedział lewostronnie domknięty
$(a; b]$	przedział prawostronnie domknięty
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
$D; ZW$	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r
$k(S, r)$	koło o środku S i promieniu r
$P; obw$	pole figury; obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
$AB; AB $	odcinek o końcach A i B ; długość odcinka AB
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
Δ	delta; wyróżnik trójmianu kwadratowego
$\sin \alpha$	sinus kąta α
$\cos \alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg} \alpha$	tangens kąta α
$(a_n); a_n$	ciąg; n -ty wyraz ciągu (a_n)
S_n	suma n początkowych wyrazów ciągu
Ω	zbiór zdarzeń elementarnych
$\overline{A}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
EX	wartość oczekiwana
$\bar{x}; \bar{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
σ	odchylenie standardowe
σ^2	wariancja

Trygonometria

1

Umiejętności

Po klasie drugiej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) w trójkącie prostokątnym o danych bokach,
- oblicza długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego, jeżeli dane są jeden bok i wartość funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych,
- korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora),
- stosuje w zadaniach podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego i rozwartego,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do obliczania pól i obwodów trójkątów i czworokątów,
- korzysta ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych umieszczonych w układzie współrzędnych,
- stosuje wzory redukcyjne do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych.

Po tym dziale uczeń:

- znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,
- znajduje związki miarowe w wielokątach z użyciem trygonometrii,
- korzysta z twierdzenia o dwusiecznej,
- korzysta ze wzorów na pole trójkąta wyrażonych za pomocą długości boków trójkąta oraz: promienia okręgu wpisanego w trójkąt i promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Uwagi metodyczne

W obecnie obowiązującej podstawie programowej do zakresu podstawowego są zagadnienia z trygonometrii, które dotychczas występowały tylko w zakresie rozszerzonym – czyli twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów. „Warto powtórzyć” obejmuje więc te treści zawarte w programie trygonometrii z poprzedniej klasy, których powtórzenie jest niezbędne do opanowania omawianych zagadnień. To od nauczyciela zależy, czy przeznaczy na te treści oddzielną lekcję, omówi je z grupą uczniów na zajęciach wyrównawczych, czy zada je jako pracę domową. Istotne jest, że w trzeciej klasie trygonometrii będziemy używać głównie jako narzędzia do rozwiązywania problemów geometrycznych, więc warto w tym powtórzeniu skupić się na takich właśnie aspektach trygonometrii.

1. Warto powtórzyć – funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Powtórzymy najważniejsze pojęcia i fakty dotyczące trygonometrii.

Przypominamy, że w tych podręcznikach zamiast pisać „kąt ABC o mierze α ” często używamy krótszej formy „kąt ABC równy α ” albo „ $\sphericalangle ABC = \alpha$ ”. Podobnie – piszemy „wysokość równa 5”, a nie „długość wysokości równa 5”, „trójkąt ma równe przyprostokątne” zamiast „trójkąt ma przyprostokątne równej długości” itp.

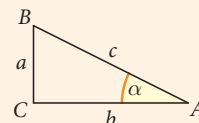
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Definicja

W trójkącie prostokątnym, w którym α jest kątem ostrym:

- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem kąta** α i oznaczamy $\sin \alpha$,
- stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem kąta** α i oznaczamy $\cos \alpha$,
- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta nazywamy **tangensem kąta** α i oznaczamy $\operatorname{tg} \alpha$.

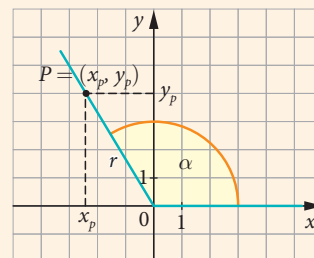
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Kąty umieszczamy w układzie współrzędnych w następujący sposób.

- Wierzchołek kąta α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) jest początkiem O układu współrzędnych.
- Ramię początkowe kąta α pokrywa się z dodatnią półosią x . Ramię końcowe (wodzące) kąta α jest odłożone w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



- Dla punktu $P \neq O$ wybranego na ramieniu wodzącym kąta α odcinek OP nazywamy **promieniem wodzącym punktu P** .

Tak samo nazywamy liczbę $r = |OP|$.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta α , a $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ jest promieniem wodzącym tego punktu, to:

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P} \quad \text{dla } x_P \neq 0$$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

α	$(0^\circ; 90^\circ)$	$(90^\circ; 180^\circ)$
$\sin \alpha$	+	+
$\cos \alpha$	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-

Podstawowe zależności trygonometryczne

Twierdzenie

Wzory redukcyjne

Jeżeli α jest kątem ostrym, to:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Twierdzenie

- Dla każdego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzi równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- Dla każdego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle - \{90^\circ\}$ zachodzi równość:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Przypomnijmy jeszcze wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta o danych dwóch bokach i kącie zawartym między tymi bokami.

Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie między bokami o długościach b i c zawarty jest kąt α , to pole P tego trójkąta wynosi:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

b) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$

c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$

d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,

$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

1.2. a) $\alpha = 37^\circ$

b) $\alpha = 79^\circ$

c) $\alpha = 20^\circ$

d) $\alpha = 77^\circ$

1.3. a) 24,22 **b)** 291,7

1.4. 47,7

1.5. 144

1.6. $21\sqrt{3}$

1.1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym kąt C jest prosty i $\sphericalangle CAB = \alpha$. Dwa boki trójkąta spełniają podane warunki. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus i tangens kąta α .

a) $|BC| = 9$, $|AB| = 15$

c) $|BC| = 3$, $|AC| = 2$

b) $|AC| = 16$, $|AB| = 34$

d) $|AC| = \frac{1}{3}|AB|$

1.2. Dane są długości dwóch boków trójkąta prostokątnego ABC ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$). Odczytaj z tablic przybliżoną miarę $\sphericalangle CAB = \alpha$ (z dokładnością do 1°).

a) $|AB| = 5$, $|BC| = 3$

c) $|BC| = 1,7$, $|AC| = 5$

b) $|AB| = 20$, $|AC| = 3,8$

d) $|AC| = 9$, $|AB| = 40$

1.3. Bok prostokąta ma długość 18. Kąt między tym bokiem a przekątną prostokąta ma miarę 42° . Oblicz

a) długość przekątnej prostokąta z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

b) pole prostokąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

1.4. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle BAC = 18^\circ$, $\sphericalangle ABC = 63^\circ$. Wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka C jest równa 6. Oblicz obwód trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

1.5. Oblicz pole trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|BC| = |CA| = 24$ i kąt BCA ma miarę 30° .

1.6. Oblicz pole trójkąta ABC , w którym $|AB| = 12$, $|BC| = 7$ i kąt ABC ma miarę 120° .

1.7. Oblicz z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku pole rombu o boku 8 i kącie ostrym o mierze 68° .

1.8. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

- a) $\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$ c) $\sin^2 60^\circ - \cos 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 0^\circ$
 b) $\operatorname{tg} 135^\circ + \sin 90^\circ + \cos 120^\circ$ d) $\sin 150^\circ \cdot \cos 60^\circ : \operatorname{tg}^2 120^\circ$

1.9. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt P .

- a) $P = (12, 5)$ c) $P = (-11, 60)$ e) $P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$
 b) $P = (-2, 1)$ d) $P = (-2\sqrt{10}, 3)$ f) $P = (-6, 0)$

1.10. Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych ani z kalkulatora.

- a) $\cos 19^\circ \cdot \operatorname{tg} 19^\circ - \cos 71^\circ$ b) $\sin 24^\circ \cdot \cos 66^\circ + \sin^2 114^\circ$

1.11. Uprość wyrażenie $\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$.

1.12. Kąt α spełnia podane warunki. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

- a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ i $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ c) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{9}{40}$ i $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

D

1.13. Udowodnij, że dane wyrażenie ma stałą wartość dla każdego kąta wypukłego α , dla którego jest określone. Podaj tę wartość.

- a) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha}$ b) $\frac{2 \sin \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ c) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}$

1.14. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta o wierzchołkach $A = (4, -2)$, $B = (2, 4)$, $C = (-1, 3)$.

1.15. W trapezie prostokątnym dłuższe ramię ma $6\sqrt{3}$, a długość krótszej podstawy wynosi $4\frac{1}{2}$. Kąt rozwarty tego trapezu ma miarę 120° . Oblicz pole trapezu.

1.16. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{5}{12}$. Oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$.

1.17. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Oblicz $|\sin \alpha - \cos \alpha|$.

$$\mathbf{1.13. a)} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1 - 1}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = 0$$

$$\mathbf{b)} \frac{2 \sin \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = 2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha} &= \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) - (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) (1 - \sin \alpha \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = -1 \end{aligned}$$

1.7. 59,34

1.8. a) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{1}{12}$

$$\mathbf{1.9. a)} \sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\mathbf{b)} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{c)} \sin \alpha = \frac{60}{61}, \cos \alpha = -\frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{60}{11}$$

$$\mathbf{d)} \sin \alpha = \frac{3}{7}, \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$\mathbf{e)} \sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}, \operatorname{tg} \alpha = -4$$

$$\mathbf{f)} \sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0$$

1.10. a) 0 **b)** 1

1.11. 1

$$\mathbf{1.12. a)} \sin \alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{b)} \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\mathbf{c)} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\mathbf{d)} \sin \alpha = \frac{9}{41}, \cos \alpha = -\frac{40}{41}$$

$$\mathbf{1.14.} \sin \sphericalangle A = \cos \sphericalangle C = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \sphericalangle A = \sin \sphericalangle C = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \sphericalangle C = 2$$

$$\mathbf{1.15.} 13\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$$

$$\mathbf{1.16.} \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ lub } -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\mathbf{1.17.} \frac{\sqrt{10}}{3}$$

2. Twierdzenie sinusów

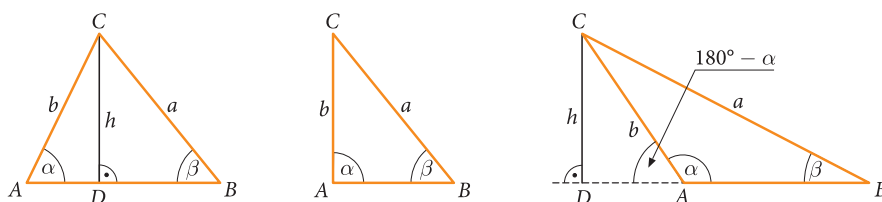
Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów

Zadanie polegające na wyznaczeniu wszystkich nieznanymi długości boków oraz miar kątów w trójkącie nazywamy krótko **rozwiązywaniem trójkąta**. W kolejnych tematach zajmiemy się tym zagadnieniem. W tym celu będziemy stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi zachodzące w trójkątach.

Pokażemy, że w każdym trójkącie wysokość można wyrazić w postaci iloczynu długości boku, na który ta wysokość nie jest opuszczona, i sinusa odpowiedniego kąta tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.



Zauważmy, że:

- jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin \alpha$,
- jeżeli α jest kątem prostym, to $h = b$, czyli $h = b \cdot \sin \alpha$, ponieważ $\sin 90^\circ = 1$,
- jeżeli α jest kątem rozwartym, to $\sin (180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \cdot \sin \alpha$.

Niezależnie od miary kąta mamy więc równość:

$$h = b \cdot \sin \alpha$$

W identyczny sposób możemy poprowadzić rozumowanie dla boku a i kąta β . Otrzymamy wówczas równość:

$$h = a \cdot \sin \beta$$

Zatem:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$

Równość tę możemy zapisać w postaci:

$$(1) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \leftarrow \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \sin \beta \neq 0$$

ZZ i KPU

temat 5.8 (klasa 2)

Multiteka

• Twierdzenie sinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Oznaczmy trzeci bok trójkąta literą c oraz kąt leżący naprzeciwko niego literą γ . Gdy poprowadzimy wysokość z wierzchołka A i będziemy rozumować podobnie jak wyżej, otrzymamy $b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$ lub inaczej:

$$(2) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \leftarrow \sin \gamma \neq 0$$

Z równości (1) i (2) wynika, że:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Otrzymaną równość nazywamy **wzorem sinusów**.

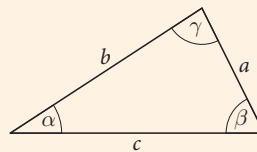
Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Wzór sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Twierdzenie to stosujemy na przykład do obliczania długości boków trójkąta, jeżeli dana jest jedna z nich oraz dane są kąty trójkąta.

Przykład 1 zad. 2.1

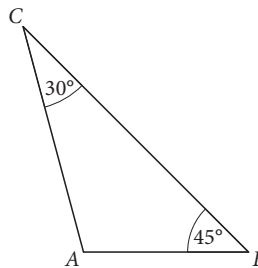
W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Obliczmy długość boku AC .

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} &= \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC} \\ \frac{12}{\sin 30^\circ} &= \frac{|AC|}{\sin 45^\circ} \\ \frac{12}{\frac{1}{2}} &= \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ |AC| &= 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Odp.: Bok AC ma długość $12\sqrt{2}$.

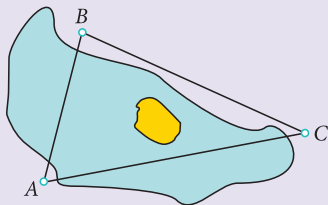


◀2.1. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 8$, $\sphericalangle CAB = 45^\circ$, $\sphericalangle BCA = 120^\circ$. Oblicz długość boku AC .

Odp.: $4(\sqrt{3} - 1)$

◀2.3. Trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku A . Dane są:
 $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\sin \sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$.
 Oblicz miarę kąta ACB .
Odp.: 30°

◀2.5. Gospodarstwa A , B , C są położone nad stawem, jak na rysunku poniżej.



Zmierzono, że $|BC| = 300$ m, $\sphericalangle C = 35^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$. Wyznacz odległość między gospodarstwami A i B z dokładnością do 1 metra.

Odp.: 190 m

Przykład 2 ◀ zad. 2.3

Trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M . Dane są:
 $|KL| = 16$, $|KM| = 9\sqrt{2}$, $\sin \sphericalangle LMK = \frac{8}{9}$. Obliczmy miarę kąta KLM .

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

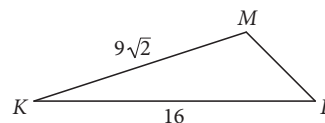
$$\frac{|KL|}{\sin \sphericalangle LMK} = \frac{|KM|}{\sin \sphericalangle KLM}$$

$$\frac{16}{\frac{8}{9}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sin \sphericalangle KLM}, \text{ stąd } \sin \sphericalangle KLM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sphericalangle KLM = 45^\circ \text{ lub } \sphericalangle KLM = 135^\circ \quad \leftarrow \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$

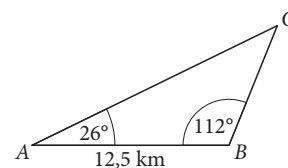
Wiemy, że trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M , zatem tylko kąt 45° spełnia warunki zadania.

Odp.: Kąt KLM ma miarę 45° .



Przykład 3 ◀ zad. 2.5

W górzystym terenie stoją dwie wieże triangulacyjne A i B . Odległość między nimi jest równa 12,5 km. Najwyższym w okolicy wierzchołkiem jest Góra Czarownic (oznaczona na rysunku literą C). Geodeta zmierzył dwa kąty: z wieży A kąt BAC o mierze 26° i z wieży B kąt ABC o mierze 112° . Obliczmy przybliżone odległości między Górą Czarownic a wieżami (mierzone w linii prostej i z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



Rozwiązanie

Zastosujemy dwa razy wzór sinusów. Miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB znajdziemy jako dopełnienie do 180° :

$$\gamma = 180^\circ - 26^\circ - 112^\circ = 42^\circ, \text{ zatem } \frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|AC|}{\sin 112^\circ}$$

$$|AC| = \frac{12,5 \cdot \sin 112^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{12,5 \cdot \sin(180^\circ - 68^\circ)}{\sin 42^\circ} = \frac{12,5 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 42^\circ}$$

Odczytujemy z tablic matematycznych przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku:

$$\sin 68^\circ \approx 0,93, \sin 42^\circ \approx 0,67$$

$$\text{Zatem } |AC| \approx \frac{12,5 \cdot 0,93}{0,67} \approx 17,4.$$

Do obliczenia odległości $|BC|$ wybieramy inną proporcję ze wzoru sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 26^\circ} \quad \leftarrow \sin 26^\circ \approx 0,44$$

$$\text{czyli } |BC| = \frac{12,5 \cdot \sin 26^\circ}{\sin 42^\circ} \approx \frac{12,5 \cdot 0,44}{0,67} \approx 8,2$$

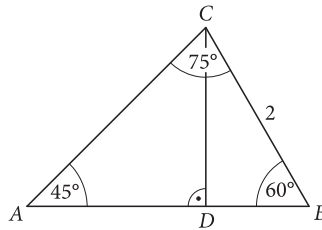
Odp.: Góra Czarownic jest oddalona od wieży A o ok. 17,4 km, a od wieży B o ok. 8,2 km.

D Przykład 4 ◀ zad. 2.15

Kąty trójkąta ABC mają miary 45° , 60° , 75° , a bok BC ma długość 2. Skorzystamy ze wzoru sinusów i wykazemy, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Dowód

Zauważmy najpierw, że istnieje dokładnie jeden trójkąt spełniający warunki zadania – możemy go skonstruować, gdy określimy odcinek jednostkowy. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zgodnie z nimi CD jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta o mierze 75° .



$$|DB| = 1 \text{ i } |DC| = \sqrt{3} \quad \leftarrow \triangle DBC \text{ jest połową trójkąta równobocznego o boku } 2$$

$$|AD| = \sqrt{3} \text{ i } |AC| = \sqrt{6} \quad \leftarrow \triangle ADC \text{ jest połową kwadratu o boku } |DC| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{|AB|}{\sin 75^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ} \quad \leftarrow \text{twierdzenie sinusów dla trójkąta } ABC$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ stąd } \sin 75^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Koniec dowodu

Zauważmy, że jeśli w trójkącie ABC poprowadzimy wysokość BE z wierzchołka kąta o mierze 60° , to możemy w podobny sposób wykazać, że:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Spotyka się również następujące zależności:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

Za pomocą odpowiednich przekształceń można wykazać, że:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

◀ 2.15. Patrz s. 19.

Wzór sinusów stosujemy również do wyznaczania promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Twierdzenie

Twierdzenie sinusów

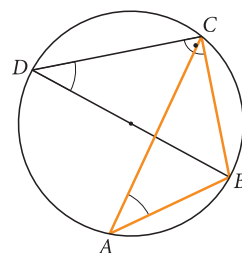
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.

Teza

Stosunek długości boku trójkąta ABC do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości $2R$, czyli średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



Dowód

Zgodnie ze wzorem sinusów dowód wystarczy przeprowadzić dla jednego kąta. Któryś z kątów trójkąta jest kątem ostrym; oznaczmy jego wierzchołek literą A . Z innego wierzchołka (np. B) prowadzimy średnicę BD .

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$$

← kąty wpisane oparte na tym samym łuku

$$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{|BD|}$$

← trójkąt BDC jest prostokątny

$$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{2R}$$

← R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC

Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy:

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BDC}$$

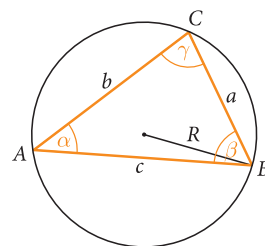
$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC}$$

← $\sin \sphericalangle BDC = \sin \sphericalangle BAC$

Koniec dowodu

Korzystając z oznaczeń przedstawionych na rysunku, możemy treść twierdzenia, łącznie ze wzorem sinusów, zapisać krótko:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Przykład 5 ◀ zad. 2.16

Na trójkącie, którego dwa boki mają długości 9 i $3\sqrt{6}$, opisano okrąg o promieniu $3\sqrt{3}$. Obliczmy miary kątów i długość trzeciego boku trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

α, β, γ – kąty leżące odpowiednio naprzeciwko boków a, b, c trójkąta,

R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przyjmijmy, że $a = 9$, $b = 3\sqrt{6}$.

$$\bullet \frac{9}{\sin \alpha} = 6\sqrt{3} \quad \leftarrow \text{zgodnie ze wzorem } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\sin \alpha = \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ lub } \alpha = 120^\circ \quad \leftarrow \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

$$\bullet \frac{3\sqrt{6}}{\sin \beta} = 6\sqrt{3}$$

$$\sin \beta = \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = 45^\circ \text{ lub } \beta = 135^\circ \quad \leftarrow \sin \beta = \sin (180^\circ - \beta)$$

Suma kątów trójkąta wynosi 180° , zatem $\alpha + \beta < 180^\circ$ i $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Nie istnieje trójkąt o kątach $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 135^\circ$ ani trójkąt o kątach $\alpha = 120^\circ$ i $\beta = 135^\circ$.

Możliwe są więc dwa rozwiązania:

I. trójkąt o kątach $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

II. trójkąt o kątach $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 15^\circ$

Długość trzeciego boku trójkąta obliczamy ze wzoru $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, czyli:

$$c = 2R \sin \gamma$$

$$c = 6\sqrt{3} \sin 75^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{dla I trójkąta}$$

$$c = 6\sqrt{3} \sin 15^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{dla II trójkąta}$$

$$\text{Odp.: } \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ, c = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{lub } \alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 15^\circ, c = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2}$$

◀2.16. Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

Odp.: $25^\circ, 39^\circ, 116^\circ, 9,0$ cm

lub $25^\circ, 141^\circ, 14^\circ, 2,4$ cm

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. $4(\sqrt{3} - 1)$

2.2. a) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ b) $12\sqrt{6}$
c) 0,612 d) 12,37

2.3. 30°

2.4. a) $\gamma = 43^\circ$, $b = 11,45$ cm,
 $c = 7,93$ cm
b) $\gamma = 57^\circ$, $a = 17,57$ cm,
 $c = 15,06$ cm
c) $\alpha = 33^\circ$, $a = 13,56$ cm,
 $b = 21,56$ cm

2.5. 190 m

2.6. $4(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm i $8\sqrt{6}$ cm

2.7. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ$,
 $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135^\circ$,
 $|AD| = |BC| = 4,24$ cm,
 $|AB| = 10,41$ cm, $|CD| = 4,42$ cm

2.8. $|AW| = 1,22$ km,
 $|BW| = 1,32$ km

2.1. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 8$, $\sphericalangle CAB = 45^\circ$, $\sphericalangle BCA = 120^\circ$. Oblicz długość boku AC .

2.2. Kąty trójkąta ABC oznaczono α , β , γ , a literami a , b , c – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

a) $\sin \beta$ dla $a = 20$, $b = 24$, $\alpha = 45^\circ$. c) $\sin \alpha$ dla $a = 11$, $c = 17$, $\gamma = 71^\circ$.

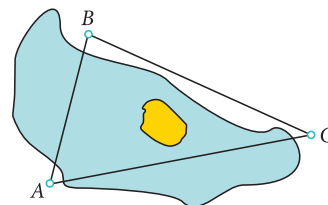
b) b dla $c = 36$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$. d) c dla $a = 16$, $\beta = 26^\circ$, $\gamma = 48^\circ$.

2.3. Trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku A . Dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\sin \sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$. Oblicz miarę kąta ACB .

2.4. Oblicz brakujące miary kątów (z dokładnością do 1°) i długości boków (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) trójkąta ABC , w którym α , β , γ są kątami wewnętrznymi oraz a , b , c – bokami odpowiednio przeciwległymi.

a) $a = 7$ cm, $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 100^\circ$
b) $b = 12,7$ cm, $\alpha = 78^\circ$, $\beta = 45^\circ$
c) $c = 11,3$ cm, $\gamma = 27^\circ$, $\beta = 120^\circ$

2.5. Gospodarstwa A , B , C są położone nad stawem, jak na rysunku obok. Zmierzono, że $|BC| = 300$ m, $\sphericalangle C = 35^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$. Wyznacz odległość między gospodarstwami A i B z dokładnością do 1 metra.

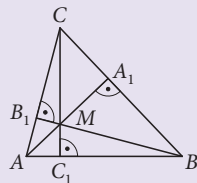


2.6. Przekątna równoległoboku ma długość 24 cm i dzieli kąt rozwarty równoległoboku na kąty o miarach 45° i 75° . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

2.7. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, przekątna AC ma długość 8 cm, $\sphericalangle CAB = 22^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 113^\circ$. Oblicz miary kątów i długości boków trapezu z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

2.8. Na brzegu jeziora znajdują się dwie przystanie, oznaczone jako A i B , oddalone w linii prostej o 1,6 km. Z każdej z nich widoczna jest ta sama mała wyspa – oznaczmy ją W . Za pomocą kompasu zmierzono kąty: $\sphericalangle WAB = 54^\circ$ i $\sphericalangle ABW = 48^\circ$. Oblicz odległość wyspy od każdej z tych przystani (z dokładnością do 0,01 km).

2.17. I przypadek



$$\sphericalangle AMC_1 = 90^\circ - \sphericalangle MAC_1 = 90^\circ - \sphericalangle A_1AB = \sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle ABC$$

Analogicznie: $\sphericalangle BMC_1 = \sphericalangle BAC$.

Stąd $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ACB$.

Zatem $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle ACB$.

Analogicznie pokazujemy, że $\sin \sphericalangle BMC = \sin \sphericalangle BAC$,

$$\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle ABC.$$

Ciąg dalszy rozwiązania na s. 19.

- 2.9.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym
 a) $\sphericalangle A = 14^\circ$, $|BC| = 10$ cm. b) $\sphericalangle B = 124^\circ$, $|AC| = 9$ cm.

- 2.10.** Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S , $|AB| = 8$, $\sphericalangle ASC = 140^\circ$ i $\sphericalangle CSB = 100^\circ$. Oblicz długości boków BC oraz AC (z dokładnością do 0,01).

- 2.11.** W trójkącie kąt o mierze 74° przylega do boku długości 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6 cm. Oblicz długości pozostałych boków i miary kątów trójkąta.

- 2.12.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość $7\sqrt{3}$, a kąty przyległe do tego boku mają miary 80° i 40° .

- 2.13.** Okrąg o promieniu 18 cm jest opisany na trójkącie, którego kąty pozostają w stosunku $3:4:5$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

- 2.14.** W trapezie równoramiennym przekątna o długości $3\sqrt{2}$ tworzy z krótszą podstawą kąt 45° , a z ramieniem kąt 75° . Oblicz obwód trapezu.

D * 2.15. Wykaż, że $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

- 2.16.** Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

- D * 2.17.** Punkt M jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC , różnym od jego wierzchołków. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABM , BMC , ACM i ABC mają równe promienie.

- D * 2.18.** Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC zachodzi związek $\frac{|AB|}{\cos \sphericalangle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \sphericalangle CAB}$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

- * 2.19.** Po tej samej orbicie okołoziemskiej o promieniu 11 tys. km krążą trzy satelity: A , B i C . Kąt BAC ma miarę 57° .
 a) Wyznacz odległość między satelitami B i C .
 b) Sprawdź, czy satelita C jest widoczny z kamery umieszczonej w satelicie B . Przyjmij, że promień Ziemi jest równy 6300 km.

- * 2.20.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{2}$, $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Oblicz długość boku BC .

2.17. II przypadek

$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMB_1 = 90^\circ - \sphericalangle MAB_1 = \sphericalangle ACB$
 Analogicznie: $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC$.
 Stąd $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$.
 Zatem $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle ACB$, $\sin \sphericalangle BMC = \sin \sphericalangle BAC$,
 $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle ABC$.

Niech: R_1 , R_2 , R_3 , R – promienie okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach AMB , BMC , AMC i ABC .

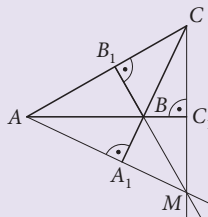
Z twierdzenia sinusów w trójkątach ABM i ABC :

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle AMB} = 2R_1 \text{ i } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2R$$

Sinusy kątów w równościach powyżej są równe, więc $R_1 = R$.

Analogicznie pokazujemy, że $R_2 = R$ i $R_3 = R$.

Zatem $R_1 = R_2 = R_3 = R$.



- 2.9. a)** ok. 20,7 cm

- b)** ok. 5,4 cm

- 2.10.** $|BC| = 7,08$, $|AC| = 8,68$
 lub $|BC| = 17,92$, $|AC| = 21,98$

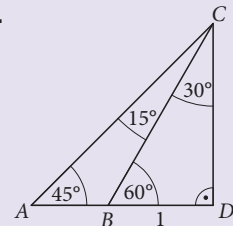
- 2.11.** 11,54 cm, 9,13 cm, 50° , 56°

- 2.12.** 7

- 2.13.** $18\sqrt{2}$ cm, $18\sqrt{3}$ cm,
 $9(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm

- 2.14.** $obw = 2(3 + 2\sqrt{3})$

- 2.15.**



W trójkącie BDC : $|BC| = 2$,
 $|CD| = \sqrt{3}$

W trójkącie ADC :

$$|AD| = |CD| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = |AD| - |BD| = \sqrt{3} - 1$$

Z twierdzenia sinusów

w trójkącie ABC :

$$\frac{|AB|}{\sin 15^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{Stąd } \sin 15^\circ = \frac{|AB| \sin 45^\circ}{|BC|} = \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- 2.16.** 25° , 39° , 116° , 9,0 cm
 lub 25° , 141° , 14° , 2,4 cm

- 2.18.** Dana jest równość:

$$(1) \frac{|AB|}{\cos \sphericalangle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \sphericalangle CAB}$$

Z twierdzenia sinusów:

$$(2) \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle CAB}$$

Dzielimy równości (1) i (2)

stronami:

$$\frac{\sin \sphericalangle BCA}{\cos \sphericalangle BCA} = \frac{\sin \sphericalangle CAB}{\cos \sphericalangle CAB}$$

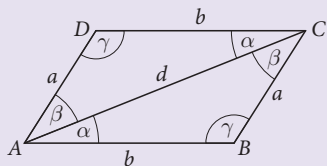
$$\operatorname{tg} \sphericalangle BCA = \operatorname{tg} \sphericalangle CAB$$

Zatem $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB$,
 czyli trójkąt ABC jest
 równoramienny.

- 2.19.** Patrz s. 20.

- 2.20.** Patrz s. 20.

2.21.



$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, więc
 $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$.

Z twierdzenia sinusów
 w trójkącie ABC:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \gamma}$$

Stąd:

$$a = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

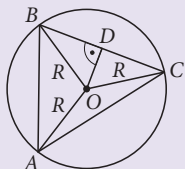
$$b = \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Odp.: $\frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

Prosto do matury

1. B
2. C
3. B
4. P, F, P
5. 3,7
6. 33°
7. Wskazówka: Skorzystaj
ze wzoru $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$
oraz z twierdzenia sinusów.

2.19.



- a) $R = 11$ tys. km, $\sphericalangle BAC = 57^\circ$
 $|BC| = 2R \sin 57^\circ \approx$
 $\approx 22\,000 \cdot 0,8387 \approx 18,5$ tys. [km]

- b) Satelita C jest widoczny
z kamery w satelicie B,
gdy $|OD| > 6300$ km.
 $|OD| = \sqrt{R^2 - |BD|^2} =$
 $= \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2} \approx$
 $\approx \sqrt{11\,000^2 - 9250^2} \approx 6000$ [km]
 $|OD| < 6300$ km, zatem satelita C
nie jest widoczny.

Odp.: a) ok. 18,5 tys. km b) nie

- * 2.21. Przekątna równoległoboku ma długość d i dzieli jego kąt na dwa kąty o miarach α oraz β . Wyznacz długości boków tego równoległoboku.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6\sqrt{3}$, $\sphericalangle BCA = 120^\circ$. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A. $3\sqrt{3}$ B. 6 C. $6\sqrt{3}$ D. 12

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $|BC| = 16$, $\sphericalangle BCA = 60^\circ$. Wskaż wartość $\sin \sphericalangle CAB$.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

3. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 18$, $\sphericalangle CAB = 45^\circ$, $\sin \sphericalangle BCA = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Wskaż długość boku AB.

A. $4\sqrt{6}$ B. 12 C. $12\sqrt{2}$ D. 27

4. Niech α, β, γ będą kątami trójkąta ABC, a, b, c – bokami odpowiednio przeciwległymi oraz $\alpha = 30^\circ$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$

B. $\frac{a}{c} = \frac{\sin \gamma}{2}$

- C. Długość jednego z boków trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

5. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $\sphericalangle CAB = 50^\circ$, $\sphericalangle ABC = 75^\circ$. Wyznacz długość boku BC z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

6. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 32$, $|BC| = 26$, $\sphericalangle BCA = 42^\circ$. Wyznacz miarę kąta CAB z dokładnością do 1° .

- D 7. Wykaż, że pole trójkąta o kątach α, β, γ wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem $P = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

2.20. Z twierdzenia sinusów: $\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC}$.

$$\sin \sphericalangle ABC = \frac{|AC| \sin \sphericalangle BCA}{|AB|} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Czyli $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ lub $\sphericalangle ABC = 135^\circ$.

Stąd $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 75^\circ$ lub $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$.

$$\text{Zatem } \sin \sphericalangle BAC = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ lub } \sin \sphericalangle BAC = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów: } \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC} = \frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

$|BC| = 8 \sin \sphericalangle BAC$, czyli:

$$|BC| = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ lub } |BC| = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Odp.: $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ lub $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

3. Twierdzenie cosinusów

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów

Trójkąt jest jednoznacznie określony, gdy dane są długości jego dwóch boków i kąt między nimi zawarty. Aby wyznaczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

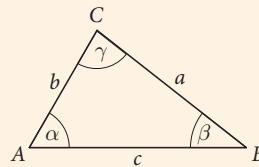
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta o bokach a, b, c i kątach α, β, γ leżących odpowiednio naprzeciw tych boków zachodzą równości:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma$$



Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w twierdzeniu.

Teza

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma$$

Twierdzenie cosinusów nazywane jest uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa.

Dowód

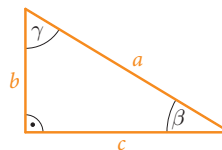
Wyznamy a w zależności od b, c oraz kąta α .

Zauważmy, że gdy α jest kątem prostym, to teza twierdzenia wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ i } \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

więc:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



ZZ i KPU

tematy 5.9, 5.10 (klasa 2)

Multiteka

- Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

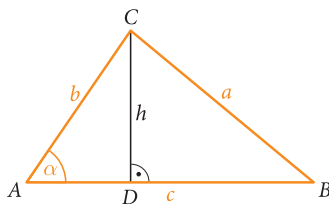
Generator
testów i sprawdzianów

Rozważmy pozostałe dwie sytuacje – gdy α jest kątem ostrym oraz gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadzimy wysokość CD .

$$(1) \quad a^2 = |CD|^2 + |DB|^2$$

← w $\triangle DBC$ na mocy twierdzenia Pitagorasa



Jeżeli $\alpha < 90^\circ$, to:

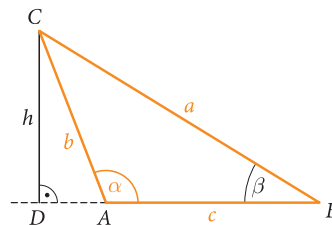
$$\frac{|CD|}{b} = \sin \alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos \alpha$$

więc:

$$|CD| = b \sin \alpha$$

$$|DB| = c - |AD| = c - b \cos \alpha$$



Jeżeli $\alpha > 90^\circ$, to:

$$\frac{|CD|}{b} = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

więc:

$$|CD| = b \sin \alpha$$

$$|DB| = c + |AD| = c + b \cos \alpha$$

Niezależnie od rozwartości kąta α mamy więc:

$$\begin{aligned} |CD|^2 + |DB|^2 &= (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 = \\ &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \\ &= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

Zatem, po podstawieniu do równości (1), mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Wyprowadzenie pozostałych dwóch równości przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

Wniosek

Jeżeli oznaczymy długości boków trójkąta a, b, c oraz kąty leżące naprzeciwko nich odpowiednio α, β, γ , to prawdziwe są wzory:

$$\bullet \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \bullet \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \bullet \cos \gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$$

Przykład 1 ◀ zad. 3.2

Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC : $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ oraz $\sphericalangle ABC = 76^\circ$. Obliczmy $|AC|$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

$$|AC|^2 = 36 + 16 - 48 \cos 76^\circ \approx 40,39 \quad \leftarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$|AC| \approx \sqrt{40,39} \approx 6,36$$

Odp.: $|AC| \approx 6,36$

Przykład 2 ◀ zad. 3.5

Wyznamy (z dokładnością do 1°) kąty trójkąta o bokach długości 7, 8 i 3.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 9 - 49}{48} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 9 - 64}{42} \approx -0,1429$$

$$0,1429 \approx \cos 82^\circ$$

$$-0,1429 \approx -\cos 82^\circ = \cos(180^\circ - 82^\circ) \quad \leftarrow \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\beta \approx 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$\gamma \approx 22^\circ \quad \leftarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Odp.: $60^\circ, 98^\circ, 22^\circ$

Przykład 3 ◀ zad. 3.6

Sprawdźmy, czy trójkąt o bokach długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + 2$, $\sqrt{2} + 3$ jest rozwartokątny.

Rozwiązanie

Największy kąt trójkąta leży naprzeciwko najdłuższego boku. Najdłuższy bok badanego trójkąta to $a = \sqrt{2} + 3$. Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zbadamy znak cosinusa tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ gdzie } b = \sqrt{2} \text{ i } c = \sqrt{2} + 2$$

Ponieważ $2bc > 0$, wystarczy zbadać znak wyrażenia w liczniku ułamka.

$$b^2 + c^2 - a^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 - (\sqrt{2} + 3)^2 = -3 - 2\sqrt{2} < 0$$

Zatem $\cos \alpha < 0$, czyli α jest kątem rozwartym.

Odp.: Badany trójkąt jest rozwartokątny.

◀3.2. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 54^\circ$, $|BC| = 10$, $|AC| = 8$. Oblicz długość boku AB z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Odp.: 8,36

◀3.5. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do jednego stopnia.

a) 8, 7, 10

b) 3, 5, 6

c) 24, 11, 18

d) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 3

Odp.: a) $53^\circ, 44^\circ, 83^\circ$

b) $30^\circ, 56^\circ, 94^\circ$

c) $109^\circ, 26^\circ, 45^\circ$

d) $46^\circ, 59^\circ, 75^\circ$

◀3.6. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

a) 5, 9, 13

b) 8, 15, 17

c) $3\sqrt{2}$, 4, $1 + \sqrt{2}$

d) 7, 8, 9

Odp.: a) rozwartokątny

b) prostokątny

c) ostrokątny

d) ostrokątny

◀ 3.8. W trójkącie ABC dane są:

$\cos \sphericalangle BAC = \frac{25}{32}$, $|BC| = |AB| - 3$,
 $|AC| = |AB| - 2$. Wyznacz
 długości boków tego trójkąta.

Odp.: $|AB| = 8$, $|BC| = 5$,
 $|AC| = 6$



Przykład 4 ◀ zad. 3.8

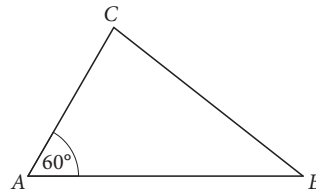
W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ponadto zachodzą warunki $|AB| = 2|AC| - 4$ i $|BC| = |AC| + 4$. Wyznamy długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $|AC| = x$. Wówczas $|AB| = 2x - 4$ i $|BC| = x + 4$. Zauważmy, że aby spełniony był warunek $|AB| > 0$, musimy założyć, że $x > 2$.

Na mocy twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \sphericalangle BAC \\ (x+4)^2 &= x^2 + (2x-4)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x-4) \cdot \frac{1}{2} \\ x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 2x^2 + 4x \\ 2x^2 - 20x &= 0, \text{ stąd } 2x(x-10) = 0 \end{aligned}$$



Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy $x = 10$.

Odp.: Boki trójkąta mają długości: $|AC| = 10$, $|BC| = 14$ i $|AB| = 16$.

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. a) $\frac{33}{35}, \frac{9}{25}, -\frac{1}{35}$

b) $\frac{17}{35}, \frac{5}{21}, \frac{11}{15}$

c) $\frac{47}{52}, \frac{17}{28}, -\frac{19}{91}$

d) $\frac{9\sqrt{2}-4}{16}, \frac{5-3\sqrt{2}}{4}, \frac{10-3\sqrt{2}}{8}$

3.2. 8,36

3.3. $|BC| = 6\sqrt{7}$, $\sphericalangle B = 19^\circ$,
 $\sphericalangle C = 41^\circ$

3.4. 5, 37° , 98°

3.5. a) 53° , 44° , 83°

b) 30° , 56° , 94°

c) 109° , 26° , 45°

d) 46° , 59° , 75°

3.6. a) rozwartokątny

b) prostokątny

c) ostrokątny

d) ostrokątny

3.7. 120°

3.1. Oblicz cosinusy kątów trójkąta o danych długościach boków.

a) 5, 14, 15

b) 9, 10, 7

c) 7, 13, 16

d) $1 + \sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 2

3.2. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 54^\circ$, $|BC| = 10$, $|AC| = 8$. Oblicz długość boku AB z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

3.3. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle A = 120^\circ$, $|AC| = 6$, $|AB| = 12$. Oblicz długość boku BC oraz miary kątów trójkąta ABC z dokładnością do jednego stopnia.

3.4. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i $3\sqrt{2}$, a kąt między nimi ma miarę 45° . Oblicz długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów trójkąta z dokładnością do jednego stopnia.

3.5. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do jednego stopnia.

a) 8, 7, 10

b) 3, 5, 6

c) 24, 11, 18

d) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 3

3.6. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

a) 5, 9, 13

b) 8, 15, 17

c) $3\sqrt{2}$, 4, $1 + \sqrt{2}$

d) 7, 8, 9

3.7. Oblicz miarę największego kąta w trójkącie, którego boki mają długości $a = (3 - \sqrt{3})$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm, $c = 3\sqrt{2}$ cm.

3.11.

	a	b	c	α	β	γ
a)	$\sqrt{6}$	2	$\sqrt{3} + 1$	60°	45°	75°
b)	$3 - \sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$3 + \sqrt{3}$	15°	60°	105°
c)	$\sqrt{2}$	$3 + \sqrt{3}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	15°	120°	45°
d)	$\sqrt{8}$	4	$2\sqrt{3} + 2$	30°	45°	105°
e)	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2} + \sqrt{6}$	45°	60°	75°
f)	$2\sqrt{3} - 2$	2	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	45°	105°	30°

3.8. W trójkącie ABC dane są: $\cos \angle BAC = \frac{25}{32}$, $|BC| = |AB| - 3$, $|AC| = |AB| - 2$. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

3.9. Kąt trójkąta zawarty między dwoma bokami o długościach 14 cm i $7\sqrt{3}$ cm ma miarę 30° . Oblicz obwód trójkąta i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

3.10. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 5\sqrt{7}$, $\angle A = 60^\circ$ oraz $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Oblicz długości boków AC i AB .

3.11. W trójkącie ABC boki a, b, c są przeciwległe odpowiednio do kątów α, β, γ . Przerysuj tabelę i zastąp znaki $?$ odpowiednimi wartościami.

	a	b	c	α	β	γ
a)	$\sqrt{6}$	$?$	$?$	60°	45°	$?$
b)	$?$	$3\sqrt{2}$	$?$	$?$	60°	105°
c)	$?$	$?$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	15°	$?$	45°
d)	$\sqrt{8}$	4	$2\sqrt{3} + 2$	$?$	$?$	$?$
e)	$2\sqrt{2}$	$?$	$\sqrt{2} + \sqrt{6}$	$?$	$?$	75°
f)	$2\sqrt{3} - 2$	$?$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$?$	105°	$?$

3.12. W równoległoboku krótsza przekątna i bok o długościach odpowiednio 12 cm i 8 cm tworzą kąt 60° . Oblicz długość drugiego boku i dłuższej przekątnej oraz miary kątów równoległoboku.

3.13. Dwa boki trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg o promieniu r mają długości $r\sqrt{3}$ i $r\sqrt{2}$. Oblicz miary kątów trójkąta.

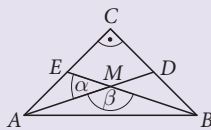
3.14. W czworokącie wypukłym kolejne boki mają długości: 2 cm, 5 cm, 7 cm i $2\sqrt{13}$ cm. Jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej tego czworokąta z dokładnością do 0,1 cm.

3.15. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano taki punkt M , że $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$. Wyznacz sinus kąta CAM .

3.16. Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC| = 14$ i kąt między ramionami ma miarę 120° . Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

D * 3.17. Wykaż, że w równoramiennym trójkącie prostokątnym tangens kąta ostrego między środkowymi poprowadzonymi z wierzchołków kątów ostrych jest równy 0,75.

3.17.



$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

Oznaczamy: $|AE| = |EC| = |CD| = |DB| = a$, $a > 0$.

$$|AD| = |BE| = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

Punkt M dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka,

$$\text{zatem } |EM| = \frac{1}{3}a\sqrt{5}, \quad |AM| = \frac{2}{3}a\sqrt{5}.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie AEM : $|AE|^2 = |EM|^2 + |AM|^2 - 2|EM| \cdot |AM| \cdot \cos \alpha$

$$a^2 = \frac{5}{9}a^2 + \frac{20}{9}a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \cos \alpha \quad | : a^2$$

$$1 = \frac{25}{9} - \frac{20}{9} \cos \alpha, \quad \text{stąd } \frac{20}{9} \cos \alpha = \frac{16}{9}, \quad \text{zatem } \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}).$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

Zatem $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$.

3.8. $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$

3.9. $obw = 7(3 + \sqrt{3})$ cm,
 $R = 7$ cm

3.10. $|AB| = 10$, $|AC| = 15$

3.11. Patrz s. 24.

3.12. bok: $4\sqrt{7}$ cm,
przekątna: $4\sqrt{13}$ cm,
kąty: ok. 79° i ok. 101°

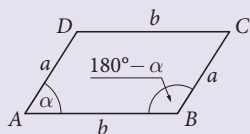
3.13. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

3.14. 6,2 cm

3.15. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

3.16. $7\sqrt{7}$

3.18.

Niech: $|BD| = d$, $|AC| = e$.

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) \end{cases}$$

 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, więc:

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \end{cases}$$

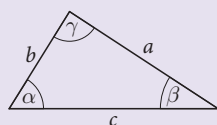
Dodajemy równania stronami.

$$d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2$$

 $d^2 + e^2$ – suma kwadratów długości przekątnych, $2a^2 + 2b^2$ – suma kwadratów długości wszystkich boków.

Zatem zachodzi równość, o której jest mowa w zadaniu.

3.19.



$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 2 : 3 : 4$$

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \text{ stąd } \frac{a}{c} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } a = \frac{c}{2}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}, \text{ stąd } \frac{b}{c} = \frac{3}{4}, \text{ czyli } b = \frac{3}{4}c$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{c^2}{4} + \frac{9}{16}c^2 - c^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{3}{4}c} = \frac{\frac{13}{16}c^2 - c^2}{\frac{3}{4}c^2} = \\ &= \frac{-\frac{3}{16}c^2}{\frac{3}{4}c^2} = -\frac{1}{4} < 0 \end{aligned}$$

Stąd $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$.

Zatem trójkąt jest rozwartokątny.

D * 3.18. Udowodnij, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

D * 3.19. Sinusy kątów pewnego trójkąta mają się do siebie jak 2 : 3 : 4. Udowodnij, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

D * 3.20. W trójkącie o kątach α, β, γ spełniona jest nierówność $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma < 0$. Wykaż, że $\cos \gamma < 0$.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 4, a kąt między nimi ma miarę 120° . Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

- A. $\sqrt{21}$ B. $\sqrt{61}$ C. $\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$

2. Trójkąt o bokach $\sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}$

- A. jest ostrokątny. C. jest rozwartokątny.
B. jest prostokątny. D. nie istnieje.

3. Wskaż wartość cosinusa kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o podstawie 4 cm i ramionach 5 cm.

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{17}{25}$ D. $\frac{2\sqrt{21}}{5}$

4. W trójkącie o bokach a, b, c kąt α leżący naprzeciwko boku a jest rozwarty. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $a^2 + b^2 > c^2$ B. $b^2 + c^2 > a^2$ C. $c^2 + a^2 > b^2$

5. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 2$, $|AC| = 4$. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów tego trójkąta.

6. Stosunek boków trójkąta wynosi 3 : 5 : 6. Wyznacz cosinus największego kąta w tym trójkącie.

7. Punkty K i L dzielą przekątną AC kwadratu $ABCD$ o boku a na trzy równe części. Oblicz długość boku rombu $BLDK$.

Prosto do matury

1. B
2. C
3. C
4. P, F, P
5. $\sphericalangle A = 23^\circ$, $\sphericalangle B = 49^\circ$, $\sphericalangle C = 108^\circ$
6. $-\frac{1}{15}$
7. $\frac{\sqrt{5}}{3}a$

3.20. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w rozwiązaniu zadania 3.19.

$$\text{Z twierdzenia cosinusów: } \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\text{Zatem } \cos \gamma < 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 < 0, \text{ czyli } a^2 + b^2 < c^2.$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów: } \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}.$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma \quad | : \sin^2 \gamma \quad (\sin \gamma \neq 0)$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1 \quad | \cdot c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2$$

$$\text{Zatem } \cos \gamma < 0.$$

4. Związki miarowe w wielokątach

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w wielokątach z użyciem trygonometrii

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Twierdzenie o dwusiecznej

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Założenie

CD jest dwusieczną kąta ACB .

Teza

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Dowód

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AD|}{|DB|}$$

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AC| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha}{|CB| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Zatem $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

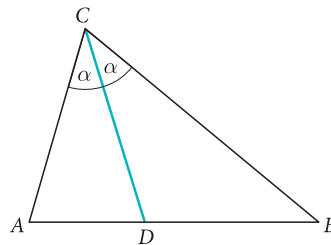
Koniec dowodu

Zachodzi też twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego, czyli przyległego do kąta wewnętrznego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wtedy twierdzenie to przyjmuje następującą postać:

Jeżeli prosta zawierająca dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta

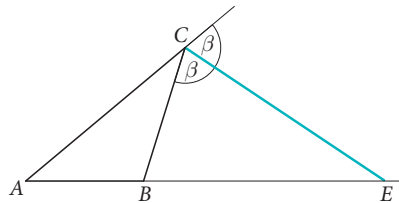
ABC przecina prostą AB w punkcie E , to $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.



← trójkąty ADC i DBC mają wspólną wysokość

← pole trójkąta jest równe $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$



ZZ i KPU

tematy 6.7 (klasa 1), 4.8 (klasa 2)

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

◀4.2. Boki trójkąta mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.

Odp.: $AB: 2\frac{18}{19}$ i $5\frac{1}{19}$, $BC: 2,8$ i $4,2$, $AC: 6,4$ i $5,6$

◀4.4. W trójkącie ABC dana jest suma długości boków: $|AB| + |AC| = 33$. Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A dzieli bok BC na odcinki o długościach $|BD| = 12$ i $|DC| = 10$. Oblicz długości boków AB i AC .

Odp.: $|AB| = 18$, $|AC| = 15$

Przykład 1 ◀ zad. 4.2

Boki trójkąta mają długości $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 4$. Obliczmy długości odcinków, na które dwusieczna AD dzieli bok BC .

Rozwiązanie

Oznaczmy $|BD| = x$, $|DC| = y$.

$$\frac{x}{y} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

← na mocy twierdzenia o dwusiecznej

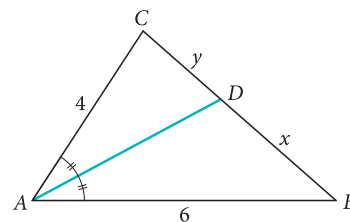
$$x + y = 5$$

← z warunków zadania

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{4} \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Odp.: $|BD| = 3$, $|DC| = 2$



Przykład 2 ◀ zad. 4.4

Obwód trójkąta ABC jest równy 40, a dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 6$ i $|DB| = 10$. Obliczmy długości boków trójkąta ABC .

Rozwiązanie

$$|AB| = |AD| + |DB| = 16$$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \leftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

Zatem:

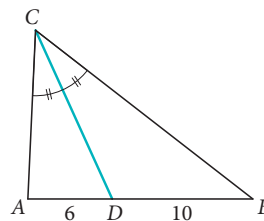
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{6}{10}, \text{ stąd } |AC| = \frac{3}{5}|CB|$$

$$16 + |CB| + \frac{3}{5}|CB| = 40 \quad \leftarrow \text{obwód trójkąta } ABC \text{ jest równy } 40$$

$$\frac{8}{5}|CB| = 24$$

$$|CB| = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15, \quad |AC| = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$$

Odp.: $|AB| = 16$, $|AC| = 9$, $|CB| = 15$



Wyprowadzimy teraz wzory łączące długości boków trójkąta i jego pole z promieniami okręgów: wpisanego w ten trójkąt i opisanego na nim.

Twierdzenie

Pole P trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu trójkąta i promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt:

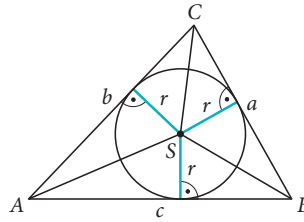
$$P = pr$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
 $2p$ oznacza obwód trójkąta,
 r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**Teza**

Pole P trójkąta jest równe $P = pr$.

Dowód

Wyznamy pole tego trójkąta.

$$P = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BCS} + P_{\triangle CAS}$$

$$P = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \quad \leftarrow r \text{ jest wysokością każdego z trójkątów: } ABS, BCS, CAS$$

$$P = \frac{1}{2}r(c + a + b)$$

$$P = pr$$

Koniec dowodu

Twierdzenie

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
 R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Teza

Pole P trójkąta jest równe $P = \frac{abc}{4R}$.

Dowód

Niech α oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości a . Mamy:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\leftarrow \text{z twierdzenia sinusów } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Koniec dowodu

Podamy jeszcze wzór (jego wyprowadzenie pominiemy), za pomocą którego można obliczyć pole trójkąta, gdy dane są tylko długości jego boków.

Twierdzenie**Wzór Herona**

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Zauważmy, że w podanym wzorze niezależnie od rodzaju trójkąta wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc spełniają nierówność trójkąta:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a,$$

a stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$p - c > 0, \quad p - b > 0, \quad p - a > 0.$$

Przykład 3 zad. 4.8

Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 5 i 7. Obliczmy promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

Niech p oznacza połowę obwodu, a P – pole tego trójkąta. Wówczas:

$$p = 9, \quad P = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \quad r = \frac{P}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Odp.: } R = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \quad r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

◀ 4.8. Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$\text{Odp.: } R = \frac{8}{7}\sqrt{7} \text{ cm}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$$

D Przykład 4 ◀ zad. 4.15

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Wykażemy, że zawarty w trójkącie odcinek tej dwusiecznej ma długość $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Dowód

$$P_{BDC} = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{ax\sqrt{2}}{4}$$

$$P_{ADC} = \frac{1}{2}b \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów BDC i ADC . Zatem:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ax\sqrt{2}}{4} + \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

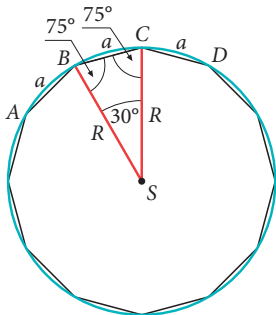
$$2ab = x\sqrt{2}(a+b)$$

$$x\sqrt{2} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ stąd } x = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$$

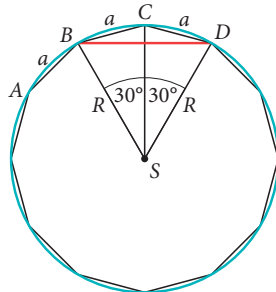
Koniec dowodu**Przykład 5** ◀ zad. 4.19

Dany jest dwunastokąt foremny o boku a . Obliczmy

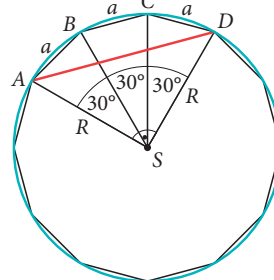
- promień okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki tego dwunastokąta.
- długość przekątnej BD .
- długość przekątnej AD .

Rozwiązanie

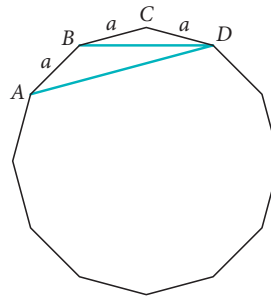
Rys. 1



Rys. 2



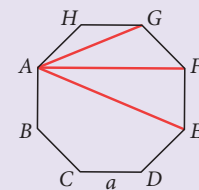
Rys. 3



◀4.15. Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ i $\angle ABC = 56^\circ$. Oblicz długość dwusiecznej BD w tym trójkącie. Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Odp.: 4,71

◀4.19. Bok ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ ma długość a (zob. rysunek).



Wyznacz długość

- przekątnej AG .
- przekątnej AF .
- przekątnej AE .

Odp.: a) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$

b) $a(1+\sqrt{2})$

c) $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

- a) Zauważmy, że środek S okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki dwunastokąta jest środkiem symetrii tego wielokąta. Niech R będzie promieniem tego okręgu (rys. 1).

Dwunastokąt ma wszystkie boki tej samej długości, zatem kąt BSC ma miarę $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Trójkąt BCS jest równoramienny o kącie przy podstawie 75° , więc:

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \cos 75^\circ$$

$$R = \frac{a}{2\cos 75^\circ} \quad \leftarrow \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$R = \frac{2a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $R = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$

- b) Trójkąty BCS i CDS są przystające, więc trójkąt BSD jest równoboczny (rys. 2) i $|BD| = R$, czyli:

$$|BD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $|BD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$

- c) Trójkąt ASD jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, czyli jest połową kwadratu (rys. 3). Zatem:

$$|AD| = R\sqrt{2}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{3})$$

Odp.: $|AD| = a(1 + \sqrt{3})$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. $5\frac{5}{7}$, $4\frac{2}{7}$

4.2. AB : $2\frac{18}{19}$ i $5\frac{1}{19}$,
 BC : 2,8 i 4,2,
 AC : 6,4 i 5,6

- 4.1.** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną.

- 4.2.** Boki trójkąta mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.

4.3. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a ramiona po 12 cm. Dwieścienne kątów przy podstawie przecinają ramiona w punktach M i N . Oblicz długość odcinka MN .

4.4. W trójkącie ABC dana jest suma długości boków: $|AB| + |AC| = 33$. Dwieścienne kąta wewnętrznego przy wierzchołku A dzieli bok BC na odcinki o długościach $|BD| = 12$ i $|DC| = 10$. Oblicz długości boków AB i AC .

4.5. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 2a$, $|BC| = a$ i $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Dwieścienne kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Wyznacz długość odcinka AD .

4.6. Oblicz pole trójkąta o bokach podanej długości.

- a) 4, 6, 8 b) 8, 11, 13 c) 6, 10, 11 d) 4, 6, 7

4.7. Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.8. Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.9. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 32° . Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.10. Na boku BC równobocznego trójkąta ABC wybrano taki punkt D , że stosunek pola trójkąta ADB do pola trójkąta ADC wynosi 1 : 2. Wyznacz tangens kąta DAB .

4.11. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu $\sqrt{3}$ jest równa 120° . Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

4.12. Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę 60° . Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.13. Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 5 cm. Jego pole jest równe 8 cm^2 . Oblicz długość x trzeciego boku trójkąta oraz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.14. W trójkącie prostokątnym dwieścienne kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku 2 : 3. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

4.3. 4 cm

4.4. $|AB| = 18$, $|AC| = 15$

4.5. $\frac{2\sqrt{7}}{3}a$

4.6. a) $3\sqrt{15}$ b) $8\sqrt{30}$
c) $\frac{45}{4}\sqrt{7}$ d) $\frac{3}{4}\sqrt{255}$

4.7. $3\frac{1}{4}$

4.8. $R = \frac{8}{7}\sqrt{7} \text{ cm}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$

4.9. 2,50

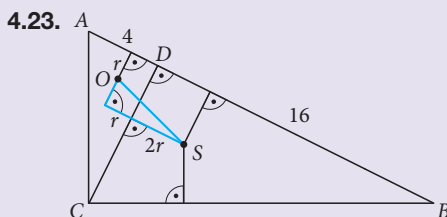
4.10. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

4.11. $3\pi(7 - 4\sqrt{3})$

4.12. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

4.13. $x = \sqrt{17} \text{ cm}$,
 $r = \frac{9 - \sqrt{17}}{4} \text{ cm}$ lub $x = \sqrt{65} \text{ cm}$,
 $r = (9 - \sqrt{65}) \text{ cm}$

4.14. $\frac{9(3 + \sqrt{5})}{8}$



$$r = \frac{P}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8}{\frac{1}{2}(4 + 8 + 4\sqrt{5})} = \frac{16}{2(3 + \sqrt{5})} = 2(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$$

$\triangle CDB \sim \triangle ADC$ w skali $k = 2$, więc promień okręgu wpisanego w trójkąt CDB jest równy $2r = 4(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$.

$$|OS| = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10} = 2\sqrt{10}(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$$

Odp.: promienie: $2(3 - \sqrt{5}) \text{ cm}$, $4(3 - \sqrt{5}) \text{ cm}$, odległość między środkami: $2\sqrt{10}(3 - \sqrt{5}) \text{ cm}$

$$|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} = \sqrt{4 \cdot 16} = 8 \text{ [cm]}$$

$$|AC| = \sqrt{|CD|^2 + |AD|^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$$|BC| = \sqrt{|CD|^2 + |BD|^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC

O, S – środki okręgów wpisanych w trójkąty ADC i CDB

4.15. 4,71

4.16. $P = \frac{\sqrt{23}}{2} \text{ cm}^2, \frac{6(7\sqrt{3}+3)}{23}$

4.17. $2\pi(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

4.18. a) $r = \frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ cm},$

$R = \frac{16\sqrt{15}}{15} \text{ cm} \quad \text{b) } \frac{2}{5}$

4.19. a) $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b) $a(1 + \sqrt{2})$

c) $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

4.20. Każdy kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę 108° ($\frac{3}{5} \cdot 180^\circ$).

$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$ (bkb)

Stąd $\angle BAC = \angle BCA = \angle CBD = \angle CDB = 36^\circ$ ($\frac{180^\circ - 108^\circ}{2}$).

Zatem w czworokącie $APDE$:

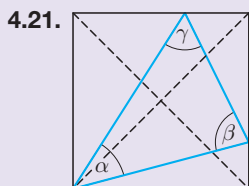
$$\angle EAP = \angle EDP = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

Czworokąt $APDE$ jest więc deltoidem, ale:

$$\angle APD = 360^\circ - 108^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 108^\circ$$

Stąd $\angle APD = \angle AED = 108^\circ$.

Czworokąt $APDE$ jest deltoidem, którego przeciwległe kąty mają równe miary, zatem jest rombem.



Każdy bok trójkąta ma długość nie większą niż długość przekątnej kwadratu, czyli $\sqrt{2}$.

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma =$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

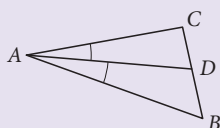
$$\frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1,$$

$$\frac{1}{2}bc \leq 1, \frac{1}{2}ac \leq 1$$

Zatem $P_{\triangle} \leq \sin \alpha,$

$$P_{\triangle} \leq \sin \beta, P_{\triangle} \leq \sin \gamma.$$

4.22.



$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = \angle DAC + \angle ACD = \angle DAB + \angle ACD > \angle DAB$
 $\angle ADB > \angle DAB$, zatem
 $|AB| > |BD|$ (naprzeciwko większego kąta leży większy bok).

4.15. Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ i $\angle ABC = 56^\circ$. Oblicz długość dwusiecznej BD w tym trójkącie. Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

4.16. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 4 \text{ cm}$, $|BC| = \sqrt{3} \text{ cm}$, $|AC| = 3 \text{ cm}$. Oblicz pole trójkąta ABC oraz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

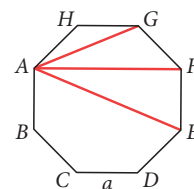
4.17. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy mniejszy od drugiego. Długość okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $2\pi \text{ cm}$. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie.

4.18. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 4 \text{ cm}$, $|AC| = |BC| = 8 \text{ cm}$.

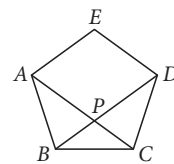
- a) Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.
 b) Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC .

4.19. Bok ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ ma długość a (zob. rysunek). Wyznacz długość

- a) przekątnej AG .
 b) przekątnej AF .
 c) przekątnej AE .



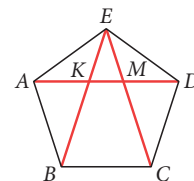
4.20. W pięciokącie foremnym $ABCDE$ punkt P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD , jak na rysunku. Udowodnij, że czworokąt $APDE$ jest rombem.



* 4.21. W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

* 4.22. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną AD . Wykaż, że $|BD| < |AB|$.

* 4.23. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD dzieli przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach 4 cm i 16 cm. Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ADC i CDB oraz odległość między środkami tych okręgów.



* 4.24. W pięciokącie foremnym $ABCDE$ o boku 1 przekątne EB i EC przecinają przekątną AD odpowiednio w punktach K i M , jak na rysunku. Wykaż, że $|KM| = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

4.23. Patrz s. 33.

4.24. Kąt wewnętrzny pięciokąta ma miarę 108° .

$$\angle AEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ, \angle KEM = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

Zatem EK jest dwusieczną kąta AEM .

$\angle AEM = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$, $\angle AME = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$, więc $|AM| = |AE| = 1$. Przyjmujemy: $|KM| = x$, $x \in (0; 1)$. Wtedy $|AK| = 1 - x$ i $|EM| = |AK| = 1 - x$.

Z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie AEM :

$$\frac{|AK|}{|KM|} = \frac{|AE|}{|EM|} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1-2x+x^2 = x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$

$$\text{Stąd } x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin (0; 1).$$

$$\text{Zatem } |KM| = x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

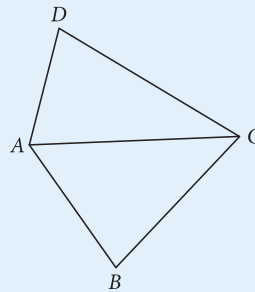
- * 4.25. Dwa boki trójkąta o polu P mają długości a i b . Wyznacz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Prosto do matury

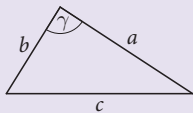


W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

- Wskaż promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm.
A. 3 cm B. 2 cm C. 4 cm D. 1 cm
- Ile wynosi pole trójkąta o bokach 4, 5, 7?
A. $4\sqrt{6}$ B. $6\sqrt{6}$ C. 4 D. $3\sqrt{6}$
- W trójkącie ABC o boku $|AC| = 18$ dwusieczna CD dzieli bok AB w stosunku $|BD| : |DA| = 1 : 6$. Wskaż długość boku CB .
A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. 3 D. 5
- W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy mniejszy od drugiego kąta ostrego.
B. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy krótszy od drugiego.
C. Stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $1 + \sqrt{3}$.
- W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$, $|DA| = 4$, $|AC| = 7$. Oblicz pole tego czworokąta.
- Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 1 + \sqrt{3}$ i $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię tego trójkąta.
- Boki prostokąta $ABCD$ mają długości $|AB| = 20$, $|BC| = 25$. Oblicz odległość między środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i CDA .



4.25.



$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \text{ stąd } \sin \gamma = \frac{2P}{ab}.$$

Z jedynki trygonometrycznej:

$$\cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \gamma = 1 - \frac{4P^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2 - 4P^2}{a^2b^2}$$

$$\text{Stąd } \cos \gamma = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}{ab} \text{ lub } \cos \gamma = \frac{-\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}{ab}.$$

Z twierdzenia cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

$$\text{Zatem } c^2 = a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2} \text{ lub } c^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}.$$

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$ i obliczamy R .

$$R = \frac{abc}{4P}, \text{ czyli } R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P} \text{ lub } R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P}.$$

Prosto do matury

1. B

2. A

3. C

4. P, F, P

5. $6(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

6. 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. $5\sqrt{123 - 18\sqrt{41}}$

5. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. B
 2. D
 3. B
 4. A
 5. D
 6. C
 7. B
 8. B
 9. B
1. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3\sqrt{7}$, $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
A. $3\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{7}$ C. $1,5\sqrt{7}$ D. 6
 2. Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 17. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 78° . Do którego przedziału należy długość boku leżącego naprzeciw tego kąta?
A. $\langle 30; 31 \rangle$ B. $\langle 31; 32 \rangle$ C. $\langle 32; 33 \rangle$ D. $\langle 33; 34 \rangle$
 3. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, $\sphericalangle CAB = 75^\circ$. Zatem
A. $|AC| = 8\sqrt{3}$. B. $|AC| = 8\sqrt{6}$. C. $|AC| = 12\sqrt{6}$. D. $|AC| = 24\sqrt{3}$.
 4. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|AC| = 6\sqrt{2}$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$. Wskaż wartość $\sin \sphericalangle ACB$.
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 5. Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 8, a kąt między nimi ma miarę 135° . Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.
A. $\sqrt{73 - 24\sqrt{2}}$ B. $\sqrt{73 - 12\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{73 + 12\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{73 + 24\sqrt{2}}$
 6. Trójkąt o bokach $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$
A. jest ostrokątny. C. jest rozwartokątny.
B. jest prostokątny. D. nie istnieje.
 7. Boki trójkąta mają długości $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ i 3. Wskaż wartość cosinusa największego kąta w tym trójkącie.
A. $\frac{5}{6\sqrt{3}}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{21}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{13\sqrt{7}}{42}$
 8. Boki trójkąta mają długości 7, 12 i 13. Ile wynosi pole tego trójkąta?
A. $12\sqrt{3}$ B. $24\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{273}$ D. $8\sqrt{273}$
 9. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 12 i 16. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Multiteka

- Jak brzmi sinusoida?
- Odległość Ziemi od Słońca i Księżyca

dlanauczyciela.pl | Klasówka 1

Generator
testów i sprawdzianów

10. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 15$, $|AC| = 12$, $|BC| = 18$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D . Wskaż długość odcinka CD .

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

W zadaniach 11–15 oceń prawdziwość podanych zdań.

11. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|AC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Wynika stąd, że

- A. $\sin \sphericalangle ACB = \frac{5}{8}$.
 B. trójkąt ABC jest rozwartokątny.
 C. są dwa trójkąty spełniające warunki zadania.

12. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3$, $|AC| = 5$, $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Wynika stąd, że

- A. są dwa trójkąty spełniające warunki zadania.
 B. trójkąt ABC jest rozwartokątny.
 C. dane są błędne, taki trójkąt nie istnieje.

13. Boki trójkąta mają się do siebie jak $3 : 5 : 6$. Wynika stąd, że

- A. trójkąt ten jest rozwartokątny.
 B. cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy $-\frac{1}{15}$.
 C. cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy $\frac{13}{15}$.

14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Zatem

- A. pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ac$.
 B. promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy b .
 C. $\sin \sphericalangle CAB = \frac{a}{2b}$.

15. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{6}$, $|AC| = \sqrt{7}$. Zatem

- A. $\cos \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{30}}{15}$. B. $\cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{\sqrt{35}}$. C. $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

16. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $\sphericalangle ABC = 35^\circ$, $\sphericalangle BCA = 74^\circ$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

17. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 20, $\sphericalangle CAB = 40^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 22^\circ$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do 0,1.

18. Bok BC trójkąta ABC ma długość $16\sqrt{3}$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 16. Wyznacz miarę $\sphericalangle CAB$.

10. B

11. P, P, P

12. F, F, P

13. P, P, P

14. F, P, P

15. P, P, P

16. 15,5

17. 76,0

18. 60° lub 120°

19. $2\sqrt{10}$

20. $|AC| = \sqrt{97}$, $|BD| = \sqrt{273}$

21. Przyjmujemy:

 α, β, γ – kąty trójkąta,

$$\sin \alpha = \frac{1}{7}, \sin \beta = \frac{2}{7}, \sin \gamma = \frac{5}{7},$$

 a, b, c – długości boków leżących naprzeciwko kątów α, β, γ .

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{1}{\frac{1}{7}}, \text{ stąd } b = 2a$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{1}{\frac{1}{7}}, \text{ stąd } c = 5a$$

Nie istnieje trójkąt o bokach długości: $a, 2a$ i $5a$, bo $a + 2a < 5a$, co jest sprzeczne z nierównością trójkąta.

22. a) $\sphericalangle CAD = 41^\circ$, $\sphericalangle DAB = 19^\circ$
b) 1

26. Oznaczamy:

 α – kąt leżący naprzeciwko boku $2a$, R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{16a^2 + 9a^2 - 4a^2}{2 \cdot 3a \cdot 4a} = \frac{21a^2}{24a^2} = \frac{7}{8}$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów } \frac{2a}{\sin \alpha} = 2R.$$

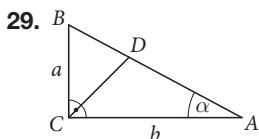
$$\text{Stąd } R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8a}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}a.$$

27. a) 120°

b) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

c) $\sqrt{6}$

28. $\frac{6\sqrt{7}}{5}$, $\frac{9\sqrt{7}}{5}$



Z twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{a}{b} = \frac{|BD|}{|AD|}$$

$$\text{Stąd } \frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{12 - 9} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

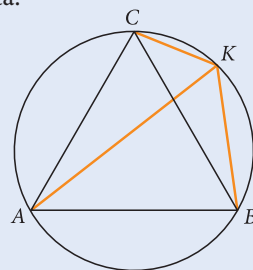
$$\frac{a}{b} = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ stąd } \alpha = 30^\circ.$$

Odp.: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

19. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 7$, $|BC| = 9$, $|CA| = 10$. Wyznacz długość środkowej BD .20. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = 11$, $|BC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.21. Wykaż, że nie istnieje trójkąt, w którym sinusy kątów są równe $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ i $\frac{5}{7}$.22. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicza) miary kątów CAD i DAB z dokładnością do 1° .b) stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD .23. W trójkącie rozwartokątnym ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku B dane są $|AB| = 4\sqrt{2}$ i $|AC| = 4(1 + \sqrt{3})$. Poprowadzono wysokość BD i otrzymano trójkąt równoramienny ABD . Wyznacz kąty trójkąta ABC oraz pole P koła opisanego na tym trójkącie.24. W trójkącie równoramiennym ABC miara kąta BAC jest równa 30° , a podstawa AB ma długość 8. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

* 25. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku BC obrano punkt K , jak na rysunku obok. Wykaż, że $|CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|$.



26. Boki trójkąta mają długości $2a, 3a, 4a$. Wykaż, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{8\sqrt{15}}{15}a$.

27. Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

c) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

28. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Wyznacz długości odcinków, na które dwusieczna kąta ABC dzieli bok CA .

* 29. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach $2 + \sqrt{3}$ i $3 + 2\sqrt{3}$. Wyznacz miary kątów trójkąta.

23. $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle B = 105^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$, $P = 32\pi$

24. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

25. Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku:

$$\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC = 60^\circ, \sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$$

$$\text{Zatem } \cos \sphericalangle AKC = \cos \sphericalangle AKB = \frac{1}{2}.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ACK :

$$|AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 - 2|CK| \cdot |AK| \cdot \frac{1}{2}, \quad |AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 - |CK| \cdot |AK|$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABK i $|AB| = |AC|$:

$$|AC|^2 = |KB|^2 + |AK|^2 - |KB| \cdot |KA|$$

Porównujemy powyższe równości i otrzymujemy tezę:

$$|CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|$$