

# Planimetria

## 3

### Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- odróżnia figury wypukłe od figur niewypukłych,
- stosuje w zadaniach:
  - twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie,
  - własności kątów w trójkącie i wielokącie,
  - nierówność trójkąta,
  - twierdzenie Pitagorasa,
  - własność symetralnej odcinka,
  - własność dwusiecznej kąta;
- wskazuje figury przystające,
- dowodzi przystawania dwóch trójkątów na podstawie odpowiedniej cechy,
- oblicza pola pierścieni kołowych.

### Po tym dziale uczeń:

- wykonuje elementarne konstrukcje geometryczne, np. symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, prostej równoległej (prostopadłej) do danej przechodzącej przez dany punkt,
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów oraz prostej i okręgu,
- oblicza pola wycinków kołowych,
- korzysta z własności:
  - stycznej do okręgu, trójkątów podobnych, środkowych trójkąta,
  - okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie;
- stosuje w zadaniach twierdzenia:
  - o zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym,
  - o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku,
  - o kącie wpisanym opartym na średnicy,
  - o odcinkach stycznych,
  - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa,
  - Talesa i twierdzenie do niego odwrotne.

**Uwagi metodyczne**

Uczniowie zajmowali się geometrią wielokrotnie w poprzednich latach nauki i na ogół swobodnie operują związanymi z nią pojęciami. Jednakże zagadnienia, które uczniowie będą obecnie poznawać, są dosyć trudne. Rozpoczynamy od przypomnienia wiadomości o nierówności trójkąta, twierdzeniu Pitagorasa i własności symetralnej odcinka oraz dwusiecznej kąta.

# 1. Wstęp do planimetrii

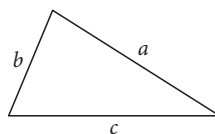
**Umiejętności:**

- korzystanie z nierówności trójkąta
- korzystanie z twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do niego
- korzystanie z własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta
- wykonywanie podstawowych konstrukcji geometrycznych

**Nierówność trójkąta**

Z trzech odcinków o długościach  $a, b, c$  można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy te długości spełniają **nierówność trójkąta**, czyli suma dowolnych dwóch z nich jest większa od trzeciej:

$$\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a \\ a + c > b \end{cases}$$



Ten układ nierówności można zapisać krócej.

Z każdej nierówności wyznaczamy jedną zmienną, np.  $c$ :

$$\begin{cases} c < a + b \\ c > a - b \\ c > -a + b \end{cases} \quad \leftarrow \text{ostatnie dwie nierówności oznaczają, że } c > |a - b|$$

Czyli dany układ nierówności można zastąpić nierównością podwójną:

$$|a - b| < c < a + b$$

Podsumujmy: z trzech odcinków o długościach  $a, b$  i  $c$  można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy  $|a - b| < c < a + b$ .

Zatem dla dowolnych różnych punktów  $A, B, C$  na płaszczyźnie prawdziwa jest nierówność:

$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

przy czym punkt  $B$  należy do odcinka  $AC$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|AB| + |BC| = |AC|$$



Przypominamy: używamy w podręczniku zwrotów „bok  $a$  trójkąta” zamiast „bok trójkąta o długości  $a$ ”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, „trójkąty mają równe przeciwprostokątne” zamiast „trójkąty mają przeciwprostokątne równej długości” itp.

**ZZ i KPU**

temat 4.1

**Multiteka**

- Konstrukcja symetralnej odcinka
- Konstrukcja dwusiecznej kąta
- Konstrukcja kąta o mierze  $30^\circ$
- Grety i dowodzenie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

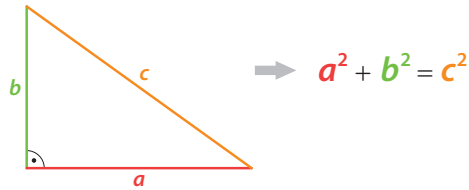


## Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego

### Twierdzenie

#### Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



### Wnioski

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych  $a$ ,  $b$  i przeciwprostokątnej  $c$  (zob. rysunek powyżej):

- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ,  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ,
- najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna:  $c > a$  i  $c > b$ .

Dzięki twierdzeniu Pitagorasa znamy zależność między długościami boków trójkąta prostokątnego. Okazuje się, że jeśli w pewnym trójkącie zachodzi ta zależność, tzn. gdy długości boków  $a$ ,  $b$ ,  $c$  spełniają warunek  $a^2 + b^2 = c^2$ , to jest to trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości  $c$ .

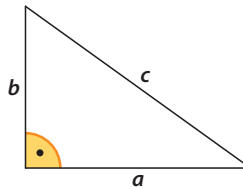
### Twierdzenie

#### Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to ten trójkąt jest prostokątny.

Dowód tego twierdzenia poznacie podczas dalszej nauki matematyki.

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$$



◀ 1.4. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

a) 8, 15, 17

b)  $2\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{30}$ ,  $3\sqrt{2}$

c)  $3\sqrt{3}$ , 8, 2

d) 7, 7,  $7\sqrt{2}$

e) 5,  $2\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{15}$

f)  $2 + \sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2}$

Odp.: a) tak

b) tak

c) nie

d) tak

e) nie

f) tak

### Przykład 1 ◀ zad. 1.4

Sprawdźmy, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

a) 10, 24, 26

b) 7,  $\sqrt{53}$ , 2

c) 6, 8, 9

d) 3, 4, 7

Rozwiązanie

$$\text{a) } 26^2 = 676, 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$$

$$\text{b) } 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53 = (\sqrt{53})^2$$

$$\text{c) } 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \neq 9^2 = 81$$

d)  $3 + 4 = 7$ , zatem z tych odcinków nie można zbudować trójkąta.

Odp.: a), b) – tak, c), d) – nie

## Symetralna odcinka i jej własności

### Definicja

**Symetralna** odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.

Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest jego symetralna, a drugą – prosta, w której ten odcinek się zawiera.

### Twierdzenie

Jeżeli punkt  $P$  leży na symetralnej odcinka  $AB$ , to jego odległości od punktów  $A$  i  $B$  są jednakowe:

$$|AP| = |PB|$$

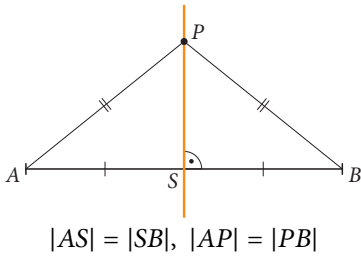
I odwrotnie:

Jeżeli odległości punktu  $P$  od punktów  $A$  i  $B$  są jednakowe, to punkt  $P$  leży na symetralnej odcinka  $AB$ .

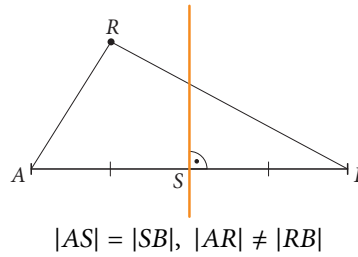
### Wniosek

Jeżeli odległości punktu  $R$  od końców odcinka  $AB$  są różne, to punkt  $R$  nie leży na symetralnej odcinka  $AB$ .

Punkt  $P$  leży na symetralnej odcinka  $AB$ .



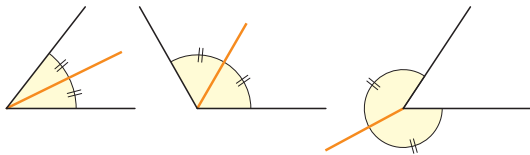
Punkt  $R$  nie leży na symetralnej odcinka  $AB$ .



## Dwusieczna kąta i jej własności

### Definicja

**Dwusieczna** kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca ten kąt na dwa kąty przystające.



- Kąty, które mają równe miary, nazywamy kątami równymi.
- Równe kąty, podobnie jak równe odcinki, zaznaczamy w ten sam sposób.

Każdy kąt ma jedną oś symetrii. Dwusieczna kąta zawiera się w jego osi symetrii.

### Twierdzenie

Jeżeli punkt  $P$  leży na dwusiecznej kąta o mierze mniejszej od  $180^\circ$ , to jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta.

I odwrotnie:

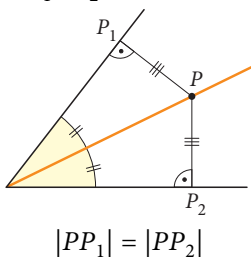
Jeżeli punkt  $P$  położony wewnątrz kąta o mierze mniejszej od  $180^\circ$  jest jednakowo oddalony od jego ramion, to  $P$  leży na dwusiecznej tego kąta.

### Wniosek

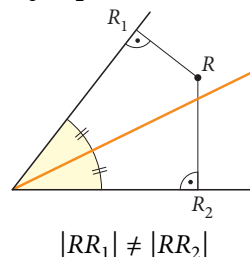
Jeżeli punkt  $R$  jest położony wewnątrz kąta o mierze mniejszej od  $180^\circ$  i jego odległości od ramion kąta są różne, to  $R$  nie leży na dwusiecznej tego kąta.



Punkt  $P$  leży na dwusiecznej kąta  $P_1OP_2$ .



Punkt  $R$  nie leży na dwusiecznej kąta  $R_1OR_2$ .



## Konstrukcje geometryczne

Zadanie konstrukcyjne polega na zbudowaniu figury o zadanych własnościach.

Do wykonania konstrukcji metodą klasyczną używamy tylko dwóch przyrządów:

- linijki bez podziałki, która służy do wykreślenia linii prostej (korzystamy z własności: przez dwa punkty płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna prosta),
- cyrkla – do odmierzania (odkładania) odcinków równych danemu odcinkowi (korzystamy z własności: punkty płaszczyzny położone w danej odległości  $r$  od danego punktu  $S$  leżą na okręgu o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$ ).

W szkole podstawowej poznaliśmy jedną konstrukcję: trójkąta o trzech danych bokach. Teraz przedstawimy dwie kolejne: symetralnej danego odcinka oraz dwusiecznej danego kąta. Ich znajomość pozwala na rozwiązywanie różnorodnych zadań.

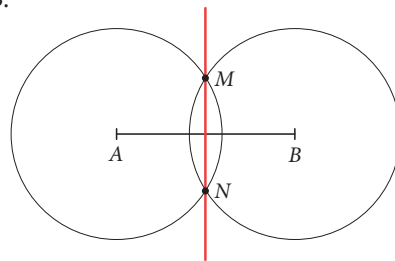
◀1.21. Dany odcinek podziel konstrukcyjnie na cztery równe części.

### Przykład 2 ◀ zad. 1.21

Skonstruujemy symetralną danego odcinka  $AB$ .

#### Analiza

Symetralna jest prostą. Zatem do jej wykreślenia potrzebne są dwa różne punkty. Wiemy, że do symetralnej odcinka należą wyłącznie punkty równo oddalone od końców tego odcinka. Najprostszą konstrukcję pokazujemy na rysunku.



#### Opis konstrukcji

| Wykonywana czynność                                                     | Otrzymana figura                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Z punktów $A$ i $B$ zataczamy okręgi o promieniu $r > 0,5 \cdot  AB $ . | punkty przecięcia okręgów – oznaczone na rysunku literami $M$ i $N$ |
| Prowadzimy prostą $MN$ .                                                | prosta $MN$ – szukana symetralna                                    |

**Dowód poprawności konstrukcji**

$$|AM| = |BM| \quad \leftarrow \text{równe promienie zataczanych okręgów}$$

Zatem  $M$  należy do symetralnej odcinka  $AB$ .

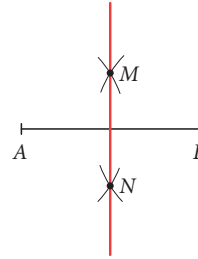
$$|AN| = |BN| \quad \leftarrow \text{równe promienie zataczanych okręgów}$$

Zatem  $N$  należy do symetralnej odcinka  $AB$ .

**Koniec dowodu**

Zauważmy, że rozwartość cyrkla (czyli  $r$ ) musi spełniać warunek  $r > 0,5 \cdot |AB|$ , aby wykreślane okręgi się przecięły. Przy kreśleniu symetralnej nie będziemy w przyszłości rysować pełnych okręgów – do wyznaczenia potrzebnych punktów wystarczy poprowadzenie odpowiednich łuków. Zatem konstrukcja będzie wyglądać jak na rysunku obok.

Twierdzenie o symetralnej gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania zadania.



Konstrukcja symetralnej odcinka umożliwia rozwiązanie kolejnych zadań konstrukcyjnych, takich jak np.:

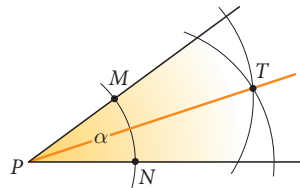
- podział odcinka na połowy,
  - konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej w punkcie należącym do niej,
  - konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej z punktu do niej nienależącego.
- W takich sytuacjach nie rozpisujemy konstrukcji symetralnej na poszczególne etapy, tylko piszemy krótko: poprowadzimy symetralną odcinka.

**Przykład 3** ◀ zad. 1.24

Skonstruujemy dwusieczną danego kąta  $\alpha$  o mierze mniejszej od  $180^\circ$ .

**Analiza**

Szukana dwusieczna jest półprostą o początku w wierzchołku kąta. Zatem do jej wykreślenia potrzebny jest jeszcze jeden punkt. Najprostszą konstrukcję pokazujemy na rysunku.

**Opis konstrukcji**

| Wykonywana czynność                                                                         | Otrzymana figura                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Z wierzchołka $P$ kąta $\alpha$ odmierzamy na obu jego ramionach równe odcinki.             | punkty $M$ i $N$                                  |
| Zataczamy łuki okręgów $o(M, r)$ i $o(N, r)$ tak, by przecięły się wewnątrz kąta $\alpha$ . | punkt $T$                                         |
| Prowadzimy półprostą $PT$ .                                                                 | półprosta $PT$ – szukana dwusieczna kąta $\alpha$ |

◀ 1.24. Skonstruuj kąt o podanej mierze.

a)  $45^\circ$

b)  $22,5^\circ$

## Dowód poprawności konstrukcji

|                                      |                                                          |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $ PM  =  PN $                        | ← odłożone równe odcinki                                 |
| $ MT  =  NT $                        | ← równe promienie zataczanych okręgów                    |
| $\triangle PMT \equiv \triangle PNT$ | ← cecha bbb przystawania trójkątów ( $PT$ – wspólny bok) |

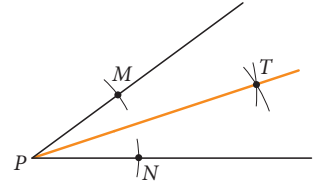
- Okrąg o środku  $A$  i promieniu  $r$  oznaczamy  $o(A, r)$ .
- Zamiast pisać „kąt  $ABC$  o mierze  $\alpha$ ” używamy też formy „kąt  $ABC$  równy  $\alpha$ ” lub „ $\sphericalangle ABC = \alpha$ ”.

Zatem  $\sphericalangle MPT = \sphericalangle NPT$ , czyli punkt  $T$  należy do dwusiecznej kąta  $\alpha$ .

## Koniec dowodu

Obok przedstawiamy rysunek konstrukcji w wersji uproszczonej.

Twierdzenie o dwusiecznej gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania zadania.



## Przykład 4

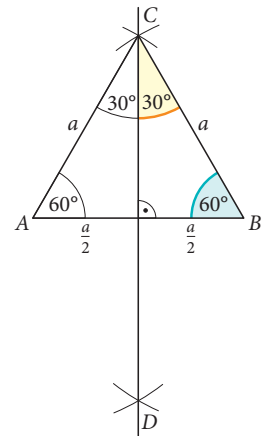
Omówimy jeden ze sposobów konstrukcyjnego wyznaczenia kątów o mierze  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .

## Rozwiązanie

Oto etapy konstrukcji.

- Na płaszczyźnie rysujemy odcinek  $AB$  o pewnej długości  $a$ .
- Prowadzimy okręgi  $o(A, a)$  i  $o(B, a)$  i otrzymujemy punkty ich przecięcia:  $C$  i  $D$ .
- Prowadzimy prostą  $CD$ , będącą symetralną odcinka  $AB$ .
- Łączymy odcinkami punkt  $C$  z punktami  $A$  oraz  $B$  – otrzymujemy trójkąt równoboczny  $ABC$ .

Każdy z kątów trójkąta równobocznego ma miarę równą  $60^\circ$ . Prosta  $CD$  jest osią symetrii tego trójkąta, zatem kąt  $BCD$ , podobnie jak kąt  $ACD$ , ma miarę  $30^\circ$ .



## Zadania

## Odpowiedzi i rozwiązania

- 1.1. a) tak  
b) nie

1.2. Punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  są współliniowe, punkt  $A$  leży między punktami  $B$  i  $C$ .

1.1. Czy można zbudować trójkąt o bokach podanej długości?

- a) 3,1 cm, 4,5 cm, 2,7 cm                      b) 2,1 cm, 5,7 cm, 3,3 cm

1.2. Dane są długości odcinków:  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 17$ ,  $|CA| = 11$ . Zbadaj, a następnie zilustruj wzajemne położenie punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

**1.3.** Ile jest trójkątów o bokach równych 1 cm, 3 cm, 4 cm lub 7 cm? Rozważ wszystkie możliwości.

**1.4.** Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt prostokątny.

- a) 8, 15, 17                      c)  $3\sqrt{3}$ , 8, 2                      e) 5,  $2\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{15}$   
 b)  $2\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{30}$ ,  $3\sqrt{2}$                       d) 7, 7,  $7\sqrt{2}$                       f)  $2 + \sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2}$

D

**1.5.** Przekątne równoległoboku, którego jeden z boków ma długość 10 cm, są równe 12 cm i 16 cm. Wykaż, że ten równoległobok jest rombem.

**1.6.** Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 13 i jednej przyprostokątnej długości 5.

**1.7.** Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 29 i jednej przyprostokątnej długości 21.

**1.8.** Oblicz długość boku

- a) kwadratu o przekątnej długości 3.                      b) trójkąta równobocznego o polu  $9\sqrt{3}$ .

**1.9.** Przekątne rombu mają długości 14 i 48. Oblicz obwód tego rombu.

**1.10.** Trójkąt równoramienny o podstawie długości 40 ma ramię długości  $m$ . Jakie wartości może przyjmować  $m$ ?

**1.11.** Trójkąt równoramienny o ramieniu długości 20 ma podstawę długości  $m$ . Jakie wartości może przyjmować  $m$ ?

**1.12.** Podaj przykłady wielokątów, w których symetralna jednego z boków zawiera dwusieczną jednego z kątów wewnętrznych.

**1.13.** Ile osi symetrii ma podana figura?

- a) trójkąt równoboczny  
 b) trójkąt równoramienny i nierównoboczny  
 c) kwadrat  
 d) prostokąt niebędący kwadratem  
 e) romb niebędący kwadratem  
 f) trapez równoramienny niebędący równoległobokiem  
 g) sześciokąt foremny  
 h) pięciokąt foremny

**1.14.** Które figury spośród wymienionych w zadaniu 1.13 mają środek symetrii?

**1.3.** 12 (4 równoboczne, 8 równoramiennych)

**1.4.** a) tak

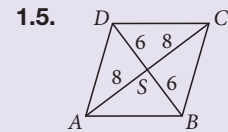
b) tak

c) nie

d) tak

e) nie

f) tak



Dane:  $|BS| = |DS| = 6$  cm,  
 $AB \parallel CD$ ,  $|AS| = |CS| = 8$  cm,  
 $BC \parallel AD$ ,  $|BC| = 10$  cm.

Ponieważ  $|BS|^2 + |CS|^2 = |BC|^2$ , to  $\angle BSC = 90^\circ$  (na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa).

Równoległobok o prostopadłych przekątnych jest rombem.

**1.6.** 30

**1.7.** 210

**1.8.** a)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$     b) 6

**1.9.** 100

**1.10.**  $m \in (20; \infty)$

**1.11.**  $m \in (0; 40)$

**1.12.** np. trójkąt równoramienny, pięciokąt foremny

**1.13.** a) 3    b) 1    c) 4    d) 2  
 e) 2    f) 1    g) 6    h) 5

**1.14.** c), d), e), g)

1.15. 4

1.16. nie

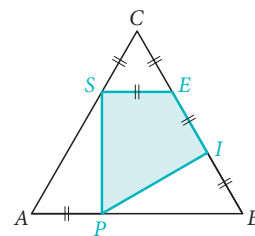
1.17. Muszą spełniać nierówność trójkąta.

1.19. a) dwa b) jedno

1.20. Wskazówka: W danym czworokącie dorysuj przekątną.

1.26. Wskazówka: Skorzystaj z własności przekątnych rombu.

1.15. Trójkąt  $ABC$  jest równoboczny (zob. rysunek). Jego pole jest równe 9. Zaznaczone odcinki mają tę samą długość. Ile wynosi pole czworokąta  $PIES$ ?



1.16. Narysuj sześciokąt foremny. Czy z faktu, że jakiś sześciokąt ma wszystkie kąty równe wynika, że jest on foremny?

1.17. Narysuj trzy odcinki. Skonstruuj trójkąt o bokach równych tym odcinkom. Jaki warunek muszą spełniać narysowane odcinki?

1.18. Narysuj podany wielokąt, a następnie poprowadź konstrukcyjnie jego wszystkie osie symetrii.

- a) trapez równoramienny o podstawach długości 10 cm, 8 cm i wysokości 4 cm
- b) trójkąt równoramienny o ramionach dwa razy dłuższych od podstawy
- c) prostokąt, którego długości boków są w stosunku 2 : 3

1.19. Skonstruuj trójkąt równoramienny o bokach podanej długości. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- a) 5 cm i 6 cm
- b) 5 cm i 2 cm

1.20. Narysuj dowolny czworokąt. Skonstruuj czworokąt przystający do niego.

1.21. Dany odcinek podziel konstrukcyjnie na cztery równe części.

1.22. Narysuj dowolny odcinek  $AB$ . Skonstruuj odcinek 2,5 razy dłuższy od odcinka  $AB$ .

1.23. Narysuj dowolny odcinek  $AB$ . Skonstruuj kwadrat o boku  $AB$ .

1.24. Skonstruuj kąt o podanej mierze.

- a)  $45^\circ$
- b)  $22,5^\circ$

1.25. Skonstruuj romb o kącie ostrym  $45^\circ$  i danym boku  $a$ .

1.26. Narysuj odcinki  $a$  i  $b$  różnej długości. Skonstruuj romb o przekątnych  $a$  i  $b$ .

1.27. Narysuj prostą  $k$ . Skonstruuj prostą prostopadłą do  $k$  przechodzącą przez wybrany punkt  $A$

- a) leżący na prostej  $k$ .
- b) leżący poza prostą  $k$ .



## 2. Okręgi i proste

### Umiejętności:

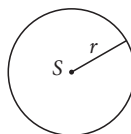
- korzystanie z własności stycznej do okręgu
- korzystanie z własności okręgów stycznych
- stosowanie własności dwusiecznej kąta przy wpisywaniu okręgu w trójkąt
- stosowanie własności symetralnej odcinka przy opisywaniu okręgu na trójkącie

### Okrąg i koło

Przypomnijmy znane ze szkoły podstawowej definicje: okręgu i koła.

#### Definicja

**Okręgiem** o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$  ( $r > 0$ ) nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o  $r$  od punktu  $S$  i oznaczamy go  $o(S, r)$ .



Określenia **promień okręgu** będziemy w tym podręczniku używać w dwóch znaczeniach: odcinka łączącego punkt okręgu z jego środkiem albo liczby będącej długością tego odcinka. Z kontekstu powinno jasno wynikać, o które ze znaczeń chodzi.



**Odległość geometryczna** należy do pojęć pierwotnych geometrii.

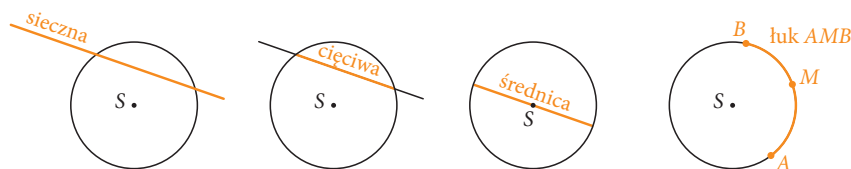


**Sieczną** okręgu nazywamy prostą przechodzącą przez dwa punkty okręgu, a **cięciwą** nazywamy odcinek siecznej wyznaczony na niej przez punkty okręgu.

**Średnicą** okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez środek okręgu.

**Łukiem** okręgu nazywamy każdą z dwóch części okręgu wyznaczoną przez dwa punkty okręgu łącznie z tymi punktami. Jeżeli chcemy wskazać konkretny łuk, to na ogół podajemy jeszcze jeden punkt do niego należący, np. łuk  $AMB$ .

**Półokręgiem** nazywamy każdy z dwóch łuków wyznaczony przez końce średnicy okręgu.



#### ZZ i KPU

tematy 5.1, 5.3, 5.5, 5.6

#### Multiteka

- Wzajemne położenie okręgów
- Prosta i okrąg
- Okrąg wpisany w trójkąt
- Okrąg opisany na trójkącie
- Okrąg i trójkąt
- Długość okręgu
- Okręgi i katedra w Chartres

dlauczyiela.pl | Kartkówka 3.2

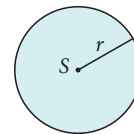
**Generator**  
testów i sprawdzianów

**Uwagi metodyczne**

Podczas omawiania wzajemnego położenia dwóch okręgów uczniowie powinni korzystać z (przygotowanych wcześniej w domu) dwóch kół wyciętych z kartki, najlepiej lekko przezroczystej, z wyraźnie zaznaczonymi środkami i promieniami. Narzucmy wielkości tych kół (na przykład średnice 16 cm i 6 cm). Dzięki temu wszystkie możliwości będą bardziej czytelne, a w wyniku zbliżania do siebie środków okręgów uwidocznią się poszczególne warunki.

**Definicja**

**Kołem** o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$  ( $r > 0$ ) nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, które są oddalone od środka  $S$  co najwyżej o  $r$ , i oznaczamy  $k(S, r)$ . Punkty koła, które nie leżą na jego **brzegu**, czyli na okręgu  $o(S, r)$ , nazywamy **punktami wewnętrznymi**, a zbiór wszystkich takich punktów – **wnętrzem koła**.

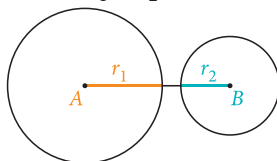


**Sieczną, cięciwą i średnicą** koła nazywamy sieczną, cięciwę i średnicę jego brzegu.

**Dwa okręgi**

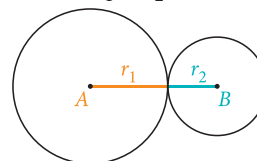
Omówimy wzajemne położenie dwóch okręgów:  $o(A, r_1)$  i  $o(B, r_2)$  w zależności od ich promieni i odległości między środkami. Wprowadzimy też odpowiednie nazwy. Przyjmijmy, że  $r_1 \geq r_2$ .

1.  $|AB| > r_1 + r_2$



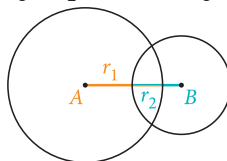
Okręgi **wzajemnie zewnętrzne** (lub **rozłączne zewnętrznie**) nie mają punktów wspólnych.

2.  $|AB| = r_1 + r_2$



Okręgi **zewnętrznie styczne** mają jeden punkt wspólny.

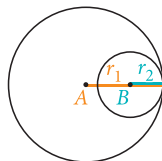
3.  $r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$



Okręgi **przecinające się** mają dwa punkty wspólne.

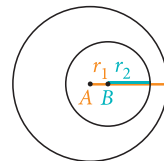
Jeżeli nie jest spełniony warunek  $|AB| > r_1 - r_2$ , to:  $\langle\langle\langle$   
 albo  $|AB| = r_1 - r_2$  i zachodzi warunek z p. 4,  
 albo  $|AB| < r_1 - r_2$  i zachodzi warunek z p. 5.

4.  $|AB| = r_1 - r_2 > 0$



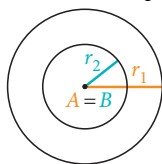
Okręgi **wewnętrznie styczne** mają jeden punkt wspólny.

5.  $|AB| < r_1 - r_2$  i  $r_1 - r_2 > 0$



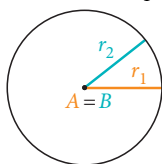
Okręgi **rozłączne wewnętrznie** nie mają punktów wspólnych.

6.  $|AB| = 0$  i  $r_1 - r_2 > 0$



Okręgi **współśrodkowe** nie mają punktów wspólnych.

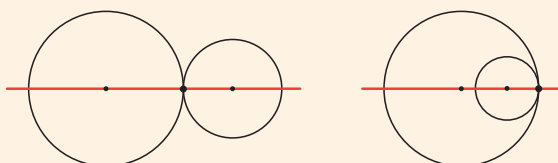
7.  $|AB| = 0$  i  $r_1 = r_2$



Okręgi **identyczne** (pokrywające się) mają wszystkie punkty wspólne.

### Wniosek

Jeśli dwa okręgi są styczne, to punkt styczności oraz środki tych okręgów leżą na jednej prostej.



### Przykład 1 ◀ zad. 2.1

Sprawdźmy, jak są położone względem siebie okręgi  $o(A, 1)$ ,  $o(B, 3)$  i  $o(C, 7)$ , jeżeli  $|AB| = 4$ ,  $|BC| = 10$  i  $|AC| = 8$ .

#### Rozwiązanie

Odległości między danymi środkami są równe sumom odpowiednich promieni ( $4 = 1 + 3$ ,  $10 = 3 + 7$ ,  $8 = 1 + 7$ ), więc te okręgi są parami styczne zewnętrznie.

### Przykład 2 ◀ zad. 2.2

Określmy, jaka powinna być odległość między punktami  $A$  i  $B$ , aby okręgi  $o(A, 2)$  i  $o(B, 5)$  były

- styczne wewnętrznie.
- wzajemnie zewnętrzne.

#### Rozwiązanie

- Różnica promieni wynosi 3, jeżeli zatem  $|AB| = 3$ , to okrąg  $o(A, 2)$  jest styczny wewnętrznie do okręgu  $o(B, 5)$ .
- Okręgi będą wzajemnie zewnętrzne, jeżeli odległość między ich środkami będzie większa od sumy promieni, równej 7.

◀2.1. Określ na podstawie danych wzajemne położenie okręgów  $o(A, r_1)$  i  $o(B, r_2)$ .

- $|AB| = 8$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 3$
- $|AB| = 10$ ,  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 5$
- $|AB| = 15$ ,  $r_1 = 9$ ,  $r_2 = 24$
- $|AB| = 12$ ,  $r_1 = 8$ ,  $r_2 = 6$
- $|AB| = 0$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 9$
- $|AB| = 11$ ,  $r_1 = 16$ ,  $r_2 = 4$

**Odp.:** a) styczne zewnętrznie  
b) rozłączne zewnętrznie  
c) styczne wewnętrznie  
d) przecinające się  
e) współśrodkowe  
f) rozłączne wewnętrznie

◀2.2. Określ odległość między punktami  $A$  i  $B$  tak, aby okręgi  $o(A, r_1)$  i  $o(B, r_2)$  były

- styczne zewnętrznie, jeżeli  $r_1 = 5$  i  $r_2 = 9$ .
- styczne wewnętrznie, jeżeli  $r_1 = 2$  i  $r_2 = 8$ .
- przecinające się, jeżeli  $r_1 = 10$  i  $r_2 = 20$ .

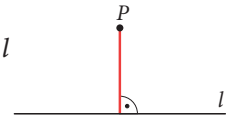
**Odp.:** a)  $|AB| = 14$   
b)  $|AB| = 6$   
c)  $10 < |AB| < 30$

## Prosta i okrąg

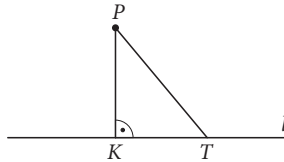
Przypomnijmy znaną ze szkoły podstawowej definicję.

### Definicja

Długość najkrótszego odcinka łączącego punkt  $P$  z prostą  $l$  to **odległość punktu  $P$  od prostej  $l$** .



Udowodnimy, że jeżeli  $P \notin l$ , to najkrótszy odcinek łączący ten punkt z prostą  $l$  jest do niej prostopadły. Niech  $K$  oznacza koniec odcinka prostopadłego do prostej  $l$  łączącego tę prostą z punktem  $P$ .



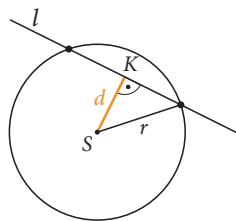
Wybieramy dowolny punkt na prostej  $l$  różny od punktu  $K$  i oznaczamy go  $T$ . Odcinek  $TP$  jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym  $PKT$ . Z wniosku z twierdzenia Pitagorasa wynika, że  $|PT| > |PK|$ . Zatem odcinek  $PK$  jest najkrótszym odcinkiem łączącym punkt  $P$  z prostą  $l$ .

Jeżeli punkt  $P \in l$ , to odległość punktu  $P$  od prostej  $l$  jest równa 0.

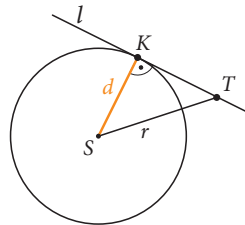
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach poniżej:

$K$  to koniec odcinka prostopadłego do prostej  $l$  łączącego tę prostą ze środkiem okręgu  $o(S, r)$ ,

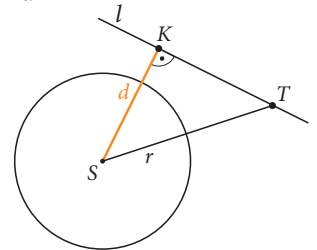
$d$  to odległość środka  $S$  okręgu od prostej  $l$  (czyli  $d = |SK|$ ).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zauważmy, że jeśli:

- I.  $d < r$ , to prosta  $l$  ma dwa punkty wspólne z okręgiem, bo  $K$  jest punktem wewnętrznym koła  $k(S, r)$  (rys. 1).

- II.  $d = r$ , to punkt  $K$  jest jedynym punktem wspólnym prostej  $l$  i okręgu – każdy inny punkt prostej  $l$ , np.  $T$ , wyznacza odcinek  $TS$ , który jest przeciwprostokątną w trójkącie  $STK$ , czyli  $|TS| > d = r$  (rys. 2).
- III.  $d > r$ , to prosta  $l$  nie ma żadnego punktu wspólnego z okręgiem – każdy inny punkt prostej  $l$ , np.  $T$ , wyznacza odcinek  $TS$ , który jest przeciwprostokątną w trójkącie  $STK$ , czyli  $|TS| > d > r$  (rys. 3).

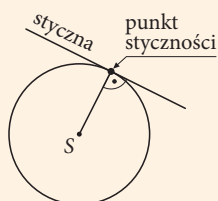
### Definicja

Prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy **styczną** do okręgu. Punkt wspólny stycznej i okręgu nazywamy **punktem styczności**.

Z poprzednich rozważań wynika następujący ważny wniosek.

### Wniosek

Styczna do okręgu jest prostopadła do odcinka łączącego punkt styczności ze środkiem tego okręgu.



Położenie prostej względem okręgu wiąże się z liczbą wspólnych punktów obu figur.

| Rysunek | Liczba punktów wspólnych | Prosta                     |
|---------|--------------------------|----------------------------|
|         | 0                        | zewnętrzna względem okręgu |
|         | 1                        | styczna do okręgu          |
|         | 2                        | sieczna – przecina okrąg   |

◀2.7. Określ, ile punktów wspólnych z okręgiem o promieniu  $r$  ma prosta oddalona od środka okręgu o  $d$ .

- a)  $r = 6, d = 18$   
 b)  $r = 11, d = 11$   
 c)  $r = 8, d = 10$   
 d)  $r = 7, d = 2$   
 e)  $r = 1,5, d = 1,5$   
 f)  $r = 7, d = 5$

Odp.: a) 0 b) 1 c) 0 d) 2  
 e) 1 f) 2

◀2.8. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę  $AB$  jest równa 3 cm. Promień okręgu jest równy 6 cm. Oblicz długość cięciwy  $AB$ .

Odp.:  $6\sqrt{3}$  cm

### Przykład 3 ◀ zad. 2.7

Dane są: okrąg o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r = 3$  cm oraz dwie proste –  $l$ , oddalona od punktu  $S$  o 5 cm, i  $k$ , oddalona od punktu  $S$  o 2 cm.

Prosta  $l$  nie ma z okręgiem żadnego punktu wspólnego, a prosta  $k$  przecina ten okrąg w dwóch punktach.

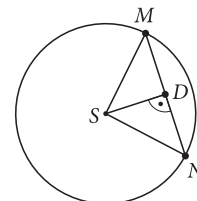
### Przykład 4 ◀ zad. 2.8

Prosta zawierająca cięciwę  $MN$  okręgu  $o(S, 5)$  jest oddalona od punktu  $S$  o 4.

Obliczymy długość cięciwy  $MN$ .

#### Rozwiązanie

Popatrzmy na rysunek obok. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę jest równa wysokości  $SD$  poprowadzonej w trójkącie równoramiennym  $MNS$  o podstawie  $MN$ .



$$|DN|^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

← twierdzenie Pitagorasa w  $\triangle SDN$

$$|DN| = 3$$

$$|MN| = 2 \cdot |DN| = 6$$

← trójkąt  $MNS$  jest równoramienny

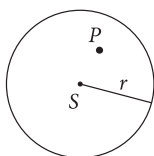
Odp.:  $|MN| = 6$

Dane są: punkt  $P$  i okrąg  $o(S, r)$ .

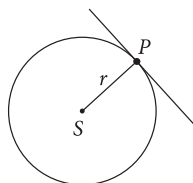
Jeżeli:

- $|SP| < r$ , to nie istnieje styczna do okręgu przechodząca przez  $P$ ,
- $|SP| = r$ , to istnieje jedna styczna do okręgu przechodząca przez  $P$ ,
- $|SP| > r$ , to istnieją dwie styczne do okręgu przechodzące przez  $P$ .

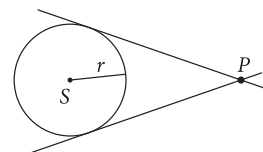
Literą  $S$  oznaczamy na rysunkach środek okręgu (chyba że z kontekstu wynika co innego). Czasem, aby rysunek był bardziej przejrzysty, środek okręgu zaznaczony jest tylko kropką.



$$|SP| < r$$



$$|SP| = r$$



$$|SP| > r$$

**Przykład 5**

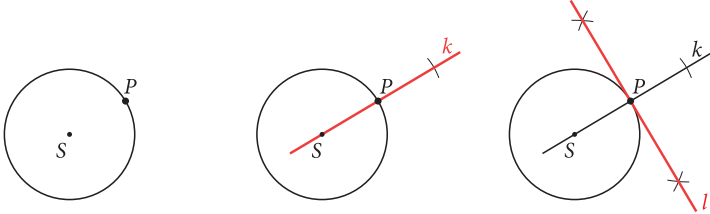
Skonstruujemy styczną do okręgu w punkcie  $P$  należącym do tego okręgu.

**Rozwiązanie**

Styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności, więc:

**Krok 1:** Przez punkt  $P$  i środek  $S$  okręgu prowadzimy prostą  $k$ .

**Krok 2:** Przez punkt  $P$  prowadzimy prostą  $l$  prostopadłą do  $k$ .



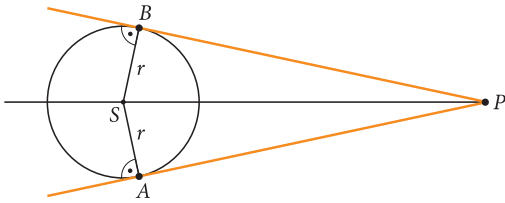
Konstrukcyjnym wyznaczeniem stycznych przechodzących przez dany punkt  $P$  nie-należący do okręgu zajmiemy się w następnym temacie.

**Twierdzenie****Twierdzenie o odcinkach stycznych**

Jeżeli z punktu  $P$  leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie proste styczne do tego okręgu w punktach  $A$  i  $B$ , to  $|PA| = |PB|$ .

**Dowód**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Punkt  $S$  jest jednakowo (o promień) oddalony od obydwu stycznych. Zatem:

$$\sphericalangle SPA = \sphericalangle SPB$$

← półprosta  $PS$  jest dwusieczną kąta  $APB$

$$\sphericalangle SAP = \sphericalangle SBP = 90^\circ$$

← kąt między styczną i promieniem

$$\sphericalangle ASP = \sphericalangle BSP$$

← suma kątów w trójkącie jest równa  $180^\circ$

$$|AS| = |BS|$$

← cecha kbk przystawiania trójkątów

Stąd  $\triangle SPA \equiv \triangle SPB$ ,  
czyli  $|PA| = |PB|$ .

**Koniec dowodu**

**Uwagi metodyczne**

Zwróćmy uwagę na proste do udowodnienia twierdzenie o odcinkach stycznych. Zastosowanie tego twierdzenia często wydatnie skraca zapis rozwiązania zadania.



O okręgu położonym jak na rysunku w powyższym dowodzie mówimy, że jest **wpisany w kąt**  $APB$ . Odcinki  $PA$  i  $PB$  nazywamy **odcinkami stycznymi**, a kąt  $APB$  o mierze mniejszej od  $180^\circ$  – **kątem między stycznymi**.

Środek okręgu wpisanego w kąt leży na dwusiecznej tego kąta.



### Przykład 6

W okręgu o środku  $S$  kąt między promieniami  $SA$  i  $SB$  jest równy  $140^\circ$ . Wyznamy miarę kąta między stycznymi do okręgu poprowadzonymi w punktach  $A$  i  $B$ .

#### Rozwiązanie

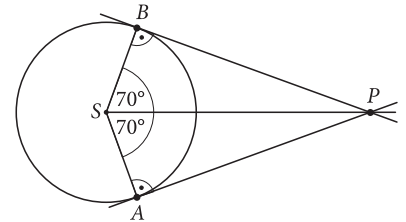
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.  $P$  jest punktem przecięcia stycznych. Aby znaleźć miarę kąta  $APB$ , można skorzystać z faktu, że suma kątów czworokąta jest równa  $360^\circ$ :

$$\sphericalangle APB = 360^\circ - 90^\circ - 140^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

Inne rozwiązanie zadania opiera się na spostrzeżeniu, że trójkąty  $SAP$  i  $SBP$  są przystające, zatem:

$$\sphericalangle APB = 2 \cdot \sphericalangle SPB = 2 \cdot (180^\circ - 70^\circ - 90^\circ) = 40^\circ$$

Odp.:  $\sphericalangle APB = 40^\circ$



### Okrąg wpisany w trójkąt

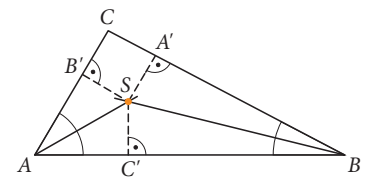
#### Twierdzenie

W każdym trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie.

#### Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Każdy kąt trójkąta jest mniejszy od  $180^\circ$ . Zatem dla każdego z tych kątów punkty na jego dwusiecznej leżą w równej odległości od ramion kąta, czyli boków trójkąta. Dwie dwusieczne, np. kąta  $CAB$  i kąta  $CBA$ , muszą się przeciąć – punkt ich przecięcia oznaczmy literą  $S$ .



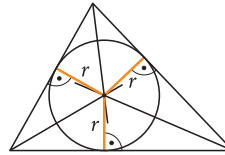
Zgodnie z rysunkiem, jeśli  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  oznaczają odpowiednie końce odcinków prostopadłych do boków, poprowadzonych z punktu  $S$ , to:

$$\begin{aligned} |SC'| &= |SB'| && \leftarrow \text{punkt } S \text{ leży na dwusiecznej kąta } CAB \\ |SC'| &= |SA'| && \leftarrow \text{punkt } S \text{ leży na dwusiecznej kąta } CBA \end{aligned}$$

Zatem  $|SB'| = |SA'|$  i stąd wniosek, że punkt  $S$  leży na dwusiecznej kąta  $ACB$ . Inaczej mówiąc, dwusieczna kąta  $ACB$  przechodzi przez punkt  $S$ , jako punkt równo oddalony od ramion kąta.

**Koniec dowodu**

**Okrąg wpisany w trójkąt** to okrąg styczny do wszystkich boków trójkąta. Inaczej mówiąc, jest on wpisany we wszystkie trzy kąty tego trójkąta, zatem jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów. Promień okręgu wpisanego jest równy odległości środka okręgu od każdego z boków trójkąta.



### Wniosek

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.



### Przykład 7 ◀ zad. 2.11

W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono literami  $K$ ,  $L$ ,  $M$  jak na rysunku. Dane są długości odcinków:  $|AL| = 3$ ,  $|LB| = 7$ ,  $|AC| = 5$ . Obliczmy obwód trójkąta  $ABC$ .

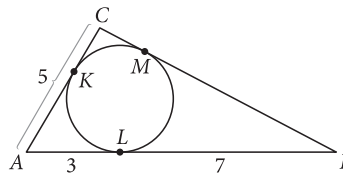
**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} |AL| &= |AK| && \leftarrow \text{odcinki styczne} \\ |KC| &= 5 - 3 = 2 = |CM| \\ |MB| &= |LB| = 7 && \leftarrow \text{odcinki styczne} \\ |BC| &= |CM| + |MB| = 2 + 7 = 9 \end{aligned}$$

Zatem obwód trójkąta  $ABC$  jest równy:

$$|AB| + |BC| + |CA| = 10 + 9 + 5 = 24$$

Odp.: 24

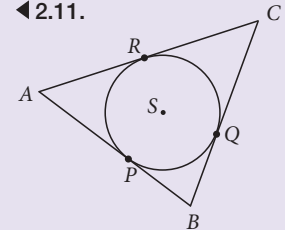


### Okrąg opisany na trójkącie

#### Twierdzenie

W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.

### ◀ 2.11.



W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  jak na rysunku. Wiadomo, że  $|BQ| = 4$  i  $|AC| = 11$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .

Odp.: 30

**Dowód**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkty należące do symetralnej boku leżą w równej odległości od końców tego boku, czyli wierzchołków trójkąta. Dwie symetralne, np. boku  $AB$  i boku  $AC$ , muszą się przeciąć – punkt ich przecięcia oznaczmy literą  $S$ .

$$|SA| = |SB|$$

← punkt  $S$  leży na symetralnej boku  $AB$

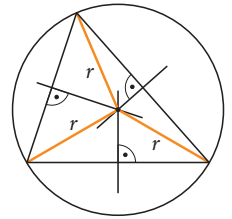
$$|SA| = |SC|$$

← punkt  $S$  leży na symetralnej boku  $CA$

Zatem  $|SB| = |SC|$ , czyli punkt  $S$  leży na symetralnej boku  $BC$ . Symetralna boku  $BC$  przechodzi więc przez  $S$ , jako punkt równo oddalony od końców odcinka  $BC$ .

**Koniec dowodu**

**Okrąg opisany na trójkącie** to okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki trójkąta. Inaczej mówiąc, środek tego okręgu jest jednakowo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta, czyli jest punktem przecięcia symetralnych boków. Promień okręgu opisanego jest równy odległości środka okręgu od każdego z wierzchołków trójkąta.

**Wniosek**

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

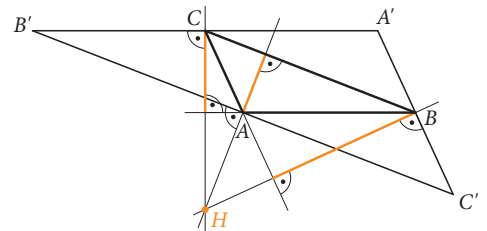
Twierdzenie o symetralnych boków trójkąta stosuje się również w dowodzie następującego twierdzenia o istnieniu innego ważnego punktu – tzw. **ortocentrum**, czyli punktu przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta.

**Twierdzenie**

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

*Wskazówka:* Przez wierzchołki rozważanego trójkąta  $ABC$  poprowadź proste równoległe do jego przeciwległych boków i wykaż, że w nowo powstałym trójkącie  $A'B'C'$  proste zawierające wysokości trójkąta  $ABC$  są symetralnymi boków (zob. rysunek).



## Zadania

**2.1.** Określ na podstawie danych wzajemne położenie okręgów  $o(A, r_1)$  i  $o(B, r_2)$ .

- a)  $|AB| = 8$     $r_1 = 5$     $r_2 = 3$       d)  $|AB| = 12$     $r_1 = 8$     $r_2 = 6$   
 b)  $|AB| = 10$     $r_1 = 4$     $r_2 = 5$       e)  $|AB| = 0$     $r_1 = 5$     $r_2 = 9$   
 c)  $|AB| = 15$     $r_1 = 9$     $r_2 = 24$       f)  $|AB| = 11$     $r_1 = 16$     $r_2 = 4$

**2.2.** Określ odległość między punktami  $A$  i  $B$  tak, aby okręgi  $o(A, r_1)$  i  $o(B, r_2)$  były

- a) styczne zewnętrznie, jeżeli  $r_1 = 5$  i  $r_2 = 9$ .  
 b) styczne wewnętrznie, jeżeli  $r_1 = 2$  i  $r_2 = 8$ .  
 c) przecinające się, jeżeli  $r_1 = 10$  i  $r_2 = 20$ .

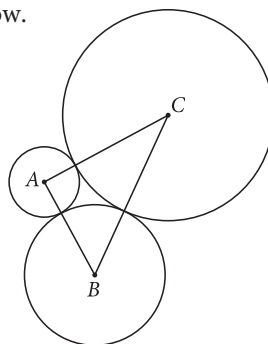
**2.3.** Przerysuj tabelę i uzupełnij ją. Jeżeli w którymś wierszu jest więcej niż jedno rozwiązanie, podaj trzy przykłady spełniające podane warunki.

| Okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$      | $ AB $ | $r_1$ | $r_2$ |
|---------------------------------------|--------|-------|-------|
| styczne zewnętrznie                   | ?      | 3     | 7     |
| wzajemnie zewnętrzne                  | 20     | 15    | ?     |
| przecinają się                        | 5      | ?     | 2     |
| styczne wewnętrznie                   | ?      | 4     | ?     |
| $o(A, r_1)$ zawiera się w $k(B, r_2)$ | ?      | 8     | 10    |

**2.4.** Środki trzech okręgów parami zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta o bokach długości 10, 12 i 6. Oblicz promienie tych okręgów.

- D 2.5.** Trzy okręgi o środkach  $A, B, C$  i promieniach odpowiednio 1, 2 i 3 są parami styczne zewnętrznie jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

- D \* 2.6.** Dwa okręgi o środkach  $A$  i  $B$  oraz różnych promieniach są styczne zewnętrznie i równocześnie styczne wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie  $C$  i promieniu  $r$ . Wiadomo, że punkty  $A, B$  i  $C$  nie są współliniowe. Wykaż, że obwód trójkąta  $ABC$  jest równy  $2r$ .



**2.7.** Określ, ile punktów wspólnych z okręgiem o promieniu  $r$  ma prosta oddalona od środka okręgu o  $d$ .

- a)  $r = 6$     $d = 18$       c)  $r = 8$     $d = 10$       e)  $r = 1,5$     $d = 1,5$   
 b)  $r = 11$     $d = 11$       d)  $r = 7$     $d = 2$       f)  $r = 7$     $d = 5$

**2.8.** Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę  $AB$  jest równa 3 cm. Promień okręgu jest równy 6 cm. Oblicz długość cięciwy  $AB$ .

## Odpowiedzi i rozwiązania

- 2.1.** a) styczne zewnętrznie  
 b) rozłączne zewnętrznie  
 c) styczne wewnętrznie  
 d) przecinające się  
 e) współśrodkowe  
 f) rozłączne wewnętrznie

- 2.2.** a)  $|AB| = 14$   
 b)  $|AB| = 6$   
 c)  $10 < |AB| < 30$

**2.3.** W pierwszym wierszu  $|AB| = 10$ , w każdym z pozostałych wierszy jest nieskończenie wiele możliwości.

- 2.4.** 2, 4, 8

- 2.7.** a) 0   b) 1   c) 0   d) 2   e) 1  
 f) 2

- 2.8.**  $6\sqrt{3}$  cm

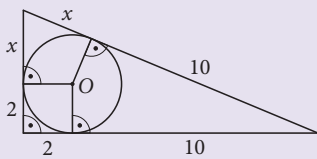
**2.5.** Boki trójkąta  $ABC$  mają długości 3, 4 i 5, zatem trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.  
 $(3^2 + 4^2 = 5^2)$

**2.6.** Oznaczamy:  $r_1, r_2$  – promienie okręgów o środkach  $A$  i  $B$ ;  $r_1 < r$ ,  $r_2 < r$   
 Z warunków zadania:  $|AB| = r_1 + r_2$ ,  $|AC| = r - r_1$ ,  $|BC| = r - r_2$ ;  
 zatem  $|AB| + |BC| + |AC| = 2r$ .

2.9.  $4\sqrt{5}$ 2.10.  $|PA| = |PB|$ ,  $|CB| = |CE|$ ,  
 $|DE| = |DA|$ 

2.11. 30

2.13.



$$(2+x)^2 + 12^2 = (x+10)^2$$

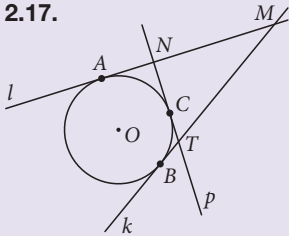
$$x^2 + 4x + 4 + 144 = x^2 + 20x + 100$$

$$16x = 48 \Leftrightarrow x = 3$$

Odp.: Pozostałe boki trójkąta mają długości 5 cm i 3 cm.

2.15.  $52^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $73^\circ$ 2.16.  $2880 \text{ cm}^2$ 

2.17.

Dane:  $L_{MNT} = 2a$ 

Oznaczenia:

$$b = |BT| = |CT|$$

$$c = |CN| = |AN|$$

$$x = |MA| = |MB|$$

Wówczas:

$$\begin{cases} |MN| = x - c \\ |NT| = c + b \\ |SM| = x - b \end{cases}$$

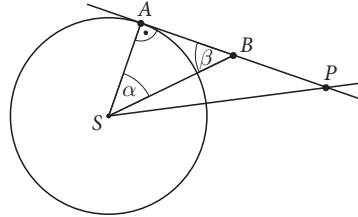
więc

$$L_{MNT} = |MN| + |NT| + |TM| = 2x$$

$$\text{Równoważnie } L_{MNT} = 2a,$$

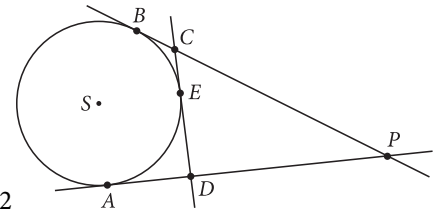
stąd  $x = a$ .Odp.:  $|MA| = a$ 

2.9. Z punktu  $P$  poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $A$  (rys. 1). Odcinek  $SB$  jest środkową w trójkącie  $SPA$ . Promień okręgu jest równy 4 oraz  $\alpha = \beta$ . Oblicz długość odcinka  $SP$ .



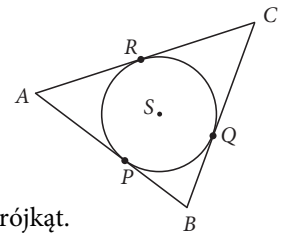
Rys. 1

2.10. Dany jest okrąg o środku  $S$  i trzy proste styczne do niego, położone jak na rysunku 2. Punkty  $A, B, E$  są punktami styczności odpowiednich prostych. Wypisz pary odcinków równych.



Rys. 2

2.11. W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg. Punkty styczności oznaczono  $P, Q, R$  jak na rysunku. Wiadomo, że  $|BQ| = 4$  i  $|AC| = 11$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .



2.12. Skonstruuj trójkąt o bokach 5 cm, 6 cm i 8 cm, a następnie skonstruuj okrąg

a) opisany na tym trójkącie.

b) wpisany w ten trójkąt.

\* 2.13. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 2 cm, a jedna z przyprostokątnych tego trójkąta ma długość 12 cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

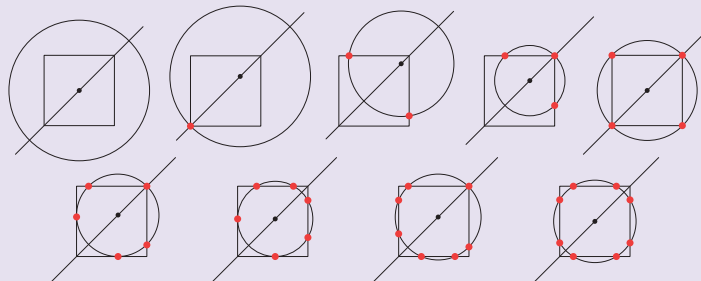
\* 2.14. Ile punktów wspólnych może mieć brzeg kwadratu z okręgiem, którego środek należy do prostej zawierającej przekątną kwadratu? Wykonaj odpowiednie rysunki.

2.15. W trójkąt o kątach  $34^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $76^\circ$  wpisano okrąg. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności tego okręgu z bokami danego trójkąta.

2.16. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 360 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 16 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

\* 2.17. Punkty  $A$  i  $B$  dzielą okrąg na dwa łuki różnej długości. Na krótszym z tych łuków obrano punkt  $C$ , a następnie w punktach  $A, B$  i  $C$  poprowadzono trzy styczne do okręgu: odpowiednio  $l, k, p$ . Proste  $l$  i  $k$  przecinają się w punkcie  $M$ , a prosta  $p$  przecina proste  $l$  i  $k$  odpowiednio w punktach  $N$  i  $T$ . Obwód trójkąta  $MNT$  jest równy  $2a$ . Oblicz długość odcinka  $MA$ .

2.14. od 0 do 8 punktów wspólnych



## Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Okręgi  $o\left(A, \frac{11}{3}\right)$  oraz  $o(B, 7)$  są położone tak, że  $|AB| = \frac{10}{3}$ . Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

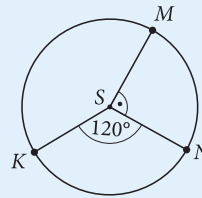
- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. nieskończenie wiele

2. Wskaż największą możliwą liczbę punktów przecięcia brzegu prostokąta z okręgiem.

- A. 4                      B. 6                      C. 8                      D. 12

3. Przez punkty  $M$ ,  $N$  i  $K$  poprowadzono styczne do okręgu o środku  $S$ . Punkty przecięcia stycznych są wierzchołkami pewnego trójkąta. Jakie kąty ma ten trójkąt?

- A.  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$                       C.  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$   
B.  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$                       D.  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$



4. Prosta  $l$  jest styczna do okręgu  $o(S, 5)$ .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Istnieją dokładnie trzy okręgi o promieniu 3 styczne zewnętrznie równocześnie do prostej  $l$  i do okręgu  $o(S, 5)$ .  
B. Istnieją cztery okręgi o promieniu 3 styczne równocześnie do prostej  $l$  i do okręgu  $o(S, 5)$ .  
C. Nieskończenie wiele okręgów jest stycznych równocześnie do prostej  $l$  i do okręgu  $o(S, 5)$ .

5. Trójkąt  $ABC$  ma boki o długościach  $|AB| = 8$  cm,  $|BC| = 9$  cm i  $|AC| = 6$  cm. Narysowano trzy okręgi o promieniach 3 cm i o środkach w wierzchołkach trójkąta. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

6. Dane są dwa okręgi współśrodkowe o promieniach równych 25 cm i 7 cm. Oblicz długość tej cięciwy większego okręgu, która jest styczna do mniejszego okręgu.

7. Punkty  $A$  i  $B$  należą do okręgu o środku  $S$ . Styczna do tego okręgu w punkcie  $B$  oraz prosta  $AS$  przecinają się w punkcie  $C$  i tworzą kąt o mierze  $26^\circ$ . Oblicz miarę kąta  $CAB$ . Rozważ dwa przypadki.

## Prosto do matury

1. B

2. C

3. C

4. P, P, P

5.  $o(A, 3)$  i  $o(C, 3)$  styczne zewnętrznie,  
 $o(A, 3)$  i  $o(B, 3)$  rozłączne zewnętrznie,  
 $o(B, 3)$  i  $o(C, 3)$  rozłączne zewnętrznie

6. 48 cm. Wskazówka:  
Wykorzystaj twierdzenie o odcinkach stycznych.

7.  $32^\circ$  lub  $122^\circ$

**Uwagi metodyczne**

Podczas definiowania kątów środkowych i wpisanych zamiast wyrażenia „oparte na cięciwie” warto używać określenia „oparte na łuku”. Należy także wyraźnie zaznaczać łuk zawarty w obszarze kąta, przedłużając ramiona kąta poza koło.

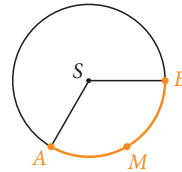
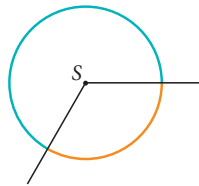
## 3. Kąty w kole

**Umiejętności:**

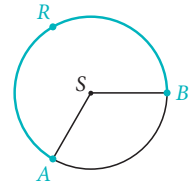
- stosowanie zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym
- korzystanie z własności stycznej do okręgu

**Kąt środkowy**

Dwie półproste o wspólnym początku wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty. Jeżeli zakresimy okrąg o środku w wierzchołku tych kątów, to ich ramiona podzielą okrąg na dwa łuki. Aby jednoznacznie wskazać jeden z nich, wprowadzimy oznaczenia literowe.



Łuk  $AMB$  o końcach  $A$  i  $B$  przechodzi przez punkt  $M$ .



Łuk  $BRA$  o końcach  $A$  i  $B$  przechodzi przez punkt  $R$ .

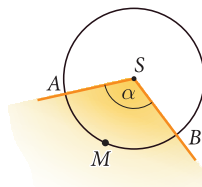
**Definicja**

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym w tym okręgu**.

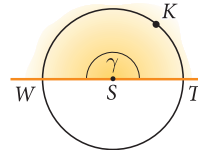
Mówimy, że kąt środkowy jest **wyznaczony przez odpowiedni łuk** okręgu (albo jest **oparty na odpowiednim łuku** okręgu). Oznacza to, że końce łuku leżą na ramionach kąta, a pozostałe punkty łuku są punktami wewnętrznymi kąta.

**Przykład 1**

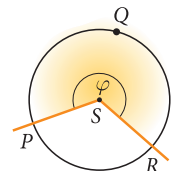
W zapisie literowym łuk  $AMB$  i łuk  $BMA$  oznaczają to samo, ale zgodnie z często przyjmowaną przez matematyków zasadą, będziemy wymieniać punkty w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara.



Kąt  $\alpha$  jest wyznaczony przez łuk  $AMB$ .



Kąt  $\gamma$  jest wyznaczony przez łuk  $TKW$ .



Kąt  $\varphi$  jest wyznaczony przez łuk  $RQP$ .

**ZZ i KPU**

tematy 5.2, 5.4

**Multiteka**

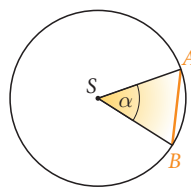
- Pole koła
- Pole wycinka koła – zastosowanie
- Kąty w okręgu
- Recytowanie cyfr liczby  $\pi$

[dlauczyciela.pl](http://dlauczyciela.pl) | Kartkówka 3.3

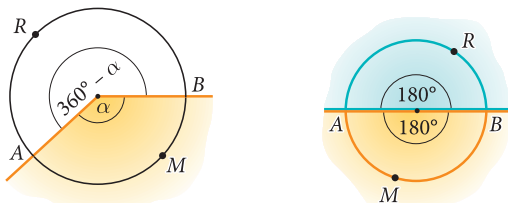
**Generator**  
testów i sprawdzianów

Czasem, gdy kąt środkowy jest wypukły, wygodnie jest wykorzystać cięciwę łączącą końce promieni i powiedzieć, że kąt **jest wyznaczony przez tę cięciwę**.

Na przykład kąt  $\alpha$  na rysunku obok jest wyznaczony przez cięciwę  $AB$ .



Jeżeli kąt środkowy wyznaczony przez łuk  $AMB$  jest równy  $\alpha$ , to kąt środkowy wyznaczony przez łuk  $BRA$  jest równy  $360^\circ - \alpha$ . Jedyna sytuacja, w której oba takie kąty są wypukłe, zachodzi wówczas, gdy oba łuki są półokręgami.



### Wniosek 1

Kąt środkowy oparty na półokręgu jest kątem półpełnym.

Miara kąta środkowego zależy od długości łuku, który ten kąt wyznacza.

Przypomnijmy:  $1^\circ$  to miara  $\frac{1}{90}$  kąta prostego.

**Przykład 2** ◀ zad. 3.1

- $90^\circ$  to miara kąta prostego, czyli kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy  $\frac{1}{4}$  okręgu,
- $60^\circ$  to miara kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy  $\frac{1}{6}$  okręgu,
- $150^\circ$  to miara kąta środkowego wyznaczonego przez łuk równy  $\frac{5}{12}$  okręgu itd.

Obliczmy, przez jaki kąt środkowy jest wyznaczony łuk o długości  $\frac{2}{3}$  okręgu:

$$\frac{2}{3} \cdot 360^\circ = 240^\circ$$

Jest to kąt środkowy o mierze  $240^\circ$ .

### Wniosek 2

Dwa kąty środkowe w tym samym okręgu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy opierają się na równych łukach.

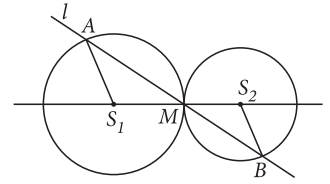
◀3.1. Na okręgu odmierzone kolejno łuki  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$ , których długości są w stosunku  $1 : 7 : 10$ . Wyznacz miary kątów środkowych opartych na tych łukach.

**Odp.:**  $20^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $200^\circ$



**Przykład 3**

Okręgi o środkach  $S_1$  i  $S_2$  są styczne zewnętrznie. Prosta  $l$  przechodzi przez punkt styczności  $M$  i przecina okręgi w punktach  $A$  i  $B$  tak jak na rysunku. Wykażemy, że wypukłe kąty środkowe wyznaczone przez cięciwy  $MA$  i  $MB$  są równe.

**Dowód**

Trójkąty  $AS_1M$  i  $BS_2M$  są równoramienne (w każdym z nich ramionami są promienie), zatem każdy z nich ma przy podstawie równe kąty. Punkty  $S_1, M, S_2$  są współliniowe. Kąty  $S_1MA$  i  $S_2MB$  są wierzchołkowe, czyli równe, więc wszystkie kąty przy podstawach obu trójkątów są równe. Kąty  $AS_1M$  i  $BS_2M$  są więc równe jako dopełnienie do  $180^\circ$ .

Koniec dowodu

**Części koła**

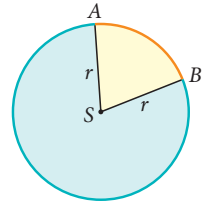
Z kątem środkowym związana jest część koła nazywana wycinkiem.

**Definicja**

**Wycinkiem kołowym** nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli koło dwa niepokrywające się promienie.

Pole koła o promieniu  $r$  jest równe:  $P = \pi r^2$ .

Pole wycinka kołowego zależy od miary kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek lub inaczej – od długości łuku, który ten wycinek ogranicza. Na przykład jeśli łuk  $AB$  będący brzegiem wycinka kołowego (na rysunku zaznaczony kolorem pomarańczowym) ma długość równą  $\frac{1}{5}$  długości okręgu, to pole:



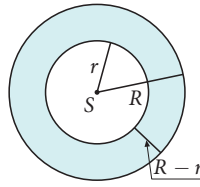
- żółtego wycinka kołowego jest równe:  $P_1 = \frac{1}{5}\pi r^2$ ,
- niebieskiego wycinka jest równe:  $P_2 = \frac{4}{5}\pi r^2$ .

Zauważmy, że dwa wycinki kołowe kół o równych promieniach są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy łuki wyznaczające te wycinki są tej samej długości, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy kąty środkowe wyznaczające te wycinki mają tę samą miarę.

Przypomnijmy jeszcze pojęcie pierścienia kołowego znane ze szkoły podstawowej.

**Definicja**

**Pierścieniem kołowym** o szerokości  $R - r$ , gdzie  $R > r$ , nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość  $d$  od ustalonego punktu  $S$  spełnia warunek  $r \leq d \leq R$ .



Pole pierścienia kołowego jest równe:  $P = \pi(R^2 - r^2)$ .

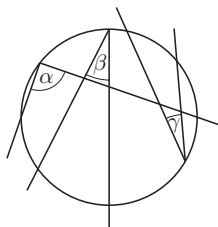
**Kąt wpisany****Definicja**

**Kątem wpisanym** w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię kąta ma z tym okręgiem jeszcze jeden punkt wspólny.

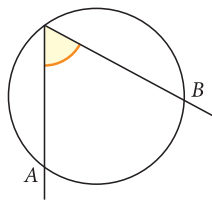
Na rysunku 1 zaznaczono kilka kątów wpisanych w okrąg.

Ramiona kąta wpisanego dzielą okrąg na dwa łuki (rys. 2). Łuk, do którego nie należy wierzchołek kąta, nazywamy **łukiem wyznaczonym przez kąt**. Mówimy również, że kąt wpisany **jest oparty** na tym łuku.

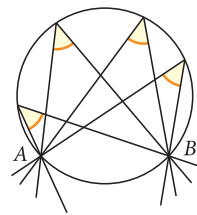
Zwróćmy uwagę na to, że na jednym łuku jest opartych nieskończenie wiele kątów wpisanych (rys. 3).



Rys. 1.



Rys. 2.

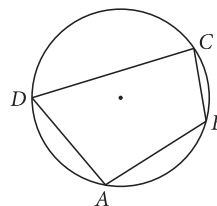


Rys. 3.

**Przykład 4**

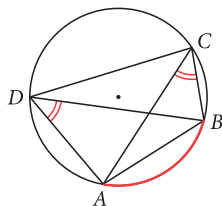
Wszystkie wierzchołki czworokąta  $ABCD$  leżą na okręgu tak jak na rysunku. Zaznaczmy wszystkie kąty wpisane o wierzchołkach będących wierzchołkami tego czworokąta i oparte na łuku

- $AB$  nieprzechodzącym przez  $C$ .
- $BC$  nieprzechodzącym przez  $D$ .
- $ABC$ .

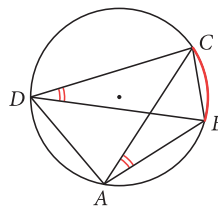


## Rozwiązanie

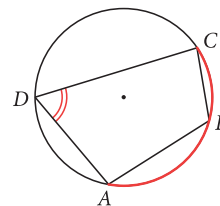
a) Na łuku  $AB$  nieprzechodzącym przez  $C$  oparte są:  $\sphericalangle ACB$  i  $\sphericalangle ADB$ .



b) Na łuku  $BC$  nieprzechodzącym przez  $D$  oparte są:  $\sphericalangle BAC$  i  $\sphericalangle BDC$ .



c) Na łuku  $ABC$  oparty jest  $\sphericalangle ADC$ .



## Przykład 5

W okręgu o promieniu 2 cm poprowadzimy cięciwę o długości

a)  $a = 2$  cm.

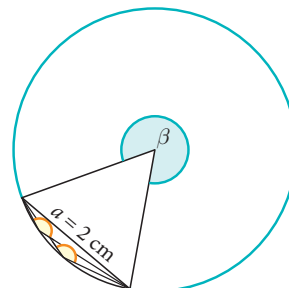
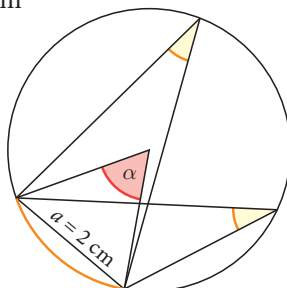
b)  $a = 3$  cm.

Dla każdego z łuków wyznaczonych przez poprowadzoną cięciwę narysujemy kąt środkowy i dwa kąty wpisane oparte na tym łuku.

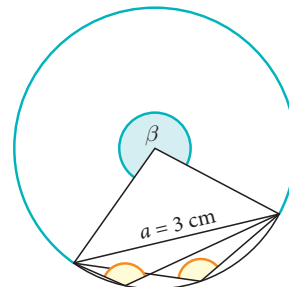
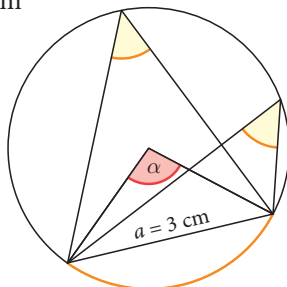
## Rozwiązanie

Aby rysunki były bardziej czytelne, zaznaczymy oddzielnie rozwiązanie dla łuku mniejszego od półokręgu (w tym przypadku kąt środkowy oznaczyliśmy  $\alpha$ ) oraz rozwiązanie dla łuku większego od półokręgu (kąt środkowy oznaczyliśmy  $\beta$ ).

a)  $a = 2$  cm



b)  $a = 3$  cm



Między kątem wpisanym i kątem środkowym opartymi na tym samym łuku zachodzi zależność wyrażona w poniższym twierdzeniu.

### Twierdzenie

Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

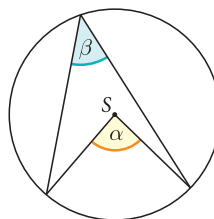
### Dowód

Oznaczmy parę kątów, o których jest mowa w twierdzeniu:

$\alpha$  – kąt środkowy

$\beta$  – kąt wpisany, oparty na tym samym łuku co kąt  $\alpha$

Mamy wykazać, że  $\alpha = 2\beta$ .

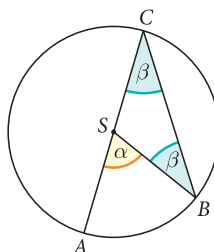


Kąty wpisane mogą być różnie położone, co widać np. na rysunkach z przykładu 5. Dowód twierdzenia przeprowadzimy w trzech przypadkach, które wyczerpią wszystkie możliwości.

#### I. Ramię kąta wpisanego przechodzi przez środek okręgu.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

- $\sphericalangle CBS = \beta$  ← trójkąt CBS jest równoramienny
- $\sphericalangle CSB = 180^\circ - 2\beta$  ← suma kątów w trójkącie
- $\sphericalangle CSB = 180^\circ - \alpha$  ← kąt CSB jest kątem przyległym do kąta  $\alpha$
- $\alpha = 2\beta$



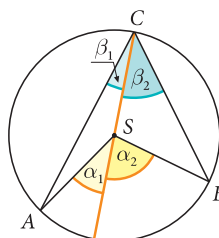
#### II. Środek okręgu jest punktem wewnętrznym kąta wpisanego.

Prowadzimy półprostą CS.

Półprosta CS dzieli kąt środkowy  $\alpha$  na kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , a kąt wpisany  $\beta$  na kąty  $\beta_1$  i  $\beta_2$  jak na rysunku obok.

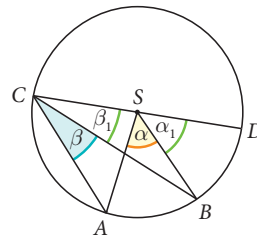
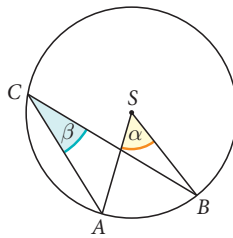
Możemy dla tych kątów zastosować związek udowodniony w punkcie 1.

- $\alpha_2 = 2\beta_2$  ← po zasłonięciu części rysunku na lewo od prostej CS
- $\alpha_1 = 2\beta_1$  ← po zasłonięciu części rysunku na prawo od prostej CS
- $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$



### III. Środek okręgu leży poza kątem wpisanym.

Ponownie prowadzimy półprostą  $CS$  i oznaczamy kąty  $\alpha_1, \beta_1$  jak na rysunku.



$$\alpha_1 = 2\beta_1$$

$$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$$

$$\alpha + 2\beta_1 = 2(\beta + \beta_1)$$

$$\alpha + 2\beta_1 = 2\beta + 2\beta_1$$

$$\alpha = 2\beta$$

← kąt środkowy i kąt wpisany oparte na łuku  $BD$

← kąt środkowy i kąt wpisany oparte na łuku  $AD$

← podstawiamy do drugiego równania  $\alpha_1 = 2\beta_1$

Koniec dowodu

◀ **3.11.** Kąt między średnicą  $AC$  i cięciwą  $AB$  okręgu o środku  $S$  ma miarę  $20^\circ$ . Wyznacz miary kątów wewnętrznych w trójkątach  $ASB$  i  $ACB$ .

**Odp.:**  $\triangle ASB$ :  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20^\circ$ ,

$\sphericalangle S = 140^\circ$ ;

$\triangle ACB$ :  $\sphericalangle A = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ,

$\sphericalangle C = 70^\circ$

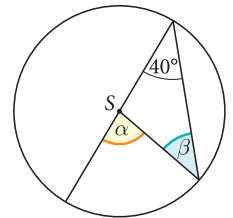
**Przykład 6** ◀ zad. 3.11

Punkt  $S$  jest środkiem okręgu. Wyznamy miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Rozwiązanie**

$\alpha$  jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co wpisany kąt o mierze  $40^\circ$ . Zatem  $\alpha = 80^\circ$ .

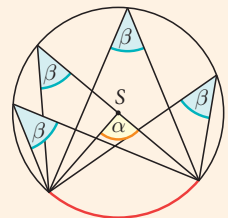
Kąt  $\beta$  ma miarę  $40^\circ$ , jako drugi kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego.



W okręgu wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe połowie tego samego kąta środkowego, więc na mocy udowodnionego twierdzenia mamy następujący wniosek.

#### Wniosek 3

Wszystkie kąty wpisane w dany okrąg i oparte na tym samym łuku są równe.



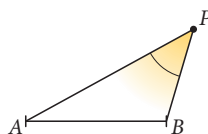
Po połączeniu wniosku 2 (s. 163) i wniosku 3 otrzymujemy następujące twierdzenie.

### Twierdzenie

Jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są one równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.

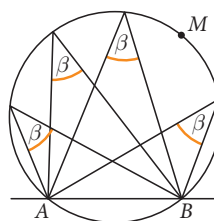
### Definicja

Punkty  $A$ ,  $B$  i  $P$  są niewspółliniowe. Kąt  $APB$  nazywamy **kątem, pod którym widać odcinek  $AB$  z punktu  $P$** .



Ograniczmy rozważania do półpłaszczyzny wyznaczonej przez punkty  $AMB$  (rys. obok).

Wówczas, zgodnie z ostatnim wnioskiem, z każdego punktu łuku  $AMB$  widać odcinek  $AB$  pod kątem  $\beta$ . Wykażemy, że żaden inny punkt tej półpłaszczyzny takiego warunku nie spełnia.



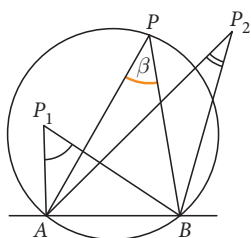
Jeżeli punkt półpłaszczyzny nie należy do łuku  $AMB$ , to leży albo wewnątrz części koła ograniczonej tym łukiem, jak np. punkt  $P_1$ , albo na zewnątrz tej części, jak np. punkt  $P_2$  (rys. 1).

W pierwszym przypadku (rys. 2) mamy  $\angle AP_1B > \beta$  jako kąt zewnętrzny trójkąta  $PP_1B$  nieprzylegający do wewnętrznego kąta  $\beta$  – udowodnienie tego faktu zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

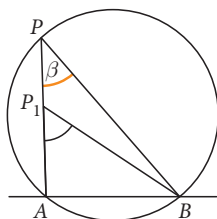
Czyli z punktu  $P_1$  widać odcinek  $AB$  pod kątem większym niż  $\beta$ .

W drugim przypadku (rys. 3) mamy  $\beta > \angle AP_2B$  jako kąt zewnętrzny trójkąta  $PP_2B$  nieprzylegający do wewnętrznego kąta  $\beta$ .

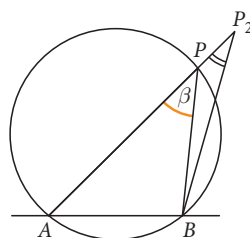
Czyli z punktu  $P_2$  widać odcinek  $AB$  pod kątem mniejszym niż  $\beta$ .



Rys. 1



Rys. 2

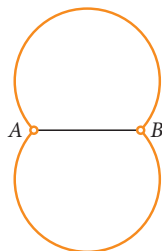


Rys. 3

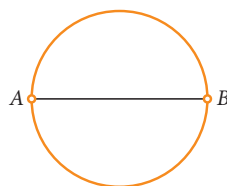
Oczywiście aby otrzymać zbiór wszystkich punktów, z których odcinek  $AB$  widać pod kątem  $\beta$ , należy uzupełnić łuk  $AMB$  o łuk symetryczny do niego względem prostej  $AB$ . Zwróćmy uwagę, że punkty  $A$  i  $B$  nie należą do tego zbioru.

Ostatecznie – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, z których odcinek  $AB$  widać pod danym kątem  $\beta$ , ma, w zależności od rozwartości kąta, następujący kształt:

$\beta$  jest kątem ostrym



$\beta$  jest kątem prostym

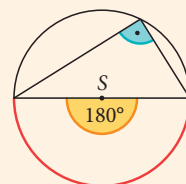


$\beta$  jest kątem rozwartym



#### Wniosek 4

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

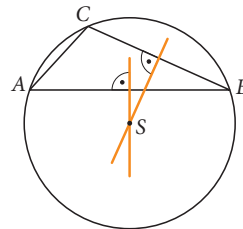
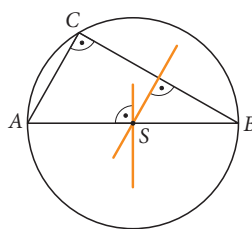
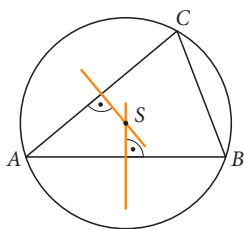


#### Przykład 7

Wyznamy konstrukcyjnie środek okręgu opisanego na danym trójkącie.

##### Rozwiązanie

Aby znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy wyznaczyć punkt przecięcia symetralnych dwóch boków tego trójkąta. Na rysunkach przedstawiono rozwiązanie zadania.



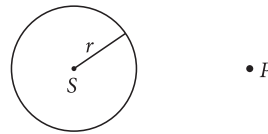
Zauważmy, że środek okręgu opisanego leży:

- wewnątrz trójkąta ostrokątnego,
- na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego,
- na zewnątrz trójkąta rozwartokątnego.

Wynika to bezpośrednio z powyższych rozważań o zbiorach punktów, z których dany odcinek widać pod danym kątem.

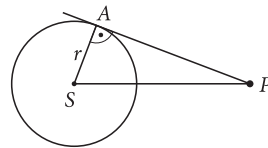
### Przykład 8

Dany jest okrąg o środku  $S$  i promieniu  $r$  oraz punkt  $P$  ( $|PS| > r$ ). Skonstruujemy styczną do tego okręgu przechodzącą przez punkt  $P$ .



### Rozwiązanie

Do narysowania szukanej prostej potrzebny jest drugi punkt. Przeanalizujemy sposób wyznaczenia takiego punktu.

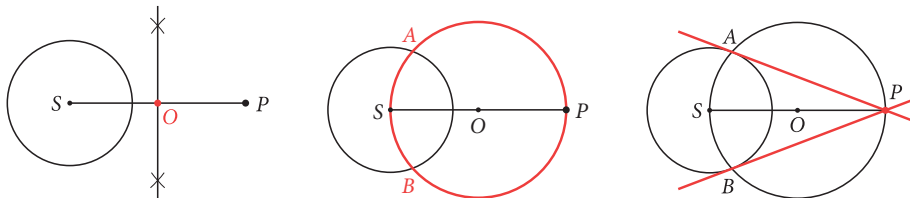


Przypuśćmy, że prosta  $AP$  jest styczna do danego okręgu w punkcie  $A$ . Wiemy, że promień okręgu poprowadzony z punktu styczności jest prostopadły do stycznej. Kąt  $SAP$  jest prosty, więc jest kątem wpisanym opartym na półokręgu o średnicy  $SP$ .

Zatem przecięcie danego okręgu z okręgiem o średnicy  $SP$  wyznacza drugi punkt potrzebny do narysowania prostej stycznej.

Oto kolejne etapy konstrukcji.

- Prowadzimy symetralną odcinka  $SP$ , aby wyznaczyć jego środek – punkt  $O$ .
- Rysujemy okrąg  $o(O, |OS|)$  – w przecięciu tego okręgu z danym okręgiem otrzymujemy punkty  $A$  i  $B$ .
- Prowadzimy proste  $PA$  i  $PB$ , które są szukаныmi stycznymi.



Zadanie ma dwa rozwiązania – z punktu  $P$  możemy poprowadzić dwie styczne.

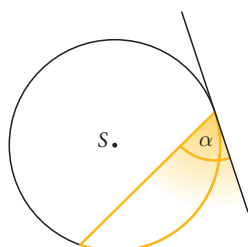


## Kąt między styczną a cięciwą

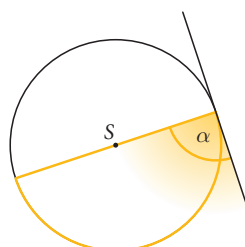
### Definicja

Dane są okrąg oraz styczna do tego okręgu. **Kątem między styczną a cięciwą** nazywamy kąt o wierzchołku w punkcie styczności, którego jedno ramię jest zawarte w stycznej, a drugie ramię zawiera cięciwę okręgu poprowadzoną z punktu styczności.

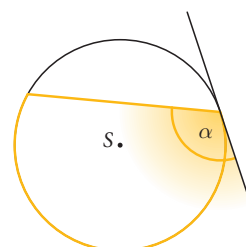
Kąt między styczną a cięciwą może być kątem ostrym, prostym lub rozwartym, co zostało zilustrowane na rysunkach poniżej. Zauważmy, że kąt przyległy do kąta  $\alpha$  jest również kątem między styczną a cięciwą.



$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

### Twierdzenie

#### Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą

Kąt  $\alpha$  między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta  $\alpha$ .

#### Dowód

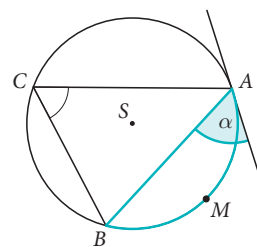
Oznaczmy:

$A$  – punkt styczności

$AB$  – cięciwa

$\alpha$  – kąt między styczną a cięciwą

Kolorem zaznaczamy łuk okręgu, o którym mówi twierdzenie, czyli łuk zawarty w obszarze kąta  $\alpha$ .



Kąt  $\alpha$  może być ostry, prosty lub rozwarty. Dowód twierdzenia przeprowadzimy zatem w trzech przypadkach.

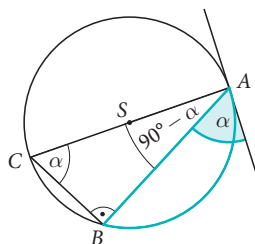
### I. Kąt $\alpha$ jest ostry.

Jeżeli  $\alpha$  jest kątem ostrym, to po zaznaczeniu średnicy  $AC$  otrzymamy trójkąt  $ABC$  jak na rysunku.

Kątem wpisanym opartym na łuku zawartym w obszarze kąta  $\alpha$  jest kąt  $BCA$ .

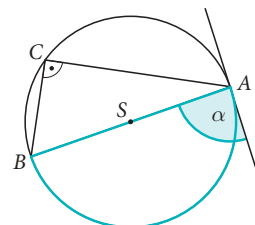
Wystarczy zatem udowodnić, że  $\alpha = \sphericalangle BCA$ , bo każdy inny kąt wpisany na mocy wniosku 3 jest równy kątowi  $BCA$ .

$$\begin{aligned}\sphericalangle CBA &= 90^\circ && \leftarrow \text{kąt wpisany oparty na średnicy} \\ \sphericalangle BAC &= 90^\circ - \alpha && \leftarrow \text{styczna jest prostopadła do promienia} \\ \sphericalangle BCA &= \alpha && \leftarrow \text{własność sumy kątów w trójkącie}\end{aligned}$$



### II. Kąt $\alpha$ jest prosty.

Jeżeli  $\alpha$  jest kątem prostym, to łuk zawarty w jego obszarze jest półokręgiem, a każdy kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.



### III. Kąt $\alpha$ jest rozwarty.

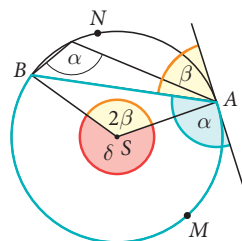
Jeżeli  $\alpha$  jest kątem rozwartym, to przyległy do niego kąt  $\beta$  jest ostry. Kąt środkowy wyznaczony przez łuk  $BMA$  oznaczyliśmy  $\delta$ .

Prawdziwość tezy dla kąta  $\beta$  została udowodniona, co oznacza, że kąt wpisany oparty na łuku  $ANB$  ma miarę  $\beta$ . Zatem w trójkącie  $ASB$  kąt  $ASB$  ma miarę  $2\beta$ .

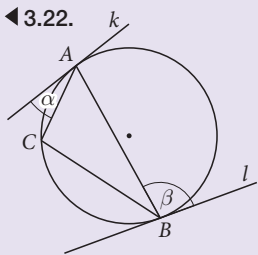
$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \alpha && \leftarrow \text{kąt przyległy} \\ \delta &= 360^\circ - 2\beta = 360^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha\end{aligned}$$

Skoro kąt środkowy oparty na łuku  $BMA$  ma miarę  $2\alpha$ , to kąt wpisany oparty na tym łuku ma miarę  $\alpha$ .

Koniec dowodu



3.22.



W trójkącie  $ABC$  dane są  $\sphericalangle ABC = 28^\circ$ ,  $\sphericalangle BAC = 54^\circ$ . Wyznacz miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , jakie tworzą boki trójkąta ze stycznymi  $k$  i  $l$  poprowadzonymi do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  (zob. rysunek).

Odp.:  $\alpha = 28^\circ$ ,  $\beta = 98^\circ$

### Odpowiedzi i rozwiązania

3.1.  $20^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $200^\circ$

3.2. 5% na diagramie odpowiada kątowi o mierze  $18^\circ$ ,  
 $10\% - 36^\circ$ ,  
 $20\% - 72^\circ$ ,  
 $25\% - 90^\circ$ ,  $30\% - 108^\circ$ .

3.3. a)  $24\pi$  b)  $\frac{1}{30}\pi$  c)  $11\pi$

d)  $\frac{80}{9}\pi$

3.4.  $72^\circ$

3.5. kawałek pizzy dużej

3.6.  $16\pi$



### Przykład 9 zad. 3.22

Prosta  $l$  jest styczna do okręgu w punkcie  $B$  i tworzy z cięciwami  $AB$  i  $BC$  odpowiednio kąty  $40^\circ$  i  $80^\circ$  jak na rysunku. Wyznamy miary kątów trójkąta  $ABC$ .

#### Rozwiązanie

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$$

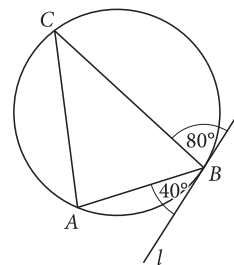
$\sphericalangle BCA$  jest kątem wpisanym opartym na łuku  $AB$ , czyli jest równy kątowi między styczną a cięciwą zawierającą ten łuk. Zatem:

$$\sphericalangle BCA = 40^\circ$$

Kąt  $CAB$  wyznaczamy podobnie (albo korzystamy z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie) i otrzymujemy:

$$\sphericalangle CAB = 80^\circ$$

Odp.:  $\sphericalangle A = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 40^\circ$



### Zadania

3.1. Na okręgu odmierzone kolejno łuki  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$ , których długości są w stosunku  $1 : 7 : 10$ . Wyznacz miary kątów środkowych opartych na tych łukach.

3.2. Dany jest diagram kołowy. Oblicz miary kątów zaznaczonych kolorami wycinków kołowych.

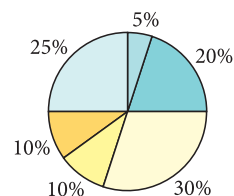
3.3. Oblicz pole wycinka kołowego o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyznaczającym ten wycinek.

a)  $r = 12$ ,  $\alpha = 60^\circ$

c)  $r = 2\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 330^\circ$

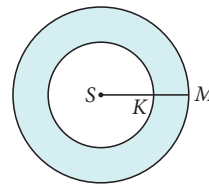
b)  $r = 1$ ,  $\alpha = 12^\circ$

d)  $r = 8$ ,  $\alpha = 50^\circ$



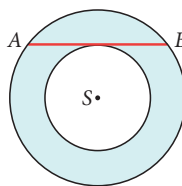
3.4. Pole wycinka kołowego o promieniu 15 jest równe  $45\pi$ . Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek.

3.5. Przyjmijmy, że kawałki pizzy są wycinkami kołowymi. Który z dwóch kawałków ma większą powierzchnię: kawałek pizzy dużej o średnicy 42 cm i kącie środkowym  $30^\circ$  czy kawałek pizzy średniej o średnicy 32 cm i kącie środkowym  $45^\circ$ ?



3.6. W pierścieniu kołowym przedstawionym na rysunku obok  $|SK| = 3$  i  $|KM| = 2$ . Oblicz pole tego pierścienia.

**3.7.** Długości okręgów ograniczających pierścień kołowy są równe 10 i 12. Oblicz pole tego pierścienia.



**3.8.** Dany jest pierścień kołowy o środku  $S$ . Cięciwa  $AB$  zewnętrznego okręgu jest styczna do wewnętrznego okręgu i ma długość 18 (zob. rysunek). Oblicz pole tego pierścienia.

**3.9.** Cięciwy  $AB$  i  $BC$  okręgu są równej długości i tworzą kąt  $ABC$  o mierze  $100^\circ$ . Oblicz miarę wypukłego kąta środkowego wyznaczonego przez cięciwę  $AB$ .

**3.10.** Kąt wpisany jest o  $50^\circ$  mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Oblicz miary obydwu kątów.

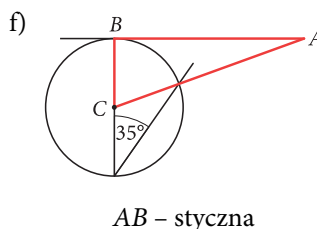
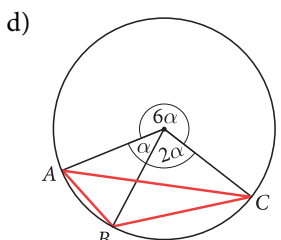
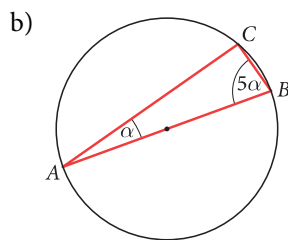
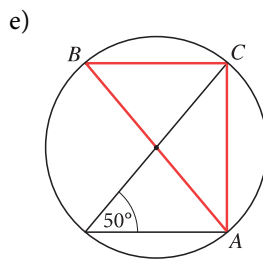
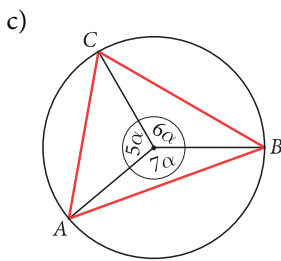
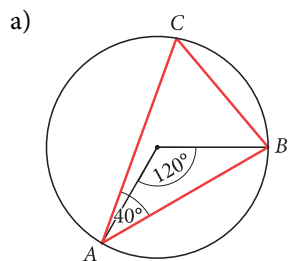
**3.11.** Kąt między średnicą  $AC$  i cięciwą  $AB$  okręgu o środku  $S$  ma miarę  $20^\circ$ . Wyznacz miary kątów wewnętrznych w trójkątach  $ASB$  i  $ACB$ .

**3.12.** Na okręgu zaznaczono kolejno punkty  $A, B, C, D, E$  i  $F$  w taki sposób, że łuki  $AB, BC$  i  $CD$  są jednakowej długości, a każdy z łuków  $DE, EF$  i  $FA$  jest dwa razy dłuższy od łuku  $AB$ .

a) Wyznacz miary kątów sześciokąta  $ABCDEF$ .

b) Jakie kąty miałby taki sześciokąt, gdyby łuki były ustawione na przemian: dłuższy, krótszy, dłuższy itd.?

**3.13.** Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .



**3.7.**  $\frac{11}{\pi}$

**3.8.**  $81\pi$ . *Wskazówka:* Zauważ, że pole tego pierścienia można wyrazić bez wyznaczania promieni ograniczających go okręgów.

**3.9.**  $80^\circ$

**3.10.**  $50^\circ, 100^\circ$

**3.11.**  $\triangle ASB$ :  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle S = 140^\circ$ ;  
 $\triangle ACB$ :  $\sphericalangle A = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 70^\circ$

**3.12.** a)  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 120^\circ$ ,  
 $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 140^\circ$ ,  $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 100^\circ$   
 b) po  $120^\circ$

**3.13.** a)  $\sphericalangle A = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 80^\circ$ ,  
 $\sphericalangle C = 60^\circ$

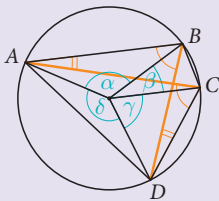
b)  $\sphericalangle A = 15^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 75^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 90^\circ$

c)  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 50^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 70^\circ$

d)  $\sphericalangle A = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 20^\circ$

e)  $\sphericalangle A = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 50^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 90^\circ$

f)  $\sphericalangle A = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 70^\circ$

**3.14.**  $115^\circ$ **3.15.** a)  $120^\circ$  b)  $80^\circ$  c)  $125^\circ$   
d)  $70^\circ$ **3.16.**  $2\alpha + \beta + 2\gamma = 180^\circ$   
(kąt półpełny o wierzchołku S),  
więc  $\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = 90^\circ$ **3.17.**  $\sphericalangle P = \sphericalangle B = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle S = 100^\circ$ **3.18.**  $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$ ,  
 $\sphericalangle ACD = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle C = 60^\circ$ ,  
 $\sphericalangle A = 120^\circ$ ;  $\sphericalangle ADB = 40^\circ$ ,  
 $\sphericalangle BDC = 70^\circ \Rightarrow \sphericalangle D = 110^\circ$ ,  
zatem  $\sphericalangle B = 70^\circ$ **Odp.:**  $\sphericalangle A = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 70^\circ$ ,  
 $\sphericalangle C = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle D = 110^\circ$ **3.19.** $\alpha = 120^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 70^\circ$   
 $\delta = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 140^\circ$   
W czworokącie ABCD:

$$\sphericalangle A = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 50^\circ,$$

$$\sphericalangle B = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 105^\circ$$

$$\sphericalangle C = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = 130^\circ,$$

$$\sphericalangle D = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 75^\circ$$

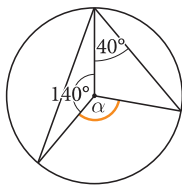
$$\triangle ABE \sim \triangle CDE \text{ (kkk)}$$

$$\begin{cases} \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \frac{1}{2}\beta = 15^\circ \\ \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\delta = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

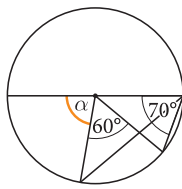
$$\Rightarrow \sphericalangle AEB = \sphericalangle CED =$$
  
$$= 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

Przekątne czworokąta ABCD  
przecinają się pod kątem  $85^\circ$  ( $95^\circ$ ).**3.20.**  $80^\circ$ **3.21.**  $80^\circ$  lub  $100^\circ$ **3.22.**  $\alpha = 28^\circ$ ,  $\beta = 98^\circ$ **3.14.** W kąt  $\alpha = 50^\circ$  wpisano okrąg, który jest styczny do ramion kąta w punktach A i B. Na krótszym łuku AB okręgu wybrano punkt M. Oblicz miarę kąta AMB.**3.15.** Wyznacz miarę kąta  $\alpha$ .

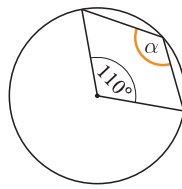
a)



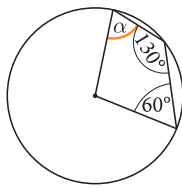
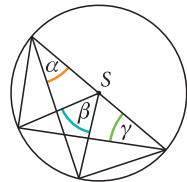
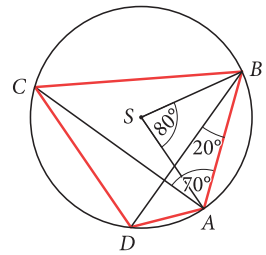
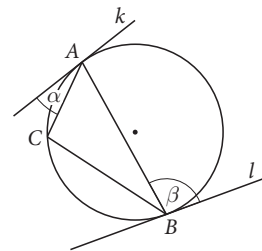
b)



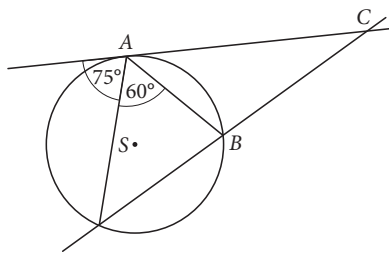
c)



d)

**D****3.16.** Kąty  $\alpha$  i  $\gamma$  są kątami wpisanymi, a kąt  $\beta$  jest kątem środkowym – jak na rysunku. Wykaż, że  $\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = 90^\circ$ .**3.17.** Dwa okręgi o środkach O i S są styczne zewnętrznie w punkcie P. Przez punkt P poprowadzono prostą przecinającą te okręgi odpowiednio w punktach A i B tak, że kąt środkowy AOP ma miarę równą  $100^\circ$ . Wyznacz kąty trójkąta PBS.**3.18.** Wszystkie wierzchołki czworokąta ABCD leżą na okręgu jak na rysunku obok. Wyznacz miary kątów tego czworokąta.**3.19.** Na okręgu odmierzymy kolejno łuki AB, BC i CD odpowiadające kątom środkowym  $120^\circ$ ,  $30^\circ$  i  $70^\circ$ . Wyznacz miary kątów czworokąta ABCD oraz kąta, pod jakim przecinają się jego przekątne.**3.20.** Kąt między cięciwami AB i AC w okręgu ma miarę  $40^\circ$ . Wyznacz miarę kąta ostrego między stycznymi do tego okręgu poprowadzonymi w punktach B i C.**3.21.** W kąt o mierze  $20^\circ$  wpisano okrąg. Punkty styczności ramion kąta z okręgiem połączono cięciwami z pewnym punktem okręgu. Wyznacz miarę kąta między tymi cięciwami. Rozpatrz dwa przypadki.**3.22.** W trójkącie ABC dane są  $\sphericalangle ABC = 28^\circ$ ,  
 $\sphericalangle BAC = 54^\circ$ . Wyznacz miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , jakie tworzą boki trójkąta ze stycznymi k i l poprowadzonymi do okręgu opisanego na trójkącie ABC (zob. rysunek).

**3.23.** Prosta  $AC$  jest styczna do okręgu o środku  $S$ . Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$  przedstawionego na rysunku.



\* **3.24.** Narysuj odcinek  $AB$ . Wyznacz konstrukcyjnie zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, z których ten odcinek widać pod kątem  $30^\circ$ .

### Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

**1.** Wyznacz miarę kąta  $\alpha$ .

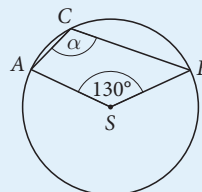
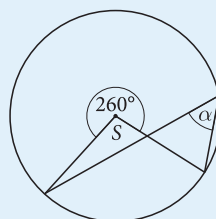
- A.  $130^\circ$       B.  $100^\circ$       C.  $50^\circ$       D.  $45^\circ$

**2.** Jaką miarę ma kąt wpisany oparty na łuku o długości równej  $\frac{4}{9}$  obwodu koła?

- A.  $20^\circ$       B.  $40^\circ$       C.  $80^\circ$       D.  $160^\circ$

**3.** Punkty  $A, B, C$  leżą na okręgu o środku  $S$  jak na rysunku. Wyznacz miarę kąta  $\alpha$ .

- A.  $100^\circ$       C.  $115^\circ$   
B.  $110^\circ$       D.  $125^\circ$

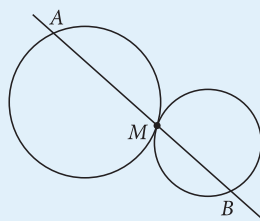


**4.** Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg o środku  $S$ . Oceń prawdziwość podanych zdań. Suma miar kątów  $ASB, ASC$  i  $BSC$  może być równa

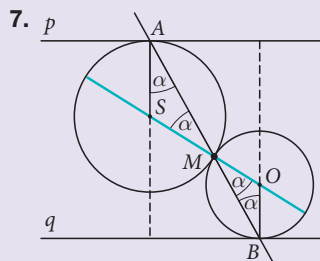
- A.  $360^\circ$ .      B.  $180^\circ$ .      C. podwojonej mierze kąta  $BSA$ .

**5.** Na okręgu odmieramy kolejno łuki  $AB$  i  $BC$  odpowiadające kątom środkowym  $55^\circ$  i  $125^\circ$ . Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .

**6.** Z punktu  $A$  leżącego na okręgu poprowadzono cięciwę  $AC$  o długości równej promieniowi okręgu oraz średnicę  $AB$ . Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .



**D 7.** Przez punkt styczności  $M$  dwóch okręgów poprowadzono prostą przecinającą je w punktach  $A$  i  $B$  jak na rysunku obok. Wykaż, że styczne poprowadzone do okręgów odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$  są równoległe.



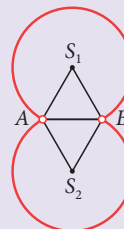
Trójkąty  $ASM$  i  $BOM$  są równoramienne (i podobne),  $\angle SAM$  i  $\angle OBM$  są kątami naprzemianległymi wewnętrznymi, zatem proste  $AS$  i  $OB$  są równoległe.

Proste  $p$  oraz  $q$  są stycznymi do  $o(A, |AS|)$  i  $o(O, |OB|)$ .

$p \perp AS$ ,  $q \perp OB$ ,  $AS \parallel OB$ , więc  $p \parallel q$ .

**3.23.**  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ ,  
 $\angle C = 30^\circ$

**3.24.** Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym.



Trójkąty  $ABS_1$  i  $ABS_2$  są równoboczne.

### Prosto do matury

**1.** C

**2.** C

**3.** C

**4.** P, P, P

**5.**  $\angle A = 62,5^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  
 $\angle C = 27,5^\circ$

**6.**  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$

## 4. Twierdzenie Talesa

### Umiejętności:

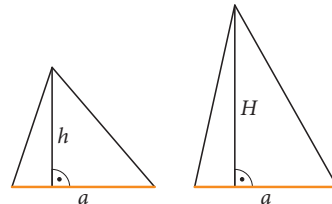
- stosowanie twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków
- stosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa do badania równoległości prostych

Zbadajmy zależności między polami trójkątów i pewnymi odcinkami w tych trójkątach.

Rozpatrzmy dwa trójkąty o równych podstawach  $a$  i wysokościach  $h$  oraz  $H$ . Obliczmy stosunek pól  $P_1$  i  $P_2$  tych trójkątów.

$$P_1 = \frac{ah}{2}, \quad P_2 = \frac{aH}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{h}{H}$$



Przypomnijmy – **stosunkiem odcinków** nazywamy stosunek długości tych odcinków.

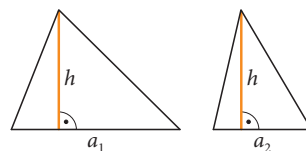


Stosunek pól takich trójkątów jest równy stosunkowi ich wysokości.

Podobną sytuację mamy w przypadku dwóch trójkątów o równych wysokościach.

$$P_1 = \frac{a_1 h}{2}, \quad P_2 = \frac{a_2 h}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2}$$



Stosunek pól takich trójkątów jest równy stosunkowi ich podstaw.

Omówione wyżej zależności będą przydatne do udowodnienia **twierdzenia Talesa**.

Tales z Miletu (ok. 620 – ok. 540 p.n.e.), grecki filozof i matematyk, sformułował kilka ważnych twierdzeń geometrycznych. Najbardziej znane dotyczy równości stosunków odcinków otrzymanych przy podziale ramion kąta prostymi równoległymi.

### Twierdzenie

#### Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

#### ZZ i KPU

temat 6.3 (klasa 1)

#### Multiteka

- Dowód twierdzenia Talesa z wykorzystaniem pól trójkątów
- Dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.4

Przyjmijmy oznaczenia zgodne z rysunkiem.

**Założenie**

$$AA' \parallel BB'$$

**Teza**

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

**Dowód**

Trójkąty  $OAA'$  i  $ABA'$  mają różne podstawy  $OA$  i  $AB$  oraz wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka  $A'$ , zatem:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle ABA'}}$$

$AA' \parallel BB'$ , zatem trójkąty  $ABA'$  i  $AB'A'$  mają wspólną podstawę  $AA'$  oraz równe wysokości poprowadzone z wierzchołków  $B$  oraz  $B'$ , czyli:

$$P_{\triangle ABA'} = P_{\triangle AB'A'}$$

Po podstawieniu do poprzedniej równości mamy:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}}$$

$$\frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

← trójkąty  $OAA'$  i  $AB'A'$  mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka  $A$

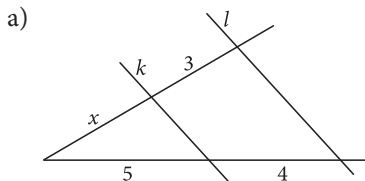
Zatem:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAA'}}{P_{\triangle AB'A'}} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}, \text{ czyli } \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

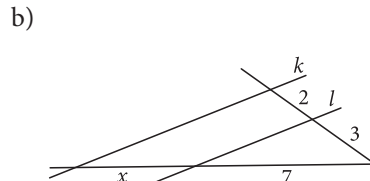
**Koniec dowodu**

**Przykład 1** ◀ zad. 4.2, 4.3

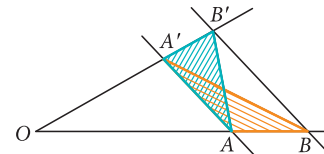
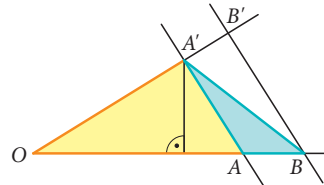
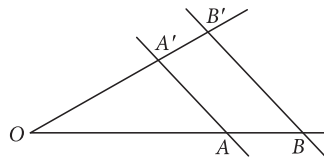
Proste  $k$  i  $l$  są równoległe. Obliczmy długość odcinka  $x$ .



$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}, \text{ więc } x = \frac{15}{4}$$

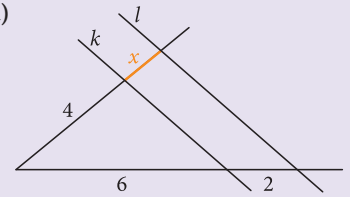


$$\frac{3}{2} = \frac{7}{x}, \text{ więc } x = \frac{14}{3}$$

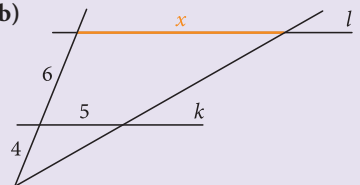


◀ 4.2. Proste  $k$  i  $l$  są równoległe. Oblicz  $x$ .

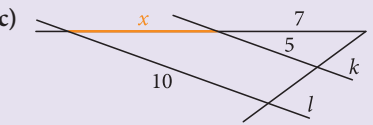
a)



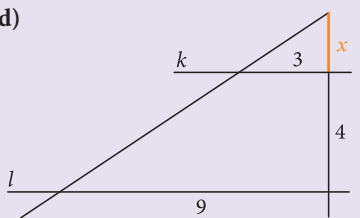
b)



c)

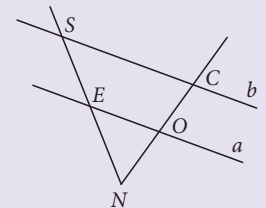


d)



Odp.: a)  $1\frac{1}{3}$  b) 12,5 c) 7 d) 2

◀ 4.3.



Proste  $a$  i  $b$  na rysunku są równoległe. Oblicz

a)  $|NE|$ , jeżeli  $|NS| = 33$ ,  $|NO| = 16$ ,  $|NC| = 44$ .

b)  $|CO|$ , jeżeli  $|NC| = 3$ ,  $|NS| = 18$ ,  $|ES| = 0,6$ .

c)  $|EO|$ , jeżeli  $|SN| = 14$ ,  $|SE| = 8$ ,  $|SC| = 35$ .

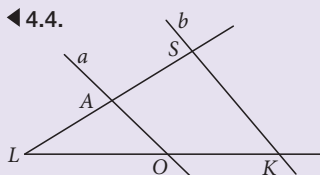
d)  $|SC|$ , jeżeli  $|EO| = 3$ ,  $|EN| = 1,5$ ,  $|SE| = 2$ .

e)  $|NC|$ , jeżeli  $|NO| = 4$ ,  $|SE| = 1,2$ ,  $|SN| = 1,8$ .

f)  $|EO|$ , jeżeli  $|SE| : |EN| = 2 : 5$ ,  $|SC| = 14$ .

Odp.: a) 12 b) 0,1 c) 15 d) 7  
e) 12 f) 10





Proste  $a$  i  $b$  przecięły ramiona kąta o wierzchołku  $L$  tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki  $LO$  i  $OK$ , a na drugim  $LA$  i  $AS$  (zob. rysunek). Skorzystaj z podanych informacji i sprawdź, czy proste  $a$  i  $b$  są równoległe.

a)  $|LO| : |LK| = 2 : 3$ ,  $|LA| = 4$ ,  $|AS| = 6$

b)  $|LO| : |LK| = 1 : 8$ ,  $|OA| = 2$ ,  $|KS| = 16$

c)  $|LK| = \sqrt{2} + 1$ ,  $|OK| = 1$ ,  $|LA| : |AS| = \sqrt{2}$

d)  $|LO| = 3\sqrt{2}$ ,  $|OK| = 2\sqrt{2} - 1$ ,  $|OA| : |KS| = 2 + \sqrt{2}$

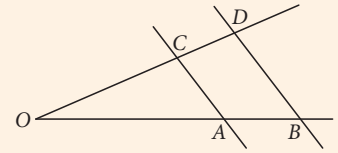
**Odp.:** a) nie   b) za mało danych, żeby to stwierdzić   c) tak   d) nie

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

### Twierdzenie

#### Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

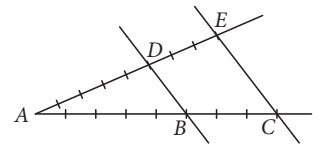
Jeżeli ramiona kąta  $COA$  są przecięte dwiema prostymi  $AC$  i  $BD$  w taki sposób, że odcinki  $OA$  i  $AB$  leżące na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odcinków  $OC$  i  $CD$  wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta:  $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$ , to proste  $AC$  i  $BD$  są równoległe.



Dowód tego twierdzenia pominiemy.

#### Przykład 2 zad. 4.4

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{3}$  oraz  $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{5}{3}$ , więc prosta  $DB$  jest równoległa do prostej  $EC$ .

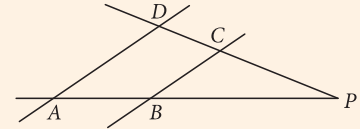


Na podstawie twierdzenia Talesa można zapisać proporcje innych odcinków.

### Wniosek

Jeżeli proste  $AD$  i  $BC$  są równoległe jak na rysunku poniżej, to:

- (1)  $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}$
- (2)  $\frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PD|}{|CD|}$
- (3)  $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$



Ten wniosek pozostawiamy bez uzasadnienia.

Zauważmy też, że równości podane w twierdzeniu Talesa oraz we wniosku możemy przedstawiać w różnych postaciach, zgodnie z zasadami działań na ułamkach (zob. ramka obok).

Założmy, że  $a, b, c, d$  są różne od 0.

Jeżeli  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , to:

•  $a \cdot d = b \cdot c$

•  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

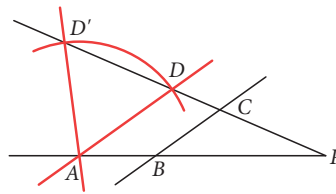
•  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

**Przykład 3** ◀ zad. 4.4

Dwie proste przecinają ramiona kąta o wierzchołku  $P$  tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki  $PB$  i  $PA$  ( $B$  leży między  $P$  i  $A$ ), na drugim  $PC$  i  $PD$  ( $C$  leży między  $P$  i  $D$ ) oraz  $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$ . Sprawdźmy, czy na podstawie podanych informacji można stwierdzić, że proste  $BC$  i  $AD$  są równoległe.

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że jeśli proste  $BC$  i  $AD$  są równoległe, to równość podana w założeniach jest prawdziwa na mocy powyższego wniosku – punkt (3). Można podać jednak przykład pokazujący, że wnioskowanie w drugą stronę nie jest prawdziwe. Popatrzmy na rysunek.

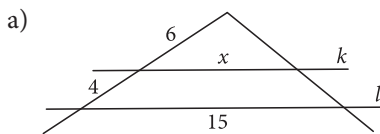


Odcinki  $AD$  i  $AD'$  są tej samej długości, czyli punkt  $D'$  spełnia założenia zadania – w szczególności  $\frac{|AD'|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$ , natomiast proste  $BC$  i  $AD'$  nie są równoległe.

**Odp.:** Na podstawie podanych informacji nie można stwierdzić, czy proste  $BC$  i  $AD$  są równoległe.

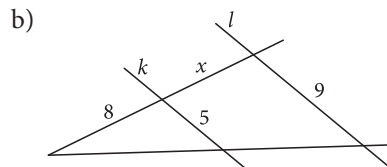
**Przykład 4** ◀ zad. 4.5, 4.6

Proste  $k$  i  $l$  są równoległe. Obliczmy długość odcinka  $x$ .



$$\frac{x}{6} = \frac{15}{4+6}$$

$$10x = 15 \cdot 6, \text{ czyli } x = 9$$



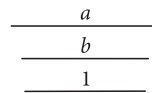
$$\frac{5}{8} = \frac{9}{8+x}$$

$$5(8+x) = 72, \text{ czyli } x = 6,4$$

Jeżeli mamy podany odcinek jednostkowy, to możemy konstruować odcinki o długości będącej iloczynem lub ilorazem długości danych odcinków.

**Przykład 5** ◀ zad. 4.7

Dane są odcinki o długościach  $a$  i  $b$  oraz odcinek jednostkowy. Zbudujemy odcinek o długości  $ab$ .

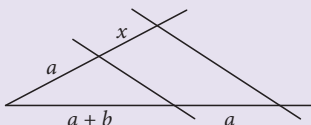


◀ 4.8. Narysuj odcinki o długościach  $a$  i  $b$ , a następnie skonstruuj odcinek  $x$  taki, że

a)  $x = \frac{a^2}{a+b}$ .

b)  $x = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$ .

**Odp.:**

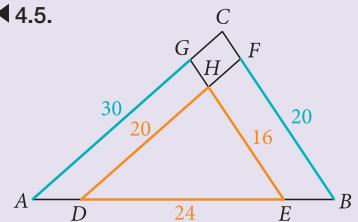


a) **Wskazówka:** Zauważ, że podany warunek jest równoważny warunkowi  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{x}$ .

b)  $x = \frac{a^2 + b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} = x_1 + x_2$ , gdzie  $x_1 = \frac{a^2}{a+b}$  i  $x_2 = \frac{b^2}{a+b}$  – patrz rozwiązanie 4.8.a)

## ◀ 4.4. Patrz s. 180.

## ◀ 4.5.



W trójkącie  $ABC$  poprowadzono odcinki  $DF$  i  $EG$  tak, że  $DF \parallel AC$  i  $EG \parallel BC$  (zob. rysunek). Oblicz długości boków trójkąta  $ABC$ .

**Odp.:**  $|AB| = 42$ ,  $|BC| = 28$ ,  $|AC| = 35$

◀ 4.6. Na prostej leżą kolejno punkty  $A, B, C, D$  tak, że zachodzi proporcja  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ . Oblicz

a)  $|AB|$ , jeżeli  $|BC| = 3$ ,  $|CD| = 7$ .

b)  $|BC|$ , jeżeli  $|CD| = 5$ ,  $|AB| = 10$ .

**Odp.:** a)  $4\frac{2}{7}$  b) 5

## Rozwiązanie

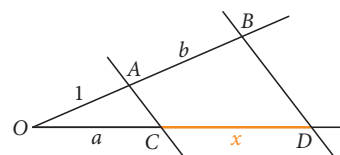
Oznaczmy iloczyn  $ab$  literą  $x$ . Wówczas:

$$x = ab, \text{ czyli } x \cdot 1 = ab$$

Tę równość zapisujemy w postaci proporcji, np.:

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$$

Kolejne etapy konstrukcji odcinka o długości  $ab$  opiszemy w tabeli.



| Wykonywana czynność                                                                                                                        | Otrzymana figura                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rysujemy kąt o wierzchołku $O$ i na jednym jego ramieniu odkładamy kolejno: odcinek jednostkowy $OA$ i taki odcinek $AB$ , że $ AB  = b$ . | punkty $A$ i $B$                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Na drugim ramieniu kąta odkładamy taki odcinek $OC$ , że $ OC  = a$ .                                                                      | punkt $C$                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Prowadzimy prostą $AC$ , a następnie przez punkt $B$ równoległą do niej prostą $BD$ .                                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>punkt <math>D</math>, jako punkt przecięcia prostej równoległej do <math>AC</math> z drugim ramieniem kąta</li> <li>szukany odcinek <math>CD</math> – zgodnie z twierdzeniem Talesa mamy <math> CD  = ab</math></li> </ul> |

Poprawność konstrukcji wynika z twierdzenia Talesa.

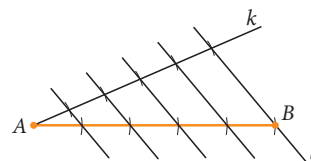
Z wyprowadzonych wzorów wynika, że jeśli przetniemy ramiona kąta dowolnie wieloma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone na jednym ramieniu są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta. Ten fakt wykorzystujemy przy konstrukcyjnym podziale odcinka na  $n$  równych części.

## Przykład 6

Podzielimy dany odcinek  $AB$  na pięć równych części.

## Rozwiązanie

- Z punktu  $A$  prowadzimy półprostą  $k$  i odkładamy na niej pięć równych odcinków tak, że koniec jednego jest początkiem następnego odcinka.
- Przez koniec ostatniego odcinka i punkt  $B$  prowadzimy prostą  $l$ .
- Prowadzimy proste równoległe do  $l$  przez końce odłożonych na półprostej  $k$  odcinków – dzielą one odcinek  $AB$  w żądany sposób.



**Przykład 7** zad. 4.11

Na jeziorze umocowana jest boja (oznaczona na rysunku literą  $K$ ). Podamy sposób obliczenia jej odległości od punktu  $D$  znajdującego się na brzegu.

**Rozwiązanie**

Wytyczamy na brzegu dwa punkty  $A$  i  $B$  oraz na linii brzegu punkt  $C$  w taki sposób, że odcinki  $AB$  i  $CD$  są równoległe, punkty  $K, D$  i  $B$  są współliniowe oraz punkty  $K, C$  i  $A$  są współliniowe. Mierzmy długości  $|DB|$ ,  $|AB|$  i  $|CD|$ .

$$\frac{|KD|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

← na mocy wniosku z twierdzenia Talesa

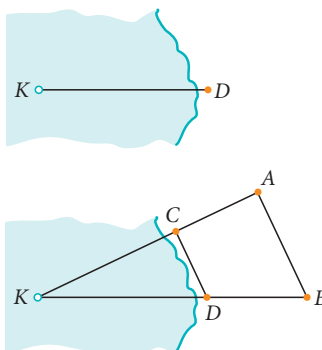
$$\frac{|KD|}{|KD| + |DB|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

←  $|KB| = |KD| + |DB|$

$$|KD| \cdot |AB| = |CD| \cdot (|KD| + |DB|)$$

$$|KD| \cdot |AB| - |CD| \cdot |KD| = |CD| \cdot |DB|, \text{ stąd } |KD| \cdot (|AB| - |CD|) = |CD| \cdot |DB|$$

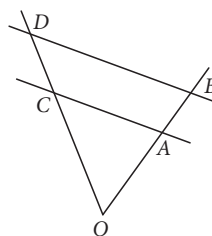
$$\text{Odp.: } |KD| = \frac{|CD| \cdot |DB|}{|AB| - |CD|}$$

**Zadania**

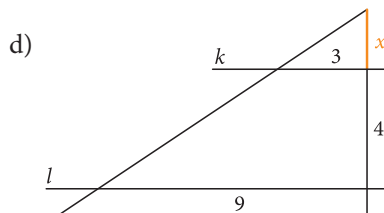
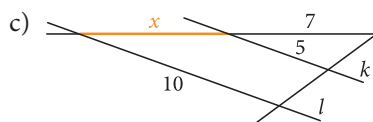
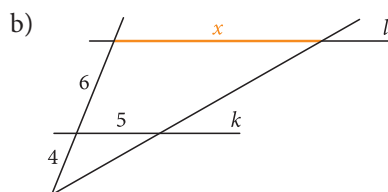
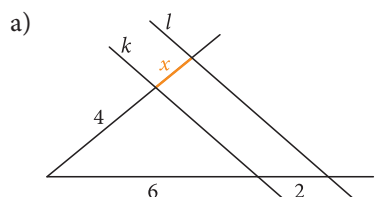
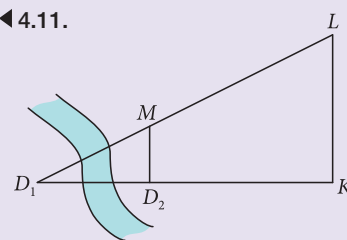
**4.1.** Proste  $AC$  i  $BD$  na rysunku obok są równoległe.

Oceń prawdziwość podanych proporcji.

A.  $\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$       B.  $\frac{|DB|}{|CA|} = \frac{|DC|}{|CO|}$       C.  $\frac{|DB|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|OA|}$



**4.2.** Proste  $k$  i  $l$  są równoległe. Oblicz  $x$ .

**4.11.**

Chcemy zmierzyć odległość między drzewami  $D_1$  i  $D_2$ , ale nie możemy zrobić tego bezpośrednio, bo rozdziela je rzeka. Na podstawie rysunku opisz sposób, w jaki można wyznaczyć tę odległość. Oblicz  $|D_1D_2|$ , gdy  $|D_2M| = 4$  m,  $|D_2K| = 12$  m i  $|KL| = 10$  m.

Odp.: 8 m

**Odpowiedzi i rozwiązania**

**4.1.** F, F, P

**4.2.** a)  $1\frac{1}{3}$     b) 12,5    c) 7    d) 2

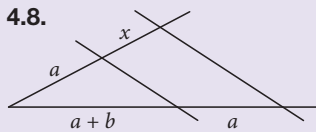
**4.3.** a) 12 b) 0,1 c) 15 d) 7  
e) 12 f) 10

**4.4.** a) nie b) za mało danych, żeby to stwierdzić c) tak d) nie

**4.5.**  $|AB| = 42$ ,  $|BC| = 28$ ,  
 $|AC| = 35$

**4.6.** a)  $4\frac{2}{7}$  b) 5

**4.7.** Wskazówka: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 181.



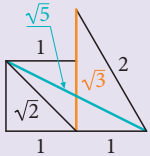
a) Wskazówka: Zauważ, że podany warunek jest równoważny

warunkowi  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{x}$ .

$$\text{b) } x = \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{a + b} =$$

$= x_1 + x_2$ , gdzie  $x_1 = \frac{a^2}{a + b}$   
i  $x_2 = \frac{b^2}{a + b}$  – patrz rozwiązanie 4.8.a)

**4.9.** Rysunek pomocniczy:

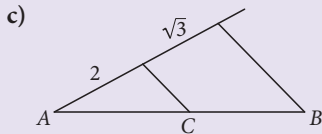


Wskazówka:

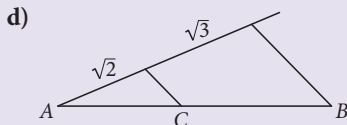
Przeanalizuj przykład 6 ze s. 182.

a) Wskazówka: Odłóż na półprostej odcinki o długościach 2 i 5.

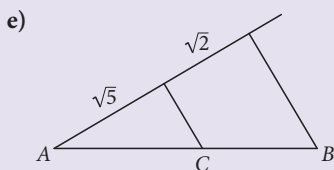
b) Wskazówka: Zauważ, że odcinek o długości  $\sqrt{2}$  jest przekątną kwadratu o boku 1.



$2 : \sqrt{3}$ ,  $|AC| : |CB| = 2 : \sqrt{3}$ ,  $a = AB$



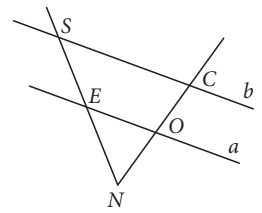
$\sqrt{2} : \sqrt{3}$ ,  $|AC| : |CB| = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ ,  $a = AB$



$\sqrt{5} : \sqrt{2}$ ,  $|AC| : |CB| = \sqrt{5} : \sqrt{2}$ ,  $a = AB$

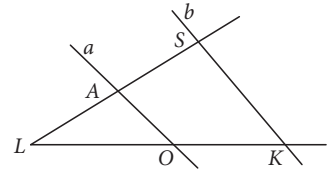
**4.3.** Proste  $a$  i  $b$  na rysunku są równoległe. Oblicz

- a)  $|NE|$ , jeżeli  $|NS| = 33$ ,  $|NO| = 16$ ,  $|NC| = 44$ .  
b)  $|CO|$ , jeżeli  $|NC| = 3$ ,  $|NS| = 18$ ,  $|ES| = 0,6$ .  
c)  $|EO|$ , jeżeli  $|SN| = 14$ ,  $|SE| = 8$ ,  $|SC| = 35$ .  
d)  $|SC|$ , jeżeli  $|EO| = 3$ ,  $|EN| = 1,5$ ,  $|SE| = 2$ .  
e)  $|NC|$ , jeżeli  $|NO| = 4$ ,  $|SE| = 1,2$ ,  $|SN| = 1,8$ .  
f)  $|EO|$ , jeżeli  $|SE| : |EN| = 2 : 5$ ,  $|SC| = 14$ .



**4.4.** Proste  $a$  i  $b$  przecięły ramiona kąta o wierzchołku  $L$  tak, że na jednym ramieniu powstały odcinki  $LO$  i  $OK$ , a na drugim  $LA$  i  $AS$  (zob. rysunek). Skonstruuj z podanych informacji i sprawdź, czy proste  $a$  i  $b$  są równoległe.

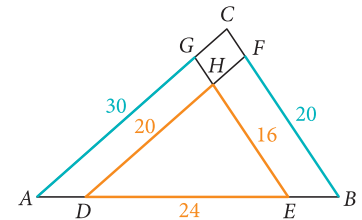
- a)  $|LO| : |LK| = 2 : 3$ ,  $|LA| = 4$ ,  $|AS| = 6$   
b)  $|LO| : |LK| = 1 : 8$ ,  $|OA| = 2$ ,  $|KS| = 16$   
c)  $|LK| = \sqrt{2} + 1$ ,  $|OK| = 1$ ,  $|LA| : |AS| = \sqrt{2}$   
d)  $|LO| = 3\sqrt{2}$ ,  $|OK| = 2\sqrt{2} - 1$ ,  $|OA| : |KS| = 2 + \sqrt{2}$



**4.5.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono odcinki  $DF$  i  $EG$  tak, że  $DF \parallel AC$  i  $EG \parallel BC$  (zob. rysunek). Oblicz długości boków trójkąta  $ABC$ .

**4.6.** Na prostej leżą kolejno punkty  $A, B, C, D$  tak, że zachodzi proporcja  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ . Oblicz

- a)  $|AB|$ , jeżeli  $|BC| = 3$ ,  $|CD| = 7$ .  
b)  $|BC|$ , jeżeli  $|CD| = 5$ ,  $|AB| = 10$ .



**4.7.** Narysuj odcinek jednostkowy oraz odcinki o długościach  $a$  i  $b$ , a następnie skonstruuj odcinek o podanej długości.

- a)  $\frac{a}{b}$  b)  $\frac{1}{a}$  c)  $\frac{a+b}{a \cdot b}$

\* **4.8.** Narysuj odcinki o długościach  $a$  i  $b$ , a następnie skonstruuj odcinek  $x$  taki, że

- a)  $x = \frac{a^2}{a+b}$  b)  $x = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$

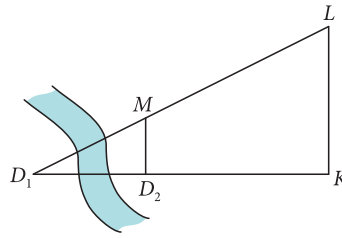
\* **4.9.** Dany odcinek  $a$  podziel konstrukcyjnie w podanym stosunku.

- a)  $2 : 5$  b)  $3 : 2\sqrt{2}$  c)  $2 : \sqrt{3}$  d)  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$  e)  $\sqrt{5} : \sqrt{2}$

**4.10.** Dany jest odcinek o długości  $m$ . Skonstruuj kwadrat, trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny takie, że obwód każdej z tych figur jest równy  $m$ .

**4.10.** Długości boków wielokątów: trójkąt –  $\frac{1}{3}m$ , kwadrat –  $\frac{1}{4}m$ ,  
sześciokąt foremny –  $\frac{1}{6}m$ .

**4.11.** Chcemy zmierzyć odległość między drzewami  $D_1$  i  $D_2$ , ale nie możemy zrobić tego bezpośrednio, bo rozdziela je rzeka. Na podstawie rysunku opisz sposób, w jaki można wyznaczyć tę odległość. Oblicz  $|D_1D_2|$ , gdy  $|D_2M| = 4$  m,  $|D_2K| = 12$  m i  $|KL| = 10$  m.



**4.12.** Przez punkt  $R$  należący do boku  $AB$  trójkąta  $ABC$  poprowadzono prostą równoległą do boku  $AC$ , która przecięła bok  $BC$  w punkcie  $S$ . Kąt  $CAB$  ma miarę  $60^\circ$ ,  $|AR| = 3$  cm,  $|RS| = 15$  cm i  $\frac{|RB|}{|AB|} = \frac{5}{6}$ . Wyznacz długości boków trójkąta  $ABC$ .

**4.13.** W trapezie  $ABCD$ , w którym:  $AB \parallel CD$ ,  $|BC| = 12$  cm,  $|CD| = 4,5$  cm,  $|AD| = 15$  cm, przedłużono nierównoległe boki do przecięcia w punkcie  $S$ . Wiadomo, że  $\frac{|SC|}{|SB|} = \frac{1}{4}$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABS$ .

**4.14.** W trójkącie  $ABC$  wysokość  $CD$  dzieli bok  $AB$  na odcinki o długościach  $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  i  $|DB| = 4\sqrt{3}$ . Na jakie części zostanie podzielony bok  $BC$  długości 8 symetralną boku  $AB$ ?

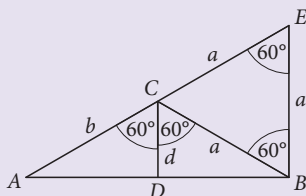
**4.15.** Stosunek długości podstaw trapezu jest równy  $1:3$ . Oblicz, o ile centymetrów należy przedłużyć ramię trapezu długości  $2\sqrt{2}$  cm, aby przecięło prostą zawierającą drugie ramię tego trapezu.

\* **4.16.** Okręgi o promieniach 3 cm i 4,5 cm są styczne zewnętrznie w punkcie  $P$ . Odległość punktu  $P$  od prostej stycznej do obu okręgów jest równa  $d$ . Wyznacz  $d$ .

\* **4.17.** W rombie  $ABCD$  wierzchołek  $D$  kąta rozwartego połączono ze środkami  $K$  i  $L$  boków  $AB$  i  $BC$ . Pole trójkąta  $DKL$  jest równe  $36 \text{ cm}^2$ . Oblicz pole rombu.

**4.18.** Na jednym ramieniu kąta o wierzchołku  $O$  obrano punkty  $K$  i  $L$ , a na drugim  $M$  i  $N$  tak, że  $|OK| = 16$ ,  $|OL| = 52$ ,  $|OM| = 4$ ,  $|MN| = 3m - 2$ . Dla jakiej wartości  $m$  proste zawierające odcinki  $KM$  i  $LN$  są równoległe?

\* **4.19.** W trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  ma miarę  $120^\circ$ ,  $|AC| = b$  i  $|BC| = a$ . Wyznacz długość dwusiecznej  $CD$ .



Oznaczamy  $d = |CD|$ .

Prowadzimy  $BE \parallel CD$ , zatem:

$\angle CBE = \angle BCD = 60^\circ$  (kąty naprzemianległe)

oraz  $\angle BEC = \angle ACD = 60^\circ$  (kąty odpowiadające).

$\triangle BCE$  jest równoboczny o boku  $a$ .

Z twierdzenia Talesa:  $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{d}{a}$ , zatem  $d = \frac{ab}{a+b}$ .

**4.11.** 8 m

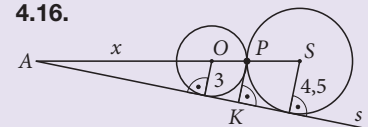
**4.12.** Trójkąt  $ABC$  jest równoboczny o boku 18 cm.

**4.13.** 54 cm

**4.14.**  $2\frac{2}{3}$  i  $5\frac{1}{3}$

**4.15.** o  $\sqrt{2}$  cm

**4.16.**



Oznaczenia:  $d = |PK|$ ;  $x = |OA|$ , gdzie  $A$  to punkt przecięcia prostej  $OS$  z prostą  $s$ .

Z twierdzenia Talesa:

$$\frac{3}{x} = \frac{4,5}{x + |OS|} \Leftrightarrow \frac{3}{4,5} = \frac{x}{x + 7,5} \Leftrightarrow$$

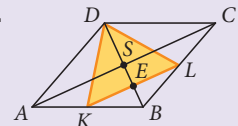
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{x + 7,5} \Rightarrow 2x + 15 = 3x$$

$$x = 15$$

$$\frac{3}{x} = \frac{d}{x + |OP|} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{d}{18} \Rightarrow d = 3,6$$

Odp.:  $d = 3,6$  cm

**4.17.**



Dane:  $|AK| = |KB| = |BL| = |LC|$   
 $AC \perp BD$ ,  $P_{\triangle DKL} = 36 \text{ cm}^2$

Z twierdzenia Talesa:

$$|KL| = \frac{1}{2}|AC|,$$

$$|EB| = |ES| = \frac{1}{4}|BD|, \text{ więc}$$

$$|DE| = \frac{3}{4}|BD|.$$

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$$

$$P_{\triangle DKL} = \frac{1}{2}|KL| \cdot |DE| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot \frac{3}{4}|BD| =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \left( \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \right) = \frac{3}{8}P_{ABCD},$$

stąd

$$P_{ABCD} = \frac{8}{3}P_{\triangle DKL} = \frac{8}{3} \cdot 36 = 96$$

Odp.: Pole rombu jest równe  $96 \text{ cm}^2$ .

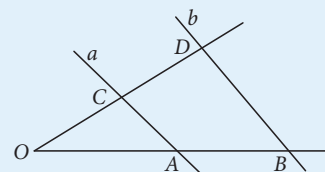
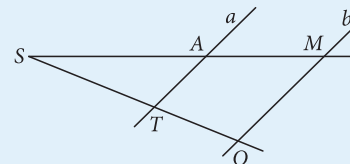
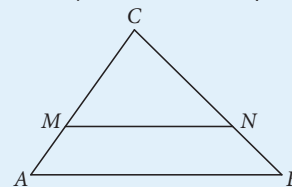
**4.18.**  $m = 3\frac{2}{3}$

## Prosto do matury



## Prosto do matury

1. A
2. D
3. B
4. 18 cm
5. a) tak b) nie
6. o 12 cm
7. 9 cm
- W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.
1. W trapezie  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel DC$ , stosunek długości podstaw  $|DC| : |AB| = 1 : 3$ , a proste zawierające nierównoległe boki  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $S$ . Zatem stosunek długości  $|SD| : |SA|$
- A. jest równy  $1 : 3$ . C. jest równy  $1 : 4$ .  
B. jest równy  $2 : 3$ . D. jest niemożliwy do określenia, bo jest za mało danych.
2. W trójkącie  $ABC$  poprowadzono odcinek  $MN$  jak na rysunku. Jeżeli  $MN \parallel AB$ ,  $|BN| = 5$ ,  $|NC| = 10$  oraz  $|AC| = 12$ , to
- A.  $|AM| = 4$ ,  $|MC| = 8$  i  $|MN| = 14$ .  
B.  $|AM| = 8$ ,  $|MC| = 4$  i  $|MN| = 14$ .  
C.  $|AM| = 5$ ,  $|MC| = 7$  i jest za mało danych do obliczenia  $|MN|$ .  
D.  $|AM| = 4$ ,  $|MC| = 8$  i jest za mało danych do obliczenia  $|MN|$ .
3. W trójkącie  $ABC$  punkt  $M$  leży na boku  $AC$ , a punkt  $N$  – na boku  $BC$ . Które z poniższych danych wykluczają równoległość odcinków  $AB$  i  $MN$ ?
- A.  $|MC| = 3$ ,  $|AM| = 12$ ,  $|CN| = 13$   
B.  $|MC| = 3$ ,  $|AC| = 15$ ,  $|AB| = 20$ ,  $|MN| = 5$   
C.  $|MC| = 3$ ,  $|AC| = 15$ ,  $|CN| = 5$ ,  $|MN| = 5$   
D.  $|BC| = 20$ ,  $|AC| = 15$ ,  $|AB| = 25$ ,  $|MN| = 5$
4. Przedstawione na rysunku proste  $a$  i  $b$  są równoległe. Oblicz  $|ST|$ , jeżeli  $|TO| = 12$  cm,  $|AM| = 16$  cm,  $|SA| = 24$  cm.
5. Proste  $a$  i  $b$  przecinają ramiona kąta o wierzchołku  $O$  w punktach  $A, B$  oraz  $C, D$  jak na rysunku. Skorzystaj z podanych informacji i sprawdź, czy te proste są równoległe.
- a)  $|OA| = 5,1$  cm,  $|OB| = 6,8$  cm,  $\frac{|OC|}{|CD|} = 3$   
b)  $|OA| = 26$  cm,  $|AB| = 4$  cm,  $|OC| = 13$  cm,  $|OD| = 16$  cm
6. Podstawy trapezu są równe 18 cm i 12 cm, a jedno z jego ramion ma 6 cm. O ile należy przedłużyć to ramię, aby przecięło prostą zawierającą drugie ramię trapezu?
7. W trójkącie  $ABC$  na boku  $AC$  obrano punkt  $P$ , przez który poprowadzono prostą  $k$  równoległą do boku  $AB$ . Prosta  $k$  przecięła bok  $BC$  w punkcie  $Q$ . Wiadomo, że  $|AB| = 15$  cm i  $|AP| : |PC| = 2 : 3$ . Oblicz długość odcinka  $PQ$ .



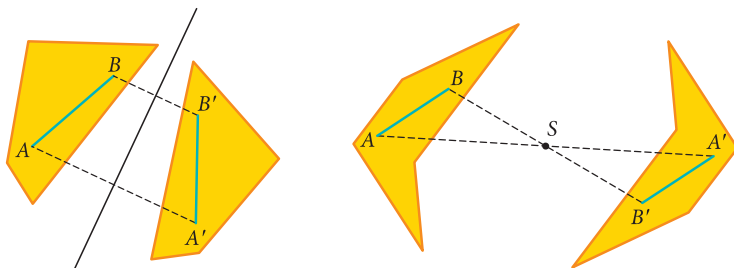
## 5. Podobieństwo

### Umiejętności:

- rozpoznawanie figur podobnych
- wykorzystywanie zależności między polami figur podobnych
- wykorzystywanie (także w praktyce) własności figur podobnych

Symetrię osiową oraz symetrię środkową cechuje **zachowanie odległości**. Oznacza to, że dla dowolnych punktów  $A, B$  odległość między  $A$  i  $B$  jest taka sama jak odległość między ich obrazami  $A'$  i  $B'$  w tych przekształceniach, czyli:

$$|AB| = |A'B'|$$



Jeżeli figura  $F'$  powstaje z figury  $F$  w wyniku przekształcenia zachowującego odległości, to  $F'$  i  $F$  nazywamy **figurami przystającymi**.

Teraz zajmiemy się podobieństwem figur. Tego typu przekształcenia na ogół odległości nie zachowują, tylko je zwiększają albo zmniejszają.

### Definicja

Jeżeli dana jest pewna liczba dodatnia  $k$ , to **podobieństwem** o skali  $k$  nazywamy każde takie przekształcenie płaszczyzny, w którym dla dowolnych punktów  $A, B$  płaszczyzny oraz ich obrazów  $A', B'$  zachodzi równość:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

Dwie figury nazywamy **podobnymi**, jeśli istnieje podobieństwo przekształcające jedną z nich na drugą. Fakt, że figura  $F_1$  jest podobna do figury  $F_2$ , zapisujemy symbolicznie  $F_1 \sim F_2$ .

O figurach przystających mówimy potocznie, że są równe (lub: identyczne), o figurach podobnych – że mają ten sam kształt.

### ZZ i KPU

tematy 6.4, 6.6 (klasa 1)

### Multiteka

- Historia złotej proporcji
- Mona Lisa i złota proporcja

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.5

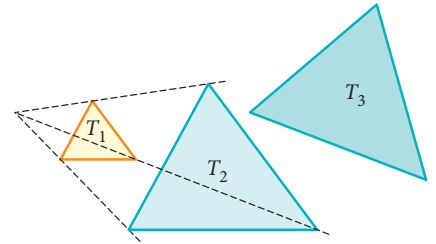
**Generator**  
testów i sprawdzianów



Powiemy, że figury  $F_2$  oraz  $F_1$  są **podobne w skali  $k$** , jeżeli figura  $F_2$  jest obrazem figury  $F_1$  w podobieństwie o skali  $k$ . Zauważmy, że jeżeli figury  $F_2$  oraz  $F_1$  są podobne w skali  $k$ , to figury  $F_1$  oraz  $F_2$  są podobne w skali  $\frac{1}{k}$ .

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Boki trójkąta  $T_1$  są równoległe do boków trójkąta  $T_2$ , więc (zgodnie z twierdzeniem Talesa) boki  $T_1$  są proporcjonalne do odpowiednich boków  $T_2$ . Trójkąt  $T_3$  jest przystający do trójkąta  $T_2$ , więc boki  $T_1$  są proporcjonalne także do odpowiednich boków  $T_3$ . Zatem:



- trójkąty  $T_1$  i  $T_2$  mają odpowiednie boki proporcjonalne,
- trójkąty  $T_1$  i  $T_3$  mają odpowiednie boki proporcjonalne,
- trójkąty  $T_2$  i  $T_3$  mają odpowiednie boki równe, więc proporcjonalne.

Trójkąty  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$  mają ten sam kształt. Udowodnieniem, że są podobne, zajmiemy się w następnym temacie.

### Przykład 1

- a) Dowolne dwa odcinki są podobne.  
Skalą podobieństwa jest stosunek długości tych odcinków.

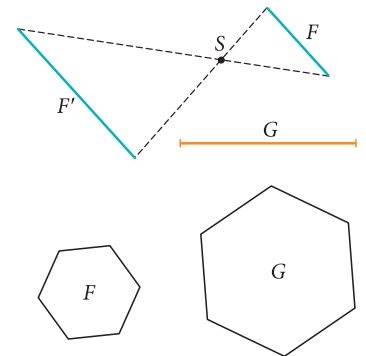
$$F \sim F'$$

$$G \equiv F', \text{ więc } G \sim F'$$

$$F \sim G$$

- b) Dwa wielokąty foremne o tej samej liczbie boków są podobne.

$$F \sim G$$



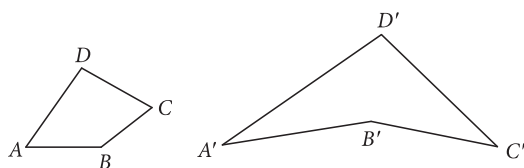
### Twierdzenie

Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.

Twierdzenie podajemy bez dowodu, pokażemy tylko na przykładzie, że sama proporcjonalność boków albo sama równość kątów nie wystarczy, by np. czworokąty były podobne.

**Przykład 2** ◀ zad. 5.4

Dwa czworokąty narysowane poniżej mają odpowiednie boki proporcjonalne.



Można sprawdzić, że:

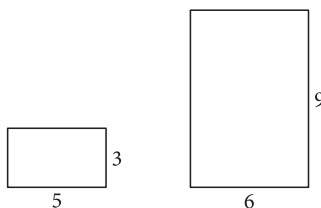
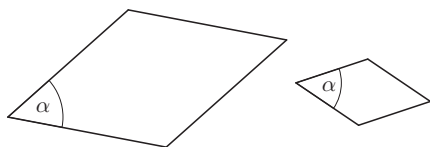
$$|A'B'| = 2|AB|, |B'C'| = 2|BC|, |C'D'| = 2|CD| \text{ oraz } |D'A'| = 2|DA|$$

Czworokąty te nie są jednak podobne, ponieważ mają różne kąty wewnętrzne, np.  $\angle ABC \neq \angle A'B'C'$ .

**Przykład 3**

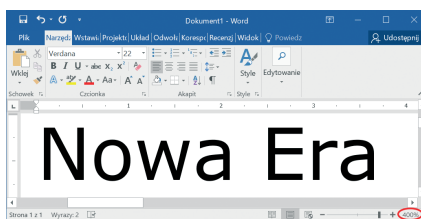
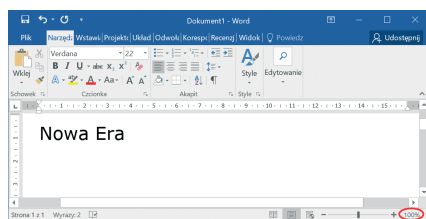
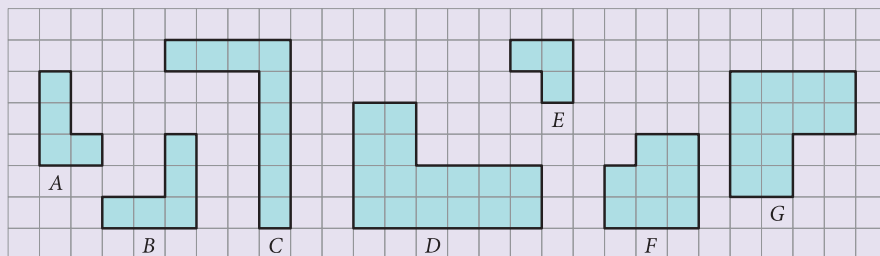
a) Dwa romby są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same kąty.

b) Prostokąt o wymiarach  $3 \times 5$  nie jest podobny do prostokąta o wymiarach  $6 \times 9$ , ponieważ  $\frac{3}{6} \neq \frac{5}{9}$ .



Z podobieństwem (proporcjonalnym powiększaniem lub zmniejszaniem obiektów) mamy do czynienia na co dzień.

- Gdy chcemy zwiększyć litery na ekranie monitora, klikamy na odpowiednią skalę i komputer zgodnie z nią zwiększa obraz.

**◀ 5.4. Które z narysowanych figur są podobne?**

Odp.: A i D, G i E

## ◀ 5.12.



Na podstawie fragmentu mapy w skali 1 : 75 000 oblicz przybliżoną długość drogi ze stacji PKP w Leluchowie na szczyt Dubne niebieskim szlakiem.

Odp.: ok. 5 km

## ◀ 5.13.



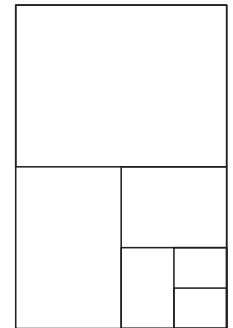
Odległość z Łeby do Lęborka wynosi około 30 km. Oblicz przybliżoną skalę zamieszczoną powyżej mapy.

Odp.: 1 : 375 000

- Jeżeli wykonujemy odbitki zdjęć, to czasami robimy je w różnych wymiarach. Sfotografowany obiekt jest na wszystkich takich odbitkach podobny do obrazu, jaki mamy w pierwotnym zapisie.



- Arkusze papieru produkuje się na ogół w kształcie prostokąta o takich bokach, że po rozcięciu go na połowy równoległe do krótszego boku otrzymuje się dwa mniejsze prostokąty podobne do prostokąta wyjściowego. Jeżeli boki dużego prostokąta oznaczmy  $a, b$  ( $a > b$ ), to mniejszy prostokąt ma boki  $\frac{1}{2}a, b$  i zachodzi proporcja  $b : a = \frac{1}{2}a : b$ . Stąd  $b^2 = \frac{1}{2}a^2$ , czyli  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Prostokąt o opisanej własności ma więc boki pozostające w stosunku równym  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

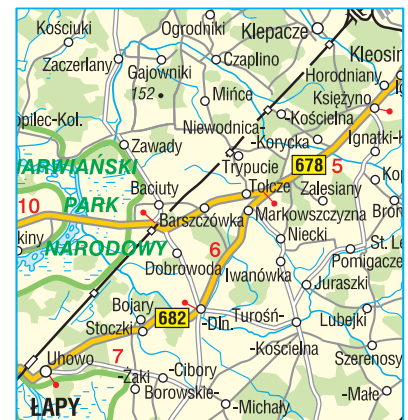


Podobieństwo znajduje zastosowanie np. przy wykonywaniu wszelkiego rodzaju map. Podana na nich skala zapisywana jest najczęściej w postaci  $1 : k$ , co oznacza, że rzeczywiste wymiary w terenie są  $k$  razy większe od zmierzonych na mapie.

**Przykład 4** ◀ zad. 5.12, 5.13

Na mapie w skali 1 : 250 000 długość drogi kolejowej z Uhowa do Klepaczy ma 6,2 cm. Zatem w rzeczywistości odległość między tymi miejscowościami jest równa:

$$6,2 \text{ cm} \cdot 250\,000 = 15,5 \text{ km}$$



Jeżeli odcinki o długościach  $a$  i  $b$  przekształcono przez podobieństwo w skali  $k$ , to ich obrazy mają długości odpowiednio  $ka$  i  $kb$ . Zatem stosunek odcinków po przekształceniu jest taki sam jak przed przekształceniem. Mówimy, że podobieństwo **zachowuje stosunek długości**. Z tego faktu wynika na przykład stały stosunek długości okręgu do jego średnicy (bo każde dwa okręgi są podobne).

- Stosunek obwodu koła do jego średnicy jest stały, równy liczbie niewymiernej  $\pi$ :

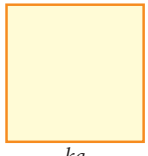
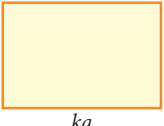
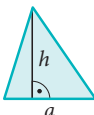
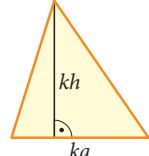
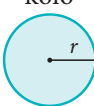
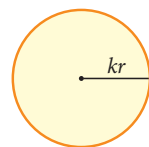
$$\frac{\text{obw}_{k(O,r)}}{2r} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

- Stosunek pola koła do kwadratu jego promienia jest stały, równy **tej samej** liczbie  $\pi$ :

$$\frac{P_{k(O,r)}}{r^2} = \frac{\pi r^2}{r^2} = \pi$$

Obydwa te fakty zauważył i udowodnił żyjący w III w. p.n.e. Archimedes z Syrakuz.

Zbadajmy zależność między polami pewnych figur  $G$  i  $F$  podobnych w skali  $k$ .

| Figura $F$                                                                                     | Pole $P_F$           | Figura $G$                                                                          | Pole $P_G$                                    | $\frac{P_G}{P_F}$       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------|
| kwadrat<br>   | $P_F = a^2$          |    | $P_G = (k \cdot a)^2 = k^2 a^2$               | $\frac{P_G}{P_F} = k^2$ |
| prostokąt<br> | $P_F = ab$           |    | $P_G = (ka)(kb) = k^2 ab$                     | $\frac{P_G}{P_F} = k^2$ |
| trójkąt<br> | $P_F = \frac{ah}{2}$ |   | $P_G = \frac{(ka)(kh)}{2} = \frac{k^2 ah}{2}$ | $\frac{P_G}{P_F} = k^2$ |
| koło<br>    | $P_F = \pi r^2$      |  | $P_G = \pi(kr)^2 = k^2 \pi r^2$               | $\frac{P_G}{P_F} = k^2$ |

Powyższe obserwacje są ilustracją twierdzenia, którego dowód pominiemy.

#### Twierdzenie

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

◀ **5.17.** Gorczański Park Narodowy zajmuje około 7000 ha. Jaką powierzchnię będzie miał jego obraz na mapie w skali 1 : 50 000? Wynik podaj w  $\text{dm}^2$  i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

**Odp.:**  $2,8 \text{ dm}^2$

### Odpowiedzi i rozwiązania

**5.1.** P, P, F

**5.2. a)**  $4 \times 10$

**b)**  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$

**c)**  $\frac{3}{4} \times \frac{15}{8}$

**5.3. a)**  $k = 3$

**b)**  $k = \frac{2}{3}$

**c)**  $k = 5$

**d)**  $k = \sqrt{2}$

**5.4.** A i D, G i E

### Przykład 5 ◀ zad. 5.17

Morze Czarne (łącznie z Morzem Azowskim) ma powierzchnię  $460\,000 \text{ km}^2$ . Obliczymy, jaki obszar zajmie obraz tego morza na mapie w podanej skali.

a) 1 : 1 000 000

Będzie to powierzchnia o polu  $1\,000\,000^2$  razy mniejszym, czyli:

$$\frac{460\,000}{1\,000\,000\,000\,000} \text{ km}^2 = \frac{460\,000\,000\,000}{1\,000\,000\,000\,000} \text{ m}^2 = \frac{46}{100} \text{ m}^2 = \frac{460\,000}{100} \text{ cm}^2 = 4600 \text{ cm}^2$$

b) 1 : 40 000 000

$$\frac{460\,000}{40\,000\,000^2} \text{ km}^2 = \frac{46 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{(4 \cdot 10^7)^2} \text{ m}^2 = \frac{46 \cdot 10^{10}}{16 \cdot 10^{14}} \text{ m}^2 = \frac{46 \cdot 10^{14}}{16 \cdot 10^{14}} \text{ cm}^2 = \frac{46}{16} \approx 2,9 \text{ cm}^2$$

### Zadania

**5.1.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Każda symetria jest podobieństwem.

B. Dowolne dwa kwadraty są podobne.

C. Pole powierzchni sali na planie w skali 1 : 500 jest 25 000 razy mniejsze niż w rzeczywistości.

**5.2.** Prostokąt o wymiarach  $2 \times 5$  przekształcono przez podobieństwo o podanej skali  $k$ . Jakie są wymiary obrazu prostokąta?

a)  $k = 2$

b)  $k = \frac{1}{3}$

c)  $k = \frac{3}{8}$

**5.3.** Podaj skalę, w jakiej przekształcono

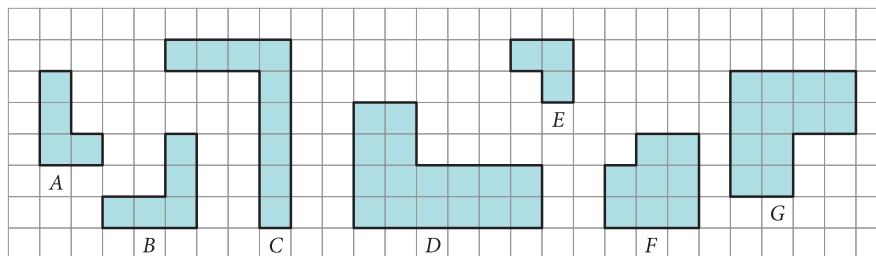
a) prostokąt o wymiarach  $2 \times 5$  na prostokąt o wymiarach  $6 \times 15$ .

b) romb o boku 3 i kącie  $80^\circ$  na romb o boku 2 i kącie  $80^\circ$ .

c) koło o promieniu 3,4 na koło o promieniu 17.

d) kwadrat o boku 3 na kwadrat o przekątnej 6.

**5.4.** Które z narysowanych figur są podobne?



**5.5.** Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 cm i 4 cm, a jego wysokość jest równa 3 cm. Narysuj trapez podobny do danego w skali  $k = \frac{3}{2}$ .

**5.6.** Czy podane figury są podobne? Dla figur podobnych podaj skalę podobieństwa.

- trójkąt równoboczny o boku 3,7 cm i trójkąt równoboczny o boku 18,5 cm
- prostokąt o wymiarach  $21 \times 8$  i prostokąt o wymiarach  $3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3}$
- trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i ramieniu 10 cm i trójkąt równoramienny o ramieniu 30 cm i wysokości opuszczonej na podstawę równej 24 cm
- równoległobok o bokach 7 i 8 oraz równoległobok o bokach 3 i 4
- trapez prostokątny o podstawach 6 i 10 oraz wysokości 7 i trapez prostokątny o podstawach 3 i 5 oraz polu 12
- koło o obwodzie  $3\pi$  i koło o polu  $3\pi$

**5.7.** Wyznacz skalę, w jakiej należy przekształcić prostokąt o podanych wymiarach, aby otrzymać prostokąt o obwodzie 12 cm.

- $2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$
- $6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$
- $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$
- $1 \text{ cm} \times 1,1 \text{ dm}$

**5.8.** Prostokąt  $ABCD$  jest podobny do prostokąta  $A'B'C'D'$  w skali  $k = \frac{6}{5}$ . Oblicz obwody tych prostokątów, jeżeli  $|AB| = 12 \text{ cm}$  i  $|A'C'| = 26 \text{ cm}$ .

**5.9.** W jakiej skali należy przekształcić prostokąt o przekątnych długości 20 cm i kącie między nimi  $60^\circ$ , aby otrzymać podobny prostokąt o danym obwodzie lub polu?

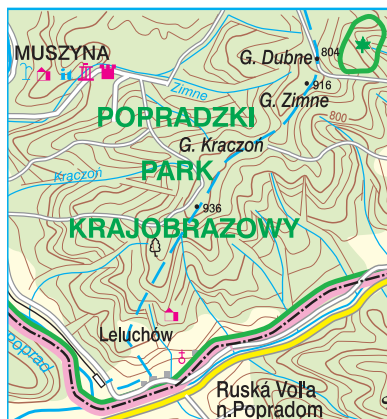
- $obw = 5(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$
- $obw = 10 \text{ cm}$
- $P = \sqrt{3} \text{ cm}^2$

**5.10.** Czworokąt  $C_1$  o kolejnych bokach długości 1, 3, 5 i 7 jest podobny do czworokąta  $C_2$ , w którym suma długości najdłuższego i najkrótszego boku jest równa 16. Oblicz stosunek obwodu czworokąta  $C_1$  do obwodu czworokąta  $C_2$ .

**5.11.** W równoległoboku  $ABCD$  mamy  $|AB| = 6 \text{ cm}$  i  $|BC| = 9 \text{ cm}$ . Przez punkt  $M$  leżący na boku  $AD$  poprowadzono prostą równoległą do  $AB$  i odcinającą równoległobok  $ABNM$  podobny do równoległoboku  $ABCD$ . Ile wynosi odległość punktu  $M$  od punktu  $A$ ?



**5.12.** Na podstawie fragmentu mapy w skali  $1 : 75\,000$  oblicz przybliżoną długość drogi ze stacji PKP w Leluchowie na szczyt Dubne niebieskim szlakiem.



**5.6. a)** tak,  $k = 5$

**b)** tak,  $k = \frac{1}{6}$

**c)** tak,  $k = 3$

**d)** nie **e)** nie

**f)** tak,  $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**5.7. a)**  $k = \frac{6}{7}$

**b)**  $k = \frac{2}{3}$

**c)**  $k = 2$

**d)**  $k = \frac{1}{2}$

**5.8.**  $obwABCD = 81,6 \text{ cm}$ ,  
 $obwA'B'C'D' = 68 \text{ cm}$

**5.9. a)**  $k = \frac{1}{4}$

**b)**  $k = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

**c)**  $k = \frac{1}{10}$

**5.10.**  $1 : 2$

**5.11.** 4 cm

**5.12.** ok. 5 km



5.13. 1 : 375 000

5.14. podobieństwo o skali

$$k = 2\frac{1}{2}$$

$$5.15. \quad \overbrace{x \quad 1-x}^{1}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}, \quad x \in (0; 1)$$

$$x = (1-x)^2$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad \Delta = 5$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin (0; 1),$$

$$\text{więc } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$1-x = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Odp.: Krótsza część ma długość  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , dłuższa część ma długość  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

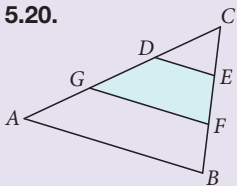
5.16. 2a

5.17. 2,8 dm<sup>2</sup>

5.18. k = 1,4

5.19. 20 cm

5.20.

Dane:  $|AG| = |GD| = |DC|$  $|BF| = |FE| = |EC|$ 

Rozwiązanie:

$$P_{\triangle ABC} = 36$$

$$\triangle CGF \sim \triangle ABC \text{ w skali } k_1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{więc } P_{\triangle CGF} = \frac{4}{9} \cdot 36 = 16$$

$$\triangle CDE \sim \triangle CGF \text{ w skali } k_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{więc } P_{\triangle CDE} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4, \text{ zatem}$$

$$P_{DEFG} = P_{\triangle CGF} - P_{\triangle CDE} = 12$$

Odp.: Trapez ma pole równe 12.

5.13. Odległość z Łeby do Lęborka wynosi około 30 km. Oblicz przybliżoną skalę zamieszczoną obok mapy.

5.14. Julka ma kawałek mapy terenowej w skali 1 : 5000. Chce ją powiększyć tak, aby mieć potrzebny fragment w skali 1 : 2000. Przez jakie podobieństwo powinna przekształcić wybrany fragment mapy?

\* 5.15. Podział odcinka na takie dwie części, że stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części, nazywamy **złotym podziałem odcinka**. Oblicz, na jakie części podzielimy w opisany sposób odcinek o długości 1.



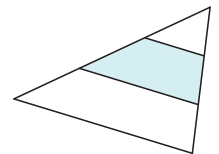
5.16. Bok AD równoległoboku ABCD ma długość a. Trzy proste równoległe do tego boku podzieliły równoległobok na cztery przystające równoległoboki podobne do równoległoboku ABCD. Wyznacz długość boku AB.

5.17. Gorczański Park Narodowy zajmuje około 7000 ha. Jaką powierzchnię będzie miał jego obraz na mapie w skali 1 : 50 000? Wynik podaj w dm<sup>2</sup> i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

5.18. Wielokąt przekształcono przez podobieństwo tak, że jego pole zwiększyło się o 96%. Jaka była skala tego podobieństwa?

5.19. Pola dwóch wielokątów podobnych wynoszą 75 cm<sup>2</sup> i 48 cm<sup>2</sup>. Obwód mniejszego wielokąta jest równy 16 cm. Wyznacz obwód większej figury.

\* 5.20. Pole trójkąta jest równe 36. Poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego boku trójkąta, które podzieliły każdy z pozostałych dwóch boków na trzy równe części (zob. rysunek). Oblicz pole trapezu, którego podstawami są te odcinki.



- \* **5.21.** Przez punkt  $M$  leżący na boku  $AC$  trójkąta  $ABC$  poprowadzono prostą równoległą do boku  $AB$ , która podzieliła ten trójkąt na dwa wielokąty o równych polach. W jakim stosunku punkt  $M$  dzieli odcinek  $AC$ ?

## Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- 1.** Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy 18, a jego pole 15. Jaki jest obwód trójkąta o polu równym 60, podobnego do trójkąta  $ABC$ ?

A. 9  
B. 72  
C. 36

D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.

- 2.** Trójkąt przekształcono przez podobieństwo w takiej skali, że jego obwód zwiększył się o 30%. O ile procent wzrosło pole trójkąta?

A. o 69%      B. o 90%      C. o 300%      D. o 900%

- 3.** Jaką trzeba przyjąć skalę, żeby obrazem kwadratu o polu  $84 \text{ km}^2$  był na mapie kwadrat o polu  $84 \text{ mm}^2$ ?

A.  $1 : 1\,000\,000$       B.  $1 : 10\,000\,000$       C.  $1 : 1000$       D.  $1 : 10^{12}$

- 4.** Wielokąt o obwodzie  $24 \text{ cm}$  i polu  $9 \text{ cm}^2$  przekształcono przez podobieństwo o skali 3. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Obwód wielokąta wzrósł o  $72 \text{ cm}$ .

B. Pole wielokąta wzrosło do  $27 \text{ cm}^2$ .

C. Stosunek długości najdłuższego boku wielokąta do najkrótszego boku wielokąta wzrósł trzykrotnie.

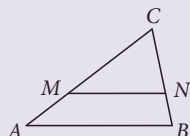
- 5.** Wielokąt o polu  $750 \text{ cm}^2$  przekształcono przez podobieństwo tak, że pole jego obrazu jest mniejsze o  $630 \text{ cm}^2$ . Ile wynosi skala podobieństwa?



- 6.** Jezioro Śniardwy ma  $113,8 \text{ km}^2$  powierzchni. Jaką powierzchnię zajmie jego obraz na mapie w skali  $1 : 80\,000$ ? Wynik podaj w  $\text{cm}^2$  i zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

- 7.** Obwody dwóch wielokątów podobnych wynoszą  $24 \text{ cm}$  i  $36 \text{ cm}$ . Pole mniejszego wielokąta jest równe  $8 \text{ cm}^2$ . Wyznacz pole większej figury.

**5.21.**



Dane:  $MN \parallel AB$ ,  $P_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC}$

$\triangle CMN \sim \triangle ABC$  w skali  $k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

stąd  $\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|AC|}{|MC|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|AM| + |MC|}{|MC|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|AM|}{|MC|} + 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{|AM|}{|MC|} = \sqrt{2} - 1$

## Prosto do matury

**1.** C

**2.** A

**3.** A

**4.** F, F, F

**5.**  $k = 0,4$

**6.**  $177,8 \text{ cm}^2$

**7.**  $18 \text{ cm}^2$



## Tunel na wyspie Samos

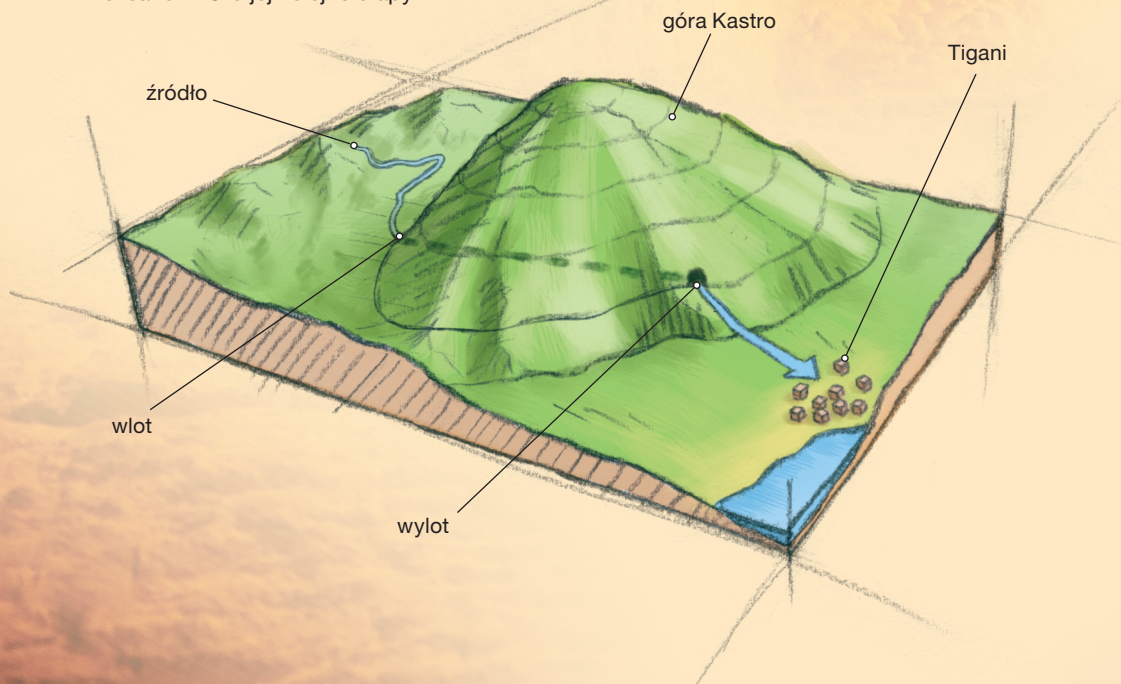
Na greckiej wyspie Samos zachowała się budowla sprzed 2500 lat, która do dzisiaj zachwyca inżynierów i naukowców.

### Eupalinos z Megary

W VI w. p.n.e., na polecenie tyrana Polikratesa, Eupalinos z Megary wybudował na Samos podziemny akwedukt doprowadzający wodę do miasta Tigani (obecnie Pythagorion). Najdłuższą częścią tej budowli jest tunel o długości 1036 m, wydrążony we wnętrzu góry Kastro. Choć prace górnicze prowadziły dwie ekipy, z obu stron góry jednocześnie, powstał tunel biegnący w linii prostej.

### Metoda Eupalinosa

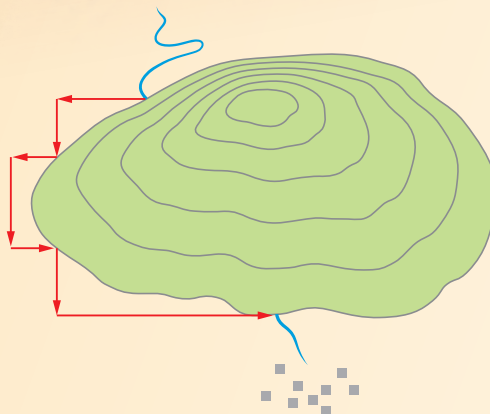
Nie zachowały się zapiski z tamtych czasów, więc nie wiemy na pewno, jak rozumował Eupalinos. Przyjmuje się jednak, że wykorzystał tę samą metodę, którą 500 lat później opisał w swoim dziele Heron z Aleksandrii. Oto jej kolejne etapy.





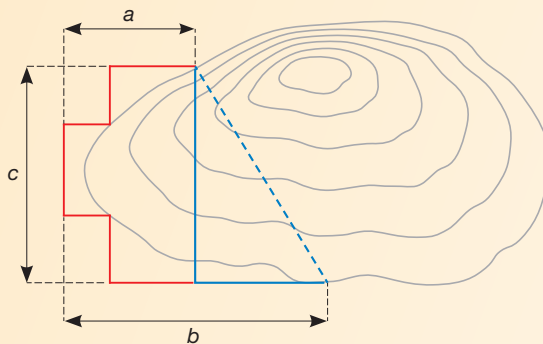
### 1 Wyznaczenie końców tunelu

Począwszy od miejsca, gdzie miał się znajdować wlot tunelu, Eupalinos wyznaczał kolejno odcinki wzajemnie do siebie prostopadłe (na rysunku kolor czerwony). Kontynuował to tak długo, aż doszedł do miejsca, w którym najdogodniej było zrobić wylot tunelu. Wszystkie pomiary musiał wykonać na tej samej wysokości nad poziomem morza.



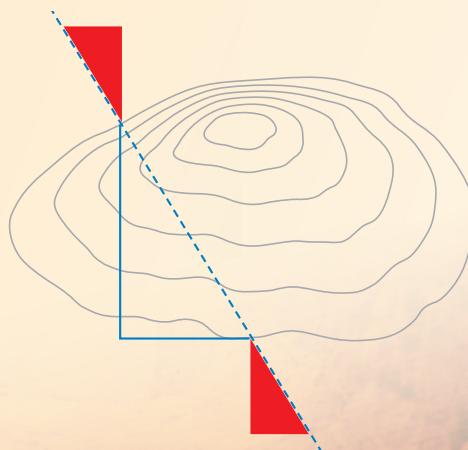
### 2 Wyznaczenie przebiegu tunelu

Na podstawie swoich pomiarów Eupalinos obliczył długości  $b - a$  oraz  $c$  (zob. rysunek). W ten sposób wyznaczył długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna leży wzdłuż szukanego tunelu.



### 3 Wskazanie kierunku drążenia

Na koniec Eupalinos przygotował modele mniejszych trójkątów, podobnych do wyznaczonego. Umieścił je poziomo u wylotów tunelu tak, by ich przeciwprostokątne leżały na przedłużeniu przeciwprostokątnej trójkąta wyznaczonego we wnętrzu góry. Pracujący górnicy mieli drążyć tunel w kierunku wskazanym przez te przeciwprostokątne. Modele trójkątów były stale umieszczone przed wejściem do tunelu, by podczas pracy można było weryfikować kierunek drążenia.



**Uwagi metodyczne**

Ostatnim tematem z tej serii są trójkąty podobne. Uczniowie znają już pojęcie podobieństwa, ale nowością są dla nich cechy podobieństwa trójkątów. Przy okazji wyprowadzamy też zagadnienie związków miarowych w trójkącie prostokątnym, a jako ciekawostkę podajemy wniosek dotyczący nierówności pomiędzy średnimi liczb – geometryczną i arytmetyczną.

## 6. Trójkąty podobne

**Umiejętności:**

- rozpoznawanie trójkątów podobnych
- wykorzystywanie cech podobieństwa trójkątów
- wykorzystywanie własności środkowych trójkąta
- wykorzystywanie (także w praktyce) własności trójkątów podobnych

**Cechy podobieństwa trójkątów**

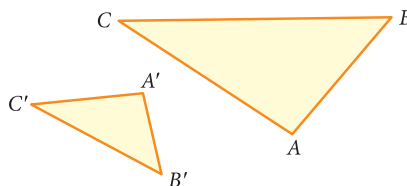
- Jeśli dwa trójkąty są podobne, to ich odpowiednie boki są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.
- Jeśli w dwóch trójkątach odpowiednie boki są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe, to te trójkąty są podobne.

Każde z powyższych zdań jest prawdziwe na mocy twierdzenia ze s. 188.

Okazuje się, że nie musimy badać proporcjonalności wszystkich boków i równości wszystkich kątów, aby wykazać, że dwa trójkąty są podobne. Prostsza metodę uzasadnienia zapewnia każde z trzech poniższych twierdzeń, nazywanych **cechami podobieństwa trójkątów**.

**Twierdzenie****Cecha bok-bok-bok podobieństwa trójkątów (bbb)**

Jeżeli trzy boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



Proporcjonalność odpowiednich boków oznacza też, że odpowiednie kąty są równe.

Dla trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C'$  można tę cechę zapisać symbolicznie:

$$\text{jeżeli } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

$$\text{to } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Zapis  $p = q = t$  oznacza, że prawdziwe są trzy równości:  $p = q$ ,  $q = t$  i  $p = t$ .

**ZZ i KPU**

temat 6.5 (klasa 1)

**Multiteka**

- Tunel na wyspie Samos
- Wyznaczanie wysokości budynków z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów
- Fraktale
- Płatek śniegu Kocha

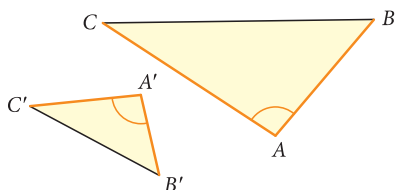
dlanauuczyciela.pl | Kartkówka 3.6

Zauważmy, że analogiczne twierdzenie dla czworokątów nie zachodzi – zobacz przykład 2 s. 189.

### Twierdzenie

#### Cecha bok-kąt-bok podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki pewnego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków innego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.



Proporcjonalność par boków i równość kątów między nimi oznacza też proporcjonalność pozostałych boków i równość pozostałych kątów.



Dla trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C'$  można tę cechę zapisać symbolicznie:

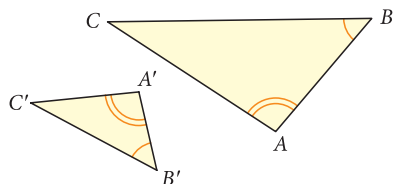
$$\text{jeżeli } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \text{ i } \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$$

$$\text{to } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

### Twierdzenie

#### Cecha kąt-kąt podobieństwa trójkątów (kk)

Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom innego trójkąta, to trójkąty te są podobne.



Równość odpowiednich kątów oznacza też, że odpowiednie boki są proporcjonalne.



Dla trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C'$  można tę cechę zapisać symbolicznie:

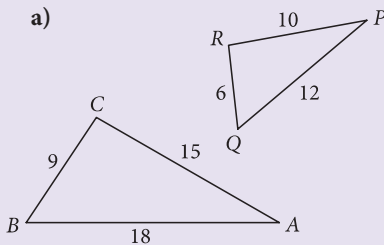
$$\text{jeżeli } \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B' \text{ i } \sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$$

$$\text{to } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

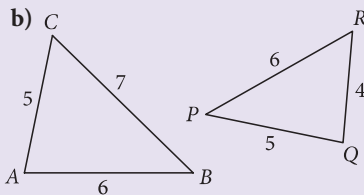
Zauważmy, że analogiczne twierdzenie dla czworokątów nie zachodzi – zobacz przykład 3b s. 189.

◀6.3. Sprawdź, czy trójkąty  $ABC$  i  $PQR$  są podobne.

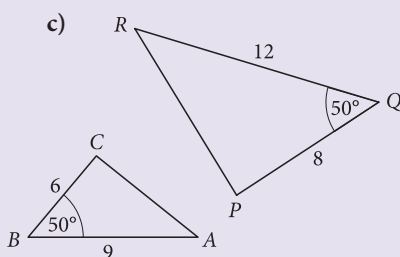
a)



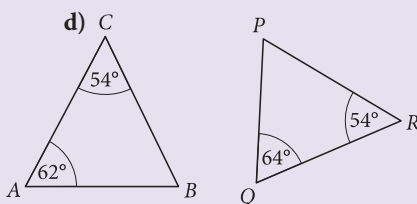
b)



c)



d)

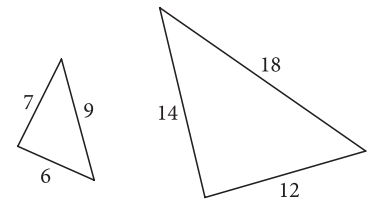


Odp.: a) tak b) nie c) tak  
d) tak

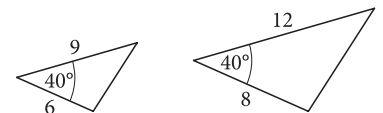
### Przykład 1 ◀ zad. 6.3

Zbadamy podobieństwo trójkątów przedstawionych na rysunku.

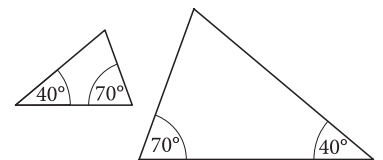
a) Odpowiednie boki trójkątów są proporcjonalne:  $\frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{9}{18}$ , więc trójkąty o bokach tej długości są podobne.



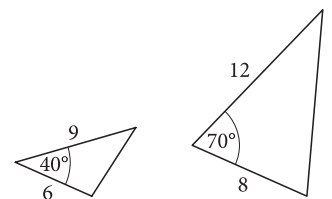
b) Dwa boki pierwszego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta:  $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$  i kąty między tymi bokami są równe  $40^\circ$ , zatem te trójkąty są podobne.



c) Kąty obu trójkątów są odpowiednio równe (trzeci – jako dopełnienie do  $180^\circ$ ), więc te trójkąty są podobne.



d) Dwa boki pierwszego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta:  $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ , ale kąty między tymi bokami nie są równe:  $40^\circ \neq 70^\circ$ . Żadna z cech przystawania nie opisuje takiej sytuacji. Zauważmy jednak, że gdyby te trójkąty miały być podobne, musiałyby być trójkątami o kątach  $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ , czyli równoramiennymi o kącie  $40^\circ$  między ramionami. Zatem mniejszy z podanych trójkątów nie mógłby mieć boków o długościach 6 i 9 zawartych w ramionach kąta  $40^\circ$ . Oznacza to, że te trójkąty nie są podobne.



### Przykład 2

Dane są miary niektórych kątów w trójkątach  $ABC$  i  $DEF$ :  $\sphericalangle A = 38^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 96^\circ$ ,  $\sphericalangle D = 96^\circ$ ,  $\sphericalangle E = 48^\circ$ . Sprawdźmy, czy te trójkąty są podobne.

#### Rozwiązanie

Kąty  $B$  i  $D$  są równe. Ponieważ  $\sphericalangle A \neq \sphericalangle E$ , rozpatrywane trójkąty są podobne tylko wtedy, gdy kąt  $C$  trójkąta  $ABC$  jest równy kątowi  $E$  w trójkącie  $DEF$ .

$$\sphericalangle C = 180^\circ - (38^\circ + 96^\circ) = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$$

Sprawdziliśmy, że  $\sphericalangle C \neq \sphericalangle E$ , więc rozpatrywane trójkąty nie są podobne.

Odp.: Trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  nie są podobne.

**Przykład 3** zad. 6.4

Boki trójkąta  $T_1$  mają długości 3 cm, 6 cm i 8 cm. Najkrótszy bok w trójkącie  $T_2$ , podobnym do  $T_1$ , ma 21 cm. Znajdziemy długości pozostałych boków tego trójkąta.

**Rozwiązanie**

Podobieństwo zachowuje stosunki odcinków, więc obrazem najkrótszego boku w  $T_1$  jest najkrótszy bok w  $T_2$ . Zatem skalą podobieństwa jest w tym wypadku liczba  $\frac{21}{3} = 7$ , a pozostałe boki mają długości  $7 \cdot 6 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$  oraz  $7 \cdot 8 \text{ cm} = 56 \text{ cm}$ .

**Odp.:** Pozostałe boki mają długości 42 cm i 56 cm.

Jeżeli mamy dwa trójkąty podobne, to ważną umiejętnością jest poprawne ustalenie proporcji ich boków. Możemy postępować według podanych niżej zasad.

- Oznaczamy równe kąty w obu trójkątach tymi samymi symbolami.
- W mianownikach trzech ułamków wpisujemy boki jednego trójkąta.

$$\frac{?}{a} = \frac{?}{b} = \frac{?}{c}$$

- Sprawdzamy, które boki drugiego trójkąta leżą naprzeciwko równych (odpowiednio) kątów.

$$\frac{n}{a} = \frac{?}{b} = \frac{?}{c}$$

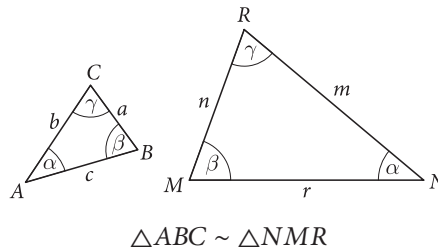
← w trójkącie  $ABC$  bok  $a$  leży naprzeciwko kąta  $\alpha$ , a w trójkącie  $NMR$  naprzeciwko kąta  $\alpha$  leży bok  $n$ , zatem w pierwszym liczniku wpisujemy  $n$

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = \frac{?}{c}$$

← bok  $b$  leży naprzeciwko kąta  $\beta$ , zatem w drugim liczniku wpisujemy  $m$

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = \frac{r}{c}$$

← bok  $c$  leży naprzeciwko kąta  $\gamma$ , zatem w trzecim liczniku wpisujemy  $r$

**Przykład 4**

Prostokątne trójkąty  $ABC$  i  $EDC$ , takie jak na rysunku obok, mają równe kąty: kąt prosty i wspólny kąt przy wierzchołku  $C$ , więc również kąt  $B$  jest równy kątowi  $D$ . Zatem trójkąty te są podobne:  $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ . Zapiszemy, które z boków są proporcjonalne.

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{?}{|BC|} = \frac{?}{|AC|}$$

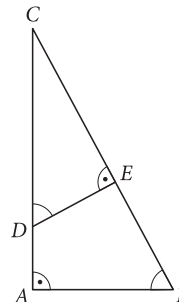
← bok  $DE$  leży naprzeciwko kąta  $C$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{?}{|AC|}$$

← bok  $DC$  leży naprzeciwko kąta prostego

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|AC|}$$

← bok  $EC$  leży naprzeciwko kąta  $D$ , który jest równy kątowi  $B$



◀6.4. Trójkąt o bokach  $a, b, c$  jest podobny do trójkąta o bokach  $a_1, b_1, c_1$  tak, że boki  $a, b, c$  są proporcjonalne odpowiednio do boków  $a_1, b_1, c_1$ . Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

|    | $a$ | $b$ | $c$            | $a_1$ | $b_1$          | $c_1$          |
|----|-----|-----|----------------|-------|----------------|----------------|
| a) | 12  | 3   | 11             | ?     | ?              | $7\frac{1}{3}$ |
| b) | 7   | ?   | $2\frac{1}{2}$ | ?     | $\frac{11}{4}$ | $\frac{5}{4}$  |

**Odp.:** a)  $a_1 = 8, b_1 = 2$  b)  $b = 5\frac{1}{2}, a_1 = 3\frac{1}{2}$

**Uwagi metodyczne**

Uczniowie bardzo często mają trudności z prawidłowym zapisaniem proporcji boków trójkątów podobnych. Nieprawidłowy zapis w zasadzie dyskwalifikuje dalsze rozwiązanie zadania. W przykładach 3 i 4 starannie tłumaczmy, w jaki sposób można zapisać takie proporcje. Bez odwoływania się do rysunku można ten problem rozwiązać, wymieniając wierzchołki obu podobnych trójkątów w kolejności odpowiadającej równym kątom. Warto rozwiązać na tablicy jeszcze kilka podobnych przykładów.

## Własności trójkątów podobnych

Do wykazywania podobieństwa figur użyteczne jest następujące twierdzenie.

### Twierdzenie

Jeżeli figura  $F_1$  jest podobna do figury  $F_2$  i figura  $F_2$  jest podobna do figury  $F_3$ , to  $F_1$  jest podobna do  $F_3$ .

◀6.5. W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  poprowadzono wysokości  $AK$ ,  $BL$  i  $CM$ . Punkt przecięcia wysokości oznaczono  $H$ . Znajdź trójkąty podobne do podanego trójkąta.

a)  $AMC$    b)  $CLB$    c)  $CHK$

Odp.: a)  $\triangle ALB$ ,  $\triangle HLC$ ,  $\triangle HMB$

b)  $\triangle HKB$ ,  $\triangle CKA$ ,  $\triangle HLA$

c)  $\triangle AHM$ ,  $\triangle CBM$ ,  $\triangle ABK$

### Przykład 5 ◀ zad. 6.5

W trójkącie  $ABC$  poprowadzono wysokości  $AE$ ,  $BF$  i  $CD$ . Wskażemy trójkąty podobne do trójkąta  $ADC$  i wypiszemy odpowiednie proporcje boków.

#### Rozwiązanie

Będziemy korzystać z równości kątów (nie mamy żadnych informacji o długościach boków).

Jeśli kąt  $CAD$  oznaczmy literą  $\alpha$ , a kąt  $ACD$  – literą  $\beta$ , to w trójkącie  $ADC$  mamy  $\beta = 90^\circ - \alpha$  jako dopełnienie do  $180^\circ$ .

Zatem:

- w prostokątnym trójkącie  $HFC$ :

$$\sphericalangle FHC = \alpha$$

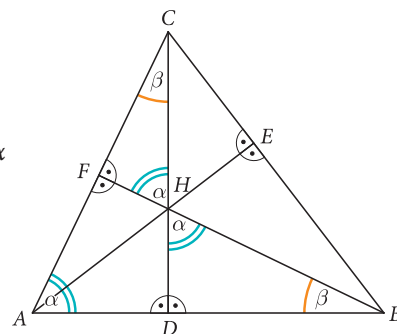
- w prostokątnym trójkącie  $HDB$ :

$$\sphericalangle DHB = \alpha$$

$$\sphericalangle DBH = \beta$$

← kąt wierzchołkowy do kąta  $FHC$

← jako dopełnienie do  $180^\circ$



Kąty  $\alpha$ ,  $90^\circ$  i  $\beta$  ma również trójkąt  $AFB$ .

Mamy zatem rodzinę trójkątów podobnych:

$$\triangle ADC \sim \triangle HFC \sim \triangle HDB \sim \triangle AFB$$

Wypiszemy proporcje boków par trójkątów podobnych, z których jeden jest trójkątem  $ADC$ .

$$\frac{|HF|}{|AD|} = \frac{|FC|}{|DC|} = \frac{|HC|}{|AC|}$$

← z podobieństwa trójkątów  $ADC$  i  $HFC$

$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|HB|}{|AC|}$$

← z podobieństwa trójkątów  $ADC$  i  $HDB$

$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|FB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

← z podobieństwa trójkątów  $ADC$  i  $AFB$

Analogicznie możemy zapisać proporcje dla pozostałych par trójkątów podobnych:  $HFC$  i  $HDB$ ,  $HFC$  i  $AFB$ ,  $HDB$  i  $AFB$ .

**Przykład 6** ◀ zad. 6.7

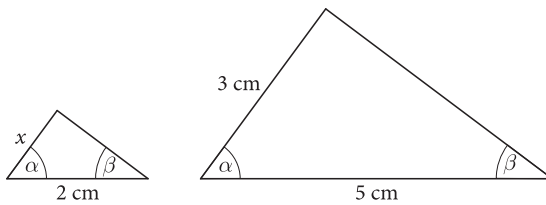
Trójkąty na rysunku obok są podobne. Wyznamy  $x$ .

**Rozwiązanie**

Boki są proporcjonalne, zatem:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{5}, \text{ stąd } x = \frac{6}{5}$$

Odp.:  $x = 1,2$  cm

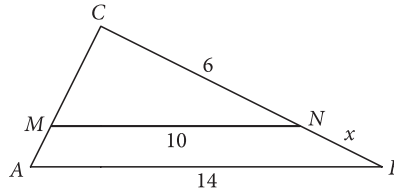
**Przykład 7** ◀ zad. 6.8

Odcinek  $MN$  jest równoległy do  $AB$  (zob. rysunek). Wyznamy  $x$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} \sphericalangle CMN &= \sphericalangle CAB && \leftarrow \text{kąty odpowiadające} \\ \sphericalangle MNC &= \sphericalangle ABC && \leftarrow \text{kąty odpowiadające} \\ \triangle MNC &\sim \triangle ABC && \leftarrow \text{cecha kk podobieństwa trójkątów} \\ \frac{|AB|}{|MN|} &= \frac{|BC|}{|NC|} && \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ABC \text{ i } MNC \\ \frac{14}{10} &= \frac{x+6}{6}, \text{ stąd } 10(x+6) = 6 \cdot 14 \end{aligned}$$

Odp.:  $x = 2,4$



Jeżeli w trójkącie prostokątnym poprowadzimy wysokość z wierzchołka kąta prostego, to z równości kątów wynika, że każdy z dwóch małych trójkątów jest podobny do dużego. Mamy zatem:

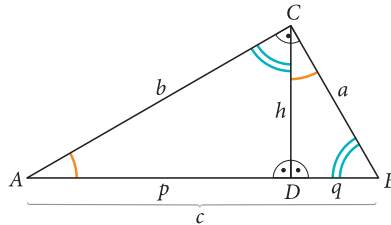
$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Możemy zapisać następujące proporcje:

- $\frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{p}{b}$   $\leftarrow$  z podobieństwa trójkątów  $DAC$  i  $CAB$
- $\frac{a}{c} = \frac{q}{a} = \frac{h}{b}$   $\leftarrow$  z podobieństwa trójkątów  $DCB$  i  $CAB$
- $\frac{a}{b} = \frac{q}{h} = \frac{h}{p}$   $\leftarrow$  z podobieństwa trójkątów  $DCB$  i  $DAC$

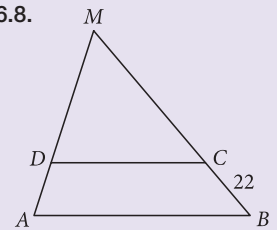
Zauważmy, że z proporcji  $\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$  wynika równość  $h^2 = pq$ .



◀6.7. Boki trójkąta  $ABC$  są równe 8 cm, 10 cm i 11 cm. Najdłuższy bok trójkąta  $PQR$ , podobnego do trójkąta  $ABC$ , ma 33 cm. Wyznam pozostałe boki trójkąta  $PQR$ .

Odp.: 24 cm, 30 cm

## ◀6.8.



Stosunek podstaw w trapezie  $ABCD$  przedstawionym na rysunku jest równy  $|AB| : |CD| = 7 : 5$ . Ramię  $BC$  ma długość 22 cm. Oblicz długość odcinka  $CM$ .

Odp.: 55 cm



◀6.11. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma 36 cm. Dzieli ona przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku 4 : 9. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odp.:  $18\sqrt{13}$  cm,  $12\sqrt{13}$  cm, 78 cm

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

### Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Jeżeli  $w \geq 0$  i  $z \geq 0$ , to liczbę  $m = \sqrt{w \cdot z}$  nazywamy **średnią geometryczną** liczb  $w$  i  $z$ . Dlatego mówimy, że w trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na które ta wysokość dzieli przeciwprostokątną:  
 $h = \sqrt{pq}$ .

### Przykład 8 ◀ zad. 6.11

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości  $a = 3$  cm i  $b = 4$  cm. Obliczmy wysokość  $h$  poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

#### Rozwiązanie

Skorzystamy z wyprowadzonej wyżej proporcji dla trójkąta prostokątnego  $ABC$ :

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$$

w którym  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Zatem:

$$h = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Odp.: Wysokość ma 2,4 cm.

### Przykład 9

Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 2 cm i 4 cm. Skonstruujemy taki trójkąt.

#### Rozwiązanie

Pokażemy dwa sposoby rozwiązania zadania.

##### I sposób

Możemy skorzystać z wyprowadzonego związku i obliczyć wysokość:

$$h = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

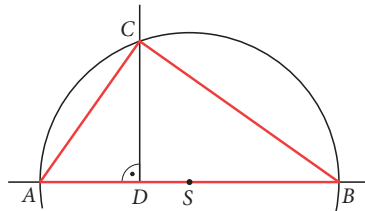
a następnie skonstruować odcinek  $h$  (np. jako przekątną kwadratu o boku 2 cm). Dalsze rozwiązanie pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

##### II sposób

Wiemy, że kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty. Jeżeli narysujemy okrąg, którego średnicą jest przeciwprostokątna (jej długość to  $2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$ ), to szukany wierzchołek kąta prostego będzie leżał na tym okręgu.

Oto etapy konstrukcji.

- Na prostej odmierzymy kolejno dwa dane odcinki ( $|AD| = 2 \text{ cm}$  i  $|DB| = 4 \text{ cm}$ ), ich suma jest przeciwprostokątną szukanego trójkąta.
- Znajdujemy środek  $S$  przeciwprostokątnej.
- Rysujemy półokrąg o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r = |SA|$ .
- Z punktu  $D$  wystawiamy prostopadłą do  $AB$ . Jej punkt przecięcia z półokręgiem jest szukanym wierzchołkiem  $C$  trójkąta.
- Rysujemy boki  $AC$  i  $BC$  szukanego trójkąta.



Do wykonania konstrukcji drugą metodą nie musimy obliczać wysokości trójkąta.



### Przykład 10 ◀ zad. 6.20

Dwie cięciwy okręgu przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich na odcinki o długościach podanych na rysunku. Obliczymy  $x$ .

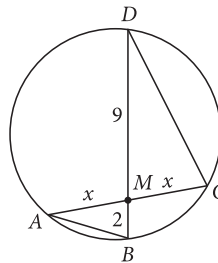
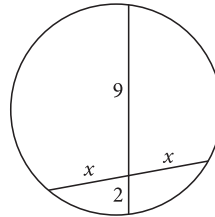
#### Rozwiązanie

Uzupełniamy rysunek takimi dwoma odcinkami, aby występujące w treści zadania części cięciw były bokami pewnych trójkątów.

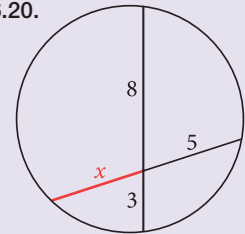
Wprowadzamy oznaczenia literowe wierzchołków tych trójkątów.

$$\begin{aligned}
 \sphericalangle AMB &= \sphericalangle CMD && \leftarrow \text{kąty wierzchołkowe} \\
 \sphericalangle BAC &= \sphericalangle BDC && \leftarrow \text{kąty wpisane oparte na łuku } BC \\
 \triangle ABM &\sim \triangle DCM && \leftarrow \text{cecha kk podobieństwa trójkątów} \\
 \frac{x}{2} &= \frac{9}{x} && \leftarrow \text{z podobieństwa trójkątów } ABM \text{ i } DCM \\
 x^2 &= 9 \cdot 2 \text{ (i } x > 0)
 \end{aligned}$$

Odp.:  $x = 3\sqrt{2}$



### ◀ 6.20.



Dane są okrąg i jego dwie cięciwy jak na rysunku. Oblicz  $x$ .

Odp.:  $x = 4,8$ . Wskazówka: Skorzystaj z równości odpowiednich kątów wpisanych.

## Środek ciężkości trójkąta

Zanim wprowadzimy pojęcie środka ciężkości trójkąta, udowodnimy pomocnicze twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

### Twierdzenie

#### Twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.

#### Założenie

Trójkąt  $ABC$  jest dowolny.

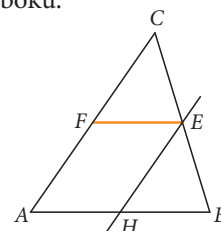
#### Teza

- Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku.
- Długość tego odcinka jest równa połowie długości trzeciego boku.

#### Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkty  $E$  i  $F$  są środkami boków  $BC$  i  $AC$  trójkąta, więc  $\frac{|BE|}{|EC|} = 1 = \frac{|AF|}{|FC|}$ . Zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa  $FE \parallel AB$ , czyli pierwszy punkt tezy został udowodniony.



Teraz przez punkt  $E$  prowadzimy prostą równoległą do boku  $AC$  – przecina ona bok  $AB$  w punkcie oznaczonym literą  $H$ . Skoro  $E$  jest środkiem  $BC$ , to na mocy twierdzenia Talesa punkt  $H$  jest środkiem  $AB$ , a ponadto czworokąt  $AHEF$  jest równoległobokiem. Zatem:

$$|EF| = |AH| = \frac{1}{2}|AB|$$

#### Koniec dowodu

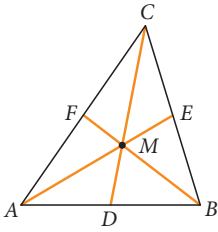
Przypomnijmy, że środkowa trójkąta jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

### Twierdzenie

#### Twierdzenie o środkowych w trójkącie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1 (licząc od wierzchołka).

Twierdzenie ilustrujemy rysunkiem, a jego dowód pominiemy.



Środek ciężkości trójkąta ma ciekawą interpretację fizyczną. Załóżmy, że figura w kształcie trójkąta jest wykonana z jednorodnego materiału. Jeśli położymy ją na ostrej podpórce ustawionej pod środkiem ciężkości, to płaszczyzna trójkąta pozostanie pozioma.



Zgodnie z podanym twierdzeniem punkt  $M$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , dzielącym jego środkowe w taki sposób, że:

$$|AM| = 2 \cdot |ME|, \quad |BM| = 2 \cdot |MF| \quad \text{oraz} \quad |CM| = 2 \cdot |MD|$$

Z twierdzenia o środkowych wynikają istotne zależności miarowe w trójkącie równobocznym.

### Twierdzenie

W trójkącie równobocznym o boku długości  $a$ :

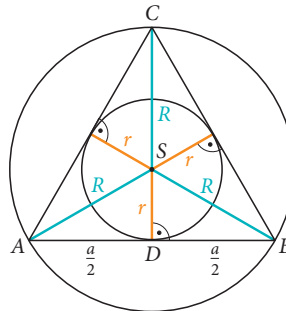
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

### Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Osie symetrii trójkąta równobocznego pokrywają się z symetralnymi boków tego trójkąta i zawierają jego środkowe, dwusieczne kątów oraz wysokości.

Zatem środek ciężkości  $S$  trójkąta równobocznego jest również środkiem okręgu wpisanego (punkt przecięcia dwusiecznych), środkiem okręgu opisanego (punkt przecięcia symetralnych) oraz ortocentrum (punkt przecięcia wysokości).



$$|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

← wysokość trójkąta równobocznego

$$r = |DS| = \frac{1}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

← twierdzenie o środkowych

$$R = |SC| = \frac{2}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

← twierdzenie o środkowych

Koniec dowodu

◀6.23. W trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $B$  jest prosty. Środkowa  $BD$  o długości 6 cm dzieli ten kąt tak, że  $\sphericalangle DBA : \sphericalangle CBD = 2 : 1$ . Oblicz miary kątów, długości boków i pole tego trójkąta.

Odp.:  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ,  
 $\sphericalangle C = 30^\circ$ ;  $|AB| = 6$  cm,  
 $|BC| = 6\sqrt{3}$  cm,  $|AC| = 12$  cm;  
 $P = 18\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>

### Przykład 11 ◀ zad. 6.23

W trójkącie  $ABC$  środkowa  $AE$  przecina pod kątem prostym środkową  $BF$  w punkcie  $M$ . Wiemy, że  $|AE| = 9$  oraz  $|BF| = 12$ . Wyznamy długość trzeciej środkowej.

#### Rozwiązanie

Kąt  $AMB$  jest prosty, zatem  $AB$  jest średnicą półokręgu, do którego należy punkt  $M$  (zob. rysunek).

Na mocy twierdzenia o środkowych w trójkącie wiemy, że środkowa  $CD$  łącząca wierzchołek  $C$  ze środkiem  $D$  boku  $AB$  zawiera punkt  $M$ . Zatem odcinek  $DM$  ma długość równą promieniowi półokręgu.

$$|AM| = \frac{2}{3}|AE| = 6 \quad \leftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

$$|BM| = \frac{2}{3}|BF| = 8 \quad \leftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

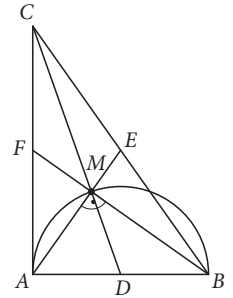
$$|AB| = \sqrt{|BM|^2 + |AM|^2} = \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

$$= \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$|DM| = \frac{1}{2}|AB| = 5 \quad \leftarrow \text{promień półokręgu}$$

$$|DC| = 3 \cdot |DM| = 15 \quad \leftarrow \text{twierdzenie o środkowych}$$

Odp.:  $|DC| = 15$



### Zadania

#### Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. F, P, F

6.1. W trójkącie  $ABC$  poprowadzono odcinek  $DE$  równoległy do boku  $AB$ . Punkt  $D$  leży na boku  $AC$ , a punkt  $E$  – na boku  $BC$ . Wiadomo, że  $|AB| = 9$ ,  $|DE| = 3$ ,  $|BE| = 4$ .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A.  $|CE| = 7$

B.  $|CE| = 2$

C. Jest za mało danych, aby wyznaczyć długość boku  $CE$ .

6.2. a) nie b) tak

6.2. Sprawdź, czy trójkąt o bokach  $a, b, c$  jest podobny do trójkąta o bokach  $e, f, g$ .

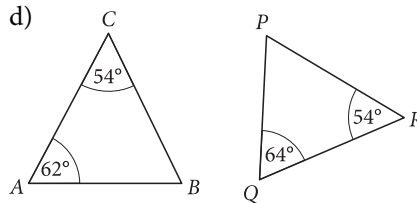
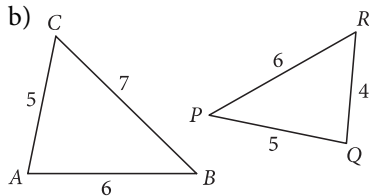
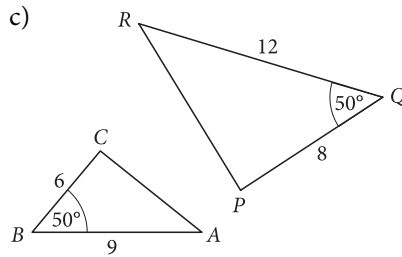
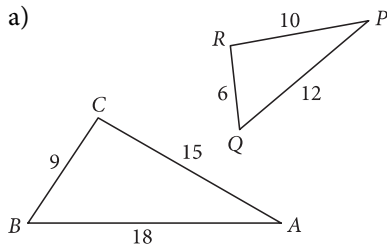
a)  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$

b)  $a = 15$ ,  $b = 20$ ,  $c = 7$

$e = 3$ ,  $f = 1,5$ ,  $g = 2$

$e = 10$ ,  $f = 3,5$ ,  $g = 7,5$

**6.3.** Sprawdź, czy trójkąty  $ABC$  i  $PQR$  są podobne.



**6.4.** Trójkąt o bokach  $a, b, c$  jest podobny do trójkąta o bokach  $a_1, b_1, c_1$  tak, że boki  $a, b, c$  są proporcjonalne odpowiednio do boków  $a_1, b_1, c_1$ . Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

|    | $a$ | $b$ | $c$            | $a_1$ | $b_1$          | $c_1$          |
|----|-----|-----|----------------|-------|----------------|----------------|
| a) | 12  | 3   | 11             | ?     | ?              | $7\frac{1}{3}$ |
| b) | 7   | ?   | $2\frac{1}{2}$ | ?     | $\frac{11}{4}$ | $\frac{5}{4}$  |

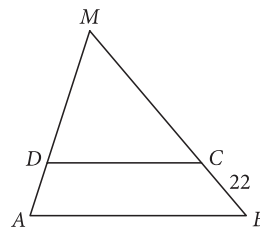
**6.5.** W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  poprowadzono wysokości  $AK, BL$  i  $CM$ . Punkt przecięcia wysokości oznaczono  $H$ . Znajdź trójkąty podobne do podanego trójkąta.

- a)  $AMC$                       b)  $CLB$                       c)  $CHK$

**6.6.** Drzewo rzuca cień 6 razy dłuższy od cienia Wojtka mierzącego 172 cm wysokości. Jaka jest wysokość drzewa?

**6.7.** Boki trójkąta  $ABC$  są równe 8 cm, 10 cm i 11 cm. Najdłuższy bok trójkąta  $PQR$ , podobnego do trójkąta  $ABC$ , ma 33 cm. Wyznacz pozostałe boki trójkąta  $PQR$ .

**6.8.** Stosunek podstaw w trapezie  $ABCD$  przedstawionym na rysunku jest równy  $|AB| : |CD| = 7 : 5$ . Ramię  $BC$  ma długość 22 cm. Oblicz długość odcinka  $CM$ .



- 6.3.** a) tak    b) nie    c) tak  
d) tak

- 6.4.** a)  $a_1 = 8, b_1 = 2$   
b)  $b = 5\frac{1}{2}, a_1 = 3\frac{1}{2}$

- 6.5.** a)  $\triangle ALB, \triangle HLC, \triangle HMB$   
b)  $\triangle HKB, \triangle CKA, \triangle HLA$   
c)  $\triangle AHM, \triangle CBM, \triangle ABK$

**6.6.** 10,32 m

**6.7.** 24 cm, 30 cm

**6.8.** 55 cm

6.9. 8, 10 lub  $4\frac{1}{2}$ ,  $7\frac{1}{2}$  lub  $3\frac{3}{5}$ ,  $4\frac{4}{5}$

6.10. a)  $x = 12,5$  b)  $x = 7$

6.11.  $18\sqrt{13}$  cm,  $12\sqrt{13}$  cm, 78 cm



6.13. Założenie:

$$|AM| = |MN| = |NP| = |AP|$$

$$\text{Teza: } |AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}$$

Dowód:

Z twierdzenia Talesa: ( $MN \parallel AC$ ):

$$\frac{|BM|}{|AM|} = \frac{|BN|}{|NC|} \text{ oraz } (PN \parallel AB):$$

$$\frac{|NC|}{|BN|} = \frac{|CP|}{|AP|}, \text{ zatem } \frac{|BM|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|CP|}.$$

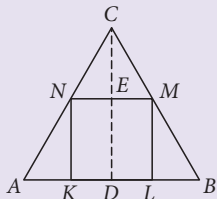
Ponadto  $|AP| = |AM|$ ,

$$\text{więc } \frac{|MB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|CP|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |AM|^2 = |MB| \cdot |CP| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}.$$

6.14.



Dane:  $|AB| = |BC| = |AC| = 12$  cm

Oznaczamy:  $a$  – długość boku

kwadratu KLMN

$\triangle CNM \sim \triangle ABC$

$\triangle CNM$  – równoboczny (o boku  $a$ )

$$H = |CD| = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$h = |CE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{oraz } h = H - a,$$

$$\text{więc } \frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} - a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(2 + \sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$$

$$a = \frac{12\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 12\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) =$$

$$= 24\sqrt{3} - 36 = 12(2\sqrt{3} - 3)$$

Odp.: Bok kwadratu ma długość

$$12(2\sqrt{3} - 3) \text{ cm.}$$

6.9. Trójkąt prostokątny  $ABC$  o przyprostokątnych  $|AC| = 8$  i  $|BC| = 6$  jest podobny do trójkąta, którego jeden z boków ma długość równą 6. Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta.

6.10. W trójkącie  $ABC$  poprowadzono równoległe do boku  $AB$  odcinek  $DE$  tak, że punkt  $D$  leży na boku  $AC$ , a punkt  $E$  – na boku  $BC$ . Wyznacz  $x$ .

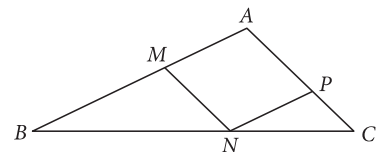
a)  $|AC| = 10$ ,  $|DC| = 4$ ,  $|DE| = 5$ ,  $|AB| = x$

b)  $|AB| = 10$ ,  $|DE| = 5$ ,  $|DC| = 7$ ,  $|AD| = x$

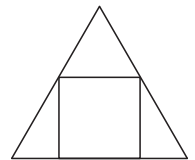
6.11. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma 36 cm. Dzieli ona przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku 4 : 9. Oblicz długości boków tego trójkąta.

6.12. Podziel prostokąt dwoma odcinkami na trzy trójkąty podobne.

**D** \* 6.13. W trójkąt  $ABC$  wpisany jest romb  $AMNP$  jak na rysunku. Wykaż, że  $|AM| = \sqrt{|MB| \cdot |CP|}$ .



\* 6.14. W trójkąt równoboczny o boku 12 cm wpisano kwadrat jak na rysunku. Wyznacz długość boku kwadratu.



\* 6.15. Trójkąt  $T_1$  jest podobny do trójkąta  $T_2$  w skali  $k$ , a trójkąt  $T_2$  jest podobny do trójkąta  $T_1$  w skali  $4k$ . Ile wynosi  $k$ ?

\* 6.16. W równoramiennym trójkącie  $ABC$  podstawa  $AB$  jest równa 12 cm, a ramiona  $AC$  i  $BC$  mają po 10 cm. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z ramionami trójkąta.

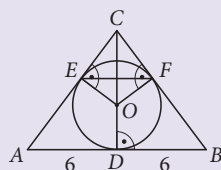
**D** \* 6.17. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wykaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w tym trójkącie dzieli przeciwprostokątną w stosunku 1 : 4.

6.18. W trójkącie prostokątnym  $ABC$  dane są długości przyprostokątnych  $|AB| = 12$  cm i  $|BC| = 4$  cm. Prosta prostopadła do boku  $AB$  rozcina trójkąt  $ABC$  na dwie figury o równych polach. Oblicz długość wspólnego boku tych figur.

6.15.  $T_1 \sim T_2$  w skali  $k \Leftrightarrow T_2 \sim T_1$  w skali  $\frac{1}{k}$ , jednocześnie  $T_2 \sim T_1$  w skali  $4k$ .

$$\text{Zatem } \frac{1}{k} = 4k \Leftrightarrow 4k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}, \text{ bo } k > 0.$$

6.16.



$O$  – środek okręgu wpisanego w  $\triangle ABC$ ,  $|AC| = |BC| = 10$

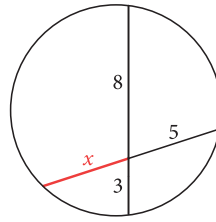
Z twierdzenia o odcinkach stycznych:  $|BF| = |BD| = 6$ , więc  $|CF| = 4$ ;

$$\text{zatem } \triangle CEF \sim \triangle ABC \text{ (kkk) w skali } k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \text{ stąd } |EF| = \frac{2}{5}|AB| = \frac{2}{5} \cdot 12 = \frac{24}{5} = 4,8,$$

Odp.: Szukany odcinek ma długość 4,8 cm.



- \* **6.19.** Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 cm i 6 cm, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 1 : 3. Oblicz długości odcinków drugiej cięciwy.



- \* **6.20.** Dane są okrąg i jego dwie cięciwy jak na rysunku. Oblicz  $x$ .

- D** \* **6.21.** Wykaż, że jeżeli dwa trójkąty wpisane w ten sam okrąg są podobne, to są przystające.

- 6.22.** Na płaszczyźnie dane są trzy niewspółliniowe punkty. Skonstruuj trójkąt, w którym te trzy punkty są środkami boków.

- 6.23.** W trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $B$  jest prosty. Środkowa  $BD$  o długości 6 cm dzieli ten kąt tak, że  $\angle DBA : \angle CBD = 2 : 1$ . Oblicz miary kątów, długości boków i pole tego trójkąta.

- 6.24.** Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16, a każde z ramion ma długość 17. Oblicz długości środkowych tego trójkąta.

- 6.25.** Środkowe trójkąta równoramiennego mają długości 120, 87, 87. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

- D** \* **6.26.** W trójkącie  $ABC$  środkowa  $CD$  jest równa połowie boku  $AB$ . Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

### Prosto do matury



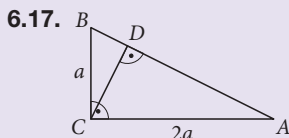
W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- 1.** Wskaż długości boków trójkąta podobnego do trójkąta o bokach 14 cm, 10 cm i 12 cm.

- A. 28 cm, 20 cm, 22 cm  
B. 12 cm, 8 cm, 10 cm  
C. 7 cm, 5 cm, 6 cm  
D. 17 cm, 13 cm, 15 cm

- 2.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono odcinek  $DE$  tak, że punkt  $D$  leży na boku  $AC$ , a punkt  $E$  – na boku  $AB$ . Odcinek  $DE$  jest równoległy do  $BC$ . Wiadomo, że  $|DC| = 14$ ,  $|AC| = 22$  i  $|BC| = 31$ . Wskaż długość odcinka  $DE$ .

- A. 19,8  
B. 11,3  
C.  $19\frac{8}{11}$   
D.  $11\frac{3}{11}$



Dane:  $BC \perp AC$ ,  $|AC| = 2|BC|$   
(oznaczamy  $|BC| = a$ ,  $|AC| = 2a$ )

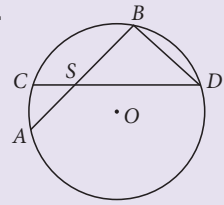
Zatem  $\triangle BCD \sim \triangle ACD$  (kk) w skali  $k = \frac{1}{2}$ ,

stąd  $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |AD| = 2|CD|$  i  $|BD| = \frac{1}{2}|CD|$ ,

więc  $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}|CD|}{2|CD|} = \frac{1}{4} = 1 : 4$ .

- 6.18.**  $2\sqrt{2}$  cm

- 6.19.**



$x > 0$ , oznaczamy  $|AS| = x$ ,

$|BS| = 3x$

Dane:  $|AS| = 6$  cm,  $|BS| = 8$  cm,

$|CS| : |SD| = 1 : 3$

Rozwiązanie:  $\triangle ACS \sim \triangle DBS$  (kkk)

$$\frac{|CS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{8}{3x}$$

$$3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

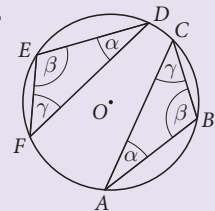
$$x = 4 \text{ (bo } x > 0 \text{)}.$$

Odp.: Odcinki drugiej cięciwy mają długości 4 cm i 12 cm.

$$\mathbf{6.20.} \quad \frac{8}{5} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = 4,8$$

Odp.:  $x = 4,8$

- 6.21.**



Założenie:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$   
i na rysunku

Teza:  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Dowód:

$\angle BAC = \angle EDF$  oraz są to kąty wpisane w ten sam okrąg, więc muszą być oparte na tym samym łuku. Zatem  $|BC| = |EF|$ .

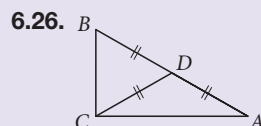
Stąd  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (kbk), bo  $\angle ABC = \angle DEF$ ,  $|BC| = |EF|$  oraz  $\angle ACB = \angle DFE$ .

- 6.22.** Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

- 6.23.**  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ ;  $|AB| = 6$  cm,  $|BC| = 6\sqrt{3}$  cm,  $|AC| = 12$  cm;  $P = 18\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>

- 6.24.**  $15, \frac{3}{2}\sqrt{89}, \frac{3}{2}\sqrt{89}$

- 6.25.** 84



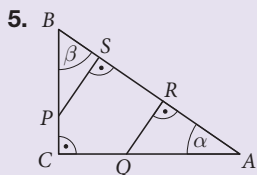
Założenie:  $|DA| = |DB| = |DC|$

Teza:  $\triangle ABC$  jest prostokątny.

Dowód: Z założenia wynika, że  $D$  jest środkiem okręgu opisanego na  $\triangle ABC$ , zatem  $AB$  jest przeciwprostokątną trójkąta, więc  $\angle ACB = 90^\circ$ .

## Prosto do matury

1. C
2. D
3. A
4. P, P, F



Założenie:  $PS \perp AB$ ;  $QR \perp AB$ ;  
 $P \in BC$ ;  $Q \in AC$ ;  $R, S \in AB$

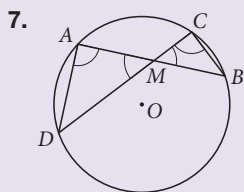
Teza:  $\triangle ARQ \sim \triangle PSB$

Dowód:

$\triangle ARQ \sim \triangle ABC$

oraz  $\triangle PSB \sim \triangle ABC$ , bo są to trójkąty prostokątne o wspólnym kącie ostrym ( $\alpha$  dla  $\triangle ARQ$  i  $\triangle ABC$ ,  $\beta$  dla  $\triangle PSB$  i  $\triangle ABC$ ).  
 Zatem  $\triangle ARQ \sim \triangle ABC \sim \triangle PSB$ ,  
 stąd  $\triangle ARQ \sim \triangle PSB$ .

6. promień: 3 cm,  
 odcinek stycznej: 3 cm



Założenie: na rysunku

Teza:  $|MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$

Dowód:

$\triangle ADM \sim \triangle B M$  cm

Zatem  $\frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MB|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$

3. W dwóch trójkątach równoramiennych kąty między ramionami są równe. Podstawa i opuszczona na nią wysokość jednego trójkąta mają odpowiednio 4 dm i 7 dm, a podstawa drugiego trójkąta ma długość 8 dm. Ile wynosi pole drugiego trójkąta?

A.  $56 \text{ dm}^2$       B.  $7 \text{ dm}^2$       C.  $16 \text{ dm}^2$       D.  $28 \text{ dm}^2$

4. Dwie cięciwy  $AB$  i  $CD$  jednego okręgu przecinają się w punkcie  $P$ . Oceń prawdziwość podanych zdań.

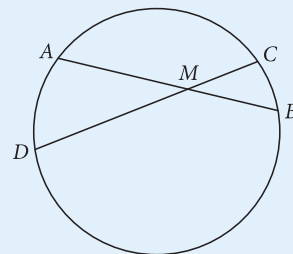
A. Trójkąt  $ACP$  jest podobny do trójkąta  $DBP$ .  
 B. Trójkąt  $ADP$  jest podobny do trójkąta  $CBP$ .  
 C. Trójkąt  $ACP$  jest podobny do trójkąta  $ADP$ .

- D 5. W trójkącie  $ABC$  kąt  $ACB$  jest prosty. Na przyprostokątnych  $AC$  i  $BC$  tego trójkąta obrano odpowiednio punkty  $Q$  i  $P$ . Na boku  $AB$  wyznaczono punkty  $R$  i  $S$  takie, że odcinki  $QR$  i  $PS$  są prostopadłe do przeciwprostokątnej. Udowodnij, że trójkąty  $ARQ$  i  $PSB$  są podobne.

6. W trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i wysokości 8 cm wpisano okrąg i poprowadzono styczną do niego równoległą do podstawy trójkąta. Oblicz promień okręgu i długość odcinka stycznej zawartego w trójkącie.

- D 7. Cięciwy  $AB$  i  $CD$  w okręgu przecinają się w punkcie  $M$  jak na rysunku. Wykaż, że:

$$|MD| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MB|$$



## 7. Powtórzenie

### Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–22 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie równoramiennym  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ , miara kąta  $CAB$  wynosi  $70^\circ$ . Odcinek  $BD$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $ABC$ . Odcinek  $BE$  jest wysokością opuszczoną z wierzchołka  $B$ . Wskaż miarę kąta  $EBD$ .

- A.  $20^\circ$       B.  $18^\circ$       C.  $15^\circ$       D.  $10,1^\circ$

2. Z odcinków o długościach: 1,  $m + 4$ ,  $2m + 1$  można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że

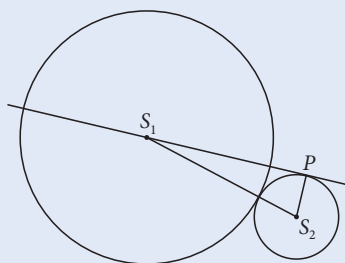
- A.  $m = -3$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 3$ .

3. Pięciokąt  $ABCDE$  jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta  $ACE$ .

- A.  $\triangle ECD$       B.  $\triangle BCD$       C.  $\triangle BCE$       D.  $\triangle ABC$

4. Okręgi o środkach  $S_1$  i  $S_2$  oraz promieniach odpowiednio 3 i 1 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do mniejszego okręgu w punkcie  $P$  przechodzi przez środek  $S_1$  większego okręgu (zob. rysunek). Wskaż obwód trójkąta  $S_1S_2P$ .

- A. 8,8      C.  $5\sqrt{15}$   
B.  $5 + \sqrt{15}$       D.  $15 + \sqrt{5}$



5. Ile wynosi promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 10 cm i 24 cm?

- A. 17 cm      B. 13 cm      C. 12 cm      D. 5 cm

6. Kąt wpisany w okrąg jest o  $70^\circ$  mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Jaka jest miara kąta środkowego?

- A.  $35^\circ$       B.  $70^\circ$       C.  $110^\circ$       D.  $140^\circ$

7. Jaką miarę ma kąt wypukły utworzony przez wskazówki zegara o godzinie  $10^{20}$ ?

- A.  $150^\circ$       B.  $165^\circ$       C.  $170^\circ$       D.  $180^\circ$

### Odpowiedzi i rozwiązania

1. C

2. D

3. C

4. B

5. B

6. D

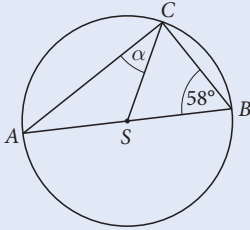
7. C

### Uwagi metodyczne

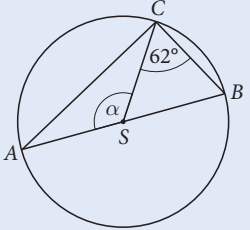
Zadania z geometrii są na ogół dla uczniów dosyć trudne. Często właśnie podczas omawiania tych zagadnień po raz pierwszy stykają się oni z prawdziwymi zadaniami na dowodzenie. Rozwiązanie zadania wymaga dostrzeżenia czegoś na rysunku lub nawet dorysowania na nim jakiegoś elementu. Niekiedy skutecznym sposobem osiągnięcia celu jest szukanie rozwiązania metodą prób i błędów, ale jeszcze częściej pomocny jest **starannie** wykonany kolorowy rysunek (taki, na którym wszystko widać). Dotyczy to raczej trudniejszych zadań, w których zależności geometryczne nie są oczywiste, ale z pewnością może również pomóc słabszym uczniom w pokonywaniu trudności nawet przy pozornie łatwych zadaniach. Podręcznik obfituje w zadania elementarne, ale jest też w nim dużo zadań z gwiazdką. Radzimy dozować je ostrożnie, żeby nie wywołać w uczniach poczucia, że „geometrię w szkole średniej trzeba po prostu przeczekać”.

[dlaNauczyciela.pl](http://dlaNauczyciela.pl) | Klasówka 3

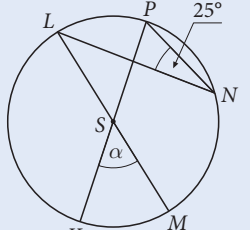
**Generator**  
testów i sprawdzianów

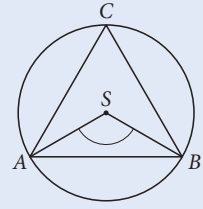
8. D
9. D
10. D
8. Na rysunku 1 punkt  $S$  jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt  $\alpha$ ?  
 A.  $29^\circ$  B.  $30^\circ$  C.  $31^\circ$  D.  $32^\circ$
9. Na rysunku 2 punkt  $S$  jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt  $\alpha$ ?  
 A.  $114^\circ$  B.  $118^\circ$  C.  $122^\circ$  D.  $124^\circ$
10. Na rysunku 3 punkt  $S$  jest środkiem okręgu. Ile stopni ma kąt  $\alpha$ ?  
 A.  $25^\circ$  B.  $30^\circ$  C.  $40^\circ$  D.  $50^\circ$
- 

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3
11. D
12. D
13. C
14. C
15. C
11. Punkt  $A$  leżący na okręgu o środku  $S$  jest końcem cięciwy  $AB$  oraz punktem styczności okręgu z prostą  $l$ . Jeden z dwóch kątów między cięciwą  $AB$  a prostą  $l$  ma miarę  $36^\circ$ . Jaka jest miara wypukłego kąta środkowego  $ASB$ ?  
 A.  $18^\circ$  B.  $36^\circ$  C.  $45^\circ$  D.  $72^\circ$
12. Cięciwy  $AB$  i  $CD$  okręgu o środku  $S$  przecinają się w punkcie  $P$ . Który z wymienionych warunków jest prawdziwy?  
 A.  $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BPD$  B.  $\sphericalangle ASD = 2 \sphericalangle APD$  C.  $2 \sphericalangle ABD = \sphericalangle APD$  D.  $\sphericalangle DCB = \sphericalangle PAD$
13. Okręgi  $o_1(A, r_1)$  i  $o_2(B, r_2)$  są styczne zewnętrznie w punkcie  $C$ . Przez punkt  $C$  poprowadzono prostą przecinającą okrąg  $o_1$  w punkcie  $K$ , a okrąg  $o_2$  w punkcie  $L$ . Kąt  $AKC$  ma miarę  $46^\circ$ . Jaka miarę ma kąt  $LBC$ ?  
 A.  $44^\circ$  B.  $46^\circ$  C.  $88^\circ$  D.  $134^\circ$
14. W okrąg o środku  $S$  wpisano trójkąt równoboczny  $ABC$ . Wskaż miarę zaznaczonego na rysunku kąta środkowego  $ASB$ .  
 A.  $160^\circ$  B.  $140^\circ$  C.  $120^\circ$  D.  $30^\circ$
- 
15. Punkty  $A, B, C$  należą do okręgu o środku w punkcie  $S$ . Kąt  $ABC$  ma miarę  $112^\circ$ . Jaka jest miara kąta  $ASC$  w czworokącie  $ABCS$ ?  
 A.  $68^\circ$  B.  $112^\circ$  C.  $136^\circ$  D.  $224^\circ$

**16.** Dane są trzy koła parami styczne zewnętrznie. Pola tych kół są równe  $4\pi$ ,  $9\pi$  i  $16\pi$ . Ile wynosi obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych kół?

- A. 15                      B. 18                      C. 20                      D. 25

**17.** Które z podanych zdań jest prawdziwe?

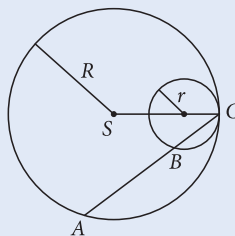
- I. Każde dwa prostokąty są podobne.  
II. Każde dwa okręgi są podobne.  
III. Dwa trójkąty o równym polu są podobne.

- A. tylko I                      B. tylko II                      C. tylko III                      D. żadne

**18.** Okrąg o promieniu  $r = 5$  jest styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu  $R = 15$  jak na rysunku obok.

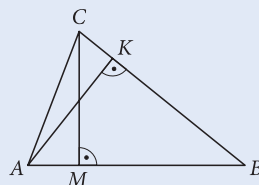
Wiadomo, że  $|BC| = 8$ . Jaką długość ma cięciwa  $AC$ ?

- A. 16                      C. 20  
B. 24                      D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.



**19.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono wysokości  $AK$  i  $CM$  jak na rysunku. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A.  $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|MB|}{|KB|}$                       C.  $\frac{|AB|}{|AK|} = \frac{|BC|}{|CM|}$   
B.  $\frac{|BK|}{|MB|} = \frac{|AB|}{|CM|}$                       D.  $|MB| \cdot |AK| = |BK| \cdot |CM|$



**20.** Dwie proste równoległe przecinają ramiona kąta o wierzchołku w punkcie  $O$ . Na jednym ramieniu tego kąta powstały odcinki  $OA$  i  $AB$  równej długości, a na drugim odcinki  $OC$  i  $CD$  (punkt  $C$  leży między punktami  $O$  i  $D$ ). Odcinek  $BD$  ma długość  $12\frac{1}{3}$ . Wskaż długość odcinka  $AC$ .

- A.  $12\frac{1}{3}$                       C.  $6\frac{1}{6}$   
B.  $6\frac{2}{3}$                       D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.

**21.** Trójkąt o bokach długości  $\sqrt{27}$ ,  $\sqrt{48}$ ,  $\sqrt{75}$  jest podobny do trójkąta, którego boki mają długości

- A. 27, 48, 75.                      B. 9, 12, 15.                      C.  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{5}$ .                      D.  $2\sqrt{3}$ ,  $3\sqrt{3}$ ,  $4\sqrt{3}$ .

**22.** Trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  są podobne i mają pola odpowiednio równe  $36 \text{ cm}^2$  i  $80 \text{ cm}^2$ . Wskaż skalę podobieństwa trójkąta  $A'B'C'$  do trójkąta  $ABC$ .

- A.  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$                       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$                       C.  $2\frac{2}{9}$                       D.  $\frac{9}{20}$

**16.** B

**17.** B

**18.** B

**19.** B

**20.** C

**21.** B

**22.** B

**W zadaniach 23–28 oceń prawdziwość podanych zdań.**

**23.** F, P, P

- 23.** Środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  leży na boku  $AB$ . Wynika stąd, że
- A. trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.
  - B.  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ .
  - C.  $AB$  jest najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$ .

**24.** F, F, P

- 24.** W czworokącie wypukłym poprowadzono dwusieczne czterech kątów wewnętrznych. Wynika stąd, że
- A. dwusieczne te przecinają się w jednym punkcie.
  - B. dwusieczne dokładnie trzech kątów mogą przeciąć się w jednym punkcie.
  - C. dwusieczne te mogą nie przecinać się w jednym punkcie.

**25.** P, F, F

- 25.** Dane są dwa przystające trójkąty prostokątne. W pierwszym z nich poprowadzono symetralną krótszej przyprostokątnej, a w drugim dłuższej. Symetralne podzieliły każdą z figur na trójkąt i czworokąt. Wynika stąd, że
- A. pola otrzymanych czworokątów są równe.
  - B. obwody otrzymanych czworokątów są równe.
  - C. oba czworokąty są przystające.

**26.** P, F, F

- 26.** W trójkącie  $ABC$  wysokości poprowadzone z wierzchołków  $A$  i  $C$  są równe. Wynika stąd, że
- A. środek okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  leży na wysokości poprowadzonej z wierzchołka  $B$ .
  - B. wszystkie wysokości trójkąta  $ABC$  są równe.
  - C. trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny.

**27.** F, P, P

- 27.** Obwód pierwszego prostokąta jest równy 100 cm, a obwód drugiego prostokąta jest o 100 cm większy niż pierwszego. Wynika stąd, że
- A. pole drugiego prostokąta jest zawsze większe od pola pierwszego prostokąta.
  - B. pola obu prostokątów mogą być takie same.
  - C. pole drugiego prostokąta może być mniejsze od pola pierwszego prostokąta.

**28.** P, F, F

- 28.** Czworokąt  $T$  przekształcono przez podobieństwo i otrzymano czworokąt  $T'$ . Pole czworokąta  $T'$  jest o 44% większe od pola czworokąta  $T$ . Zatem:
- A. obwód czworokąta  $T'$  jest o 20% większy od obwodu czworokąta  $T$ .
  - B. obwód czworokąta  $T'$  jest o 22% większy od obwodu czworokąta  $T$ .
  - C. skala tego podobieństwa była równa  $\sqrt{0,44}$ .

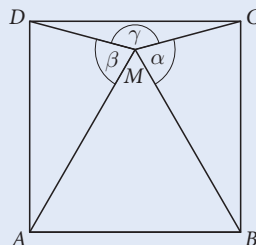
## Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

**29.** Kąt ostry równoległoboku ma miarę  $40^\circ$ . Wyznacz miary kątów utworzonych przez dwie różne wysokości tego równoległoboku poprowadzone z jednego wierzchołka.

**30.** Określ wzajemne położenie okręgów  $o_1(A, r_1)$  i  $o_2(B, r_2)$ .

- a)  $|AB| = 12$     $r_1 = 8$     $r_2 = 3$    c)  $|AB| = 1$     $r_1 = 3$     $r_2 = 5$   
 b)  $|AB| = 8$     $r_1 = 10$     $r_2 = 2$    d)  $|AB| = 6$     $r_1 = 5$     $r_2 = 4$

**31.** Czworokąt  $ABCD$  jest kwadratem, a trójkąt  $ABM$  trójkątem równobocznym (zob. rysunek). Wyznacz miary kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .



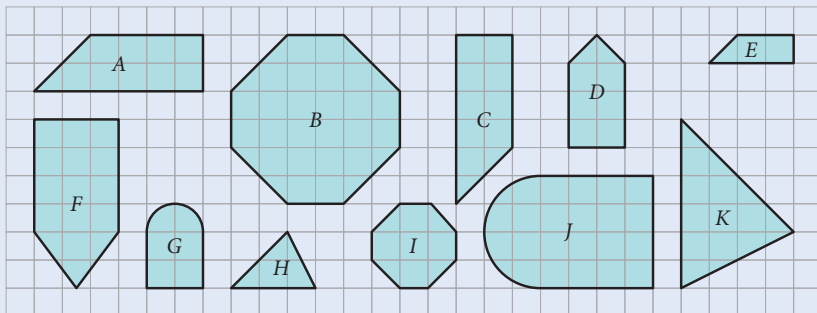
**32.** Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów o promieniu  $r = 4$  stycznych zewnętrznie do okręgu  $o(A, 2)$ ?

**33.** Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów o promieniu  $r = 3$  stycznych wewnętrznie do okręgu  $o(A, 7)$ ?

**34.** Dane są dwa okręgi  $o_1(A, 9)$  i  $o_2(A, 5)$ . Jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów stycznych równocześnie do obydwu tych okręgów?

**35.** Na trójkącie równoramiennym  $ABC$ , w którym  $|AC| = |CB|$ , a kąt między ramieniem i podstawą ma  $52^\circ$ , opisano okrąg o środku  $S$ . Wyznacz miarę wypukłego kąta środkowego  $ASB$ .

**36.** Które z narysowanych figur są podobne?



**37.** Prostokąt o wymiarach  $18 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  jest podobny do prostokąta, którego jeden z boków ma długość  $6 \text{ cm}$ . Oblicz skalę podobieństwa i obwód drugiego prostokąta.

**38.** Obwody dwóch wielokątów podobnych są równe  $80 \text{ cm}$  i  $60 \text{ cm}$ . Długości najkrótszych boków tych wielokątów różnią się o  $5 \text{ cm}$ . Oblicz te długości.

**29.**  $40^\circ, 140^\circ$

- 30.** a) rozłączne zewnętrznie  
 b) wewnętrznie styczne  
 c) rozłączne wewnętrznie  
 d) przecinające się

**31.**  $\alpha = \beta = 75^\circ$ ,  $\gamma = 150^\circ$

**32.**  $o(A, 6)$

**33.**  $o(A, 4)$

**34.**  $o(A, 7)$

**35.**  $152^\circ$

**36.**  $A \text{ i } C$ ,  $A \text{ i } E$ ,  $C \text{ i } E$ ,  $B \text{ i } I$ ,  
 $G \text{ i } J$ ,  $H \text{ i } K$

**37.**  $k = \frac{1}{3}$ ,  $obw = 22 \text{ cm}$

lub  $k = \frac{2}{5}$ ,  $obw = 26,4 \text{ cm}$

**38.**  $20 \text{ cm}$  i  $15 \text{ cm}$

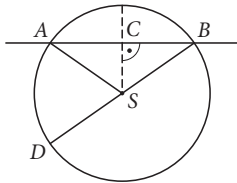
39. a) tak b) nie

40.  $\frac{1}{2}$

41.  $k = \frac{3}{2}$

42. 21 : 18 : 14

44.



Założenie:  $|AB| = 8$  cm,  
 $|CS| = 12$  cm

Teza:  $|BD| = 30$  cm

Dowód:

$\triangle ABS$  jest równoramienny  
 $(|AS| = |BS|)$ .

Zatem  $CS$  jest wysokością  
 tego trójkąta dzielącą bok  $AB$   
 na dwa równe odcinki

$(|AC| = |BC| = 9$  cm),

stąd (w  $\triangle BCS$ ):  $|BS|^2 =$   
 $= 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 = 15^2$ ,

więc  $|BS| = 15$  cm

– promień okręgu.

Zatem  $|BD| = 2 \cdot |BS| = 30$  cm.

45.  $15(2\sqrt{2} + 3)$  cm

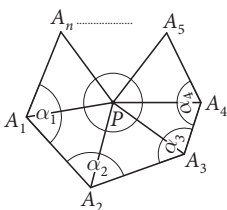
46.  $20^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $100^\circ$

47.  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 55^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 70^\circ$   
 lub  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 35^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 110^\circ$

48.  $|AB| = 30$ ,  $|BC| = |AC| = 25$ ;  
 wysokości z wierzchołków  $A$  i  $B$ : 24

49. 26 cm lub 52 cm lub 39 cm

43.



Założenie: wielokąt  $A_1A_2A_3\dots A_n$  jest wypukły.

Teza:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$

Dowód:

I sposób

Dzielimy  $n$ -kąt wypukły na  $(n - 2)$  trójkątów rozłącznych, prowadząc wszystkie przekątne z wierzchołka  $A_1$  (lub jakiegokolwiek innego), czyli prowadząc przekątne  $A_1A_3$ ,  $A_1A_4$ ,  $A_1A_5$ , ...,  $A_1A_{n-1}$ . Wówczas suma miar kątów tych  $(n - 2)$  trójkątów jest równa sumie  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ , czyli  $(n - 2) \cdot 180^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ .

II sposób

Niech  $P$  będzie punktem wewnętrznym wielokąta. Punkty  $A_1A_2A_3\dots A_n$  (wierzchołki  $n$ -kąta wypukłego) łączymy z punktem  $P$ , dzieląc wielokąt  $A_1A_2A_3\dots A_n$  na  $n$  trójkątów:  $A_1A_2P$ ,  $A_2A_3P$ ,  $A_3A_4P$ , ...,  $A_nA_1P$ .

Suma miar kątów wewnętrznych tych trójkątów jest równa sumie miar kątów  $n$ -kąta  $A_1A_2A_3\dots A_n$  zwiększonej o kąt pełny wierzchołka  $P$ . Zatem  $n \cdot 180^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + 360^\circ$ ,

stąd  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

39. Sprawdź, czy trójkąt o bokach  $a, b, c$  jest podobny do trójkąta o bokach  $e, f, g$ .

a)  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 3 + \sqrt{2}$ ,  $c = 6 - \sqrt{2}$       b)  $a = 8\frac{2}{3}$ ,  $b = 9,1$ ,  $c = 17\frac{1}{3}$

$e = 2$ ,  $f = 1,5\sqrt{2} + 1$ ,  $g = 3\sqrt{2} - 1$        $e = 1\frac{1}{3}$ ,  $f = 2,4$ ,  $g = 2\frac{1}{3}$

40. W trapezie  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel DC$ , punkt  $K$  jest środkiem boku  $AD$ . Oblicz stosunek pola trójkąta  $CKB$  do pola trapezu  $ABCD$ .

41. Wielokąt o polu  $60$  cm<sup>2</sup> przekształcono przez podobieństwo tak, że pole jego obrazu jest o  $75$  cm<sup>2</sup> większe od pola początkowego wielokąta. Oblicz skalę tego podobieństwa.

42. Boki trójkąta mają długości 12, 14 i 18. Wyznacz stosunek odpowiednich wysokości opuszczonych na te boki.

### Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

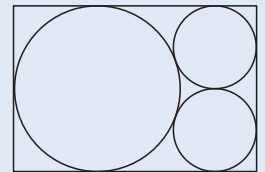
D

43. Udowodnij, że suma miar kątów  $n$ -kąta wypukłego jest równa  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

D

44. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej cięciwę o długości 18 cm jest równa 12 cm. Wykaż, że średnica tego okręgu wynosi 30 cm.

45. Maszyna wycina kółka z prostokątnych kawałków blachy według wzoru pokazanego na rysunku. Krótszy bok kawałka blachy potrzebnego do wycięcia takich kółek ma długość 60 cm. Oblicz długość dłuższego boku tego prostokąta.



46. Trójkąt  $ABC$  o kątach  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$  wpisano w okrąg, a następnie poprowadzono styczne do tego okręgu odpowiednio w punktach  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Wyznacz kąty trójkąta utworzonego przez te styczne.

47. Trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ , wpisany jest w okrąg o środku  $S$ . Wiadomo, że  $\sphericalangle BAS = 20^\circ$ . Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .

48. Na okręgu o promieniu 7,5 opisany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka  $C$  jest równa 20. Oblicz długości boków i pozostałe wysokości tego trójkąta.

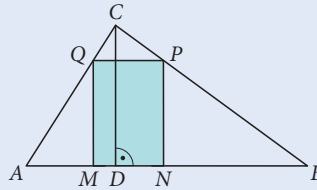
49. Długości boków trójkąta  $ABC$  wynoszą 6 cm, 8 cm i 12 cm. Wyznacz obwód trójkąta podobnego do trójkąta  $ABC$ , w którym jeden z boków ma długość 12 cm.



**50.** Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o polu  $324 \text{ cm}^2$  ma długość 36 cm. Oblicz pole koła stycznego do przyprostokątnych, którego środek leży na przeciwprostokątnej.

**51.** W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę ma 24 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 9 cm. Oblicz pole trójkąta.

**52.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono wysokość  $CD$  jak na rysunku. Wiadomo, że  $|AB| = 12$ ,  $|CD| = 6$ ,  $|MN| = 3$ . Oblicz pole prostokąta  $MNPQ$ .



**\* 53.** Wysokość  $CD$  dzieli bok  $AB$  trójkąta  $ABC$  na dwa odcinki o długościach 36 cm i 14 cm. Prostopadłe do boku  $AB$  poprowadzono prostą, która dzieli trójkąt na dwie części o równych polach. Jakie są długości odcinków, na które ta prosta dzieli bok  $AB$  trójkąta?

**D \* 54.** Punkt  $S$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym  $ABC$ . Poprowadzono wysokość  $CD$  tego trójkąta. Wykaż, że kąt  $ACD$  jest równy kątowi  $SCB$ .

**D 55.** W trapezie  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ , przekątne  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $S$ . Wykaż, że pola trójkątów  $ASD$  i  $BSC$  są równe.

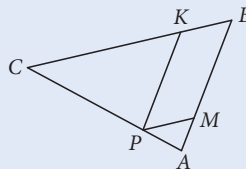
**56.** W trapezie  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ , przekątne  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $S$ . Punkt  $S$  dzieli odcinek  $AC$  tak, że  $|CS| : |SA| = 2 : 3$ , a pole trójkąta  $BCS$  jest równe 12. Oblicz pole trapezu.

**57.** W trapezie równoramiennym o polu 135 jedna podstawa jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz pola trójkątów, na jakie dzieli trapez jego przekątne.

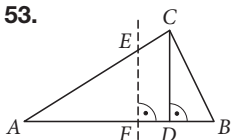
**58.** Pola trzech wielokątów podobnych są równe  $80 \text{ cm}^2$ ,  $180 \text{ cm}^2$  i  $245 \text{ cm}^2$ , a suma obwodów tych figur jest równa 1,7 m. Oblicz obwód najmniejszego wielokąta.

**59.** Piotr chce narysować na kartce formatu A4 ( $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$ ) możliwie duży plan swojego pokoju, który ma wymiary  $2,8 \text{ m} \times 3,6 \text{ m}$ . Jaką skalę powinien przyjąć?

**60.** Proste  $PK$  i  $MP$  są równoległe do odpowiednich boków trójkąta  $ABC$  jak na rysunku. Wiadomo, że  $|AM| = 4$ ,  $|AP| = 5$ ,  $|PC| = 15$ ,  $|BK| = 6$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .



**53.**



Dane:  $|AD| = 36 \text{ cm}$ ,  $|DB| = 14 \text{ cm}$ ,  $EF \perp AB$ ,  $CD \perp AB$ ,  
 $P_{\triangle AEF} = P_{\triangle BCF}$   
 Szukane:  $|AF|$ ,  $|FB|$   
 Oznaczamy:  $h = |CD|$ ,  $h > 0$ ;  
 $|AB| = 50 \text{ cm}$

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $\frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = 25h$ .

Zatem pole trójkąta  $AEF = \frac{1}{2} \cdot 25h = 12,5h$  oraz pole trójkąta  $AEF = \frac{1}{2}|AF| \cdot |EF|$ ,

więc  $|AF| \cdot |EF| = 25h$ . Z twierdzenia Talesa (z podobieństwa trójkątów  $AEF$  i  $ACD$ ):

$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|EF|}{|CD|} \Leftrightarrow \frac{|AF|}{36} = \frac{|EF|}{h} \Leftrightarrow |EF| = \frac{|AF| \cdot h}{36} \quad (*)$$

Podstawiając  $|EF|$  z (\*) do równości  $|AF| \cdot |EF| = 25h$ , otrzymujemy:

$$|AF| \cdot \frac{|AF| \cdot h}{36} = 25h, \text{ więc } |AF|^2 = 36 \cdot 25, \text{ stąd } |AF| = 6 \cdot 5 = 30, |FB| = |AB| - |AF| = 20.$$

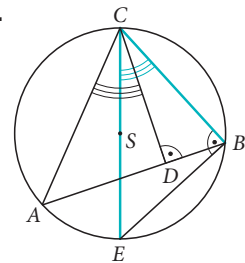
**Odp.:** 30 cm i 20 cm

**50.**  $144\pi \text{ cm}^2$

**51.**  $432 \text{ cm}^2$

**52.**  $13\frac{1}{2}$

**54.**



Założenie:  $CD \perp AB$ ,

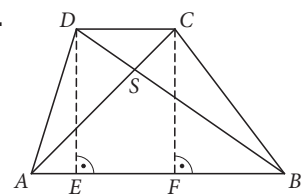
$S$  – środek okręgu

Teza:  $\angle ACD = \angle SCB$

Dowód:

$\angle DAC = \angle BEC$ , więc  $\triangle ACD \sim \triangle BCE$  (trójkąty prostokątne o kącie ostrym tej samej miary); zatem drugi kąt ostry każdego z tych trójkątów ma taką samą miarę, czyli  $\angle ACD = \angle SCB$ .

**55.**



Założenie:  $AB \parallel CD$  i na rysunku

Teza:  $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle BSC}$

Dowód:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CF| = P_{\triangle ABC}$$

Zatem  $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle BSC}$ .

**56.** 50

**57.** 60, 30, 15, 30

**58.** 40 cm

**59.**  $1 : 13\frac{1}{3}$

**60.** 60

**61. Wskazówka:** Niech punkt  $M$  należy do boku  $AD$ , a punkt  $N$  do  $BC$ . Z podobieństwa trójkątów  $CDP$  i  $ABP$  wynika równość:

$$\frac{|PD|}{|BP|} = \frac{|PC|}{|AP|}.$$

Skorzystaj z podobieństwa trójkątów  $AMP$  i  $ADC$  oraz trójkątów  $BNP$  i  $BCD$ , aby zbadać proporcje  $\frac{|DC|}{|MP|}$  oraz  $\frac{|DC|}{|PN|}$ .

**62. Wskazówka:** Poprowadź prostą, która jest równoległa do podstaw trapezu i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Skorzystaj z zadania 61.

**64. Wskazówka:** Poprowadź odcinek  $MF$  (punkt  $F$  leży na boku  $AC$ ) równoległe do boku  $BC$  i rozważ trójkąt  $AMF$ .

**65.**  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 40^\circ$   
lub  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 140^\circ$

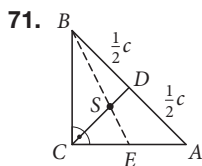
**66.** 20,5

**67.**  $(3 + 3\sqrt{3})$  cm

**68.**  $5\sqrt{3}$

**69.** 8. **Wskazówka:** Zauważ, że kąt między dwoma promieniami okręgu opisanego poprowadzonymi do końców jednego z ramion trójkąta jest równy  $30^\circ$ .

**70.** 4,5 cm



Założenie:  $|AC| = |BC|$ ,  $AC \perp BC$ ,  
 $|AB| = c$ ,  $D$  – środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ ,  
 $S$  – środek ciężkości

Teza:  $|DS| = \frac{1}{6}c$

Dowód:

$CD$ ,  $BE$  – środkowe trójkąta  $ABC$ ,  
więc  $|CS| : |SD| = |BS| : |SE| = 2 : 1$ .  
Zatem

$$|SD| = \frac{1}{3}|CD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot c = \frac{1}{6} \cdot c,$$

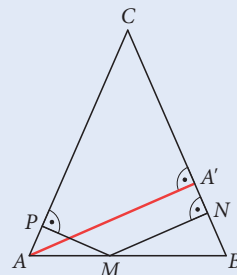
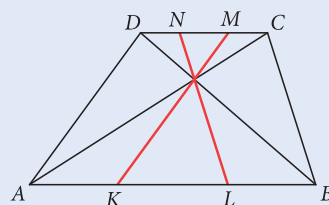
co kończy dowód.

**61.** Przekątne trapezu  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ , przecinają się w punkcie  $P$ . Prosta równoległa do podstaw i przechodząca przez punkt  $P$  przecina ramiona trapezu w punktach  $M$  i  $N$ . Udowodnij, że punkt  $P$  jest środkiem odcinka  $MN$ .

**62.** Proste  $KM$  i  $NL$  są równoległe do odpowiednich boków trapezu  $ABCD$  jak na rysunku. Wykaż, że  $|AK| = |LB|$ .

**63.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym  $ABC$  kąt pomiędzy wysokością a środkową poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego jest równy różnicy kątów ostrych trójkąta  $ABC$ .

**64.** W równoramiennym trójkącie  $ABC$ , w którym  $|AC| = |CB|$ , z dowolnie wybranego punktu  $M$  podstawy  $AB$  poprowadzono odcinki  $MN$  oraz  $MP$  prostopadłe do ramion  $BC$  i  $AC$  trójkąta (zob. rysunek). Wykaż, że  $|MN| + |MP| = |AA'|$ , gdzie  $AA'$  jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka  $A$ .



**65.** Na trójkącie równoramiennym  $ABC$ , w którym  $|AC| = |CB|$ , opisano okrąg o środku  $S$ . Wiadomo, że  $\sphericalangle ASB = 80^\circ$ . Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .

**66.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 9 i 40.

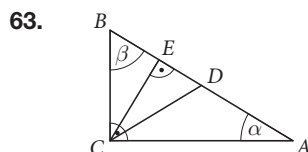
**67.** Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 6 cm krótszy od boku trójkąta. Wyznacz ten promień.

**68.** Dany jest romb  $ABCD$  o boku 15 i kącie przy wierzchołku  $A$  równym  $60^\circ$ . Okrąg opisany na trójkącie  $ABD$  przecina przekątną  $AC$  w punkcie  $P$ . Wyznacz długość odcinka  $PD$ .

**69.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 i kącie między ramionami  $150^\circ$ .

**70.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o bokach 18 cm, 15 cm, 15 cm.

**71.** Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej  $c$ . Wykaż, że odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa  $\frac{1}{6}c$ .



Założenie:  $|BD| = |AD|$ ,  $CE \perp AB$

Teza:  $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC$

Dowód:

Oznaczamy  $\sphericalangle ABC = \beta$ ,  $\sphericalangle BAC = \alpha$

Punkt  $D$  jest środkiem okręgu opisanego na  $\triangle ABC$ , więc  $|DA| = |DB| = |DC|$ ,  
stąd trójkąty  $ACD$  i  $BCD$  są równoramienne.

$$\begin{cases} \triangle BCE \sim \triangle ABC, & \text{więc } \sphericalangle BCE = \alpha \\ |DB| = |DC|, & \text{więc } \sphericalangle BCD = \beta \end{cases} \Rightarrow \sphericalangle DCE = \beta - \alpha = \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC$$