



5 Powtórzenie

5.1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy literą $\mathbf{R}$.

Liczby naturalne to liczby: $0, 1, 2, 3, \dots$. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbf{N}$.

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \dots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \dots$ oraz liczba 0 . Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą $\mathbf{Z}$.

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbf{Q}$.

Liczby niewymierne to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy jako $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Potęga o wykładniku całkowitym

$$a^0 = 1 \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } a \neq 0, n \in \mathbf{N}$$

Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{dla } a \geq 0, n \in \mathbf{N}, n > 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{dla } a > 0, n \in \mathbf{N}, n > 1, m \in \mathbf{Z}$$

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{R}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

Działania na pierwiastkach

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{dla } a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{dla } a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \quad \text{dla } a, b \in \mathbf{R}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{dla } a \in \mathbf{R}, b \neq 0$$

Wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Zestaw I – wprowadzający

- Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbf{Z}$.
 - $0,125^3 \cdot 32^{-2}$
 - $0,4^7 \cdot 2,5^{-4} : \left(\frac{2}{5}\right)^5$
 - $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} : \sqrt{8}$
 - $\left(\frac{1}{27}\right)^5 : 81^{3,25}$
 - $0,64^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$
 - $9^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{27^2}$
- Oblicz. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.
 - $\frac{5^6 + 20 \cdot 5^4}{2 \cdot 5^6 - 100 \cdot 5^3}$
 - $\frac{6 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4^3}{2 \cdot 8^2 - 5 \cdot 2^6}$
 - $\frac{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 3,5}{4^{-1} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{17}{19}\right)^0\right]}$
 - $\frac{1,75 + 0,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{3 \cdot \frac{1}{12} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}$
 - $\frac{2,2 \cdot \frac{10}{11} + 0,6 \cdot (0,9)^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(2\frac{1}{4} - 1,75\right)}$
 - $\frac{\left(3\frac{1}{3}\right)^{-7} \cdot (0,3)^{-5}}{2^{-2} \cdot \left(1^0 + 27 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3\right)}$
- Oblicz. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.
 - $(6 \cdot 10^8) \cdot (5,5 \cdot 10^7)$
 - $0,000\,012\,5 \cdot 0,000\,04$
 - $(0,81 \cdot 0,0004)^{0,5}$
 - $(4 \cdot 10^5) : (8 \cdot 10^{-6})$
 - $0,000\,002\,7 : 0,000\,09$
 - $(245 : 0,0005)^{0,5}$
- Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.
 - $\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 3\sqrt{75} = 0$
 - $(7\sqrt{12} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{75} = 150$
 - $\sqrt{48} + \sqrt{12} = \sqrt{50}$
 - $(\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{54}) : \sqrt{12} = 0$
 - $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-81} = 0$
 - $\sqrt[3]{-8\frac{1}{6}} : \sqrt[3]{-5\frac{1}{7}} = 1\frac{1}{6}$
- Oblicz.
 - $(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)$
 - $(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})$
 - $(2 + \sqrt{3})^2(7 - 4\sqrt{3})$
 - $(1 - 2\sqrt{2})^2(9 + 4\sqrt{2})$
 - $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$
 - $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
- Usuń niewymierność z mianownika.
 - $\frac{2}{\sqrt{5}-2}$
 - $\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$
 - $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
 - $\frac{5-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 1 + 3\sqrt{5}$. Wynik zapisz w postaci $a + b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Q}$.
 - $3x + y$
 - $x \cdot y$
 - $y : x$
 - $\frac{2y-x}{2x+y}$
- Sprawdź, czy poniższa równość jest prawdziwa.
 - $3 - \sqrt{3} = \sqrt{12 - 3\sqrt{12}}$
 - $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

8. a) $3 - \sqrt{3} > 0$ oraz $12 - 3\sqrt{12} > 0$

$$(3 - \sqrt{3})^2 = \left(\sqrt{12 - 3\sqrt{12}}\right)^2$$

$$12 - 3\sqrt{12} = 12 - 3\sqrt{12}$$

L = P. Zatem równość jest prawdziwa.

b) $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$, $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} > 0$

Zatem równość nie jest prawdziwa.

Odpowiedzi do zadań

- a) 2^{-19} b) 3^{-28} c) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$
 d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ e) $(\sqrt[3]{2})^{-2}$ f) $(\sqrt[6]{3})^{17}$
- a) $\frac{5^6 + 4 \cdot 5^5}{2 \cdot 5^6 - 4 \cdot 5^5} = \frac{5^5 \cdot (5 + 4)}{5^5 \cdot (2 \cdot 5 - 4)} = \frac{3}{2}$
 b) $\frac{3 \cdot 2^5 - 2^9}{2^7 - 5 \cdot 2^6} = \frac{2^5 \cdot (3 - 2^4)}{2^5 \cdot (2^2 - 5 \cdot 2)} = \frac{13}{6}$
 c) $\frac{8,5}{\frac{1}{4} \cdot 8} = \frac{17}{4}$
 d) $\frac{2,5}{\frac{1}{4}} = \frac{10}{7}$
 e) $\frac{2\frac{2}{3}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}} = 12$
 f) $\frac{\frac{100}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{25}$
- a) $3,3 \cdot 10^{16}$ b) $5 \cdot 10^{10}$
 c) $5 \cdot 10^{-10}$ d) $3 \cdot 10^{-2}$
 e) $1,8 \cdot 10^{-2}$ f) $7 \cdot 10^2$
- a) $3\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = 0$, tak
 b) $\sqrt{48} + \sqrt{12} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108} \neq \sqrt{50}$, nie
 c) $\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 0$, tak
 d) $5\sqrt{12} \cdot \sqrt{75} = 150$, tak
 e) $(2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 3\sqrt{6}) : 2\sqrt{3} = 0$, tak
 f) $\sqrt[3]{\frac{49}{6} \cdot \frac{7}{36}} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$, tak
- a) 2 b) -11
 c) $(7 + 4\sqrt{3})^2(7 - 4\sqrt{3}) = 1$
 d) $(1 - 2\sqrt{2})^2(9 + 4\sqrt{2}) = 49$
 e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2 = 12\sqrt{7}$
 f) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 25$
- a) $2\sqrt{5} + 4$ b) $\frac{3\sqrt{7}-7}{2}$
 c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 4$
- a) 7 b) $-13 + 5\sqrt{5}$
 c) $-17 - 7\sqrt{5}$
 d) $\frac{7\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{35\sqrt{5}-35}{20} = -\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{5}$

9. a) $2\sqrt{2} + 1 - 2(2 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 3$
 b) $(2\sqrt{3} - \sqrt{11})(2\sqrt{3} + \sqrt{11}) = 1$
 c) $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$
 d) $|8 - 3\sqrt{7}| = 8 - 3\sqrt{7}$
10. a) $x = -3$
 b) $x = -4, x = 2$
 c) $x = 0, x = 4$
 d) $x = -2, x = 4$
11. a) $|x + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3| = 1$
 $x + 3 = 1$ lub $x + 3 = -1$
 $x = -2$ lub $x = -4$
 b) $|\sqrt{5} - 2 + 2 - x| = 0$
 $x = \sqrt{5}$
12. a) $x \in \langle 1; 9 \rangle$
 b) $x \in (-9; 1)$
 c) $x \in (-\infty; 1) \cup \langle 5; \infty \rangle$
 d) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$
 e) $x \in (2; 10)$
 f) $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$
13. a) $x = \frac{1}{4} : \frac{1}{16} = 4$
 $y = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{6}} = 3$
 $\frac{y}{x} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%$
 b) $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{5}$
 $y = \frac{27}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{4}$
 $\frac{y}{x} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 100\% = 375\%$
14. $0,21a = 0,12b, a, b > 0$
 $b = \frac{21}{12}a = 1,75a$
 Liczba b jest większa od liczby a o 75%.
15. a) 14,167, z nadmiarem
 b) 10,625, wartość dokładna
 c) 1,879, z nadmiarem
 d) 0,099, z niedomiarem

9. Oblicz.

a) $|2\sqrt{2} + 1| - 2|\sqrt{2} - 2|$ c) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$
 b) $|\sqrt{11} - 2\sqrt{3}| \cdot (\sqrt{11} + 2\sqrt{3})$ d) $\sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2}$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ dla } a \in \mathbf{R}$$

- Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$.
- Jeśli $a > 0$, to $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-a; a)$.
- Jeśli $a > 0$, to $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$.

10. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 3| = 0$ b) $|x + 1| = 3$ c) $2|2 - x| = 4$ d) $3|1 - x| = 9$

11. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 2\sqrt{3} - |3 - 2\sqrt{3}|| = 1$ b) $|\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + 2 - x| = 0$

12. Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 5| \leq 4$ c) $|x - 3| \geq 2$ e) $|6 - x| < 4$
 b) $|x + 4| < 5$ d) $|x + 2| > 3$ f) $|2 - x| > 3$

13. Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y .

a) $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right), y = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$
 b) $x = 3^{-1} \cdot 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{81^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{25}}, y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{4}}{3}\right)^2$

14. Wiadomo, że 21% dodatniej liczby a jest równe 12% liczby b . Która z tych liczb jest większa i o ile procent?

15. Podaj rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego. Zaokrąglij je do trzeciego miejsca po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $\frac{85}{6}$ b) $\frac{85}{8}$ c) $\frac{62}{33}$ d) $\frac{11}{111}$

16. Liczba 17,7828 jest przybliżeniem liczby $10^{1,25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wiedząc o tym, wyznacz przybliżenie liczby:

a) $10^{0,25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku,
 b) $10^{\frac{13}{4}}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku,
 c) $10^{-\frac{7}{4}}$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

16. a) $10^{1,25} : 10 = 1,7783$

b) $10^{3,25} = 10^{1,25} \cdot 10^2 = 1778,28$

c) $10^{1,25} : 10^3 = 0,01778$

Zestaw II – ćwiczeniowy

17. Sprawdź, czy podana liczba jest niewymierna.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left[(3 + 5^{0,5})^{0,5} - (3 - 5^{0,5})^{0,5} \right]^2 & \text{c)} & \left[(\sqrt{7} + \sqrt{3})^{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})^{\sqrt{2}} \right]^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \\ \text{b)} & \left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} \right)^{\frac{2}{3}} + 25^{-0,25} \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} \right)^{\frac{2}{3}} - 25^{-0,25} \right] \end{aligned}$$

18. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} & a \cdot b & \text{c)} & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & \text{e)} & (a - b)^2 & \text{g)} & \frac{1}{a^2} + b^2 \\ \text{b)} & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} & \text{d)} & \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} & \text{f)} & (a + b)^2 & \text{h)} & \frac{1}{a^2} - b^2 \end{aligned}$$

19. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} & (x + \sqrt{3})^3 + 2x(x + 3)(x - 3) + (x - \sqrt{3})^3 \\ \text{b)} & (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3) + (x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3) \end{aligned}$$

20. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{2} - 1$ i $y = 1 - 2\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} & (\sqrt{6}x - y)(\sqrt{6}x + y) - (3x + y)^2 + 3x(2y + x) \\ \text{b)} & (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - (x + 2y)^3 + 6xy(x + 2y) \end{aligned}$$

21. Oblicz $a^4 + b^4$, wiedząc, że:

$$\text{a)} ab = 1 \text{ oraz } a^2 + b^2 = 3, \quad \text{b)} a^2 + b^2 = 9 \text{ oraz } a + b = 1.$$

D 22. Wykaż, że $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$ jest liczbą odwrotną do $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

D 23. Wykaż, że liczba $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ jest liczbą przeciwną do $1 - \sqrt{2}$.

D 24. Wykaż, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

$$\text{a)} (2x + 1)^2 \geq 8x \quad \text{b)} x(x + 12) \geq 9(2x - 1) \quad \text{c)} } \frac{4}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$$

25. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a)} & |5x + 10| = 20 & \text{b)} & |7 - 14x| = 7 \\ \text{c)} & |3x + 6| + |7x + 14| = 10 & \text{d)} & |4x - 12| = 5 - |3 - x| \\ \text{e)} & \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + |9x - 3| = 12 & \text{f)} & \sqrt{25 - 10x + x^2} = 8 - 3|x - 5| \end{aligned}$$

26. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb, które spełniają podany warunek.

$$\text{a)} 1 \leq |x| < 4 \quad \text{b)} 2 < |x - 1| \leq 7 \quad \text{c)} 0 \leq |x + 3| < 8$$

$$22. \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} = |3 - 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 3$$

I sposób

$$\frac{1}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3} - 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{12 - 9} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$$

II sposób

$$(2\sqrt{3} - 3)(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}) = \frac{12 - 9}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$23. -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = -\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = -|1 - \sqrt{2}| = -(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}$$

$$26. \text{a)} x \in (-4; -1) \cup (1; 4)$$

$$\text{b)} x \in (-6; -1) \cup (3; 8)$$

$$\text{c)} x \in (-11; 5)$$

17. a), c) 2, wymierna

b) $-\frac{4}{25}$, wymierna

18. a) 1 b) $2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{2}$

e) $2\sqrt{3} - 2$ f) $2\sqrt{3} + 2$

g) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ h) 0

19. a) $4x^3, \frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $2x^3, \frac{3\sqrt{3}}{4}$

20. a) $-2y^2, -18 + 8\sqrt{2}$ b) 0

21. a) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 3^2 - 2 \cdot 1^2 = 7$

b) 49

24. a) $(2x + 1)^2 \geq 8x$

$$4x^2 + 4x + 1 - 8x \geq 0$$

$$(2x - 1)^2 \geq 0$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$.

b) $x(x + 12) \geq 9(2x - 1)$

$$x^2 + 12x - 18x + 9 \geq 0$$

$$(x - 3)^2 \geq 0$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$.

c) $\frac{4}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$

$$4 \geq 3x^2 - x^4 + 3 - x^2$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$(x^2 - 1)^2 \geq 0$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$.

25. a) $|x + 2| = 4$

$$x = -6, x = 2$$

b) $|1 - 2x| = 1$

$$x = 0, x = 1$$

c) $|x + 2| = 1$

$$x = -3, x = -1$$

d) $|x - 3| = 1$

$$x = 2, x = 4$$

e) $|3x - 1| = 3$

$$x = -\frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$$

f) $|x - 5| = 2$

$$x = 3, x = 7$$

27. a) $x \in \langle -5; 1 \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$
 c) $10 \left| x - \frac{1}{2} \right| \geq 4 + 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$
 $\left| x - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}$
 $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty \rangle$
 d) $5|x+5| - 3|x+5| > 7 + |x+5|$
 $|x+5| > 7$
 $x \in (-\infty; -12) \cup (2; \infty)$
28. a) $x = -5, x = 3$
 b) $x \in \langle 1; 3 \rangle$
 c) $x = -\frac{3}{4}$
 d) Dla $x \in (-\infty; -1,5)$:
 $-3 - 2x = 12 + 3x - 9$
 $x = -1,2 \notin (-\infty; -1,5)$,
 sprzeczność
 Dla $x \in \langle -1,5; 3 \rangle$:
 $3 + 2x = 12 + 3x - 9$
 $x = 0 \in \langle -1,5; 3 \rangle$
 Dla $x \in \langle 3; \infty \rangle$:
 $3 + 2x = 12 - 3x + 9$
 $x = 3,6 \in \langle 3; \infty \rangle$
29. a) $x \in (-\infty; 2)$
 b) $x \in (-\infty; -3)$
 c) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 d) $x \in (-1,5; 1,5)$
31. x – początkowa cena towarów
 a) A: $0,8 \cdot 0,8x = 0,64x$,
 B: $0,6x$; B
 b) A: $1,2 \cdot 1,2x = 1,44x$,
 B: $1,4x$; B
 c) A: $0,8 \cdot 1,2x = 0,96x$,
 B: x ; A
32. 201,30 zł
33. 2000 zł
34. a) $\frac{0,062 - 0,05}{0,05} \cdot 100\% = 24\%$
 b) $0,8 \cdot 5\% = 4\%$
 Oprocentowanie zmniejszyło się o 1 punkt procentowy.

27. Rozwiąż nierówność.

- a) $|2x + 4| \leq 6$
 b) $|2x + 3| > 1$

- c) $|5 - 10x| \geq 4 + 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$
 d) $|5x + 25| - |3x + 15| > 7 + |x + 5|$

28. Rozwiąż równanie.

- a) $|x| + |x + 2| = 8$
 b) $|x - 3| + |1 - x| = 2$

- c) $|2x - 1| = x + |x + 4|$
 d) $|3 + 2x| = 12 - 3|x - 3|$

29. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x - 7| \geq |x + 3|$
 b) $|x + 5| < |x + 1|$

- c) $|x| + |x - 2| \geq 4$
 d) $|x - 1| + |x + 1| < 3$

30. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$\left| \frac{xy}{y^2 - x^2} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy} + 1 \right) \right| = 2$$

31. Towary A i B miały jednakową cenę. Oblicz, który z nich jest obecnie tańszy, jeżeli:

- a) cenę towaru A obniżano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru B obniżono jednokrotnie o 40%,
 b) cenę towaru A zwiększano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru B zwiększono jednokrotnie o 40%,
 c) cenę towaru A obniżono o 20%, a następnie zwiększono o 20%, natomiast cena towaru B nie uległa zmianie.

32. Na cenę brutto pewnego towaru wynoszącą 176,55 zł składa się cena netto oraz 7% podatku VAT od ceny netto. Oblicz, jaka będzie cena brutto tego towaru po podwyższeniu podatku do 22% przy niezmięniętej cenie netto.

33. Pewną kwotę wpłacono do banku na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. Od odsetek dopisanych po roku bank odprowadził podatek w wysokości 14 zł. Jaką kwotę umieszczono na lokacie, jeżeli wiadomo, że podatek od odsetek wynosił 20%?

34. a) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, wzrosło o 1,2 punktu procentowego. O ile procent wzrosło to oprocentowanie?

b) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, zmniejszyło się o 20%. O ile punktów procentowych zmniejszyło się to oprocentowanie?

30. $y \neq x, y \neq -x, x \neq 0, y \neq 0$

$$\left| \frac{xy}{(y-x)(y+x)} \cdot \left(\frac{y^2 + x^2 + 2xy}{2xy} + 1 \right) \right| = 2$$

$$\left| \frac{xy}{(y-x)(y+x)} \cdot \frac{(x+y)^2}{2xy} \right| = 2$$

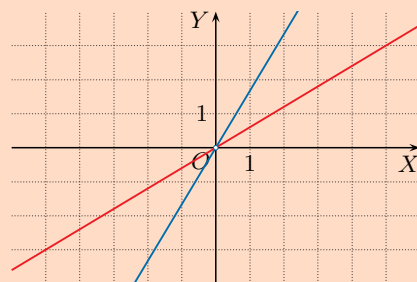
$$\left| \frac{y+x}{2(y-x)} \right| = 2$$

$$\frac{y+x}{2(y-x)} = -2 \text{ lub } \frac{y+x}{2(y-x)} = 2$$

$$y+x = 4y - 4x \text{ lub } y+x = -4y + 4x$$

$$y = \frac{3}{5}x \text{ lub } y = \frac{5}{3}x$$

Rozwiązaniem jest suma dwóch prostych bez punktu $(0, 0)$.



Zestaw III – podsumowujący

35. Rozwiąż układ nierówności. Rozwiązanie zaznacz na osi liczbowej.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} |x| \leq 4 \\ |x+2| > 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} |x-3| \leq 6 \\ |x-2| > 2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} |x+1| > 4 \\ |x-1| \geq 7 \end{cases} \end{array}$$

36. Rozwiąż równanie.

$$\text{a)} ||x| - 4| = 3 \quad \text{b)} |1 - |x|| = 6 \quad \text{c)} ||2x - 4| - 3| = 7$$

37. Rozwiąż nierówność.

$$\text{a)} |4|x| - 2| \leq 6 \quad \text{b)} ||x| - 1| > 3 \quad \text{c)} ||1 - 2x| - 1| < 4$$

D 38. Uzasadnij, że:

$$\text{a)} \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = 4, \quad \text{b)} \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = 2\sqrt{5}.$$

D 39. Uzasadnij, że liczba $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Dla $n \geq 2$ różnica n -tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

D 40. Udowodnij powyższy wzór dla: a) $n = 4$, b) $n = 6$.

D 41. Udowodnij, że dla dowolnych liczb a i $b \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność.

$$\text{a)} a^2 + b^2 \geq 2(a - b - 1) \quad \text{b)} a^2 + b^2 \geq 4(a + b - 2) \quad \text{c)} a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

D 42. Udowodnij, że jeżeli dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest równość $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$, to $\frac{(a+b)^2}{a^2} + \frac{(a+b)^2}{b^2} = 8$.

D 43. Udowodnij, że jeżeli dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest równość $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{2}{a+b}$, to $a = b$.

D 44. Udowodnij, że suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest podzielna przez 6, a suma trzech kolejnych potęg jest podzielna przez 14.

D 45. a) Udowodnij, że suma kwadratów dwóch dowolnych liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

b) Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

$$42. \frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0$$

a, b – dodatnie, więc $a = b$

$$\frac{(a+b)^2}{a^2} + \frac{(a+b)^2}{b^2} = \frac{(2a)^2}{a^2} + \frac{(2a)^2}{a^2} = 8$$

$$43. \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{2}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b) + a(a+b) = 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

44. $n \in \mathbf{Z}_+$, $2^n + 2^{n+1} = 2^n(1 + 2) = 2^n \cdot 3$ jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez 6.

$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1 + 2 + 2^2) = 2^n \cdot 7$ jest podzielna przez 2 i przez 7, więc jest podzielna przez 14.

$$45. \text{a)} \text{ Dla } k_1, k_2 \in \mathbf{Z}: (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_1 + 4k_2 + 2 = 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_1 + 2k_2 + 1) - \text{liczba parzysta}$$

b) $n, n + 1$ – kolejne liczby naturalne, $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ – liczba nieparzysta

$$35. \text{a)} x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \langle -1; 4 \rangle$$

$$\text{b)} x \in \langle -3; 0 \rangle \cup \langle 4; 9 \rangle$$

$$\text{c)} x \in \langle -\infty; -6 \rangle \cup \langle 8; \infty \rangle$$

$$36. \text{a)} x = -7, x = -1, x = 1, x = 7$$

$$\text{b)} x = -7, x = 7$$

$$\text{c)} x = -3, x = 7$$

$$37. \text{a)} x \in \langle -2; 2 \rangle$$

$$\text{b)} x \in \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$$

$$\text{c)} x \in \langle -2; 3 \rangle$$

$$38. \text{a)} \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} =$$

$$= |2 - \sqrt{2}| + |2 + \sqrt{2}| = 4$$

$$\text{b)} \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} =$$

$$= |\sqrt{5} + \sqrt{2}| + |\sqrt{5} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{5}$$

$$39. \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{6}{1} = 6 - \text{liczba wymierna}$$

$$40. \text{a)} a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$41. \text{a)} a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \geq 0$$

dla $a, b \in \mathbf{R}$

$$\text{b)} a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8 = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0$$

dla $a, b \in \mathbf{R}$

$$\text{c)} a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \text{ dla } a, b \in \mathbf{R}$$

46. a) $n, n+1, n+2$ – kolejne liczby naturalne
 $(n+n+1+n+2)^2 =$
 $= (3n+3)^2 = 9(n+1)^2 =$
 liczba podzielna przez 9
47. a) Niech a będzie liczbą naturalną taką, że $0 < a \leq 9$.
 $111111 \cdot a$ jest podzielna przez 3, bo suma cyfr:
 $6a$ jest podzielna przez 3.
48. a) $x = 10a + b$ dla pewnych cyfr a, b
 Wówczas $y = 10b + a$.
 $x + y = 10a + b + 10b + a =$
 $= 11a + 11b = 11(a+b)$ –
 liczba podzielna przez 11
49. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wówczas:
 $n^4 - (n-2)^4 =$
 $= (n^2 - (n-2)^2) \cdot$
 $\cdot (n^2 + (n-2)^2) =$
 $= (4n-4)(2n^2 - 4n + 4) =$
 $= 8(n-1)(n^2 - 2n + 2)$
 jest liczbą podzielną przez 8.
50. $2k+1, 2k+3, 2k+5$ – kolejne liczby nieparzyste ($k \in \mathbb{Z}$)
 $(2k+1)^2 + (2k+3)^2 +$
 $+ (2k+5)^2 + 1 = 4k^2 + 4k +$
 $+ 1 + 4k^2 + 12k + 9 + 4k^2 +$
 $+ 20k + 25 + 1 = 12k^2 + 36k +$
 $+ 36 = 12(k^2 + 3k + 3)$ –
 liczba podzielna przez 12
51. Niech $n, n+1, n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Wówczas:
 $(n+n+1+n+2)^3 =$
 $= (3n+3)^3 = [3(n+1)]^3 =$
 $= 27(n+1)^3$
52. a) Niech $2n(4n^2 - 1) = m$.
 Liczba m jest parzysta, więc dzieli się przez 2. Jeśli $n = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to m jest podzielne przez 3.
 Jeśli $n = 3k+1$, to:
 $4n^2 - 1 = 4(3k+1)^2 - 1 =$
 $= 36k^2 + 24k + 3 =$
 $= 3(12k^2 + 8k + 1)$,
 więc m jest podzielne przez 3.
 Jeśli $n = 3k+2$, to:
 $4n^2 - 1 = 4(3k+2)^2 - 1 =$
 $= 36k^2 + 48k + 15 =$
 $= 3(12k^2 + 16k + 5)$,
 więc m jest podzielne przez 3.
 Zatem liczba m jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez 6.

46. a) Udowodnij, że kwadrat sumy trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 9.
 b) Udowodnij, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to ich różnica też jest liczbą parzystą.

47. a) Udowodnij, że sześciocyfrowa liczba, w której wszystkie cyfry są jednakowe, jest podzielna przez 3.
 b) W pewnej liczbie naturalnej podzielnej przez 9 cyfra jedności jest równa a . Suma pozostałych cyfr jest podzielna przez 9. Udowodnij, że $a = 0$ lub $a = 9$.

48. a) Jeśli w liczbie dwucyfrowej x zmienimy kolejność cyfr, to otrzymamy liczbę y . Udowodnij, że suma liczb x i y jest podzielna przez 11.
 b) Jeśli cyfry liczby trzycyfrowej x zapiszemy w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę y . Udowodnij, że różnica liczb x i y jest podzielna przez 99.

49. Udowodnij, że różnica czwartych potęg dowolnej liczby naturalnej i liczby o 2 od niej mniejszej jest podzielna przez 8.

50. Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych powiększona o 1 jest podzielna przez 12.

51. Udowodnij, że sześcian sumy trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 27.

52. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n podana liczba jest podzielna przez 6.

a) $2n(4n^2 - 1)$ b) $n(n^2 - 7)$ c) $n^9 - n$

53. Udowodnij, że $a + b = -2$, jeżeli:

a) $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}},$
 b) $b = \frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}.$

54. a) Udowodnij, że prawdziwa jest równość:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = 0,48$$

- b) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} < \frac{1}{4}$$

53. a) $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$
 $= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})} =$
 $= \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \dots + \sqrt{100}-\sqrt{99} = \sqrt{100}-1 = 9$
 b) $b = -11$, zatem $a + b = -2$

54. a) Zauważmy, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Zatem $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = \frac{24}{50} = 0,48$.

b) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) =$
 $= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{4}$

5.2. Funkcje

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy – **argumentami**.

Zbiór wartości funkcji $f: X \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.

Miejsce zerowe funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Monotoniczność funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $X \subset \mathbf{R}$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

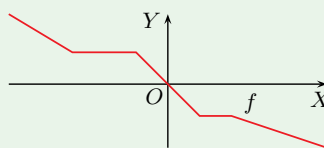
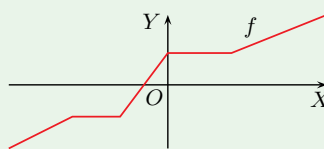
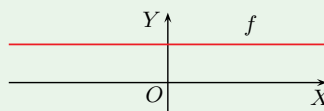
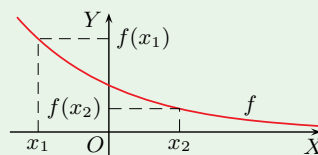
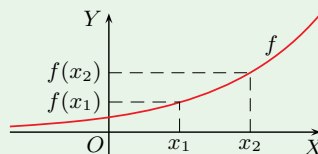
Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funkcję, która jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.



Przekształcenia wykresu funkcji

- Wykres funkcji $y = f(x-p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.
- Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .
- Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .
- Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie względem osi OX tej części wykresu funkcji f , która znajduje się pod osią OX , pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.
- Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji f , korzystając z tego, że:
 - dla $x \geq 0$ (należących do dziedziny) zachodzi równość $f(|x|) = f(x)$,
 - wykres funkcji $y = f(|x|)$ jest symetryczny względem osi OY .

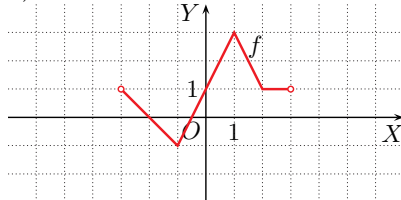
Zestaw I – wprowadzający

1. a) $D = (-3; 3)$,
 $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$,
 f rośnie w $\langle -1; 1 \rangle$,
maleje w $\langle -3; -1 \rangle$ i $\langle 1; 2 \rangle$,
jest stała w $\langle 2; 3 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-3; -2) \cup \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$
b) $D = \langle -4; 4 \rangle \setminus \{-1\}$,
 $f(D) = \langle -2; 3 \rangle$,
 f rośnie w $\langle -2; -1 \rangle$ i $\langle 0; 2 \rangle$,
maleje w $\langle -4; -2 \rangle$, $\langle -1; 0 \rangle$
i $\langle 2; 4 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \{-4\} \cup \langle 1; 4 \rangle$

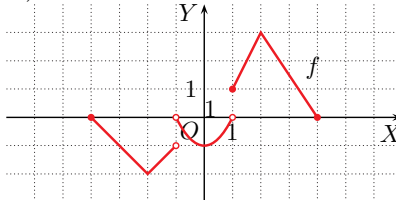
1. Odczytaj z wykresu funkcji f :

- jej dziedzinę, zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności,
- argumenty, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.

a)



b)



2. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-9}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$

e) $f(x) = (x+5)^{\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+9}$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$

f) $f(x) = \sqrt{6-4x}$

3. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}$

c) $f(x) = (2x-6)^{\frac{1}{2}} - (2x-6)^{-\frac{1}{2}}$

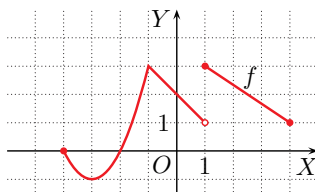
b) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$

d) $f(x) = (x^2-4)^{\frac{1}{2}} + (9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, brak miejsc zerowych
b) $D = \mathbf{R}$, miejsca zerowe: $-3, 3$
c) $D = (-1; 1) \cup (1; \infty)$, brak miejsc zerowych
d) $D = (-1; \infty)$, miejsca zerowe: 1
e) $D = \langle -5; \infty \rangle$, miejsca zerowe: -5
f) $D = (-\infty; \frac{3}{2})$, miejsca zerowe: $\frac{3}{2}$
3. a) $D = \langle 4; \infty \rangle$
b) $D = (-\infty; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$
c) $D = (3; \infty)$
d) $D = (-3; -2) \cup \langle 2; 3 \rangle$

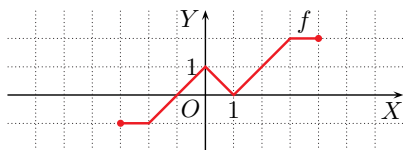
4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu wartość największą i wartość najmniejszą funkcji f w przedziale:

- a) $\langle -3; 0 \rangle$, b) $\langle 1; 4 \rangle$, c) $\langle -4; 4 \rangle$.

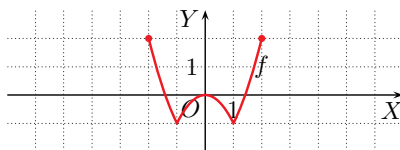


5. Dany jest wykres funkcji f . Naszkicuj wykresy, wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji $f_1(x) = f(x+4) + 1$ oraz $f_2(x) = f(x-4) - 1$.

- a) $f: \langle -3; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$



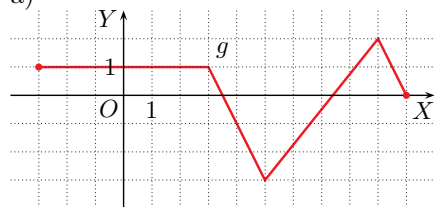
- b) $f: \langle -2; 2 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$



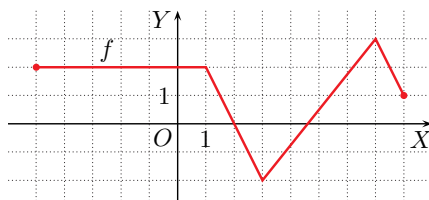
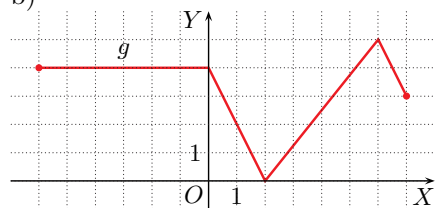
6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -5; 8 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$.

Jak należy go przekształcić, aby otrzymać wykres funkcji g ? Zapisz to przekształcenie za pomocą wzoru.

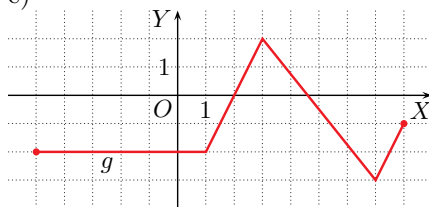
- a)



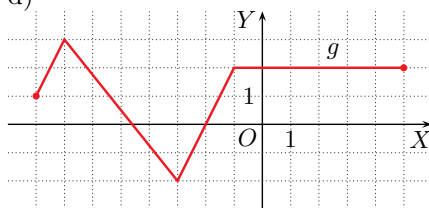
- b)



- c)



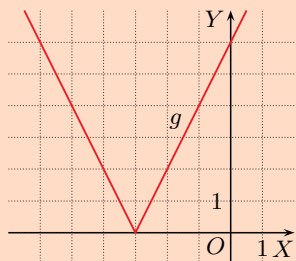
- d)



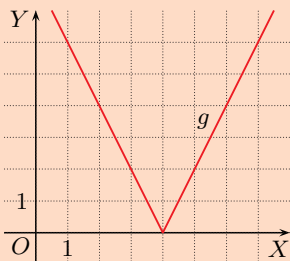
7. Naszkicuj wykres funkcji g , przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = 2|x|$.

- a) $g(x) = 2|x+3|$ c) $g(x) = 2(|x+1|-1)$ e) $g(x) = |2x-6|+3$
b) $g(x) = 2|4-x|$ d) $g(x) = -2|x+2|+1$ f) $g(x) = -|2x+8|-1$

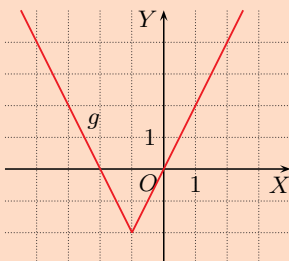
7. a) $g(x) = f(x+3)$



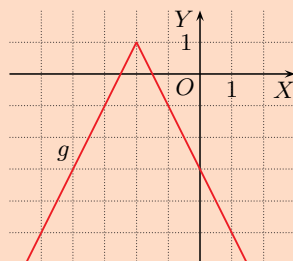
- b) $g(x) = f(x-4)$



- c) $g(x) = f(x+1) - 2$



- d) $g(x) = -f(x+2) + 1$



- e) $g(x) = f(x-3) + 3$

- f) $g(x) = -f(x+4) - 1$

4. a) $f_{\min}(-3) = -1$,

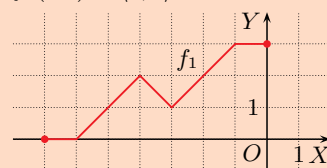
$$f_{\max}(-1) = 3$$

- b) $f_{\min}(4) = 1$, $f_{\max}(1) = 3$

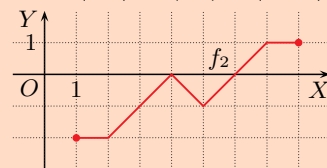
- c) $f_{\min}(-3) = -1$,
 $f_{\max}(-1) = f_{\max}(1) = 3$

5. a) $D_1 = \langle -7; 0 \rangle$,

$$f_1(D_1) = \langle 0; 3 \rangle$$

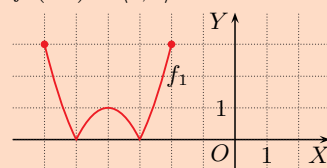


$$D_2 = \langle 1; 8 \rangle, f_2(D_2) = \langle -2; 1 \rangle$$

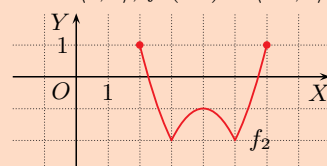


- b) $D_1 = \langle -6; -2 \rangle$,

$$f_1(D_1) = \langle 0; 3 \rangle$$



$$D_2 = \langle 2; 6 \rangle, f_2(D_2) = \langle -2; 1 \rangle$$



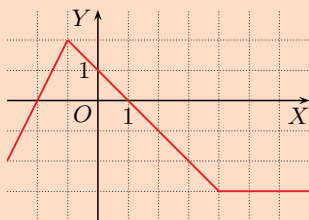
6. a) $g(x) = f(x-2) - 1$

- b) $g(x) = f(x+1) + 2$

- c) $g(x) = -f(x)$

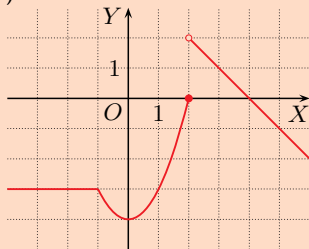
- d) $g(x) = f(-x)$

8. a) $f(D) = \{0, 1\}$,
wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 1,
nie jest monotoniczna
b) $f(D) = \{0, 1, 2, 3\}$,
wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 3,
nie jest monotoniczna
9. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x + 1$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x - 2$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$,
 $f(x) = -4x - 6$
10. a) $1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4-\sqrt{2}}{7}, \frac{2}{5}$
b) $0, 0, 0, 0, 1, 3$
11. a)



$f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 1\}$,
 f rośnie w $(-\infty; -1)$,
maleje w $(-1; 4)$,
jest stała w $(4; \infty)$,
 $f(x) \geq -3$ dla
 $x \in (-3\frac{1}{2}; \infty)$

b)



$f(x) = 0$ dla $x \in \{2, 4\}$,
 f rośnie w $(0; 2)$,
maleje w $(-1; 0)$ i w $(2; \infty)$,
jest stała w $(-\infty; -1)$,
 $f(x) \geq -3$ dla
 $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; 7 \rangle$

Zestaw II – ćwiczeniowy

8. Naskicuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej zbiór wartości oraz wartości najmniejszą i największą. Czy f jest funkcją monotoniczną?

- a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą parzystą} \\ 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$
b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, f każdemu argumentowi przyporządkowuje jego resztę z dzielenia przez 4.

9. Wyznacz dziedzinę, uprość wzór, a następnie naskicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4x^2-9}{1,5-x}$

10. Oblicz wartości funkcji f dla argumentów: $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2$.

- a) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty) \\ x^2-1 & \text{dla } x \in (1; 2) \end{cases}$

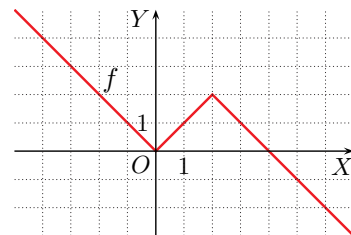
11. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji f , jej przedziały monotoniczności oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -3$.

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x+1 & \text{dla } x \in (-1; 4) \\ -3 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x^2-4 & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ -x+4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

12. Zbiorem wartości funkcji $f: \langle -5; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest przedział $\langle -3; 1 \rangle$, a miejscem zerowym – liczba 2. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji g .

- a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = -f(-x)$ c) $g(x) = f(x+1) - 2$

13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. W tym samym układzie współrzędnych naskicuj wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj, dla jakich argumentów funkcje f i g przyjmują te same wartości, oraz podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.



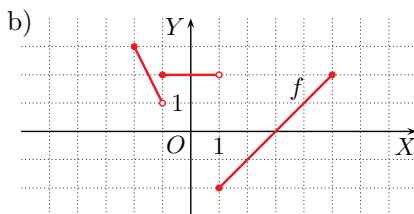
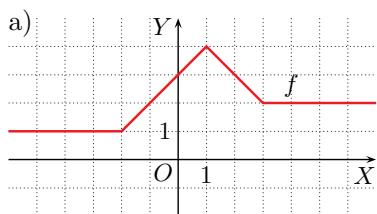
- a) $g(x) = 1$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = x^2$ d) $g(x) = 2 - x^2$

12. a) $D = \langle -5; 3 \rangle$, $g(D) = \langle -1; 3 \rangle$, miejsce zerowe: 2
b) $D = \langle -3; 5 \rangle$, $g(D) = \langle -1; 3 \rangle$, miejsce zerowe: -2
c) $D = \langle -6; 2 \rangle$, $g(D) = \langle -5; -1 \rangle$, brak miejsc zerowych

13. a) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 1, 3\}$,
 $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in (0; 2)$,
 $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in (0; \infty)$
c) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 0, 1\}$,
 $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty \rangle$
d) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 1\}$,
 $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$

Zestaw III – podsumowujący

14. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = 3 - f(x)$ i na ich podstawie podaj rozwiązanie równania $f(-x) = 3 - f(x)$.



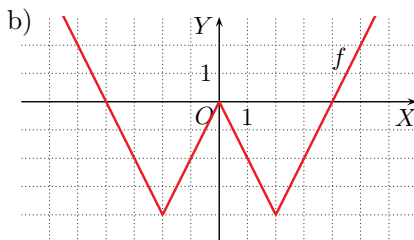
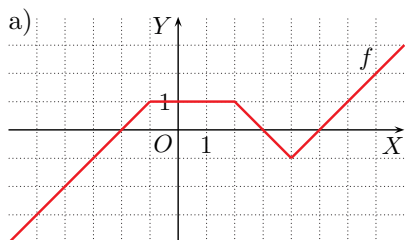
15. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj wzory funkcji $g(x) = f(x+1) - 4$, $h(x) = 1 - f(x-2)$, $k(x) = f(2-x) - 2$ i naskicuj ich wykresy.

a) $f(x) = 2x - 2$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = -|2x|$

16. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = |f(2-x) - 1|$ oraz $k(x) = |2 - f(x)|$.



17. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = ||x| - 1| - 2$

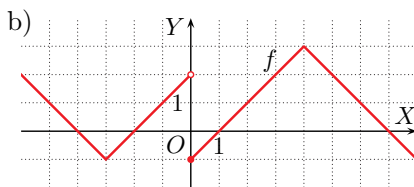
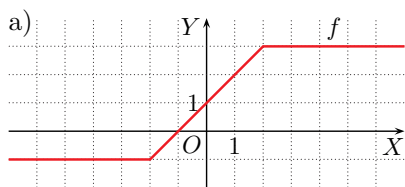
b) $f(x) = ||x - 1| - 2|$

18. Naskicuj wykres funkcji f i określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

a) $f(x) = |x| + |x - 2|$

b) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

19. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(|x|)$ i $h(x) = |f(|x|)|$. Określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$ oraz równania $h(x) = m$ w zależności od parametru m .



17. a) maleje w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 0; 1 \rangle$,
rośnie w $\langle -1; 0 \rangle$ i w $\langle 1; \infty \rangle$

- b) maleje w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 1; 3 \rangle$,
rośnie w $\langle -1; 1 \rangle$ i w $\langle 3; \infty \rangle$

18. a) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 2)$,
2 rozwiązania dla $m \in (2; \infty)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$

- b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 4)$,
2 rozwiązania dla $m \in (4; \infty)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 4$

19. a) dla obu równań:

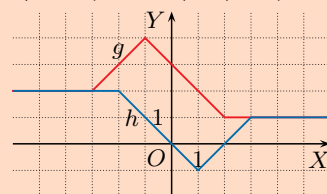
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$,

1 rozwiązanie dla $m = 1$,

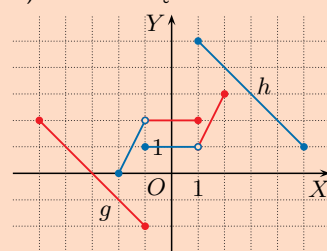
2 rozwiązania dla $m \in (1; 3)$,

nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$

14. a) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty \rangle$



- b) brak rozwiązania



15. a) $g(x) = 2x - 4$,

$h(x) = -2x + 7$,

$k(x) = -2x$

b) $g(x) = |x + 1| - 4$,

$h(x) = 1 - |x - 2|$,

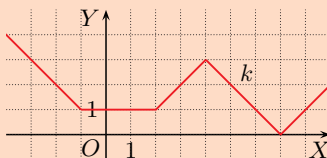
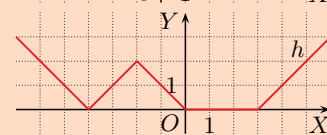
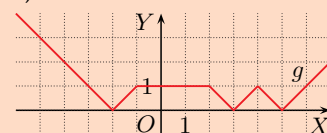
$k(x) = |x - 2| - 2$

c) $g(x) = -2|x + 1| - 4$,

$h(x) = 2|x - 2| + 1$,

$k(x) = -2|x - 2| - 2$

16. a)



- b) dla równania $g(x) = m$:

0 rozwiązań dla $m \in (3; \infty)$,

2 rozwiązania dla

$m \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$,

3 rozwiązania dla $m = -1$,

4 rozwiązania dla $m \in (-1; 3)$,

dla równania $h(x) = m$:

0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,

2 rozwiązania dla $m \in (3; \infty)$,

4 rozwiązania dla $m \in \{0, 3\}$,

6 rozwiązań dla $m \in (1; 3)$,

7 rozwiązań dla $m = 1$,

8 rozwiązań dla $m \in (0; 1)$

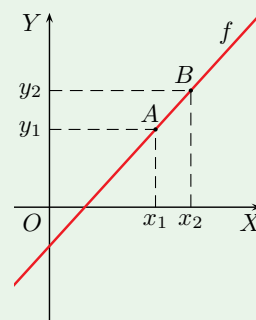
5.3. Funkcja liniowa i układy równań liniowych

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a równanie $y = ax + b$ – **równaniem kierunkowym**.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, jest równy:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

■ **rosnąca** dla $a > 0$, ■ **malejąca** dla $a < 0$, ■ **stała** dla $a = 0$.

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

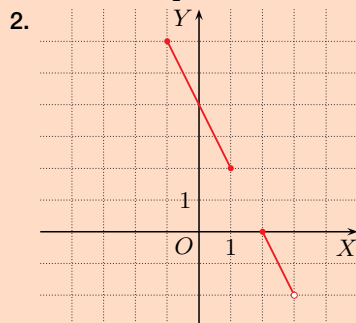
■ **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
 ■ **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym** prostej.

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:

■ **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
 ■ **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

1. a) $(0, 1)$, $(-3, 0)$, rosnąca
 b) $(0, 2)$, $(1, 0)$, malejąca
 c) $(0, -2)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, rosnąca



$f(D) = (-2; 0) \cup \langle 2; 6)$,
 miejsce zerowe: 2,
 równanie $f(x) = 1$ nie ma rozwiązania

Zestaw I – wprowadzający

1. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych i naszkicuj ten wykres. Określ monotoniczność funkcji f .
 a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = 4x - 2$
2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -2x + 4$ o dziedzinie $(-1; 1) \cup \langle 2; 3)$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji i miejsca zerowe, jeśli je ma. Czy równanie $f(x) = 1$ ma rozwiązanie?
3. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej k i przechodzi przez punkt P .
 a) $k: y = 3x$, $P(-4, 2)$ b) $k: \sqrt{2}x - y - 1 = 0$, $P(\sqrt{2}, -2)$
3. a) $y = 3x + 14$
 b) $y = \sqrt{2}x - 4$

4. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej k i przechodzi przez punkt P .

a) $k: y = 2x, P(2, -1)$ c) $k: x - 3y - 3 = 0, P(1, -1)$
 b) $k: y = -4x + 1, P(8, 4)$ d) $k: \sqrt{5}x - y + 3 = 0, P(\sqrt{5}, -3)$

5. Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.

a) $f(2) = 0$ i $f(0) = 4$ b) $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$ i $f(2) = -1$

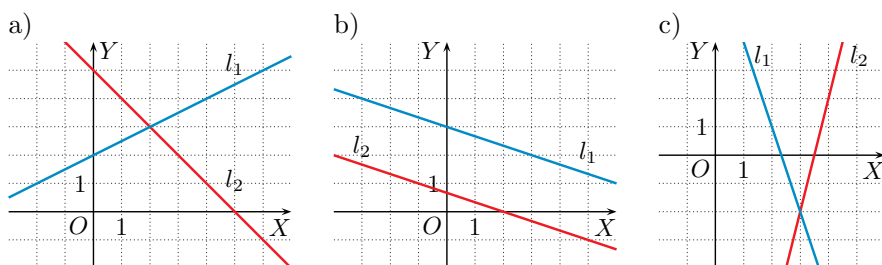
6. Rozwiąż równanie (wynik zapisz w najprostszej postaci).

a) $\sqrt{2}x - 2 = \sqrt{2} - 1$ c) $\sqrt{15}x - \sqrt{5} = \sqrt{5}x + \sqrt{20}$
 b) $\sqrt{3}t - 2 = t - \sqrt{3}$ d) $\sqrt{6}z - \sqrt{3} = \sqrt{12} - \sqrt{3}z$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+5}{5} > \frac{4x-1}{2}$ c) $10(3x-6) - 5(x-2) \leq 2(4x-8)$
 b) $\sqrt{3}(x-1) \geq \sqrt{12}x$ d) $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) < 4 - (\sqrt{3}-x)^2$

8. Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku. Jeśli układ ma rozwiązanie, to je podaj.

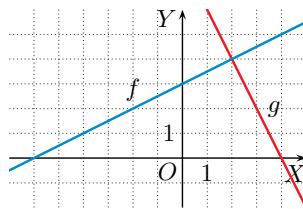


9. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

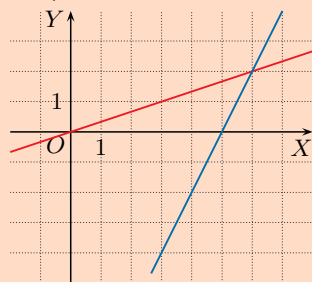
a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -0,1x + 0,2y = 1 \\ 2y = x + 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x - 2y = -2 \\ 3y - 9x = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 0,5y = 1 \\ 0,5x + 0,25y = 0,5 \end{cases}$

10. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych f i g . Odczytaj, dla jakich argumentów:

- a) wartości funkcji f i g mają różne znaki,
 b) spełniona jest nierówność $f(x) \leq g(x)$.

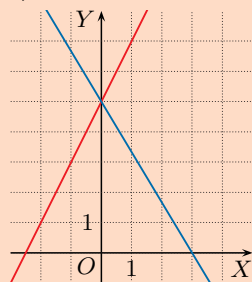


9. a) $x = 6, y = 2$



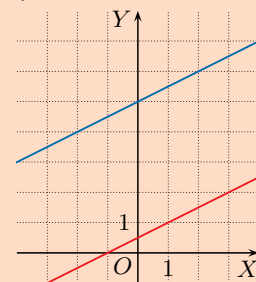
- b) $x = 1, y = 1$

- c) $x = 0, y = 5$



- d) układ sprzeczny

- e) układ sprzeczny



- f) układ nieoznaczony:
 $x \in \mathbb{R}, y = -2x + 2$

4. a) $y = -\frac{1}{2}x$
 b) $y = \frac{1}{4}x + 2$
 c) $y = -3x + 2$
 d) $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - 2$
 5. a) $b = 4$, czyli $f(x) = ax + 4$
 $f(2) = 0$, więc $a = -2$
 Zatem $f(x) = -2x + 4$.

b) $\begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{5}{2}a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases}$
 $\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -6 \end{cases}$

Zatem $f(x) = \frac{5}{2}x - 6$.

6. a) $\sqrt{2}x = \sqrt{2} + 1$
 $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $(\sqrt{3}-1)t = 2 - \sqrt{3}$
 $t = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 c) $(\sqrt{15}-\sqrt{5})x = 3\sqrt{5}$
 $x = \frac{3}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3\sqrt{3}+3}{2}$
 d) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})z = 3\sqrt{3}$
 $z = \frac{3}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 3(\sqrt{2}-1)$

7. a) $2x + 10 > 20x - 5$
 $18x < 15$
 $x < \frac{5}{6}$
 b) $x - 1 \geq 2x$
 $x \leq -1$
 c) $25x - 50 \leq 8x - 16$
 $17x \leq 34$
 $x \leq 2$
 d) $3 - x^2 < 4 - 3 + 2\sqrt{3}x - x^2$
 $2\sqrt{3}x > 2$
 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

8. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases}$
 $x = 2, y = 3$
 b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$
 brak rozwiązań

c) $\begin{cases} y = -3x + 7 \\ y = 4x - 14 \end{cases}$
 $x = 3, y = -2$

10. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (4; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; 2)$

11. a) $f(-2x+1) =$
 $= a(-2x+1) + b =$
 $= -2ax + a + b$
 $-2ax + a + b = 4x - 3$
 Zatem $f(x) = -2x - 1$.
 b) $f(x) = 3x - 5$

12. a) tak b) nie

13. a) $a = -2$ b) $a = -5$
 c) $a = 7$ d) $a = -3$

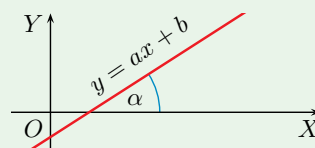
14. a) $m = -2$
 b) $m = -5, m = -1$
 15. a) $m \in (-2; 2)$
 b) $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$
 c) $m^2 - 5m + 6 =$
 $= (m-2)(m-3) < 0$
 $m \in (2; 3)$
 d) $4 - |m+4| < 0$
 $|m+4| > 4$
 $m \in (-\infty; -8) \cup (0; \infty)$

16. Współczynnik kierunkowy
 prostej AC :
 $a_{AC} = \frac{2m-1+3}{3-5} = -m-1$
 Współczynnik kierunkowy
 prostej AB : $a_{AB} = \frac{2+3}{4-5} = -5$
 a) $(-m-1) \cdot (-5) = -1$,
 czyli $m = -\frac{6}{5}$
 b) $3x - 6y + 1 = 0$, stąd
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$, czyli $a = \frac{1}{2}$
 $-m-1 = \frac{1}{2}$, zatem $m = -\frac{3}{2}$
 18. a) 45° b) 60° c) 135° d) 150°

Zestaw II – ćwiczeniowy

11. Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia warunek:
 a) $f(-2x+1) = 4x-3$, b) $f(3x+2) = 9x+1$.
12. Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.
 a) $A(0, 2), B(5, -\frac{1}{2}), C(-2, 3)$ b) $A(\frac{1}{3}, 2), B(-1, 1), C(2, 3)$
13. Punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej. Oblicz współrzędną a .
 a) $A(0, -2), B(-2, 2), C(0, a)$ c) $A(\frac{1}{2}, 7), B(-6, 7), C(\sqrt{3}, a)$
 b) $A(1, 3), B(5, 5), C(a, 0)$ d) $A(3, 2), B(a, 6), C(-1, \frac{14}{3})$
14. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest stała?
 a) $f(x) = (m+2)x + 7$ b) $f(x) = (2 - |m+3|)x + 4$
15. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?
 a) $f(x) = (m^2 - 4)x + 7$ c) $f(x) = (m^2 - 5m + 6)x + 14$
 b) $f(x) = (6 - |m|)x - 3$ d) $f(x) = (4 - |m+4|)x + 4$
16. Dane są punkty $A(5, -3), B(4, 2)$ i $C(3, 2m-1)$. Wyznacz wartości parametru m , dla których:
 a) proste AB i AC są prostopadłe,
 b) prosta AC jest równoległa do prostej $3x - 6y + 1 = 0$.
17. Dla jakich wartości parametru m proste p_1 i p_2 są prostopadłe?
 a) $p_1: y = (1-m)x - 4, p_2: y = -2x + 7$
 b) $p_1: y = mx + 5, p_2: y = (m-2)x - 3$
 c) $p_1: y = (|m|-1)x - 1, p_2: y = \frac{1}{m-1}x + 1$
18. Oblicz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX .
 a) $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6$
 b) $3x - \sqrt{3}y = 1$
 c) $2x + 2y = 3$
 d) $\sqrt{2}x + \sqrt{6}y = 2$

Jeśli α jest kątem, który prosta $y = ax+b$ tworzy z osią OX , to $a = \tan \alpha$.



17. a) $1-m = \frac{1}{2}$, czyli $m = \frac{1}{2}$
 b) $m-2 = -\frac{1}{m}$
 $m^2 - 2m + 1 = 0$
 $(m-1)^2 = 0$, czyli $m = 1$
 c) $m \neq 1$
 $|m| - 1 = -(m-1)$
 $|m| + m - 2 = 0$
 Przypadek, gdy $m < 0$:
 $-m + m - 2 = 0$
 $-2 = 0$, sprzeczność
 Przypadek, gdy $m > 0$:
 $m + m - 2 = 0$
 $m = 1$, sprzeczność
 Nie ma takiego m .

19. Oblicz z dokładnością do 1° miarę kąta, który prosta przechodząca przez punkty A i B tworzy z osią OX .
- a) $A(-6, -1), B(2, 3)$ b) $A(-4, 1), B(2, -8)$
20. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i tworzącej z osią OX kąt α .
- a) $P(-9, -2\sqrt{3}), \alpha = 30^\circ$ b) $P(2\sqrt{3}, -2), \alpha = 150^\circ$
21. Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a .
- a) $x + a = 2x - 3a$ d) $4ax + a = 2a - ax$
 b) $(3 - a)x = 4 + x$ e) $a^2x + 1 = a^2 + ax$
 c) $ax - 1 = a - x$ f) $a(ax - a - 1) = x - 2$
22. Dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia?
- a) $2(x + 1) = 3 + ax$ b) $(a + 1)x = 2x - a$
23. Koszt (w złotych) wypożyczenia samochodu na jeden dzień opisuje funkcja $f(x) = 40 + 0,2x$, gdzie 40 zł jest opłatą stałą, 0,2 zł – opłatą za każdy przejechany kilometr, a x – liczbą przejechanych kilometrów. Oblicz koszt wypożyczenia samochodu, zakładając, że przejechał on 500 km.
24. Koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni składa się z opłaty stałej 100 zł oraz opłaty 0,2 zł za każdy przejechany kilometr. Podaj wzór funkcji opisującej koszt wypożyczenia samochodu w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Naskicuj wykres tej funkcji. Ile maksymalnie kilometrów można przejechać, aby koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni nie przekroczył 300 zł?
25. Inwestor za kwotę K złotych zakupił akcje dwóch firm A i B . Po roku zysk ze sprzedaży akcji wyniósł 7%, w tym zysk ze sprzedaży akcji firmy A – 4%, a firmy B – 8%. Jaki procent zainwestowanej kwoty wydał inwestor na akcje firmy A , a jaki – na akcje firmy B ?
26. Inwestor za 100 tysięcy złotych zakupił akcje dwóch firm, A i B , oraz obligacje. Po roku zysk ze sprzedaży akcji wyniósł 5,6%, w tym ze sprzedaży akcji firmy A – 2%, a firmy B – 6%. Zysk ze sprzedaży obligacji wyniósł 4,6%. Oblicz, jaką kwotę przeznaczył inwestor na akcje firmy A , jaką – na akcje firmy B , a jaką – na obligacje, jeśli wiadomo, że zysk ze sprzedaży wszystkich papierów wartościowych wyniósł 5,4%.

19. a) 27° b) 124°
20. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$
 b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$
21. a) 1 rozwiązanie dla $a \in \mathbf{R}$
 b) 1 rozwiązanie dla $a \neq 2$, brak rozwiązań dla $a = 2$
 c) $(a + 1)x = a + 1$
 1 rozwiązanie dla $a \neq -1$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = -1$
 d) $5ax = a$
 1 rozwiązanie dla $a \neq 0$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 0$
 e) $a(a - 1)x = (a + 1) \cdot (a - 1)$
 1 rozwiązanie dla $a \neq 0$ i $a \neq 1$, brak rozwiązań dla $a = 0$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 1$
 f) $(a + 1)(a - 1)x = (a - 1)(a + 2)$
 1 rozwiązanie dla $a \neq -1$ i $a \neq 1$, brak rozwiązań dla $a = -1$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 1$
22. a) $(2 - a)x = 1, a \in (-\infty; 2)$
 b) $(a - 1)x = -a, a \in (0; 1)$
23. 140 zł
24. $f(x) = 100 + 0,2x, 1000 \text{ km}$
25. x – kwota wydana na akcje firmy A
 y – kwota wydana na akcje firmy B

$$\begin{cases} x + y = K \\ 1,04x + 1,08y = 1,07K \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,25K \\ y = 0,75K \end{cases}$$

 Zatem wydano 25% kwoty na akcje firmy A i 75% kwoty na akcje firmy B .

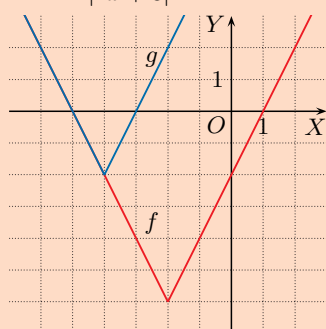
26. x – kwota wydana na akcje firmy A
 y – kwota wydana na akcje firmy B
 $100000 - (x + y)$ – kwota wydana na obligacje

$$\begin{cases} 1,02x + 1,06y = 1,056(x + y) \\ 1,056(x + y) + 1,046(100000 - x - y) = 105400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8000 \\ y = 72000 \end{cases}$$

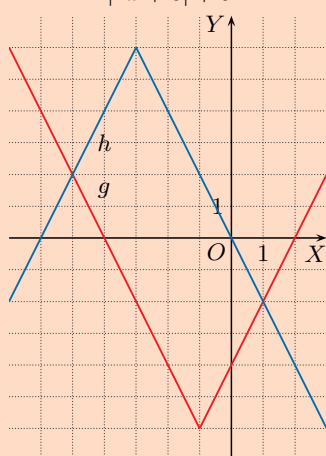
 Zatem wydano 8000 zł na akcje firmy A , 72000 zł na akcje firmy B i 20000 zł na obligacje.

27. a) $y = \frac{7}{5}x + \frac{9}{5}$, $y = -x + 3$,
 $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$
 b) $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $(2, 3)$
28. $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in \langle -2; 4 \rangle$
29. a) Przecinają się,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \geq 6$.
 b) Przecinają się,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \geq -10, 2$.
30. $a = -2$
31. $a = 1$ i $b = -3$
 lub $a = -1$ i $b = 3$
 lub $a = 3$ i $b = -1$
 lub $a = -3$ i $b = 1$
32. $a(x+2) + b + a(x-2) + b =$
 $= 2ax + 2b = 6x - 8$,
 czyli $a = 3$ i $b = -4$
 Zatem $f(x) = 3x - 4$.
33. a) $f(x+2) = |2x+8| - 6$,
 $g(x) = f(x+2) + 4 =$
 $= |2x+8| - 2$



$$x \in (-\infty; -4)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= f(x-1) = \\ &= |2x+2| - 6, \\ h(x) &= -f(x+1) = \\ &= -|2x+6| + 6 \end{aligned}$$



$$x = -5, x = 1$$

Zestaw III – podsumowujący

27. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się przekątne równoległoboku $ABCD$. Podaj współrzędne punktu przecięcia tych przekątnych.
- a) $A(-2, -1)$, $B(4, -1)$, $C(3, 6)$ b) $A(0, 0)$, $B(6, 1)$, $C(4, 6)$
28. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji g . Narysuj wykresy obu funkcji i odczytaj, dla jakich argumentów zachodzą jednocześnie nierówności $f(x) \leq 3$ i $g(x) \geq -2$.
29. Zbadaj wzajemne położenie wykresów funkcji f i g . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g ?
- a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{7}{6}x + 9$
 b) $f(x) = \frac{x+2}{3} - \frac{x-3}{4}$, $g(x) = \frac{x+6}{9} - \frac{x+4}{6}$
30. Funkcje liniowe $f(x) = 4x - a$ oraz $g(x) = ax - 1$ mają wspólne miejsce zerowe, a g jest funkcją malejącą. Oblicz a .
31. Funkcje liniowe $f(x) = 3x + b$ oraz $g(x) = ax - 1$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz wszystkie całkowite wartości współczynników a i b .
32. Wyznacz wzór funkcji liniowej f , jeśli wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x+2) + f(x-2) = 6x - 8$.
33. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = |2x+4| - 6$. Z wykresów odpowiednich funkcji odczytaj rozwiązanie równania.
- a) $f(x) - f(x+2) = 4$ b) $f(x-1) + f(x+1) = 0$
34. Dla jakich wartości parametru m równanie $4m^2x - 1 = 2m + x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunek $|x| > x$?
35. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkty $A(0, 3)$ i $B(-2, 1)$. Rozwiąż nierówność:
- a) $|f(3x)| < 6$, b) $f(|x|) \geq x + 2$, c) $f(|2x+1|) \leq 13 - 3x$.
36. Funkcje f i g dane są wzorami $f(x) = x + |2 - m|$ i $g(x) = 2x + |m + 1|$. Wyznacz wartości parametru m , dla których:
- a) wykresy tych funkcji przecinają oś OY w tym samym punkcie,
 b) funkcje te mają wspólne miejsce zerowe.

$$34. (2m-1)(2m+1)x = 2m+1$$

$$x = \frac{1}{2m-1},$$

$$m \neq -\frac{1}{2} \text{ i } m \neq \frac{1}{2}$$

$$|x| > x, \text{ więc } x < 0$$

$$m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

$$35. f(x) = x + 3$$

$$\text{a) } x \in (-3; 1)$$

$$\text{b) } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } x \in (-\infty; \frac{9}{5})$$

$$36. \text{ a) } |2 - m| = |m + 1| \text{ dla } m = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } f(x) = 0 \text{ dla } x = -|2 - m|,$$

$$g(x) = 0 \text{ dla } x = -\frac{|m+1|}{2}$$

$$2|2 - m| = |m + 1| \text{ dla } m = 1 \text{ lub } m = 5$$

37. Wyznacz całkowite wartości parametru m , dla których punkt wspólny wykresów funkcji $f(x) = -2x + |m| - 7$ i $g(x) = 6x - 3$ leży w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

38. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 27 \\ 3(x+y) + (x-y) = -20 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{3(y-x)}{4} - \frac{2x-y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x-y}{2} - \frac{y-x}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (2x+y) - 6(x+2y) = 3 \\ (x+2y) + 2(2x+y) = 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{1-y}{3} = 0 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{3x+y}{4} = 5 \end{cases}$$

39. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb dodatnich?

a)
$$\begin{cases} x - 3y = m \\ 2x + y = m + 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} mx + y = 3 \\ x - my = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - my = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ 2x + my = 1 \end{cases}$$

40. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb różnych znaków?

a)
$$\begin{cases} 2x + y = m + 1 \\ x - 2y = m - 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 2m + 1 \\ x + 4y = 4 - m \end{cases}$$

41. Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych $y - x = m - 1$ oraz $2x + y = 4m + 1$ należy do wnętrza trójkąta ograniczonego prostymi $y = 5$, $2x + y = 1$ i $x - y = 1$?

42. Dane są proste $y = x + m + 2$ oraz $y = 2x + 3m$.

a) Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia tych prostych należy do obszaru opisanego nierównością $|x| + |y| \leq 4$?

b) Jaką figurą jest zbiór punktów przecięcia tych prostych dla $m \in \mathbf{R}$?

43. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań układu nierówności.

a)
$$\begin{cases} y \geq -3x + 1 \\ 2y < x - 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -x + 2y \leq 4 \\ y \geq |x| - 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} |x + y| \leq 4 \\ |x - y| \leq 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y < 2 - |x - 2| \\ y > |x| - 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} |y| \leq |x| \\ |x| \leq 3 \end{cases}$$

37. $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

38. a) $x = -7, y = 4$

b) $x = 2, y = -1$

c) $x = 2, y = 3$

d) $x = -4\frac{1}{2}, y = -42\frac{1}{2}$

39. a) $m \in (-\frac{3}{4}; 1)$

b) $m \in (-\infty; -6)$

c) $m \in (-\frac{5}{3}; \frac{3}{5})$

d) $m \in (-2; \frac{1}{3}) \cup (12; \infty)$

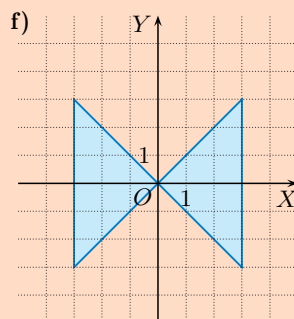
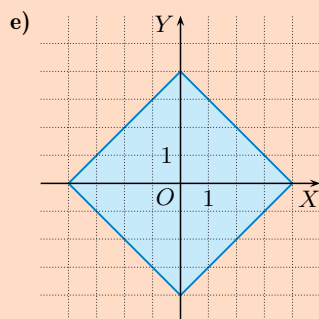
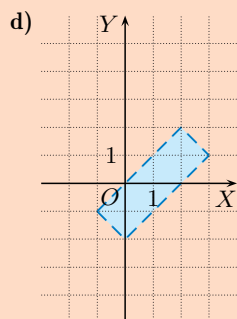
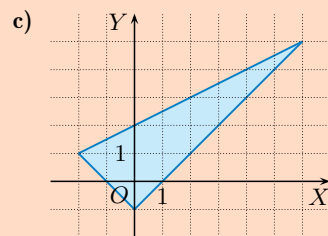
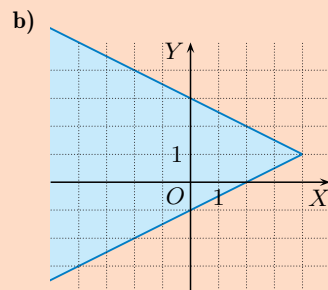
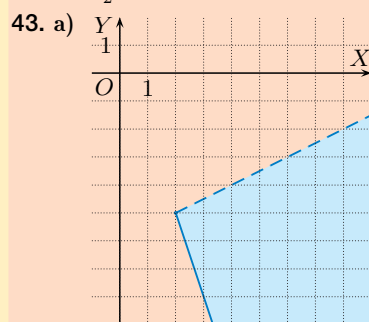
40. a) $m \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (7; \infty)$

b) $m \in (-\infty; -2) \cup (\frac{11}{5}; \infty)$

41. $m \in (0; \frac{8}{3})$

42. a) $m \in (\frac{2}{3}; 2)$

b) Jest prostą o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$.



5.4. Funkcja kwadratowa

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**.

Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**.

Znak współczynnika a decyduje o tym, czy ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$

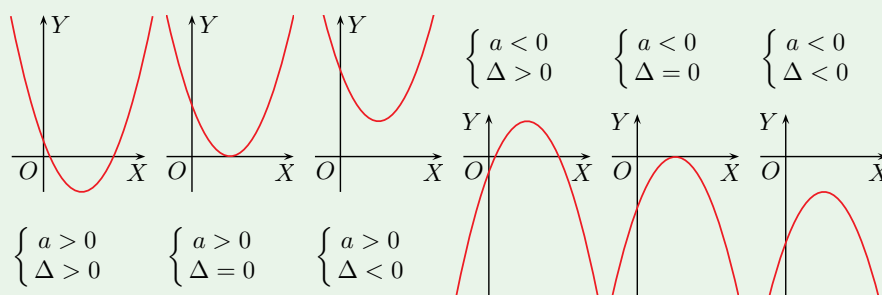
- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ (nazywamy je pierwiastkiem podwójnym).

- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX



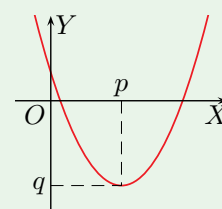
Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$

- Postać **kanoniczna**: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

Punkt o współrzędnych (p, q) jest wierzchołkiem paraboli oraz:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

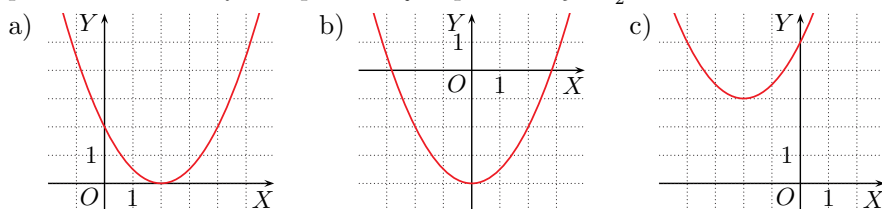


- Postać **iloczynowa**:

- jeśli $\Delta > 0$, to $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są miejscami zerowymi;
- jeśli $\Delta = 0$, to $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym;
- jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

Zestaw I – wprowadzający

1. Podaj równanie paraboli przedstawionej na rysunku, jeżeli wiadomo, że powstała ona w wyniku przesunięcia paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.



2. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naskicuj wykres tej funkcji i odczytaj z niego jej zbiór wartości.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$ c) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$
b) $f(x) = x^2 - 4x$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

3. Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Oblicz współczynniki b i c oraz podaj zbiór wartości funkcji f .

a) $W(0, 0)$ c) $W(0, -1)$ e) $W(2, 3)$ g) $W(4, 1)$
b) $W(-1, 0)$ d) $W(1, 4)$ f) $W(-1, 4)$ h) $W(-1, -1)$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x^2 + 4\sqrt{2}x - 2$ b) $f(x) = -10x^2 + 200x + 3000$

5. Podany przedział jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$. Oblicz współczynnik b .

a) $\langle -3; \infty \rangle$ b) $\langle 0; \infty \rangle$ c) $\langle -8; \infty \rangle$

6. Wykres funkcji kwadratowej f , do którego należą punkty A i B , jest osiowosymetryczny względem prostej $x = 1$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz podaj współrzędne wierzchołka jej wykresu.

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 6)$ b) $A(0, 0)$, $B(3, 6)$

7. Parabole o równaniu $y = x^2 + 2x + 1$ przesunięto o wektor $\vec{u}$. Naskicuj otrzymaną w ten sposób parabolę i podaj jej wzór.

a) $\vec{u} = [3, 0]$ b) $\vec{u} = [0, -2]$ c) $\vec{u} = [3, -2]$ d) $\vec{u} = [-1, -2]$

8. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = 3x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$ c) $g(x) = 3x^2 + 3x + 1$
b) $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$ d) $g(x) = 3x^2 + 12x + 12$

7. $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

a) $y = x^2 - 4x + 4$
b) $y = x^2 + 2x - 1$
c) $y = x^2 - 4x + 2$
d) $y = x^2 + 4x + 2$

8. a) $g(x) = 3(x^2 + 2x) + 5 = 3(x + 1)^2 - 3 + 5 = 3(x + 1)^2 + 2$, wektor $[-1, 2]$
b) $g(x) = 3(x^2 - 2x) + 5 = 3(x - 1)^2 - 3 + 5 = 3(x - 1)^2 + 2$, wektor $[1, 2]$
c) $g(x) = 3(x^2 + x) + 1 = 3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} + 1 = 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, wektor $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$
d) $g(x) = 3(x^2 + 4x) + 12 = 3(x + 2)^2 - 12 + 12 = 3(x + 2)^2$, wektor $[-2, 0]$

1. a) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$
b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$
c) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$

2. a) $y = (x + 4)^2$,
 $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$
b) $y = (x - 2)^2 - 4$,
 $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
c) $y = -(x + 3)^2 + 4$,
 $f(D) = (-\infty; 4]$
d) $y = -2(x - 1)^2$,
 $f(D) = (-\infty; 0]$

3. a) $b = c = 0$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$

b) $b = 2$, $c = 1$,
 $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$
c) $b = 0$, $c = -1$,
 $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$
d) $b = -2$, $c = 5$,
 $f(D) = \langle 4; \infty \rangle$
e) $b = -4$, $c = 7$,
 $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
f) $b = 2$, $c = 5$,
 $f(D) = \langle 4; \infty \rangle$
g) $b = -8$, $c = 17$,
 $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
h) $b = 2$, $c = 0$,
 $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$

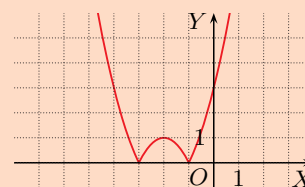
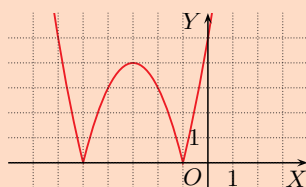
4. a) maleje w $(-\infty; -2\sqrt{2})$,
rośnie w $(-2\sqrt{2}; \infty)$
b) maleje w $\langle 10; \infty \rangle$,
rośnie w $(-\infty; 10]$

5. $y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$
a) $-\frac{b^2 - 4}{4} = -3$,
czyli $b = -4$ lub $b = 4$
b) $-\frac{b^2 - 4}{4} = 0$,
czyli $b = -2$ lub $b = 2$
c) $-\frac{b^2 - 4}{4} = -8$,
czyli $b = -6$ lub $b = 6$

6. a) $y = a(x - 1)^2 + q$
 $\begin{cases} 0 = a(-1 - 1)^2 + q \\ 6 = a(0 - 1)^2 + q \end{cases}$
 $\begin{cases} a = -2 \\ q = 8 \end{cases}$
Zatem $y = -2(x - 1)^2 + 8$,
 $W(1, 8)$.
b) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 2$,
 $W(1, -2)$

9. a) $x = -\frac{1}{2}, x = 0$
 b) $x = 0, x = 2$
 c) $x = -\frac{1}{5}, x = \frac{1}{5}$
 d) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$
 e) $x = 3$ f) $x = -\frac{1}{2}$
10. a) ma b) nie ma c) ma
11. a) $f(x) = -(x-4)(x+1)$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 4)$,
 $f(x) < 0$ dla
 $x \in (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$
 b) $f(x) = 3(x-1)(x-3)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (1; 3)$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$
 c) $f(x) = (x-3)^2$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 wartości ujemnych nie
 przyjmuje
 d) $f(x) = -2(x-1)^2$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
 wartości dodatnich nie
 przyjmuje
12. a) $(2\frac{1}{2}, -14), (-\frac{1}{3}, 3)$
 b) brak punktów wspólnych
13. a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
 b) $-2, -1, 0, 1, 2$
 c) $1, 2, 3$ d) 4
14. a) $x \in \langle -1; 2 \rangle$ b) $x = -1$
 c) $x \in \mathbf{R}$
15. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$
 b) $D = \langle -\frac{3}{2}; \frac{2}{3} \rangle$
 c) $D = (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$
16. a) $f_{\min} = -1, f_{\max} = 3$
 b) $f_{\min} = -8, f_{\max} = 0$
 c) $f_{\min} = 1, f_{\max} = 4$
 d) $f_{\min} = 0, f_{\max} = 8$
17. a) $y = -(x+1)(x-2) =$
 $= -x^2 + x + 2$
 b) $y = (-x+1)(-x-2) =$
 $= x^2 + x - 2$
 c) $y = -(-x+1)(-x-2) =$
 $= -x^2 - x + 2$
 d) $y = ((x+1)+1) \cdot$
 $\cdot ((x+1)-2) + 4 = x^2 + x + 2$
 e) $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$
 Zatem $y = (x + \frac{9}{2})^2 - \frac{9}{4} =$
 $= x^2 + 9x + 18.$

9. Rozwiąż równanie.
 a) $x(2x+1) = 0$ c) $25x^2 - 1 = 0$ e) $x^2 - 6x + 9 = 0$
 b) $3x^2 - 6x = 0$ d) $x^2 - 3 = 0$ f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
10. Sprawdź, czy równanie ma rozwiązanie.
 a) $x^2 - 3x + \sqrt{5} = 0$ b) $x^2 + 4x + 3\sqrt{2} = 0$ c) $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$
11. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (o ile jest to możliwe). Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.
 a) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
 b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$
12. Wyznacz punkty wspólne paraboli i prostej.
 a) $y = -6x^2 + 7x + 6, y = 1 - 6x$ b) $y = 3x^2 - 2x + 7, y = 4x - 4$
13. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność.
 a) $x^2 \leq 16$ b) $9 - x^2 > 0$ c) $x^2 < 4x$ d) $16 + x^2 \leq 8x$
14. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 - x + 3$ i $g(x) = x + 7$. Rozwiąż nierówność.
 a) $f(x) \leq g(x)$ b) $f(x) + x \cdot g(x) \leq 0$ c) $f(x) + g(x) > 0$
15. Wyznacz dziedzinę funkcji f .
 a) $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$ b) $f(x) = \sqrt{6-5x-6x^2}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$
16. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.
 a) $f(x) = x^2 - 2x, \langle -1; 3 \rangle$ c) $f(x) = x^2 + 4x + 4, \langle -4; -3 \rangle$
 b) $f(x) = -x^2 - 2x, \langle 0; 2 \rangle$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6, \langle 0; 3 \rangle$
17. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = (x+1)(x-2)$ przez:
 a) symetrię względem osi OX , d) przesunięcie o wektor $\vec{u} = [-1, 4]$,
 b) symetrię względem osi OY , e) symetrię względem prostej $x = -2$.
 c) symetrię względem początku układu współrzędnych,
18. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = |m|$ w zależności od parametru m .
 a) $f(x) = |(x+3)^2 - 4|$ b) $f(x) = |(x+1)(x+3)|$
18. a) 2 rozwiązania dla
 $m \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup (4; \infty)$,
 3 rozwiązania dla $m \in \{-4, 4\}$,
 4 rozwiązania dla $m \in (-4; 0) \cup (0; 4)$
- b) 2 rozwiązania dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$,
 3 rozwiązania dla $m \in \{-1, 1\}$,
 4 rozwiązania dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$



Zestaw II – ćwiczeniowy

19. Dana jest funkcja $f(x) = a(x-7)(x+1)$, której najmniejsza wartość jest równa -4 . Oblicz współczynnik a oraz wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
20. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, jeżeli wiadomo, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(1, 2)$ oraz:
a) jednym z miejsc zerowych jest 0 , b) należy do niej punkt $A(3, 4)$.
21. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5x + c$. Oblicz współczynnik c , jeśli:
a) do wykresu funkcji f należy punkt $P(-2, 1)$,
b) funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe,
c) najmniejsza wartość funkcji f jest równa $-\frac{5}{4}$.
22. Oblicz współczynniki b i c trójkątnu $y = x^2 + bx + c$, jeśli:
a) trójkątn ten ma dwa pierwiastki 2 i -5 ,
b) trójkątn ten osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,
c) trójkątn ten przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1; 4)$,
d) wykres tego trójkątnu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.
23. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe.
a) $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x - c$
b) $f(x) = -x^2 + 5x + c$ d) $f(x) = x^2 - x - c$
24. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika b , dla których funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
a) $f(x) = x^2 + bx + 3$ b) $f(x) = x^2 + bx - 4$ c) $f(x) = 2x^2 + bx$
25. Rozwiąż równanie.
a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ c) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ e) $x^2 - 9|x| = 0$
b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ d) $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ f) $x^2 + 18 = 9|x|$
26. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x - 3 \\ x + y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

19. $a = \frac{1}{4}$, $W(3, -4)$

20. a) $y = -2x^2 + 4x$
b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

21. a) $c = 7$ b) $c = \frac{25}{4}$ c) $c = 5$

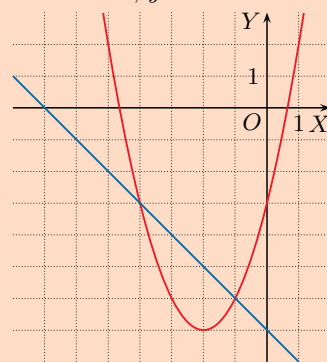
22. a) $b = 3$, $c = -10$
b) $b = 2$, $c = 8$
c) $b = -3$, $c = -4$
d) $b = -6$, $c = 5$

23. a) $c < 2$ b) $c > -\frac{25}{4}$
c) $c > -36$ d) $c > -\frac{1}{4}$

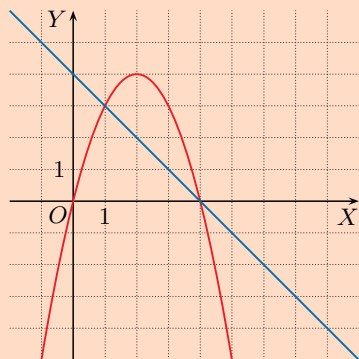
24. a) $b = -2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$
b) Nie ma takich wartości.
c) $b = 0$

25. a) $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -3$, $x = 3$
c) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $x = -9$, $x = 0$, $x = 9$
f) $x = -6$, $x = -3$, $x = 3$, $x = 6$

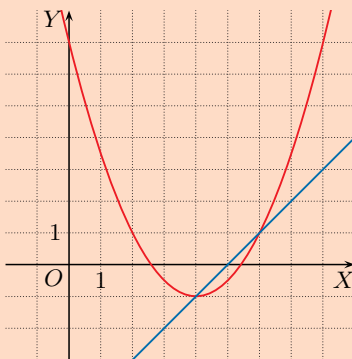
26. a) $x = -4$, $y = -3$
lub $x = -1$, $y = -6$



b) $x = 1$, $y = 3$ lub $x = 4$, $y = 0$



c) $x = 4$, $y = -1$ lub $x = 6$, $y = 1$



27. a) 0 miejsc zerowych dla $m \in (1; \infty)$,
1 miejsce zerowe dla $m = 1$,
2 miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 1)$
b) 0 miejsc zerowych dla $m \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$,
1 miejsce zerowe dla $m \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$,
2 miejsca zerowe dla $m \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; 2)$

28. a) 0 rozwiązań dla $a \in (-12; 12)$,
1 rozwiązanie dla $a \in \{-12, 12\}$,
2 rozwiązania dla $a \in (-\infty; -12) \cup (12; \infty)$
b) 1 rozwiązanie dla $a \in \{-1, 0\}$,
2 rozwiązania dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$

29. a) $a \geq -1$ b) $a \leq -1$

30. a) $\Delta = 1 - 4(m+1)^2$
 $m+1 < 0$ i $\Delta < 0$
 $m < -1$ i $(m+1)^2 > \frac{1}{4}$
 $m < -\frac{3}{2}$
b) $\Delta = (m-1)^2 + m(m^2-1) = (m-1)(m^2+2m-1)$
 $m^2-1 < 0$ i $\Delta < 0$
 $m \in (-1; 1)$
i $m \in (-\infty; -\sqrt{2}-1) \cup (\sqrt{2}-1; 1)$,
więc $m \in (\sqrt{2}-1; 1)$
Dla $m = 1$ $f(x) = -\frac{1}{4}$
dla $x \in \mathbf{R}$.
Zatem ostatecznie $m \in (\sqrt{2}-1; 1)$.

31. a) $m \in (-4; 0)$
b) $m = 2$ c) $m \geq 1$
d) Dla $m = 0$ nierówność przyjmuje postać $-3x+2 \leq 0$, czyli $x \geq \frac{2}{3}$.
Dla $m \neq 0$ nierówność jest kwadratowa.

$$\Delta = (m-3)^2 - 4m(2-m) = 5(m-1)(m-\frac{9}{5})$$

$$m < 0$$
 i $\Delta \leq 0$,
czyli $m < 0$ i $m \in \langle 1; \frac{9}{5} \rangle$
Zatem nie ma takiego m .

32. a) $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -6$
b) $x_1 + x_2 = -3(\sqrt{3}-1)$,
 $x_1 x_2 = 2 - \sqrt{3}$

27. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji f w zależności od parametru m .

a) $f(x) = x^2 + 2x + m$ b) $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$

28. Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a .

a) $4x^2 + ax + 9 = 0$ b) $(a+1)x^2 + (a+2)x + 1 = 0$

29. Dla jakich wartości parametru a funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne?

a) $f(x) = (a+3)x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = (1-a)x^2 + 4x - 2a$

30. Dla jakich wartości parametru m funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne?

a) $f(x) = (m+1)x^2 - x + m + 1$ b) $f(x) = (m^2-1)x^2 + (m-1)x - \frac{m}{4}$

31. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x ?

a) $mx^2 + mx - 1 < 0$ c) $(m-1)(m+1)x^2 + (m-1)x + \frac{1}{4} > 0$
b) $(1-m)x^2 + mx - 1 \leq 0$ d) $mx^2 + (m-3)x + 2 - m \leq 0$

Wzory Viète'a

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1 i x_2 ($\Delta \geq 0$), to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

32. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $3x^2 + 12x - 18 = 0$ b) $(\sqrt{3}+1)x^2 + 6x = 1 - \sqrt{3}$

33. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $10x^2 - 3x - 100 = 0$ c) $2x^2 + 5\sqrt{2}x + 2 = 0$
b) $-7x^2 + 14x - 3 = 0$ d) $-6x^2 + x + 2\sqrt{3} = 0$

34. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $12x^2 - 4x - 15 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $x_1^2 + x_2^2$, c) $|x_1 - x_2|$, e) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$,
b) $(x_1 - x_2)^2$, d) $(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1)$, f) $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_2^2 x_1}$.

35. Dla jakich wartości parametru a równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 + 2x + a + 2 = 0$ b) $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$

33. a) o różnych znakach b) dodatnie c) ujemne d) o różnych znakach

34. a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{4^2}{12^2} + 2 \cdot \frac{15}{12} = \frac{47}{18} = 2\frac{11}{18}$

b) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = \frac{47}{18} + \frac{5}{2} = \frac{46}{9} = 5\frac{1}{9}$

c) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{\frac{46}{9}} = \frac{\sqrt{46}}{3}$

d) $(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) = 2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1 x_2 = -\frac{37}{36}$

e) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{376}{225} = 1\frac{151}{225}$

f) $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_2^2 x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{16}{75}$

35. a) $a < -2$ b) $a \in (-3; 0)$

36. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

a) $x^2 + (2a - 3)x + 2a + 5 = 0$ b) $ax^2 - (a + 2)x + a + 2 = 0$

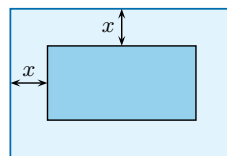
37. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne?

a) $x^2 + (a + 2)x + a - 1 = 0$ b) $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$

38. Znajdź dwie liczby, których suma jest równa 3 oraz:

- a) suma ich kwadratów jest równa 65,
b) różnica ich kwadratów jest równa 33.

39. Wokół basenu o wymiarach $9 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ wyłożono kafelkami pas szerokości x . Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli zużyto 68 m^2 kafelków?



40. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 7. Jeżeli pomnożymy ją przez liczbę o przestawionych cyfrach, to otrzymamy 1300. Znajdź tę liczbę.

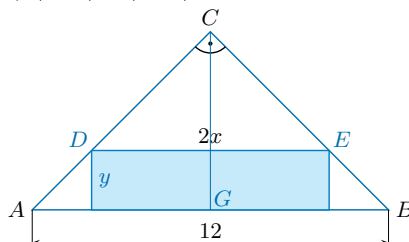
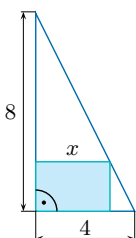
41. Wyznacz najmniejszą wartość sumy kwadratów liczb x i y , jeśli:

a) $x + y = 3$, b) $x - y = 6$, c) $2x - y = 0$.

42. Drut o długości 68 cm dzielimy na dwie części – z jednej tworzymy ramkę kwadratową, a z drugiej – prostokątną. Stosunek długości boków ramki prostokątnej wynosi 3:1. Na części jakiej długości należy rozciąć drut, aby suma pól powierzchni ograniczonych przez ramki była najmniejsza?

43. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x . Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres. Dla jakiego argumentu pole jest największe? Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

a) b) $|AC| = |BC|$



44. Obwód prostokąta jest równy 24 cm. Jakie powinny być długości jego boków, aby walec, który powstanie przez obrót tego prostokąta wokół jednego z boków, miał jak największe pole powierzchni bocznej?

42. Drut należy rozciąć na części długości $29\frac{1}{7} \text{ cm}$ i $38\frac{6}{7} \text{ cm}$, z krótszej części robimy ramkę kwadratową.

43. a) $P(x) = 2x(4 - x)$, $D_P = (0; 4)$, pole największe dla $x = 2$, wymiary prostokąta: 2×4

b) $|AC| = |BC| = 6\sqrt{2}$ oraz $|CG| = 6$

Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC : $\frac{2x}{12} = \frac{6-y}{6}$, czyli $y = 6 - x$, gdzie $x \in (0; 6)$

Zatem pole prostokąta opisuje funkcja $P(x) = 2x \cdot (6 - x) = -2x^2 + 12x$.

Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x_w = \frac{-12}{-4} = 3$. Wtedy $y = 6 - 3 = 3$.

Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 6×3 .

44. kwadrat o boku 6 cm

36. a) $\Delta = 4a^2 - 20a - 11 > 0$
dla $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (5\frac{1}{2}; \infty)$
 $x_1 x_2 = 2a + 5 > 0$
dla $a \in (-2\frac{1}{2}; \infty)$
 $x_1 + x_2 = 3 - 2a > 0$
dla $a < -1\frac{1}{2}$
Zatem $a \in (-2\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2})$.

b) $\Delta = (a+2)(2-3a) > 0$ dla
 $a \in (-2; \frac{2}{3})$
 $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = \frac{a+2}{a} > 0$
dla $a \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
Zatem $a \in (0; \frac{2}{3})$.

37. a) $\Delta = a^2 + 8 > 0$ dla $a \in \mathbb{R}$
 $x_1 x_2 = a - 1 > 0$ dla $a > 1$
 $x_1 + x_2 = -a - 2 < 0$
dla $a > -2$
Zatem $a \in (1; \infty)$.

b) $\Delta = -4(a+4)(a-1) > 0$
dla $a \in (-4; 1)$
 $x_1 x_2 = \frac{a+3}{a} > 0$
dla $a \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
 $x_1 + x_2 = \frac{4}{a} < 0$
dla $a \in (-\infty; 0)$
Zatem $a \in (-4; -3)$.

38. a) $-4, 7$ b) $7, -4$

39. $(4 + 2x)(9 + 2x) - 4 \cdot 9 = 68$,
gdzie $x > 0$
 $4x^2 + 26x - 68 = 0$
 $x = -8,5 < 0$ lub $x = 2$
Zatem $x = 2 \text{ m}$.

40. I sposób

$16 \cdot 61 \neq 1300$
 $25 \cdot 52 = 1300$
 $34 \cdot 43 \neq 1300$

II sposób

x – cyfra dziesiątek
 $7 - x$ – cyfra jedności
 $(10x + 7 - x)(10(7 - x) + x) = 1300$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$
 $x = 2$ lub $x = 5$
Szukaną liczbą jest 25 lub 52.

41. a) 4,5 b) 18 c) 0

45. a) $\frac{n(n-3)}{2} = 90$, gdzie $n \in \mathbb{N}$
 $n = 15$

46. v_1 – średnia prędkość pierwszego kolarza
 t_1 – czas jazdy pierwszego kolarza

v_2 – średnia prędkość drugiego kolarza
 $v_1 t_1 = 120$, stąd $t_1 = \frac{120}{v_1}$,
gdzie $v_1 > 0$

$v_2 = v_1 - 1$

$(v_1 - 1) \left(t_1 + \frac{1}{5} \right) = 120$

$(v_1 - 1) \left(\frac{120}{v_1} + \frac{1}{5} \right) = 120$

$v_1^2 - v_1 - 600 = 0$

$v_1 = 25 \text{ km/h}$

$v_2 = 24 \text{ km/h}$

47. $v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
 $x(0) = 0$, $x(1) = 5$, $x(2) = 18$

a) $v = \frac{5-0}{1-0} = 5 \text{ [m/s]}$

b) $v = \frac{18-5}{2-1} = 13 \text{ [m/s]}$

c) $v = \frac{18-0}{2-0} = 9 \text{ [m/s]}$

45. Wyznacz liczbę wierzchołków wielokąta, który ma:

- a) 90 przekątnych, b) 135 przekątnych, c) 189 przekątnych.

46. Dwaj kolarze przejechali trasę 120 km. Pierwszy jechał ze średnią prędkością o 1 km/h większą od prędkości drugiego i całą trasę pokonał w czasie o 12 minut krótszym. Oblicz średnią prędkość każdego z kolarzy.

47. Punkt porusza się wzdłuż osi OX , a jego położenie w chwili t dane jest wzorem $x(t) = 4t^2 + t$, gdzie x wyrażone jest w metrach, a t – w sekundach. Oblicz średnią prędkość punktu od chwili t_1 do chwili t_2 .

- a) $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 1 \text{ s}$ b) $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$ c) $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$

48. Rowerzysta przejechał z miasta A do miasta B odległego od A o 54 km. Wzór $s(t) = 36t - 6t^2$ opisuje długość s (w kilometrach) drogi pokonanej przez rowerzystę po t godzinach jazdy.

- a) Oblicz, ile czasu jechał rowerzysta.
b) Oblicz średnie prędkości rowerzysty w pierwszej i w drugiej godzinie jazdy oraz na całej trasie (w km/h).

49. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku pionowo do góry strzałę z prędkością początkową 50 m/s. Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) można przybliżyć wzorem:

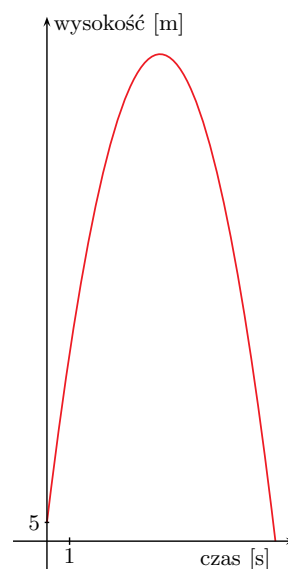
$$h(t) = 5 + 50t - 5t^2$$

gdzie t jest czasem lotu strzały (w sekundach).

- a) Określ dziedzinę funkcji h .
b) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i ją uzupełnij.

t [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h [m]	50	85	110	125	130	125	110	85	50

- c) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie wysokość, z której ją wypuszczono?
d) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie największą wysokość?
e) Na jaką największą wysokość doleci strzała?



48. a) $36t - 6t^2 = 54$, gdzie $t > 0$
 $t = 3 \text{ h}$

b) $s(1) = 30$, $s(2) = 48$, $s(3) = 54$

Średnia prędkość w pierwszej godzinie: $v = \frac{30-0}{1-0} = 30 \text{ [km/h]}$

Średnia prędkość w drugiej godzinie: $v = \frac{48-30}{2-1} = 18 \text{ [km/h]}$

Średnia prędkość na całej trasie: $v = \frac{54-0}{3-0} = 18 \text{ [km/h]}$

49. a) $5 + 50t - 5t^2 \geq 0$, gdzie $t > 0$, $D = \langle 0; 5 + \sqrt{26} \rangle$

c) $5 + 50t - 5t^2 = 5$, gdzie $t > 0$
 $t = 10 \text{ s}$

d) $x_w = \frac{-50}{2(-5)} = 5 \text{ [s]}$

e) $h(5) = 130 \text{ m}$

Zestaw III – podsumowujący

50. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f , której wykresem jest parabola o wierzchołku W przystająca do paraboli $y = x^2$.

- a) $W(m^4, 0)$ b) $W(0, -25m^2)$ c) $W(-2m, -4m^2)$ d) $W(m, -4m^2)$

51. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = (x - 2p)^2 + p$, gdzie $p \in \mathbf{R}$. Wyznacz zbiór wartości funkcji g oraz podaj równanie osi symetrii jej wykresu.

- a) $g(x) = f(x + p) - p$ c) $g(x) = p - f(x)$
b) $g(x) = f(p - x)$ d) $g(x) = p - f(2p - x)$

52. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z niego liczbę rozwiązań równania $f(x) = a$ w zależności od parametru a .

- a) $f(x) = 2|(x + 1)(x - 3)|$ c) $f(x) = \begin{cases} 2(x - 1)^2 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$
b) $f(x) = -|x^2 - 4| + 2$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{4}{5}x^2 + 4x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

53. Rozwiąż równanie.

- a) $|3x^2 - 4x + 2| = 1$ d) $x^2 - 2x + |x - 1| = 1$
b) $|x^2 + x - 10| = 10$ e) $|x| + |1 - x^2| = 1$
c) $|x^2 - 6x + 7| = 2$ f) $|x^2 + 4x - 5| + |x^2 + 4x| = 5$

54. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 12 \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 11 \\ y = (x - 1)(x + 1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x - 2)^2 - 1 \\ y + x^2 = 6x - 5 \end{cases}$

55. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} xy = -6 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 4 \end{cases}$

56. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{mx^2 + (m + 2)x + (m + 2)}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych?

57. Dla jakich wartości parametru m zbiorem wartości funkcji:

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 8x + m$$

jest przedział $\langle -7; \infty \rangle$?

56. $mx^2 + (m + 2)x + (m + 2) \geq 0$

Dla $m = 0$: $2x + 2 \geq 0$ dla $x \geq -1$.

Dla $m \neq 0$: $m > 0$ i $\Delta = -3(m + 2)(m - \frac{2}{3}) \leq 0$, czyli $m > 0$

i $m \in (-\infty; -2) \cup \langle \frac{2}{3}; \infty \rangle$.

Zatem $m \in \langle \frac{2}{3}; \infty \rangle$.

57. Funkcja f nie jest liniowa, ponieważ zbiór wartości funkcji liniowej jest jednoelementowy lub jest równy $\mathbf{R}$. Oznacza to, że funkcja f jest kwadratowa oraz:

$$m + 1 > 0 \text{ i } y_w = \frac{m^2 + m - 16}{m + 1} = -7,$$

czyli $m > -1$ i $m = -9$ lub $m = 1$.

Zatem $m = 1$.

50. a) $x = m^4$

b) $x = -5m, x = 5m$

c) $x = 0, x = -4m$

d) $x = -m, x = 3m$

51. a) $g(D) = \langle 0; \infty \rangle, x = p$

b) $g(D) = \langle p; \infty \rangle, x = -p$

c) $g(D) = (-\infty; 0), x = 2p$

d) $g(D) = (-\infty; 0), x = 0$

52. a) 0 rozwiązań dla

$a \in (-\infty; 0)$,

2 rozwiązania dla

$a \in \{0\} \cup (8; \infty)$,

3 rozwiązania dla $a = 8$,

4 rozwiązania dla $a \in (0; 8)$

b) 0 rozwiązań dla $a \in (2; \infty)$,

2 rozwiązania dla

$a \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$,

3 rozwiązania dla $a = -2$,

4 rozwiązania dla $a \in (-2; 2)$

c) 1 rozwiązanie dla

$a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,

2 rozwiązania dla $a \in \{0, 2\}$,

3 rozwiązania dla $a \in (0; 2)$

d) 1 rozwiązanie dla

$a \in (-\infty; -2) \cup (5; \infty)$,

2 rozwiązania dla $a \in \{-2, 5\}$,

3 rozwiązania dla $a \in (-2; 5)$

53. a) $x = \frac{1}{3}, x = 1$

b) $x = -5, x = -1, x = 0,$
 $x = 4$

c) $x = 1, x = 3, x = 5$

d) $x = 0, x = 2$

e) $x = -1, x = 0, x = 1$

f) $x \in \langle -5; -4 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$

54. a) $x = -3, y = -3$

lub $x = -2, y = 0$

b) $x = 2, y = 3$

c) $x = 1, y = 0$

lub $x = 4, y = 3$

55. a) $x = -2, y = 3$

lub $x = 3, y = -2$

b) $x = -2, y = -3$

lub $x = 3, y = 2$

c) $x = -\frac{4}{3}, y = -3$

lub $x = -1, y = -4$

lub $x = 1, y = 4$

lub $x = \frac{4}{3}, y = 3$

58. $m + 1 \neq 0$
i $\Delta = 4(2m^2 - 5m - 3) = 8(m - 3)(m + \frac{1}{2}) = 0$,
czyli $m \neq -\frac{1}{2}$ i $m = 3$
lub $m = -\frac{1}{2}$
Zatem $m = 3$ i $x_0 = \frac{3}{2}$ lub
 $m = -\frac{1}{2}$ i $x_0 = -2$.
59. Dla $x^2 - 2x + m = 0$:
 $\Delta = 4 - 4m \geq 0$,
czyli $m \in (-\infty; 1]$.
Dla $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$:
 $\Delta = m^2 + 2m - 3 \geq 0$, czyli
 $m \in (-\infty; -3] \cup (1; \infty)$.
Zatem $m \in (-\infty; 1]$ lub
 $m \in (-\infty; -3] \cup (1; \infty)$,
co oznacza, że $m \in \mathbf{R}$.
60. $f(x) = 0 = g(x)$
 $2x^2 - 3x + m - 1 =$
 $= x^2 - 2x + m + 1$
 $x^2 - 3x - 2 = 0$
 $x = -1$ lub $x = 2$
Zatem $x = -1$ dla $m = -4$
lub $x = 2$ dla $m = -1$.
61. $x_1 + x_2 = 7$, czyli
 $4x_1 + 4x_2 = 4(x_1 + x_2) =$
 $= 28 = -b$,
zatem $b = -28$.
 $x_1 x_2 = 2$, czyli
 $4x_1 \cdot 4x_2 = 16x_1 x_2 = 32 = c$
62. $\Delta = (m + 3)(m - 1) > 0$,
czyli $m \in (-\infty; -3] \cup (1; \infty)$
 $x_1 + x_2 = 1 - m < 2$,
czyli $m > -1$
Zatem $m \in (1; \infty)$.
63. $m \in (0; 1)$
64. a) $m > 16$ b) $m < 0$
65. a) $b = -24$
b) $b = -5, b = 5$
67. a) $m > \frac{1}{2}$
b) $m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup$
 $\cup (\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}; \infty)$
c) $m = -7, m = 3$
58. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m + 1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ ma pierwiastek podwójny? Wyznacz ten pierwiastek.
59. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m przynajmniej jedno z równań $x^2 + 2x + m = 0$ oraz $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ ma rozwiązanie.
60. Dla jakich wartości parametru m funkcje $f(x) = 2x^2 - 3x + m - 1$ oraz $g(x) = x^2 - 2x + m + 1$ mają wspólne miejsce zerowe? Wyznacz to miejsce zerowe.
61. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - 7x + 2 = 0$, a liczby $4x_1$ i $4x_2$ są pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$. Oblicz $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$, a następnie wyznacz współczynniki b i c .
62. Dla jakich wartości parametru m suma dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m - 1)x - m + 1 = 0$ jest mniejsza od 2?
63. Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $mx^2 - 2x + m = 0$ jest nieujemna?
64. Dla jakich wartości parametru m dwa różne pierwiastki równania:
 $-2x^2 + mx - 2m = 0$
a) są większe od 1, b) są mniejsze od 2?
65. Dla jakich wartości parametru b dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania $6x^2 + bx + 1 = 0$ spełniają warunek:
a) $x_1 + x_2 = 4$, b) $|x_2 - x_1| = \frac{1}{6}$?
66. Sprawdź, czy istnieje taka liczba m , że dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania $x^2 + mx + m = 0$ spełniają warunek:
 $\left(\frac{1}{x_1} + x_2\right)\left(\frac{1}{x_2} + x_1\right) = \frac{9}{2}$
67. Dla jakich wartości parametru m dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania:
a) $(4m - 1)x^2 - 8mx + 4 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$,
b) $2x^2 + (2m - 1)x + 2m + 1 = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$,
c) $x^2 + (m + 2)x + 4 = 0$ spełniają warunek $|x_1 - x_2| = 3$?
68. Wyznacz wzór funkcji $y = f(m)$ i naskicuj jej wykres, jeśli wiadomo, że $f(m)$ jest sumą:
a) kwadratów pierwiastków równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$,
b) odwrotności pierwiastków równania $(5m - 1)(m - 1)x^2 + 6x + 1 = 0$.
66. $\Delta = m(m - 4) > 0$ dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
 $\left(\frac{1}{x_1} + x_2\right)\left(\frac{1}{x_2} + x_1\right) = \frac{1}{x_1 x_2} + x_1 x_2 + 2$
 $\frac{(a+c)^2}{ac} = \frac{(1+m)^2}{m} = \frac{9}{2}$
 $2m^2 - 5m + 2 = 0$ dla $m = \frac{1}{2}$ lub $m = 2$
Zatem takie m nie istnieje.
68. a) $\Delta = 4 > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$
 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (\frac{b}{a})^2 - \frac{2c}{a}$
 $f(m) = 2m^2 + 2, m \in \mathbf{R}$
b) $\Delta = -20m^2 + 24m + 32 = -20(m + \frac{4}{5})(m - 2) > 0$ dla $m \in (-\frac{4}{5}; 2)$
 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-b}{c}$
 $f(m) = -6, m \in (-\frac{4}{5}; 2)$

5.5. Wielomiany

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, nazywamy **wielomianem** stopnia n .

Funkcję w stale równą zero nazywamy **wielomianem zerowym** ($w \equiv 0$) i jego stopnia nie określamy.

Liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu, a współczynnik a_0 – **wyrazem wolnym**.

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu w , jeśli $w(a) = 0$.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu

Dla dowolnych wielomianów w i q , gdzie $q \not\equiv 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:

$$w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$$

oraz $r \equiv 0$ lub $\text{st}(r) < \text{st}(q)$.

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0, a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $x = \frac{p}{q}$ i p, q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem k -krotnym** ($k \in \mathbf{N}_+$) wielomianu w , jeżeli w jego rozkładzie występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$.

Zestaw I – wprowadzający

- $a = 6, b = -2$
 - $a = 10, b = -2$
- $k(x) = 3x^3 + x^2 - 1, \text{st}(k) = 3$
 - $k(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1, \text{st}(k) = 3$
 - $k(x) = 6x^3 - 1, \text{st}(k) = 3$
 - $k(x) = 2x^2 - 3x, \text{st}(k) = 2$
- $a = -1, b = 6$
 - $a = -3, b = 0$
 - $a = -3, b = 1$
- $w(x) = 5x^3(x-2)(x+2)$
 - $w(x) = x^2(x-5) \cdot (x^2 + 5x + 25)$
 - $w(x) = -5x^3(x-3)^2$
 - $w(x) = 2x^3(x+5)(x-1)$
- $w(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$
 - $w(x) = (x+3)(x+2)(x-2)$
 - $w(x) = (3x-1)(x^2+2)$
 - $w(x) = 3x(x-5) \cdot (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
 - $w(x) = x(x-4)(2x^2+3)$
 - $w(x) = (x-1)^2(x+1) \cdot (x^2+x+1)$
- $w(x) = -(x-2)(3x+4)$
 - $w(x) = 3(x-2)^2$
 - $w(x) = 5(x-1)^4(x-5)$
 - $w(x) = 4(x+1)^3 \cdot (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$
- $x = -2, x = 0, x = 2$
 - $x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}$
 - $x = 0, x = 2$
 - $x = -\frac{2}{3}, x = 0$
 - $x = 0, x = 4$
 - $x = 0, x = \frac{\sqrt[6]{32}}{2}$
 - $x = 0, x = 1$
 - $x = -2, x = 0, x = 3$
 - $x = -3, x = 0$
- Oblicz współczynniki a i b wielomianu w , jeżeli $w(1) = 3$ i $w(0) = -2$.
 - $w(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$
 - $w(x) = ax^{100} + 5x^{50} - 10x^{25} + b$
 - Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 - 1$ i $u(x) = 3x^3 - x^2$. Wyznacz wielomian k i podaj jego stopień.
 - $k(x) = u(x) + w(x)$
 - $k(x) = u(x) - w(x)$
 - $k(x) = w(x) + 2u(x)$
 - $k(x) = 3x \cdot w(x) - 2u(x)$
 - Dla jakich wartości parametrów a i b wielomiany u i w mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach?
 - $u(x) = 8x^3 - a, w(x) = (b+2)x^3 + 1$
 - $u(x) = x(x+a)^2 + b, w(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
 - $u(x) = x(ax-b)^2 + b, w(x) = 9x^3 + 6x^2 + x + 1$
 - Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = 5x^5 - 20x^3$
 - $w(x) = x^5 - 125x^2$
 - $w(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$
 - $w(x) = 2x^5 + 8x^4 - 10x^3$
 - Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
 - $w(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
 - $w(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$
 - $w(x) = 3x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 30x$
 - $w(x) = 2x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 12x$
 - $w(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$
 - Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = (x+3)^2 - (2x+1)^2$
 - $w(x) = (2x-4)^2 - (2-x)^2$
 - $w(x) = 5(x-1)^5 - 20(x-1)^4$
 - $w(x) = 4(x+1)^5 - 8(x+1)^3$
 - Rozwiąż równanie.
 - $3x^5 = 12x^3$
 - $5x^5 = 20x$
 - $x^6 = (2x)^3$
 - $27x^7 = -8x^4$
 - $\frac{1}{2}x^5 = 32x^2$
 - $x^2 = \sqrt{2}x^5$
 - $6x^4 - 12x^3 + 6x^2 = 0$
 - $x^7 - x^6 = 6x^5$
 - $\frac{1}{9}x^6 + x^5 = \frac{1}{3}x^5 - x^4$
 - Rozwiąż równanie.
 - $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
 - $x^3 + 5x^2 + 3x + 15 = 0$
 - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
 - $2x^4 - x^3 + 16x - 8 = 0$
 - $x^4 - 3x^3 = 3 - x$
 - $4x^3 - 8x^2 = x - 2$
 - $12x^3 - 2 = 3x^2 - 8x$
 - $54x^4 = 27x^3 + 2x - 1$
 - $x = -2, x = -1, x = 1$
 - $x = -5$
 - $x = -2, x = 2, x = 3$
 - $x = -2, x = \frac{1}{2}$
 - $x = -1, x = 3$
 - $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$
 - $x = \frac{1}{4}$
 - $x = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$

9. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$.

- a) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x + 1$
 b) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 3$, $q(x) = 3x - 2$
 c) $w(x) = -x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 3x - 9$, $q(x) = x + 5$

10. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez dwumian q .

- a) $q(x) = x - 2$ b) $q(x) = x + 2$ c) $q(x) = x - \sqrt{2}$

11. Nie wykonując dzielenia, sprawdź, czy wielomian:

$$w(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$$

jest podzielny przez dwumian q .

- a) $q(x) = x + 1$ c) $q(x) = x + 3$ e) $q(x) = x + 5$
 b) $q(x) = x + 2$ d) $q(x) = x - 4$ f) $q(x) = x - 6$

12. Współczynniki wielomianu $w(x) = x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ są liczbami całkowitymi. Które z liczb: $-3, 0, 1, 2, 5$ nie mogą być pierwiastkami wielomianu w , jeżeli:

- a) $a_0 = 4$, b) $a_0 = 6$, c) $a_0 = 15$?

13. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ d) $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4 = 0$
 b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ e) $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$
 c) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ f) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

14. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ c) $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x - 20$
 b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$ d) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15$

15. Współczynniki wielomianu $w(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ są liczbami całkowitymi. Które z liczb: $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ nie mogą być pierwiastkami wielomianu w , jeżeli:

- a) $a_0 = 4$, $a_5 = 4$, c) $a_0 = 6$, $a_5 = 4$,
 b) $a_0 = 4$, $a_5 = 6$, d) $a_0 = 6$, $a_5 = 6$?

16. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $4x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$
 b) $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ d) $12x^3 + 8x^2 = x + 1$

16. a) $x = -\frac{1}{3}$

b) $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

c) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = -1 + \sqrt{2}$

d) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$

9. a) $w(x) = (x+1) \cdot (2x^2 - 3x + 1) - 4$

b) $w(x) = (3x-2)(x^2-x)+3$

c) $w(x) = (x+5) \cdot (-x^4 + 2x^3 - 3) + 6$

10. a) 31 b) 11 c) $3\sqrt{2} + 7$

11. a) $w(-1) = 32 \neq 0$, nie

b) $w(-2) = 0$, tak

c) $w(-3) = -48 \neq 0$, nie

d) $w(4) = 162 \neq 0$, nie

e) $w(-5) = 0$, tak

f) $w(6) = 1320 \neq 0$, nie

12. a) $-3, 0, 5$ b) $0, 5$ c) $0, 2$

13. a) $x = 1$

b) $x = 1, x = 2, x = 3$

c) $x = -3, x = \frac{1}{2}, x = 2$

d) $x = -2, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $x = -2, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

f) $x = -1, x = 2$

14. a) $w(x) = (2x-1)(x+2)(x-3)$

b) $w(x) = (x-3)^2(2x+3)$

c) $w(x) = (x-2)(x+2) \cdot (x^2+x+5)$

d) $w(x) = (x-3)(x+5) \cdot (x^2+1)$

15. a) $-\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

d) $-\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$

Zestaw II – ćwiczeniowy

17. a) $v(x, y, z) = -4x^2yz + -8xy^2z - 8xyz^2 + 4xz^2 + 2xy^2$, $v(-1, 2, -\frac{1}{2}) = -17$
 b) $v(x, y, z) = -xy^2z^2 + -xyz^2 + 2xyz$,
 $v(-1, 2, -\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2}$

18. a) $x = 2$ – dwukrotny,
 $x = 4$ – jednokrotny
 b) $x = -1$ – trzykrotny,
 $x = 3$ – jednokrotny
 c) $x = -2$ – dwukrotny,
 $x = -\frac{1}{2}$ – jednokrotny,
 $x = \frac{1}{2}$ – jednokrotny
 d) $x = -2$ – dwukrotny,
 $x = -\frac{1}{2}$ – jednokrotny,
 $x = 1$ – dwukrotny

19. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; 2)$
 b) $x \in \langle -2; \infty \rangle$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1\}$
 d) $x \in (-\infty; -1) \cup \{1\} \cup \cup (2; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; -2) \cup \{0\}$
 f) $x \in \langle -3; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
 g) $x \in (-\infty; -1)$
 h) $x \in (-\infty; 1)$

20. a) $x \in \langle -4; 1 \rangle$
 b) $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \cup (1; \infty)$
 d) $x \in (-2; -1) \cup (0; 1) \cup \cup (2; \infty)$

17. Wyznacz wielomian $v(x, y, z) = 4u(x, y, z) - 2w(x, y, z)$ i oblicz jego wartość dla $x = -1$, $y = 2$, $z = -\frac{1}{2}$.

a) $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz - 2xy^2z + xz^2$, $w(x, y, z) = 3x^2yz + 4xyz^2 - xy^2$
 b) $u(x, y, z) = \frac{1}{8}x^3y^2z - \frac{1}{4}xyz^2$, $w(x, y, z) = \frac{1}{4}x^3y^2z + \frac{1}{2}xy^2z^2 - xyz$

18. Rozwiąż równanie. Podaj krotności pierwiastków.

a) $(x - 2)(x^2 - 6x + 10) = 2(x - 2)$
 b) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x) = 3(x + 1)^2$
 c) $(x + 2)(4x^3 + 8x^2) = x^2 + 4x + 4$
 d) $(x - 1)^2(x + 2)^3 + (x - 1)^3(x + 2)^2 = 0$

19. Rozwiąż nierówność.

a) $x(x - 2)(x + 3) < 0$ e) $x^5 + 8x^2 \leq 0$
 b) $3(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 \geq 0$ f) $4x^3 + 12x^2 - x - 3 \geq 0$
 c) $-3(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 \geq 0$ g) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$
 d) $-2(x + 1)(x - 2)(x^2 - 1)^2 \leq 0$ h) $-x^3 + 2x^2 - 4x + 3 > 0$

20. Rozwiąż nierówność.

a) $x^4 + 3x^3 - 4x^2 \leq 0$ c) $x^6 + x^4 \geq 2x^2$
 b) $16x^5 - 8x^3 + x > 0$ d) $x^5 + 4x > 5x^3$

21. Po podzieleniu wielomianu w przez wielomian p otrzymano iloraz q oraz resztę r . Wyznacz wielomian p .

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 5$, $q(x) = x^2 + 3x - 2$, $r = 3$
 b) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$, $q(x) = x^2 - 3x + 2$, $r = -1$

22. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu w przez wielomian q jest równa r ?

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 8$, $q(x) = x - 2$, $r = 14$
 b) $w(x) = x^5 + 3x^3 + |m - 2|$, $q(x) = x + 1$, $r = 6$
 c) $w(x) = x^5 + (m^3 - 1)x^2 - 3mx$, $q(x) = x - 1$, $r = -2$

23. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

a) $w(x) = x^3 - ax^2 + 2ax - 3$, $q(x) = x - 3$
 b) $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$, $q(x) = x + 1$

21. a) $x^3 + 2x^2 - 5x + 5 = (ax + b)(x^2 + 3x - 2) + 3$
 $a = 1$

$3 - 2b = 5$, czyli $b = -1$
 Zatem $p(x) = x - 1$.

b) $p(x) = 2x + 1$

22. a) $w(2) = 8 + 2m = 14$ dla $m = 3$

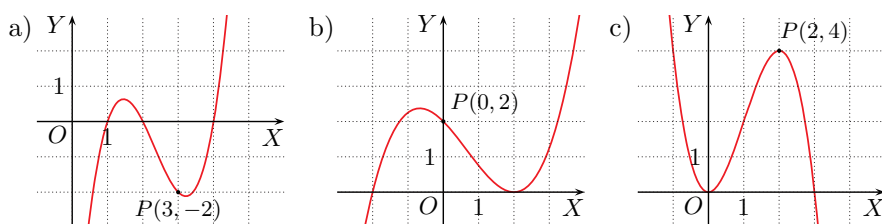
b) $w(-1) = |m - 2| - 4 = 6$ dla $m = -8$ lub $m = 12$

c) $w(1) = m^3 - 3m = -2$ dla $m = -2$ lub $m = 1$

23. a) $w(3) = 24 - 3a = 0$ dla $a = 8$

b) $w(-1) = -a^2 + 4a + 5 = 0$ dla $a = -1$ lub $a = 5$

24. Na rysunku przedstawiony jest wykres wielomianu trzeciego stopnia. Podaj jego miejsca zerowe, zbiór argumentów, dla których przyjmuje wartości dodatnie, oraz wzór tego wielomianu.



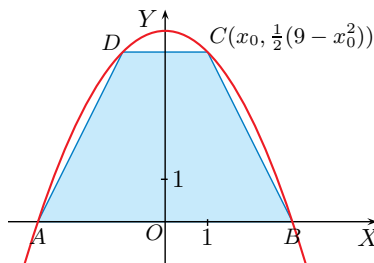
25. Dla jakich wartości parametrów p i q liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania?

a) $x^3 - 2x^2 + px = q$, $x_0 = 1$ b) $x^3 + px^2 + qx = 2$, $x_0 = -1$

26. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $w(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6$ jest równy wielomianowi u ?

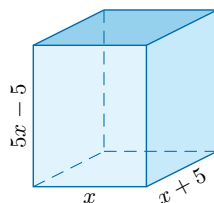
a) $u(x) = (x-1)(ax^2 + bx - 6)$ c) $u(x) = (3x-2)(ax^2 + bx + a-b)$
b) $u(x) = (ax+b)(x^2 - bx - a)$ d) $u(x) = (x+3)(ax^2 - bx + a-b)$

27. Wierzchołki trapezu $ABCD$ należą do paraboli $y = \frac{1}{2}(9 - x^2)$. Punkty A i B są punktami przecięcia paraboli z osią OX , a punkty C i D leżą powyżej osi OX . Wyznacz wielomian opisujący pole trapezu w zależności od x_0 (rysunek obok). Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x_0 pole trapezu jest równe 16?



28. Dany jest prostopadłościan (rysunek obok).

- a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Podaj dziedzinę tej funkcji.
b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu dla $x = 5$.
c) Wyznacz wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.



29. Krawędzie prostopadłościanu mają długości $2x$, $x-2$, $x-1$. Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x objętość prostopadłościanu jest równa 12?

27. $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $|AB| = 6$, $|CD| = 2x_0$

Wysokość trapezu: $h = \frac{1}{2}(9 - x_0^2)$, $x_0 \in (0; 3)$

$P(x_0) = \frac{1}{2}(6 + 2x_0) \cdot \frac{1}{2}(9 - x_0^2) = \frac{1}{2}(3 + x_0)^2(3 - x_0)$, $D = (0; 3)$

$\frac{1}{2}(3 + x_0)^2(3 - x_0) = 16$

$(x_0 - 1)^2(x_0 + 5) = 0$

$P(x_0) = 16$ dla $x_0 = 1$

28. a) $V(x) = 5x^3 + 20x^2 - 25x$, $x > 1$

b) $V(5) = 1000$

c) $P(x) = 22x^2 + 40x - 50$, $x > 1$

29. $V(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$, $x > 2$, $V(3) = 12$

24. a) $w(x) = 0$ dla $x \in \{1, 2, 4\}$,
 $w(x) > 0$ dla
 $x \in (1; 2) \cup (4; \infty)$,
 $w(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$
b) $w(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$,
 $w(x) > 0$ dla
 $x \in (-2; 2) \cup (2; \infty)$,
 $w(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)$
c) $w(x) = 0$ dla $x \in \{0, 3\}$,
 $w(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$,
 $w(x) = -x^2(x-3)$

25. a) I sposób

$(x^3 - 2x^2 + px - q) :$
 $(x^2 - 2x + 1) = x + r(x)$,
gdzie $r(x) = (p-1)x - q$
Zatem $p = 1$, $q = 0$.

II sposób

$x^3 - 2x^2 + px - q =$
 $= (x-1)^2(x-r) =$
 $= x^3 + x^2(-r-2) +$
 $+ x(2r+1) - r$,
gdzie r jest pierwiastkiem równania.
Wówczas $r = 0$, $p = 1$, $q = 0$.

b) I sposób

$(x^3 + px^2 + qx - 2) :$
 $(x^2 + 2x + 1) =$
 $= x - p - 2 + r(x)$, gdzie
 $r(x) = (q-2p+3)x - p$
Zatem $p = 0$, $q = -3$.

II sposób

$x^3 + px^2 + qx - 2 =$
 $= (x+1)^2(x-r) =$
 $= x^3 + x^2(-r+2) +$
 $+ x(-2r+1) - r$,
gdzie r jest pierwiastkiem równania.
Wówczas $r = 2$, $p = 0$,
 $q = -3$.

26. a) $a = 3$, $b = 7$

b) $a = 3$, $b = -2$

c), d) Nie ma takich a i b .

30. $w(x) =$
 $= (x-4)(x^2-3x+1) + 2 =$
 $= x^3 - 7x^2 + 13x - 2$
 $x^3 - 7x^2 + 13x - 2 = 6 - x$
 $(x-1)(x-2)(x-4) = 0$
 $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = 4$
31. $w(m) = m^3 + m^2 - 6m =$
 $= m(m-2)(m+3)$
 $w(m) = 0$ dla $m = -3$
lub $m = 0$ lub $m = 2$
32. $w(2) = 5a - 30 = 0$
i $w(1) = 2a - 3b - 24 = 24$
Zatem $a = 6$, $b = -12$.
 $w(x) = 3x^3 - 6x^2 - 27x + 54 =$
 $= 3(x-2)(x^2-9)$
 $w(x) = 0$ dla $x = -3$
lub $x = 2$ lub $x = 3$
33. $w(x) = (4b-a)x^3 +$
 $+ (ab-16)x^2 + 2(b-a+6)x$
 $w \equiv 0$ dla $a = 8$, $b = 2$
34. $w(x) = (x+2)(x-3)(ax+b)$
 $w(-1) = -4(-a+b) =$
 $= 4a - 4b = -8$
 $w(0) = -6b = -24$
Zatem $a = 2$ oraz $b = 4$.
 $w(x) = 2(x+2)^2(x-3) =$
 $= 2x^3 + 2x^2 - 16x - 24$
 $w(x) \geq 0$ dla
 $x \in \{-2\} \cup \langle 3; \infty \rangle$
36. $a = -3$, $b = 2$,
 $w(x) \geq x + 2$ dla
 $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
37. a) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \geq 0$
 $(x+1)(x-3)^2 \geq 0$
 $D = \langle -1; \infty \rangle$
b) $18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 > 0$
 $(2x+1)(3x-1)^2 > 0$
 $D = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$
38. $w(x) = (x-p)^2 \cdot (x+2p)$
Zatem p jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu w .

Zestaw III – podsumowujący

30. Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x-4$ otrzymano iloraz x^2-3x+1 i resztę 2. Rozwiąż równanie $w(x) = 6-x$.
31. Dla jakich wartości parametru m wielomian $w(x) = x^3 + (m-8)x + 2m$ jest podzielny przez dwumian $x-m$?
32. Wielomian $w(x) = 3x^3 + (a+b)x^2 - 27x + a - 4b$ jest podzielny przez dwumian $x-2$, a reszta z dzielenia przez dwumian $x-1$ jest równa 24. Wyznacz wartości parametrów a i b oraz oblicz pierwiastki tego wielomianu.
33. Dane są wielomiany $f(x) = (a-2b)x^3 + 9x^2 - 6x - 2$, $p(x) = ax + 2$ i $q(x) = x^2 + bx - 2$. Wyznacz wartości parametrów a i b , dla których wielomian $w(x) = p(x) \cdot q(x) - 2f(x)$ jest wielomianem zerowym.
34. Reszta z dzielenia wielomianu w trzeciego stopnia przez dwumian $x+1$ jest równa -8 . Liczby -2 i 3 są pierwiastkami tego wielomianu, a jego wykres przechodzi przez punkt $(0, -24)$. Wyznacz wzór wielomianu w i podaj zbiór argumentów, dla których przyjmuje on wartości nieujemne.
35. a) Wielomian $w(x) = 3x^3 + 5x^2 - 9x - 4$ ma pierwiastek wymierny należący do przedziału $(1; \frac{3}{2})$. Rozwiąż nierówność $w(x) \geq 0$.
b) Wielomian $w(x) = 5x^3 - x^2 - 9x - 4$ ma pierwiastek wymierny należący do przedziału $(-1; -\frac{1}{2})$. Oblicz pierwiastki tego wielomianu.
36. Pierwiastki x_1 , x_2 i x_3 wielomianu $w(x) = x^3 + ax + b$ spełniają warunki $x_1 - x_2 = 0$ oraz $x_1 - x_3 = 3$. Oblicz a i b oraz rozwiąż nierówność:

$$w(x) \geq x + 2$$
37. Wyznacz dziedzinę funkcji f .
a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1}}$
38. Wykaż, że liczba $p \neq 0$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu:
D $w(x) = x^3 - 3p^2x + 2p^3$
39. a) Jaki warunek muszą spełniać współczynniki wielomianu trzeciego stopnia $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, aby dla dowolnego argumentu $x \in \mathbf{R}$ zachodziła równość $w(x) + w(-x) = 0$?
D b) Wykaż, że jeśli dla dowolnego argumentu $x \in \mathbf{R}$ wielomian w spełnia warunek $w(x) = w(-x)$, to wielomian ten nie może być wielomianem trzeciego stopnia.

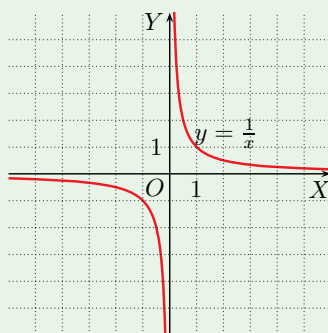
35. a) $w(\frac{4}{3}) = 3 \cdot \frac{64}{27} + 5 \cdot \frac{16}{9} - 9 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 0$
Dzielimy wielomian w przez dwumian $(x - \frac{4}{3})$ i otrzymujemy $(3x^2 + 9x + 3)$.
 $(x - \frac{4}{3})(3x^2 + 9x + 3) \geq 0$
b) $w(-\frac{4}{5}) = 5(-\frac{64}{125}) - \frac{16}{25} - 9(-\frac{4}{5}) - 4 = 0$
Dzielimy wielomian w przez dwumian $(x + \frac{4}{5})$ i otrzymujemy $(5x^2 - 5x - 5)$.
 $(x + \frac{4}{5})(5x^2 - 5x - 5) \geq 0$
39. a) $w(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d$
 $w(x) + w(-x) = 2bx^2 + 2d = 0$ dla $b = d = 0$ oraz $a, c \in \mathbf{R}$
b) Załóżmy, że $w(x) = w(-x)$ dla $x \in \mathbf{R}$ i $w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Wtedy $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = -a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$ dla $x \in \mathbf{R}$.
Stąd $a_3 = -a_3$ oraz $a_1 = -a_1$, czyli $a_3 = a_1 = 0$.
Zatem wielomian $w(x)$ nie jest trzeciego stopnia.

5.6. Funkcje wymierne

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}_+$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**, wielkości x i y – **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $a \neq 0$, jest **hiperbola**.

Prosta $y = 0$ jest jej **asymptotą poziomą**, a prosta $x = 0$ – jej **asymptotą pionową**.



Funkcję postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, określoną dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, jeżeli nie jest ona funkcją stałą, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Postać $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji homograficznej.

Zestaw I – wprowadzający

1. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wiedząc, że wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$2\sqrt{3}$	4	24
y	48	36	24	12	6	4	$2\sqrt{3}$	3	$\frac{1}{2}$

2. Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ należy punkt A. Wyznacz jej wzór.

a) $A(3, 2)$ b) $A(-\frac{1}{2}, 4)$ c) $A(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

3. Wyznacz dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{(x+4)(x-2)}{(x-3)(x+7)}$ b) $\frac{x^2-2x+3}{9x^2-4}$ c) $\frac{x^3+4x}{27x^3+x}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+3} = 1$ c) $\frac{4x-1}{x} = 3x$ e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 6$
 b) $\frac{3x-1}{9-5x} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{x}{x+2} = \frac{2x}{x-2}$ f) $\frac{5}{4x} + \frac{1}{9x} = x$

2. a) $y = \frac{6}{x}$
 b) $y = -\frac{2}{x}$
 c) $y = \frac{2\sqrt{3}}{x}$
 3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-7, 3\}$
 b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$
 c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
 4. a) $x = 1$ b) $x = 1$
 c) $x = \frac{1}{3}, x = 1$
 d) $x = -6, x = 0$
 e) $x = \frac{1}{4}$
 f) $x = -\frac{7}{6}, x = \frac{7}{6}$

5. $a = 5$

a) A, C

b) $x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$

6. a) $g(x) = \frac{2}{x-2}, D = \mathbb{R} \setminus \{2\},$
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$

b) $g(x) = \frac{-2x+1}{x-1}, D = \mathbb{R} \setminus \{1\},$
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$
 rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$

7. a) $g(x) = -\frac{2}{3x} - 3$, tak

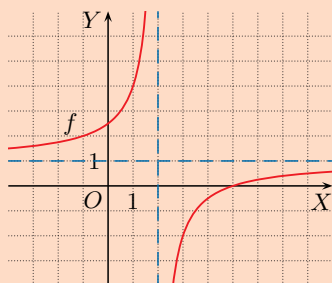
b) $g(x) = -\frac{2}{3x-3} - 6$, tak

c) $g(x) = -\frac{2}{3x+6} + 2$, nie

8. a) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1,$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, m = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{-2}{x-2} - 3,$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, m = 1\frac{2}{3}$

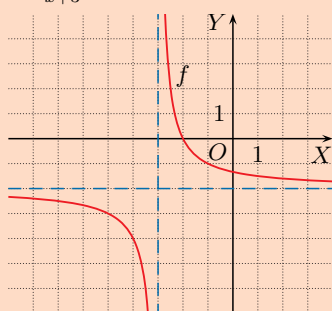
9. a) $f(x) = \frac{x-2-3}{x-2} = -\frac{3}{x-2} + 1$



$f(x) \geq 0$ dla

$x \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty)$

b) $f(x) = \frac{-2(x+3)+2}{x+3} =$
 $= \frac{2}{x+3} - 2$

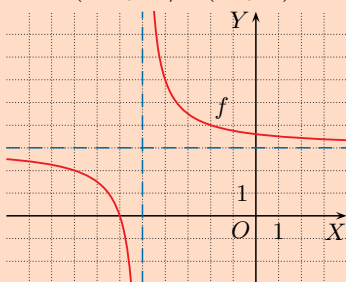


$f(x) \geq 0$ dla $x \in (-3; -2)$

c) $f(x) = \frac{3(x+5)+3}{x+5} =$
 $= \frac{3}{x+5} + 3$

$f(x) \geq 0$ dla

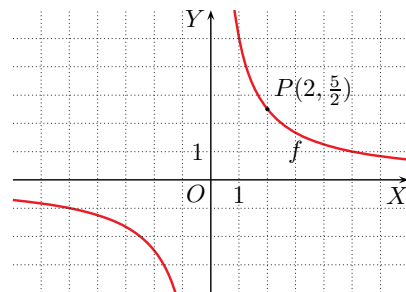
$x \in (-\infty; -6) \cup (-5; \infty)$



5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a .

a) Które spośród punktów $A(-5, 2),$
 $B(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ i $C(\frac{1}{4}, -20)$ nie należą do
 wykresu funkcji f ?

b) Podaj zbiór tych argumentów, dla
 których funkcja f przyjmuje wartości
 mniejsze od 1.



6. Wykres funkcji f przesun o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej w ten sposób funkcji g , wyznacz jej dziedzinę i zbiór wartości. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji g .

a) $f(x) = \frac{2}{x}, \vec{u} = [2, 0]$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}, \vec{u} = [1, -2]$

7. Wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3x}$ przesunięto o wektor i otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz wzór tej funkcji, jeżeli punkt P jest środkiem symetrii jej wykresu. Sprawdź, czy punkt $A(\frac{2}{3}, -4)$ należy do tego wykresu.

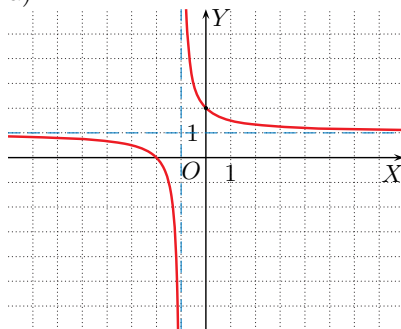
a) $P(0, -3)$

b) $P(1, -6)$

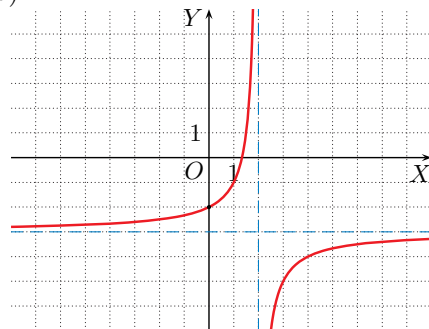
c) $P(-2, 2)$

8. Podaj wzór funkcji, której wykres przedstawiono poniżej. Dla jakiej wartości współrzędnej m punkt $P(m, 3)$ należy do tego wykresu?

a)



b)



9. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj jej wykres i odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

a) $f(x) = \frac{x-5}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{-2x-4}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{3x+18}{x+5}$

10. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$. Zapisz wzór funkcji g w postaci kanonicznej i wyznacz równania asymptot jej wykresu.

a) $g(x) = f(x+4) - 1$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = 3 - f(x)$

10. $f(x) = \frac{3(x+1)-2}{x+1} = -\frac{2}{x+1} + 3$

a) $g(x) = -\frac{2}{x+4+1} + 3 - 1 = -\frac{2}{x+5} + 2$

Asymptoty: $x = -5, y = 2$

b) $g(x) = -\frac{2}{-x+1} + 3 = \frac{2}{x-1} + 3$

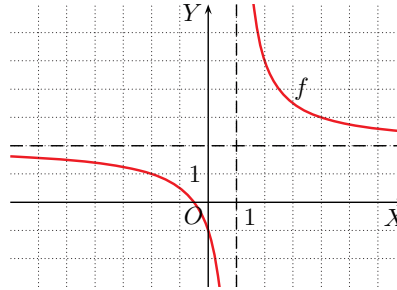
Asymptoty: $x = 1, y = 3$

c) $g(x) = 3 + \frac{2}{x+1} - 3 = \frac{2}{x+1}$

Asymptoty: $x = -1, y = 0$

Zestaw II – ćwiczeniowy

11. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x-p} + q$.



- a) Podaj współczynniki p i q oraz wyznacz miejsce zerowe funkcji f .
b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 5, a dla jakich – mniejsze od 3.

12. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie?

a) $f(x) = \frac{3x}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{3x-12}{x-3}$
b) $f(x) = \frac{3-2x}{x-2}$ d) $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$ f) $f(x) = \frac{3x+12}{x+3}$

13. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej hiperboli oraz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $\vec{u} = [2, -1]$ c) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, $\vec{u} = [0, 2]$
b) $f(x) = 4 - \frac{3}{x+4}$, $\vec{u} = [1, -2]$ d) $f(x) = \frac{3x}{2x-3}$, $\vec{u} = [-2, 3]$

14. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -2$.

a) $\frac{x^2-9}{x^3-3x^2}$ c) $\frac{x^2+9x+8}{2x+16}$ e) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$
b) $\frac{x^5-81x}{x^2+9}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ f) $\frac{4x^2-1}{2x^3+x^2-6x-3}$

15. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -7$.

a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{16-x^4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$ b) $(x^3-8) : \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

16. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-1}$ d) $\frac{5x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} - 8$
b) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{x}{x+2}$ e) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$
c) $\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{3x}{x+1}$ f) $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3x-2} + \frac{3}{9x^2-9x+2}$

15. a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{16-x^4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1} =$
 $= \frac{(x-1)^3}{-(x^2+4)(x^2-4)} \cdot \frac{x^2-4}{(x-1)^2} =$
 $= \frac{(x-1)}{-(x^2+4)} = -\frac{x-1}{x^2+4}$
 $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 2\}, \frac{8}{53}$
b) $(x^3-8) \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+4} =$
 $= (x-2)(x^2+2x+4) \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+4} =$
 $= x^2-4$
 $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}, 45$

16. a) $\frac{4(x-1)+3(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{7x+2}{(x-1)(x+2)}$
b) $\frac{(3x+1)(x+2)+x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x^2+4x+1}{(x+1)(x+2)}$
c) $\frac{1-3x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^2}$
d) $\frac{5x(x+1)+3x(x-1)-8(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2x+8}{x^2-1}$
e) $\frac{(x+3)^2+(x-3)^2-(x^2+9)}{x^2-9} = \frac{x^2+9}{x^2-9}$
f) $\frac{3x-2+3x-1+3}{(3x-1)(3x-2)} = \frac{6x}{(3x-1)(3x-2)}$

11. a) $p = 1, q = 2$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) > 5$ dla $x \in (1; 2)$,
 $f(x) < 3$ dla
 $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$
12. a) $D = f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
 $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = \frac{3}{2}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}; 2)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; \infty)$
d) $D = f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-3; -2)$
e) $D = f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 4$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
 $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -4$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; \infty)$
13. a) $y = \frac{-x+7}{x-5}, (7, 0), (0, -\frac{7}{5})$
b) $y = \frac{2x+3}{x+3}, (-\frac{3}{2}, 0), (0, 1)$
c) $y = \frac{4x+5}{x+3}, (-\frac{5}{4}, 0), (0, \frac{5}{3})$
d) $y = \frac{9x+9}{2x+1}, (-1, 0), (0, 9)$
14. a) $\frac{x+3}{x^2}, D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{1}{4}$
b) $x(x^2-9), D = \mathbf{R}, 10$
c) $\frac{x+1}{x^2}, D = \mathbf{R} \setminus \{-8\}, -\frac{1}{2}$
d) $\frac{x+3}{x+1}, D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, -1$
e) $\frac{x+5}{x-1}, D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 1\}, -1$
f) $\frac{2x-1}{x^2-3},$
 $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}\}, -5$

17. a) $x^2 - x - 12 = 0, x \neq 0$
 $x = -3, x = 4$
 b) $x^2 - 10x + 21 = 0, x \neq 0$
 $x = 3, x = 7$
 c) $5x - 38 = 0, x \neq 7,$
 $x \neq 8$
 $x = \frac{38}{5}$
 d) $x^2 - 8x + 16 = 0, x \neq 1,$
 $x \neq 2$
 $x = 4$
 e) $4x = 8, x \neq 1, x \neq 3$
 $x = 2$
 f) $-x^2 = -3, x \neq -1,$
 $x \neq 1$
 $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$
18. a) $\frac{(x+4)(x-3)}{(x-1)(x+4)} = 0,$
 $x \neq -4, x \neq 1$
 $x = 3$
 b) $\frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+2)} = 0,$
 $x \neq -2, x \neq 0$
 $x = -1$
 c) $9x^2 - 12x + 4 = 0, x \neq \frac{2}{3},$
 sprzeczne
 d) $x^2 + 9x - 36 = 0, x \neq -3,$
 $x \neq 3$
 $x = -12$
 e) $-4x = -6, x \neq 0$
 $x = \frac{3}{2}$
 f) $6x = 6, x \neq -2, x \neq 1,$
 sprzeczne
19. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
 b) $x \in (1; \infty)$
20. a) $x \in (0; 4)$
 b) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{6}{5}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$
 d) $x \in (\frac{3}{4}; \frac{4}{3})$
 e) $x \in (1; \infty)$
 f) $x \in (-\frac{5}{2}; -1) \cup (2; \infty)$
 g) $x \in (-2; 0) \cup (2; 10)$
 h) $x \in (-\infty; -7) \cup (-3; -1) \cup (1; \infty)$
 i) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \infty)$

17. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 5 - \frac{4x-12}{x} = x & \text{c)} \frac{3}{x-7} + \frac{2}{x-8} = 0 & \text{e)} \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x-3} = 2 \\ \text{b)} x + \frac{21}{x} = 10 & \text{d)} \frac{9}{x-1} - \frac{4}{x-2} = 1 & \text{f)} \frac{2x+1}{x+1} = 4 - \frac{x}{x-1} \end{array}$$

18. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} = 0 & \text{d)} \frac{6}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9} \\ \text{b)} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+2x} = 0 & \text{e)} \frac{2x-3}{x} + \frac{5x-3}{x^2} = 2 + \frac{2x^2+x-6}{x^3} \\ \text{c)} \frac{9x^2-5x}{3x-2} = 2 + \frac{x}{3x-2} & \text{f)} \frac{1-x}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{9}{x^2+x-2} \end{array}$$

19. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 2$.

$$\text{a)} f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{dla } x > 0 \\ -\frac{4}{x-2} & \text{dla } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{b)} f(x) = \begin{cases} \frac{3x-5}{x-2} & \text{dla } x < 2 \\ \frac{4}{x} & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

20. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4}{x} \geq 1 & \text{d)} \frac{2x-5}{3-4x} > 1 & \text{g)} \frac{3x}{x+2} \leq \frac{2x}{x-2} \\ \text{b)} \frac{6}{x} < 5 & \text{e)} x \geq \frac{x+1}{1-x} & \text{h)} \frac{2x+2}{x-1} \geq \frac{x+1}{x+3} \\ \text{c)} \frac{3-x}{2x-1} \leq 7 & \text{f)} \frac{1}{x+1} \leq \frac{3}{x-2} & \text{i)} \frac{2}{x} + 3 > \frac{1+x}{1+2x} \end{array}$$

21. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x} \geq -\frac{3}{2} & \text{c)} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x^2+3x+2} \\ \text{b)} x + \frac{3}{x-3} \geq \frac{2x+3}{3-x} & \text{d)} \frac{x+2}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} \leq \frac{1}{x^2-1} \end{array}$$

22. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ i nierówność $f(x) \geq g(x)$.

$$\text{a)} f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 2x \quad \text{b)} f(x) = \frac{-3x-1}{x+1}, g(x) = x - 1$$

23. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Rozwiąż nierówność:

$$\text{a)} f(x) < f(x+1), \quad \text{b)} f(x-3) > f(x).$$

24. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa rozwiązania?

$$\text{a)} x + \frac{4}{x} = m \quad \text{b)} \frac{m-3}{x-m} = x$$

25. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

$$\text{a)} \frac{mx+5}{x^2+1} > 0 \quad \text{b)} \frac{x^2+x+1}{-x^2+mx-9} < 0 \quad \text{c)} \frac{-x^2-1}{mx^2-2} > 0$$

21. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; \infty)$

b) $x \in (3; \infty)$

c) $x \in (-2; -1) \cup (-1; \infty)$

d) $x \in (-\frac{3}{2}; -1) \cup (1; 2)$

22. a) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 1\},$
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-3, 0\},$
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 0)$

23. a) $x \in (0; 1)$

b) $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

24. a) $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

b) $m \in (-\infty; -6) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$

25. a) $m = 0$

b) Licznik jest dodatni dla każdego $x \in \mathbf{R}$, czyli mianownik musi być ujemny dla każdego $x \in \mathbf{R}.$
 $\Delta = m^2 - 36 < 0$, czyli $m \in (-6; 6)$

c) Licznik jest ujemny dla każdego $x \in \mathbf{R}$, czyli mianownik również musi być ujemny dla każdego $x \in \mathbf{R}$, stąd $m \in (-\infty; 0).$

Zestaw III – podsumowujący

26. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x-4}{4x-3} - \frac{3}{4}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-3}{x-5}$

b) $f(x) = \frac{x+6}{x} - 2x$

d) $f(x) = \frac{1-x}{x+1} + \frac{2x-5}{2x-2}$

Punktem kratowym w układzie współrzędnych nazywamy punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

27. Wyznacz współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{2x+20}{x+7}$

b) $f(x) = \frac{-2x-2}{x+9}$

d) $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$

28. Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $\frac{x}{x+2} - 1 > x$

c) $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{x-5}{3x-1} > 3$

d) $\frac{x+2}{2x+1} \leq \frac{2}{x+1}$

29. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{|x-7|} = 1$

c) $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| = 1$

e) $\frac{1}{|3-x|} = \frac{2}{|2x-1|}$

b) $\frac{6}{\sqrt{(1-3x)^2}} = 5$

d) $\left| \frac{6x-3}{2x+1} \right| = 3$

f) $\left| \frac{3}{|x+2|} - 1 \right| = 8$

30. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{9}{|6x-3|} < 1$

b) $\frac{1}{|4-3x|} > 2$

c) $\frac{1}{|x+3|} \geq \frac{1}{|x-6|}$

31. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

a) $f(x) = \frac{2}{|x|}$

c) $f(x) = \left| \frac{2}{x+1} + 3 \right|$

e) $f(x) = \frac{|x|}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{2}{|x+1|} + 3$

d) $f(x) = \frac{2}{|x|+1} + 3$

f) $f(x) = \frac{x}{|x-1|}$

32. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 3$

b) $\left| \frac{7-x}{x-3} \right| \geq 3$

c) $\left| \frac{1}{|x-1|} \right| < 1$

33. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left| 3 - \frac{6}{x-2} \right| = m$ ma dwa pierwiastki dodatnie?

31. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = (0; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \leq 0$,
2 rozwiązania dla $m > 0$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = (3; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \leq 3$,
2 rozwiązania dla $m > 3$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = (0; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m < 0$,
1 rozwiązanie dla $m \in \{0, 3\}$,
2 rozwiązania dla $m \in (0, 3) \cup (3; \infty)$

- d) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = (3; 5)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$,
1 rozwiązanie dla $m = 5$,
2 rozwiązania dla $m \in (3; 5)$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \in (0; 1)$,
1 rozwiązanie dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in (-1; 0)$

- f) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = (-1; \infty)$,
liczba rozwiązań równania
 $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \leq -1$,
1 rozwiązanie dla $m \in (-1; 1)$,
2 rozwiązania dla $m > 1$

26. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$,
miejsca zerowe: $-\frac{7}{8}$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
miejsca zerowe: $-\frac{3}{2}, 2$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{2, 5\}$,
miejsca zerowe: 8

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,
miejsca zerowe: 7

27. a) $f(x) = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$,
czyli $x-1$ musi być dzielnikiem 3, stąd $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$
(-2, 1), (0, -1), (2, 5), (4, 3)
b) (-25, -3), (-17, -4),
(-13, -6), (-11, -10),
(-10, -18), (-8, 14), (-7, 6),
(-5, 2), (-1, 0), (7, -1)
c) (-13, 1), (-10, 0),
(-9, -1), (-8, -4), (-6, 8),
(-5, 5), (-4, 4), (-1, 3)
d) (-10, 2), (-4, 1), (-2, 0),
(-1, -1), (0, -3), (1, -9),
(3, 15), (4, 9), (5, 7), (6, 6),
(8, 5), (14, 4)

28. a) $x < -2$, czyli $x = -3$

b) $x \in (-\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$,

czyli $x = 0$

c) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 4)$,

czyli $x = 3$

d) $x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (0; 1)$,

czyli $x = 1$

29. a) $x = 2$, $x = 12$

b) $x = -\frac{1}{15}$, $x = \frac{11}{15}$

c) $x = -1$ d) $x = 0$ e) $x = \frac{7}{4}$

f) $x = -\frac{7}{3}$, $x = -\frac{5}{3}$

30. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

b) $x \in (\frac{7}{6}; \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}; \frac{3}{2})$

c) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; \frac{3}{2})$

32. a) $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; \infty)$

b) $x \in (1; 3) \cup (3; 4)$

c) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

33. $m \in (0; 3) \cup (6; \infty)$

35. a) $m = 1$
 b) $m = -\frac{1}{2}$
 c) $m = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$
36. $a = 3$
 $\frac{2x-1}{3x+6} = x$ dla $x = -1$
 lub $x = -\frac{1}{3}$
 Współrzędne punktów przecięcia: $(-1, 1), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$
37. Asymptoty wykresu: $x = 3$
 i $y = 3$
 $f(x) = \frac{a}{x-3} + 3$
 Wykres przechodzi przez punkt $(1, 0)$, czyli $a = 6$.
 $f(x) = \frac{6}{x-3} + 3 = \frac{3x-3}{x-3}$
 $f(x) \leq 1$, czyli
 $\frac{2x}{x-3} \leq 0$ dla $x \in \langle 0; 3 \rangle$
38. $y = -x + 1$ i $y = x + 5$
 $x = -2, y = 3$
 $f(x) = \frac{a}{x+2} + 3$
 Wykres przechodzi przez punkt $(0, 2)$, czyli $a = -2$.
 $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 3 = \frac{3x+4}{x+2}$
 $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{4}{3}$
39. $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 70$ km/h
40. $v_1 = 18$ km/h, $v_2 = 14$ km/h
41. v – prędkość prądu rzeki
 22,5 min to $\frac{3}{8}$ h
 $\frac{18}{20-v} = \frac{18}{20+v} + \frac{3}{8}, 0 < v < 20$
 $v^2 + 96v - 400 = 0$
 $v = 4$ km/h

34. Przeczytaj zamieszczony w ramce przykład.

D

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-3; \infty)$.

Zakładamy, że $x_1 < x_2$ oraz $x_1, x_2 \in (-3; \infty)$. Wówczas:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{x_2+3} - \frac{2x_1}{x_1+3} = \frac{2x_2(x_1+3) - 2x_1(x_2+3)}{(x_2+3)(x_1+3)} = \frac{6(x_2-x_1)}{(x_2+3)(x_1+3)}$$

Z założeń wynika, że $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + 3 > 0$ i $x_1 + 3 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, co oznacza, że funkcja f rośnie w przedziale $(-3; \infty)$.

- a) Wykaż, że funkcja $f(x) = -\frac{2x}{x-2}$ jest rosnąca w przedziale $(2; \infty)$.
 b) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ jest malejąca w przedziale $(-1; \infty)$.
35. Dla jakich wartości parametru m przedział $(0; 4)$ jest zbiorem rozwiązań podanej nierówności?
- a) $\frac{4}{x} > m$ b) $-\frac{2}{x} < m$ c) $\frac{1}{x} > m^2$
36. Wykres funkcji $f(x) = \frac{2x-1}{ax+6}$ nie ma punktów wspólnych z prostą $x = -2$. Oblicz a oraz wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z prostą $y = x$.
37. Funkcja homograficzna f jest malejąca w przedziałach $(-\infty; 3), (3; \infty)$, jej wykres nie ma punktów wspólnych z prostą $y = 3$, a miejscem zerowym jest liczba 1. Wyznacz wzór funkcji f i rozwiąż nierówność $f(x) \leq 1$.
38. Proste o równaniach $y = -x + 1$ i $y = x + 5$ są osiami symetrii wykresu funkcji homograficznej f . Wykres ten przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$. Podaj wzór funkcji f i wyznacz jej miejsce zerowe.
39. Dwa samochody wyjechały jednocześnie z miasta A do miasta B , oddalonego od A o 560 km. Średnia prędkość pierwszego samochodu była o 10 km/h większa od średniej prędkości drugiego, więc przybył on na miejsce o godzinę wcześniej. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.
40. Z dwóch miejscowości oddalonych od siebie o 126 km wyjechali naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Jeden z nich wyjechał godzinę później i jechał o 4 km/h szybciej. Rowerzyści spotkali się w połowie drogi. Oblicz średnią prędkość każdego z nich.
41. Drogę w dół rzeki z punktu A do punktu B motorówka przepływa w czasie o 22,5 minuty krótszym niż drogę powrotną. Odległość między punktami A i B wynosi 18 km, a prędkość własna motorówki jest równa 20 km/h. Oblicz prędkość prądu rzeki.

34. a) Zakładamy, że $x_1 < x_2$ oraz $x_1, x_2 \in (2; \infty)$. Wówczas:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{-2x_2}{x_2-2} + \frac{2x_1}{x_1-2} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_2-2)(x_1-2)}$$

Z założenia $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 - 2 > 0$ i $x_1 - 2 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, co oznacza, że funkcja f rośnie w przedziale $(2; \infty)$.

b) Zakładamy, że $x_1 < x_2$ oraz $x_1, x_2 \in (-1; \infty)$. Wówczas:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+5}{x_2+1} - \frac{x_1+5}{x_1+1} = \frac{4(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)}$$

Z założenia $x_1 - x_2 < 0$, $x_2 + 1 > 0$ i $x_1 + 1 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, co oznacza, że funkcja f maleje w przedziale $(-1; \infty)$.

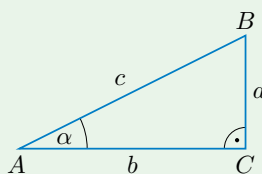
5.7. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

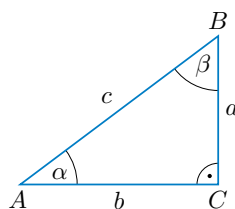
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok) oraz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

- a) $a = 6$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$ c) $a = 6$, $\cos \alpha = \frac{1}{5}$
 b) $a = 2$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ d) $c = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$



2. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC (rysunek powyżej), w którym:
 a) $a = 40$, $\alpha = 30^\circ$, b) $b = 6$, $\alpha = 60^\circ$, c) $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.
3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:
 a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{12}{13}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{7}{24}$.
4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .
 a) $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ b) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$
5. Oblicz miarę kąta ostrego α , jeśli wiadomo, że:
 a) $\frac{3 - \sin \alpha}{5} = \frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = 0$,
 b) $\sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha$, e) $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{3}{2}$,
 c) $\sqrt{2} \sin \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, f) $\frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

5. a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, czyli $\alpha = 30^\circ$
 b) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, czyli $\alpha = 60^\circ$
 c) $\sqrt{2} \sin \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\alpha = 45^\circ$
 d) $\sin \alpha = \cos \alpha$, czyli $\alpha = 45^\circ$
 e) $\frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + \sin^2 \alpha = \frac{3}{2}$ oraz $\sin \alpha > 0$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\alpha = 45^\circ$
 f) $\frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = 2$, skąd $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, czyli $\alpha = 60^\circ$

1. a) $b = 3$, $c = 3\sqrt{5}$,
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$
 b) $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$
 c) $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $c = \frac{5\sqrt{6}}{2}$,
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{6}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$
 d) $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$
2. a) $b = 40\sqrt{3}$, $c = 80$, $\beta = 60^\circ$
 b) $a = 6\sqrt{3}$, $c = 12$, $\beta = 30^\circ$
 c) $c = 2(\sqrt{2} - 1)$, $\alpha = 30^\circ$,
 $\beta = 60^\circ$
3. a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$
 b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$
 c) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$
4. a) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$
 b) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$
 c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$
 d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$6. a) \frac{3 \sin \alpha}{5 \cos \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha} = \frac{3}{5} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$$

$$b) \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{5 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{5}{\operatorname{tg} \alpha} = 13 \frac{2}{3}$$

$$c) \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = (\operatorname{tg} \alpha + 1)^2 = 16$$

$$7. a) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$$

$$b) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$c) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{5}{9}$$

$$8. \sin \alpha = \cos \beta \text{ oraz } \sin \beta = \cos \alpha$$

$$a) \cos \alpha + \cos \beta = \sin \beta + \sin \alpha = \frac{7}{5}$$

$$b) (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

czyli $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$.

$$\text{Zatem } \sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}.$$

$$c) \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{12}{25}$$

$$9. a) \alpha \approx 36,9^\circ, \beta \approx 53,1^\circ, a = 6, b = 8$$

$$b) \alpha = \beta = 45^\circ, a = b = 5\sqrt{2}$$

$$c) \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, a = 5, b = 5\sqrt{3}$$

6. Kąt α jest ostry oraz $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Nie wyznaczając wartości $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, oblicz wartość wyrażenia:

$$a) \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha}, \quad b) \frac{4 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad c) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}.$$

7. Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia:

$$a) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2, \quad b) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \quad c) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2.$$

8. Dla kątów ostrych α i β pewnego trójkąta prostokątnego zachodzi równość $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{7}{5}$. Oblicz:

$$a) \cos \alpha + \cos \beta, \quad b) \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad c) \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

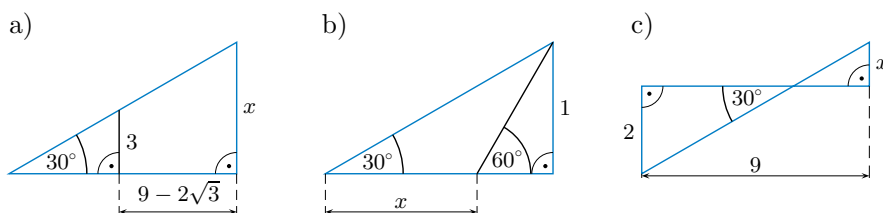
9. Rozwiąż trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 oraz kątach ostrych α i β spełniających warunek:

$$a) \sin \alpha \cdot \cos \beta = 0,36, \quad b) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 2, \quad c) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1,5.$$

10. Uprość wyrażenie tak, aby występowała w nim jedynie funkcja cosinus. Oblicz jego wartość dla $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, jeśli α jest kątem ostrym.

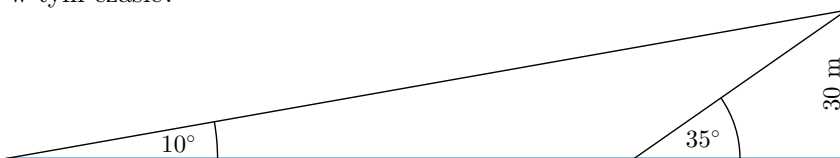
$$a) \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \quad b) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad c) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

11. Oblicz x .



12. Wierchołek latarni morskiej znajduje się 30 m nad poziomem morza.

W kierunku latarni płynął ponton, z którego było widać jej wierchołek pod kątem 10° . Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierchołek było widać pod kątem 35° . Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?



13. Z jednego okna latarni morskiej widać kuter pod kątem 10° , a z drugiego, położonego 4 m wyżej – pod kątem 11° . Oblicz odległość kutra od latarni.

$$10. a) \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{(1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha}, 5 \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, -\frac{1}{2}$$

$$c) 1 - \cos^2 \alpha, \frac{3}{4}$$

$$11. a) x = 1 + 3\sqrt{3} \quad b) x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad c) x = 3\sqrt{3} - 2$$

$$12. \frac{30}{\operatorname{tg} 10^\circ} - \frac{30}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 30(5,6713 - 1,4281) = 127,296$$

Ponton przebył około 127,3 m.

13. Kuter znajduje się około 221,5 m od latarni.

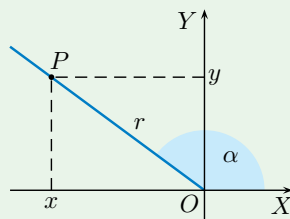
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0),$$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbf{R}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}: k \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$$

Wzory redukcyjne

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

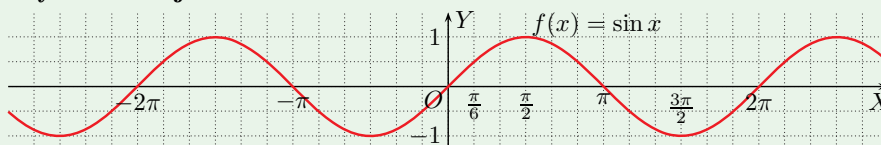
$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

14. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$
 c) $\sin \alpha = -\frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13},$
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$
 d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$
 $\operatorname{tg} \alpha = -1, \operatorname{ctg} \alpha = -1$
15. a) $\sin 765^\circ =$
 $= \sin(2 \cdot 360^\circ + 45^\circ) =$
 $= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $\cos 1200^\circ =$
 $= \cos(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) =$
 $= \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) =$
 $= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
 c) $\operatorname{tg} 810^\circ =$
 $= \operatorname{tg}(4 \cdot 180^\circ + 90^\circ) = \operatorname{tg} 90^\circ,$
 nie istnieje
 d) $\cos(-1395^\circ) =$
 $= \cos(-4 \cdot 360^\circ + 45^\circ) =$
 $= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 e) $\sin(-1710^\circ) =$
 $= \sin(-5 \cdot 360^\circ + 90^\circ) =$
 $= \sin 90^\circ = 1$
 f) $\sqrt{3}$
 g) $\sin 960^\circ =$
 $= \sin(2 \cdot 360^\circ + 240^\circ) =$
 $= \sin 240^\circ = \sin(180^\circ +$
 $+ 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 h) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
16. a) $\frac{7}{8}$ b) 1
17. a) $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ b) $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
 c) $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ d) $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$

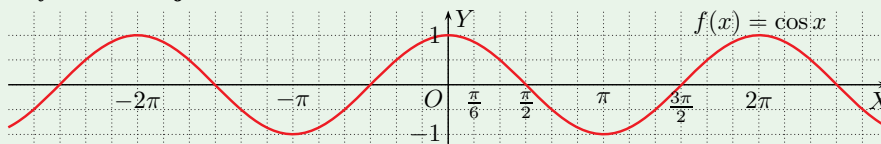
Zestaw II – ćwiczeniowy

14. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt A.
- a) A(8, 6) b) A(-3, -4) c) A(5, -12) d) A(4, -4)
15. Oblicz.
- a) $\sin 765^\circ$ c) $\operatorname{tg} 810^\circ$ e) $\sin(-1710^\circ)$ g) $\sin 960^\circ$
 b) $\cos 1200^\circ$ d) $\cos(-1395^\circ)$ f) $\operatorname{tg} 420^\circ$ h) $\operatorname{tg}(-750^\circ)$
16. Oblicz.
- a) $\frac{\cos^2 180^\circ - \sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ}$ b) $\frac{\sin^4 405^\circ + \sin^2 405^\circ \cdot \cos^2 405^\circ}{\cos^2 405^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ}$
17. Wyznacz miarę łukową kąta środkowego w okręgu o promieniu r , opartego na łuku o długości l . Podaj miarę tego kąta w stopniach.
- a) $r = 2, l = \pi$ b) $r = 8, l = 4\pi$ c) $r = 4, l = \frac{2}{3}\pi$ d) $r = 8, l = \frac{2}{3}\pi$
18. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .
- a) $\sin x = \frac{1}{3}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$
 b) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ d) $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
19. Sprawdź, czy istnieje taki kąt x , dla którego:
- a) $\sin x = 0,6$ i $\cos x = 0,8,$ c) $\sin x = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3},$
 b) $\sin x = 0,5$ i $\cos x = 0,5,$ d) $\sin x = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}.$

Wykres funkcji sinus



Wykres funkcji cosinus

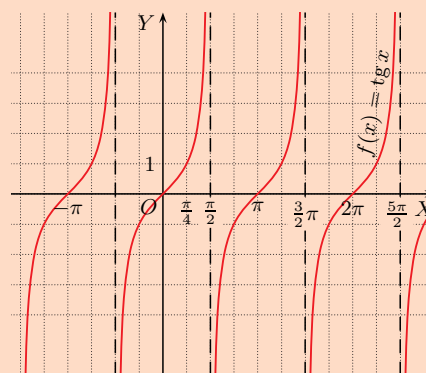


20. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$. Podaj jej dziedzinę, okres podstawowy, miejsca zerowe i przedziały monotoniczności.

18. a) $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{4},$
 $\operatorname{ctg} x = -2\sqrt{2}$
 b) $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \operatorname{ctg} x = -2$
 c) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \cos x = -\frac{2}{3},$
 $\operatorname{ctg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 d) $\sin x = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10},$
 $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{3}$

19. a) tak b) nie c) nie d) tak

20. $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}, T = \pi,$
 $\operatorname{tg} x = 0$ dla $x = k\pi, k \in \mathbf{Z},$
 rośnie w każdym z przedziałów postaci
 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$



21. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej zbiór wartości.
- a) $f(x) = \sin x + 2$ c) $f(x) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2}$ e) $f(x) = 3 \cos x - 2$
b) $f(x) = \cos x - 1$ d) $f(x) = 2 \operatorname{tg} x + 1$ f) $f(x) = 2 \cos x + 3$
22. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej miejsca zerowe.
- a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ b) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$
23. Wyznacz okres podstawowy funkcji f i naszkicuj jej wykres. Odczytaj z niego zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności.
- a) $f(x) = -2 \sin 2x$ e) $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$
b) $f(x) = -3 \cos \frac{1}{2}x$ f) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$
c) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$ g) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$
d) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ h) $f(x) = 2 - \cos(2x - \frac{\pi}{3})$
24. Rozwiąż równanie.
- a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ d) $\cos^2(2x - \frac{\pi}{4}) = 1$ g) $2 \sin^2 2x = 1$
b) $\sin(3x - \frac{\pi}{2}) = 0$ e) $2 \cos(3x - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ h) $\operatorname{tg}^2 2x = 1$
c) $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3} \operatorname{tg}(3x + \frac{2}{3}\pi) = 1$ i) $|\cos 2x - 1| = \frac{1}{2}$
25. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.
- a) $\sin x \leq \frac{1}{2}$ d) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) \geq \sqrt{3}$
b) $\sqrt{2} \cos x \geq 1$ e) $\cos \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$ h) $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq -\sqrt{2}$
c) $2 \cos 4x > -1$ f) $3 \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$ i) $\sqrt{3} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) > 3$
26. Rozwiąż nierówność.
- a) $2 \sin^2 x < 1$ d) $\operatorname{tg}^2 x \leq 1$ g) $|3 \operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}$
b) $4 \cos^2 x - 3 \leq 0$ e) $\sin x \cos x > 0$ h) $|4 \sin x + 1| < 3$
c) $\sin^2 x - 1 \geq 0$ f) $2|\cos x| \geq 1$ i) $|4 \cos x - 1| > 1$
27. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .
- a) $f(x) = |1 - \operatorname{tg} x| - 2$ d) $f(x) = 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$
b) $f(x) = 2 - 3|\sin x|$ e) $f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$
c) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + 1$ f) $f(x) = \frac{1}{2 + |\sin x|}$
28. Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?
- a) $f(x) = |\sin x| - 1$ b) $f(x) = 3 - 2|\cos x|$ c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - 4$
25. a) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{7}{6}\pi; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; 2\pi \rangle$
b) $x \in \langle -2\pi; -\frac{7}{4}\pi \rangle \cup \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \rangle$
c) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{5}{3}\pi; -\frac{4}{3}\pi \rangle \cup \langle -\frac{7}{6}\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \rangle \cup \langle \frac{11}{6}\pi; 2\pi \rangle$
d) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{5}{3}\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{3}; \frac{7}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{4}{3}\pi; 2\pi \rangle$
e) $x \in \langle -\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi \rangle$
f) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{3}{2}\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \rangle$
g) $x \in \langle -\frac{11}{6}\pi; -\frac{3}{2}\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \rangle$
h) $x \in \langle -\pi; -\frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$
i) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi \rangle \cup \langle -\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \pi; \frac{7}{6}\pi \rangle$

21. a) $\langle 1; 3 \rangle$ b) $\langle -2; 0 \rangle$ c) $\langle -2; 1 \rangle$
d) $\mathbf{R}$ e) $\langle -5; 1 \rangle$ f) $\langle 1; 5 \rangle$
22. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
23. a) $T = \pi, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$,
maleje w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle$,
rośnie w przedziałach $\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
b) $T = 4\pi, f(D) = \langle -3; 3 \rangle$,
maleje w przedziałach $\langle -2\pi + 4k\pi; 4k\pi \rangle$,
rośnie w przedziałach $\langle 4k\pi; 2\pi + 4k\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
c) $T = \frac{\pi}{2}, f(D) = \mathbf{R}$,
rośnie w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \rangle, k \in \mathbf{Z}$
d) $T = \pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$,
maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7}{12}\pi + k\pi \rangle$,
rośnie w przedziałach $\langle -\frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
e) $T = \pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$,
maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \rangle$,
rośnie w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
f) $T = 4\pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$,
maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{2} + 4k\pi; \frac{5}{2}\pi + 4k\pi \rangle$,
rośnie w przedziałach $\langle -\frac{3}{2}\pi + 4k\pi; \frac{\pi}{2} + 4k\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
g) $T = 2\pi, f(D) = \mathbf{R}$,
rośnie w przedziałach $\langle 2k\pi; 2(k+1)\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
h) $T = \pi, f(D) = \langle 1; 3 \rangle$,
maleje w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \rangle$,
rośnie w przedziałach $\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \rangle, k \in \mathbf{Z}$
24. a) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
e) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$
g), h) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
i) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

26. a) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 b) $x \in (\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
 d) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 e) $x \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 f) $x \in (-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 g) $x \in (-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 h) $x \in (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
 i) $x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
27. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$, $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$
 b) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle -1; 2 \rangle$
 c) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
 d) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 2; 3 \rangle$
 e) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
 f) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \rangle$
28. a) $m \in \langle -1; 0 \rangle$ b) $m \in \langle 1; 3 \rangle$
 c) $m \in \langle -4; \infty \rangle$
29. Przyjmujemy, że są spełnione odpowiednie założenia, aby równania miały sens.
- a) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) =$
 $= 2(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}) =$
 $= 2(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) =$
 $= \sin x + \sqrt{3} \cos x$
- b) $-2 \cos(x + \frac{\pi}{6}) =$
 $= -2(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}) =$
 $= -2(\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2}) =$
 $= \sin x - \sqrt{3} \cos x$
- c) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} =$
 $= \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{(1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x)} =$
 $= \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{1 - \cos^2 2x} =$
 $= \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{\sin^2 2x} =$
 $= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
- d) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$
 $= \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} =$
 $= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x$
31. a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{6}}}{4}$
 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 e) $-\frac{1}{4}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Jeśli $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$, to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Jeśli $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$, to:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Zestaw III – podsumowujący

29. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

D a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ c) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$

b) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -2 \cos(x + \frac{\pi}{6})$ d) $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

30. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

D a) $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin^2 x}$ d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$

b) $\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$ e) $\operatorname{tg} x(\cos x + \cos^2 x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$

c) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{2}{\cos x}$ f) $1 + \cos^2 2x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)$

31. Oblicz.

a) $\sin \frac{\pi}{8}$ c) $\sin 13^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 13^\circ$ e) $\sin 105^\circ \cos 105^\circ$

b) $\cos \frac{7}{12}\pi$ d) $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}$ f) $\cos^2 105^\circ - \cos^2 195^\circ$

30. Przyjmujemy, że są spełnione odpowiednie założenia, aby równania miały sens.

a) $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{2}{1 - \cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x}$

b) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \sin x \cos x$

c) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 - 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{1 - 2 \sin x + 1}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{2(1 - \sin x)}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{2}{\cos x}$

d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$

e) $\operatorname{tg} x(\cos x + \cos^2 x) = \frac{\sin x}{\cos x}(\cos x + \cos^2 x) = \sin x + \sin x \cos x =$
 $= \sin x + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$

f) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] = 2(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x) =$
 $= 2 - \sin^2 2x = 1 + 1 - \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x$

32. Wiadomo, że $\sin x = \frac{4}{5}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Oblicz:
 a) $\cos(x + \frac{\pi}{3})$, b) $\sin(\frac{\pi}{6} - x)$, c) $\cos(\frac{\pi}{4} - x)$, d) $\sin 2x$.

33. Oblicz $\sin x$ i $\cos x$, jeśli wiadomo, że:

- a) $\cos 2x = 0,6$ i $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, c) $\sin \frac{x}{2} = \frac{5}{13}$ i $x \in (0; \frac{\pi}{2})$,
 b) $\cos 2x = 0,6$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, d) $\sin \frac{x}{2} = \frac{5}{13}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.

34. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin^2 x = 1 - \cos x$ c) $2 \cos^2 x = \sin 2x$ e) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$
 b) $2 \sin^2 x = \cos 2x$ d) $\sin 4x = \cos 2x$ f) $\sin 2x \operatorname{tg} x = 1$

35. Rozwiąż równanie dla $x \in (0; 2\pi)$.

- a) $\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$ d) $2 \cos^2 x = \sin x - 1$
 b) $2 \sin^2 x - 2\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$ e) $2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$
 c) $2 \sin^2 x = 1 - \sin x$ f) $2 \cos^3 x - 3 \sin^2 x = 2 \cos x - 3$

36. Rozwiąż równanie.

- a) $\cos 2x + 2 = 2\sqrt{2} \cos x$ d) $4 \cos^4 x - 7 \cos^2 x + 3 = 0$
 b) $2 \sin^4 x - \sin^2 x = 0$ e) $\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$
 c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$ f) $3 \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$

37. Wyznacz największe rozwiązanie równania należące do przedziału $(0; \pi)$.

- a) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$ c) $2 \sin^3 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x = 3$
 b) $\cos 2x + 7 \sin x + 3 = 0$ d) $2 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

38. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin^2 2x + 6 \sin^2 x = 6$ c) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$
 b) $2 \sin^2 2x + 3 \cos 2x = 0$ d) $\sin 8x - \sin 4x = 0$

39. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{2 \sin^2 x + \sin x}{\sin 2x} = 0$ c) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 3} = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 3}$
 b) $\frac{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}{4 \cos^2 x - 1} = 0$ d) $2\sqrt{2} - 2 \sin x = \frac{\cos 2x + 1}{\sin x}$

D 40. Udowodnij poniższą równość.

- a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ b) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

41. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin x + \cos x = 0$ b) $\sin x - \cos x = 1$ c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

39. a) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

40. a) $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}) =$
 $= \sqrt{2}(\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \cos x + \sin x$

b) $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}) =$
 $= \sqrt{2}(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sin x - \cos x$

41. a) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

32. a) $\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$ b) $\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ d) $-\frac{24}{25}$

33. a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\sin x = \frac{120}{169}, \cos x = \frac{119}{169}$

d) $\sin x = -\frac{120}{169}, \cos x = \frac{119}{169}$

34. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

35. a) $x = \pi$

b) $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

c) $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$

d) $x = \frac{\pi}{2}$

e) $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$

f) $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

36. a) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

37. a) $\frac{\pi}{2}$ b) brak rozwiązania

c) π d) $\frac{3}{4}\pi$

38. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{k\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

42. a) Korzystamy ze wzoru na różnicę sinusów:

$$\sin \alpha - \sin \beta =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 5 \text{ i } \frac{\alpha-\beta}{2} = 2,$$

$$\text{stad } \alpha = 7 \text{ i } \beta = 3$$

$$2 \cos 5x \sin 2x = \sin 7x - \sin 3x$$

$$2(\sin 7x - \sin 3x) + 2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7} \text{ lub } x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7},$$

$$k \in \mathbf{Z}$$

$$-\frac{13}{28}\pi, -\frac{1}{4}\pi, -\frac{5}{28}\pi, \frac{1}{28}\pi,$$

$$\frac{3}{28}\pi, \frac{9}{28}\pi, \frac{11}{28}\pi$$

$$\text{b) } -\frac{11}{30}\pi, -\frac{7}{30}\pi, \frac{1}{30}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{13}{30}\pi$$

$$\text{c) } -\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$$

$$\text{d) } -\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi$$

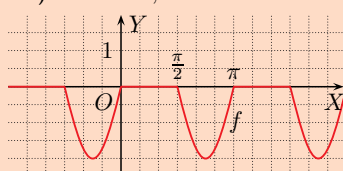
$$43. \text{ a) } x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi; 2\pi)$$

$$\text{b) } x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi) \cup (\frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi) \cup (\frac{5}{3}\pi; \frac{11}{6}\pi)$$

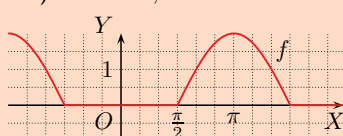
$$\text{c) } x \in (0; 2\pi)$$

$$\text{d) } x \in \{\frac{1}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi\}$$

$$44. \text{ a) okresowa, } T = \pi$$



$$\text{b) okresowa, } T = 2\pi$$



$$45. \text{ a) } f(x) = |\cos 2(x - \frac{\pi}{6})|,$$

$$\text{miejsca zerowe: } \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$$

$$\text{b) } f(x) = 2|\sin 2(x + \frac{\pi}{3})|,$$

$$\text{miejsca zerowe: } \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

$$46. \text{ a) } x \in (-\frac{1}{2} + 2k; \frac{1}{2} + 2k), k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{b) } x \in (k; k + \frac{1}{2}), k \in \mathbf{Z}$$

$$47. \text{ a) } a = -3, b = \frac{1}{2} \text{ lub } a = -3,$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } x \in (\frac{4}{3}\pi + 4k\pi; \frac{8}{3}\pi + 4k\pi),$$

$$k \in \mathbf{Z}$$

$$48. x + y = \frac{\pi}{3}$$

$$42. \text{ Wyznacz pierwiastki równania należące do przedziału } \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle.$$

$$\text{a) } 4 \cos 5x \sin 2x + 2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } 4 \cos 6x \cos 2x - 1 = 2 \cos 8x$$

$$\text{b) } 2 \sin 3x + 4 \sin x \cos 4x = 1$$

$$\text{d) } \sin 3x \cos x + \frac{1}{2} = \sin x \cos x$$

$$43. \text{ Rozwiąż nierówność w przedziale } (0; 2\pi).$$

$$\text{a) } (\sin x - 2)^2 \leq \frac{9}{2} - 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{c) } \cos^4 x + \sin^4 x \leq 1$$

$$\text{b) } (\cos 2x - 2)^2 \leq 8 \sin^2 x + \frac{1}{4}$$

$$\text{d) } \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x \geq \frac{1}{4}$$

$$44. \text{ Naskicuj wykres funkcji } f. \text{ Czy jest to funkcja okresowa?}$$

$$\text{a) } f(x) = \sin 2x - |\sin 2x|$$

$$\text{b) } f(x) = |\cos x| - \cos x$$

$$45. \text{ Naskicuj wykres funkcji } f. \text{ Podaj jej miejsca zerowe należące do przedziału } \langle 1; 5 \rangle.$$

$$\text{a) } f(x) = |\cos x \cos(\frac{\pi}{3} - x) + \sin x \sin(\frac{\pi}{3} - x)|$$

$$\text{b) } f(x) = 4|\sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3})|$$

$$46. \text{ Naskicuj wykres funkcji } f \text{ i rozwiąż nierówność } f(x) \geq 0.$$

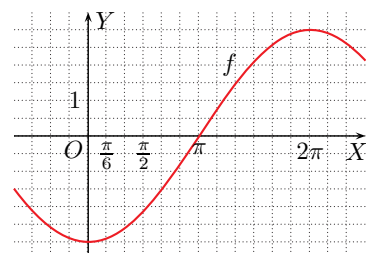
$$\text{a) } f(x) = \cos \pi x$$

$$\text{b) } f(x) = \sin 2\pi x$$

$$47. \text{ Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji postaci } f(x) = a \cos(bx).$$

$$\text{a) Podaj współczynniki } a \text{ i } b.$$

$$\text{b) Rozwiąż nierówność } 2f(x) > 3.$$



$$48. \text{ Wyznacz najmniejszą dodatnią wartość sumy } x + y, \text{ jeżeli:}$$

$$\frac{1}{2 \cos x \cdot \cos y} = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$$

$$49. \text{ Wykaż, że jeżeli } x - y = \frac{\pi}{2}, \text{ to } \sin^4(x + y) - \cos^4(x + y) = \cos 4x.$$

D

$$50. \text{ Podaj największy ujemny pierwiastek równania } \frac{a \sin 2x}{\operatorname{tg} x} - 8 \cos^4 x = 0, \text{ jeżeli:}$$

$$a = \frac{(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2}{\sin 125^\circ \cdot \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cdot \cos 125^\circ}$$

$$51. \text{ Oblicz } \sin \alpha + \cos \alpha, \text{ jeżeli } \frac{2 \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 5 \text{ oraz } \alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi).$$

$$52. \text{ Na podstawie wykresów funkcji } f \text{ i } g \text{ danych wzorami:}$$

$$f(x) = \sqrt{2} |\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x - \frac{\pi}{4})|,$$

$$g(x) = 2 (\sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{3} - x) \cos(\frac{\pi}{6} - x))$$

$$\text{podaj zbiór rozwiązań nierówności } f(x) \leq g(x) \text{ w przedziale } \langle -\pi; \pi \rangle.$$

$$49. y = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^4(2x - \frac{\pi}{2}) - \cos^4(2x - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= (\sin^2(2x - \frac{\pi}{2}) - \cos^2(2x - \frac{\pi}{2})) (\sin^2(2x - \frac{\pi}{2}) + \cos^2(2x - \frac{\pi}{2})) =$$

$$= -\cos 2(2x - \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\cos(4x - \pi) = -\cos(\pi - 4x)$$

$$\text{Ze wzorów redukcyjnych: } \cos(\pi - 4x) = -\cos 4x,$$

$$\text{stad } -\cos(\pi - 4x) = -(-\cos 4x) = \cos 4x$$

$$50. a = 3, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Zatem największy ujemny pierwiastek } x = -\frac{\pi}{6}.$$

$$51. \frac{2 \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4 \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{4}{\cos \alpha}$$

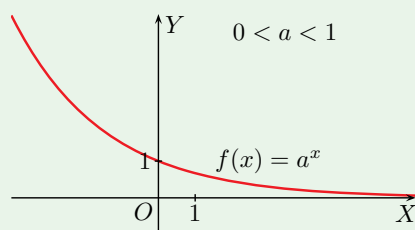
$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi), \text{ więc } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{5}. \text{ Zatem } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}.$$

$$52. x \in \langle -\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; \pi \rangle$$

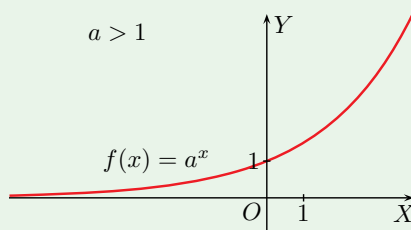
5.8. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Logarytm

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, wówczas:

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Jeżeli a , b , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

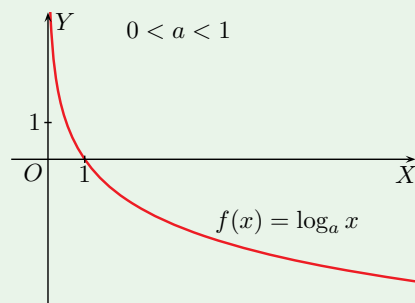
$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

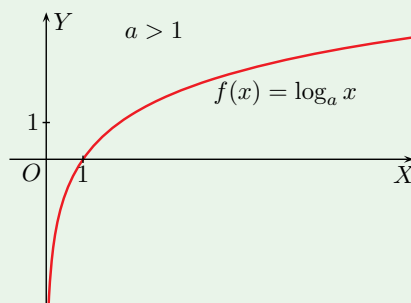
$$\log_a x^p = p \log_a x, \text{ gdzie } p \in \mathbf{R}$$

Funkcja logarytmiczna

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



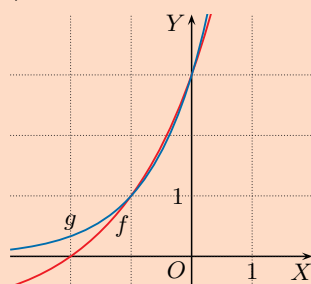
Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

1. a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} = 3^1$
 b) $5^{\frac{3}{2}} : 5^{-\frac{15}{2}} = 5^9$
 c) $2^7 \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{25}{3}}$
 d) $2^{\frac{6}{5}} : 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{9}{5}}$
 e) $3^{\frac{9}{4}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} = 3^{\frac{11}{12}}$
 f) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 5^1$
2. a) $(2^2 \cdot 2^{-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} = 2^{4-3} = 2$
 b) $\frac{5^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1}}{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}-3}} = \frac{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}+1}}{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}-3}} = 5^4 = 625$
 c) $2^{-\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot 2^{-2\sqrt{2}} = 2^0 = 1$
 d) $((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^{\sqrt{2}} = 1^{\sqrt{2}} = 1$
3. a) $2m-3 > 1$,
 czyli $m \in (2; \infty)$
 b) $0 < 1-4m < 1$,
 czyli $m \in (0; \frac{1}{4})$
 c) $2-m^2 > 1$,
 czyli $m \in (-1; 1)$
4. a), d) $a \in (1; \infty)$
 b), c) $a \in (0; 1)$
5. a) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}} < 2^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{2})^{0,5}$
 b) $0,6^{-3} = (\frac{5}{3})^3 > (\frac{5}{3})^2$
 c) $2,5^{2,5} = (\frac{5}{2})^{2,5} = 0,4^{-2,5}$
6. a) $9\sqrt{3} = 3^{2,5}$, $27^{\frac{3}{2}} = 3^{4,5}$,
 $3^{\sqrt{3}} \approx 3^{1,73}$, $9^{2,1} = 3^{4,2}$
 Zatem:
 $3^{\sqrt{3}} < 9\sqrt{3} < 9^{2,1} < 27^{\frac{3}{2}}$
 b) $0,8^{\sqrt{2}} = (\frac{4}{5})^{\sqrt{2}}$
 $(\frac{16}{25})^{1,5} = (\frac{4}{5})^3$
 $(\frac{5}{4})^{-1,8} = (\frac{4}{5})^{1,8}$
 Zatem:
 $(\frac{16}{25})^{1,5} < (\frac{4}{5})^{\sqrt{2}} < (\frac{5}{4})^{-1,8} < 0,8^{\sqrt{2}}$
7. a) $x \in (0; \infty)$
 b) $x \in (-2; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 0)$
8. a) $x \in (-2; \infty)$
 b) $x \in (-\frac{1}{4}; \infty)$
 c) $x \in (-1; \infty)$

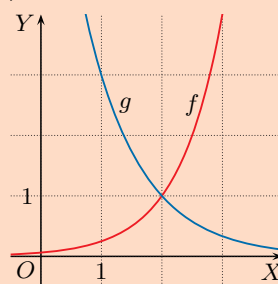
Zestaw I – wprowadzający

1. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.
 a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 9^{-\frac{3}{8}}$ c) $32^{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt[3]{2^4}$ e) $\sqrt[4]{27^3} \cdot (\sqrt[3]{9})^{-2}$
 b) $25^{\frac{3}{4}} : 125^{-\frac{5}{2}}$ d) $\sqrt[5]{64} : (0,5)^{\frac{3}{5}}$ f) $(0,04)^{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{5^3}$
2. Oblicz.
 a) $[4 \cdot (0,5)^{\sqrt{3}}]^{2+\sqrt{3}}$ c) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot (\frac{1}{4})^{\sqrt{2}}$
 b) $\sqrt{5}^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1} \cdot 125^{1-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ d) $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$
3. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?
 a) $f(x) = (2m-3)^x$ b) $f(x) = (1-4m)^{-x}$ c) $f(x) = (2-m^2)^x$
4. Określ, do którego z przedziałów: $(0; 1)$ czy $(1; \infty)$ należy liczba a , jeżeli:
 a) $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$, b) $a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, c) $a^{-2} < a^{-3}$, d) $a^3 > \frac{1}{a^2}$.
5. Porównaj liczby. Wpisz odpowiedni symbol: $<$, $>$ lub $=$ w miejsce $?$.
 a) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} ? \sqrt{2}^{0,5}$ b) $0,6^{-3} ? (\frac{5}{3})^2$ c) $2,5^{2,5} ? 0,4^{-2,5}$
6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
 a) $9\sqrt{3}$, $27^{\frac{3}{2}}$, $3^{\sqrt{3}}$, $9^{2,1}$ b) $0,8^{\sqrt{2}}$, $(\frac{16}{25})^{1,5}$, $(\frac{5}{4})^{-1,8}$, $(\frac{4}{5})^{\sqrt{2}}$
7. Naszkicuj wykres funkcji f . Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1.
 a) $f(x) = 2 - 2^{-x}$ b) $f(x) = 27 \cdot 3^x - 2$ c) $f(x) = -2^{x+1} + 3$
8. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie?
 a) $f(x) = 9 \cdot 3^x - 1$ b) $f(x) = \sqrt{2} - 4^{-x}$ c) $f(x) = 5^{2x+1} - 5^x$
9. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.
 a) $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$, $g(x) = 3^{x+1}$ b) $f(x) = 2^{2x-4}$, $g(x) = \frac{9}{3^x}$
10. Oblicz.
 a) $\log_2 16$ c) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_{0,5} 32$ g) $\log_{\sqrt{2}} 16$
 b) $\log_{16} 2$ d) $\log_{\frac{1}{16}} 2$ f) $\log_8 \sqrt{2}$ h) $\log_{32} 2\sqrt{2}$
11. Oblicz.
 a) $\log_{0,4} \frac{5}{3} + \log_{0,4} 3 - \log_{0,4} 2$ c) $3 \log 2 - \log 0,2 + \log 25$
 b) $\log_9 15 - \log_9 \frac{20}{3} + 2 \log_9 6$ d) $\log_{\sqrt{2}} 6 + 2 \log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} 3$

9. a) $x = -1$, $x = 0$



b) $x = 2$



10. a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) -3 d) $-\frac{1}{4}$ e) -5 f) $\frac{1}{6}$ g) 8 h) 0,3

11. a) -1 b) 2 c) 3 d) 6

12. Oblicz podstawę logarytmu.

- a) $\log_a 81 = 4$ c) $\log_a 9 = -2$ e) $\log_a \frac{8}{125} = 3$
 b) $\log_a 81 = -4$ d) $\log_a 9 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a \frac{8}{125} = -1$

13. Oblicz x .

- a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ c) $\log_{(x+2)} 27 = 3$ e) $\log_{(x^2-4)} 5 = 1$
 b) $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ d) $\log_{(x+1)} 9 = 2$ f) $\log_{(x+1)} (x^2 + 3) = 2$

14. Oblicz x .

- a) $\log_4 x = 2 \log_4 6 - \log_4 \frac{9}{4}$ c) $\log x = -2 + 3 \log 5 - \log 0,25$
 b) $\log_{0,5} x = 1 + 2 \log_{0,5} 3$ d) $\log_3 x = 2 \log_3 4 - \log_3 12 - 1$

15. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?

- a) $f(x) = \log_{(3-2m)} x$ b) $f(x) = \log_{(m-2)}(-x)$

16. Naszkicuj wykres funkcji f . Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od 1.

- a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 1$ b) $f(x) = \log_2(x+1) - 1$

Zestaw II – ćwiczeniowy

17. Rozwiąż graficznie równanie.

- a) $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$ b) $2^{|x|} = x + 1$ c) $2|x| = 3^x - 1$

18. Rozwiąż równanie.

- a) $16^{x^2} = 2^{2x}$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x-2} = 81^{1-x^2}$ c) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 80$

19. Rozwiąż nierówność.

- a) $9^{2x-5} \geq 27\sqrt{3}$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq 0,04$ c) $25 \cdot (0,2)^{x^2} \leq 5^x$

20. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności tej funkcji. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $f(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

- a) $f(x) = 2|2^x - 2|$ b) $f(x) = \left|\frac{1-3^{x+1}}{3^x}\right|$ c) $f(x) = 2^{-|x|} + 4$

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1, b \neq 1$, to:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

12. a) $a = 3$ b) $a = \frac{1}{3}$ c) $a = \frac{1}{3}$
 d) $a = 81$ e) $a = \frac{2}{5}$ f) $a = \frac{125}{8}$

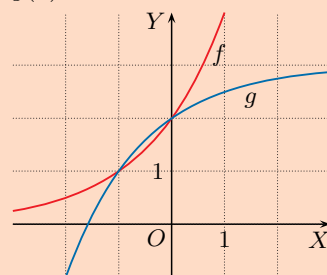
13. a) $x = 27$ b) $x = 3\sqrt{3}$
 c) $x = 1$ d) $x = 2$
 e) $x = -3, x = 3$ f) $x = 1$

14. a) $x = 16$ b) $x = 4,5$
 c) $x = 5$ d) $x = \frac{4}{9}$

15. a) $m \in (1; 1\frac{1}{2})$ b) $m \in (3; \infty)$

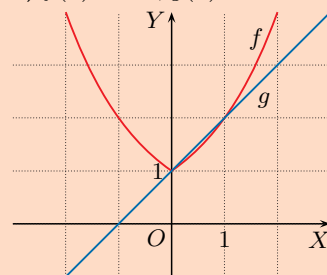
16. a) $x \in (-3; -2)$ b) $x \in (3; \infty)$

17. a) $f(x) = 2^{x+1},$
 $g(x) = 3 - 2^{-x}$



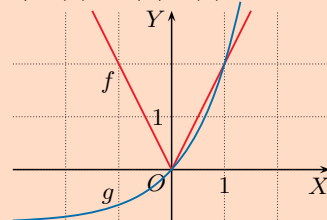
$x = -1, x = 0$

- b) $f(x) = 2^{|x|}, g(x) = x + 1$



$x = 0, x = 1$

- c) $f(x) = 2|x|, g(x) = 3^x - 1$

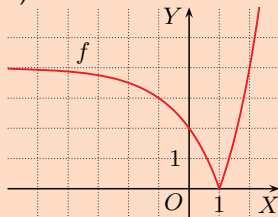


$x = 0, x = 1$

18. a) $x = 0, x = \frac{1}{2}$
 b) $x = -\frac{3}{4}, x = 1$ c) $x = 6$

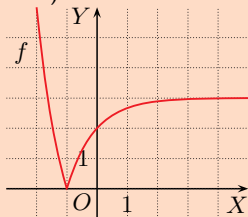
19. a) $x \in \langle \frac{3}{8}; \infty \rangle$
 b) $x \in (-\infty; 0)$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty \rangle$

20. a)



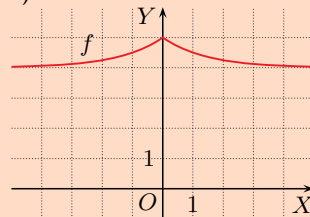
$f(D) = \langle 0; \infty \rangle,$
 rośnie w $\langle 1; \infty \rangle,$
 maleje w $(-\infty; 1),$
 $m \in \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$

b)



$f(D) = \langle 0; \infty \rangle,$
 rośnie w $\langle -1; \infty \rangle,$
 maleje w $(-\infty; -1),$
 $m \in \{0\} \cup \langle 3; \infty \rangle$

c)



$f(D) = \langle 4; 5 \rangle,$
 rośnie w $(-\infty; 0),$
 maleje w $\langle 0; \infty \rangle,$
 $m = 5$

21. a) 4 b) 9 c) 32 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{5}$
 f) Z przemienności mnożenia:
 $\log_7 4 \cdot \log_7 3 = \log_7 3 \cdot \log_7 4$
 Korzystamy z twierdzenia
 o logarytmie potęgi:
 $\log_7 3^{\log_7 4} = \log_7 4^{\log_7 3}$,
 stąd $3^{\log_7 4} = 4^{\log_7 3}$
 Zatem $3^{\log_7 4} - 4^{\log_7 3} = 0$.

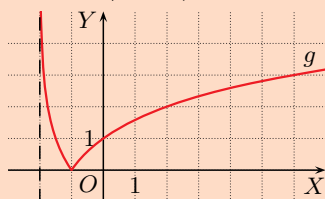
22. a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{2}{b}$ c) $1 - \frac{1}{b}$
 d) $\frac{a+1}{b}$ e) $-b$ f) $-1 - \frac{a}{b}$

23. a) 64 b) $\sqrt{5}$ c) 2

24. a) $D = (-1; 1)$, $f(0) = 0$
 b) $D = (-\infty; \frac{3}{4})$, $f(\frac{1}{2}) = 0$
 c) $D = \mathbf{R} \setminus \{7\}$,
 $f(6) = f(8) = 0$
 d) $D = (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$,
 $f(\frac{3-\sqrt{13}}{2}) = f(\frac{3+\sqrt{13}}{2}) = 0$

25. a) $D = (3; 4)$
 b) $D = (1; 2) \cup (2; 3)$
 c) $D = (-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10})$
 d) $D = (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$

26. a) $D = (-3; \infty)$, $g(D) = \mathbf{R}$,
 rosnąca
 b) $D = (2; \infty)$, $g(D) = \mathbf{R}$,
 malejąca
 c) $D = (-2; \infty)$,
 $g(D) = (0; \infty)$,
 maleje w $(-2; -1)$,
 rośnie w $(-1; \infty)$



27. a) $D = (-1; \infty)$,
 $f(D) = (0; \infty)$,
 maleje w $(-1; -\frac{3}{4})$,
 rośnie w $(-\frac{3}{4}; \infty)$
 b) $f(x) = |\log_2 |x| - 1|$,
 $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = (0; \infty)$,
 maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(0; 2)$,
 rośnie w $(-2; 0)$ i w $(2; \infty)$

28. a) $x \in (4; 7)$ b) $x \in (3; 4)$

21. Oblicz.

- a) $\log_2 25 \cdot \log_{\sqrt{5}} 2$ c) $9^{6 \log_{81} 2 + \log_3 2}$ e) $(\sqrt{8})^{\frac{1}{3 \log_5 2}}$
 b) $\log_{0,25} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8}$ d) $5^{\log_{25} 8 + \log_{\frac{1}{5}} 4}$ * f) $3^{\log_7 4} - 4^{\log_7 3}$

22. Niech $a = \log_2 3$ i $b = \log_2 10$. Wyraż liczbę p za pomocą a i b .

- a) $p = \log 3$ c) $p = \log 5$ e) $p = \log_{\frac{1}{2}} 10$
 b) $p = \log 4$ d) $p = \log 6$ f) $p = \log_{\frac{1}{10}} 30$

23. Oblicz $\sqrt{abc}$, jeżeli wiadomo, że:

- a) $\log_a 2 = \frac{1}{4}$, $\log_{\sqrt{2}} b = 8$, $\log_{0,25} c = -2$,
 b) $a = \log_2 6$, $b = \log_6 8$, $c = \log_8 32$,
 c) $a = \log_3 4$, $b = \log_5 81$, $c = \log_4 5$.

24. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz podaj jej miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \log_{0,2} (1 - x^2)$ c) $f(x) = \log_{0,1} |x - 7|$
 b) $f(x) = \log (3 - 4x)$ d) $f(x) = \log_2 (x^2 - 3x)$

25. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \log_4 (\log_{\frac{1}{4}} (x - 3))$ c) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (10 - x^2)}$
 b) $f(x) = \log_{(x-1)} (3 - x)$ d) $f(x) = \log_{(x^2-1)} (x + 1)$

26. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \log_2 x$. Naskicuj wykres funkcji g oraz podaj jej dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

- a) $g(x) = f(x + 3) - 1$ b) $g(x) = 1 - f(x - 2)$ c) $g(x) = |f(x + 2)|$

27. Naskicuj wykres funkcji f oraz podaj jej dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = |\log_2 (x + 1) + 2|$ b) $f(x) = |1 - \frac{1}{2} \log_2 x^2|$

28. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.

- a) $f(x) = 3 + \log_{\frac{1}{3}} (x + 2)$, $g(x) = \log_3 (x - 4)$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x - 3)$, $g(x) = 2 - \log_2 x$

29. Wykaż, że nierówność jest prawdziwa.

- ☒ a) $\frac{1}{\log_3 16} + \frac{1}{\log_5 16} < 1$ b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 2} > 2$

30. Wykaż, że jeśli:

- ☒ a) $a = \log_3 15$, to $\log_3 \sqrt{5} = \frac{a-1}{2}$, b) $a = \log_{18} 27$, to $\log_9 2 = \frac{3-2a}{2a}$.

29. a) $\frac{1}{\log_3 16} + \frac{1}{\log_5 16} = \frac{\log_{16} 3}{\log_{16} 16} + \frac{\log_{16} 5}{\log_{16} 16} = \log_{16} 3 + \log_{16} 5 = \log_{16} 15 < \log_{16} 16 = 1$

- b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 2} = \frac{\log_2 3}{\log_2 2} + \frac{\log_2 \sqrt{2}}{\log_2 2} = \log_2 3 + \log_2 \sqrt{2} = \log_2 3\sqrt{2} =$
 $= \log_2 \sqrt{18} > \log_2 \sqrt{16} = 2$

30. a) $\log_3 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_3 5 = \frac{\log_3 (\frac{15}{3})}{2} = \frac{\log_3 15 - \log_3 3}{2} = \frac{a-1}{2}$

- b) $a = \log_{18} 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 18} = \frac{3}{\log_3 (9 \cdot 2)} = \frac{3}{\log_3 9 + \log_3 2} = \frac{3}{2 + \log_3 2}$, stąd $\log_3 2 = \frac{3-2a}{a}$
 $\log_9 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 9} = \frac{\log_3 2}{2} = \frac{3-2a}{2a}$

Zestaw III – podsumowujący

31. Dla jakich wartości parametru m równanie ma pierwiastek ujemny?

a) $\log_{0,5}(x+1) = m^2 - 2$ b) $\log_2 m = 4 - x$

32. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \log_2(x^2 + 3x - m)$ b) $f(x) = \log(x^2 - 3mx + 1)^2$

D 33. Uzasadnij, że funkcja f jest rosnąca.

a) $f(x) = \log_{0,1}(\log_{0,5} x)$ b) $f(x) = \log_{0,1}(-x)$

34. Wyznacz liczbę p , dla której zachodzi równość:

a) $\log_{\sqrt{2}}(\log_{0,5} p) = 0$, c) $\log_2(\log_{\sqrt{2}} p) = 2$,
b) $\log_{0,5}(\log_2 p) = 1$, d) $\log_3(\log_2(\log_4 p)) = 1$.

35. Wyznacz liczbę q , dla której zachodzi równość:

a) $\log_2 q = \log_{0,5} q + \log_{\sqrt{2}} 5$, b) $\log_{0,1} q = 2 - 2 \log 5 + \log 4$.

D 36. Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R}$ zachodzi równość:

$$|\log(\sqrt{1+x^2} - x)| = |\log(\sqrt{1+x^2} + x)|$$

Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas T , po którym masa próbki tego izotopu zmniejszy się o połowę. Jeśli m_0 jest początkową masą próbki, to masa próbki po upływie czasu t jest równa:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

37. Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosi 16 godzin. Po jakim czasie próbka tego izotopu straci:

a) 75% swojej masy, b) 87,5% swojej masy?

38. Okres połowicznego rozpadu izotopu węgla ^{14}C wynosi około 5730 lat. Jaką masę będzie miała próbka tego izotopu o masie początkowej 96 gramów po upływie:

a) 17 190 lat, b) 22 920 lat?

39. Masa próbki izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosiła 48 gramów, a po 24 dniach zmniejszyła się do 6 gramów. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.

36. $\sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$, stąd:

$$|\log(\sqrt{1+x^2} - x)| = \left| \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \right| = |\log(\sqrt{1+x^2} + x)^{-1}| =$$

$$= |-\log(\sqrt{1+x^2} + x)| = |\log(\sqrt{1+x^2} + x)|$$

37. a) $0,25m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}, \text{ stąd } \frac{t}{16} = 2, \text{ czyli } t = 32 \text{ h}$$

b) $0,125m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}, \text{ stąd } \frac{t}{16} = 3, \text{ czyli } t = 48 \text{ h}$$

38. a) $m = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17190}{5730}} = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 12 \text{ [g]}$

b) $m = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{22920}{5730}} = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6 \text{ [g]}$

31. a) $x > -1$

$$x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{m^2-2}$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{m^2-2} - 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m^2-2} - 1 < 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m^2-2} < 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0,$$

$$\text{stąd } m^2 - 2 > 0$$

$$m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$$

Należy jeszcze sprawdzić założenie $x > -1$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m^2-2} - 1 > -1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m^2-2} > 0, \text{ zawsze prawda}$$

Ostatecznie:

$$m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$$

b) $m > 0$

$$x = 4 - \log_2 m < 0$$

$$\log_2 m > 4 = \log_2 16$$

$$m > 16$$

32. a) $m \in (-\infty; -2\frac{1}{4})$

b) $m \in (-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

33. a) Niech $x_1, x_2 \in D$ oraz

$$x_1 < x_2. \text{ Wówczas:}$$

$$\log_{0,5} x_1 > \log_{0,5} x_2$$

$$\log_{0,1}(\log_{0,5} x_1) <$$

$$< \log_{0,1}(\log_{0,5} x_2)$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Zatem funkcja f jest rosnąca.

b) Niech $x_1, x_2 \in D$ oraz

$$x_1 < x_2. \text{ Wówczas:}$$

$$-x_1 > -x_2$$

$$\log_{0,1}(-x_1) < \log_{0,1}(-x_2)$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Zatem funkcja jest rosnąca.

34. a) $p = 0,5$ b) $p = \sqrt{2}$

c) $p = 4$ d) $p = 65536$

35. a) $q = 5$ b) $q = \frac{1}{16}$

39. $6 = 48\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}}$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}}, \text{ stąd}$$

$$\frac{24}{T} = 3, \text{ czyli } t = 8 \text{ dni}$$

5.9. Ciągi

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg $a: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n) , a kolejne jego wartości nazywamy **wyrazami** i oznaczamy: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Ciągiem skończonym k -wyrazowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony zbiór liczb $\{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) nazywamy:

- **rosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} > a_n$,
- **malejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} < a_n$,
- **nierosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \leq a_n$,
- **niemalejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \geq a_n$,
- **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Ciąg geometryczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Zestaw I – wprowadzający

- Oblicz $3a_9 + b_{12}$.
 a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-6}{n}$, $b_n = (-1)^{n+1} \sqrt{4n+1}$
 b) $a_n = \log_3 n$, $b_n = \log_4(5n+4)$
- Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n) , gdzie $c_n = a_n \cdot b_n$ oraz:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 2n+5 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n - n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$
- Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) ?
 a) $a_n = 4n - 15$ b) $a_n = n^2 - 10n + 16$ c) $a_n = (2n-3)(2n-9)$
- Zaproponuj wzór ogólny ciągu.
 a) 1, 4, 9, 16, 25, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots$
 b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ d) 2, -4, 6, -8, 10, ... f) $2, 2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{3}, 2, \dots$
- Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.
 a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ b) $a_n = 2 + \frac{4}{n}$ c) $a_n = \frac{5}{2n+1}$
- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
 a) $a_n = n^2 + n + 1$ d) $a_n = \frac{4n+1}{2n+1}$ g) $a_n = n^3 - n$
 b) $a_n = 4n - n^2$ e) $a_n = \frac{2-6n}{1-3n}$ h) $a_n = \sqrt{n+4}$
 c) $a_n = n^2 - 6n + 8$ f) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ i) $a_n = (-1)^{n+1}$
- Dane są pierwsze trzy wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) . Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_5 i a_8 .
 a) 1, 3, 5, ... b) 8, 3, -2, ... c) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \dots$
- Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
 a) $a_1 = -4, r = 2, n = 7$ c) $a_2 = 3, r = -2, n = 15$
 b) $a_1 = 3, r = -5, n = 10$ d) $a_2 = 2, r = -\frac{1}{2}, n = 20$
- Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
 a) $a_n = \frac{2n+1}{4}$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \sqrt{3}n - 1$ d) $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) . Określ monotoniczność tego ciągu.
 a) $a_1 = 1, a_5 = 9$ b) $a_4 = -6, a_{10} = 12$ c) $a_3 = 0, a_6 = 2$

- a) -8 b) 9
- $c_1 = 7, c_2 = 4, c_3 = \frac{11}{3}, c_4 = 24$
- a) 3 b) 5 c) 3
- a) $a_n = n^2$ b) $a_n = \frac{1}{2n-1}$
 c) $a_n = \frac{n}{n+1}$
 d) $a_n = (-1)^{n+1} 2n$
 e) $a_n = \frac{1}{3^n}$
 f) $a_n = 2$ dla n nieparzystych oraz $a_n = 2 + \frac{2}{n+2}$ dla n parzystych
- a) $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \text{ dla } n \in \mathbf{N}_+$$
 Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
 b) $a_{n+1} = 2 + \frac{4}{n+1}$

$$a_{n+1} - a_n = 2 + \frac{4}{n+1} - 2 - \frac{4}{n} = \frac{-4}{n(n+1)} < 0$$
 dla $n \in \mathbf{N}_+$
 Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
 c) $a_{n+1} = \frac{5}{2n+3}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5}{2n+3} - \frac{5}{2n+1} = \frac{-10}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$
 dla $n \in \mathbf{N}_+$
 Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
- a), d), g), h) rosnący
 b), c), i) niemonotoniczny
 e) stały
 f) malejący
- a) $a_n = 2n - 1, a_5 = 9, a_8 = 15$
 b) $a_n = -5n + 13, a_5 = -12, a_8 = -27$
 c) $a_n = \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}, a_5 = 1, a_8 = 2\frac{1}{2}$
- a) $a_7 = 8$ b) $a_{10} = -42$
 c) $a_{15} = -23$ d) $a_{20} = -7$

11. a) $r = 2$ b) $r = \frac{1}{2}$

c) $r = -4\frac{1}{2}$

12. a) $x = 7$

b) $(x+1)^2 + (3x-1)^2 =$

$= 2(2x+1)^2$

$2x^2 - 12x = 0$

$x = 0$ lub $x = 6$

13. a) $a = 18, b = 33, c = 48$

b) $10 + \sqrt{2}, 8 + \sqrt{2}, 6 + \sqrt{2},$

$4 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$

14. a)

$$\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = -4 \\ (a_1 + 5r) - (a_1 + 9r) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 3r = -4 \\ -4r = 8 \end{cases}$$

$a_1 = 1, r = -2$

b)

$$\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 4 \\ (a_1 + 3r)(a_1 + 6r) = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 - 3r \\ 2(2 + 3r) = 22 \end{cases}$$

$a_n = 3n - 10$

15. a) $S_{12} = 51$

b) $S_9 = 9(1 + 3\sqrt{2})$

c) $r = 3, S_{15} = 270$

d) $r = 5, a_1 = -3, S_7 = 84$

16. a) $a_1 = 12, a_n = 97, r = 5,$
 $n = 18$

Zatem $S_{18} = 981$.

b) S_1 – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 4

S_2 – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6

S_3 – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 12

$S_1 = \frac{(12+96) \cdot 22}{2} = 1188$

$S_2 = \frac{(12+96) \cdot 15}{2} = 810$

$S_3 = \frac{(12+96) \cdot 8}{2} = 432$

Szukana suma:

$S = S_1 + S_2 - S_3 = 1566$

11. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.

a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = -6 \\ a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_2 \cdot a_4 = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_3 \cdot a_5 = -8 \\ a_3 + a_7 = -2 \end{cases}$

12. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy.

a) $2x - 1, 2x + 5, 3x + 4$

b) $(x+1)^2, (2x+1)^2, (3x-1)^2$

13. a) Wyznacz takie liczby a, b, c , aby liczby 3, $a, b, c, 63$ tworzyły ciąg arytmetyczny.

b) Między liczby $12 + \sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ wstaw pięć takich liczb, aby wszystkie razem tworzyły ciąg arytmetyczny.

14. a) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i trzeciego jest równa -4 , natomiast różnica wyrazów szóstego i dziesiątego jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

b) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i szóstego jest równa 4, natomiast iloczyn wyrazów czwartego i siódmego jest równy 22. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

15. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_1 = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{2}, n = 12$

c) $a_1 = -3, a_3 + a_4 = 9, n = 15$

b) $a_1 = 1 - \sqrt{2}, r = \sqrt{2}, n = 9$

d) $a_2 = 2, a_{12} - a_9 = 15, n = 7$

16. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, które:

a) przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2,

b) są podzielne przez 4 lub są podzielne przez 6.

17. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, a suma jedenastu początkowych wyrazów jest równa 220. Który wyraz tego ciągu jest równy 25?

18. Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

19. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

a) $2 + 4 + 6 + \dots + x = 110$

c) $1 + 5 + 9 + \dots + (4x-3) = 120$

b) $5 + 1 - 3 - \dots - x = -72$

d) $-4 - 1 + 2 + \dots + (3x+2) = 72$

17. $a_2 = a_1 + r = 0$, czyli $a_1 = -r$

$S_{11} = \frac{(2a_1+10r) \cdot 11}{2} = \frac{8r \cdot 11}{2} = 44r = 220$

Stąd $r = 5$ oraz $a_1 = -5$.

$a_n = -5 + (n-1) \cdot 5 = 25$

Zatem $n = 7$, czyli $a_7 = 25$.

18. $a_4 = a_1 + 3r = 6$

$S_7 = \frac{(2a_1+6r) \cdot 7}{2} = \frac{2 \cdot (a_1+3r) \cdot 7}{2} = 42$

19. a) $\frac{2+x}{2} \cdot \frac{x}{2} = 110, x = 20$

b) $\frac{5-x}{2} \cdot \frac{x+9}{4} = -72$

$x^2 + 4x - 621 = 0$

$(x+27)(x-23) = 0, x = 23$

c) $\frac{1+(4x-3)}{2} \cdot x = 120$

$2x^2 - x - 120 = 0$

$(2x+15)(x-8) = 0, x = 8$

d) $x = 6$

20. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

- a) $S_n = n^2$ b) $S_n = n^2 - 1$ c) $S_n = n^3 - 1$

D 21. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

- a) $b_n = a_{2n}$ b) $b_n = a_{2n+1}$ c) $b_n = 2a_n - 5$

22. Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) . Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_6 i a_{10} .

- a) 2, 4, 8, ... b) 9, 3, 1, ... c) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, \dots$

23. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) . Oblicz wyrazy a_4 i a_7 .

- a) $a_1 = -3, q = 2$ c) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}$ e) $a_3 = 3, a_6 = -81$
b) $a_1 = 4, q = -1$ d) $a_2 = 2, a_3 = 1$ f) $a_1 = 2\sqrt{3}, \frac{a_5}{a_2} = 3\sqrt{3}$

24. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) . Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) $a_3 = 8, a_4 = 16$ b) $a_2 = 18, a_5 = \frac{16}{3}$ c) $a_2 = \frac{1}{2}, a_7 = -2\sqrt{2}$

25. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

- a) $a_n = \frac{2^n}{3}$ b) $a_n = 4 \cdot 5^{n+2}$ c) $a_n = 1 + 2^n$ d) $a_n = 3^n \cdot 5^{n-1}$

D 26. Wykaż, że ciąg $a_n = 3 \cdot 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym?

- a) $b_n = (a_n)^2$ b) $b_n = 5 \cdot a_n$ c) $b_n = 1 - a_n$

27. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem geometrycznym.

- a) $b_n = a_{2n}$ b) $b_n = a_{2n+1}$ c) $b_n = a_{n+1} - a_n$

28. a) Między liczby 7 i 189 wstaw dwie takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny.

b) Między liczby 6 i 96 wstaw trzy takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny rosnący.

c) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa $4\frac{1}{3}$, a ich iloczyn jest równy 1. Znajdź te liczby.

29. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $a_1 = 5, q = \frac{3}{2}, n = 5$ c) $a_3 = -1, a_6 = \frac{1}{8}, n = 6$
b) $a_1 = \sqrt{2}, q = -1, n = 45$ d) $a_1 \cdot a_4 = \sqrt{5}, a_2 = 1, n = 7$

26. a), b) tak c) nie

27. q – iloraz ciągu geometrycznego (a_n)

a) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = q^2$ dla $n \in \mathbb{N}_+$

Zatem ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q^2 .

b) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}} = q^2$ dla $n \in \mathbb{N}_+$

Zatem ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q^2 .

c) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{a_{n+1} \cdot q - a_n \cdot q}{a_{n+1} - a_n} = \frac{(a_{n+1} - a_n) \cdot q}{a_{n+1} - a_n} = q$ dla $n \in \mathbb{N}_+$

Zatem ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q .

28. a) 21, 63 b) 12, 24, 48 c) $\frac{1}{3}, 1, 3$ lub $3, 1, \frac{1}{3}$

29. a) $S_5 = \frac{1055}{16}$ b) $S_{45} = \sqrt{2}$ c) $S_6 = -\frac{21}{8}$ d) $S_7 = 31 + \frac{156\sqrt{5}}{5}$

20. a) $a_n = 2n - 1$, tak

b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 2n - 1 & \text{dla } n > 1 \end{cases}$,
nie

c) $a_1 = 0$,
 $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ dla $n > 1$,
nie

21. r – różnica ciągu arytmetycznego (a_n)

a) $b_{n+1} - b_n = a_{2n+2} - a_{2n} = 2r$

Ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $2r$.

b) $b_{n+1} - b_n = a_{2n+3} - a_{2n+1} = 2r$

Ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $2r$.

c) $b_{n+1} - b_n = (2a_{n+1} - 5) - (2a_n - 5) = 2(a_{n+1} - a_n) = 2r$

Ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $2r$.

22. a) $a_n = 2^n, a_6 = 64, a_{10} = 1024$

b) $a_n = \frac{27}{3^n}, a_6 = \frac{1}{27}, a_{10} = \frac{1}{2187}$

c) $a_n = (\sqrt{2})^{n-2}, a_6 = 4, a_{10} = 16$

23. a) $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}, a_4 = -24, a_7 = -192$

b) $a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}, a_4 = -4, a_7 = 4$

c) $a_n = 3 \cdot (-\sqrt{2})^{n-1}, a_4 = -6\sqrt{2}, a_7 = 24$

d) $a_n = \frac{1}{2^{n-3}}, a_4 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{1}{16}$

e) $a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{3}, a_4 = -9, a_7 = 243$

f) $a_n = 2 \cdot (\sqrt{3})^n, a_4 = 18, a_7 = 54\sqrt{3}$

24. a) $a_n = 2^n$, rosnący

b) $a_n = 27 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$, malejący

c) $a_n = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{2})^n$, niemonotoniczny

25. a), b), d) tak c) nie

$$30. a_1 = 10, q = 2, \\ S_n = 10 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = \\ = 10(2^n - 1), n \in \mathbf{N}_+$$

$$a) 10(2^n - 1) > 600$$

$$2^n > 61$$

$$n \geq 6$$

$$b) 10(2^n - 1) > 1500$$

$$2^n > 151$$

$$n \geq 8$$

$$31. a) a_2 = -6, q = -2$$

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{1-(-2)^{10}}{1-2} = -1023$$

b)

$$\begin{cases} a_1 q + a_1 q^2 = 8 \\ a_1 q^3 + a_1 q^4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -32 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} a_1 = \frac{32}{3} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_6 = -21 \text{ lub } S_6 = 21$$

$$32. \begin{cases} a_2 + a_4 = 300 \\ a_3 + a_5 = 225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 q + a_1 q^3 = 300 \\ a_1 q^2 + a_1 q^4 = 225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 256 \\ q = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$256 \cdot \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}} = 592$$

$$1 - (\frac{3}{4})^n = \frac{37}{64}$$

$$(\frac{3}{4})^n = \frac{27}{64}$$

$$\text{Zatem } n = 3.$$

$$33. q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a) q_a = q^2 = \frac{1}{2}$$

$$S = -\sqrt{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{63\sqrt{2}}{32}$$

$$b) q_b = q^2 = \frac{1}{2}$$

$$S = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{63}{16}$$

$$34. a) 1081,60 \text{ zł } b) 1340,10 \text{ zł } \\ c) 1480,24 \text{ zł}$$

$$35. \text{ Po 4 latach: } 2349,80 \text{ zł, } \\ \text{ po 8 latach: } 5841,60 \text{ zł}$$

$$36. a) 609,50 \text{ zł } b) 610,30 \text{ zł } \\ c) 610,50 \text{ zł}$$

30. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 10, a iloraz jest równy 2. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać liczbę: a) większą od 600, b) większą od 1500?

31. a) Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = 3$ i $a_3 = 12$. Suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu równa się 9. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

b) Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_2 + a_3 = 8$ i $a_4 + a_5 = 2$. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

32. W ciągu geometrycznym suma drugiego i czwartego wyrazu jest równa 300, a suma trzeciego i piątego jest równa 225. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 592?

33. W ciągu geometrycznym $a_1 = 2$ i $a_2 = -\sqrt{2}$. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu:

a) o numerach parzystych,

b) o numerach nieparzystych.

34. Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po n latach przy oprocentowaniu rocznym r ?

$$a) n = 2, r = 4\%$$

$$b) n = 6, r = 5\%$$

$$c) n = 10, r = 4\%$$

35. Bank przyjął kwotę 10 000 zł na 3% rocznie i pożyczył ją na 8% rocznie. Ile zyska bank w ciągu czterech lat, a ile – w ciągu ośmiu lat?

36. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony w banku na pięć lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku,

b) co dwa miesiące,

c) co miesiąc?

37. W bankach A, B, C lokaty terminowe są oprocentowane 2% w skali roku. W banku A odsetki są kapitalizowane co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 2000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

38. Banki A, B, C i D oferują następujące warunki oprocentowania lokat:

bank A – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,

bank B – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,

bank C – 5,75% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,

bank D – 5,8% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.

Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

$$37. K = 2000 \text{ zł}$$

$$\text{Bank } A: K(1 + 0,02) = 1,02K \text{ o } 2\%$$

$$\text{Bank } B: K(1 + \frac{0,02}{4})^4 \approx 1,02015K \text{ o około } 2,015\%$$

$$\text{Bank } C: K(1 + \frac{0,02}{12})^{12} \approx 1,02018K \text{ o około } 2,018\%$$

Największe odsetki będą w banku C .

$$38. K - \text{wpłacony kapitał}$$

$$\text{Bank } A: K \cdot (1 + \frac{0,056}{12})^{12} \approx 1,0575K$$

$$\text{Bank } B: K \cdot (1 + \frac{0,0565}{4})^4 \approx 1,0577K$$

$$\text{Bank } C: K \cdot (1 + \frac{0,0575}{2})^2 \approx 1,0583K$$

$$\text{Bank } D: K \cdot (1 + 0,058) \approx 1,058K$$

Najkorzystniejsze warunki oferuje bank C .

Zestaw II – ćwiczeniowy

39. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Wypisz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Zbadaj, czy jest to ciąg monotoniczny.

- a) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, n \geq 1$ c) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n - n^2, n \geq 1$
 b) $a_1 = -4, a_{n+1} = a_n + n, n \geq 1$ d) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n, n \geq 1$

40. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Czy jest to ciąg arytmetyczny lub geometryczny?

- a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n, n \geq 1$ c) $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 1, n \geq 1$
 b) $a_1 = -2, a_{n+1} = a_n - 6, n \geq 1$ d) $a_1 = -5, a_{n+1} = 3^n a_n, n \geq 1$

41. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - n^2, n \geq 1$ b) $a_1 = 2, a_{n+1} = na_n - 1, n \geq 1$

42. Ciąg (a_n) jest rosnący i wszystkie jego wyrazy są ujemne. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) .

- a) $b_n = 3a_n - 1$ b) $b_n = -2a_n + 4$ c) $b_n = \frac{1}{a_n}$

43. Ciąg (a_n) jest malejący i wszystkie jego wyrazy są dodatnie. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) .

- a) $b_n = 4a_n - 1$ c) $b_n = \sqrt{a_n^2 + 1}$ e) $b_n = \frac{10}{a_n}$
 b) $b_n = -a_n^2$ d) $b_n = a_n^2 + a_n$ f) $b_n = -\frac{1}{1+a_n}$

Ciąg (a_n) ma **granicę** równą g , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to mówimy, że jest **zbieżny** do g .

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do ∞ , jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$, jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

- Jeśli $q \in (-1; 1)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. ■ Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.
- Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$. ■ Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$.
- Jeśli $a > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. ■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

42. Ciąg (a_n) jest rosnący, więc $a_{n+1} - a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

a) $b_{n+1} - b_n = 3a_{n+1} - 1 - (3a_n - 1) = 3(a_{n+1} - a_n) > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
 Zatem ciąg (b_n) jest rosnący.

b) $b_{n+1} - b_n = -2a_{n+1} + 4 - (-2a_n + 4) = -2(a_{n+1} - a_n) < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
 Zatem ciąg (b_n) jest malejący.

c) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} \cdot a_n} = \frac{-(a_{n+1} - a_n)}{a_{n+1} \cdot a_n} < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
 Zatem ciąg (b_n) jest malejący.

43. a), c), d), f) malejący

b), e) rosnący

39. a) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 2$, ciąg stały

b) $a_1 = -4, a_2 = -3, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = 6$
 $a_{n+1} - a_n = n > 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$

Zatem ciąg jest rosnący.

c) $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = -2, a_4 = -11, a_5 = -27$
 $a_{n+1} - a_n = -n^2 < 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$

Zatem ciąg jest malejący.

d) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$

$a_n > 0$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$

Zatem ciąg jest malejący.

40. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$, ciąg geometryczny o ilorazie 5

b) $a_{n+1} - a_n = -6$, ciąg arytmetyczny o różnicy -6

c) $a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 23$
 $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ oraz $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

Ciąg nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.

d) $a_1 = -5, a_2 = -15, a_3 = -135$

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ oraz $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

Ciąg nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.

41. a) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = -25, a_6 = -100$

Suma: $S_6 = -123$

b) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 7, a_6 = 34$

Suma: $S_6 = 47$

44. a) -2 b) 0 c) $-\infty$

d) ∞ e) -3 f) $-\frac{3}{4}$

45. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3(2+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})^2}{n^3(\frac{4}{n^2}-2)(1+\frac{3}{n})} = \frac{8}{-2} = -4$

b) $\frac{n^3(\frac{6}{n}-3)^2(\frac{1}{n}-2)}{n^2(3+\frac{1}{n})^2} = \frac{-18n^3}{6n^2} = -\infty$

c) $\frac{n^4(1+\frac{2}{n})^2(2+\frac{3}{n})^2}{n^3(3-\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})^2} = \frac{4n^4}{12n^3} = \infty$

d) $\frac{10 \cdot \frac{5n}{6n} + \frac{3}{6n}}{\frac{5n}{6n} + 2} = 0$

e) $\frac{\frac{2n}{4n} + 12}{1 - 2 \cdot \frac{3n}{4n}} = 12$

f) $\frac{3 - 36 \cdot \frac{6n}{8n}}{\frac{36}{8n} + \frac{6n}{8n} + 4} = \frac{3}{4}$

46. a) ∞ b) $-\infty$ c) $-\infty$

47. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

48. a) $\sqrt[n]{9n} < \sqrt[n]{8n+9n} < \sqrt[n]{9n+9n} = \sqrt{2 \cdot 9n}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9n} = 9$

i $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 9n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8n+9n} = 9$

b) $\sqrt[n]{6n-3n} = 6 \sqrt[n]{1-(\frac{1}{2})^n}$

$6 \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 6 \sqrt[n]{1-\frac{1}{2}} \leq$

$\leq 6 \sqrt[n]{1-(\frac{1}{2})^n} =$

$= \sqrt[n]{6n-3n} < \sqrt[n]{6n}$

$\sqrt[n]{6n} = 6$

i $\lim_{x \rightarrow \infty} 6 \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 6 \cdot 1 = 6$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n-3n} = 6$

c) $\sqrt[n]{2 \cdot 4^n} <$

$< \sqrt[n]{9 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n} <$

$< \sqrt[n]{9 \cdot 4^n + 2 \cdot 4^n} =$

$= \sqrt[n]{11 \cdot 4^n}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot 4 =$

$= 1 \cdot 4 = 4$

i $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{11 \cdot 4^n} = 4$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n} = 4$

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, to:

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbf{R}$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$

granica sumy ciągów

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$

granica różnicy ciągów

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$

granica iloczynu ciągów

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$,

granica ilorazu ciągów

gdy $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$

44. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{-4n^2 + 3n + 1}{2 + n + 2n^2}$ c) $a_n = \frac{6n^4 + n^2 - 5}{2 - n^3}$

e) $a_n = \frac{6 - 2n - 9n^2}{6 + 2n + 3n^2}$

b) $a_n = \frac{10n^2 - 2}{2 - n + n^3}$ d) $a_n = \frac{2n^3 - 2n + 4}{n^2 + 1}$

f) $a_n = \frac{-3n^4 + 3n^2 + 4}{4n^4 + n^3 + 1}$

45. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{(2n+1)(2n-1)^2}{(4-2n^2)(n+3)}$ c) $a_n = \frac{(n+2)^2(2n+3)^2}{(3n-1)(2n+1)^2}$

e) $a_n = \frac{2^n + 3 \cdot 4^{n+1}}{2^{2n} - 2 \cdot 3^n}$

b) $a_n = \frac{(6-3n)^2(1-2n)}{(3n+1)^2}$ d) $a_n = \frac{2 \cdot 5^{n+1} + 3}{5^n + 2 \cdot 6^n}$

f) $a_n = \frac{3 \cdot 8^n - 6^{n+2}}{36 + 6^n + 4 \cdot 8^n}$

46. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = 2n^3 - n + 5$ b) $a_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$ c) $a_n = 8 \cdot 2^n - 4^n$

47. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt{\frac{2n-1}{8n+8}}$ b) $a_n = \sqrt{\frac{4n^2+1}{9n^2-n}}$

c) $a_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+2}{8n^3+n}}$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla wszystkich (lub prawie wszystkich) $n \in \mathbf{N}_+$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

48. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8n+9n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8+206n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n-3n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n - \sin n}$

d) $\sqrt[n]{7n} < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < \sqrt[n]{7n + 7^n + 7^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 7^n}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7n} = 7$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} = 7$

e) $\sqrt[n]{206n} < \sqrt[n]{8+206n} < \sqrt[n]{8n+206n} = \sqrt[n]{214n}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{206n} = 1$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{214n} = 1$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8+206n} = 1$

f) $\sqrt[n]{3^n} = \sqrt{2 \cdot 3^n - 3^n} < \sqrt{2 \cdot 3^n - \sin n} < \sqrt{2 \cdot 3^n + 3^n} = \sqrt{3 \cdot 3^n}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3 \cdot 3^n} = 3$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3 \cdot 3^n} = 3$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 \cdot 3^n - \sin n} = 3$

Szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$ o ilorazie $q \in (-1; 1)$ jest zbieżny. Jego suma wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

49. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , wiedząc, że:

- a) $a_1 = 2, q = \frac{\sqrt{3}}{3},$ c) $a_1 + a_3 = 10, a_2 + a_4 = -5,$
b) $a_1 = -18, a_1 + a_2 = -12,$ d) $a_3 = \sqrt{2}, 4a_6 = (a_3)^2.$

50. Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

- a) $0,(2)$ c) $2,1(3)$ e) $2,(45)$ g) $1,(450)$
b) $1,(4)$ d) $2,4(9)$ f) $3,(01)$ h) $0,(270)$

51. Dla jakich wartości x szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny?

- a) $q = 2x - 1$ b) $q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

52. Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny? Wyznacz jego sumę.

- a) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$ b) $1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{64x^3} + \dots$

53. Rozwiąż równanie.

- a) $1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2} + \dots = 3 - 2x$
b) $1 + \frac{x}{x+3} + \left(\frac{x}{x+3}\right)^2 + \dots = x^2 + \frac{1}{3}$
c) $6(x - x^2 + x^3 - \dots) = \frac{1}{1+x} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + \dots$
d) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots = -1$

54. Rozwiąż nierówność.

- a) $-2 + \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} + \dots < x^2 + x$
b) $\sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in (0; \pi)$

55. Rozwiąż równanie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \dots + \operatorname{tg}^{2n-1} x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

56. Określ dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$ b) $f(x) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \dots$

54. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

b) $|q| = |\sin x| < 1,$

czyli $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$

$$S = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} \geq \frac{1}{2}$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0$$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{ oraz } x \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$$

$$\text{Zatem } x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}).$$

$$x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$$

55. $|\operatorname{tg}^2 x| < 1$, czyli $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi),$
 $k \in \mathbf{Z}$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

56. a) $D = (-1; 1), f(x) = \frac{2x}{1-x} = \frac{-2}{x-1} - 2,$
 $f(D) = (-1; \infty)$

b) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$

$$f(x) = -\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1,$$

$$f(D) = (-\infty; -1) \cup (-1; -\frac{1}{2})$$

49. a) $S = 3 + \sqrt{3}$

b) $q = -\frac{1}{3}, S = -\frac{27}{2}$

c) $a_1 = 8, q = -\frac{1}{2}, S = \frac{16}{3}$

d) $a_6 = \frac{(a_3)^2}{4} = \frac{1}{2} = a_3 q^3,$
czyli $q^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$

$$\text{stad } q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3 = a_1 q^2, \text{ czyli } a_1 = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= 4(\sqrt{2} + 1)$$

50. a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{13}{9}$ c) $\frac{32}{15}$ d) $\frac{5}{2}$
e) $\frac{27}{11}$ f) $\frac{298}{99}$ g) $\frac{161}{111}$ h) $\frac{10}{37}$

51. a) $|q| = |2x - 1| < 1$

$$x \in (0; 1)$$

b) $|q| = |-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}| < 1$
 $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} > -1$ lub

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} < 1$$

$$-\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) > 0 \text{ lub}$$

$$-\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1) < 0$$

$$-\frac{1}{2}(x+1)(x-3) > 0 \text{ lub}$$

$$-\frac{1}{2}(x-1)^2 < 0$$

$$x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$$

52. a) $|q| = |2x| < 1$ dla

$$x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); S = \frac{1}{1-2x}$$

b) $|q| = |\frac{1}{4x}| < 1$ dla

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; \infty),$$

$$S = \frac{4x}{4x-1}$$

53. a) $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $x = -\frac{2}{3}, x = 1$

c) $L: |q| = |-x| < 1$ dla

$$x \in (-1; 1); L = \frac{6x}{1+x}$$

$$P: |q| = |\frac{1}{1+x}| < 1$$

$$\text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty);$$

$$P = \frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{6x}{1+x} = \frac{1}{x} \text{ oraz } x \in (0; 1)$$

$$\text{Zatem } x = \frac{1}{2}.$$

d) $|q| = |-\cos x| < 1$ dla

$$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$S = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Zatem } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ lub}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

57. a) $b_1 = 4, b_2 = 16$
 $S_{10} = \frac{(2 \cdot 4 + 9 \cdot 12) \cdot 10}{2} = 580$

b)

$$\begin{cases} \frac{(2a_1 + 7 \cdot 2r) \cdot 8}{2} = 240 \\ \frac{(2(a_1 + r) + 7 \cdot 2r) \cdot 8}{2} = 256 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 16 \\ r = 2 \end{cases}$$

Zatem $a_1 = 16$ i $a_{16} = 46$.

58. $a_1 = -6, n = 25$

59.

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 28 \\ a_1 + 9r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 36 \\ r = -4 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{(2 \cdot 36 + (n-1)(-4))n}{2} = -40$$

$$(19 - n)n = -20, n \in \mathbb{N}_+$$

Zatem $n = 20$.

60. $S_k = \frac{(6+48)k}{2} = 405$

$$k = 15$$

$$a_{15} = 6 + 14r = 48$$

$$r = 3$$

61. $\frac{(2a_1 + (n-1) \cdot 5)n}{2} + 500 =$
 $= \frac{(2(a_1 + n \cdot 5) + (n-1) \cdot 5)n}{2}$

Zatem $n = 10$.

62. $\frac{(2+42)n}{2} =$
 $= 242 + \frac{((2+r) + (42-r)) \cdot \frac{n-1}{2}}{2}$

Zatem $n = 21$.

$$a_{21} = 2 + 20r = 42$$

$$r = 2$$

63. a)

$$\begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 2 \\ a_1^2 \cdot \frac{1-(q^2)^3}{1-q^2} = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 2 \\ a_1^2 \cdot \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{(1-q)(1+q)} = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 2 \\ a_1 \cdot \frac{1+q^3}{1+q} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 2 \\ a_1(1-q+q^2) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

$$a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

Zestaw III – podsumowujący

57. a) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty jest równy 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

b) Ciąg arytmetyczny składa się z szesnastu wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

58. W skończonym ciągu arytmetycznym wyrazy drugi, piąty i ostatni są równe odpowiednio: $-4, 2$ i 42 . Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

59. W skończonym ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 28, a dziesiąty -0 . Suma wszystkich wyrazów jest równa -40 . Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

60. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 6. Dla pewnej liczby k mamy $a_k = 48$, a suma k początkowych wyrazów ciągu $S_k = 405$. Oblicz różnicę tego ciągu oraz k .

61. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 5 jest o 500 mniejsza od sumy następnych n wyrazów tego ciągu. Oblicz n .

62. Skończony ciąg arytmetyczny ma nieparzystą liczbę wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 2, a ostatni jest równy 42. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest o 242 większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz różnicę tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

63. a) W ciągu geometrycznym suma trzech początkowych wyrazów jest równa 2, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

b) W ciągu geometrycznym suma trzech początkowych wyrazów jest równa 27, a suma dziewięciu początkowych wyrazów jest równa 39. Oblicz iloraz tego ciągu.

64. Czwarty wyraz ciągu geometrycznego jest równy $\sqrt{5}$. Oblicz iloczyn siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

65. Trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego są długościami boków trójkąta. Jakie wartości może przyjmować iloraz tego ciągu?

63. b)

$$\begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 27 \\ a_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = 39 \end{cases}$$

$$\frac{1-q^9}{1-q^3} = \frac{39}{27}$$

$$\frac{(1-q^3)(1+q^3+q^6)}{1-q^3} = \frac{13}{9}$$

$$q^6 + q^3 - \frac{4}{9} = 0$$

$$(q^3 + \frac{4}{3})(q^3 - \frac{1}{3}) = 0$$

$$\text{Zatem } q = -\sqrt[3]{\frac{36}{3}} \text{ lub } q = \sqrt[3]{\frac{9}{3}}.$$

64. $125\sqrt{5}$

65. $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

66. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Jedna z przyprostokątnych ma długość 6. Oblicz długości drugiej przyprostokątnej oraz przeciwprostokątnej (rozważ dwie możliwości).
67. Oblicz długości boków prostokąta, jeżeli długości dwóch z nich razem z długością przekątnej tworzą ciąg arytmetyczny oraz:
a) obwód prostokąta jest równy 14, b) pole prostokąta jest równe 48.
68. a) Między liczby 2 i 56 wstaw dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 21. Jeśli do pierwszej liczby dodamy 1, do drugiej 2, a do trzeciej 15, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

D 69. Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi równość:

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

70. Wyznacz takie kąty $\alpha \in (0; \pi)$, dla których ciąg: $\frac{1}{2}, \sin \alpha, \cos 2\alpha$ jest ciągiem geometrycznym.

D 71. Dany jest ciąg geometryczny o wyrazach całkowitych. Wykaż, że suma kwadratów trzech jego kolejnych wyrazów jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

72. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_n + 6 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

- D** a) Wykaż, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n + 2$ jest ciągiem geometrycznym oraz wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
b) Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

73. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{3+6+9+\dots+3n}{4n+6}$

74. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{2n^2+1}$ c) $a_n = \frac{3+9+27+\dots+3^n}{1+5 \cdot 2^n}$
b) $a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{-2-n}$ d) $a_n = \frac{1+5+25+\dots+5^n}{3-5^{n+1}}$

75. Zbadaj zbieżność ciągu (a_n) w zależności od parametru p .

a) $a_n = \frac{pn}{(p+1)n+2}$ b) $a_n = \frac{(p^2-4)n^3+5}{(p-2)n^2+1}$

69. $S_{3n} = \frac{2a_1+(3n-1)r}{2} \cdot 3n$

$$3(S_{2n} - S_n) = 3 \left(\frac{2a_1+(2n-1)r}{2} \cdot 2n - \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n \right) = 3n \cdot \frac{4a_1+4nr-2r-(2a_1+n-r)}{2} =$$

$$= 3n \cdot \frac{2a_1+(3n-1)r}{2} = S_{3n}$$

71. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 = a_1^2(1 + q^2 + q^4) = a_1^2(1 - q^3 + q^2 + q^3 + q^4) =$
 $= a_1^2((1-q)(1+q+q^2) + q^2(1+q+q^2)) = a_1^2(1+q+q^2)(1-q+q^2) =$
 $= (a_1 + a_1 q + a_1 q^2)(a_1 - a_1 q + a_1 q^2) = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)$
 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}$, stąd $(a_1 - a_2 + a_3) \in \mathbf{Z}$, zatem $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ jest podzielne przez $a_1 + a_2 + a_3$.

66. I przypadek

Niech 6, $6+r$, $6+2r$ będą długościami boków trójkąta.

$$6^2 + (6+r)^2 = (6+2r)^2$$

oraz $r > 0$, czyli $r = 2$

Druga przyprostokątna: 8, przeciwprostokątna: 10

II przypadek

Niech $6-r$, 6, $6+r$ będą długościami boków trójkąta.

$$(6-r)^2 + 6^2 = (6+r)^2$$

oraz $r > 0$, czyli $r = 1,5$

Druga przyprostokątna: 4,5, przeciwprostokątna: 7,5

67. a) 3, 4 b) 6, 8

68. a) 8, 32 lub $-7, 24\frac{1}{2}$

b) 2, 7, 12 lub 26, 7, -12

70. $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2}}, \alpha \in (0; \pi)$

$$\cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\text{czyli } \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\alpha \in (0; \pi), \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{oraz } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ lub } \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

72. a) $b_1 = 5$

$$b_{n+1} = 4(a_n + 2) = 4b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 4 \text{ dla } n \geq 1$$

$$b_n = 5 \cdot 4^{n-1}$$

$$\text{b) } a_n = 5 \cdot 4^{n-1} - 2$$

73. a) $a_n = \frac{n}{2}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} > 0 \text{ dla}$$

$$n \in \mathbf{N}_+,$$

ciąg (a_n) jest rosnący

$$\text{b) } a_n = \frac{3n(1+n)}{4(2n+3)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)(n+3)}{2(2n+3)(2n+5)} > 0$$

$$\text{dla } n \in \mathbf{N}_+,$$

ciąg (a_n) jest rosnący

74. a) $\frac{3}{4}$ b) $-\infty$ c) ∞ d) $-\frac{1}{4}$

75. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n =$

$$= \begin{cases} \frac{p}{p+1} & \text{dla } p \neq -1 \\ -\infty & \text{dla } p = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} a_n =$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{dla } p < -2 \\ 0 & \text{dla } p = -2 \\ 5 & \text{dla } p = 2 \\ \infty & \text{dla } p > -2 \text{ i } p \neq 2 \end{cases}$$

77. $a > 0$ i $b = 0$

78. $\sin \alpha + \cos \alpha =$
 $= \sqrt{2}(\sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) =$
 $= \sqrt{2}(\sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} +$
 $+ \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4}) =$
 $= \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$,

więc $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \in (\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$

Zatem:

$|q| = \frac{1}{\sqrt{2}|\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})|} < 1$,

co oznacza, że ciąg jest zbieżny.

$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}|\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})|}} =$
 $= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} =$
 $= \frac{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) - 1} = 2 + \sqrt{2}$,

czyli $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1$

Zatem $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

79. $a_1 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$

80. $a_1 = 5$, $q = \frac{2}{3}$

81. $a_1 = \frac{15}{2}$, $q = \frac{1}{4}$

82. a) Obwody trójkątów czerwonych tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $\frac{3}{2}$ i ilorazie $\frac{1}{4}$.

Suma obwodów:

$S = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = 2$

b) Ciąg pól:

$\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{64}, \frac{\sqrt{3}}{1024}, \dots$

jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $\frac{\sqrt{3}}{4}$ i ilorazie $\frac{1}{16}$.

Suma pól: $S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$

76. Dla jakiej wartości parametru p granica ciągu (a_n) jest równa 6?

a) $a_n = n^2 \left(\frac{2p}{(n+1)(n+2)} - \frac{p+1}{(n+2)(n+3)} \right)$

b) $a_n = (n+2)^2 \left(\frac{2p-1}{n^2+2n} - \frac{p+2}{n^2+3n} \right)$

77. Dla jakich wartości parametrów a i b zachodzi poniższa równość?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^4 + 5n^3 + 1}{bn^4 - n^3 + 2} = -\infty$

78. Wykaż, że dla każdego $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ jest zbieżny. Wyznacz wartość $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, dla której suma tego szeregu jest równa $\sqrt{2} + 2$.

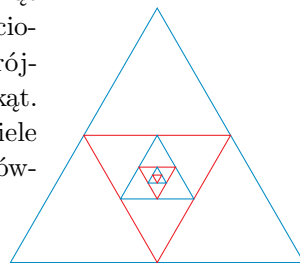
79. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 8. Suma pierwszego i trzeciego wyrazu jest równa 15. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

80. Suma wyrazów o numerach parzystych nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 9. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

81. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 10, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 60. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

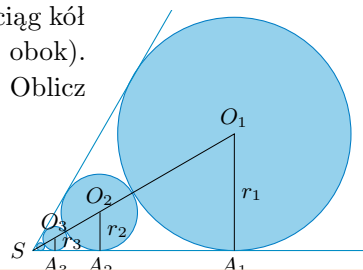
82. W trójkąt równoboczny o boku 1 wpisano trójkąt tak, że jego wierzchołki są środkami boków wyjściowego trójkąta (rysunek obok). W powstały trójkąt wpisano w ten sam sposób następny trójkąt. Opisaną procedurę powtórzono nieskończenie wiele razy i otrzymano nieskończony ciąg trójkątów równobocznych. Oblicz sumę:

- a) obwodów trójkątów czerwonych,
 b) pól trójkątów niebieskich.



83. W kąt o mierze 60° wpisano nieskończony ciąg kół stycznych do siebie zewnętrznio (rysunek obok). Promień największego koła jest równy 3. Oblicz sumę:

- a) obwodów wszystkich tych kół,
 b) pól wszystkich tych kół.



76. a) $a_n = \frac{2pn^2(n+3) - n^2(p+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{pn^3 + 5pn^2 - n^3 - n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^3 + 5pn^2 - n^3 - n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p + \frac{5p}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})} = p - 1 = 6$, czyli $p = 7$

b) $p = 9$

83. $|SO_1| = 2r_1$, $|SO_2| = 2r_2$, $|SO_1| = |SO_2| + r_1 + r_2$, zatem $r_2 = \frac{1}{3}r_1$.

a) Ciąg obwodów: $6\pi, 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \dots$ jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 6π i ilorazie $\frac{1}{3}$. Suma obwodów: $S = \frac{6\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 9\pi$

b) Ciąg pól: $9\pi, \pi, \frac{\pi}{9}, \dots$ jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 9π i ilorazie $\frac{1}{9}$. Suma pól: $S = \frac{9\pi}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{81\pi}{8} = 10\frac{1}{8}\pi$

5.10. Geometria analityczna

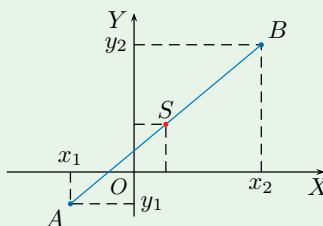
Dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne:

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Długość odcinka AB wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu $Ax + By + C = 0$

wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określone są za pomocą wzoru:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Długość wektora $\vec{u} = [a, b]$ wyraża się za pomocą wzoru: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

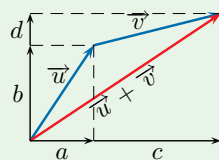
Wektorem przeciwnym do wektora $\vec{u} = [a, b]$ jest wektor $-\vec{u} = [-a, -b]$.

Sumą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$$

Różnicą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$$



Iloczynem wektora $\vec{u} = [a, b]$ przez liczbę $\alpha \in \mathbf{R}$ nazywamy wektor:

$$\alpha \vec{u} = [\alpha a, \alpha b]$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Punkt S jest środkiem odcinka AB . Oblicz a i b .

a) $A(1, -3), B(2, 5), S(a, b)$

c) $A(0, 4), B(a, b), S(2, -1)$

b) $A(-3, a), B(b, 2), S(0, 5)$

d) $A(a, 2), B(2a, b), S(b, a)$

2. Oblicz odległość punktu $A(3, 2)$ od środka odcinka BC .

a) $B(-5, -2), C(3, 0)$

b) $B(7\frac{1}{2}, 2), C(4\frac{1}{2}, -4)$

3. Oblicz obwód trójkąta ABC .

a) $A(2, -1), B(6, 7), C(2, 4)$

b) $A(0, 3), B(2, -1), C(6, 7)$

3. a) $|AB| = 4\sqrt{5}, |AC| = 5, |BC| = 5,$

$$Ob = 10 + 4\sqrt{5}$$

b) $|AB| = 2\sqrt{5}, |AC| = 2\sqrt{13}, |BC| = 4\sqrt{5},$

$$Ob = 6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$$

1. a) $a = \frac{3}{2}, b = 1$

b) $a = 8, b = 3$

c) $a = 4, b = -6$

d) $a = 4, b = 6$

2. a) $S(-1, -1), |AS| = 5$

b) $S(6, -1), |AS| = 3\sqrt{2}$

4. a) $|AB|^2 = 232$,
 $|AC|^2 = 116$, $|BC|^2 = 116$,
 równoramienny
 i prostokątny

- b) $|AB|^2 = 320$,
 $|AC|^2 = 205$,
 $|BC|^2 = 205$,
 równoramienny

- c) $|AB|^2 = 17$,
 $|AC|^2 = 425$,
 $|BC|^2 = 442$,
 prostokątny

- d) $|AB|^2 = 260$,
 $|AC|^2 = 148$, $|BC|^2 = 424$,
 ani prostokątny,
 ani równoramienny

5. a) $y = \frac{11}{2}$

- b) $y = -\frac{1}{3}x + 4$

- c) I sposób

$$a_{AB} = \frac{7+2}{-1-5} = -\frac{3}{2}$$

$$S_{AB} = (2, \frac{5}{2})$$

$$\text{Oś symetrii: } y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$$

- II sposób

$$S(x, y), |AS| = |BS|$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$$

$$\text{Oś symetrii: } y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$$

6. a) Prosta $AB: x + y + 2 = 0$

$$h = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{1+1}} = 4\sqrt{2}$$

$$|AB| = 5\sqrt{2}, P = 20$$

- b) Prosta $AB:$

$$x - 2y + 6 = 0$$

$$h = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) + 6|}{\sqrt{1+4}} = 3\sqrt{5}$$

$$|AB| = 4\sqrt{5}, P = 30$$

7. a) $|AB| = 2\sqrt{5}$

Odległość punktu A od
 prostej $CD: \frac{4}{\sqrt{5}}$

$$P = 2\sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 8$$

- b) 26

8. a) Punkt należący do prostej
 $k: K(0, 2)$

Odległość punktu K od
 prostej $l: d = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

$$\text{b) } K(0, 3), d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

9. a) względem osi OY

b) względem początku układu
 współrzędnych

4. Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest on prostokątny?

a) $A(2, 1), B(16, 7), C(6, 11)$

c) $A(-2, -9), B(2, -10), C(3, 11)$

b) $A(-6, -8), B(10, 0), C(-3, 6)$

d) $A(-4, -5), B(12, -3), C(-6, 7)$

5. Wyznacz równanie osi symetrii odcinka AB .

a) $A(4, -14), B(4, 25)$

b) $A(-2, -2), B(2, 10)$

c) $A(-1, 7), B(5, -2)$

6. Oblicz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C , a następnie pole tego trójkąta.

a) $A(-3, 1), B(2, -4), C(3, 3)$

b) $A(-2, 2), B(6, 6), C(3, -3)$

7. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego bok CD jest zawarty w prostej k .

a) $A(0, 3), B(4, 1), k: y = -\frac{1}{2}x + 5$

b) $A(-1, -3), B(5, -1), k: x = 3y - 5$

8. Oblicz odległość między prostymi k i l .

a) $k: y = -3x + 2, l: y = -3x - 2$

b) $k: y = \frac{1}{2}x + 3, l: y = \frac{1}{2}x - 1$

9. Sprawdź, czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi OX , osi OY lub początku układu współrzędnych.

a) $A(1, 0), B(3, -6), C(-5, -4), D(1, -2)$

b) $A(-3, -1), B(5, 5), C(-4, 2), D(2, -6)$

10. Wyznacz współrzędne punktu B symetrycznego do punktu A względem prostej l .

a) $A(10, 11), l: y - 5 = 0$

c) $A(2, 3), l: x + 3y - 1 = 0$

b) $A(10, 11), l: y = -x$

d) $A(2, 3), l: y = \frac{1}{2}x - 3$

11. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia symetralnych boków trójkąta ABC .

a) $A(-5, 4), B(3, 0), C(7, 8)$

b) $A(-6, 4), B(-1, -1), C(2, 2)$

12. a) Wyznacz współrzędne punktu leżącego na osi OX i równo odległego od prostych $x + y - 8 = 0$ oraz $y = 7x - 14$.

b) Wyznacz współrzędne punktu leżącego na osi OY i równo odległego od prostych $-x + y + 4 = 0$ oraz $2x - y - 7 = 0$.

13. Wyznacz równanie prostej równoległej do podanych prostych oraz równo odległej od każdej z nich.

a) $x - y + 2 = 0, x - y - 5 = 0$

b) $2x - y - 3 = 0, 2x - y + 7 = 0$

10. a) $B(10, -1)$

b) Prosta $AB: y = x + 1, S(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), B(-11, -10)$

c) Prosta $AB: y = 3x - 3, S(1, 0), B(0, -3)$

d) Prosta $AB: y = -2x + 7, S(4, -1), B(6, -5)$

11. a) $(1, 6)$ b) $(-2, 3)$

12. a) $(-13, 0)$ lub $(\frac{9}{2}, 0)$ b) $(0, -2 - \sqrt{10})$ lub $(0, -2 + \sqrt{10})$

13. a) Szukana prosta ma postać $y = x + b$. Należy do niej punkt $P(0, b)$, stąd:

$$\frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot b - 5|}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } b = -\frac{3}{2}$$

$$y = x - \frac{3}{2}$$

b) $2x - y + 2 = 0$

Zestaw II – ćwiczeniowy

14. Dane są punkty $A(-1, 2)$, $B(2, 6)$ i $C(4, 2)$. Wyznacz współrzędne wektora:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, b) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$, c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.
15. Dane są punkty $A(2, 1)$, $B(2, -3)$ i $C(-1, 3)$. Wyznacz współrzędne punktu P , wiedząc, że: a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BP}$, b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$, c) $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{AB}$.
16. Punkty A , B , C i D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku, O zaś jest punktem przecięcia jego przekątnych. Czy prawdziwa jest równość:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$,
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$, d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD}$?
17. Punkty A , B , C i D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz współrzędne punktu D , jeżeli wiadomo, że:
a) $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(1, 6)$, b) $A(3, -1)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 6)$.
18. Dane są punkty $A(0, 0)$ i $B(-3, 2)$. Narysuj w układzie współrzędnych odcinek $A'B'$, który powstał przez przesunięcie odcinka AB o wektor $\vec{v}$. Podaj współrzędne punktów A' i B' .
a) $\vec{v} = [3, 0]$ b) $\vec{v} = [3, 3]$ c) $\vec{v} = [1, -3]$ d) $\vec{v} = [0, -4]$
19. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(2, 2)$, $B(4, 6)$, $C(0, 8)$ i $D(-2, 4)$. Znajdź współrzędne wierzchołków kwadratu otrzymanego przez przesunięcie kwadratu $ABCD$ o wektor $\vec{v}$.
a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ b) $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ c) $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
20. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $A(-3, -2)$, $B(3, 1)$ oraz $\overrightarrow{DB} = [5, -1]$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku oraz oblicz jego pole.

W dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym **środkiem ciężkości** trójkąta. Współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyrażają się wzorami:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

21. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dane są współrzędne wierzchołków $A(-5, 1)$ i $C(3, 7)$ oraz środka podstawy $D(-1, -1)$. Wyznacz współrzędne środka ciężkości tego trójkąta.

19. a) $A'(4, 6)$, $B'(6, 10)$, $C'(2, 12)$, $D'(0, 8)$
b) $A'(0, -2)$, $B'(2, 2)$, $C'(-2, 4)$, $D'(-4, 0)$
c) $A'(1, 0)$, $B'(3, 4)$, $C'(-1, 6)$, $D'(-3, 2)$
20. $\overrightarrow{DB} = [3 - x_D, 1 - y_D] = [5, -1]$, czyli $D(-2, 2)$
 $\overrightarrow{DC} = [x_C + 2, y_C - 2] = \overrightarrow{AB} = [6, 3]$, czyli $C(4, 5)$
Prosta AB : $x - 2y - 1 = 0$
Odległość wierzchołka D od prostej AB : $h = \frac{|1 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$
 $|AB| = 3\sqrt{5}$, stąd $P = 3\sqrt{5} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{5} = 21$
21. $\overrightarrow{DB} = [x_B + 1, y_B + 1] = \overrightarrow{AD} = [4, -2]$, czyli $B(3, -3)$. Środek ciężkości: $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

14. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = [5, 0]$
b) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} = [-3, -4] - [3, 4] = [-6, -8]$
c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = [3, 4] + 2[2, -4] = [7, -4]$
15. a) $[-3, 2] = [x - 2, y + 3]$, czyli $P(-1, -1)$
b) $[0, 4] + [-1 - x, 3 - y] = [-3, 6]$
 $[-1 - x, 7 - y] = [-3, 6]$, czyli $P(2, 1)$
c) $[-1 - x, 3 - y] = 2[0, -4]$, czyli $P(-1, 11)$
16. a) tak, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$
b) tak, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$
c) tak, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{AD}$
d) nie, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$
17. $D(x, y)$ oraz $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$
a) $\overrightarrow{DC} = [1 - x, 6 - y] = [8, 4]$, czyli $D(-7, 2)$
b) $\overrightarrow{DC} = [-1 - x, 6 - y] = [2, 3]$, czyli $D(-3, 3)$
18. a) $A'(3, 0)$, $B'(0, 2)$
b) $A'(3, 3)$, $B'(0, 5)$
c) $A'(1, -3)$, $B'(-2, -1)$
d) $A'(0, -4)$, $B'(-3, -2)$

22. $C(-2, -2)$, $P = 9$

23. a) $x^2 + y^2 = 10$

b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

24. a) $(x + 1)^2 + y^2 = 25$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

c) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$ lub

$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

25. a) $r = 4$

$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$

b) $r = 1$

$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1$

c) $r = \frac{|4 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 - 9|}{5} = 5$

$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$

26. a) $r = 3$, $S(3, 2)$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

b) $S(x_0, 2)$, $r = |x_0|$,

$|BS| = |AS|$

$x_0^2 = (x_0 + 2)^2 + (2 + 2)^2$,

$x_0 = -5$

$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$

27. a) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$,

czyli $S_1(-1, 1)$ i $r_1 = 1$

$|SS_1| = 4$

I przypadek

$r + r_1 = 4$, czyli $r = 3$

Równanie okręgu:

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

II przypadek

$|r - r_1| = 4$, czyli $r = 5$

Równanie okręgu:

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ lub

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$

28. a) styczne wewnętrznie

b) rozłączne zewnętrznie

c) przecinają się

d) styczne zewnętrznie

22. W trójkącie ABC dane są: $A(1, -3)$, $B(4, 2)$ i środek ciężkości $D(1, -1)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka C oraz oblicz pole tego trójkąta.

Okrąg o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

Punkt (x, y) należy do tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C są stałymi, jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$.

23. Wyznacz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt A .

a) $S(0, 0)$, $A(1, 3)$

b) $S(1, 3)$, $A(0, 0)$

c) $S(3, -1)$, $A(0, 3)$

24. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 5, do którego należą punkty A i B .

a) $A(-6, 0)$, $B(4, 0)$

b) $A(-3, -2)$, $B(5, 4)$

c) $A(0, 1)$, $B(1, 2)$

25. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(-1, 4)$, który jest styczny do:

a) osi OX ,

b) osi OY ,

c) prostej $4x - 3y = 9$.

26. Punkt A należy do okręgu stycznego do osi OY w punkcie $B(0, 2)$. Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli: a) $A(6, 2)$, b) $A(-2, -2)$.

27. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(3, 1)$ stycznego do okręgu o podanym równaniu (rozpatrz dwa przypadki).

a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

28. Dany jest okrąg o środku $S(1, 2)$ i promieniu 2. Określ wzajemne położenie tego okręgu oraz okręgu danego równaniem:

a) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$,

c) $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$,

b) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$,

d) $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 25 = 0$.

29. Zbadaj wzajemne położenie okręgów O_1 i O_2 .

a) $O_1: x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0$,

$O_2: x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$

b) $O_1: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$,

$O_2: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

30. Dla jakich wartości parametru m podane równanie opisuje okrąg?

a) $x^2 + y^2 - 2y - m = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2mx - m = 0$

31. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

a) $A(-9, 0)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 4)$

b) $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(3, 5)$

29. a) $O_1: x^2 + (y - 4)^2 = 8$, $S_1(0, 4)$, $r_1 = 2\sqrt{2}$

$O_2: (x - 4)^2 + y^2 = 8$, $S_2(4, 0)$, $r_2 = 2\sqrt{2}$

$|S_1S_2| = 4\sqrt{2} = r_1 + r_2$, więc okręgi są styczne zewnętrznie.

b) $O_1: (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$, $S_1(2, -4)$, $r_1 = 3$

$O_2: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$, $S_2(-3, 2)$, $r_2 = 5$

$|S_1S_2| = \sqrt{61} < r_1 + r_2$

$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$, więc okręgi przecinają się.

30. a) $x^2 + (y - 1)^2 = 1 + m$

$1 + m > 0$, czyli $m > -1$

b) $(x - m)^2 + y^2 = m^2 + m$

$m(m + 1) > 0$, czyli $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

31. a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 40$ b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$

32. Dany jest okrąg o środku $S(-2, 3)$ i promieniu 3. Określ, ile punktów wspólnych ma podana prosta z tym okręgiem.
- a) $3x - 4y + 4 = 0$ b) $y = x + 1$ c) $3x + 4y + 9 = 0$
33. Określ, ile punktów wspólnych ma podana prosta z okręgiem o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
- a) $x - 2y + 18 = 0$ b) $2x - y - 6 = 0$ c) $4x - 3y - 8 = 0$
34. Oblicz odległość między prostymi k i l . Wyznacz równanie okręgu o środku leżącym na osi OX stycznego do obu tych prostych.
- a) $k: y = x + 1, l: y = x - 3$ b) $k: y = -2x - 6, l: y = -2x + 14$
35. Dla jakich wartości parametru m podana prosta jest styczna do okręgu określonego równaniem $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$?
- a) $x - y + m = 0$ b) $x + y + m = 0$ c) $x - 2y + m = 0$
36. Wyznacz równanie okręgu, który jest obrazem okręgu K w symetrii względem prostej l .
- a) $K: (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 16, l: y = x + 1$
b) $K: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 50, l: 2y - x + 2 = 0$
37. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.
- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ y = x + 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0 \end{cases}$
38. Oblicz długość cięciwy okręgu K zawartej w prostej l .
- a) $K: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, l: x - y - 1 = 0$
b) $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0, l: x + 2y - 6 = 0$
39. Oblicz odległość punktu $P(-1, -4)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$ oraz $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$.
40. Punkty $A(0, -4)$ i $D(-3, 0)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, a jego podstawa AB zawiera się w prostej $2x - y = 4$. Prosta $x + 2y - 2 = 0$ jest osią symetrii tego trapezu.
- a) Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trapezu.
b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trapezie.

32. a) $d = \frac{14}{5}$,
dwa punkty wspólne
b) $d = 2\sqrt{2}$,
dwa punkty wspólne
c) $d = 3$,
jeden punkt wspólny
33. a) 2 b) 0 c) 1
34. a) $d = 2\sqrt{2}, (x - 1)^2 + y^2 = 2$
b) $d = 4\sqrt{5}, (x - 2)^2 + y^2 = 20$
35. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$
a) $\frac{|2+1+m|}{\sqrt{2}} = 4$
 $m = -3 + 4\sqrt{2}, m = -3 - 4\sqrt{2}$
b) $\frac{|2-1+m|}{\sqrt{2}} = 4$
 $m = -1 + 4\sqrt{2}, m = -1 - 4\sqrt{2}$
c) $\frac{|2+2+m|}{\sqrt{5}} = 4$
 $m = -4 + 4\sqrt{5}, m = -4 - 4\sqrt{5}$
36. a) $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 16$
b) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 50$
37. a) $x = -1, y = 0$ lub
 $x = 3, y = 4$
b) sprzeczny
c) $x = 3, y = 0$ lub
 $x = 0, y = 3$
d) $x = -4, y = 3$ lub
 $x = -4, y = -3$
38. a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$
39. Przekształcamy równania okręgów:
 $x^2 + y^2 = 6x + 8y - 21$
i $x^2 + y^2 = 2y + 9$, stąd
 $6x + 8y - 21 = 2y + 9$
 $x + y - 5 = 0$
 $d = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) - 5|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

40. a) Wyznaczamy środek podstawy AB :

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}, \text{ czyli } S_{AB}(2, 0)$$

$$\overrightarrow{S_{AB}B} = [x_B - 2, y_B] = \overrightarrow{AS_{AB}} = [2, 4],$$

czyli $B(4, 4)$

Prosta CD : $y = 2x + 6$

Wyznaczamy środek podstawy CD :

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}, \text{ czyli } S_{DC}(-2, 2)$$

$$\overrightarrow{S_{CD}C} = [x_C + 2, y_C - 2] = \overrightarrow{DS_{CD}} = [1, 2],$$

czyli $C(-1, 4)$

b) Środek okręgu leży na osi symetrii,

stąd $S(x, -\frac{1}{2}x + 1)$

$$|AS| = |CS|$$

$$\sqrt{x^2 + (5 - \frac{1}{2}x)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (-\frac{1}{2}x - 3)^2}$$

$x = \frac{3}{2}$, stąd $S(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$

$$r^2 = |AS|^2 = \frac{325}{16}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{325}{16}$$

41. $\begin{cases} x = 2m - 3 \\ y = 1 - m \end{cases}$
 $x \in (-1; 1)$,
czyli $m \in (1; 2)$,
 $y \in (-1; 1)$,
czyli $m \in (0; 2)$
Zatem $m \in (1; 2)$.
42. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - m \end{cases}$
 $1 + (2 - m)^2 = 5$
Zatem $m = 0$ lub $m = 4$.
43. a) $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = -1 \end{cases}$
 $(m - 1)^2 + 1 \leq \frac{25}{16}$
Zatem $m \in \langle \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \rangle$.
- b) $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = m - 1 \end{cases}$
 $(-\frac{3}{4})^2 + (m - 1)^2 \leq \frac{25}{16}$
Zatem $m \in \langle 0; 2 \rangle$.
44. a) $m_1 = -2$, $P_1(-\frac{9}{4}, \frac{3}{4})$,
 $d_1 = \frac{3\sqrt{10}}{4}$;
 $m_2 = 0$, $P_2(-\frac{3}{2}, 3)$, $d_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$
b) $m = 0$, $P(-4, 1)$, $d = \sqrt{17}$
45. $m = 1$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$
46. $a = -2$, $b = 1$,
 $y = 2x + 2$, $y = -x + 5$,
 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$
 $Ob = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$
47. $|AB| = 3\sqrt{5}$, $C(x, 3x + 1)$,
 $h = 2\sqrt{5}$
 $d = \frac{|1 \cdot x + 2(3x + 1) + 1|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$
 $|7x + 3| = 10$
 $x = 1$ lub $x = -\frac{13}{7}$
 $C(1, 4)$ lub $C(-\frac{13}{7}, -\frac{32}{7})$
48. Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
Prosta AC : $y = -2$
 $B(-7, 3)$, $C(-\frac{9}{2}, -2)$
Prosta BC : $y = -2x - 11$

Zestaw III – podsumowujący

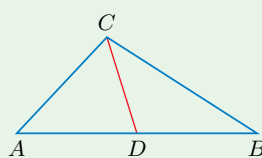
41. Dla jakich wartości parametru m punkt wspólny prostych o równaniach $x + 2y = -1$ i $x - y = 3m - 4$ należy do wnętrza kwadratu o wierzchołkach $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ i $(-1, -1)$?
42. Dla jakich wartości parametru m proste o równaniach $3x - 2y = 2m - 1$ i $x + y = 3 - m$ przecinają się w punkcie należącym do okręgu $x^2 + y^2 = 5$?
43. Dla jakich wartości parametru m punkt wspólny prostych k i l należy do koła ograniczonego okręgiem $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$?
- a) $k: 3x + 4y = 3m - 7$, $l: x - 4y = m + 3$
b) $k: 4x + y = m - 4$, $l: 2x - y = -m - \frac{1}{2}$
44. Dla jakich wartości parametru m proste k i l są prostopadłe? Dla wyznaczonych wartości m oblicz odległość punktu przecięcia tych prostych od początku układu współrzędnych.
- a) $k: mx + 2y - 6 = 0$, $l: 4x + m^2y + 6 = 0$
b) $k: (m^2 - m)x + y - 1 = 0$, $l: (m - 1)x + my - 4 = 0$
45. Dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $2x + my + 1 = 0$ i $2mx + y - 1 = 0$ nie mają punktów wspólnych? Dla wyznaczonej wartości m podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych, który jest styczny do obu tych prostych.
46. Proste o równaniach $ax + y = b + 1$ i $x + by = 1 - 2a$ przecinają się w punkcie $P(1, 4)$. Oblicz obwód trójkąta ABP , gdzie A i B są punktami, w których podane proste przecinają oś OX .
47. Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A(-3, 1)$ i $B(3, -2)$ jest równe 15. Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $y = 3x + 1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .
48. W trójkącie ABC wierzchołek A ma współrzędne $(3, -2)$, a dwie wysokości zawierają się w prostych $y = 2x + 7$ i $x = -7$. Wyznacz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC .
49. Oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta, wiedząc, że punkty $P(-3, 1)$, $R(-2, -6)$, $S(0, 0)$ są środkami jego boków. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.
50. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie ABC od środka jego ciężkości, jeżeli wiadomo, że $A(-8, 0)$, $B(4, -6)$ i $C(-2, 6)$.
49. Niech P , R , S będą odpowiednio środkami boków AB , BC , AC .
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa: $AB \parallel SR$, $BC \parallel PS$
oraz $AC \parallel PR$
Prosta AB : $y = 3x + 10$
Prosta BC : $y = -\frac{1}{3}x - \frac{20}{3}$
Prosta AC : $y = -7x$
Zatem $A(-1, 7)$, $B(-5, -5)$, $C(1, -7)$, $x^2 + y^2 = 50$.
50. Środek okręgu: $O(-1, -1)$
Środek ciężkości: $S(-2, 0)$
 $|OS| = \sqrt{2}$

51. Z punktu $P(2, 0)$ poprowadzono styczną do okręgu $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. Oblicz odległość punktu P od punktu styczności.
52. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC jest zawarta w prostej $2x - y - 3 = 0$ oraz $|AC| = |BC| = 2\sqrt{10}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $C(-3, 1)$.
53. Punkt $A(-4, 4)$ jest wierzchołkiem kwadratu, którego jedna z przekątnych jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 1$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.
54. Punkt $P(0, -2)$ jest środkiem podstawy trójkąta równoramiennego, a punkt $S(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ jest punktem przecięcia się jego środkowych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jedna ze środkowych zawiera się w prostej $7x + y - 8 = 0$.
55. W trójkącie równoramiennym ABC wierzchołek A ma współrzędne $(0, -2)$. Podstawa tego trójkąta zawiera się w prostej $x + y = 6$ i ma długość $4\sqrt{2}$.
a) Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.
b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.
56. Punkt $P(-2, -2)$ jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków jest zawarty w prostej $x - 2y - 2 = 0$. Punkt $S(1, 2)$ jest środkiem symetrii rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz cosinus kąta ostrego tego rombu.
57. Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ prostopadłych do prostej $x - 2y + 1 = 0$.
58. Dla jakich wartości parametru k punkt przecięcia prostych $y = x + k - 3$ i $y = -2x + 10k$ należy do koła o środku $S(1, -2)$ i promieniu 1?
59. Punkt $S(1, 0)$ jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$ oraz $\vec{BC} = [1, 3]$ i $\vec{CD} = [-6, -2]$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku oraz oblicz jego pole.
60. Punkty $A(-5, 2)$ i $B(-1, -2)$ należą do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 11$. Wyznacz współrzędne punktu C należącego do tego okręgu tak, aby trójkąt ABC o podstawie AB był równoramienny.
61. Punkty $A(2, -1)$, $B(5, 2)$ i $C(0, 7)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$, na którym opisano okrąg. Wyznacz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie D .
55. Prosta zawierająca wysokość poprowadzoną z wierzchołka A : $y = x - 2$
a) Środek podstawy BC :
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
 $S_{BC}(4, 2)$
$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
 $B(6, 0), C(2, 4)$ lub $B(2, 4), C(6, 0)$
b) Przyjmijmy, że $B(6, 0)$ i $C(2, 4)$.
Współczynnik kierunkowy prostej AB :
 $a_{AB} = \frac{1}{3}$
Środek boku AB : $S_{AB}(3, -1)$
Symetralna boku AB : $y = -3x + 8$
Środek okręgu:
$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = x - 2 \end{cases}$$
 $S(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$
Promień okręgu: $r^2 = |SA|^2 = \frac{25}{2}$
 $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$
51. A – punkt styczności
 $S(-3, 4)$ – środek okręgu
 $|PS| = \sqrt{41}$, $|SA| = 1$
 $|PA| = 2\sqrt{10}$
52.
$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 40 \end{cases}$$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $A(-1, -5), B(3, 3)$
53. Druga przekątna: $y = -2x - 4$
Punkt przecięcia przekątnych:
 $S(-2, 0)$
 $C(0, -4)$, $|SC| = 2\sqrt{5}$,
$$\sqrt{(x + 2)^2 + (\frac{1}{2}x + 1)^2} = 2\sqrt{5}$$

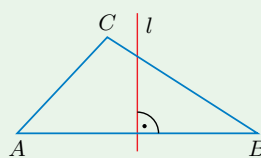
 $B(-6, -2), D(2, 2)$
 $(x + 2)^2 + y^2 = 20$
54. Współczynnik kierunkowy prostej PS : $\frac{1}{2}$
Prosta AB : $y = -2x - 2$
$$\begin{cases} 7x + y - 8 = 0 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

 $B(2, -6), A(-2, 2)$
 $\vec{PC} = 3\vec{PS}$, $C(4, 0)$
56. $(3, \frac{1}{2}), (4, 6), (-1, \frac{7}{2}), \frac{3}{5}$
57. Środek okręgu: $S(-1, 3)$,
 $r = \sqrt{5}$
Styczne: $y = -2x + b$,
 $\frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 - b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 $b = -4$ lub $b = 6$
 $y = -2x - 4$, $y = -2x + 6$
58. $((3k + 1) - 1)^2 + ((4k - 2) + 2)^2 \leq 1$
 $k \in \langle -\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \rangle$
59. $A(-2, -1), B(4, 1), C(5, 4), D(-1, 2), P = 16$
60. Wysokość trójkąta równoramiennego ABC zawarta jest w prostej $y = x + 3$.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y = 11 \\ y = x + 3 \end{cases}$$
 $x^2 + 2x - 7 = 0$
Zatem:
 $C(-2\sqrt{2} - 1, -2\sqrt{2} + 2)$
lub $C(2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} + 2)$.
61. $D(-3, 4), y = 4x + 16$

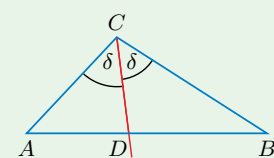
5.11. Planimetria



Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku (np. odcinek CD).

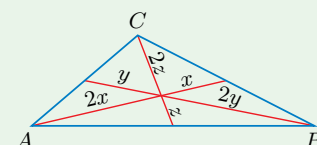


Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku i przechodząca przez jego środek (np. prosta l).

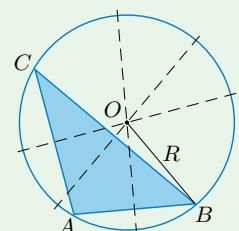
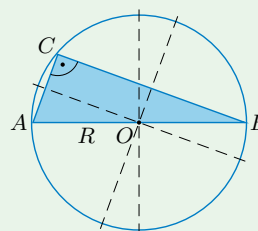
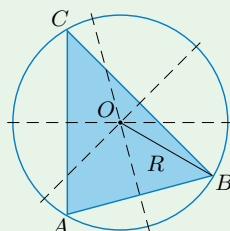


Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (np. półprosta CD).

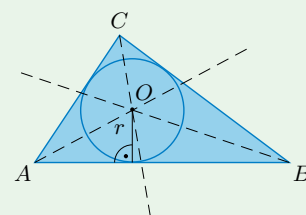
Punkt przecięcia się środkowych trójkąta (środek ciężkości) dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka.



Symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.



Dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.



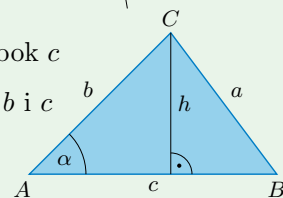
Wzory na pole trójkąta

$P = \frac{1}{2}ch$, gdzie h jest wysokością opuszczoną na bok c

$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, gdzie α jest kątem między bokami b i c

$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt

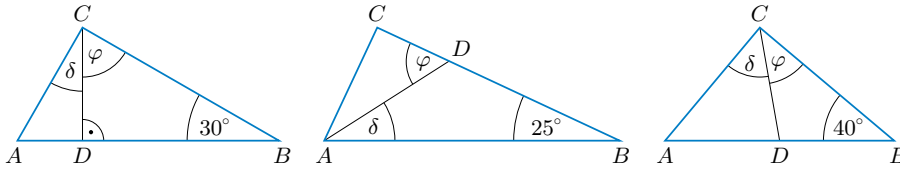
$P = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie



Zestaw I – wprowadzający

1. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C . Oblicz miary kątów δ i φ , jeśli wiadomo, że odcinek:

- a) CD jest wysokością, b) AD jest zawarty c) CD jest środkową.
w dwusiecznej,



Wskazówka do podpunktu c). W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

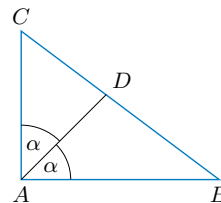
2. Długość jednej z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 3. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

- a) wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\sqrt{5}$,
b) środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest równa 2,5,
c) odcinek dwusiecznej kąta prostego zawarty w trójkącie jest równy $2\sqrt{2}$.

Wskazówka do podpunktu c). Zapisz pole trójkąta jako sumę pól trójkątów, na które podzieliła go dwusieczna.

3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm i 4 cm. Oblicz:

- a) długości środkowych tego trójkąta,
b) wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną,
c) długość odcinka AD (rysunek obok).

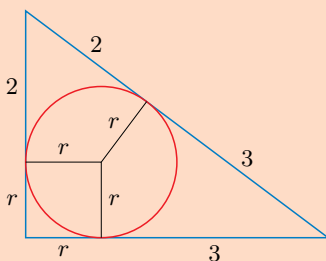


4. Dwa boki trójkąta mają długości $3\sqrt{3}$ i 6, a kąt między nimi zawarty ma miarę 30° . Oblicz:

- a) pole tego trójkąta, b) wszystkie wysokości tego trójkąta.

5. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 18 cm. Środkowe tego trójkąta przecinają się w punkcie P . Oblicz sumę odległości punktu P od wierzchołków tego trójkąta.

6. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Przeciwprostokątna została podzielona przez punkt styczności z okręgiem na odcinki o długościach 2 cm i 3 cm. Oblicz długości przyprostokątnych oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.



$$(2+r)^2 + (3+r)^2 = 5^2, r > 0$$

$$r^2 + 5r - 6 = 0$$

Zatem $r = 1$ cm, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm.

1. a) $\delta = 30^\circ, \varphi = 60^\circ$
b) $\delta = 32^\circ 30', \varphi = 57^\circ 30'$
c) $\delta = 50^\circ, \varphi = 40^\circ$

2. x – druga przyprostokątna
 y – przeciwprostokątna
 $x, y > 0$

$$\text{a) } \frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{5}y}{2}, \text{ więc } y = \frac{3x}{\sqrt{5}}$$

$$3^2 + x^2 = \left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x = \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = \frac{9}{2}$$

$$\text{b) } y = 2 \cdot 2,5 = 5, x = 4$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot x \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3x$$

$$x = 6, y = 3\sqrt{5}$$

3. a) $\frac{5}{2}$ cm, $\sqrt{13}$ cm, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ cm

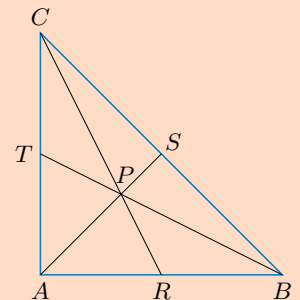
$$\text{b) } \frac{12}{5} \text{ cm}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |AD| \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$$

$$|AD| = \frac{12\sqrt{2}}{7} \text{ cm}$$

4. a) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3, 3\sqrt{3}$

5.



$$|AB| = |AC| = 9\sqrt{2} \text{ cm}$$

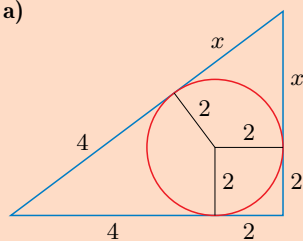
$$|CR| = |BT| = \frac{9\sqrt{10}}{2} \text{ cm}$$

$$|AS| = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{3} \left(2 \cdot \frac{9\sqrt{10}}{2} + 9 \right) =$$

$$= 6(\sqrt{10} + 1) [\text{cm}]$$

7. a)



$$6^2 + (2 + x)^2 = (4 + x)^2$$

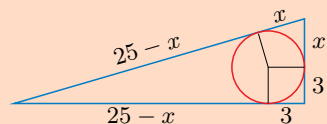
$$x = 6 \text{ cm}, 2 \text{ cm} + x = 8 \text{ cm}$$

$$P = 24 \text{ cm}^2$$

b) $c = 8 \text{ cm}, b = 2\sqrt{7} \text{ cm}$

$$P = 6\sqrt{7} \text{ cm}^2$$

8.



$$(x + 3)^2 + (3 + 25 - x)^2 = 25^2$$

$$x = 4 \text{ lub } x = 21$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 = 84$$

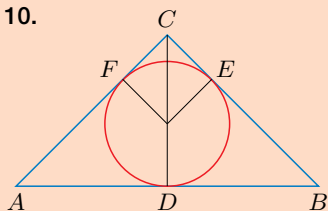
9. $|CD| = r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC

$$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{6+8+10}{2} \cdot r$$

$$r = 2$$

$$|AD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

10.



$$|AC| = |BC| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|AF| = |AD| = 4 \text{ cm}$$

Punkt styczności dzieli ramię trójkąta na odcinki o długościach: $4(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$, 4 cm .

11. $2x, 2x, 2\sqrt{3}x$ – długości boków trójkąta

x – wysokość trójkąta

Korzystamy ze wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot x = \frac{2x \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x}{4 \cdot 5}$$

czyli $2x = 5$

Długości boków trójkąta:

$5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 5\sqrt{3} \text{ cm}$

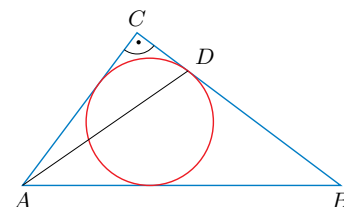
7. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o jednej z przyprostokątnych długości 6 cm , jeśli wiadomo, że:

a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2 cm ,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 4 cm .

8. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy $12,5$, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 . Oblicz pole tego trójkąta.

9. Dane są długości boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok): $|AB| = 10$, $|BC| = 8$ i $|AC| = 6$. D jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z bokiem BC . Oblicz długość odcinka AD .



10. Podstawa w trójkącie równoramiennym ma długość 8 cm , a wysokość na nią opuszczona jest równa 4 cm . W trójkąt ten wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na które ramię trójkąta zostało podzielone przez punkt styczności z okręgiem.

11. W okrąg o promieniu 5 cm wpisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° . Oblicz długości boków tego trójkąta.

12. Na okręgu o promieniu 6 cm opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 150° . Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha BBB: jeśli długości trzech boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

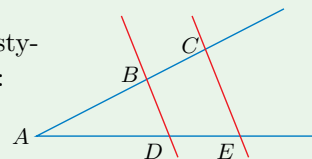
Cecha BKB: jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Cecha KKK: jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

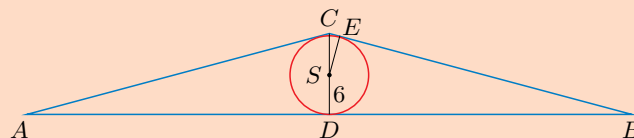
Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta A przetniemy dwiema prostymi równoległymi BD i CE (rysunek obok), to:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}, \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$



12.



$$\frac{6}{|SC|} = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

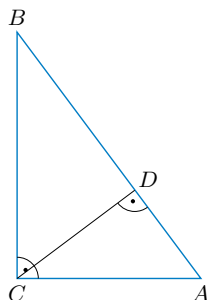
$$|SC| = \frac{24}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ [cm]}$$

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|DB|}{6(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)} = \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 2 + \sqrt{3}$$

$$|DB| = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{3}) = 6(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) \text{ [cm]}$$

$$|AB| = 12(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) \text{ cm}$$

13. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość CD (rysunek obok). Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ABC , ADC i BCD , jeśli wiadomo, że $|AD| = 3$ oraz $|CD| = 4$.

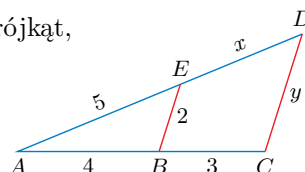


14. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki o długościach 4 cm i 9 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

15. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1:4. Oblicz stosunek:

- a) pól trójkątów, na które wysokość dzieli ten trójkąt,
b) długości przyprostokątnych tego trójkąta.

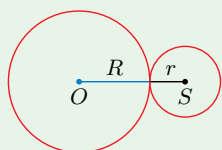
16. Odcinki BE i CD są równoległe (rysunek obok). Oblicz x i y .



17. W trójkącie ABC poprowadzono dwie proste równoległe do boku AB . Podzieliły one trójkąt na trzy figury o równych polach. Oblicz długości odcinków, na które te proste podzieliły bok AC , jeśli ma on długość $3\sqrt{3}$.

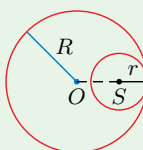
Okręgi styczne (mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie



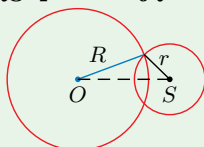
$$|OS| = R + r$$

styczne wewnętrznie



$$|OS| = |R - r|$$

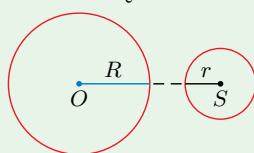
Okręgi przecinające się (mają dwa punkty wspólne)



$$|R - r| < |OS| < R + r$$

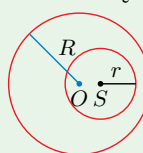
Okręgi rozłączne (nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



$$|OS| > R + r$$

rozłączne wewnętrznie



$$|OS| < |R - r|$$

17. $\triangle ABC \sim \triangle DEC \sim \triangle FGD$ (z cechy KKK), stąd:

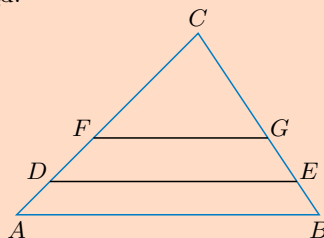
$$\frac{P_{FGC}}{P_{ABC}} = \frac{1}{3}, \text{ więc skala podobieństwa } k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Zatem } \frac{|FC|}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ czyli } |FC| = 3.$$

$$\frac{P_{DEC}}{P_{ABC}} = \frac{2}{3}, \text{ więc skala podobieństwa } k_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Zatem } \frac{|DF|+3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ czyli } |DF| = 3\sqrt{2} - 3.$$

$$|AD| = 3\sqrt{3} - |FC| - |DF| = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$



13. $|CA| = 5$
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ (z cechy KKK), stąd:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{3}{4},$$

$$\text{czyli } |BC| = \frac{20}{3} \text{ i } |BD| = \frac{16}{3}$$

Obliczamy wysokości, korzystając ze wzoru:

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Szukane wysokości:

$$h_{ABC} = \frac{5}{3}, h_{ACD} = 1,$$

$$h_{CBD} = \frac{4}{3}$$

14. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu 13, wówczas:

$\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (z cechy KKK), stąd:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}, \text{ czyli}$$

$$|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ [cm]}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$|CA| = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$|BC| = 3\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$Ob = (13 + 5\sqrt{13}) \text{ cm}$$

15. a) 1:4 b) 1:2

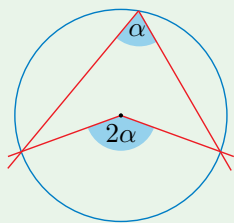
16. $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (z cechy KKK), stąd:

$$\frac{4}{7} = \frac{5}{5+x}, \text{ więc } x = \frac{15}{4}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{2}{y}, \text{ więc } y = \frac{7}{2}$$

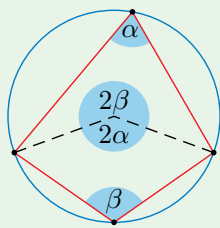
18. a) $3 - \sqrt{5} < 2\sqrt{5} < 3 + \sqrt{5}$
 Okręgi przecinają się.
 b) $2\sqrt{5} > 1 + 2$
 Okręgi są rozłączne zewnętrznie.
 c) $2\sqrt{5} = 2(\sqrt{5} - 1) + 2$
 Okręgi są styczne zewnętrznie.
 d) $3,5 - 1,5 < 2\sqrt{5} < 3,5 + 1,5$
 Okręgi przecinają się.
19. a) $|x + 3 + 2| = 6$,
 gdzie $x > -3$
 $x = 1$
 b) $|x + 3 - 2| = 6$,
 gdzie $x > -3$
 $x = 5$
20. a) 0 punktów dla
 $x \in \langle 0; 4 \rangle \cup \langle 6; \infty \rangle$,
 1 punkt dla $x \in \{4, 6\}$,
 2 punkty dla $x \in (4; 6)$
 b) 0 punktów dla
 $x \in \langle 0; 2\sqrt{3} - 2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$,
 1 punkt dla $x \in \{2\sqrt{3} - 2, 2\}$,
 2 punkty dla $x \in (2\sqrt{3} - 2; 2)$
21. 0 punktów dla
 $r \in (0; 2\frac{1}{3}) \cup (4\frac{1}{3}; \infty)$,
 1 punkt dla $r \in \{2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\}$,
 2 punkty dla $r \in (2\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3})$

18. Dane są dwa okręgi o promieniach r i R . Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość między ich środkami wynosi $2\sqrt{5}$ oraz:
 a) $r = \sqrt{5}$, $R = 3$,
 b) $r = 1$, $R = 2$,
 c) $r = 2$, $R = 2(\sqrt{5} - 1)$,
 d) $r = 1,5$, $R = 3,5$.
19. Promienie dwóch okręgów są równe 2 i $x + 3$, a odległość między ich środkami jest równa 6. Dla jakiej wartości x okręgi te są:
 a) styczne zewnętrznie,
 b) styczne wewnętrznie?
20. Dane są dwa okręgi o promieniach r i R , a odległość między ich środkami jest równa x . Określ liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od x .
 a) $r = 1$, $R = 5$
 b) $r = \sqrt{3}$, $R = 2 - \sqrt{3}$
21. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek CD jest wysokością, a przyprostokątne mają długości $|AC| = 5$ i $|BC| = 2\sqrt{5}$. Dane są również dwa okręgi: pierwszy o środku w wierzchołku C i promieniu 1, drugi o środku w punkcie D i promieniu r . Podaj liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od r .
22. Dwa okręgi styczne zewnętrznie wpisano w kąt o wierzchołku P . Oblicz promień tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość punktu P od jednego ze środków okręgów wynosi 6 cm, a od drugiego – 14 cm.

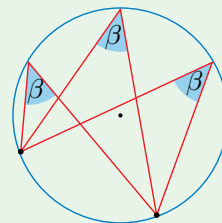


Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta wpisanego w ten okrąg opartego na tym samym łuku.

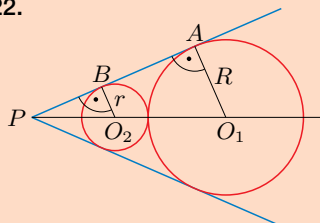
Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku po lewej, jest równa 180° .



22.



Trójkąty PBO_2 i PAO_1 są podobne (KKK).

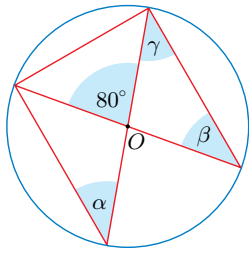
$$\frac{R}{r} = \frac{14}{6}$$

$$R + r = |PO_1| - |PO_2| = 8$$

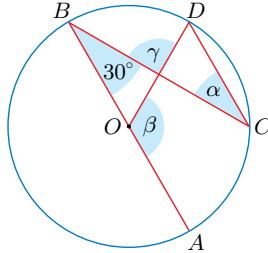
$$r = 2,4 \text{ cm}, R = 5,6 \text{ cm}$$

23. Wyznacz miary kątów α , β i γ .

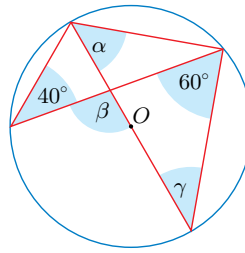
a)



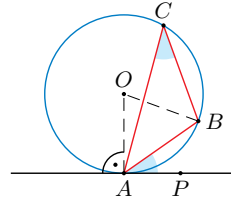
b) $AB \parallel CD$



c)



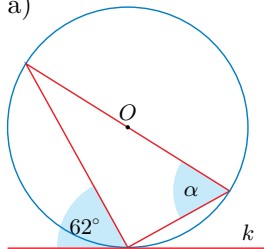
- D** 24. Uzasadnij, że kąt PAB między styczną do okręgu a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu ACB opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy (rysunek obok).



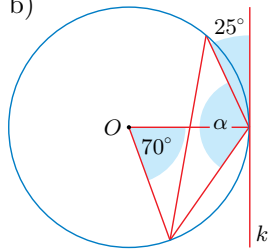
25. W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB . Miara kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B wynosi 58° . Wyznacz miary kątów trójkąta AOB .

26. Prosta k jest styczna do okręgu o środku O . Wyznacz miarę kąta α .

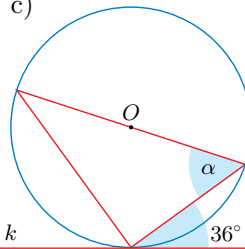
a)



b)



c)



27. W okręgu o promieniu 3 cm cięciwa AB wyznacza łuk o długości $\frac{\pi}{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A .

28. a) Podaj miary kątów wewnętrznych dziesięciokąta i dwunastokąta foremnego.

Wielokąt nazywamy **foremnym**, jeśli ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające.

D b) Wykaż, że kąty wewnętrzne n -kąta foremnego mają miarę $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

29. Oblicz długość boku wielokąta foremnego o obwodzie równym 20, jeśli suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta jest równa: a) 540° , b) 1440° .

28. a) Dziesięciokąt foremny: 144°

Dwunastokąt foremny: 150°

b) Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta foremnego jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Zatem miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest równa $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

29. a) $(n-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$, więc $n = 5$, $a = 20 : 5 = 4$

b) $(n-2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$, więc $n = 10$, $a = 20 : 10 = 2$

23. a) $\alpha = \beta = \gamma = 40^\circ$

b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 40^\circ$

24. $\angle PAB = 90^\circ - \angle OAB =$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) =$$

$$= \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ACB$$

25. $\angle A = \angle B = 32^\circ$, $\angle O = 116^\circ$

26. a) 62° b) 120° c) 54°

27. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu 24, wówczas:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\angle AOB}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3,$$

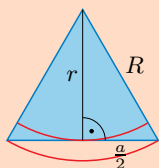
czyli $\angle AOB = 30^\circ$

$$\angle PAB = \angle ACB =$$

$$= \frac{1}{2} \angle AOB = 15^\circ$$

30. a) $\frac{\pi}{4}$

b)



Z twierdzenia Pitagorasa:

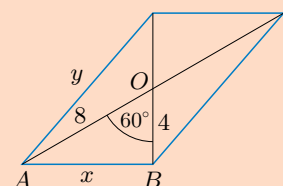
$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$$

Zatem:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi \frac{a^2}{4}$$

31. 70°

32.



$$x = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

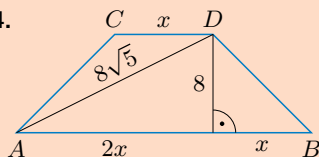
$$y^2 = (4\sqrt{3})^2 + 8^2,$$

$$\text{czyli } y = 4\sqrt{7}$$

$$\text{Zatem } Ob = 8(\sqrt{3} + \sqrt{7}).$$

33. 6 cm

34.



$$(2x)^2 + 8^2 = (8\sqrt{5})^2,$$

skąd $x = 8$ cm. Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 32 = 128 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$|AC| = |BD| = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$Ob = 16(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

Zestaw II – ćwiczeniowy

30. a) Bok sześciokąta foremnego ma długość 1. Oblicz różnicę pola koła opisanego na tym sześciokącie i pola koła w niego wpisanego.

D b) Wykaż, że dla dowolnego wielokąta foremnego o boku długości a różnica pola koła opisanego na tym wielokącie i pola koła w niego wpisanego jest równa $\frac{\pi}{4}a^2$.

31. Kąt ostry rombu ma miarę 70° . Oblicz miarę kąta zawartego między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego.

32. Przekątne równoległoboku mają długości 16 i 8, a kąt zawarty między nimi ma miarę 60° . Oblicz obwód tego równoległoboku.

33. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 9 cm, a punkt przecięcia jego przekątnych dzieli je w stosunku 2:3. Oblicz długość krótszej podstawy.

34. W trapezie równoramiennym przekątna ma długość $8\sqrt{5}$ cm, wysokość jest równa 8 cm, a stosunek długości podstaw wynosi 1:3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

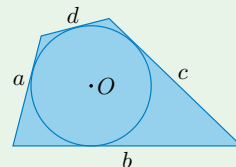
35. a) Wykaż, że długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.

D b) Wysokość trapezu jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki jego ramion ma długość 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$



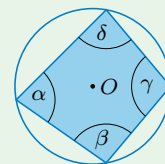
Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych tego czworokąta.

Okrąg opisany na czworokącie

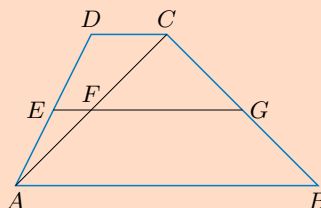
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180° :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Środek okręgu opisanego na czworokącie jest punktem przecięcia się symetrycznych boków tego czworokąta.



35. a)



Punkty E, F, G są odpowiednio środkami odcinków AD, AC, BC .

$\triangle EAF \sim \triangle DAC$ (BKB), więc $\frac{|EF|}{|CD|} = \frac{1}{2}$ i $EF \parallel CD$

$\triangle FCG \sim \triangle ACB$ (BKB), więc $\frac{|FG|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ i $FG \parallel AB$

Zatem $|EG| = |EF| + |FG| = \frac{1}{2}|CD| + \frac{1}{2}|AB| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$.

b) $P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ [cm}^2\text{]}$

- 36.** Uzasadnij.
- Jeśli trapez jest równoramienny, to można na nim opisać okrąg.
 - Jeśli na trapezie można opisać okrąg, to jest on równoramienny.

37. W trapez równoramienny wpisano okrąg. Oblicz obwód i pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego:

- ramię ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego jest równy 2,5 cm,
- podstawy mają długości 4 cm i 16 cm,
- kąt ostry ma miarę 60° , a promień okręgu opisanego na tym trapezie jest równy 1 cm.

38. Na okręgu o promieniu 1,5 opisano trapez o kątach przy dłuższej podstawie 30° i 60° . Oblicz pole tego trapezu.

39. a) W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 60° , ramię ma długość 2 cm, a przekątna – $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

b) Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 8 cm. Kąt nachylenia jego przekątnej do tej podstawy ma miarę 30° , a wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trapezie.

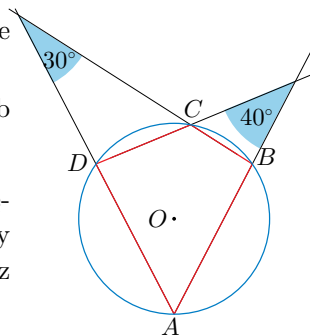
40. Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa promieniowi okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.

41. Wykaż, że jeżeli w trapez równoramienny można wpisać okrąg, to wysokość trapezu jest średnią geometryczną długości jego podstaw.

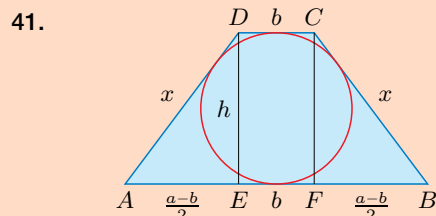
42. a) Wyznacz pole koła wpisanego w romb o kącie ostrym α i boku a .

b) Wyznacz promień okręgu wpisanego w romb o polu P i kącie ostrym α .

43. W okrąg wpisano czworokąt $ABCD$. Kąt między prostymi AB i DC wynosi 40° , a między prostymi AD i BC – 30° (rysunek obok). Oblicz miary kątów tego czworokąta.



44. Z punktu P odległego od środka okręgu o 10 poprowadzono sieczną. Sieczna przecięła okrąg w punktach A i B takich, że $|PA| = |AB| = 4\sqrt{2}$. Oblicz promień tego okręgu.



Trapez można opisać na okręgu, więc $2x = a + b$, czyli $x = \frac{a+b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED :

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{4ab}{4} = ab$$

Zatem $h = \sqrt{ab}$.

42. a) $\frac{\pi}{4} a^2 \sin^2 \alpha$

b) $\frac{1}{2} \sqrt{P} \sin \alpha$

43. $\sphericalangle A = 55^\circ$, $\sphericalangle B = 95^\circ$, $\sphericalangle C = 125^\circ$, $\sphericalangle D = 85^\circ$

44. Z twierdzenia o siecznych:

$$|PA| \cdot |PB| = (|PO| - r)(|PO| + r)$$

$$4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = (10 - r)(10 + r)$$

$$64 = 100 - r^2$$

$$r = 6$$

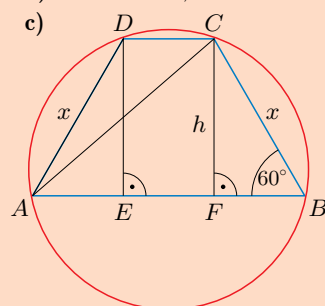
36. a) Jeżeli α jest kątem ostrym trapezu równoramiennego, to kąty trapezu wynoszą: α , α , $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \alpha$, więc suma przeciwległych kątów jest równa $\alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$. Zatem na trapezie można opisać okrąg.

b) Załóżmy, że na trapezie można opisać okrąg. Wówczas $\alpha + (180^\circ - \beta) = 180^\circ$, stąd $\alpha = \beta$. Zatem trapez jest równoramienny.

37. a) $Ob = 24$ cm, $P = 30$ cm²

b) $Ob = 40$ cm, $P = 80$ cm²

c)



$$|AE| = |FB| = \frac{x}{2} \text{ oraz}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Trapez jest opisany na okręgu, więc $|AB| + |DC| = 2x$, skąd $|DC| = |EF| = \frac{x}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFC :

$$|AF|^2 + h^2 = |AC|^2,$$

$$\text{skąd } |AC| = \frac{x\sqrt{7}}{2}.$$

W okrąg o promieniu 1 cm, w który jest wpisany trapez, jest również wpisany trójkąt ABC .

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot x \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 2},$$

$$\text{czyli } x = \frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

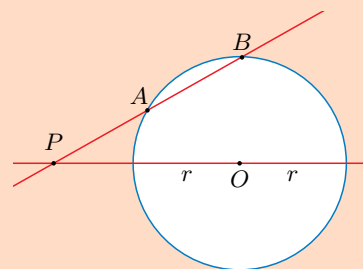
$$\text{Zatem } Ob = \frac{8\sqrt{21}}{7} \text{ cm,}$$

$$P = \frac{6\sqrt{3}}{7} \text{ cm}^2.$$

38. $3(3 + \sqrt{3})$

39. a) 2 b) 16π

40. 45 cm²

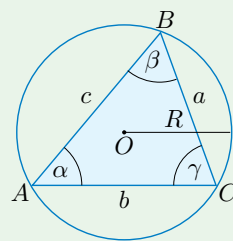


45. a) $a = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$,
 $b = 2(3 - \sqrt{3})$, $\gamma = 75^\circ$
 b) $a = 6(1 + \sqrt{3})$,
 $c = 3(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$, $\gamma = 120^\circ$
46. a) $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
 b) $\alpha = 105^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 c) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ lub
 $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 d) $\alpha = 105^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
 lub $\alpha = 15^\circ$, $\gamma = 135^\circ$
47. a) $\frac{12}{\sin 135^\circ} = 2R$
 $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) =$
 $= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $R = 6\sqrt{2}$
 b) $\frac{x}{\sin 120^\circ} = 10$
 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = 5\sqrt{3}$
48. a) $3\sqrt{3}$ b) 7
49. $x, 2x$ – długości pozostałych boków trójkąta
 $9^2 = x^2 + (2x)^2 +$
 $- 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos 60^\circ$
 $81 = 3x^2$
 $x = 3\sqrt{3}$
 Pozostałe boki mają długości:
 $3\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$.
50. a) $9^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{1}{10} > 0$, więc trójkąt
 nie jest rozwartokątny.
 b) $10^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = -0,625 < 0$, więc
 trójkąt jest rozwartokątny.

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



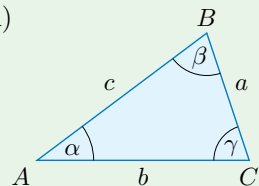
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



45. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta, w którym:
 a) $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$, c) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 9$, $\alpha = 30^\circ$,
 b) $b = 8$, $c = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$, d) $b = 2\sqrt{2}$, $c = 4$, $\beta = 30^\circ$.
46. Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.
 a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $c = 2\sqrt{3}$ b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $b = 6$
47. a) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12, a jeden z kątów ma miarę 135° .
 Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
 b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 5 ma miarę 120° .
 Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.
48. Oblicz długość boku c trójkąta, w którym:
 a) $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$, b) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2$, $\gamma = 150^\circ$.
49. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 60° , a bok położony naprzeciwko tego kąta ma długość 9. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli wiadomo, że jeden z nich jest dwa razy dłuższy od drugiego.
50. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest rozwartokątny.
 a) $a = 5$, $b = 8$, $c = 9$ b) $a = 10$, $b = 4$, $c = 7$
51. Długości boków równoległoboku są równe 4 i $4\sqrt{3}$, a jeden z kątów ma miarę 30° . Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
52. Jeden z boków równoległoboku ma długość 7, a przekątne mają długości 6 i 10. Oblicz miarę kąta rozwartego zawartego między przekątnymi tego równoległoboku oraz długość jego drugiego boku.

51. $d_1^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$

$$d_1 = 4$$

$$d_2^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d_2 = 4\sqrt{7}$$

52. $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 120^\circ$$

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

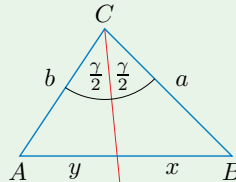
$$x = \sqrt{19}$$

53. Dany jest trapez prostokątny, którego dłuższa podstawa ma długość 6, ramię ma długość $3\sqrt{2}$ i tworzy z podstawą kąt ostry α , a krótsza przekątna ma długość $\sqrt{6}$. Oblicz $\sin \alpha$ i obwód tego trapezu.
54. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem prostym w punkcie P oraz $|AP| = 6$. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.
55. W trójkącie równobocznym ABC o obwodzie 6 na boku AC wybrano punkt P taki, że $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{5}$. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie APB .

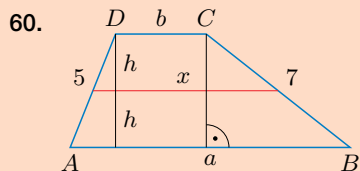
Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok tego trójkąta na odcinki proporcjonalne do jego pozostałych boków.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$



56. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 60° . Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie D . Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $|AD| = 2$ i $|BD| = 6$.
57. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość 6 cm. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D i dzieli go w stosunku 2:1. Oblicz obwody trójkątów ACD i ABD .
58. Na kole o promieniu 2 opisano trapez równoramienny o kącie ostrym 75° . Oblicz pole i obwód tego trapezu.
59. W okrąg o promieniu 3 wpisano czworokąt. Jedna z przekątnych tego czworokąta jest średnicą okręgu, a jeden z jego kątów ma miarę 135° . Oblicz długość drugiej przekątnej tego czworokąta.
60. Ramiona trapezu mają długości równe 5 i 7, a odcinek łączący ich środki dzieli trapez na części, których pola są w stosunku 1:2. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że można go opisać na okręgu.
61. Jedno z ramion trapezu ma długość 5 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 60° . Długość dłuższej podstawy jest równa 8. Na trapezie tym można opisać okrąg. Oblicz promień tego okręgu.
62. W trójkąt ABC wpisano okrąg o promieniu 1. Bok BC został podzielony przez punkt styczności D na odcinki długości $|BD| = 7$ i $|DC| = 3$. Oblicz sinus kąta ABC i długości boków AB i AC tego trójkąta.

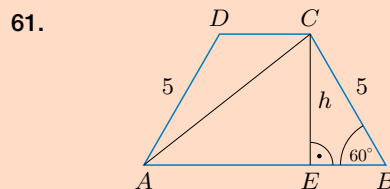


Trapez można opisać na okręgu, więc $a + b = 12$ i stąd $x = 6$.

$$P_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot 2h = 12h$$

$$\frac{1}{3} \cdot 12h = \frac{(b+6) \cdot h}{2}, \text{ czyli } b = 2$$

$$\frac{2}{3} \cdot 12h = \frac{(a+6) \cdot h}{2}, \text{ skąd } a = 10$$



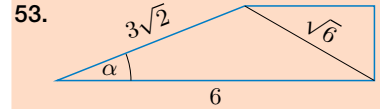
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 80 \cos 60^\circ = 49,$$

$$\text{skąd } |AC| = 7$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów: } \frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R,$$

$$\text{skąd } R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



$$(\sqrt{6})^2 = (3\sqrt{2})^2 + 6^2 +$$

$$-2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9},$$

$$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}), \text{ więc } \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$Ob = 6 + 3\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4(2 + \sqrt{2})$$

54. $10\sqrt{2}\pi$

55. $|AP| = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

$$|BP|^2 = (\frac{1}{3})^2 + 2^2 +$$

$$-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cos 60^\circ = \frac{31}{9},$$

$$\text{czyli } |BP| = \frac{\sqrt{31}}{3}$$

Korzystamy ze wzorów:

$$P = \frac{abc}{4R} \text{ i } \alpha P = \frac{1}{2} ab \sin$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \sin 60^\circ = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{31}}{3}}{4R},$$

$$\text{czyli } R = \frac{\sqrt{93}}{9}$$

$$\text{Pole koła: } \frac{31}{27}\pi$$

56. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku wyżej.

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{2}, \text{ czyli } a = 3b$$

Z twierdzenia cosinusów:

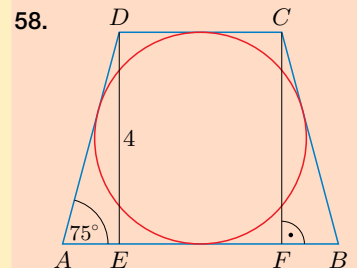
$$8^2 = (3b)^2 + b^2 +$$

$$-2 \cdot 3b \cdot b \cdot \cos 60^\circ$$

$$b = \frac{8\sqrt{7}}{7}, a = \frac{24\sqrt{7}}{7}, c = 8$$

57. $Ob_{ACD} = 3(\sqrt{3} + 1)$ cm,

$$Ob_{ABD} = 2(2\sqrt{3} + 3)$$
 cm



$$\frac{4}{|AD|} = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$|AD| = \frac{16}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\text{Trapez jest opisany na okręgu, więc } |AB| + |DC| = |AD| + |BC| = 8(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

$$P = \frac{8(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 4}{2} =$$

$$= 16(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

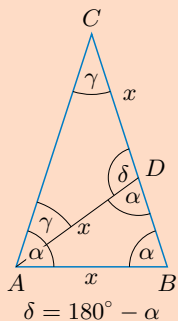
$$Ob = 16(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

59. $3\sqrt{2}$

62. $\sin \angle ABC = \frac{7}{25},$

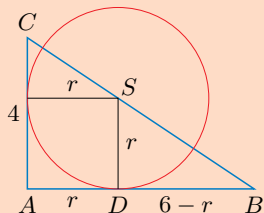
$$|AB| = 7,5, |AC| = 3,5$$

63.



$\delta = 180^\circ - \alpha$
 $2\gamma + (180 - \alpha) = 180^\circ$,
 skąd $\alpha = 2\gamma$. Ponadto:
 $2\alpha + \gamma = 180^\circ$,
 czyli $5\gamma = 180^\circ$, skąd
 $\gamma = 36^\circ$ oraz $\alpha = 72^\circ$.

64.

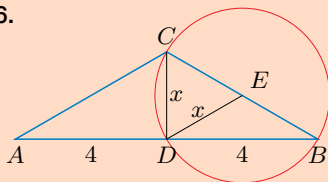


Trójkąty ABC i DBS są podobne (KKK):

$$\frac{4}{r} = \frac{6}{6-r}, \text{ stąd } r = 2,4 \text{ cm.}$$

65. $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = \frac{1}{2}$,
 $P = 24\sqrt{3}$

66.



Trójkąt DBC jest prostokątny, więc środkowa DE jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zatem $|CE| = |DE| = x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DCB :

$$x^2 + 4^2 = (2x)^2$$

Stąd $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm oraz

$$|BC| = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

$$P_{ABC} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

67. 2,4

69. $P = 60\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $Ob = 44 \text{ cm}$ 70. od podstawy: 3,5 cm,
od ramienia: 2,1 cm

Zestaw III – podsumowujący

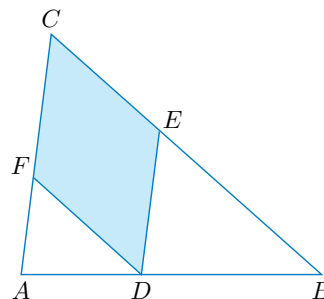
63. Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek AB . Na boku BC istnieje punkt D taki, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

64. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu stycznego do obu przyprostokątnych, którego środek należy do przeciwprostokątnej.

65. Na boku AD prostokąta $ABCD$ obrano taki punkt E , że trójkąty ABE , DEC i EBC są podobne. Wyznacz skale podobieństwa $\triangle ABE$ do $\triangle DEC$, $\triangle DEC$ do $\triangle EBC$, $\triangle ABE$ do $\triangle EBC$ i oblicz pole trójkąta BEC , jeśli wiadomo, że $\angle ECD = 60^\circ$ i $|DC| = 6$.

66. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 cm. Wysokość CD równa jest długości odcinka DE łączącego środek podstawy ze środkiem ramienia. Oblicz długość ramienia oraz pole tego trójkąta.

67. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AC| = 4$ i $|BC| = 6$. Na bokach tego trójkąta obrano punkty D , E i F takie, że czworokąt $DECF$ jest rombem (rysunek obok). Oblicz długość boku tego rombu.



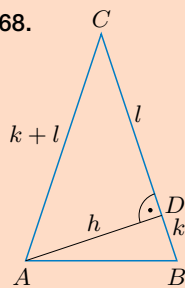
68. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB wysokość AD podzieliła bok BC na odcinki długości $|BD| = k$ i $|CD| = l$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2k(k+l)}$.

69. W trapezie równoramiennym kąty przy krótszej podstawie mają miarę dwa razy większą niż kąty przy dłuższej podstawie. Dłuższa podstawa ma długość 16 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

70. Długości podstaw trapezu prostokątnego są równe 7 cm i 3 cm, a ramię prostopadłe do podstaw ma długość 5 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od dłuższej podstawy i ramienia prostopadłego do podstaw.

71. Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a i b ($a > b$), a kąt ostry ma miarę α . Wyznacz pole czworokąta, który powstał przez połączenie odcinkami środków sąsiednich boków tego trapezu.

68.



Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle ADC$:

$$h^2 + l^2 = (k+l)^2,$$

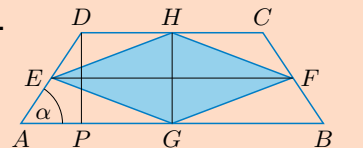
$$\text{czyli } h^2 = k^2 + 2kl$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle ADB$:

$$|AB|^2 = k^2 + h^2 = 2k^2 + 2kl = 2k(k+l)$$

$$\text{Zatem } |AB| = \sqrt{2k(k+l)}.$$

71.



$$|AB| = a, |DC| = b, |EF| = \frac{a+b}{2},$$

$$|AP| = \frac{a-b}{2},$$

$$|HG| = |DP| = \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$P = \frac{|EF| \cdot |HG|}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{1}{8} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha$$

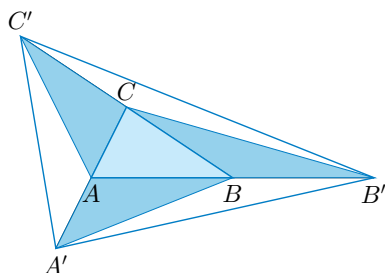
72. W trapezie kąty przy podstawie mają miary 60° i 45° , a różnica kwadratów długości podstaw jest równa 30. Oblicz pole tego trapezu.

73. W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna BD ma długość d i jest prostopadła do boków AD i BC , a kąt ostry ma miarę 30° . Wyznacz długość przekątnej AC .

D 74. Długości dwóch boków trójkąta są równe a i b . Kąt leżący naprzeciwko trzeciego boku ma miarę dwa razy większą od miary kąta leżącego naprzeciwko boku o długości a . Wykaż, że długość trzeciego boku jest równa $\sqrt{a(a+b)}$.

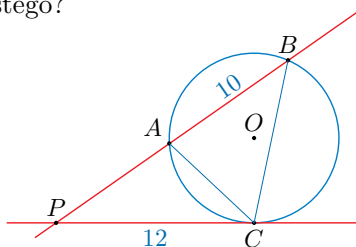
75. Długości podstaw trapezu są równe 6 i 9, a ramiona mają długości 2 i 4. Oblicz cosinusy kątów tego trapezu.

D 76. Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$ takie, że punkty C i A' są symetryczne względem punktu A , punkty A i B' – względem punktu B , a punkty B i C' – względem punktu C . Pole trójkąta ABC jest równe S . Wykaż, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe $7S$.



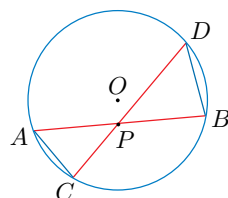
77. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku 2:3. W jakim stosunku dzieli przeciwprostokątną wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego?

D 78. Z punktu P poprowadzono sieczną przecinającą dany okrąg w punktach A i B oraz styczną do okręgu w punkcie C (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty PCA i PCB są podobne. Oblicz długości odcinków PA i PB , jeśli $|PC| = 12$ i $|AB| = 10$.



Wskazówka. Wykaż, że $\angle PBC = \angle PCA$ oraz $\triangle PCA \sim \triangle PBC$.

D 79. Wykaż, że trójkąty ACP i BDP (rysunek obok) są podobne, oraz uzasadnij, że $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AP| = 5$, $|PB| = 2$, $|CP| = 1$ i $\angle CBD = 150^\circ$.



79. $\angle APC = \angle DPB$ (kąty wierzchołkowe)
 $\angle CAB = \angle BDC$ oraz $\angle ACD = \angle DBA$
 (kąty wpisane oparte na tych samych łukach)
 Zatem trójkąty CAP i BDP są podobne (KKK).

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}, \text{ czyli } |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

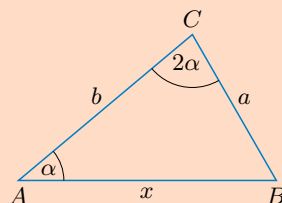
$$5 \cdot 2 = 1 \cdot |PD|, \text{ skąd } |PD| = 10$$

Kąt wpisany CBD oparty jest na tym samym łuku co kąt środkowy COD , czyli $\angle COD = 300^\circ$, więc kąt ostry $\angle COD = 60^\circ$. Ponadto $|CO| = |DO| = r$. Zatem trójkąt COD jest równoboczny i $r = |CD| = 11$.

$$72. \frac{15}{2}(3 - \sqrt{3})$$

$$73. d\sqrt{13}$$

74.



Z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cdot \cos \alpha$$

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{2 \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\text{czyli } \cos \alpha = \frac{x}{2a}$$

$$a^2 = b^2 + x^2 - \frac{bx^2}{a},$$

$$\text{czyli } x^2 = \frac{a(a^2 - b^2)}{a - b} = a(a + b)$$

$$\text{Zatem } x = \sqrt{a(a + b)}.$$

$$75. -\frac{7}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}$$

76. Zauważmy, że następujące pary trójkątów mają parami te same wysokości i równe podstawy:

$$\triangle ABC \text{ i } \triangle BB'C,$$

$$\triangle CAB \text{ i } \triangle AA'B,$$

$$\triangle BCA \text{ i } \triangle CC'A.$$

$$\text{Zatem } P_{ABC} = P_{BB'C} = P_{AA'B} = P_{CC'A} = S.$$

$$\text{Analogicznie } P_{CB'C'} = S,$$

$$P_{BA'B'} = S, P_{AC'A'} = S.$$

$$\text{Zatem } P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BB'C} + P_{AA'B} + P_{CC'A} + P_{CB'C'} + P_{BA'B'} + P_{AC'A'} = 7S.$$

77. 4:9

78. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że $\angle PCA = \angle PBC$.

$$\angle CPA = \angle BPC$$

Zatem trójkąty PCA i PBC są podobne (KKK).

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PC|}$$

$$\text{Zatem } |PC|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

$$12^2 = |PA| \cdot (|PA| + 10)$$

$$|PA| = 8, |PB| = 18$$

5.12. Stereometria

Oznaczenia

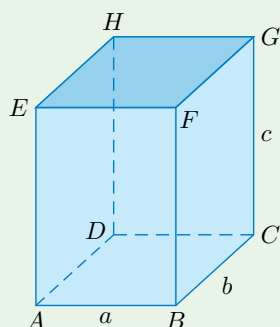
P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole powierzchni podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

V – objętość

Prostopadłościan

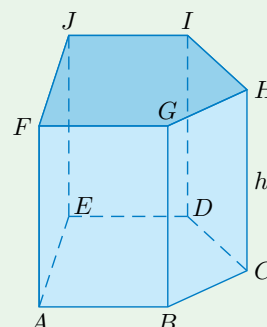


$$P_c = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

Graniastosłup prosty

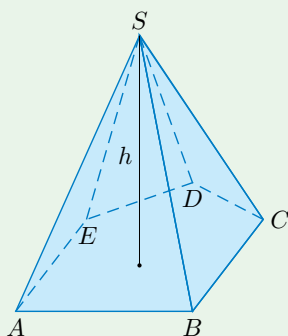


$$P_b = p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie p jest obwodem podstawy graniastosłupa, a h – jego wysokością

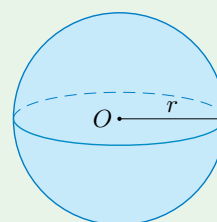
Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

Kula

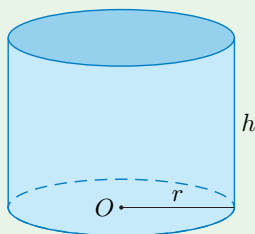


$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

Walec



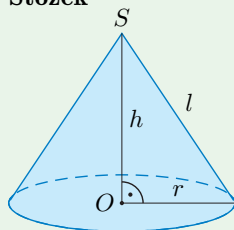
$$P_b = 2\pi rh$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy walca, a h – jego wysokością

Stożek



$$P_b = \pi rl$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

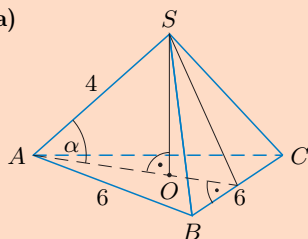
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, a l – długością tworzącej

Zestaw I – wprowadzający

- Dany jest graniastosłup prawidłowy o wysokości 10. Promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:
 - trójkątny,
 - czworokątny,
 - sześciokątny.
- Dany jest ostrosłup prawidłowy o krawędzi podstawy 4 i krawędzi bocznej 6. Oblicz wysokość tego ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:
 - trójkątny,
 - czworokątny,
 - sześciokątny.
- Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 6. Ściana boczna ABS jest prostopadła do podstawy oraz $|AS| = |BS| = 5$. Narysuj siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.
- Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 4.
 - Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.
 - Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej do jego podstawy ma miarę 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

4. a)

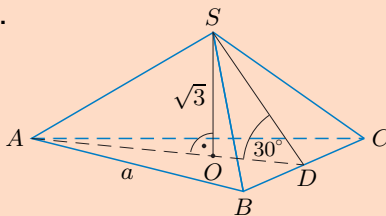


$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ więc } \alpha = 30^\circ$$

b) $H = 2, V = 6\sqrt{3}$

5.



$$|OD| = 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } a = 6\sqrt{3}$$

$$|SD| = 2\sqrt{3}$$

$$V = 27, P_b = 54$$

1. a) $a = 6\sqrt{3},$

$$P_c = 2 \cdot \frac{(6\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10 = 234\sqrt{3}$$

b) $a = 6\sqrt{2},$

$$P_c = 2 \cdot (6\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 10 = 48(3 + 5\sqrt{2})$$

c) $a = 6, P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 6 \cdot 10 = 36(3\sqrt{3} + 10)$

2. a) Wysokość podstawy:

$$h_p = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Wysokość ostrosłupa:

$$H = \sqrt{6^2 - (\frac{2}{3}h_p)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{69}$$

b) Przekątna podstawy:

$$d = 4\sqrt{2}$$

Wysokość ostrosłupa:

$$H = \sqrt{6^2 - (\frac{1}{2}d)^2} = 2\sqrt{7}$$

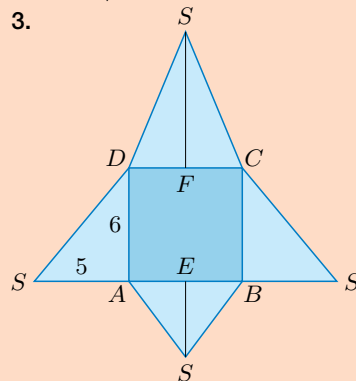
c) Najdłuższa przekątna podstawy:

$$d = 2 \cdot 4 = 8$$

Wysokość ostrosłupa:

$$H = \sqrt{6^2 - (\frac{1}{2}d)^2} = 2\sqrt{5}$$

3.



$$|SE| = 4$$

$$|SD| = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

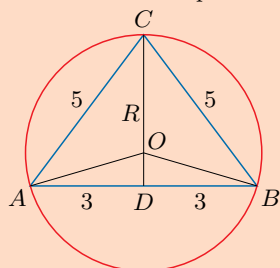
$$|SF| = \sqrt{61 - 9} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$P_c = 6^2 + \frac{6 \cdot 4}{2} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 6(13 + \sqrt{13})$$

6. $\frac{\sqrt{255}}{17}$

7. $60\frac{3}{4}$

8. Podstawa ostrosłupa



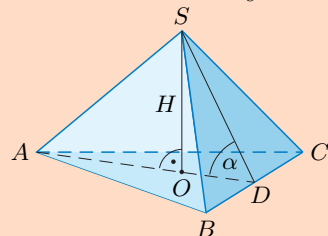
$|CD| = 4$

Korzystamy ze wzoru:

$P = \frac{abc}{4R}$

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{4R}$, czyli $R = \frac{25}{8}$,

stąd $|OD| = 4 - R = \frac{7}{8}$

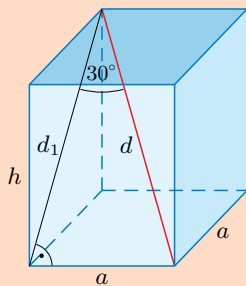


Wysokość ostrosłupa $H = 2$,

stąd $\tan \alpha = \frac{H}{|OD|} = \frac{16}{7}$

9. $24(5 + 2\sqrt{61})$

10.



$\sin 30^\circ = \frac{a}{d} = \frac{1}{2}$,

więc $a = \frac{d}{2}$ oraz $d_1 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$

$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2$,

czyli $h = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d^3\sqrt{2}}{8}$

11. Powierzchnia boczna walca jest kwadratem, więc

$2\pi r = h$.

$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 h = \frac{h^3}{4\pi}$

$h = \sqrt[3]{4\pi V}$

12. $\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \sqrt{2}$, stąd $l = \sqrt{2}r$

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = r$,

stąd $\alpha = 45^\circ$

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi 3^3$,

stąd $h = 3\sqrt[3]{4}$

6. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe polu jego podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy tego ostrosłupa.

7. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 30° , a wysokość tej ściany jest równa $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8. Podstawą ostrosłupa o wierzchołku S jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = 5$. Wysokość ostrosłupa jest równa 2, a jej spodek jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany ABS do podstawy ostrosłupa.

9. Podstawą graniastoslupa prostego jest romb o przekątnych długości 10 i 12. Dłuższa przekątna graniastoslupa jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.

10. Przekątna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy ze ścianą boczną kąt 30° . Wyznacz objętość tego graniastoslupa.

11. Objętość walca jest równa V , a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem. Wyznacz wysokość tego walca.

12. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do jego pola podstawy jest równy $\sqrt{2} : 1$. Objętość stożka jest równa objętości kuli o średnicy 6. Oblicz wysokość tego stożka oraz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy.

13. Oblicz objętość stożka, którego pole podstawy jest równe 16, a pole powierzchni bocznej jest równe 20.

14. Od sześcianu, którego krawędź ma długość 2, odcięto naroża, zawierające po jednym wierzchołku, płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi wychodzących z tych wierzchołków. Oblicz objętość wielościanu otrzymanego w ten sposób.

15. Prostopadłościan o wysokości 6 cm, którego podstawą jest kwadrat, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i nachyloną do niej pod kątem 30° . W przekroju otrzymano romb, którego dłuższa przekątna jest równa $2\sqrt{6}$ cm.

a) Oblicz długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu.

b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

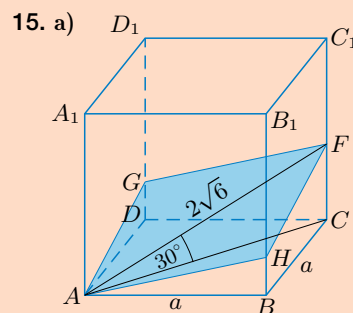
13. $\pi r^2 = 16$, więc $r^2 = \frac{16}{\pi}$

$\pi r l = 20$, więc $l^2 = \frac{25}{\pi}$

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{9}{\pi}} = \frac{3}{\pi} \sqrt{\pi}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{16}{\pi} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{16\sqrt{\pi}}{\pi}$

14. $V = 2^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 6\frac{2}{3}$

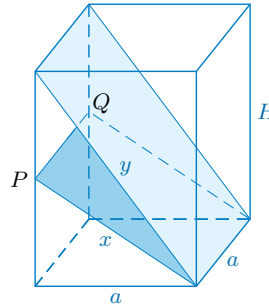


$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $a = 3$ cm

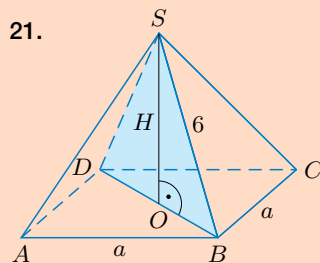
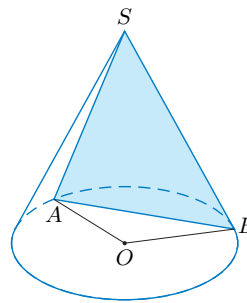
b) $V = 54$ cm³

Zestaw II – ćwiczeniowy

16. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a , a przekątna ściany bocznej tworzy z drugą ścianą boczną kąt α . Wyznacz objętość tego graniastosłupa.
17. Podstawą graniastosłupa prostego o objętości równej 12 jest romb o kącie ostrym 60° . Wysokość tego graniastosłupa jest równa dłuższej przekątnej jego podstawy.
- a) Oblicz długość krawędzi podstawy.
b) Oblicz cosinusy kątów między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych.
18. Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto dwiema płaszczyznami i otrzymano przekroje o polach 20 i $8\sqrt{13}$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że punkty P i Q są środkami jego krawędzi bocznych.
19. Prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 15$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego trzy wierzchołki i otrzymano w przekroju trójkąt. Oblicz obwód tego trójkąta.
20. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 4, a odległość środka jego wysokości od krawędzi bocznej jest równa 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



21. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym o ramionach długości 6 cm oraz kącie między ramionami 30° . Oblicz pole tego przekroju i objętość ostrosłupa.
22. Trójkąt równoramienny o podstawie a i ramieniu $2a$ obracamy wokół prostej zawierającej jedno z jego ramion. Wyznacz objętość otrzymanej bryły.
23. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkołem o promieniu 10. Stożek ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez cięciwę podstawy AB i wierzchołek S (rysunek obok). Oblicz $\cos \angle ASB$, jeśli $\angle AOB = 120^\circ$.



21. $\frac{5}{8}\pi a^3$

22. $|AS| = |BS| = 10$, $|AO| = |BO| = 5$, $|AB| = 5\sqrt{3}$

Z twierdzenia cosinusów: $(5\sqrt{3})^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 100 \cdot \cos \angle ASB$

Zatem $\cos \angle ASB = \frac{5}{8}$.

$P = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \sin 30^\circ = 9 \text{ [cm}^2\text{]}$

Z twierdzenia cosinusów: $(a\sqrt{2})^2 = 72 - 36\sqrt{3}$,
czyli $a^2 = 18(2 - \sqrt{3})$

$H = \sqrt{36 - 9(2 - \sqrt{3})} = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ [cm]}$

$V = 18\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}^3 = 9(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}^3$

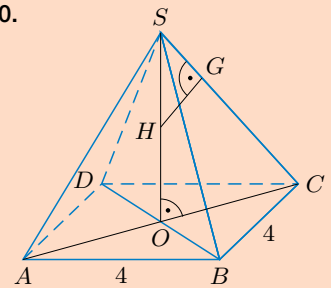
16. $\frac{a^3 \sqrt{3(3-4\sin^2 \alpha)}}{8 \sin \alpha}$

17. a) 2 b) $\frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

18. $ay = 8\sqrt{13}$, stąd $y = \frac{8\sqrt{13}}{a}$
 $ax = 20$, stąd $y = \frac{20}{a}$
 $\begin{cases} H^2 = y^2 - a^2 = \frac{832}{a^2} - a^2 \\ \frac{1}{4}H^2 = x^2 - a^2 = \frac{400}{a^2} - a^2 \end{cases}$
 $a = 4$, $H = 6$
 Zatem $V = 96$.

19. $3(9 + \sqrt{29})$

20.



$|OC| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$|SG| = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - 1}$

$\triangle SOC \sim \triangle SGH$
(cecha KKK), stąd:

$\frac{|SO|}{|OC|} = \frac{|SG|}{|GH|}$

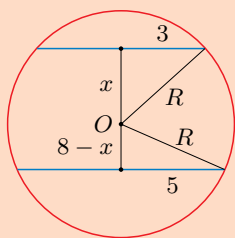
$\frac{H}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - 1}$

$\frac{H^2}{8} = \frac{1}{4}H^2 - 1$

$H = 2\sqrt{2}$

Zatem $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

24.



$$\begin{cases} x^2 + 9 = R^2 \\ (8-x)^2 + 25 = R^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy $x = 5$ oraz $R = \sqrt{34}$.

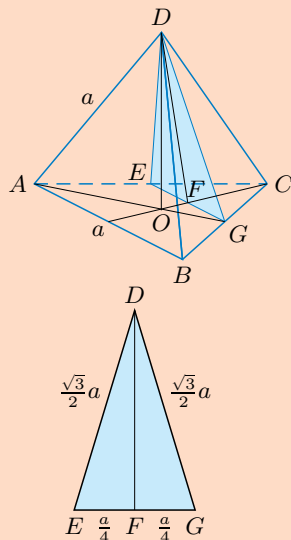
25. $\frac{1}{3}S\sqrt{\tan \alpha \tan \beta}$

26. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

27. $\frac{47}{96}$

29. $2 \cos \alpha - 1$

30.



$$|DF| = \frac{\sqrt{11}}{4}a$$

$$\text{Pole przekroju: } P = \frac{\sqrt{11}}{16}a^2$$

$$\text{Wysokość czworościanu foremnego: } H = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$|OF| = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

$$\cos \angle OFD = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}}{\frac{a\sqrt{11}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{33}$$

31. $\frac{S\sqrt{5-4\cos^2 \alpha}}{8\cos \alpha}$

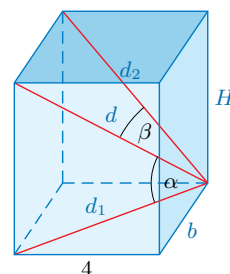
24. Kulę przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami odległymi od siebie o 8 w ten sposób, że środek kuli leży między nimi. Pola otrzymanych przekrojów są równe 9π i 25π . Oblicz promień tej kuli.

25. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu S , a dwie ściany boczne są prostopadłe do podstawy. Pozostałe ściany tworzą z podstawą kąty α i β . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

26. W czworościanie o podstawie ABC i wierzchołku S dwie krawędzie AB i CS mają długość 2, a długość każdej z pozostałych krawędzi jest równa 3. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

27. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole ściany bocznej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

28. Dany jest prostopadłościan P_1 , którego podstawa jest kwadratem o boku długości 4 (rysunek obok). Jego przekątna jest nachylona do podstawy pod kątem α , a ze ścianą boczną tworzy kąt β . Prostopadłościan P_2 o objętości 64 jest podobny do prostopadłościanu P_1 . Oblicz skalę podobieństwa tych prostopadłościanów, jeśli wiadomo, że: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\beta = 30^\circ$.



29. W podstawę stożka wpisano kwadrat. Przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek oraz jeden z boków kwadratu jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym α . Wyznacz cosinus kąta rozwarcia tego stożka.

30. Czworoscian foremny o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch krawędzi podstawy i wierzchołek nienależący do tej podstawy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju oraz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą czworościanu.

31. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe S , a kąt między ścianą boczną a podstawą ma miarę α . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź boczną oraz środek krawędzi podstawy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

32. Miara kąta między ramionami ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 2α . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przez środki sąsiednich krawędzi podstawy. Wykaż, że tangens kąta, który ta płaszczyzna tworzy z podstawą, jest równy $\frac{\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$.

28. $d_1 = 4\sqrt{2}$

a) $\frac{H}{4\sqrt{2}} = \tan 60^\circ$, czyli $H = 4\sqrt{6}$

$$V_1 = 64\sqrt{6}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_2}} = \sqrt[3]{\frac{64\sqrt{6}}{64}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{1}} = \sqrt[6]{6}$$

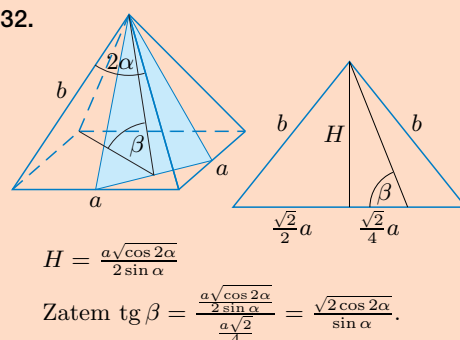
b) $d = \sqrt{H^2 + 32}$

$$\frac{4}{\sqrt{H^2 + 32}} = \sin 30^\circ, \text{ czyli } H = 4\sqrt{2}$$

$$V_1 = 64\sqrt{2}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_2}} = \sqrt[3]{\frac{64\sqrt{2}}{64}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{1}} = \sqrt[6]{2}$$

32.



$$H = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \sin \alpha}$$

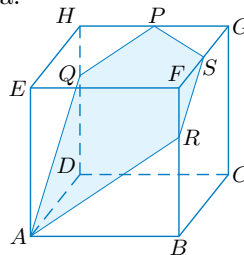
$$\text{Zatem } \tan \beta = \frac{\frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \sin \alpha}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

Zestaw III – podsumowujący

33. Podstawą graniastopu prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 8 i 2 oraz wysokości równej 3. Oblicz objętość tego graniastopu oraz miarę kąta między jego przekątną i najdłuższą krawędzią, jeżeli wiadomo, że ta przekątna ma długość $5\sqrt{2}$.

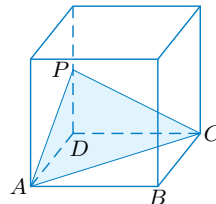
34. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ o objętości 36 cm^3 jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 12 cm. Punkt P jest środkiem krawędzi BC , a punkt Q , będący środkiem odcinka AP , jest spodem wysokości tego ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

35. Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$ i jego przekrój płaszczyzną AQR . Wiadomo, że $|HQ| : |QD| = |FR| : |RB| = 1 : k$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 1. Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie płaszczyzna przekroju dzieli krawędzie FG i HG .



36. W prostopadłościu z wierzchołka podstawy poprowadzono przekątne dwóch sąsiednich ścian bocznych. Kąty nachylenia tych przekątnych do podstawy wynoszą α i β . Wykaż, że cosinus kąta zawartego między tymi przekątnymi jest równy $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.

37. Punkt P jest środkiem krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Niech S będzie rzutem prostokątnym punktu D na płaszczyznę ACP . Wyznacz odległość punktu S od punktu A , jeśli długość krawędzi tego sześcianu jest równa a .

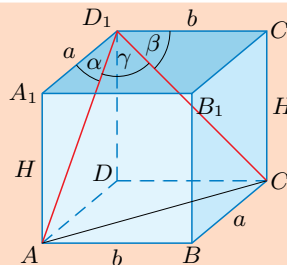


38. Miara kąta między ramionami ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 2α , a pole ściany bocznej jest równe S . Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

39. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną a podstawą jest równy 2α , a krawędź podstawy ma długość a . Wyznacz pole przekroju otrzymanego z przecięcia tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem α .

40. Miara kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi β . Uzasadnij, że $\beta > 90^\circ$. Wykaż, że cosinus kąta między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą jest równy $\sqrt{-\cos \beta}$.

36. $|AD_1| = \frac{H}{\sin \alpha}$, $|CD_1| = \frac{H}{\sin \beta}$
 $a = \frac{H}{\tan \alpha}$, $b = \frac{H}{\tan \beta}$, $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{H^2}{\tan^2 \alpha} + \frac{H^2}{\tan^2 \beta}}$
 Z twierdzenia cosinusów:
 $\frac{H^2}{\tan^2 \alpha} + \frac{H^2}{\tan^2 \beta} = \frac{H^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{H^2}{\sin^2 \beta} - 2 \frac{H^2}{\sin \alpha \sin \beta} \cos \gamma$
 $\cos \gamma = \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta}}{\frac{2}{\sin \alpha \sin \beta}} =$
 $= \frac{\sin \alpha \sin \beta \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 - \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right)}{2} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right)}{2} = \sin \alpha \sin \beta$



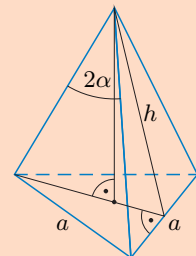
33. $V = 60, 45^\circ$

34. $6(\sqrt{39} + \sqrt{30}) \text{ cm}^2$

35. $|FS| : |SG| = |HP| : |PG| = 1 : (k - 1)$

37. $\frac{\sqrt{30}}{6}a$

38.



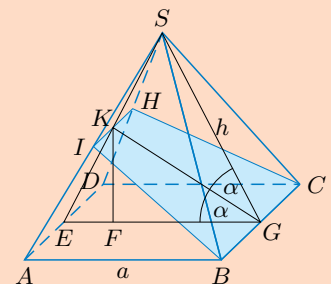
$h = \frac{2S}{a}$ oraz $\frac{a}{h} = \tan \alpha$,

więc $a = 2\sqrt{S \tan \alpha}$

$P_c = \frac{4S \tan \alpha \cdot \sqrt{3}}{4} + 3S =$

$= S(\sqrt{3} \tan \alpha + 3)$

39.



$h = \frac{a}{2 \cos 2\alpha}$

Z twierdzenia o dwusiecznych kąta w trójkącie:

$\frac{|EG|}{|GS|} = \frac{|EK|}{|SE| - |EK|}$

czyli $|EK| = \frac{a}{1 + 2 \cos 2\alpha}$

$\frac{|KF|}{|EK|} = \sin 2\alpha$, czyli:

$|KF| = \frac{a \sin 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}$

$\frac{|KF|}{|KG|} = \sin \alpha$, czyli:

$|KG| = \frac{a \sin 2\alpha}{(1 + 2 \cos 2\alpha) \sin \alpha} =$

$= \frac{2a \cos \alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}$

Trójkąty ASD i ISH są podobne (KKK), więc:

$\frac{|AD|}{|IH|} = \frac{|SE|}{|SE| - |EK|}$,

czyli $|IH| = \frac{a}{1 + 2 \cos 2\alpha}$.

Pole przekroju: $P =$

$= \frac{(a + \frac{a}{1 + 2 \cos 2\alpha}) \cdot \frac{2a \cos \alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}}{2} =$

$= \frac{4a^2 \cos^3 \alpha}{(1 + 2 \cos 2\alpha)^2}$

5.13. Rachunek prawdopodobieństwa

Permutacje

Liczba sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k .

Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z k różnych wyrazów ($1 \leq k \leq n$), jest równa:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów ($0 \leq k \leq n$), jest równa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Własności prawdopodobieństwa

- $0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$
- $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe), $P(\Omega) = 1$ (Ω – zdarzenie pewne)
- $P(A) \leq P(B)$ dla $A \subset B \subset \Omega$
- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A **pod warunkiem**, że zaszło zdarzenie B , określamy wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$),
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ opisuje wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Dane są zbiory $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych takich, że pierwsza cyfra należy do zbioru A , druga – do zbioru B , a trzecia – do zbioru C ? Ile wśród nich jest liczb nieparzystych?
2. Dwie drużyny rozgrywają ze sobą mecz piłki nożnej. Ile jest możliwych wyników, jeśli wiadomo, że każda z drużyn strzeliła:
a) nie więcej niż 3 bramki, b) nie więcej niż 4 bramki?
3. Na ile sposobów można ustawić w kolejce 4 osoby, a na ile – 6 osób?
4. Dziewięciorgu zawodnikom, wśród których jest pięć dziewcząt, przydzielono kolejne numery od 1 do 9.
a) Ile jest wszystkich sposobów przydzielenia numerów?
b) Ile jest takich sposobów przydzielenia numerów, aby dziewczęta dostały numery nieparzyste, a chłopcy dostali parzyste?
5. Pewien kod składa się z trzech liter na początku oraz z dwóch dowolnych cyfr na końcu. Litery należą do zbioru $\{A, B, C, D\}$. Ile można utworzyć takich kodów, jeżeli:
a) cyfry i litery się nie powtarzają, b) cyfry i litery mogą się powtarzać?
6. Ile jest wszystkich liczb:
a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 1 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0, 1 i 2 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
c) pięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?
7. Ile jest wszystkich liczb:
a) pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2 i 4,
b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,
c) parzystych trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 7 i 9?
8. Dwie siostry kupiły wspólnie 10 długopisów, każdy w innym kolorze. Oblicz, na ile sposobów mogą się nimi podzielić, jeśli obydwie mają dostać tyle samo długopisów.
9. Ile można utworzyć różnych siedmiocyfrowych ciągów, w których cztery razy występuje cyfra 1 i trzy razy cyfra 0?
1. Liczby trzycyfrowe:
 $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$
Liczby nieparzyste:
 $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
2. a) $4 \cdot 4 = 16$
b) $5 \cdot 5 = 25$
3. 4 osoby: $4! = 24$
6 osób: $6! = 720$
4. a) $9! = 362880$
b) $5! \cdot 4! = 2880$
5. a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 = 2160$
b) $4^3 \cdot 10^2 = 6400$
6. a) $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
c) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$
7. a) $3^5 = 243$
b) $9^4 = 6561$
c) $7 \cdot 8 \cdot 5 = 280$
8. $\binom{10}{5} = 252$
9. $\binom{7}{4} = 35$ (1 na czterech miejscach z siedmiu, pozostałymi cyframi są trzy 0)

10. a) $\binom{3}{1} = 3$
 b) $\binom{4}{2} = 6$ (0 na dwóch z czterech miejsc, pozostałymi cyframi są trzy 1)
 c) $\binom{7}{5} + \binom{7}{2} = 42$ (0 na pięciu z siedmiu miejsc, pozostałymi cyframi są trzy 1 lub 0 na dwóch z siedmiu miejsc, pozostałe cyfry to sześć 1)
11. a) Pary zdarzeń wykluczających się: A i C oraz B i C
 Para zdarzeń przeciwnych: B i C
 b) Zdarzenie niemożliwe: $A \cap C$
 Zdarzenie pewne: $B \cup C$
12. a) $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
 $A = \{(1, 3), (3, 1)\}$,
 czyli $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
 $A' = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$,
 czyli $P(A') = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
 b) $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
 $A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$,
 czyli $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
 $A' = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$,
 czyli $P(A') = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
13. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$
14. $\overline{\Omega} = 36$
 a) $A = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$, czyli $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
 b) $P(B) = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$
10. Ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 3, do których zapisu użyto wyłącznie cyfr 0 i 1, jeśli liczby te są:
 a) czterocyfrowe, b) pięciocyfrowe, c) ośmiocyfrowe?
11. Rzucamy trzy razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że co najwyżej raz wypadła reszka, B – że co najwyżej dwa razy wypadła reszka, C – że trzy razy wypadła reszka.
 a) Podaj pary zdarzeń wykluczających się i pary zdarzeń przeciwnych.
 b) Które ze zdarzeń $B \cup C$, $A' \cap B$, $A \cap C$ jest zdarzeniem niemożliwym, a które – zdarzeniem pewnym?
12. Z urny zawierającej cztery kule ponumerowane od 1 do 4 losujemy dwie kule. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że dwie wylosowane kule mają numery nieparzyste. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω tego doświadczenia, wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom A i A' oraz oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń, jeśli losujemy:
 a) bez zwracania, b) ze zwracaniem.
13. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna:
 a) przez 2, b) przez 3, c) przez 2 lub 3.
14. Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, będzie równy 6,
 b) w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.
15. W urnie są cztery kule oznaczone numerami 1, 2, 3 i 4. Losujemy kolejno cztery kule bez zwracania. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie:
 a) parzysta, b) większa od 1234.
16. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czarne, losujemy kolejno 3 kule. Czy bardziej prawdopodobne jest wylosowanie trzech kul białych w wypadku losowania bez zwracania, czy ze zwracaniem?
17. W klasie IVa jest 8 chłopców i 12 dziewcząt, a w klasie IVb – 10 chłopców i 6 dziewcząt. Z każdej klasy wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą to:
 a) dwie dziewczyny, b) dziewczyna i chłopiec.
15. $\overline{\Omega} = 4! = 24$
 a) $\overline{A} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$, $P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$
 b) $\overline{B'} = 1$, $\overline{B} = 23$, $P(B) = \frac{23}{24}$
16. Losowanie bez zwracania: $P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28} \approx 0,18$
 Losowanie ze zwracaniem: $P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \approx 0,24$
 Bardziej prawdopodobne jest przy losowaniu ze zwracaniem.
17. $\overline{\Omega} = 20 \cdot 16 = 320$
 a) $\overline{A} = 12 \cdot 6 = 72$, czyli $P(A) = \frac{72}{320} = \frac{9}{40}$
 b) $\overline{B} = 12 \cdot 10 + 8 \cdot 6 = 168$, czyli $P(B) = \frac{168}{320} = \frac{21}{40}$

Zestaw II – ćwiczeniowy

18. Winda, w której są 3 osoby, zatrzymuje się na 5 piętrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- każda osoba wysiądzie na innym piętrze,
 - na którymś z pięter wysiądą dokładnie 2 osoby.
19. Losowo ustawiamy w rzędzie 7 dziewcząt i 8 chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- żaden chłopiec nie stoi obok chłopca,
 - wszystkie dziewczęta stoją obok siebie.
20. Na egzaminie posadzono losowo w jednym rzędzie 10 osób, w tym dwie z jednej szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie siedzą one obok siebie.
21. Liczby $1, 2, 3, \dots, 10$ uporządkowano w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia w tym uporządkowaniu:
- dwójki bezpośrednio przed ósemką,
 - dwójki przed ósemką.
22. Z grupy, w której jest 8 dziewcząt i 6 chłopców, wybieramy losowo 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybierzemy:
- 2 dziewczyny i 2 chłopców,
 - 1 dziewczynę i 3 chłopców.
23. Na loterii jest 10 losów, w tym 2 wygrywające. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wygrywa co najmniej jeden spośród pięciu zakupionych losów.
24. Z urny, w której jest 7 kul białych i 5 zielonych, losujemy jednocześnie 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:
- przynajmniej jedna jest biała,
 - jest więcej zielonych niż białych.
25. W szafie są 4 pary butów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- losowo wybrane dwa buty są parą,
 - wśród losowo wybranych czterech butów jest co najmniej jedna para.
26. Rzucono pięcioma kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
- na wszystkich kostkach takiej samej liczby oczek,
 - dokładnie na dwóch kostkach takiej samej liczby oczek (pary), a na trzech pozostałych kostkach – różnych liczb oczek,
 - dokładnie na trzech kostkach takiej samej liczby oczek (trójki), a na dwóch pozostałych kostkach – różnych liczb oczek,
 - trójki i pary.

26. $\overline{\Omega} = 6^5 = 7776$

a) $\overline{A} = 6, P(A) = \frac{1}{1296}$

b) $\overline{B} = \binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3600, P(B) = \frac{25}{54}$

c) $\overline{C} = \binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1200, P(C) = \frac{25}{162}$

d) $\overline{D} = \binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 300, \text{ czyli } P(D) = \frac{25}{648}$

18. $\overline{\Omega} = 5^3 = 125$

a) $\overline{A} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60,$
czyli $P(A) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$

b) $\overline{B} = \binom{3}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 60,$
czyli $P(B) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$

19. $\overline{\Omega} = 15!$

a) $\overline{A} = 8! \cdot 7!, \text{ czyli}$
 $P(A) = \frac{8! \cdot 7!}{15!} \approx 0,000155$

b) $\overline{B} = 9 \cdot 7! \cdot 8! = 9! \cdot 7!, \text{ czyli}$
 $P(B) = \frac{9! \cdot 7!}{15!} \approx 0,001399$

20. $\overline{\Omega} = 10!$

$\overline{A'} = 2 \cdot 9!$
 $P(A) = 1 - \frac{9! \cdot 2}{10!} = \frac{4}{5}$

21. $\overline{\Omega} = 10!$

a) $\overline{A} = 9 \cdot 8! = 9!,$
czyli $P(A) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$

b) $P(B) = \frac{1}{2}$

22. $\overline{\Omega} = \binom{14}{4} = 1001$

a) $\overline{A} = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 420,$
czyli $P(A) = \frac{420}{1001} = \frac{60}{143}$

b) $\overline{B} = \binom{8}{1} \cdot \binom{6}{3} = 160,$
czyli $P(B) = \frac{160}{1001}$

23. $\overline{\Omega} = \binom{10}{5} = 252$

$\overline{A'} = \binom{8}{5} = 56,$
czyli $P(A) = 1 - \frac{56}{252} = \frac{7}{9}$

24. $\overline{\Omega} = \binom{12}{3} = 220$

a) $\overline{A'} = \binom{5}{3} = 10,$
czyli $P(A) = 1 - \frac{10}{220} = \frac{21}{22}$

b) $\overline{B} = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1} + \binom{5}{3} = 80,$
czyli $P(B) = \frac{80}{220} = \frac{4}{11}$

25. a) $\overline{\Omega} = \binom{8}{2} = 28, \overline{A} = 4,$
 $P(A) = \frac{1}{7}$

b) $\overline{\Omega} = \binom{8}{4} = 70,$
 $\overline{B'} = 2^4 = 16,$
 $P(B) = 1 - \frac{16}{70} = \frac{27}{35}$

27. $\frac{4}{7}$
28. $\overline{\Omega} = \binom{6}{3} = 216$
 B – w dwóch pierwszych rzutach wypadły parzyste liczby oczek
 $\overline{B} = 3 \cdot 3 \cdot 6$, $P(B) = \frac{54}{216}$
 $A \cap B = \{(2, 2, 6), (2, 4, 4), (2, 6, 2), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (6, 2, 2)\}$
 $\overline{A \cap B} = 6$, $P(A \cap B) = \frac{6}{216}$
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$
29. A – kula czarna w drugiej szufladzie
 B – do pierwszej szuflady wrzucono dwie kule
 $\overline{B} = C_6^2 = 15$
 $A \cap B$ – w drugiej szufladzie są 4 kule, w tym jedna czarna
 $\overline{A \cap B} = 1 \cdot \binom{5}{3} = 10$
 $P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
30. $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{75}{216} = \frac{19}{72}$
27. W urnie jest 7 kul białych i 8 czarnych. Losujemy z urny jedną kulę, a następnie drugą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga kula jest czarna, jeśli pierwsza była biała.
28. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma oczek otrzymanych w trzech rzutach kostką jest równa 10, jeśli w dwóch pierwszych rzutach wypadły parzyste liczby oczek.
29. Do dwóch szuflad wrzucamy losowo 1 kulę czarną i 5 kul białych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula czarna znajdzie się w drugiej szufladzie, jeśli do pierwszej zostały wrzucone dokładnie dwie kule.
30. Ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ wybieramy losowo jedną liczbę, a następnie rzucamy tyle razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednej szóstki.

Wzór Bayesa

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$),
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie prawdziwy jest wzór:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)}$$

31. Zakłady Z_1, Z_2 i Z_3 wyprodukowały odpowiednio 20%, 30% i 50% pewnej partii towaru. Wiadomo, że wadliwe wyroby zakładu Z_1 stanowią 1% całej jego produkcji, zakładu Z_2 – 3%, a zakładu Z_3 – 5%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany wyrób z tej partii towaru pochodzi z zakładu Z_1 , jeśli wyrób ten jest wadliwy.
32. Rzucamy raz kostką. Jeżeli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, która zawiera 5 kul białych i 1 kulę czarną. W przeciwnym razie losujemy jedną kulę z drugiej urny, która zawiera 6 kul białych i 3 kule czarne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula pochodzi z drugiej urny, jeśli jest to kula czarna.

31. A – wyrób jest wadliwy

B_1 – wyrób pochodzi z zakładu Z_1

$$P(B_1|A) = \frac{0,2 \cdot 0,01}{0,2 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,05} = \frac{1}{18}$$

32. A – kula jest czarna

B_2 – kula pochodzi z drugiej urny

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{9}} = \frac{1}{2}$$

33. Rzucamy raz kostką. Jeżeli wypadnie 6 oczek, to losujemy 2 kule z pierwszej urny, która zawiera 2 kule białe i 4 kule czarne. W przeciwnym razie losujemy 2 kule z drugiej urny, która zawiera 3 kule białe i 3 kule czarne. Wylosowano dwie kule czarne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pochodzą one z pierwszej urny.
34. Prawdopodobieństwo otrzymania orła i reszki w rzucie pierwszą monetą jest takie samo. Dla drugiej monety prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{1}{3}$, a reszki $\frac{2}{3}$. Wykonujemy trzy rzuty losowo wybraną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono:
- pierwszą monetą, jeśli wypadły dwa orły,
 - drugą monetą, jeśli wypadły dwie reszki.

Schemat Bernoulliego

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu, a q – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie ($q = 1 - p$).

35. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach monetą:
- ani razu nie wypadnie orzeł,
 - wypadną dokładnie 3 orły.
36. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w dziesięciu rzutach monetą reszka wypadnie:
- dokładnie 3 razy,
 - co najmniej 3 razy.
37. Rzucamy sześć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba oczek mniejsza od 3 wypadnie:
- dokładnie 2 razy,
 - co najwyżej 2 razy.
38. Tomek i Romek rzucają piłką do kosza. Tomek trafia w 80% rzutów, a Romek – w 60%. Każdy z nich wykonał po 5 rzutów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że piłka trafiła do kosza co najmniej 9 razy.
-  39. Prawdopodobieństwo tego, że Basia trafi piłką do kosza, jest równe 0,8. Ile co najmniej rzutów powinna wykonać, aby prawdopodobieństwo co najmniej jednego trafienia było większe od 0,999?

33. A – obie kule są czarne
 B_1 – kule pochodzą z pierwszej urny

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{7}$$
34. a) A – wypadły dwa orły
 B_1 – rzucono pierwszą monetą

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{27}} = \frac{27}{43}$$
- b) A – wypadły dwie reszki
 B_2 – rzucono drugą monetą

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{27}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{27}} = \frac{32}{59}$$

35. a) $P_4(0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
b) $P_4(3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$

36. a) $P_{10}(3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 120 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{15}{128}$
b) $P_{10}(k \geq 3) = 1 - P_{10}(k < 3) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2)) = 1 - 56 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{121}{128}$
37. a) $P_6(2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 15 \cdot \frac{16}{729} = \frac{80}{243}$
b) $P_6(k \leq 2) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{496}{729}$
38. $P_{T5}(4)P_{R5}(5) + P_{R5}(4)P_{T5}(5) + P_{T5}(5)P_{R5}(5) =$
 $= 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 \cdot 0,6^5 + 5 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 \cdot 0,8^5 + 0,8^5 \cdot 0,6^5 = \frac{4^4 \cdot 3^4 \cdot 6^7}{5^{10}} \approx 0,1423$
39. $P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(k < 1) = 1 - P_n(0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^n = 1 - 0,2^n \geq 0,999$
 $0,2^n \leq 0,001$
Najmniejszą liczbą naturalną spełniającą powyższą nierówność jest 5.

Zestaw III – podsumowujący

40. $P(A) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$
41. $\frac{(n-1)n}{2} = 66, n \in \mathbb{N}, n > 1$
 $n = 12$
42. Od wszystkich możliwości z dokładnie jedną 5 i dwoma 7 odejmujemy te, które mają 0 na początku:
 $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 - 1 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 8 \cdot 8 =$
 $= 30720 - 1920 = 28800$
43. $\overline{\Omega} = V_{90}^2 = 8010$
 Suma dwóch liczb jest parzysta, jeżeli obie są parzyste lub obie są nieparzyste.
 $\overline{A} = 45 \cdot 44 + 45 \cdot 44 = 3960$
 $P(A) = \frac{3960}{8010} = \frac{44}{89}$
44. $\overline{\Omega} = \binom{20}{3} = 1140$
 $\overline{A} = \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{1} + \binom{10}{3} = 570,$
 $P(A) = \frac{570}{1140} = \frac{1}{2}$
 $\overline{B} = \binom{15}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{15}{3} = 980,$
 $P(B) = \frac{980}{1140} = \frac{49}{57}$
45. $\overline{\Omega} = \binom{25}{2} = 300,$
 21 żarówek jest dobrych
 a) $\overline{A} = \binom{21}{2} = 210,$
 $P(A) = 0,7$
 b) $\overline{B} = \binom{4}{2} = 6,$ czyli
 $P(B) = 1 - \frac{6}{300} = 0,98$
46. $\overline{\Omega} = 8!$
 a) $\overline{A} = 6 \cdot 3! \cdot 5!, P(A) = \frac{3}{28}$
 b) $\overline{B} = 4 \cdot 2! \cdot 6!,$
 $P(B) = \frac{4 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{7}$
40. Ze zbioru liczb dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna przez 10 i niepodzielna przez 3.
41. Każda z osób bawiących się na pewnym przyjęciu, wychodząc, żegnała się ze wszystkimi pozostałymi gośćmi uściskiem dłoni. Ile było osób na przyjęciu, jeżeli wymieniono 66 uścisków?
42. Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie raz cyfra 5 oraz dokładnie dwa razy cyfra 7?
43. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest parzysta.
44. Uczeń potrafi rozwiązać 10 z 20 zadań egzaminacyjnych. Losuje 3 zadania i jeśli rozwiąże co najmniej 2 z nich, to zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń zaliczy egzamin. Jakie byłoby to prawdopodobieństwo, gdyby uczeń umiał rozwiązać 15 zadań?
45. W partii 25 żarówek 16% jest uszkodzonych. Losujemy dwie żarówki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) obie żarówki będą dobre,
 b) przynajmniej jedna żarówka będzie dobra.
46. Z cyfr liczby 12345678 tworzymy liczby ośmiocyfrowe, w których zapisie cyfry się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) cyfry 1, 2 i 3 znajdują się obok siebie w dowolnej kolejności,
 b) pomiędzy cyframi 1 i 2 znajdują się dokładnie trzy cyfry.
47. Ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania i wstawiamy je odpowiednio w miejsce współczynników a i b do wzoru funkcji $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$,
 b) wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY ,
 c) wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej $x = 1$.
48. Na pierwszej loterii jest n losów, w tym 1 wygrywający, a na drugiej jest $2n$ losów, w tym 2 wygrywające. Sprawdź, czy prawdopodobieństwo wygrania na obu loteriach jest jednakowe, gdy kupujemy: a) 1 los, b) 2 losy.
47. $\overline{\Omega} = 5 \cdot 4 = 20$
 a) $a = 0, b > 0$, czyli $A = \{(0, 1), (0, 2)\}, P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$
 b) $b = 0$, czyli $\overline{B} = 4 \cdot 1 = 4, P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
 c) $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, czyli $C = \{(1, -2), (-1, 2)\}, P(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$
48. a) $P(L_1) = \frac{1}{n}, P(L_2) = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$, zatem prawdopodobieństwo jest jednakowe.
 b) $\overline{\Omega}_1 = \frac{(n-1)n}{2}, \overline{L}_1 = n - 1, P(L_1) = \frac{2}{n}$
 $\overline{\Omega}_2 = \binom{2n}{2} = (2n - 1)n, \overline{L}_2 = \binom{2}{1} \binom{2n-2}{1} + \binom{2}{2} = 4n - 3, P(L_2) = \frac{4n-3}{n(2n-1)}$
 $\frac{P(L_1)}{P(L_2)} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n(2n-1)}{4n-3} = \frac{4n-2}{4n-3} > 1$, czyli $P(L_1) > P(L_2)$
 Prawdopodobieństwo na pierwszej loterii jest większe.

49. W sklepie jest n sztuk pewnego wyrobu, w tym 30% sztuk pierwszego gatunku i 70% – drugiego. Na opakowaniach tego wyrobu nie podano jednak informacji o gatunku. Prawdopodobieństwo tego, że druga sprzedana sztuka będzie pierwszego gatunku, pod warunkiem, że pierwsza sprzedana sztuka będzie też pierwszego gatunku, wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz n .
50. Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wypadła szóstka, jeśli:
- iloczyn otrzymanych oczek jest liczbą podzielną przez 3,
 - suma otrzymanych oczek jest równa 12,
 - suma otrzymanych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.
51. Z urny zawierającej 4 kule białe i 2 czarne losujemy 1 kulę i wkładamy ją do drugiej urny zawierającej 3 kule białe i 5 czarnych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wylosowana z drugiej urny będzie czarna.
52. Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 5 czarnych, losujemy jedną kulę, zwracamy ją do urny i dorzucamy 2 kule koloru wylosowanej kuli. Następnie losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwie wylosowane kule są takiego samego koloru.
53. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ wybieramy losowo jedną liczbę, a następnie z pozostałych losujemy jeszcze dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem dwóch liczb parzystych.
54. W dwóch urnach, w których są po 4 kule czarne, rozmieszczamy dodatkowo 6 kul białych. Następnie z losowo wybranej urny losujemy jedną kulę. Jak rozmieścić białe kule w urnach, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było największe? Oblicz to prawdopodobieństwo.
55. Student z $2n$ pytań ($n > 1$) losuje na egzaminie 2 pytania. Jeżeli odpowie na nie dobrze – zdaje egzamin, jeżeli odpowie na każde źle – nie zdaje egzaminu. W przypadku jednej złej odpowiedzi wyciąga dodatkowe pytanie i jeżeli odpowie poprawnie, zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeżeli umie odpowiedzieć na n pytań.
56. W rzucie niesymetryczną kostką prawdopodobieństwo uzyskania co najwyżej czterech oczek jest równe 0,6, a co najmniej czterech oczek – 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania czterech oczek w rzucie tą kostką.
57. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{1}{6}$ oraz $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

54. x – liczba białych kul w pierwszej urnie, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6-x}{4+6-x} = \frac{x^2-6x-12}{x^2-6x-40} = 1 + \frac{28}{x^2-6x-40}$$
 $P(A)$ jest największe, gdy $x^2 - 6x - 40$ jest najmniejsze, czyli dla $x = -\frac{-6}{2} = 3$.
 Wtedy $P(A) = 1 - \frac{28}{49} = \frac{3}{7}$.
55. $P(A) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} + \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2n-1} + \frac{n}{2n-1} \right) = \frac{1}{2}$
56. A – wyrzucono co najwyżej 4 oczka, B – wyrzucono co najmniej 4 oczka,
 $A \cap B$ – wyrzucono 4 oczka
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $1 = 0,6 + 0,8 - P(A \cap B)$, zatem $P(A \cap B) = 0,4$
57. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$, czyli $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{15}$

49. A – druga sztuka jest pierwszego gatunku
 B – pierwsza sztuka jest pierwszego gatunku
 $P(B) = 0,3$,
 $P(A \cap B) = 0,3 \cdot \frac{0,3n-1}{n-1}$
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$
 $= \frac{0,3n-1}{n-1} = \frac{2}{7}$
 $n = 50$
50. $\overline{\Omega} = 6^3 = 216$
 A – za trzecim razem szóstka
 a) B – iloczyn oczek jest liczbą podzielną przez 3
 $\overline{B'} = 4^3$,
 $P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$
 $\overline{A \cap B} = 6 \cdot 6 \cdot 1 = 6^2$,
 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{38}$
 b) B – suma otrzymanych oczek jest równa 12
 $\overline{B} = 25$, $P(B) = \frac{25}{216}$
 $\overline{A \cap B} = 5$, $P(A \cap B) = \frac{5}{216}$
 $P(A|B) = \frac{1}{5}$
 c) B – suma otrzymanych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1
 $\overline{B} = 72$, $P(B) = \frac{72}{216}$
 $\overline{A \cap B} = 12$, $P(A \cap B) = \frac{12}{216}$
 $P(A|B) = \frac{1}{6}$
51. $P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{9} = \frac{16}{27}$
52. $P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5}{8}$
53. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} +$
 $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} = \frac{12}{49}$

$$\begin{aligned} 58. P(A \cup B) &= \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \frac{3}{4} &= \frac{1}{4} + P(B) - P(A \cap B), \\ \text{czyli } P(B) &= \frac{1}{2} + P(A \cap B) \\ P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{2} + P(A \cap B)} = \frac{1}{5} \\ \text{Zatem } P(A \cap B) &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

58. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ oraz $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

59. a) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(B \setminus A)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ oraz $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.

b) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$ i $P(A \setminus B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ oraz $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

60. a) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A' \cup B)$ i $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{3}{4}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

b) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A'|B)$, jeśli wiadomo, że $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym oraz $P(A) = P(B) = 3P(A \cap B)$.

61. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(B) > 0$. Wykaż, że:

$$P(A|B) \geq \frac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}$$

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, \dots, p_n$. **Wartością oczekiwaną** zmiennej X nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

Gre nazywamy **sprawiedliwa**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

62. a) $EX = 80 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} + -\frac{1}{2} \cdot 50 = 5 \text{ [zł]}$

$$\text{b) } 80 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot p = 0$$
$$p = 60$$

$$\begin{aligned} \mathbf{63.} \quad & x \cdot \frac{6}{36} + 2x \cdot \frac{6}{36} - 36 \cdot \frac{24}{36} = 0 \\ & x = 48 \end{aligned}$$

64. a) $EX = 7 \cdot \frac{2}{6} + 8 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{2}{6} = 8$
b) $EX = 6 \cdot \frac{1}{9} + 7 \cdot \frac{2}{9} + 8 \cdot \frac{3}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9} = 8$

62. Pewna gra polega na dwóch rzutach monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 80 zł, jeśli dwie reszki – wygrywamy 40 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy p zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry dla $p = 50$.

b) Dla jakiej wartości p gra jest sprawiedliwa?

63. Pewna gra polega na rzucie dwiema kostkami i dodaniu liczby wyrzuconych oczek. Jeśli otrzymamy co najmniej 10 oczek, to wygrywamy x zł, jeśli otrzymamy 7 oczek, to wygrywamy $2x$ zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 36 zł. Dla jakiej wartości x gra jest sprawiedliwa?

64. Spośród liczb 3, 4 i 5 losujemy dwie. Zmienna losowa X przyporządkowuje każdej parze liczb jej sumę. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X , jeśli losujemy:

a) bez zwracania,

b) ze zwracaniem.

59. a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4}$
 $P(B|A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbf{b)} \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6} \\ P(A|B) &= P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

60. a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{6}$
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

b) $P(A \cup B) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 5P(A \cap B)$, czyli $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 2P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{3 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{2}{3}$$

61. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$, bo $P(A \cup B) \in \langle 0; 1 \rangle$

5.14. Statystyka

Średnią arytmetyczną n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Średnia ważona n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, którym przypisano odpowiednio wagi $w_1, w_2, \dots, w_n$, będące liczbami dodatnimi, jest równa:

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n liczb:

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $x_{\frac{n+1}{2}}$ – wartość środkowa,
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ – średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych.

Dominanta (wartość modalna, moda) jest wartością, która występuje wśród danych najczęściej.

Wariancją n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{x}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

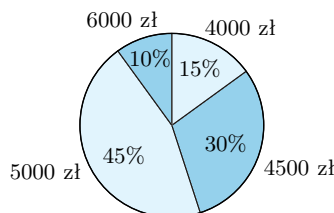
Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.

- a) 4, 3, 1, 10, 10, 13, 8, 10, 4 c) 3, 2, 3, 9, 4, 10, 14, 3
b) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 4, 2, 2, 10 d) 16, 8, 8, 0, 8, 8, 14, 2

2. Pewna firma ma cztery oddziały. Na diagramie przedstawiono, jaki procent osób pracuje w poszczególnych oddziałach i jakie są w nich średnie zarobki. Oblicz średnią zarobków w tej firmie.



3. W pewnej szkole są trzy klasy drugie liczące kolejno 21, 23 i 23 uczniów. Średni wzrost uczniów w pierwszej z nich jest równy 172 cm, w drugiej – 174 cm, w trzeciej – 170 cm. Oblicz średni wzrost wszystkich uczniów klas drugich.

2. $\bar{x} = 0,1 \cdot 6000 + 0,15 \cdot 4000 + 0,3 \cdot 4500 + 0,45 \cdot 5000 = 4800$ [zł]

3. $\bar{x} = \frac{21 \cdot 172 + 23 \cdot 174 + 23 \cdot 170}{21 + 23 + 23} = \frac{11524}{67} = 172$ [cm]

1. a) $\bar{x} = 7$, $M = 8$, $D = 10$
b) $\bar{x} = 4$, $M = 4$, $D = 2$
c) $\bar{x} = 6$, $M = 3,5$, $D = 3$
d) $\bar{x} = 8$, $M = 8$, $D = 8$

4. a) $\bar{x} = 3$, $M = 3$, $D = 2$
 b) $\bar{x} = 3,56$, $M = 3$, $D = 3$
 c) $\bar{x} \approx 3,33$, $M = 3$, $D = 3$

5. x – ocena Ani

$$\frac{25+x}{8} \geq 3,5$$

$$x \geq 3$$

Ania musi dostać co najmniej 3.

6. x – liczba wyrzuconych 2
 y – liczba wyrzuconych 3

$$\frac{64+2x+3y}{15+x+y} = 4,$$

$$\text{skąd } 2x + y = 4$$

Ponieważ x i y są liczbami parzystymi, $x = 2$, $y = 0$ lub $x = 0$, $y = 4$.

Zatem wykonano 17 lub 19 rzutów.

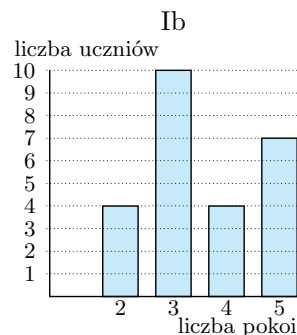
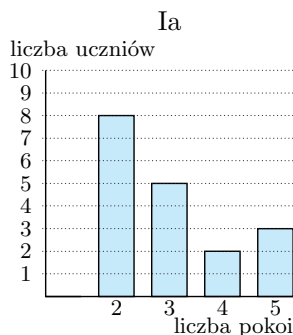
7. a) 4 b) 6,1

4. Uczniom klas Ia i Ib zadano pytanie: „Ile pokoi ma twoje mieszkanie?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla:

a) klasy Ia,

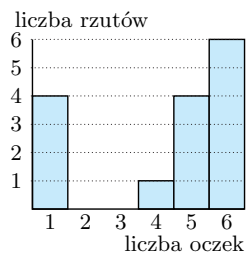
b) klasy Ib,

c) obu klas razem.



5. Pewien nauczyciel, aby wystawić oceny na półrocze, oblicza średnią arytmetyczną wszystkich ocen, a następnie zaokrągla wynik do liczby całkowitej. Ocenę Ani to 5, 3, 4, 4, 2 i 3. Jaką najniższą ocenę musi dostać Ania z ostatniego sprawdzianu, żeby na koniec semestru mieć ocenę dobrą?

6. Wykonano serię rzutów kostką – średnia liczba otrzymanych oczek jest równa 4. Na diagramie przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek, ale pominięto informację, ile razy wypadły 2 oraz 3 oczka – wiadomo, że każdy z tych wyników wyrzucono parzystą liczbę razy. Ile rzutów wykonano podczas tej serii?



7. W tabeli podane są liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

Liczba	2	3	5	10
Waga	4	5	1	2

b)

Liczba	9	2	6	8	16
Waga	0,2	0,4	0,25	0,05	0,1

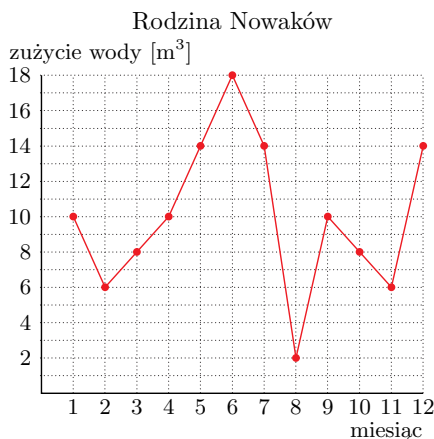
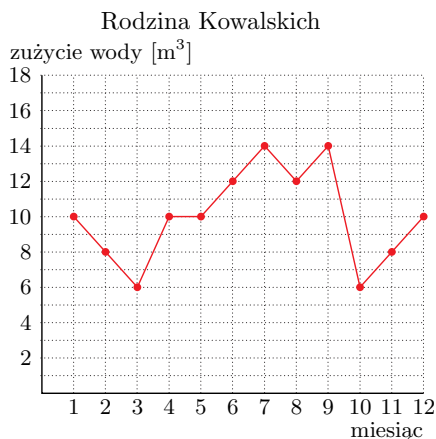
8. Ocena wystawiana na półrocze przez pewnego nauczyciela jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ze średnich arytmetycznych ocen z prac klasowych, sprawdzianów i pracy na lekcji – z wagami odpowiednio 0,5, 0,3 i 0,2. Ocenę Kuby z prac klasowych to 5, 4, 2, ze sprawdzianów – 4, 3, 3, 5, 2 i za pracę na lekcji – 4, 3. Jaką ocenę otrzyma Kuba na półrocze?

$$8. \frac{0,5 \cdot \frac{5+4+2}{3} + 0,3 \cdot \frac{4+3+3+5+2}{5} + 0,2 \cdot \frac{4+3}{2}}{0,5+0,3+0,2} = 3,55$$

Kuba otrzyma 4.

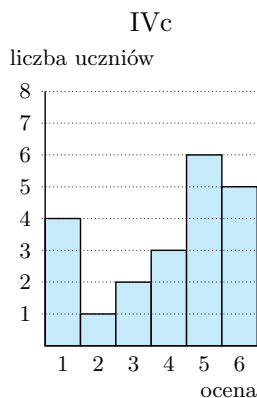
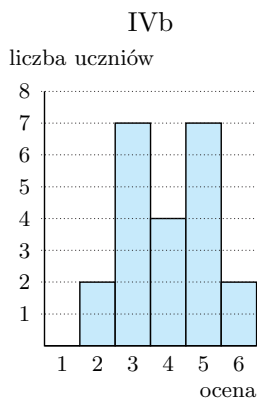
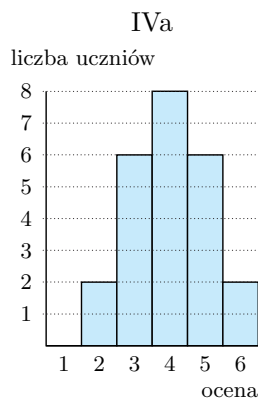
9. Na wykresach poniżej podano zużycie wody w kolejnych miesiącach przez rodziny Kowalskich i Nowaków. Sprawdź, czy średnie miesięczne zużycie wody w obu rodzinach jest takie samo. Oblicz odchylenie standardowe miesięcznego zużycia wody dla:

a) rodziny Kowalskich, b) rodziny Nowaków, c) obu rodzin razem.



9. a) $\bar{x}_K = \frac{120}{12} = 10 \text{ [m}^3\text{]}$
 $\sigma_K = \sqrt{\frac{80}{12}} \approx 2,58 \text{ [m}^3\text{]}$
 b) $\bar{x}_N = \frac{120}{12} = 10 \text{ [m}^3\text{]}$
 $\sigma_N = \sqrt{\frac{216}{12}} = \sqrt{18} \approx 4,24 \text{ [m}^3\text{]}$
 c) $\sigma = \sqrt{\frac{37}{3}} \approx 3,51 \text{ [m}^3\text{]}$

10. Na diagramach podano wyniki sprawdzianu w trzech klasach w pewnym liceum. Oblicz średnią ocen ze sprawdzianu w każdej klasie. W której z nich odchylenie standardowe ocen jest największe?



11. Pewna firma ma dwa oddziały. W oddziale I pracuje 20% osób zatrudnionych w tej firmie, pozostałe osoby pracują w oddziale II. Średnie zarobki w oddziale I wynoszą 6000 zł, w oddziale II – 4000 zł, natomiast odchylenia standardowe są równe odpowiednio 1000 zł i 200 zł. Oblicz średnią i odchylenie standardowe zarobków dla całej firmy.

11. $\bar{x} = 0,2 \cdot 6000 + 0,8 \cdot 4000 = 4400 \text{ [zł]}$
 N – liczba wszystkich pracowników
 $\sigma_I^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{0,2N} - 6000^2 = 1000^2$, stąd $\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{N} = 7\,400\,000$
 $\sigma_{II}^2 = \frac{y_1^2 + \dots + y_m^2}{0,8N} - 4000^2 = 200^2$, stąd $\frac{y_1^2 + \dots + y_m^2}{N} = 12\,832\,000$
 $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_m^2}{N} - (\bar{x})^2 = 872\,000$
 $\sigma \approx 933,8 \text{ zł}$

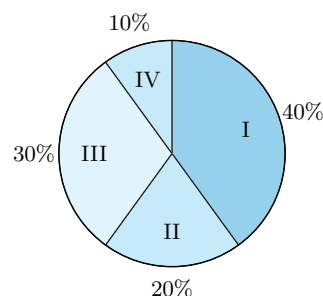
10. $\bar{x}_a = 4$, $\sigma_a \approx 1,08$, $\bar{x}_b = 4$,
 $\sigma_b \approx 1,17$, $\bar{x}_c = 4$, $\sigma_c \approx 1,8$

Zestaw II – ćwiczeniowy

12. a) $\frac{49+7x}{7} = 12$, czyli $x = 5$
 2, 4, 5, 14, 14, 15, 30
 $M = 14$, $D = 14$
 b) $\frac{17+x+y}{7} = 4$,
 czyli $x + y = 11$
 $y = 1$, $x = 10$

12. a) Średnia arytmetyczna liczb 14, 2, 4, 15, 14, x , $6x$ jest równa 12. Oblicz x oraz wyznacz medianę i dominantę tych liczb.
 b) Średnia arytmetyczna liczb 3, 1, 2, 5, 6, x , y jest równa 4. Oblicz x i y , jeśli wiadomo, że dominanta tych liczb jest równa 1 oraz $x > y$.

13. Pewna firma zatrudnia 120 osób w czterech oddziałach znajdujących się w różnych miastach. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4400 zł, w II – 4800 zł, w III – 4200 zł, w IV – 6000 zł. Na diagramie poniżej został podany procentowy rozkład zatrudnienia w poszczególnych oddziałach.



- a) Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.
 b) Jak zmieni się średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie, jeśli w I oddziale zatrudnienie zmniejszy się o 25%, a średnia zarobków w tym oddziale nie ulegnie zmianie?
14. W pewnej firmie 20% pracowników zarabia średnio miesięcznie 7 tysięcy złotych. Średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 4,5 tysiąca złotych. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.
15. Podczas międzyszkolnych zawodów w łyżwiarstwie figurowym dziewięciu sędziów przyznawało noty za technikę i prezentację programu w skali od 0,0 do 6,0 punktów. Nota zarówno za technikę, jak i za prezentację programu była średnią arytmetyczną uzyskanych punktów. Jakie były końcowe noty dwóch par, których punktacja została podana w tabeli, jeśli końcowa nota była:
- a) średnią arytmetyczną noty za technikę i noty za prezentację,
 b) średnią ważoną, przy czym nota za technikę miała wagę 0,6, a nota za prezentację – wagę 0,4?

Para I	technika	5,0	5,1	5,0	5,2	5,5	5,0	5,3	5,1	5,6
	prezentacja	4,9	5,0	4,8	5,2	5,4	4,9	5,0	4,8	5,0
Para II	technika	6,0	5,8	5,9	6,0	5,7	5,8	5,7	5,9	5,4
	prezentacja	5,5	5,8	5,5	5,9	5,6	5,8	5,9	5,4	5,9

13. a) $\bar{x} = 0,4 \cdot 4400 + 0,2 \cdot 4800 + 0,3 \cdot 4200 + 0,1 \cdot 6000 = 4580$ [zł]
 b) Liczba zatrudnionych osób po zmniejszeniu zatrudnienia:
 I – 36, II – 24, III – 36, IV – 12
 $\bar{x} = \frac{36 \cdot 4400 + 24 \cdot 4800 + 36 \cdot 4200 + 12 \cdot 6000}{108} = 4600$
 Średnie wynagrodzenie w firmie zwiększy się o 20 zł.
14. $\bar{x} = 0,2 \cdot 7000 + 0,8 \cdot 4500 = 5000$ [zł]
15. a) Para I: technika: 5,2, prezentacja: 5,0, nota końcowa: 5,1
 Para II: technika: 5,8, prezentacja: 5,7, nota końcowa: 5,75
 b) Para I: $\bar{x} = \frac{0,6 \cdot 5,2 + 0,4 \cdot 5,0}{0,6 + 0,4} = 5,12$, para II: $\bar{x} = \frac{0,6 \cdot 5,8 + 0,4 \cdot 5,7}{0,6 + 0,4} = 5,76$

16. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$, średnią arytmetyczną kwadratów $\overline{x^2}$ oraz wariancję poniższych danych.

- a) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 c) 10, 20, 30, 40, 50
b) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 d) -2, -2, -1, -1, 0, 5, 5

- D** 17. Wykaż, że jeżeli $\overline{x^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $x_1, \dots, x_k$, a $\overline{y^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $y_1, \dots, y_l$, to średnia arytmetyczna kwadratów wszystkich tych liczb jest równa:

$$\frac{k \cdot \overline{x^2} + l \cdot \overline{y^2}}{k+l}$$

18. W pewnej klasie jest 12 dziewcząt i 8 chłopców. W tabeli podano średnie ocen z klasówki ze statystyki w tej klasie oraz odchylenia standardowe (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

	Dziewczęta	Chłopcy
Średnia ocen	4	4,2
Odchylenie standardowe	0,9	1,5

Oblicz średnią ocen z tej klasówki i odchylenie standardowe dla całej klasy. Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.

19. W firmie A pracuje 10 osób, a w firmie B – 20 osób. Średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie A wynosi 4000 zł, a odchylenie standardowe – 500 zł, natomiast w firmie B średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 5000 zł, a odchylenie standardowe – 1000 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie oraz odchylenie standardowe dla obu firm łącznie. Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.
20. Średnie zarobki w pewnej firmie wynoszą 6000 zł, a odchylenie standardowe wynosi 500 zł. Oblicz, jak zmieni się średnie wynagrodzenie i odchylenie standardowe, jeżeli każdy z pracowników dostanie:
- a) 5% podwyżki, b) 200 zł podwyżki.
21. Średnia arytmetyczna liczb $x, y, 2, 6, 6, 4, 3, 4$ jest równa 4, a odchylenie standardowe jest równe 1,5. Oblicz x i y , jeśli wiadomo, że $x < y$.
22. Wśród 10 ocen z matematyki pewnego ucznia są tylko trójki i czwórki. Oblicz, ile jest czwórek, jeśli wiadomo, że wariancja ocen wynosi 0,16 oraz czwórek jest więcej niż trójek.

21. $\frac{25+x+y}{8} = 4$, czyli $y = 7 - x$
 $117 + x^2 + y^2 = 8(1,5^2 + 4^2)$, czyli $x^2 + y^2 = 29$
 $x^2 + (7 - x)^2 = 29$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x = 2$, $y = 5$
22. x – liczba 4, $10 - x$ – liczba 3, $x > 5$
 $(10 - x) \cdot 3^2 + x \cdot 4^2 = 10 \left(0,16 + \left(\frac{(10-x) \cdot 3 + x \cdot 4}{10} \right)^2 \right)$
 $9(10 - x) + 16x = 1,6 + \frac{(x+30)^2}{10}$
 $x^2 - 10x + 16 = 0$, $x = 8$, czyli jest 8 czwórek.

16. a) $\bar{x} = 2$, $\overline{x^2} = 4\frac{2}{3}$, $\sigma^2 = \frac{2}{3}$
b) $\bar{x} = 3$, $\overline{x^2} = 11$, $\sigma^2 = 2$
c) $\bar{x} = 30$, $\overline{x^2} = 1100$, $\sigma^2 = 200$
d) $\bar{x} = \frac{4}{7}$, $\overline{x^2} = 8\frac{4}{7}$, $\sigma^2 = 8\frac{12}{49}$

17. $\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}{k}$,
więc $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = k \cdot \overline{x^2}$
 $\overline{y^2} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_l^2}{l}$,
więc $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_l^2 = l \cdot \overline{y^2}$
Zatem:
 $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_l^2}{k+l} =$
 $= \frac{k \cdot \overline{x^2} + l \cdot \overline{y^2}}{k+l}$

Komentarz

W zadaniach 18–22 można wykorzystać wzór z zadania 17 lub następujący wzór:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$$

czyli $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = n(\sigma^2 + (\bar{x})^2)$

18. Średnia klasy:
 $\bar{x} = \frac{12 \cdot 4 + 8 \cdot 4,2}{20} = 4,08$
 $\overline{x_D^2} = \sigma_D^2 + (\bar{x_D})^2 = 0,9^2 + 4^2 = 16,81$
 $\overline{x_C^2} = \sigma_C^2 + (\bar{x_C})^2 = 1,5^2 + 4,2^2 = 19,89$
 $\sigma^2 = \frac{12 \cdot \overline{x_D^2} + 8 \cdot \overline{x_C^2}}{12+8} - (\bar{x})^2 = \frac{12 \cdot 16,81 + 8 \cdot 19,89}{12+8} - 4,08^2 = 1,3956$
 $\sigma \approx 1,18$
19. $\bar{x} = \frac{10 \cdot 4000 + 20 \cdot 5000}{30} \approx 4666,67$ [zł]
Firma A: $x_1^2 + \dots + x_{10}^2 = 10(500^2 + 4000^2) = 162\,500\,000$
Firma B: $y_1^2 + \dots + y_{20}^2 = 20(1000^2 + 5000^2) = 520\,000\,000$
 $\sigma^2 = \frac{162\,500\,000 + 520\,000\,000}{30} - (\bar{x})^2 \approx 972\,222,22$
 $\sigma \approx 986,01$ [zł]
20. a) średnia i odchylenie – wzrost o 5%:
odpowiednio 6300 zł i 525 zł
b) średnia – wzrost o 200 zł:
6200 zł,
odchylenie bez zmian: 500 zł

Zestaw III – podsumowujący

23. $\frac{12 \cdot 140 + 2 \cdot 10}{12} = 140 + \frac{5}{3} =$
 $= 141\frac{2}{3} \approx 142 \text{ [cm]}$

24. x, y – liczba pracowników odpowiednio ze stażem do 5 lat i ponad 5 lat
 $\frac{4000x + 4900y}{x + y} = 4800$
 $100y = 800x$
 $\frac{x}{y} = 0,125$
 Pracownicy z krótszym stażem stanowią 12,5% pracowników z dłuższym stażem.

25. x – liczba pracowników w II oddziale
 a) $\frac{4600 \cdot 2x + 5800 \cdot x}{3x} = \frac{15000x}{3x} =$
 $= 5000 \text{ [zł]}$
 b) $\frac{4600 \cdot 0,6x + 5800 \cdot x}{1,6x} = \frac{8560x}{1,6x} =$
 $= 5350 \text{ [zł]}$

26. Mediana: 3500 zł
 $P(A) = \frac{7}{25}$

23. Średnia wyników w skoku wzwyż 12 uczniów wyniosła 140 cm. Dwóch uczniów skoczyło na wysokość 150 cm. Ile wynosiłaby średnia, gdyby skoczyli oni o 10 cm wyżej?

24. W pewnej firmie średnia płaca wynosi 4800 zł, przy czym średnia płaca pracowników ze stażem nie dłuższym niż 5 lat wynosi 4000 zł, natomiast tych ze stażem dłuższym – 4900 zł. Oblicz, jaki procent wszystkich pracowników stanowią pracownicy z krótszym stażem.

25. Pewna firma ma dwa oddziały. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4600 zł, a w II – 5800 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w obu oddziałach razem, jeżeli wiadomo, że:

- I oddział zatrudnia dwa razy więcej pracowników niż II oddział,
- I oddział zatrudnia o 40% pracowników mniej niż II oddział.

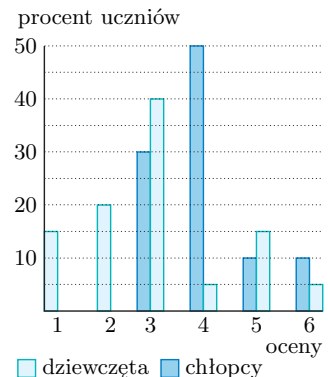
26. W tabeli podano miesięczne wynagrodzenia pracowników pewnej firmy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany pracownik z tej firmy zarabia powyżej mediany.

Liczba pracowników	12	6	2	2	3
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	5000	7000

27. W klasach drugich pewnej szkoły przeprowadzono test sprawdzający z matematyki, w którym wzięło udział 60 uczniów, w tym 20 dziewcząt. Na diagramie podano oceny oddzielnie w grupie dziewcząt i w grupie chłopców.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena losowo wybranej dziewczyny będzie się różniła od średniej w grupie dziewcząt o więcej niż odchylenie standardowe. Ile wynosi to samo prawdopodobieństwo w grupie chłopców?

b) Wybieramy losowo dziewczynę i chłopca. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena dziewczyny będzie nie mniejsza od średniej w grupie dziewcząt, a ocena chłopca – nie mniejsza od średniej w grupie chłopców.



27. a) $\bar{x}_D = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{20} = 3$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 6^2}{20} - 3^2} \approx 1,38$$

$$P(A) = \frac{3+3+1}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\bar{x}_C = \frac{12 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{40} = 4$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{12 \cdot 3^2 + 20 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 6^2}{40} - 4^2} \approx 0,89$$

$$P(B) = \frac{12+4+4}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\bar{\Omega}} = 20 \cdot 40 = 800$$

$$\bar{\bar{A}} = 13 \cdot 28 = 364$$

$$P(A) = \frac{364}{800} = 0,455$$

*5.15. Rachunek różniczkowy

Funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbf{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funkcję $f: (a; b) \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale otwartym** $(a; b)$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Funkcję $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale domkniętym** $\langle a; b \rangle$, jeżeli jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Jeśli funkcja $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \neq f(b)$, to funkcja ta przyjmuje w przedziale $(a; b)$ każdą wartość liczbową p znajdującą się między liczbami $f(a)$ i $f(b)$.

Powyższe twierdzenie mówi, że funkcja ciągła ma **własność Darboux**.

Z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że jeśli funkcja $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła oraz:

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \quad \text{ lub } \quad f(a) > 0, f(b) < 0$$

to istnieje przynajmniej jeden argument $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli funkcja $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja ta przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą.

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 9}{4x - 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 1}{2 - x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2 - x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 1}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{4 - x}}{3 - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{2 - \sqrt{5 - x}}$

2. a) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{6}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(1 - \sqrt{4 - x})(1 + \sqrt{4 - x})}{(3 - x)(1 + \sqrt{4 - x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3 + x}{(-3 + x)(1 + \sqrt{4 - x})} = -\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2 - x} - 1}{2 - \sqrt{5 - x}} \cdot \frac{2 + \sqrt{5 - x}}{2 + \sqrt{5 - x}} \cdot \frac{\sqrt{2 - x} + 1}{\sqrt{2 - x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - x}{-(1 - x)} \cdot \frac{2 + \sqrt{5 - x}}{\sqrt{2 - x} + 1} \right) = -2$

1. a) 5

b) 4

c) -4

d) -2

e) $\frac{5}{8}$

f) $\frac{6}{5}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 5x + 6} =$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x - 1)}{(x - 3)(x - 2)} = -2$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 8} =$

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} =$
 $= -\frac{1}{4}$

i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 1} =$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2(x - 2)}{(x + 1)^2(2x - 1)} = 1$

3. a) -3 b) $\frac{1}{2}$ c) 0
d) $-\infty$ e) ∞ f) $-\infty$
4. a) ∞ b), c), d), e), f) $-\infty$

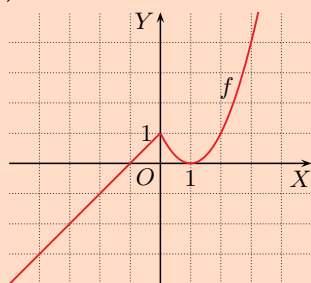
5. a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$
 Funkcja f jest ciągła.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 1) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\frac{2}{x}) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 Funkcja f nie jest ciągła.

6. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (a - x) = a - 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\frac{6}{x+1} + b) = 3 + b$
 $a - 1 = 4 = 3 + b$
 $a = 5, b = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\frac{b}{x+2}) = \frac{b}{4}$
 $4 + a = 3 = \frac{b}{4}$
 $a = -1, b = 12$

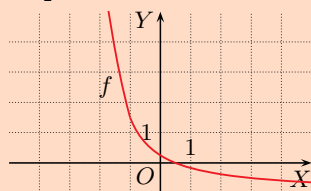
7. a) $x = -2$ b) $x = 7$

8. a) $a = 1$



maksimum: $f(0) = 1$,
 minimum: $f(1) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 - a$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} (\frac{a-x}{x+2}) = a + 1$
 $a = \frac{1}{2}$, brak ekstremów



3. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 4}{-2x^2 + 2x}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - x - 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 8x^2 - 9x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x}{4x^4 + x^3 - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2}{1 + x - 2x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 6x^2 + 1)$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x - 4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - 2}{x - 3}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - x - 2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x - 4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x + 4}{5 - x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 2}{4x - 3 - x^2}$

5. Zbadaj ciągłość funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{dla } x > 1 \\ -x + 1 & \text{dla } x \leq 1 \end{cases}$

6. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{dla } x < 1 \\ 4 & \text{dla } x = 1 \\ \frac{6}{x+1} + b & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{dla } x < 2 \\ 3 & \text{dla } x = 2 \\ \frac{b}{x+2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

7. Wyznacz punkty, w których funkcja f nie jest ciągła.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x^2-4} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x = -2 \\ -\frac{1}{4} & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x - 7 & \text{dla } x \leq 2 \\ x^2 - 9 & \text{dla } 2 < x < 7 \\ \frac{x^2 + 1}{x} & \text{dla } x \geq 7 \end{cases}$

8. Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła? Naszczuj wykres tej funkcji i z wykresu odczytaj jej ekstrema lokalne.

a) $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{dla } x < 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \\ (x - a)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{dla } x < -1 \\ \frac{a-x}{x+2} & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$

9. Wykaż, że funkcja f ma w podanym przedziale co najmniej jedno miejsce zerowe.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \log_2 x$, $\langle 1; 4 \rangle$ b) $f(x) = \frac{x+5}{x+2} - 3^x$, $\langle -1; 1 \rangle$

10. Wykaż, że równanie ma w podanym przedziale co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$, $\langle 0; 1 \rangle$ b) $-x^4 + 4x + 3 = 0$, $\langle 1; 2 \rangle$

11. Wyznacz przybliżone rozwiązanie równania z dokładnością do $\frac{1}{4}$.

a) $x^3 + 4x - 1 = 0$ b) $x^3 + 2x + 1 = 0$

9. a) Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$ oraz $f(1) = 3 > 0$ i $f(4) = -2 < 0$. Zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$.

10. Korzystamy z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich.

a) Niech $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Wówczas $f(0) = 1 > 0$ oraz $f(1) = -1 < 0$. Funkcja f jest ciągła, więc ma miejsce zerowe w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$. Zatem równanie $x^3 - 3x + 1 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w tym przedziale.

11. a) $f(x) = x^3 + 4x - 1$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 4 > 0$

Niech x_0 będzie miejscem zerowym funkcji f .

Funkcja f jest ciągła, więc $x_0 \in (0; 1)$.

$f(\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{8} > 0$, więc $x_0 \in (0; \frac{1}{2})$

$x_0 \approx \frac{1}{4}$ – błąd jest mniejszy od $\frac{1}{4}$

Jeżeli istnieje skończona granica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy $f'(x_0)$. Mówimy wówczas, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 .

Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX .

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to **styczna** do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x , to:

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, gdzie c jest dowolną stałą
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ dla $g(x) \neq 0$
- $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Pochodne niektórych funkcji

$(c)' = 0$, gdzie c – stała

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$(x)' = 1$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in \mathbf{R}_+$$

$(x^r)' = rx^{r-1}$, $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

12. Na podstawie definicji oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 .

a) $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2$

b) $f(x) = 2x^2, x_0 = 4$

d) $f(x) = -\frac{2}{x}, x_0 = 1$

13. Sprawdź, korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$.

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = x|x|$

14. Wyznacz pochodną funkcji f , a następnie oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + x$

b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

d) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 0,5x^2 + 1$

13. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$$

Zatem $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = |2x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

Zatem $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, czyli $f'(0) = 0$.

12. a) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

b) $f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 32}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x^2 - 16)}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x + 4)(x - 4)}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (2x + 8) = 16$$

c) $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{4}{x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x - 2)}{x(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{2}{x}\right) = -1$$

d) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{2}{x} + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 + 2x}{x(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

14. a) $f'(x) = 6x - 4, f'(0) = -4, f'(1) = 2$

b) $f'(x) = -3x^2 + 8x - 3, f'(0) = -3, f'(1) = 2$

c) $f'(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 1, f'(0) = 1, f'(1) = -10$

d) $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + x, f'(0) = 0, f'(1) = 12$

15. a) $f'(x) = 6x + 5$,
 $f'(-1) = -1$, $f'(-2) = -7$
 b) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4$,
 $f'(-1) = 3$, $f'(-2) = -8$
 c) $f'(x) = -20x^4 + 3x^2 - 8x$,
 $f'(-1) = -9$, $f'(-2) = -292$
 d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$,
 $f'(-1) = 0$, $f'(-2) = -24$
16. a) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
 $f'(x) = -\frac{2}{(x+4)^2}$
 b) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 $f'(x) = -\frac{12}{(x-3)^2}$
 c) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $f'(x) = 12x^3 + \frac{5}{x^2}$
 d) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$,
 $f'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{(x-1)^2}$
 e) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,
 $f'(x) = -\frac{x^2+12x+4}{(x^2-4)^2}$
 f) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$,
 $f'(x) = \frac{x^4+9x^2+6x}{(x^2+3)^2}$
 g) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$,
 $f'(x) = \frac{-x^6+3x^4-2x^3-1}{(x^4+x)^2}$
 h) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{4}\}$,
 $f'(x) = -\frac{6}{(4x-1)^2} + \frac{2}{x^3}$
 i) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$,
 $f'(x) = -\frac{8x^3+2}{(x^4+x)^2} - \frac{3x^2}{(x^3+8)^2}$
17. a) $D_f = \langle 0; \infty \rangle$, $D_{f'} = (0; \infty)$,
 $f'(x) = \frac{\sqrt{2x}(5x^2-1)}{2x}$
 b) $D_f = (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$,
 $D_{f'} = (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$,
 $f'(x) = -\frac{1}{2(x-2)^2} \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$
 c) $D_f = \mathbf{R}$, $D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $f'(x) = \frac{2x(x^2+1)}{\sqrt{x^4+2x^2}}$
 d) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$,
 $f'(x) = \frac{3x}{(x^2+4)^2} \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+1}}$
 e) $D_f = \langle 0; \infty \rangle$,
 $D_{f'} = (0; \infty)$,
 $f'(x) = \frac{16x\sqrt{x+1}}{4\sqrt{4x^3+x}\sqrt{x}}$
 f) $D_f = \langle 0; 4 \rangle \cup (4; \infty)$,
 $D_{f'} = (0; 4) \cup (4; \infty)$,
 $f'(x) = \frac{x-4\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$

15. Wyznacz pochodną funkcji f , a następnie oblicz $f'(-1)$ i $f'(-2)$.

- a) $f(x) = (3x-1)(x+2)$ c) $f(x) = (1-4x^2)(x^3+1)$
 b) $f(x) = (x^2-4)(x^2+x)$ d) $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2$

16. Określ dziedzinę funkcji f , a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

- a) $f(x) = \frac{2}{x+4}$ d) $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x-1}$ g) $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^4+x}$
 b) $f(x) = \frac{4x}{x-3}$ e) $f(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$ h) $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} - \frac{1}{x^2}$
 c) $f(x) = 3x^4 - \frac{5}{x}$ f) $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+3}$ i) $f(x) = \frac{2}{x^4+x} + \frac{1}{x^3+8}$

17. Określ dziedzinę funkcji f , a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

- a) $f(x) = \sqrt{2x}(x^2-1)$ c) $f(x) = \sqrt{x^4+2x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{4x^2+\sqrt{x}}$
 b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{2-\sqrt{x}}$

18. Oblicz miarę kąta, który styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 tworzy z osią OX .

- a) $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$, $x_0 = \frac{1}{2}$ c) $f(x) = x^2 - 6x + \frac{9}{x}$, $x_0 = 3$
 b) $f(x) = \sqrt{6x}$, $x_0 = \frac{9}{2}$ d) $f(x) = (x^2-x)^6$, $x_0 = \frac{1}{2}$

19. Oblicz tangens kąta, który styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 tworzy z osią OX . Podaj przybliżoną miarę tego kąta.

- a) $f(x) = x^2 + 3x - \frac{8}{x}$, $x_0 = 2$ c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x_0 = -1$
 b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x_0 = \sqrt{5}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)^4$, $x_0 = -\frac{1}{2}$

20. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

- a) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = -1$ e) $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$, $x_0 = -2$
 b) $f(x) = x^3 - 6x$, $x_0 = 2$ f) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-x+2}$, $x_0 = 1$
 c) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ g) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$, $x_0 = -2$
 d) $f(x) = \frac{5x+2}{x+6}$, $x_0 = -4$ h) $f(x) = \sqrt{x^4+x^2+7}$, $x_0 = 1$

21. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f w punktach jej przecięcia z osią OX .

- a) $f(x) = x^2 + 4x$ b) $f(x) = 8x - x^4$ c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}$

18. a) 60° b) 30° c) 135° d) 0°

19. a) 9 , 84° b) $\frac{10}{9}$, 48° c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 145° d) $\frac{3375}{4096}$, 39°

20. a) $y = -4x - 5$ b) $y = 6x - 16$ c) $y = -2x + 4$ d) $y = 7x + 19$

e) $f'(x) = \frac{4x^2-16}{(x^2+4)^2}$, $f'(-2) = 0$, $y = 1$

f) $f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2-x+2)^2}$, $f'(1) = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

g) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$, $f'(-2) = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

h) $f'(x) = \frac{2x^3+x}{\sqrt{x^4+x^2+7}}$, $f'(1) = 1$, $y = x + 2$

21. a) $P_1(0, 0)$, $y = 4x$; $P_2(-4, 0)$, $y = -4x - 16$

b) $P_1(0, 0)$, $y = 8x$; $P_2(2, 0)$, $y = -24x + 48$

c) $P_1(-1, 0)$, $y = -2x - 2$; $P_2(1, 0)$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

22. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 1$:
- równoległej do prostej $2x + y = 0$,
 - prostopadłej do prostej $4x + y - 1 = 0$,
 - przechodzącej przez punkt $(0, -\frac{5}{2})$.
23. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{2x^2} - 1$, jeśli wiadomo, że z osią OX tworzy ona kąt 150° .
- D** 24. Wykaż, że prosta o równaniu $y = 2(x - 3)$ jest wspólną styczną wykresów funkcji:
- $$f(x) = \frac{-2x^2}{3(x-1)} \quad \text{i} \quad g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$
- Wyznacz współrzędne punktów styczności.
25. Dla jakiej wartości parametru m podana prosta jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + m$?
- $y = -4x$
 - $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$
 - $y = -2$

Jeśli pochodna funkcji f jest **dodatnia** w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale **rosnąca**.

Jeśli pochodna funkcji f jest **ujemna** w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale **malejąca**.

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$ i jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$ (styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX).

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to ma ona w punkcie x_0 **maksimum**.

Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to ma ona w punkcie x_0 **minimum**.

Dalej ekstrema lokalne będziemy nazywać ekstremami.

24. Prosta $y = 2(x - 3)$ przecina wykres funkcji f w punkcie $(\frac{3}{2}, -3)$. Wyznaczamy równanie stycznej do wykresu funkcji f w tym punkcie.

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-2x)}{3(x-1)^2}, \quad y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2})$$

$$y + 3 = 2(x - \frac{3}{2}), \quad y = 2x - 6$$

Zatem $y = 2(x - 3)$ jest styczną do wykresu funkcji f .

Prosta $y = 2(x - 3)$ przecina wykres funkcji g w punktach $(0, 0)$ i $(3, 0)$. Wyznaczamy równania stycznych do wykresu funkcji g w tych punktach.

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 11, \quad g'(0) = 11 \neq 2, \quad g'(3) = 2$$

$$y - g(3) = g'(3)(x - 3), \quad y - 0 = 2(x - 3), \quad y = 2x - 6$$

Zatem $y = 2(x - 3)$ jest styczną do wykresu funkcji g w punkcie $(3, 0)$.

22. a) $2x_0^3 = -2$, czyli $x_0 = -1$
 $y = -2x - \frac{5}{2}$
- b) $2x_0^3 = \frac{1}{4}$, czyli $x_0 = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{4}x - \frac{35}{32}$
- c) $f'(x_0) = 2x_0^3$
 $y = 2x_0^3(x - x_0) + \frac{1}{2}x_0^4 - 1 =$
 $= 2x_0^3x - \frac{3}{2}x_0^4 - 1$
 $y = 2x_0^3x - \frac{5}{2}$
 $x_0 = -1$ lub $x_0 = 1$
 $y = -2x - \frac{5}{2}, y = 2x - \frac{5}{2}$
23. $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^3} = \text{tg } 150^\circ =$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $x_0 = \sqrt{3}$
 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}$
25. a) $f'(x_0) = 4x_0^3 = -4$,
 czyli $x_0 = -1$
 $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$
 $y - (1 + m) = -4(x + 1)$
 $y = -4x - 3 + m$,
 czyli $m = 3$
- b) $f'(x_0) = 4x_0^3 = \frac{1}{2}$,
 czyli $x_0 = \frac{1}{2}$
 $y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$
 $y - (\frac{1}{16} + m) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})$
 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} + m$,
 czyli $m = \frac{1}{16}$
- c) $f'(x_0) = 4x_0^3 = 0$,
 czyli $x_0 = 0$
 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
 $y - m = 0$, czyli $m = -2$

26. a) malejąca w $\langle -2; 4 \rangle$,
rosnąca w $(-\infty; -2)$
i w $\langle 4; \infty \rangle$
b) malejąca w $(-\infty; -1)$
i w $\langle 1; \infty \rangle$, rosnąca w $\langle -1; 1 \rangle$
c) malejąca w $\langle -3; 0 \rangle$
i w $(0; 3)$, rosnąca w $(-\infty; -3)$
i w $\langle 3; \infty \rangle$
d) malejąca w $(-\infty; -\frac{3}{2})$
i w $(0; \frac{3}{2})$,
rosnąca w $\langle -\frac{3}{2}; 0 \rangle$ i w $\langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$
e) malejąca w $(-\infty; 0)$
i w $\langle 1; 2 \rangle$,
rosnąca w $\langle 0; 1 \rangle$ i w $\langle 2; \infty \rangle$
f) rosnąca w $(-\infty; -3)$
i w $(-3; \infty)$
g) malejąca w $(-\infty; -3)$
i w $\langle -\frac{1}{2}; 1 \rangle$,
rosnąca w $\langle -3; -2 \rangle$, $\langle -2; -\frac{1}{2} \rangle$
i w $\langle 1; \infty \rangle$
h) malejąca w $\langle \frac{2}{3}; 2 \rangle$,
rosnąca w $\langle 0; \frac{2}{3} \rangle$ i w $\langle 2; \infty \rangle$

27. a) minimum:
 $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} + 1$,
maksimum:
 $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} + 1$
b) minima:
 $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -9$,
maksimum: $f(0) = 0$
c) minimum: $f(-1) = -1$,
maksimum: $f(1) = 1$
d) minimum: $f(2) = 4$,
maksimum: $f(0) = 0$
e) maksimum: $f(0) = 0$
f) minimum: $f(4) = \frac{3}{4}$
28. a) $f(-1) = -12$, $f(1) = 0$
b) $f(2) = -8$,
 $f(0) = f(3) = 0$
c) $f(-3) = -2,9$, $f(0) = -2$
d) $f(\sqrt{3} - 2) = -\frac{\sqrt{3}+2}{2}$,
 $f(\sqrt{3} + 2) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$
29. a) $f(\frac{3}{2}) = \frac{81}{4}$ b) $f(1) = \sqrt{2}$
c) $f(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{54}$
d) $f(-1) = f(1) = 1$

30. a) $(-\infty; 1)$ b) $\langle 0; \infty \rangle$
c) $\langle 0; \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \rangle$

32. a) 0 ekstremów dla $a = 0$,
1 ekstremum dla $a \neq 0$
b) 0 ekstremów dla $a = 0$,
2 ekstrema dla $a \neq 0$
c) 1 ekstremum dla $a = 0$,
2 ekstrema dla $a \neq 0$

Zestaw II – ćwiczeniowy

26. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$ e) $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2}$
b) $f(x) = -3x^5 - 5x^3 + 30x - 1$ f) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 5}{x + 3}$
c) $f(x) = x + \frac{9}{x}$ g) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{x+2}$
d) $f(x) = (4x^2 - 9)^4$ h) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}$

27. Wyznacz ekstrema funkcji f .

a) $f(x) = x^3 - 9x + 1$ c) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e) $f(x) = \frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+3}$
b) $f(x) = x^4 - 6x^2$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ f) $f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(x-6)^2}$

28. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w danym przedziale.

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, $\langle -1; 2 \rangle$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{2x - 4}$, $\langle -3; 1 \rangle$
b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 2x^2 - 3x$, $\langle 0; 3 \rangle$ d) $f(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1}$, $\langle -1; 4 \rangle$

29. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f .

a) $f(x) = 3x^4 + (3x - 6)^4$ c) $f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2}(x + 1)^4$
b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}$

30. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = 2x^2 - x^4$ b) $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$ c) $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+1}$

31. Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru a .

a) $2x^3 - 6x = a$ b) $x^4 - 4x^2 + 3 = a$

32. Określ liczbę ekstremów funkcji f w zależności od parametru a .

a) $f(x) = ax^2 + x - 2$ b) $f(x) = x^3 + ax^2 - 1$ c) $f(x) = ax^3 - x^2$

33. Dla jakiego $x > 0$ wyrażenie $x^3 + 2y$ przyjmuje najmniejszą wartość, jeśli wiadomo, że $6x + y - 1 = 0$? Oblicz tę wartość.

34. Dla jakich x i y wyrażenie $x^4 + y^2$ przyjmuje najmniejszą wartość, jeśli wiadomo, że $x + y + 3 = 0$? Oblicz tę wartość.

35. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o polu równym 18, aby jego obwód był najmniejszy?

31. a) 1 pierwiastek
dla $a \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$,
2 pierwiastki dla $a \in \{-4, 4\}$,
3 pierwiastki dla $a \in (-4; 4)$
b) 0 pierwiastków dla $a \in (-\infty; -1)$,
2 pierwiastki dla $a \in \{-1\} \cup (3; \infty)$,
3 pierwiastki dla $a = 3$,
4 pierwiastki dla $a \in (-1; 3)$

33. $x = 2$, najmniejsza wartość: -14

34. $x = -1$, $y = -2$, najmniejsza wartość: 5

35. kwadrat o boku $3\sqrt{2}$

36. Wyznacz najmniejszą wartość sumy długości przekątnych rombu o polu równym 50.
37. Na kole o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny. Wyznacz wymiary trójkąta, dla którego promień koła na nim opisanego jest najkrótszy.
38. Jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy, jeśli suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 36, a jego podstawą jest:
- a) trójkąt, b) czworokąt?
39. Z drutu o długości 720 cm zrobiono szkielet akwariów w kształcie prostopadłościanu, którego długości krawędzi podstawy są w stosunku 1:2. Wyznacz wymiary akwariów o największej objętości.
40. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 24 cm^2 . Jakie wymiary powinien mieć ten prostopadłościan, aby jego objętość była największa?
41. Uczeń miał rozwiązać następujące zadanie:
 „Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 8. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość bryły powstałej przez obrót tego trójkąta dookoła jego osi symetrii jest największa?”
 Początek rozwiązania podanego przez ucznia przedstawiono w ramce.

Mamy $2x + 2r = 8$,
 stąd $x = 4 - r$, gdzie $r \in (0; 2)$.

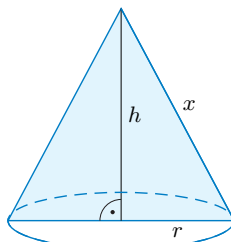
Objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{x^2 - r^2}$$

Zatem:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{(4-r)^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{16 - 8r}$$

$$\text{czyli } V(r) = \frac{1}{3}\pi \sqrt{16r^4 - 8r^5}, \text{ gdzie } r \in (0; 2).$$



Dokończ rozwiązanie zadania:

- a) analizując znak pochodnej funkcji V ,
 b) rozpatrując funkcję pomocniczą $f(r) = 16r^4 - 8r^5$.
42. Tworząca stożka ma długość 12. Wyznacz objętość stożka jako funkcję jego wysokości x i podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x objętość stożka jest największa?

40. x – długość krawędzi podstawy, h – wysokość prostopadłościanu

$$P_c = 2x^2 + 4xh = 24, \text{ stąd } h = -\frac{x}{2} + \frac{6}{x}, \text{ gdzie } x \in (0; 2\sqrt{3})$$

$$V(x) = x^2(-\frac{x}{2} + \frac{6}{x}) = -\frac{x^3}{2} + 6x, V'(x) = -\frac{3x^2}{2} + 6$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 2)$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (2; 2\sqrt{3})$$

Zatem funkcja V w punkcie $x_0 = 2$ przyjmuje wartość największą.

Największą objętość ma sześcián o krawędzi 2 cm.

42. $x^2 + r^2 = 12^2$, czyli $r^2 = 144 - x^2$, gdzie $x \in (0; 12)$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(144 - x^2)x = -\frac{1}{3}\pi x^3 + 48\pi x, D = (0; 12), V'(x) = -\pi x^2 + 48\pi$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 4\sqrt{3})$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (4\sqrt{3}; 12)$$

Funkcja V w punkcie $x_0 = 4\sqrt{3}$ przyjmuje wartość największą.

36. 20

$$37. 4 + 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}, 4 + 4\sqrt{2}$$

38. x – długość krawędzi podstawy, h – wysokość graniastosłupa

$$a) V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}h$$

$$6x + 3h = 36,$$

$$\text{skąd } h = 12 - 2x, x \in (0; 6)$$

$$V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}(12 - 2x) =$$

$$= 3\sqrt{3}x^2 - \frac{x^3\sqrt{3}}{2}$$

$$V'(x) = 6\sqrt{3}x - \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 4)$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (4; 6)$$

$$V(4) = 16\sqrt{3}$$

$$b) V = x^2h$$

$$8x + 4h = 36,$$

$$\text{skąd } h = 9 - 2x,$$

$$x \in (0; 4\frac{1}{2})$$

$$V(x) = 9x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 6x(3 - x)$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 3)$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (3; 4\frac{1}{2})$$

$$V(3) = 27$$

39. x – długość krawędzi podstawy, h – wysokość prostopadłościanu

$$12x + 4h = 720,$$

$$\text{stąd } h = 180 - 3x,$$

$$\text{gdzie } x \in (0; 60)$$

$$V(x) = 2x^2(180 - 3x) =$$

$$= -6x^3 + 360x^2$$

$$V'(x) = -18x^2 - 720x =$$

$$= -18x(x + 40)$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 40)$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (40; 60)$$

Zatem funkcja V w punkcie $x_0 = 40$ przyjmuje wartość największą.

Największą objętość będzie miało akwariów o wymiarach: 40 cm, 80 cm, 60 cm.

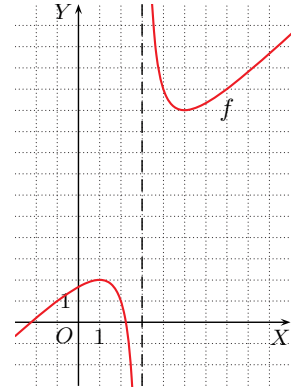
41. 2,4, 2,4, 3,2

Zestaw III – podsumowujący

43. $f'(x) = \frac{-3(2x+1)}{(2x-1)^3}$
 $a_{AB} = \frac{1}{9}$, czyli $f'(x_0) = -9$
 $(x_0 - 1)(6x_0^2 - 3x_0 + 1) = 0$
 $x_0 = 1$
 $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$
 $y - 3 = -9(x - 1)$
 $y = -9x + 12$
44. $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + 2$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$
45. $f'(x) = \frac{3x^2+2x-1}{(3x+1)^2}$
 $f'(x_0) = \frac{1}{4}$ i $x_0 > 0$,
 więc $x_0 = 1$
 $f(1) = \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{4}$
 $1 - 2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{4}$
 $2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{3}{4} = 0$
 $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$ lub $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
 Jeśli $\alpha \in (0; \pi)$, to $\alpha = \frac{\pi}{6}$
 lub $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.
46. $f'(x) = x$ oraz $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$
 Styczne w punkcie x_0 są prostopadłe, gdy:
 $f'(x_0)g'(x_0) = -1$, czyli
 $x_0 = 1$.
 Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie x_0 , gdy
 $\frac{1}{2} \cdot 1^2 + a = \frac{1}{1}$, czyli $a = \frac{1}{2}$.
47. $A(1, 2)$, $B(5, 10)$,
 $y = -3x + 15$
48. $a = -3$, $b = 2$
49. $y = -\frac{4}{3}x + 8$, $P = 24$
50. $C(-1, \frac{3}{2})$, $P = \frac{9}{2}$

43. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{(1-2x)^2}$ i prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty $A(9, 0)$ i $B(0, -1)$.
44. Wykaż, że styczne do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-6}{x-3}$, $x \neq 3$, poprowadzone w punktach jego przecięcia z osiami układu współrzędnych, są równoległe. Oblicz odległość między tymi stycznymi.
45. Prosta o równaniu $y = \frac{1}{4}x$ jest styczna do wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2-x}{3x+1} + \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$
 w punkcie o dodatniej odciętej. Wyznacz α , jeśli $\alpha \in (0; \pi)$.
46. Dane są funkcje $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Dla jakiej wartości parametru a styczne do wykresów funkcji f i g w punkcie ich przecięcia są prostopadłe?
47. Funkcja $f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$ (rysunek obok) w punkcie A osiąga maksimum, a w punkcie B – minimum. Wyznacz współrzędne punktów A i B oraz równanie prostej przechodzącej przez środek odcinka AB i równoległej do stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 2.
48. Punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+ax-4}{x+b}$, $b \neq -1$. Styczna do tego wykresu poprowadzona w punkcie P jest prostopadła do prostej $3x + y + 5 = 0$. Oblicz a i b .
49. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(3, 4)$ i ograniczającej z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu. Oblicz pole tego trójkąta.
50. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ i $C(x, y)$. Wyznacz współrzędne punktu C tak, aby pole trójkąta ABC było największe, jeśli punkt ten należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ oraz $x \in (-2; 1)$. Oblicz pole tego trójkąta.
51. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do wykresu funkcji f i leżącego najbliżej prostej $x - y + 2 = 0$.
- a) $f(x) = 1 - x^2$ *b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$



51. a) $P(x_0, 1 - x_0^2)$, $d = \frac{|1 \cdot x_0 - 1(1 - x_0^2) + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0^2 + x_0 + 1|}{\sqrt{2}}$

Odległość d jest najmniejsza dla x_0 , w którym $g(x_0) = x_0^2 + x_0 + 1$ osiąga minimum, czyli dla $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Zatem $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

b) $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, stąd $\frac{1}{(x_0-1)^2} = 1$, czyli $x_0 = 0$ lub $x_0 = 2$

$P_1(0, 3)$ lub $P_2(2, 1)$

Sprawdzamy odległości punktów P_1 i P_2 od prostej $x - y + 2 = 0$:

$d_1 = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $d_2 = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Zatem $P(0, 3)$.

52. W okrąg o promieniu 1 wpisano trójkąt równoramienny. Niech x oznacza odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta. Dla jakiej wartości x pole trójkąta jest największe? Oblicz to pole.

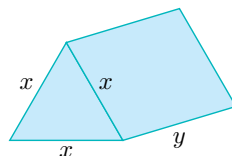
53. Oblicz największą możliwą objętość walca, którego przekątna przekroju osiowego ma długość 6.

54. Długość boku rombu jest równa 4. Wyznacz długości przekątnych rombu tak, aby objętość bryły otrzymanej z obrotu rombu wokół jednej z przekątnych była największa.

55. Powierzchnia metalowego zbiornika w kształcie walca bez pokrywy wynosi $4\pi \text{ m}^2$. Wyznacz wysokość pojemnika o największej objętości.

56. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 40, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 64. Wyznacz najmniejszą możliwą objętość tego prostopadłościanu.

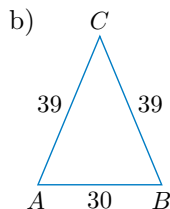
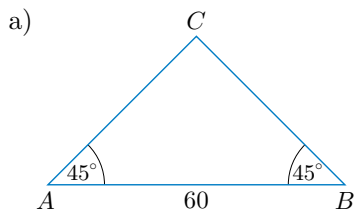
57. Namiot ma kształt graniastoslupa prawidłowego trójkątnego (rysunek obok). Pole powierzchni całkowitej namiotu (łącznie z podłogą) jest równe $18\sqrt{3} \text{ m}^2$. Dla jakiej długości krawędzi $x \in \langle 2; 3 \rangle$, podanej w metrach, objętość namiotu będzie największa?



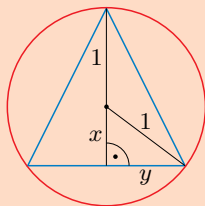
58. Objętość graniastoslupa prawidłowego trójkątnego jest równa 16. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze?

D 59. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a . Wyznacz taką wysokość ostrosłupa, dla której jego objętość jest największa, i uzasadnij, że kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest rozwarty.

60. W trójkącie równoramiennym ABC (rysunek poniżej) na wysokości opuszczonej z wierzchołka C obrano punkt P taki, że suma $|AP| + |BP| + |CP|$ jest najmniejsza. Oblicz długość odcinka CP .



52.



$y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in (0; 1)$

Pole trójkąta:

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot (1 + x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{(1 + x)^2(1 - x^2)} = \sqrt{-x^4 - 2x^3 + 2x + 1}$$

Funkcja P osiąga wartość największą, gdy wartość największą osiąga funkcja:

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1, x \in (0; 1)$$

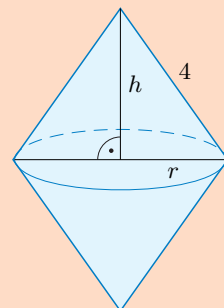
$$f'(x) = -4x^3 - 6x + 2 = -2(x + 1)^2(2x - 1)$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; \frac{1}{2}), f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (\frac{1}{2}; 1)$$

Funkcja f w punkcie $x = \frac{1}{2}$ przyjmuje wartość największą. Zatem pole trójkąta jest największe dla $x = \frac{1}{2}$ i $P(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

53. $12\sqrt{3}\pi$

54. Objętość bryły jest większa, gdy obracamy wokół dłuższej przekątnej.



$$r^2 = 16 - h^2, h \in (0; 4)$$

$$V(h) = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi(16 - h^2)h =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi h^3 + \frac{32}{3}\pi h$$

$$V'(h) = -2\pi h^2 + \frac{32}{3}\pi$$

$$V'(h) > 0 \text{ dla } h \in (0; \frac{4\sqrt{3}}{3})$$

$$V'(h) < 0 \text{ dla } h \in (\frac{4\sqrt{3}}{3}; 4)$$

Zatem funkcja V w punkcie $h_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ przyjmuje wartość największą.

Długości przekątnych rombu:

$$\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ i } \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

55. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$

56. 32

57. $x = 3 \text{ m}$

58. Krawędź podstawy: 4, krawędź boczna: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

59. x – krawędź podstawy
 h – wysokość ostrosłupa
 α – kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi
 $(\frac{1}{2}x\sqrt{2})^2 + h^2 = a^2$,
 czyli $x^2 = 2a^2 - 2h^2$,
 $h \in (0; a)$

$$V(h) = \frac{1}{3}(2a^2 - 2h^2)h =$$

$$= -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}a^2h$$

$$V'(h) = -2h^2 + \frac{2}{3}a^2 =$$

$$= -2(h - \frac{\sqrt{3}}{3}a)(h + \frac{\sqrt{3}}{3}a)$$

$$V'(h) > 0 \text{ dla } h \in (0; \frac{\sqrt{3}}{3}a)$$

oraz $V'(h) < 0$ dla

$$h \in (\frac{\sqrt{3}}{3}a; a)$$

Zatem funkcja V przyjmuje wartość największą w punkcie $h_0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Zauważmy, że } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } \frac{\alpha}{2} = 60^\circ.$$

Zatem $\alpha = 120^\circ$, czyli jest kątem rozwartym.

60. a) $10(3 - \sqrt{3})$ b) $36 - 5\sqrt{3}$

Indeks

- argument funkcji 201
- asymptota
 - pionowa hiperboli 227
 - pozioma hiperboli 227
- bryła platońska 127
- bryły
 - Archimedesesa 130
 - podobne 151
- cechy podobieństwa trójkątów 266
- ciąg
 - arytmetyczny 246
 - geometryczny 246
 - malejący 246
 - monotoniczny 246
 - niemalejący 246
 - nierosnący 246
 - nieskończony 246
 - rosnący 246
 - rozbieżny 251
 - skończony 246
 - stały 246
 - zbieżny 251
- czasza kulista (czasza kuli) 149
- częstość zdarzeń 39
- czworościan foremny 102, 127, 128
- długość
 - odcinka 257
 - wektora 257
- dominanta 291
- dowód nie wprost 181
- dwudziestocian foremny 127, 128
- dwunastocian foremny 127, 128
- dwusieczna kąta wewnętrznego
 - trójkąta 264
- działania
 - na pierwiastkach 194
 - na potęgach 194
- dziedzina funkcji 201
- ekstremum lokalne 301
- funkcja 201
 - ciągła w przedziale domkniętym 297
 - ciągła w przedziale otwartym 297
 - ciągła w punkcie 297
 - homograficzna 227
 - kwadratowa 212
 - liniowa 206
 - logarytmiczna 241
 - malejąca 201
- funkcja
 - monotoniczna 201
 - niemalejąca 201
 - nierosnąca 201
 - rosnąca 201
 - różniczkowalna w punkcie 299
 - stała 201
 - wykładnicza 241
- funkcje trygonometryczne
 - dowolnego kąta 235
 - kąta ostrego 233
 - podwojonego kąta 238
 - sumy i różnicy kątów 238
- gra sprawiedliwa 72, 290
- graniastosłup 91
 - pochyły 91, 100
 - prawidłowy 92
 - prosty 91, 276
- granica ciągu 251, 252
- hiperbola 227
- igła Buffona 39
- iloczyn
 - wektora przez liczbę 257
 - zdarzeń 37
- iloraz ciągu geometrycznego 246
- implikacja 178
- kąt
 - dwuścienny 115
 - między prostą a płaszczyzną 112
 - nachylenia prostej do osi OX 208
 - płaski przy wierzchołku ostrosłupa
 - prawidłowego 102
 - rozwarcia stożka 142
 - środkowy w okręgu 268
 - wpisany w okręgu 268
- koło wielkie kuli 146
- kombinacje 25, 26, 31, 282
- krawędź
 - boczna graniastosłupa 91
 - boczna ostrosłupa 101
 - podstawy graniastosłupa 91
 - podstawy ostrosłupa 101
- kula 146, 276
- liczby
 - całkowite 194
 - naturalne 194
 - niewymierne 194
 - palindromiczne 24
 - wymierne 194

- linia
 - geodezyjna 145
 - śrubowa 145
- logarytm 241
- maksimum lokalne 301
- mediana 291
- miara kąta dwuściennego 115
- miejsca zerowe funkcji kwadratowej 212
- miejsce zerowe funkcji 201
- minimum lokalne 301
- monotoniczność funkcji liniowej 206
- następnik implikacji 178
- objętość
 - czworoscianu foremego 107
 - graniastosłupa 97, 276
 - kuli 147, 276
 - ostrosłupa 105, 276
 - prostopadłościanu 97, 276
 - stożka 142, 277
 - sześcianu 97
 - walca 139, 277
- odchylenie standardowe 291
- odcinek kulisty (odcinek kuli) 149
- odległość punktu od prostej 257
- okrąg 260
 - opisany na czworokącie 270
 - wpisany w czworokąt 270
- okres połowicznego rozpadu 245
- okręgi
 - przecinające się 267
 - rozłączne wewnętrznie 267
 - rozłączne zewnętrznie 267
- okręgi styczne
 - wewnętrznie 267
 - zewnętrznie 267
- ostrosłup 101, 276
 - prawidłowy 101
 - prosty 101
- oś
 - stożka 141
 - walca 138
- ośmiościan foremny 127, 128
- parabola 212
- paradoks Bertranda 75
- permutacje 14, 15, 31, 282
 - z powtórzeniami 18
- pierwiastek
 - k -krotny wielomianu 221
 - wielomianu 221
- płaszczyzna styczna do kuli 146
- płaszczyzny
 - przecinające się 86
 - równoległe 86
- pochodna funkcji w punkcie 299
- pochodne wybranych funkcji 299
- podstawa
 - graniastosłupa 91
 - ostrosłupa 101
 - stożka 141
 - walca 138
- pole powierzchni
 - bocznej stożka 141, 277
 - bocznej walca 138, 277
 - całkowitej graniastosłupa 91
 - całkowitej ostrosłupa 101
 - całkowitej stożka 141, 277
 - całkowitej walca 138, 277
 - kuli 147, 276
- poprzednik implikacji 178
- postać
 - iloczynowa funkcji kwadratowej 212
 - kanoniczna funkcji homograficznej 227
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 212
 - ogólna funkcji kwadratowej 212
- potęga o wykładniku
 - całkowitym 194
 - wymiernym 194
- powierzchnia boczna graniastosłupa 91
- prawa de Morgana 48
- prawdopodobieństwo 44
 - całkowite 55, 282
 - geometryczne 75
 - klasyczne 40
 - różnicy zdarzeń 46
 - sumy zdarzeń 46
 - warunkowe 50, 282
 - zdarzenia 40, 44
 - zdarzenia przeciwnego 45
- proporcjonalność odwrotna 227
- prosta
 - pochyła do płaszczyzny 109
 - prostopadła do płaszczyzny 88
 - przecinająca płaszczyznę 88
 - równoległa do płaszczyzny 88
- proste
 - prostopadłe 87, 206
 - przecinające się 87
 - równoległe 87, 206
 - skośne 87
- prostopadłościan 92, 276
- próba Bernoulliego 67
- przekątna
 - graniastosłupa 94
 - prostopadłościanu 94, 95

przekrój osiowy
 stożka 142
 walca 138
 przekształcenia wykresu funkcji 202
 przestrzeń zdarzeń elementarnych 36
 punkt kratowy w układzie współrzędnych 231

 reguła
 dodawania 20
 mnożenia 10, 11
 romboedr 100
 rozkład
 prawdopodobieństwa 44, 49
 zmiennej losowej 71
 równanie
 kierunkowe prostej 206
 ogólne prostej 206
 okręgu 260
 różnica
 ciągu arytmetycznego 246
 wektorów 257
 zdarzeń 37
 rzut prostokątny
 figury na płaszczyznę 89
 punktu na płaszczyznę 89

 schemat
 Bernoulliego 67, 287
 klasyczny prawdopodobieństwa 40
 sfera 146
 silnia 15
 skala podobieństwa brył 151
 spodek wysokości
 ostrośłupa 101
 stożka 141
 stożek 141, 277
 styczna do wykresu funkcji 299
 suma
 n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 246
 n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 246
 szeregu geometrycznego 253
 wektorów 257
 zdarzeń 37
 symbol Newtona 26, 27
 symetralna boku trójkąta 264
 sześcián 92, 127, 128

 ściana boczna
 graniastosłupa 91
 ostrośłupa 101

 średnia
 arytmetyczna 291
 geometryczna 182
 ważona 291
 środek
 ciężkości trójkąta 259, 264
 odcinka 257
 okręgu opisanego na trójkącie 264
 okręgu wpisanego w trójkąt 264
 środkowa trójkąta 264

 talia kart 34
 tożsamości trygonometryczne 233, 235
 trójmian kwadratowy 212
 twierdzenie
 Bézouta 221
 cosinusów 272
 o dwusiecznej kąta w trójkącie 192, 273
 o pierwiastkach całkowitych wielomianu 221
 o pierwiastkach wymiernych wielomianu 221
 o prostej prostopadłej do płaszczyzny 88
 o przyjmowaniu wartości pośrednich 297
 o reszcie 221
 o rozkładzie wielomianu 221
 o trzech ciągach 252
 o trzech prostych prostopadłych 109
 o zmianie podstawy logarytmu 243
 sinusów 272
 Talesa 266
 Weierstrassa 297
 tworząca
 stożka 141
 walca 138

 walec 138, 277
 wariacje
 bez powtórzeń 19, 20, 31, 282
 z powtórzeniami 22, 23, 31, 282
 wariancja 291
 wartość
 bezwzględna 196, 197
 oczekiwana zmiennej losowej 72, 290
 warunek
 konieczny istnienia ekstremum 301
 wystarczający istnienia ekstremum 301
 wektor przeciwny 257
 wielkości odwrotnie proporcjonalne 227
 wielokąt foremny 269
 wielomian 221
 zerowy 221
 wielościan foremny 127
 wierzchołek
 graniastosłupa 91
 ostrośłupa 101

- wierzchołek stożka 141
- własność Darboux 297
- własności
 - logarytmów 241
 - pochodnej funkcji 299
 - prawdopodobieństwa 44–46, 282
- współczynnik
 - kierunkowy prostej 206
 - proporcjonalności odwrotnej 227
 - wielomianu 221
- współrzędne
 - sferyczne 170
 - środką odcinka 257
 - wektora 257
 - wierzchołka paraboli 212
- wykres funkcji 201
 - cosinus 236
 - liniowej 206
 - sinus 236
- wynik sprzyjający zdarzeniu 36
- wyraz wolny wielomianu 221
- wyróżnik trójmianu kwadratowego 212
- wysokość
 - czworoboku foremnego 107
 - graniastosłupa 91
 - ostrosłupa 101
 - stożka 141
- wysokość walca 138
- wzory
 - na pole trójkąta 264
 - redukcyjne 235
 - skróconego mnożenia 194, 199
 - Viète’a 216
- wzór
 - Bayesa 59, 286
 - Bernoulliego 67, 287
 - dwumianowy Newtona 27
 - na prawdopodobieństwo całkowite 55, 282
 - ogólny ciągu arytmetycznego 246
 - ogólny ciągu geometrycznego 246
- zasada Cavalieriego 154
- zbiór wartości funkcji 201
- zdarzenia
 - niezależne 54
 - rozłączne (wykluczające się) 37
 - zależne 54
- zdarzenie
 - elementarne 36
 - losowe 36
 - niemożliwe 36
 - pewne 36
 - przeciwne 37
- zmienna losowa 71