



3

Bryły obrotowe

W celu zapewnienia bezpiecznego ruchu statków przy podejściach do portów tor wodny jest oznakowany czerwonymi bojami w kształcie walca i zielonymi w kształcie stożka. Stosuje się też boje o innych kształtach i kolorach. Boje malowane w białoczerwone pasy to znaki bezpiecznej wody – wskazują, że wokół nich woda jest żeglowna. Zwykle boje takie są kuliste, walcowe lub drążkowe. Na zdjęciu boja podejściowa do portu w Gdyni.

Multiteka

- Moc Słońca
- Matematyka w sklepie modelarskim
- Zatankować rakietę
- Lot nad Pacyfikiem
- Gdzie jest najbliższa kawiarnia?

Uczeń:

- wskazuje elementy charakteryzujące walec,
- zaznacza przekrój osiowy walca,
- oblicza pole powierzchni całkowitej walca,
- oblicza objętość walca,
- rozwiązuje zadania dotyczące rozwinięcia powierzchni bocznej walca,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości walca,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące walca.

Ćwiczenie 1

a) Podstawa walca jest kołem o promieniu r , więc $P_p = \pi r^2$.

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o wymiarach $2\pi r$ i h , więc $P_b = 2\pi r h$.

Zatem $P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$.

b) $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 10 = 40\pi$,

gdzie $r > 0$

$$r^2 + 10r - 20 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 6\sqrt{5}$$

$$r_1 = \frac{-10+6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} - 5$$

$$r_2 = \frac{-10-6\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$r = (3\sqrt{5} - 5) \text{ cm}$$

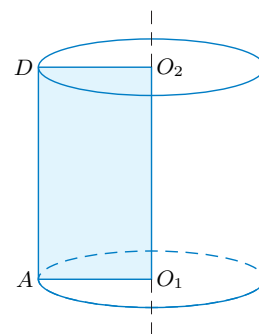
$$P_p = \pi (3\sqrt{5} - 5)^2 = 10\pi (7 - 3\sqrt{5}) [\text{cm}^2]$$

3.1. Walec

Walec to bryła obrotowa otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków. Prostą tę nazywamy **osią** walca.

Dwa koła otrzymane przez obrót dwóch boków prostokąta prostopadłych do osi obrotu nazywamy **podstawami** walca. Dowolny odcinek łączący podstawy walca i do nich prostopadły nazywamy **wysokością** walca. W szczególności odcinki O_1O_2 oraz AD (rysunek obok) są wysokościami walca.

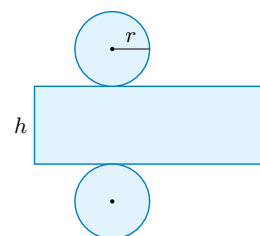
Dowolny odcinek, który łączy dwa punkty z brzegów podstaw walca i jest prostopadły do tych podstaw, nazywamy **tworzącą** walca (np. odcinek AD na rysunku powyżej).



Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

gdzie P_p jest polem podstawy walca, a P_b – polem jego powierzchni bocznej.



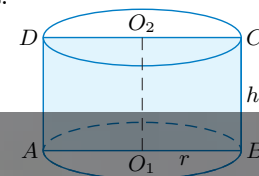
Siatka walca o promieniu podstawy r i wysokości h

Ćwiczenie 1

a) Uzasadnij wzór na pole powierzchni całkowitej walca.

b) Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $40\pi \text{ cm}^2$, a jego wysokość ma 10 cm. Oblicz pole koła będącego podstawą tego walca.

Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś (rysunek obok) – jest to prostokąt o bokach h i $2r$.

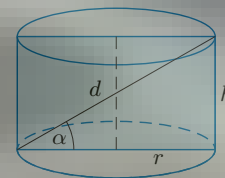


Ćwiczenie 2

Pole przekroju osiowego walca jest równe 40 cm^2 , a promień jego podstawy ma 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Ćwiczenie 3

Przekątna d prostokąta będącego przekrojem osiowym walca ma długość 12 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha = 30^\circ$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.



Multiteka

- Walec – konstrukcja, elementy i siatka
- Pole powierzchni całkowitej walca
- Objętość walca – praktyczne zastosowanie
- Przekroje brył obrotowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1



Twierdzenie

Objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot h = \pi r^2 h$$

gdzie P_p jest polem podstawy walca.

Ćwiczenie 4

Oblicz objętość walca, którego przekrój osiowy jest:

- kwadratem o polu 64 cm^2 ,
- prostokątem o bokach 6 cm i 8 cm (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 5

- Średnica podstawy walca ma 8 cm , a pole jego powierzchni bocznej jest czterokrotnie większe od pola podstawy. Oblicz objętość tego walca.
- Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 15 cm i tworzy z jego podstawą kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,6$. Oblicz objętość tego walca.

Zadania

- Przekątna przekroju osiowego walca ma długość d i tworzy z jego podstawą kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego walca.
 - $d = 6$, $\alpha = 30^\circ$
 - $d = 8$, $\alpha = 60^\circ$
 - $d = 12$, $\alpha = 45^\circ$
 - Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 20 cm i tworzy z jego podstawą kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.
 - $\cos \alpha = 0,8$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$
 - $\sin \alpha = \frac{1}{5}$
 - Pole powierzchni bocznej walca wynosi 392π , a promień jego podstawy i wysokość są równe. Oblicz pole podstawy i objętość tego walca.
 - Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest prostokąt o polu 144 cm^2 , jeżeli wiadomo, że stosunek długości boków tego prostokąta jest równy $9:4$ (rozpatrz dwa przypadki).
- D** 5. Uzasadnij, że w każdym walcu stosunek pola powierzchni bocznej do pola przekroju osiowego jest równy π .

- D** 6. Dany jest prostokąt o bokach a i b , przy czym $a < b$. Wykaż, że walec otrzymany w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku ma większą objętość od walca otrzymanego w wyniku obrotu wokół dłuższego boku.

5. h – wysokość walca, r – promień podstawy

Pole powierzchni bocznej: $P_b = 2\pi r h$

Pole przekroju osiowego: $P = 2rh$

$$\frac{P_b}{P} = \frac{2\pi r h}{2rh} = \pi$$

6. Walec otrzymany w wyniku obrotu wokół boku a : $r = b$, $h = a$, stąd $V_a = \pi b^2 a$

Walec otrzymany w wyniku obrotu wokół boku b : $r = a$, $h = b$, stąd $V_b = \pi a^2 b$

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a} > \frac{a}{a} = 1, \text{ czyli } \frac{V_a}{V_b} > 1$$

Zatem $V_a > V_b$.

Ćwiczenie 4

- a) $r = 4 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) I przypadek

- $r = 3 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

II przypadek

- $r = 4 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 5

- a) $r = 4 \text{ cm}$

$$P_b = 4P_p$$

$$2\pi \cdot 4 \cdot h = 4 \cdot \pi \cdot 4^2$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

- b) $\frac{2r}{15} = \cos \alpha = 0,6$

$$r = 4,5 \text{ cm}$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot 4,5^2 \cdot 12 = 243\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odpowiedzi do zadań

- a) $P_c = 9\pi(\frac{3}{2} + \sqrt{3})$
 $V = \frac{81}{4}\pi$
b) $P_c = 8\pi(1 + 2\sqrt{3})$
 $V = 16\sqrt{3}\pi$
c) $P_c = 108\pi$, $V = 108\sqrt{2}\pi$
- a) $P_c = 320\pi \text{ cm}^2$
b) $h = \frac{8}{5}r$
 $4r^2 + \frac{64}{25}r^2 = 20^2$
 $r = \frac{50\sqrt{41}}{41} \text{ cm}$, $h = \frac{80\sqrt{41}}{41} \text{ cm}$
 $P_c = 2\pi \cdot \frac{2500}{41} + 2\pi \cdot \frac{50\sqrt{41}}{41} \cdot \frac{80\sqrt{41}}{41} = \frac{13000}{41}\pi \text{ [cm}^2\text{]}$
c) $P_c = 2\pi \cdot 4\sqrt{6} \cdot (4\sqrt{6} + 4) = 32\pi(6 + \sqrt{6}) \text{ [cm}^2\text{]}$
- $r = h = 14$
 $P_p = 196\pi$, $V = 2744\pi$
- I przypadek**
$$\begin{cases} 2r \cdot h = 144 \\ \frac{h}{2r} = \frac{9}{4} \end{cases}$$
$$r = 4, h = 18$$
$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 18 = 288\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$
$$P_c = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 18 = 176\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$
II przypadek
$$\begin{cases} 2r \cdot h = 144 \\ \frac{2r}{h} = \frac{9}{4} \end{cases}$$
$$r = 9, h = 8$$
$$V = \pi \cdot 9^2 \cdot 8 = 648\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$
$$P_c = 2\pi \cdot 9^2 + 2\pi \cdot 9 \cdot 8 = 306\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

7. Niech $|AO_1| = |BO_1| = r$,
 $|AD| = |BC| = h$.
 Trójkąt AO_1B jest prostokątny, więc $|AB| = r\sqrt{2}$.

$r\sqrt{2} \cdot h = S$, czyli $rh = \frac{S\sqrt{2}}{2}$
 Pole przekroju osiowego walca:

$$P = 2rh = 2 \cdot \frac{S\sqrt{2}}{2} = S\sqrt{2}$$

8. $\frac{h}{r} = \operatorname{tg} \alpha$, czyli $h = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$

a) $2rh = S$, czyli $h = \frac{S}{2r}$

$$r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{2r},$$

$$\text{więc } r = \sqrt{\frac{S}{2\operatorname{tg} \alpha}}$$

$$\text{oraz } h = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{\frac{S}{2\operatorname{tg} \alpha}}$$

$$V = \pi \cdot \frac{S}{2\operatorname{tg} \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{\frac{S}{2\operatorname{tg} \alpha}} =$$

$$= \frac{\pi S}{2} \cdot \sqrt{\frac{S}{2\operatorname{tg} \alpha}}$$

b) $4r^2 + h^2 = d^2$

$$4r^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = d^2$$

$$r^2 = \frac{d^2}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\text{więc } r = \frac{d}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\text{oraz } h = \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$V = \pi \cdot \frac{d^2}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} =$$

$$= \pi d^3 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{3}{2}}$$

9. tak, $h \geq 3 \cdot 6,4 = 19,2$ [cm]

$$3 \text{ dm}^2 = 300 \text{ cm}^2$$

$$P_b = 2\pi r \cdot h \geq \pi \cdot 6,4 \cdot 19,2 =$$

$$= 122,88\pi > 300 \text{ [cm}^2\text{]}$$

10. $4\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ lub $4\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

11. I przypadek

$$\frac{2\pi r}{6} = \sin 60^\circ, \text{ czyli } r = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\frac{h}{6} = \cos 60^\circ, \text{ czyli } h = 3$$

$$V = \frac{81}{4\pi}$$

II przypadek

$$\frac{h}{6} = \sin 60^\circ, \text{ czyli } h = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{2\pi r}{6} = \cos 60^\circ, \text{ czyli } r = \frac{3}{2\pi}$$

$$V = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$$

12. 1 litr = 1 dm³ = 1000 cm³

Objętość jednej puszk:

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot 10 = 1000,$$

$$\text{czyli } r^2 = \frac{100}{\pi}$$

$$P_p \geq 4r \cdot 6r = 24r^2 =$$

$$= \frac{2400}{\pi} > \frac{2400}{3,2} = 750 \text{ [cm}^2\text{]}$$

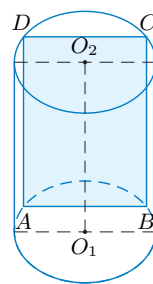
13. Objętość pustej części kubka: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 \cdot 0,1 =$
 $= 16\pi > 48 \text{ [cm}^3\text{]}$

Objętość czterech kostek:

$$V = 4 \cdot 2^3 = 32 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Woda nie wyleje się z kubka.

7. Walec przecięto płaszczyzną równoległą do jego przekroju osiowego i otrzymano prostokąt $ABCD$ o polu S (rysunek obok). Trójkąt AO_1B (gdzie O_1 jest środkiem podstawy walca) jest prostokątny. Wyznacz pole przekroju osiowego tego walca.

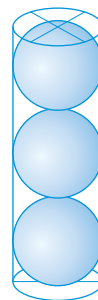


8. Odcinek łączący środek dolnej podstawy walca z punktem na brzegu górnej podstawy tworzy z tymi podstawami kąt α . Wyznacz objętość walca, jeżeli wiadomo, że:

a) pole jego przekroju osiowego jest równe S ,

b) przekątna jego przekroju osiowego ma długość d .

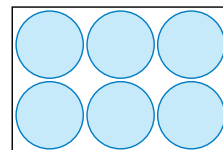
9. W pudełku mającym kształt walca można zmieścić trzy piłki tenisowe o średnicy 6,4 cm każda (rysunek obok). Czy pole powierzchni bocznej tego pudełka jest większe od 3 dm²?



10. Przekrojem osiowym walca jest prostokąt $ABCD$. Długości boków AB i BC oraz przekątnej AC są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej tego walca do pola jego podstawy (rozpatrz dwa przypadki).

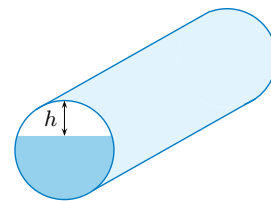
11. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o przekątnej długości 6 tworzącej z jednym z boków prostokąta kąt 60° . Oblicz objętość tego walca.

12. W prostopadłościennym kartonie umieszczono sześć puszek w kształcie walca o objętości 1 litra i wysokości 10 cm każda (rysunek obok). Wykaż, że pole podstawy kartonu jest większe od 750 cm².

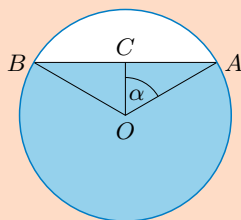


13. Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy 8 cm i wysokości 10 cm jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześciennie metalowe kostki o krawędzi 2 cm każda. Czy woda z kubka się wyleje (pomiń grubość ścianek kubka)?

14. Zbiornik w kształcie walca o promieniu podstawy 6 dm i wysokości 15 dm jest położony poziomo (rysunek obok). Został on częściowo wypełniony wodą tak, że odległość h przedstawiona na rysunku jest równa: a) 3 dm, b) $3(2 - \sqrt{2})$ dm. Oblicz objętość wody w zbiorniku.



14. Przekrój zbiornika:



a) $|OC| = 6 - 3 = 3$, $|CB| = 3\sqrt{3}$

$$\frac{|CO|}{|OB|} = \frac{1}{2} = \cos \alpha, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ$$

$$P_p = \frac{240}{360}\pi \cdot 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = (24\pi + 9\sqrt{3}) \text{ [dm}^2\text{]}$$

$$V = (24\pi + 9\sqrt{3}) \cdot 15 = 45(8\pi + 3\sqrt{3}) \text{ [dm}^3\text{]}$$

b) $|OC| = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$, $|CB| = 3\sqrt{2}$

$$\frac{|CO|}{|OB|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \alpha, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ$$

$$P_p = \frac{270}{360}\pi \cdot 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = (27\pi + 18) \text{ [dm}^2\text{]}$$

$$V = P_p h = (27\pi + 18)15 = 135(3\pi + 2) \text{ [dm}^3\text{]}$$

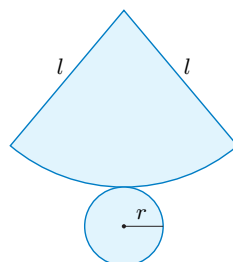
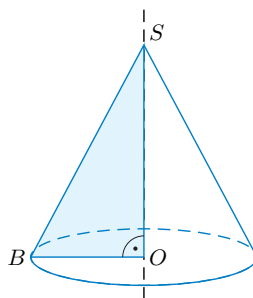
3.2. Stożek

Stożek to bryła obrotowa otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych tego trójkąta. Prosta tę nazywamy **osią** stożka.

Koło otrzymane przez obrót drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a wierzchołek trójkąta nienależący do podstawy – **wierzchołkiem** stożka.

Odcinek łączący wierzchołek stożka ze środkiem podstawy (punkt O na rysunku) nazywamy **wysokością** stożka. Środek podstawy zwany jest też **spodkiem** wysokości stożka. Dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem podstawy nazywamy **tworzącą** stożka (np. odcinek SB na rysunku).

Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu równym tworzącej stożka.



Siatka stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l

Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:

$$P_b = \pi r l$$

Ćwiczenie 1

Uzasadnij wzór na pole powierzchni bocznej stożka.

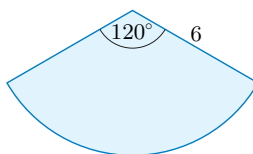
Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:

$$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

gdzie P_p jest polem podstawy stożka.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wycinek koła, który po zwinięciu jest powierzchnią boczną stożka. Oblicz pole podstawy i pole powierzchni całkowitej tego stożka.



Ćwiczenie 3

Podstawą stożka jest koło o polu równym $36\pi \text{ cm}^2$, a powierzchnia boczna tego stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 9 cm wyznaczonym przez kąt środkowy α . Oblicz miarę tego kąta.

Uczeń:

- wskazuje elementy charakteryzujące stożek,
- zaznacza przekrój osiowy stożka i kąt rozwarcia stożka,
- oblicza pole powierzchni całkowitej stożka,
- oblicza objętość stożka,
- rozwiązuje zadania dotyczące rozwinięcia powierzchni bocznej stożka,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości stożka,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące stożka.

Ćwiczenie 1

Ze wzoru na wycinek koła mamy:

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi l^2.$$

Zauważmy, że $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$,

$$\text{czyli } \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{l}.$$

$$\text{Zatem } P_b = \frac{r}{l} \cdot \pi l^2 = \pi r l.$$

Ćwiczenie 2

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{6}, \text{ czyli } r = 2$$

$$P_p = \pi r^2 = 4\pi$$

$$P_c = \pi r(r + l) = 16\pi$$

Ćwiczenie 3

$$r = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{6}{9}$$

$$\alpha = 240^\circ$$

Multiteka

- Stożek – konstrukcja, elementy i siatka
- Pole powierzchni bocznej stożka
- Objętość stożka
- Przekroje brył obrotowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

$$\pi r^2 = 50\pi, \text{ czyli } r = 5\sqrt{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{czyli } \frac{\alpha}{2} = 45^\circ, \text{ skąd } \alpha = 90^\circ$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } \sin \beta = \frac{h}{l} = \frac{h}{15} = 0,6,$$

$$\text{czyli } h = 9 \text{ cm}$$

$$r^2 = l^2 - h^2 = 144$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 9 = 432\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{r} = 2,4, \text{ czyli } h = 2,4r$$

$$r^2 + (2,4r)^2 = 13^2,$$

$$\text{czyli } r = 5 \text{ cm oraz } h = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 6

$$\text{a) } l = 2r$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}, \text{ czyli } l = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Zatem } h = 4\sqrt{3} \text{ cm i } r = 4 \text{ cm.}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\text{b) } r = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

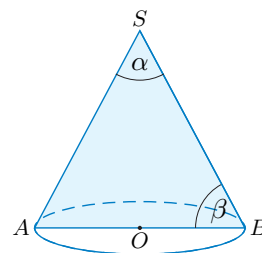
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 27 \cdot h = 27\pi,$$

$$\text{czyli } h = 3 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrojem tym jest trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia** stożka (kąt α na rysunku obok). Kąt między tworzącą stożka a jego podstawą oznaczono na rysunku przez β .



Ćwiczenie 4

Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka, którego tworząca ma długość 10 cm, a pole podstawy jest równe $50\pi \text{ cm}^2$.

Objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie P_p jest polem podstawy stożka.

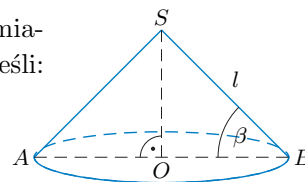
Objętość stożka jest równa $\frac{1}{3}$ objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.

Ćwiczenie 5

Kąt między tworzącą l stożka a jego podstawą ma miarę β (rysunek obok). Oblicz objętość tego stożka, jeśli:

$$\text{a) } \sin \beta = 0,6, l = 15 \text{ cm,}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \beta = 2,4, l = 13 \text{ cm.}$$



Ćwiczenie 6

a) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.

b) Pole podstawy stożka jest równe $27\pi \text{ cm}^2$, a jego objętość jest równa $27\pi \text{ cm}^3$. Oblicz miarę kąta między tworzącą stożka a jego podstawą.

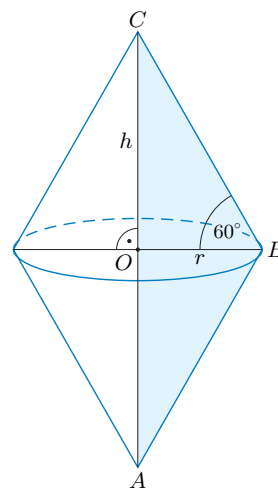
Przykład 1

W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° oraz $|AB| = |BC| = 6 \text{ cm}$. Bryła, która powstała przez obrót tego trójkąta wokół najdłuższego boku, to dwa stożki połączone podstawami (rysunek obok). Oblicz objętość tej bryły.

$$r = |OB| = 3 \text{ cm oraz } h = |OC| = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Obliczamy objętość otrzymanej bryły:

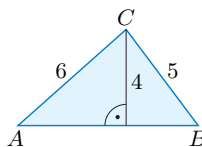
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 7

Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu:

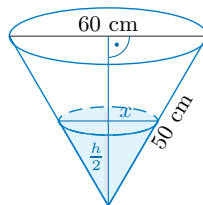
- a) trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu równym 8 cm^2 wokół jego przeciwprostokątnej,
 b) trójkąta ABC (rysunek obok) wokół jego najdłuższego boku.



Zadania

- Powierznią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 12 cm wyznaczony przez kąt środkowy α . Oblicz pole podstawy i objętość tego stożka.

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 180^\circ$ c) $\alpha = 240^\circ$ d) $\alpha = 270^\circ$
- a) Powierznią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 15 cm wyznaczony przez kąt środkowy α . Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku 6 cm . Wyznacz największą możliwą miarę kąta α .
 b) Oblicz pole przekroju osiowego stożka, którego podstawą jest koło opisane na kwadracie o boku 5 cm , a sinus kąta między tworzącą a wysokością stożka jest równy $\frac{2}{3}$.
- a) Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu równym S . Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.
 b) Pole powierzchni bocznej stożka jest dwukrotnie większe od pola jego podstawy. Oblicz miarę kąta rozwarcia tego stożka.
- a) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° , a pole jego powierzchni bocznej jest równe $8\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.
 b) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 30° , a jego podstawa ma pole równe $(18 - 9\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole przekroju osiowego i objętość tego stożka.
- Dany jest stożek o polu powierzchni bocznej $2\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$ i polu powierzchni całkowitej $\frac{2\pi}{\sqrt{2}-1} \text{ cm}^2$. Oblicz miarę kąta zawartego między tworzącą tego stożka a jego podstawą.
- Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka sięga połowy jego wysokości (rysunek obok). Ile litrów wody znajduje się w zbiorniku? Na jaką wysokość sięgałaby woda, gdyby zajmowała połowę objętości zbiornika?



3. a) Przekrojem osiowym jest trójkąt prostokątny równoramienny, czyli $r = \frac{1}{2}l \cdot \sqrt{2}$ oraz $\frac{l^2}{2} = S$.

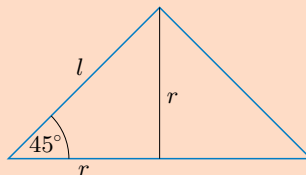
$$\text{Zatem } l = \sqrt{2S}, r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2S} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{S}, h = r = \sqrt{S}.$$

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot \sqrt{S} (\sqrt{S} + \sqrt{2S}) = \pi S (1 + \sqrt{2})$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{S})^2 \cdot \sqrt{S} = \frac{\pi}{3} S \sqrt{S}$$

b) $\pi r l = 2\pi r^2$, czyli $l = 2r$

Zatem przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, czyli kąt rozwarcia wynosi 60° .



Ćwiczenie 7

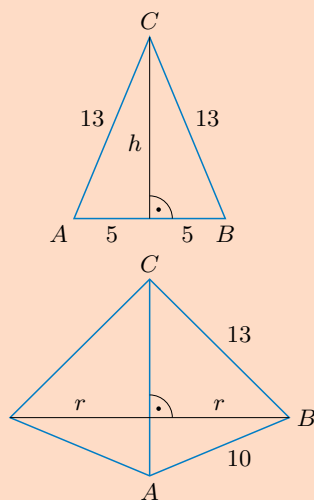
- a) $l = 4 \text{ cm}, r = h = 2\sqrt{2} \text{ cm}$
 $V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} =$
 $= \frac{32\sqrt{2}}{3}\pi [\text{cm}^3]$
 b) $r = 4, h_1 = 3, h_2 = 2\sqrt{5}$
 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{5} =$
 $= 16\pi(\frac{2\sqrt{5}}{3} + 1)$

Odpowiedzi do zadań

- a) $P_p = 4\pi \text{ cm}^2$
 $V = \frac{8}{3}\pi\sqrt{35} \text{ cm}^3$
 b) $P_p = 36\pi \text{ cm}^2$
 $V = 72\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 c) $P_p = 64\pi \text{ cm}^2$
 $V = \frac{256}{3}\pi\sqrt{5} \text{ cm}^3$
 d) $P_p = 81\pi \text{ cm}^2$
 $V = 81\pi\sqrt{7} \text{ cm}^3$
- a) $\frac{\alpha}{360^\circ}\pi \cdot 15^2 = \pi r \cdot 15$
 $\alpha = \frac{r}{15} \cdot 360^\circ$
 Kąt α jest największy, gdy promień r jest największy, czyli dla $r = 3 \text{ cm}$.
 Zatem $\alpha = 72^\circ$.
 b) $\frac{25}{4}\sqrt{5} \text{ cm}^2$
- a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} =$
 $= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} [\text{cm}^3]$
 b) $r^2 = 9(2 - \sqrt{3})$
 Z twierdzenia cosinusów:
 $(2r)^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos 30^\circ$
 $l^2 = \frac{4r^2}{2 - \sqrt{3}} = 36$
 Pole przekroju:
 $P = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \sin 30^\circ = 9 \text{ cm}^2$
 $h = \sqrt{l^2 - r^2} =$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$
 $V = \frac{9}{2}\pi(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}^3$
- 45°
- $h = 4 \text{ dm}, x = 1,5 \text{ dm}$
 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1,5^2 \cdot 2 = 1,5\pi [l]$
 Objętość całego zbiornika:
 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi [l]$
 H – szukana wysokość wody
 R – promień zbiornika przy wysokości H
 $\frac{R}{H} = \frac{3}{4}$, stąd $R = \frac{3}{4}H$
 $\frac{1}{2}V = 6\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot (\frac{3}{4}H)^2 \cdot H$,
 czyli $H = 2\sqrt[3]{4} \text{ dm}$

7. a) $P_c = 336\pi$, $V = 672\pi$
 b) $P_c = 18\pi(3 + \sqrt{3})$, $V = 54\pi$
 c) $P_c = 16,8\pi$, $V = 9,6\pi$

8.



$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ [cm]}$$

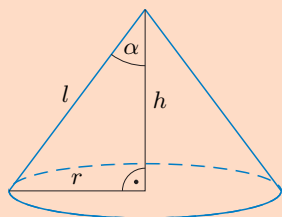
$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot r,$$

czyli $r = \frac{120}{13} \text{ cm}$

$$P = \pi \cdot \frac{120}{13} \cdot (10 + 13) = \frac{2760}{13} \pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

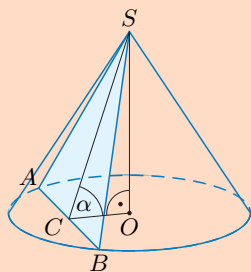
9. a) $80\pi \text{ cm}^3$
 b) $4\pi(2\sqrt{29} + \sqrt{41}) \text{ cm}^2$

10.



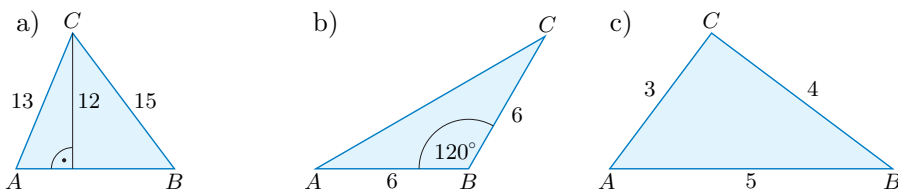
$$\frac{P_p}{P_b} = \frac{\pi r^2}{\pi r l} = \frac{r}{l} = \sin \alpha$$

11.



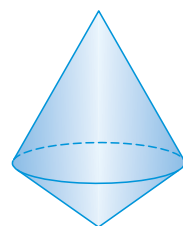
- a) $|OS| = 2\sqrt{3}$, $|CB| = 6\sqrt{3}$,
 $|OC| = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6$
 $\text{tg } \alpha = \frac{|OS|}{|OC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 stąd $\alpha = 30^\circ$
 b) $|CB| = |OC| = 3$,
 $|OB| = 3\sqrt{2}$, $|OS| = 7$,
 $|SC| = \sqrt{|OC|^2 + |OS|^2} = \sqrt{58}$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{58} = 3\sqrt{58}$

7. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość bryły, która powstanie w wyniku obrotu trójkąta ABC wokół prostej AB .



8. Trójkąt równoramienny o podstawie 10 cm i ramionach 13 cm obracamy wokół prostej zawierającej jego ramię. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.
9. Dwa stożki mają identyczne podstawy o polu $16\pi \text{ cm}^2$. Stożki te złączono podstawami i otrzymano bryłę przedstawioną na rysunku. Jej przekrojem osiowym jest deltoid o polu 60 cm^2 .

- a) Oblicz objętość tej bryły.
 b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeśli wiadomo, że wysokość jednego stożka jest dwukrotnie dłuższa od wysokości drugiego.



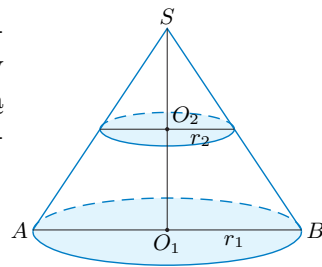
10. Wykaż, że stosunek pola podstawy stożka do pola jego powierzchni bocznej jest równy sinusowi kąta między tworzącą a wysokością tego stożka.

11. a) Wysokość stożka o wierzchołku S jest równa $2\sqrt{3}$, a podstawą tego stożka jest koło o promieniu 12. Cięciwa AB podstawy ma długość $12\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta nachylenia płaszczyzny ABS do podstawy stożka.
 b) W podstawę stożka o wierzchołku S i wysokości 7 wpisano kwadrat $ABCD$ o boku długości 6. Oblicz pole przekroju stożka płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i zawierającą bok AB .

12. Stożek o promieniu podstawy 10 cm i wysokości $6\sqrt{3} \text{ cm}$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i nachyloną do podstawy stożka pod kątem 60° . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

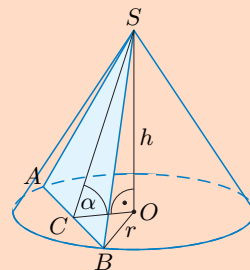
13. Stożek przecięto płaszczyzną prostopadłą do jego wysokości i otrzymano dwie bryły: mniejszy stożek i stożek ścięty, którego podstawami są koła o promieniach r_1 i r_2 (rysunek obok). Oblicz objętość stożka ściętego.

- a) $r_1 = 6$, $r_2 = 4$, $|O_1O_2| = 5$
 b) $r_1 = 12$, $r_2 = 9$, $\angle ASB = 90^\circ$



12. $r = 10 \text{ cm}$, $h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$
 $\frac{h}{|CS|} = \sin 60^\circ$, czyli $|CS| = 12 \text{ cm}$
 $\frac{|OC|}{|CS|} = \cos 60^\circ$, czyli $|CO| = 6 \text{ cm}$
 $|CB| = \sqrt{r^2 - |CO|^2} = 8 \text{ cm}$,
 stąd $|AB| = 16 \text{ cm}$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96 \text{ [cm}^2\text{]}$

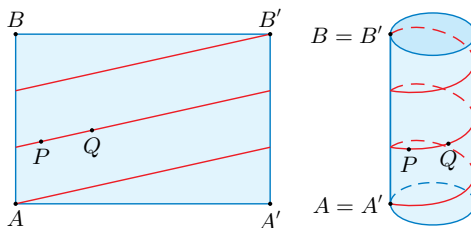
13. a) $\frac{380}{3}\pi$ b) 333π



Linie geodezyjne

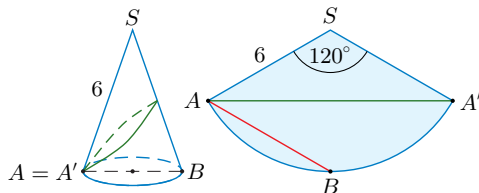
Najkrótsza linia na powierzchni bryły łącząca dwa punkty nazywa się **linią geodezyjną**.

Po zwinieciu prostokąta przedstawionego na rysunku obok w powierzchnię boczną walca otrzymujemy na powierzchni tego walca tzw. **linię śrubową** (zaznaczoną kolorem czerwonym). Nazwa tej krzywej pochodzi stąd, że wzdłuż linii śrubowej nacinany jest gwint śruby. Zauważmy, że dla punktów P i Q położonych na powierzchni walca tak jak na powyższym rysunku najkrótsza droga między tymi punktami prowadzi wzdłuż linii śrubowej.

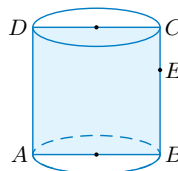


Przykład 1

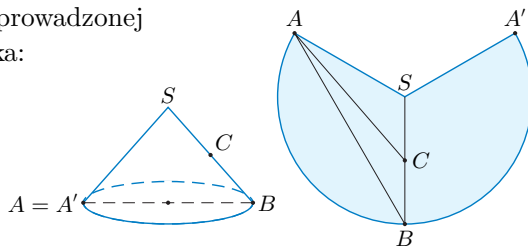
Przekrojem osiowym stożka o tworzącej równej 6 jest trójkąt ABS (rysunek obok). Powierzchnią boczną tego stożka po rozwinięciu jest wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy 120° . Najkrótsza droga z punktu A do punktu B poprowadzona po powierzchni bocznej stożka (kolor czerwony) ma długość 6. Długość najkrótszej pętli poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka, zaczynającej się i kończącej w punkcie A (kolor zielony), jest równa $6\sqrt{3}$.



- Przekrój osiowy walca jest kwadratem $ABCD$ o boku 12. Na boku BC wybrano punkt E taki, że $|BE| = 2|CE|$ (rysunek obok). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej walca z punktu E do punktu: a) A , b) D .



- Przekrojem osiowym stożka o promieniu podstawy 8 i wysokości $4\sqrt{5}$ jest trójkąt ABS . Punkt C jest środkiem odcinka BS (rysunek poniżej). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka:
 - z punktu A do punktu B ,
 - z punktu A do punktu C .



$$2. |AS| = |BS| = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{5})^2} = 12, |ASA'| = \frac{8}{12} \cdot 360^\circ = 240^\circ$$

a) Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ABS$:

$$|AB|^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 240^\circ = 432$$

$$|AB| = 12\sqrt{3}$$

$$b) |SC| = \frac{1}{2}|BS| = 6$$

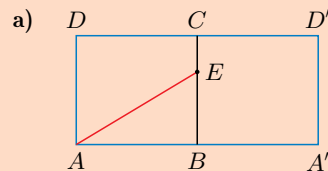
Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ACS$:

$$|AC|^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos 240^\circ = 252$$

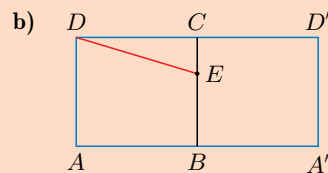
$$|AC| = 6\sqrt{7}$$

Odpowiedzi do zadań

- $|BE| = 8$, $|CE| = 4$,
 $|AD| = 12$
 Długość półokręgu AB : 6π



$$\begin{aligned} |AE| &= \sqrt{|AB|^2 + |BE|^2} = \\ &= \sqrt{(6\pi)^2 + 8^2} = \\ &= 2\sqrt{9\pi^2 + 16} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |DE| &= \sqrt{|DC|^2 + |CE|^2} = \\ &= \sqrt{(6\pi)^2 + 4^2} = 2\sqrt{9\pi^2 + 4} \end{aligned}$$

Uczeń:

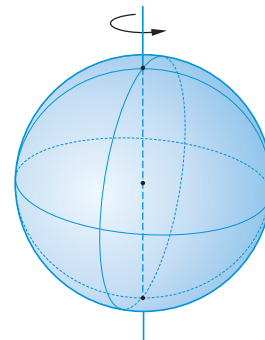
- wskazuje elementy charakteryzujące kulę i sferę,
- zaznacza przekroje kuli,
- oblicza pole powierzchni kuli i jej objętość,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości kuli,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące kuli.

3.3. Kula

Kula to bryła obrotowa otrzymana przez obrót koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.

Kula o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Sfera o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r (sfera jest powierzchnią kuli).

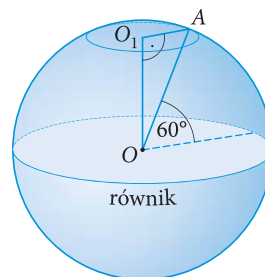


Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy **kołem wielkim**.

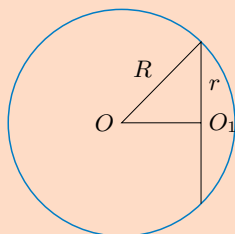
Przykład 1

Przyjmując, że Ziemia jest kulą, oblicz stosunek długości równoleżnika przechodzącego przez punkty o szerokości geograficznej 60° do długości równika.

W trójkącie OO_1A mamy $|OA| = 2|O_1A|$ (rysunek obok). Stosunek długości okręgów jest równy stosunkowi długości ich promieni, więc szukany stosunek długości równoleżnika 60° do długości równika jest równy $1:2$.



Ćwiczenie 1



a) $R = 10$ cm, $|OO_1| = 7$ cm
 $r^2 = 10^2 - 7^2 = 51$
 $P = 51\pi$ cm²

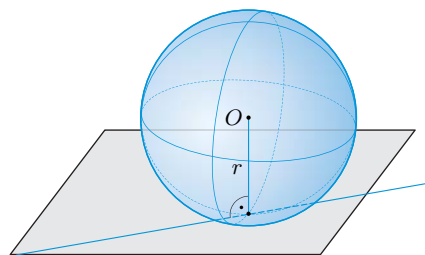
b) $R = 5$ cm, $r = 4$ cm
 $|OO_1|^2 = 5^2 - 4^2 = 9$,
czyli $|OO_1| = 3$ cm

Ćwiczenie 1

a) Kulę o promieniu 10 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o środku oddalonym od środka kuli o 7 cm. Oblicz pole tego koła.

b) Kulę o promieniu 5 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o polu równym 16π cm². Oblicz odległość środka tego koła od środka kuli.

Jeśli płaszczyzna ma z kulą dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że ta płaszczyzna jest **styczna** do kuli. Promień poprowadzony ze środka kuli do punktu styczności jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.



Multiteka

- Pole powierzchni kuli
- Wyprowadzenie wzoru na objętość kuli
- Przekroje brył obrotowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

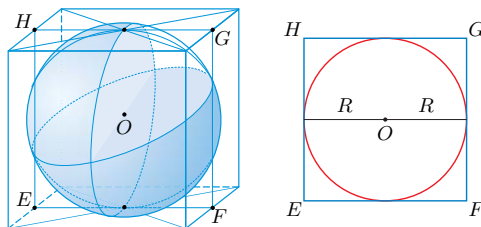
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Punkt O jest środkiem sześcianu (punktem przecięcia przekątnych sześcianu) o krawędzi a . Oblicz promień sfery o środku w punkcie O :

a) stycznej do wszystkich ścian tego sześcianu (rysunek obok),

b) zawierającej wszystkie wierzchołki tego sześcianu.



Sformułowanie wzorów na pole powierzchni i objętość kuli zawdzięczamy greckiemu filozofowi i matematykowi Archimedesowi (ok. 287–ok. 212 r. p.n.e.).

Przykład 2

Pole powierzchni kuli jest równe $144\pi \text{ cm}^2$.

Oblicz objętość tej kuli.

Obliczamy promień kuli:

$$P = 4\pi r^2 = 144\pi$$

stąd $r^2 = 36$, czyli $r = 6 \text{ cm}$.

Zatem objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi [\text{cm}^3]$$

Pole powierzchni kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu r .

a) $r = \frac{3}{2} \text{ cm}$

b) $r = \sqrt{3} \text{ cm}$

c) $r = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

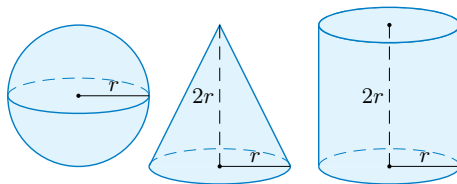
Ćwiczenie 4

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Promień kuli	6	3	8	2	0,9
Pole powierzchni kuli	144π	36π	256π	16π	$3,24\pi$
Objętość kuli	288π	36π	$\frac{2048}{3}\pi$	$\frac{32}{3}\pi$	$0,972\pi$

Ćwiczenie 5

Dane są kula, stożek i walec o wymiarach takich jak na rysunku obok. Uzasadnij, że suma objętości kuli i stożka jest równa objętości walca.



Ćwiczenie 5

$$V_K + V_S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)\pi r^3 = 2\pi r^3$$

$$V_W = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

$$V_K + V_S = V_W$$

Ćwiczenie 2

a) $R = \frac{a}{2}$

b) Promień sfery jest równy połowie długości przekątnej sześcianu, czyli $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

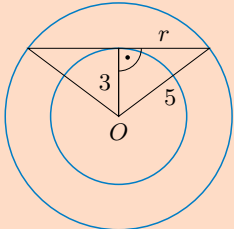
Ćwiczenie 3

a) $P = 9\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{9}{2}\pi \text{ cm}^3$

b) $P = 12\pi \text{ cm}^2$, $V = 4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

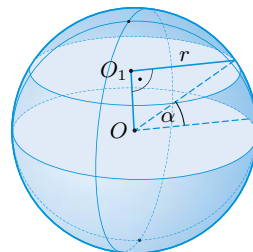
c) $P = 32\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$

Odpowiedzi do zadań

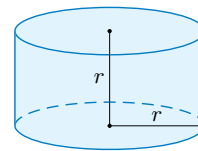
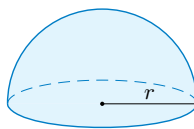
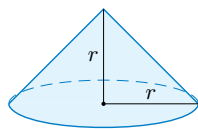
1. a) $R = 4\sqrt{3}$ cm
 $P = 192\pi$ cm²
 $V = 256\pi\sqrt{3}$ cm³
 b) $r = 8$ cm
 $R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ [cm]
 $P = 400\pi$ cm²
 $V = \frac{4000}{3}\pi$ cm³
 c) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 $\sin \alpha = \frac{|OO_1|}{R}$
 $R = 6$ cm
 $P = 144\pi$ cm², $V = 288\pi$ cm³
3. r – promień kuli
 R – promień przekroju
 a) $\pi R^2 = 25\pi$, czyli $R = 5$
 $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 5^2} = 3\sqrt{3}$
 $V = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3 = 108\sqrt{3}\pi$
 b) $\frac{4}{3}\pi r^3 = 108\sqrt{3}\pi$,
 czyli $r = 3\sqrt{3}$
 $R^2 = (3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 15$
 $P = 15\pi$
4. a) 
 $r = 4$ cm, $P = 16\pi$ cm²
 b) Promień przekroju: 3 cm
I przypadek – większa kula ma promień 6 cm
 $r = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ [cm]
II przypadek – większa kula ma promień r cm
 $r = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ [cm]
5. a) $r_2 = 1,25 \cdot 20 = 25$ [cm]
 $P_2 - P_1 = 4\pi \cdot 25^2 - 4\pi \cdot 20^2 = 900\pi$ [cm²]
 b) $r_2 = 0,75 \cdot 20 = 15$ [cm]
 $P_1 - P_2 = 4\pi \cdot 20^2 - 4\pi \cdot 15^2 = 700\pi$ [cm²]

Zadania

1. Kulę o środku O przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkt O_1 (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tej kuli, jeśli:
 - a) $\sin \alpha = 0,5$ i $|OO_1| = 2\sqrt{3}$ cm,
 - b) $\tan \alpha = 0,75$ i $|OO_1| = 6$ cm,
 - c) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ i $|OO_1| = 2\sqrt{5}$ cm.
2. Kulę o promieniu 8 cm przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami i otrzymano w przekrojach koła o promieniach 3 cm i 4 cm. Oblicz odległość między tymi płaszczyznami (rozpatrz dwa przypadki).
3. Kulę o środku O przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku S . Oblicz:
 - a) objętość kuli, jeśli $|OS| = \sqrt{2}$, a pole przekroju jest równe 25π ,
 - b) pole przekroju, jeśli $|OS| = 2\sqrt{3}$, a objętość kuli jest równa $108\sqrt{3}\pi$.
4. a) Dane są dwie kule o promieniach 3 cm i 5 cm oraz wspólnym środku. Oblicz pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli.
 b) Dane są dwie kule o promieniach 6 cm i r cm oraz wspólnym środku. Pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli jest równe 9π cm². Oblicz r (rozpatrz dwa przypadki).
5. a) Kulisty balon ma promień równy 20 cm. Po dopompowaniu powietrza promień balonu zwiększył się o 25%. O ile wzrosło jego pole powierzchni?
 b) Z kulistego balonu o promieniu równym 20 cm spuszczonego częściowo powietrze. Promień balonu zmniejszył się o 25%. O ile zmalało jego pole powierzchni?

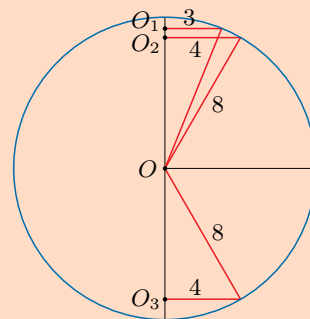


- D** 6. Na rysunku poniżej przedstawiono stożek, półkulę i walec. Wszystkie bryły mają taką samą podstawę, a wysokości stożka i walca są równe promieniowi półkuli. Uzasadnij, że objętości tych brył są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.



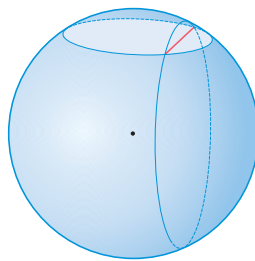
2. $|OO_1| = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$ [cm]
 $|OO_2| = |OO_3| = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ [cm]
 $|O_1O_2| = |OO_1| - |OO_2| = (\sqrt{55} - 4\sqrt{3})$ cm
 lub
 $|O_1O_3| = |OO_1| + |OO_3| = (\sqrt{55} + 4\sqrt{3})$ cm

6. Objętość stożka: $V_S = \frac{1}{3}\pi r^3$
 Objętość półkuli: $V_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$
 Objętość walca: $V_W = \pi r^3$
 $V_W - V_P = V_P - V_S = \frac{1}{3}\pi r^3$, zatem jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $\frac{1}{3}\pi r^3$.



- D 7.** a) Sześciąt z brązu przetopiono na kulę. Wykaż, że stosunek pola powierzchni tej kuli do pola powierzchni sześciątu jest równy $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.
 b) Metalowy walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem, przetopiono na kulę. Wykaż, że promień tej kuli jest równy $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ promienia podstawy walca.
8. Kula i stożek mają równe objętości. Promień podstawy stożka jest równy r , a stosunek jego pola powierzchni bocznej do pola podstawy wynosi 2,6. Wyznacz promień kuli.
9. Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o 10 cm, a ich promienie są równe r_1 i r_2 . Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.
 a) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 8$ cm b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 14$ cm
10. Środek sfery o promieniu r_1 należy do sfery o promieniu r_2 . Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.
 a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm
 b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3}$ cm

- 11.** Kulę o średnicy 7 przecięto dwiema płaszczyznami, które są do siebie prostopadłe (rysunek obok). Otrzymane przekroje są kołami o promieniach 2 i 3. Oblicz długość odcinka będącego częścią wspólną obu przekrojów.

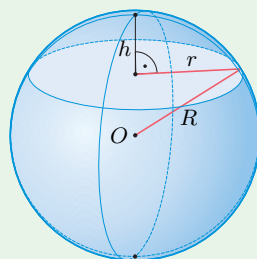


Czaszą kulistą (czaszą kuli) nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli powierzchnię kuli przecinająca ją płaszczyzna. Pole powierzchni czaszy kulistej wyraża się wzorem:

$$P = 2\pi R h$$

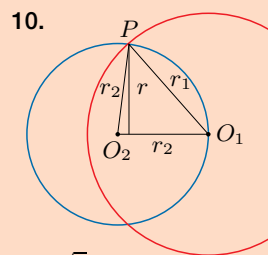
Każdą z dwóch brył, na które dzieli kulę przecinająca ją płaszczyzna, nazywamy **odcinkiem kulistym** (odcinkiem kuli). Objętość odcinka kulistego wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2)$$



R – promień kuli,
 r – promień podstawy czaszy,
 h – wysokość czaszy

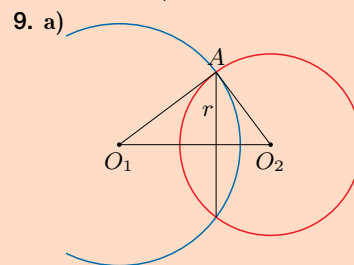
- 12.** Kulę o promieniu 6 cm przecięto płaszczyzną, której odległość od środka kuli jest równa 3 cm. Oblicz objętości otrzymanych odcinków kuli.



11. $\sqrt{3}$

- 12.** Wysokość czaszy: $h = 3$ cm
 Objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$ [cm³]
 Objętości odcinków kulistych: $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot (3 \cdot 6 - 3) = 45\pi$ [cm³]
 $V_2 = V - V_1 = 243\pi$ cm³

- 7.** r – promień kuli
 a) a – długość krawędzi sześciątu
 Objętości brył są równe, czyli objętość kuli:
 $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = a^3$,
 stąd $r^3 = \frac{3}{4\pi}a^3$
 Zatem $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}a$.
 Pole kuli:
 $P_K = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}}a^2 = \sqrt[3]{64\pi^3 \cdot \frac{9}{16\pi^2}}a^2 = \sqrt[3]{36\pi}a^2$
 Stosunek pól:
 $\frac{P_K}{P_S} = \frac{\sqrt[3]{36\pi}a^2}{6a^2} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$
 b) R – promień podstawy walca, H – wysokość walca
 $H = 2R$
 Objętość walca:
 $V_W = \pi R^2 \cdot H = 2\pi R^3$
 Objętości brył są równe, czyli objętość kuli:
 $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi R^3$,
 stąd $r^3 = \frac{3}{2}R^3$.
 Zatem $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}R$.
- 8.** R – promień kuli
 h – wysokość stożka
 l – tworząca stożka
 $\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = 2,6$, czyli $l = 2,6r$
 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2,4r$
 Objętość stożka:
 $V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2,4r = \frac{4}{5}\pi r^3$
 Objętość kuli:
 $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{5}\pi r^3$,
 czyli $R = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}r$



Trójkąt O_1O_2A jest prostokątny.

$$P_{\triangle O_1O_2A} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} |O_1O_2| \cdot r,$$

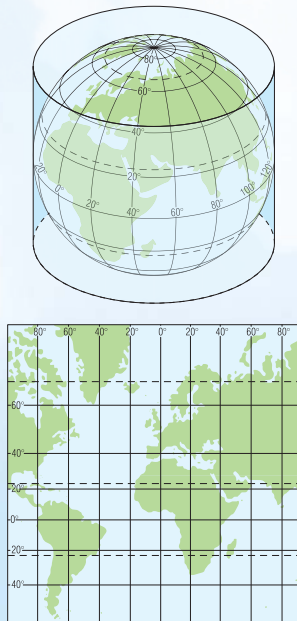
czyli $r = 4,8$ cm
 Długość okręgu:
 $2\pi \cdot 4,8 = 9,6\pi$ [cm]
 b) $6\sqrt{3}$ cm

Odwzorowania kartograficzne

Odwzorowanie powierzchni Ziemi na płaszczyźnie, jaką jest płaska mapa, pociąga za sobą różne zniekształcenia. Mogą to być zniekształcenia pól powierzchni, długości bądź kątów. Oto przykłady dwóch odwzorowań wiernokątnych, czyli zachowujących zależności kątowe między południkami a równoleżnikami.

Odwzorowanie walcowe

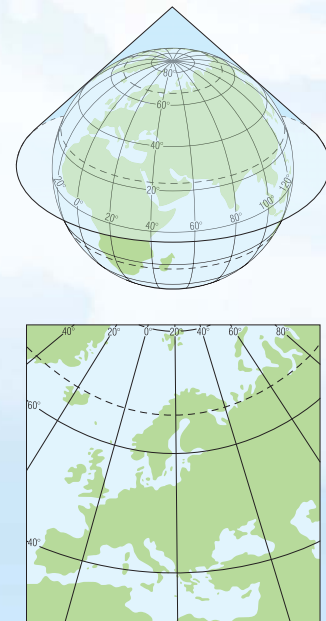
Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej walca stycznego do powierzchni modelu wzdłuż równika. Obrazami południków są proste prostopadłe do równika.



Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem Merkatora, od nazwiska flamandzkiego matematyka i kartografa (1512–1594). Zauważ, że w tym odwzorowaniu szczególnie zniekształcone są obszary okołobiegunowe.

Odwzorowanie stożkowe

Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej stożka stycznego do powierzchni modelu wzdłuż jednego z równoleżników.



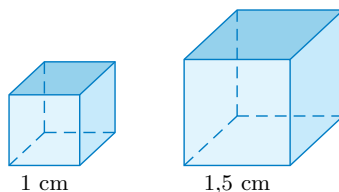
Za pomocą takich siatek przedstawia się na przykład obszary między zwrotnikami a kołami podbiegunowymi.

1 Znajdź informacje o odwzorowaniu powierzchni Ziemi za pomocą siatki azymutalnej.

3.4. Bryły podobne

Dwie bryły są **podobne**, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiadającymi im punktami drugiej bryły. Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skala podobieństwa**.

Na przykład dowolne dwie kule czy dowolne dwa sześciany są podobne. Na rysunku powyżej skala podobieństwa większego sześcianu do mniejszego jest równa $\frac{3}{2}$, co możemy też zapisać 3:2.

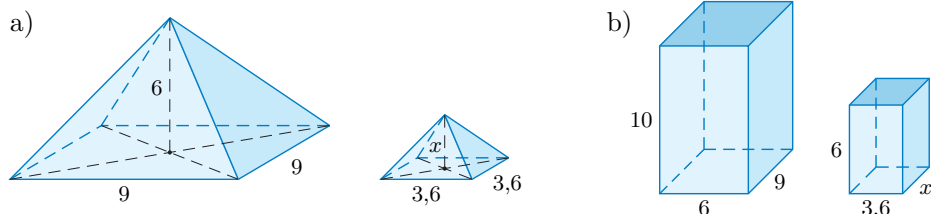


Uczeń:

- wyznacza skalę podobieństwa brył podobnych,
- wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielościany podobne. Oblicz x oraz podaj skalę podobieństwa mniejszego wielościanu do większego.



Ćwiczenie 1

- a) $\frac{x}{6} = \frac{3,6}{9}$, czyli $x = 2,4$
Skala podobieństwa: $k = \frac{2}{5}$
b) $\frac{x}{9} = \frac{6}{10}$, czyli $x = 5,4$
Skala podobieństwa: $k = \frac{3}{5}$

Przykład 1

Pole powierzchni kuli K_1 jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli K_2 . Oblicz stosunek objętości tych kul.

Niech r_1 i r_2 będą odpowiednio promieniami kul K_1 i K_2 . Stosunek pól powierzchni tych kul:

$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2$$

zatem $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$ – zauważmy, że jest to skala podobieństwa kuli K_1 do kuli K_2 . Obliczamy stosunek objętości:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa $a:b$, to:

- stosunek pól powierzchni tych brył jest równy $a^2:b^2$,
- stosunek objętości tych brył jest równy $a^3:b^3$.

Ćwiczenie 2

Dane są dwa sześciany. Pole powierzchni pierwszego jest czterokrotnie większe od pola powierzchni drugiego. Oblicz stosunek objętości tych sześcianów.

Ćwiczenie 2

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{1} = k^2, \text{ czyli } k = 2$$

$$\text{Zatem } \frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{8}{1}.$$

Ćwiczenie 3

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} = k$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{36\pi}{V_2} = k^3 = \frac{1}{8},$$

$$\text{czyli } V_2 = 288\pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 3

Dane są dwie kule. Objętość pierwszej jest równa $36\pi \text{ cm}^3$, a jej promień jest dwa razy krótszy od promienia drugiej kuli. Oblicz objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?

Przykład 2

Stożek o promieniu podstawy 8 cm i wysokości 12 cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do tej wysokości w odległości 3 cm od wierzchołka S (rysunek obok). Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna podzieliła stożek.

Obliczamy objętość dużego (wyjściowego) stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 256\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

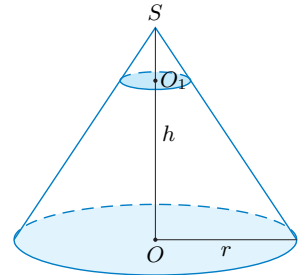
Skala podobieństwa małego stożka do dużego:

$$\frac{|SO_1|}{|SO|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Zatem objętość małego stożka:

$$V_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot V = \frac{256}{64}\pi = 4\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Obliczamy objętość stożka ściętego: $V_2 = V - V_1 = 256\pi - 4\pi = 252\pi \text{ [cm}^3\text{]}$.



W wyniku przecięcia stożka płaszczyzną równoległą do jego podstawy otrzymujemy dwie bryły: stożek i stożek ścięty.

Ćwiczenie 4

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 27\pi = \pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_2 = V - V_1 = 27\pi - \pi = 26\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 4

Stożek o objętości $27\pi \text{ cm}^3$ przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka w stosunku 2:1, gdy liczymy od podstawy. Oblicz objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \neq \frac{5}{3}$$

Bryły nie są podobne.

b) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

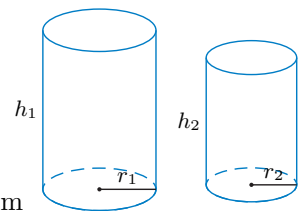
Bryły są podobne.

1. Promienie podstaw dwóch walców oraz ich wysokości są równe r_1, h_1 i r_2, h_2 (rysunek obok). Sprawdź, czy te walce są podobne.

a) $r_1 = 20 \text{ cm}, h_1 = 24 \text{ cm},$

$$r_2 = 12 \text{ cm}, h_2 = 15 \text{ cm}$$

b) $r_1 = 12 \text{ cm}, h_1 = 16 \text{ cm}, r_2 = 9 \text{ cm}, h_2 = 12 \text{ cm}$



2. a) Dane są dwa stożki podobne. Wysokość mniejszego stożka jest równa 6 cm, a pole powierzchni całkowitej większego jest o 125% większe od pola powierzchni całkowitej mniejszego. Oblicz wysokość większego stożka.

- D b) Uzasadnij, że stożek o wysokości 4 i polu powierzchni całkowitej 24π nie jest podobny do stożka o tworzącej 20 i objętości 1024π .

2. a) $\frac{P_1}{P_2} = 2,25 = k^2, \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{6} = k = 1,5$, czyli $h_1 = 9 \text{ cm}$

b) $h_1 = 4$

$$P_1 = \pi r_1^2 + \pi r_1 l_1 = 24\pi, \text{ czyli } l_1 = \frac{24 - r_1^2}{r_1}$$

$$l_1^2 = r_1^2 + h_1^2$$

$$\frac{576 - 48r_1^2 + r_1^4}{r_1^2} = r_1^2 + 16$$

$$576 = 64r_1^2$$

$$r_1 = 3, l_1 = 5$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$$

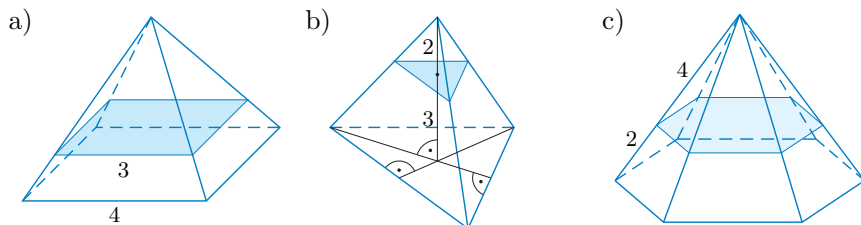
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{12\pi}{1024\pi} = \frac{3}{256} \neq \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

3. Ostrosłupy prawidłowe O_1, O_2, O_3 i O_4 są podobne. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj skalę podobieństwa ostrosłupów:
- a) O_1 i O_2 , b) O_1 i O_3 , c) O_2 i O_3 , d) O_3 i O_4 .

Ostrosłup	Wysokość	Krawędź podstawy	Pole podstawy	Objętość
O_1	8 cm	6 cm	36 cm^2	96 cm^3
O_2	12 cm	9 cm	81 cm^2	324 cm^3
O_3	16 cm	12 cm	144 cm^2	768 cm^3
O_4	4 cm	3 cm	9 cm^2	12 cm^3

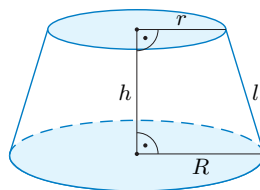
4. Na rysunku przedstawiono ostrosłup i jego przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup na dwie części. Oblicz stosunek objętości mniejszej części do objętości większej części.



5. Stożek został podzielony płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. W jakim stosunku płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka?

- D** 6. Korzystając z oznaczeń na rysunku obok, wyprowadź wzór na:

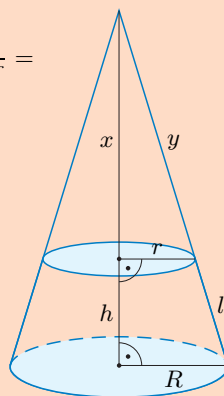
- a) objętość stożka ściętego w zależności od r, R, h ,
b) pole powierzchni bocznej stożka ściętego w zależności od r, R, l .



7. Podstawami stożka ściętego są koła o promieniach 1 cm i 4 cm, a odległość między płaszczyznami podstaw jest równa 6 cm. Stożek ten został podzielony płaszczyzną równoległą do jego podstaw na dwie bryły podobne. Oblicz objętości tych brył.

- D** 8. Podstawami stożka ściętego są koła o promieniach r_1 i r_2 . Płaszczyzna poprowadzona równolegle do podstaw podzieliła ten stożek na dwa stożki ścięte podobne. Uzasadnij, że skala ich podobieństwa jest równa $\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$.

6. a) $\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R}$, stąd $x = \frac{rh}{R-r}$
 $V = \frac{1}{3}\pi R^2(x+h) - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi R^2 \left(\frac{rh}{R-r} + h \right) - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{rh}{R-r} =$
 $= \frac{1}{3}\pi h \left(\frac{R^2r}{R-r} + R^2 - \frac{r^3}{R-r} \right) = \frac{1}{3}\pi h \frac{R^3 - r^3}{R-r} =$
 $= \frac{1}{3}\pi h \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-r} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$
b) $\frac{y}{r} = \frac{y+l}{R}$, stąd $y = \frac{rl}{R-r}$
 $P = \pi R(y+l) - \pi r y = \pi R \left(\frac{rl}{R-r} + l \right) - \pi \cdot \frac{r^2 l}{R-r} =$
 $= \pi l \left(\frac{Rr}{R-r} + R - \frac{r^2}{R-r} \right) = \pi l \cdot \frac{Rr + R^2 - Rr - r^2}{R-r} =$
 $= \pi l \cdot \frac{R^2 - r^2}{R-r} = \pi l(R+r)$



3. a) 2:3 b) 1:2 c) 3:4 d) 4:1

4. V – objętość całej bryły
 V_1 – objętość górnej bryły
 V_2 – objętość dolnej bryły
 k – skala podobieństwa całej bryły do górnej bryły

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V-V_1}$$

a) $k = \frac{4}{3}$, stąd $\frac{V_1}{V_1} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$,
czyli $V = \frac{64}{27}V_1$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{64}{27}V_1 - V_1} = \frac{1}{\frac{64}{27} - 1} = \frac{27}{37}$$

b) $k = \frac{5}{2}$, stąd $\frac{V_1}{V_1} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$,
czyli $V = \frac{125}{8}V_1$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{125}{8}V_1 - V_1} = \frac{1}{\frac{125}{8} - 1} = \frac{8}{117}$$

c) $k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, stąd

$$\frac{V_1}{V_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3, \text{ czyli } V = \frac{27}{8}V_1$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{27}{8}V_1 - V_1} = \frac{1}{\frac{27}{8} - 1} = \frac{8}{19}$$

5. V, h – objętość i wysokość całej bryły
 V_1, h_1 – objętość i wysokość górnej bryły
 V_2, h_2 – objętość i wysokość dolnej bryły

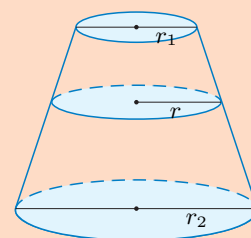
$$\frac{V}{V_1} = 2, \text{ czyli } \frac{h}{h_1} = \sqrt[3]{2},$$

$$\text{stąd } h = h_1 \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{h-h_1} = \frac{h_1}{h_1 \sqrt[3]{2} - h_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

7. $4\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3, 37\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^3$

- 8.



- a) Niech r oznacza promień koła wyznaczonego przez płaszczyznę. Z podobieństwa stożków ściętych:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r}{r_2}, \text{ czyli } r^2 = r_1 r_2$$

Zatem skala podobieństwa tych brył jest równa:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1 r_2}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

Zasada Cavalieriego

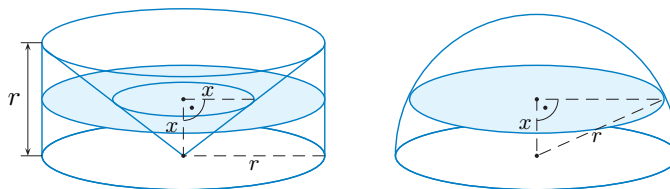
Bonaventura Cavalieri [czyt. kawalieri] (1598–1647), matematyk włoski, sformułował następującą zasadę, zwaną **zasadą Cavalieriego**.

Jeśli przekroje dwóch brył dowolną płaszczyzną równoległą do pewnej ustalonej płaszczyzny mają równe pola, to bryły te mają równe objętości.



Poniżej pokażemy, jak tę zasadę można wykorzystać do udowodnienia wzoru na objętość kuli.

Rozpatrzmy połowę kuli o promieniu r oraz walec o promieniu podstawy r i wysokości r . Z walca usuwamy stożek w sposób przedstawiony na rysunku. Pokażemy, że przekroje obu brył płaszczyznami równoległymi do podstawy walca mają równe pola.



Rozważmy przekroje poprowadzone na wysokości x od podstawy walca.

Przekrój półkuli jest kołem o promieniu $\sqrt{r^2 - x^2}$, pole tego przekroju jest więc równe $\pi(r^2 - x^2)$.

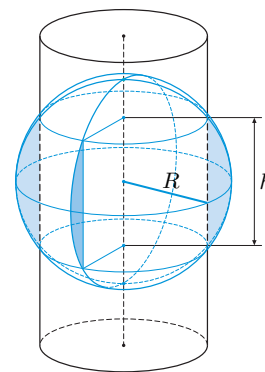
Przekrój walca z usuniętym stożkiem jest pierścieniem o promieniach wewnętrznym x i zewnętrznym r , zatem jego pole jest równe $\pi r^2 - \pi x^2 = \pi(r^2 - x^2)$.

Pola te są równe, więc zgodnie z zasadą Cavalieriego objętości obu brył są równe. Objętość półkuli jest równa różnicy objętości walca i objętości stożka: $V_w - V_s = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Zatem objętość kuli dana jest wzorem:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

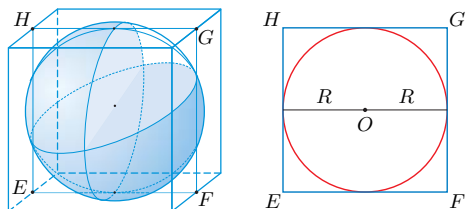
- D** 1. Kulę o promieniu R przecięto walcem (rysunek obok), a następnie usunięto z niej część wspólną tej kuli oraz walca i otrzymano pierścień kulisty o wysokości h . Udowodnij (lub znajdź dowód w dostępnych źródłach), że objętość takiego pierścienia nie zależy od wielkości kuli, a tylko od wysokości h .



1. $V = \frac{1}{6}\pi h^3$

*3.5. Bryły opisane na kuli

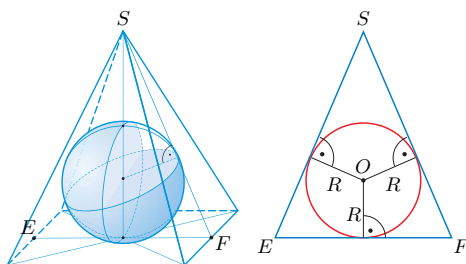
Sześcian opisany na kuli (kula wpisana w sześcian)



Kula jest styczna do każdej ściany sześcianu. Kwadrat $EFGH$ jest przekrojem sześcianu przechodzącym przez środki odpowiednich krawędzi. Jeśli sześcian jest opisany na kuli o promieniu R , to jego krawędź ma długość $2R$.

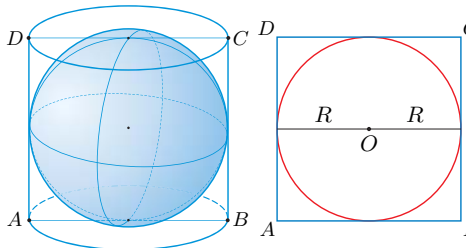
Uwaga. Jeśli prostopadłościan jest opisany na kuli, to musi on być sześcianem (uzasadnij).

Ostrosłup prawidłowy czworokątny opisany na kuli (kula wpisana w ostrosłup)



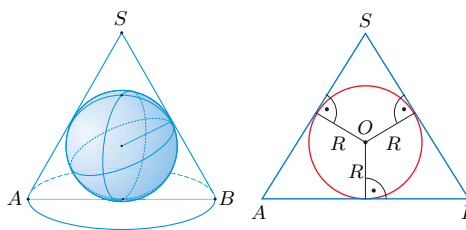
Kula jest styczna do podstawy oraz wszystkich ścian bocznych ostrosłupa. Trójkąt EFS jest przekrojem ostrosłupa przechodzącym przez jego wysokość oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi podstawy. Jeśli ostrosłup jest opisany na kuli o promieniu R , to trójkąt ten jest opisany na okręgu o promieniu R .

Walec opisany na kuli (kula wpisana w walec)



Kula jest styczna do obu podstaw walca i do każdej jego tworzącej. Kwadrat $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca. Jeśli walec jest opisany na kuli o promieniu R , to jego przekrój osiowy jest kwadratem o boku $2R$.

Stożek opisany na kuli (kula wpisana w stożek)

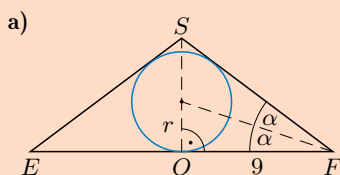


Kula jest styczna do podstawy stożka i do każdej jego tworzącej. Trójkąt ABS jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli stożek jest opisany na kuli o promieniu R , to jego przekrój osiowy jest trójkątem opisanym na okręgu o promieniu R .

Uczeń:

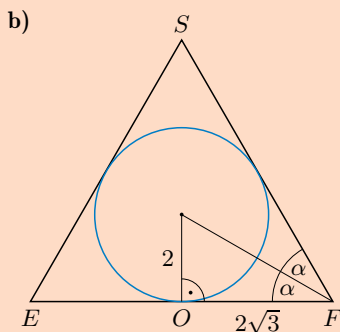
- rysuje przekroje brył opisanych na kuli,
- rozwiązuje zadania dotyczące brył opisanych na kuli, np. dotyczące obliczania pola powierzchni i objętości brył (również z wykorzystaniem trygonometrii),
- wyprowadza wzory na objętość i pole powierzchni bocznej stożka ściętego.

Ćwiczenie 1



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{9} = \frac{1}{3}, \text{ czyli } r = 3 \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } \alpha = 30^\circ,$$

$$\text{zatem } 2\alpha = 60^\circ$$

Trójkąt EFS jest równoboczny, więc $|SO| = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ [cm]}$.

Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 96 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Przykład 1

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego ściana boczna tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość kuli wpisanej w ten ostrosłup.

Niech punkt S będzie wierzchołkiem ostrosłupa, punkt E – środkiem krawędzi AD , punkt F – środkiem krawędzi BC , a punkt O – środkiem odcinka EF .

Rozpatrzmy trójkąt EFS : $\angle SEF = \angle SFE = 60^\circ$, więc jest to trójkąt równoboczny.

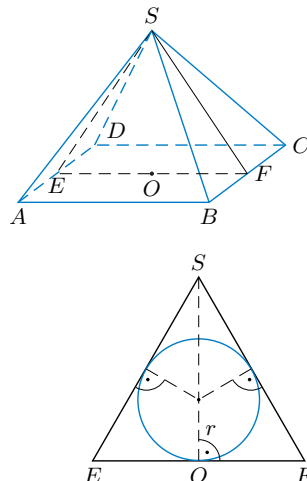
$$\text{Zatem } |SO| = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ [cm]}.$$

Promień r koła wpisanego w trójkąt EFS jest zarazem promieniem kuli wpisanej w ostrosłup:

$$r = \frac{1}{3}|SO| = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Zatem objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (2\sqrt{3})^3 = 32\pi\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 1

a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 18 cm, a jego ściana boczna tworzy z podstawą kąt 2α oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz objętość kuli wpisanej w ten ostrosłup.

b) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ cm. Kula wpisana w ten ostrosłup ma promień 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy tego ostrosłupa oraz jego objętość.

Przykład 2

Oblicz promień kuli wpisanej w stożek o promieniu podstawy 4 i tworzącej równej 6.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej, na którym przedstawiono przekrój osiowy ABS stożka.

Obliczamy wysokość stożka i pole tego przekroju:

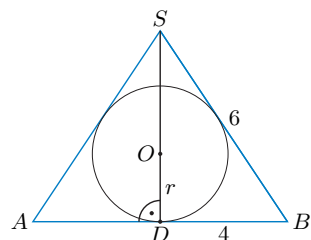
$$|SD| = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

Promień r kuli wpisanej w stożek jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABS , zatem:

$$P = \frac{|AB| + |BS| + |AS|}{2} \cdot r = 10r$$

Otrzymujemy $10r = 8\sqrt{5}$, skąd $r = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



Ćwiczenie 2

Na kuli opisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem:

- a) równobocznym o boku 12, b) prostokątnym o przeciwprostokątnej 6.

Oblicz promień tej kuli.

Przykład 3

Wyznacz promień kuli wpisanej w czworościan foremny o krawędzi a (rysunek obok).

Oznaczmy przez R promień kuli wpisanej w ten czworościan, a przez H jego wysokość.

Przypomnijmy, że $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Rozpatrzmy trójkąt APS będący przekrojem tego czworościanu.

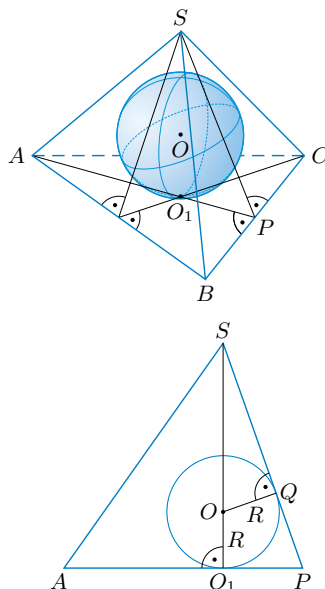
Trójkąty SOQ i SPO_1 są podobne, zatem:

$$\frac{|OQ|}{|SO|} = \frac{|PO_1|}{|SP|}, \text{ czyli } \frac{R}{H-R} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{R}{H-R} = \frac{1}{3}$$

$$3R = H - R$$

$$R = \frac{1}{4}H = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$



Ćwiczenie 3

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a , a krawędź boczna – $2a$. Wyznacz promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.

Zadania

- Oblicz promień i objętość kuli wpisanej w sześcián, jeżeli wiadomo, że:
 - długość krawędzi sześciánu jest równa 6,
 - długość przekątnej sześciánu jest równa 8.
- Oblicz stosunek objętości sześciánu do objętości wpisanej w niego kuli.
- Oblicz objętość walca opisanego na kuli o promieniu 2.
 - Oblicz promień kuli wpisanej w walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem o przekątnej długości $\sqrt{2}$.
- Wykaż, że jeśli w walec wpisujemy kulę, to zarówno stosunek ich pól powierzchni, jak i stosunek ich objętości są równe 3:2.

Ćwiczenie 3

Przyjmijmy oznaczenia i rysunki z przykładu 3.

$$|AS| = |BS| = |CS| = 2a$$

$$\text{Wysokość ostrosłupa: } H = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$\text{Wysokość ściany bocznej: } |SP| = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$\triangle SOQ \sim \triangle SPO_1$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{|OQ|}{|SO|} = \frac{|PO_1|}{|SP|}, \text{ czyli } \frac{R}{H-R} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}}$$

$$\frac{R}{H-R} = \frac{1}{3\sqrt{5}}, \text{ czyli } R = \frac{H}{3\sqrt{5}+1} = \frac{\frac{a\sqrt{33}}{3}}{3(\sqrt{5}+1)} \cdot \frac{3\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}-1} = \frac{(3\sqrt{5}-1)\sqrt{33}}{132} a$$

Ćwiczenie 2

$$\text{a) } r = \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{b) } r = 3(\sqrt{2}-1)$$

Odpowiedzi do zadań

- $r = 3, V = 36\pi$
 - $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}, V = \frac{256}{27}\pi\sqrt{3}$
- a – długość krawędzi sześciánu
 $\frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^3} = \frac{6}{\pi}$
- $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$
 - $2r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, czyli $r = \frac{1}{2}$
- r – promień kuli i promień walca
 h – wysokość walca
 $h = 2r$
 $\frac{P_W}{P_K} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi r h}{4\pi r^3} =$
 $= \frac{2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r}{4\pi r^3} = \frac{6\pi r^2}{4\pi r^3} = \frac{3}{2}$
 $\frac{V_W}{V_K} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3r^2 \cdot 2r}{4r^3} = \frac{3}{2}$

5. Wysokości obu graniastosłupów są jednakowe i wynoszą $2R$, gdzie R jest promieniem kuli.

W graniastosłupie trójkątnym $R = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1\sqrt{3}}{2}$,
czyli $a_1 = 2\sqrt{3}R$.

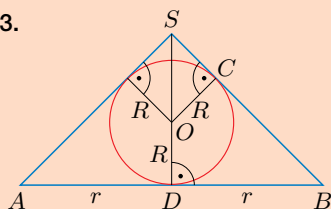
W graniastosłupie czworokątnym $R = \frac{a_2}{2}$, czyli $a_2 = 2R$.

Zatem stosunek objętości graniastosłupów jest równy:

$$\frac{\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2R}{a_2^2 \cdot 2R} = \frac{(2\sqrt{3}R)^2\sqrt{3}}{4 \cdot (2R)^2} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

6. $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $H = 5\sqrt{3}$
 7. $\frac{\pi(5\sqrt{7}-11)}{18}$
 8. 60°
 9. $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
 10. $P = 4\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 81\pi$
 12. a) $4\pi S(3-2\sqrt{2})$
 b) $4\pi S(7\sqrt{3}-12)$
 13.



$$\pi r^2 + \pi r l = 2 \cdot 4\pi R^2,$$

$$\text{czyli } 8R^2 = r(r+l)$$

$$|SD| = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$\triangle SDB \sim \triangle SCO,$$

$$\text{więc } \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r} = \frac{l-r}{R}$$

$$\text{Zatem } R = \frac{r(l-r)}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

$$8 \cdot \frac{r^2(l-r)^2}{l^2 - r^2} = r(r+l)$$

$$\frac{8r(l-r)}{l+r} = r+l$$

$$8rl - 8r^2 = r^2 + 2rl + l^2$$

$$9r^2 - 6rl + l^2 = 0$$

$$(3r-l)^2 = 0, \text{ czyli } 3r = l$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = \frac{r}{l} = \frac{1}{3}.$$

14. $\frac{256}{3}\pi$

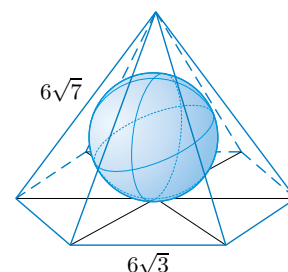
15. $\left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3}}\right)^3 - 1$

- D** 5. Daną kulę można wpisać w pewien graniastosłup prawidłowy trójkątny oraz w pewien graniastosłup prawidłowy czworokątny. Uzasadnij, że stosunek objętości tych graniastosłupów jest równy $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

6. Na kuli opisano graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź podstawy ma długość 5. Oblicz promień kuli oraz wysokość graniastosłupa.
 7. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zawierający dwie jego krawędzie boczne jest trójkątem równobocznym. W ostrosłup ten wpisano kulę. Oblicz stosunek objętości tej kuli do objętości ostrosłupa.
 8. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 opisano na kuli o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa.

9. Oblicz promień kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 8.

10. W ostrosłup prawidłowy sześciokątny przedstawiony na rysunku obok wpisano kulę. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

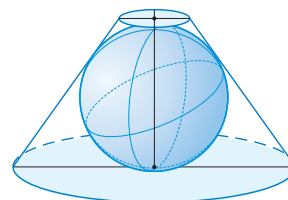


11. Ostrosłup o polu powierzchni całkowitej P_c jest opisany na kuli o promieniu r . Uzasadnij, że objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}P_c \cdot r$.

- D** 12. Wyznacz pole powierzchni kuli wpisanej w stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoramienny o polu S i największym kącie równym:
 a) 90° , b) 120° .

- * 13. Kula wpisana w stożek ma pole powierzchni dwa razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej stożka. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej tego stożka do jego podstawy.

14. Podstawami stożka ściętego są koła o promieniach 2 i 8 (rysunek obok). Oblicz objętość kuli wpisanej w ten stożek.



15. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 2α , przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i styczną do kuli wpisanej w ten ostrosłup. Wyznacz stosunek objętości wielościanów, na które płaszczyzna przekroju podzieliła ten ostrosłup.

11. Ostrosłup n -kątny jest zbudowany z n ścian bocznych i podstawy. Oznaczmy pola ścian bocznych przez $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ oraz pole podstawy przez P_p , wówczas:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + P_p = P_c$$

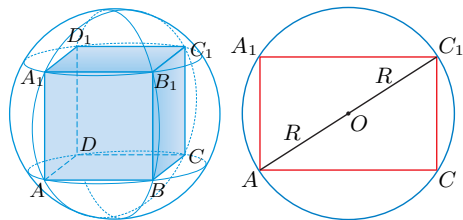
Dzielimy dany ostrosłup na $n+1$ ostrosłupów, których wierzchołkiem jest środek kuli, a ich podstawami są ściany boczne i podstawa wyjściowego ostrosłupa. Wysokościami wszystkich powstałych ostrosłupów jest promień kuli r , a spodkami tych wysokości są punkty styczności kuli ze ścianami bocznymi i podstawą wyjściowego ostrosłupa. Objętość danego ostrosłupa jest sumą objętości powstałych ostrosłupów, stąd:

$$V = \frac{1}{3}P_1r + \frac{1}{3}P_2r + \frac{1}{3}P_3r + \dots + \frac{1}{3}P_nr + \frac{1}{3}P_pr =$$

$$= \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + P_p)r = \frac{1}{3}P_cr$$

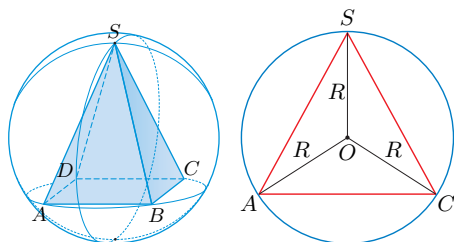
*3.6. Bryły wpisane w kulę

Prostopadłościan wpisany w kulę (kula opisana na prostopadłościanie)



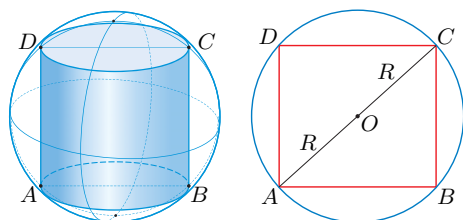
Wszystkie wierzchołki prostopadłościanu leżą na powierzchni kuli. Prostokąt ACC_1A_1 jest przekrojem prostopadłościanu przechodzącym przez przekątne jego podstaw – przekątna prostopadłościanu jest średnicą kuli.

Ostrosłup czworokątny wpisany w kulę (kula opisana na ostrosłupie)



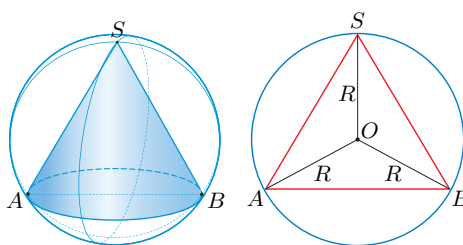
Wszystkie wierzchołki ostrosłupa leżą na powierzchni kuli. Trójkąt ACS jest przekrojem ostrosłupa poprowadzonym przez jego wierzchołek i przekątną podstawy. Jeżeli wysokość ostrosłupa jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz ostrosłupa.

Walec wpisany w kulę (kula opisana na walcu)



Okręgi ograniczające podstawy walca zawierają się w powierzchni kuli. Prostokąt $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca – jego przekątna jest średnicą kuli.

Stożek wpisany w kulę (kula opisana na stożku)



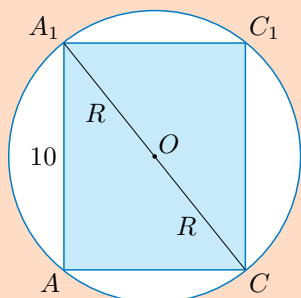
Okrąg ograniczający podstawę stożka zawiera się w powierzchni kuli, a wierzchołek stożka leży na powierzchni kuli. Trójkąt ABS jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli wysokość stożka jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz stożka.

Uczeń:

- rysuje przekroje brył wpisanych w kulę,
- rozwiązuje zadania dotyczące brył wpisanych w kulę, np. dotyczące obliczania pola powierzchni i objętości brył (również z wykorzystaniem trygonometrii).

Ćwiczenie 1

a)



Krawędź podstawy graniastoslupa jest równa $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, zatem $|AC| = 8$ cm.

$$(2R)^2 = 8^2 + 10^2 = 164,$$

$$\text{czyli } R = \sqrt{41} \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (\sqrt{41})^3 = \frac{164\sqrt{41}}{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\text{b) } P_K = 4\pi R^2 = 12\pi,$$

$$\text{czyli } R = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Przekątna sześcianu jest równa $a\sqrt{3} = 2R$, czyli $a = 2$ cm.

$$V_S = 2^3 = 8 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Przykład 1

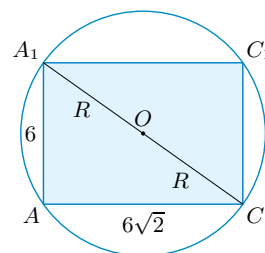
Oblicz promień kuli opisanej na sześcianie, którego krawędź ma długość 6 cm.

Rozpatrzmy prostokąt ACC_1A_1 będący przekrojem sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez przekątne AC i A_1C_1 podstaw sześcianu (rysunek obok).

Aby obliczyć promień kuli, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACA_1 :

$$(2R)^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$$

$$\text{zatem } R^2 = 27, \text{ stąd } R = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$



Ćwiczenie 1

a) Oblicz objętość kuli opisanej na graniastoslupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 10 cm, którego pole podstawy jest równe 32 cm^2 .

b) Pole powierzchni kuli jest równe $12\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość sześcianu wpisanego w tę kulę.

Przykład 2

W kulę o promieniu 3 cm jest wpisany ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach obok. Oznaczmy dodatkowo przez h wysokość trójkąta ACS , przez a – długość jego boku, a przez R – promień kuli.

$\angle SAC = \angle SCA = 60^\circ$, więc trójkąt ACS jest równoboczny.

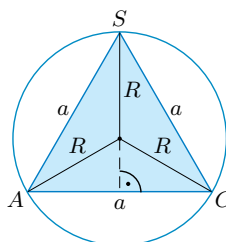
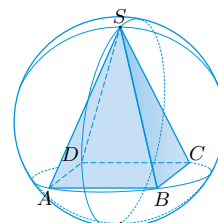
Korzystamy z zależności $R = \frac{2}{3}h$ i otrzymujemy:

$$h = \frac{9}{2} \text{ cm, jednocześnie } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ więc } a = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Przekątna podstawy ostrosłupa ma długość $3\sqrt{3}$ cm, zatem krawędź podstawy ma długość $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm.

Wysokość trójkąta ACS jest też wysokością ostrosłupa. Zatem objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} \right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20,25 \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 2

W kulę o promieniu 6 cm jest wpisany ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

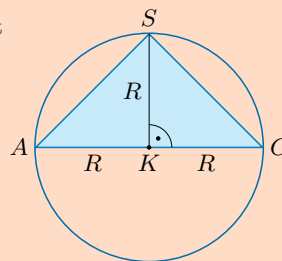
Ćwiczenie 2

Trójkąt ACS jest prostokątny, więc K jest środkiem kuli opisanej na ostrosłupie.

Zatem $|SK| = R = 6$ cm.

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot |AC|^2 = \frac{1}{2} \cdot (2R)^2 = 72 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144 \text{ [cm}^3\text{]}$$



Przykład 3

Wyznacz promień kuli opisanej na czworościanie foremnym o krawędzi a .

Promień kuli opisanej na czworościanie oznaczmy przez R , a wysokość czworościanu – przez H .

Przypomnijmy, że $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

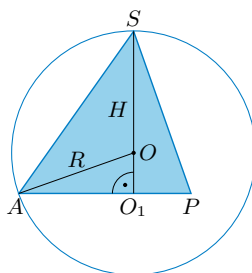
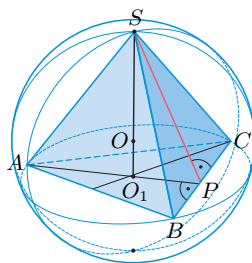
Rozpatrzmy trójkąt APS będący przekrojem czworościanu (rysunek obok).

Trójkąt AO_1O jest trójkątem prostokątnym o bokach $|AO| = R$, $|AO_1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz:

$$|OO_1| = H - R = \frac{a\sqrt{6}}{3} - R$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 &= R^2 \\ \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} - \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot R + R^2 &= R^2 \\ a^2 &= \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot R \\ R &= \frac{a\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$



Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej $2a$.

Przykład 4

W kulę o promieniu R wpisano bryłę złożoną z dwóch stożków połączonych podstawami o promieniu r . Wyznacz objętość tej bryły.

Oznaczmy przez h_1 i h_2 wysokości danych stożków.

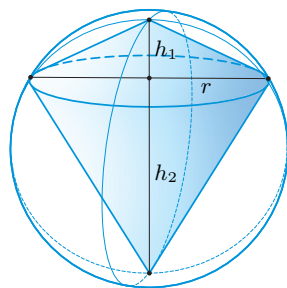
Wyznaczamy ich objętości:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1, \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

Wyznaczamy objętość bryły:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) \end{aligned}$$

Ale $h_1 + h_2 = 2R$, więc $V = \frac{2}{3}\pi r^2 R$.



Ćwiczenie 4

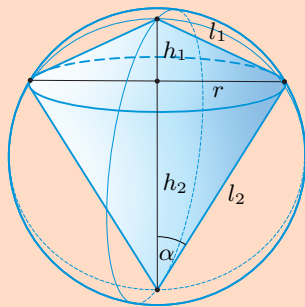
W kulę o promieniu R wpisano dwa stożki o wspólnej podstawie. Pole powierzchni bocznej jednego z nich jest dwa razy większe od pola powierzchni bocznej drugiego. Wyznacz wysokość większego stożka.

Ćwiczenie 4

$\pi r l_2 = 2\pi r l_1$, czyli $l_1 = \frac{1}{2}l_2$

$(\frac{1}{2}l_2)^2 + l_2^2 = (2R)^2$, czyli $l_2^2 = \frac{16}{5}R^2$

$\cos \alpha = \frac{h_2}{l_2} = \frac{l_2}{2R}$, czyli $h_2 = \frac{l_2^2}{2R} = \frac{16}{5}R^2 : 2R = \frac{8}{5}R$



Ćwiczenie 3

Przyjmijmy oznaczenia i rysunki z przykładu 3.

$$|AO_1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$H = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$|OO_1| = H - R = \frac{a\sqrt{33}}{3} - R$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle AO_1O$:

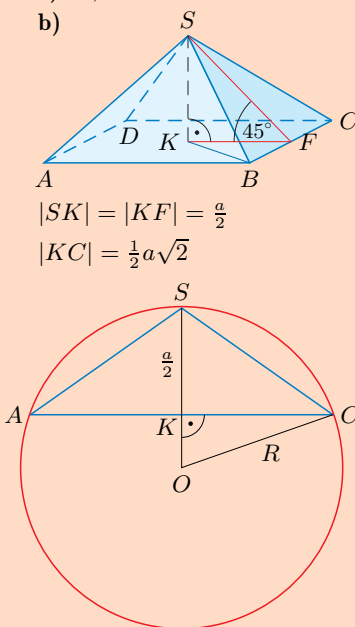
$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{33}}{3} - R\right)^2 = R^2,$$

stąd $R = \frac{2\sqrt{33}}{11}a$

$$V = \frac{32\sqrt{33}}{121}\pi a^3$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{64}{9}\sqrt{3} \text{ cm}^3$ b) $864\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$
2. $2\sqrt{41} \text{ cm}$
3. a) 1440π b) $72\pi \text{ lub } 96\pi$
4. a) $6\sqrt{3} \text{ cm}$ b) $\frac{4r^3}{3\sin^3 2\alpha}\pi$
5. a) $5\sqrt{2} - 7$ b) $\frac{3}{8}(26\sqrt{3} - 45)$
6. a) 23.04

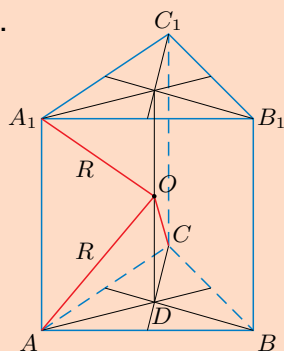


Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OKC :

$$R^2 = \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2,$$

czyli $R = \frac{3a}{4}$

8.



$$|OD| = \frac{a}{2}, |AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOD :

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{7a^2}{12},$$

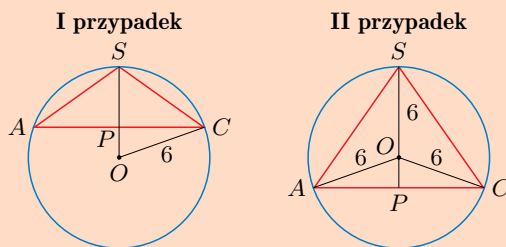
$$\text{skąd } R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

9. Patrz str. 163.

Zadania

- a) Oblicz objętość sześcianu, na którym opisano kulę o promieniu 2 cm.
 - b) Oblicz objętość kuli opisanej na sześcianie, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 864 cm^2 .
2. W kulę o promieniu 7 cm wpisano graniastosłup prawidłowy czworokątny o polu podstawy równym 16 cm^2 . Oblicz wysokość tego graniastosłupa.
3.
 - a) W kulę o promieniu 13 wpisano walec, którego wysokość jest równa 10. Oblicz objętość tego walca.
 - b) W kulę o promieniu 5 wpisano walec, którego pole powierzchni bocznej jest równe 48π . Oblicz objętość tego walca (rozpatrz dwa przypadki).
4.
 - a) Promień podstawy stożka jest równy 6 cm, a kąt między tworzącą a podstawą ma miarę 15° . Oblicz odległość środka tej podstawy od środka kuli opisanej na tym stożku.
 - b) Promień podstawy stożka jest równy r , a kąt między tworzącą stożka a jego podstawą ma miarę α . Wyznacz objętość kuli opisanej na tym stożku.
5. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem α . Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w ten stożek do objętości kuli na nim opisanej dla:
 - a) $\alpha = 45^\circ$,
 - b) $\alpha = 30^\circ$.
6.
 - a) Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, którego ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 60° , opisano kulę o polu powierzchni 16π . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
 - b) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość równą a , a jego ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 45° . Wyznacz promień kuli opisanej na tym ostrosłupie.
7. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 8 wpisanego w kulę o promieniu 6 (rozpatrz dwa przypadki).
8. Wyznacz promień kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, którego wszystkie krawędzie mają długość a .
9. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi. Oblicz stosunek objętości tego ostrosłupa do objętości kuli na nim opisanej.

7. Przekroje osiowe, gdzie AC jest przekątną podstawy ostrosłupa:



$$|PC| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, |OP| = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2$$

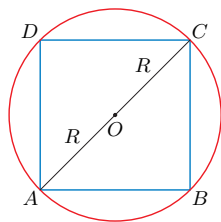
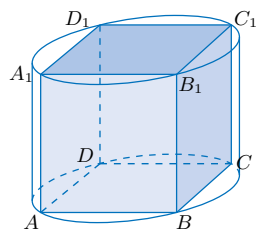
Wysokości ostrosłupów: I: $|PS| = 6 - 2 = 4$, II: $|PS| = 6 + 2 = 8$

Objętości ostrosłupów: I: $V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 4 = \frac{256}{3}$, II: $V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 8 = \frac{512}{3}$

*3.7. Inne bryły wpisane i opisane

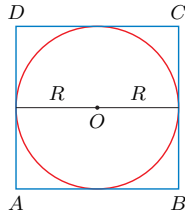
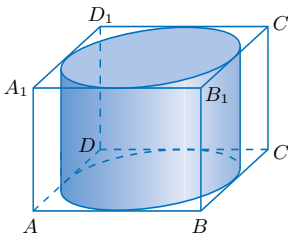
Poniżej przedstawiono przykłady brył wpisanych i opisanych.

Walec opisany na graniastosłupie (graniastosłup wpisany w walec)



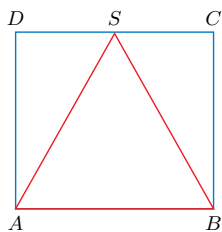
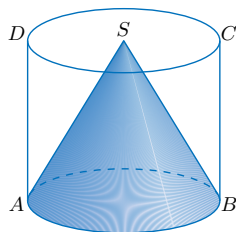
Podstawy graniastosłupa są wpisane w podstawy walca. Na rysunkach przedstawiono walec opisany na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym oraz podstawę walca z wpisaną w nią podstawą graniastosłupa.

Walec wpisany w graniastosłup (graniastosłup opisany na walec)



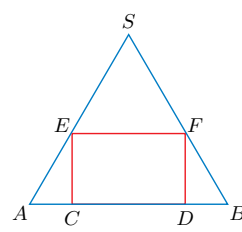
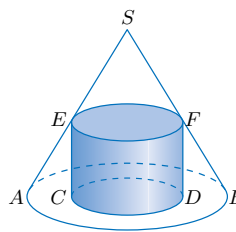
Podstawy walca są wpisane w podstawy graniastosłupa. Na rysunkach przedstawiono walec wpisany w graniastosłup prawidłowy czworokątny oraz podstawę walca z opisaną na niej podstawą graniastosłupa.

Walec opisany na stożku (stożek wpisany w walec)



Podstawa stożka pokrywa się z jedną podstawą walca, a wierzchołek stożka należy do drugiej podstawy walca. Na rysunku po prawej przedstawiono wspólny przekrój osiowy tych brył.

Walec wpisany w stożek (stożek opisany na walec)



Okrąg ograniczający jedną podstawę walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka, a druga podstawa walca zawiera się w podstawie stożka. Na rysunku po prawej przedstawiono wspólny przekrój osiowy tych brył.

9. x – krawędź boczna ostrosłupa, $x\sqrt{2}$ – krawędź podstawy ostrosłupa

$$|SP| = \frac{x\sqrt{2}}{2}, |AP| = \frac{x\sqrt{6}}{2}$$

$$|AO_1| = \frac{2}{3} \cdot |AP| = \frac{x\sqrt{6}}{3}$$

Wysokość ostrosłupa:

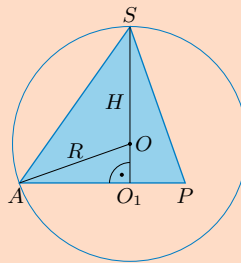
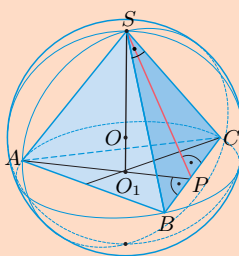
$$H = \sqrt{x^2 - \frac{6x^2}{9}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$|O_1O| = H - R = \frac{x\sqrt{3}}{3} - R$$

$$R^2 = \frac{6x^2}{9} + \frac{3x^2}{9} - \frac{2\sqrt{3}xR}{3} + R^2,$$

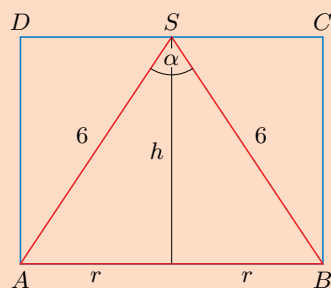
$$\text{czyli } R = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Stosunek objętości: } \frac{V_O}{V_K} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{(x\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9\pi}$$



Uczeń:

- rysuje przekroje brył wpisanych w inne bryły i opisanych na innych bryłach,
- rozwiązuje zadania dotyczące brył wpisanych i opisanych (również z wykorzystaniem trygonometrii).

Ćwiczenie 1a) $108\pi \text{ cm}^3$ b) 2:1**Ćwiczenie 2**a) Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS :

$$(2r)^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cos 45^\circ,$$

$$\text{czyli } r^2 = 9(2 - \sqrt{2})$$

$$h^2 = 6^2 - r^2 = 18 + 9\sqrt{2} =$$

$$= 9(2 + \sqrt{2}),$$

$$\text{czyli } h = 3\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot 9(2 - \sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2 + \sqrt{2}} =$$

$$= 27\pi(2 - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}} [\text{cm}^3]$$

b) Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS :

$$(2r)^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{9},$$

$$\text{czyli } r = 4 \text{ cm}$$

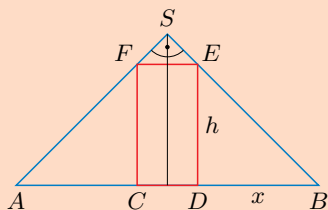
$$h^2 = 6^2 - 4^2 = 20,$$

$$\text{czyli } h = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{5} = 32\pi\sqrt{5} [\text{cm}^3]$$

Ćwiczenie 3

a)

Trójkąt BED jest prostokątny i równoramienny, czyli $x = 4$.Zatem $r = h = 5$.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 = \frac{125}{3}\pi$$

b) $9\pi(3 + 2\sqrt{3})$ **Ćwiczenie 1**

a) Oblicz objętość walca opisanego na sześcianie o krawędzi 6 cm.

b) Oblicz stosunek objętości walca opisanego na sześcianie do objętości walca wpisanego w ten sześcian.

Ćwiczenie 2Na stożku o tworzącej długości 6 cm i kącie rozwarcia α opisano walec. Oblicz objętość tego walca, jeśli wiadomo, że: a) $\alpha = 45^\circ$, b) $\cos \alpha = \frac{1}{9}$.**Ćwiczenie 3**a) Walec o promieniu podstawy równym 1 i wysokości 4 jest wpisany w stożek o kącie rozwarcia 90° . Oblicz objętość tego stożka.b) Walec o promieniu podstawy równym $\sqrt{3}$ i wysokości 2 jest wpisany w stożek o kącie rozwarcia 120° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.**Przykład 1**

Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym opisano stożek w ten sposób, że podstawa ostrosłupa jest wpisana w podstawę stożka, a wierzchołki obu brył się pokrywają. Oblicz stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa.

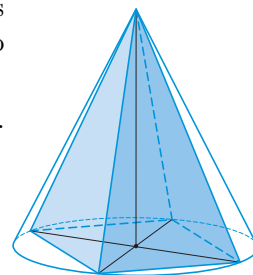
Oznaczmy przez r promień podstawy stożka, wówczas przekątna podstawy ostrosłupa ma długość $2r$, a jego krawędź podstawy ma długość $\sqrt{2}r$.Oznaczmy przez h wspólną wysokość ostrosłupa i stożka.Wówczas objętość stożka: $V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V_O = \frac{1}{3}(\sqrt{2}r)^2 \cdot h = \frac{2}{3}r^2 h$$

Zatem stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa:

$$\frac{V_S}{V_O} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{2}{3}r^2 h} = \frac{\pi}{2}$$

**Ćwiczenie 4**

Ostrosłup prawidłowy sześciokątny wpisano w stożek w ten sposób, że podstawa ostrosłupa jest wpisana w podstawę stożka, a wierzchołki obu brył się pokrywają. Wyznacz stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa.

Ćwiczenie 5Stożek wpisano w ostrosłup prawidłowy czworokątny w ten sposób, że podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa, a wierzchołki obu brył się pokrywają. Wykaż, że stosunek objętości ostrosłupa do objętości stożka jest równy $\frac{4}{\pi}$.**Ćwiczenie 4** h – wysokość stożka i ostrosłupa r – promień podstawy stożka $a = r$ – krawędź podstawy ostrosłupa

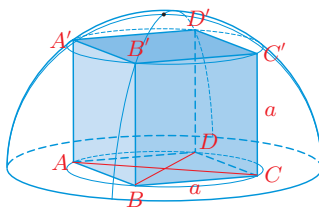
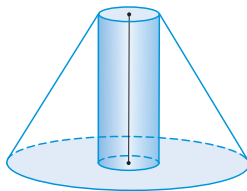
$$\text{Stosunek objętości: } \frac{V_S}{V_O} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h} = \frac{2\pi a^2}{3a^2 \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

Ćwiczenie 5 h – wysokość stożka i ostrosłupa r – promień podstawy stożka $a = 2r$ – krawędź podstawy ostrosłupa

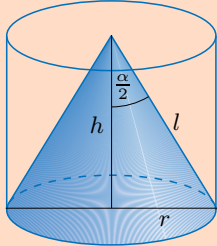
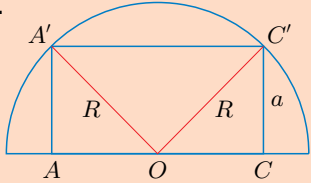
$$\text{Stosunek objętości: } \frac{V_O}{V_S} = \frac{\frac{1}{3}a^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{4r^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}$$

Zadania

- Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Oblicz stosunek objętości walca opisanego na tym graniastosłupie do objętości walca w niego wpisanego.
- W prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem, wpisano walec. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 16. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.
- Wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm, a jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz objętość walca:
a) opisanego na tym graniastosłupie, b) wpisanego w ten graniastosłup.
- W stożek o promieniu podstawy 3 wpisano walec o wysokości 4 i promieniu podstawy 2. Oblicz objętość tego stożka.
- W walec o promieniu podstawy 5 wpisano stożek, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest połową koła. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.
- W walec wpisano stożek. Pola powierzchni bocznych obu brył są równe. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.
- W stożek ścięty, w którym stosunek promieni podstaw jest równy 1 : 4, wpisano walec jak na rysunku obok. Oblicz, jaką część objętości stożka ściętego stanowi objętość walca.
- Oblicz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka ściętego do podstawy, jeżeli wiadomo, że w bryłę tę można wpisać kulę o objętości cztery razy mniejszej niż objętość tego stożka ściętego.
- Wyznacz największą możliwą objętość sześcienu zawartego w półkuli o promieniu R (rysunek obok).
- Prostopadłościan ma osiem krawędzi długości x i cztery krawędzie długości $2x$. Oblicz największą możliwą objętość takiego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jest on zawarty w półkuli o promieniu 15.



Odpowiedzi do zadań

- $\frac{4}{3}$
- 4π
- a) $125\pi \text{ cm}^3$ b) $20\pi \text{ cm}^3$
- 36π
- h – wysokość stożka i walca
 l – tworząca stożka
 $\frac{1}{2}\pi l^2 = \pi \cdot 5l$, czyli $l = 10$
 $h = 5\sqrt{3}$
 $P = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi(1 + \sqrt{3})$
- 
 $\pi r l = 2\pi r h$, czyli $l = 2h$
 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{l} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$,
 czyli $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$, zatem $\alpha = 120^\circ$
- $\frac{1}{7}$
- $\frac{2}{3}$
- 
 $|AC| = a\sqrt{2}$,
 stąd $|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
 $R = \sqrt{|OC|^2 + |CC'|^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,
 czyli $a = \frac{\sqrt{6}}{3}R$
 $V = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)^3 = \frac{2\sqrt{6}}{9}R^3$

10. $V = x^2 \cdot 2x = 2x^3$

I przypadek

Podstawą graniastosłupa jest kwadrat.

$$15^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2x)^2$$

$$x = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

II przypadek

Podstawą graniastosłupa jest prostokąt.

$$15^2 = \left(\frac{x\sqrt{5}}{2}\right)^2 + x^2$$

$$x = 10 \text{ cm}$$

Większą objętość ma graniastosłup w drugim przypadku.

$$V = 2000 \text{ cm}^3$$

Uczeń:

- opisuje funkcją jednej zmiennej pole powierzchni lub objętość bryły i określa jej dziedzinę oraz wyznacza jej największą lub najmniejszą wartość.

Ćwiczenie 1

$4r + 2h = 12$, stąd $h = 6 - 2r$,
 $r \in (0; 3)$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V(r) = \pi r^2 (6 - 2r), \quad r \in (0; 3)$$

$$V'(r) = 12\pi r - 6\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \text{ dla } r = 2 \text{ cm}$$

$$V'(r) > 0 \text{ dla } r \in (0; 2) \text{ oraz}$$

$$V'(r) < 0 \text{ dla } r \in (2; 3)$$

Funkcja V rośnie w przedziale $(0; 2)$ i maleje w przedziale $(2; 3)$, więc objętość walca jest największa dla $r = 2$ cm i $h = 2$ cm.

Ćwiczenie 2

$\pi r^2 h = 1$, stąd $h = \frac{1}{\pi r^2}$, gdzie $r > 0$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$P(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}, \quad r > 0$$

$$P'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$$

$$P'(r) = 0 \text{ dla } r = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$$

$$P'(r) < 0 \text{ dla } r \in \left(0; \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right) \text{ oraz}$$

$$P'(r) > 0 \text{ dla } r > \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$$

Funkcja P maleje w przedziale

$$\left(0; \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right) \text{ i rośnie w przedziale}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}; \infty\right), \text{ więc pole}$$

powierzchni całkowitej walca jest

$$\text{najmniejsze dla } r = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi} \text{ dm}$$

$$\text{i } h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} \text{ dm.}$$

*3.8. Zagadnienia optymalizacyjne

Przykład 1

Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o polu powierzchni całkowitej 150π cm², aby jej objętość była największa?

Oznaczmy przez r promień podstawy walca, a przez h – jego wysokość.

Pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 150\pi$$

$$\text{Stąd } h = \frac{150 - 2r^2}{2r} = \frac{75 - r^2}{r}, \text{ gdzie } r \in (0; 5\sqrt{3}).$$

Wyznaczamy objętość walca jako funkcję zmiennej r :

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{75 - r^2}{r} = \pi(75r - r^3), \quad r \in (0; 5\sqrt{3})$$

Aby wyznaczyć największą wartość funkcji V , obliczamy jej pochodną:

$$V'(r) = \pi(75 - 3r^2)$$

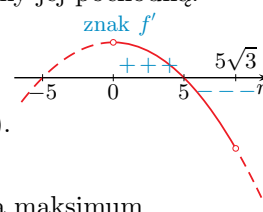
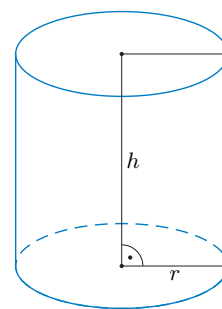
$$V'(r) = 0 \text{ dla } r = 5$$

$$V'(r) > 0 \text{ dla } r \in (0; 5) \text{ oraz } V'(r) < 0 \text{ dla } r \in (5; 5\sqrt{3}).$$

Pochodna V' zmienia znak z dodatniego na ujemny

w punkcie $r = 5$, więc w punkcie tym funkcja V osiąga maksimum.

Funkcja V rośnie w przedziale $(0; 5)$ i maleje w przedziale $(5; 5\sqrt{3})$, więc objętość walca jest największa dla $r = 5$ cm i $h = \frac{75 - 25}{5} = 10$ [cm].



Ćwiczenie 1

Oblicz promień podstawy i wysokość walca, którego przekrój osiowy jest prostokątem o obwodzie 12 cm i który ma największą możliwą objętość.

Ćwiczenie 2

Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o objętości 1 l, aby zużyć jak najmniej materiału do jej wytworzenia?

Ćwiczenie 3

Błazniana puszka w kształcie walca ma mieć pojemność 0,4 dm³. Na wycięcie kół na obie podstawy puszki trzeba przeznaczyć kwadratowe kawałki blachy. Cena materiału, z którego wykonuje się podstawy, jest o 5% wyższa od ceny materiału, z którego wykonuje się powierzchnię boczną. Jakie wymiary powinna mieć puszka, aby koszt jej wykonania był najmniejszy?

Ćwiczenie 3

c – cena materiału na powierzchnię boczną

$$0,4 \text{ dm}^3 = 400 \text{ cm}^3$$

$$\pi r^2 h = 400, \text{ stąd } h = \frac{400}{\pi r^2}, \text{ gdzie } r > 0$$

$$\text{Koszt wykonania puszki: } k(r) = 1,05c \cdot 2 \cdot (2r)^2 + c \cdot 2\pi r h$$

$$k(r) = 8,4r^2c + \frac{800c}{r}, \quad r > 0$$

$$k'(r) = 16,8rc - \frac{800c}{r^2}$$

$$k'(r) = 0 \text{ dla } r = \frac{10}{21} \sqrt[3]{441}$$

$$k'(r) < 0 \text{ dla } r \in \left(0; \frac{10}{21} \sqrt[3]{441}\right) \text{ oraz } k'(r) > 0 \text{ dla } r > \frac{10}{21} \sqrt[3]{441}$$

Funkcja k maleje w przedziale $\left(0; \frac{10}{21} \sqrt[3]{441}\right)$ i rośnie w przedziale $\left(\frac{10}{21} \sqrt[3]{441}; \infty\right)$,

więc koszt wykonania puszki jest najmniejszy dla $r = \frac{10}{21} \sqrt[3]{441}$ cm i $h = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{441}$ cm.

Przykład 2

Jaką największą objętość może mieć stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem o obwodzie równym 8 cm?

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$2l + 2r = 8$, czyli $l = 4 - r$. Zauważmy, że $l > r > 0$, czyli $4 - r > r > 0$, skąd $r \in (0; 2)$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta

OBS:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(4 - r)^2 - r^2} = \sqrt{16 - 8r}$$

Wyznaczamy objętość stożka jako funkcję zmiennej r :

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{16 - 8r} = \frac{1}{3}\pi \sqrt{16r^4 - 8r^5}, \quad r \in (0; 2)$$

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą $f(r) = 16r^4 - 8r^5$, gdzie $r \in (0; 2)$.

Funkcja $g(t) = \sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje V i f osiągają wartość największą dla tego samego argumentu.

$$f'(r) = 64r^3 - 40r^4, \quad \text{gdzie } r \in (0; 2)$$

$$64r^3 - 40r^4 = 0 \quad \text{dla } r \in \left\{0, \frac{8}{5}\right\}$$

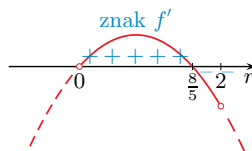
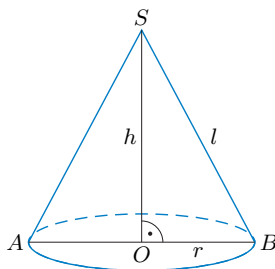
Z założenia $r \in (0; 2)$, zatem $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{8}{5}$.

Funkcja f rośnie w przedziale $(0; \frac{8}{5})$ i maleje w przedziale $(\frac{8}{5}; 2)$, czyli dla $r = \frac{8}{5}$ funkcje f i V osiągają wartości największe.

Dla $r = \frac{8}{5}$ mamy $h = \sqrt{16 - 8 \cdot \frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ [cm].

Obliczamy największą objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{256\sqrt{5}\pi}{375} \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 4

Jaką największą objętość może mieć stożek, którego tworząca ma długość 6 cm?

Zadania

- Wymiary puszki w kształcie walca o objętości 2 dm^3 zaprojektowano tak, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej blachy. Na całą powierzchnię boczną puszki naklejono etykietę. Oblicz powierzchnię tej etykiety.
- Spośród wszystkich walców o polu powierzchni całkowitej S wybrano ten, który ma największą objętość. Wyznacz jego wysokość i promień podstawy.

$$2. \quad 2\pi r^2 + 2\pi r h = S, \quad \text{stąd } h = \frac{S}{2\pi r} - r, \quad \text{gdzie } r \in \left(0; \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V(r) = \frac{S}{2}r - \pi r^3, \quad r \in \left(0; \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$$

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \quad \text{dla } r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$V'(r) > 0 \quad \text{dla } r \in \left(0; \sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) \quad \text{oraz } V'(r) < 0 \quad \text{dla } r \in \left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}; \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$$

$$\text{Funkcja } V \text{ rośnie w przedziale } \left(0; \sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) \text{ i maleje w przedziale } \left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}; \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right),$$

$$\text{więc objętość walca jest największa dla } r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \text{ i } h = \frac{S}{2\pi r} - r = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

Ćwiczenie 4

$$r^2 = 36 - h^2, \quad h \in (0; 6)$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(36 - h^2)h, \quad h \in (0; 6)$$

$$V'(h) = 12\pi - \pi h^2$$

$$V'(h) = 0 \quad \text{dla } h = 2\sqrt{3}$$

$$V'(h) > 0 \quad \text{dla } h \in (0; 2\sqrt{3}) \quad \text{oraz}$$

$$V'(h) < 0 \quad \text{dla } h \in (2\sqrt{3}; 6)$$

Funkcja V rośnie w przedziale $(0; 2\sqrt{3})$ i maleje w przedziale $(2\sqrt{3}; 6)$, więc objętość stożka jest największa dla $h = 2\sqrt{3}$ cm.

$$V(2\sqrt{3}) = 16\pi\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odpowiedzi do zadań

- $\pi r^2 h = 2$, stąd $h = \frac{2}{\pi r^2}$, gdzie $r > 0$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$P(r) = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}, \quad r > 0$$

$$P'(r) = 4\pi r - \frac{4}{r^2}$$

$$P'(r) = 0 \quad \text{dla } r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$P'(r) < 0 \quad \text{dla } r \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)$$

$$\text{oraz } P'(r) > 0 \quad \text{dla } r > \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Funkcja P maleje w przedziale

$$\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) \text{ i rośnie w prze-}$$

$$\text{dziale } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}; \infty\right), \quad \text{więc pole}$$

powierzchni całkowitej walca jest najmniejsze dla

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ dm i } h = \frac{2\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi} \text{ dm}$$

Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 2\pi r h = 4\sqrt[3]{\pi} \text{ [dm}^2\text{]}$$

3. h – wysokość walca
 r – promień podstawy walca
 $\pi r^2 h = V$, stąd $h = \frac{V}{\pi r^2}$,
gdzie $r > 0$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$P(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0$$

$$P'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

$$P'(r) = 0 \text{ dla } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$P'(r) < 0 \text{ dla } r \in \left(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$$

$$\text{oraz } P'(r) > 0 \text{ dla } r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Funkcja P maleje w przedzia-

le $\left(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$ i rośnie w prze-

dziale $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty\right)$, więc pole

powierzchni całkowitej walca

$$\text{jest najmniejsze dla } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$\text{i } h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

$$2r = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = h,$$

zatem przekrój osiowy tego

walca jest kwadratem.

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

6. Ramię: 9 cm, podstawa: 6 cm

7. $H = 16$ cm, $r = 8\sqrt{2}$ cm

8. $\frac{512}{3}\pi$ cm³

9. $\frac{32}{135}\pi^2 h$

10. Ramię: 6 cm, krótsza podsta-
wa: 4 cm

- D** 3. Spośród wszystkich walców o objętości V wybrano ten, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. Uzasadnij, że przekrój osiowy tego walca jest kwadratem.

4. Oblicz, jaką największą część kuli może stanowić wpisany w nią walec (rysunek obok).

5. Spośród wszystkich stożków o tworzącej l wybrano ten, który ma największą objętość. Oblicz miarę kąta środkowego wycinka koła, który tworzy po rozwinięciu powierzchnia boczna tego stożka.

6. Dany jest trójkąt równoramienny o obwodzie równym 24 cm. Trójkąt ten obrócono wokół jego podstawy. Dla jakich długości podstawy i ramion takiego trójkąta otrzymana bryła obrotowa ma największą możliwą objętość?

7. Spośród wszystkich stożków wpisanych w kulę o promieniu 12 cm wybrano ten o największej objętości. Oblicz jego wysokość i promień podstawy.

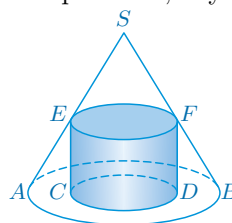
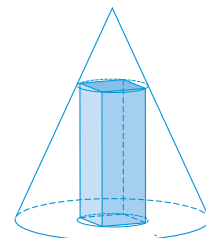
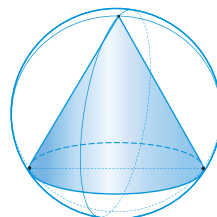
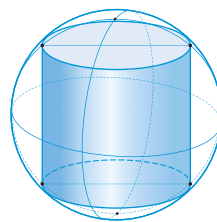
- *8. Oblicz, jaką najmniejszą objętość może mieć stożek opisany na kuli o promieniu 4 cm.

9. W stożek o promieniu podstawy r i wysokości h wpisano prostopadłościan, w którym stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 2 : 1. Wyznacz największą możliwą objętość tego prostopadłościanu.

Uwaga. W stożek jest wpisany prostopadłościan, gdy wierzchołki jego górnej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka, a dolna podstawa jest zawarta w podstawie stożka.

10. Trapez równoramienny o obwodzie 22 cm obraca się wokół dłuższej podstawy równej 6 cm. Dobierz długości pozostałych boków trapezu tak, aby otrzymać bryłę o największej możliwej objętości.

- D** 11. Spośród wszystkich walców wpisanych w stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o boku $2a$, wybrano ten o największej objętości. Wykaż, że objętość tego walca jest równa objętości kuli wpisanej w dany stożek.



11. $\frac{R}{a} = \tan 30^\circ$, stąd $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
Objętość kuli: $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$

$$|SM| = a\sqrt{3}$$

$\triangle FES$ jest trójkątem równobocznym o boku $2r$, stąd $|SN| = r\sqrt{3}$.

Zatem wysokość walca: $h = a\sqrt{3} - r\sqrt{3}$, $r \in (0; a)$

Objętość walca: $V = \pi r^2 h$, $V(r) = \pi r^2 (a\sqrt{3} - r\sqrt{3})$, $r \in (0; a)$

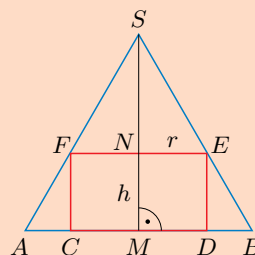
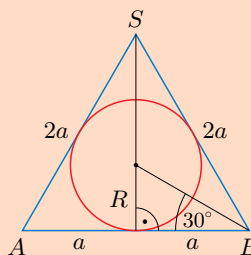
$$V'(r) = 2\pi r a\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\pi r^2, \quad V'(r) = 0 \text{ dla } r = \frac{2a}{3}$$

$$V'(r) > 0 \text{ dla } r \in (0; \frac{2a}{3}) \text{ oraz } V'(r) < 0 \text{ dla } r \in (\frac{2a}{3}; a)$$

Funkcja V rośnie w przedziale $(0; \frac{2a}{3})$ i maleje w przedziale $(\frac{2a}{3}; a)$,

więc objętość walca jest największa dla $r = \frac{2a}{3}$ i $h = a\sqrt{3} - r\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Objętość największego walca: } V = \pi \left(\frac{2a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3 = V_K$$



3.9. Zagadnienia uzupełniające

■ Układ współrzędnych w przestrzeni

Położenie dowolnego punktu w przestrzeni jest określone przez trójkę jego współrzędnych (x, y, z) .

Wierzchołkami dolnej podstawy prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok są punkty:

$(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(3, 2, 0)$, $(3, 0, 0)$,

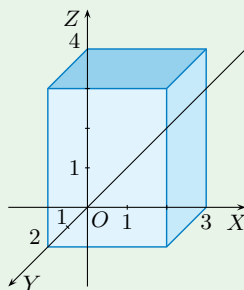
a wierzchołkami górnej podstawy – punkty:

$(0, 0, 4)$, $(0, 2, 4)$, $(3, 2, 4)$, $(3, 0, 4)$.

Współrzędne punktów należących do prostopadłościanu spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

Obliczmy objętość tego prostopadłościanu: $V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.



1. Oblicz objętość graniastosłupa, do którego należą punkty o współrzędnych spełniających podany układ nierówności.

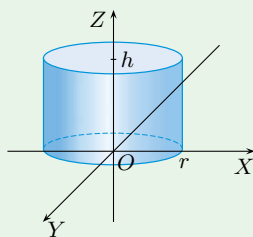
a) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ 2 \leq z \leq 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ -2 \leq y \leq 4 \\ -5 \leq z \leq -2 \end{cases}$

* c) $\begin{cases} 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 2 - x \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$

Rozpatrzmy walec o promieniu podstawy r i wysokości h umieszczony w trójwymiarowym układzie współrzędnych (rysunek obok). Współrzędne punktów należących do tego walca spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$



2. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej walca opisanego podanym układem nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 10 \\ -2 \leq z \leq 6 \end{cases}$

* c) $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 15 \leq 0 \\ -1 \leq z \leq 5 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} r = 3 \\ h = 4 \end{cases}$

$$V = \pi \cdot 9 \cdot 4 = 36\pi$$

$$P_b = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$$

b) $\begin{cases} r = \sqrt{10} \\ h = 8 \end{cases}$

$$V = \pi \cdot 10 \cdot 8 = 80\pi$$

$$P_b = 2\pi \cdot \sqrt{10} \cdot 8 = 16\sqrt{10}\pi$$

c) $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq 16 \\ -1 \leq z \leq 5 \end{cases}$

$$r = 4, h = 6$$

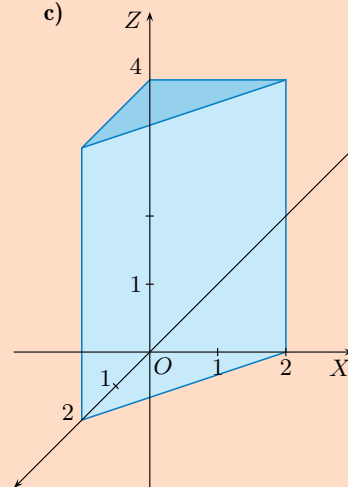
$$V = \pi \cdot 16 \cdot 6 = 96\pi$$

$$P_b = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 60 b) 108

c)



$$V = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

Odległość punktu $P(x, y, z)$ od początku trójwymiarowego układu współrzędnych $O(0, 0, 0)$ wyraża się wzorem (uzasadnij):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Zatem nierówność:

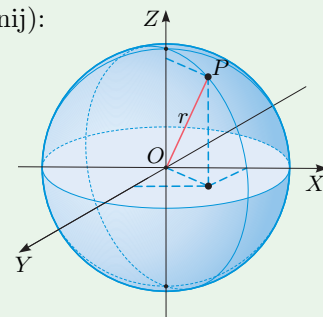
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

gdzie $r > 0$, opisuje kulę o środku w punkcie O i promieniu r , a równanie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

opisuje sferę będącą powierzchnią tej kuli.

Na przykład nierówność $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ opisuje kulę o środku w punkcie $O(0, 0, 0)$ i promieniu $r = 6$. Jej objętość: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$, a pole powierzchni: $P = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$.



3. a) $P = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$

b) $r = \sqrt{3}$

$P = 12\pi, V = 4\sqrt{3}\pi$

c) $r = \sqrt{10}$

$P = 40\pi, V = \frac{40}{3}\sqrt{10}\pi$

4. a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$

b) $\frac{4}{3}\pi r^3 = 972\pi$, czyli $r = 9$

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 81$

3. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli opisanej nierównością:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$.

4. Podaj nierówność opisującą zbiór punktów (x, y, z) należących do kuli o środku w początku trójwymiarowego układu współrzędnych, jeśli wiadomo, że: a) jej średnica jest równa 8, b) jej objętość jest równa 972π .

Położenie punktu w przestrzeni możemy opisać za pomocą **współrzędnych sferycznych**.

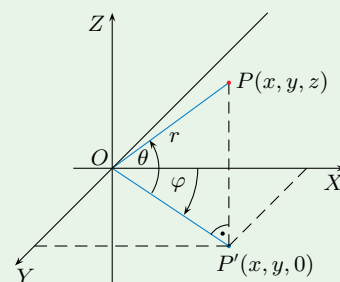
Rozpatrzmy punkt P' będący rzutem prostokątnym punktu $P(x, y, z)$ na płaszczyznę OXY (rysunek obok).

Aby określić położenie punktu P we współrzędnych sferycznych, podajemy:

r – długość odcinka OP ,

θ – kąt między odcinkiem OP i odcinkiem OP' ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$),

φ – kąt między odcinkiem OP' i osią OX ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$).



D 5. Uzasadnij, że współrzędne sferyczne punktu $P(2, 2, 2\sqrt{2})$ są równe:

$$r = 4, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

D 6. Uzasadnij, że współrzędne sferyczne punktu $P(1, 1, \sqrt{6})$ są równe:

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

5. $r = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$

$|OP'| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{|OP'|}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\theta = \frac{\pi}{4}$

W dwuwymiarowej przestrzeni OXY punkt $P'(2, 2)$ należy do prostej $y = x$, która jest nachylona do osi OX pod kątem 45° , zatem $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

6. $r = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$

$|OP'| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{|OP'|}{r} = \frac{1}{2}$, czyli $\theta = \frac{\pi}{3}$

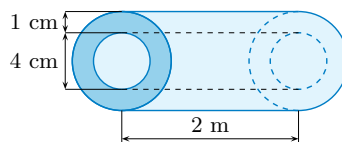
W dwuwymiarowej przestrzeni OXY punkt $P'(1, 1)$ należy do prostej $y = x$, która jest nachylona do osi OX pod kątem 45° , zatem $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% dłuższy od promienia podstawy drugiego. Oblicz stosunek objętości tych walców.

2. Oblicz objętość metalu użytego do wykonania metalowej rury o wymiarach podanych na rysunku (skala nie jest zachowana).



3. Oblicz pole przekroju osiowego walca, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach $7 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.

4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 12 cm wyznaczonym przez kąt środkowy 225° . Oblicz objętość tej bryły.

5. Wycinek koła o promieniu 2 wyznaczony przez kąt środkowy 90° zwinięto w powierzchnię boczną stożka. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

6. Stożek i walec mają równe pola powierzchni bocznych, równe tworzące i takie same objętości. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

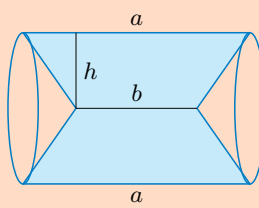
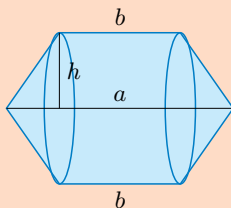
7. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym kąt przy podstawie ma miarę 30° , a wysokość opuszczona na podstawę jest równa 1 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej przez obrót tego trójkąta wokół: a) jego podstawy, b) jednego z jego ramion.

8. Objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trapezu równoramiennego wokół dłuższej podstawy stanowi 70% objętości bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego trapezu wokół krótszej podstawy. Oblicz stosunek długości podstaw trapezu.

9. Kulę o środku O przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku S . Oblicz długość odcinka OS , jeśli wiadomo, że pole powierzchni kuli jest równe 20π , a obwód przekroju jest równy 2π .

10. Stożek o wysokości 4 przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła powierzchnię boczną stożka na dwie części o równych polach. Oblicz odległość płaszczyzny przekroju od podstawy tego stożka.

$$\begin{aligned} 8. \quad V_1 &= 2 \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 \cdot \frac{a-b}{2} + \pi h^2 b \\ V_2 &= \pi h^2 a - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 \cdot \frac{a-b}{2} \\ V_1 &= 0,7V_2 \\ \frac{a-b}{3} \pi h^2 + \pi h^2 b &= \\ &= 0,7 \pi h^2 a - 0,7 \cdot \frac{a-b}{3} \pi h^2 \\ 1,7 \cdot \frac{a-b}{3} &= 0,7a - b \\ 0,4a &= 1,3b \\ \frac{a}{b} &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$



9. 2

10. $2(2 - \sqrt{2})$

Odpowiedzi do zadań

1. $9:4$

2. $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 200 - \pi \cdot 2^2 \cdot 200 = 200\pi(9 - 4) = 1000\pi \text{ [cm}^3\text{]}$

3. $\frac{35}{\pi} \text{ cm}^2$

4. $\frac{225\sqrt{39}}{8} \pi \text{ cm}^3$

5. $P_c = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{4} \pi$

6. Z warunków zadania $h_w = l_s$ oraz:

$$2\pi r_w h_w = \pi r_s l_s$$

$$\pi r_w^2 h_w = \frac{1}{3} \pi r_s^2 h_s$$

Stąd:

$$r_s = \frac{2r_w h_w}{l_s} = \frac{2r_w h_w}{h_w} = 2r_w$$

$$h_s = \frac{3r_w^2 h_w}{r_s^2} = \frac{3r_w^2 h_w}{4r_w^2} = \frac{3}{4} h_w$$

$$l_s^2 = r_s^2 + h_s^2$$

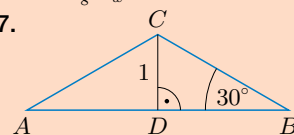
$$h_w^2 = 4r_w^2 + \frac{9}{16} h_w^2,$$

$$\text{stąd } r_w = \frac{\sqrt{7}}{8} h_w$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{h_s}{r_s} = \frac{\frac{3}{4} h_w}{2r_w} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} h_w}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{8} h_w} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

7.



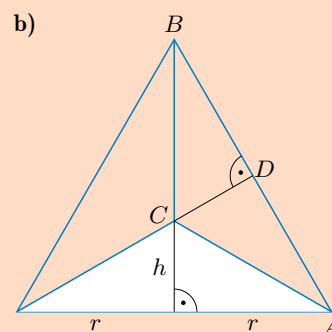
$$|AD| = |DB| = \sqrt{3}$$

$$|AC| = |BC| = 2$$

a) $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$

$$P = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 = 4\pi$$

b)



Pole trójkąta ABC :

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r,$$

$$\text{czyli } r = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (|BC| + h) +$$

$$- \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 |BC| =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 2\pi$$

$$P = \pi r \cdot |AB| + \pi r \cdot |AC| =$$

$$= \pi r (|AB| + |AC|) =$$

$$= \pi \sqrt{3} (2\sqrt{3} + 2) =$$

$$= 2\pi (3 + \sqrt{3})$$



$$1. l = 2r$$

$$P_b = \pi r l = 2\pi r^2 = 2P_p$$

$$2. 512\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

$$3. \frac{125}{24}\pi$$

$$4. 96\pi$$

$$5. \frac{3}{8}$$

$$6. r - \text{promień podstawy stożka}$$

$$R - \text{promień kuli}$$

$$(4 - R)^2 + r^2 = R^2,$$

$$\text{stąd } r^2 = 8R - 16$$

$$4V_S = V_K$$

$$4 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 4 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$4r^2 = R^3$$

$$4(8R - 16) = R^3,$$

$$\text{czyli } R = 2\sqrt{5} - 2 \text{ lub } R = 4$$

$$\text{Zatem pole przekroju jest}$$

$$\text{równe } 16\sqrt{5} - 2 \text{ lub } 16.$$

$$7. \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$8. x - \text{promień podstawy stożka}$$

$$l - \text{tworząca stożka}$$

$$r - \text{promień kuli wpisanej}$$

$$\text{w stożek}$$

$$R - \text{promień kuli opisanej na}$$

$$\text{stożku}$$

$$\frac{x}{l} = \sin \alpha, \text{ stąd } x = l \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{R}, \text{ stąd } R = \frac{l}{\cos \alpha}$$

$$\text{Pole przekroju osiowego}$$

$$\text{stożka: } \frac{1}{2}l^2 \sin 2\alpha$$

$$\text{Obliczamy pole przekroju, ko-}$$

$$\text{rzystając ze wzoru na pole}$$

$$\text{trójkąta wpisanego w okrąg.}$$

$$\frac{1}{2}(2l + 2x) \cdot r = rl(1 + \sin \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}l^2 \sin 2\alpha,$$

$$\text{stąd } r = \frac{l \sin 2\alpha}{2(1 + \sin \alpha)}$$

$$\text{Stosunek objętości kul:}$$

$$\frac{V_w}{V_o} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} =$$

$$= \left(\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^3$$

Komentarz

Równoważna odpowiedź:

$$8 \sin^3 \alpha (1 - \sin \alpha)^3$$

$$9. a) \frac{2}{3}\sqrt{3}x \quad b) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}x$$

$$10. \frac{24}{25}$$

$$11. \frac{H-R}{R}$$

Zestaw II

- D** 1. Wykaż, że jeżeli przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, to pole powierzchni bocznej tego stożka jest dwa razy większe od pola jego podstawy.
2. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o polu 32 cm^2 . Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego opisanego na tym stożku.
3. Oblicz objętość stożka wpisanego w graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego przekrój płaszczyzną zawierającą przekątne podstaw jest kwadratem o boku 5.
4. W stożek o promieniu podstawy 6 wpisano graniastosłup prawidłowy czworokątny. Przekątna graniastosłupa ma długość $2\sqrt{13}$, a pole jego podstawy jest równe 18. Oblicz objętość stożka.
5. Wysokość walca wpisanego w stożek o promieniu podstawy 4 cm jest dwa razy krótsza od wysokości tego stożka. Oblicz, jaką część objętości stożka stanowi objętość walca.
6. W kulę wpisano stożek o wysokości 4. Objętość stożka jest czterokrotnie mniejsza od objętości kuli. Oblicz pole przekroju osiowego stożka.
7. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w walec do objętości kuli opisanej na tym walec.
8. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 2α . Wyznacz stosunek objętości kuli wpisanej w ten stożek do objętości kuli na nim opisanej.
9. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość x , a krawędź boczna – $2x$. Wyznacz promień kuli:
a) opisanej na tym ostrosłupie, b) wpisanej w ten ostrosłup.
10. W kulę wpisano walec, którego promień podstawy stanowi 60% promienia kuli. Oblicz sinus kąta, pod którym ze środka kuli widać średnicę podstawy walca.
11. W kulę o promieniu R wpisano stożek o wysokości H , gdzie $H > R$. Wyznacz cosinus kąta rozwarcia stożka.
12. Promień podstawy stożka jest dwa razy dłuższy od promienia kuli wpisanej w ten stożek. Oblicz cosinus kąta rozwarcia stożka.

$$12. |BS| = \sqrt{4r^2 + |MS|^2}$$

Trójkąty MBS i NOS są podobne, więc $\frac{|NO|}{|OS|} = \frac{|MB|}{|BS|}$.

$$\frac{r}{|MS| - r} = \frac{2r}{\sqrt{4R^2 + |MS|^2}}$$

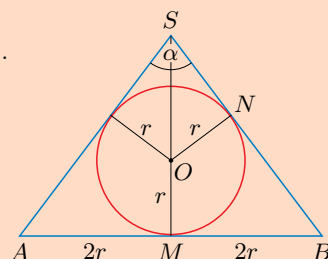
$$\sqrt{4r^2 + |MS|^2} = 2|MS| - 2r$$

$$|MS| = \frac{8}{3}r$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{8}{3}r - r} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{25}$$





W zadaniach ze stereometrii często kluczowe jest przeanalizowanie odpowiedniego przekroju danej bryły.

Przykład

W stożek o promieniu podstawy 2 i wysokości 6 wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny w następujący sposób: wierzchołek ostrosłupa jest środkiem podstawy stożka, a wierzchołki podstawy ostrosłupa należą do powierzchni bocznej stożka (rysunek obok). Oblicz największą możliwą objętość takiego ostrosłupa.

Rozpatrzmy przekrój osiowy stożka zawierający środkową podstawy ostrosłupa – odcinek AP .

Oznaczmy przez a krawędź podstawy ostrosłupa, a przez h jego wysokość (odcinek OO_1 na rysunkach). Wówczas:

$$|AO_1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trójkąty AO_1S i DOS są podobne, zatem:

$$\frac{|AO_1|}{|DO|} = \frac{|SO_1|}{|SO|}$$

czyli:

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6-h}{6}, \text{ gdzie } h \in (0; 6)$$

$$a\sqrt{3} = 6 - h$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}(6 - h)$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa jako funkcję zmiennej h :

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(6 - h) \right)^2 \cdot h = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} (36h - 12h^2 + h^3) \end{aligned}$$

gdzie $h \in (0; 6)$.

Obliczamy pochodną funkcji V :

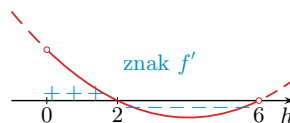
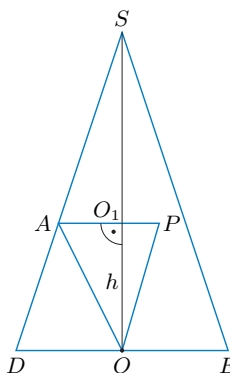
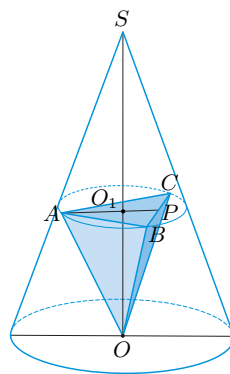
$$V'(h) = \frac{\sqrt{3}}{36} (36 - 24h + 3h^2) = \frac{\sqrt{3}}{12} (12 - 8h + h^2) = \frac{\sqrt{3}}{12} (6 - h)(2 - h)$$

$D_{V'} = (0; 6)$, więc $V'(h) = 0$ dla $h = 2$.

Funkcja V rośnie w przedziale $(0; 2)$ i maleje w przedziale $(2; 6)$, zatem dla $h = 2$ osiąga wartość największą:

$$V(2) = \frac{\sqrt{3}}{36} (36 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 8) = \frac{32\sqrt{3}}{36} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Odpowiedź: Największa objętość takiego ostrosłupa jest równa $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.





Odpowiedzi do zadań

1. $V_1 = \pi 6^2 \cdot 4 = 144\pi$

$V_2 = \pi 4^2 \cdot 6 = 96\pi$

$V_1 - V_2 = 48\pi$

2. $r = \frac{a}{2}, h = a$

$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h = \frac{3}{2}\pi a^2$

3. $r = 6$ oraz $l = 12$

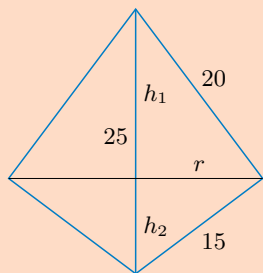
$P_b = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$

4. $2\pi r = \frac{1}{2}\pi r l$

$r = \frac{1}{2}l$

Zatem przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, więc kąt rozwarcia stożka wynosi 60° .

5.



Trójkąt jest prostokątny, czyli $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot r$.

Zatem $r = 12$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 =$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 25 = 1200\pi$

6. $r = 6, V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$

7. $R + r = 12$, stąd $R = 12 - r$

P – suma pól

$P = 4\pi R^2 + 4\pi r^2 =$

$= 4\pi(R^2 + r^2)$

$P(r) = 8\pi(r^2 - 12r + 72)$

$P'(r) = 8\pi(2r - 12)$

$P'(r) = 0$ dla $r = 6$

Najmniejsza suma pól:

$P(6) = 288\pi$

$P = 4\pi(R^2 + r^2) \leq$

$\leq 4\pi(R + r)^2 = 4\pi \cdot 12^2 =$

$= 576\pi$

Zatem $P \in (288\pi; 576\pi)$.

8. Długość boku pierwszego przekroju: $a = \frac{12}{3} = 4$

Długość boku drugiego przekroju: $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$,

czyli $b = 8$

Skala podobieństwa:

$k = \frac{b}{a} = 2$

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Różnica objętości brył powstałych przez obrót prostokąta o bokach 4 cm i 6 cm wokół krótszego i wokół dłuższego boku jest równa:

- A. $48\pi \text{ cm}^3$, B. $42\pi \text{ cm}^3$, C. $36\pi \text{ cm}^3$, D. $30\pi \text{ cm}^3$.

2. Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku a , jest równe:

- A. πa^2 , B. $\frac{3}{2}\pi a^2$, C. $2\pi a^2$, D. $\frac{5}{2}\pi a^2$.

3. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 12. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe:

- A. 144π , B. 72π , C. 36π , D. 24π .

4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę:

- A. 120° , B. 90° , C. 60° , D. 45° .

5. Trójkąt o bokach długości 15, 20 i 25 obracamy wokół najdłuższego boku i otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków o wspólnej podstawie. Objętość tej bryły jest równa:

- A. 1600π , B. 1200π , C. 1000π , D. 750π .

6. Koło o polu 36π obracamy wokół średnicy. Otrzymujemy wówczas bryłę o objętości:

- A. 288π , B. 240π , C. 144π , D. 120π .

7. Suma promieni dwóch kul jest równa 12. Wynika stąd, że suma pól powierzchni tych kul może być dowolną liczbą z przedziału:

- A. $(0; 240\pi)$, B. $(240\pi; 288\pi)$, C. $(288\pi; 576\pi)$, D. $(296\pi; 684\pi)$.

8. Dane są dwa stożki podobne. Przekrój osiowy pierwszego z nich jest trójkątem równobocznym o obwodzie 12, a przekrój osiowy drugiego ma pole $16\sqrt{3}$. Wynika stąd, że skala podobieństwa większego stożka do mniejszego jest równa:

- A. 2, B. $2\sqrt{3}$, C. 4, D. $4\sqrt{3}$.

9. Na kuli opisano stożek, którego pole powierzchni bocznej jest trzykrotnie większe od pola jego podstawy. Wynika stąd, że stosunek objętości stożka do objętości kuli jest równy:

- A. $\sqrt{2}:1$, B. $\sqrt{3}:1$, C. $2:1$, D. $3:1$.

9. R – promień podstawy stożka

H – wysokość stożka

l – tworząca stożka

r – promień kuli wpisanej w stożek

$\pi R l = 3\pi R^2$, stąd $l = 3R$

$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}R$

Pole przekroju osiowego stożka: $\frac{2R \cdot H}{2} = 2\sqrt{2}R^2$

Pole przekroju ze wzoru na trójkąt opisany na okręgu: $\frac{2R+2l}{2} \cdot r = 4Rr$

$4Rr = 2\sqrt{2}R^2$, stąd $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

Stosunek objętości: $\frac{V_S}{V_K} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^2 H}{4r^3} = \frac{2\sqrt{2}R^3}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^3} = \frac{2}{1}$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego walca do pola jego powierzchni bocznej.

Zadanie 2 (2 pkt)

Średnica podstawy stożka jest dwa razy krótsza od jego tworzącej. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

Zadanie 3 (2 pkt)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni jest równe sumie pól powierzchni dwóch kul o promieniach 3 cm i 6 cm.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Wnętrze szklanki ma kształt walca o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 8 cm. Oblicz, ile takich szklanek można napelnić po brzegi sokiem przechowywanym w dwóch prostopadłościennych kartonach o wymiarach $10 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$.

D Zadanie 6 (4 pkt)

Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej stożka stanowi więcej niż 50% jego pola powierzchni całkowitej.

Zadanie 7 (3 pkt)

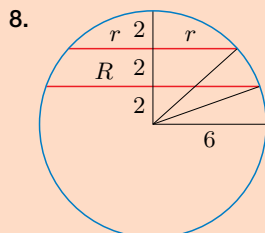
Oblicz objętość bryły, która powstała przez obrót trójkąta równobocznego o boku 12 cm wokół jednego z boków.

Zadanie 8 (3 pkt)

Kulę o promieniu 6 cm przecięto dwoma równoległymi płaszczyznami dzielącymi promień kuli na trzy równe odcinki. Oblicz sumę pól otrzymanych w ten sposób dwóch przekrojów.

Zadanie 9 (3 pkt)

Ostrosłup o wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i otrzymano dwa wielościany o równych objętościach. Oblicz, w jakiej odległości od wierzchołka ostrosłupa leży ta płaszczyzna.



$$R^2 = 6^2 - 2^2 = 32$$

$$r^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

$$P = \pi R^2 + \pi r^2 = 32\pi + 20\pi = 52\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

9. V_1, h_1 – objętość i wysokość stożka nad płaszczyzną

V – objętość całego stożka

$V_1 = \frac{1}{2}V$, czyli $\frac{V_1}{V} = 2 = k^3$, stąd skala podobieństwa stożków $k = \sqrt[3]{2}$.

Zatem $h_1 = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} = 4\sqrt[3]{4} \text{ [cm]}$.

Odpowiedzi do zadań

1. $h = 2r$

$$\frac{P_c}{P_b} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi r h}{2\pi r h} = \frac{6\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{3}{2}$$

2. $l = 4r$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = r\sqrt{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} = \frac{r\sqrt{15}}{r} = \sqrt{15}$$

3. $l = 2r = a$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}, \text{ czyli } a = 6,$$

stąd $l = 6$ oraz $r = 3$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = 3\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 9\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

4. $P = 4\pi \cdot 3^2 + 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 45 = 4\pi r^2$, czyli $r = 3\sqrt{5}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 180\sqrt{5}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

5. Objętość szklanki:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi \approx$$

$$\approx 226 \text{ [cm}^3\text{]}$$

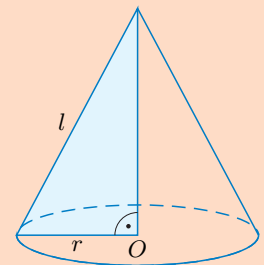
Objętość soku:

$$V_S = 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 15 = 2400 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\frac{2400}{226} \approx 10,6, \text{ czyli można}$$

napelnić 10 szklanek.

6.



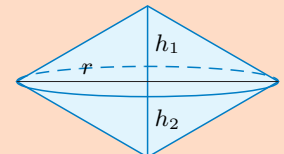
W dowolnym trójkącie prostokątnym przyprostokątna r jest krótsza od przeciwprostokątnej l .

$$P_c = \pi r l + \pi r^2 < \pi r l + \pi r l = 2\pi r l = 2P_b$$

$$2P_b > P_c, \text{ czyli } P_b > 0,5P_c$$

Zatem pole powierzchni bocznej stożka stanowi więcej niż 50% jego pola powierzchni całkowitej.

7.



$$r = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$h_1 + h_2 = 12$$

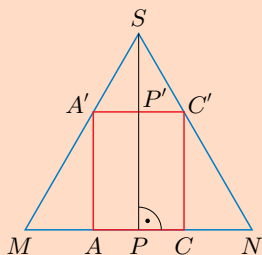
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = 432\pi \text{ cm}^3$$



Odpowiedzi do zadań

- $6^3 - (2\sqrt{3})^3 = 24(9 - \sqrt{3})$
- r – promień podstawy walca
 h – wysokość walca
 R – promień kuli opisanej na walcu
 $r = \frac{1}{4}h$
 $\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{16} = 32\pi$,
 czyli $h = 8$, stąd $r = 2$
 Przekątna przekroju osiowego walca:
 $\sqrt{(2r)^2 + h^2} = 4\sqrt{5} = 2R$,
 czyli $R = 2\sqrt{5}$
 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{160\sqrt{5}}{3}\pi$
- h – wysokość trapezu
 $\frac{h}{a} = \tan \alpha$, więc $h = a \tan \alpha$
 Korzystamy ze wzoru na objętość stożka ściętego (zad. 6, str. 153):
 $V = \frac{1}{3}\pi h((2a)^2 + 2a \cdot a + a^2) = \frac{7}{3}\pi a^3 \tan \alpha$
- $\frac{\sqrt{3}}{9}hr^2$



$$\frac{|MN|^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}, \text{ czyli } |MN| = 6, \text{ stąd } |SP| = 3\sqrt{3}$$

$a, 2a$ – długości krawędzi podstawy prostopadłościanu AC i $A'C'$ – przekątne podstaw prostopadłościanu, stąd:

$$|A'C'| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

$\triangle A'C'S$ jest równoboczny, stąd $|SP'| = \frac{a\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Wysokość prostopadłościanu:
 $h = |SP| - |SP'| =$
 $= 3\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{15}}{2}, a \in \left(0; \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$

Objętość prostopadłościanu:
 $V = 2a \cdot a \cdot h$
 $V(a) = 6\sqrt{3}a^2 - \sqrt{15}a^3$,
 $a \in \left(0; \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$
 $V'(a) = 12\sqrt{3}a - 3\sqrt{15}a^2$
 $V'(a) = 0$ dla $a = \frac{4\sqrt{5}}{5}$
 $V\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{5}$

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz różnicę objętości sześcianu opisanego na kuli o promieniu 3 i sześcianu wpisanego w tę kulę.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dany jest walec o objętości 32π . Średnica podstawy tego walca jest równa połowie jego wysokości. Oblicz objętość kuli opisanej na tym walcu.

Zadanie 3 (4 pkt)

Trapez prostokątny o podstawach a i $2a$ oraz kącie ostrym α obracamy wokół prostej zawierającej krótsze ramię trapezu. Wyznacz objętość otrzymanej bryły.

Zadanie 4 (6 pkt)

Oblicz, jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy trójkątny wpisany w stożek o promieniu podstawy r i wysokości h .

Uwaga. W stożek jest wpisany graniastosłup, gdy wierzchołki jego górnej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka, a dolna podstawa jest zawarta w podstawie stożka.

Zadanie 5 (6 pkt)

Stosunek długości krawędzi podstawy prostopadłościanu jest równy 2. Prostopadłościan ten jest wpisany w stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$. Oblicz największą objętość, jaką może mieć taki prostopadłościan.

Zadanie 6 (4 pkt)

Stożek o promieniu podstawy 3 i wysokości 4 przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe 4π . Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna ta podzieliła stożek.

Zadanie 7 (4 pkt)

Pole powierzchni bocznej stożka stanowi $\frac{2}{3}$ jego pola powierzchni całkowitej. Oblicz miarę kąta, który tworzy wysokość stożka z jego tworzącą.

Zadanie 8

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 24$.

Zadanie 8.1 (2 pkt)

Oblicz promień kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

Zadanie 8.2 (3 pkt)

Wybieramy losowo dwa wierzchołki tego prostopadłościanu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że są one końcami odcinka o długości większej od 25.

$$6. \frac{32}{9}\pi, \frac{76}{9}\pi$$

$$7. 30^\circ$$

$$8.1. \text{ Przekątna podstawy prostopadłościanu: } d_p = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\text{Przekątna prostopadłościanu: } d = \sqrt{d_p^2 + 24^2} = 26$$

$$\text{Promień kuli: } 13$$

$$8.2. A - \text{wybrane dwa wierzchołki są końcami przekątnej prostopadłościanu lub przekątnej większej ściany bocznej}$$

$$\overline{A} = 8$$

$$\overline{\Omega} = \binom{8}{2} = 28$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$