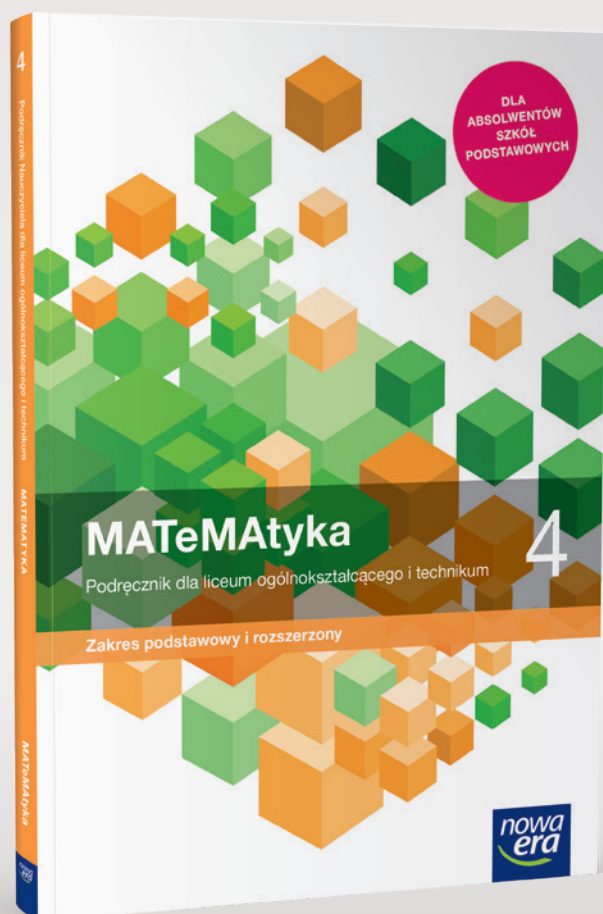


# Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy i rozszerzony



## Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

[dlanauczyciela.pl](http://dlanauczyciela.pl)

MATeMAtyka

# Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

**Zakres podstawowy i rozszerzony**

4



*Twoje mocne strony*

# MATeMATyka

*Podręcznik Nauczyciela 4* został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej *MATeMATyka 4* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (988/4/2022).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022  
ISBN 978-83-267-4494-5

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *MATeMATyka* dla klasy 4 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.  
© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022

**Autor komentarzy i rozwiązań zadań:** Barbara Jedynak.

**Redakcja merytoryczna:** Anna Drażek, Beata Zajac.

**Redakcja językowa:** Paulina Szulim.

**Nadzór artystyczny:** Kaia Pichler.

**Opieka graficzna:** Maciej Galiński, Marcin Oleksak.

**Projekt graficzny:** Klaudia Jarocka-Ciok.

**Projekt okładki:** Maciej Galiński.

**Rysunki:** Lech Chańko.

**Realizacja projektu graficznego:** Dorota Chańko.

**Opracowanie graficzne infografik:** Marcin Kołacz, Ewa Kaletyn, Klaudia Jarocka-Ciok.

**Realizacja projektu okładki:** Maciej Galiński.

**Zdjęcie na okładce:** Shutterstock/Click Bestsellers.

**Zdjęcia:** Archiwum Wydawnictwa s. 10; BE&W: Alamy Stock Photo - Classic Image s. 68, Independent Photo Agency Srl s. 193, Mary Evans Picture Library s. 181; East News: Museos Vaticanos-Estancia del Sello, Vaticano Photo: East News/Album s. 177; Getty Images: Corbis Sport/Tim Clayton – Corbis s. 66 (rzut monetą na meczu tenisa), Hulton Fine Art Collection/Mondadori Portfolio s. 43, iStock – Anton Aleksenko s. 85, del-sin s. 9, Getty Images Plus/Wega52 s. 66 (dłoń z monetą); Panthermedia: Patrick Guenette s. 73; Shutterstock: Akkaradet Bangchun s. 104, Sergey Nivens s. 150; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto – arnphoto s. 25, VvoeVale s. 54, Photos.com s. 39; Lech Chańko s. 11, 14, 127, 137, 154.

**Rysunki merytoryczne:** Marcin Adamski s. 130, 146, 147 (ćwiczenie 2, lewa strona), 148 (zadanie 1), 154 (zadanie 1), 155 (wszystkie z lewej strony), 159 (wszystkie z lewej strony), 160 (przykład 2, górny rysunek), 163 (wszystkie z lewej strony), 168 (zadania 3, 7); Andrzej Ożębło s. 144 (zadanie 9), 149, 161 (przykład 3, górny rysunek; przykład 4), 164, 165, 168 (zadania 9, 11), 170 (górny rysunek), 173 (górny rysunek); Lech Chańko – pozostałe.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.  
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa  
[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl), e-mail: [nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)  
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Wojciech Babiański  
Lech Chańko  
Joanna Czarnowska  
Jolanta Wesołowska

# MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

# 4

Zakres podstawowy i rozszerzony



*Twoje mocne strony*

# MATeMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

**dr. hab. Edwarda Tutaja, dr Moniki Fabijańczyk, prof. dr hab. Anny Cegieli.**

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

**Rok dopuszczenia: 2022**

**Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/4/2022**

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022  
ISBN 978-83-267-4399-3

**Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna:** Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

**Współpraca redakcyjna:** Urszula Cielniak, Marcin Minda

**Opracowanie odpowiedzi:** Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

**Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik:** Urszula Cielniak

**Konsultacje merytoryczne:** Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Renata Wolniewicz

**Redakcja językowa:** Paulina Szulim

**Korekta językowa:** Marta Zuchowicz

**Nadzór artystyczny:** Kaia Pichler

**Opieka graficzna:** Maciej Galiński

**Opracowanie graficzne:** Klaudia Jarocka-Ciok, Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz

**Projekt graficzny:** Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

**Projekt okładki:** Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

**Fotoedycja:** Katarzyna Iwan-Malawska

**Opracowanie graficzne infografik:** Klaudia Jarocka-Ciok

**Ilustracje na infografikach:** Laura Maziewska (diamenty, s. 104), zespół Kartografii NE (odwzorowania kartograficzne, s. 150)

**Realizacja projektu graficznego:** Dorota Chańko

**W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręcznika:**

MATeMATyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesółowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.  
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa  
[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl), e-mail: [nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)  
Centrum Kontakt: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

# Spis treści

## 1. Rachunek prawdopodobieństwa

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Reguła mnożenia .....                               | 10 |
| 1.2. Permutacje .....                                    | 14 |
| Permutacje z powtórzeniami – warto wiedzieć .....        | 18 |
| 1.3. Wariacje bez powtórzeń .....                        | 19 |
| 1.4. Wariacje z powtórzeniami .....                      | 22 |
| * 1.5. Kombinacje .....                                  | 25 |
| 1.6. Kombinatoryka – zadania .....                       | 30 |
| Dwójkowy system liczbowy – warto wiedzieć .....          | 35 |
| 1.7. Zdarzenia losowe .....                              | 36 |
| Częstość zdarzeń – warto wiedzieć .....                  | 39 |
| 1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne .....                  | 40 |
| 1.9. Własności prawdopodobieństwa .....                  | 44 |
| Rozkład prawdopodobieństwa – warto wiedzieć .....        | 49 |
| * 1.10. Prawdopodobieństwo warunkowe .....               | 50 |
| Zdarzenia niezależne – warto wiedzieć .....              | 54 |
| * 1.11. Prawdopodobieństwo całkowite .....               | 55 |
| * 1.12. Wzór Bayesa .....                                | 59 |
| * 1.13. Doświadczenia wieloetapowe .....                 | 62 |
| * 1.14. Schemat Bernoulliego .....                       | 67 |
| 1.15. Wartość oczekiwana zmiennej losowej .....          | 71 |
| 1.16. Zagadnienia uzupełniające .....                    | 75 |
| Zestawy powtórzeniowe .....                              | 77 |
| Sposób na zadanie .....                                  | 81 |
| Zadania testowe .....                                    | 82 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki .....              | 83 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym ..... | 84 |

## 2. Graniastosłupy i ostrosłupy

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni ..... | 86  |
| 2.2. Graniastosłupy .....                     | 91  |
| 2.3. Odcinki w graniastosłupach .....         | 94  |
| 2.4. Objętość graniastosłupa .....            | 97  |
| Graniastosłupy pochyłe – warto wiedzieć ..... | 100 |
| 2.5. Ostrosłupy .....                         | 101 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.6. Objętość ostrosłupa .....                                                 | 105 |
| * 2.7. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych .....                       | 109 |
| 2.8. Kąt między prostą a płaszczyzną .....                                     | 112 |
| 2.9. Kąt dwuścienny .....                                                      | 115 |
| 2.10. Przekroje prostopadłościanów .....                                       | 119 |
| Przekroje innych graniastosłupów – warto wiedzieć .....                        | 123 |
| * 2.11. Przekroje ostrosłupów .....                                            | 124 |
| 2.12. Zagadnienia uzupełniające .....                                          | 127 |
| Zestawy powtórzeniowe .....                                                    | 131 |
| Sposób na zadanie .....                                                        | 133 |
| Zadania testowe .....                                                          | 134 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki .....                                    | 135 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym .....                       | 136 |
| <br><b>3. Bryły obrotowe</b>                                                   |     |
| 3.1. Walec .....                                                               | 138 |
| 3.2. Stożek .....                                                              | 141 |
| Linie geodezyjne – warto wiedzieć .....                                        | 145 |
| 3.3. Kula .....                                                                | 146 |
| 3.4. Bryły podobne .....                                                       | 151 |
| Zasada Cavalieriego – warto wiedzieć .....                                     | 154 |
| * 3.5. Bryły opisane na kuli .....                                             | 155 |
| * 3.6. Bryły wpisane w kulę .....                                              | 159 |
| * 3.7. Inne bryły wpisane i opisane .....                                      | 163 |
| * 3.8. Zagadnienia optymalizacyjne .....                                       | 166 |
| 3.9. Zagadnienia uzupełniające .....                                           | 169 |
| Zestawy powtórzeniowe .....                                                    | 171 |
| Sposób na zadanie .....                                                        | 173 |
| Zadania testowe .....                                                          | 174 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki .....                                    | 175 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym .....                       | 176 |
| <br><b>4. Przykłady dowodów w matematyce</b>                                   |     |
| 4.1. Dowody w algebrze (1) .....                                               | 178 |
| Dowód nie wprost – warto wiedzieć .....                                        | 181 |
| 4.2. Dowody w algebrze (2) .....                                               | 182 |
| 4.3. Dowody w geometrii (1) .....                                              | 185 |
| 4.4. Dowody w geometrii (2) .....                                              | 189 |
| Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie – warto wiedzieć ..... | 192 |

## 5. Powtórzenie

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna .....        | 194 |
| 5.2. Funkcje .....                                     | 201 |
| 5.3. Funkcja liniowa i układy równań liniowych .....   | 206 |
| 5.4. Funkcja kwadratowa .....                          | 212 |
| 5.5. Wielomiany .....                                  | 221 |
| 5.6. Funkcje wymierne .....                            | 227 |
| 5.7. Funkcje trygonometryczne .....                    | 233 |
| 5.8. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna ..... | 241 |
| 5.9. Ciągi .....                                       | 246 |
| 5.10. Geometria analityczna .....                      | 257 |
| 5.11. Planimetria .....                                | 264 |
| 5.12. Stereometria .....                               | 276 |
| 5.13. Rachunek prawdopodobieństwa .....                | 282 |
| 5.14. Statystyka .....                                 | 291 |
| * 5.15. Rachunek różniczkowy .....                     | 297 |
| Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań .....                    | 306 |
| Indeks .....                                           | 341 |

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

\* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

**7.** Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

**D** Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.  
Oznaczenie lekcji w całości poświęconych dowodzeniu.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.





# 1 Rachunek prawdopodobieństwa

Początki rachunku prawdopodobieństwa są związane z grami losowymi, do których należy na przykład gra w kości, i chęcią poznania szansy wygranej.

W 1654 roku we Francji zapalony gracz w kości kawaler de Méré [czyt. de mere] zwrócił się do Blaise'a Pascala z prośbą o wyjaśnienie pewnych zagadnień związanych z grami hazardowymi. W celu rozwiązania tych zagadnień Pascal prowadził korespondencję z innym francuskim matematykiem – Pierre'em de Fermatem. Rok 1654 jest przyjmowany za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa.

## Multiteka

- Teoria chaosu
- Fale wyjątkowe
- Ubezpieczenie Titanica
- Paradoks urodzin
- Irracjonalne lęki
- Matematyka a wyścigi konne
- Problem Monty'ego Halla
- Roboty i wnioskowanie bayesowskie
- Złamanie kodu Enigmy
- Dylemat więźnia

### Uczeń:

- wypisuje wszystkie możliwe wyniki danego doświadczenia,
- stosuje regułę mnożenia do obliczania liczby wyników doświadczenia spełniających dany warunek,
- przedstawia drzewo ilustrujące zbiór wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia.

## 1.1. Reguła mnożenia

### Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech  $o$  oznacza otrzymanie orła, a  $r$  – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast  $O$  – orła, a  $R$  – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:

$$oO, oR, rO, rR$$



### Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

|     |     |     |     |     |     |                                                                                                                                                 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry.                                                                                 |
| 1 2 | 2 2 | 3 2 | 4 2 | 5 2 | 6 2 |                                                                                                                                                 |
| 1 3 | 2 3 | 3 3 | 4 3 | 5 3 | 6 3 | Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – uporządkowana para liczb. |
| 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4 | 5 4 | 6 4 |                                                                                                                                                 |
| 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5 | 6 5 |                                                                                                                                                 |
| 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6 |                                                                                                                                                 |

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

### Ćwiczenie 1

Pewien kod składa się z jednej litery alfabetu i następującej po niej jednej cyfry. Ile różnych kodów można utworzyć, jeżeli w każdym będzie występowała jedna z 26 liter: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z oraz jedna z 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

W takiej sytuacji, jak opisana w ćwiczeniu, zamiast wypisywać wszystkie możliwe pary tworzące kod, warto skorzystać z **reguły mnożenia**. Mówi ona, że jeśli zbiór  $A$  ma  $m$  elementów, a zbiór  $B$  ma  $n$  elementów, to liczba różnych par  $(x, y)$  takich, że  $x \in A$  oraz  $y \in B$ , jest równa  $m \cdot n$ .

**Uwaga.** Liczbę elementów zbioru  $A$  będziemy oznaczać  $\overline{A}$  (lub  $|A|$ ).

### Komentarz

Warto powiedzieć uczniom, że symbol  $\overline{A}$  często nazywany jest *liczebnością* lub *mocą* zbioru  $A$ .

### Ćwiczenie 1

$$26 \cdot 10 = 260$$

### Multiteka

- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.1

**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Przykład 3

Niech  $A$  będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby 15, a  $B$  – zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby 30. Ile jest par  $(x, y)$  takich, że  $x \in A$  i  $y \in B$ ?

$A = \{1, 3, 5, 15\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ , zatem  $\overline{A} = 4$ ,  $\overline{B} = 8$ .

Liczba opisanych par jest równa  $\overline{A} \cdot \overline{B} = 4 \cdot 8 = 32$ .

### Ćwiczenie 2

a) Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest dzielnikiem naturalnym liczby 12, a druga – dzielnikiem naturalnym liczby 28?

b) Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą naturalną mniejszą od 20 i podzielną przez 3, a druga – liczbą naturalną mniejszą od 30 i podzielną przez 4?

Regułę mnożenia można sformułować bardziej ogólnie.

### Reguła mnożenia

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu  $n$  decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na  $k_1$  sposobów, drugą – na  $k_2$  sposobów, ...,  $n$ -tą – na  $k_n$  sposobów, to takiego wyboru można dokonać na  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  sposobów.

### Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli w numerach tych mogą występować jedynie litery W, E oraz cyfry 1, 3, 8, 9?



Takich numerów może być:  $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$ .

### Ćwiczenie 3

Ile może być kodów mających na początku cztery litery, a następnie trzy cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli do utworzenia kodów wykorzystujemy:

- a) jedynie litery V, X, Y, Z oraz cyfry 1, 3, 5, 7, 9;
- b) jedynie litery A, B, C, D, E, F, G oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- c) 26 liter alfabetu oraz wszystkie cyfry?

### Ćwiczenie 3

- a)  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 32\,000$
- b)  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 518\,616$
- c)  $26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000$

### Ćwiczenie 2

a)  $A$  – zbiór naturalnych dzielników liczby 12

$B$  – zbiór naturalnych dzielników liczby 28

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ,  $\overline{A} = 6$

$B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ ,  $\overline{B} = 6$

$\overline{A} \cdot \overline{B} = 36$

b)  $A$  – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 20 i podzielnych przez 3

$B$  – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 30 i podzielnych przez 4

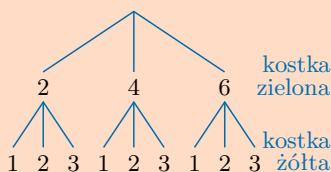
$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ ,  $\overline{A} = 7$

$B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ ,

$\overline{B} = 8$

$\overline{A} \cdot \overline{B} = 56$

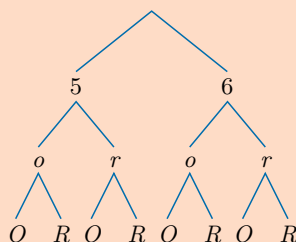
#### Ćwiczenie 4



Możliwych jest 9 wyników.

#### Ćwiczenie 5

Niech  $o$  oznacza otrzymanie orła, a  $r$  – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast  $O$  – orła, a  $R$  – reszki na monecie pięciozłotowej.



Możliwych jest 8 wyników.

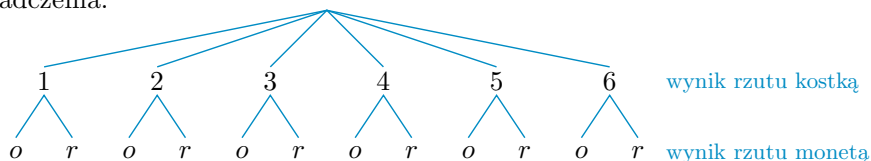
#### Przykład 5

Rzucono kostką i monetą. Wynikiem doświadczenia jest para  $(a, b)$ , gdzie  $a$  jest liczbą oczek na kostce, a  $b$  – orłem lub reszką. Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?

Zbiorem możliwych wyników rzutu kostką jest zbiór  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Zbiorem możliwych wyników rzutu monetą jest zbiór  $B = \{o, r\}$ , gdzie  $o$  oznacza wypadnięcie orła, a  $r$  – reszki.

$\overline{A} = 6$  oraz  $\overline{B} = 2$ , więc wszystkich możliwych wyników jest  $\overline{A} \cdot \overline{B} = 12$ .

Poniżej przedstawiamy drzewo ilustrujące wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



Wynikami tego doświadczenia są pary:  $(1, o)$ ,  $(1, r)$ ,  $(2, o)$ ,  $(2, r)$ ,  $(3, o)$ ,  $(3, r)$ ,  $(4, o)$ ,  $(4, r)$ ,  $(5, o)$ ,  $(5, r)$ ,  $(6, o)$ ,  $(6, r)$ .

#### Ćwiczenie 4

Rzucono dwiema kostkami: zieloną i żółtą. Na kostce zielonej otrzymano parzystą liczbę oczek, a na kostce żółtej – liczbę oczek mniejszą od 4. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

#### Ćwiczenie 5

Rzucono kostką oraz dwiema monetami: dwuzłotową i pięciozłotową. Na kostce wypadła liczba oczek nie mniejsza od 5. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

#### Zadania

1. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują dwie litery, a następnie dwie cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy litery A, B, C, D, E, F, G, H oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5?
2. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy litery A, B, C, D oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6?
3. Na ile sposobów może się ubrać pani, która ma trzy różne kapelusze, sześć sukni i cztery pary butów?

#### Odpowiedzi do zadań

1.  $8^2 \cdot 5^2 = 1600$
2.  $4^3 \cdot 6^4 = 82944$
3.  $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$

4. Rzucamy trzy razy kostką. Otrzymane liczby oczek zapisane kolejno tworzą liczbę trzycyfrową. Ile wśród możliwych wyników jest liczb parzystych, a ile – większych od 500?

5. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie:

- pierwsza cyfra jest nieparzysta, a pozostałe są parzyste,
- pierwsze dwie cyfry są parzyste, a pozostałe – nieparzyste?

6. Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie:

- cyfry pierwsza i ostatnia są takie same,
- pierwsze dwie cyfry są takie same i ostatnie dwie cyfry są takie same?

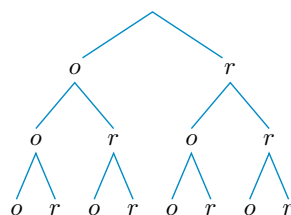
7. Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfra dziesiątek jest:

- o 4 większa od cyfry jedności,
- o 2 mniejsza od cyfry jedności.

**D** 8. a) Uzasadnij, że liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 jest mniej niż 200.  
b) Uzasadnij, że jest ponad 2000 liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których zapisie mogą występować cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5.

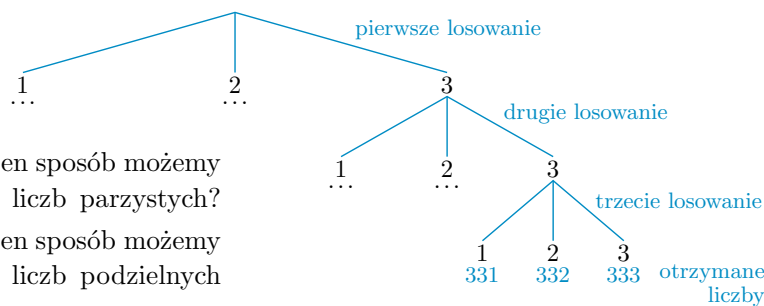
9. a) Zapisz możliwe wyniki doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą (drzewo przedstawione obok jest ilustracją graficzną tego doświadczenia).

b) Ile jest możliwych wyników pięciokrotnego, a ile – dziesięciokrotnego rzutu monetą?



10. W urnie znajdują się trzy kule oznaczone numerami 1, 2 i 3. Trzykrotnie wyciągamy kulę, zapisujemy jej numer i zwracamy ją do urny. Zapisane numery tworzą liczbę trzycyfrową.

a) Przerysuj poniższe drzewo do zeszytu i uzupełnij je tak, aby ilustrowało wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



b) Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb parzystych?

c) Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb podzielnych przez 6?

8. Korzystamy z reguły mnożenia.

a) Do ułożenia liczby trzycyfrowej podzielnej przez 5 potrzebne są trzy decyzje:

- decyzja (cyfra setek) – 9 możliwości: 1, 2, 3, ..., 9;
- decyzja (cyfra dziesiątek) – 10 możliwości: 0, 1, 2, ..., 9;
- decyzja (cyfra jedności) – 2 możliwości: 0, 5.

Zatem takich liczb jest:  $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180 < 200$ , co należało wykazać.

b) Do ułożenia liczby pięciocyfrowej podzielnej przez 5 potrzeba pięciu decyzji:

- decyzja (cyfra dziesiątek tysięcy) – 5 możliwości: 1, 2, 3, 4, 5;
3. i 4. decyzja (odpowiednio cyfra: tysięcy, setek i dziesiątek) – 6 możliwości: 0, 1, 2, 3, 4, 5;
- decyzja (cyfra jedności) – 2 możliwości: 0, 5.

Zatem takich liczb jest:  $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2160 > 2000$ , co należało wykazać.

4. Liczby parzyste:  $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ ,  
liczby większe od 500:  
 $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$

5. a)  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

b)  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

6. a)  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 90\,000$

b)  $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 9000$

7. a) Liczby dwucyfrowe, w których cyfra dziesiątek jest o 4 większa od cyfry jedności, to: 40, 51, 62, 73, 84, 95.

Zatem  $9 \cdot 10 \cdot 6 = 540$ .

b) Cyfra dziesiątek o 2 mniejsza od cyfry jedności: 02, 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79.

Zatem  $9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$ .

9. a) Wynikami tego doświadczenia są: (o, o, o), (o, o, r), (o, r, o), (o, r, r), (r, o, o), (r, o, r), (r, r, o), (r, r, r).

b) Pięciokrotny rzut:  $2^5 = 32$   
dziesięciokrotny rzut:  
 $2^{10} = 1024$

10. b) Na końcu musi być liczba 2, czyli trzecią liczbę można wybrać tylko na 1 sposób:  $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ .

c) Trzy liczby: 132, 222, 312

### Uczeń:

- wypisuje wszystkie możliwe permutacje danego zbioru,
- oblicza liczbę permutacji danego zbioru,
- wykonuje obliczenia, stosując definicję silni,
- wykorzystuje permutacje do rozwiązywania zadań.

## 1.2. Permutacje

### Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123      132      213      231      312      321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.

### Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 1234 | 2134 | 3124 | 4123 |
| 1243 | 2143 | 3142 | 4132 |
| 1324 | 2314 | 3214 | 4213 |
| 1342 | 2341 | 3241 | 4231 |
| 1423 | 2413 | 3412 | 4312 |
| 1432 | 2431 | 3421 | 4321 |

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy permutacjami.

### Definicja

Każdy  $n$ -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów  $n$ -elementowego zbioru  $A$  nazywamy **permutacją** tego zbioru.

### Ćwiczenie 1

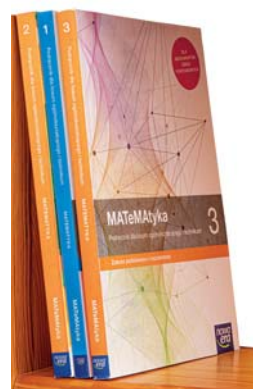
Wypisz wszystkie permutacje podanego zbioru.

- a)  $\{3, 5\}$                       b)  $\{3, 5, 7\}$                       c)  $\{3, 5, 7, 9\}$

Liczbę wszystkich permutacji zbioru  $n$ -elementowego oznaczamy przez  $P_n$ . Obliczamy ją, korzystając z reguły mnożenia.

### Ćwiczenie 1

- a) 35, 53  
b) 357, 375, 537, 573, 735, 753  
c) 3579, 3597, 3759, 3795, 3957, 3975, 5379, 5397, 5739, 5793, 5937, 5973, 7359, 7395, 7539, 7593, 7935, 7953, 9357, 9375, 9537, 9573, 9735, 9753



### Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy ją na pierwszym miejscu – możemy to zrobić na 5 sposobów. Następnie wybieramy jedną z czterech pozostałych książek i ustawiamy ją na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

### Definicja

Dla liczby naturalnej  $n > 1$  symbol  $n!$  [czyt.  $n$  silnia] oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do  $n$ :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Przyjmujemy również, że  $0! = 1$  i  $1! = 1$ .

### Ćwiczenie 2

Podaj liczbę, którą należy wstawić w miejsce  $?$ .

a)  $4! = 3! \cdot ?$       b)  $8! = 7! \cdot ?$       c)  $12! = 11! \cdot ?$

Zauważ, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość:

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

### Ćwiczenie 3

Uprość ułamek.

a)  $\frac{5!}{4!}$       c)  $\frac{8!}{10!}$       e)  $\frac{(n+1)!}{n!}$       g)  $\frac{(n+2)!}{n!}$   
b)  $\frac{7!}{5!}$       d)  $\frac{102!}{100!}$       f)  $\frac{(n-1)!}{n!}$       h)  $\frac{(n-2)!}{n!}$

|         |             |
|---------|-------------|
| $0! =$  | 1           |
| $1! =$  | 1           |
| $2! =$  | 2           |
| $3! =$  | 6           |
| $4! =$  | 24          |
| $5! =$  | 120         |
| $6! =$  | 720         |
| $7! =$  | 5 040       |
| $8! =$  | 40 320      |
| $9! =$  | 362 880     |
| $10! =$ | 3 628 800   |
| $11! =$ | 39 916 800  |
| $12! =$ | 479 001 600 |

### Twierdzenie

Wszystkich permutacji zbioru  $n$ -elementowego jest  $n!$ .

### Ćwiczenie 4

Ile jest wszystkich permutacji zbioru  $A$ , jeśli wiadomo, że:

a)  $\overline{\overline{A}} = 6$ ,      b)  $\overline{\overline{A}} = 7$ ,      c)  $\overline{\overline{A}} = 10$ ,      d)  $\overline{\overline{A}} = 12$ ?

### Ćwiczenie 3

a)  $\frac{5!}{4!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5$       e)  $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{n!} = n+1$   
b)  $\frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$       f)  $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{1}{n}$   
c)  $\frac{8!}{10!} = \frac{8!}{8! \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{90}$       g)  $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1)(n+2)}{n!} = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$   
d)  $\frac{102!}{100!} = \frac{100! \cdot 101 \cdot 102}{100!} = 10\,302$       h)  $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n^2-n}$

### Ćwiczenie 2

- a) 4  
b) 8  
c) 12

### Ćwiczenie 4

- a)  $6! = 720$   
b)  $7! = 5040$   
c)  $10! = 3\,628\,800$   
d)  $12! = 479\,001\,600$

## Odpowiedzi do zadań

1. a)  $5! = 120$   
b)  $6! = 720$
2. a)  $9! = 362\,880$   
b)  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920$
3. a)  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$   
b)  $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$
4. a)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! = 120$   
b)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 5! \cdot 3 = 360$
5. a)  $\overline{A} = 4$ , bo  $4! = 24$   
b)  $\overline{A} = 5$ , bo  $5! = 120$   
c)  $\overline{A} = 8$ , bo  $8! = 40\,320$   
d)  $\overline{A} = 10$ , bo  $10! = 3\,628\,800$
6. a)  $n! = 5040$  dla  $n = 7$   
b)  $720 = 6! - 6$  numerów nieparzystych  
11 lub 12 osób
7. a)  $4! = 24$   
b)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120$
8. a)  $7! = 5040$   
b)  $8! = 40\,320$

## Zadania

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56789?  
b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245768?
2. a) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?  
b) Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?
3. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.  
a) Ile jest takich liczb mniejszych od 50 000?  
b) Ile jest takich liczb większych od 30 000?
4. Z cyfr 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy liczby sześciocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Oblicz, ile można utworzyć takich liczb:  
a) podzielnych przez 5,                      b) parzystych.
5. Podaj liczbę elementów zbioru  $A$ , o którym wiadomo, że wszystkich możliwych jego permutacji jest:  
a) 24,                      b) 120,                      c) 40 320,                      d) 3 628 800.
6. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do  $n$ . Ile osób brało udział w zawodach, jeśli wiadomo, że numery startowe można było przydzielić na 5040 sposobów?  
b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do  $n$ . Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ile osób brało udział w zawodach?
7. Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby:  
a) w czterech jednoosobowych pokojach,  
b) w pięciu jednoosobowych pokojach?
8. a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby każda szuflada była zajęta?  
b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby tylko jedna szuflada była pusta?

9. a) Na ile sposobów można ustawić dziewięć osób w kolejce?  
 b) Na ile sposobów można ustawić czworo dziewcząt i pięciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na początku kolejki?  
 c) Na ile sposobów można ustawić troje dziewcząt i sześciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na końcu kolejki?

10. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{8!}{6!} & \text{d)} \frac{10!}{7! \cdot 3!} & \text{g)} \frac{5!}{4! + 5!} & \text{j)} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \\ \text{b)} \frac{19!}{21!} & \text{e)} \frac{9! \cdot 4!}{12!} & \text{h)} \frac{5! + 6!}{6! - 5!} & \text{k)} \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} \\ \text{c)} \frac{15!}{3! \cdot 13!} & \text{f)} \frac{100! \cdot 10!}{12! \cdot 98!} & \text{i)} \frac{(n-2)!}{(n-4)!} & \text{l)} \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} \end{array}$$

11. a) Liczba permutacji zbioru  $(n+1)$ -elementowego jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru  $n$ -elementowego. Oblicz  $n$ .  
 b) Liczba permutacji zbioru  $(n+3)$ -elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru  $n$ -elementowego. Oblicz  $n$ .

12. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (n+2)! = 90n! & \text{c)} \frac{(n+2)!}{n!} = 42 & \text{e)} \frac{(n-3)!(n+2)!}{n!(n-4)!} = 30 \\ \text{b)} 6!(n+1)! - 7! \cdot n! = 0 & \text{d)} \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 110 & \text{*f)} \frac{n!(2n-3)!}{(2n)!(n-1)!} = \frac{1}{12} \end{array}$$

**D** 13. a) Uzasadnij, że nierówność  $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 12$  spełniają tylko dwie liczby naturalne.

b) Uzasadnij, że nierówność  $\frac{(n+1)!(n-1)!}{(n!)^2} < n$  spełniają wszystkie liczby naturalne większe od 1.

**D** 14. Uzasadnij, że równość  $(n+1)! - n! = n \cdot n!$  jest spełniona przez każdą liczbę naturalną  $n$ . Korzystając z udowodnionego stwierdzenia, uzasadnij równość:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

15. Ile zer na końcu ma podana liczba?

$$\text{a)} 15! \quad \text{b)} 30! \quad \text{c)} 100!$$

16. Grupa  $n$  przedszkolaków zostawiła rano swoje czapki w szatni. Z powodu popołudniowego zamieszania każde dziecko wróciło do domu w nie swojej czapce. Na ile sposobów jest to możliwe, jeśli:

$$\text{a)} n = 3, \quad \text{b)} n = 4, \quad \text{*c)} n = 5?$$

$$\begin{aligned} 14. (n+1)! - n! &= n! \cdot (n+1) - n! = n!(n+1-1) = n! \cdot n \\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! &= \\ &= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + n! - (n-1)! + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

15. Zero na końcu iloczynu otrzymamy, gdy pomnożymy liczbę zakończoną cyfrą 5 przez liczbę parzystą lub gdy czynnikiem iloczynu jest liczba zakończona zerem.

$$\text{a)} 3 (2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15)$$

Iloczyn pozostałych liczb  $(3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14)$  nie kończy się zerem.

$$\text{b)} 7 (2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 30) \quad \text{c)} 24$$

16. Numerujemy dzieci i czapki.

a) Możliwe są dwa przypadki: 231 i 312.

b) Ciągi mogą zaczynać się od 2, 3 lub 4. Ciągi zaczynające się od 2: 2143, 2341, 2413. Zatem mamy  $3 \cdot 3 = 9$  permutacji. c) 44

$$9. \text{ a)} 9! = 362880$$

$$\text{b)} 4! \cdot 5! = 2880$$

$$\text{c)} 6! \cdot 3! = 4320$$

$$10. \text{ a)} \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$\text{b)} \frac{19!}{19! \cdot 20 \cdot 21} = \frac{1}{420}$$

$$\text{c)} \frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{6} = 35$$

$$\text{d)} \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$

$$\text{e)} \frac{9! \cdot 24}{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1}{55}$$

$$\text{f)} \frac{98! \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101}{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 98!} = 75$$

$$\text{g)} \frac{4! \cdot 5}{4!(1+5)} = \frac{5}{6}$$

$$\text{h)} \frac{5!(1+6)}{5!(6-1)} = \frac{7}{5}$$

$$\text{i)} \frac{(n-4)! \cdot (n-3)(n-2)}{(n-4)!} = n^2 - 5n + 6$$

$$\text{j)} \frac{(n-1)! \cdot n(n+1)}{(n-1)!} = n^2 + n$$

$$\text{k)} \frac{(n-1)!(n(n+1)-n)}{(n-1)!} = n^2$$

$$\text{l)} \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n \cdot n!} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$11. \text{ a)} (n+1)! - n! = 600$$

$$n!(n+1) - n! = 600$$

$$n! \cdot n = 600, n = 5$$

$$\text{b)} (n+3)! = 120n!$$

$$n!(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= 120n!$$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = 120$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120, n = 3$$

$$12. \text{ a)} n = 8 \quad \text{b)} n = 6 \quad \text{c)} n = 5$$

$$\text{d)} n = 8 \quad \text{e)} n = 4 \quad \text{f)} n = 2$$

$$13. \text{ a)} \frac{(n-3)! \cdot (n-2)(n-1)}{(n-3)!} < 12$$

$$\text{dla } n \geq 3 \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

$$(n-2)(n-1) < 12$$

$$n^2 - 3n - 10 < 0$$

$$n \in (-2; 5) \text{ i } n \geq 3, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Zatem } n = 3 \text{ lub } n = 4.$$

$$\text{b)} \frac{(n+1)!(n-1)!}{(n!)^2} =$$

$$\frac{n!(n+1)(n-1)!}{n!(n-1)n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

$$n \in \mathbb{N}_+$$

$$1 + \frac{1}{n} < 2 < n \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

$$n > 1$$

## Permutacje z powtórzeniami

### Przykład 1

a) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, K, R. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

Jest 12 możliwych słów:

AAKR AKAR AKRA KAAR KARA KRAA  
AARK ARAK ARKA RAAK RAKA RKA

b) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, T, T. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wypisz wszystkie możliwe słowa.

Jest 6 możliwych słów:

AATT ATAT ATTA TAAT TATA TTAA

Rozpatrzmy  $n$ -elementowy ciąg, którego wyrazy należą do zbioru:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

przy czym każdy z elementów  $a_1, a_2, \dots, a_k$  występuje jako wyraz ciągu odpowiednio  $n_1, n_2, \dots, n_k$  razy (czyli  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ).

Taki ciąg nazywamy  $n$ -elementową **permutacją z powtórzeniami** zbioru  $A$ .

Liczba takich permutacji jest równa  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ .

### Przykład 2

Niech  $m$  określa, ile liczb sześciocyfrowych możemy otrzymać, przestawiając cyfry liczby  $x$ .

a) Jeśli  $x = 112222$ , to  $m = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ .

b) Jeśli  $x = 112223$ , to  $m = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$ .

1. a)  $\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$

b)  $\frac{9!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 30\,240$

2. a)  $\frac{10!}{1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 16\,800$

b)  $\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 12\,600$

1. a) Ile siedmioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie BARBARA?

b) Ile dziewięcioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie KATAPULTA?

2. Ile dziesięciocyfrowych liczb możemy otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie:

a) 1 222 333 444,

b) 9 989 879 876?

## 1.3. Wariacje bez powtórzeń

### Przykład 1

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?



Na pierwszym miejscu kodu możemy wpisać jedną z ośmiu liter, na drugim – jedną z pozostałych siedmiu, a na trzecim – jedną z pozostałych sześciu. Zatem jest  $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  kodów.

### Przykład 2

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród 26 liter alfabetu, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Takich kodów jest  $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ .

### Ćwiczenie 1

- Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których mogą wystąpić litery A, B, C, D, E, F i żadna litera się nie powtarza?
- Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których może wystąpić każda z 26 liter alfabetu i żadna litera się nie powtarza?

Opisane wyżej ciągi liter tworzące kody to przykłady wariacji bez powtórzeń.

### Definicja

Każdy  $k$ -wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów  $n$ -elementowego zbioru  $A$ , gdzie  $k \leq n$ , nazywamy  $k$ -elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru  $A$ .

Zauważmy, że każda  $n$ -elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego jest permutacją.

Aby obliczyć liczbę  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego, korzystamy z reguły mnożenia.

### D Ćwiczenie 2

Dany jest dziesięcioelementowy zbiór  $A$ . Uzasadnij, że:

- 4-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $A$  jest  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ ,
- $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $A$  jest:

$$10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (10 - (k - 1)), \text{ gdzie } k = 1, 2, \dots, 10$$

### Ćwiczenie 2

- Pierwszy element możemy wybrać na 10 sposobów, drugi – na 9, trzeci – na 8, a czwarty – na 7. Otrzymujemy więc:  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$  wariacji bez powtórzeń.
- Pierwszy element wybieramy spośród 10, drugi spośród pozostałych 9, trzeci z 8 i tak kolejno aż do  $k$ -tego elementu, który wybieramy spośród  $10 - (k - 1)$ . Mamy zatem:  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (10 - (k - 1))$  wariacji bez powtórzeń.

### Uczeń:

- oblicza liczbę wariacji bez powtórzeń,
- stosuje regułę dodawania do obliczania liczby wyników spełniających dany warunek,
- wykorzystuje wariacje bez powtórzeń do rozwiązywania zadań.

### Ćwiczenie 1

- $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358800$

## Twierdzenie

Jeśli  $k \leq n$ , to wszystkich  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego jest:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Uwaga.** Jeśli liczbę wszystkich  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego oznaczymy przez  $V_n^k$ , to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{dla } k \leq n$$

### Ćwiczenie 3

Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i cyfry się nie powtarzają? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?

### Przykład 3

Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i żadna z nich się nie powtarza?

Liczba jest podzielna przez 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.

Niech  $A$  będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 0.

□ □ □ □ 0

Wówczas  $\overline{A}$  jest równa liczbie czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

$$\text{Zatem } \overline{A} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360.$$

Niech  $B$  będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 5.

□ □ □ □ 5

Zwróćmy uwagę, że pierwszą cyfrę liczby wybieramy ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ , więc  $\overline{B} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ .

$$\text{Zatem } \overline{A} + \overline{B} = 360 + 300 = 660.$$

W powyższym przykładzie zastosowaliśmy **regułę dodawania**. Mówi ona, że jeśli zbiory  $A$  i  $B$  są rozłączne, to liczba elementów zbioru  $A \cup B$  jest równa sumie liczby elementów zbioru  $A$  i liczby elementów zbioru  $B$ :  $\overline{A \cup B} = \overline{A} + \overline{B}$ . Regułę dodawania można sformułować bardziej ogólnie.

## Reguła dodawania

Jeśli zbiory  $A_1, A_2, \dots, A_n$  są parami rozłączne, to:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}$$

### Ćwiczenie 3

$$\text{Trzycyfrowe: } V_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

$$\text{Czterocyfrowe: } V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$$

## Ćwiczenie 4

Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 i żadna z nich się nie powtarza?

## Zadania

1. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7, 9 i żadna z nich się nie powtarza? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?
2. a) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 71, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała i które nie będą zawierały cyfry 0?  
b) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?
3. Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:  
a) na innym piętrze,  
b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?
4. Ile jest liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, jeśli pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe są nieparzyste?
5. Ile jest liczb parzystych sześciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb występują cyfry:  
a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,                      b) 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9?
6. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb nie występuje cyfra 0. Ile spośród tych liczb jest takich, że cyfry parzyste nie sąsiadują ze sobą i cyfry nieparzyste nie sąsiadują ze sobą?
7. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych podzielnych przez 25 o niepowtarzających się cyfrach.
8. Oblicz.  
a)  $V_7^3$                   b)  $V_7^6$                   c)  $V_8^2$                   d)  $V_8^4$                   e)  $V_n^1$                   f)  $V_n^n$

**9.** Dany jest zbiór  $n$ -elementowy. Uzasadnij, że:

- liczba  $(n - 1)$ -elementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru jest równa liczbie jego permutacji,
- liczba 2-elementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru jest parzysta.

7. Liczba jest podzielna przez 25, jeśli jej dwie ostatnie cyfry należą do zbioru  $\{00, 25, 50, 75\}$ . Cyfry nie mogą się powtarzać, stąd rozpatrujemy tylko 3 przypadki  $\{25, 50, 75\}$ .

$A$  – ostatnie dwie cyfry to 50

$$\overline{\overline{A}} = V_8^5 = 6720$$

$B$  – ostatnie dwie cyfry to 25 lub 75

$$\overline{\overline{B}} = (7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 2 = 11\,760$$

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 18\,480$$

- 9. a)**  $V_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n!$

$$\text{b) } V_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{(n-2)!} = (n-1) \cdot n$$

Jest to iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych, stąd jedna z tych liczb jest liczbą parzystą. Zatem cały iloczyn jest również parzysty.

## Ćwiczenie 4

$A$  – zbiór liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 0

$$\overline{\overline{A}} = V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

$B$  – zbiór liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 2 lub 4.

$$\overline{\overline{B}} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 200$$

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 320$$

## Odpowiedzi do zadań

1. Trzycyfrowe:  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ ,  
czterocyfrowe:  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
2. a)  $9! = 362880$  b)  $V_7^4 = 840$
3. a)  $V_{10}^4 = 5040$  b)  $V_7^4 = 840$
4.  $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 480$
5. a)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 360$   
b)  $A$  – ostatnią cyfrą jest 0.  
 $\overline{\overline{A}} = V_6^5 = 720$   
 $B$  – ostatnią cyfrą jest 2.  
 $\overline{\overline{B}} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$   
 $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 1320$
6. Liczby siedmiocyfrowe:  
 $V_9^7 = 181440$   
 $A$  – liczba zaczyna się od cyfry parzystej  
 $\overline{\overline{A}} = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 1440$   
 $B$  – liczba zaczyna się od cyfry nieparzystej  
 $\overline{\overline{B}} = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2880$   
 $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 4320$
8. a)  $\frac{7!}{(7-3)!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$   
b)  $\frac{7!}{(7-6)!} = 7! = 5040$   
c)  $\frac{8!}{(8-2)!} = 7 \cdot 8 = 56$   
d)  $\frac{8!}{(8-4)!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$   
e)  $\frac{n!}{(n-1)!} = n$   
f)  $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$

#### Uczeń:

- oblicza liczbę wariacji z powtórzeniami,
- wykorzystuje wariacje z powtórzeniami do rozwiązywania zadań.

#### Ćwiczenie 1

- a)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$   
b)  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$

## 1.4. Wariacje z powtórzeniami

### Przykład 1

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

Każdą z trzech cyfr możemy wybrać na dwa sposoby, zatem jest  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  takich liczb.

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 121 | 211 | 221 |
| 112 | 122 | 212 | 222 |

Jest 8 liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2.

### Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Jest  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  takich liczb.

### Ćwiczenie 1

- a) Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?  
b) Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Opisane wyżej ciągi cyfr tworzące liczby to przykłady wariacji z powtórzeniami.

### Definicja

Każdy  $k$ -wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru  $A$  nazywamy  $k$ -elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru  $A$ .

**Uwaga.** W wariacji z powtórzeniami wyrazy mogą się powtarzać.

### Przykład 3

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać?



Można utworzyć  $8^5 = 32\,768$  takich kodów.

### Ćwiczenie 2

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z 26 liter alfabetu, jeśli litery mogą się powtarzać?

### Ćwiczenie 2

$$26^5 = 11\,881\,376$$

## Twierdzenie

Wszystkich  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego jest  $n^k$ .

**Uwaga.** Jeśli liczbę wszystkich  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego oznaczmy przez  $W_n^k$ , to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$W_n^k = n^k$$

## Ćwiczenie 3

- a) Ile jest wszystkich dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dziesięcioelementowego?  
b) Ile jest wszystkich dziesięcioelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego?

## Zadania

- Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie ma:  
a) cyfry 0,      b) cyfr 0 i 4,      c) cyfr 0, 4 i 5,      d) cyfr 4 i 5?
- Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:  
a) zaczynających się od 12,      b) których ostatnią cyfrą jest 7?
- Która z liczb jest większa:  
a) liczba dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzelementowego czy liczba trzelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego,  
b) liczba trzelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru czteroelementowego czy liczba czteroelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzelementowego?
-  4. Z urny, w której znajdują się kule z numerami 4, 5, 6, 7, 8, 9, losujemy kolejno cztery kule. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Uzasadnij, że przy losowaniu ze zwracaniem możliwych do otrzymania liczb jest ponad trzykrotnie więcej niż przy losowaniu bez zwracania.  
**Uwaga.** Losowanie polega na wyciąganiu przedmiotów (np. losów, kul, żetonów) w sposób, który wyklucza wpływ osoby losującej na otrzymany wynik.
- a) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?  
b) Do 9 szuflad wrzucamy 3 kule (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?

## Ćwiczenie 3

- a)  $W_{10}^2 = 10^2 = 100$   
b)  $W_2^{10} = 2^{10} = 1024$

## Odpowiedzi do zadań

- a)  $W_9^3 = 9^3 = 729$   
b)  $W_8^3 = 8^3 = 512$   
c)  $W_7^3 = 7^3 = 343$   
d)  $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$
- a)  $W_{10}^3 = 10^3 = 1000$   
b)  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 9000$
- a)  $W_3^2 = 9$ ,  $W_2^3 = 8$ ,  
czyli  $W_3^2 > W_2^3$   
b)  $W_4^3 = 64$ ,  $W_3^4 = 81$ ,  
czyli  $W_4^3 < W_3^4$
- Losowanie ze zwracaniem:  
 $W_6^4 = 6^4$ ,  
losowanie bez zwracania:  
 $V_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$   
 $\frac{W_6^4}{V_6^4} = \frac{6^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{36}{10} = 3,6 > 3$ ,  
co należało wykazać.
- a)  $3^9 = 19683$   
b)  $9^3 = 729$

6. a)  $10^6 = 1\,000\,000$   
b)  $6^{10} = 60\,466\,176$
7.  $m = 4^5 = 1024$   
 $n = 5^4 = 625$   
 $m - n = 1024 - 625 = 399 < 400$ ,  
co należało wykazać.
8. a)  $2^5 = 32$   
b)  $2^{11} = 2048$   
c)  $2^n$
9. a)  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4 = 162$   
b)  $2 \cdot 3^{10} = 118\,098$   
c)  $2 \cdot 3^{n-1}$
11. a)  $3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 = 38\,000$   
b)  $4 \cdot 10^4 + 1 \cdot 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^2 - 1 = 43\,299$   
c)  $5^5 = 3125$   
d)  $9 \cdot 10^4 - 3125 = 86\,875$
12. Pięciocyfrowe:  
 $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$   
Sześciocyfrowe:  
 $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 900$   
Jest ich tyle samo.
13.  $n$  szuflad:  $n^3$  sposobów  
 $n + 1$  szuflad:  $(n + 1)^3$  sposobów  
 $(n + 1)^3 - n^3 = 331, n \in \mathbb{N}$   
 $n = 10$
14. a)  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$   
b)  $810\,000 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ , liczba naturalnych dzielników:  
 $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
15. Każdy z sędziów może wystawić jeden z 41 wyników:  $0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \dots, 19, 19\frac{1}{2}, 20$ , czyli 5 sędziów może przyznać notę: na  $41^5 = 115\,856\,201$  sposobów.

6. a) Na ile sposobów 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na dziesięciu piętrach?  
b) Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na sześciu piętrach?

- D** 7. Niech  $m$  będzie liczbą sposobów, na które 5 pasażerów może wysiąść z pociągu na czterech stacjach, a  $n$  – liczbą sposobów, na które 4 pasażerów może wysiąść z pociągu na pięciu stacjach. Uzasadnij, że  $m - n < 400$ .
8. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 i 1 i które mają co najwyżej: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c)  $n$  cyfr?
9. Ile jest wszystkich liczb, które są zapisane tylko za pomocą cyfr 0, 1, 2 oraz mają: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c)  $n$  cyfr?
10. Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:
- a) większych od 6000, c) podzielnych przez 25,  
b) większych od 3500, d) podzielnych przez 4?
11. Oblicz, ile jest liczb pięciocyfrowych:
- a) mniejszych od 48 000, c) o nieparzystym iloczynie cyfr,  
b) większych od 56 700, d) o parzystym iloczynie cyfr.

Liczby palindromiczne to liczby, które czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej są takie same, np. 12321, 44444 lub 345543.

12. Czy liczb palindromicznych sześciocyfrowych jest więcej niż pięciocyfrowych? Odpowiedź uzasadnij.
13. Liczba sposobów rozmieszczenia 3 kul, każdej w innym kolorze, w  $n$  ponumerowanych szufladach jest o 331 mniejsza od liczby sposobów rozmieszczenia tych kul w  $n + 1$  ponumerowanych szufladach. Oblicz  $n$ .
14. Ile dzielników naturalnych ma liczba  $x$ ?
- a)  $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$  b)  $x = 810\,000$
15. Nota za styl skoku narciarskiego wynosi od 0 do 20 punktów i może być przyznawana co pół punktu. Na ile sposobów pięciu sędziów może przyznać notę za styl?

10. a) Na pierwszym miejscu musi być szóstka, pozostałe cyfry są dowolne.  
 $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$   
b) Mamy dwie możliwości:  
1) w pierwszym rzucie wypadnie 3, w drugim 5 lub 6, pozostałe cyfry są dowolne;  
2) w pierwszym rzucie wypadnie 4, 5 lub 6, pozostałe cyfry są dowolne.  
 $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 720$   
c) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie muszą tworzyć liczbę 25.  
 $6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 36$   
d) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie tworzą jedną z liczb: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64.  
 $6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$

## \*1.5. Kombinacje

### Przykład 1

W turnieju szachowym brało udział pięcioro zawodników. Ile partii rozegrano, jeśli każdy uczestnik rozegrał jedną partię z każdym z pozostałych?

Oznaczmy uczestników numerami:

1, 2, 3, 4 i 5

Rozegranych partii jest tyle samo co dwuelementowych podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Jest dziesięć takich podzbiorów, zatem rozegrano dziesięć partii:

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$

Każdy taki podzbiór nazywamy dwuelementową kombinacją zbioru pięcioelementowego. Zwróć uwagę, że przy podawaniu elementów kombinacji nie jest ważna kolejność, w jakiej są one wymieniane.

### Definicja

Każdy  $k$ -elementowy podzbiór zbioru  $n$ -elementowego  $A$ , gdzie  $0 \leq k \leq n$ , nazywamy  $k$ -elementową **kombinacją** zbioru  $A$ .

### Przykład 2

W tabeli podano 1-, 2-, 3- i 4-elementowe kombinacje zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

Zauważmy, że kombinacją 0-elementową jest zbiór pusty.

|                             |                                                              |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Kombinacje jednoelementowe  | $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$                                 |
| Kombinacje dwuelementowe    | $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ |
| Kombinacje trzejelementowe  | $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$         |
| Kombinacja czteroelementowa | $\{1, 2, 3, 4\}$                                             |

### Ćwiczenie 1

Dany jest zbiór  $\{x, y, z\}$ . Podaj wszystkie jego  $k$ -elementowe kombinacje dla  $k = 1, 2, 3$ .

### Ćwiczenie 2

Podaj wszystkie 2- i 5-elementowe kombinacje zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

### Ćwiczenie 2

2-elementowe:  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$

5-elementowe:  $\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$



### Uczeń:

- oblicza wartość symbolu Newtona  $\binom{n}{k}$ , gdzie  $n \geq k$ ,
- oblicza liczbę kombinacji,
- wypisuje wszystkie  $k$ -elementowe kombinacje danego zbioru  $n$ -elementowego, np. dla  $k = 4, n = 5$ ,
- wykorzystuje kombinacje do rozwiązywania zadań,
- stosuje własności trójkąta Pascala,
- wykorzystuje wzór dwumianowy Newtona do rozwinięcia wyrażeń postaci  $(a + b)^n$  i wyznaczenia współczynników wielomianów,
- uzasadnia zależności, w których występuje symbol Newtona, w tym twierdzenie: jeśli  $0 < k < n$ , to:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

oraz wzory skróconego mnożenia na  $a^n \pm b^n$  i wniosek:  $a - b \mid a^n - b^n$  dla  $a, b \in \mathbf{Z}$ .

### Ćwiczenie 1

$k = 1$ :  $\{x\}, \{y\}, \{z\}$

$k = 2$ :  $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$

$k = 3$ :  $\{x, y, z\}$

Jeżeli  $k \leq n$ , to wszystkich  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego jest:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Uwaga.** Jeśli liczbę wszystkich  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego ( $k \leq n$ ) oznaczymy przez  $C_n^k$ , to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Dowód.** Każde  $k$  wybranych elementów można ustawić w ciąg na  $k!$  sposobów. Każdy taki ciąg jest  $k$ -elementową wariacją bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego. Zatem:

$$C_n^k \cdot k! = V_n^k$$

czyli  $C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ , skąd otrzymujemy:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Uwaga.** Liczbę wszystkich  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego oznacza się też symbolem  $\binom{n}{k}$  [czytaj:  $n$  nad  $k$ ], zwanym **symbolem Newtona**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### Ćwiczenie 3

a)  $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1$

$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$

b)  $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = 1$

$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$

$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!0!} = 1$

### Ćwiczenie 3

Oblicz.

a)  $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$

b)  $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$

### D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że:

a)  $\binom{n}{0} = 1,$

b)  $\binom{n}{1} = n,$

c)  $\binom{n}{n-1} = n,$

d)  $\binom{n}{n} = 1.$

### D Ćwiczenie 5

Wykaż, że  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego jest tyle samo co  $(n-k)$ -elementowych kombinacji tego zbioru.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### Przykład 3

Na ile sposobów można wybrać spośród 8 osób trzyosobową delegację?

Delegację składającą się z trzech osób można wybrać na:

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56 \text{ sposobów}$$

### Ćwiczenie 6

#### Ćwiczenie 6

Delegacja trzyosobowa:

$$C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

Delegacja czteroosobowa:

$$C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

### Ćwiczenie 4

a)  $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$

b)  $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{1 \cdot (n-1)!} = n$

c)  $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)! \cdot 1} = n$

d)  $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$

### Ćwiczenie 5

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

## Wzór dwumianowy Newtona

Wyrażenie przedstawiające rozwinięcie  $(a + b)^n$ , dla  $n = 1, 2, \dots$ , możemy znaleźć, korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona:

### Twierdzenie

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Na przykład:

$$\begin{aligned}(a + b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 = \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Jeśli do powyższego wzoru zamiast  $b$  podstawimy  $-b$ , to otrzymamy:

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

### Ćwiczenie 7

Uzasadnij, że dla  $n$ :

- a) parzystego:  $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots - \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$ ,  
b) nieparzystego:  $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} - \binom{n}{n}b^n$ .

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu wyrażenia  $(a + b)^n$  możemy znaleźć w kolejnych wierszach trójkąta Pascala. Liczba znajdująca się w  $n$ -tym wierszu na  $k$ -tej pozycji (gdzie  $k = 0, 1, \dots, n$ ) jest równa  $\binom{n}{k}$ .

Na przykład wiersz siódmy to kolejno:

|         |                     |
|---------|---------------------|
| $n = 0$ | 1                   |
| $n = 1$ | 1 1                 |
| $n = 2$ | 1 2 1               |
| $n = 3$ | 1 3 3 1             |
| $n = 4$ | 1 4 6 4 1           |
| $n = 5$ | 1 5 10 10 5 1       |
| $n = 6$ | 1 6 15 20 15 6 1    |
| $n = 7$ | 1 7 21 35 35 21 7 1 |

$$\binom{7}{0} = 1, \binom{7}{1} = 7, \binom{7}{2} = 21, \binom{7}{3} = 35, \binom{7}{4} = 35, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{6} = 7, \binom{7}{7} = 1$$

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynekami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. dla  $n = 7$  mamy:  $7 = 1 + 6$ ,  $21 = 6 + 15$ ,  $35 = 15 + 20$ ).

### Ćwiczenie 8

Udowodnij wzór podany obok.

$$\text{Dla } k < n \text{ mamy: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

### Ćwiczenie 9

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, wyznac rozwinięcie:

- a)  $(a + b)^6$ , b)  $(a - b)^6$ , c)  $(a + b)^8$ , d)  $(a - b)^8$ .

### Ćwiczenie 7

$$(a - b)^n = (a + (-b))^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b) + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a(-b)^{n-1} + \binom{n}{n}(-b)^n$$

Zauważmy, że  $(-b)^n = \begin{cases} b^n & \text{dla parzystego } n \\ -b^n & \text{dla nieparzystego } n \end{cases}$

a) Dla  $n$  parzystego:

$$(a - b)^n = (a + (-b))^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \dots - \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

b) Dla  $n$  nieparzystego:

$$(a - b)^n = (a + (-b))^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} - \binom{n}{n}b^n$$

### Ćwiczenie 8

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} = \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

### Ćwiczenie 9

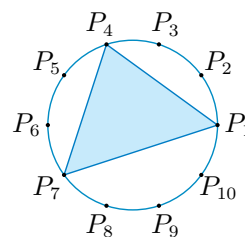
- a)  $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$   
b)  $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$   
c)  $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$   
d)  $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

## Odpowiedzi do zadań

- a) 56 b) 28 c) 45 d) 120  
e) 165 f) 165 g) 12 h) 220  
i) 1 j) 1 k) 5050 l) 5151
- 2-elementowe:  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$   
3-elementowe:  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$
  - $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$
- $C_{12}^2 = \binom{12}{2} = 66$
  - $C_{12}^4 = \binom{12}{4} = 495$
- $C_8^2 \cdot C_{10}^2 = \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{2} = 28 \cdot 45 = 1260$
  - $C_8^1 \cdot C_{10}^3 = \binom{8}{1} \cdot \binom{10}{3} = 8 \cdot 120 = 960$
- $C_6^4 = \binom{6}{4} = 15$
  - $C_8^6 C_{10}^9 = \binom{8}{6} \cdot \binom{10}{9} = 280$
- $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$
  - $n$  – liczba uczestników, gdzie  $n \in \mathbf{N}$  oraz  $n \geq 2$   
 $\binom{n}{2} = 55$   
 $\frac{n!}{2!(n-2)!} = 55$   
 $(n-1)n = 110$   
 $n = 11$
- $\binom{n}{2} = 66$ , gdzie  $n \in \mathbf{N}$  oraz  $n > 2$   
 $\frac{(n-1)n}{2} = 66$   
 $(n-1)n = 11 \cdot 12$   
 $n = 12$   
miara kąta wewnętrznego 12-kąta foremnego:  
 $\frac{(12-2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$

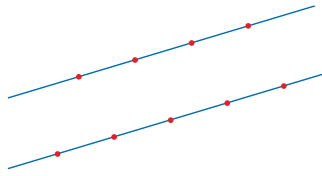
## Zadania

- Oblicz.
  - $\binom{8}{5}$
  - $\binom{10}{2}$
  - $\binom{11}{3}$
  - $\binom{12}{1}$
  - $\binom{100}{0}$
  - $\binom{101}{99}$
  - $\binom{8}{6}$
  - $\binom{10}{7}$
  - $\binom{11}{8}$
  - $\binom{12}{9}$
  - $\binom{100}{100}$
  - $\binom{102}{2}$
- Wypisz wszystkie 2- i 3-elementowe kombinacje zbioru  $\{a, b, c, d\}$ .
  - Wypisz wszystkie 4-elementowe kombinacje zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- W szufladzie znajduje się 12 krawatów. Na ile sposobów możemy wyciągnąć spośród nich:
  - dwa krawaty,
  - cztery krawaty?
- Klasa liczy 18 osób, w tym 10 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację, w której skład wejdą:
  - dwaj chłopcy i dwoje dziewcząt,
  - jeden chłopiec i troje dziewcząt?
- Podczas egzaminu student losuje 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?
  - Część A egzaminu zawiera 8 pytań, część B – 10 pytań. Student losuje 6 pytań z części A i 9 z części B. Na ile sposobów może to zrobić?
- Spotkało się dziesięcioro znajomych i każdy z każdym przywitał się uściskiem dłoni. Ile było powitań?
  - W turnieju szachowym rozegrano 55 partii. Ilu było uczestników, jeśli każdy uczestnik rozegrał jedną partię z każdym z pozostałych?
- Jeśli przez każde dwa wierzchołki  $n$ -kąta foremnego poprowadzimy prostą, to otrzymamy 66 różnych prostych. Wyznacz miarę kąta wewnętrznego tego  $n$ -kąta.
- Ile trójkątów można utworzyć, łącząc trzy punkty wybrane spośród rozmieszczonych na okręgu punktów  $P_1, P_2, \dots, P_{10}$  (rysunek obok)?
  - Na okręgu zaznaczono  $n$  punktów. Liczba trójkątów, które można utworzyć, łącząc dowolne trzy spośród tych punktów, jest równa 84. Oblicz  $n$ .
- Na okręgu zaznaczono 6 punktów. Ile jest czworokątów, a ile wszystkich wielokątów, których wierzchołki leżą w tych punktach?



- $C_{10}^3 = \binom{10}{3} = 120$
  - $\binom{n}{3} = 84$ , gdzie  $n \in \mathbf{N}$  oraz  $n > 3$   
 $\frac{n!}{3!(n-3)!} = 84$   
 $\frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 84$   
 $(n-2)(n-1)n = 7 \cdot 8 \cdot 9$   
 $n = 9$
- Czworokąty:  $C_6^4 = \binom{6}{4} = 15$   
Wszystkie wielokąty:  $C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 42$

10. Na jednej prostej zaznaczono 4 punkty, a na drugiej prostej, równoległej do pierwszej, zaznaczono 5 punktów (rysunek obok). Ile jest trójkątów, a ile czworokątów, których wierzchołki leżą w tych punktach?



11. Wyznacz rozwinięcie podanego wzoru.  
 a)  $(a+b)^4$       b)  $(a-b)^4$       c)  $(a+b)^7$       d)  $(a-b)^7$
12. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla  $n=9$  i  $n=10$  oraz podaj rozwinięcia wzorów  $(a+b)^9$  i  $(a+b)^{10}$ .
13. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, oblicz:  
 a)  $(\sqrt{3}+1)^4$ ,      b)  $(2-\sqrt{2})^4$ ,      c)  $(2+\sqrt{2})^5$ ,      d)  $(\sqrt{3}-1)^5$ .
14. Wyznacz rozwinięcie podanego wyrażenia.  
 a)  $(x+1)^4$       c)  $(2x+1)^4$       e)  $(x+2)^5$       g)  $(x+1)^6$   
 b)  $(x-2)^4$       d)  $(2x-\frac{1}{2})^4$       f)  $(2x-1)^5$       h)  $(x-2)^6$
15. Wyznacz współczynnik podanego wielomianu przy  $x^6$ .  
 a)  $(\sqrt{2}x+1)^6$       c)  $(2x+\sqrt{2})^8$       e)  $(4x^2+\frac{1}{2})^4$       g)  $(8x^2+\frac{1}{4})^6$   
 b)  $(\sqrt{2}x-1)^7$       d)  $(x-\frac{1}{2})^9$       f)  $(4x^2-\frac{1}{2})^6$       h)  $(8x^2-\frac{1}{4})^8$

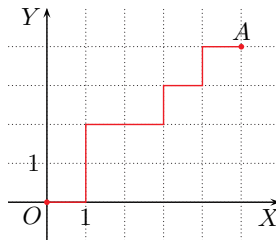
- D** 16. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, uzasadnij, że:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

- D** 17. Uzasadnij, że podana równość zachodzi dla wszystkich liczb nieparzystych  $n$ .

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

18. Rozpatrujemy wszystkie łamane składające się z odcinków równoległych do osi układu współrzędnych, których końcami są punkty o obu współrzędnych całkowitych (przykładowa łamana na rysunku obok). Ile jest takich łamanych długości 9 o początku w punkcie  $O(0,0)$  i końcu w punkcie  $A(5,4)$ ?



17. Korzystamy z własności  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  i mamy:

$$\binom{n}{n-0} + \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n-(n-3)} + \binom{n}{n-(n-1)} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{3} + \binom{n}{1}$$

18. Podejmujemy 9 decyzji, 5 razy idziemy w prawo (P) i 4 w górę (G). Zatem każdą łamaną możemy przedstawić w postaci ciągu 9 liter. Łamana na rysunku ma postać: PGGPPGGPG.

Każdy taki ciąg jest wyznaczony jednoznacznie po wskazaniu, na których miejscach jest litera P.

Mamy zatem  $C_9^5 = \binom{9}{5} = 126$  takich ciągów liter.

**Uwaga do rozwiązania.**

Wyznaczając liczbę ciągów, zamiast wskazywania położenia liter P, możemy rozważyć położenie liter G, wówczas  $C_9^4 = \binom{9}{4} = 126$ .

10. Trójkąty:  $C_4^2 \cdot C_5^1 + C_5^2 \cdot C_4^1 = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 70$

Czworokąty:

$$C_4^2 \cdot C_5^2 = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 60$$

11. a)  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$   
 b)  $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

c)  $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

d)  $a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

12.  $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$   
 $(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$

13. a)  $28 + 16\sqrt{3}$       b)  $68 - 48\sqrt{2}$   
 c)  $232 + 164\sqrt{2}$       d)  $44\sqrt{3} - 76$

14. a)  $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$   
 b)  $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

c)  $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

d)  $16x^4 - 16x^3 + 6x^2 - x + \frac{1}{16}$

e)  $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

f)  $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$

g)  $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

h)  $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

15. a) 8      b) -56      c) 3584      d)  $-\frac{21}{2}$

e) 128      f) -160      g) 160

h) -28

16.  $2^n = (1+1)^n =$

$$= \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 +$$

$$+ \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1^n =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

### Uczeń:

- wykorzystuje podstawowe pojęcia kombinatoryki do rozwiązywania zadań.

### Ćwiczenie 1

- a) 114, 141, 411  
123, 132, 213, 231, 312, 321  
222  
 $3 + 6 + 1 = 10$
- b) 116, 161, 611  
123, 132, 213, 231, 312, 321  
 $3 + 6 = 9$

## 1.6. Kombinatoryka – zadania

Aby ustalić, ile obiektów spełnia warunki zadania, czasami warto wypisać wszystkie takie obiekty i je policzyć.

### Przykład 1

Rzucamy cztery razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby czterocyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?

Suma cyfr może być równa 6 w dwóch przypadkach:

- w zapisie liczby występują raz cyfra 3 i trzy razy cyfra 1; są cztery takie liczby: 1113, 1131, 1311, 3111;
- w zapisie liczby występują dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1; jest sześć takich liczb: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.

Wszystkich takich liczb jest  $4 + 6 = 10$  (korzystamy z reguły dodawania).

### Ćwiczenie 1

Rzucamy trzy razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których:

- a) suma cyfr jest równa 6,                      b) iloczyn cyfr jest równy 8?

W poniższym przykładzie wypisanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania nie byłoby praktyczne, dlatego wykorzystamy wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami.

### Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  i co najmniej raz występuje cyfra 3?

Niech  $X$  będzie zbiorem wszystkich liczb czterocyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6;  $A$  – zbiorem tych liczb ze zbioru  $X$ , w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 3;  $B$  – zbiorem tych liczb ze zbioru  $X$ , w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 3.

Wówczas  $\overline{X} = 6^4$ ,  $\overline{B} = 5^4$ .

Zauważmy, że  $X = A \cup B$  oraz  $A$  i  $B$  są rozłączne, stąd  $\overline{X} = \overline{A} + \overline{B}$ .

Zatem  $\overline{A} = \overline{X} - \overline{B} = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$ .

### Ćwiczenie 2

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0, a suma cyfr jest mniejsza od 35?

### Ćwiczenie 2

Niech  $X$  będzie zbiorem liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,  $A$  – zbiorem tych liczb ze zbioru  $X$ , w których suma cyfr jest mniejsza od 35,  $B$  – zbiorem tych liczb ze zbioru  $X$ , w których suma cyfr jest większa lub równa 35.

$\overline{X} = 9^4$

$B = \{9999, 9998, 9989, 9899, 8999\}$ ,  $\overline{B} = 5$

$\overline{A} = \overline{X} - \overline{B} = 6561 - 5 = 6556$

Podczas rozwiązywania zadań będziemy korzystać z poniższych wzorów.

| Wzór                        | Opis                                                                              |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $P_n = n!$                  | liczba <b>permutacji</b> zbioru $n$ -elementowego                                 |
| $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ | liczba $k$ -elementowych <b>wariacji bez powtórzeń</b> zbioru $n$ -elementowego   |
| $W_n^k = n^k$               | liczba $k$ -elementowych <b>wariacji z powtórzeniami</b> zbioru $n$ -elementowego |
| $C_n^k = \binom{n}{k}$      | liczba $k$ -elementowych <b>kombinacji</b> zbioru $n$ -elementowego               |

### Przykład 3

Ile jest liczb ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3?

Warunki zadania spełniają liczby należące do zbiorów:

$A$  – w zapisie liczby występują jedna cyfra 3 i siedem cyfr 0.

Jedynym elementem tego zbioru jest liczba 3 000 000, zatem  $\overline{A} = 1$ .

$B$  – w zapisie liczby występują jedna cyfra 2, jedna cyfra 1 i sześć cyfr 0.

Jeśli pierwszą cyfrą tej liczby jest 2, to cyfra 1 znajduje się na jednej z pozostałych siedmiu pozycji, analogicznie jeśli pierwszą cyfrą jest 1, to cyfra 2 znajduje się na jednej z pozostałych siedmiu pozycji, zatem:

$$\overline{B} = 2 \cdot \binom{7}{1} = 14$$

$C$  – w zapisie liczby występują trzy cyfry 1 i pięć cyfr 0.

Pierwszą cyfrą jest 1, pozostałe cyfry 1 znajdują się na dwóch spośród pozostałych siedmiu pozycji, zatem:

$$\overline{C} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$$

Zbiory  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są parami rozłączne, zatem:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 1 + 14 + 21 = 36$$

### Ćwiczenie 3

Ile jest liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym: a) 6, b) 8?

### Ćwiczenie 4

Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie cyfr równej:

a) 2, b) 4, c) 87, d) 88?

### Ćwiczenie 4

a)  $A$  – jedna cyfra 2 i dziewięć cyfr 0,  $\overline{A} = 1$

$B$  – dwie cyfry 1 i osiem cyfr 0, przy czym na pierwszym miejscu musi być jedna z 1

$$\overline{B} = \binom{9}{1} = 9, \overline{A} + \overline{B} = 10$$

b)  $A$  – jedna cyfra 4 i dziewięć cyfr 0,  $\overline{A} = 1$

$B$  – jedna cyfra 3, jedna cyfra 1 i osiem cyfr 0,  $\overline{B} = 2 \cdot \binom{9}{1} = 18$

$C$  – dwie cyfry 2 i osiem cyfr 0,  $\overline{C} = \binom{9}{2} = 9$

$D$  – jedna cyfra 2, dwie cyfry 1 i siedem cyfr 0,  $\overline{D} = \binom{9}{2} + \binom{9}{1} \binom{8}{1} = 108$

$E$  – cztery cyfry 1 i sześć cyfr 0,  $\overline{E} = \binom{9}{3} = 84$

$$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E} = 220$$

c) 220 d) 55

### Ćwiczenie 3

a)  $A$  – jedna cyfra 6 i pięć cyfr 1

$$\overline{A} = 6$$

$B$  – jedna cyfra 2, jedna cyfra 3 i cztery cyfry 1

$$\overline{B} = \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} = 30$$

$$\overline{A} + \overline{B} = 36$$

b)  $A$  – jedna cyfra 8 i pięć cyfr 1

$$\overline{A} = 6$$

$B$  – jedna cyfra 2, jedna cyfra 4 i cztery cyfry 1

$$\overline{B} = \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} = 30$$

$C$  – trzy cyfry 2 i trzy cyfry 1

$$\overline{C} = \binom{6}{3} = 20$$

$$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 56$$

## Odpowiedzi do zadań

1. Uczeń I: cyfrę tysięcy można wybrać na 5 sposobów (bez 0), cyfrę setek – na 5 sposobów (z uwzględnieniem 0), cyfrę dziesiątek – na 4 sposoby, a cyfrę jedności – na 3 sposoby.  
Uczeń II od liczby wszystkich ciągów czterocyfrowych odjął liczbę ciągów, które zaczynały się od cyfry 0.

4. a)  $3^4 = 81$

b)  $3^6 = 729$

5. a)  $C_{36}^3 = \binom{36}{3} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{6} = 7140$

b) Dokładnie jeden uszkodzony:

$$C_4^1 \cdot C_{36}^2 = 4 \cdot \frac{35 \cdot 36}{2} = 2520,$$

co najwyżej jeden uszkodzony:

$$C_{36}^3 + C_4^1 \cdot C_{36}^2 = 7140 + 2520 = 9660$$

6. a)  $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

b)  $C_4^3 + C_3^3 + C_3^3 = 4 + 1 + 1 = 6$

7. a)  $15 + 6 = 21$

b)  $6 + 4 + 6 = 16$

c)  $10 + 3 = 13$

## Zadania

1. Podczas sprawdzianu należało obliczyć, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Poniżej przedstawiono rozwiązania podane przez dwóch uczniów.

uczeń I:  $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

uczeń II:  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

Uzasadnij podane rozwiązania.

2. Ile jest pięciocyfrowych liczb parzystych o różnych cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb nie występuje cyfra 7? Ile jest takich liczb sześciocyfrowych?

3. Ile jest liczb czterocyfrowych, których cyfry należą do zbioru  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$  i nie mogą się powtarzać, a ich suma jest większa od 12?

4. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1 i 2 i które mają co najwyżej: a) 4 cyfry, b) 6 cyfr?

5. W partii 40 monitorów komputerowych 4 są uszkodzone. Wybieramy 3 monitory. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, aby:

a) żaden z wybranych monitorów nie był uszkodzony,

b) co najwyżej jeden z wybranych monitorów był uszkodzony?

6. Na parkingu salonu samochodowego stoi 10 samochodów tej samej marki. Cztery samochody są czarne, trzy – srebrne, a pozostałe – granatowe. Wybieramy trzy samochody. Na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wszystkie wybrane samochody były:

a) w różnych kolorach,

b) w tym samym kolorze?

7. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Liczbę oczek na pierwszej z nich oznaczamy przez  $x$ , a na drugiej – przez  $y$ . Ile jest możliwych wyników spełniających podany warunek?

a)  $x < y$  lub  $x > y + 2$  (diagram obok)

b)  $x = y$  lub  $x \geq y + 2$

c)  $x + y \leq 5$  lub  $x + y = 10$

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 |
| 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
| 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 |

Termin *kombinatoryka* pochodzi z wydanej w 1666 r. rozprawy Gottfrieda Wilhelma Leibniza *Dissertatio de arte combinatoria*.

2. Pięciocyfrowe:

$A$  – cyfrą jedności jest 0,  $\overline{\overline{A}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 1680$

$B$  – cyfrą jedności jest 2, 4, 6 lub 8,  $\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5880$

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 7560$$

Sześciocyfrowe:

$A$  – cyfrą jedności jest 0,  $\overline{\overline{A}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 6720$

$B$  – cyfrą jedności jest 2, 4, 6 lub 8,  $\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 23520$

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 30240$$

3. Liczby czterocyfrowe, w których cyfry nie mogą się powtarzać:  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

Liczby o sumie cyfr nie większej niż 12 (nie występuje w nich cyfra 8):  $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$   
Ostatecznie  $96 - 18 = 78$

- D 8.** a) Pięciu posłów – trzech z partii  $X$  i dwóch z partii  $Y$  – zajmuje wspólną pięcioosobową ławę na sali sejmowej. Posłowie jednej partii siedzą obok siebie. Uzasadnij, że są 24 możliwe sposoby zajęcia miejsc przez posłów.  
b) Siedmiu posłów – trzech z partii  $X$  i czterech z partii  $Y$  – zajmuje wspólną siedmioosobową ławę na sali sejmowej. Postanowili oni zająć miejsca w ten sposób, że żaden nie ma za sąsiada posła ze swojej partii. Na ile sposobów posłowie mogą zasiąść w ławie?
- 9.** Grupa uczniów – czworo dziewcząt i ośmiu chłopców – zajmuje wspólny dwunastomiejscowy rząd w kinie. Na ile sposobów uczniowie mogą zająć miejsca tak, aby:
- a) dziewczęta siedziały razem,      b) chłopcy siedzieli razem.
- 10.** W skład rady uczniów wchodzi po dwoje przedstawicieli klas IIIa, IIIb, IIIc, IVa i IVb. Na ile sposobów można wybrać:
- a) pięcioosobową delegację tej rady,  
b) pięcioosobową delegację tej rady tak, aby był w niej przedstawiciel każdej klasy,  
c) pięcioosobową delegację tej rady tak, aby przynajmniej jedna klasa była reprezentowana przez dwoje uczniów?
- 11.** Do klubu golfowego należy 20 mężczyzn i 10 kobiet. Członkowie klubu wybierają przewodniczącego, wiceprzewodniczącego i sekretarza. Na ile sposobów mogą dokonać wyboru tak, aby została wybrana przynajmniej jedna kobieta?
- 12.** W szufladzie znajduje się 10 par rękawiczek, każda para jest innego koloru. Na ile sposobów można wyciągnąć z szuflady 4 rękawiczki, aby wśród nich nie było ani jednej pary?
- D 13.** W konkursie kulinarnym wzięło udział 12 par małżeńskich. Do drugiego – indywidualnego – etapu konkursu jury wybrało 8 osób. Uzasadnij, że jeśli wśród wybranych osób:
- a) jest tylko jedna para małżeńska, to takiego wyboru można dokonać na ponad 350 000 sposobów,  
b) są dwie pary małżeńskie, to takiego wyboru można dokonać na ponad 220 000 sposobów.
- 14.** W hostelu jest pięć pokoi o numerach od 1 do 5, które informują o liczbie miejsc noclegowych w danym pokoju. Na ile sposobów można rozlokować w tych pokojach 15 osób?
- 8. a)** Posłowie z partii  $X$  mogą siedzieć obok siebie na  $3! = 6$  sposobów, a posłowie z partii  $Y$  – na 2 sposoby. Posłowie z partii  $X$  mogą siedzieć po lewej lub po prawej stronie posłów z partii  $Y$ . Zatem są  $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$  sposoby zajęcia miejsc przez posłów.  
**b)** Posłowie siadają na przemian, zaczynając od posła partii  $Y$ . Zatem mamy:  $4! \cdot 3! = 144$  możliwości.
- 9. a)**  $9 \cdot 4! \cdot 8! = 8\,709\,120$   
**b)**  $5 \cdot 4! \cdot 8! = 4\,838\,400$
- 10. a)**  $C_{10}^5 = \binom{10}{5} = 252$   
**b)**  $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 2^5 = 32$   
**c)** Od liczby wszystkich kombinacji odejmujemy te, w których są uczniowie z różnych klas, czyli  $252 - 32 = 220$ .
- 11.** Wszystkie możliwe wariacje:  $V_{30}^3 = 24\,360$ , wariacje, w których nie ma żadnej kobiety:  $V_{20}^3 = 6840$ . Wyboru można dokonać na  $24\,360 - 6840 = 17\,520$  sposobów.
- 12.** Wybieramy cztery pary rękawiczek z dziesięciu par, a następnie z każdej pary jedną rękawiczkę.  
 $\binom{10}{4} \cdot 2^4 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{24} \cdot 16 = 3360$
- 13. a)** Wybieramy jedną parę, czyli mamy już wybrane dwie osoby. Pozostałe sześć osób wybieramy spośród jedenastu par, przy czym z każdej z wybranych sześciu par możemy wybrać jedną osobę.  
 $C_{12}^1 \cdot C_{11}^6 \cdot (C_2^1)^6 = 12 \cdot \binom{11}{6} \cdot 2^6 = 354\,816 > 350\,000$   
**b)** Wybieramy dwie pary, czyli mamy już wybrane cztery osoby. Pozostałe cztery osoby wybieramy spośród dziesięciu par, przy czym z każdej z wybranych czterech par możemy wybrać jedną osobę.  
 $C_{12}^2 \cdot C_{10}^4 \cdot (C_2^1)^4 = 66 \cdot \binom{10}{4} \cdot 2^4 = 221\,760 > 220\,000$
- 14.**  $C_{15}^1 \cdot C_{14}^2 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^4 = 15 \cdot 91 \cdot 220 \cdot 126 = 37\,837\,800$

15. Liczba cyfr:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$C_{21}^1 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{18}^3 \cdot C_{15}^4 \cdot C_{11}^5 =$$

$$= 21 \cdot 190 \cdot 816 \cdot 1365 \cdot 462 =$$

$$= 2\,053\,230\,379\,200$$

16. a) Wybór jednej karty z każdego koloru:

$$C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 = 28\,561$$

Wybrano dokładnie trzy asy:

$$C_4^3 \cdot C_{12}^1 = 48$$

Ostatecznie:

$$28\,561 - 48 = 28\,513$$

b)  $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 - 1 =$   
 $= 256 - 1 = 255$

15. W zapisie pewnej liczby występują cyfry od 1 do 6, przy czym cyfra  $n$  występuje dokładnie  $n$  razy, gdzie  $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ . Z ilu cyfr składa się ta liczba? Ile jest takich liczb?

Talia 52 kart składa się z 13 pików ( $\spadesuit$ ), 13 kierów ( $\heartsuit$ ), 13 kar ( $\diamondsuit$ ) i 13 trefli ( $\clubsuit$ ). Litera  $A$ ,  $K$ ,  $D$ ,  $W$  oznaczają figury: odpowiednio asa, króla, damę i waleta. W skład talii wchodzi karty wymienione poniżej.

$A\spadesuit \ K\spadesuit \ D\spadesuit \ W\spadesuit \ 10\spadesuit \ 9\spadesuit \ 8\spadesuit \ 7\spadesuit \ 6\spadesuit \ 5\spadesuit \ 4\spadesuit \ 3\spadesuit \ 2\spadesuit$   
 $A\heartsuit \ K\heartsuit \ D\heartsuit \ W\heartsuit \ 10\heartsuit \ 9\heartsuit \ 8\heartsuit \ 7\heartsuit \ 6\heartsuit \ 5\heartsuit \ 4\heartsuit \ 3\heartsuit \ 2\heartsuit$   
 $A\diamondsuit \ K\diamondsuit \ D\diamondsuit \ W\diamondsuit \ 10\diamondsuit \ 9\diamondsuit \ 8\diamondsuit \ 7\diamondsuit \ 6\diamondsuit \ 5\diamondsuit \ 4\diamondsuit \ 3\diamondsuit \ 2\diamondsuit$   
 $A\clubsuit \ K\clubsuit \ D\clubsuit \ W\clubsuit \ 10\clubsuit \ 9\clubsuit \ 8\clubsuit \ 7\clubsuit \ 6\clubsuit \ 5\clubsuit \ 4\clubsuit \ 3\clubsuit \ 2\clubsuit$

16. a) Z talii 52 kart wybrano jednego pika, jednego kiera, jedno karo oraz jednego trefla. Wiadomo, że wśród wybranych czterech kart nie ma dokładnie trzech asów. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru?

b) Z talii 52 kart wybrano jednego asa, jednego króla, jedną damę oraz jednego waleta. Wiadomo, że nie wybrano czterech kierów. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru?

17. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart było 5 kierów oraz:

a) 8 trefli, b) 4 trefle, 3 kara i 1 pik.

18. Z talii 52 kart wybieramy 5 kart. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart:

a) były dokładnie 3 karty jednego koloru, b) była co najmniej 1 figura.

19. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Na ile sposobów można wybrać karty dokładnie dwóch kolorów?

20. W jednej z gier liczbowych należy skreślić 6 spośród 49 liczb. Czy liczba możliwych wyborów jest większa od 10 000 000?

21. Na ile sposobów można skreślić 6 liczb na kuponie gry liczbowej takim jak przedstawiony obok, jeśli nie można skreślić 2 liczb w tym samym wierszu?

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |

17. a)  $C_{13}^5 \cdot C_{13}^8 = 1287 \cdot 1287 = 1\,656\,369$

b)  $C_{13}^5 \cdot C_{13}^4 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 = 1287 \cdot 715 \cdot 286 \cdot 13 = 3\,412\,322\,190$

18. a)  $C_4^1 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{39}^2 = 4 \cdot 286 \cdot 741 = 847\,704$

b) Liczba kart, które nie są figurami:  $52 - 4 \cdot 4 = 36$

$C_{52}^5 - C_{36}^5 = 2\,598\,960 - 376\,992 = 2\,221\,968$

19.  $C_4^2 \cdot (C_{26}^{13} - 2 \cdot C_{13}^{13}) = 6 \cdot (10\,400\,600 - 2) = 62\,403\,588$

20.  $C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{720} = 13\,983\,816 > 10\,000\,000$

21. Wybieramy sześć wierszy z siedmiu możliwych, a następnie w każdym wierszu jedną z liczb.

$C_7^6 \cdot (C_7^1)^6 = 7 \cdot 7^6 = 823\,543$

## Dwójkowy system liczbowy

Wszystkie operacje wykonywane przez komputery są realizowane w systemie dwójkowym (binarnym). Do zapisywania liczb w systemie dwójkowym wykorzystuje się tylko cyfry 0 i 1. Kolejne pozycje odpowiadają kolejnym potęgom liczby 2. Na przykład liczba zapisana w systemie dwójkowym jako 10111 to:

$$10111_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

**Uwaga.** Indeks (2) bywa używany, aby zaznaczyć, że liczba została zapisana w systemie dwójkowym.

Jeśli chcemy liczbę podaną w systemie dziesiętnym zapisać w systemie dwójkowym, to zaczynamy od przedstawienia jej jako sumy potęg liczby 2. Na przykład dla liczby 113 mamy:

$$113 = 64 + 32 + 16 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0$$

zatem liczba 113 zapisana w systemie dwójkowym to 1110001<sub>(2)</sub>.

Działania w systemie dwójkowym wykonujemy analogicznie jak w systemie dziesiętnym. W wypadku dodawania należy pamiętać, że w systemie dwójkowym  $1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$ .

1. Zapisz w systemie dziesiętnym liczbę podaną w systemie dwójkowym.
  - a) 1011<sub>(2)</sub>
  - b) 11010<sub>(2)</sub>
  - c) 10101011<sub>(2)</sub>
  - d) 10000000001<sub>(2)</sub>
2. Zapisz w systemie dwójkowym liczbę podaną w systemie dziesiętnym.
  - a) 31
  - b) 36
  - c) 78
  - d) 150
3. Wykonaj dodawanie liczb zapisanych w systemie dwójkowym. Sprawdź otrzymany wynik, przeprowadzając obliczenia w systemie dziesiętnym.
  - a)  $101_{(2)} + 11_{(2)}$
  - b)  $11011_{(2)} + 1011_{(2)}$
  - c)  $11101_{(2)} + 11110_{(2)}$
  - d)  $10101010_{(2)} + 111111_{(2)}$
4. Ile jest liczb, które w zapisie dwójkowym mają:
  - a) 10 cyfr,
  - b) 10 cyfr, a wśród nich są tylko cztery jedyńki?

### 3. d) 11101001<sub>(2)</sub>

$$10101010_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 128 + 32 + 8 + 2 = 170$$

$$111111_{(2)} = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$$

$$11101001_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 8 + 1 = 233$$

### 4. a) Na pierwszym miejscu musi być 1, a na pozostałych dziewięciu 0 lub 1.

$$1 \cdot 2^9 = 512$$

b) Na pierwszym miejscu musi być jedynka, a na pozostałych dziewięciu są trzy jedyńki i sześć zer.

$$\frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 84$$

## Odpowiedzi do zadań

1. a)  $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$   
 b)  $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 = 16 + 8 + 2 = 26$   
 c)  $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 32 + 8 + 2 + 1 = 171$   
 d)  $1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^0 = 1024 + 1 = 1025$
2. a)  $31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11111_{(2)}$   
 b)  $36 = 32 + 4 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 = 100100_{(2)}$   
 c)  $78 = 64 + 8 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 = 1001110_{(2)}$   
 d)  $150 = 128 + 16 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 = 10010110_{(2)}$
3. a)  $1000_{(2)} = 2^2 + 2^0 = 5$   
 $11_{(2)} = 2^1 + 2^0 = 3$   
 $1000_{(2)} = 2^3 = 8$   
 b)  $100110_{(2)} = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$   
 $1011_{(2)} = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$   
 $100110_{(2)} = 2^5 + 2^2 + 2^1 = 32 + 4 + 2 = 38$   
 c)  $111011_{(2)} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$   
 $11110_{(2)} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$   
 $111011_{(2)} = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 59$

#### Uczeń:

- określa przestrzeń zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia,
- wypisuje wyniki sprzyjające danemu zdarzeniu losowemu,
- określa zdarzenia: niemożliwe i pewne,
- wyznacza sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń losowych,
- wypisuje pary zdarzeń przeciwnych i pary zdarzeń wykluczających się.

## 1.7. Zdarzenia losowe

Rzut monetą czy rzut kostką to przykłady doświadczeń losowych, czyli takich doświadczeń, których wyniku nie możemy przewidzieć. W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki to orzeł lub reszka. W przypadku jednokrotnego rzutu kostką mamy sześć możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek.

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych** lub krótko **przestrzenią**. Zgodnie z tradycją przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy grecką wielką literą omega ( $\Omega$ ), a pojedyncze zdarzenia elementarne – małą literą omega ( $\omega$ ).

### Przykład 1

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą:  $\Omega = \{o, r\}$ , gdzie  $o$  oznacza otrzymanie orła, a  $r$  – reszki.
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Przestrzenią zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie najpierw monetą, a następnie kostką jest zbiór:  
 $\Omega = \{(o, 1), (o, 2), (o, 3), (o, 4), (o, 5), (o, 6), (r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6)\}$ .

### Ćwiczenie 1

Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane 1, 2 i 3 losujemy jedną kulę, a następnie drugą. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę dwucyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

- wylosowanej kuli nie zwracamy do urny (losowanie bez zwracania),
- wylosowaną kulę zwracamy do urny (losowanie ze zwracaniem).

### Definicja

**Zdarzeniem losowym** nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych  $\Omega$ .

Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, będziemy oznaczać wielkimi literami:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  itd.

Zbiór  $\Omega$  nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia  $A$  nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu  $A$ .

### Ćwiczenie 1

- $\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$
- $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$

### Multiteka

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry
- Prawdopodobieństwo – generator losowań

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.7



### Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:

$A$  – wypadła parzysta liczba oczek,

$B$  – wypadła liczba oczek większa od 8,

$C$  – wypadła liczba oczek mniejsza od 7.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Zdarzeniu  $A$  sprzyjają wyniki 2, 4, 6, zatem  $A = \{2, 4, 6\}$ .

Zdarzenie  $B$  jest zdarzeniem niemożliwym, a  $C$  – zdarzeniem pewnym.

### Ćwiczenie 2

Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

$A$  – suma otrzymanych oczek jest mniejsza od 4,

$B$  – iloczyn otrzymanych oczek jest podzielny przez 10.

### Ćwiczenie 3

Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

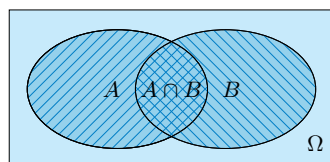
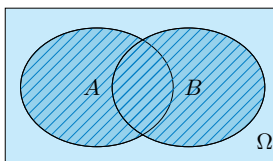
$A$  – wypadły co najwyżej dwie reszki,

$B$  – wypadły dokładnie dwie reszki.

Zdarzenia losowe są zbiorami, zatem możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.

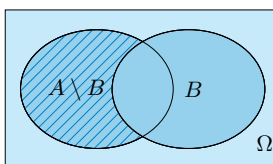
Niech  $A, B \subset \Omega$ .

**Sumą** zdarzeń  $A$  i  $B$  nazywamy zdarzenie  $A \cup B$ , któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  lub zdarzeniu  $B$  i tylko one.



**Iloczynem** zdarzeń  $A$  i  $B$  nazywamy zdarzenie  $A \cap B$ , któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniu  $A$  i zdarzeniu  $B$  i tylko one.

**Różnicą** zdarzeń  $A$  i  $B$  nazywamy zdarzenie  $A \setminus B$ , któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  oraz niesprzyjające zdarzeniu  $B$  i tylko one.



Mówimy, że zdarzenia  $A$  i  $B$  są **rozłączne** lub **wykluczają się**, jeśli część wspólna  $A \cap B$  tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym ( $A \cap B = \emptyset$ ).

Zdarzenie  $A' = \Omega \setminus A$  nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia  $A$ . Zauważ, że  $A \cap A' = \emptyset$  oraz  $A \cup A' = \Omega$ .

### Ćwiczenie 2

$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$B = \{(2, 5), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

### Ćwiczenie 3

$A = \{(r, r, o, o), (r, o, r, o), (r, o, o, r), (o, r, r, o), (o, r, o, r), (o, o, r, r), (r, o, o, o), (o, r, o, o), (o, o, r, o), (o, o, o, r), (o, o, o, o)\}$

$B = \{(r, r, o, o), (r, o, r, o), (r, o, o, r), (o, r, r, o), (o, r, o, r), (o, o, r, r)\}$

#### Ćwiczenie 4

$A = \{(r, r, r), (o, r, r), (r, o, r), (r, r, o)\}$

$B = \{(r, r, r), (o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (r, o, o), (o, r, o), (o, o, r)\}$

$C = \{(o, r, r), (r, o, r), (r, r, o)\}$

$D = \{(o, o, o)\}$

$E = \{(r, o, o), (o, r, o), (o, o, r), (o, o, o)\}$

Zdarzenia wykluczające się to:  
 $A$  i  $D$ ,  $A$  i  $E$ ,  $B$  i  $D$ ,  $C$  i  $D$ ,  
 $C$  i  $E$ .

Zdarzenia przeciwne to:

$A$  i  $E$ ,  $B$  i  $D$ .

#### Odpowiedzi do zadań

1.  $A = \{(5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5)\}$

$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 1)\}$

$C = \{(1, 6, 6), (2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 6, 2), (4, 3, 3), (6, 1, 6), (6, 2, 3), (6, 3, 2), (6, 6, 1)\}$

2. Pewne:  $D$ ,  
niemożliwe:  $A, B, C$

#### Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

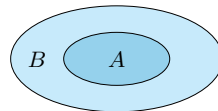
$A$  – orzeł wypadł co najwyżej raz,  $D$  – wypadły same orły,

$B$  – co najmniej raz wypadła reszka,  $E$  – wypadło więcej orłów niż reszek.

$C$  – reszka wypadła dokładnie dwa razy,

Wskaż pary zdarzeń wykluczających się oraz pary zdarzeń przeciwnych.

**Uwaga.** Jeśli wszystkie elementy zdarzenia  $A$  należą do zdarzenia  $B$ , to mówimy, że zdarzenie  $A$  **zawiera się** w zdarzeniu  $B$ , co zapisujemy  $A \subset B$ .



Zauważ, że jeśli  $A \subset B$ , to  $A \cap B = A$ ,  $A \cup B = B$  i  $A \setminus B = \emptyset$ .

#### Zadania

1. Rzucamy trzy razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

$A$  – suma wyrzuconych oczek jest równa 17,

$B$  – suma wyrzuconych oczek jest nie większa niż 6,

$C$  – iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 36.

2. Z urny, w której są trzy kule ponumerowane 12, 13 i 14, losujemy bez zwracania dwie kule. Które z poniższych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które – niemożliwym?

$A$  – obydwie wylosowane liczby są nieparzyste

$B$  – suma wylosowanych liczb jest liczbą pierwszą

$C$  – suma wylosowanych liczb jest równa co najwyżej 24

$D$  – jedna z wylosowanych liczb jest parzysta

3. Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:

$A$  – pierwsza wyrzucona liczba jest nie mniejsza od drugiej,

$B$  – wśród wyrzuconych liczb są liczba parzysta i liczba nieparzysta.

Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom  $A'$  i  $B'$ . Sprawdź, czy zachodzą zależności:  $A \cup B = \Omega$ ,  $A' \cup B = B$ ,  $A \setminus B = B'$ ,  $B' \subset A$ .

4. Z urny, w której jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule.

a) Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

$A$  – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą,

$B$  – iloczyn wylosowanych liczb jest równy 4,

$C$  – pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej.

b) Wyznacz zdarzenia:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cap C$  i  $A \cap B \cap C$ .

3.  $A = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

$A' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

$B' = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

Nie zachodzi żadna z podanych zależności.

4. a)  $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}$ ,  $B = \{(1, 4), (4, 1)\}$   
 $C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

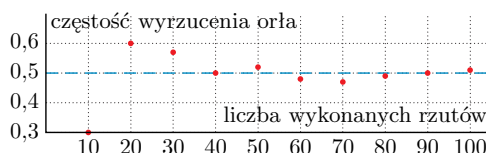
b)  $A \cup B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}$   
 $A \cap B = \{(1, 4)\}$ ,  $B \cap C = \{(1, 4)\}$ ,  $A \cap B \cap C = \{(1, 4)\}$

## Częstość zdarzeń

Rzucamy  $n$  razy monetą. Jeśli  $k$  razy wypadnie orzeł, to mówimy, że **częstość** otrzymania orła wynosi  $\frac{k}{n}$ . W tabeli i na wykresie podano częstość wyrzucenia orła podczas pewnego eksperymentu.

|                              |     |     |      |     |      |      |      |      |     |      |
|------------------------------|-----|-----|------|-----|------|------|------|------|-----|------|
| Liczba wykonanych rzutów $n$ | 10  | 20  | 30   | 40  | 50   | 60   | 70   | 80   | 90  | 100  |
| Liczba otrzymanych orłów $k$ | 3   | 12  | 17   | 20  | 26   | 29   | 33   | 39   | 45  | 51   |
| Częstość $\frac{k}{n}$       | 0,3 | 0,6 | 0,57 | 0,5 | 0,52 | 0,48 | 0,47 | 0,49 | 0,5 | 0,51 |

Zwróć uwagę, że dla dużej liczby rzutów częstość otrzymania orła jest bliska  $\frac{1}{2}$ .



W poniższej tabeli przedstawiono wyniki eksperymentów polegających na rzucie monetą, przeprowadzonych przez Francuza Georges'a Louisa Leclerca de Buffona [czyt. żorża luisa leklerka de bufona] (1707–1788) i Anglika Karla Pearsona [czyt. pirsona] (1857–1936).

|                  | Liczba rzutów | Liczba orłów | Częstość |
|------------------|---------------|--------------|----------|
| G.L.L. de Buffon | 4 040         | 2 048        | 0,5069   |
| K. Pearson       | 12 000        | 6 019        | 0,5016   |
| K. Pearson       | 24 000        | 12 012       | 0,5005   |

- Wykonaj 100 rzutów monetą. Podaj otrzymaną częstość wypadnięcia orła.
- Wykonaj 100 rzutów kostką. Sprawdź, czy częstość otrzymania szóstki jest bliska  $\frac{1}{6}$ .
- Wykonaj 30 rzutów dwiema kostkami. Za każdym razem zapisz, czy suma wyrzuconych oczek jest parzysta, czy nieparzysta. Podaj częstość, z jaką występowała parzysta liczba oczek.

W 1733 r. de Buffon sformułował problem, zwany później problemem **igły Buffona**, polegający na obliczeniu prawdopodobieństwa tego, że igła o długości  $l$ , rzucona na podłogę podzieloną liniami równoległymi odległymi o  $d$ , spadnie na linię. Rozwiązanie tego problemu, podane przez Buffona w 1777 r., pozwala wyznaczyć przybliżoną wartość liczby  $\pi$  metodami rachunku prawdopodobieństwa.



### Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń losowych, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa,
- wykorzystuje regułę mnożenia, regułę dodawania, permutacje, wariacje i kombinacje do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.

## 1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne

Gdy rzucamy kostką, możemy otrzymać jeden z wyników należących do zbioru  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Przyjmujemy, że kostka jest symetryczna (upada na każdą ściankę równie często), zatem szansa otrzymania któregośkolwiek wyniku jest równa  $\frac{1}{6}$ . Rozpatrzmy zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zauważmy, że zdarzeniu temu sprzyjają trzy wyniki: 2, 4 i 6. Zatem szansa zajścia tego zdarzenia jest równa  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia zdarzają się równie często, mówimy, że mamy do czynienia z **prawdopodobieństwem (schematem) klasycznym**. W takiej sytuacji prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A$  zawartego w przestrzeni  $\Omega$  określamy następująco:

### Definicja

Jeżeli  $\Omega$  jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem zdarzenia**  $A \subset \Omega$  nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

### Przykład 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10 w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką.

$$\Omega = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), \\ (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), \\ (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), \\ (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), \\ (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 36 elementów:

$$\overline{\Omega} = 36$$

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, to zdarzenie:

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}, \text{ stąd } \overline{A} = 3$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

### Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

- a) sumy oczek mniejszej od 5,                      b) parzystej sumy oczek.

### Ćwiczenie 1

$$\overline{\Omega} = 36$$

$$\text{a) } A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$\overline{A} = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\overline{B} = 18, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

### Multiteka

- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry
- Obliczanie prawdopodobieństwa – rozwiązanie zadania

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.8



### Przykład 2

Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie cyfry tej liczby są nieparzyste.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest zbiorem wszystkich trzelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

$$\text{Stąd } \overline{\Omega} = 6^3 = 216.$$

Rozpatrujemy zdarzenie losowe  $A$ , którego elementami są wszystkie trzelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru  $\{1, 3, 5\}$ .

$$\text{Stąd } \overline{A} = 3^3 = 27.$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

### Ćwiczenie 2

Rzucamy czterokrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest podzielna przez: a) 5, b) 4.

### Przykład 3

Z urny, w której są 3 kule zielone i 5 kul niebieskich, losujemy jednocześnie 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul tego samego koloru?

$\Omega$  jest zbiorem dwuelementowych kombinacji zbioru ośmioelementowego.

$$\text{Zatem } \overline{\Omega} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28.$$

Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na wylosowaniu 2 kul zielonych lub 2 kul niebieskich:

$$\overline{A} = \binom{3}{2} + \binom{5}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 3 + 10 = 13$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{13}{28}.$$

### Ćwiczenie 3

Z urny, w której jest 8 kul białych i 4 czarne, losujemy jednocześnie 4 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:

- a) będą kule tylko jednego koloru,      c) będą 3 kule czarne i 1 biała,
- b) będą 2 kule białe i 2 czarne,      d) będą co najmniej 3 kule białe.

### Ćwiczenie 2

$$\overline{\Omega} = 6^4$$

$$\text{a) } \overline{A} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 6^3$$

$$P(A) = \frac{6^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

b) Dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Jest 9 takich możliwości: 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64.

$$\overline{B} = 6 \cdot 6 \cdot 9 = 6^2 \cdot 9$$

$$P(B) = \frac{6^2 \cdot 9}{6^4} = \frac{1}{4}$$

### Ćwiczenie 3

$$\overline{\Omega} = \binom{12}{4} = 495$$

$$\text{a) } \overline{A} = \binom{4}{4} + \binom{8}{4} = 71, P(A) = \frac{71}{495}$$

$$\text{b) } \overline{B} = \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} = 168, P(B) = \frac{168}{495} = \frac{56}{165}$$

$$\text{c) } \overline{C} = \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{1} = 32, P(C) = \frac{32}{495}$$

$$\text{d) } \overline{D} = \binom{8}{3} \cdot \binom{4}{1} + \binom{8}{4} = 294, P(D) = \frac{294}{495} = \frac{98}{165}$$

## Odpowiedzi do zadań

- $A = \{(o, o, o, r), (o, o, r, o), (o, r, o, o), (r, o, o, o), (o, o, o, o)\}$   
 $B = \{(o, o, r, r), (o, r, o, r), (o, r, r, o), (r, o, o, r), (r, o, r, o), (r, r, o, o)\}$   
 $C = \{(o, o, r, r), (o, r, o, r), (o, r, r, o), (r, o, o, r), (r, o, r, o), (r, r, o, o), (o, o, o, o), (r, r, r, r)\}$   
 Najbardziej prawdopodobne jest zdarzenie  $C$ .
- $\overline{\Omega} = 36$   
 a)  $A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$   
 $\overline{A} = 4, P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$   
 b)  $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$   
 $\overline{B} = 16, P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
- $\overline{\Omega} = 6^3 = 216$   
 a)  $A = \{(1, 2, 4), (4, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$   
 $\overline{A} = 8, P(A) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$   
 b)  $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 2, 2), (2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 2, 1), (3, 3, 3), (3, 4, 5), (4, 3, 2), (4, 4, 4), (4, 5, 6), (5, 3, 1), (5, 4, 3), (5, 5, 5), (6, 4, 2), (6, 5, 4), (6, 6, 6)\}$   
 $\overline{B} = 18, P(B) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$
- $\overline{\Omega} = 90$   
 a)  $A = \{29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65\}$   
 $\overline{A} = 8, P(A) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$   
 b)  $B = \{15, 51, 24, 42, 33, 60\}$   
 $\overline{B} = 6, P(B) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$
- $\overline{\Omega} = 900$   
 a)  $A = \{101, 110, 200\}$   
 $\overline{A} = 3, P(A) = \frac{3}{900} = \frac{1}{300}$   
 b)  $B = \{111, 102, 120, 201, 210, 300\}$   
 $\overline{B} = 6, P(B) = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}$
- $\overline{\Omega} = 6^4 = 1296$   
 a)  $\overline{A} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$   
 $P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$   
 b)  $\overline{B} = 6, P(B) = \frac{6}{1296} = \frac{1}{216}$

## Zadania

- Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Rozpatrzmy zdarzenia:  
 $A$  – wypadły co najmniej trzy orły,  
 $B$  – liczba orłów jest równa liczbie reszek,  
 $C$  – wypadła parzysta liczba reszek.  
 Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?
- Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:  
 a) liczba oczek otrzymana w drugim rzucie jest o 2 większa od liczby oczek otrzymanej w pierwszym rzucie,  
 b) liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się co najwyżej o 1.
- Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymane kolejno liczby oczek tworzą ciąg:  
 a) geometryczny, b) arytmetyczny.
- Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb dwucyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 11, b) 6.
- Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb trzycyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 2, b) 3.
- Windą zatrzymującą się na 6 piętrach jadą 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:  
 a) każda osoba wysiadzie na innym piętrze,  
 b) wszyscy wysiadą na tym samym piętrze.
- Dziesięć kul rozmieszczamy w dziesięciu szufladach (kule i szuflady rozróżniamy). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda szuflada będzie zajęta.
- Z urny, w której jest 6 kul białych i 4 czarne, losujemy jednocześnie 8 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w urnie zostaną:  
 a) tylko kule białe, b) kule różnych kolorów.
- Z urny, w której znajduje się 7 kul białych i 5 czarnych, losujemy jednocześnie 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:  
 a) będą 2 kule czarne i 1 biała, c) będą tylko kule białe,  
 b) będą 2 kule białe i 1 czarna, d) będą kule biała i czarna.
- $\overline{\Omega} = 10^{10}, \overline{A} = 10!, P(A) = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9} = 0,00036288$
- $\overline{\Omega} = \binom{10}{8} = 45$   
 a)  $\overline{A} = \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{4} = 15, P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$   
 b)  $\overline{B} = \binom{6}{5} \cdot \binom{4}{3} = 24, P(B) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$
- $\overline{\Omega} = \binom{12}{3} = 220$   
 a)  $\overline{A} = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1} = 70, P(A) = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$   
 b)  $\overline{B} = \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} = 105, P(B) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$   
 c)  $\overline{C} = \binom{7}{3} = 35, P(C) = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$   
 d)  $\overline{D} = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1} + \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} = 175, P(D) = \frac{175}{220} = \frac{35}{44}$

10. a) Na loterii jest 40 losów, w tym 4 wygrywające. Kupujemy 2 losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród nich będzie dokładnie 1 los wygrywający.  
b) Na pierwszej loterii jest 10 losów, w tym 1 wygrywający, a na drugiej – 20 losów, w tym 2 wygrywające. Na której loterii szanse wygrania są większe, jeśli kupujemy 2 losy?
11. W dwudziestoosobowej klasie, w której jest 8 dziewcząt, rozlosowano 6 biletów do kina. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilety otrzyma:  
a) dokładnie troje dziewcząt, b) co najmniej troje dziewcząt.
12. Z worka, w którym jest 5 par butów, wyjmujemy losowo 2 buty. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia butów tworzących parę. Ile razy zwiększy się prawdopodobieństwo wyciągnięcia pary, jeśli będziemy losować 3 buty?
13. Egzamin składa się z 10 pytań, na które możemy odpowiedzieć „tak” lub „nie”. Oblicz prawdopodobieństwo zdania egzaminu, jeśli odpowiedzi podajemy losowo i aby zdać, musimy odpowiedzieć poprawnie na co najmniej:  
a) 9 pytań, b) 7 pytań.
-  14. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania trzy karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania: a) samych asów, b) dwóch asów i króla.
-  15. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania cztery karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:  
a) dwóch kierów, pika i trefla, b) co najwyżej jednego asa,  
c) co najmniej trzech króli, d) co najmniej jednej damy.
16. W urnie jest 6 kul białych i pewna liczba kul czarnych. Losujemy dwa razy bez zwracania po jednej kuli. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe  $\frac{1}{3}$ . Ile kul czarnych znajduje się w tej urnie?

Klasyczną definicję prawdopodobieństwa precyzyjnie sformułował francuski matematyk, fizyk i astronom Pierre Simon de Laplace [czyt. pier sima de laplas] (1749–1827). Zamieścił ją w dziele *Théorie analytique des probabilités* (Analityczna teoria prawdopodobieństwa), wydany w 1812 r. Od 1785 r. Laplace był członkiem Akademii Nauk w Paryżu.



10. a)  $\overline{\Omega} = \binom{40}{2} = 780$   
 $\overline{A} = \binom{4}{1} \cdot \binom{36}{1} = 144$   
 $P(A) = \frac{144}{780} = \frac{12}{65}$   
b)  $\overline{\Omega}_1 = \binom{10}{2} = 45$   
 $\overline{A}_1 = \binom{1}{1} \cdot \binom{9}{1} = 9$   
 $P(A_1) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = \frac{38}{190}$   
 $\overline{\Omega}_2 = \binom{20}{2} = 190$   
 $\overline{A}_2 = \binom{2}{1} \cdot \binom{18}{1} + \binom{2}{2} = 37$   
 $P(A_2) = \frac{37}{190}$   
Szanse wygrania są większe na pierwszej loterii.
11.  $\overline{\Omega} = \binom{20}{6} = 38\,760$   
a)  $\overline{A} = \binom{8}{3} \cdot \binom{12}{3} = 56 \cdot 220 = 12\,320$   
 $P(A) = \frac{12\,320}{38\,760} = \frac{308}{969}$   
b)  $\overline{B} = \binom{8}{3} \cdot \binom{12}{3} + \binom{8}{4} \cdot \binom{12}{2} + \binom{8}{5} \cdot \binom{12}{1} + \binom{8}{6} \cdot \binom{12}{0} = 12\,320 + 4620 + 672 + 28 = 17\,640$   
 $P(B) = \frac{17\,640}{38\,760} = \frac{147}{323}$
12. 2 buty:  $\overline{\Omega} = \binom{10}{2} = 45$   
 $\overline{A} = \binom{5}{1} = 5$ ,  $P(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$   
3 buty:  $\overline{\Omega} = \binom{10}{3} = 120$   
 $\overline{B} = \binom{5}{1} \cdot \binom{8}{1} = 40$   
 $P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$   
 $P(B) = 3 \cdot P(A)$   
Większy się 3 razy.
13.  $\overline{\Omega} = 2^{10} = 1024$   
a)  $\overline{A} = \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 10 + 1 = 11$   
 $P(A) = \frac{11}{1024}$   
b)  $\overline{B} = \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 120 + 45 + 11 + 1 = 176$   
 $P(B) = \frac{176}{1024} = \frac{11}{64}$

14.  $\overline{\Omega} = \binom{52}{3} = 22\,100$   
a)  $\overline{A} = \binom{4}{3} = 4$ ,  $P(A) = \frac{4}{22\,100} = \frac{1}{5525}$   
b)  $\overline{B} = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 24$ ,  $P(B) = \frac{24}{22\,100} = \frac{6}{5525}$
15.  $\overline{\Omega} = \binom{52}{4} = 270\,725$   
a)  $\overline{A} = \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 78 \cdot 13^2 = 13\,182$ ,  $P(A) = \frac{13\,182}{270\,725} = \frac{1014}{20\,825}$   
b)  $\overline{B} = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{1} + \binom{4}{4} = 192 + 1 = 193$ ,  $P(B) = \frac{193}{270\,725}$   
c)  $\overline{C} = \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{3} + \binom{4}{4} = 4 \cdot 17\,296 + 1 = 69\,180$ ,  $P(C) = \frac{263\,764}{270\,725}$   
d)  $D'$  – nie wylosowano żadnej damy,  $\overline{D'} = \binom{48}{4} = 194\,580$ ,  
 $P(D) = 1 - \frac{194\,580}{270\,725} = \frac{15\,229}{54\,145}$
16. 4

#### Uczeń:

- podaje rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu kostką,
- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego,
- stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń,
- sprawdza, czy zdarzenia się wykluczają,
- stosuje własności prawdopodobieństwa w dowodach twierdzeń oraz w zadaniach wykorzystujących własności prawdopodobieństwa.

## 1.9. Własności prawdopodobieństwa

Sformułujemy teraz definicję prawdopodobieństwa pozwalającą również opisywać sytuacje, w których zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne.

### Definicja

**Prawdopodobieństwem** nazywamy funkcję  $P$  określoną na skończonym zbiorze zdarzeń elementarnych  $\Omega$  o wartościach rzeczywistych spełniającą następujące warunki:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$  dla dowolnego  $A \subset \Omega$ ,
2.  $P(\emptyset) = 0$  i  $P(\Omega) = 1$ ,
3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  dla dowolnych zdarzeń rozłącznych  $A, B \subset \Omega$ .

Liczbę  $P(A)$  nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$** .

### Przykład 1

Pewną niesymetryczną kostkę poddano testowi, wykonując długą serię rzutów. W tabeli podano w procentach częstość występowania danych liczb oczek.

| Liczba oczek          | 1     | 2     | 3     | 4   | 5     | 6   |
|-----------------------|-------|-------|-------|-----|-------|-----|
| Częstość występowania | 12,5% | 12,5% | 12,5% | 25% | 12,5% | 25% |

Zwróćmy uwagę, że częstość występowania nie jest taka sama dla wszystkich wyników. Na tej podstawie można przyjąć dla testowanej kostki następujące prawdopodobieństwa pojawienia się danych liczb oczek.

| Liczba oczek       | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Prawdopodobieństwo | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

Niech  $A$  oznacza wyrzucenie parzystej liczby oczek, a  $B$  – liczby oczek większej od 2. Wówczas:  $P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ ,

$$P(B) = P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Prawdopodobieństwo na skończonym zbiorze  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  czasami określa się, podając prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń elementarnych. Dla każdego ze zdarzeń  $\omega_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ , podaje się liczbę nieujemną  $p_i$  tak, aby spełniony był warunek:  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  (jak w przykładzie 1). Mówimy wtedy, że na zbiorze  $\Omega$  został określony **rozkład prawdopodobieństwa**. Wówczas prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A \subset \Omega$  jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ .

### Multiteka

- Obliczanie prawdopodobieństwa – rozwiązanie zadania

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.9

**Generator**  
testów i sprawdzianów

## Twierdzenie

Niech  $P$  będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze  $\Omega$ .  
Wówczas dla dowolnych zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ , jeśli  $A \subset B$ , to  $P(A) \leq P(B)$ .

### Dowód

Jeśli  $A \subset B$ , to  $B = A \cup (B \setminus A)$ . Zbiory  $A$  i  $B \setminus A$  są rozłączne, więc:

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Stąd  $P(A) \leq P(B)$ , ponieważ  $P(B \setminus A) \geq 0$ .

## Twierdzenie

Niech  $P$  będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze  $\Omega$ .  
Wówczas dla dowolnego zdarzenia  $A \subset \Omega$ :  $P(A') = 1 - P(A)$ .

**Uwaga.** Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia warunki prawdopodobieństwa zdefiniowanego w tym temacie.

### Ćwiczenie 1

Udowodnij powyższe twierdzenie.

**Uwaga.** W dalszym ciągu podręcznika dla rzutu kostką (monetą) będziemy przyjmować, że kostka (moneta) jest symetryczna, czyli że wszystkie ścianki (orzeł lub reszka) wypadają z takim samym prawdopodobieństwem, chyba że zaznaczono, że jest inaczej.

### Przykład 2

Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł.

Zauważmy, że  $\overline{\Omega} = 8$ . Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego orła w trzech rzutach. Rozpatrzmy zdarzenie  $A'$  przeciwne do zdarzenia  $A$ . Polega ono na wyrzuceniu samych reszek:  $A' = \{(r, r, r)\}$ . Zatem  $\overline{A'} = 1$ , czyli  $P(A') = \frac{\overline{A'}}{\overline{\Omega}} = \frac{1}{8}$ . Stąd  $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ .

### Ćwiczenie 2

- a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie reszka.  
b) Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz otrzymamy 6 oczek.

### Ćwiczenie 3

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

$A$  – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest równa co najmniej 4,  
 $B$  – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest mniejszy od 25.

### Ćwiczenie 3

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

$A'$  – suma oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejsza niż 4

$$A' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}, \overline{A'} = 3, P(A) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

$B'$  – iloczyn oczek, które wypadną w obu rzutach, jest większy lub równy 25

$$B' = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}, \overline{B'} = 4, P(B) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

### Ćwiczenie 1

Jeśli  $A \subset \Omega$ , to  $A \cup A' = \Omega$ .

Zbiory  $A$  i  $A'$  są rozłączne, więc:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A \cup A') = \\ &= P(A) + P(A'). \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} P(A') &= P(\Omega) - P(A) = \\ &= 1 - P(A). \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 2

a)  $\overline{\Omega} = 2^4 = 16$

$A$  – przynajmniej raz wypadnie reszka

$A'$  – nie wypadnie żadna reszka

$$A' = \{(o, o, o, o)\}, \overline{A'} = 1$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

b)  $\overline{\Omega} = 6^3 = 216$

$B$  – przynajmniej raz wypadnie szóstka

$B'$  – nie wypadnie żadna szóstka

$$\overline{B'} = 5^3 = 125$$

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(B') = 1 - \frac{125}{216} = \\ &= \frac{91}{216} \end{aligned}$$

#### Ćwiczenie 4

a)  $P(A \setminus B) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

b)  $B \subset A$  stąd  $A \cap B = B$

$$P(A \setminus B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

#### Ćwiczenie 5

$$\overline{\Omega} = 90$$

$$\overline{A} = 30, P(A) = \frac{30}{90}$$

$$\overline{B} = 22, P(B) = \frac{22}{90}$$

$$\overline{A \cap B} = 8, P(A \cap B) = \frac{8}{90}$$

$$P(A \setminus B) = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$

$$P(B \setminus A) = \frac{14}{90} = \frac{7}{45}$$

### Twierdzenie

Niech  $P$  będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze  $\Omega$ . Wówczas dla dowolnych zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ :

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

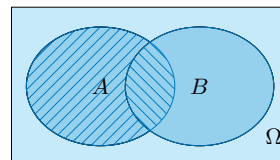
#### Dowód

Dla dowolnych  $A, B \subset \Omega$  mamy:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B), \text{ więc:}$$

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

$$\text{stąd } P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$



Zauważ, że zbiory  $A \setminus B$  oraz  $A \cap B$  są rozłączne.

#### Ćwiczenie 4

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A \setminus B$ , jeśli:

a)  $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{5}{9},$

b)  $B \subset A, P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{6}.$

#### Ćwiczenie 5

Spośród wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną.

Rozpatrzmy zdarzenia:

$A$  – wylosowana liczba jest podzielna przez 3,

$B$  – wylosowana liczba jest podzielna przez 4.

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń  $A \setminus B, B \setminus A$ .

### Twierdzenie

Niech  $P$  będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze  $\Omega$ . Wówczas dla dowolnych zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ :

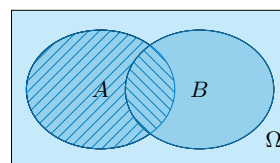
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

#### Dowód

Dla dowolnych  $A, B \subset \Omega$  mamy:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B, \text{ więc:}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B). \end{aligned}$$



Zauważ, że zbiory  $A \setminus B$  oraz  $B$  są rozłączne.

#### Ćwiczenie 6

Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ , jeśli:

a)  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4},$

b)  $P(A) = \frac{2}{9}, P(B) = \frac{5}{12}, P(A \cap B) = \frac{1}{6},$

c)  $P(A) = \frac{7}{8}, P(B') = \frac{5}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$

#### Ćwiczenie 6

a)  $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

b)  $P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{17}{36}$

c)  $P(A \cup B) = \frac{7}{8} + (1 - \frac{5}{8}) - \frac{1}{4} = 1$

## Zadania

- Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ , jeśli:
  - $P(A) = \frac{2}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ,
  - $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{11}{15}$ .
- Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ , jeśli:
  - $P(A') = 0,4$ ,  $P(B') = 0,85$ ,  $P(A \cup B) = 0,7$ ,
  - $P(A \setminus B) = 0,4$ ,  $P(B \setminus A) = 0,1$ ,  $P((A \cup B)') = 0,25$ .
- D Uzasadnij, że jeśli  $B \subset A \subset \Omega$ , to  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ .
- Niech  $A, B \subset \Omega$ . Oblicz prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń  $A \setminus B$ , jeśli:
  - $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  i  $P(A) = \frac{3}{8}$ ,
  - $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$  i  $P(B) = \frac{7}{10}$ .
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Czy zdarzenia  $A, B \subset \Omega$  mogą się wykluczać, jeśli  $P(A) = \frac{1}{2}$  i  $P(B) = \frac{3}{5}$ ?

Założmy, że zdarzenia  $A$  i  $B$  się wykluczają. Wówczas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} > 1$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem zdarzenia te nie mogą się wykluczać.

Czy zdarzenia  $A, B \subset \Omega$  mogą się wykluczać?

$$\text{a) } P(A) = \frac{4}{5}, P(B) = \frac{1}{4} \qquad \text{b) } P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{5}$$

- Czy zdarzenia  $A$  i  $B$  mogą się wykluczać, jeśli wiadomo, że  $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ ,  $P(A \setminus B) = \frac{3}{8}$ ,  $P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$ ?
- D a) Wykaż, że jeśli  $P(A) = \frac{3}{4}$ ,  $P(B) = \frac{1}{8}$ , to  $P(A \cup B) \leq \frac{7}{8}$ .  
b) Wykaż, że jeśli  $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ , to  $P(A \cap B) \geq \frac{1}{3}$ .
- Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:  
 $A$  – w obu rzutach otrzymano parzystą liczbę oczek lub obie otrzymane liczby oczek są większe od 3,  
 $B$  – iloczyn liczb otrzymanych oczek jest nieparzysty lub większy od 24.
- Losujemy jedną liczbę spośród liczb  $1, 2, 3, \dots, 100$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez: a) 2 lub 3, b) 3 lub 7.
- Losujemy jedną liczbę spośród liczb  $1, 2, 3, \dots, 200$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 5.

- a)  $P(A \cap B) \in \langle 0; 1 \rangle$ , stąd  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$   
 b)  $P(A \cup B) \leq 1$  oraz  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , stąd  
 $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$   
 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} - P(A \cap B) \leq 1$   
 $P(A \cap B) \geq \frac{1}{8}$   
 8.  $P(A) = \frac{7}{18}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$   
 9. a) 0,67 b) 0,43  
 10. 0,4

## Odpowiedzi do zadań

- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$   
 a)  $P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{1}{12}$   
 b)  $P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{11}{15} = 0$
- a)  $P(A) = 1 - P(A') = 0,6$   
 $P(B) = 1 - P(B') = 0,15$   
 $P(A \cap B) = 0,05$   
 b)  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$   
 Zbiory  $(A \setminus B)$ ,  $(B \setminus A)$ ,  $(A \cap B)$  są rozłączne, stąd  
 $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$   
 $P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)') = 0,75$   
 $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \setminus B) - P(B \setminus A) = 0,25$
- Jeśli  $B \subset A \subset \Omega$ , to  $A \cap B = B$ .  
 $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$
- a)  $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$   
 b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- a)  $P(A \cup B) = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{21}{20} > 1$ , czyli zdarzenia nie mogą się wykluczać.  
 b)  $P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} < 1$ , czyli zdarzenia mogą się wykluczać.
- Założmy, że zdarzenia się wykluczają, czyli  $P(A \cap B) = 0$ . Wtedy:  
 $P(A) = P(A \setminus B) = \frac{3}{8}$   
 $P(B) = P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$   
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \neq \frac{7}{8}$   
 Zatem zdarzenia nie mogą się wykluczać.

11. a)  $P(B) = \frac{5}{6}$   
 $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = 1$   
 $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') =$   
 $= 1 - P(A \cup B) = 0$   
 b)  $P(B \setminus A) = P(B) +$   
 $- P(A \cap B),$   
 stąd  $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$   
 $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') =$   
 $= 1 - P(A \cap B) = \frac{7}{12}$
12.  $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') =$   
 $= 1 - P(A \cap B) = \frac{11}{12}$   
 $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') =$   
 $= 1 - P(A \cup B) =$   
 $= 1 - P(A) - P(B) +$   
 $+ P(A \cap B) = P(A') - 1 +$   
 $+ P(B') + P(A \cap B) = \frac{5}{12}$
13.  $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') =$   
 $= 1 - P(A \cup B) =$   
 $= 1 - P(A) - P(B) +$   
 $+ P(A \cap B) =$   
 $= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + P(A \cap B) =$   
 $= P(A \cap B)$
14.  $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$   
 $\overline{A} = 6 \cdot 5 = 30, P(A) = \frac{30}{36}$   
 $\overline{B} = 5 \cdot 5 = 25, P(B) = \frac{25}{36}$   
 $\overline{A \cap B} = 5 \cdot 4 = 20$   
 $P(A \cap B) = \frac{20}{36}$   
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) +$   
 $- P(A \cap B) = \frac{35}{36}$   
 $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') =$   
 $= 1 - P(A \cap B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$   
 $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') =$   
 $= 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{36}$
17.  $\overline{\Omega} = 100$   
 $A$  – liczba podzielna przez 3  
 $B$  – liczba podzielna przez 4  
 $C$  – liczba podzielna przez 7  
 $P(A) = 0,33, P(B) = 0,25$   
 $P(C) = 0,14$   
 $P(A \cap B) = 0,08$   
 $P(A \cap C) = 0,04$   
 $P(B \cap C) = 0,03$   
 $P(A \cap B \cap C) = 0,01$   
 $P(A \cup B \cup C) = 0,58$

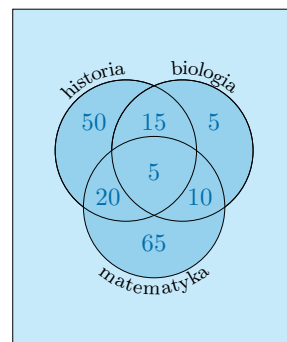
11. Korzystając z podanych w ramce równości, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

#### Prawa de Morgana

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

- a)  $A' \cap B'$ , jeśli  $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{1}{2},$   
 $P(B') = \frac{1}{6},$   
 b)  $A' \cup B'$ , jeśli  $A \subset B, P(B) = \frac{3}{4}, P(B \setminus A) = \frac{1}{3}.$
12. Niech  $A, B \subset \Omega$ . Korzystając z praw de Morgana, oblicz  $P(A' \cup B')$  oraz  $P(A' \cap B')$ , jeśli  $P(A') = \frac{3}{4}, P(B') = \frac{7}{12}$  oraz  $P(A \cap B) = \frac{1}{12}.$
13. Niech  $A, B \subset \Omega$ . Uzasadnij, że jeśli  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ , to:  
 $P(A \cap B) = P(A' \cap B')$
14. Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie  $A$  polega na tym, że w każdym rzucie otrzymamy inną liczbę oczek, a zdarzenie  $B$  – że ani razu nie otrzymamy szóstki. Oblicz  $P(A' \cup B')$  i  $P(A' \cap B')$ .
15. W pewnej grupie uczniów każdy zna język angielski lub niemiecki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania z tej grupy ucznia znającego język angielski jest równe  $\frac{7}{8}$ , natomiast prawdopodobieństwo wylosowania ucznia znającego język niemiecki jest równe  $\frac{4}{5}$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń zna obydwa języki.
16. W ankiecie przeprowadzonej wśród 200 uczniów klas czwartych pewnego liceum otrzymano następujące wyniki:
- matematykę lubi 100 uczniów,
  - historię lubi 90 uczniów,
  - biologię lubi 35 uczniów,
  - matematykę i historię lubi 25 uczniów,
  - matematykę i biologię lubi 15 uczniów,
  - historię i biologię lubi 20 uczniów,
  - matematykę, historię i biologię lubi 5 uczniów.
- Przerysuj do zeszytu diagram przedstawiony obok i go uzupełnij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów.



17. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  liczby podzielnej przez 3, 4 lub 7. Skorzystaj z poniższego wzoru na prawdopodobieństwo sumy trzech zdarzeń:
- $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) +$$
- $$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
15.  $A$  – uczeń zna język angielski,  $P(A) = \frac{7}{8}$   
 $N$  – uczeń zna język niemiecki,  $P(N) = \frac{4}{5}$   
 $A \cup N$  – uczeń zna język angielski lub niemiecki,  $P(A \cup N) = 1$   
 $A \cap N$  – uczeń zna oba języki  
 $P(A \cap N) = P(A) + P(N) - P(A \cup N) = \frac{27}{40}$
16.  $A$  – uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów  
 $\overline{A} = 200 - (100 + 50 + 15 + 5) = 200 - 170 = 30$   
 $P(A) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$

## Rozkład prawdopodobieństwa

W tabeli obok przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu symetryczną kostką. Zwróć uwagę, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

|            |               |               |               |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\omega_i$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $p_i$      | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

1. W tabeli obok przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek w tym doświadczeniu.
2. Na ściankach symetrycznej kostki znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 5, 5. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką.
3. Rzucamy raz niesymetryczną kostką. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przedstawiającą rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania 6 oczek jest dwa razy większe od prawdopodobieństwa otrzymania 5 oczek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek.
4. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami. Uczniowie A i B, opisując doświadczenie polegające na badaniu sumy wyrzuconych oczek, określili przestrzeń  $\Omega$  jako zbiór wszystkich możliwych sum:

|            |               |               |                |               |               |                |
|------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $\omega_i$ | 1             | 2             | 3              | 4             | 5             | 6              |
| $p_i$      | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ |

|            |               |                |               |               |                |               |
|------------|---------------|----------------|---------------|---------------|----------------|---------------|
| $\omega_i$ | 1             | 2              | 3             | 4             | 5              | 6             |
| $p_i$      | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ |

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Uczniowie podali następujące rozkłady prawdopodobieństwa.

Rozkład podany przez ucznia A:

|            |                |                |                |               |                |               |                |               |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| $\omega_i$ | 2              | 3              | 4              | 5             | 6              | 7             | 8              | 9             | 10             | 11             | 12             |
| $p_i$      | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

Rozkład podany przez ucznia B:

|            |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\omega_i$ | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| $p_i$      | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ |

Który z podanych rozkładów należałoby wziąć pod uwagę przy szacowaniu wyników powyższego doświadczenia wykonanego wiele razy?

## Odpowiedzi do zadań

$$1. P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

|            |               |               |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\omega_i$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             |
| $p_i$      | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

$$3. \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{10}$$

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{60}$$

4. Rozkład zaproponowany przez ucznia A.

### Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo warunkowe,
- stosuje wzór na prawdopodobieństwo warunkowe do wyznaczenia prawdopodobieństwa np. sumy, iloczynu, różnicy zdarzeń,
- dowodzi własności prawdopodobieństwa warunkowego.

### Ćwiczenie 1

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

$A$  – suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 10

a)  $A'$  – suma wyrzuconych oczek jest równa nie mniej niż 10

$$A' = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

## \*1.10. Prawdopodobieństwo warunkowe

### Przykład 1

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych oczek:

a) jest równa 11,    b) jest równa 11, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek.

a)  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$ , zatem  $\overline{\Omega} = 36$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu sumy oczek równej 11. Zdarzeniu  $A$  sprzyjają dwa wyniki:  $(5, 6)$  i  $(6, 5)$ , zatem  $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ .

b) Niech  $B$  będzie zdarzeniem polegającym na wyrzuceniu 5 oczek w pierwszym rzucie:  $B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$ . Spośród tych zdarzeń elementarnych jedynie wynik  $(5, 6)$  daje sumę oczek równą 11. Możemy to zapisać następująco:  $A \cap B = \{(5, 6)\}$ . Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe:

$$\frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{1}{6}$$

Wyrzucenie 5 oczek w pierwszym rzucie zwiększa więc szansę uzyskania sumy 11 oczek w obydwu rzutach kostką.

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ , gdy wiemy, że zaszło zdarzenie  $B$ , nazywamy **prawdopodobieństwem warunkowym** i oznaczamy  $P(A|B)$ . Zauważmy, że w schemacie klasycznym mamy  $P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}}$ .

Zatem:

$$P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{\frac{\overline{A \cap B}}{\overline{\Omega}}}{\frac{\overline{B}}{\overline{\Omega}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Definicja

Niech  $A, B \subset \Omega$  i  $P(B) > 0$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  **pod warunkiem**, że zaszło zdarzenie  $B$ , określamy wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek:

- a) jest mniejsza od 10,  
b) jest mniejsza od 10, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek,  
c) jest mniejsza od 10, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko.

b)  $B$  – w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek

$A \cap B$  – suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 10 i w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek

$$A \cap B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

$$P(A|B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

c)  $C$  – w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko

$A \cap C$  – suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 10 i w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko

$$P(A|C) = \frac{6}{6} = 1$$

## Ćwiczenie 2

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek:

- jest parzysta,
- jest parzysta, jeśli w pierwszym rzucie wypadły 3 oczka,
- jest parzysta, jeśli w pierwszym rzucie wypadły 4 oczka.

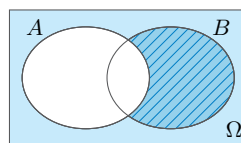
### D Przykład 2

Niech  $A, B \subset \Omega$ . Wykaż, że jeśli  $P(B) > 0$ , to  $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$ .

Zauważmy, że  $A' \cap B = B \setminus (A \cap B)$ .

Zatem:

$$\begin{aligned} 1 - P(A|B) &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(B \setminus (A \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = P(A'|B). \end{aligned}$$



## Ćwiczenie 3

Rzucamy trzema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie:

- co najmniej jedna szóstka,
- co najmniej jedna szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek,
- co najmniej jedna szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła taka sama liczba oczek.

### D Ćwiczenie 4

Niech  $A, B \subset \Omega$  i  $0 < P(B) < 1$ . Wykaż, że jeśli  $P(A|B) = P(A|B')$ , to  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

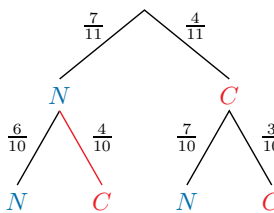
### Przykład 3

W urnie jest 7 kul niebieskich i 4 czerwone. Losujemy z niej kolejno dwie kule bez zwracania. Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim razem kuli czerwonej, a  $B$  – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli niebieskiej. Oblicz  $P(A|B)$ .

Drzewo obok jest ilustracją tego doświadczenia. Jeśli za pierwszym razem wyciągnęliśmy kulę niebieską, to w urnie pozostało 6 kul niebieskich i 4 czerwone. Zatem:

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Gałąź zaznaczona kolorem czerwonym przedstawia ten etap doświadczenia, który nas interesuje.



## Ćwiczenie 4

Zauważmy, że  $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$  oraz  $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \emptyset$ , stąd

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

Zatem:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Jeśli  $P(A|B) = P(A|B')$ , to:

$$\frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A)P(B) - P(A \cap B) \cdot P(B) = P(A \cap B) - P(A \cap B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

## Ćwiczenie 2

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

$A$  – suma wyrzuconych oczek jest parzysta

$$\text{a) } P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$b)$   $B$  – w pierwszym rzucie wypadły 3 oczka

$A \cap B$  – suma wyrzuconych oczek jest parzysta i w pierwszym rzucie wypadły 3 oczka

$$A \cap B = \{(3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$$

$$P(A|B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$c)$   $C$  – w pierwszym rzucie wypadły 4 oczka

$A \cap C$  – suma wyrzuconych oczek jest parzysta i w pierwszym rzucie wypadły 4 oczka

$$A \cap C = \{(4, 2), (4, 4), (4, 6)\}$$

$$P(A|C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## Ćwiczenie 3

$$\overline{\Omega} = 6^3 = 216$$

$A$  – wypadła co najmniej jedna szóstka

$a)$   $A'$  – nie wypadła żadna szóstka

$$\overline{A'} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$P(A') = \frac{125}{216}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{91}{216}$$

$b)$   $B$  – na każdej kostce wypadła inna liczba oczek

$$\overline{B} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

$$\overline{A' \cap B} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$P(A|B) = 1 - \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$c)$   $C$  – na każdej kostce wypadła taka sama liczba oczek

$$\overline{C} = 6$$

$A \cap B$  – wypadła co najmniej jedna szóstka i na każdej kostce wypadła taka sama liczba oczek

$$\overline{A \cap B} = 1$$

$$P(A|C) = \frac{1}{6}$$

### Ćwiczenie 5

$$P(A|B_1) = \frac{7}{11}, P(A|B_2) = \frac{6}{11}$$

### Odpowiedzi do zadań

1.  $A$  – wylosowano kulę o numerze parzystym  
 $B$  – wylosowano białą kulę  
 $P(A) = \frac{6}{13}, P(B) = \frac{4}{13}$   
 $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$   
a)  $P(A|B) = \frac{1}{2}$   
b)  $P(B|A) = \frac{1}{3}$
2. a)  $A$  – suma oczek równa 13  
 $B$  – w drugim rzucie wypadły 3 oczka  
 $A \cap B = \{(4, 3, 6), (5, 3, 5), (6, 3, 4)\}$   
 $P(A|B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$   
b)  $A$  – w drugim i w trzecim rzucie nieparzysta liczba oczek  
 $B$  – suma oczek równa 6  
 $B = \{(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 1)\}$   
 $A \cap B = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1), (4, 1, 1)\}$   
 $P(A|B) = \frac{3}{10}$
3.  $\overline{\Omega} = 9 \cdot 8$   
 $A$  – liczba podzielna przez 3  
 $A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 63, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 93, 96\}$   
a)  $P(A) = \frac{24}{98} = \frac{1}{3}$   
b)  $B$  – pierwszą z wylosowanych jest 1  
 $A \cap B = \{12, 15, 18\}$   
 $P(A|B) = \frac{3}{8}$   
c)  $C$  – pierwszą z wylosowanych jest 6  
 $A \cap B = \{63, 69\}$   
 $P(A|B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

### Ćwiczenie 5

Z urny, w której jest 5 kul białych i 7 czarnych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim razem kuli czarnej,  $B_1$  – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli białej,  $B_2$  – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli czarnej. Oblicz  $P(A|B_1)$  i  $P(A|B_2)$ . Umieść obliczone prawdopodobieństwa na odpowiednim drzewie.

### Zadania

1. W urnie są cztery kule białe oznaczone numerami 1, 2, 3, 4, trzy kule czarne oznaczone numerami 1, 2, 3 oraz jest sześć kul niebieskich oznaczonych numerami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:  
a) jest to kula o numerze parzystym, jeśli wiemy, że wylosowaliśmy kulę białą,  
b) jest to kula biała, jeśli wiemy, że wylosowaliśmy kulę o numerze parzystym.
2. Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:  
a) suma oczek jest równa 13, jeśli w drugim rzucie wypadły 3 oczka,  
b) zarówno w drugim, jak i w trzecim rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek, jeśli suma oczek w trzech rzutach była równa 6.
3. Z urny, w której są kule ponumerowane od 1 do 9, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Numery wylosowanych kul, zapisane w kolejności losowania, tworzą liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna:  
a) przez 3,  
b) przez 3, jeśli pierwszą z wylosowanych liczb jest 1,  
c) przez 3, jeśli pierwszą z wylosowanych liczb jest 6.
4. Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadła co najmniej raz szóstka, jeśli wiadomo, że:  
a) suma oczek, które wypadły w obydwu rzutach, była nieparzysta,  
b) w pierwszym rzucie wypadło więcej oczek niż w drugim.
5. Niech  $A, B \subset \Omega$ . Oblicz:  
a)  $P(A|B)$ , jeśli  $P(A') = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$  i  $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ,  
b)  $P(A|B)$ , jeśli  $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{5}$  i  $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ,  
c)  $P(B|A)$ , jeśli  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}, P(A) = \frac{1}{3}$  i  $P(B) = \frac{3}{4}$ .

4. a), b)  $\frac{1}{3}$

5. a)  $P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

b)  $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$

c)  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4}$

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

6. Z urny, w której jest 6 kul białych i 8 czarnych, losujemy kolejno trzy kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wylosujemy:

- kulę białą, jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były białe,
- kulę czarną, jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były różnego koloru.

7. Jedną kulę białą i sześć czarnych wrzucamy losowo do dwóch ponumerowanych szuflad. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że biała kula znajdzie się w pierwszej szufladzie, jeśli do drugiej wrzuciliśmy pięć kul.

8. Ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$  losujemy bez zwracania trzy liczby. Oznaczmy zdarzenia:

$A$  – suma wylosowanych liczb jest nieparzysta,

$B$  – iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

Które z prawdopodobieństw jest większe:  $P(A|B)$  czy  $P(B|A)$ ?

9. Niech  $A, B \subset \Omega$ . Oblicz:

- $P(B)$ , jeśli  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{6}$  i  $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ,
- $P(A)$ , jeśli  $P(B) = 2P(B')$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{5}$  oraz  $P(A|B') = \frac{3}{5}$ .

10. Niech  $A, B \subset \Omega$ . Oblicz:

- $P(A \cup B)$ , jeśli  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A') = \frac{1}{4}$  oraz  $P(A|B) = \frac{3}{5}$ ,
- $P(A \cup B)$ , jeśli  $P(A) = 2P(A')$  oraz  $P(A|B) = P(B|A) = \frac{1}{2}$ ,
- $P(A \cap B)$ , jeśli  $P(B) = P(B')$  oraz  $P(A|B) = \frac{1}{7}$ ,
- $P(A \setminus B)$ , jeśli  $P(A) = \frac{7}{8}$  oraz  $P(B|A) = \frac{3}{7}$ .

**D** 11. Niech  $A, B \subset \Omega$  i  $P(B) > 0$ . Wykaż, że  $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$ .

12. W pewnej klasie każdy uczeń umie pływać lub jeździć na nartach. Uczniowie umiejący pływać stanowią 80% wszystkich uczniów, a jeżdżący na nartach – 50%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń z tej klasy:

- umie pływać i jeździć na nartach,
- umie jeździć na nartach, jeśli umie pływać,
- umie jeździć na nartach, jeśli nie umie pływać,
- umie pływać, jeśli umie jeździć na nartach.

6. a) Jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były białe, to w urnie pozostało 8 kul czarnych i 4 białe. Zatem prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wylosujemy kulę białą, jest równe  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

b) Jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były różnego koloru, to w urnie pozostało 5 kul białych i 7 czarnych. Zatem prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wylosujemy kulę czarną, jest równe  $\frac{7}{12}$ .

7.  $A$  – biała kula jest w pierwszej szufladzie

$B$  – w drugiej szufladzie jest 5 kul

$$\overline{B} = \binom{7}{5} = 21$$

$$\overline{A \cap B} = \binom{6}{5} = 6$$

$$P(A|B) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

8.  $P(B|A) > P(A|B)$

9. a)  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ,

więc  $P(A \cap B) =$

$$= P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

b)  $P(B') = 1 - P(B) =$

$$= 1 - 2P(B'), \text{ więc}$$

$$P(B) = \frac{2}{3}, P(B') = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ więc}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} =$$

$$= \frac{P(A \setminus B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B')}$$

$$P(A) = P(A|B') \cdot P(B') +$$

$$+ P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$$

10. a)  $\frac{53}{60}$  b) 1 c)  $\frac{1}{14}$  d)  $\frac{1}{2}$

11. Wiemy, że  $P(A \cup B) \in (0; 1)$  stąd:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1 = P(B) - (1 - P(A)) =$$

$$= P(B) - P(A')$$

$$\text{Czyli } P(A \cap B) \geq P(B) - P(A')$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \frac{P(B) - P(A')}{P(B)} = 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$$

12.  $A$  – uczeń umie pływać,  $B$  – uczeń umie jeździć na nartach

$$P(A) = 0,8; P(B) = 0,5 \text{ oraz } P(A \cup B) = 1$$

$$\text{a) } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3$$

$$\text{b) } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,8} = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$\text{c) } P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,2}{0,2} = 1$$

$$\text{d) } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

## Zdarzenia niezależne

Zdarzenia  $A, B \subset \Omega$  nazywamy **niezależnymi**, jeśli  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Intuicyjnie zdarzenia określamy jako niezależne, jeśli nie mają wzajemnie na siebie wpływu. O zdarzeniach, które nie są niezależne, mówimy, że są **zależne**.

### Przykład

Na jednym z 64 pól szachownicy ustawiamy losowo wieżę. Rozpatrzmy zdarzenia:

$A$  – wieża została ustawiona w wierszu:

1, 2 lub 3

$B$  – wieża została ustawiona w kolumnie:

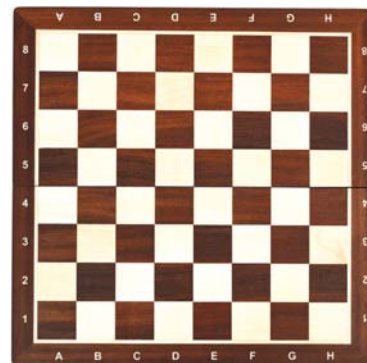
G lub H

Zatem  $P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$ ,  $P(B) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ .

Zdarzeniu  $A \cap B$  sprzyja sześć zdarzeń elementarnych: G1, G2, G3, H1, H2, H3, czyli:

$$P(A \cap B) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

Zauważmy, że  $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$ , zatem  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , co oznacza, że zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne.



### Odpowiedzi do zadań

- $P(C) = \frac{1}{2}$   
 $B \cap C = \{G1, G3, G5, G7, H1, H3, H5, H7\}$   
 $P(B \cap C) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$   
 $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(B \cap C)$ , więc zdarzenia  $B$  i  $C$  są niezależne.  
 $A \cap C$  – wieża ustawiona w wierszu 1 lub 3  
 $P(A \cap C) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$   
 $P(A) \cdot P(C) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16} \neq P(A \cap C)$ , więc zdarzenia  $A$  i  $C$  są zależne.
- $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$   
 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$   
 $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$ , więc zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne.

- Wykonujemy doświadczenie opisane w powyższym przykładzie. Rozpatrzmy zdarzenie  $C$  polegające na tym, że wieża została ustawiona w wierszu o numerze nieparzystym. Uzasadnij, że zdarzenia  $B$  i  $C$  są niezależne, a zdarzenia  $A$  i  $C$  są zależne.
- Rzucamy raz kostką. Uzasadnij, że zdarzenia:  $A$  – wypadła nieparzysta liczba oczek i  $B$  – wypadła liczba oczek większa od 4, są niezależne.
- Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:  $A$  – za pierwszym razem wypadła szóstka,  $B$  – za drugim razem wypadła szóstka,  $C$  – suma oczek w obydwu rzutach jest większa od 10. Uzasadnij, że zdarzenia:
  - $A$  i  $B$  są niezależne,
  - $A$  i  $C$  są zależne.
- Losujemy jedną liczbę spośród liczb  $1, 2, \dots, 100$ . Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby parzystej,  $B$  – liczby podzielnej przez 5,  $C$  – liczby podzielnej przez 6. Czy podana para zdarzeń to zdarzenia niezależne?
  - $A$  i  $B$
  - $A$  i  $C$
  - $B$  i  $C$
- Niech  $A, B \subset \Omega$ . Uzasadnij, że jeśli zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne oraz  $P(B) > 0$ , to  $P(A|B) = P(A)$ .

- $P(A) = \frac{1}{6}$ ,  $P(B) = \frac{1}{6}$ ,  $P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ 
  - $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$
  - $P(A \cap C) = \frac{2}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(C)$
- $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ ,  $P(C) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$ 
  - $P(A \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = P(A) \cdot P(B)$ , więc zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne.
  - $P(A \cap C) = P(C) \neq P(A) \cdot P(C)$ , więc zdarzenia  $A$  i  $B$  są zależne.
  - $P(B \cap C) = \frac{3}{100} \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{25} = P(B) \cdot P(C)$ , więc zdarzenia  $A$  i  $B$  są zależne.
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

## \*1.11. Prawdopodobieństwo całkowite

### Przykład 1

Wydawnictwo wydrukowało 80% nakładu pewnej książki w drukarni I, a pozostałe 20% – w drukarni II. Wady ma 0,1% książek z drukarni I i 0,6% książek z drukarni II. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana książka jest wadliwa.

Oznaczmy przez  $A$  zdarzenie, że wybrana książka jest wadliwa, przez  $B_1$ , że pochodzi z drukarni I, a przez  $B_2$ , że pochodzi z drukarni II. Mamy wówczas:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

Zdarzenia  $(A \cap B_1)$  i  $(A \cap B_2)$  się wykluczają, zatem:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

Stąd:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

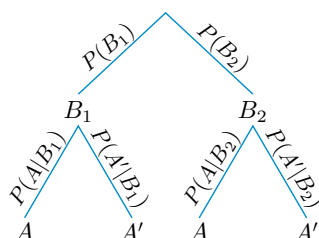
Podstawiamy  $P(B_1) = 0,8$ ,  $P(A|B_1) = 0,001$ ,  $P(B_2) = 0,2$ ,  $P(A|B_2) = 0,006$  i otrzymujemy:

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,001 + 0,2 \cdot 0,006 = 0,002$$

W powyższym przykładzie mieliśmy  $B_1 \cup B_2 = \Omega$  oraz  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Zastosowany przy tych założeniach wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

nosi nazwę **wzoru na prawdopodobieństwo całkowite**. Drzewo obok jest ilustracją graficzną tego wzoru.



Wzór na prawdopodobieństwo całkowite można sformułować bardziej ogólnie.

### Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Niech  $\Omega$  będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia  $B_1, B_2, \dots, B_n$  spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ( $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ ),
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A \subset \Omega$  opisuje wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

### Uczeń:

- sprawdza, czy są spełnione założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym,
- oblicza prawdopodobieństwo całkowite.

### Ćwiczenie 1

$A$  – wypadł orzeł

$B$  – rzucono monetą niesymetryczną

$B'$  – rzucono monetą symetryczną

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) \cdot P(A|B) + \\ &+ P(B') \cdot P(A|B') = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \\ &+ \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 2

a)  $A$  – wylosowano kulę białą

$B_1$  – wylosowano kulę z pierwszej urny

$B_2$  – wylosowano kulę z drugiej urny

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + \\ &+ P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

b)  $A$  – wylosowano kulę czarną

$B_1$  – wylosowano kulę z pierwszej urny

$B_2$  – wylosowano kulę z drugiej urny

$B_3$  – wylosowano kulę z trzeciej urny

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + \\ &+ P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \\ &+ P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{17}{40} \end{aligned}$$

### Przykład 2

W urnie  $U_1$  znajduje się 6 kul białych i 10 zielonych, a w urnie  $U_2$  – 12 kul białych i 4 zielone. Rzucamy dwukrotnie monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z urny  $U_1$ , w przeciwnym wypadku – z urny  $U_2$ . Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej.

Rozpatrzmy zdarzenia:

$A$  – wylosowana kula jest zielona,

$B$  – wypadły dwa orły.

Zauważmy, że  $P(A|B) = \frac{10}{16}$ ,  $P(A|B') = \frac{4}{16}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B') = \frac{3}{4}$ .

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B') \cdot P(A|B')$$

Zatem:

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{16} = \frac{10}{64} + \frac{12}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

### Ćwiczenie 1

Wśród 10 monet są 3 monety niesymetryczne, na których orzeł wypada z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$ , a pozostałe monety są symetryczne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w rzucie losowo wybraną monetą wypadnie orzeł.

### Ćwiczenie 2

a) W pierwszej urnie są 3 kule białe i 4 czarne, a w drugiej – 2 kule białe i 5 czarnych. Wybieramy losowo urnę, a z niej jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

b) W pierwszej urnie jest 6 kul białych i 4 czarne, w drugiej – po 8 kul białych i czarnych, a w trzeciej – 5 kul białych i 3 czarne. Wybieramy losowo urnę, a z niej jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

### Ćwiczenie 3

a) Fabryka kupuje 40% potrzebnych części od kooperanta  $A$ , 35% – od kooperanta  $B$  i 25% – od kooperanta  $C$ . Wady ma 1% części dostarczonych przez kooperanta  $A$ , 2% – dostarczonych przez kooperanta  $B$  i 4% – dostarczonych przez kooperanta  $C$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo część jest wadliwa.

b) Wydawnictwo wydrukowało 60% nakładu pewnej książki w drukarni I, 30% – w drukarni II, a pozostałe 10% – w drukarni III. Egzemplarze wadliwe stanowią odpowiednio 0,3%, 0,4%, 1% książek wydrukowanych w wymienionych drukarniach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana książka nie jest wadliwa.

### Ćwiczenie 3

a)  $A$  – wybrana część jest wadliwa

$B_1$  – wybrana część pochodzi od kooperanta  $A$

$B_2$  – wybrana część pochodzi od kooperanta  $B$

$B_3$  – wybrana część pochodzi od kooperanta  $C$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \\ &= 0,4 \cdot 0,01 + 0,35 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,04 = 0,021 \end{aligned}$$

b)  $A$  – wybrana książka jest wadliwa

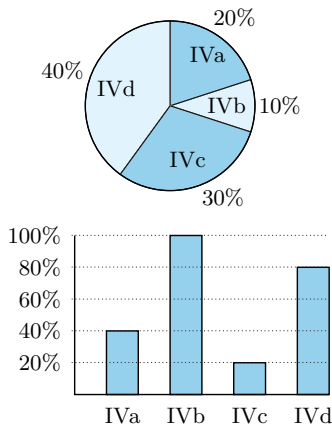
$B_1$  – książka z drukarni I,  $B_2$  – książka z drukarni II,  $B_3$  – książka z drukarni III

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \\ &= 0,6 \cdot 0,003 + 0,3 \cdot 0,004 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,004 \end{aligned}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 0,996$$

## Zadania

- Brygady  $B_1$ ,  $B_2$  i  $B_3$  produkują deski do prasowania. Wśród desek wyprodukowanych przez brygadę  $B_1$  jest 6% wadliwych, a wśród wyprodukowanych przez brygady  $B_2$  i  $B_3$  – po 3% wadliwych. Połowa desek znajdujących się w magazynie została wytworzona przez brygadę  $B_3$ , a pozostałe (w tej samej liczbie) przez brygady  $B_1$  i  $B_2$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że deska wybrana losowo z magazynu jest wadliwa.
- Mamy 10 urn. Do czterech wrzucono po 4 kule białe, 4 czarne i 1 niebieskiej, a do sześciu pozostałych – po 2 kule białe, 3 czarne i 4 niebieskie. Z losowo wybranej urny losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów.
- Maszyny  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  i  $M_4$  produkują żarówki. Maszyny  $M_1$ ,  $M_2$  i  $M_3$  wyprodukowały taką samą liczbę żarówek, a maszyna  $M_4$  – dwa razy więcej niż każda z pozostałych. Maszyny  $M_1$  i  $M_2$  produkują po 2% wadliwych żarówek, a maszyny  $M_3$  i  $M_4$  – po 4%. Wszystkie wytworzone żarówki znajdują się w magazynie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żarówka wybrana losowo z magazynu jest wadliwa.
- Grupa uczniów klas czwartych ma przystąpić do egzaminu maturalnego z języka niemieckiego. Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy udział w tej grupie uczniów z każdej klasy. Uczniom przed egzaminem zadano pytanie: „Czy czujesz się dobrze przygotowany do egzaminu?”. Na diagramie słupkowym przedstawiono procentowy rozkład odpowiedzi twierdzących. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń odpowiedział na pytanie twierdząco.
- W pierwszej szkatułce jest 10 monet złotych i 5 srebrnych, a w drugiej – 5 monet złotych i 10 srebrnych. Możemy losować trzema sposobami:
  - losujemy po jednej monecie z każdej szkatułki,
  - przekładamy monety do jednej szkatułki i losujemy z niej dwie monety,
  - losowo wybieramy szkatułkę, a z niej losujemy dwie monety.
 Przy którym sposobie losowania prawdopodobieństwo wylosowania dwóch złotych monet jest największe?



## Odpowiedzi do zadań

- $A$  – wybrana deska jest wadliwa  

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{80}$$
- $A$  – wybrano kule różnych kolorów  
 $A'$  – wybrano kule tych samych kolorów  
 $B_1$  – kule z urn I typu  
 $B_2$  – kule z urn II typu  

$$P(A') = P(B_1) \cdot P(A'|B_1) + P(B_2) \cdot P(A'|B_2) = \frac{4}{10} \cdot \left( \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \right) + \frac{6}{10} \cdot \left( \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \right) = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{7}{10}$$

- $A$  – wybrana żarówka jest wadliwa  

$$P(A) = P(M_1) \cdot P(A|M_1) + P(M_2) \cdot P(A|M_2) + P(M_3) \cdot P(A|M_3) + P(M_4) \cdot P(A|M_4) = 0,2 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,04 = 0,032$$
- $A$  – wybrany uczeń odpowiedział na pytanie twierdząco  

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,56$$
- I.  $\frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{2}{9} \approx 0,22$   
 II.  $\frac{\binom{15}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{105}{435} = \frac{7}{29} \approx 0,24$   
 III.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{42} \approx 0,26$   
 Trzeci sposób jest najlepszy.

$$7. \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} \cdot \frac{n-2}{n+2} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+4)(n+3)(n+2)} = \frac{1}{14}$$

$$13n^3 - 51n^2 + 2n - 24 = 0$$

$$n = 4$$

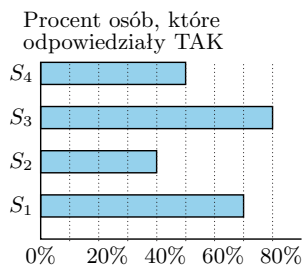
8. W jednej urnie są 2 losy wygrywające, w drugiej urnie – 98 losów przegrywających.

6. W pewnej grupie, liczącej  $m$  dziewcząt i  $n$  chłopców, 25% dziewcząt i 60% chłopców interesuje się hokejem. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej grupy interesuje się hokejem, wynosi  $\frac{3}{7}$ . Oblicz stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców w tej grupie.

7. W pierwszej urnie jest 6 kul białych i 2 czarne, a w drugiej jest  $n$  kul białych i 4 czarne. Z losowo wybranej urny losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz  $n$ , jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia trzech białych kul jest równe  $\frac{3}{14}$ .

8. Na loterii jest 100 losów, w tym 2 losy wygrywające. Wszystkie losy podzielono na dwie części i wrzucono do dwóch urn, przy czym do każdej urny trafiły co najmniej dwa losy. Wybieramy losowo urnę i wyciągamy z niej jeden los. Przy jakim rozmieszczeniu losów prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest największe?

9. W pewnym mieście są cztery salony fryzjerskie. Z usług salonu  $S_1$  korzysta  $\frac{1}{4}$  mieszkańców, z usług salonu  $S_2 - \frac{1}{5}$ , z usług salonu  $S_3 - \frac{3}{10}$ , a z usług  $S_4 - \frac{1}{20}$ . Każda z tych osób odwiedza tylko jeden wybrany salon. Pozostali mieszkańcy nie korzystają z usług tych salonów. Mieszkańcom zadano pytanie: „Czy jesteś zadowolony z usług swojego fryzjera?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany mieszkaniec tego miasta korzysta z usług salonu fryzjerskiego i jest z niego zadowolony.



10. Zbiór zadań z matematyki jest podzielony na 6 rozdziałów. Na diagramie A przedstawiono liczbę zadań w poszczególnych rozdziałach, a na diagramie B – liczbę zadań w poszczególnych rozdziałach, które należy rozwiązać, korzystając z kalkulatora. Rzucamy kostką i wybieramy rozdział, którego numer jest równy liczbie wyrzuconych oczek, a następnie losujemy jedno zadanie z tego rozdziału. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane zadanie należy rozwiązać bez użycia kalkulatora.

Diagram A

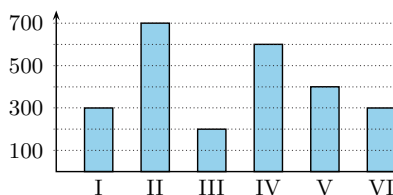
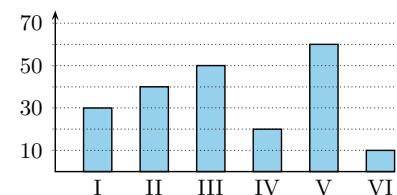


Diagram B



$$6. \frac{m}{m+n} \cdot 0,25 + \frac{n}{m+n} \cdot 0,6 = \frac{3}{7} / \cdot 7(m+n)$$

$$1,75m + 4,2n = 3m + 3n$$

$$1,25m = 1,2n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1,2}{1,25} = \frac{24}{25}$$

9.  $A$  – mieszkaniec zadowolony z usług zakładu fryzjerskiego

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot 0,7 + \frac{1}{5} \cdot 0,4 + \frac{3}{10} \cdot 0,8 + \frac{1}{20} \cdot 0,5 = 0,52$$

10.  $A$  – wylosowano zadanie do rozwiązywania z kalkulatorem

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{300} + \frac{1}{6} \cdot \frac{40}{700} + \frac{1}{6} \cdot \frac{50}{200} + \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{600} + \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{400} + \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{300} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{2}{35} + \frac{1}{4} + \frac{1}{30} + \frac{3}{20} + \frac{1}{30} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{42+24+105+14+63+14}{420} = \frac{131}{1260}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{1129}{1260}$$

## \*1.12. Wzór Bayesa

### Wzór Bayesa

Niech  $\Omega$  będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia  $B_1, B_2, \dots, B_n$  spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ( $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ ),
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to dla dowolnego zdarzenia  $A \subset \Omega$  o dodatnim prawdopodobieństwie prawdziwy jest wzór:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)}$$

**Uwaga.** Powyższy wzór jest też nazywany wzorem na prawdopodobieństwo przyczyny.

### D Ćwiczenie 1

Udowodnij wzór Bayesa (skorzystaj ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite).

#### Przykład 1

W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne, a w drugiej urnie – 4 kule białe i 1 kula czarna. Wybieramy losowo urnę, a z niej jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula pochodzi z pierwszej urny, jeśli wiadomo, że jest to kula biała.

Niech  $B_1$  oznacza zdarzenie polegające na wybraniu pierwszej urny, a  $B_2$  – na wybraniu drugiej urny. Zauważmy, że  $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej.

Wówczas  $P(A|B_1) = \frac{3}{5}$  i  $P(A|B_2) = \frac{4}{5}$ .

Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana biała kula pochodzi z pierwszej urny, jest równe:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3}{7}$$

#### Ćwiczenie 2

W pierwszej urnie jest 1 kula biała i 3 kule czarne. W drugiej urnie są 2 kule białe i 4 kule czarne. Z losowo wybranej urny wyjęto jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula pochodzi z pierwszej urny, jeśli wiadomo, że jest ona: a) czarna, b) biała.

#### Ćwiczenie 1

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)}$$

#### Ćwiczenie 2

$B_1$  – wybrano pierwszą urnę

$B_2$  – wybrano drugą urnę

a)  $A$  – wylosowano kulę czarną

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{9}{17}$$

b)  $A$  – wylosowano kulę białą

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}} = \frac{3}{7}$$

#### Uczeń:

- stosuje wzór Bayesa do obliczania prawdopodobieństwa przyczyny,
- udowadnia wzór Bayesa.

### Ćwiczenie 3

$B_1$  – wybrano pierwszą urnę

$B_2$  – wybrano drugą urnę

a)  $A$  – wylosowano kulę zieloną

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{9}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{9}} = \frac{6}{7}$$

b)  $A$  – wylosowano kulę niebieską

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{9}} = \frac{3}{5}$$

### Ćwiczenie 3

W I urnie są 2 kule zielone i 4 kule niebieskie. W II urnie jest 6 kul zielonych i 3 kule niebieskie. Rzucamy dwukrotnie monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z I urny. W pozostałych przypadkach losujemy kulę z II urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula pochodzi z II urny, jeśli wiadomo, że jest to kula: a) zielona, b) niebieska.

### Przykład 2

W sakwie znajduje się 20 monet:

- 6 pierwszego rodzaju – mających po obu stronach orła,
- 4 drugiego rodzaju – mających po obu stronach reszkę,
- 10 trzeciego rodzaju (typowych) – mających po jednej stronie orła, a po drugiej reszkę.

Wykonano dwa rzuty monetą losowo wybraną z sakwy i otrzymano dwa orły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucano monetą typową.

Wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:

$A$  – wyrzucono dwa orły,

$B_1$  – wylosowano monetę pierwszego rodzaju,  $P(B_1) = \frac{6}{20}$ ,

$B_2$  – wylosowano monetę drugiego rodzaju,  $P(B_2) = \frac{4}{20}$ ,

$B_3$  – wylosowano monetę trzeciego rodzaju,  $P(B_3) = \frac{10}{20}$ .

Zauważmy, że  $P(A|B_1) = 1$ ,  $P(A|B_2) = 0$ ,  $P(A|B_3) = \frac{1}{4}$ .

Korzystamy ze wzoru Bayesa i otrzymujemy:

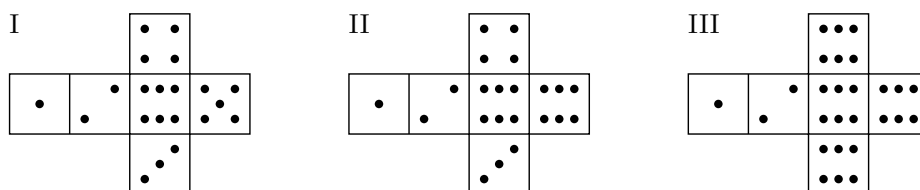
$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A|B_3)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{10}{20} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{6}{20} \cdot 1 + \frac{4}{20} \cdot 0 + \frac{10}{20} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{40}}{\frac{12}{40} + \frac{5}{40}} = \frac{5}{17}$$

Prawdopodobieństwo tego, że rzucano monetą typową, jest równe  $\frac{5}{17}$ .

### Ćwiczenie 4

Wybrano jedną z trzech kostek, których siatki przedstawiono poniżej.



Rzucono tą kostką dwukrotnie i otrzymano dwie szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że była to kostka: a) I, b) II, c) III.

### Ćwiczenie 4

$A$  – wyrzucono dwie szóstki

$B_1$  – rzucono kostką I

$B_2$  – rzucono kostką II

$B_3$  – rzucono kostką III

$$a) P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{1}{21}$$

$$b) P(B_2|A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{4}{21}$$

$$c) P(B_3|A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A|B_3)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{16}{21}$$

## Zadania

1. W szkatułce znajduje się 20 monet, z których 15 to monety typowe (mają orła i reszkę), a pozostałe mają po obu stronach reszki. Rzucono trzykrotnie losowo wybraną monetą i otrzymano trzy reszki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono monetą typową.
2. Z dwóch kostek jedna jest symetryczna, a dla drugiej prawdopodobieństwo otrzymania szóstki jest równe  $\frac{1}{5}$ . Rzucono dwukrotnie losowo wybraną kostką i wypadły dwie szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono kostką niesymetryczną.
3. Mamy dwie symetryczne kostki. Jedna jest klasyczna (z liczbami oczek 1, 2, 3, 4, 5, 6), natomiast na ściankach drugiej są następujące liczby oczek: 1, 3, 5, 5, 6, 6. Rzucamy dwukrotnie wybraną losowo kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono klasyczną kostką, jeśli suma wyrzucanych oczek była równa: a) 4, b) 11.
4. Statystycznie wśród 10 000 mężczyzn jest 500 daltonistów, a wśród 10 000 kobiet jest 50 daltonistek. Z grupy 100 mężczyzn i 400 kobiet wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana osoba jest kobietą, jeśli ma problemy z rozpoznawaniem kolorów.

5. W tabeli obok zebrano dane dotyczące znaków zodiaku uczniów w trzech trzydziestoosobowych klasach czwartych. Rzucamy monetą: jeśli wypadnie orzeł, to losujemy osobę z klasy IVa, jeśli wypadnie reszka, to rzucamy ponownie. Jeśli w drugim rzucie wypadnie orzeł, to losujemy osobę z klasy IVb, a jeśli reszka – z IVc.

| Znak zodiaku | IVa | IVb | IVc |
|--------------|-----|-----|-----|
| Baran        | 4   | 4   | 2   |
| Byk          | 3   | 2   | 3   |
| Bliźnięta    | 1   | 6   | 0   |
| Rak          | 2   | 1   | 5   |
| Lew          | 3   | 2   | 4   |
| Panna        | 5   | 0   | 2   |
| Waga         | 1   | 3   | 4   |
| Skorpion     | 1   | 3   | 2   |
| Strzelec     | 1   | 2   | 0   |
| Koziorożec   | 4   | 3   | 2   |
| Wodnik       | 3   | 1   | 2   |
| Ryby         | 2   | 3   | 4   |

- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana osoba jest spod znaku Bliźniąt.

- b) Stosując opisaną wyżej procedurę, wylosowaliśmy osobę, której znakiem zodiaku jest Wodnik. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to uczeń klasy IVa.

5.  $B_1$  – wylosowano osobę z klasy IVa  
 $B_2$  – wylosowano osobę z klasy IVb  
 $B_3$  – wylosowano osobę z klasy IVc  
 $P(B_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- a)  $A$  – wylosowano osobę spod znaku Bliźniąt

$$P(A|B_1) = \frac{1}{30}, P(A|B_2) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, P(A|B_3) = \frac{0}{30} = 0$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{15}$$

- b)  $B$  – wybrana osoba jest spod znaku Wodnika

$$P(B_1|B) = \frac{P(B_1) \cdot P(B|B_1)}{P(B_1) \cdot P(B|B_1) + P(B_2) \cdot P(B|B_2) + P(B_3) \cdot P(B|B_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{30}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{30}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{120}} = \frac{2}{3}$$

## Odpowiedzi do zadań

1.  $A$  – wyrzucono 3 reszki  
 $B_1$  – wybrano monetę typową  
 $B_2$  – wybrano monetę nietypową

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{15}{20} \cdot (\frac{1}{2})^3}{\frac{15}{20} \cdot (\frac{1}{2})^3 + \frac{5}{20} \cdot 1^3} = \frac{3}{11}$$

2.  $B_1$  – rzucono kostką niesymetryczną  
 $B_2$  – rzucono kostką symetryczną  
 $A$  – wypadły dwie szóstki

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B_1) = (\frac{1}{5})^2$$

$$P(A|B_2) = (\frac{1}{6})^2$$

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{36+25}{25 \cdot 36}} = \frac{36}{61}$$

3.  $B_1$  – rzucano klasyczną kostką  
 $B_2$  – rzucano nietypową kostką

- a)  $A$  – wyrzucono sumę oczek równą 4

$$B_1 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$$

$$B_2 = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{36}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{36}} = \frac{3}{5}$$

- b)  $A$  – wyrzucono sumę oczek równą 11

$$B_1 = B_2 = \{(5, 6), (6, 5)\}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{36}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{36}} = \frac{1}{5}$$

4.  $B_1$  – wybrana osoba jest mężczyzną  
 $B_2$  – wybrana osoba jest kobietą  
 $A$  – wybrana osoba jest daltonistą

$$P(B_1) = \frac{100}{100+400} = \frac{1}{5}$$

$$P(B_2) = \frac{400}{100+400} = \frac{4}{5}$$

$$P(A|B_1) = \frac{500}{10\,000} = \frac{1}{20}$$

$$P(A|B_2) = \frac{50}{10\,000} = \frac{1}{200}$$

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{200}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{200}} = \frac{4}{10+4} = \frac{2}{7}$$

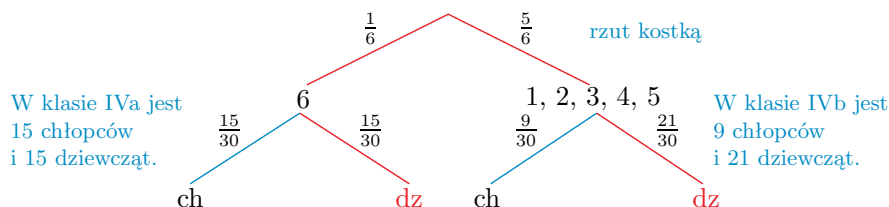
**Uczeń:**

- ilustruje doświadczenie wieloetapowe za pomocą drzewa,
- oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniu wieloetapowym.

**\*1.13. Doświadczenia wieloetapowe****Przykład 1**

W klasie IVa jest 15 chłopców i 15 dziewcząt, w klasie IVb jest 9 chłopców i 21 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie szóstka, to losujemy jedną osobę z klasy IVa, w przeciwnym razie losujemy jedną osobę z klasy IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną osobą będzie dziewczyna.

Przedstawiamy na drzewie ilustrację tego doświadczenia.



Zdarzeniu  $A$  polegającemu na wylosowaniu dziewczyny sprzyja wyrzucenie 6 oczek i wylosowanie dziewczyny z klasy IVa oraz wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 6 i wylosowanie dziewczyny z klasy IVb. Zatem:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{30} + \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{30} = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$$

W rozwiązaniu wykorzystujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Ilustrację przebiegu doświadczenia przedstawiamy za pomocą drzewa.

**Ćwiczenie 1**

$A$  – bilet otrzyma dziewczyna

$$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{10}{30} + \frac{4}{6} \cdot \frac{18}{30} = \frac{23}{45}$$

**Ćwiczenie 1**

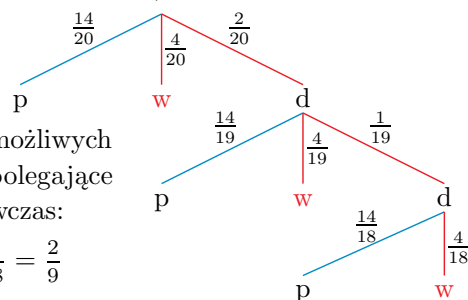
Jedna z osób uczących się w klasie IVa lub IVb ma otrzymać darmowy bilet do cyrku. W klasie IVa jest 20 chłopców i 10 dziewcząt, w klasie IVb – 12 chłopców i 18 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie 1 lub 2, to losowo wybiera się osobę z klasy IVa, jeśli 3, 4, 5 lub 6 – z IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilet otrzyma dziewczyna.

**Przykład 2**

Na loterii jest 20 losów, w tym 4 wygrywające (oznaczone literą w) i 2 uprawniające do dalszego losowania (oznaczone literą d). Pozostałe losy są przegrane (oznaczone literą p). Zakupiono jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

Na drzewie przedstawiamy ilustrację możliwych wyników. Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na kupieniu losu wygrywającego. Wówczas:

$$P(A) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{4}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

**Multiteka**

• Drzewo prawdopodobieństwa

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 1.13**Generator**  
testów i sprawdzianów

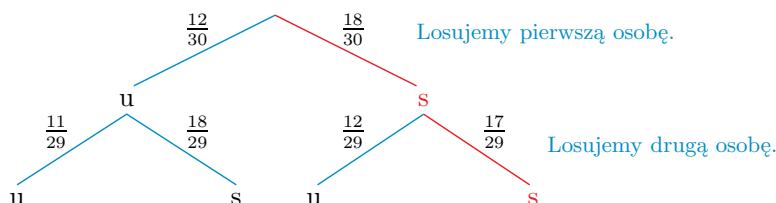
## Ćwiczenie 2

Wśród 20 losów loterii fantowej są 4 losy uprawniające do odebrania jednej z nagród (jest 1 nagroda główna i są 3 nagrody pocieszenia) oraz 2 losy uprawniające do dalszego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania nagrody pocieszenia, jeśli kupimy 1 los.

### Przykład 3

Wśród 30 uczestników wycieczki do Szczecina jest 12 uczniów i 18 studentów. Biuro turystyczne postanowiło zwrócić połowę kosztów wycieczki dwóm losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zwrot połowy kosztów otrzyma przynajmniej jeden uczeń.

Przebieg losowania ilustrujemy za pomocą drzewa.



Niech zdarzenie  $A$  oznacza, że wśród wylosowanych dwóch osób jest przynajmniej jeden uczeń. Rozpatrzmy zdarzenie  $A'$  – wśród wylosowanych nie ma ani jednego ucznia:

$$P(A') = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}$$

Zatem:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{51}{145} = \frac{94}{145} \approx 0,65$$

## Ćwiczenie 3

W pewnej firmie pracuje 36 mężczyzn i 12 kobiet. W ramach nagrody postanowiono ufundować wycieczkę do Świnoujścia trzem losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wycieczkę wygra co najmniej jedna kobieta.

## Zadania

- W urnie są 3 kule białe, 4 czarne i 5 zielonych. Losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:
  - nie będzie kuli czarnej,
  - będzie kula czarna lub zielona.
- Z urny zawierającej 6 kul białych, 3 czarne i 5 niebieskich losujemy bez zwracania jedną kulę. Następnie dokładamy do urny dwie kule w kolorze wylosowanej kuli i ponownie losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wylosowana za drugim razem będzie niebieska.

## Odpowiedzi do zadań

### 1. I sposób

$$a) P(A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

$$b) P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{219}{220}$$

### II sposób

$$\overline{\Omega} = \binom{12}{3} = 220$$

$$a) \overline{A} = \binom{8}{3} = 56, P(A) = \frac{14}{55}$$

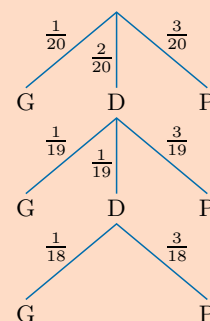
$$b) \overline{B'} = 1, P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{220} = \frac{219}{220}$$

- $A$  – za drugim razem wylosowano niebieską kulę

$$P(A) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{15} = \frac{5}{14}$$

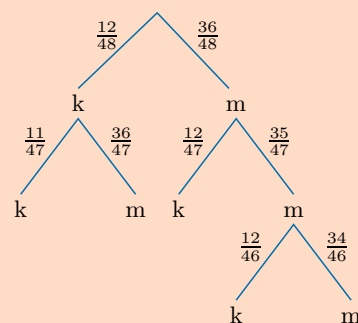
## Ćwiczenie 2

$A$  – wygranie nagrody pocieszenia



$$P(A) = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{3}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{3}{18} = \frac{171+18+1}{10 \cdot 19 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

## Ćwiczenie 3



$A$  – wycieczkę wygra co najmniej jedna kobieta

$A'$  – ani jedna kobieta nie wygra wycieczki

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{36}{48} \cdot \frac{35}{47} \cdot \frac{34}{46} = 1 - \frac{1785}{4324} = \frac{2539}{4324}$$

3.  $A$  – biletu nie otrzyma ani jeden chłopiec

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} + \frac{2}{4} \cdot \frac{20}{30} + \frac{1}{4} = \frac{241}{348} \approx 0,6925$$

4.  $A$  – wylosowane kule są tego samego koloru

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{13}{27}$$

5.  $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,06$$

6.  $\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{1}{15}, n \in \mathbf{N}, n > 3$   
 $90 = n^2 - n$

$$(n+9)(n-10) = 0$$

$n = 10$ , czyli kul czarnych jest  $10 - 3 = 7$ .

7.  $\frac{4}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} + \frac{n-4}{n} \cdot \frac{4}{n-1} = \frac{4}{7}$   
 $n \in \mathbf{N}, n > 4$

$$14(n-4) = n(n-1)$$

$$n^2 - 15n + 56 = 0$$

$$(n-7)(n-8) = 0$$

$$n = 7 \text{ lub } n = 8$$

W urnie są 3 lub 4 kule białe.

8.  $n$  – liczba kul białych

$$n > 1$$

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{3}$$

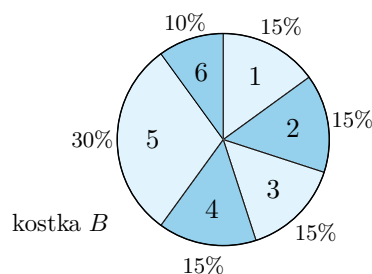
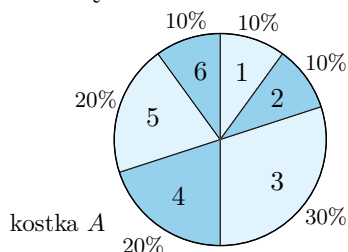
$$3n - 3 = 2n + 2$$

$$n = 5$$

3. W pewnej klasie jest 10 chłopców i 20 dziewcząt. Liczba biletów do kina, które będą rozlosowane w tej klasie, jest równa liczbie orłów otrzymanych w rzucie dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że biletu nie otrzyma żaden chłopiec.

4. Z urny, w której jest dwa razy więcej kul białych niż czarnych, losujemy kulę i przekładamy ją do drugiej urny, w której są 2 kule białe i 6 kul czarnych. Następnie losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule będą tego samego koloru.

5. Poddane testowi kostki  $A$  i  $B$  okazały się niesymetryczne. Na diagramach kołowych przedstawiono rezultaty testu (w procentach podano częstość pojawiania się poszczególnych wyników). Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10, jeśli rzucamy jednocześnie kostką  $A$  i kostką  $B$ .



6. W urnie jest  $n$  kul, w tym 3 białe, a pozostałe są czarne. Losujemy kolejno 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule są białe, jest równe  $\frac{1}{15}$ . Ile kul czarnych jest w urnie?
7. W urnie jest  $n$  kul, w tym 4 czarne, a pozostałe są białe. Losujemy kolejno 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kule różnego koloru, jest równe  $\frac{4}{7}$ . Ile kul białych jest w urnie?
8. Z urny, w której jest 1 kula czarna i pewna liczba kul białych, losujemy 2 kule bez zwracania. Ile kul białych jest w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe  $\frac{2}{3}$ ?
9. Spośród liczb  $1, 2, 3, \dots, 99$  losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych – drugą. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:  
 $A$  – za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą,  
 $B$  – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą,  
 $C$  – obie wylosowane liczby są parzyste,  
 $D$  – suma wylosowanych liczb jest równa 100.

9.  $P(A) = \frac{49}{99}$

$$P(B) = \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{98} + \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} = \frac{49}{99}$$

$$P(C) = \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} = \frac{8}{33}$$

$$D = \{(1, 99), (2, 98), \dots, (49, 51), (51, 49), \dots, (99, 1)\}$$

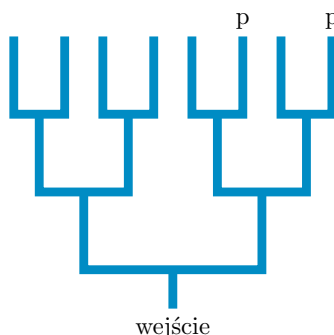
$$P(D) = \frac{98}{99 \cdot 98} = \frac{1}{99}$$

#### Komentarz

Bez wykonywania obliczeń można zauważyć, że  $P(B) = P(A)$ .

10. W magazynie zainstalowano trzy czujniki, z których każdy niezależnie od pozostałych może uruchomić alarm w wypadku pożaru. Prawdopodobieństwo wykrycia pożaru przez pojedynczy czujnik jest równe 0,6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wypadku pożaru alarm zostanie uruchomiony.

11. a) Pewien szczur wpuszczony do labiryntu na rozwidleniu dróg dwa razy częściej skręca w lewo niż w prawo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu (oznaczonego na rysunku literą p).  
b) Inny szczur wpuszczony do tego samego labiryntu na rozwidleniu dróg skręca w prawo w  $x\%$  przypadków. Oblicz  $x$ , jeśli prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu, jest równe  $\frac{9}{16}$ .



12. W urnie znajdują się kule zielone i białe – razem 9 kul. Losujemy dwukrotnie po jednej kuli bez zwracania. Ile jest kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest równe prawdopodobieństwu wylosowania dwóch kul o różnych kolorach?

13. Z urny, w której są 3 kule białe i  $n$  kul czarnych ( $n > 0$ ), losujemy 2 kule. Ile może być kul w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednej kuli białej jest większe od 0,5?

14. Wśród  $n$  losów na loterii jest 6 losów wygrywających. Dla jakich wartości  $n$  prawdopodobieństwo tego, że:

- a) zakupione dwa losy będą wygrywające, jest większe od  $\frac{1}{5}$ ,  
b) wśród zakupionych dwóch losów przynajmniej jeden wygrywa, jest większe od  $\frac{1}{3}$ ?

15. Na loterii jest 50 losów, w tym 15 wygrywających. Nagrody to: jedna w wysokości 100 zł, cztery po 10 zł i dziesięć po 5 zł. Jeden los kosztuje 5 zł. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wygrana będzie nie mniejsza od poniesionych kosztów, jeśli kupimy:

- a) jeden los, b) dwa losy.

**D** 16. Na loterii jest  $n$  losów, z których jeden wygrywa. Wykaż, że jeśli dorzucimy do puli los, którego wyciągnięcie pozwala na powtórne losowanie, to prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie jednego losu się nie zmieni.

11.  $A$  – szczur dotrze do pokarmu

a) Prawdopodobieństwo skreśtu w lewo jest równe  $\frac{2}{3}$ , a w prawo  $\frac{1}{3}$ .

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

b) Prawdopodobieństwo skreśtu w prawo jest równe  $\frac{x}{100}$ , a w lewo  $\frac{100-x}{100}$ .

$$P(A) = \frac{x}{100} \cdot \frac{100-x}{100} \cdot \frac{x}{100} + \left(\frac{x}{100}\right)^3 = \left(\frac{x}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{100-x}{100} + \frac{x}{100}\right) = \left(\frac{x}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{9}{16}, \text{ czyli } x = 75$$

16.  $A$  – wylosowaliśmy los wygrywający

Na loterii jest  $n$  losów, z których tylko jeden wygrywa, stąd  $P(A) = \frac{1}{n}$ . Dorzucamy do puli los, którego wyciągnięcie pozwala na powtórne losowanie, wówczas:

$$P(A) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}, \text{ co należało wykazać.}$$

10.  $A$  – zadziała co najmniej jeden czujnik

$A'$  – nie zadziała ani jeden czujnik

$$P(A) = 1 - P(A') =$$

$$= 1 - 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 =$$

$$= 1 - 0,064 = 0,936$$

12.  $n$  – liczba kul białych, gdzie  $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$

$$\frac{n}{9} \cdot \frac{n-1}{8} + \frac{9-n}{9} \cdot \frac{8-n}{8} =$$

$$= \frac{n}{9} \cdot \frac{9-n}{8} + \frac{9-n}{9} \cdot \frac{n}{8}$$

$$n^2 - 9n + 18 = 0$$

$$n = 3 \text{ lub } n = 6$$

13.  $n + 3$  – liczba kul w urnie, gdzie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$

$A$  – wylosowano przynajmniej jedną kulę białą

$A'$  – wylosowano same kule czarne

$$P(A) = 1 - P(A') =$$

$$= 1 - \frac{n}{n+3} \cdot \frac{n-1}{n+2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{n+3} \cdot \frac{n-1}{n+2} < \frac{1}{2}$$

$$n^2 - 7n - 6 < 0, n \in \mathbb{N}_+$$

$$n \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$$

W urnie może być 4, 5, 6, 7, 8, 9 lub 10 kul.

14.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 6$

a)  $\frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n-1} > \frac{1}{5}$

$$n^2 - n - 150 < 0$$

$$n \in \left(\frac{1-\sqrt{601}}{2}, \frac{1+\sqrt{601}}{2}\right) \text{ oraz}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 6, \text{ czyli}$$

$$n \in \{6, 7, 8, \dots, 12\}$$

b)  $B$  – przynajmniej jeden los wygrywa

$B'$  – oba losy przegrywają

$$P(B) = 1 - P(B') =$$

$$= 1 - \frac{n-6}{n} \cdot \frac{n-7}{n-1} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{n-6}{n} \cdot \frac{n-7}{n-1} < \frac{2}{3}$$

$$n^2 - 37n + 126 < 0$$

$$n \in \left(\frac{37-\sqrt{865}}{2}, \frac{37+\sqrt{865}}{2}\right)$$

$$\text{oraz } n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 6, \text{ czyli}$$

$$n \in \{6, 7, 8, \dots, 33\}$$

15. a)  $\frac{3}{10}$  b)  $\frac{8}{35}$

# Rzut monetą

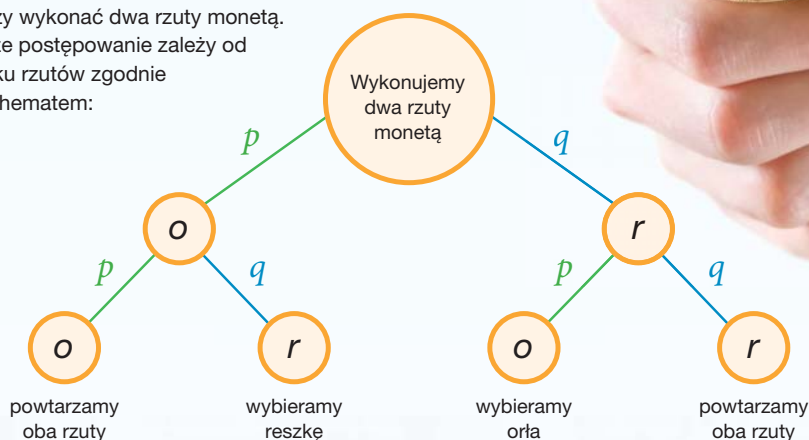
Rzut monetą to jeden z najbardziej znanych sposobów losowego podejmowania decyzji. Wykorzystuje się go w niektórych dyscyplinach sportu, na przykład aby rozstrzygnąć, która drużyna rozpocznie mecz.

## Sprawiedliwa decyzja

Nawet jeśli podejrzewamy, że moneta nie jest symetryczna (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe  $p$ , prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest równe  $q$  oraz  $p \neq q$ ), możemy za jej pomocą podjąć sprawiedliwą decyzję.

Należy wykonać dwa rzuty monetą.

Dalsze postępowanie zależy od wyniku rzutów zgodnie ze schematem:



Nawet gdy moneta nie jest symetryczna, otrzymanie par orzeł–reszka oraz reszka–orzeł jest jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń jest równe  $pq$ .



Rzut powinien być wykonany w taki sposób, aby moneta podczas lotu kilka razy się obróciła. Następnie, w zależności od zwyczaju, monetę można złapać w locie lub pozwolić jej upaść na ziemię.

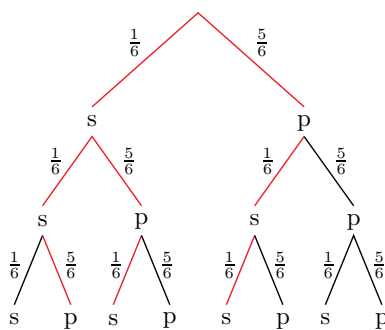
## \*1.14. Schemat Bernoulliego

Schemat Bernoulliego polega na wielokrotnym powtórzeniu tego samego doświadczenia losowego mającego dwa możliwe wyniki o dodatnich prawdopodobieństwach. Każde powtórzenie doświadczenia nazywamy **próbą Bernoulliego** (lub krótko – próbą), jeden z wyników nazywamy **sukcesem**, drugi – **porażką**. Na przykład, jeśli próba polega na rzucie monetą, za sukces możemy przyjąć wyrzucenie orła, a za porażkę – wyrzucenie reszki. Wymagamy, aby próby były niezależne, to znaczy, by pojawienie się jakiegokolwiek wyniku w dowolnej próbie nie miało wpływu na wyniki w następnych próbach.

### Przykład 1

Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 6 oczek wypadnie dokładnie dwa razy.

Trzykrotny rzut kostką jest schematem Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie (wyrzucenie szóstki – oznaczone literą *s* na rysunku obok) jest równe  $\frac{1}{6}$ . Prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie (oznaczone literą *p*) jest równe  $\frac{5}{6}$ . Gałęzie drzewa ilustrujące otrzymanie dokładnie dwóch szóstek zaznaczono kolorem czerwonym.



Prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch szóstek jest równe:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

Oznaczmy przez  $S_n$  liczbę sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego. Prawdziwy jest następujący wzór.

### Wzór Bernoulliego

W schemacie  $n$  prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania  $k$  sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n$$

gdzie  $p$  oznacza prawdopodobieństwo sukcesu, a  $q$  – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie ( $q = 1 - p$ ).

### Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo sukcesu i porażki w pojedynczej próbie Bernoulliego,
- stosuje wzór Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa  $k$  sukcesów w  $n$  próbach,
- wykorzystuje wzór Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa co najmniej  $k$  sukcesów w  $n$  próbach.

### Ćwiczenie 1

- a)  $P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$   
b)  $P_6(3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

### Przykład 2

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w pięciokrotnym rzucie monetą.

Pięciokrotny rzut monetą to schemat Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu (wyrzucenie orła) w pojedynczej próbie  $p = \frac{1}{2}$ , a prawdopodobieństwo porażki  $q = \frac{1}{2}$ . Zatem prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w pięciokrotnym rzucie monetą jest równe:

$$P_5(2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

### Ćwiczenie 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania trzech orłów:

- a) w czterokrotnym rzucie monetą,  
b) w sześciokrotnym rzucie monetą.

### Przykład 3

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach kostką szóstka wypadnie co najmniej trzy razy.

Za sukces przyjmujemy otrzymanie szóstki w rzucie kostką, a za porażkę – jakiegokolwiek innej liczby oczek. Prawdopodobieństwo sukcesu  $p = \frac{1}{6}$ , a prawdopodobieństwo porażki  $q = \frac{5}{6}$ .

Prawdopodobieństwo otrzymania trzech szóstek jest równe:

$$P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{5}{6^4} = \frac{20}{1296}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania czterech szóstek jest równe:

$$P_4(4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech szóstek wynosi:

$$P_4(3) + P_4(4) = \frac{20}{1296} + \frac{1}{1296} = \frac{21}{1296} = \frac{7}{432}$$

### Ćwiczenie 2

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy pięciokrotnym rzucie kostką otrzymamy: a) co najmniej cztery szóstki, b) co najwyżej trzy jedynki.

#### Czy wiesz, że...

Jakob Bernoulli (1654–1705) był wybitnym szwajcarskim matematykiem. Jest uznawany za jednego z twórców rachunku prawdopodobieństwa. Podany w tym rozdziale wzór Bernoulliego jest jego autorstwa.



### Ćwiczenie 2

- a)  $P_5(4) + P_5(5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{25}{7776} + \frac{1}{7776} = \frac{13}{3888}$   
b)  $1 - [P_5(4) + P_5(5)] = 1 - \frac{13}{3888} = \frac{3875}{3888}$

#### Przykład 4

Gramy z równorzędnym przeciwnikiem w szachy. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie dwóch partii z czterech czy trzech partii z sześciu?

Zakładamy, że wyniki kolejnych partii są niezależne. Prawdopodobieństwo wygranej w jednej partii  $p = \frac{1}{2}$ , a prawdopodobieństwo porażki  $q = \frac{1}{2}$ . Zatem prawdopodobieństwo uzyskania 2 sukcesów w 4 próbach jest równe:

$$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Prawdopodobieństwo uzyskania 3 sukcesów w 6 próbach jest równe:

$$P_6(3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Bardziej prawdopodobne jest więc wygranie dwóch partii z czterech.

#### Ćwiczenie 3

Gramy z równorzędnym przeciwnikiem w szachy. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie trzech partii z pięciu czy czterech partii z siedmiu?

#### Zadania

- Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w czterokrotnym rzucie monetą:
  - korzystając ze wzoru Bernoulliego,
  - sporządzając drzewo.
- Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
  - czterech orłów,
  - co najmniej czterech orłów.
- Rzucamy  $n$  razy monetą. Dla jakich wartości  $n$  prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest większe od:
  - 0,9,
  - 0,99,
  - 0,999,
  - 0,9999?
- Rzucamy cztery razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
  - dwóch szóstek,
  - co najwyżej dwóch szóstek.
- Rzucamy pięć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
  - trzy razy wypadnie 6 oczek,
  - co najmniej dwa razy wypadnie liczba oczek większa od 4.
- Rzucamy trzy razy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwa razy suma oczek będzie:
  - większa od 10,
  - równa 6.

5. a)  $P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} = \frac{125}{3888}$   
b)  $P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - P_5(0) - P_5(1) =$   
 $= 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{131}{243}$   
6. a)  $P_3(k \geq 2) = P_3(2) + P_3(3) =$   
 $= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^0 = \frac{33}{1728} + \frac{1}{1728} = \frac{17}{864}$   
b)  $P_3(k \geq 2) = P_3(2) + P_3(3) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{31}{36}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^3 =$   
 $= \frac{2325}{46656} + \frac{125}{46656} = \frac{2450}{46656} = \frac{1225}{23328}$

#### Ćwiczenie 3

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{40}{128}$$

$$P_7(4) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{128}$$

Zatem bardziej prawdopodobne jest wygranie trzech partii z pięciu.

#### Odpowiedzi do zadań

- a)  $P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$   
 $= 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$   
b)  $P(A) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$   
 $= \frac{3}{8} = 0,375$
- a)  $P_6(4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$   
 $= 15 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{15}{64}$   
b)  $P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$   
 $= \frac{15}{64} + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 +$   
 $+ \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} =$   
 $= \frac{11}{32}$
- $P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) =$   
 $= 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n =$   
 $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$   
a)  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,9$   
 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$   
 $2^n > 10$ , czyli  $n \geq 4$   
b)  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,99$   
 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$   
 $2^n > 100$ , czyli  $n \geq 7$   
c)  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,999$   
 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000}$   
 $2^n > 1000$ , czyli  $n \geq 10$   
d)  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,9999$   
 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10000}$   
 $2^n > 10000$ , czyli  $n \geq 14$
- a)  $P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$   
 $= 6 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{216}$   
b)  $P_4(k \leq 2) =$   
 $= P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) =$   
 $= \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 +$   
 $+ \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{25}{216} =$   
 $= \frac{625}{1296} + \frac{500}{1296} + \frac{150}{1296} =$   
 $= \frac{1275}{1296} = \frac{425}{432}$

7.  $p = 0,96$  (wylosowanie piłki dobrej)  
 $q = 0,04$  (wylosowanie piłki wadliwej)

a)  $A$  – za każdym razem piłka dobra

$$P(A) = P_5(5) = \binom{5}{5} \cdot (0,96)^5 = 0,96^5 \approx 0,815$$

b)  $A'$  – co najmniej raz piłka wadliwa

$$P(A') = 1 - P(A) \approx 1 - 0,815 = 0,185$$

8.  $P(A) = P_{10}(0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049} \approx 0,0173$   
 $P(B) = 1 - P(A) \approx 1 - 0,0173 = 0,9827$   
 $P(C) = P_{10}(k \leq 1) = P_{10}(0) + P_{10}(1) = \frac{1024}{59049} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{1024}{59049} + \frac{5120}{59049} = \frac{6144}{59049} \approx 0,104$

9.  $P_6(k \geq 5) = P_6(5) + P_6(6) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 6 \cdot \frac{3}{4096} + \frac{1}{4096} \approx 0,0046 < 0,005$   
 Zatem szansa zaliczenia testu nie jest większa niż 0,5%.

10. a)  $P_5(5) = \binom{5}{5} \cdot p^5 = p^5 = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$   
 Zatem  $p = \frac{2}{3}$ .  
 b)  $P_4(k \geq 1) = 1 - P_4(0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^4 = 1 - (1-p)^4 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$   
 $1 - p = \frac{1}{2}$   
 Zatem  $p = \frac{1}{2}$ .

7. W pewnej partii piłek 4% piłek jest wadliwych. Losujemy pięć razy ze zwracaniem jedną piłkę i badamy jej jakość. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) za każdym razem wylosujemy piłkę jakościowo dobrą,  
 b) co najmniej raz wylosujemy piłkę wadliwą.

8. Pewien test składa się z dziesięciu pytań. Do każdego pytania podane są trzy odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Uczeń zakreśla odpowiedzi losowo. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

$A$  – uczeń nie zakreślił żadnej poprawnej odpowiedzi,  
 $B$  – uczeń zakreślił co najmniej jedną poprawną odpowiedź,  
 $C$  – uczeń zakreślił co najwyżej jedną poprawną odpowiedź.

9. Pewien test składa się z sześciu pytań. Dla każdego pytania podane są cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Aby zaliczyć test, należy dobrze odpowiedzieć na co najmniej pięć pytań. Odpowiedzi wybieramy losowo. Czy szansa zaliczenia testu jest większa od 0,5%?

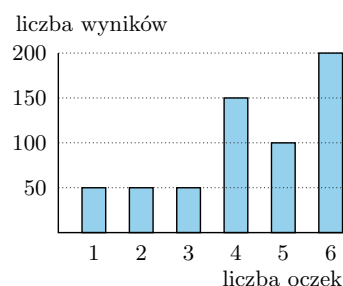
10. a) W schemacie 5 prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania samych sukcesów jest równe  $\frac{32}{243}$ . Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie.  
 b) W schemacie 4 prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego sukcesu jest równe  $\frac{15}{16}$ . Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie.

11. Jedna z koszykarek, wykonując rzuty osobiste, trafia do kosza średnio pięć razy na dziesięć, a druga – osiem razy na dziesięć. Obie koszykarki wykonują po pięć rzutów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda z nich trafi do kosza:

- a) trzy razy,                      b) cztery razy,                      c) co najmniej raz.

12. Wykonano serię rzutów niesymetryczną kostką. Wyniki testu przedstawiono na diagramie obok.

- a) Zaproponuj wartości prawdopodobieństw dla każdego z wyników 1, 2, 3, 4, 5, 6.  
 b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w sześciokrotnym rzucie tą kostką za każdym razem liczby oczek większej od 3?



11. a)  $P_{1.5}(3) \cdot P_{1.5}(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot 10 \cdot \frac{64}{5^5} = \frac{8}{125}$   
 b)  $P_{1.5}(4) \cdot P_{1.5}(4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot 5 \cdot \frac{2^8}{5^5} = \frac{8}{125}$   
 c)  $P_{1.5}(k \geq 1) \cdot P_{1.5}(k \geq 1) = (1 - P_{1.5}(0)) \cdot (1 - P_{1.5}(0)) = \left(1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) \cdot \left(1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \left(1 - \frac{1}{32}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 0,96844$

12. a)
- |            |                |                |                |               |               |               |
|------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| $\omega_i$ | 1              | 2              | 3              | 4             | 5             | 6             |
| $p_i$      | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

b) Sukcesem jest wyrzucenie 4, 5 lub 6, czyli  $p = \frac{450}{600} = \frac{3}{4}$ .

$$P_6(6) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{729}{4096}$$

## 1.15. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

### Przykład 1

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie dwiema monetami. Jeśli wyrzucimy dwa orły, to wygrywamy 20 zł, jeśli jednego orła – wygrywamy 10 zł, a w przypadku, gdy wypadną dwie reszki – przegrywamy 40 zł. W tabeli podano możliwe wielkości wygranej w jednym rzucie w złotych:  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 10$  i  $x_3 = -40$  (przegrana) oraz ich prawdopodobieństwa.

|       |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 20            | 10            | -40           |
| $p_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Przy omawianiu zagadnień takich jak w powyższym przykładzie będziemy używać pojęć *zmienna losowa* i *rozkład zmiennej losowej*.

### Definicja

**Zmienną losową** nazywamy funkcję o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych  $\Omega$ .

**Uwaga.** Zmienne losowe zwyczajowo oznacza się dużymi literami, np.  $X$ ,  $Y$ .

### Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Zmienna losowa  $X$  przyporządkowuje każdemu zdarzeniu elementarnemu kwadrat otrzymanej liczby oczek. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje następujące wartości:

$$x_1 = X(1) = 1, x_2 = X(2) = 4, \dots, x_6 = X(6) = 36$$

Każda z tych wartości jest przyjmowana z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$ .

### Definicja

Zbiór par  $(x_i, p_i)$ , gdzie  $x_i$  jest wartością zmiennej losowej  $X$ , a  $p_i$  prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa przyjmuje tę wartość, nazywamy **rozkładem zmiennej losowej**.

Rozkład zmiennej losowej zwykle wygodnie jest prezentować w tabeli. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej z przykładu 2.

|       |               |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 1             | 4             | 9             | 16            | 25            | 36            |
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

### Uczeń:

- podaje rozkład zmiennej losowej i przedstawia go za pomocą tabelki,
- oblicza wartość oczekiwaną zmiennej losowej,
- rozstrzyga, czy gra jest sprawiedliwa.

### Ćwiczenie 1

Losujemy ze zwracaniem dwie liczby ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ . Zmienna losowa  $X$  każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Uzupełnij w zeszytcie tabelę przedstawiającą rozkład tej zmiennej.

|       |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $p_i$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

### Ćwiczenie 2

Losujemy dwie liczby ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Zmienna losowa  $X$  każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Podaj rozkład zmiennej  $X$ , jeśli losujemy:  
a) ze zwracaniem, b) bez zwracania.

### Definicja

Niech  $X$  będzie zmienną losową o wartościach  $x_1, x_2, \dots, x_n$  przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . **Wartością oczekiwaną** zmiennej  $X$  nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

### Przykład 3

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie trzema monetami. Jeśli wyrzucimy same orły, to wygrywamy 100 zł, jeśli wyrzucimy same reszki, to wygrywamy 60 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 20 zł. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej  $X$  opisującej tę grę.

|       |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 100           | 60            | -20           |
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{6}{8}$ |

Wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  (wartość oczekiwana gry):

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 100 \cdot \frac{1}{8} + 60 \cdot \frac{1}{8} - 20 \cdot \frac{6}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ [zł]}$$

Wartość oczekiwana tej gry jest dodatnia, czyli gra jest korzystna dla gracza.

### Ćwiczenie 3

Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie co najmniej 5 oczek, to wygrywamy  $x_1$  zł, w przeciwnym wypadku przegrywamy  $x_2$  zł.

- D** a) Uzasadnij, że jeśli  $x_1 = 50$  i  $x_2 = -40$ , to wartość oczekiwana tej gry jest równa  $-10$  zł (czyli gra jest dla nas niekorzystna).  
b) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli wygrana  $x_1 = 45$ , a przegrana  $x_2 = -15$ .

### Definicja

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

### Ćwiczenie 2

a)

|       |                |               |                |               |                |               |                |
|-------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| $x_i$ | 2              | 3             | 4              | 5             | 6              | 7             | 8              |
| $p_i$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

b)

|       |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             |
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

### Ćwiczenie 3

$$EX = x_1 \cdot \frac{2}{6} + x_2 \cdot \frac{4}{6} = x_1 \cdot \frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{2}{3}$$

- a)  $EX = 50 \cdot \frac{1}{3} - 40 \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} - \frac{80}{3} = -\frac{30}{3} = -10 \text{ [zł]}$   
b)  $EX = 45 \cdot \frac{1}{3} - 15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{45}{3} - \frac{30}{3} = 5 \text{ [zł]}$

#### Ćwiczenie 4

Rzucamy dwiema monetami. Jeśli wypadną dwie reszki, to wygrywamy  $x_1$  zł, jeśli wypadnie jedna reszka, to wygrywamy  $x_2$  zł. Jeśli wypadną dwa orły, to przegrywamy  $x_3$  zł.

- D a) Uzasadnij, że jeśli  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 10$  i  $x_3 = -40$ , to gra jest sprawiedliwa.  
b) Dla jakiej wartości  $x_3$  gra jest sprawiedliwa, jeśli  $x_1 = x_2 = 49$ ?

#### Zadania

- Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeśli wypadnie 5 oczek, to wygrywamy 120 zł, a jeśli 1 oczko lub 3 oczka, to przegrywamy 90 zł.
  - Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.
  - Jaka powinna być wysokość przegranej, aby gra była sprawiedliwa?
- Rzucamy dwa razy kostką. Jeśli w drugim rzucie wypadnie więcej oczek niż w pierwszym, to wygrywamy  $x_1$  zł, jeśli tyle samo, to przegrywamy 120 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 60 zł.
  - Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, gdy  $x_1 = 180$ .
  - Dla jakiej wartości  $x_1$  gra byłaby sprawiedliwa?
- W pierwszej grze rzucamy trzema monetami i otrzymujemy  $x = 24$  zł za każdego wyrzuconego orła. W drugiej grze rzucamy czterema monetami i otrzymujemy  $y = 15$  zł za każdego wyrzuconego orła.
  - Wartość oczekiwana której gry jest większa?
  - Ile powinna być równa wygrana  $x$ , aby – bez zmiany wartości  $y$  w drugiej grze – wartości oczekiwane obu gier były równe?

#### Czy wiesz, że...

Zagadnieniem wartości oczekiwanej gry zajmował się holenderski matematyk, fizyk i astronom Christiaan Huygens [czyt. kristian hojchens] (1629–1695). W 1657 r. wydał pracę dotyczącą rachunku prawdopodobieństwa *De ratiociniis in ludo aleae* (*O wnioskowaniu w grach hazardowych*). Christiaan Huygens był członkiem Towarzystwa Królewskiego w Londynie i Akademii Nauk w Paryżu.



3. a)  $EX = 24 \cdot \frac{3}{8} + 48 \cdot \frac{3}{8} + 72 \cdot \frac{1}{8} = 36$  [zł]  
 $EY = 15 \cdot \frac{4}{16} + 30 \cdot \frac{6}{16} + 45 \cdot \frac{4}{16} + 60 \cdot \frac{1}{16} = 30$  [zł]  
 $EX > EY$   
b)  $x \cdot \frac{3}{8} + 2x \cdot \frac{3}{8} + 3x \cdot \frac{1}{8} = 30$   
 $x = 20$  zł

#### Ćwiczenie 4

$$EX = x_1 \cdot \frac{1}{4} + x_2 \cdot \frac{2}{4} + x_3 \cdot \frac{1}{4}$$

a)  $EX = 20 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{2}{4} - 40 \cdot \frac{1}{4} = 5 + 5 - 10 = 0$

b)  $49 \cdot \frac{1}{4} + 49 \cdot \frac{2}{4} - x_3 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$$\frac{1}{4}x_3 = \frac{3}{4} \cdot 49$$

$$x_3 = 147$$

#### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $EX = 10 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{6} - 90 \cdot \frac{1}{3} = -5$  [zł]

b)  $10 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{6} + x_3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ ,  
czyli  $x_3 = -75$  zł

2.  $EX = x_1 \cdot \frac{15}{36} - 120 \cdot \frac{6}{36} - 60 \cdot \frac{15}{36}$

a)  $EX = 180 \cdot \frac{15}{36} - 20 - 25 = 30$

b)  $x_1 \cdot \frac{15}{36} - 45 = 0$   
 $x_1 = 108$

$$4. a) (2^0 - 3 \cdot 4) \cdot \frac{1}{16} + (2^1 - 3 \cdot 3) \cdot \frac{4}{16} + (2^2 - 3 \cdot 2) \cdot \frac{6}{16} + (2^3 - 3 \cdot 1) \cdot \frac{4}{16} + (2^4 - 3 \cdot 0) \cdot \frac{1}{16} = -\frac{15}{16} \text{ [zł]}$$

$$b) (2^0 - 3 \cdot 5) \cdot \frac{1}{32} + (2^1 - 3 \cdot 4) \cdot \frac{5}{32} + (2^2 - 3 \cdot 3) \cdot \frac{10}{32} + (2^3 - 3 \cdot 2) \cdot \frac{10}{32} + (2^4 - 3 \cdot 1) \cdot \frac{5}{32} + (2^5 - 3 \cdot 0) \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{32} \text{ [zł]}$$

6. Budujemy trzy rodzaje trójkątów:

1 równoboczny o boku 4 cm,  
6 równoramiennych o podstawie 6 cm i ramieniu 4 cm,  
3 równoramiennych o podstawie 4 cm i ramieniu 6 cm.

$$a) (3 \cdot 4) \cdot \frac{1}{10} + (2 \cdot 4 + 6) \cdot \frac{6}{10} + (2 \cdot 6 + 4) \cdot \frac{3}{10} = 14,4 \text{ [cm]}$$

$$b) 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{10} + 3\sqrt{7} \cdot \frac{6}{10} + 8\sqrt{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5}(12\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 9\sqrt{7}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

7. a) Każde dwa wierzchołki sześciangu wyznaczają jeden z poniższych odcinków:

12 krawędzi o długości 1 cm,  
12 przekątnych ścian bocznych o długości  $\sqrt{2}$  cm,  
4 przekątnych sześciangu o długości  $\sqrt{3}$  cm.

$$EX = 1 \cdot \frac{12}{28} + \sqrt{2} \cdot \frac{12}{28} + \sqrt{3} \cdot \frac{4}{28} = \frac{1}{7}(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ [cm]}$$

b) Każde trzy wierzchołki sześciangu wyznaczają jeden z poniższych trójkątów:

24 trójkąty prostokątne o polu  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \text{ cm}^2$ ,

24 trójkąty prostokątne o polu  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^2$ ,

8 trójkątów równobocznych o polu  $\frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ .

$$EX = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{56} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{24}{56} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{56} = \frac{1}{14}(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

4. Rzucamy pewną liczbą monet. Jeśli w rzucie wypadło  $n$  orłów i  $k$  reszek, to wygrana (lub przegrana) jest równa  $(2^n - 3k)$  zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli rzucamy:

- a) czterema monetami, b) pięcioma monetami.



5. W tabeli podano prawdopodobieństwa trafienia trójki, czwórki, piątki i szóstki w grze liczbowej, w której skreślamy 6 spośród 49 liczb.

|         |                                                                            |
|---------|----------------------------------------------------------------------------|
| trójka  | $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} : \binom{49}{6} \approx 0,017\,650\,404$ |
| czwórka | $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} : \binom{49}{6} \approx 0,000\,968\,620$ |
| piątka  | $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} : \binom{49}{6} \approx 0,000\,018\,450$ |
| szóstka | $1 : \binom{49}{6} \approx 0,000\,000\,072$                                |

a) Przyjmijmy, że wygrywamy jedynie wtedy, gdy trafimy szóstkę, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej, aby była to gra sprawiedliwa?

b) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 10 zł, czwórkę – 100 zł, piątkę – 1000 zł, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej w przypadku trafienia szóstki, aby gra była sprawiedliwa?

c) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 100 zł, czwórkę – 1000 zł, piątkę – 10 000 zł, a szóstkę – 10 000 000 zł. Jaka powinna być cena jednego zakładu, aby gra była sprawiedliwa?

6. Dane są trzy odcinki o długości 4 cm i dwa o długości 6 cm. Wybieramy losowo trzy spośród tych odcinków i budujemy z nich trójkąt. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej, która każdemu otrzymanemu w ten sposób trójkątowi przyporządkowuje:

- a) jego obwód, b) jego pole.

7. Dany jest sześciang o krawędzi 1 cm.

a) Wybieramy losowo dwa wierzchołki sześciangu. Zmienna losowa przyporządkowuje wybranym dwóm punktom odległość między nimi. Oblicz wartość oczekiwaną tej zmiennej.

b) Wybieramy losowo trzy wierzchołki sześciangu. Zmienna losowa przyporządkowuje wybranym trzem punktom pole trójkąta, którego są wierzchołkami. Oblicz wartość oczekiwaną tej zmiennej.

5. Wygrana uwzględnia koszt zakładu.

a)  $(x - 1) \cdot 0,000\,000\,072 - 1 \cdot 0,999\,999\,928 = 0$ , czyli  $x - 1 \approx 13\,888\,888$  zł  
Wygrana powinna wynosić około 13 888 889 zł.

b)  $(10 - 1) \cdot 0,017\,650\,404 + (100 - 1) \cdot 0,000\,968\,620 + (1000 - 1) \cdot 0,000\,018\,450 + (x - 1) \cdot 0,000\,000\,072 - 1 \cdot 0,981\,362\,454 = 0$ , czyli  $x \approx 9\,835\,888$  zł

c)  $p_3 = 0,017\,650\,404$ ,  $p_4 = 0,000\,968\,620$ ,  $p_5 = 0,000\,018\,450$ ,  $p_6 = 0,000\,000\,072$   
 $(100 - c)p_3 + (1000 - c)p_4 + (10\,000 - c)p_5 + (10\,000\,000 - c)p_6 =$   
 $= (1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6)c$

$$100p_3 + 1000p_4 + 10\,000p_5 + 10\,000\,000p_6 = c$$

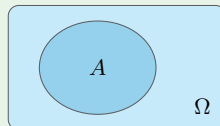
$$c = 1,7650404 + 0,96862 + 0,18450 + 0,72 = 3,6381604 \approx 3,64$$

## 1.16. Zagadnienia uzupełniające

### Prawdopodobieństwo geometryczne

Na płaszczyźnie dane są figury  $A$  i  $\Omega$  takie, że  $A \subset \Omega$ . Niech  $P_\Omega$  będzie polem figury  $\Omega$ , a  $P_A$  – polem figury  $A$ . Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt figury  $\Omega$  należy do figury  $A$ , jest równe:

$$p = \frac{P_A}{P_\Omega}$$

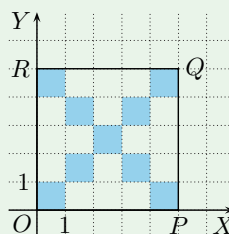


#### Przykład 1

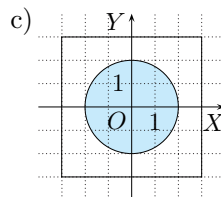
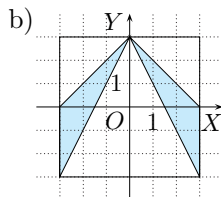
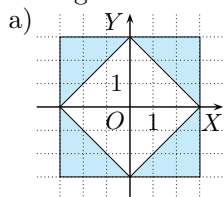
Niech  $\Omega$  będzie kwadratem  $OPQR$ , a  $A$  – zbiorem zaznaczonym na niebiesko (rysunek obok). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt kwadratu  $\Omega$  należy do zbioru  $A$ ?

Zauważmy, że  $P_\Omega = 25$  oraz  $P(A) = 9$ , zatem:

$$p = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{9}{25}$$



1. Niech  $\Omega = \{(x, y): x \in \langle -3; 3 \rangle \text{ i } y \in \langle -3; 3 \rangle\}$ . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt ze zbioru  $\Omega$  należy do zbioru zaznaczonego na niebiesko?



2. Niech  $\Omega = \{(x, y): x \in \langle 0; 6 \rangle \text{ i } y \in \langle 0; 4 \rangle\}$ . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że współrzędne losowo wybranego punktu ze zbioru  $\Omega$  spełniają warunek: a)  $x + y - 4 \leq 0$ , b)  $|x - 2| \geq 1$ , c)  $|x - y| \leq 1$ ?

Joseph Bertrand (1822–1900) sformułował następujący problem (znany jako **paradoks Bertranda**). Rozpatrujemy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg. Wybieramy losowo cięciwę tego okręgu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona dłuższa od boku trójkąta? Bertrand przedstawił trzy metody rozwiązywania tego problemu – każda z nich daje inny wynik. Sprzeczność tę wyjaśniono dopiero po wprowadzeniu aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa w 1933 r. przez Andrieja Kołmogorowa.

#### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $p = \frac{1}{2}$   
 b)  $p = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}$   
 c)  $p = \frac{\pi \cdot 2^2}{36} = \frac{\pi}{9}$

2. a)  $p = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4^2}{24} = \frac{1}{3}$   
 b)  $p = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 4}{24} = \frac{2}{3}$   
 c)  $p = \frac{24 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{(1+5) \cdot 4}{2}}{24} = \frac{5}{16}$

$$3. \quad p = \frac{36 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2}{36} = \frac{5}{9}$$

$$4. \quad p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

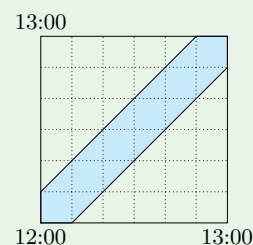
$$5. \quad p = \frac{32 \cdot 4}{(8 \cdot 4 - 2)^2} = \frac{32}{225}$$

### Przykład 2

Ania i Zosia umówiły się, że każda z nich przyjdzie do parku pod fontannę między godziną 12:00 a 13:00 i będzie czekać tam przez 10 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że koleżanki się spotkają?

Oznaczmy czasy przybycia Ani i Zosi pod fontannę odpowiednio przez  $x$  i  $y$ . Rozpatrzmy punkty należące do kwadratu  $\Omega$  przedstawionego na rysunku obok. Ania i Zosia się spotkają, gdy punkt  $(x, y)$  należy do zbioru  $A$  zaznaczonego na rysunku na niebiesko. Pole zbioru  $A$  jest równe 11 (sprawdź). Prawdopodobieństwo spotkania jest więc równe:

$$p = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{11}{36} \approx 0,31$$



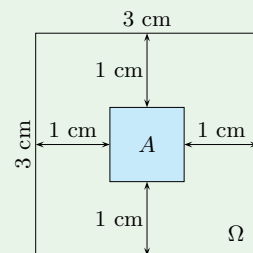
3. Jakie byłyby prawdopodobieństwo spotkania Ani i Zosi przy fontannie (patrz przykład 2), gdyby każda z nich czekała 20 minut?

### Przykład 3

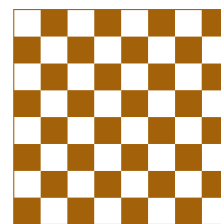
Monetę o średnicy 2 cm rzucamy na szachownicę utworzoną z kwadratów o boku 3 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta w całości znajdzie się wewnątrz któregoś z kwadratów?

Rozpatrzmy kwadrat  $\Omega$ , na który upadł środek rzuconej monety (rysunek obok). Aby cała moneta znajdowała się wewnątrz tego kwadratu, jej środek musi należeć do kwadratu  $A$  zaznaczonego na rysunku na niebiesko. Ponieważ  $P_A = 1 \text{ cm}^2$  oraz  $P_\Omega = 9 \text{ cm}^2$ :

$$p = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{1}{9} \approx 0,11$$



4. Monetę o średnicy 3 cm rzucamy na szachownicę utworzoną z kwadratów o boku 6 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta w całości upadnie wewnątrz któregoś z kwadratów?
5. Monetę o średnicy 2 cm rzucamy na szachownicę utworzoną z kwadratów o boku 4 cm w taki sposób, aby cała moneta znalazła się na szachownicy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta w całości upadnie wewnątrz białego kwadratu?



# Zestawy powtórzeniowe

## Zestaw I

1. Ile jest liczb czterocyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi: a) 8, b) 10?
2. Ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, w których zapisie:  
a) mogą wystąpić tylko cyfry 0, 1, 2, 3 i 4,  
b) występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 3?
3. Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których zapisie:  
a) występują tylko cyfry 4 i 5,  
b) występuje dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra 5?
4. Na ile sposobów można ustawić w kolejce:  
a) 2 kobiety i 6 mężczyzn tak, aby kobiety stały obok siebie,  
b) 4 kobiety i 4 mężczyzn tak, aby kobieta nie stała za kobietą?
5. Rzucamy dwa razy kostką. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:  
A – dokładnie w jednym z rzutów wypadnie co najmniej 5 oczek,  
B – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest nie mniejsza od 8?
6. Rzucamy dwa razy kostką, której dwie ścianki są zielone, a cztery czerwone. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:  
a) co najmniej raz ścianki zielonej,  
b) co najwyżej raz ścianki czerwonej.
7. Student zna odpowiedzi na 6 spośród 15 pytań egzaminacyjnych. Na egzaminie losuje 4 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zna odpowiedź na co najmniej jedno z nich.
8. Rzucamy cztery razy niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe  $\frac{1}{3}$ , a reszki –  $\frac{2}{3}$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadną:  
a) cztery reszki, b) co najmniej trzy reszki.
9. W urnie jest jedna kula czarna o numerze 1 oraz dwie kule białe o numerach 1 i 2. Losujemy kolejno dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych kul jest biała, a druga ma numer nieparzysty, jeśli losujemy:  
a) ze zwracaniem, b) bez zwracania.

7.  $\overline{\Omega} = \binom{15}{4} = 1365$

A – student zna odpowiedź na co najmniej jedno pytanie

A' – student nie zna odpowiedzi na żadne pytanie

$$\overline{A'} = \binom{9}{4} = 126$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{126}{1365} = 1 - \frac{6}{65} = \frac{59}{65}$$

8. a)  $\frac{16}{81}$  b)  $\frac{16}{27}$

9. a) A – pierwsza wylosowana kula jest biała, a druga kula ma numer nieparzysty

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$b) P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

## Odpowiedzi do zadań

1. a) 20 b) 12

2. a) 300 b) 320

3. a) 8 b) 360

4. a) Kobiety stawiamy obok siebie i wstawiamy je między mężczyzn – jest 7 takich ustawień. W każdym ustawieniu mamy 2! permutacji kobiet i 6! permutacji mężczyzn, zatem wszystkich ustawień jest:  $7 \cdot 2 \cdot 6! = 10\,080$ .

b) Mamy 5 możliwości ustawień:

K M K M K M K M  
M K M K M K M K  
K M M K M K M K  
K M K M M K M K  
K M K M K M M K

W każdym ustawieniu mamy po 4! permutacji kobiet i mężczyzn, zatem wszystkich ustawień jest  $5 \cdot (4!)^2 = 2880$ .

5.  $\overline{\Omega} = 36$

$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$

$$\overline{A} = 16, \text{ czyli } P(A) = \frac{16}{36}$$

$B = \{(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$$\overline{B} = 15, \text{ czyli } P(B) = \frac{15}{36}$$

Zatem bardziej prawdopodobne jest zdarzenie A.

6. a) A – wyrzucono co najmniej raz ściankę zieloną

A' – wyrzucono dwa razy ściankę czerwoną

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

b) B – wyrzucono co najwyżej raz ściankę czerwoną

B' – wyrzucono dwa razy ściankę czerwoną

$$P(B') = P(A')$$

$$P(B) = P(A) = \frac{5}{9}$$



10.  $B_n$  – wylosowano kulę z urny  $U_n$   
 $A$  – wylosowano kulę białą  
 $P(B_n) = \frac{1}{6}$   
 $P(A \setminus B_n) = \frac{1}{n+1}$   
 $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) +$   
 $+ P(B_2) \cdot P(A|B_2) +$   
 $+ P(B_3) \cdot P(A|B_3) +$   
 $+ P(B_4) \cdot P(A|B_4) +$   
 $+ P(B_5) \cdot P(A|B_5) +$   
 $+ P(B_6) \cdot P(A|B_6) =$   
 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} +$   
 $+ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} =$   
 $= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \right.$   
 $\left. + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{669}{420} =$   
 $= \frac{223}{840} > \frac{210}{840} = \frac{1}{4}$
11. a)  $A$  – wylosowano tylko kule białe  
 $P(A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$   
b)  $B$  – wylosowano 2 kule białe i 1 czarną  
 $P(B) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} +$   
 $+ \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{55}$
13. a) Sposób rozmieszczenia kul nie ma znaczenia.  
b) W jednej urnie wszystkie kule są białe, w drugiej urnie – wszystkie są czarne.
16.  $\overline{\Omega} = \binom{6}{2} = 15$   
 $\overline{A} = \binom{4}{2} = 6, \overline{B} = \binom{3}{2} = 3$   
 $A \cap B = \{C3, C5\}$   
 $P(A|B) = \frac{A \cap B}{\overline{B}} = \frac{1}{3}$   
 $P(B|A) = \frac{A \cap B}{\overline{A}} = \frac{1}{6}$
17.  $Z$  – szkodnik zginie  
 $N$  – szkodnik nie zginie  
 $A$  – losowo wybrany szkodnik zginie po pierwszym lub drugim przyskaniu  
 $P(A) = 0,8 + 0,2 \cdot 0,3 =$   
 $= 0,86 < 0,9$

10. W sześciu urnach  $U_1, U_2, \dots, U_6$  znajdują się kule białe i czarne. Urna  $U_n$  zawiera jedną kulę białą i  $n$  kul czarnych,  $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ . Rzucamy kostką i losujemy jedną kulę z urny  $U_n$ , gdzie  $n$  jest liczbą wyrzuconych oczek. Czy prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest większe od  $\frac{1}{4}$ ?
11. W urnie jest 12 kul: 8 białych i 4 czarne. Z urny losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy:  
a) tylko kule białe, b) 2 kule białe i 1 czarną.
12. a) W urnie  $U_1$  mamy 3 kule białe i 7 czarnych, w urnie  $U_2$  – 6 kul białych i 4 czarne. Z losowo wybranej urny wyciągamy 3 kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia 3 kul czarnych.  
b) W urnie  $U_1$  mamy 3 kule czarne i 2 białe, w urnie  $U_2$  – 4 kule czarne i 1 białą. Z losowo wybranej urny wyciągamy 2 kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą to kule o różnych kolorach.
13. Mamy 10 kul białych i 10 kul czarnych oraz dwie urny. Do każdej z urn wrzucamy po 10 kul. Jak należy rozmieścić kule w urnach, aby:  
a) prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli, gdy losujemy jedną kulę z losowo wybranej urny, było największe,  
b) prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych, gdy losujemy bez zwracania dwie kule z losowo wybranej urny, było największe?
14. W rzucie pewną monetą orzeł wypada dwa razy częściej niż reszka. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej dwóch orłów w trzykrotnym rzucie tą monetą.
15. W urnie są kule białe, niebieskie i zielone. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie biała lub niebieska, jest równe  $\frac{3}{4}$ . Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie niebieska lub zielona, jest równe  $\frac{4}{5}$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie niebieska.
16. W urnie są dwie kule białe z numerami 1 i 2 oraz cztery kule czarne z numerami 3, 4, 5 i 6. Z urny losujemy dwie kule. Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul czarnych, a  $B$  – dwóch kul o numerach nieparzystych. Oblicz prawdopodobieństwa  $P(A|B)$  i  $P(B|A)$ .
17. Stwierdzono, że po spryskaniu drzew owocowych pewnym środkiem ochronnym ginie 80% szkodników, natomiast te, które przeżyją, zyskują częściową odporność i po ponownym spryskaniu ginie ich tylko 30%. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany szkodnik zginie po pierwszym lub drugim spryskaniu, jest mniejsze od 0,9.

12. a)  $A$  – wylosowano trzy kule czarne  
 $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{13}{80}$   
b)  $B$  – wylosowano dwie kule o różnych kolorach  
 $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
14.  $\overline{\Omega} = 27$   
 $\overline{A} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 20$   
 $P(A) = \frac{20}{27}$
15.  $B, N, Z$  – wylosowano kulę odpowiednio: białą, niebieską, zieloną  
Zdarzenia  $B, N$  i  $Z$  są rozłączne i  $P(B \cup N \cup Z) = 1$ .  
 $P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{3}{4}, P(N \cup Z) = P(N) + P(Z) = \frac{4}{5}$   
Zatem mamy  $P(B) + 2P(N) + P(Z) = P(N) + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ , czyli  $P(N) = \frac{11}{20}$ .

## Zestaw II

- Z grupy sześciu chłopców i czworga dziewcząt wybieramy losowo trzy osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych osób będzie:
  - co najmniej jeden chłopiec,
  - co najwyżej jedna dziewczyna.
- Partia towaru składa się ze 100 elementów, wśród których 2 są wadliwe. Poddajemy kontroli 50 losowo wybranych elementów. Partię przyjmujemy, jeśli wśród kontrolowanych elementów jest nie więcej niż 1 element wadliwy. Oblicz prawdopodobieństwo przyjęcia partii.
- Ze zbioru liczb sześciocyfrowych, w których zapisie wykorzystano tylko cyfry 2, 3 i 4, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
  - $A$  – wylosowano liczbę, której wszystkie cyfry są identyczne,  $B$  – wylosowano liczbę, w której zapisie przynajmniej dwa razy występuje cyfra 4,  $C$  – wylosowano liczbę, w której zapisie każda z cyfr 2, 3, 4 występuje dwukrotnie.
- Spośród liczb  $1, 2, 3, \dots, 15$  wylosowano dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
  - suma wylosowanych liczb jest mniejsza od 5,
  - obie wylosowane liczby są mniejsze od 7,
  - iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.
- Na egzamin przygotowano 20 pytań. Student zna odpowiedzi na 12 spośród nich, a przystępując do egzaminu, losuje 3 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zna odpowiedzi na wszystkie wylosowane pytania.
- Basia kupiła po jednym losie na dwóch różnych loteriach. Prawdopodobieństwo wygranej na pierwszej loterii jest równe  $\frac{1}{3}$ , a na drugiej wynosi  $\frac{1}{4}$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Basia kupiła:
  - dwa losy wygrywające,
  - jeden los wygrywający.
- W urnie są kule białe i czarne. Czarnych kul jest dwa razy więcej niż białych. Wyciągamy z urny 2 kule. Jaka jest najmniejsza liczba kul w urnie, dla której prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul czarnych jest większe od  $\frac{2}{5}$ ?
- Losujemy liczbę  $n$  ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ , a następnie rzucamy  $n$  razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
  - wypadną same szóstki,
  - nie wypadnie ani jedna szóstka.

- $n$  – liczba kul białych  
 $2n$  – liczba kul czarnych  
 $\frac{2n}{3n} \cdot \frac{2n-1}{3n-1} > \frac{2}{5}, n \in \mathbf{N}_+$   
 $5(2n-1) > 3(3n-1)$   
 $n > 2$

Zatem w urnie jest co najmniej  $3 + 6 = 9$  kul.

- $A$  – wypadną same szóstki  

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{216} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1296} = \frac{259}{5184}$$
  - $B$  – nie wypadnie ani jedna szóstka  

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{36} + \frac{1}{4} \cdot \frac{125}{216} + \frac{1}{4} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3355}{5184}$$

$$1. \quad \overline{\overline{\Omega}} = \binom{10}{3} = 120$$

a)  $A$  – wylosowano co najmniej 1 chłopca

$A'$  – wylosowano 3 dziewczyny

$$\overline{\overline{A'}} = \binom{4}{3} = 4$$

$$P(A') = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(A) = 1 - P(A') =$$

$$= 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

b)  $B$  – wylosowano co najwyżej 1 dziewczynę

$$\overline{\overline{B}} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} =$$

$$= 40 + 60 = 80$$

$$P(B) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

2.  $A$  – przyjęto partię, czyli brak wadliwych lub 1 wadliwy

$A'$  – odrzucono partię, czyli 2 wadliwe

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{100}{50} = \frac{100!}{50! \cdot 50!}$$

$$\overline{\overline{A'}} = \binom{2}{2} \binom{98}{48} = \frac{98!}{48! \cdot 50!}$$

$$P(A') = \frac{98!}{48! \cdot 50!} \cdot \frac{50! \cdot 50!}{100!} =$$

$$= \frac{49 \cdot 50}{99 \cdot 100} = \frac{49}{198}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{149}{198}$$

3.  $\overline{\overline{\Omega}} = 3^6 = 729$

$$\overline{\overline{A}} = 3, P(A) = \frac{3}{3^6} = \frac{1}{243}$$

$B'$  – co najwyżej raz cyfra 4

$$\overline{\overline{B'}} = 2^6 + 6 \cdot 2^5 = 4 \cdot 2^6 = 256$$

$$P(B) = 1 - P(B') =$$

$$= 1 - \frac{256}{729} = \frac{473}{729}$$

$$\overline{\overline{C}} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

$$P(C) = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}$$

4.  $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$

$$a) A = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

$$P(A) = \frac{2}{105}$$

$$b) \overline{\overline{B}} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$P(B) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$$

$$c) \overline{\overline{C'}} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$P(C) = 1 - P(C') =$$

$$= 1 - \frac{28}{105} = \frac{11}{15}$$

5.  $P(A) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{11}{57}$

6. a)  $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b)  $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$



9.  $B_1$  – wylosowano kulę z pierwszej urny  
 $B_2$  – wylosowano kulę z drugiej urny  
 $P(B_1) = \frac{3}{4}, P(B_2) = \frac{1}{4}$   
 a)  $A$  – wylosowano kulę białą  
 $P(A|B_1) = \frac{4}{10}, P(A|B_2) = \frac{3}{10}$   
 $P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{8}$   
 b)  $B$  – wylosowano kulę niebieską  
 $P(B|B_1) = \frac{6}{10}, P(B|B_2) = \frac{2}{10}$   
 $P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{2}$
10.  $P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} + 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{15}$
11.  $A$  – student zda egzamin  
 $P(A) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} =$   
 $= \frac{7 \cdot 8}{11 \cdot 12} = \frac{14}{33}$
12.  $P(A) = P(B)$  i  $P(A \cup B) = 1$   
 $P(A \cup B) =$   
 $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 a)  $1 = 2 \cdot P(B) - \frac{1}{4}$   
 $P(B) = \frac{5}{8}$   
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}$   
 $P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} =$   
 $= \frac{P(A \cap B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} =$   
 $= \frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = 1$   
 b)  $P(A \cap B) =$   
 $= P(A \setminus B) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \cdot P(B)$   
 $P(A \cup B) =$   
 $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 $1 = 2 \cdot P(B) - \frac{1}{5} P(B)$   
 $P(B) = \frac{5}{9}$   
 $P(A \cap B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$
13.  $C$  – w drugim rzucie wypadła dwójka  
 a)  $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$   
 $P(C \setminus A) = \frac{\overline{C \cap A}}{A} = \frac{1}{5}$   
 b)  $B = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$   
 $P(C \setminus B) = \frac{\overline{C \cap B}}{B} = \frac{1}{4}$
14. a)  $\frac{11}{1024}$  b)  $\frac{11}{64}$
16. 22,50
17. 1,875

9. Mamy dwie urny z kulami. W pierwszej jest 10 kul: 4 białe i 6 niebieskich, w drugiej – też 10 kul: 3 białe, 5 żółtych i 2 niebieskie. Rzucamy dwa razy monetą: jeśli przynajmniej raz wypadnie orzeł, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli:

a) białej, b) niebieskiej.

10. Wśród pięciu kostek mamy cztery kostki klasyczne i jedną nietypową, która ma po sześć oczek na czterech ściankach. Rzucamy losowo wybraną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy sześć oczek.

11. Student zna odpowiedzi na 8 spośród 10 pytań w części I egzaminu i na 10 spośród 12 pytań w części II egzaminu. Na egzaminie losuje po 2 pytania z każdej jego części. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeśli musi odpowiedzieć poprawnie na wszystkie wylosowane pytania.

12. Zdarzenia  $A, B \subset \Omega$  są jednakowo prawdopodobne oraz zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich. Oblicz:

a)  $P(A|B)$  i  $P(A|B')$ , jeśli  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ , b)  $P(A \cap B)$ , jeśli  $P(A|B) = \frac{1}{5}$ .

13. Wykonano dwa rzuty kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w drugim rzucie wypadła dwójka, jeśli:

a) suma otrzymanych oczek jest równa 6,  
 b) iloczyn otrzymanych oczek jest równy 6.

14. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy dziesięciokrotnym rzucie monetą otrzymamy co najwyżej:

a) jedną reszkę, b) trzy reszki.

15. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy dziesięciokrotnym rzucie kostką za pierwszym razem wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że wyrzucono:

a) dwie szóstki, b) trzy szóstki.

16. Rzucamy dwa razy kostką. Za każdą wyrzuconą piątkę dostajemy 10 zł, a za każdą wyrzuconą szóstkę – 20 zł. Jeśli obie wyrzucone liczby oczek są mniejsze od 5, to przegrywamy  $x$  zł. Dla jakiej wartości  $x$  gra jest sprawiedliwa?

17. Rzucamy monetą tak długo, aż otrzymamy cztery orły z rzędu lub pierwszą reszkę. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

15.  $A$  – za pierwszym razem wypadła 6

a)  $B$  – wyrzucono dwie 6

$A \cap B$  – wyrzucono dwie 6 i za pierwszym razem wypadła 6

$$\overline{B} = \binom{10}{2} \cdot 5^8 = 45 \cdot 5^8, \overline{A \cap B} = 1 \cdot \binom{9}{1} \cdot 5^8 = 9 \cdot 5^8$$

$$P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{1}{5}$$

b)  $B$  – wyrzucono trzy 6

$A \cap B$  – wyrzucono trzy 6 i za pierwszym razem wypadła 6

$$\overline{B} = \binom{10}{3} \cdot 5^7 = 120 \cdot 5^7, \overline{A \cap B} = 1 \cdot \binom{9}{2} \cdot 5^7 = 36 \cdot 5^7$$

$$P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{3}{10}$$

**Przykład**

Ile jest wszystkich liczb stycyfrowych o sumie cyfr równej 8, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb występują tylko cyfry 0, 2, 4, 6?

Zauważmy, że liczby spełniające warunki zadania możemy podzielić na cztery grupy.

1. Liczby, w których zapisie występuje jedna cyfra 6, jedna cyfra 2 i 98 cyfr 0.
  - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 6, to pozycję cyfry 2 możemy wybrać na 99 sposobów.
  - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 2, to pozycję cyfry 6 możemy wybrać na 99 sposobów.

Zatem jest  $99 + 99 = 198$  takich liczb.

2. Liczby, w których zapisie występują dwie cyfry 4 i 98 cyfr 0.  
Na pierwszym miejscu takiej liczby znajduje się cyfra 4. Pozycję drugiej cyfry 4 możemy wybrać na 99 sposobów.  
Zatem jest 99 takich liczb.

3. Liczby, w których zapisie występują jedna cyfra 4, dwie cyfry 2 i 97 cyfr 0.
  - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 4, to pozycje dla dwóch cyfr 2 możemy wybrać na:

$$\binom{99}{2} = \frac{99 \cdot 98}{2} = 4851$$

sposobów.

- Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 2, to pozycję drugiej cyfry 2 i pozycję cyfry 4 możemy wybrać na  $99 \cdot 98 = 9702$  sposobów.

Zatem jest  $4851 + 9702 = 14\,553$  takich liczb.

4. Liczby, w których zapisie występują cztery cyfry 2 i 96 cyfr 0.  
Na pierwszym miejscu takiej liczby znajduje się cyfra 2. Pozycje dla trzech pozostałych cyfr 2 możemy wybrać na:

$$\binom{99}{3} = \frac{99!}{96! \cdot 3!} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{6} = 156\,849$$

sposobów.

Zatem jest 156 849 takich liczb.

Korzystamy z reguły dodawania i stwierdzamy, że wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest:

$$198 + 99 + 14\,553 + 156\,849 = 171\,699$$

**Odpowiedź:** Liczb stycyfrowych spełniających warunki zadania jest 171 699.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1.  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 9 \cdot 10^3$

2.  $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 4^3$

3.  $A'$  – iloczyn liczb jest nieparzysty (obie liczby są nieparzyste)

$$P(A') = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(A) = \frac{3}{4}$$

4.  $A = \{(o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (o, o, o)\}$   
 $B = \{(o, o, r), (r, o, o), (o, r, o), (o, o, o)\}$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = P(A')$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = P(B')$$

5. Jeśli  $A \subset B$ , to  $A \cup B = B$  oraz  $A \cap B = A$

$$P(A \cup B) = P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{2}{3}$$

7.  $P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \frac{2}{9}$

1. Liczb pięciocyfrowych, w których zapisie pierwsza i ostatnia cyfra są takie same, jest:

A.  $10^5$ , B.  $10^4$ , C.  $9 \cdot 10^3$ , D.  $9^2 \cdot 10^3$ .

2. Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono takie czterocyfrowe kody, że suma pierwszych dwóch cyfr jest parzysta, a suma ostatnich dwóch jest nieparzysta (cyfry mogą się powtarzać). Takich kodów jest:

A.  $2^4$ , B.  $2^5$ , C.  $3^4$ , D.  $4^3$ .

3. Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie  $A$  polega na tym, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą. Wtedy:

A.  $P(A) = \frac{1}{2}$ , B.  $P(A) = \frac{1}{4}$ , C.  $P(A') = \frac{1}{2}$ , D.  $P(A') = \frac{1}{4}$ .

4. Rzucamy trzykrotnie monetą. Zdarzenie  $A$  polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby orłów, a zdarzenie  $B$  – na wyrzuceniu większej liczby orłów niż reszek. Wtedy:

A.  $P(A) > P(B)$ , C.  $P(A) \leq P(A')$ ,  
B.  $P(A) < P(B)$ , D.  $P(B) > P(B')$ .

5. Niech  $A, B \subset \Omega$ . Jeśli  $P(A) = \frac{2}{3}$ ,  $P(B) = \frac{3}{4}$  oraz  $A \subset B$ , to:

A.  $P(A \cup B) = \frac{1}{12}$ , C.  $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ ,  
B.  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ , D.  $P(A \cap B) = 0$ .

6. W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy bez zwracania trzy kule. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez  $n$ , jest równe  $\frac{1}{5}$  dla  $n$  równego:

A. 2, B. 6, C. 9, D. 25.

7. Z szuflady zawierającej 5 par rękawiczek wyjmujemy losowo dwie rękawiczki. Prawdopodobieństwo tego, że obie rękawiczki są na lewą rękę, jest równe:

A.  $\frac{2}{9}$ , B.  $\frac{2}{5}$ , C.  $\frac{1}{5}$ , D.  $\frac{1}{2}$ .

8. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech reszek przy dwunastokrotnym rzucie monetą jest równe:

A.  $\frac{4017}{4096}$ , B.  $\frac{4035}{4096}$ , C.  $\frac{4067}{4096}$ , D.  $\frac{4083}{4096}$ .

6.  $\overline{\Omega} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

A.  $\overline{A} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ,  $P(A) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

B.  $B = \{132, 312, 342, 432, 234, 324, 354, 534\}$ ,  $\overline{B} = 8$ ,  $P(B) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

C. Suma cyfr jest podzielna przez 9, czyli szukamy permutacji trójek: 1, 3, 5 oraz 2, 3, 4.

$\overline{C} = 2 \cdot 3! = 12$ ,  $P(C) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

D. Ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę 25.

$\overline{D} = 3 \cdot 1 = 3$ ,  $P(D) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$

8.  $1 - (P_{12}(0) + P_{12}(1) + P_{12}(2)) =$

$$= 1 - \left( \binom{12}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \binom{12}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right) = \frac{4017}{4096}$$



## ■ Zadania krótkiej odpowiedzi

### Zadanie 1 (2 pkt)

Z cyfr  $0, 1, 2, \dots, n$  tworzymy liczby trzycyfrowe, w których zapisie cyfry się nie powtarzają. Wyznacz  $n$ , jeśli wiadomo, że wszystkich takich liczb jest 100.

### Zadanie 2 (2 pkt)

Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 5, 7, 9.

### Zadanie 3 (2 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy kolejno cztery kule i zwracamy za każdym razem wylosowaną kulę do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie wylosowane kule mają numery nieparzyste.

### Zadanie 4 (2 pkt)

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie w jednym z rzutów wypadną 3 lub 4 oczka.

### Zadanie 5 (3 pkt)

Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najwyżej cztery razy wypadnie reszka.

## ■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

### Zadanie 6 (4 pkt)

Oblicz, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb naturalnych, w których zapisie dokładnie dwa razy występuje cyfra 6.

### Zadanie 7 (4 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy bez zwracania trzy kule. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 2.

### Zadanie 8 (4 pkt)

Spośród liczb sześciocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 4 lub przez 5.

### Zadanie 9 (4 pkt)

Na loterii jest 200 losów, z tego 2 wygrywające po 450 zł i 4 wygrywające po 250 zł. Kupujemy jeden los za 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej na tej loterii. Uwzględnij cenę zakupu losu.

$$1. n \cdot n \cdot (n-1) = 100, n \in \mathbf{N}_+, n = 5$$

$$2. 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$$

3.  $A$  – wylosowane kule mają numery nieparzyste

$$\overline{\Omega} = 5^4, \overline{A} = 3^4$$

$$P(A) = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$$

$$4. \overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

$A$  – dokładnie w jednym z rzutów wypadły 3 lub 4 oczka

$$\overline{A} = \binom{2}{1} \cdot 2 \cdot 4 = 16$$

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$5. 1 - (P_6(5) + P_6(6)) = 1 - \left( \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right) = \frac{57}{64}$$

$$7. \overline{\Omega} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$\overline{A} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$$P(A) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$$6. \text{ Cyfra 6 jest na miejscu jedności i tysięcy: } 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$$

$$\text{Cyfra 6 jest na miejscu jedności i na miejscu setek lub dziesiątek: } 8 \cdot \binom{2}{1} \cdot 9 \cdot 1 = 144$$

$$\text{Cyfra 6 jest na miejscu tysięcy i na miejscu setek lub dziesiątek: } 1 \cdot \binom{2}{1} \cdot 9 \cdot 4 = 72$$

$$\text{Cyfra 6 jest na miejscu setek i dziesiątek: } 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 32$$

$$\text{Ostatecznie: } 81 + 144 + 72 + 32 = 329$$

$$8. \overline{\Omega} = 900000$$

$$A - \text{liczby podzielne przez 4, } P(A) = \frac{225\,000}{900\,000}$$

$$B - \text{liczby podzielne przez 5, } P(B) = \frac{180\,000}{900\,000}$$

$$A \cap B - \text{liczby podzielne przez 4 i 5, } P(A \cap B) = \frac{45\,000}{900\,000}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$9. EX = 440 \cdot \frac{2}{200} + 240 \cdot \frac{4}{200} - 10 \cdot \frac{194}{200} = -0,50 \text{ [zł]}$$



## 1. 324 561, 1 liczba

$$3246 - \dots, 2! = 2 \text{ liczby}$$

$$32a - \dots, a \in \{5, 6\}$$

$$2 \cdot 3! = 12 \text{ liczb}$$

$$3b - \dots, b \in \{4, 5, 6\}$$

$$3 \cdot 4! = 72 \text{ liczby}$$

$$c - \dots, c \in \{4, 5, 6\}$$

$$3 \cdot 5! = 360 \text{ liczb}$$

Ostatecznie:

$$1 + 2 + 12 + 72 + 360 = 447$$

2.  $P(A \cap B) =$ 

$$= P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$$

$$= 0,6 + 0,7 - 0,9 = 0,4$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}$$

## 3. A – student zda egzamin

B – na pierwsze pytanie  
potrafi odpowiedzieć

$$\overline{B} = 7 \cdot 9 \cdot 8$$

$$\overline{A \cap B} = 7 \cdot 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 =$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 11$$

$$P(A|B) = \frac{6 \cdot 7 \cdot 11}{7 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{11}{12}$$

4.  $\overline{\Omega} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ Każdą kombinację czterech  
liczb można ustawić na dwa  
sposoby (rosnąco lub maleją-  
co), czyli:

$$\overline{A} = 2 \cdot \binom{10}{4} = 2 \cdot 210 = 420$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{420}{5040} = \frac{1}{12}.$$

5.  $p \cdot (1 - \frac{2}{3}p) = 0,36$ 

$$p^2 - 1,5p + 0,54 = 0$$

$$\Delta = 1,5^2 - 4 \cdot 0,54 = 0,09$$

$$\sqrt{\Delta} = 0,3$$

$$p = 0,6 \text{ lub } p = 0,9$$

6.  $1 - P_{24}(0) =$ 

$$= 1 - \binom{24}{0} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^0 =$$

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$$

## 9. 166 749

## Zadanie 1 (2 pkt)

Ile jest permutacji cyfr liczby 324516 prowadzących do otrzymania liczby  
większej od wyjściowej liczby?

## Zadanie 2 (2 pkt)

Niech  $A, B \subset \Omega$  oraz  $P(A) = 0,6$ ,  $P(B') = 0,3$ ,  $P(A \cup B) = 0,9$ . Oblicz  
 $P(A|B)$ .

## Zadanie 3 (4 pkt)

Na egzaminie należy wylosować 3 pytania z 10. Student potrafi odpowiedzieć  
na 7 pytań. Zda egzamin, jeśli odpowie na co najmniej 2 pytania. Oblicz  
prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeśli potrafi odpowiedzieć  
na pierwsze z wylosowanych pytań.

## D Zadanie 4 (4 pkt)

Spośród liczb  $1, 2, \dots, 10$  wybrano kolejno cztery bez zwracania i ustawiono je  
w ciąg. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo tego, że jest to ciąg monotoniczny,  
równa się  $\frac{1}{12}$ .

## Zadanie 5 (4 pkt)

Łucznik trafia w tarczę z prawdopodobieństwem równym  $p$ . Prawdopodobień-  
stwo tego, że strzała, która trafiła w tarczę, trafiła w dziesiątkę, jest równe  
 $1 - \frac{2}{3}p$ . Oblicz  $p$ , jeśli prawdopodobieństwo tego, że łucznik trafi w dziesiątkę,  
gdy strzela raz, jest równe 0,36.

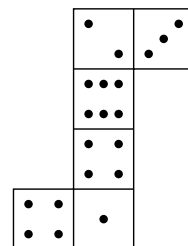
## Zadanie 6 (4 pkt)

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej raz dwóch szóstek  
w 24 rzutach dwiema kostkami.

## Zadanie 7 (4 pkt)

Spośród liczb sześciocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo  
tego, że wylosowana liczba ma tyle samo cyfr parzystych co nieparzystych.

## Zadanie 8 (4 pkt)

Mamy pięć klasycznych kostek do gry oraz jedną nietypową,  
której siatkę przedstawiono na rysunku obok. Wykonano  
dwa rzuty losowo wybraną kostką i otrzymano dwie czwórki.  
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucano kostką niety-  
pową.

## Zadanie 9 (6 pkt)

Oblicz, ile jest wszystkich nieparzystych liczb stycyfrowych  
o sumie cyfr równej 5.7.  $\overline{\Omega} = 900\,000$ Wybieramy trzy miejsca z sześciu dla cyfr nieparzystych. W każdym z tych miejsc  
możemy wybrać cyfrę nieparzystą na 5 sposobów. Pozostałe trzy miejsca są dla cyfr  
parzystych, a każdą cyfrę parzystą możemy wybrać na 5 sposobów.

$$\binom{6}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 20 \cdot 5^6$$

$$\text{Odejmujemy liczby z zerem na początku: } 1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 10 \cdot 5^5$$

$$\overline{A} = 20 \cdot 5^6 - 10 \cdot 5^5 = 281\,250$$

$$P(A) = \frac{281\,250}{900\,000} = \frac{5}{16}$$

## 8. A – wyrzucono dwie czwórki

 $B_1$  – rzucano klasyczną kostką,  $B_2$  – rzucano nietypową kostką

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_2)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2}{\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2} = \frac{4}{9}$$