



2 Geometria analityczna

Dzięki wprowadzeniu układu współrzędnych, w którym punktom płaszczyzny odpowiadają pary liczb (x, y) , problemy geometryczne można rozwiązywać metodami algebraicznymi.

Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej na wyspie w archipelagu Utklippan w Szwecji – szerokość geograficzna: $55^{\circ}57'10''\text{N}$, długość geograficzna: $15^{\circ}42'06''\text{E}$.

Multiteka

- Topologia
- Układ współrzędnych biegunowych
- Współrzędne kartezjańskie

Uczeń:

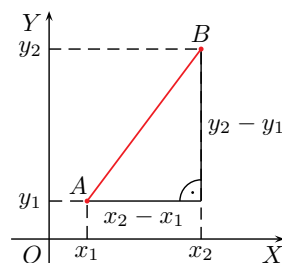
- oblicza odległości między punktami w układzie współrzędnych,
- stosuje wzór na odległość między punktami w zadaniach dotyczących wielokątów w układzie współrzędnych,
- wyznacza równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od punktu i od prostej.

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Rozważmy punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Twierdzenie

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość między punktami $A(2, 5)$ i $B(-1, 1)$.

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ćwiczenie 1

- a) $|AB| = -3 + 5 = 2$
 b) $|AB|^2 = (-7 - 5)^2 + (-1\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2})^2 = 169$
 $|AB| = 13$
 c) $|AB|^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^2 + (-1 + \frac{2}{3})^2 = \frac{5}{36}$

$$|AB| = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

- d) $|AB|^2 = (\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3})^2 + (-4 + \sqrt{7} - \sqrt{7})^2 = 25$
 $|AB| = 5$

Ćwiczenie 2

$$Ob_{\triangle ABC} = 5 + 10 + 3\sqrt{5} = 15 + 3\sqrt{5}$$

$$Ob_{\triangle DEF} = \sqrt{26} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$$

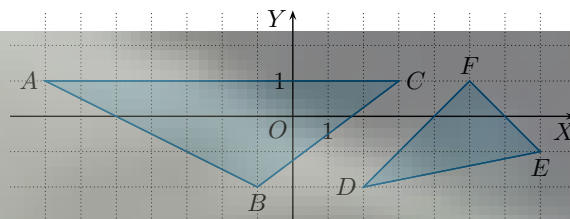
Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami A i B .

- a) $A(-3, -1)$, $B(-5, -1)$ c) $A(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $B(\frac{1}{2}, -1)$
 b) $A(5, -6\frac{1}{2})$, $B(-7, -1\frac{1}{2})$ d) $A(3 + \sqrt{3}, \sqrt{7})$, $B(\sqrt{3}, -4 + \sqrt{7})$

Ćwiczenie 2

Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF przedstawionych na rysunku obok.



Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny.

- a) $A(1, 3)$, $B(6, 4)$, $C(4, -1)$ c) $A(-3, -3)$, $B(12, -3)$, $C(6, 9)$
 b) $A(0, 0)$, $B(4, -1)$, $C(3, 3)$ d) $A(-1, 0)$, $B(2, \sqrt{3})$, $C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$

Ćwiczenie 3

- a) $|AB| = \sqrt{26}$, $|AC| = 5$, $|BC| = \sqrt{29}$, czyli nie jest równoramienny.
 b) $|AB| = |BC| = \sqrt{17}$, $|AC| = 3\sqrt{2}$, czyli jest równoramienny.
 c) $|AB| = |AC| = 15$, $|BC| = 6\sqrt{5}$, czyli jest równoramienny.
 d) $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{15 - 6\sqrt{3}}$, $|BC| = \sqrt{3}$, czyli nie jest równoramienny.

Przykład 2

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -4)$, $B(4, 2)$ i $C(1, 5)$ jest prostokątny.

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że: $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny. Czy jest prostokątny?

a) $A(-1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(2, 4)$

c) $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$

b) $A(-3, 0)$, $B(1, -4)$, $C(5, 4)$

d) $A(-4, 0)$, $B(-1, -3)$, $C(5, 3)$

Zadania

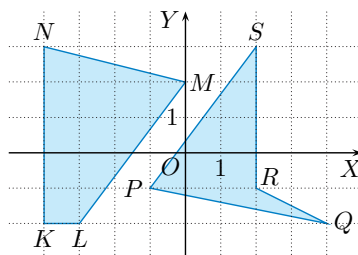
1. Który z czworokątów $KLMN$ i $PQRS$ (rysunek obok) ma większy obwód?

2. Który z odcinków AB i CD jest dłuższy?

a) $A(1, -2)$, $B(4, 4)$, $C(2, 2)$, $D(8, -2)$

b) $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 1)$, $D(4, 6)$

c) $A(3, -2)$, $B(8, -2)$, $C(-2, 2)$, $D(2, 5)$



3. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.

a) $A(3, 0)$, $B(-6, 8)$, $C(-2, -2)$

b) $A(-5, -1)$, $B(4, 1)$, $C(3, 5)$

4. Sprawdź, czy trójkąty ABC i DEF są przystające lub podobne.

a) $A(2, 2)$, $B(8, 5)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 0)$, $E(4, -3)$, $F(5, -1)$

b) $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 4)$, $D(4, 4)$, $E(0, 2)$, $F(-2, -4)$

c) $A(1, -1)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 3)$, $D(0, 3)$, $E(-4, -3)$, $F(4, -5)$

5. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia prostych:

a) $y = x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY ,

b) $y = x + 2$ i $y = 3x - 6$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX .

3. a) Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki trójkąta:

$$a_{AC} = \frac{2}{5}, a_{BC} = -\frac{5}{2}$$

Zauważmy, że $a_{AC} \cdot a_{BC} = -1$, zatem trójkąt jest prostokątny.

b) Obliczamy kwadraty długości boków trójkąta:

$$|AB|^2 = 85, |BC|^2 = 17, |AC|^2 = 100$$

Zauważmy, że $85 + 17 \neq 100$, zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa trójkąt nie jest prostokątny.

4. a) $|AB| = |DE| = 3\sqrt{5}$, $|AC| = |EF| = \sqrt{5}$, $|BC| = |DF| = 5\sqrt{2}$, więc trójkąty są przystające.

b) $|AB| = 5$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{5}$, $|DE| = 2\sqrt{5}$, $|DF| = 10$, $|EF| = 2\sqrt{10}$, więc trójkąty są podobne.

c) $|AB| = \sqrt{13}$, $|AC| = 2\sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{17}$, $|DE| = 2\sqrt{13}$, $|DF| = 4\sqrt{5}$, $|EF| = 2\sqrt{17}$, więc trójkąty są podobne.

Ćwiczenie 4

a) $|AB| = \sqrt{26}$,

$$|AC| = |BC| = \sqrt{13},$$

$$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$$

Trójkąt jest równoramienny i prostokątny.

b) $|AB| = 4\sqrt{2}$,

$$|AC| = |BC| = 4\sqrt{5}$$

Trójkąt jest równoramienny i nie jest prostokątny.

c) $|AB| = 2\sqrt{5}$, $|AC| = \sqrt{29}$,

$$|BC| = 3\sqrt{5}$$

Trójkąt nie jest równoramienny i nie jest prostokątny.

d) $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|AC| = 3\sqrt{10}$,

$$|BC| = 6\sqrt{2}$$

Trójkąt nie jest równoramienny i jest prostokątny.

Odpowiedzi do zadań

1. $Ob_{KLMN} = 11 + \sqrt{17} < 11 + 5 = 16$

$$Ob_{PQRS} = 9 + \sqrt{26} + \sqrt{5} > 9 + 5 + 2 = 16$$

Zatem $Ob_{PQRS} > Ob_{KLMN}$.

2. a) $|AB| = \sqrt{45}$, $|CD| = \sqrt{52}$,
 $|CD| > |AB|$

b) $|AB| = \sqrt{40}$, $|CD| = \sqrt{50}$,
 $|CD| > |AB|$

c) $|AB| = 5 = |CD|$

5. a) $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6$,
wysokości: 4 , $3\sqrt{2}$, $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

b) $Ob = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2} + 4$,
wysokości: 6 , $2\sqrt{2}$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

6. a) $Ob = 4\sqrt{10}$, $|AC| = 4\sqrt{2}$,
 $|BD| = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{10}}{5}$
 b) $Ob = 20\sqrt{2}$, $|AC| = 6\sqrt{5}$,
 $|BD| = 2\sqrt{5}$, $h = 3\sqrt{2}$
7. a) $Q(x, 2x - 2)$ – punkt należący do prostej l
 $(5 - x)^2 + (3 - (2x - 2))^2 = 10$
 $5x^2 - 30x + 40 = 0$
 $x = 2$ lub $x = 4$
 Współrzędne punktów: $(2, 2)$, $(4, 6)$
 b) $(1, 5)$, $(6, 0)$
8. $B(4, 0)$, $D(-1, 5)$
9. Proste AB i CD są równoległe, czyli $a_{AB} = a_{CD} = -\frac{1}{3}$.
 Niech $D(x, y)$. Wtedy prosta CD : $y = -\frac{1}{3}x + 6$.
 Trapez jest równoramienny, stąd:
 $(x + 4)^2 + (-\frac{1}{3}x + 6 - 2)^2 = (6 - 8)^2 + (4 + 2)^2$
 $x = -6$ lub $x = \frac{6}{5}$
 $D(-6, 8)$ lub $D(\frac{6}{5}, \frac{28}{5})$
10. a) $y = -\frac{1}{8}x^2 - 2$
 b) $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

12. a) Niech $A(2, 0)$ i $B(0, y)$ – punkt należący do osi OY .
 Jeżeli do szukanej krzywej należą punkty postaci $P(x, y)$ oraz $|AP| = |BP|$, to:
 $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |x|$
 Stąd $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$.
 b) $x = -\frac{1}{4}y^2 - 2y - 1$

6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu $ABCD$.
 a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 3)$
 b) $A(-5, -2)$, $B(2, -1)$, $C(7, 4)$, $D(0, 3)$
7. Wyznacz współrzędne punktów należących do prostej l , których odległość od punktu P jest równa d .
 a) $l: y = 2x - 2$, $P(5, 3)$, $d = \sqrt{10}$ b) $l: y = -x + 6$, $P(3, 2)$, $d = \sqrt{13}$
8. Dane są punkty $A(-2, 2)$ i $C(5, 3)$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D prostokąta $ABCD$, jeśli należą one do prostej o równaniu $y = 4 - x$.
9. Dane są wierzchołki $A(-4, 2)$, $B(8, -2)$ i $C(6, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawie AB . Oblicz współrzędne wierzchołka D .
10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi OX i punktu $(0, 1)$.

Niech $P(x, y)$ będzie punktem spełniającym warunki zadania. Odległość punktu P od osi OX jest równa:

$$\sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2} = |y|$$

a odległość od punktu $(0, 1)$:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

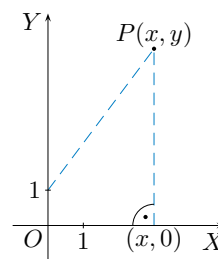
Otrzymujemy zatem równanie:

$$|y| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

Obie strony równania są dodatnie.

Stąd $y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$, czyli $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Szukaną krzywą jest parabola o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.



Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi OX i punktu: a) $(0, -4)$, b) $(4, 6)$.

11. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:
 a) od prostej $y = -2$ i punktu $(2, 6)$,
 b) od prostej $y = 5$ i punktu $(-4, -1)$.
12. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:
 a) od osi OY i punktu $(2, 0)$,
 b) od prostej $x = 4$ i punktu $(2, -4)$.

11. a) Niech $A(2, 6)$ oraz $B(x, -2)$ – punkt należący do prostej $y = -2$.
 Jeżeli do szukanej krzywej należą punkty postaci $P(x, y)$ oraz $|AP| = |BP|$, to:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 6)^2} = |y + 2|$$

$$\text{Stąd } y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}.$$

- b) Niech $A(-4, -1)$ oraz $B(x, 5)$ – punkt należący do prostej $y = 5$.

Jeżeli do szukanej krzywej należą punkty postaci $P(x, y)$ oraz $|AP| = |BP|$, to:

$$\sqrt{(x + 4)^2 + (y + 1)^2} = |y - 5|$$

$$\text{Stąd } y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

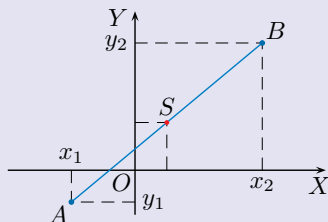
2.2. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

Środek odcinka

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB , jeśli $A(-3, 2)$ i $B(5, -4)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne: $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .

- a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$ b) $A(-4, 1)$, $B(5, -8)$ c) $A(\frac{1}{2}, -2)$, $B(3, \frac{1}{3})$

Przykład 2

Punkt $S(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu A , jeśli punkt B ma współrzędne $(-3, 4)$.

Niech punkt A ma współrzędne (x_1, y_1) , wówczas:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - 3}{2} &= 1 & \text{ i } & \frac{y_1 + 4}{2} = 5 \\ x_1 - 3 &= 2 & \text{ i } & y_1 + 4 = 10 \\ x_1 &= 5 & \text{ i } & y_1 = 6\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) Dany jest punkt $A(5, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli punkt $S(-1, -3)$ jest środkiem odcinka AB .
- b) Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, -2)$ i $B(7, y)$. Oblicz długość odcinka AB .
- c) Punkt $S(1, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, y)$ i $B(x + y, x - y)$. Oblicz długość odcinka AB .

Ćwiczenie 2

a)
$$\begin{cases} \frac{5+x}{2} = -1 \\ \frac{8+y}{2} = -3 \end{cases}$$

czyli $x = -7$, $y = -14$.
Zatem $B(-7, -14)$.

b)
$$\begin{cases} \frac{x+7}{2} = 2 \\ \frac{-2+y}{2} = 1 \end{cases}$$

czyli $x = -3$, $y = 4$.
Zatem $A(-3, -2)$, $B(7, 4)$
oraz $|AB| = 2\sqrt{34}$.

c)
$$\begin{cases} \frac{2x+y}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{cases}$$

czyli $x = 2$, $y = -2$.
Zatem $A(2, -2)$, $B(0, 4)$
oraz $|AB| = 2\sqrt{10}$.

Uczeń:

- wyznacza współrzędne środka odcinka, gdy dane są współrzędne jego końców,
- wyznacza współrzędne jednego z końców odcinka, gdy dane są współrzędne jego środka i drugiego końca,
- stosuje wzór na środek odcinka w zadaniach dotyczących własności wielokątów w układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 1

- a) $S(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}) = (2, 1)$
- b) $S(\frac{-4+5}{2}, \frac{1-8}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$
- c) $S(\frac{\frac{1}{2}+3}{2}, \frac{-2+\frac{1}{3}}{2}) = (\frac{7}{4}, -\frac{5}{6})$

Ćwiczenie 3

Niech $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Wówczas:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = -3 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = -1 \\ \frac{x_C + x_A}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x_A = -1, x_B = -5, x_C = 3$$

$$\begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 0 \\ \frac{y_C + y_A}{2} = 4 \end{cases}$$

$$y_A = 6, y_B = -2, y_C = 2$$

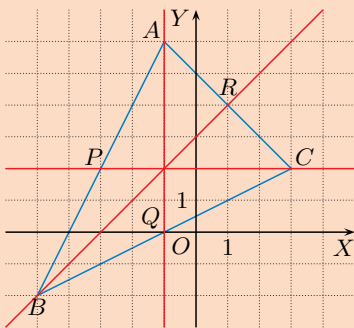
Zatem $A(-1, 6)$, $B(-5, -2)$, $C(3, 2)$.

Środki:

prosta BR : $y = x + 3$,

prosta CP : $y = 2$,

prosta AQ : $x = -1$



Ćwiczenie 3

Punkty $P(-3, 2)$, $Q(-1, 0)$ i $R(1, 4)$ są środkami boków trójkąta ABC . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz równania prostych zawierających jego środkowe.

Przypomnijmy, że **symetralną odcinka** AB jest prosta do niego prostopadła i przechodząca przez jego środek. Jest ona zbiorem punktów, których odległości od punktów A i B są równe. W poniższym przykładzie przedstawiamy dwa sposoby wyznaczenia równania symetralnej odcinka.

Przykład 3

a) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, w której zawarty jest odcinek AB :

$$a = \frac{-1-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka AB jest do niego prostopadła, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 2.

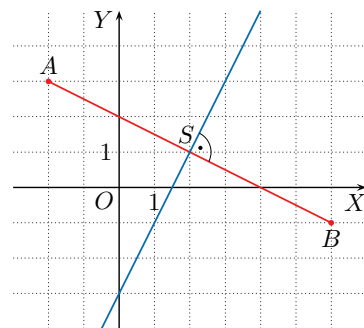
Wyznaczamy środek odcinka AB :

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Podstawiamy współrzędne punktu S do równania prostej $y = 2x + b$:

$$1 = 2 \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = -3$$

Zatem symetralna odcinka AB opisana jest równaniem $y = 2x - 3$.



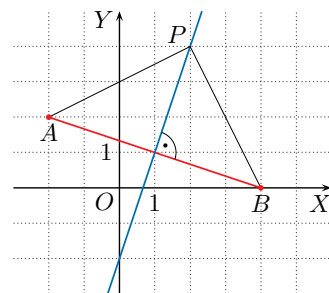
b) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 2)$ i $B(4, 0)$.

Punkt $P(x, y)$ należy do symetralnej odcinka AB , jeśli $|PA| = |PB|$, więc:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 2)^2} &= \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} \\ (x + 2)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 4)^2 + y^2 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \\ -4y &= -12x + 8 \end{aligned}$$

Zatem symetralna opisana jest równaniem:

$$y = 3x - 2$$



Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

- a) $A(1, 8)$, $B(6, 4)$ b) $A(-2, 6)$, $B(10, 0)$ c) $A(-2, -3)$, $B(4, -1)$

Ćwiczenie 4

Do symetralnej należą punkty postaci $S(x, y)$ oraz $|SA| = |SB|$.

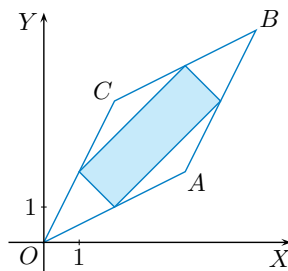
a) $\sqrt{(1-x)^2 + (8-y)^2} = \sqrt{(6-x)^2 + (4-y)^2}$ i stąd $y = \frac{5}{4}x + \frac{13}{8}$.

b) $\sqrt{(-2-x)^2 + (6-y)^2} = \sqrt{(10-x)^2 + y^2}$ i stąd $y = 2x - 5$.

c) $\sqrt{(-2-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(4-x)^2 + (-1-y)^2}$ i stąd $y = -3x + 1$.

Zadania

- Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych.
a) $A(1, 6)$, $B(-7, 2)$ b) $A(-7, 7)$, $B(11, 1)$ c) $A(9, \sqrt{7})$, $B(-4, -\sqrt{7})$
- Dany jest punkt $A(4, 5)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
a) $S(-2, 3)$ b) $S(6, 7)$ c) $S(-3, 1)$
- Dany jest punkt $A(-4, -3)$. Oblicz długość odcinka AB , jeśli:
a) jego środkiem jest punkt $(-1, -2)$,
b) jego środek leży na osi OX , a odcięta punktu B jest równa 2.
- Oblicz długości przekątnych rombu o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 6)$ i $C(2, 4)$ (rysunek obok). Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu $OABC$.
- Dany jest prostokąt o wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(8, 3)$, $C(6, 7)$ i $D(-6, 1)$.
a) Oblicz obwód prostokąta $ABCD$.
b) Oblicz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta $ABCD$.
- Wyznacz współrzędne środków odcinka AC i odcinka BD . Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?
a) $A(-2, -1)$, $B(17, 2)$, $C(18, 5)$, $D(-1, 2)$
b) $A(1, -1)$, $B(7, 1)$, $C(8, 5)$, $D(2, 2)$
- Punkty $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ i $C(5, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC oraz współrzędne wierzchołka D .
- Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta ABC .
a) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$, $C(2, 7)$ b) $A(-5, -3)$, $B(5, -1)$, $C(-1, 5)$
- Oblicz pole trójkąta, którego środkami boków są punkty $P(1, 0)$, $Q(-2, 3)$ i $R(-4, 1)$.



- D** 10. Punkty $A(2, -4)$ i $C(-1, -1)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Uzasadnij, że przekątna BD tego rombu jest zawarta w prostej $x - y - 3 = 0$.

10. Współczynnik kierunkowy prostej AC : $a_{AC} = -1$. Prosta zawierająca przekątną BD jest prostopadła do prostej AC , zatem jej współczynnik kierunkowy $a_{BD} = 1$. Punkt $S_{AC}(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ należy do prostej BD : $y = x - 3$. Równanie tej prostej zapisujemy w postaci:

$$x - y - 3 = 0$$

Uwaga. Można również zauważyć, że przekątna BD jest zawarta w symetralnej odcinka AC .

Odpowiedzi do zadań

- a) 5 b) $2\sqrt{5}$ c) 2,5
- a) $B(-8, 1)$
b) $B(8, 9)$
c) $B(-10, -3)$
- a) $|AS| = \sqrt{10}$, czyli $|AB| = 2\sqrt{10}$.
b) Środkiem odcinka AB jest punkt $S(x_S, 0)$, a punkt $B(2, y_B)$, zatem:
$$\frac{-3 + y_B}{2} = 0$$

czyli $y_B = 3$.
 $|AB| = 6\sqrt{2}$
- Długości przekątnych rombu:
 $|BO| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 2\sqrt{2}$
I sposób
Długości boków prostokąta: $\sqrt{2}$ i $3\sqrt{2}$, czyli $P = 6$.
II sposób
Pole prostokąta:
$$P = \frac{1}{2} P_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |AC| = 6$$
- a) Długości boków prostokąta: $|AD| = |BC| = 2\sqrt{5}$ i $|AB| = |DC| = 6\sqrt{5}$,
czyli $Ob = 16\sqrt{5}$.
b) Długość boku rombu: $5\sqrt{2}$,
czyli $Ob = 20\sqrt{2}$.
- a) $S_{AC}(8, 2)$, $S_{BD}(8, 2)$, jest
b) $S_{AC}(4\frac{1}{2}, 2)$, $S_{BD}(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, nie jest
- $S(3, 2)$, $D(7, 5)$
- a) $y = -\frac{3}{2}x + 5$, $y = 6x - 5$,
 $y = 3$
b) $y = \frac{5}{7}x + \frac{4}{7}$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$,
 $y = -7x - 2$
- 24

11. a) $P = 20$, $Ob = 8\sqrt{5}$
 b) $(-4, -8)$ lub $(3, -1)$
12. a) $A(5, 5)$, $B(1, 1)$ lub $A(1, 1)$, $B(5, 5)$
 b) $A(16, 14)$, $B(8, 8)$ lub $A(8, 8)$, $B(16, 14)$
13. a) $B(-1, -1)$, $D(3, 7)$
 b) $B(13, -7)$, $D(-3, 9)$
14. a) $B(2, 0)$, $D(-2, 4)$
 b) $B(-5, -6)$, $D(11, 10)$
15. a) $y = -3x + 3$
 b) $y = \frac{3}{2}x - 2$
16. a) Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
 Środek odcinka AB jest punktem przecięcia prostej AB i jej symetralnej.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

 $S(\frac{11}{5}, \frac{17}{5})$, czyli:
 $\frac{-1+x_B}{2} = \frac{11}{5}$ i $\frac{5+y_B}{2} = \frac{17}{5}$.
 Zatem $B(\frac{27}{5}, \frac{9}{5})$.
 b) Środek odcinka AB należy do prostej $y = x - 2$, czyli $S(2, 0)$.
 Prosta AB jest prostopadła do swojej symetralnej i przechodzi przez punkt S , zatem AB : $y = -x + 2$.
 Punkty A i B mają postać $(x, -x + 2)$ i są oddalone od S o 2, czyli:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (-x+2)^2} = 2$$

 $x = 2 - \sqrt{2}$ lub $x = 2 + \sqrt{2}$
 Zatem $A(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$,
 $B(2 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
18.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = x + 3 \end{cases}$$
 stąd $A(-2, 1)$.
 $B(x_B, -\frac{1}{2}x_B)$, $C(x_C, x_C + 3)$
 $\frac{x_B + x_C}{2} = 4$ i $\frac{-\frac{1}{2}x_B + x_C + 3}{2} = 1$
 $x_B = 6$ i $x_C = 2$, zatem
 $B(6, -3)$, $C(2, 5)$.

11. a) Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $(2, 1)$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(1, -2)$. Oblicz pole i obwód tego kwadratu.
 b) Pole kwadratu jest równe 58, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2, -3)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu, jeśli wiadomo, że punkt ten należy do prostej $y = x - 4$.
12. Odcinek AB leżący na prostej k ma długość d . Środkiem tego odcinka jest punkt S . Wyznacz współrzędne punktów A i B .
 a) $k: y = x$, $d = 4\sqrt{2}$, $S(3, 3)$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 2$, $d = 10$, $S(12, 11)$
13. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D czworokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że:
 a) jest on kwadratem oraz $A(-3, 5)$ i $C(5, 1)$,
 b) jest on rombem oraz $A(1, -3)$, $C(9, 5)$ i $|BD| = 2|AC|$.
14. Pole rombu $ABCD$ jest równe 32. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D , jeśli wiadomo, że:
 a) $A(-4, -2)$, $C(4, 6)$, b) $A(2, 3)$, $C(4, 1)$.
15. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .
 a) $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$ b) $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$
16. a) Prosta $y = 2x - 1$ jest symetralną odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli $A(-1, 5)$.
 b) Prosta $y = x - 2$ jest symetralną odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktów A i B , jeśli wiadomo, że $|AB| = 4$, odcięta środka odcinka AB jest równa 2, a punkt A leży w I ćwiartce układu współrzędnych.
17. Punkty $A(-3, 1)$ i $B(2, -1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Bok AC jest zawarty w prostej $y = 2x + 7$, a jedna ze środkowych trójkąta ma równanie $y = x + 4$. Oblicz współrzędne wierzchołka C i wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki tego trójkąta.
18. Boki AB i AC trójkąta ABC zawierają się odpowiednio w prostych $y = -\frac{1}{2}x$ i $y = x + 3$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli dany jest środek $S(4, 1)$ boku BC .
19. Punkty $A(2, 0)$ i $C(4, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości $2\sqrt{5}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i oblicz jego pole.

17. Niech $C(x, 2x + 7)$. Dana środkowa wychodzi z wierzchołka A i dzieli bok BC w punkcie $S(\frac{2+x}{2}, \frac{2x+6}{2})$, czyli:

$$\frac{2+x}{2} + 4 = \frac{2x+6}{2}$$

Stąd $x = 4$, zatem $C(4, 15)$, $AB: y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$, $BC: y = 8x - 17$.

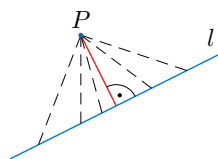
19. Punkt przecięcia przekątnych: $S(3, 1)$. Równanie prostej AC : $y = x - 2$.
 Równanie symetralnej odcinka AC : $y = -x + 4$, stąd współrzędne wierzchołków B i D są postaci $(x, -x + 4)$.

$$\sqrt{(x-2)^2 + (-x+4-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

$x = 0$ lub $x = 6$. Zatem $B(6, -2)$, $D(0, 4)$. $P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$.

2.3. Odległość punktu od prostej

Przypomnijmy, że **odległością punktu P od prostej l** nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Przykład 1

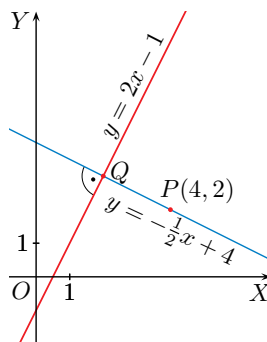
Oblicz odległość punktu $P(4, 2)$ od prostej $y = 2x - 1$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do prostej $y = 2x - 1$. Ma ona równanie postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktu P i otrzymujemy $2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, czyli $b = 4$.

Zatem $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$



i otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych: $Q(2, 3)$.

Obliczamy długość odcinka PQ :

$$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$$

Zatem odległość punktu P od prostej $y = 2x - 1$ jest równa $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość punktu P od prostej l .

a) $P(5, 1)$, $l: y = x$

b) $P(-1, 3)$, $l: y = \frac{4}{3}x - 4$

Jeżeli metodę opisaną w przykładzie 1. zastosujemy w przypadku ogólnym, to otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym:

$$Ax + By + C = 0$$

wyraża się za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ćwiczenie 1

a) Równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P :

$$y = -x + 6$$

Punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne $Q(3, 3)$. Zatem:

$$|PQ| = \sqrt{(5-3)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P :

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

Punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne $Q(3, 0)$. Zatem $|PQ| = 5$.

Uczeń:

- oblicza odległość punktu od prostej,
- oblicza odległość między prostymi równoległymi,
- stosuje wzór na odległość punktu od prostej do obliczania pól wielokątów.

Ćwiczenie 2

a) $d_A = \sqrt{2}$, $d_B = 0$, $d_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $d_A = \sqrt{10}$, $d_B = \sqrt{10}$,

$d_C = \frac{13\sqrt{10}}{10}$

c) $d_A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_B = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $d_C = 0$

Ćwiczenie 3

a) Odległość punktu C od prostej l : $d = \frac{8\sqrt{10}}{5}$

Prosta l przecina osie układu współrzędnych w punktach $A(-2, 0)$ i $B(0, 6)$, zatem:

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

Pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{5} = 16$$

b) Odległość punktu C od prostej l : $d = \sqrt{13}$

Prosta l przecina osie układu współrzędnych w punktach $A(6, 0)$ i $B(0, 4)$, zatem:

$$|AB| = 2\sqrt{13}$$

Pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

Przykład 2

Oblicz odległość punktu $P(5, -1)$ od prostej $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$4x + 3y - 6 = 0$$

i odczytujemy z niego wartości współczynników: $A = 4$, $B = 3$ i $C = -6$. Wartości te razem ze współrzędnymi $x_0 = 5$ i $y_0 = -1$ podstawiamy do wzoru:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|20 - 3 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz odległości punktów $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ i $C(-1, 3)$ od prostej l .

a) $l: y - x = 1$

b) $l: 3x - y - 7 = 0$

c) $l: y = -\frac{1}{2}x + 2,5$

Przykład 3

Punkty $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ i $C(2, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz pole tego trójkąta.

Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru $P = \frac{1}{2}a \cdot h$, w którym $a = |AB|$, a h jest odległością punktu C od prostej AB .

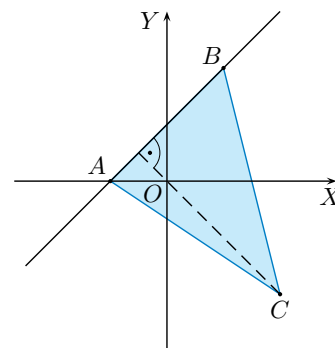
$$a = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = x + 1$ i zapisujemy je w postaci ogólnej: $x - y + 1 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB :

$$h = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5$.



Ćwiczenie 3

Oblicz odległość punktu C od prostej l oraz pole trójkąta ABC , którego wierzchołki A i B są punktami przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych.

a) $l: y = 3x + 6$, $C(2, -4)$

b) $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$, $C(1, -1)$

Ćwiczenie 4

Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{3}{5}x - 6$ z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołek D ma współrzędne $(1, 4)$.

Ćwiczenie 4

Prosta AB przecina osie układu współrzędnych w punktach $A(10, 0)$ i $B(0, -6)$, zatem:

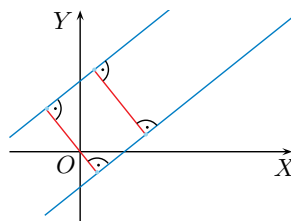
$$|AB| = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

Odległość punktu D od prostej AB : $d = \frac{47\sqrt{34}}{34}$

Pole równoległoboku $ABCD$: $P = 2\sqrt{34} \cdot \frac{47\sqrt{34}}{34} = 94$

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.

Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych (dlaczego?).



Przykład 4

Oblicz odległość między prostymi $l: 3x - 2y + 2 = 0$ i $k: 3x - 2y - 11 = 0$.

Dane proste są równoległe. Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = 1$, zatem punkt $A(0, 1)$ należy do tej prostej.

Obliczamy odległość punktu A od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz odległość między prostymi:

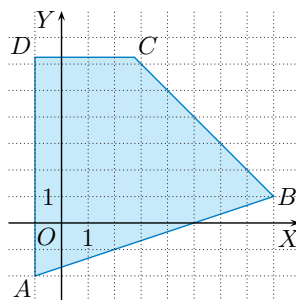
- a) $y = x - 1$ i $y = x + 3$, c) $x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x + 6$,
b) $y = 2x - 1$ i $y = 2x + 2$, d) $3x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Zadania

1. Oblicz odległości punktów A i B od prostej l . Czy prosta AB jest równoległa do prostej l ?

- a) $A(1, 4)$, $B(5, 5)$, $l: y = \frac{2}{5}x - 6$
b) $A(-4, -2)$, $B(2, 6)$, $l: y = 1\frac{1}{3}x - 5$
c) $A(-5, -1)$, $B(7, -6)$, $l: y = -2,4x$

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-1, -2)$, $B(8, 1)$, $C(\frac{11}{4}, \frac{25}{4})$ i $D(-1, \frac{25}{4})$ (rysunek obok). Oblicz odległości punktu $S(2, 4)$ od boków tego czworokąta.



3. Punkty $A(6, 4)$, $B(-3, 7)$ oraz $C(-2, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB oraz pole tego równoległoboku.

4. Oblicz pole trójkąta ABC .

- a) $A(-1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$ b) $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$, $C(2, -1)$

3. Równanie prostej $AB: x + 3y - 18 = 0$

Odległość punktu C od prostej $AB: d_C = 2\sqrt{10}$

Długość boku $AB: 3\sqrt{10}$

Pole równoległoboku: $P = 3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 60$

4. a) Równanie prostej $AB: 3x + 4y - 1 = 0$

$d(C, AB) = \frac{17}{5}$, $|AB| = 5$

Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{17}{5} = 8\frac{1}{2}$.

b) Równanie prostej $AB: x - y + 3 = 0$

$d(C, AB) = 3\sqrt{2}$, $|AB| = 5\sqrt{2}$

Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15$.

Ćwiczenie 5

- a) Do prostej $y = x - 1$ należy punkt $(0, -1)$, zatem:

$$d = 2\sqrt{2}$$

- b) Do prostej $y = 2x - 1$ należy punkt $(0, -1)$, zatem:

$$d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

- c) Do prostej $y = \frac{1}{2}x + 6$ należy punkt $(0, 6)$, zatem:

$$d = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

- d) Do prostej $y = \frac{3}{2}x + 1$ należy punkt $(0, 1)$, zatem:

$$d = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $l: 2x - 5y - 30 = 0$,
 $d_A = \frac{48\sqrt{29}}{29}$, $d_B = \frac{45\sqrt{29}}{29}$,
nie jest

- b) $l: 4x - 3y - 15 = 0$,
 $d_A = d_B = 5$, jest

- c) $l: 12x + 5y = 0$,
 $d_A = 5$, $d_B = \frac{54}{13}$, nie jest

2. Równania prostych zawierających boki czworokąta:

$$AB: x - 3y - 5 = 0,$$

$$BC: x + y - 9 = 0,$$

$$CD: y = \frac{25}{4},$$

$$AD: x = -1$$

$$d_{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}, d_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$d_{CD} = 2\frac{1}{4}, d_{AD} = 3$$

5. a) Odległość między prostymi $d = 2\sqrt{5}$, czyli promień koła $r = \sqrt{5}$ i pole $P = 5\pi$.

b) Odległość między prostymi $d = 10$, czyli $r = 5$ i pole $P = 25\pi$.

6. a) $AB \parallel CD$, $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$,
 $P = 38,5$

b) $AB \parallel CD$, $d = 3\sqrt{10}$,
 $P = 75$

7. a) $y = x + 10\sqrt{2}$
lub $y = x - 10\sqrt{2}$

b) $y = x + 3 - 10\sqrt{2}$
lub $y = x + 3 + 10\sqrt{2}$

8. a) Współrzędne punktów:
 $A(0, -4)$, $B(2, 0)$, zatem:

$$|AB| = 2\sqrt{5}$$

Odległość między prostymi jest równa wysokości trójkąta $h = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 6$$

b) Współrzędne punktów:
 $A(0, -6)$, $B(12, 0)$, zatem:

$$|AB| = 6\sqrt{5}$$

Odległość między prostymi jest równa wysokości równoległoboku $h = 2\sqrt{5}$, zatem:

$$P = 6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 60$$

5. Oblicz pole koła stycznego jednocześnie do prostych k i l .

$$\text{a) } k: 2x - y + 4 = 0, l: 2x - y - 6 = 0 \quad \text{b) } k: y = \frac{3}{4}x + 6, l: y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$$

6. Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi oraz oblicz pole czworokąta $ABCD$.

$$\text{a) } A(-2, -6), B(6, 2), C(0, 3), D(-3, 0)$$

$$\text{b) } A(-9, -2), B(3, -6), C(3, 4), D(0, 5)$$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie prostej l_2 równoległej do prostej $l_1: y = 2x$, jeśli wiadomo, że odległość między tymi prostymi jest równa 4.

Równanie prostej l_2 ma postać $y = 2x + b$. Dla $x = 0$ otrzymujemy punkt $P(0, b)$ należący do tej prostej. Zapisujemy równanie prostej l_1 w postaci ogólnej: $-2x + y = 0$. Wyznaczamy odległość punktu P od tej prostej:

$$\frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot b + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}$$

Ale $\frac{|b|}{\sqrt{5}} = 4$, zatem $|b| = 4\sqrt{5}$, czyli równanie prostej l_2 zapisujemy w postaci:

$$y = 2x + 4\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad y = 2x - 4\sqrt{5}$$

Wyznacz równanie prostej odległej o 10 od prostej: a) $y = x$, b) $y = x + 3$.

8. a) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = 2x - 4$ z osiami układu współrzędnych, a punkt C leży na prostej $y = 2x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABC .

b) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{1}{2}x - 6$ z osiami układu współrzędnych, a punkty C i D leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x - 1$. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

9. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostych k i l oraz równo odległej od każdej z nich.

$$\text{a) } k: \sqrt{3}x - y + 1 = 0, l: \sqrt{3}x - y + 7 = 0$$

$$\text{b) } k: 1,4x + 2y + 10 = 0, l: 7x + 10y - 20 = 0$$

10. Korzystając z podanego obok wzoru na odległość d między prostymi równoległymi $Ax + By + C_1 = 0$ i $Ax + By + C_2 = 0$, oblicz odległość między prostymi:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{a) } 2x - y + 4 = 0 \quad \text{i} \quad 2x - y - 6 = 0, \quad \text{b) } y = \frac{12}{5}x - \frac{6}{5} \quad \text{i} \quad y = \frac{12}{5}x + \frac{7}{5}.$$

9. a) Szukana prosta ma postać: $y = \sqrt{3}x + b$. Należy do niej punkt $P(0, b)$, zatem $d_{Pk} = d_{Pl}$:

$$\frac{|-b+1|}{2} = \frac{|-b+7|}{2}$$

skąd otrzymujemy $b = 4$. Zatem szukana prosta: $y = \sqrt{3}x + 4$.

b) Szukana prosta ma postać: $7x + 10y + b = 0$, należy do niej punkt $P(0, -\frac{b}{10})$, zatem $d_{Pk} = d_{Pl}$:

$$\frac{|-b+50|}{\sqrt{149}} = \frac{|-b-20|}{\sqrt{149}}$$

skąd otrzymujemy $b = 15$. Zatem szukana prosta: $7x + 10y + 15 = 0$.

Uwaga. Łatwo udowodnić, że prosta równo odległa od prostych $Ax + By + C_1 = 0$ oraz $Ax + By + C_2 = 0$ ma równanie postaci:

$$Ax + By + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0$$

10. a) $2\sqrt{5}$

b) Równania ogólne prostych:

$$12x - 5y - 6 = 0 \quad \text{i} \quad 12x - 5y + 7 = 0, \quad \text{zatem } d = 1.$$

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

Twierdzenie

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ (rysunek obok).

Wierzchołki prostokąta $ADEF$ mają współrzędne $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_1)$, $E(x_2, y_3)$ i $F(x_1, y_3)$.

Wyznaczamy pole prostokąta $ADEF$:

$$\begin{aligned} P_{ADEF} &= (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) = \\ &= x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1 \end{aligned}$$

Wyznaczamy pola trójkątów T_1 , T_2 , T_3 :

$$P_1 = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} (x_2 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1)$$

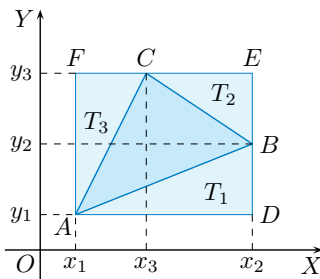
$$P_2 = \frac{1}{2} (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) = \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_3 y_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) = \frac{1}{2} (x_3 y_3 - x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1)$$

Zatem pole trójkąta ABC : $P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$, skąd otrzymujemy (sprawdź):

$$P = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$$

Zauważmy, że wierzchołki trójkąta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ są położone w kolejności przeciwej do ruchu wskazówek zegara. Jeśli wierzchołki te byłyby położone w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, to otrzymalibyśmy równość: $P = -\frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$. Oba wzory można zapisać w postaci: $P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$.

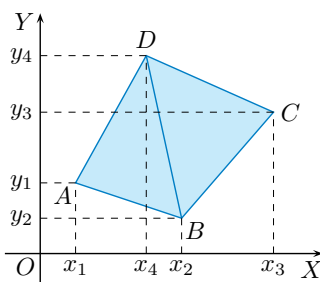


1. Korzystając z podanego wzoru, oblicz pole trójkąta ABC .

a) $A(-3, 3)$, $B(3, -2)$, $C(5, 1)$

b) $A(1, 6)$, $B(-3, -2)$, $C(6, 3)$

2. Wyznacz pola trójkątów ABD i BCD (rysunek obok), a następnie uzasadnij, że pole czworokąta $ABCD$ dane jest wzorem:



$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_4 y_3|$$

2. $P_{ABD} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_4 y_2)$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} (x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_2 - x_2 y_4 - x_3 y_2 - x_4 y_3)$$

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_4 y_3|$$

1. a) 14 b) 26

Uczeń:

- podaje równanie okręgu o danych środku i promieniu,
- sprawdza, czy punkt należy do danego okręgu,
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, przechodzącego przez dany punkt,
- wyznacza środek i promień okręgu, gdy dane jest jego równanie w postaci kanonicznej lub postaci ogólnej,
- sprawdza, czy dane równanie jest równaniem okręgu,
- wyznacza wartość parametru tak, aby dane równanie opisywało okrąg,
- wyznacza równanie okręgu opisanego na trójkącie,
- stosuje w zadaniach równanie okręgu.

Ćwiczenie 1

a) $x^2 + y^2 = 25$, 12 punktów:

(5, 0), (4, 3), (3, 4),
(0, 5), (-3, 4), (-4, 3),
(-5, 0), (-4, -3), (-3, -4),
(0, -5), (3, -4), (4, -3)

b) $x^2 + y^2 = 4$, 4 punkty:

(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)

c) $x^2 + y^2 = 2$, 4 punkty:

(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)

d) $x^2 + y^2 = 5$, 8 punktów:

(2, 1), (1, 2), (-1, 2), (-2, 1),
(-2, -1), (-1, -2), (1, -2),
(2, -1)

Ćwiczenie 2

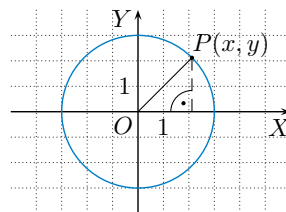
a) $x^2 + y^2 = 36$

b) $x^2 + y^2 = 64$

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu $P(x, y)$ tego okręgu spełniają równanie:

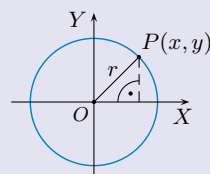
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Równanie okręgu

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Uwaga. Zamiast „okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$ ” będziemy też pisać krótko: „okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ ”.

Ćwiczenie 1

Narysuj okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r . Podaj równanie tego okręgu. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

a) $r = 5$

b) $r = 2$

c) $r = \sqrt{2}$

d) $r = \sqrt{5}$

Ćwiczenie 2

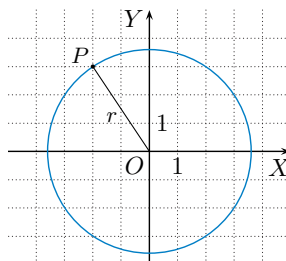
Podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych przechodzącego przez punkt: a) (0, 6), b) (-8, 0).

Przykład 1

Punkt $P(-2, 3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$. Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$: $(-2)^2 + 3^2 = r^2$.

Stąd $r^2 = 13$, czyli równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 = 13$, a jego promień $r = \sqrt{13}$.



Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie i promień okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$, jeśli okrąg ten przechodzi przez punkt P .

a) $P(5, -12)$

b) $P(-3, -3)$

c) $P(-4, -5)$

d) $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

Ćwiczenie 3

a) $r = 13$, $x^2 + y^2 = 169$

b) $r = 3\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 18$

c) $r = \sqrt{41}$, $x^2 + y^2 = 41$

d) $r = 2\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 8$

Multiteka

- Okrąg i trójkąt w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

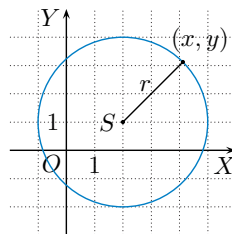
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, 1)$ i promieniu $r = 3$.

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów (x, y) , których odległość od punktu $S(2, 1)$ jest równa 3, zatem jego równanie ma postać:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$



Twierdzenie

Okrąg o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r , a następnie narysuj ten okrąg.

- a) $S(2, 5)$, $r = 3$ b) $S(-7, 6)$, $r = 2$ c) $S(-4, -3)$, $r = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Podaj współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

- a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$, d) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 8$,
b) $(x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{4})^2 = 2\frac{7}{9}$, e) $(x+5)^2 + (y+9)^2 = 225$,
c) $x^2 + (y+\frac{9}{4})^2 = 10$, f) $(x-1\frac{1}{6})^2 + y^2 = 45$.

Przykład 3

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, -1)$ przechodzącego przez punkt $P(3, 1)$.

Obliczamy promień: $r = |SP| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Zatem równanie okręgu ma postać: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P . Narysuj ten okrąg.

- a) $S(0, -1)$, $P(1, 1)$ b) $S(-3, -1)$, $P(-1, 3)$ c) $S(-1, 1)$, $P(2, 2)$

Ćwiczenie 4

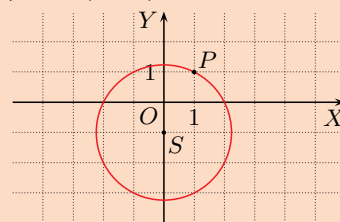
- a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$
b) $(x+7)^2 + (y-6)^2 = 4$
c) $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 2$

Ćwiczenie 5

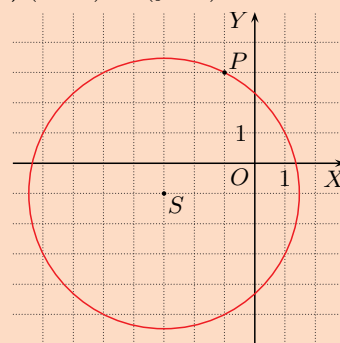
- a) $S(2, 5)$, $r = 4$
b) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $r = \frac{5}{3}$
c) $S(0, -\frac{9}{4})$, $r = \sqrt{10}$
d) $S(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $r = 2\sqrt{2}$
e) $S(-5, -9)$, $r = 15$
f) $S(1\frac{1}{6}, 0)$, $r = 3\sqrt{5}$

Ćwiczenie 6

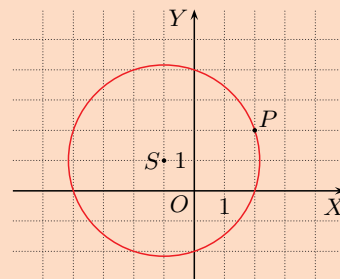
- a) $x^2 + (y+1)^2 = 5$



- b) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 20$



- c) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$



Przykład 4

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10 = 0$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2 \cdot 5y + 25) - 10 - 1 - 25 = 0$$
$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 36$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(-1, -5)$ i promieniu 6.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

$$(x^2 + 2 \cdot 3x + 9) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + 13 - 9 - 4 = 0$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Powyższe równanie jest prawdziwe tylko dla $x = -3$ i $y = 2$, zatem spełniają je jedynie współrzędne punktu $(-3, 2)$. Nie jest to więc równanie okręgu.

c) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + (y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) + 3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0$$
$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{2}$$

Suma kwadratów nie może być liczbą ujemną, więc powyższe równanie jest sprzeczne (zbiór rozwiązań jest pusty) i nie może być równaniem okręgu.

Ćwiczenie 7

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4\frac{1}{2} = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6y + 2x = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 - 20x - 4y + 2 = 0$

Równanie $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C są stałymi, jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$.

Dowód

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$$

- Dla $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$ równanie jest sprzeczne.
- Dla $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$ równanie opisuje punkt $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$.
- Dla $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$ równanie opisuje okrąg o środku $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ i promieniu $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$.

Powyższe równanie nazywamy **równaniem okręgu w postaci ogólnej**.

Ćwiczenie 7

a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ – równanie okręgu

b) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = -2$ – nie jest to równanie okręgu

c) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$ – równanie okręgu

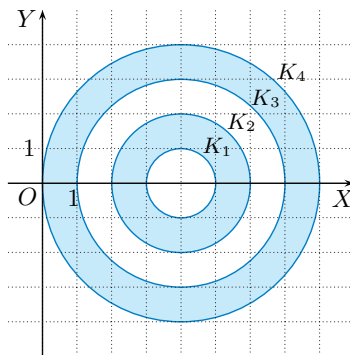
d) $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 0$ – nie jest to równanie okręgu

e) $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ – równanie okręgu

f) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$ – równanie okręgu

Zadania

- Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .
 - $S(1, 3)$, $r = 2$
 - $S(-6, 2)$, $r = \frac{3}{4}$
 - $S(-5, -1)$, $r = 2\sqrt{5}$
- Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie S i przechodzi przez punkt P .
 - $S(2, 0)$, $P(1, 3)$
 - $S(2, -3)$, $P(4, -1)$
 - $S(-5, 2)$, $P(-8, -2)$
- Podaj równania okręgów K_1 , K_2 , K_3 i K_4 przedstawionych na rysunku obok.
 - Do których z przedstawionych okręgów należą punkty $A(4 - \sqrt{6}, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{7})$ i $C(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?
 - Jaki procent koła ograniczonego okręgiem K_4 został zacieniowany?
- Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB . Narysuj ten okrąg.
 - $A(1, 2)$, $B(7, 2)$
 - $A(-1, -2)$, $B(3, 6)$
 - $A(-3, -4)$, $B(5, 2)$
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC .
 - $A(-1, 2)$, $B(6, -2)$, $C(3, 4)$
 - $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(-3, -7)$
- Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu. Narysuj ten okrąg.
 - $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$
 - $2x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 8 = 0$
 - $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 0$
 - $3x^2 + 3y^2 + 24x - 6y + 3 = 0$
- Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.
 - $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$
 - $x^2 + y^2 - x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = 0$
 - $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y - 4 = 0$
- Dla jakich wartości parametru m podane równanie jest równaniem okręgu?
 - $x^2 + y^2 - 4 + m^2 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$
 - $x^2 + y^2 - 6x - 4y - m^2 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 16x + 2y = -64 - m^2$
 - $x^2 + y^2 + 4x - 8y = m^2 - m - 22$
 - $x^2 + y^2 - 2mx - 2y = -2m - 16$



Odpowiedzi do zadań

- $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
 - $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{16}$
 - $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 20$
- $(x - 2)^2 + y^2 = 10$
 - $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8$
 - $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$
- $K_1: (x - 4)^2 + y^2 = 1$,
 $K_2: (x - 4)^2 + y^2 = 4$,
 $K_3: (x - 4)^2 + y^2 = 9$,
 $K_4: (x - 4)^2 + y^2 = 16$
 - $A \in K_3$, $B \in K_4$, $C \in K_1$
 - Pole koła ograniczonego okręgiem K_4 jest równe 16π . Pole obszaru zacieniowanego: $16\pi - 9\pi + 4\pi - \pi = 10\pi$.
Zatem $\frac{10\pi}{16\pi} \cdot 100\% = 62,5\%$.
- $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 - $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$
 - $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$
- $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$
 - $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{125}{4}$
- $S(3, -2)$, $r = 5$
 - $S(4, 3)$, $r = 6$
 - $S(-5, -2)$, $r = 8$
 - $S(6, -2)$, $r = 6$
 - $S(\frac{3}{2}, 2)$, $r = \frac{5}{2}$
 - $S(-4, 1)$, $r = 4$
- a), b), d), f) jest
c), e) nie jest

- $x^2 + y^2 = 4 - m^2 > 0$, czyli $m \in (-2; 2)$
 - $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - m > 0$, czyli $m \in (-\infty; 5)$
 - $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13 + m^2 > 0$, czyli $m \in \mathbf{R}$
 - $(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 1 - m^2 > 0$, czyli $m \in (-1; 1)$
 - $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = m^2 - m - 2 > 0$, czyli $m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 - $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = m^2 - 2m - 15 > 0$, czyli $m \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

9. a) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = m^2 + 2m + 1 = 16$,
czyli $m = -5$ lub $m = 3$
b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = m^2 - 2m + 8 = 16$,
czyli $m = -2$ lub $m = 4$
c) $(x+2)^2 + (y-\frac{1}{2}m)^2 = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{4}m + 16 = 16$,
czyli $m = 0$ lub $m = \frac{1}{3}$

10. a) Niech $S(x, y)$ będzie środkiem okręgu, wówczas:

$$|AS|^2 = |BS|^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2 \\ y = -2$$

Zatem $S(x, -2)$. Wyznaczamy pierwszą współrzędną:

$$|AS| = r \\ \sqrt{(x-2)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 8$$

czyli równanie okręgu:

$$(x-8)^2 + (y+2)^2 = 45 \\ \text{lub } (x+4)^2 + (y+2)^2 = 45$$

$$\text{b) } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20 \\ \text{lub } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 20$$

$$\text{c) } (x+2)^2 + y^2 = 25 \\ \text{lub } (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$\text{d) } (x+4)^2 + (y-6)^2 = 26 \\ \text{lub } (x-2)^2 + y^2 = 26$$

11. a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$
b) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 45$

12. a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 40$
b) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 50$

9. Dla jakich wartości parametru m podane równanie jest równaniem okręgu o promieniu 4?

- a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = m^2 + 2m - 4$
b) $x^2 - 2x + y^2 + 4y = m^2 - 2m + 3$
c) $x^2 + 4x + y^2 - my + m^2 - \frac{1}{4}m - 12 = 0$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie okręgu o promieniu $5\sqrt{2}$ przechodzącego przez punkty $A(-2, 0)$ i $B(2, 2)$.

Środek okręgu S leży na symetralnej odcinka AB . Jest to prosta o równaniu $y = -2x + 1$ (sprawdź).

Zatem szukamy punktu $S(x_0, -2x_0 + 1)$ takiego, że $|SA| = 5\sqrt{2}$.

$$|SA| = \sqrt{(x_0 - (-2))^2 + (-2x_0 + 1 - 0)^2}$$

Otrzymujemy więc równanie:

$$\sqrt{(x_0 + 2)^2 + (-2x_0 + 1)^2} = 5\sqrt{2}$$

Równanie jest spełnione, gdy $x_0 = -3$ lub $x_0 = 3$, zatem $S(-3, 7)$ lub $S(3, -5)$. Czyli równanie okręgu ma postać:

$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 50 \quad \text{lub} \quad (x-3)^2 + (y+5)^2 = 50$$

Wyznacz równanie okręgu o promieniu r przechodzącego przez punkty A i B .

- a) $r = 3\sqrt{5}$, $A(2, 1)$, $B(2, -5)$ c) $r = 5$, $A(1, 4)$, $B(3, 0)$
b) $r = 2\sqrt{5}$, $A(-3, -3)$, $B(3, 3)$ d) $r = \sqrt{26}$, $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$

11. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B , którego środek należy do prostej l .

- a) $A(3, -2)$, $B(5, 0)$, $l: y = x + 1$ b) $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$, $l: y = 2x + 6$

12. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

- a) $A(-3, 2)$, $B(9, 2)$, $C(5, 10)$ b) $A(3, -3)$, $B(9, 3)$, $C(-3, 9)$

13. Punkt $S(4, -3)$ jest środkiem okręgu, a punkt $A(2, 1)$ jest środkiem jego cięciwy. Wyznacz równanie okręgu, wiedząc, że długość tej cięciwy jest równa $2\sqrt{5}$.

14. Wykaż, że jeżeli $m \neq n$, to równanie $x^2 + y^2 + mx + ny + \frac{mn}{2} = 0$ przedstawia okrąg. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

13. $|SA|^2 = 20$. Niech B będzie jednym z punktów wspólnych cięciwy i okręgu. Wówczas:

$$r^2 = |SA|^2 + |AB|^2 = 20 + (\sqrt{5})^2 = 25$$

$$\text{Równanie okręgu: } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

14. $x^2 + mx + \frac{m^2}{4} + y^2 + ny + \frac{n^2}{4} = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - \frac{mn}{2}$

$$(x + \frac{m}{2})^2 + (y + \frac{n}{2})^2 = (\frac{m}{2} - \frac{n}{2})^2 > 0 \text{ dla } m \neq n$$

$$\text{Środek okręgu: } (-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}), \text{ promień okręgu: } |\frac{m}{2} - \frac{n}{2}|$$

Okrąg wpisany w trójkąt

Przykład

Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A(0, 2)$, $B(7, 3)$ i $C(4, 6)$.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Prosta AC opisana jest równaniem $x - y + 2 = 0$, a prosta AB : $x - 7y + 14 = 0$ (sprawdź).

Dwusieczna kąta CAB (półprosta k na rysunku obok) jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta CAB .

Rozważmy punkt $P(x, y)$ należący do dwusiecznej kąta CAB . Odległość punktu P od ramienia AC jest równa:

$$\frac{|1 \cdot x + (-1) \cdot y + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}}$$

Odległość punktu P od ramienia AB jest równa:

$$\frac{|1 \cdot x + (-7) \cdot y + 14|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{|x - 7y + 14|}{5\sqrt{2}}$$

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x - 7y + 14|}{5\sqrt{2}}$$

$$5|x - y + 2| = |x - 7y + 14|$$

$$5(x - y + 2) = x - 7y + 14 \quad \text{lub} \quad -5(x - y + 2) = x - 7y + 14$$

$$5x - 5y + 10 = x - 7y + 14 \quad \text{lub} \quad -5x + 5y - 10 = x - 7y + 14$$

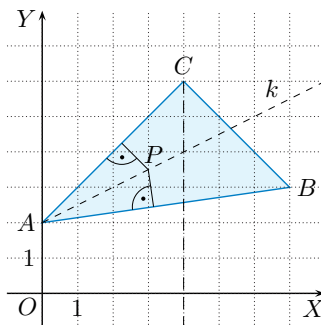
$$2y = -4x + 4 \quad \text{lub} \quad 12y = 6x + 24$$

$$y = -2x + 2 \quad \text{lub} \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

Dwusieczna kąta CAB jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 2$ (prosta $y = -2x + 2$ zawiera dwusieczne kątów rozwartych utworzonych przez proste AC i AB).

Dwusieczna kąta ACB jest zawarta w prostej $x = 4$ (sprawdź).

Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punktem przecięcia prostych $y = \frac{1}{2}x + 2$ i $x = 4$. Ma on zatem współrzędne $(4, 4)$.



1. Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

- a) $A(-2, 4)$, $B(3, -6)$, $C(6, 0)$ b) $A(-12, -1)$, $B(0, -5)$, $C(3, 4)$

1. a) Prosta AB : $2x + y = 0$, prosta AC : $x + 2y - 6 = 0$, prosta BC : $2x - y - 12 = 0$

Odległość punktu $P(x, y)$ od ramion AB i AC : $\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+2y-6|}{\sqrt{5}}$

Dwusieczna kąta CAB jest zawarta w prostej: $y = -x + 2$.

Dwusieczna kąta ACB : $y = \frac{1}{3}x - 2$

Środek okręgu: $(3, -1)$

b) Prosta AB : $x + 3y + 15 = 0$, prosta AC : $x - 3y + 9 = 0$, prosta BC : $3x - y - 5 = 0$

Odległość punktu $P(x, y)$ od ramion AB i BC : $\frac{|x+3y+15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y-5|}{\sqrt{10}}$

Dwusieczna kąta ABC jest zawarta w prostej: $y = -2x - 5$.

Dwusieczna kąta BAC : $y = -1$

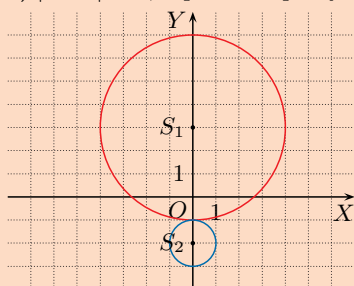
Środek okręgu: $(-2, -1)$

Uczeń:

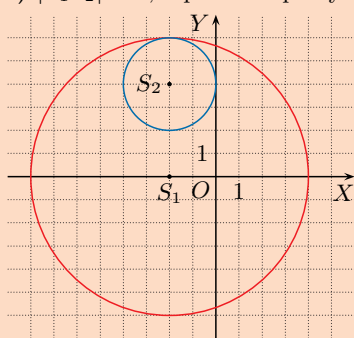
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów,
- podaje liczbę punktów wspólnych dwóch okręgów,
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, znając jego położenie względem okręgu opisanego podanym równaniem,
- rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia okręgów, w tym zadania z parametrem.

Ćwiczenie 1

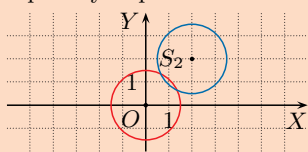
- a) $|S_1S_2| = 2$,
brak punktów wspólnych
- b) $|S_1S_2| = 5$, 1 punkt wspólny



- c) $|S_1S_2| = 4$, 1 punkt wspólny



- d) $|S_1S_2| = 2\sqrt{2}$,
2 punkty wspólne



Multiteka

- Położenie okręgów w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.5



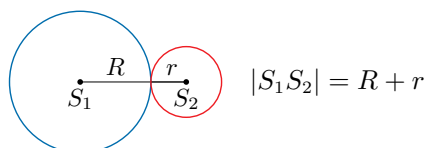
2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

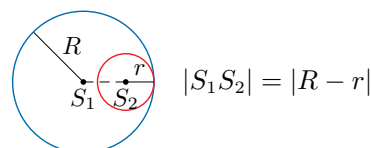
Okręgi styczne

(mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie

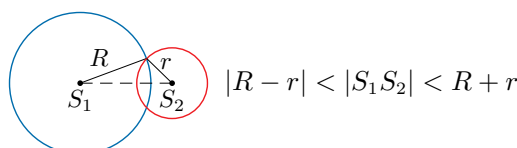


styczne wewnętrznie



Okręgi przecinające się

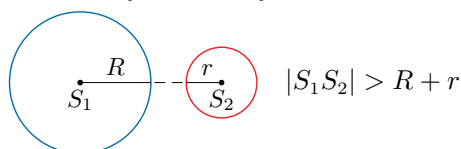
(mają dwa punkty wspólne)



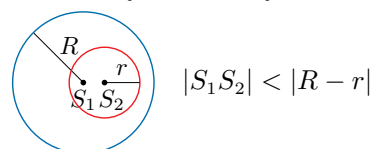
Okręgi rozłączne

(nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



rozłączne wewnętrznie



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu R oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

- a) $S_1(-1, 0)$, $R = 5$, $S_2(1, 0)$, $r = 2$ c) $S_1(-2, 0)$, $R = 6$, $S_2(-2, 4)$, $r = 2$
b) $S_1(0, 3)$, $R = 4$, $S_2(0, -2)$, $r = 1$ d) $S_1(0, 0)$, $R = \frac{3}{2}$, $S_2(2, 2)$, $r = \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu o środku w punkcie S_1 i promieniu R z okręgiem o środku w punkcie S_2 i promieniu r w zależności od r .

- a) $S_1(-3, 0)$, $R = 5$, $S_2(4, 0)$ c) $S_1(\sqrt{2}, 0)$, $R = 3$, $S_2(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$
b) $S_1(2, 0)$, $R = 4$, $S_2(2, -1)$ d) $S_1(\frac{1}{2}, 0)$, $R = 1$, $S_2(-\frac{10}{3}, 0)$

Ćwiczenie 2

- a) 0 punktów dla $r \in (0; 2) \cup (12; \infty)$,
1 punkt dla $r = 2$ lub $r = 12$,
2 punkty dla $r \in (2; 12)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 3) \cup (5; \infty)$,
1 punkt dla $r = 3$ lub $r = 5$,
2 punkty dla $r \in (3; 5)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}; \infty)$,
1 punkt dla $r = 3 - \sqrt{3}$ lub $r = 3 + \sqrt{3}$,
2 punkty dla $r \in (3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$
d) 0 punktów dla $r \in (0; 2\frac{5}{6}) \cup (4\frac{5}{6}; \infty)$,
1 punkt dla $r = 2\frac{5}{6}$ lub $r = 4\frac{5}{6}$,
2 punkty dla $r \in (2\frac{5}{6}; 4\frac{5}{6})$

Przykład 1

Określ wzajemne położenie okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0 \quad \text{oraz} \quad K_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$$

Zapisujemy równania okręgów K_1 i K_2 w postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne ich środków oraz promienie.

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8, \quad \text{środek } S_1(-1, 3), \quad \text{promień } r_1 = 2\sqrt{2}$$

$$K_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 2 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 18, \quad \text{środek } S_2(4, -2), \quad \text{promień } r_2 = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy odległość między środkami okręgów:

$$|S_1 S_2| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$|S_1 S_2| = r_1 + r_2$, zatem okręgi K_1 i K_2 są styczne zewnętrznie.

Ćwiczenie 3

Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .

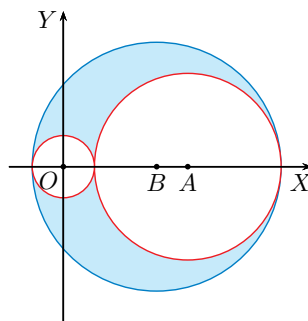
$$\text{a) } K_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$$

$$\text{b) } K_1: x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

$$\text{c) } K_1: x^2 + y^2 + 4x - 16y - 30 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$$

Zadania

1. Dwa okręgi o środkach $O(0,0)$ i $A(11,0)$ są styczne zewnętrznie. Oba te okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku $B(8,0)$ (rysunek obok). Oblicz promienie tych trzech okręgów i pole zacieniowanego obszaru.



2. Dany jest okrąg $x^2 + y^2 = 16$ i okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(0,4)$ i $B(4,0)$. Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.

3. Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu opisanego podanym równaniem z okręgiem o środku $S(1,3)$ i promieniu r w zależności od tego promienia.

$$\text{a) } x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{c) } x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 - 14x + 10y - 26 = 0$$

$$\text{d) } x^2 + y^2 + 4x - 12y + 8 = 0$$

3. a) 0 punktów dla $r \in (0; 3) \cup (7; \infty)$,

1 punkt dla $r \in \{3, 7\}$,

2 punkty dla $r \in (3; 7)$

- b) 0 punktów dla $r \in (20; \infty)$,

1 punkt dla $r = 20$,

2 punkty dla $r \in (0; 20)$

- c) 0 punktów dla $r \in (0; 3\sqrt{5} - 5) \cup (3\sqrt{5} + 5; \infty)$,

1 punkt dla $r \in \{3\sqrt{5} - 5, 3\sqrt{5} + 5\}$,

2 punkty dla $r \in (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$

- d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2}) \cup (7\sqrt{2}; \infty)$,

1 punkt dla $r \in \{\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\}$,

2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; 7\sqrt{2})$

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } K_1: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 13$$

$$K_2: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{73}$$

$$\sqrt{13} + \sqrt{10} < 4 + 4 < \sqrt{73}$$

Okręgi są rozłączne zewnętrznie.

$$\text{b) } K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$K_2: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{34}$$

$$2 + \sqrt{5} < 2 + 3 < \sqrt{34}$$

Okręgi są rozłączne zewnętrznie.

$$\text{c) } K_1: (x+2)^2 + (y-8)^2 = 98$$

$$K_2: (x-2)^2 + y^2 = 2$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{80}$$

$$\sqrt{98} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$= 6\sqrt{2} = \sqrt{72}$$

$$\sqrt{98} - \sqrt{2} < \sqrt{80} < \sqrt{98} + \sqrt{2}$$

Okręgi przecinają się.

Odpowiedzi do zadań

1. Oznaczmy promienie okręgów odpowiednio przez r_A , r_B , r_O , wówczas:

$$\begin{cases} 2r_B = 2r_O + 2r_A \\ r_O + r_A = 11 \\ r_B = 3 + r_A \end{cases}$$

$$\text{czyli } r_O = 3, r_A = 8, r_B = 11.$$

Pole obszaru:

$$P = P_B - P_A - P_O = 48\pi$$

2. $P_1 = 16\pi$, $P_2 = 8\pi$,
 $P = 8\pi - 8$

4. a) styczne zewnętrznie
b), c) styczne wewnętrznie
d) przecinają się
e) rozłączne wewnętrznie
f) rozłączne zewnętrznie

5. d – odległość między środkami okręgów

a) $d = 10$, $m = -252$
lub $m = 28$

b) $d = 13$, $m = -35$
lub $m = 381$

c) $d = 5$, $m = -15$
lub $m = \frac{65}{9}$

d) $d = \sqrt{41}$,
 $m = 57 - 8\sqrt{41}$ lub
 $m = 57 + 8\sqrt{41}$

7. a) $|AB| = 7$, $|AC| = 6$,
 $|BC| = 5$, $r_A = 4$, $r_B = 3$,
 $r_C = 2$
b) $|AB| = 10$, $|AC| = 8$,
 $|BC| = 6$, $r_A = 6$, $r_B = 4$,
 $r_C = 2$

8. Okręgi są styczne wewnętrznie, gdy odległość między ich środkami jest równa różnicy ich promieni. Niech $S(x, y)$. Wówczas:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$S\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

9. a) Niech $S(x, y)$. Wówczas:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4 \\ \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = 2 \end{cases}$$

$$x = 4, y = 3$$

Równanie okręgu:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$$

b) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
lub $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$

4. Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .

a) $K_1: x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$, $K_2: x^2 - 6x + y^2 - 12y + 29 = 0$

b) $K_1: x^2 + 4x + y^2 + 4y + 7 = 0$, $K_2: x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0$

c) $K_1: x^2 + 4x + y^2 + 2y - 95 = 0$, $K_2: x^2 - 2x + y^2 - 6y - 15 = 0$

d) $K_1: x^2 + 8x + y^2 - 10y + 5 = 0$, $K_2: x^2 + 10x + y^2 + 4y + 13 = 0$

e) $K_1: x^2 + 2x + y^2 - 16y + 16 = 0$, $K_2: x^2 - 2x + y^2 - 12y + 33 = 0$

f) $K_1: x^2 - 14x + y^2 - 4y + 4 = 0$, $K_2: x^2 + 10x + y^2 + 6y + 9 = 0$

5. Oblicz odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 . Podaj, dla jakich wartości parametru m okręgi te mają jeden punkt wspólny.

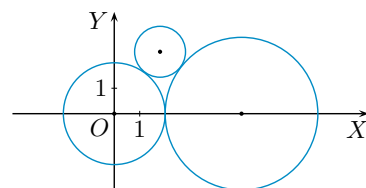
a) $K_1: x^2 + 12x + y^2 - 2y + m = 0$, $K_2: x^2 - 4x + y^2 + 10y - 20 = 0$

b) $K_1: x^2 - 10x + y^2 + 2y - 38 = 0$, $K_2: x^2 + 14x + y^2 - 8y - m + 5 = 0$

c) $K_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y + m = 0$, $K_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4m - 35 = 0$

d) $K_1: x^2 + 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$, $K_2: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 18 - m = 0$

6. Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, położone są w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



7. Punkty A , B i C są środkami trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie. Oblicz odległości między środkami tych okręgów i ich promienie.

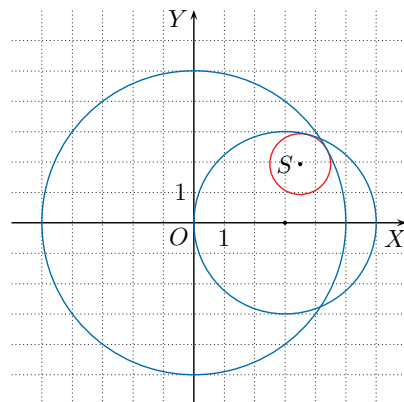
a) $A(0,0)$, $B(7,0)$, $C\left(\frac{30}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$

b) $A(-6,0)$, $B(4,0)$, $C\left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}\right)$

8. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu 1 (rysunek obok) jest styczny wewnętrznie do okręgów:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ oraz } (x-3)^2 + y^2 = 9$$

Wyznacz współrzędne punktu S .



9. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $r = 1$ stycznego wewnętrznie do okręgów: o środku S_1 i promieniu r_1 oraz o środku S_2 i promieniu r_2 .

a) $S_1(0,3)$, $r_1 = 5$, $S_2(6,3)$, $r_2 = 3$

b) $S_1(0,0)$, $r_1 = 6$, $S_2(4,4)$, $r_2 = 2$

6. Niech $h = |DO_3|$.

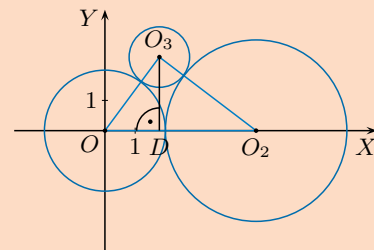
Z warunków zadania: $|OO_2| = 5$, $|O_2O_3| = 4$, $|OO_3| = 3$. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt OO_2O_3 jest prostokątny. Obliczamy pole trójkąta OO_2O_3 na dwa sposoby:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 5h$$

czyli $h = \frac{12}{5}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODO_3 mamy:

$$|OD|^2 + h^2 = |OO_3|^2$$

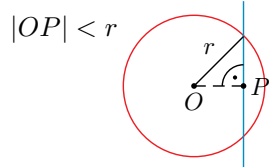
czyli $|OD| = \frac{9}{5}$. Zatem współrzędne środka najmniejszego okręgu: $O_3\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.



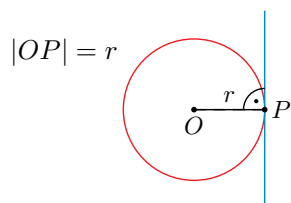
2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

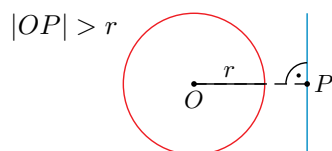
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.



Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.



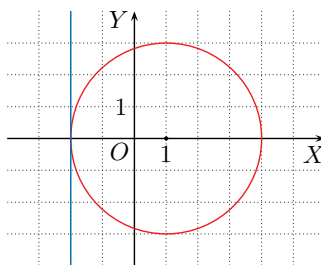
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $(1, 0)$ ma prosta $x = -2$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla $r = 3$ (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla $r > 3$,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla $0 < r < 3$.



Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $S(2, -2)$, $k: y = 2$ | c) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $k: x = 1 - \sqrt{2}$ |
| b) $S(-2, 2)$, $k: x = \sqrt{3}$ | d) $S(-1, 3)$, $k: y = x + 2$ |

Ćwiczenie 1

- | | |
|---|---|
| a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$ | c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2} - \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \infty)$ |
| b) 0 punktów dla $r \in (0; 2 + \sqrt{3})$,
1 punkt dla $r = 2 + \sqrt{3}$,
2 punkty dla $r \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$ | d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; \infty)$ |

Uczeń:

- podaje liczbę punktów wspólnych i określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu,
- wyznacza równanie stycznej do okręgu spełniającej podane warunki,
- określa liczbę punktów wspólnych okręgu i prostej w zależności od parametru,
- rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia okręgu i prostej.

Multiteka

- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Środek okręgu: $S(2, 0)$,

promień: $r = 5$,

P – środek cięciwy

a) $|SP| = 2$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

Zatem $|AB| = 2\sqrt{21}$.

b) $|SP| = 3$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Zatem $|AB| = 8$.

c) Odległość środka okręgu

$S(2, 0)$ od prostej $x - 2y = 0$:

$$|SP| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Zatem $|AB| = \frac{22\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 3

a) $|SP| = 4$, $|AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$,

$$r^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \text{ zatem:}$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

b) $|SP| = 3$, $|AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$,

$$r^2 = 3^2 + 3^2 = 18, \text{ zatem:}$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$$

Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i prosta $l: x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

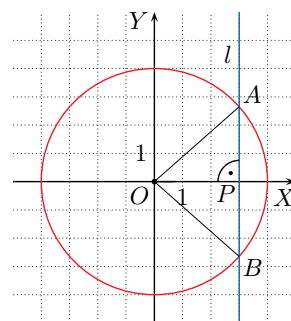
Środkiem okręgu jest punkt $(0, 0)$, a promień jest równy 4. Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą.

Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 2\sqrt{7}$$



Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 25$.

a) $l: x = 4$

b) $l: x = -1$

c) $l: y = \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu.

a) $l: x = 3$, $S(-1, -2)$

b) $l: y = -2$, $S(4, 1)$

Przykład 3

Ile punktów wspólnych z okręgiem o równaniu $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$ ma prosta $l: x - 3y + 3 = 0$?

Promień okręgu jest równy $\sqrt{10}$, a środkiem okręgu jest punkt $S(4, -1)$.

Obliczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta są styczne – mają jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 4 ma prosta l ?

a) $S(3, 4)$, $l: 12x + 5y - 4 = 0$

c) $S(-3, 2)$, $l: 4x + 3y + 6 = 0$

b) $S(7, 4)$, $l: 3x + 4y - 12 = 0$

d) $S(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $l: x + y = 0$

Ćwiczenie 4

Niech d – odległość środka okręgu od prostej.

a) $d = 4 = r$, zatem jest jeden punkt wspólny.

b) $d = 5 > r$, zatem nie ma punktów wspólnych.

c) $d = 0 < r$, zatem są dwa punkty wspólne.

d) $d = 4 = r$, zatem jest jeden punkt wspólny.

Przykład 4

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 - 6x + y^2 - 4y = m$ oraz prostej $l: x - 2y + 6 = 0$ w zależności od parametru m .

Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= m + 13 \\(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= m + 13\end{aligned}$$

Powyższe równanie jest równaniem okręgu dla $m \in (-13; \infty)$.

Środkiem okręgu jest punkt $S(3, 2)$, a promień jest równy $\sqrt{m + 13}$.

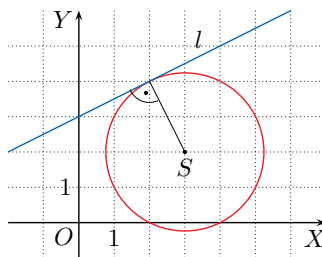
Obliczamy odległość środka okręgu od prostej l :

$$d = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

- Okrąg ma jeden punkt wspólny z prostą l , gdy $\sqrt{m + 13} = \sqrt{5}$, czyli dla $m = -8$ (rysunek obok).

- Okrąg ma dwa punkty wspólne z prostą l , gdy $\sqrt{m + 13} > \sqrt{5}$, czyli dla $m \in (-8; \infty)$.

- Okrąg nie ma punktów wspólnych z prostą l , gdy $m \in (-13; -8)$.



Ćwiczenie 5

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu O i prostej l w zależności od parametru m .

a) $O: x^2 + y^2 + 2y = m$, $l: y = \frac{1}{2}x - 6$ b) $O: x^2 + 6x + y^2 = m$, $l: y = -\frac{3}{4}x + 4$

Przykład 5

Wyznacz równania stycznych do okręgu o środku w punkcie $S(3, 2)$ i promieniu 2 przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Równanie stycznej $y = ax$ zapisujemy w postaci ogólnej $ax - y = 0$.

Odległość środka okręgu od stycznej jest równa promieniowi okręgu:

$$\frac{|a \cdot 3 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$|3a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{Obie strony równania są dodatnie.}$$

Obie strony równania podnosimy do kwadratu.

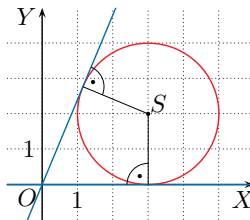
$$9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$5a^2 - 12a = 0$$

$$a(5a - 12) = 0$$

$$a = 0 \text{ lub } a = \frac{12}{5}$$

Równania szukanych stycznych: $y = 0$ oraz $y = \frac{12}{5}x$.



Ćwiczenie 5

a) Równanie okręgu: $x^2 + (y + 1)^2 = 1 + m$

$S(0, -1)$, $d = 2\sqrt{5}$,

$r = \sqrt{1 + m}$, czyli $m \in (-1; \infty)$

Liczba punktów wspólnych okręgu O i prostej l :

0 punktów dla $m \in (-1; 19)$,

1 punkt dla $m = 19$,

2 punkty dla $m \in (19; \infty)$

b) Równanie okręgu: $(x + 3)^2 + y^2 = 9 + m$

$S(-3, 0)$, $d = 5$,

$r = \sqrt{9 + m}$, czyli $m \in (-9; \infty)$

Liczba punktów wspólnych okręgu O i prostej l :

0 punktów dla $m \in (-9; 16)$,

1 punkt dla $m = 16$,

2 punkty dla $m \in (16; \infty)$

Ćwiczenie 6

a) Równanie stycznej:

$$ax - y + 1 - 4a = 0$$

Odległość środka okręgu od

$$\text{stycznej: } d = \frac{|-2+1-4a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$$

$$a = 0 \text{ lub } a = -\frac{8}{15}$$

Równania stycznych: $y = 1$ lub

$$y = -\frac{8}{15}x + \frac{47}{15}$$

$$|AS|^2 = 17,$$

czyli odległość punktu A od

punktu styczności P :

$$|AP| = \sqrt{17-1} = 4$$

b) Równanie stycznej:

$$ax - y + 3a - 2 = 0$$

Odległość środka okręgu od

$$\text{stycznej: } d = \frac{|2a-3+3a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$$

$$a = 3 \text{ lub } a = \frac{1}{3}$$

Równania stycznych: $y = 3x + 7$

$$\text{lub } y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$|AS|^2 = 50, \text{ czyli odległość}$$

punktu A od punktu styczności P :

$$|AP| = \sqrt{50-10} = 2\sqrt{10}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sqrt{5}$ b) 5 c) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $2\sqrt{10}$

2. a) $d = \sqrt{5}$, 2 punkty

b) $d = 2\sqrt{5}$, 0 punktów

c) $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$, 2 punkty

d) $d = 3$, 1 punkt

3. a) 0 punktów dla $r \in (0; 2)$,

1 punkt dla $r = 2$,

2 punkty dla $r \in (2; \infty)$

b) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{6})$,

1 punkt dla $r = 2\sqrt{6}$,

2 punkty dla $r \in (2\sqrt{6}; \infty)$

c) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{5})$,

1 punkt dla $r = 2\sqrt{5}$,

2 punkty dla $r \in (2\sqrt{5}; \infty)$

d) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{11}{2})$,

1 punkt dla $r = \frac{11}{2}$,

2 punkty dla $r \in (\frac{11}{2}; \infty)$

Ćwiczenie 6

Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu o środku w punkcie S i promieniu r . Wyznacz równania tych stycznych i oblicz odległość punktu A od punktów styczności.

a) $A(4, 1)$, $S(0, 2)$, $r = 1$

b) $A(-3, -2)$, $S(2, 3)$, $r = \sqrt{10}$

Zadania

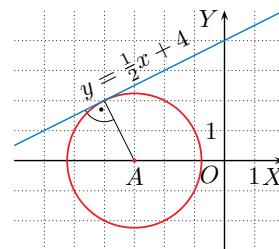
1. Prosta l jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A . Oblicz promień tego okręgu.

a) $l: y = \frac{1}{2}x + 4$, $A(-3, 0)$ (rysunek obok)

b) $l: 3x + 4y - 5 = 0$, $A(-4, -2)$

c) $l: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $A(2, 1)$

d) $l: y = 3x - 1$, $A(-5, 4)$



2. Oblicz odległość punktu S od prostej o podanym równaniu. Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma ta prosta?

a) $S(1, 3)$, $2x + y = 0$

c) $S(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $3x + y - 1 = 0$

b) $S(-7, 2)$, $x - 2y + 1 = 0$

d) $S(-8\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$, $x - 7y + 7 = 0$

3. Określ liczbę punktów wspólnych podanej prostej z okręgiem o środku w punkcie S w zależności od promienia r tego okręgu.

a) $3x + 4y - 1 = 0$, $S(1, 2)$

d) $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$, $S(2\sqrt{3}, -1)$

b) $\sqrt{2}x - y = 0$, $S(6, 0)$

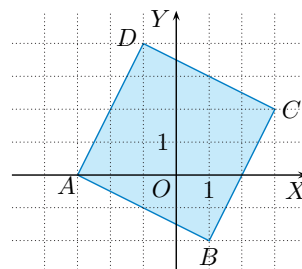
c) $0,5x - y - 1,5 = 0$, $S(-5, 1)$

4. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$ (rysunek obok).

Wyznacz równanie okręgu:

a) wpisanego w ten kwadrat,

b) opisanego na tym kwadracie.



5. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 100$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

a) $|AB| = 12$,

b) $|AB| = 10\sqrt{2}$,

c) $|AB| = 10$,

d) $|AB| = 20$.

6. Oś OX przecina okrąg o promieniu $2\sqrt{2}$ w punktach $A(5, 0)$ i B . Cięciwa AB ma długość 4. Oblicz współrzędne środka okręgu.

4. a) $x^2 + (y - 1)^2 = 5$

b) $x^2 + (y - 1)^2 = 10$

5. a) $x = -9$ lub $x = 7$

b) $x = -5\sqrt{2} - 1$ lub $x = 5\sqrt{2} - 1$

c) $x = -5\sqrt{3} - 1$ lub $x = 5\sqrt{3} - 1$

d) $x = -1$

6. Współrzędne środka okręgu mają postać $S(3, y)$ lub $S(7, y)$.

Niech d będzie odległością środka okręgu od cięciwy. Wówczas:

$$d^2 + (\frac{1}{2} \cdot 4)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

Stąd $d = 2$, czyli $y = -2$ lub $y = 2$.

Zatem $S(3, -2)$ lub $S(3, 2)$ lub $S(7, -2)$ lub $S(7, 2)$.

7. Okrąg o środku w punkcie $S(3, 2)$ ma z prostą $x - y - 3 = 0$ punkty wspólne A i B . Wiadomo, że $|AB| = 6\sqrt{2}$. Wyznacz równanie tego okręgu.
8. Wyznacz równanie prostej, która w przecięciu z okręgiem O wyznacza cięciwę o środku w punkcie $A(1, -3)$.
a) $O: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ b) $O: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$
9. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2, 1)$ stycznych do podanego okręgu.
a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ c) $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 5$
10. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(8, 8)$ oraz:
a) stycznego do osi OX w punkcie $B(4, 0)$,
b) stycznego do osi OY w punkcie $B(0, 12)$.
11. Dla jakich wartości parametru m prosta $3x + 4y = 0$ jest styczna do okręgu:
a) $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 2m = 0$, b) $x^2 + y^2 + 12x + 16y + m = 1$?
12. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która w przecięciu z okręgiem $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 40 = 0$ wyznacza cięciwę długości $2\sqrt{5}$.
13. Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$:
a) przechodzących przez początek układu współrzędnych,
b) równoległych do prostej $y = -2x$.
14. Wyznacz równania stycznych do okręgu O poprowadzonych z punktu A .
a) $O: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$, $A(-3, -2)$
b) $O: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, $A(-4, 1)$
- D** 15. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Wykaż, że jeśli okrąg ten jest styczny do osi OX , to spełniony jest warunek $a^2 - 4c = 0$.
16. a) Wyznacz równanie okręgu o promieniu $\sqrt{10}$ stycznego do prostej $3x - y - 1 = 0$ w punkcie $A(1, 2)$.
b) Dany jest okrąg styczny do prostej $x - y + 1 = 0$ i przechodzący przez punkt $A(-3, 2)$. Wyznacz współrzędne środka okręgu, jeśli leży on na prostej $4x + y = 0$.
- *17. Wyznacz równania wspólnych stycznych do okręgów: $x^2 + y^2 = 5$ oraz $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 20$.

7. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$
8. a) $y = -2x - 1$ b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$
9. a) $y = 1$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
b) $y = 1$, $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$
c) $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x + 5$
10. a) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$
b) $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 25$
11. a) $m = 12,5$ b) $m = 1$
12. $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$
13. a) $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$
b) $y = -2x + 10$, $y = -2x + 20$
14. a) $y = -2$, $y = \frac{56}{33}x + \frac{34}{11}$
b) $y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$, $y = \frac{3}{4}x + 4$
16. a) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$
lub $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
b) $(-\frac{25}{9}, \frac{100}{9})$ lub $(-1, 4)$
17. Równanie stycznej zapisujemy w postaci:

$$ax - y + b = 0$$

Środki i promienie okręgów:

$$O_1: S_1(0, 0), r_1 = \sqrt{5}$$

$$O_2: S_2(5, 5), r_2 = 2\sqrt{5}$$

Odległość środka S_1 od

$$\text{stycznej: } \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5},$$

$$\text{czyli } b^2 = 5(a^2 + 1)$$

Odległość środka S_2 od

$$\text{stycznej: } \frac{|5a - 5 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\sqrt{5},$$

czyli

$$(5a - 5 + b)^2 = 20(a^2 + 1)$$

$$\text{Zatem } (5a - 5 + b)^2 = 4b^2.$$

$$5a - 5 + b = 2b \text{ lub}$$

$$5a - 5 + b = -2b$$

$$b = 5a - 5 \text{ lub } b = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}a$$

$$\begin{cases} b = 5a - 5 \\ b^2 = 5(a^2 + 1) \end{cases} \text{ lub}$$

$$\begin{cases} b = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}a \\ b^2 = 5(a^2 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ lub}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Równania stycznych:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

$$y = 2x + 5, y = -2x + 5$$

15. Równanie okręgu: $(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$
Środek okręgu: $S(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$, promień okręgu: $r = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c}$
Okrąg jest styczny do osi OX , więc:
$$-\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c}$$

Podnosimy obie strony równania do kwadratu i otrzymujemy:
$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$$

Zatem $a^2 - 4c = 0$.

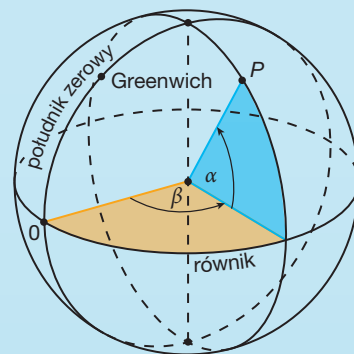
Współrzędne geograficzne

Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:

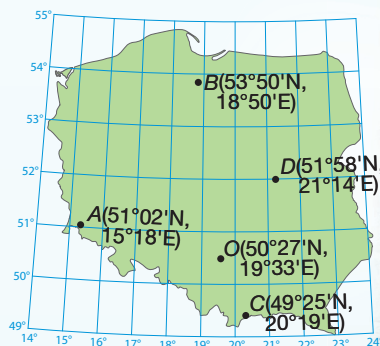
szerokość geograficzną (kąt α mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),

długość geograficzną (kąt β mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).

Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.



Na mapie punkt O oznacza położenie zamku Ogródzieniec ($50^{\circ}27'N$, $19^{\circ}33'E$) pokazanego na zdjęciu obok.



Odpowiedzi do zadań

1. A – Zamek Czocha
B – Zamek w Gniewie
C – Zamek w Niedzicy
D – Zamek w Czersku

- 1 Czy potrafisz wskazać, które z punktów A, B, C, D odpowiadają położeniu zamków na zdjęciach?



Zamek w Niedzicy



Zamek w Czersku



Zamek Czocha



Zamek w Gniewie

2.7. Układy równań drugiego stopnia

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $y = -x - 2$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$x^2 + (-x - 2)^2 = 20$$

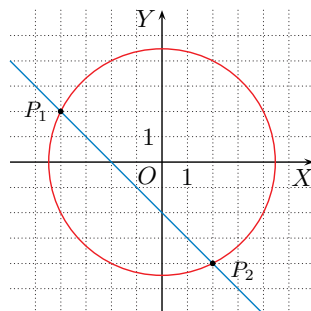
$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Okrąg $x^2 + y^2 = 20$ i prosta $x + y + 2 = 0$ mają dwa punkty wspólne: $P_1(-4, 2)$ i $P_2(2, -4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 9 \\ y = 5 - x \end{cases}$

Ćwiczenie 2

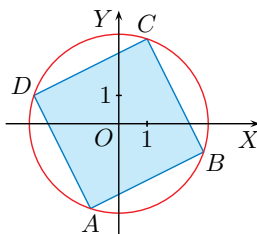
Prosta l przecina okrąg $x^2 + y^2 = 20$ w punktach A i B . Oblicz długość cięciwy AB .

a) $l: y = -x - 6$

b) $l: y = 3x - 10$

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono kwadrat wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 10$. Bok AB jest zawarty w prostej $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.



Ćwiczenie 4

W okrąg o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 25$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli wiadomo, że jedna z jego przekątnych jest zawarta w prostej $4x - 3y = 8$.

Ćwiczenie 3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x = -1, y = -3 \text{ lub } x = 3, y = -1$$

Zatem $A(-1, -3)$, $B(3, -1)$.

Zauważmy, że wierzchołek C jest symetryczny do A względem początku układu współrzędnych, zatem $C(1, 3)$, a wierzchołek D jest symetryczny do B , zatem $D(-3, 1)$.

Uwaga. Można również wykorzystać fakt, że punkt $O(0, 0)$ jest środkiem przekątnych AC i BD kwadratu.

Ćwiczenie 4

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 25 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$x = -1, y = -4 \text{ lub } x = 5, y = 4$$

Zatem $A(-1, -4)$, $C(5, 4)$.

Środek okręgu: $S(2, 0)$

Prosta prostopadła do AC i przechodząca przez S : $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 25 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x = 6, y = -3 \text{ lub } x = -2, y = 3$$

Zatem $B(6, -3)$, $D(-2, 3)$.

Uczeń:

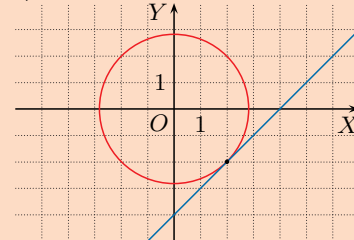
- rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których co najmniej jedno jest drugiego stopnia, w tym zadania z parametrem,
- stosuje układy równań drugiego stopnia w zadaniach różnych typów.

Ćwiczenie 1

a) $x = -3, y = -4$ lub $x = 3, y = 4$

$y = 4$

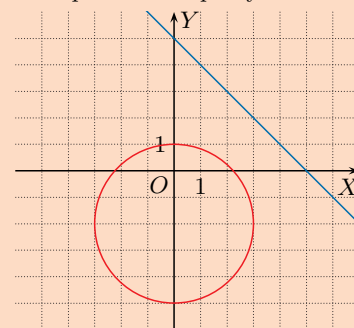
b) $x = 2, y = -2$



c) Równanie okręgu:

$$x^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Brak punktów wspólnych.



Ćwiczenie 2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = -x - 6 \end{cases}$$

$$x = -2, y = -4$$

$$\text{lub } x = -4, y = -2$$

Zatem $A(-2, -4)$, $B(-4, -2)$

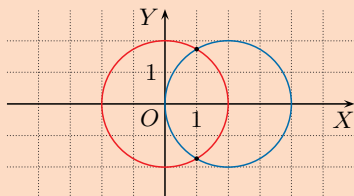
oraz $|AB| = 2\sqrt{2}$.

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

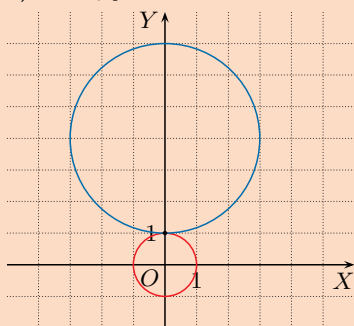
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 5

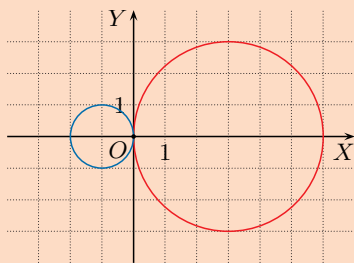
a) $x = 1, y = -\sqrt{3}$ lub $x = 1, y = \sqrt{3}$



b) $x = 0, y = 1$



c) $x = 0, y = 0$



Przykład 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $x^2 + y^2 = 9$ do drugiego równania i otrzymujemy $9 - 6x = 0$, skąd $x = \frac{3}{2}$. Podstawiamy $x = \frac{3}{2}$ do równania $x^2 + y^2 = 9$:

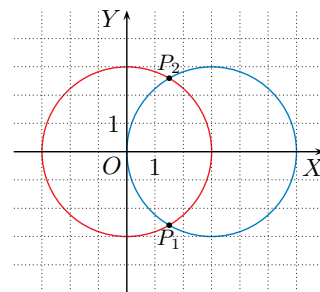
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = \frac{27}{4}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ lub } y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Równanie $x^2 + y^2 - 6x = 0$ można przekształcić do postaci:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9$$

Okrąg ten ma dwa punkty wspólne z okręgiem $x^2 + y^2 = 9$: $P_1(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ i $P_2(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 4)^2 = 9 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Przykład 3

Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \\ y = x + m \end{cases}$$

Podstawiamy $y = x + m$ do pierwszego równania:

$$x^2 + (x + m)^2 - 2x - 4(x + m) + 3 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2mx + m^2 - 2x - 4x - 4m + 3 = 0$$

$$2x^2 + (2m - 6)x + m^2 - 4m + 3 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego. Liczba rozwiązań układu równań jest równa liczbie rozwiązań tego równania.

$$\Delta = (2m - 6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 4m + 3) = 4m^2 - 24m + 36 - 8m^2 + 32m - 24 = -4m^2 + 8m + 12 = -4(m^2 - 2m - 3) = -4(m - 3)(m + 1)$$

- $\Delta = 0$ dla $m \in \{-1, 3\}$ – układ ma jedno rozwiązanie,
- $\Delta > 0$ dla $m \in (-1; 3)$ – układ ma dwa rozwiązania,
- $\Delta < 0$ dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ – układ nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 6

Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \\ y = -2x + m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = m^2 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (y - 3)^2 = 25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = |x| \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + (y - 4)^2 = 16 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = |x + 2| \end{cases}$

2. a) W okrąg $x^2 + y^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny prostokątny. Wierzchołek kąta prostego tego trójkąta ma współrzędne $(2, 4)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

b) W okrąg $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego podstawa jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

3. a) Jeden z boków prostokąta wpisanego w okrąg $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 40$ jest zawarty w prostej $y = x + 4$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

b) Bok kwadratu jest zawarty w prostej $y = 2x - 6$, a jego przekątne przecinają się w punkcie $A(3, 5)$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie i współrzędne jego wierzchołków.

4. Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w okrąg $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 8$ zawarta jest w prostej $3x + 2y - 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole.

5. Oblicz długość cięciwy danego okręgu zawartej w prostej l .

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $l: y = x - 2$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$, $l: y = -2x + 2$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$, $l: y = x + 2$

4. Równanie okręgu przekształcamy do postaci $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases}$$

skąd $x = 0$, $y = 4$ lub $x = 4$, $y = -2$. Zatem $A(0, 4)$, $C(4, -2)$.

Prosta BD jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez środek okręgu o współrzędnych $(2, 1)$, zatem ma równanie $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$x = -1$, $y = -1$ lub $x = 5$, $y = 3$. Zatem pozostałe wierzchołki: $B(-1, -1)$, $D(5, 3)$.

Pole kwadratu: $P = |AB|^2 = 26$

Ćwiczenie 6

a) 0 dla

$$m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty),$$

$$1 \text{ dla } m \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\},$$

$$2 \text{ dla } m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$$

b) 0 dla $m \in (-\infty; -9) \cup (1; \infty)$,

$$1 \text{ dla } m \in \{-9, 1\},$$

$$2 \text{ dla } m \in (-9; 1)$$

c) 0 dla $m \in (-\infty; \frac{1}{5})$,

$$1 \text{ dla } m = \frac{1}{5},$$

$$2 \text{ dla } m \in (\frac{1}{5}; \infty)$$

d) 2 dla $m \in \mathbb{R}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 1$, $y = 3$

$$\text{lub } x = -3, y = -1$$

$$\text{b) } x = 0, y = 8$$

$$\text{lub } x = 4, y = 4$$

$$\text{c) } x = 0, y = -2$$

$$\text{lub } x = 5, y = 3$$

$$\text{d) } x = 1, y = -1$$

$$\text{lub } x = 5, y = 1$$

$$\text{e) } x = -1, y = 1$$

$$\text{lub } x = 1, y = 1$$

$$\text{f) } x = -3, y = 1$$

$$\text{lub } x = 1, y = 3$$

2. a) Niech $C(2, 4)$. Środek okręgu ma współrzędne $(0, 0)$, zatem prosta OC ma równanie $y = 2x$.

Prosta AB jest prostopadła do prostej OC , czyli ma równanie $y = -\frac{1}{2}x$.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

$$x = -4, y = 2$$

$$\text{lub } x = 4, y = -2$$

Zatem wierzchołki:

$$A(-4, 2), B(4, -2).$$

$$\text{b) } A(-6, 0), B(2, 4), C(0, -2)$$

$$\text{lub } C(-4, 6)$$

3. a) $(-3, 1)$, $(1, 5)$, $(5, -7)$, $(9, -3)$

$$\text{b) } (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10, (0, 4), (4, 2), (6, 6), (2, 8)$$

5. a) $A(2, 0)$, $B(3, 1)$,

$$|AB| = \sqrt{2}$$

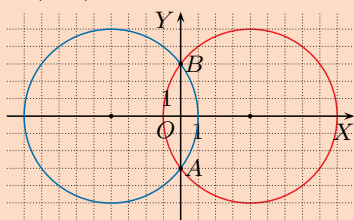
$$\text{b) } A(1, 0), B(3, -4),$$

$$|AB| = 2\sqrt{5}$$

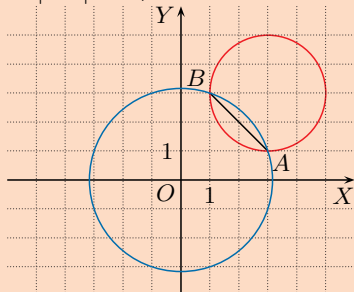
$$\text{c) } A(-4, -2), B(1, 3),$$

$$|AB| = 5\sqrt{2}$$

6. a) $x = 0, y = -3$
 b) $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$
 lub $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{7}}{2}$
 c) $x = 4, y = 0$
 d) $x = 0, y = 0$
 lub $x = \frac{96}{25}, y = \frac{72}{25}$
 e) $x = -3, y = -4$
 lub $x = 3, y = -4$
 f) $x = -1, y = 1$
 lub $x = 1, y = 1$
7. a) $A(0, -3), B(0, 3),$
 $|AB| = 6$



- b) $A(1, 3), B(3, 1),$
 $|AB| = 2\sqrt{2}$



8. a) $S_1(0, 0), A(3, 1), S_2(4, 4),$
 $B(1, 3), P = 8$
 b) $S_1(0, -2), A(2, -3),$
 $S_2(5, 3), B(-1, 0), P = 15$
9. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 lub $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 25$

6. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + 8y = -15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 8y = -7 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = -6 \\ x^2 + y^2 + 2y = 4 \end{cases}$

7. Oblicz długość wspólnej cięciwy okręgów K_1 i K_2 . Wykonaj rysunek.

a) $K_1: x^2 + 8x + y^2 - 9 = 0, \quad K_2: x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0$
 b) $K_1: x^2 + y^2 = 10, \quad K_2: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 14 = 0$

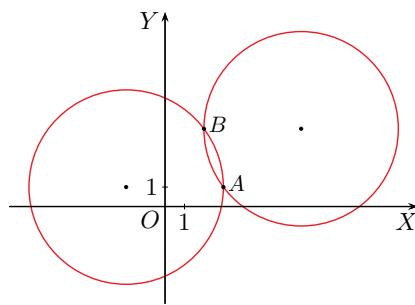
8. Oblicz pole czworokąta S_1AS_2B , gdzie S_1 i S_2 są odpowiednio środkami okręgów K_1 i K_2 , natomiast A i B są punktami wspólnymi tych okręgów.

a) $K_1: x^2 + y^2 = 10, \quad K_2: x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0$
 b) $K_1: x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 10x - 6y - 11 = 0$

9. Wyznacz równania okręgów o promieniu 5 przechodzących przez punkty $A(3, 1)$ i $B(2, 4)$ (rysunek obok), rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} (3 - a)^2 + (1 - b)^2 = 25 \\ (2 - a)^2 + (4 - b)^2 = 25 \end{cases}$$

Dwa rozwiązania tego układu są współrzednymi środków szukanych okręgów.



10. Wyznacz równania okręgów o promieniu r przechodzących przez punkty A i B .

a) $r = \sqrt{5}, A(4, 2), B(1, 3)$ c) $r = 3, A(0, 0), B(1, 1)$
 b) $r = 2, A(1, 2), B(-1, 0)$ d) $r = \sqrt{13}, A(5, 2), B(0, 1)$

11. Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = -x + m \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = -x + 2m \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ y = x + m \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2 - 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = mx - 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = m \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

10. a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ lub $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$
 b) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ lub $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
 c) $(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2})^2 + (y - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 = 9$ lub $(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 + (y - \frac{1-\sqrt{17}}{2})^2 = 9$
 d) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$ lub $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$
11. a) 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty),$
 1 dla $m \in \{-2, 2\},$
 2 dla $m \in (-2; 2)$
 b) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty),$
 1 dla $m \in \{-1, 3\},$
 2 dla $m \in (-1; 3)$
 c) 0 dla $m \in (-2; 2),$
 1 dla $m \in \{-2, 2\},$
 2 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
 d) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty),$
 1 dla $m \in \{0, 4\},$
 2 dla $m \in (0; 4)$
 e) 0 dla $m \in (-3; 3),$
 1 dla $m \in \{-3, 3\},$
 2 dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
 f) 0 dla $m \in (-\infty; 1),$
 1 dla $m = 1,$
 2 dla $m \in (1; \infty)$

*2.8. Koło w układzie współrzędnych

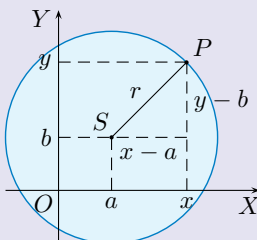
Przypomnijmy, że kołem o środku w punkcie S i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza od r lub równa r (zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła).

Punkt $P(x, y)$ należy do koła o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu r , gdy $|PS| \leq r$.

Twierdzenie

Koło o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$



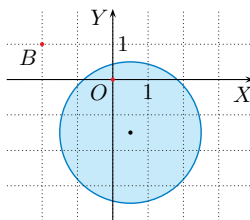
Przykład 1

Sprawdź, czy punkty $O(0, 0)$ i $B(-2, 1)$ należą do koła $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 \leq 4$.

Sprawdzamy, czy współrzędne punktów O i B spełniają nierówność opisującą koło.

Punkt O : $(0 - \frac{1}{2})^2 + (0 + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \leq 4$, czyli punkt O należy do koła.

Punkt B : $(-2 - \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{25}{2} > 4$, czyli punkt B leży na zewnątrz koła.



Ćwiczenie 1

Wyznacz nierówność opisującą koło o najmniejszym polu i o środku w punkcie $S(1, 1)$, jeżeli do tego koła należy punkt P .

- a) $P(5, -2)$ b) $P(-7, -5)$ c) $P(3, 3)$ d) $P(-3, 0)$

Ćwiczenie 2

Oblicz pole najmniejszego koła o środku w punkcie $S(-3, 2)$, jeżeli do tego koła należą punkty A, B i C .

- a) $A(-6, 6), B(-3, 7), C(1, 2)$ b) $A(-1, 3), B(-2, 6), C(-6, 3)$

Ćwiczenie 2

- a) $|SA| = |SB| = 5, |SC| = 4$

Zatem $r = 5$ i $P = 25\pi$.

- b) $|SA| = \sqrt{5}, |SB| = \sqrt{17}, |SC| = \sqrt{10}$

Zatem $r = \sqrt{17}$ i $P = 17\pi$.

Uczeń:

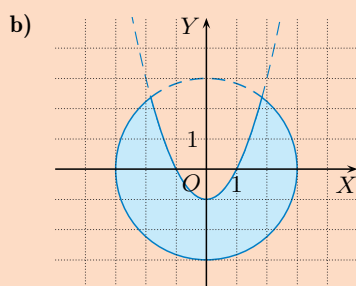
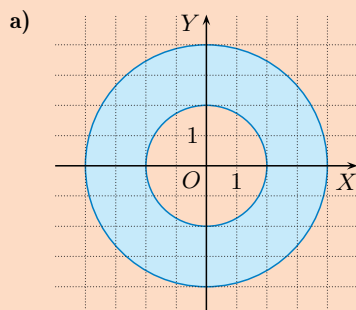
- sprawdza, czy dany punkt należy do danego koła,
- opisuje koło w układzie współrzędnych,
- podaje geometryczną interpretację rozwiązania układu nierówności drugiego stopnia,
- opisuje układem nierówności przedstawiony podzbiór płaszczyzny.

Ćwiczenie 1

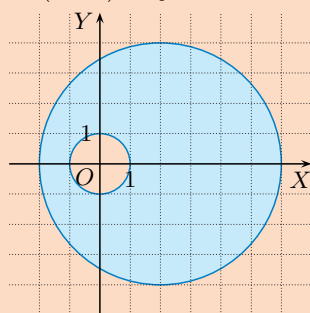
Zauważmy, że $r^2 = |SP|^2$.

- a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 25$
b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 100$
c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 8$
d) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 17$

Ćwiczenie 3



c) Pierwsza nierówność ma postać $(x-2)^2 + y^2 \leq 16$.



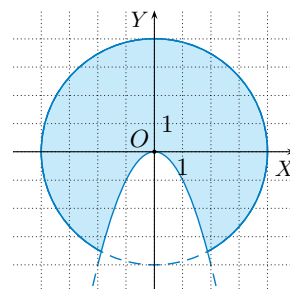
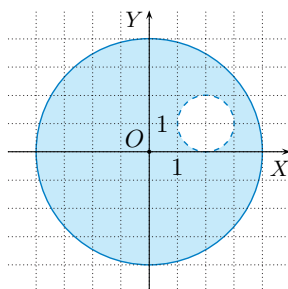
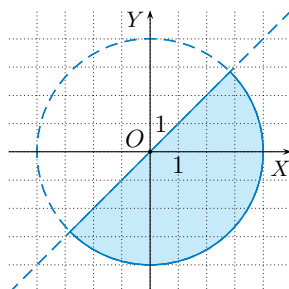
Przykład 2

Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \leq x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq -x^2 \end{cases}$



W przykładzie a) zbiorem punktów płaszczyzny spełniających podane warunki jest półkole. W przykładzie b) otrzymujemy zbiór punktów płaszczyzny, które należą do koła o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 4 oraz nie należą do koła o środku w punkcie $(2, 1)$ i promieniu 1.

Ćwiczenie 3

Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \leq x^2 - 1 \end{cases}$

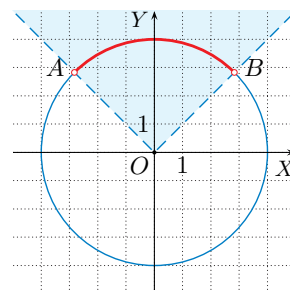
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 \leq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

Przykład 3

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y > |x| \end{cases}$$

Szukany zbiorem jest łuk $\widehat{AB}$ bez punktów końcowych A i B .



Ćwiczenie 4

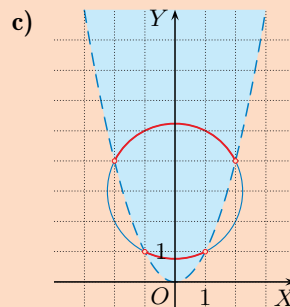
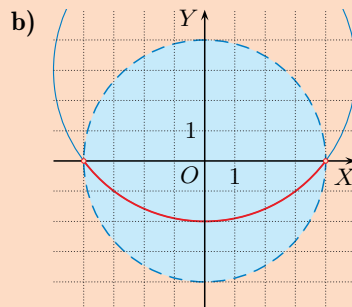
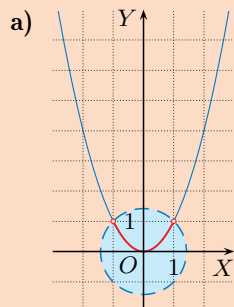
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y > x^2 \end{cases}$

Ćwiczenie 4



Zadania

1. Dane są trzy koła:

$$K_1: x^2 + y^2 \leq 16, \quad K_2: (x-2)^2 + y^2 \leq 4, \quad K_3: (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 9$$

Do których z tych kół należy punkt P ?

- a) $P(-2, 2)$ b) $P(2, 1)$ c) $P(2, -1)$ d) $P(4, -4)$

2. Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

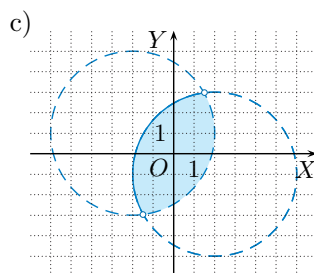
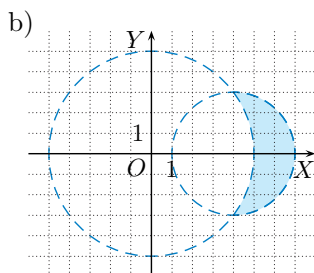
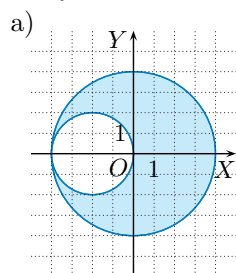
a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 8y + 7 \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x+3)^2 + y^2 \geq 25 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 \geq 0 \end{cases}$$

3. Podaj układ nierówności opisujący podzbiór płaszczyzny przedstawiony na rysunku.

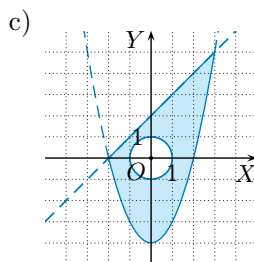
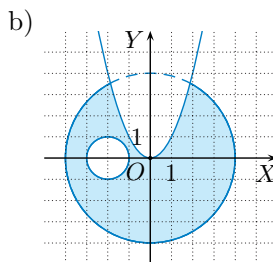
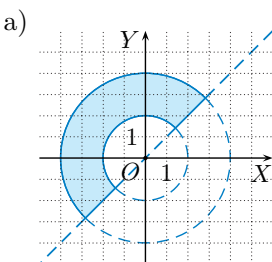


4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

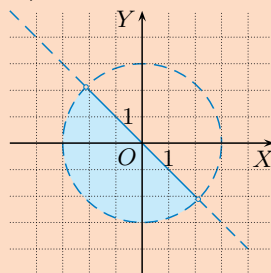
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 9\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y + x \leq 0\}$

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 + 4x - 12 \leq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y < x - 2\}$

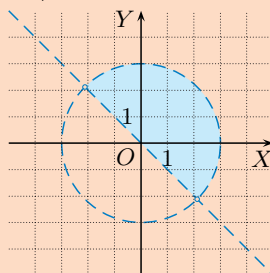
5. Podaj układ nierówności opisujący podzbiór płaszczyzny przedstawiony na rysunku.



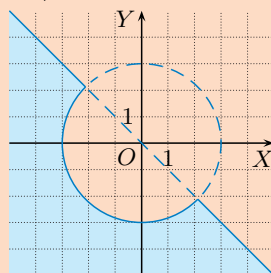
4. a) $A \cap B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$

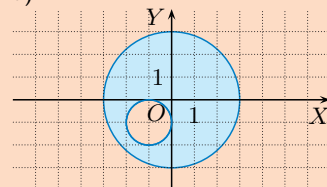


Odpowiedzi do zadań

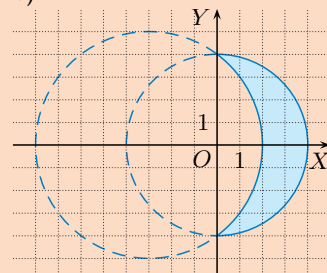
1. a) K_1 b) K_1, K_2

c) K_1, K_2, K_3 d) K_3

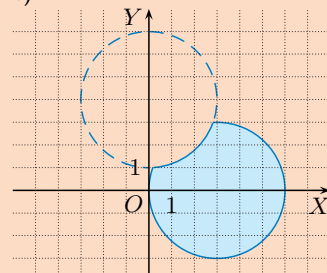
2. a)



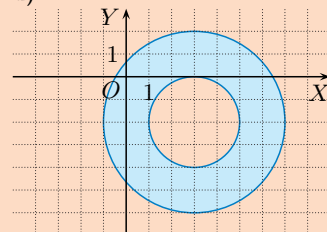
b)



c)



d)



3. a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x+2)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 25 \\ (x-4)^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 16 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 < 16 \end{cases}$$

5. a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq x \end{cases}$$

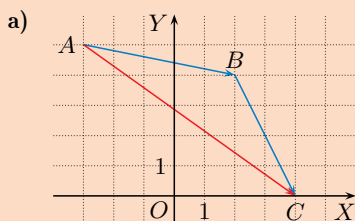
b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \leq x^2 \\ (x+2)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y \leq x+2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq x^2 - 4 \end{cases}$$

Uczeń:

- wykonuje działania na wektorach,
- sprawdza, czy wektory są równoległe,
- wyznacza wartości parametru tak, aby wektory spełniały podany warunek,
- stosuje w zadaniach działania na wektorach i ich interpretację geometryczną.

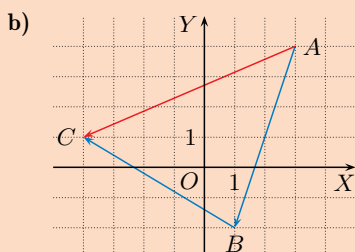
Ćwiczenie 1



$$\vec{AB} = [5, -1], \vec{BC} = [2, -4],$$

$$\vec{AC} = [7, -5]$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



$$\vec{AB} = [-2, -6], \vec{BC} = [-5, 3],$$

$$\vec{AC} = [-7, -3]$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Komentarz

Działania na wektorach, np. suma wektorów, pozwalają fizykom wyznaczyć siłę wypadkową działającą na ciało.

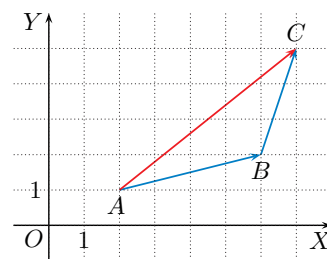
*2.9. Działania na wektorach

Na rysunku obok przedstawiono wektory $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ i $\vec{AC}$. O wektorze $\vec{AC}$ mówimy, że jest **sumą wektorów** $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$, i piszemy:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

Zauważ, że $\vec{AB} = [4, 1]$, $\vec{BC} = [1, 3]$ oraz:

$$\vec{AC} = [4 + 1, 1 + 3] = [5, 4]$$



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych wektory $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ i $\vec{AC}$. Podaj współrzędne tych wektorów.

a) $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$

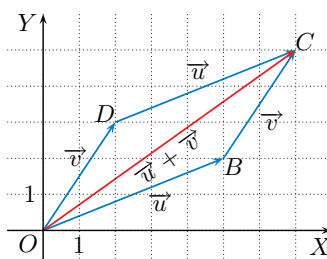
b) $A(3, 4)$, $B(1, -2)$, $C(-4, 1)$

Sumą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$$

Powyższa definicja wywodzi się z obserwacji fizycznych.

Na rysunku obok wektor $\vec{u} + \vec{v}$ odpowiada przekątnej OC równoległoboku $OBCE$.



Na rysunku przedstawiono wektory $\vec{u} = [5, 2]$, $\vec{v} = [2, 3]$ oraz ich sumę $\vec{u} + \vec{v} = [7, 5]$.

Ćwiczenie 2

Narysuj wektor $\vec{u} + \vec{v}$. Podaj jego współrzędne.

a) $\vec{u} = [3, -2]$, $\vec{v} = [2, 6]$

b) $\vec{u} = [-5, -4]$, $\vec{v} = [-2, 3]$

Aby dodać wektory geometrycznie, rysujemy je w ten sposób, aby koniec jednego wektora był początkiem następnego. Początek sumy leży w początku pierwszego z dodawanych wektorów, a koniec – w końcu ostatniego.

Przykład 1

Dane są wektory:

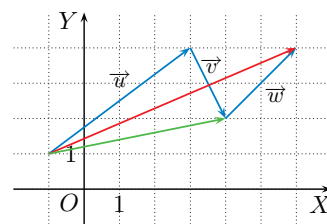
$$\vec{u} = [4, 3], \vec{v} = [1, -2], \vec{w} = [2, 2]$$

- Suma wektorów $\vec{u} + \vec{v}$ (kolor zielony):

$$\vec{u} + \vec{v} = [4, 3] + [1, -2] = [5, 1]$$

- Suma wektorów $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (kolor czerwony):

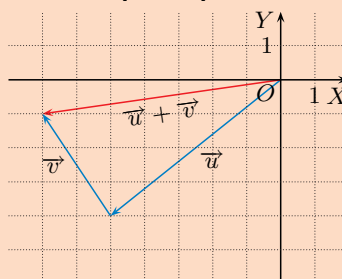
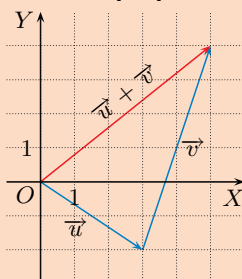
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [4, 3] + [1, -2] + [2, 2] = [7, 3]$$



Ćwiczenie 2

a) $\vec{u} + \vec{v} = [5, 4]$

b) $\vec{u} + \vec{v} = [-7, -1]$



Multiteka

- Kontrola lotów
- Wektor – podstawowe własności
- Działania na wektorach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Oblicz i narysuj sumę wektorów $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

a) $\vec{u} = [2, 1]$, $\vec{v} = [1, 3]$, $\vec{w} = [2, -6]$ b) $\vec{u} = [-3, 3]$, $\vec{v} = [6, 2]$, $\vec{w} = [2, 1]$

Ćwiczenie 4

Wyznacz wektory $-\vec{u}$ i $-\vec{v}$ przeciwne do wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Oblicz i narysuj sumę wektorów $-\vec{u}$ i $-\vec{v}$.

a) $\vec{u} = [2, 3]$, $\vec{v} = [4, 2]$ b) $\vec{u} = [-4, -2]$, $\vec{v} = [4, -3]$

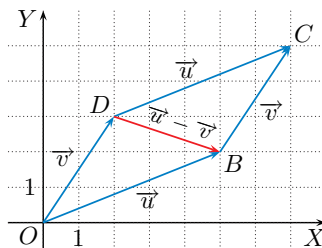
Definicja

Różnicą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$$

Na rysunku obok wektor $\vec{u} - \vec{v}$ odpowiada przekątnej DB równoległoboku $OBCD$.

Zauważ, że różnica wektorów $\vec{u} - \vec{v}$ jest równa sumie wektora $\vec{u}$ i wektora $-\vec{v}$ (przeciwnego do wektora $\vec{v}$).



Na rysunku przedstawiono wektory $\vec{u} = [5, 2]$, $\vec{v} = [2, 3]$ oraz ich różnicę $\vec{u} - \vec{v} = [3, -1]$.

Ćwiczenie 5

Oblicz i narysuj różnice wektorów $\vec{u} - \vec{v}$ oraz $\vec{v} - \vec{u}$.

a) $\vec{u} = [3, -2]$, $\vec{v} = [2, 6]$ b) $\vec{u} = [-5, -4]$, $\vec{v} = [-2, 3]$

Definicja

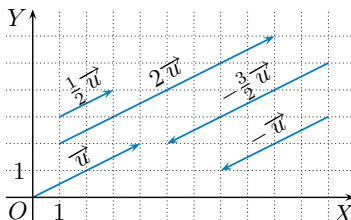
Iloczynem wektora $\vec{u} = [a, b]$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywamy wektor:

$$\alpha \vec{u} = [\alpha a, \alpha b]$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wektor $\vec{u} = [4, 2]$ oraz wektory:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{u} &= [2, 1], & 2 \vec{u} &= [8, 4] \\ -\vec{u} &= [-4, -2] \\ -\frac{3}{2} \vec{u} &= [-6, -3] \end{aligned}$$



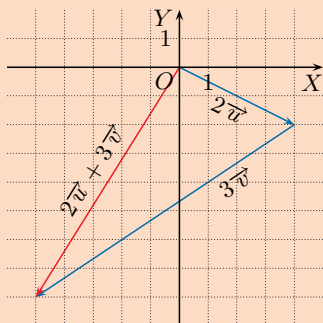
Ćwiczenie 6

Dane są wektory $\vec{u} = [2, -1]$ i $\vec{v} = [-3, -2]$. Oblicz i narysuj wektor:

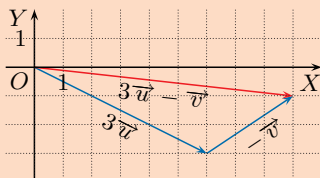
a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$, b) $3\vec{u} - \vec{v}$, c) $-4\vec{u} + 2\vec{v}$, d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

Ćwiczenie 6

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = [-5, -8]$



b) $3\vec{u} - \vec{v} = [9, -1]$

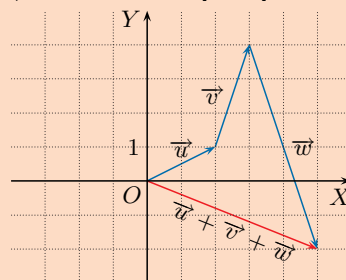


c) $-4\vec{u} + 2\vec{v} = [-14, 0]$

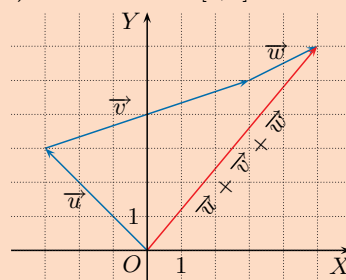
d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = [2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Ćwiczenie 3

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [5, -2]$



b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [5, 6]$



Ćwiczenie 4

a) $-\vec{u} = [-2, -3]$,

$-\vec{v} = [-4, -2]$,

$-\vec{u} + (-\vec{v}) = [-6, -5]$

b) $-\vec{u} = [4, 2]$, $-\vec{v} = [-4, 3]$,

$-\vec{u} + (-\vec{v}) = [0, 5]$

Ćwiczenie 5

a) $\vec{u} - \vec{v} = [1, -8]$,

$\vec{v} - \vec{u} = [-1, 8]$

b) $\vec{u} - \vec{v} = [-3, -7]$,

$\vec{v} - \vec{u} = [3, 7]$

Ćwiczenie 7

- a) $2\alpha - 6 = 0$ oraz $-3\alpha + 9 = 0$, zatem $\alpha = 3$
b) $-12\alpha - 16 = 0$ oraz $9\alpha + 12 = 0$, zatem $\alpha = -\frac{4}{3}$

Symbolem $\vec{0}$ oznaczamy **wektor zerowy**: $\vec{0} = [0, 0]$.

Ćwiczenie 7

Dla jakiego α zachodzi równość $\alpha \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$?

- a) $\vec{u} = [2, -3]$, $\vec{v} = [-6, 9]$ b) $\vec{u} = [-12, 9]$, $\vec{v} = [-16, 12]$

Przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora. Jeśli niezerowe wektory są równoległe, to mówimy, że mają ten sam **kierunek**.

Twierdzenie

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\alpha \neq 0$, że $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Przykład 3

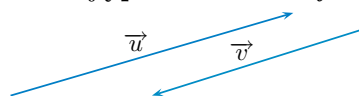
Dane są wektory $\vec{u} = [12, 8]$ i $\vec{v} = [9, 6]$. Wektory te mają ten sam kierunek, gdyż $\vec{u} = \frac{4}{3}\vec{v}$.

Rozpatrzmy niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, dla których istnieje liczba $\alpha \neq 0$, taka że $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

- Jeśli $\alpha > 0$, to mówimy, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają **ten sam zwrot**.
- Jeśli $\alpha < 0$, to mówimy, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają **przeciwny zwrot**.



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek i zwrot.



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek, ale przeciwny zwrot.

Ćwiczenie 8

Wśród poniższych wektorów wskaż te, które mają ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u} = [-6, 8]$, oraz te, które mają ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$, ale przeciwny zwrot.

$$\vec{v}_1 = [-2, 2\frac{2}{3}], \quad \vec{v}_2 = [3, -4], \quad \vec{v}_3 = [18, -16], \quad \vec{v}_4 = [-\frac{3}{4}, 1], \quad \vec{v}_5 = [24, -32]$$

Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ (oznaczamy ją $|\overrightarrow{AB}|$) to długość odcinka AB .

Twierdzenie

Jeżeli wektor $\vec{u}$ ma współrzędne $[u_1, u_2]$, to **długość wektora** $\vec{u}$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Ćwiczenie 8

Ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u}$: $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}[-6, 8]$, $\vec{v}_4 = \frac{1}{8}[-6, 8]$

Ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$, ale przeciwny zwrot: $\vec{v}_2 = -\frac{1}{2}[-6, 8]$, $\vec{v}_3 = -4[-6, 8]$

Ćwiczenie 9

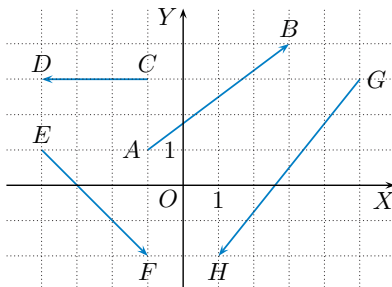
Oblicz długość wektora $\vec{u}$.

- a) $\vec{u} = [-3, 4]$ b) $\vec{u} = [-5, -12]$ c) $\vec{u} = [3, 3]$

Ćwiczenie 10

Dane są wektory $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ oraz $\vec{GH}$ przedstawione na rysunku obok. Oblicz długość wektora $\vec{u}$.

- a) $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{EF}$
 b) $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{CD}$
 c) $\vec{u} = \vec{GH} + \frac{4}{3}\vec{EF}$
 d) $\vec{u} = \vec{EF} - \frac{1}{3}\vec{CD}$



Zadania

- Sprawdź, czy wektor $\vec{u} + \vec{v}$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\vec{w}$.
 a) $\vec{u} = [\frac{9}{4}, \frac{9}{2}]$, $\vec{v} = [-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}]$, $\vec{w} = [\frac{5}{4}, -\frac{25}{4}]$
 b) $\vec{u} = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$, $\vec{v} = [\frac{3}{2}, -2]$, $\vec{w} = [\frac{5}{6}, \frac{3}{2}]$
- Dane są punkty $A(2, 1)$ i $B(4, 5)$. Wyznacz współrzędne punktu P .
 a) $\vec{AB} = \vec{BP}$ c) $\vec{AP} = -\vec{BA}$ e) $\vec{AP} = 2\vec{AB}$
 b) $\vec{AP} = \vec{BA}$ d) $\vec{AP} = -\vec{BP}$ f) $\vec{AP} = -3\vec{AB}$
- Dane są trzy punkty A , B i C . Wyznacz współrzędne punktu D takiego, że $\vec{AB} = \vec{CD}$. Oblicz długość wektora $\vec{AD}$.
 a) $A(0, 0)$, $B(4, 3)$, $C(-1, 2)$ c) $A(4, 6)$, $B(3, 1)$, $C(6, 2)$
 b) $A(-1, 2)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 2)$ d) $A(-1, -3)$, $B(-4, 1)$, $C(2, 4)$
- Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

A	B	$\vec{AB}$	$\vec{BA}$	$3\vec{BA}$	$ \vec{AB} $	$ 3\vec{AB} $
(3, 4)	(1, 2)	$[-2, -2]$	$[2, 2]$	$[6, 6]$	$2\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
(14, 12)	(6, 3)	$[-8, -9]$	$[8, 9]$	$[24, 27]$	$\sqrt{145}$	$3\sqrt{145}$
(-1, 4)	(1, 1)	$[2, -3]$	$[-2, 3]$	$[-6, 9]$	$\sqrt{13}$	$3\sqrt{13}$
(1, 4)	(3, -2)	$[2, -6]$	$[-2, 6]$	$[-6, 18]$	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$
(3, -1)	(2, $\frac{1}{3}$)	$[-1, \frac{4}{3}]$	$[1, -\frac{4}{3}]$	$[3, -4]$	$\frac{5}{3}$	5

- $\vec{AB} = [2, 4] = [x - 4, y - 5] = \vec{BP}$, czyli $P(6, 9)$
 - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = [-2, -4] = \vec{BA}$, czyli $P(0, -3)$
 - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = [2, 4] = -\vec{BA}$, czyli $P(4, 5)$
 - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = -[x - 4, y - 5] = -\vec{BP}$, czyli $P(3, 3)$
 - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = 2[2, 4] = 2\vec{AB}$, czyli $P(6, 9)$
 - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = -3[2, 4] = -3\vec{AB}$, czyli $P(-4, -11)$

Ćwiczenie 9

- a) 5 b) 13 c) $3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 10

- a) $\vec{u} = [7, 0]$, $|\vec{u}| = 7$
 b) $\vec{u} = [7, 3]$, $|\vec{u}| = \sqrt{58}$
 c) $\vec{u} = [0, -9]$, $|\vec{u}| = 9$
 d) $\vec{u} = [4, -3]$, $|\vec{u}| = 5$

Odpowiedzi do zadań

- $\vec{u} + \vec{v} = [-\frac{5}{4}, \frac{25}{4}]$, czyli jest wektorem przeciwnym do $\vec{w}$.
 - $\vec{u} + \vec{v} = [\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}]$, czyli nie jest wektorem przeciwnym do $\vec{w}$.
- $D(3, 5)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{34}$
 - $D(3, -3)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{41}$
 - $D(5, -3)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{82}$
 - $D(-1, 8)$, $|\vec{AD}| = 11$

5. a) ten sam kierunek, przeciwny zwrot b) d) ten sam kierunek i zwrot
c) różne kierunki

6. a) $m = 5$ b) $m \in \{-1, 1\}$
c) $m \in \{-2, 0, 2\}$

7. Niech $\alpha \in \mathbf{R}$, wówczas:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \vec{u} &= [\alpha \cdot x, \alpha \cdot y] \\ |\alpha \vec{u}| &= \sqrt{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2} = \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x^2 + y^2)} = \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= |\alpha| \cdot |\vec{u}|\end{aligned}$$

8. $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ i $\alpha > 0$

$|\vec{v}| = \alpha |\vec{u}|$, więc:

$$\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{v}|}{5}$$

- a) $\alpha = \frac{20}{5} = 4$, zatem $4\vec{u} = \vec{v}$, czyli $\vec{v} = [-12, 16]$.

- b) $\alpha = \frac{8}{5}$, zatem $\frac{8}{5}\vec{u} = \vec{v}$, czyli $\vec{v} = [-4\frac{4}{5}, 6\frac{2}{5}]$.

9. $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ i $\alpha < 0$

$|\vec{v}| = |\alpha| |\vec{u}|$, więc:

$$|\alpha| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}, \alpha = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

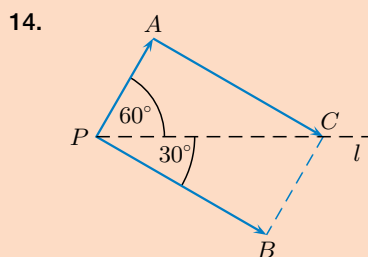
- a) $\alpha = -\frac{20}{\sqrt{10}} = -2\sqrt{10}$,

zatem $-2\sqrt{10}\vec{u} = \vec{v}$,
czyli $\vec{v} = [-6\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$.

- b) $\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, zatem $-\frac{3\sqrt{10}}{10}\vec{u} = \vec{v}$, czyli:
 $\vec{v} = [-\frac{9\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}]$

12. a) $\alpha = 2, \beta = -1$
b) $\alpha = -1\frac{2}{7}, \beta = 1\frac{3}{7}$
c) $\alpha = \frac{9}{14}, \beta = 1\frac{3}{14}$
d) $\alpha = -10, \beta = -3$

13. a) $m = 2$
b) nie ma takiego m



Znajdujemy na prostej l taki punkt C ,
że $AC \parallel PB$. Wtedy $\angle PAC = 90^\circ$.

Obliczamy długość wektora $\vec{AC}$:

$$|AC| = |PA| \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}F$$

Ale również $|PB| = \sqrt{3}F$, czyli:

$$|AC| = |PB|$$

Zatem wypadkowa sił $\vec{PA}$ i $\vec{PB}$ (ich suma) pokrywa się z prostą l , co oznacza, że statek porusza się wzdłuż tej prostej.

5. Sprawdź, czy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek i zwrot.

- a) $\vec{u} = [-2, 4], \vec{v} = [\frac{1}{2}, -1]$ c) $\vec{u} = [12, 14], \vec{v} = [72, 86]$
b) $\vec{u} = [12, -9], \vec{v} = [2, -\frac{3}{2}]$ d) $\vec{u} = [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}], \vec{v} = [1, 2 + \sqrt{2}]$

6. Dla jakich wartości parametru m wektor $\vec{u}$ ma ten sam kierunek co wektor $\vec{v} = [3, 1]$?

- a) $\vec{u} = [m + 1, 2]$ b) $\vec{u} = [6, m^2 + 1]$ c) $\vec{u} = [12m, m^3]$

- D** 7. Dany jest wektor $\vec{u} = [x, y]$. Uzasadnij, że $|\alpha \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$.

8. Dany jest wektor $\vec{u} = [-3, 4]$. Wyznacz wektor $\vec{v}$, który ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u}$, jeśli:

- a) $|\vec{v}| = 20$, b) $|\vec{v}| = 8$.

9. Dany jest wektor $\vec{u} = [3, -1]$. Wyznacz wektor $\vec{v}$, który ma ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$, ale przeciwny zwrot, jeśli:

- a) $|\vec{v}| = 20$, b) $|\vec{v}| = 3$.

10. Dany jest niezerowy wektor $\vec{u} = [x, y]$.

- D** Wykaż, że wektor $[\frac{x}{|\vec{u}|}, \frac{y}{|\vec{u}|}]$ jest wektorem jednostkowym.

Wektor, którego długość jest równa 1, nazywamy **wektorem jednostkowym**.

11. Wyznacz wektor jednostkowy równoległy do wektora $\vec{u}$.

- a) $\vec{u} = [-8, 6]$ b) $\vec{u} = [1, 1]$

12. Dane są wektory $\vec{u} = [1, 2]$ i $\vec{v} = [3, -1]$. Wyznacz wartości parametrów α i β , dla których prawdziwa jest poniższa równość.

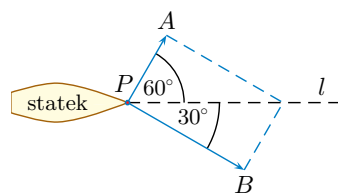
- a) $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = [-1, 5]$ c) $\alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = [-3, 2\frac{1}{2}]$
b) $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = [3, -4]$ d) $\alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = [-1, -23]$

13. Wyznacz wartość parametru m , dla której $2\vec{u} + 3\vec{v} - m\vec{w} = \vec{0}$.

- a) $\vec{u} = [1, 3], \vec{v} = [-4, 2], \vec{w} = [-5, 6]$
b) $\vec{u} = [4, 2], \vec{v} = [-6, 9], \vec{w} = [-3, \frac{3}{2}]$

14. Statek holowany jest przez dwa holowniki.

- D** Jeden z nich ciągnie ten statek z siłą o wartości F w kierunku PA . Uzasadnij, że jeżeli drugi holownik – ciągnący statek w kierunku PB – użyje siły o wartości $\sqrt{3}F$, to statek ten będzie poruszał się wzdłuż prostej l .



10. $\vec{u} = [x, y]$, zatem $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\left| \left[\frac{x}{|\vec{u}|}, \frac{y}{|\vec{u}|} \right] \right| = \sqrt{\frac{x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{u}|^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$$

Czyli wektor ten jest jednostkowy.

11. a) $|\vec{u}| = 10$, zatem $\alpha = -\frac{1}{10}$ lub $\alpha = \frac{1}{10}$, czyli $\vec{v} = [\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$
lub $\vec{v} = [-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$.

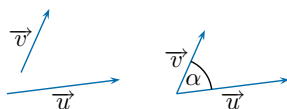
- b) $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, zatem $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\vec{v} = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$
lub $\vec{v} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Iloczyn skalarny wektorów

Iloczyn skalarny dwóch niezerowych wektorów jest liczbą równą iloczynowi długości tych wektorów i cosinusa kąta między nimi:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Jeśli jeden z wektorów jest wektorem zerowym, przyjmuje się, że ich iloczyn skalarny jest równy zero.



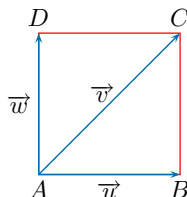
Kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest kąt wypukły, w którego wierzchołku leży początek obu tych wektorów oraz wektory te wyznaczają ramiona kąta.

Przykład 1

Dane są kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 oraz wektory $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ i $\vec{w} = \vec{AD}$. Oblicz $\vec{u} \circ \vec{v}$ oraz $\vec{u} \circ \vec{w}$.

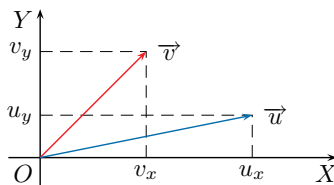
$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\vec{u} \circ \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$



Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{u} \circ \vec{w} = 0$.

Iloczyn skalarny wektorów możemy wyrazić za pomocą współrzędnych tych wektorów.



Dla dowolnych wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ zachodzi związek:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

- D** 1. Udowodnij powyższe twierdzenie, korzystając ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 2

Oblicz miarę kąta między wektorami $\vec{u} = [4, 2]$ i $\vec{v} = [-3, 1]$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cos \alpha = 10\sqrt{2} \cos \alpha$$

jednocześnie:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -10$$

Otrzymujemy równość: $10\sqrt{2} \cos \alpha = -10$, czyli $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, skąd $\alpha = 135^\circ$.

2. Oblicz miarę kąta między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

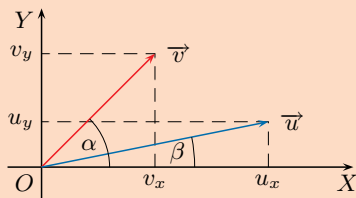
a) $\vec{u} = [4, 2]$, $\vec{v} = [2, 6]$

c) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, -1]$, $\vec{v} = [2, 2\sqrt{3}]$

b) $\vec{u} = [3, 9]$, $\vec{v} = [-3, 1]$

d) $\vec{u} = [1 - \sqrt{5}, 1]$, $\vec{v} = [1 + \sqrt{5}, 4]$

1. Oznaczmy kąty α i β jak na rysunku.



$$\begin{aligned} \vec{u} \circ \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha - \beta) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \left(\frac{v_x}{|\vec{v}|} \cdot \frac{u_x}{|\vec{u}|} + \frac{v_y}{|\vec{v}|} \cdot \frac{u_y}{|\vec{u}|} \right) = v_x u_x + v_y u_y \end{aligned}$$

2. a) $\vec{u} \circ \vec{v} = 8 + 12 = 20$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{40} \cos \alpha = 20\sqrt{2} \cos \alpha = 20$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ$$

b) $\vec{u} \circ \vec{v} = -9 + 9 = 0$
 $\alpha = 90^\circ$

c) $\vec{u} \circ \vec{v} = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 \cdot 4 \cos \alpha = 8 \cos \alpha = -4\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 150^\circ$$

d) $\vec{u} \circ \vec{v} = -4 + 4 = 0$
 $\alpha = 90^\circ$

Uczeń:

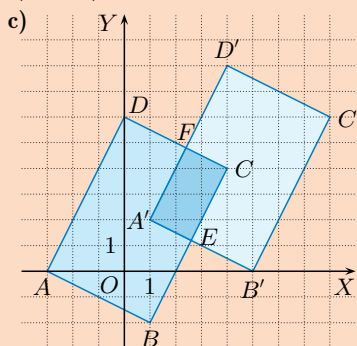
- stosuje działania na wektorach do badania współliniowości punktów,
- stosuje działania na wektorach do podziału odcinka,
- stosuje wektory w zadaniach z geometrii analitycznej,
- wykorzystuje działania na wektorach w zadaniach na dowodzenie.

Ćwiczenie 1

- a) $P = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
b) $P = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

Ćwiczenie 2

- a) 20 b) 5



Wyznaczamy punkt wspólny prostych $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ i $y = 2x - 4$ – jest to punkt $E(\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$.

Wyznaczamy punkt wspólny prostych $y = -\frac{1}{2}x + 6$ i $y = 2x$ – jest to punkt $F(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$.

Zatem:

$$|EC| = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$|FC| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

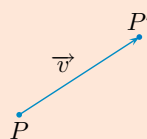
$$\text{czyli pole } P = \frac{7\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{28}{5}.$$

Ćwiczenie 3

$$8(\pi - 2)$$

*2.10. Wektory – zastosowania

Przesunięciem (lub translacją) o wektor $\vec{v}$ nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowuje taki punkt P' , że $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Mówimy, że punkt P' jest **obrazem** punktu P w przesunięciu o wektor $\vec{v}$.

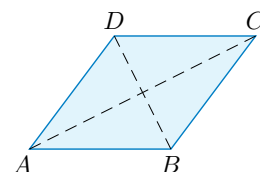


Obrazem punktu $P(x, y)$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [a, b]$ jest punkt $P'(x+a, y+b)$.

Ćwiczenie 1

Dany jest romb $ABCD$ o polu równym 4 (rysunek obok). Romb $A'B'C'D'$ otrzymujemy przez przesunięcie rombu $ABCD$ o wektor $\vec{v}$. Oblicz pole figury będącej częścią wspólną obu rombów, jeśli:

- a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, b) $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



Ćwiczenie 2

Dany jest prostokąt F o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(4, 4)$ i $D(0, 6)$. Prostokąt F_1 jest obrazem prostokąta F w przesunięciu o wektor $\vec{v}$. Oblicz pole części wspólnej obu prostokątów.

- a) $\vec{v} = [1, 2]$ b) $\vec{v} = [0, -5]$ c) $\vec{v} = [4, 2]$

Ćwiczenie 3

Koło K_2 jest obrazem koła K_1 o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 4$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [4, 4]$. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

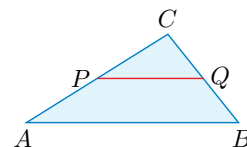
D Przykład 1

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Punkt P jest środkiem boku AC , a punkt Q – środkiem boku BC . Udowodnij, że $PQ \parallel AB$ oraz $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$.

Wektor $\overrightarrow{PQ}$ zapisujemy jako sumę:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

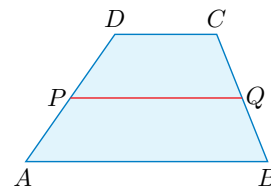
Oznacza to, że $PQ \parallel AB$ oraz $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$.



D Ćwiczenie 4

Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, a długość tego odcinka jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Wskazówka. Zauważ, że $\overrightarrow{DC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ dla pewnej stałej α .



Ćwiczenie 4

Zauważmy, że $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$ oraz $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$.

Dodajemy równości stronami i korzystamy z tego, że $\overrightarrow{PD} = -\overrightarrow{PA}$ oraz $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{BQ}$:

$$2\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BQ})$$

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe i mają ten sam zwrot, zatem wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest równoległy do $\overrightarrow{AB}$ oraz:

$$|PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$$

Multiteka

- Wektor – podstawowe własności
- Działania na wektorach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.10



Przykład 2

Sprawdź, czy punkty $A(-4, -5)$, $B(2, -1)$ i $C(26, 15)$ są współliniowe.

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-4), -1 - (-5)] = [6, 4], \quad \overrightarrow{AC} = [26 - (-4), 15 - (-5)] = [30, 20]$$

Zauważmy, że $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$, zatem punkty A , B i C są współliniowe.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy punkty P , Q i R są współliniowe.

- a) $P(2, -1)$, $Q(-2, 4)$, $R(10, -11)$ b) $P(-5, 2)$, $Q(13, 8)$, $R(19, 10)$

Przykład 3

Dane są współrzędne wierzchołków $A(-1, 3)$,

$B(-3, 2)$ i $C(3, 1)$ równoległoboku $ABCD$.

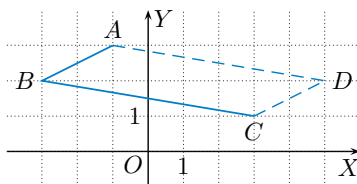
Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

Zauważmy, że $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Wyznaczamy wektor $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = [3 - (-3), 1 - 2] = [6, -1]$$

Wierzchołek D jest obrazem punktu A w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{AD}$, zatem $D(-1 + 6, 3 - 1)$, czyli $D(5, 2)$.



Ćwiczenie 6

Punkty P , Q i R są kolejno środkami boków AB , BC i CD równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku, jeśli:

- a) $B(3, 3)$, $P(5, 1)$, $Q(-1, 2)$, c) $\overrightarrow{BA} = [-5, 5]$, $\overrightarrow{BC} = [2, 4]$, $Q(3, -1)$,
b) $P(2, 0)$, $Q(7, 4)$, $R(4, 4)$, d) $\overrightarrow{AB} = [8, 2]$, $Q(7, 2)$, $R(6, 4)$.

Zadania

- D** 1. Dane są punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ oraz $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Wykaż, że:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Wyznacz wektor $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, a następnie współrzędne punktów P i Q dzielących odcinek AB na trzy równe części.

- a) $A(-3, -2)$, $B(3, 1)$ b) $A(-10, 6)$, $B(8, -6)$ c) $A(1, -1)$, $B(2, 1)$

3. Wyznacz współrzędne końców odcinka AB , jeśli wiadomo, że punkty:

- a) $P(2, 1)$ i $Q(5, 4)$ dzielą go na trzy równe części,
b) $P(4, -2)$, $Q(3, 1)$ i $R(2, 4)$ dzielą go na cztery równe części.

1. $\overrightarrow{AS} = [\frac{x_1+x_2}{2} - x_1, \frac{y_1+y_2}{2} - y_1] = [\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{SB} = [x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}, y_2 - \frac{y_1+y_2}{2}] = [\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Zatem $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3. a) I sposób

$\frac{x_A+5}{2} = 2$ i $\frac{y_A+4}{2} = 1$, $A(-1, -2)$

$\frac{x_B+2}{2} = 5$ i $\frac{y_B+1}{2} = 4$, $B(8, 7)$

II sposób

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = [3, 3] = [2 - x_A, 1 - y_A]$, czyli $A(-1, -2)$

$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} = [3, 3]$, czyli $B(8, 7)$

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = [-1, 3]$, czyli $A(5, -5)$

$\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{QR} = [-1, 3]$, czyli $B(1, 7)$

Ćwiczenie 5

a) $\overrightarrow{PQ} = [-4, 5]$,

$\overrightarrow{PR} = [8, -10] = -2\overrightarrow{PQ}$,

zatem punkty są współliniowe.

b) $\overrightarrow{PQ} = [18, 6]$,

$\overrightarrow{PR} = [24, 8] = \frac{4}{3}\overrightarrow{PQ}$,

zatem punkty są współliniowe.

Ćwiczenie 6

a) $\frac{x_A+3}{2} = 5$ i $\frac{y_A+3}{2} = 1$,

$A(7, -1)$

$\frac{x_C+3}{2} = -1$ i $\frac{y_C+3}{2} = 2$, $C(-5, 1)$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = [4, -4] =$

$[x_D + 5, y_D - 1]$, czyli $D(-1, -3)$

b) $\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = [1, 2]$,

czyli $C(8, 6)$

$\overrightarrow{QB} = -\overrightarrow{QC} = [-1, -2]$,

czyli $B(6, 2)$

$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP} = [-8, -4]$,

czyli $A(-2, -2)$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = [-8, -4]$,

czyli $D(0, 2)$

c) $\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = [1, 2] =$

$[x_C - 3, y_C + 1]$, czyli $C(4, 1)$

$\overrightarrow{BC} = [2, 4]$, czyli $B(2, -3)$

$\overrightarrow{BA} = [-5, 5]$, czyli $A(-3, 2)$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = [-5, 5]$,

czyli $D(-1, 6)$

d) $\overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [4, 1]$,

czyli $C(10, 5)$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = [8, 2] =$

$[10 - x_D, 5 - y_D]$, czyli $D(2, 3)$

$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{CQ} = [-3, -3]$,

czyli $B(4, -1)$

$\overrightarrow{AB} = [8, 2]$, czyli $A(-4, -3)$

Odpowiedzi do zadań

2. a) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [2, 1]$, $P(-1, -1)$, $Q(1, 0)$

b) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [6, -4]$, $P(-4, 2)$, $Q(2, -2)$

c) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $P(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $Q(1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

4. a) $P(0, 1)$ lub $P(2, -2)$
 b) $A(12, -15\frac{1}{2})$
 lub $A(19, -26)$

5. a) $C(6, 3)$, $D(0, 1)$
 b) $A(4, -1)$, $B(2, 3)$,
 $C(-6, 3)$, $D(-4, -1)$

6. $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, $y = -x - 2$,
 $y = -4x - 11$

7. a) $A(-3, -2)$, $B(3, 1)$
 b) $A(10, 15)$, $B(14, 11)$

8. $C(-1, 2)$

9. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych. Wówczas:

a) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4} \cdot [5, 2] = [\frac{15}{4}, \frac{3}{2}]$, czyli $P(\frac{7}{4}, \frac{7}{2})$

b) $D(2, 5)$, $B(7, 5)$,
 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \cdot [6, 3] = [2, 1]$, czyli $C(4, 6)$

11. Środek ciężkości jest punktem przecięcia środkowych, czyli $S(1, 2)$.

Niech $A = (1, -2)$ oraz $D(x_D, y_D)$ – środek boku BC . Wówczas:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = [0, 4],$$

czyli $\overrightarrow{AD} = [0, 6]$ i $D(1, 4)$.

Szukane wierzchołki:

$B(x_B, -x_B + 3)$, $C(x_C, 2)$

Punkt D jest środkiem

boku BC , stąd $\frac{x_B + x_C}{2} = 1$

oraz $\frac{-x_B + 3 + 2}{2} = 4$,

czyli $x_B = -3$ i $x_C = 5$.

Zatem $B(-3, 6)$, $C(5, 2)$.

4. a) Dane są punkty $A(-4, 7)$ i $B(6, -8)$. Wyznacz współrzędne punktu P , który dzieli odcinek AB w stosunku 2:3. Rozpatrz dwa przypadki.

b) Punkt $P(3, -2)$ dzieli odcinek AB w stosunku 3:4. Wyznacz współrzędne punktu A , jeśli $B(-9, 16)$. Rozpatrz dwa przypadki.

5. a) Punkty $A(-2, -3)$ i $B(4, -1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $P(2, 0)$ jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .

b) Punkt $P(3, 1)$ jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Jego przekątne przecinają się w punkcie $S(-1, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku, jeśli $\overrightarrow{CD} = [2, -4]$.

6. Dane są wektory $\overrightarrow{AC} = [12, 3]$, $\overrightarrow{BC} = [9, 9]$ oraz punkt $A(-5, 3)$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte wysokości trójkąta ABC .

7. a) Dane są wektor $\overrightarrow{AB} = [6, 3]$ oraz punkt $C(1, 6)$. Punkt $S(2, 3\frac{1}{2})$ jest środkiem odcinka BC . Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B trójkąta ABC .

b) Dane są wektory $\overrightarrow{AB} = [4, -4]$, $\overrightarrow{CD} = [6, 6]$ oraz punkt $C(6, 7)$ będący wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB i wysokości CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta.

8. Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest dwa razy dłuższa od podstawy CD . Wyznacz współrzędne wierzchołka C , jeśli $A(4, -5)$, $B(8, 1)$, $D(-3, -1)$.

- *9. Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest trzy razy dłuższa od podstawy CD . Wyznacz współrzędne:

a) punktu przecięcia przekątnych tego trapezu, jeśli $A(-2, 2)$ i $C(3, 4)$,

b) wierzchołków B , C i D , jeśli $A(1, 2)$, $\overrightarrow{AD} = [1, 3]$ i $\overrightarrow{DB} = [5, 0]$.

- *10. a) Udowodnij, że współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyrażają się wzorami:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

b) Dane są wierzchołki $A(-1, 0)$ i $B(2, 5)$ trójkąta ABC . Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego środek ciężkości ma współrzędne $(-1, 2)$.

- *11. Dane są równania prostych zawierających dwie środkowe trójkąta: $y = 2$ i $y = -x + 3$ oraz jeden z jego wierzchołków: $(1, -2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

10. a) Niech $S(x, y)$ – środek ciężkości, D – środek boku AB , $D = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$.

$$\frac{|DS|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \text{ więc } \overrightarrow{DS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}[x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2}, y_3 - \frac{y_1 + y_2}{2}]$$

$$\text{Zatem } x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{6} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_3}{3} - \frac{y_1 + y_2}{6} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

b) $\frac{-1 + 2 + x_C}{3} = -1$ i $\frac{0 + 5 + y_C}{3} = 2$, czyli $C(-4, 1)$

Pole trójkąta obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2|$$

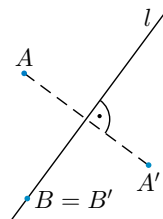
Zatem $P = 9$.

2.11. Symetria osiowa

Założmy, że punkt A nie należy do prostej l .

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem prostej l** , jeżeli punkty A i A' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka AA' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka AA').

Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).

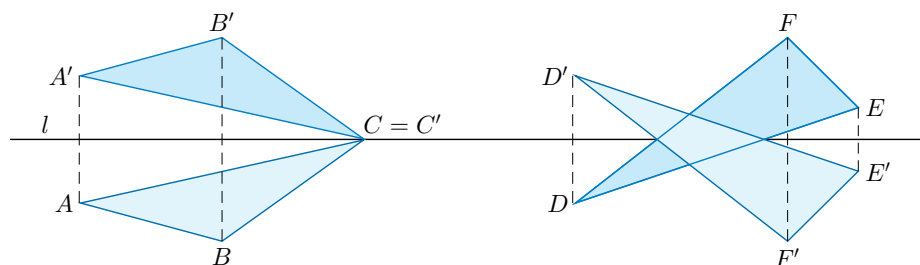


Definicja

Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l .

Prostą l nazywamy **osią symetrii**.

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty ABC i DEF oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej l – odpowiednio trójkąty $A'B'C'$ i $D'E'F'$.



Odległość między obrazami dwóch punktów w symetrii osiowej jest równa odległości między tymi punktami (mówimy, że symetria osiowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami). Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

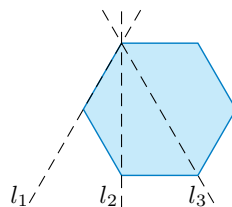
Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

a) l_1 ,

b) l_2 ,

c) l_3 .

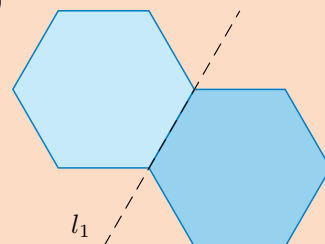


Uczeń:

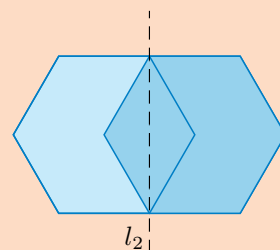
- wskazuje figury osiowo symetryczne i podaje liczbę ich osi symetrii,
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem osi układu współrzędnych,
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem jednej z osi układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków,
- wyznacza równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem jednej z osi układu współrzędnych lub prostej o danym równaniu,
- stosuje własności symetrii osiowej w zadaniach.

Ćwiczenie 1

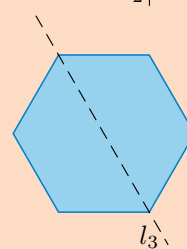
a)



b)



c)



Multiteka

- Symetria
- Symetria osiowa
- Symetria względem osi układu współrzędnych
- Przekształcenia na płaszczyźnie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.11

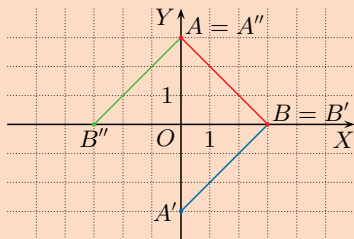
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

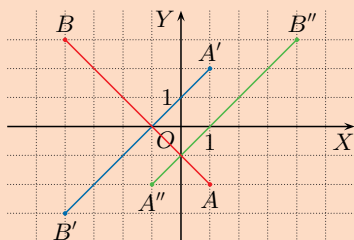
kwadrat: 4,
trójkąt równoboczny: 3,
prostokąt: 2,
koło: nieskończenie wiele

Ćwiczenie 3

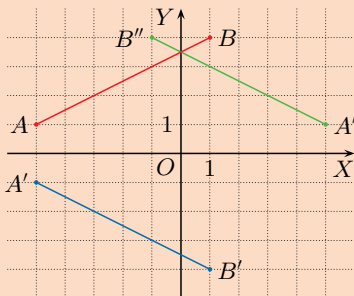
a) $A'(0, -3)$, $B'(3, 0)$, $A''(0, 3)$,
 $B''(-3, 0)$



b) $A'(1, 2)$, $B'(-4, -3)$,
 $A''(-1, -2)$, $B''(4, 3)$



c) $A'(-5, -1)$, $B'(1, -4)$,
 $A''(5, 1)$, $B''(-1, 4)$



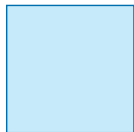
Ćwiczenie 5

a) $A'(-2, -1)$, $B'(2, 3)$,
 $C'(4, 1)$, $D'(0, -3)$
b) $A''(2, 1)$, $B''(-2, -3)$,
 $C''(-4, -1)$, $D''(0, 3)$

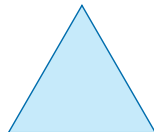
Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej l . Prosta l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

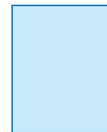
Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.



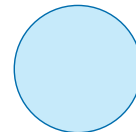
kwadrat



trójkąt równoboczny



prostokąt

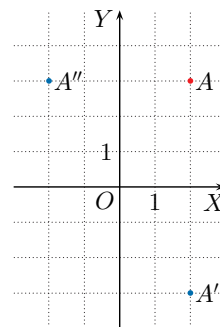


koło

■ Symetria względem osi układu współrzędnych

Przykład 1

Obrazem punktu $A(2, 3)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A'(2, -3)$. Obrazem punktu $A(2, 3)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $A''(-2, 3)$.



Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $P'(x, -y)$.

Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $P''(-x, y)$.

Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka $A'B'$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OX oraz odcinka $A''B''$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OY . Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki AB , $A'B'$ i $A''B''$.

a) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ b) $A(1, -2)$, $B(-4, 3)$ c) $A(-5, 1)$, $B(1, 4)$

Ćwiczenie 4

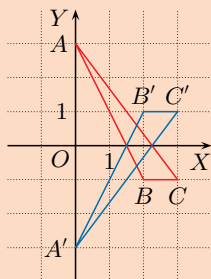
Dany jest trójkąt ABC , gdzie $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, -1)$. Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 5

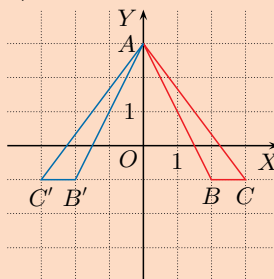
Dane są punkty $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$, $C(4, -1)$ i $D(0, 3)$. Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 4

a)



b) $A' = A$

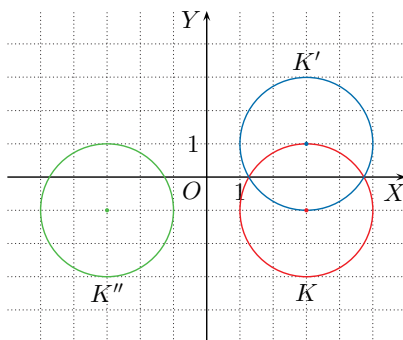


Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg K dany równaniem $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem osi OX (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OX).

Okrąg K'' jest symetryczny do okręgu K względem osi OY (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OY).



Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów K' i K'' z powyższego przykładu.

Ćwiczenie 7

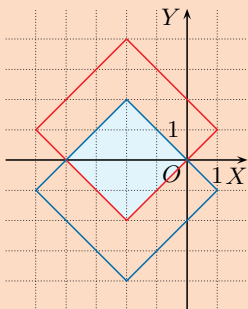
Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY .

- a) $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ c) $K: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$
 b) $K: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$ d) $K: x^2 + y^2 + 2x + 12y - 12 = 0$

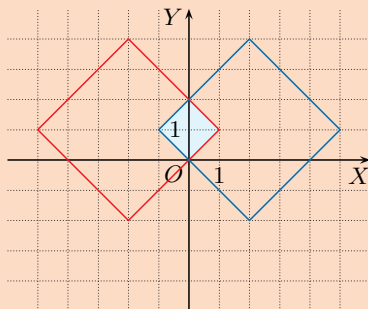
Zadania

- Sprawdź, czy odcinki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi OX lub osi OY .
 - $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$, $A'(-2, -1)$, $B'(3, 2)$
 - $A(-3, 4)$, $B(-1, -2)$, $A'(3, 4)$, $B'(1, -2)$
 - $A(-4, -3)$, $B(2, 2)$, $A'(-4, 3)$, $B'(-2, 2)$
 - $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $A'(2, 0)$, $B'(0, -4)$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OX oraz trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OY .
 - $A(-1, 2)$, $B(5, 3)$, $C(2, 5)$ c) $A(-3, 2)$, $B(0, -3)$, $C(3, 2)$
 - $A(-3, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(0, 3)$ d) $A(-3, -1)$, $B(9, -2)$, $C(2, 1)$
- Oblicz pole części wspólnej kwadratu K o wierzchołkach $(-5, 1)$, $(-2, -2)$, $(1, 1)$, $(-2, 4)$ oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu K względem:
 - osi OX ,
 - osi OY .

3. a) $P = 8$



b) $P = 2$



Ćwiczenie 6

$$K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

$$K'': (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Ćwiczenie 7

a) $K': (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16,$

$$K'': (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

b) $K': (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13,$

$$K'': (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$$

c) $K': x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0,$

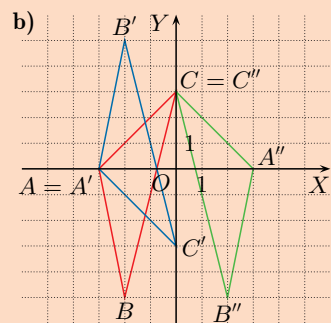
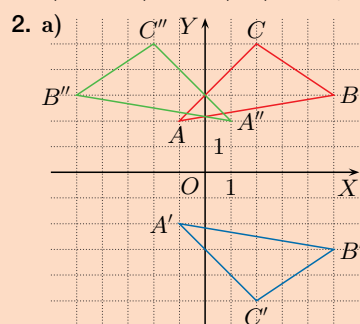
$$K'': x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$$

d) $K': x^2 + y^2 + 2x - 12y - 12 = 0,$

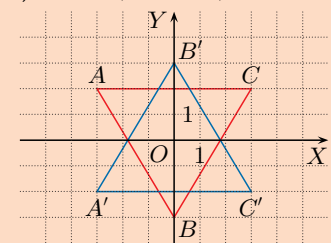
$$K'': x^2 + y^2 - 2x + 12y - 12 = 0$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) OX b) OY c), d) nie są



c) $A'' = C$, $B'' = B$, $C'' = A$



4. a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$, należy
 b) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 41$, nie należy
 c) $(x+3)^2 + y^2 = 4$, należy
 d) $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 40$, należy

4. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX . Sprawdź, czy punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu K' .
 a) $K: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ c) $K: (x+3)^2 + y^2 = 4$
 b) $K: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 41$ d) $K: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 40$
5. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OY . Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów K i K' oraz punkty wspólne tych okręgów.
 a) $K: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$ b) $K: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$
6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest okrąg K o środku w punkcie $S(4, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $l: y = 3x$.

Niech $m: y = ax + b$ będzie prostą przechodzącą przez punkt S oraz $m \perp l$. Zatem $a = -\frac{1}{3}$ oraz:

$$m: y = -\frac{1}{3}x + b$$

Do równania prostej m podstawiamy współrzędne punktu $S(4, 2)$ i otrzymujemy:

$$m: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$$

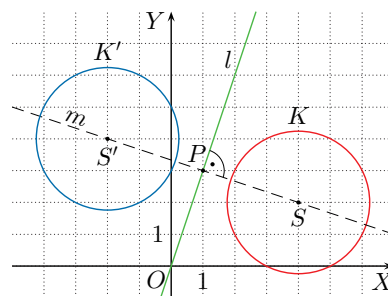
Niech P będzie punktem przecięcia prostych l i m . Jego współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem $P(1, 3)$.

Współrzędne punktu S' – środka okręgu K' – wyznaczamy, korzystając z tego, że punkt P jest środkiem odcinka $S'S$. Otrzymujemy $S'(-2, 4)$.

Ponieważ okrąg K' ma ten sam promień co okrąg K , jego równanie ma postać $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$.

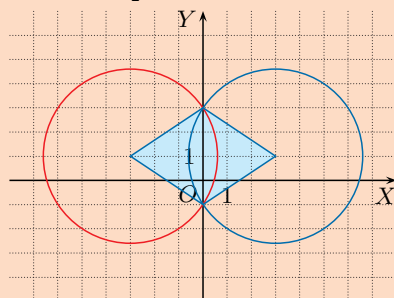


6. a) $S(5, 2)$, $m: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$,
 zatem $P(3, 3)$, $S'(1, 4)$
 Równanie okręgu:
 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2$
 b) $K: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$
 $m: y = 3x - 9$, zatem
 $P(\frac{29}{10}, -\frac{3}{10})$, $S'(\frac{9}{5}, -\frac{18}{5})$.
 Równanie okręgu:
 $(x-\frac{9}{5})^2 + (y+\frac{18}{5})^2 = 16$
 c) $K: (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16$
 $m: y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$,
 zatem $P(3, 1)$, $S'(1, -2)$.
 Równanie okręgu:
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

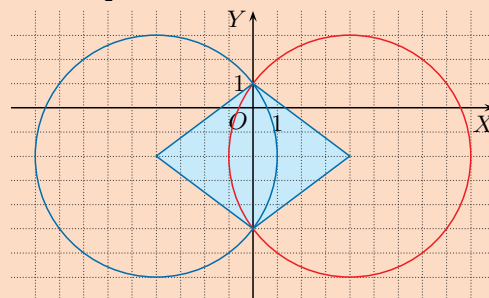
Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu K względem prostej l .

- a) $K: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 2$, $l: y = 2x - 3$
 b) $K: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$, $l: x + 3y - 2 = 0$
 c) $K: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 25 = 0$, $l: 2x + 3y - 9 = 0$

5. a) $P = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$



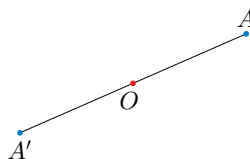
b) $P = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$



2.12. Symetria środkowa

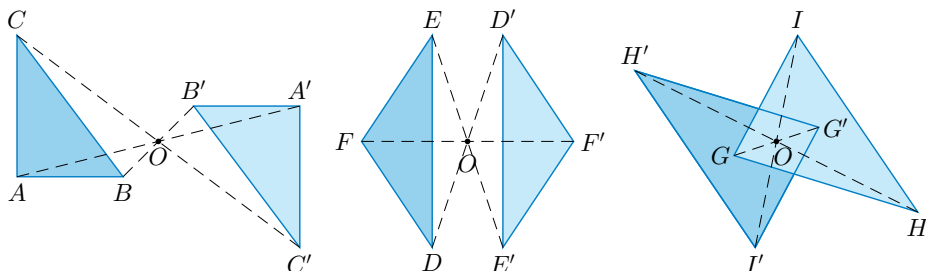
Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem punktu O** ($A \neq O$), jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty A i A' .

Punktem symetrycznym do O jest on sam.



Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty ABC , DEF i GHI oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu O .



Symetria środkowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami. Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny ABC , a następnie przekształć go symetrycznie względem:

- | | |
|---------------------------------|---|
| a) jednego z jego wierzchołków, | c) punktu przecięcia jego dwusiecznych, |
| b) środka jednego z jego boków, | d) punktu leżącego na zewnątrz niego. |

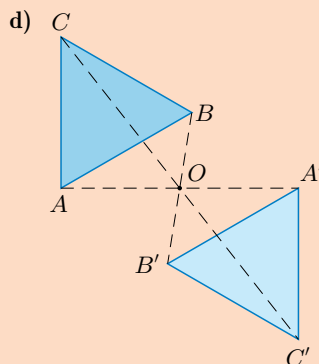
Figurę nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli istnieje taki punkt O , że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prostą, kwadrat, odcinek, półprosta?

Ćwiczenie 2

równoległobok (punkt przecięcia przekątnych),
 prosta (każdy punkt tej prostej),
 kwadrat (punkt przecięcia przekątnych),
 odcinek (środek tego odcinka)

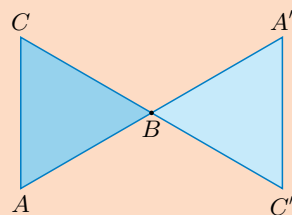


Uczeń:

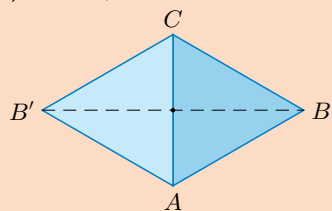
- wskazuje figury środkowosymetryczne,
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem początku układu współrzędnych,
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem początku układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków,
- podaje równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem początku układu współrzędnych,
- stosuje w zadaniach własności symetrii środkowej.

Ćwiczenie 1

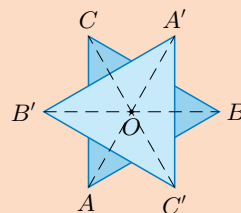
a) $B' = B$



b) $A' = C$, $C' = A$



c)



Multiteka

- Symetria środkowa
- Symetria środkowa w układzie współrzędnych

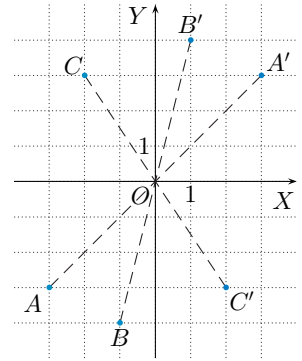
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.12

Generator
testów i sprawdzianów

■ Symetria względem początku układu współrzędnych

Przykład 1

Punktami symetrycznymi do punktów $A(-3, -3)$, $B(-1, -4)$ i $C(-2, 3)$ względem początku układu współrzędnych są odpowiednio punkty $A'(3, 3)$, $B'(1, 4)$ i $C'(2, -3)$.



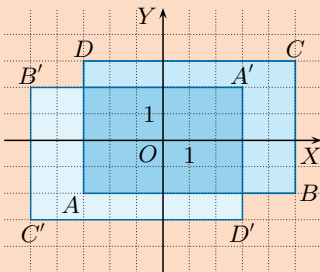
Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P'(-x, -y)$.

Ćwiczenie 3

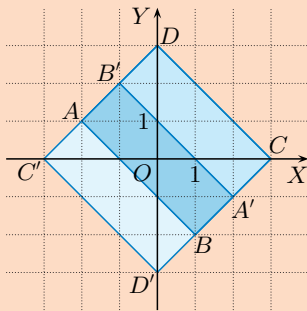
- a) $A'(-3, 2)$, $B'(2, 1)$, $C'(1, -4)$
 b) $A'(-2, 2)$, $B'(-1, -3)$, $C'(3, -1)$

Ćwiczenie 4

- a) $P = 6 \cdot 4 = 24$



- b) $P = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$



Ćwiczenie 3

Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$.

- a) $A(3, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 4)$ b) $A(2, -2)$, $B(1, 3)$, $C(-3, 1)$

Ćwiczenie 4

Prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a) $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 3)$, $D(-3, 3)$
 b) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 0)$, $D(0, 3)$

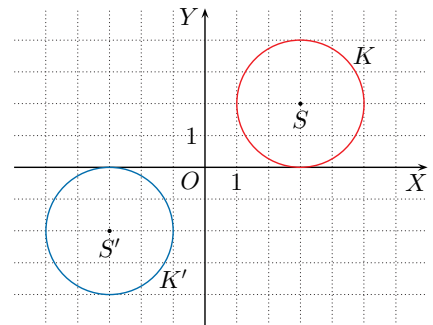
Przykład 2

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(3, 2)$, a jego promień $r = 2$.

Zatem środkiem okręgu K' jest punkt symetryczny do S względem początku układu współrzędnych, czyli $S'(-3, -2)$, a jego promień $r' = 2$.

Oznacza to, że okrąg K' jest dany równaniem $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

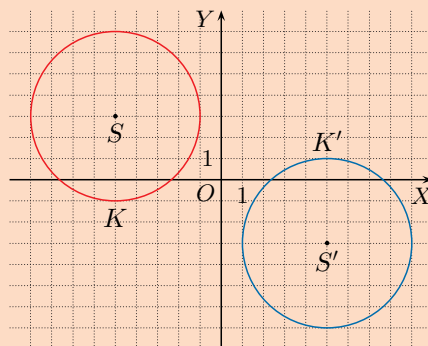


Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$. Narysuj te okręgi.

Ćwiczenie 5

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$



Ćwiczenie 6

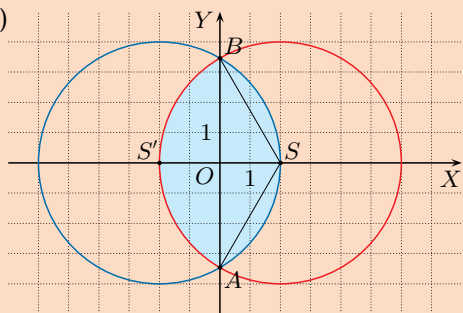
Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu K . Narysuj te okręgi.

- a) $K: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ c) $K: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
 b) $K: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ d) $K: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

Zadania

- Punkt A' położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA' , jeśli wiadomo, że:
 a) $A(3, 4)$, b) $A(-1, 4)$, c) $A(-6, -8)$, d) $A(a, a)$.
- Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt $ABCD$ i znajdź jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.
 a) $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$
 b) $A(-3, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-3, 2)$
- Równoległobok $A'B'C'D'$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) w symetrii względem punktu O . Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.
- Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem osi OX , a okrąg K'' jest obrazem okręgu K' w symetrii względem osi OY . Uzasadnij, że okrąg K'' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych.
- Wyznacz punkty wspólne okręgu K oraz jego obrazu w symetrii względem początku układu współrzędnych.
 a) $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$ c) $K: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$
 b) $K: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 34$ d) $K: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$
- Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej kół przez nie ograniczonych.
 a) $K: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ c) $K: x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 9 = 0$
 b) $K: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ d) $K: x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}y - 18 = 0$
- Okrąg $K: (x+2)^2 + (y-4)^2 = r^2$ i okrąg K' będący jego obrazem w symetrii względem początku układu współrzędnych są styczne zewnętrznie. Podaj równania wspólnych stycznych tych okręgów.

6. b)



$$A(0, -2\sqrt{3}), B(0, 2\sqrt{3})$$

$\angle OSA = 60^\circ$, więc $\angle ASB = 120^\circ$

$$P = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 \right) = 8 \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right)$$

c) $A(0, -3)$, $B(0, 3)$,
 $\triangle ABS$ jest równoboczny, więc
 $\angle ASB = 60^\circ$.

$$P = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$$

d) $A(3, -3)$, $B(-3, 3)$,
 $P = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$

7. Środki okręgów: $S(-2, 4)$,
 $S'(2, -4)$

Punkt styczności: $O(0, 0)$

$$\text{Promień: } r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Prosta } SS': y = -2x$$

$$\text{Styczne do okręgów: } y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -2x - 10, y = -2x + 10$$

Ćwiczenie 6

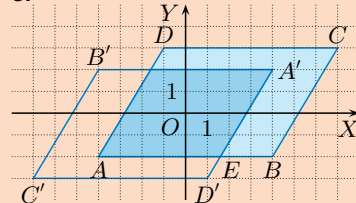
- a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
 b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$
 c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 10 b) $2\sqrt{17}$

c) 20 d) $2\sqrt{2}|a|$

3.



$$\text{Prosta } A'D': y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$\text{Prosta } AB: y = -2$$

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu E :

$$\frac{5}{3}x - \frac{14}{3} = -2$$

czyli $x = \frac{8}{5}$.

$$\text{Zatem } |AE| = 4 + \frac{8}{5} = \frac{28}{5}.$$

Pole części wspólnej:

$$P = |AE| \cdot 4 = 22,4$$

4. Niech:

$$K: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Wówczas:

$$K': (x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2,$$

$$K'': (x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

Jednocześnie okrąg K_O symetryczny do okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych ma promień r i środek $S_O(-a, -b)$,

czyli K_O ma równanie:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

Zatem $K_O = K''$.

5. a) $(-1, -1)$, $(1, 1)$

b) $(-1, -4)$, $(1, 4)$

c) $(-1, 2)$, $(1, -2)$

d) $(-3, -2)$, $(3, 2)$

6. a) $P = 8(\pi - 2)$

2.13. Zagadnienia uzupełniające

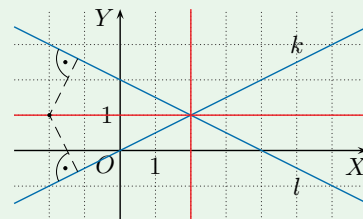
■ Zbiory punktów o danej własności

Przykład 1

Punkty równo odległe od dwóch przecinających się prostych leżą na dwusiecznych kątów utworzonych przez te proste.

Na rysunku obok przedstawiono proste:

$$k: y = \frac{1}{2}x \quad \text{ i } \quad l: y = -\frac{1}{2}x + 2$$



Proste k i l przecinają się w punkcie $(2, 1)$, zatem zbiór punktów równo odległych od tych prostych jest sumą dwóch prostych: $x = 2$ oraz $y = 1$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -\frac{7}{4}, y = \frac{3}{2}$
- b) $y = x + 2, y = -x + 4$
- c) $y = -\sqrt{3}x, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
- d) $y = -1$

1. Wyznacz zbiór punktów równo odległych od prostych k i l .

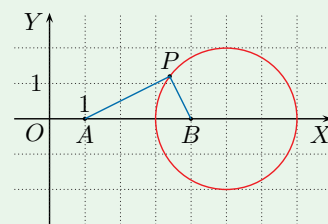
- a) $k: y = 2x + 5, l: y = -2x - 2$ c) $k: y = 0, l: y = \sqrt{3}x$
- b) $k: y = 3, l: x = 1$ d) $k: y = -3, l: y = 1$

Przykład 2

Wyznacz zbiór punktów, których odległość od punktu $A(1, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(4, 0)$.

Niech $P(x, y)$ będzie punktem, takim że $|PA| = 2|PB|$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 \\ -3x^2 - 3y^2 + 30x - 63 &= 0 \quad / : (-3) \\ x^2 + y^2 - 10x + 21 &= 0 \\ (x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest okrąg o środku $(5, 0)$ i promieniu 2.

2. Wyznacz zbiór punktów, których odległość od punktu:

- a) $A(0, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(6, 0)$,
- b) $A(-2, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(4, 0)$,
- c) $A(0, 1)$ jest trzy razy większa od odległości od punktu $B(0, -3)$.

2. a) $P(x, y)$ i $|PA| = 2|PB|$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\ (x-8)^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

- b) $P(x, y)$ i $|PA| = 2|PB|$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ (x-6)^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

- c) $P(x, y)$ i $|PA| = 3|PB|$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= 3\sqrt{x^2 + (y+3)^2} \\ x^2 + (y + \frac{7}{2})^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Multiteka

- Jednokładność
- Figury podobne
- Skala podobieństwa

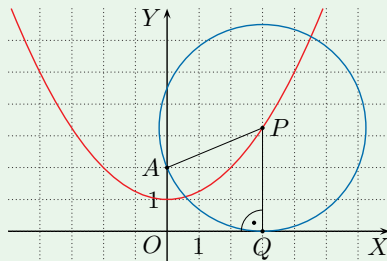
Przykład 3

Wyznacz zbiór środków okręgów stycznych do osi OX i przechodzących przez punkt $A(0, 2)$.

Niech punkt $P(x, y)$ będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania, a $Q(x, 0)$ – punktem styczności tego okręgu z osią OX .

Wówczas:

$$\begin{aligned} |PA| &= |PQ| \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= y \quad y > 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 &= y^2 \\ 4y &= x^2 + 4 \\ y &= \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{aligned}$$



Zatem szukany zbiorem punktów jest parabola $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

3. Wyznacz zbiór środków okręgów przechodzących przez punkt:
a) $A(0, 4)$ i stycznych do osi OX , b) $A(6, 0)$ i stycznych do osi OY .

Przykład 4

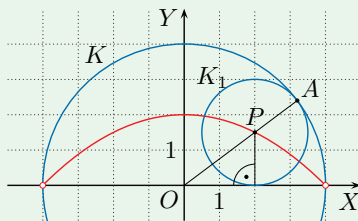
Wyznacz zbiór punktów o dodatniej rzędnej będących środkami okręgów stycznych wewnątrz do okręgu $K: x^2 + y^2 = 16$ i stycznych do osi OX .

Niech punkt $P(x, y)$ będzie środkiem okręgu K_1 spełniającego warunki zadania. Promień tego okręgu jest równy y i spełnia warunek $y \in (0; 2)$. Niech A będzie punktem styczności okręgów K i K_1 .

Wówczas $|OP| = 4 - |PA| = 4 - y$ oraz $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, zatem otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 4 - y \quad 4 - y > 0 \\ x^2 + y^2 &= 16 - 8y + y^2 \\ 8y &= -x^2 + 16 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$, zatem szukany zbiorem punktów jest jej fragment dla $x \in (-4; 4)$.



4. Wyznacz zbiór punktów o dodatniej odciętej będących środkami okręgów stycznych wewnątrz do okręgu $x^2 + y^2 = 4$ i stycznych do osi OY .

4. Niech $P(x, y)$ będzie środkiem okręgu K_1 spełniającego warunki zadania.

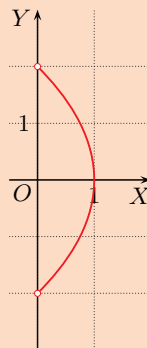
Promień tego okręgu jest równy x i spełnia warunek $x \in (0; 1)$.

Niech A będzie punktem styczności okręgów K i K_1 .

Wówczas $|OP| = 2 - |PA| = 2 - x$ oraz $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x$$

$$x = -\frac{1}{4}y^2 + 1, \text{ gdzie } y \in (-2; 2)$$



3. Niech punkt $P(x, y)$ będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania.

a) Niech $Q(x, 0)$ będzie punktem styczności tego okręgu z osią OX .

$$|PA| = |PQ|$$

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = y, \quad y > 0$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 + 2$$

b) Niech $Q(0, y)$ będzie punktem styczności tego okręgu z osią OY .

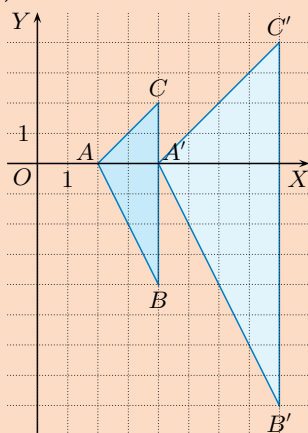
$$|PA| = |PQ|$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = x, \quad x > 0$$

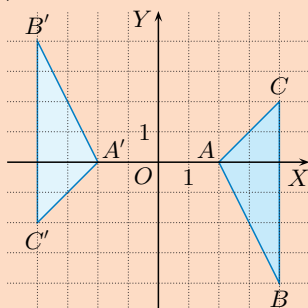
$$x = \frac{1}{12}y^2 + 3$$

5. a) $|A'B'| = \sqrt{5}$
 b) $|A'B'| = 2\sqrt{5}$
 c) $|A'B'| = \sqrt{5}$
 d) $|A'B'| = 6\sqrt{5}$

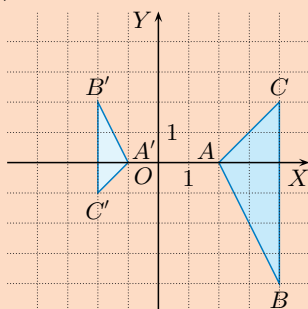
6. a) $P = 24$



- b) $P = 6$



- c) $P = 1,5$

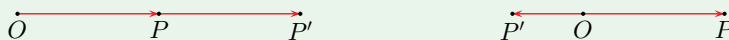


- d) $P = 54$

Jednokładność

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowuje punkt P' taki, że:

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$$



Punkt P' jest obrazem punktu P

w jednokładności o środku O i skali 2.

Punkt P' jest obrazem punktu P w jed-

nokładności o środku O i skali $-\frac{1}{2}$.

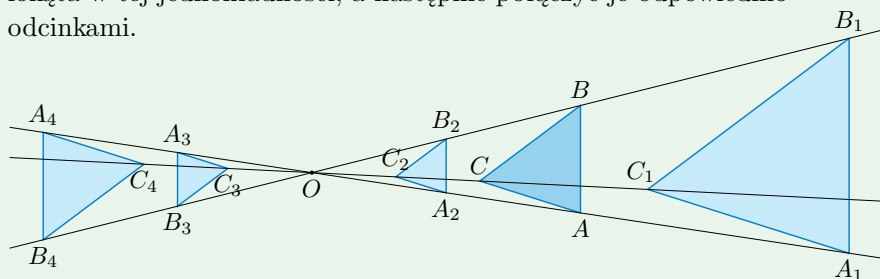
Obrazem odcinka AB w jednokładności o skali k jest odcinek $A'B'$ równoległy do odcinka AB taki, że $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

5. Dany jest odcinek AB , gdzie $A(4, -2)$, $B(2, 2)$. Narysuj obraz odcinka AB w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k . Oblicz długość otrzymanego odcinka, jeśli:

- a) $k = \frac{1}{2}$, b) $k = -1$, c) $k = -\frac{1}{2}$, d) $k = 3$.

Figury F_1 i F_2 nazywamy **jednokładnymi**, jeżeli istnieje jednokładność przekształcająca figurę F_1 na figurę F_2 .

Aby narysować obraz dowolnego wielokąta w jednokładności o środku O i skali k , wystarczy znaleźć obrazy wszystkich wierzchołków danego wielokąta w tej jednokładności, a następnie połączyć je odpowiednio odcinkami.



Każdy z trójkątów: $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ i $A_4B_4C_4$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku O i skali, odpowiednio, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2}$ i $k_4 = -1$.

6. Dane są punkty $A(2, 0)$, $B(4, -4)$ i $C(4, 2)$. Narysuj trójkąt $A'B'C'$ będący obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k . Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$.

- a) $k = 2$ b) $k = -1$ c) $k = -\frac{1}{2}$ d) $k = 3$

Jeśli skala jednokładności dwóch figur jest równa k , to skala ich podobieństwa jest równa $|k|$.

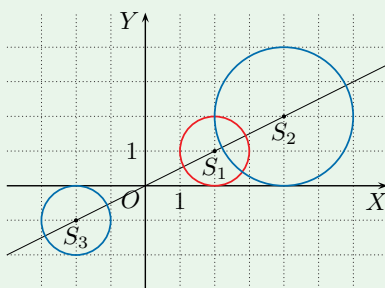
Obrazem okręgu o środku w punkcie S_1 i promieniu r_1 w jednokładności o środku w punkcie O i skali k jest okrąg o środku w punkcie S_2 takim, że $\overrightarrow{OS_2} = k \cdot \overrightarrow{OS_1}$, i promieniu r_2 takim, że $r_2 = |k| \cdot r_1$.

Na rysunku przedstawiono okrąg K_1 o środku $S_1(2, 1)$ i promieniu $r_1 = 1$.

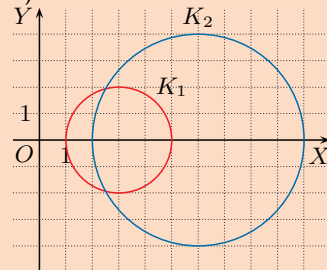
■ Obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku O i skali $k = 2$ jest okrąg K_2 o środku $S_2(4, 2)$ i promieniu $r_2 = 2$.

■ Obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku O i skali $k = -1$ jest okrąg K_3 o środku $S_3(-2, -1)$ i promieniu $r_3 = 1$.

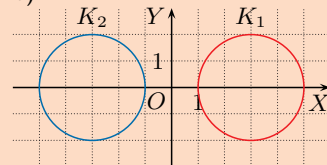
Zauważmy, że jednokładność o skali $k = -1$ jest symetrią środkową.



7. a)



b)



7. Narysuj okrąg K_2 będący obrazem okręgu $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$ w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali:

- a) $k = 2$, b) $k = -1$, c) $k = -2$.

8. Dany jest okrąg K_1 o równaniu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Okrąg K_2 jest obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku w punkcie P i skali k . Podaj równanie okręgu K_2 .

- a) $P(0, 0)$, $k = 2$ b) $P(4, 2)$, $k = 3$ c) $P(2, -4)$, $k = -\frac{1}{2}$

9. Okrąg K_2 o równaniu $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$ jest obrazem w pewnej jednokładności okręgu K_1 o równaniu $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 0$. Wyznacz środek tej jednokładności oraz podaj jej skalę. Rozpatrz dwa przypadki.

10. Okrąg K_2 o równaniu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ jest obrazem okręgu K_1 o promieniu 1 w jednokładności o środku w punkcie $P(3, -1)$. Wyznacz równanie okręgu K_1 . Rozpatrz dwa przypadki.

*11. Okrąg K_1 o środku w punkcie $(4, -2)$ jest styczny do osi OX . Okrąg ten przekształcono przez jednokładność o skali $k = -\frac{3}{2}$ i środku w punkcie P należącym do prostej $x + 2y = 0$. W ten sposób otrzymano okrąg K_2 . Podaj równanie okręgu K_2 , jeśli jest on styczny do osi: a) OX , b) OY .

8. a) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 36$

c) $(x-2)^2 + (y+\frac{13}{2})^2 = 1$

9. $K_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$,
czyli $S_2(2, 2)$ i $r_2 = 2\sqrt{2}$
 $K_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$,
czyli $S_1(-1, -1)$ i $r_1 = \sqrt{2}$
Zatem $k = -2$ lub $k = 2$.

Niech $O(x, y)$ będzie
środkiem jednokładności.

Dla $k = -2$:

$$\overrightarrow{OS_2} = -2\overrightarrow{OS_1}$$

$$\begin{aligned} [2-x, 2-y] &= \\ &= -2[-1-x, -1-y], \\ \text{czyli } O(0, 0). \end{aligned}$$

Dla $k = 2$:

$$\overrightarrow{OS_2} = 2\overrightarrow{OS_1}$$

$$\begin{aligned} [2-x, 2-y] &= \\ &= 2[-1-x, -1-y], \\ \text{czyli } O(-4, -4). \end{aligned}$$

10. $(x-3)^2 + y^2 = 1$ lub $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$

11. Środek jednokładności należy do prostej $x + 2y = 0$, czyli $P(x_p, -\frac{1}{2}x_p)$.

Okrąg K_1 jest styczny do osi OX , zatem $r_1 = 2$.

Skala jednokładności $k = -\frac{3}{2}$, stąd $r_2 = 3$ oraz $\overrightarrow{PS_2} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PS_1}$.

a) Okrąg K_2 jest styczny do osi OX , czyli $S_2(x_2, 3)$.

$$[x_2 - x_p, 3 + \frac{1}{2}x_p] = -\frac{3}{2} [4 - x_p, -2 + \frac{1}{2}x_p], \text{ czyli } P(0, 0) \text{ i } S_2(-6, 3)$$

Zatem $K_2: (x+6)^2 + (y-3)^2 = 9$.

b) K_2 jest styczny do osi OY , czyli $S_2(-3, y_2)$.

$$[-3 - x_p, y_2 + \frac{1}{2}x_p] = -\frac{3}{2} [4 - x_p, -2 + \frac{1}{2}x_p], \text{ czyli } P(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}) \text{ i } S_2(-3, \frac{3}{2})$$

Zatem $K_2: (x+3)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = 9$.

Odpowiedzi do zadań

- $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 15$; współliniowe
 - $|AB| = 8\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{5}$; współliniowe
 - $|AB| = 10$, $|BC| = 10$, $|AC| = 14\sqrt{2}$; niewspółliniowe
 - $|AB| = 6\sqrt{2}$, $|BC| = 3\sqrt{2}$, $|AC| = 9\sqrt{2}$; współliniowe
- równoramienny i prostokątny
 - prostokątny
- a) Obliczamy długości boków trójkąta:

$$|AB| = |BC| = 2\sqrt{10}$$

$$|AC| = 4\sqrt{5}$$

Dwa boki mają tę samą długość, czyli trójkąt jest równoramienny. Zauważmy, że:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

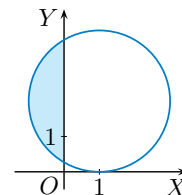
zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt jest prostokątny. Środek okręgu opisanego to środek przeciwprostokątnej, czyli punkt $(4, 4)$.

- $(-4, 4)$
- $|AD| = 5$, $|AE| = \sqrt{5}$
 - $\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, -3 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$,
 $\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, -3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
 - $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = -\frac{9}{2}x + 8$
 - $(x+4)^2 + y^2 = 25$,
 $(1, 0)$, $(-9, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$
 - $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$,
 $(-2, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 3 - \sqrt{21})$,
 $(0, 3 + \sqrt{21})$
 - $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$,
 $(-2\sqrt{3}-1, 0)$, $(2\sqrt{3}-1, 0)$,
 $(0, 2 - \sqrt{15})$, $(0, 2 + \sqrt{15})$
 - $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$,
 brak punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych
 - $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
 - $(0, 2 - \sqrt{3})$, $(0, 2 + \sqrt{3})$
 - $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz długości odcinków AB , BC i AC . Czy punkty A , B i C są współliniowe?
 - $A(-4, 5)$, $B(0, 2)$, $C(8, -4)$
 - $A(-4, -12)$, $B(2, -4)$, $C(10, 2)$
 - $A(13, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$
 - $A(-2\sqrt{2}, 8)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -4)$
- Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.
 - $A(-3, 1)$, $B(3, -3)$, $C(1, 7)$
 - $A(-3, 4)$, $B(10, -2)$, $C(5, 8)$
- Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - $A(0, 6)$, $B(2, 0)$, $C(8, 2)$
 - $A(-7, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 10)$
- Kwadrat, którego jeden z wierzchołków ma współrzędne $(1, -4)$, ma obwód równy $8\sqrt{5}$. Punkt przecięcia przekątnych tego kwadratu należy do prostej $y = x - 1$, a współrzędne tego punktu są liczbami ujemnymi. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
- W trójkącie o wierzchołkach $A(2, -1)$, $B(1, 2)$ i $C(-3, 4)$ poprowadzono środkową AD i wysokość AE . Oblicz ich długości.
- Na prostej przechodzącej przez punkty $A(1, -3)$ i $B(6, 7)$ wyznacz punkty, których odległość od punktu A jest równa 2.
 - Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(2, -1)$, równo oddalonej od punktów $B(2, 4)$ i $C(0, 3)$.
- Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r . Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.
 - $S(-4, 0)$, $r = 5$
 - $S(-1, 2)$, $r = 4$
 - $S(2, 3)$, $r = 5$
 - $S(-3, -4)$, $r = 1$
- Do okręgu o środku $(1, 2)$ należy punkt $(3, 2)$.
 - Wyznacz równanie tego okręgu.
 - Wyznacz współrzędne punktów, w których okrąg ten przecina oś OY .
 - Oblicz pole zacieniowanego obszaru (rysunek obok).



- Długość boku kwadratu: $a = 2\sqrt{5}$, długość przekątnej: $a\sqrt{2} = 2\sqrt{10}$
 Punkt przecięcia przekątnych: $P(x_p, x_p - 1)$, $|AP| = \sqrt{10}$, gdzie $A(1, -4)$

$$\sqrt{(x_p - 1)^2 + (x_p + 3)^2} = \sqrt{10}$$

$$x_p = -2 \text{ lub } x_p = 0$$

Zatem $P(-2, -3)$. Ponadto $\frac{1+x_p}{2} = -2$ i $\frac{-4+y_p}{2} = -3$, czyli $C(-5, -2)$.

Prosta BD jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt P .

$$a_{AC} = \frac{-2+4}{-5-1} = -\frac{1}{3}, \text{ czyli } a_{BD} = 3$$

Prosta BD : $y = 3x + 3$. Wierzchołki B i D są punktami przecięcia prostej BD i okręgu o środku w P i promieniu długości $r = \sqrt{10}$:

$$\begin{cases} y = 3x + 3 \\ (x+2)^2 + (y+3)^2 = 10 \end{cases}$$

Zatem: $B(-1, 0)$, $C(-3, -6)$.



9. Okrąg o środku w punkcie K_1 jest styczny do prostej l , a okrąg o środku w punkcie K_2 jest styczny do prostej k . Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.
- a) $K_1(-1, 4)$, $l: x = 1$, $K_2(1, 4)$, $k: x = 3$
 b) $K_1(-3, -3)$, $l: y = -2$, $K_2(-3, -4)$, $k: y = -6$
10. Dla jakich wartości parametru m równanie nie opisuje okręgu?
 a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = m^2 - 9$ b) $x^2 + y^2 - 2mx + 4y = m^2 + m - 7$
11. Dla jakich wartości parametru m okręgi K_1 i K_2 są styczne zewnętrznie?
 a) $K_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y = m^2 - 2$, $K_2: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 4m^2 - 13$
 b) $K_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y = m^2 - 13$, $K_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y = m^2 + 2m - 4$
12. Dla jakich wartości parametru m okręgi K_1 i K_2 mają tylko jeden punkt wspólny?
 a) $K_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, $K_2: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 - m = 0$
 b) $K_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$, $K_2: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 - \frac{m}{4} = 0$

■ Zestaw II

1. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia symetralnych trójkąta ABC . Podaj równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.
 a) $A(0, 0)$, $B(4, -4)$, $C(4, 8)$ b) $A(-2, -2)$, $B(6, -2)$, $C(2, 6)$
2. Punkt P leży na prostej l , a jego odległość od prostej $y = -x + 2$ jest równa $4\sqrt{2}$. Wyznacz współrzędne punktu P .
 a) $l: y = x + 2$ b) $l: y = \frac{5}{3}x - 6$
3. Jeden z boków kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie P jest zawarty w prostej k . Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki tego kwadratu.
 a) $P(-2, 1)$, $k: y = 3x - 3$ b) $P(3, 1)$, $k: y = -\frac{3}{4}x + 10$
4. Oblicz odległość między prostą $l_1: y = -x + b_1$ a prostą $l_2: y = -x + b_2$, jeśli wiadomo, że pierwsza z nich jest odległa od punktu $(0, 0)$ o 2, a druga – o 6 oraz $b_1, b_2 > 0$. Wyznacz równania tych prostych.
5. Dla jakich wartości parametru m trójkąt ABC ma pole równe 24?
 a) $A(-1, 1)$, $B(3, -3)$, $C(m, m)$ b) $A(-4, -6)$, $B(8, 6)$, $C(m, 6 - m)$

5. a) Bok trójkąta: $|AB| = 4\sqrt{2}$

Wyznaczamy pole: $P = \frac{1}{2}|AB|h = 24$ i otrzymujemy $h = 6\sqrt{2}$.

Jednocześnie h jest odległością punktu C od prostej $AB: x + y = 0$, zatem:

$$d_C = \frac{|m+m|}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$|2m| = 12$$

$$m = -6 \text{ lub } m = 6$$

- b) $m = 2$ lub $m = 6$

9. a) $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $|K_1K_2| = 2$, przecinają się
 b) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $|K_1K_2| = 1$, styczne wewnętrznie
10. a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2 - 4$
 $m^2 - 4 \leq 0$ dla $m \in \langle -2; 2 \rangle$
 b) $(x-m)^2 + (y+2)^2 = 2m^2 + m - 3$
 $2m^2 + m - 3 \leq 0$ dla $m \in \langle -\frac{3}{2}; 1 \rangle$
11. a) $K_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = m^2$, czyli $S_1(-1, -1)$ i $r_1 = |m|$
 $K_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4m^2$, czyli $S_2(2, 3)$ i $r_2 = 2|m|$
 $|S_1S_2| = 5 = 3|m|$
 Zatem $m = -\frac{5}{3}$ lub $m = \frac{5}{3}$.
 b) $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = m^2$, czyli $S_1(-3, 2)$ i $r_1 = |m|$
 $K_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = (m+1)^2$, czyli $S_2(1, 2)$ i $r_2 = |m+1|$
 $|S_1S_2| = 4 = |m| + |m+1|$
 Zatem $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{3}{2}$.
12. a) $m = 9$, $m = 49$
 b) $m = 64$, $m = 144$

Zestaw II

1. a) $(6, 2)$, $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 40$
 b) $(2, 1)$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$
2. a) $P(4, 6)$ lub $P(-4, -2)$
 b) $P(0, -6)$ lub $P(6, 4)$
3. a) $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x - 3$, $y = 3x + 17$
 b) $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{3}x + 6$, $y = \frac{4}{3}x - 12$
4. $d = 4$, $l_1: y = -x + 2\sqrt{2}$, $l_2: y = -x + 6\sqrt{2}$

6. a) Niech $S(x, -x)$ będzie środkiem okręgu. Odległości S od prostych są równe, zatem:

$$\frac{|2x+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x+6|}{\sqrt{2}}$$

$$x = -2, \text{ czyli } S(-2, 2)$$

$$\text{Promień okręgu: } r = \sqrt{2}$$

$$\text{Równanie okręgu:}$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

$$\text{b) } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$$

7. a) $(2, -5), (8, 1), (-4, 7)$
lub $(2, -5), (8, 1), (6, -3)$

$$\text{b) } (-6, 1), \left(\frac{36}{5}, -\frac{7}{5}\right), (6, 7)$$

$$\text{lub } (-6, 1), (0, -5), (6, 7)$$

8. $A(3, -1), B(2, 0), C(-2, -4),$
 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{17}{2}$

9. Punkty wspólne okręgów:

$$A(-2, -2), B(-1, -1)$$

$$\text{Prosta } AB: x + y = 0$$

$$\text{Odległość punktu } P \text{ od}$$

$$\text{prostej } AB: \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

10. $O_1: (x+6)^2 + y^2 = 4$, czyli
 $S_1(-6, 0), r_1 = 2$

$$O_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4,$$

$$\text{czyli } S_2(2, 2), r_2 = 2$$

$$r_1 = r_2$$

Zatem okrąg O_1 jest obrazem O_2 w symetrii środkowej względem punktu S , który jest środkiem symetrii odcinka S_1S_2 , czyli $S(-2, 1)$.

11. a) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$

$$\text{b) } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$\text{c) } (x-5)^2 + (y+6)^2 = 16$$

$$\text{d) } (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$$

12. a) $y = -\frac{1}{3}x + 5, y = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{3}$

b) Styczne do okręgu przechodzą przez punkt A , czyli są postaci $ax - y - 3a - 4 = 0$.

Styczne są oddalone od środka $S(3, 1)$ o $\sqrt{5}$, czyli:

$$\frac{|3a-1-3a-4|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$a = -2 \text{ lub } a = 2$$

Równania stycznych:

$$y = -2x + 2 \text{ lub } y = 2x - 10$$

Punkty styczności: $P(1, 0)$

i $Q(5, 0)$

Zatem $|PQ| = 4$.

13. $m = 4$

6. Oblicz promień okręgu stycznego jednocześnie do prostych k i l . Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli jego środek leży na prostej $y = -x$.

$$\text{a) } k: y = x + 2, l: y = x + 6$$

$$\text{b) } k: y = \frac{1}{2}x + 2, l: y = \frac{1}{2}x - 8$$

7. Trójkąt równoramienny jest wpisany w okrąg $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 50$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

$$\text{a) jego podstawa jest zawarta w prostej } y = x - 7,$$

$$\text{b) jedno z jego ramion jest zawarte w prostej } y = \frac{1}{2}x + 4.$$

8. Bok AB trójkąta ABC zawiera się w prostej $x + y - 2 = 0$, a bok AC - w prostej $3x - 5y - 14 = 0$. Punkt $S(0, -2)$ jest środkiem boku BC . Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz wyznacz równanie okręgu opisanego na nim.

9. Oblicz odległość punktu $P(0, -3)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów $x^2 + 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$ oraz $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$.

10. Uzasadnij, że w pewnej symetrii środkowej okrąg $x^2 + y^2 + 12x + 32 = 0$ jest obrazem okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. Wyznacz środek tej symetrii.

11. Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ względem:

$$\text{a) osi } OX, \quad \text{b) osi } OY, \quad \text{c) prostej } y = x - 3, \quad \text{d) prostej } y = -2x + 6.$$

12. a) Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 35 = 0$, prostopadłych do prostej $3x - y = 0$.

$$\text{b) Przez punkt } A(3, -4) \text{ poprowadzono styczne do okręgu o środku } S(3, 1) \text{ i promieniu } \sqrt{5}. \text{ Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.}$$

13. Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - 2mx + 3m = 0$ opisuje okrąg styczny do prostej $x = 2$?

14. Oblicz pole części wspólnej trójkąta ABC i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [-4, 1]$.

$$\text{a) } A(-4, 0), B(4, 0), C(0, 4)$$

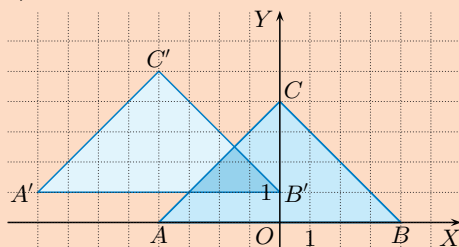
$$\text{b) } A(-3, 0), B(3, 0), C(0, 3\sqrt{3})$$

15. Punkty P i Q są środkami boków odpowiednio AB i AC trójkąta ABC . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC , jeśli:

$$\text{a) } A(-4, 1), P(-1, -\frac{1}{2}), \vec{CB} = [1, -8],$$

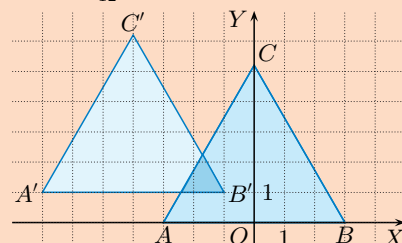
$$\text{b) } P(1, 3), \vec{AP} = [4, 2], \vec{PQ} = [-3, 1].$$

14. a) $P = 2,25$



15. a) $\vec{AP} = [3, -\frac{3}{2}]$, czyli $B(2, -2)$
 $\vec{BC} = [-1, 8]$, czyli $C(1, 6)$
Prosta AC : $y = x + 5$

$$\text{b) } P = \frac{13}{12}\sqrt{3} - 1$$



- b) $\vec{PA} = [-4, -2]$, czyli $A(-3, 1)$
 $Q(-2, 4)$
Prosta AC pokrywa się z prostą AQ : $y = 3x + 10$.

**Przykład**

Dla jakich wartości parametru m okrąg $(x-2)^2 + (y-m)^2 = 5$ jest styczny do prostej $y = 2x - 1$?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Okrąg jest styczny do prostej, gdy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ (x-2)^2 + (y-m)^2 = 5 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

Przekształcamy drugie równanie i otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2my + m^2 - 1 = 0$$

Podstawiamy $y = 2x - 1$:

$$x^2 + (2x-1)^2 - 4x - 2m(2x-1) + m^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 4x - 4mx + 2m + m^2 - 1 = 0$$

$$5x^2 - 4(m+2)x + m(m+2) = 0$$

$$\Delta = 16(m+2)^2 - 20m(m+2) = -4m^2 + 24m + 64 = -4(m+2)(m-8)$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = 0$, czyli dla $m \in \{-2, 8\}$.

II sposób

Okrąg jest styczny do prostej, gdy odległość jego środka od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

Środkiem okręgu jest punkt $S(2, m)$, a jego promień $r = \sqrt{5}$.

Równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$2x - y - 1 = 0$$

Odległość punktu S od prostej $2x - y - 1 = 0$:

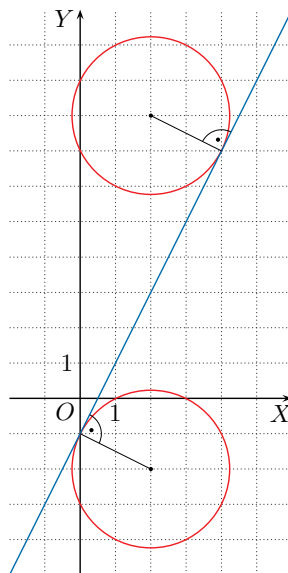
$$\frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot m - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - m|}{\sqrt{5}}$$

Rozwiązujemy równanie: $\frac{|3-m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$$|3 - m| = 5$$

$$3 - m = 5 \quad \text{lub} \quad 3 - m = -5$$

$$m = -2 \quad \text{lub} \quad m = 8$$



Odpowiedź: Dany okrąg jest styczny do prostej $y = 2x - 1$ dla $m \in \{-2, 8\}$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Obwód równoległoboku:

$$Ob = 2(|AB| + |BC|) = 2(4 + 4\sqrt{2}) = 8 + 8\sqrt{2}$$

Zauważmy, że $8\sqrt{2} = \sqrt{128}$ oraz $11^2 < 128 < 12^2$, czyli $11 < 8\sqrt{2} < 12$.

Zatem $8 + 8\sqrt{2} \in (19; 20)$.

2. A. $|S_1S_2| = 3\sqrt{2}$

B. $|S_1S_2| = \sqrt{2}$

C. $|S_1S_2| = 5 = 3 + 2$

D. $|S_1S_2| = \sqrt{5}$

3. Niech d – odległość punktu S od prostej AB , $r = \sqrt{10}$.

Okrąg ma 2 punkty wspólne z prostą, gdy $d < r$.

A. $d = \sqrt{\frac{196}{17}} > \sqrt{10}$

B. $d = \sqrt{\frac{441}{65}} < \sqrt{10}$

C. $d = \sqrt{10} = r$

D. $d = \sqrt{10} = r$

6. Równanie okręgu:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

zatem środkiem okręgu jest punkt $(-3, 1)$.

Środek okręgu będącego obrazem w przesunięciu o wektor $[5, -4]$ ma współrzędne:

$$(-3+5, 1-4) = (2, -3)$$

Zatem równanie obrazu:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

czyli:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

1. Punkty $A(-3, 2)$, $B(1, 2)$, $C(5, 6)$ i $D(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału:

A. $(13; 16)$,

C. $(19; 22)$,

B. $(16; 19)$,

D. $(22; 25)$.

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu 3 oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny, jeśli:

A. $S_1(1, 2)$, $S_2(4, 5)$,

C. $S_1(-6, 2)$, $S_2(-2, -1)$,

B. $S_1(2, 1)$, $S_2(3, 2)$,

D. $S_1(-4, -3)$, $S_2(-2, -2)$.

3. Okrąg o środku w punkcie $S(-1, 2)$ i promieniu $\sqrt{10}$ ma dwa punkty wspólne z prostą AB , gdy:

A. $A(-3, -2)$, $B(1, -1)$,

C. $A(0, 5)$, $B(3, 4)$,

B. $A(-2, -5)$, $B(2, 2)$,

D. $A(2, 1)$, $B(4, 7)$.

4. Punkty $A(-3, 7)$, $B(17, -3)$ i $C(13, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek D ma współrzędne:

A. $(-7, 15)$,

C. $(-4, 8)$,

B. $(-4, 10)$,

D. $(-20, 10)$.

5. Punkty $A(-4, -4)$, $B(6, -4)$ i $C(14, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Okrąg wpisany w ten romb dany jest równaniem:

A. $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 1 = 0$,

C. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$,

B. $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 8 = 0$,

D. $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$.

6. Obrazem okręgu $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [5, -4]$ jest okrąg:

A. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$,

C. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$,

B. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$,

D. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$.

7. Żaba, wykonując skok, przesuwa się o wektor $\vec{u} = [3, 1]$ lub $\vec{v} = [-1, 2]$. Na początku znajdowała się w punkcie $P(-2, -3)$. Wszystkie punkty, w których może znaleźć się żaba po wykonaniu trzech skoków, leżą na prostej danej równaniem:

A. $y = 3x + 1$,

C. $y = -x + 2$,

B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,

D. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

7. Możliwe wektory przesunięć w trzech skokach:

$$3\vec{u} = 3[3, 1] = [9, 3]$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 2[3, 1] + [-1, 2] = [5, 4]$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = [3, 1] + 2[-1, 2] = [1, 5]$$

$$3\vec{v} = 3[-1, 2] = [-3, 6]$$

Zatem po wykonaniu trzech skoków żaba znajdzie się w jednym z punktów:

$$P_1(-2+9, -3+3) = (7, 0)$$

$$P_2(-2+5, -3+4) = (3, 1)$$

$$P_3(-2+1, -3+5) = (-1, 2)$$

$$P_4(-2-3, -3+6) = (-5, 3)$$

$$\text{Równanie prostej } P_1P_2: y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

Punkty P_3 oraz P_4 również należą do tej prostej.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(-3, 5)$, $C(5, -1)$ i $D(11, -3)$. Oblicz odległość między środkami odcinków AB i CD .

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz odległość punktu $P(1, 6)$ od prostej $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz równanie okręgu o środku $S(4, 1)$ stycznego do prostej $y = -2$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu $K: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ względem osi OX . Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

D Zadanie 5 (5 pkt)

Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$, $C(6, 7)$ i $D(0, 5)$ jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

Zadanie 6 (4 pkt)

Punkty $A(4, 2)$ i $B(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(0, 3)$. Wyznacz równanie symetralnej boku CD .

D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \quad \text{ i } \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$$

są styczne zewnętrznie.

Zadanie 8 (5 pkt)

W okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ wpisano trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku $C(-1, -3)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 9 (4 pkt)

Okrąg K' jest obrazem okręgu $K: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 17\frac{7}{9}$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Podaj równanie okręgu K' i wyznacz współrzędne punktów, w których przecina go prosta przechodząca przez środki tych okręgów.

8. $S(2, 1)$, $r = 5$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ i $|AC| = |BC|$, więc bok AB jest średnicą okręgu i jest prostopadły do CS .

$$a_{CS} = \frac{4}{3}, a_{AB} = -\frac{3}{4}, \text{ prosta } AB: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

Zatem $A(6, -2)$, $B(-2, 4)$.

9. $K': (x-3)^2 + (y+1)^2 = 17\frac{7}{9}$

Prosta przechodząca przez $S(-3, 1)$ i $S'(3, -1)$: $y = -\frac{1}{3}x$

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 17\frac{7}{9} \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Punkty przecięcia: $(-1, \frac{1}{3})$, $(7, -\frac{7}{3})$

Odpowiedzi do zadań

- Środek odcinka AB : $(-4, 3)$
Środek odcinka CD : $(8, -2)$
Odległość między środkami: 13
- 5
- $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
- $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, $d = 6$
- $|AB| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$
 $|BC| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$
 $|CD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$
 $|DA| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$
 $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$,
więc czworokąt $ABCD$ jest rombem.
 $|AC| = 8\sqrt{2}$ i $|BD| = 4\sqrt{2}$,
czyli pole:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32$
 $P = |AB| \cdot h = 2\sqrt{10} \cdot h = 32$,
czyli wysokość $h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
- $C(-4, 4)$, $D(-1, 0)$
Środek boku CD : $P(-\frac{5}{2}, 2)$
Symetralna boku CD jest do niego prostopadła i przechodzi przez punkt P .
 $a_{CD} = -\frac{4}{3}$, czyli symetralna boku CD ma równanie:
 $y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{8}$
- Środki okręgów: $S_1(4, 3)$ i $S_2(1, -3)$
Promienie okręgów: $r_1 = \sqrt{5}$ i $r_2 = 2\sqrt{5}$
 $|S_1S_2| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} = r_1 + r_2$
Zatem okręgi są styczne zewnętrznie.

**Odpowiedzi do zadań**

1. Niech S będzie środkiem przekątnej AC , czyli $S(1, 0)$.

Stąd $|AS| = \sqrt{10}$ oraz
 $|AS|^2 + |BS|^2 = 5^2$, czyli
 $|BS| = \sqrt{15}$.

Pole rombu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2|AS| \cdot 2|BS| = 10\sqrt{6} \approx 24,4949$$

Należy zakodować: 244.

2. Niech S będzie środkiem okręgu, wówczas $S(x_s, -x_s)$ oraz:

$$(x - x_s)^2 + (y + x_s)^2 = r^2$$

$$(4 - x_s)^2 + x_s^2 = (2 - x_s)^2 + (2 + x_s)^2$$

$$x_s = 1, S = (1, -1)$$

Zatem:

$$r = |AS| = \sqrt{10} \approx 3,162$$

Należy zakodować: 316.

3. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$, czyli $r = 2$

Niech a będzie długością boku trójkąta równobocznego.

Wówczas:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = r = 2, \text{ czyli } a = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Zatem } Ob = 6\sqrt{3} \approx 10,3923.$$

Należy zakodować: 392.

4. $4\sqrt{2}$

5. Środek ciężkości: $S_c(\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$

Środek okręgu opisanego:

$$S_o(\frac{7}{8}, \frac{31}{8})$$

$$|S_c S_o| = \sqrt{\frac{169}{288}} = \frac{13}{24}\sqrt{2}$$

6. $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 68$, czyli $S(m, 1)$ i $r = 2\sqrt{17}$

Odległość środka okręgu od prostej:

$$d = \frac{|4m+1-3|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|4m-2|}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{17}} < 2\sqrt{17}$$

$$m \in (-8; 9)$$

7. $(-1, -2), (5, 4), (-1, 6), (-3, 4)$

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Punkty $A(-2, -1)$ i $C(4, 1)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości 5. Oblicz pole tego rombu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(4, 0)$ i $B(2, 2)$ leży na prostej $y = -x$. Oblicz promień tego okręgu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)

Oblicz obwód trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg dany równaniem $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 4 (5 pkt)

Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 45 = 0$ jest średnicą tego okręgu. Oblicz wysokość tego trapezu, jeśli wiadomo, że jedno z jego ramion leży na prostej $y = 3x - 15$.

Zadanie 5 (6 pkt)

Punkty $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$ i $C(3, 6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu na nim opisanego.

Zadanie 6 (4 pkt)

Dla jakiej wartości parametru m okrąg $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + m^2 - 67 = 0$ ma dwa punkty wspólne z prostą $y = -4x + 3$?

Zadanie 7 (4 pkt)

W okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ wpisano trapez. Jego dłuższa podstawa jest zawarta w prostej $x - y = 1$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa $4\sqrt{2}$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Dane są wierzchołki $B(10, 5)$ i $D(1, 5)$ trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest trzy razy dłuższa od podstawy CD oraz $\vec{AB} = [12, 6]$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu. Wyznacz wektor, którego początkiem jest środek ramienia AD , a końcem środek ramienia BC .

Zadanie 9 (5 pkt)

Dla jakiej wartości parametru m pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, -3)$, $B(2, 1)$ i $C(m, m^2 + 1)$ jest najmniejsze?

8. $\vec{BA} = [-12, -6]$, czyli $A(-2, -1)$

$$\vec{DC} = \frac{1}{3}\vec{AB} = [4, 2], \text{ czyli } C(5, 7)$$

$$\text{Środek ramienia } AD: M(-\frac{1}{2}, 2)$$

$$\text{Środek ramienia } BC: N(\frac{15}{2}, 6)$$

$$\text{Wektor łączący środki ramion: } \vec{MN} = [8, 4]$$

9. Korzystamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} |x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_A y_C - x_B y_A - x_C y_B|$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |2m^2 - 4m + 8| = |m^2 - 2m + 4| = (m - 1)^2 + 3$$

Najmniejsza wartość funkcji $P(m) = (m - 1)^2 + 3$ jest przyjmowana w wierzchołku paraboli, czyli dla $m = 1$.