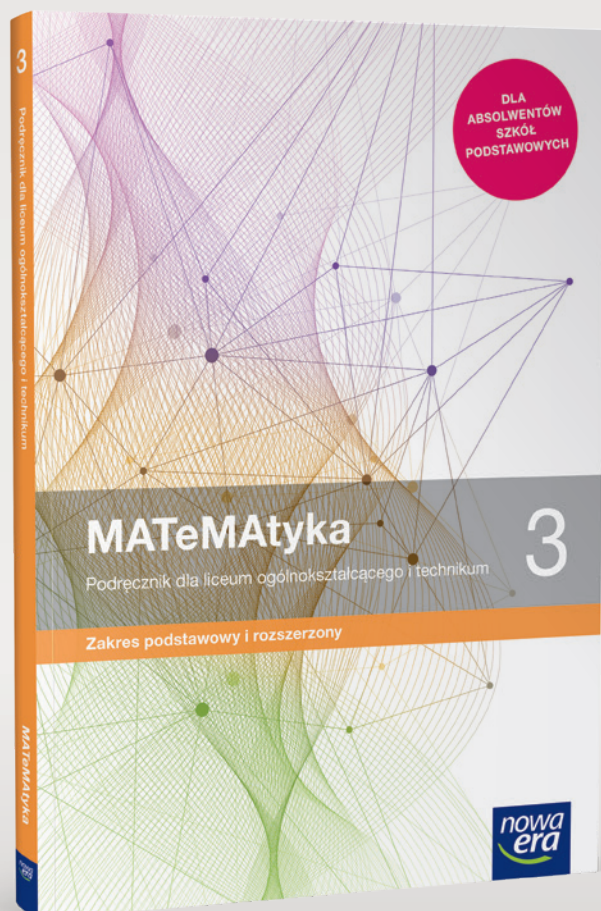


Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy i rozszerzony



Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl

MATeMAtyka

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

3



Twoje mocne strony

MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela 3 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy, Doroty Ponczek i Jolanty Wesołowskiej *MATeMATyka 3* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (988/3/2021).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4272-9

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *MATeMATyka* dla klasy 3 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.
© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak.
Redakcja merytoryczna: Aleksandra Jankowska, Beata Zajęc.
Redakcja językowa: Paulina Szulim.
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.
Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.
Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.
Projekt okładki: Maciej Galiński, Klaudia Jarocka-Ciok.
Rysunki: Lech Chańko.
Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.
Opracowanie graficzne infografik: Aleksandra Szpunar.
Realizacja projektu okładki: Ultra.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/AliseFox.

Zdjęcia: Agencja Gazeta/Cezary Aszkietowicz s. 24; BE&W: Alamy Stock Photo - Gunter Kirsch s. 110 (zamek Czocho), IanDagnall Computing s. 158, Witold Skrypczak s. 110 (zamek w Czersku); Getty Images: Dorling Kindersley: Gary Ombler/Jonathan Sneath s. 44, iStock/Unreleased/ewg3D s. 110 (zamek w Niedzicy), iStock/Getty Images Plus - Alberto Gagliardi s. 215, AndrewScherbackov s. 18, Andrey Mitrofanov s. 145, Moment - Pierre Ogeron s. 9, Troy Harrison s. 297; Shutterstock: Alexey Boldin s. 312 (smartwatch), Brester Irina s. 48, Dmitry Demkin s. 161 (słonecznik), Ev. Safronov s. 225, f11photo s. 268 (miasto nocą), Ian 2010 s. 161 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 110 (zamek w Ogrodzieńcu), Maridav s. 312 (bieg), Marzolino s. 268 (Leibniz), Nicku s. 268 (Newton), oriontrail s. 22, Pecold s. 110 (zamek w Gniewie), Photokop s. 15; Thinkstock/Getty Images: Fuse s. 301, Photodisc/Digital Vision s. 267; Lech Chańko s. 83.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Grzegorz Janocha
Dorota Ponczek
Jolanta Wesołowska

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy i rozszerzony



Twoje mocne strony

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Edwarda Tutaja, dr Moniki Fabijańczyk, prof. dr hab. Anny Cegieli.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

ISBN 978-83-267-4202-6

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radziwińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Marcin Minda, Beata Zając

Opracowanie odpowiedzi: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska, Beata Zając

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Korekta językowa: Dorota Rzeszewska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Krzysztof Mrawiński, Aleksandra Szpunar

Mapa: Zespół Kartograficzny Nowa Era

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMATyka kl. 1 ZPiR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek, MATeMATyka kl. 2 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy oraz MATeMATyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Spis treści

* 1. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – warto powtórzyć	10
* 1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	11
* 1.2. Kąt obrotu	15
* 1.3. Miara łukowa kąta	19
* 1.4. Funkcje okresowe	22
* 1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus	25
Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste – warto wiedzieć	29
* 1.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens	30
* 1.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor	34
* 1.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)	37
* 1.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)	40
Ruch po okręgu – warto wiedzieć	44
* 1.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)	45
* 1.11. Tożsamości trygonometryczne	49
Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych – warto wiedzieć	53
* 1.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów	54
* 1.13. Wzory redukcyjne	58
* 1.14. Równania trygonometryczne (1)	62
* 1.15. Równania trygonometryczne (2)	65
Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów – warto wiedzieć	68
* 1.16. Nierówności trygonometryczne	69
* 1.17. Zagadnienia uzupełniające	72
Zestawy powtórzeniowe	76
Sposób na zadanie	80
Zadania testowe	81
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	82

2. Geometria analityczna

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych	84
2.2. Środek odcinka	87
2.3. Odległość punktu od prostej	91
Pole trójkąta w układzie współrzędnych – warto wiedzieć	95
2.4. Okrąg w układzie współrzędnych	96

Okrąg wpisany w trójkąt – warto wiedzieć	101
2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów	102
2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej	105
2.7. Układy równań drugiego stopnia	111
* 2.8. Koło w układzie współrzędnych	115
* 2.9. Działania na wektorach	118
Iloczyn skalarny wektorów – warto wiedzieć	123
* 2.10. Wektory – zastosowania	124
2.11. Symetria osiowa	127
2.12. Symetria środkowa	131
2.13. Zagadnienia uzupełniające	134
Zestawy powtórzeniowe	138
Sposób na zadanie	141
Zadania testowe	142
Przed obowiązkową maturą z matematyki	143
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	144

3. Ciągi

3.1. Pojęcie ciągu	146
3.2. Sposoby określania ciągu	149
3.3. Ciągi monotoniczne (1)	153
3.4. Ciągi określone rekurencyjnie	157
* 3.5. Ciągi monotoniczne (2)	162
3.6. Ciąg arytmetyczny (1)	164
3.7. Ciąg arytmetyczny (2)	168
3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	171
3.9. Ciąg geometryczny (1)	175
3.10. Ciąg geometryczny (2)	178
3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	181
3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania	185
Ciągi liczb całkowitych – warto wiedzieć	188
3.13. Procent składany	189
* 3.14. Granica ciągu	195
* 3.15. Ciągi rozbieżne	198
* 3.16. Obliczanie granic ciągów (1)	200
* 3.17. Obliczanie granic ciągów (2)	204
* 3.18. Szereg geometryczny	208
3.19. Zagadnienia uzupełniające	213

Zestawy powtórzeniowe	217
Sposób na zadanie	221
Zadania testowe	222
Przed obowiązkową maturą z matematyki	223
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	224

★ 4. Rachunek różniczkowy

★ 4.1. Granica funkcji w punkcie	226
★ 4.2. Obliczanie granic funkcji	229
★ 4.3. Granice jednostronne	233
★ 4.4. Granice niewłaściwe	235
Krzywe płaskie i ich asymptoty – warto wiedzieć	239
★ 4.5. Granica funkcji w nieskończoności	240
★ 4.6. Ciągłość funkcji	244
★ 4.7. Własności funkcji ciągłych	248
★ 4.8. Pochodna funkcji w punkcie	251
★ 4.9. Funkcja pochodna	255
★ 4.10. Działania na pochodnych	258
★ 4.11. Pochodna funkcji złożonej	262
★ 4.12. Interpretacja fizyczna pochodnej	265
★ 4.13. Monotoniczność funkcji	269
★ 4.14. Ekstrema funkcji	273
★ 4.15. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji	277
★ 4.16. Zagadnienia optymalizacyjne	280
★ 4.17. Szkicowanie wykresu funkcji	284
★ 4.18. Zagadnienia uzupełniające	287
Zestawy powtórzeniowe	291
Sposób na zadanie	294
Zadania testowe	295
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	296

5. Statystyka

5.1. Średnia arytmetyczna	298
5.2. Mediana, skala centylowa i dominanta	302
5.3. Odchylenie standardowe	308
Inne miary rozrzutu danych – warto wiedzieć	313
5.4. Średnia ważona	314
5.5. Zagadnienia uzupełniające	317

Zestawy powtórzeniowe	318
Sposób na zadanie	321
Zadania testowe	322
Przed obowiązkową maturą z matematyki	323
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	324
Indeks	373
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	376

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

 Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

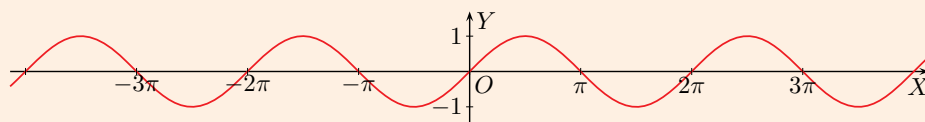
 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Funkcje trygonometryczne

Mont Saint-Michel [czyt. mą sę miszel] w czasie odpływu. Podnoszenie się i opadanie poziomu oceanów jest zjawiskiem powtarzającym się okresowo.

Omawiane w tym rozdziale funkcje trygonometryczne mogą stanowić model służący do opisu niektórych zjawisk powtarzających się okresowo. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres jednej z funkcji trygonometrycznych – funkcji sinus. Wykres ten nazywamy sinusoidą.



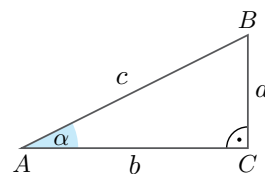
Multiteka

• Odległość Ziemi od Słońca i Księżycy

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Jeśli α jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego, to sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

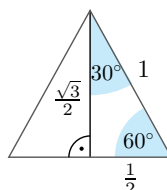
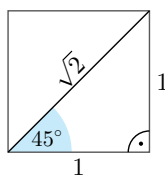


Cosinus, tangens i cotangens kąta α definiujemy następująco:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α .

Podane w tabeli wartości można wyznaczyć, korzystając z poniższych rysunków.



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3},$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}$$

b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3},$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}$$

c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5},$$

$$\sin \beta = \frac{12}{13}, \cos \beta = \frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{5}{12}$$

d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{ctg} \alpha = 2,$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg} \beta = 2, \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2}$$

2. a) 6, 8 b) 7, 24

3. a) $Ob = 25,$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

b) $Ob = 8 + 2\sqrt{10},$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych przyprostokątnych.

a) 3, 4

b) 9, 12

c) 5, 12

d) 1, 2

2. W trójkącie prostokątnym dana jest długość przeciwprostokątnej c oraz sinus kąta ostrego α . Oblicz długości przyprostokątnych.

a) $c = 10, \sin \alpha = \frac{3}{5}$

b) $c = 25, \sin \alpha = 0,28$

3. W trójkącie prostokątnym dany jest tangens kąta ostrego α oraz długość boku a leżącego naprzeciwko kąta α . Oblicz obwód tego trójkąta. Wyznacz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4, a = 10$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, a = 2$

D 4. Uzasadnij, że między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α zachodzi podana zależność.

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

d) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

e) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

f) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

4. a) W dowodzie jedynki trygonometrycznej korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

c) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

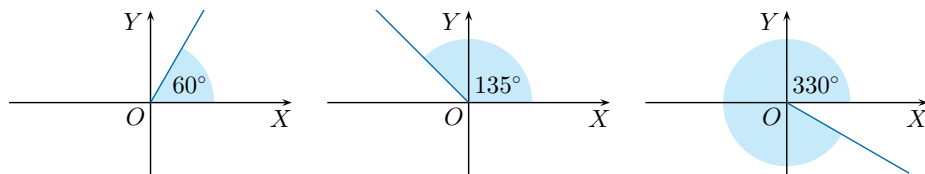
d) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$

e) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

f) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

*1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Rozpatrujemy kąty umieszczone w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jego ramię początkowe zawiera się w dodatniej półosi OX . Kąt jest odłożony od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara oraz może przyjmować miarę od 0° do 360° .

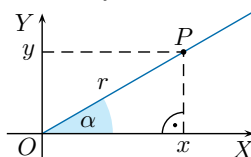


Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



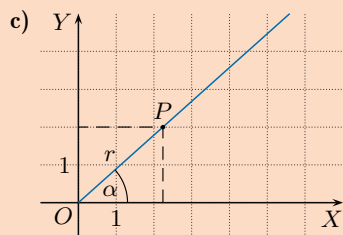
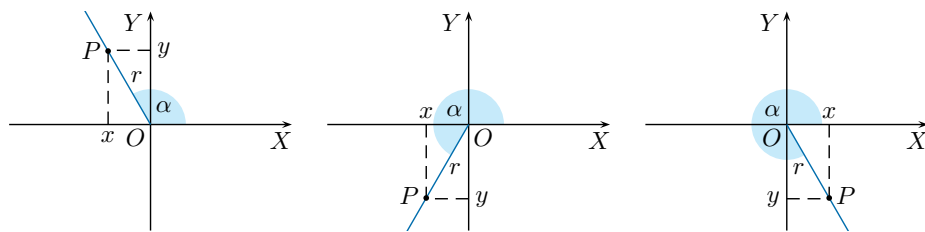
Ćwiczenie 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Narysuj ten kąt i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

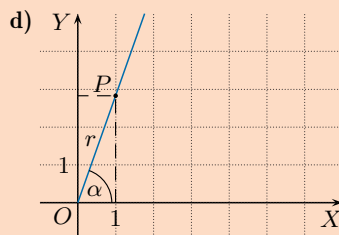
- a) $P(4, 3)$ b) $P(2, 3)$ c) $P(\sqrt{5}, 2)$ d) $P(1, 2\sqrt{2})$

Podane powyżej wzory w klasie II posłużyły do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Definicję tę możemy rozszerzyć na dowolny kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

Na rysunkach poniżej ramię końcowe kąta leży odpowiednio w II, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.



$$r = 5, \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$$

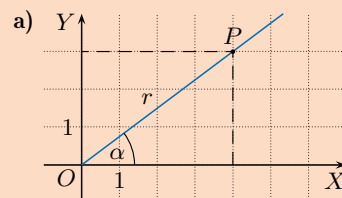


$$r = 3, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \alpha = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

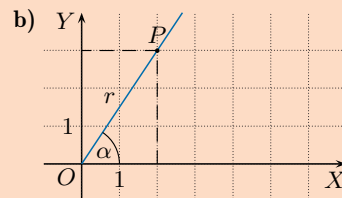
Uczeń:

- zaznacza kąt w układzie współrzędnych,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu,
- określa znaki wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych szczególnych kątów, np.: 90° , 120° , 135° , 225° , korzystając z definicji dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$,
- określa położenie końcowego ramienia kąta na podstawie informacji o wartościach funkcji trygonometrycznych tego kąta,
- oblicza wartości, w których występują funkcje trygonometryczne kątów należących do przedziału $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

Ćwiczenie 1



$$r = 5, \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$$



$$r = \sqrt{13}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$$

Multiteka

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

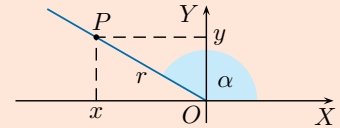
Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0),$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Uwaga. Każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P . Nie określamy wartości funkcji tangens dla 90° i 270° oraz funkcji cotangens dla 0° , 180° i 360° .

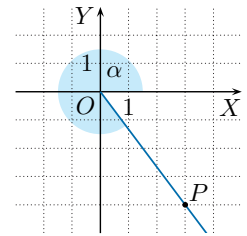
Przykład 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(3, -4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$



Ćwiczenie 2

a) $r = 5$,

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

b) $r = 10$,

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

c) $r = \sqrt{10}$,

$$\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$$

d) $r = 2\sqrt{10}$,

$$\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$$

Ćwiczenie 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

a) $P(-4, 3)$

b) $P(8, -6)$

c) $P(-1, -3)$

d) $P(-2, -6)$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 210° .

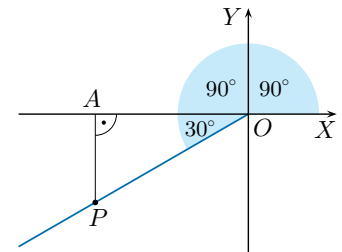
Zauważmy, że $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$.

Rozpatrzmy trójkąt POA o kątach 30° , 60° , 90° i boku $|OP| = 1$ (rysunek obok), wówczas:

$$|AP| = \frac{1}{2}, \quad |AO| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 210° ma współrzędne $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, a stąd:

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 210^\circ = \sqrt{3}$$



Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) 135° , b) 225° , c) 300° .

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -1, \quad \operatorname{ctg} 135^\circ = -1$$

$$\text{b) } \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = 1, \quad \operatorname{ctg} 225^\circ = 1$$

$$\text{c) } \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 300^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

W zależności od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych położone jest ramie końcowe kąta α , wartości: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$ są dodatnie lub ujemne.

Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że:

- $\sin \alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$,
- $\cos \alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$,
- $\operatorname{tg} \alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (180^\circ; 270^\circ)$,
- $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (180^\circ; 270^\circ)$.

dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$	dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$
$\sin \alpha > 0$	$\sin \alpha > 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha < 0$	$\operatorname{tg} \alpha > 0$
$\operatorname{ctg} \alpha < 0$	$\operatorname{ctg} \alpha > 0$
dla $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$	dla $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$
$\sin \alpha < 0$	$\sin \alpha < 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha > 0$	$\operatorname{tg} \alpha < 0$
$\operatorname{ctg} \alpha > 0$	$\operatorname{ctg} \alpha < 0$

Zadania

- Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

- a) $P(5, 12)$ b) $P(-5, -12)$ c) $P(\sqrt{3}, -1)$ d) $P(-\sqrt{3}, -1)$

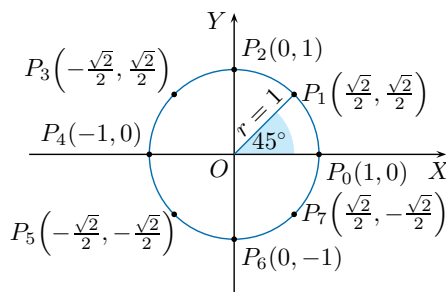
- Uzasadnij, że jeśli punkt $P(x, y)$ należy do okręgu jednostkowego o środku $O(0, 0)$ oraz leży na ramieniu kąta α , to: $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$.

Okrąg o promieniu 1 nazywamy **okręgiem jednostkowym**.

- Na rysunku obok przedstawiono okrąg jednostkowy o środku $O(0, 0)$ oraz zaznaczono punkty: $P_0, \dots, P_7$.

- Podaj miarę kąta α_i , do którego ramienia końcowego należy punkt P_i dla $i = 0, 1, \dots, 7$.

- Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.



α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	1	$\times$	-1	0	1	$\times$	-1	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\times$	1	0	-1	$\times$	1	0	-1	$\times$

- $\alpha_0 = 0^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$,
 $\alpha_2 = 90^\circ$, $\alpha_3 = 135^\circ$,
 $\alpha_4 = 180^\circ$, $\alpha_5 = 225^\circ$,
 $\alpha_6 = 270^\circ$, $\alpha_7 = 315^\circ$

Ćwiczenie 4

Niech punkt $P(x, y)$ leży na ramieniu końcowym kąta α oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Dla $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ mamy $y > 0$, zatem $\sin \alpha = \frac{y}{r} > 0$.

- Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$ mamy $x > 0$, zatem $\cos \alpha = \frac{x}{r} > 0$.

- Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ mamy $x > 0$ i $y > 0$, zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} > 0;$$

- Dla $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$ mamy $x < 0$ i $y < 0$, zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} > 0.$$

- Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ mamy $x > 0$ i $y > 0$, zatem

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} > 0;$$

- Dla $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$ mamy $x < 0$ i $y < 0$, zatem

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} > 0.$$

Odpowiedzi do zadań

- $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$
 - $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$
 - $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$
 - $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$
- $r = 1$ oraz $\sin \alpha = \frac{y}{r}$,
 stąd $y = \sin \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, stąd $x = \cos \alpha$

4. a) 1 b) -2 c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. a) $P_4(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,
 $P_5(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$,
 $P_6(-1, 0)$,
 $P_7(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$,
 $P_8(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,
 $P_9(0, -1)$,
 $P_{10}(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,
 $P_{11}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

6. a) $\frac{3}{2}$ b) -3 c) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

7. a) II b) IV c) III d) III

9. a) Niech x – długość boku kwadratu, którego przekątną jest bok ośmiokąta.

$$|AH| = |AB| = x\sqrt{2}$$

$$x + |AH| + x = 2$$

$$x(2 + \sqrt{2}) = 2$$

$$x = \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{Zatem } |AH| = 2(\sqrt{2} - 1).$$

b) $|OA| = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$,

$$\alpha = \angle POA = 22,5^\circ,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} + 1,$$

$$\beta = \angle POC = 112,5^\circ,$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos \beta = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{2} - 1,$$

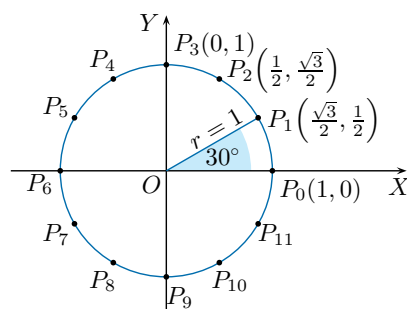
$$\operatorname{ctg} \beta = -\sqrt{2} + 1$$

4. Oblicz.

a) $\sin^2 315^\circ + \cos^2 135^\circ$ b) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 225^\circ$ c) $\sin 225^\circ + \cos^3 315^\circ$

5. a) Na okręgu jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych zaznaczono dwanaście punktów wyznaczonych przez ramiona końcowe kątów, których miary są wielokrotnościami 30° (rysunek obok). Podaj współrzędne punktów: $P_4, \dots, P_{11}$.

b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.



α	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

6. Oblicz.

a) $\sin^2 300^\circ + \cos^2 150^\circ$

c) $\cos 330^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ$

b) $\frac{\cos 120^\circ}{\sin^2 330^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 150^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ}$

d) $\frac{\cos^2 150^\circ \operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}{\sin^2 150^\circ + \cos^2 210^\circ}$

7. W której ćwiartce układu współrzędnych leży ramię końcowe kąta α , jeśli:

a) $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha < 0$,

c) $\sin \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$,

b) $\operatorname{tg} \alpha < 0$ i $\cos \alpha > 0$,

d) $\cos \alpha < 0$ i $\sin \alpha \cos \alpha > 0$?

8. Punkt $P\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ leży na ramieniu końcowym kąta 15° . Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeżeli:

a) $\alpha = 165^\circ$,

b) $\alpha = 195^\circ$,

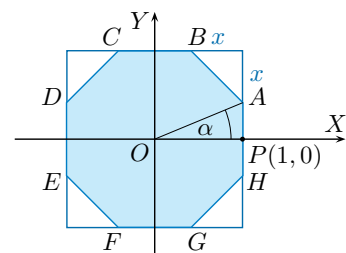
c) $\alpha = 345^\circ$,

d) $\alpha = 75^\circ$.

9. Ośmiokąt foremny umieszczono w układzie współrzędnych tak jak na rysunku obok.

a) Oblicz długość boku tego ośmiokąta.

b) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA oraz kąta POC .



8. $r = 1$

a) $P_1\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $P_2\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $P_3\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d) $P_4\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

*1.2. Kąt obrotu

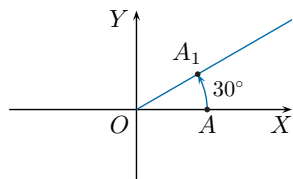
W życiu codziennym często spotykamy przykłady obrotów, np. obrót koła roweru, koła samochodu czy obrót wskazówek zegara.

Niech półprosta OA pokrywa się z dodatnią półosią OX układu współrzędnych. **Kątem obrotu** AOB nazywamy kąt, o jaki należy obrócić półprostą OA wokół punktu O , aby pokryła się ona z półprostą OB . Półprostą OA nazywamy **ramieniem początkowym** kąta obrotu, a półprostą OB – **ramieniem końcowym**.

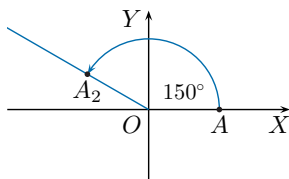
Uwaga. Zamiast „kąt obrotu” będziemy krótko mówić „kąt”.

Przyjmujemy, że:

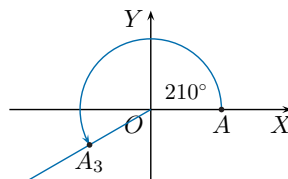
- **dodatni kierunek obrotu** jest kierunkiem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,
- **ujemny kierunek obrotu** jest kierunkiem zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



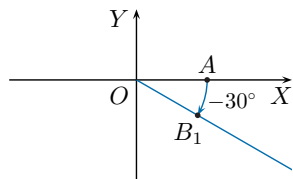
Półprosta OA po obrocie o 30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_1 .



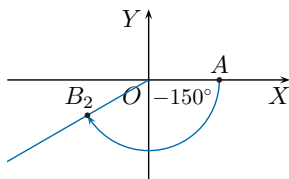
Półprosta OA po obrocie o 150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_2 .



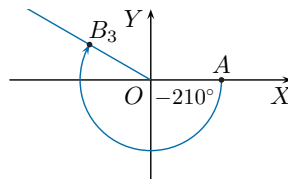
Półprosta OA po obrocie o 210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_3 .



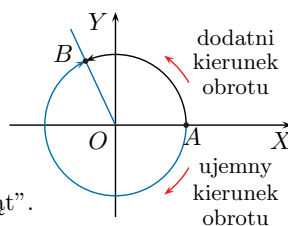
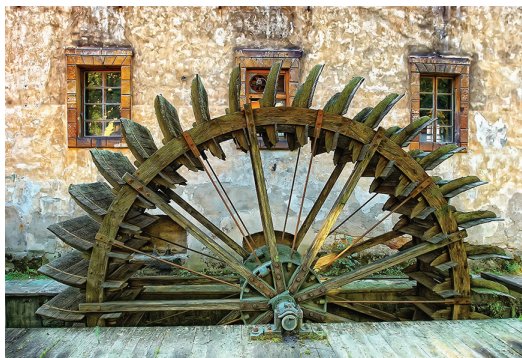
Półprosta OA po obrocie o -30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_1 .



Półprosta OA po obrocie o -150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_2 .



Półprosta OA po obrocie o -210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_3 .



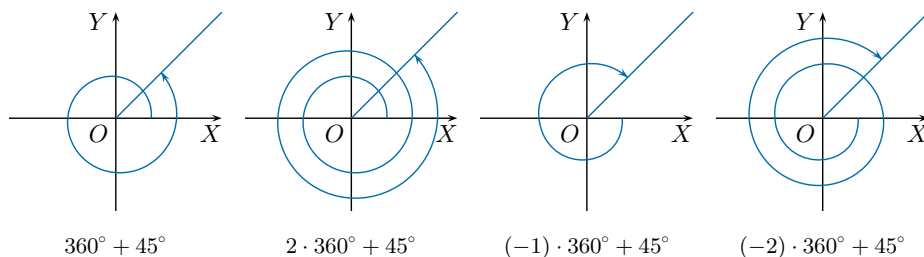
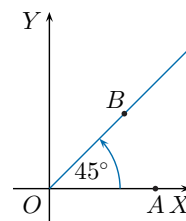
Uczeń:

- zaznacza w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego danego kąta α ,
- zapisuje miarę danego kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$,
- wyznacza kąt, gdy dany jest punkt należący do jego końcowego ramienia,
- bada, czy punkt należy do końcowego ramienia danego kąta,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest jego miara stopniowa,
- wyznacza kąt w podanym przedziale, gdy dana jest wartość jednej jego funkcji trygonometrycznej,
- określa miarę kąta na podstawie informacji podanych w zadaniu.

Przykład 1

Rozpatrzmy kąt AOB przedstawiony na rysunku obok. Półprosta OA pokryje się z półprostą OB nie tylko po obrocie wokół początku układu współrzędnych o kąt 45° , ale również po obrocie na przykład o kąty:

$$\begin{aligned} 360^\circ + 45^\circ &= 405^\circ & (-1) \cdot 360^\circ + 45^\circ &= -315^\circ \\ 2 \cdot 360^\circ + 45^\circ &= 765^\circ & (-2) \cdot 360^\circ + 45^\circ &= -675^\circ \end{aligned}$$



Ogólnie, aby półprosta OA pokryła się z półprostą OB , należy obrócić ją wokół początku układu współrzędnych o kąt równy $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Kąty o mierze $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, mają więc wspólne ramię końcowe.

Ćwiczenie 1

390° , 750° , 1470° , -330° ,
 -690° , -1050°

Ćwiczenie 2

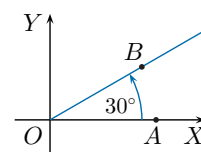
Przykładowa odpowiedź:

- a) -280° , 440° , 800°
- b) -160° , 200° , 920°
- c) -410° , 310° , 670°
- d) -680° , 40° , 400°

Ćwiczenie 1

O które z podanych kątów można obrócić półprostą OA , aby pokryła się ona z półprostą OB (rysunek obok)?

390° , 750° , 1100° , 1470° , -330° , -690° , -1050° , -1400°



Ćwiczenie 2

Podaj przykłady trzech kątów, których ramię końcowe pokrywa się z ramieniem końcowym kąta α .

- a) $\alpha = 80^\circ$
- b) $\alpha = 560^\circ$
- c) $\alpha = -50^\circ$
- d) $\alpha = -320^\circ$

Przykład 2

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

- a) $1400^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 320^\circ$
- c) $-700^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 20^\circ$
- b) $730^\circ 10' = 2 \cdot 360^\circ + 10^\circ 10'$
- d) $-1080^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 0^\circ$

Ćwiczenie 3

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

- a) 850°
- c) -695°
- e) $1439^\circ 30'$
- g) $-710^\circ 15'$
- b) 1413°
- d) -3590°
- f) $-1079^\circ 25'$
- h) $630^\circ 20'$

Ćwiczenie 3

- a) $850^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 130^\circ$
- b) $1413^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 333^\circ$
- c) $-695^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 25^\circ$
- d) $-3590^\circ = -10 \cdot 360^\circ + 10^\circ$
- e) $1439^\circ 30' = 3 \cdot 360^\circ + 359^\circ 30'$
- f) $-1079^\circ 25' = -3 \cdot 360^\circ + 0^\circ 35'$
- g) $-710^\circ 15' = -2 \cdot 360^\circ + 9^\circ 45'$
- h) $630^\circ 20' = 1 \cdot 360^\circ + 270^\circ 20'$

Definicje funkcji trygonometrycznych podane w poprzednim temacie można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

Dla kąta $\alpha + k \cdot 360^\circ$ takiego, że $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ i $k \in \mathbf{Z}$, definiujemy:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 90^\circ \text{ i } \alpha \neq 270^\circ$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 0^\circ \text{ i } \alpha \neq 180^\circ$$

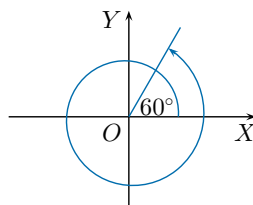
Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 420° .

$420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$, zatem:

$$\sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{ctg} 420^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ramię końcowe kąta 420° pokrywa się z ramieniem końcowym kąta 60° .

Przykład 4

a) $\sin 750^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg}(-1035^\circ) = \operatorname{tg}(-3 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sin 405^\circ$

c) $\sin 1110^\circ$

e) $\operatorname{tg} 1500^\circ$

g) $\cos(-690^\circ)$

b) $\sin 780^\circ$

d) $\operatorname{tg} 765^\circ$

f) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$

h) $\cos(-1395^\circ)$

Zadania

1. Zaznacz w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego kąta α .

a) $\alpha = 315^\circ$

c) $\alpha = 570^\circ$

e) $\alpha = -2130^\circ$

b) $\alpha = -120^\circ$

d) $\alpha = -1305^\circ$

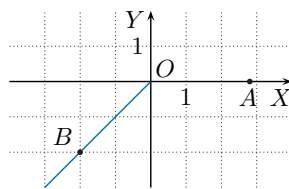
f) $\alpha = 4260^\circ$

2. Zapisz w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, miary kątów, do których ramienia końcowego należy punkt $P(1, -1)$.

3. Półprosta OA po obrocie o kąt α pokryła się z półprostą OB (rysunek obok). Wyznacz ten kąt, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, c) $\alpha \in \langle 1080^\circ; 1440^\circ \rangle$,

b) $\alpha \in \langle 360^\circ; 720^\circ \rangle$, d) $\alpha \in \langle -1080^\circ; -720^\circ \rangle$.



Ćwiczenie 4

a) $\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin 780^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin 1110^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{tg} 765^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

e) $\operatorname{tg} 1500^\circ = \operatorname{tg}(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

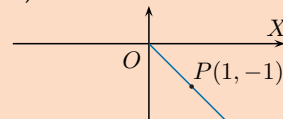
f) $\operatorname{tg}(-330^\circ) = \operatorname{tg}(-360^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\cos(-690^\circ) = \cos(-2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

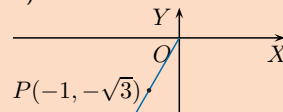
h) $\cos(-1395^\circ) = \cos(-4 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedzi do zadań

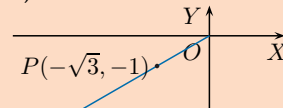
1. a)



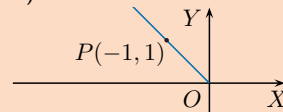
b)



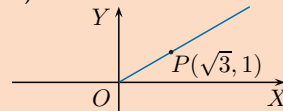
c)



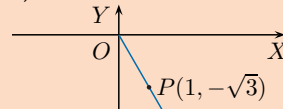
d)



e)



f)



2. $315^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

3. a) $\alpha = 225^\circ$

b) $\alpha = 585^\circ$

c) $\alpha = 1305^\circ$

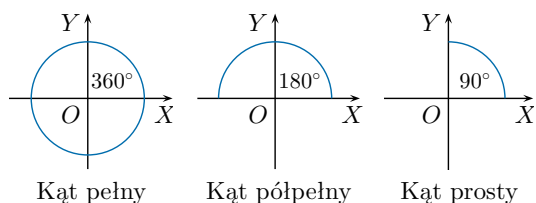
d) $\alpha = -855^\circ$

4. a) $\alpha = 60^\circ$
b) $\alpha = 1140^\circ$
c) $\alpha = -300^\circ$
5. a) tak b) tak c) tak
d) tak e) tak f) nie
6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3}$
g) 1 h) -1 i) 0
j) 1 k) -1 l) 0
m) -1 n) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
o) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ p) $\sqrt{3}$
7. a) 390° b) 1110°
c) 780° d) 495°
e) 870° f) -300°
8. a) $\alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$
b) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$
c) $\alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$
d) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$
9. a) $135^\circ + 315^\circ + 495^\circ = 945^\circ$
b) $60^\circ + 240^\circ + 420^\circ = 720^\circ$
11. W ciągu godziny wskazówka minutowa wykonuje pełny obrót, więc punkt na jej końcu przebędzie $2\pi \cdot 10$ cm.
a) 20π cm $\approx 62,8$ cm
b) $\frac{250\pi}{3}$ cm $\approx 261,8$ cm
c) 480π cm ≈ 15 m 8 cm
d) $175\,200\pi$ cm $\approx 5,504$ km lub $175\,680\pi$ cm $\approx 5,519$ km (w roku przestępnym)
12. Wskazówka godzinowa pokonuje $\frac{1}{12}$ obrotu wskazówki minutowej i stanowi $\frac{3}{4}$ jej długości. Zatem punkt na końcu wskazówki godzinowej przebywa 2,25 cm, bo:
 $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 36 = \frac{9}{4} = 2,25$
4. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(3, 3\sqrt{3})$. Wyznacz ten kąt, jeśli wiadomo, że:
a) $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, b) $\alpha \in \langle 1080^\circ; 1440^\circ \rangle$, c) $\alpha \in \langle -360^\circ; 0^\circ \rangle$.
5. Czy punkt $P(-\sqrt{3}, 1)$ należy do ramienia końcowego kąta α ?
a) $\alpha = 150^\circ$ c) $\alpha = 510^\circ$ e) $\alpha = 2310^\circ$
b) $\alpha = -210^\circ$ d) $\alpha = -930^\circ$ f) $\alpha = -1210^\circ$
6. Oblicz.
a) $\sin(-330^\circ)$ e) $\cos 1140^\circ$ i) $\operatorname{tg}(-720^\circ)$ m) $\operatorname{tg} 495^\circ$
b) $\cos(-675^\circ)$ f) $\operatorname{tg}(-660^\circ)$ j) $\cos(-1080^\circ)$ n) $\cos 855^\circ$
c) $\sin 840^\circ$ g) $\sin 810^\circ$ k) $\sin 630^\circ$ o) $\cos(-495^\circ)$
d) $\operatorname{tg}(-300^\circ)$ h) $\cos 900^\circ$ l) $\operatorname{tg}(-180^\circ)$ p) $\operatorname{ctg} 750^\circ$
7. Wyznacz kąt α taki, że:
a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (360^\circ; 450^\circ)$, d) $\operatorname{tg} \alpha = -1$ i $\alpha \in (360^\circ; 540^\circ)$,
b) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (1080^\circ; 1170^\circ)$, e) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\alpha \in (720^\circ; 900^\circ)$,
c) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (720^\circ; 810^\circ)$, f) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ i $\alpha \in (-360^\circ; -270^\circ)$.
8. Podaj, dla jakich kątów α :
a) $\sin \alpha = 0$, b) $\cos \alpha = 0$, c) $\operatorname{tg} \alpha = 0$, d) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.
9. Oblicz sumę miar wszystkich kątów z przedziału $\langle 0^\circ; 500^\circ \rangle$, których ramię końcowe jest zawarte w wykresie funkcji f .
a) $f(x) = -x$ b) $f(x) = \sqrt{3}x$
10. Czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą całkowitą?
 $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ + \dots + \cos 870^\circ + \cos 900^\circ$
11. Wskazówka minutowa zegara ma długość 10 cm. Oblicz, jaką drogę przebędzie punkt na końcu tej wskazówki w ciągu:
a) godziny, b) 250 minut, c) doby, d) roku.
12. Wskazówka godzinowa zegara jest o 25% krótsza od wskazówki minutowej. Punkt na końcu wskazówki minutowej przebył drogę 36 cm. Jaką drogę w tym samym czasie przebył punkt na końcu wskazówki godzinowej tego zegara?



10. $\cos 30^\circ = \cos 390^\circ = \cos 750^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 60^\circ = \cos 420^\circ = \cos 780^\circ = \frac{1}{2}$
 $\cos 90^\circ = \cos 270^\circ = \cos 450^\circ = \cos 630^\circ = \cos 810^\circ = 0$
 $\cos 120^\circ = \cos 480^\circ = \cos 840^\circ = -\frac{1}{2}$
 $\cos 150^\circ = \cos 510^\circ = \cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 180^\circ = \cos 540^\circ = \cos 900^\circ = -1$
 $\cos 210^\circ = \cos 570^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 240^\circ = \cos 600^\circ = -\frac{1}{2}$
 $\cos 300^\circ = \cos 660^\circ = \frac{1}{2}$
 $\cos 330^\circ = \cos 690^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 360^\circ = \cos 720^\circ = 1$
 $5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -1 \in \mathbf{Z}$

*1.3. Miara łukowa kąta



Mierzenie kąta w stopniach, minutach i sekundach wprowadzili starożytni Babilończycy. Używali oni sześćdziesiątkowego systemu zapisu liczb.

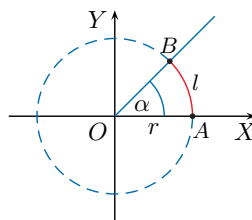
Miarę kąta zwykle podajemy w stopniach. Gdy potrzebna jest większa dokładność, posługujemy się minutami oraz sekundami.

Aby podać miarę kąta, można, oprócz miary stopniowej, wykorzystać:

- miarę łukową – jej jednostką jest 1 radian (kąt półpełny ma π radianów);
- miarę gradusową – jej jednostką jest 1 gradus będący $\frac{1}{400}$ kąta pełnego (miara używana w geodezji);
- tysięczne artyleryjskie – jej jednostką jest 1 tysięczna artyleryjska będąca $\frac{1}{1000}$ radiana (miara używana w wojskowości).

Rozpatrzmy okrąg o środku w wierzchołku kąta α . **Miarą łukową** kąta α nazywamy stosunek długości łuku l , wyznaczonego na okręgu przez ten kąt, do promienia r tego okręgu.

$$\alpha = \frac{\text{długość łuku}}{\text{promień okręgu}} = \frac{l}{r}$$



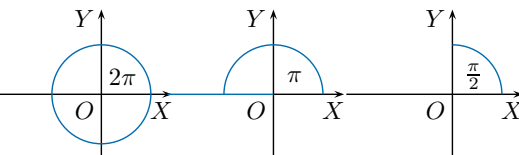
Jednostką miary łukowej jest **radian**, w skrócie piszemy: **rad**.

Miary łukowe kąta pełnego, półpełnego i prostego są równe:

• kąt pełny: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ [rad],

• kąt półpełny: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r}{r} = \pi$ [rad],

• kąt prosty: $\frac{\frac{1}{4} \cdot 2\pi r}{r} = \frac{\pi}{2}$ [rad].

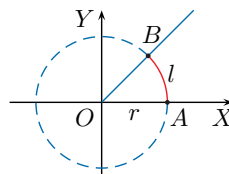


Ćwiczenie 1

Podaj miarę łukową kąta AOB , jeśli:

a) $r = 4$, $l = 6$, c) $r = \frac{5}{4}$, $l = \frac{\pi}{4}$ (rysunek obok),

b) $r = \frac{1}{3}$, $l = \frac{1}{6}$, d) $r = \frac{2}{3}$, $l = \pi$.



Uczeń:

- zamienia miarę stopniową na miarę łukową i odwrotnie,
- zapisuje miarę łukową danego kąta w postaci $2k\pi + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów o danej mierze łukowej.

Ćwiczenie 1

- $\frac{3}{2}$ rad
- $\frac{1}{2}$ rad
- $\frac{\pi}{5}$ rad
- $\frac{3}{2}\pi$ rad

Multiteka

- Jednostki miar kątów

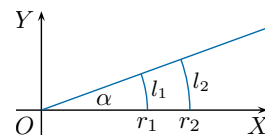
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

Komentarz

Równość miary łukowej kąta i długości łuku dotyczy wartości liczbowych, a nie mianowanych.

Zauważmy, że miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia okręgu, gdyż $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$ (rysunek obok). Zatem wygodnie jest posługiwać się okręgiem jednostkowym. Wówczas:



Miara łukowa kąta jest równa długości łuku, jaki ramiona tego kąta wyznaczają na okręgu jednostkowym o środku w wierzchołku kąta.

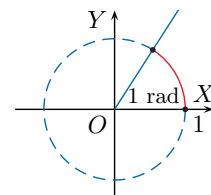
Kąt ma miarę 1 radiana (1 rad), jeśli łuk wyznaczony przez ten kąt na okręgu jednostkowym ma długość 1.

Kąt pełny ma miarę łukową 2π radianów, zatem:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ = 57^\circ 18'$$

natomiast:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$



Uwaga. Kiedy podajemy miarę łukową kąta, zwyczajowo pomijamy nazwę jednostki. Zamiast: „kąt o mierze 2π radianów, $\frac{\pi}{2}$ radianów czy 3 radianów” mówimy krótko: „kąt o mierze 2π , $\frac{\pi}{2}$, 3”.

Przykład 1

a) Podaj miarę łukową kąta 120° .

$$120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

b) Podaj miarę łukową kąta 1140° .

$$1140^\circ = 1080^\circ + 60^\circ = 3 \cdot 360^\circ + \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 2\pi + \frac{1}{3} \cdot \pi = 6\frac{1}{3}\pi$$

Aby wyznaczyć miarę łukową kąta 120° , możemy również skorzystać z proporcji:

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$
$$x = \frac{120^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

Ćwiczenie 2

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{2}{5}\pi$
d) $2 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 4\frac{1}{3}\pi$
e) $\frac{1}{4} \cdot 45^\circ = \frac{\pi}{16}$

Ćwiczenie 3

- a) 15° b) 150° c) 144°
d) 342° e) 336°

Ćwiczenie 2

Podaj miarę łukową kąta.

- a) 30° b) 45° c) 72° d) 780° e) $11^\circ 15'$

Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta w stopniach.

- a) $\frac{1}{12}\pi$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{4}{5}\pi$ d) $\frac{19}{10}\pi$ e) $\frac{28}{15}\pi$

W radianach będziemy również wyrażać miarę kąta obrotu. Niech α_1 i α będą miarami tego samego kąta wyrażonymi odpowiednio w stopniach i w radianach, przy czym $\alpha_1 \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Dla dowolnej liczby $k \in \mathbf{Z}$ zamiast $k \cdot 360^\circ + \alpha_1$ możemy pisać $2k\pi + \alpha$.

Przykład 2a) Oblicz $\cos \frac{9}{4}\pi$.

$$\cos \frac{9}{4}\pi = \cos 2\frac{1}{4}\pi = \cos(2\pi + \frac{1}{4}\pi) = \cos \frac{1}{4}\pi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Oblicz $\operatorname{tg}(-\frac{11}{3}\pi)$.

$$\operatorname{tg}(-\frac{11}{3}\pi) = \operatorname{tg}(-4\pi + \frac{1}{3}\pi) = \operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Ćwiczenie 4

Przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij, a następnie oblicz:

- a) $\sin \frac{7}{3}\pi$, d) $\sin \frac{17}{4}\pi$, g) $\cos(-\frac{15}{4}\pi)$,
 b) $\operatorname{tg} \frac{13}{6}\pi$, e) $\sin(-4\pi)$, h) $\cos(-\frac{11}{3}\pi)$,
 c) $\operatorname{tg} \frac{13}{3}\pi$, f) $\cos(-\frac{3}{2}\pi)$, i) $\sin(-\frac{23}{4}\pi)$.

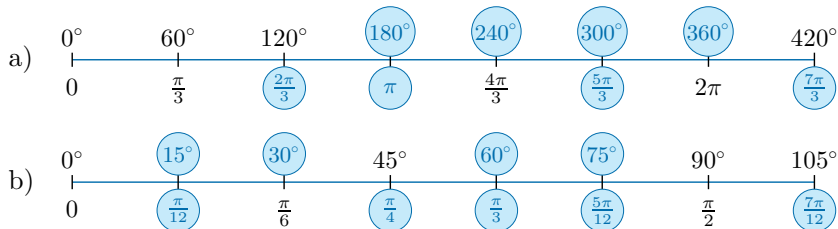
α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadania

1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Miara kąta [$^\circ$]	5°	10°	$22^\circ 30'$	36°	54°	$112^\circ 30'$	210°	225°	315°	330°
Miara kąta [rad]	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

2. Na rysunku poniżej przedstawiono dwie miary kątów: stopniową i łukową. Przerysuj go do zeszytu i uzupełnij puste miejsca.



3. Podaj miarę łukową kąta.

- a)
- 20°
- b)
- 315°
- c)
- 765°
- d)
- -420°
- e)
- -1100°

4. Podaj miarę kąta w stopniach.

- a)
- $\frac{3}{4}\pi$
- b)
- $\frac{7}{12}\pi$
- c)
- $\frac{16}{9}\pi$
- d)
- $-\frac{9}{4}\pi$
- e)
- $-\frac{13}{3}\pi$

5. Oblicz.

- a)
- $\sin \frac{9}{4}\pi$
- b)
- $\cos \frac{7}{3}\pi$
- c)
- $\cos \frac{17}{4}\pi$
- d)
- $\operatorname{tg}(-\frac{5}{3}\pi)$
- e)
- $\sin(-\frac{15}{4}\pi)$

5. a) $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \frac{1}{2}$

c) $\cos(\frac{\pi}{4} + 4\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 2\pi) = \sqrt{3}$

e) $\sin(\frac{\pi}{4} - 4\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 4

a) $\sin \frac{7}{3}\pi = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{tg} \frac{13}{6}\pi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{tg} \frac{13}{3}\pi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

d) $\sin \frac{17}{4}\pi = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sin(-4\pi) = \sin 0 = 0$

f) $\cos(-\frac{3}{2}\pi) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

g) $\cos(-\frac{15}{4}\pi) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos(-\frac{11}{3}\pi) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

i) $\sin(-\frac{23}{4}\pi) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedzi do zadań

3. a) $\frac{1}{9}\pi$ b) $\frac{7}{4}\pi$

c) $\frac{17}{4}\pi$ d) $-\frac{7}{3}\pi$

e) $-\frac{55}{9}\pi$

4. a) 135° b) 105°

c) 320° d) -405°

e) -780°

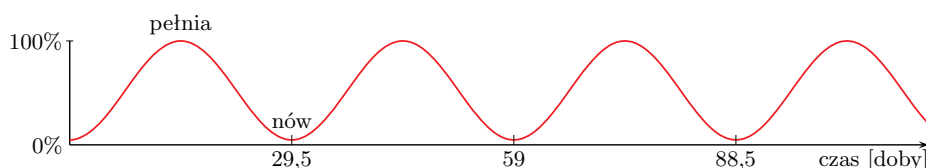
Uczeń:

- odczytuje okres podstawowy funkcji z jej wykresu,
- szkicuje wykres funkcji okresowej,
- stosuje okresowość funkcji do wyznaczania jej wartości.

*1.4. Funkcje okresowe



Na zdjęciach powyżej przedstawiono kolejne fazy Księżyca: od pełni do nowiu. Pełny cykl zmian faz Księżyca trwa średnio 29 i pół doby.



Na schematycznym wykresie powyżej pokazano, jaki procent tarczy Księżyca jest widoczny z Ziemi w kolejnych dniach cyklu.

Definicja

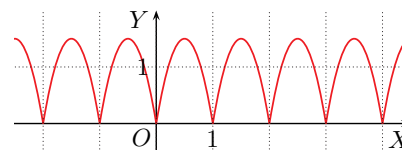
Funkcję f określoną na zbiorze D nazywamy **okresową**, jeśli istnieje liczba $T \neq 0$ taka, że dla każdego argumentu $x \in D$ i dowolnej liczby całkowitej k :

$$x + kT \in D \text{ oraz } f(x + kT) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji okresowej. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Okresem tej funkcji jest dowolna liczba całkowita różna od zera. Liczba 1 jest najmniejszym okresem dodatnim tej funkcji.

Najmniejszy okres dodatni funkcji (jeśli istnieje) nazywany jest **okresem podstawowym** albo **zasadniczym**.



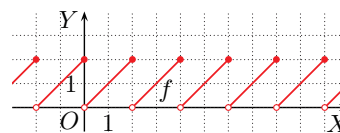
Zwróć uwagę, że jeśli T jest okresem funkcji f , to każda liczba $k \cdot T$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, też jest okresem tej funkcji.

Ćwiczenie 1

Okres podstawowy: $T = 2$,
 $f(100) = 2$, $f(100\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz wartości $f(100)$ i $f(100\frac{1}{2})$.



Multiteka

- Zjawiska okresowe w przyrodzie
– przyływy i odpływy morza

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

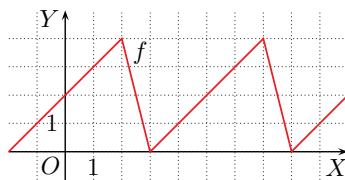
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o okresie podstawowym $T = 5$. Oblicz $f(101)$ i $f(-96)$.

$$f(101) = f(20 \cdot 5 + 1) = f(1) = 3$$

$$f(-96) = f(-20 \cdot 5 + 4) = f(4) = 1$$

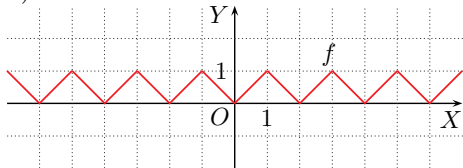


Dla funkcji f mamy:
 $f(x) = f(x+5) = f(x+2 \cdot 5) = \dots$

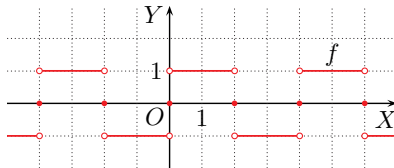
Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu okres podstawowy tej funkcji. Oblicz $f(-11)$, $f(80\frac{1}{2})$ i $f(103)$.

a)



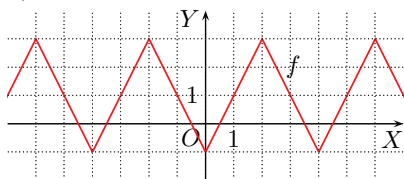
b)



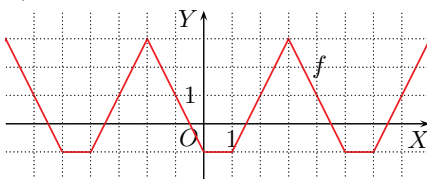
Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o okresie T . Oblicz $f(33)$, $f(42)$ i $f(-48)$.

a) $T = 4$

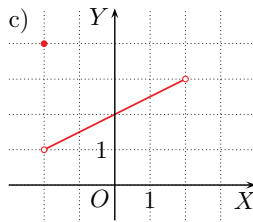
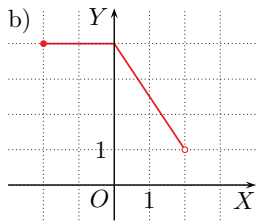
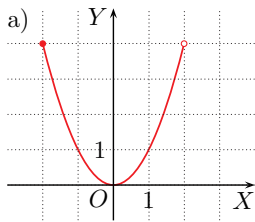


b) $T = 5$

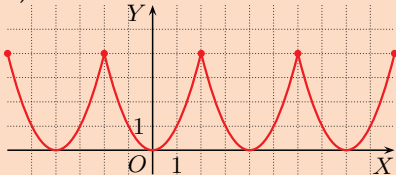


- D** 2. Uzasadnij, że funkcja stała $f(x) = c$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$ jest funkcją okresową, ale nie istnieje dla niej okres podstawowy.

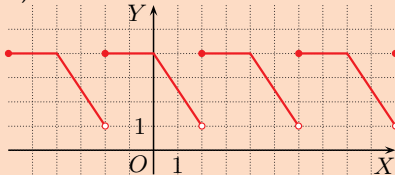
3. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o okresie $T = 4$. Naskicuj wykres tej funkcji dla $x \in \langle -6; 10 \rangle$.



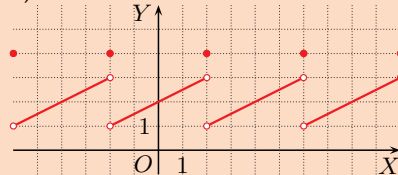
3. a)



b)



c)



Ćwiczenie 2

a) Okres podstawowy: $T = 2$,
 $f(-11) = 1$, $f(80\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(103) = 1$

b) Okres podstawowy: $T = 4$,
 $f(-11) = 1$, $f(80\frac{1}{2}) = 1$,
 $f(103) = -1$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(33) = 1$, $f(42) = 3$,
 $f(-48) = -1$
 b) $f(33) = 3$, $f(42) = 1$,
 $f(-48) = 1$

2. Niech $T \neq 0$ będzie dowolną liczbą i $k \in \mathbf{Z}$.

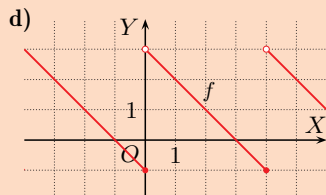
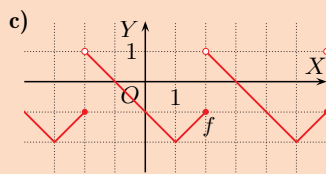
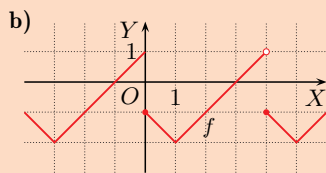
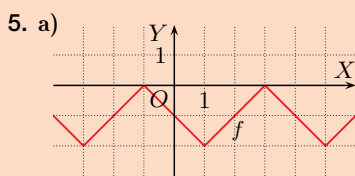
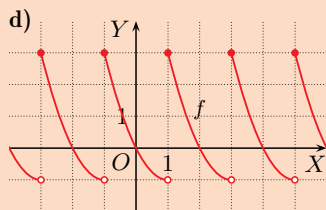
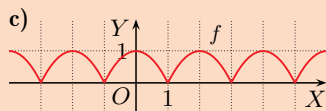
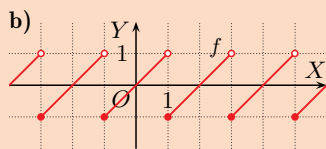
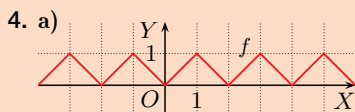
Wtedy:

$$f(x + kT) = c = f(x)$$

dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

Zatem funkcja f jest okresowa, a jej okresem jest każda liczba rzeczywista.

Nie ma najmniejszej liczby dodatniej, więc funkcja ta nie ma okresu podstawowego.



6. a) $f(x) = 1$ dla $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Zatem $1 + 3 + \dots + 19 = 100$.

b) $f(x) = 4$ dla $x = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$

Zatem:

$$\begin{aligned} 0 + 4 + \dots + 400 &= \\ &= 4(1 + 2 + \dots + 100) = \\ &= 20200 \end{aligned}$$

4. Naskicuj wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 2$, jeśli wiadomo, że w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ pokrywa się on z wykresem funkcji g .

a) $g(x) = |x|$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = 1 - x^2$ d) $g(x) = x^2 - 2x$

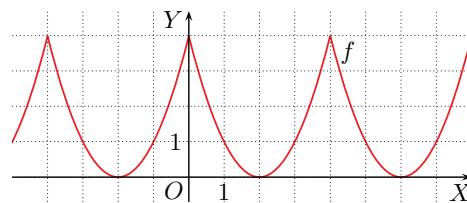
5. Naskicuj wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 4$, jeśli wiadomo, że pokrywa się on z wykresem funkcji $g(x) = |x - 1| - 2$ w przedziale:

a) $\langle -1; 3 \rangle$, b) $\langle 0; 4 \rangle$, c) $\langle -2; 2 \rangle$, d) $\langle -4; 0 \rangle$.

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie $T = 4$.

a) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 1$ należących do przedziału $\langle 0; 20 \rangle$.

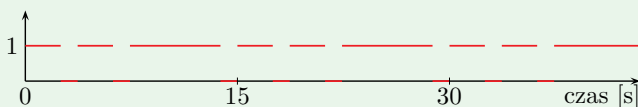
b) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ należących do przedziału $\langle 0; 400 \rangle$.



7. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x . Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x - [x]$ i podaj jej okres podstawowy.

Czy wiesz, że...

Sygnały świetlne wysyłane przez latarnie morskie powtarzają się okresowo. Charakterystyka światła wysyłanego przez latarnię morską w Gąskach koło Mielna: światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 6,4 s, przerwa – 1,2 s (okres – 15 s).



Wartość 1 odpowiada światłu, 0 odpowiada przerwie.

8. Naskicuj schematyczny wykres przedstawiający charakterystykę światła wysyłanego przez latarnię morską:

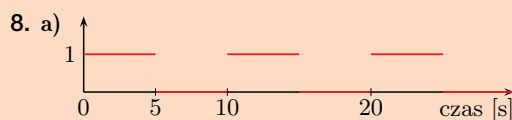
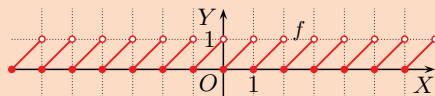
a) w Helu: światło – 5 s, przerwa – 5 s (okres wynosi 10 s),

b) w Krynicy Morskiej: światło – 2 s, przerwa – 2 s, światło – 2 s, przerwa – 6 s (okres wynosi 12 s).

Latarnia morska w Gąskach



7. $T = 1$



*1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

Funkcje trygonometryczne możemy traktować jako funkcje zmiennej x , gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą będącą miarą pewnego kąta wyrażoną w radianach. Wówczas dla każdego $x \in \mathbf{R}$ mamy: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ oraz $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Zatem sinus i cosinus są funkcjami okresowymi o okresie $T = 2\pi$. Można wykazać, że jest to ich okres podstawowy.

Dla każdego $x \in \mathbf{R}$: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Dla każdego $x \in \mathbf{R}$: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

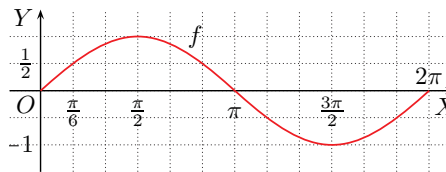
■ Wykres funkcji sinus

W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ dla wybranych argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

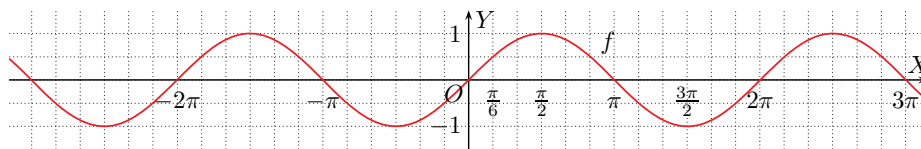
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Przybliżone wartości funkcji sinus dla innych argumentów niż podane w tabeli możemy obliczyć, korzystając z kalkulatora, lub odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.



Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbf{R}$, możemy skorzystać z okresowości tej funkcji. Wykres funkcji sinus nazywamy **sinusoidą**.



Wybrane własności funkcji $f(x) = \sin x$:

- Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.
- Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 2\pi$.
- Funkcja f wartość 0 przyjmuje dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja f wartość największą 1 przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja f wartość najmniejszą -1 przyjmuje dla $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji sinus i cosinus w danym przedziale,
- określa własności funkcji sinus i cosinus w danym przedziale,
- odczytuje z wykresów funkcji sinus i cosinus argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość,
- korzystając z wykresów funkcji sinus i cosinus, podaje liczbę rozwiązań równania $\sin x = m$, $\cos x = m$ w zależności od parametru m .

Multiteka

- Jak brzmi sinusoida?
- Wykres funkcji sinus
- Wykres funkcji cosinus
- Ruch po okręgu a sinusoida (1)
- Ruch po okręgu a sinusoida (2)

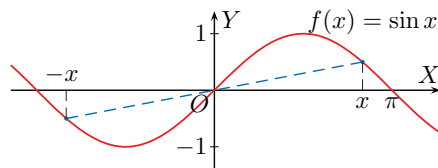
dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

Środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każdy punkt o współrzędnych $(k\pi, 0)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. W szczególności jest nim punkt $O(0, 0)$ – prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:

$$\sin(-x) = -\sin x$$



Ćwiczenie 1

a) $\sin(-75^\circ) = -\sin 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin 15^\circ = -\sin(-15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ćwiczenie 1

a) Podaj wartość $\sin(-75^\circ)$, jeśli wiadomo, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

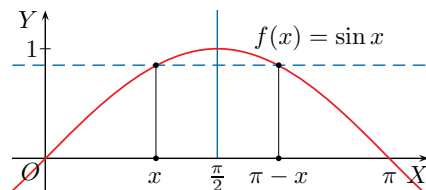
b) Podaj wartość $\sin 15^\circ$, jeśli wiadomo, że $\sin(-15^\circ) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Ośią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każda prosta pionowa określona równaniem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

W szczególności jest nią prosta $x = \frac{\pi}{2}$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:

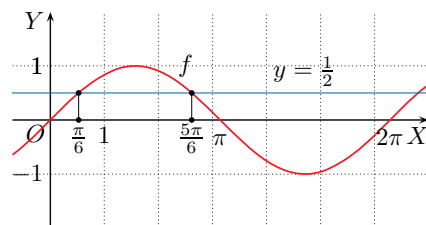
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



Przykład 1

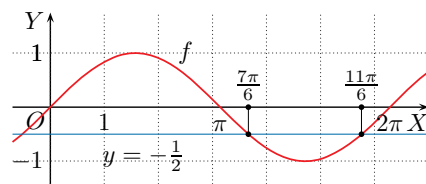
a) Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.

Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = \frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \frac{\pi}{6}$ oraz dla $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.



b) Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$.

Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = -\frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ oraz dla $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.



Ćwiczenie 2

Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 2

a) $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{2\pi}{3}$

b) $x = \frac{4\pi}{3}$ lub $x = \frac{5\pi}{3}$

c) $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$

d) $x = \frac{5\pi}{4}$ lub $x = \frac{7\pi}{4}$

■ Wykres funkcji cosinus

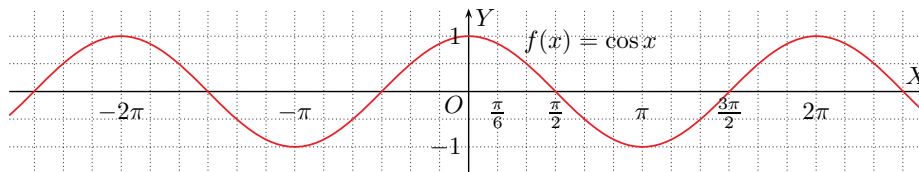
Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbf{R}$, możemy skorzystać z tego, że jest to funkcja okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi$.

Wykres funkcji cosinus nazywamy **cosinusoidą**.



Dziedziną funkcji $f(x) = \cos x$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

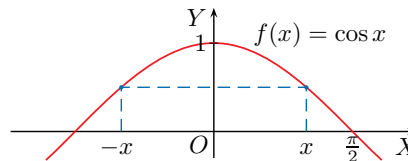
Ćwiczenie 4

Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość: a) 1, b) 0, c) -1?

Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \cos x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:

$$\cos(-x) = \cos x$$

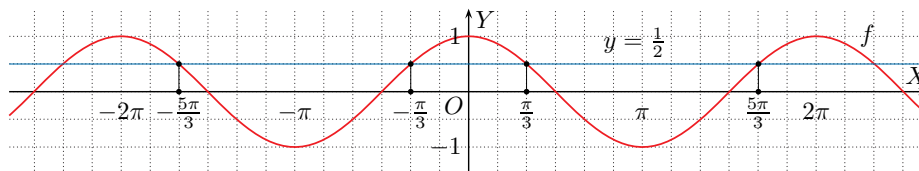


Ćwiczenie 5

Podaj równania prostych, które są osiami symetrii wykresu funkcji $y = \cos x$, oraz współrzędne punktów, które są środkami symetrii tego wykresu.

Przykład 2

Podaj te argumenty $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.



Z wykresu odczytujemy, że $\cos x = \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{ -\frac{5}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \right\}$.

Ćwiczenie 4

a) $\cos x = 1$ dla $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $\cos x = -1$ dla $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 5

Osie symetrii: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Środki symetrii: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \right)$, $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 6

- a) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$
 b) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$
 c) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$
 d) $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3 b) 5 c) 5 d) 10
 2. a) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 b) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 c) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$
 d) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$
 3. a) $(-2\pi; -\pi), (0; \pi)$
 b) $\langle -2\pi; -\frac{3\pi}{2} \rangle, \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, \langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \rangle$
 c) $\langle -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \rangle, \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$
 4. a) $\langle -\pi; -\frac{\pi}{2} \rangle, (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$,
 $(\frac{5\pi}{2}; 3\pi)$
 b) $\langle -\pi; 0 \rangle, \langle \pi; 2\pi \rangle$
 c) $\langle 0; \pi \rangle, \langle 2\pi; 3\pi \rangle$
 5. a) 0 dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
 4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$,
 5 dla $m = 0$
 b) 0 dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
 3 dla $m = 0$,
 4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
 c) 0 dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m = -1$,
 3 dla $m = 1$,
 4 dla $m \in (-1; 1)$
 d) 0 dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 1 dla $m = -1$,
 2 dla $m = 1$,
 4 dla $m \in (-1; 1)$
 6. a) 15π b) 0

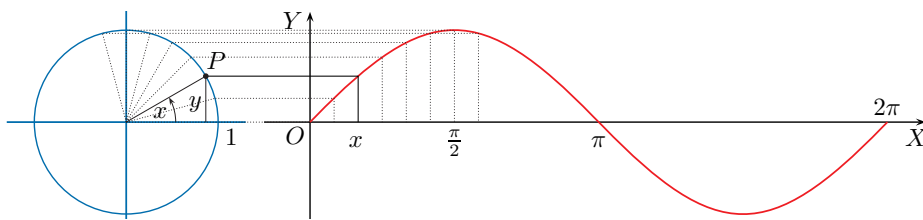
Ćwiczenie 6

Podaj te argumenty $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadania

- Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sin x$ w podanym przedziale?
 a) $\langle 0; 2\pi \rangle$ b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ c) $(0; 5\pi)$ d) $(0; 32)$
- Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$ należące do przedziału:
 a) $\langle 0; 2\pi \rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$, c) $(-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi)$, d) $(-\frac{9}{2}; \frac{15}{2})$.
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f :
 a) przyjmuje wartości dodatnie, b) rośnie, c) maleje.
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f :
 a) przyjmuje wartości ujemne, b) rośnie, c) maleje.
- Ile rozwiązań w podanym przedziale ma poniższe równanie w zależności od parametru m ?
 a) $\sin x = m, \langle 0; 4\pi \rangle$ c) $\cos x = m, \langle 0; 4\pi \rangle$
 b) $\sin x = m, (-\pi; 3\pi)$ d) $\cos x = m, (-\pi; 3\pi)$
- Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania:
 a) $\sin x = 0,7$, które należą do przedziału $\langle 0; 6\pi \rangle$,
 b) $\cos x = \frac{1}{3}$, które należą do przedziału $\langle -4\pi; 4\pi \rangle$.
- Objasnij sposób otrzymywania sinusoidy, korzystając z rysunku (kątowni x odpowiada punkt P na okręgu o promieniu 1).



7. Niech $P_0(1, 0)$, $O(0, 0)$.
 x jest miarą łukową kąta P_0OP , więc $\sin x = y$.
 W ten sposób otrzymujemy punkty $(x, \sin x)$, czyli punkty sinusoidy.

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

Funkcję $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = f(x)$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

Funkcję $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = -f(x)$$

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $O(0, 0)$.

Przykład

Zbadaj parzystość funkcji f .

a) $f(x) = x^3 \sin x$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R}$, zatem dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

$$f(-x) = (-x)^3 \cdot \sin(-x) = -x^3 \cdot (-\sin x) = x^3 \cdot \sin x = f(x)$$

Zatem funkcja f jest parzysta.

b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$, zatem dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -f(x)$$

Zatem funkcja f jest nieparzysta.

c) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x+1}$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Zauważ, że $1 \in D$, ale $-1 \notin D$, zatem funkcja f nie jest ani funkcją parzystą, ani funkcją nieparzystą.

1. Zbadaj parzystość funkcji f .

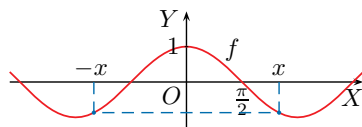
- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = -\sin x$ | e) $f(x) = x \sin x + 1$ | i) $f(x) = \frac{1}{x}(\cos x + 1)$ |
| b) $f(x) = \sin x \cos x$ | f) $f(x) = x^2 \sin x$ | j) $f(x) = x - \cos x$ |
| c) $f(x) = \sin^2 x$ | g) $f(x) = x \sin^2 x$ | k) $f(x) = x^2 \sin^2 x + \cos x$ |
| d) $f(x) = - \sin x $ | h) $f(x) = -x^2 \cos^2 x$ | l) $f(x) = x^2 \cos x + \sin x$ |

k) $D = \mathbf{R}$

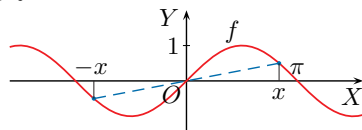
$$f(-x) = (-x)^2 \sin^2(-x) + \cos(-x) = x^2 \sin^2 x + \cos x = f(x), \text{ funkcja parzysta}$$

l) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) + \sin(-x) = x^2 \cos x - \sin x, \text{ funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta}$$



Funkcja $f(x) = \cos x$, określona dla $x \in \mathbf{R}$, jest parzysta.



Funkcja $f(x) = \sin x$, określona dla $x \in \mathbf{R}$, jest nieparzysta.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -f(x), \text{ funkcja nieparzysta}$$

b) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x), \text{ funkcja nieparzysta}$$

c) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = \sin^2(-x) = \sin^2 x = f(x), \text{ funkcja parzysta}$$

d) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = -|\sin(-x)| = -|\sin x| = f(x), \text{ funkcja parzysta}$$

e) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = -x \sin(-x) + 1 = x \sin x + 1 = f(x), \text{ funkcja parzysta}$$

f) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f(x), \text{ funkcja nieparzysta}$$

g) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin^2(-x) = -x \sin^2 x = -f(x), \text{ funkcja nieparzysta}$$

h) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = -(-x)^2 \cdot \cos^2(-x) = -x^2 \cos^2 x = f(x), \text{ funkcja parzysta}$$

i) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$f(-x) = \frac{1}{-x}(\cos(-x) + 1) = -\frac{1}{x}(\cos x + 1) = -f(x), \text{ funkcja nieparzysta}$$

j) $D = \mathbf{R}$

$$f(-x) = -x - \cos(-x) = -x - \cos x, \text{ funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta}$$

Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji tangens i cotangens w danym przedziale,
- określa własności funkcji tangens i cotangens w danym przedziale,
- odczytuje z wykresów funkcji tangens i cotangens rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ w podanym przedziale.

Ćwiczenie 1

$$\operatorname{tg} x = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{-y_0}{-x_0} = \frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} x$$

Zatem liczba π jest okresem funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

$$\operatorname{ctg} x = \frac{x_0}{y_0}$$

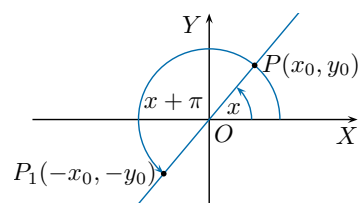
$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \frac{-x_0}{-y_0} = \frac{x_0}{y_0} = \operatorname{ctg} x$$

Zatem liczba π jest okresem funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.

*1.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, korzystając z rysunku obok, że liczba π jest okresem funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.



Można wykazać, że π jest okresem podstawowym funkcji tangens i cotangens.

Dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$: $\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

Dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$: $\operatorname{ctg}(x + n\pi) = \operatorname{ctg} x$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

■ Wykres funkcji tangens

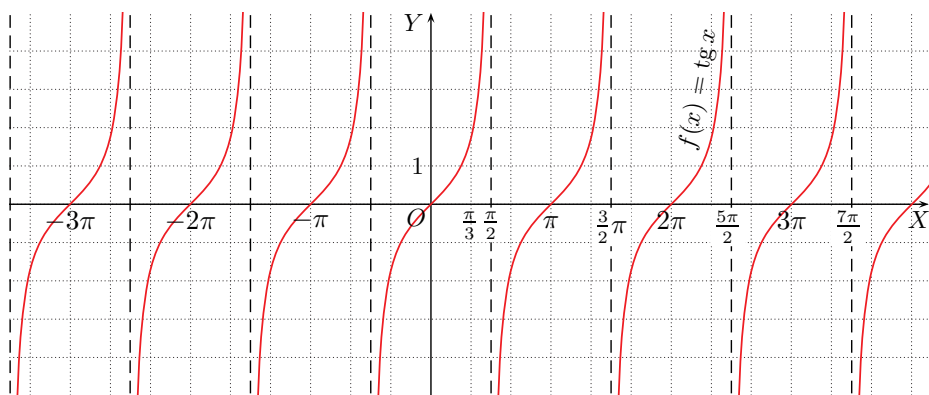
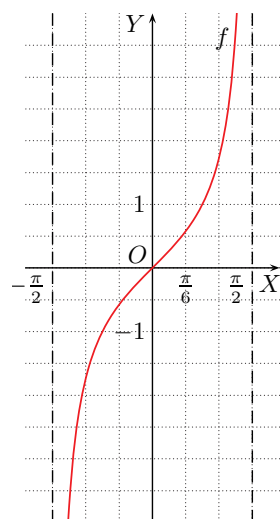
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

x	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\operatorname{tg} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Proste $x = -\frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f .

Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x$ określoną dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$. Aby otrzymać jej wykres, korzystamy z tego, że jest ona okresowa.

Wykres funkcji tangens nazywamy **tangensoidą**.



Multitaka

- Wykres funkcji tangens
- Wykres funkcji cotangens

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Generator
testów i sprawdzianów

Wybrane własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$:

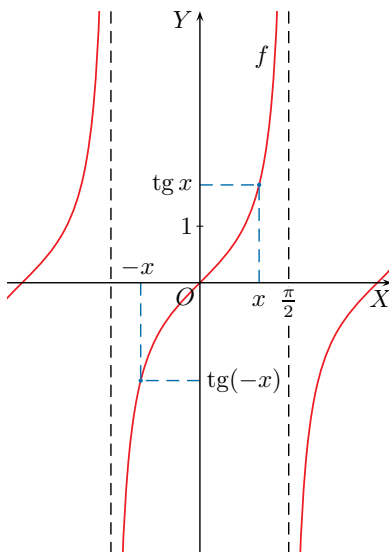
- Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \pi$.
- Wartość 0 funkcja f przyjmuje dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja f rośnie w każdym z przedziałów $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f .

Ćwiczenie 2

Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

$$\text{Dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbf{Z}\}: \\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$



Ćwiczenie 2

$$(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 3

- Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = 3$.
- Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$.
- Podaj wartość $\operatorname{tg} x$, jeśli $\operatorname{tg}(-x) = \frac{5}{8}$.

Ćwiczenie 3

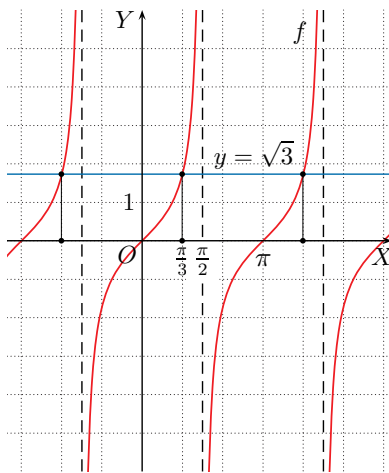
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -3$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$
- $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x) = -\frac{5}{8}$

Przykład 1

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, wyznacz rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

W przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ dla $x = \frac{\pi}{3}$. Na podstawie okresowości funkcji tangens otrzymujemy rozwiązanie równania:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$



Ćwiczenie 4

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, wyznacz rozwiązanie równania:

- $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

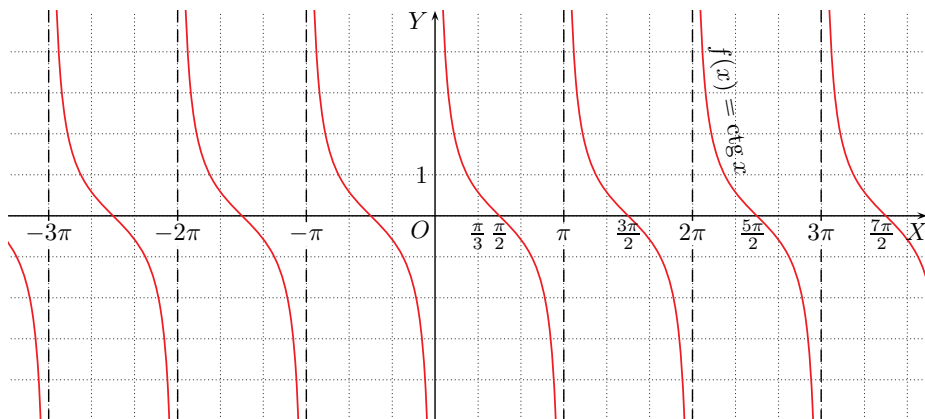
Ćwiczenie 4

- $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ dla $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dla $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

■ Wykres funkcji cotangens

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Jest ona określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, a jej okres podstawowy jest równy π .

Wykres funkcji cotangens nazywamy **cotangensoidą**.



Ćwiczenie 5

$$D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\},$$

$$f(D) = \mathbf{R},$$

miejsca zerowe:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

maleje w każdym z przedziałów

$$(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{asymptoty: } x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 6

$$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 7

$$\text{a) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\text{c) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ćwiczenie 5

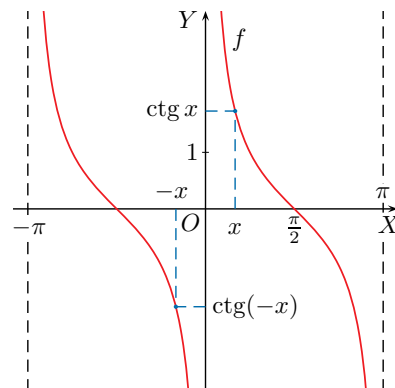
Podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ oraz równania asymptot pionowych jej wykresu.

Ćwiczenie 6

Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$, zachodzi więc poniższa własność.

$$\begin{aligned} \text{Dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}: \\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \end{aligned}$$



Ćwiczenie 7

Oblicz.

$$\text{a) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{b) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{c) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Ćwiczenie 8

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$, wyznacz rozwiązania równania:

$$\text{a) } \operatorname{ctg} x = 1, \quad \text{b) } \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}, \quad \text{c) } \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ćwiczenie 8

$$\text{a) } \operatorname{ctg} x = 1 \text{ dla } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \text{ dla } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{c) } \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ dla } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji tangens lub cotangens i rozwiąż równanie. Podaj najmniejszą liczbę z przedziału $(3; \infty)$ spełniającą to równanie.

a) $\operatorname{tg} x = 0$ c) $\operatorname{tg} x = -1$ e) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$
b) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\operatorname{ctg} x = -1$

2. Wyznacz x taki, że:

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$, d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \langle 3\pi; 4\pi \rangle$,
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle -3\pi; -2\pi \rangle$, e) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle -4\pi; -3\pi \rangle$,
c) $\operatorname{tg} x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$, f) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$.

3. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$.

a) $\operatorname{tg} x = 0$ c) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ g) $\operatorname{ctg} x = 1$
b) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\operatorname{tg} x = -1$ f) $\operatorname{ctg} x = 0$ h) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Wyznacz przybliżone rozwiązanie równania należące do przedziału $\langle 2\pi; 3\pi \rangle$. Skorzystaj z informacji zamieszczonych obok.

a) $\operatorname{tg} x = 0,3249$ b) $\operatorname{tg} x = -1,3764$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \approx 0,3249$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} \approx 1,3764$$

5. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$, korzystając z danych z tabeli.

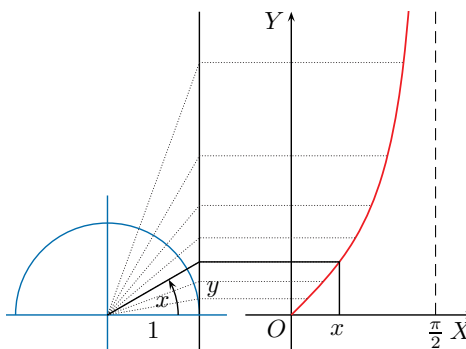
a) $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$
c) $\operatorname{ctg} x = 2 - \sqrt{3}$

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\operatorname{tg} x$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$	$2 + \sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} x$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} - 1$	$2 - \sqrt{3}$

6. Rozwiąż równanie, korzystając z danych z powyższej tabeli.

a) $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2}$
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} - 2$
c) $\operatorname{ctg} x = -1 - \sqrt{2}$

7. Objaśnij sposób otrzymywania tangensoidy dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, korzystając z rysunku obok.



7. x jest miarą łukową kąta, więc $\operatorname{tg} x = y$.

W ten sposób otrzymujemy punkty $(x, \operatorname{tg} x)$, czyli punkty tangensoidy.

Odpowiedzi do zadań

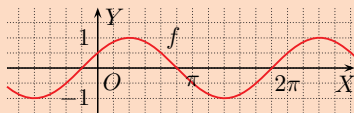
1. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \pi$
b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{5}{4}\pi$
c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{7}{4}\pi$
d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{11}{6}\pi$
e) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{7}{6}\pi$
f) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{7}{4}\pi$
2. a) $x = \frac{7}{3}\pi$ b) $x = -\frac{8}{3}\pi$
c) $x = \frac{19}{4}\pi$ d) $x = \frac{10}{3}\pi$
e) $x = -\frac{13}{4}\pi$ f) $x = \frac{19}{4}\pi$
3. a) 10π b) 7π c) $\frac{28}{3}\pi$
d) 9π e) $\frac{26}{3}\pi$ f) 8π
g) 7π h) $7\frac{1}{3}\pi$
4. a) $x \approx \frac{21}{10}\pi$
b) $x \approx \frac{27}{10}\pi$
5. a) $x = -\frac{11}{12}\pi, x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{13}{12}\pi$
b) $x = -\frac{7}{8}\pi, x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{9}{8}\pi$
c) $x = -\frac{7}{12}\pi, x = \frac{5}{12}\pi, x = \frac{17}{12}\pi$
6. a) $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Uczeń:

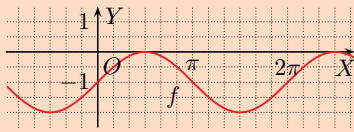
- szkicuje wykres funkcji $y = f(x - p) + q$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności,
- szkicuje wykres funkcji, stosując symetrię względem osi OX ,
- szkicuje wykres funkcji będącej złożeniem przesunięcia i symetrii względem osi OX ,
- podaje zbiory wartości funkcji, np. $f(x) = 2 \cos^2 x - 1$.

Ćwiczenie 1

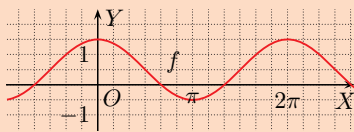
a), b) $f(D) = \langle -1; 1 \rangle$, $T = 2\pi$



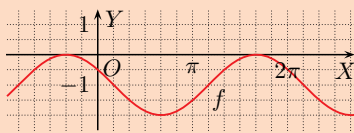
c) $f(D) = \langle -2; 0 \rangle$, $T = 2\pi$



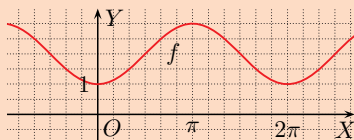
d) $f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$, $T = 2\pi$



e) $f(D) = \langle -2; 0 \rangle$, $T = 2\pi$



f) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$, $T = 2\pi$



Multiteka

- Przekształcenia wykresu funkcji sinus (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji cosinus (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji tangens (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji cotangens (1)
- Ruch po okręgu a tangensoida

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

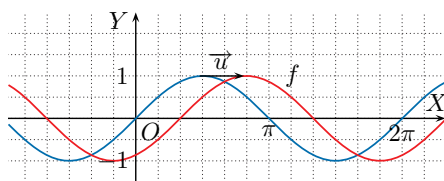


*1.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

Przykład 1

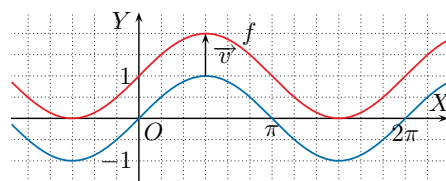
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\vec{u} = [\frac{\pi}{3}, 0]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

b) $f(x) = \sin x + 1$



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\vec{v} = [0, 1]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; 2 \rangle$.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości oraz okres podstawowy.

a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$

c) $f(x) = \sin x - 1$

e) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 1$

b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$

d) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$

f) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$

Zauważmy, że przesunięcie wykresu funkcji o wektor nie zmienia jej okresu podstawowego.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$$

i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ o wektor $\vec{u} = [-\frac{\pi}{3}, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:

$$D = \mathbf{R} \setminus \{ \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$$

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6})$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$

e) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) - 1$

b) $f(x) = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{6})$

d) $f(x) = \operatorname{ctg} x - 2$

f) $f(x) = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{6}) + 1$

Ćwiczenie 2

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{ \frac{2\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$

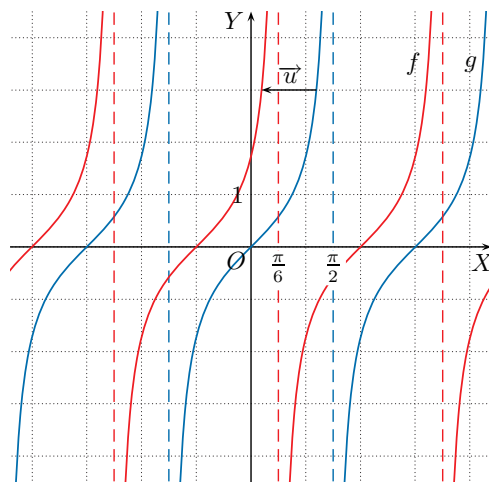
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{ \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$

e) $D = \mathbf{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$

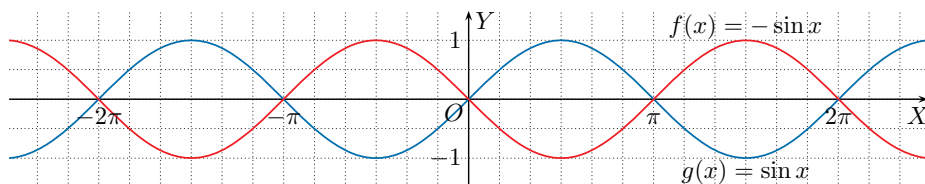
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{ \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$



Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\sin x$.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX wykresu funkcji $g(x) = \sin x$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

- a) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2})$ e) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{6})$
b) $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$$

Podaj przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

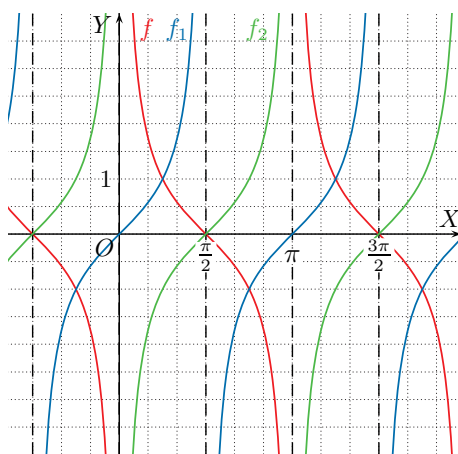
Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

$$f_1(x) = \operatorname{tg} x, \quad f_2(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{oraz } f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}).$$

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zauważ, że $-\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{ctg} x$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe.

- a) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$ b) $f(x) = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{3})$

Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podana równość jest prawdziwa. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

- a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ c) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ e) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} x$
b) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ d) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$ f) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} x$

Ćwiczenie 5

a) Wykres funkcji $y = \sin x$ przesuwamy o wektor $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $y = \cos x$.

b) Wykres funkcji $y = \cos x$ przesuwamy o wektor $[\frac{\pi}{2}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$.

c) Wykres funkcji $y = \cos x$ przesuwamy o wektor $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $y = -\sin x$.

d) Wykres funkcji $y = \sin x$ przesuwamy o wektor $[\frac{\pi}{2}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $y = -\cos x$.

e) Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ przesuwamy o wektor $[\frac{\pi}{2}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $y = -\operatorname{ctg} x$.

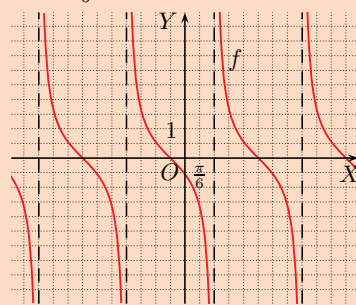
f) Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ przesuwamy o wektor $[\frac{\pi}{2}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $y = -\operatorname{tg} x$.

Ćwiczenie 3

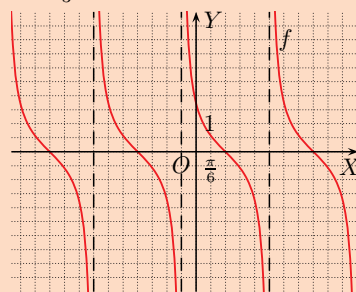
- a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
e) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 4

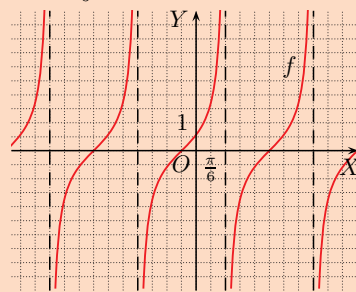
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

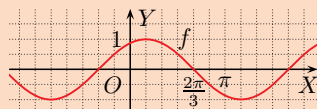


Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



b), c) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



e) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

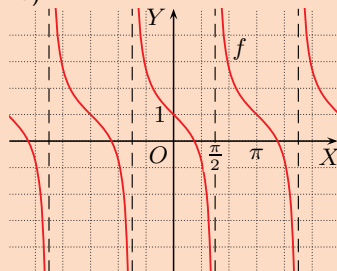


f) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

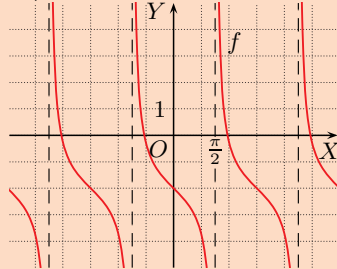


2. a) $f(D) = \langle 2; 4 \rangle$
 b) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$
 c) $f(D) = \langle -3; -1 \rangle$
 d) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
 e) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$
 f) $f(D) = \langle -4; -2 \rangle$
3. a) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
 b) $f(D) = \langle -3; -1 \rangle$
 c) $f(D) = \langle -3; -1 \rangle$
 d) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$

5. a)



b)



Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ e) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{3})$
 b) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \cos(x + \pi)$ f) $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$

2. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = \sin x + 3$ c) $f(x) = \sin x - 2$ e) $f(x) = 2 - \cos x$
 b) $f(x) = \cos x + 2$ d) $f(x) = -\sin x + 1$ f) $f(x) = -\sin x - 3$

3. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2$
 b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 2$ d) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

4. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

- a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$ e) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{2}{3}\pi) - 1$
 b) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{6}) + 1$

5. Naskicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = -\operatorname{tg} x + 1$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg} x - 1$
 b) $f(x) = \operatorname{tg}(-x) - 2$ d) $f(x) = 1 + \operatorname{ctg}(-x)$

6. Naskicuj wykres funkcji f i podaj równania jego asymptot.

- a) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{3}) - 1$
 b) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6}) - 1$ d) $f(x) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6} - x) + 1$

7. Rozwiąż równanie:

- a) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$,
 b) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6}) = -1$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$.

8. Naskicuj wykres funkcji f i korzystając z niego, podaj rozwiązania równania $f(x) = a$ należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

- a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $a = \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Podaj zbiór wartości funkcji f .

- a) $f(x) = \sin x + 4$ d) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$ g) $f(x) = \sin^2 x + 1$
 b) $f(x) = \sin x - 3$ e) $f(x) = 3 - \cos x$ h) $f(x) = 1 - \cos^2 x$
 c) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3}$ f) $f(x) = -1 - \sin x$ i) $f(x) = 2 + \cos^2(x + \frac{\pi}{2})$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{6}\pi + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{3} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{6} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$

6. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

8. a) $x = -\frac{3}{2}\pi, x = -\frac{5}{6}\pi, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{7}{6}\pi$

b) $x = -\frac{3}{4}\pi, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$

c) $x = -\frac{11}{6}\pi, x = -\frac{3}{2}\pi, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

d) $x = -\frac{4}{3}\pi, x = -\pi, x = \frac{2}{3}\pi, x = \pi$

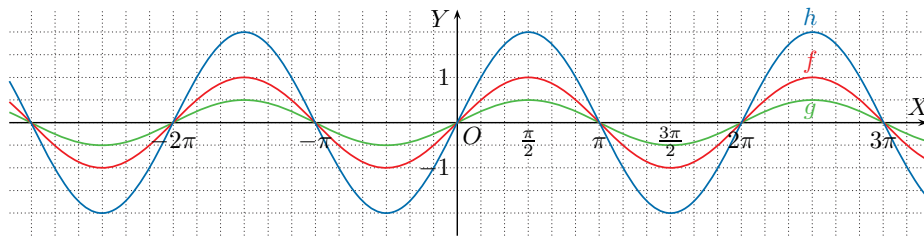
9. a) $\langle 3; 5 \rangle$ b) $\langle -4; -2 \rangle$ c) $\langle -1\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \rangle$

d) $\langle -1; 1 \rangle$ e) $\langle 2; 4 \rangle$ f) $\langle -2; 0 \rangle$

g) $\langle 1; 2 \rangle$ h) $\langle 0; 1 \rangle$ i) $\langle 2; 3 \rangle$

*1.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)

Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ (kolor zielony), $f(x) = \sin x$ (kolor czerwony), $h(x) = 2 \sin x$ (kolor niebieski).



Zauważmy, że jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ należy punkt (x_0, y_0) , to do wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ należy punkt $(x_0, \frac{1}{2}y_0)$, a do wykresu funkcji $h(x) = 2 \sin x$ – punkt $(x_0, 2y_0)$. Wykres funkcji g jest „ściśnięty” wzdłuż osi OY w stosunku do wykresu funkcji f , a wykres funkcji h – „rozciągnięty”.

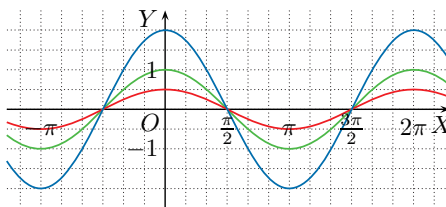
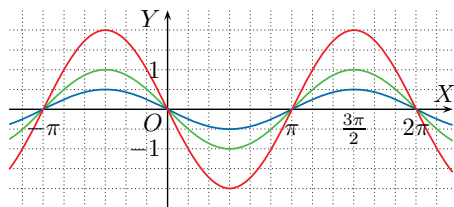
Definicja

Dla funkcji $y = a \sin x$ oraz dla funkcji $y = a \cos x$, $a \neq 0$, liczbę $|a|$ nazywamy **amplitudą** wykresu tej funkcji.

Ćwiczenie 1

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji: f , g i h . Dobierz wzór do każdego wykresu i podaj zbiór wartości każdej funkcji.

- a) $f(x) = -\frac{1}{2} \sin x$, $g(x) = -\sin x$, b) $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$, $g(x) = \cos x$,
 $h(x) = -2 \sin x$ $h(x) = 2 \cos x$

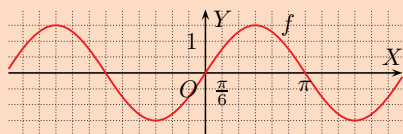


Ćwiczenie 2

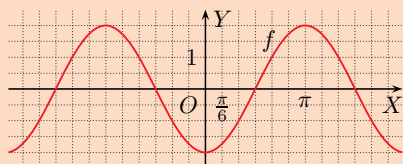
Naszkicuj wykres funkcji f , podaj jej zbiór wartości i amplitudę jej wykresu.

- a) $f(x) = 3 \sin x$ c) $f(x) = \frac{3}{2} \sin x$ e) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos x$
b) $f(x) = 4 \cos x$ d) $f(x) = -2 \cos x$ f) $f(x) = -2,5 \sin x$

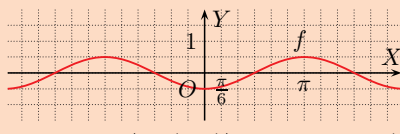
- c) $f(D) = \langle -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \rangle$, amplituda: $\frac{3}{2}$



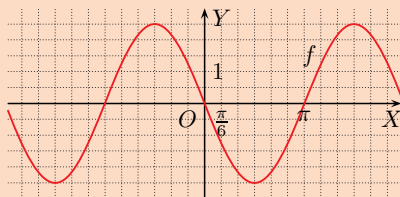
- d) $f(D) = \langle -2; 2 \rangle$, amplituda: 2



- e) $f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$, amplituda: $\frac{1}{2}$



- f) $f(D) = \langle -2\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2} \rangle$, amplituda: $2\frac{1}{2}$



Uczeń:

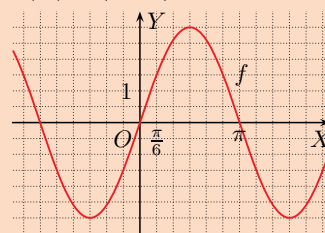
- podaje amplitudę wykresu funkcji $y = a f(x)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną,
- szkicuje wykres funkcji $y = a f(x)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności,
- szkicuje wykres funkcji $y = a f(x - p) + q$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności.

Ćwiczenie 1

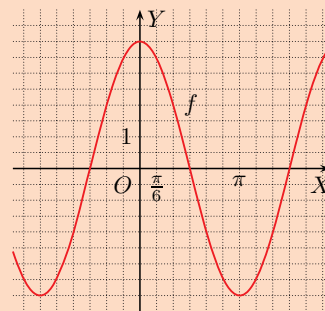
- a) niebieski: f , $f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$
zielony: g , $g(D) = \langle -1; 1 \rangle$
czerwony: h , $h(D) = \langle -2; 2 \rangle$
b) czerwony: f , $f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$
zielony: g , $g(D) = \langle -1; 1 \rangle$
niebieski: h , $h(D) = \langle -2; 2 \rangle$

Ćwiczenie 2

- a) $f(D) = \langle -3; 3 \rangle$, amplituda: 3



- b) $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$, amplituda: 4



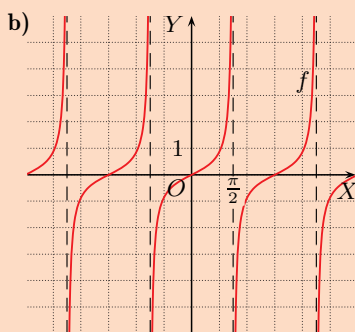
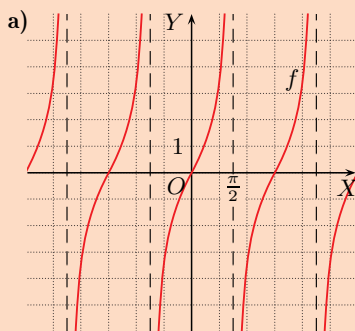
Multiteka

- Wykres funkcji sinus
- Wykres funkcji cosinus
- Wykres funkcji tangens
- Wykres funkcji cotangens
- Wykresy funkcji trygonometrycznych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

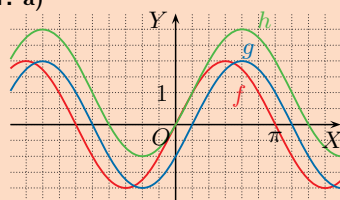
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

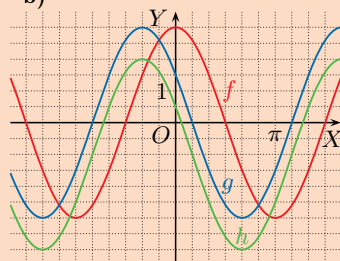


Odpowiedzi do zadań

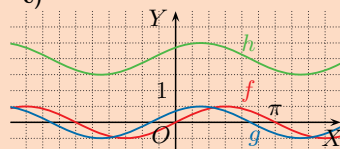
1. a)



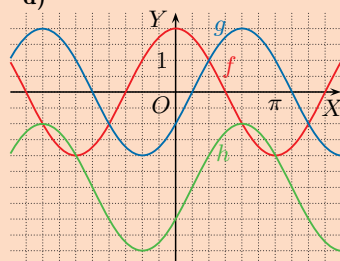
b)



c)



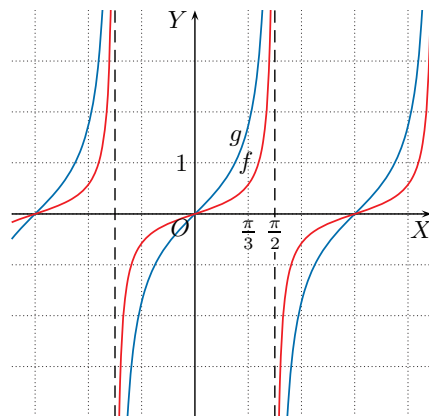
d)



Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x$.

Szkicujemy wykres funkcji f , korzystając z tego, że jeśli do wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ należy punkt (x_0, y_0) , to do wykresu funkcji f należy punkt $(x_0, \frac{1}{3}y_0)$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = 2 \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$

Zadania

1. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f , g i h .

a) $f(x) = 2 \sin x$, $g(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$, $h(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 1$

b) $f(x) = 3 \cos x$, $g(x) = 3 \cos(x + \frac{\pi}{3})$, $h(x) = 3 \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $h(x) = \frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2$

d) $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = 2 \cos(x - \frac{2}{3}\pi)$, $h(x) = 2 \cos(x - \frac{2}{3}\pi) - 3$

2. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = -2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$

c) $f(x) = -\frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{6})$

d) $f(x) = -2 \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 1$

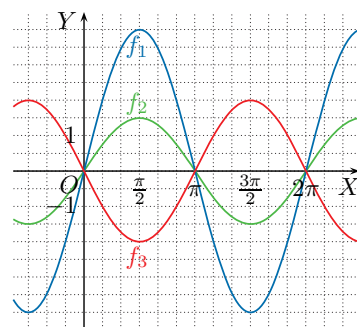
3. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = -2 \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = 2 \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$

c) $f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f_1(x) = a_1 \sin x$, $f_2(x) = a_2 \sin x$, $f_3(x) = a_3 \sin x$. Wyznacz: a_1 , a_2 , a_3 . Podaj amplitudy tych wykresów.



5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a \cos x$, jeśli: a) $f(\pi) = -\frac{3}{2}$, b) $f(\pi) = 2$.

6. Punkt P należy do wykresu funkcji f . Oblicz wartość współczynnika a .

a) $f(x) = a \sin x$, $P(\frac{\pi}{6}, 3)$

c) $f(x) = a \operatorname{tg} x$, $P(-\frac{\pi}{6}, 1)$

b) $f(x) = a \cos x$, $P(\frac{\pi}{4}, 1)$

d) $f(x) = a \operatorname{ctg} x$, $P(\frac{4}{3}\pi, -6)$

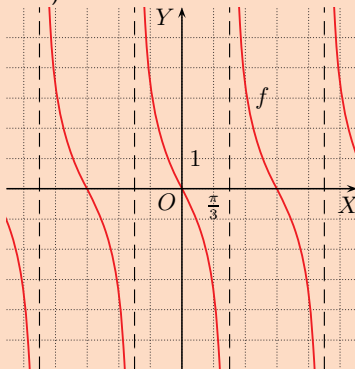
2. a) $f(D) = \langle -2; 2 \rangle$

b) $f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$

c) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$

d) $f(D) = \langle -3; 1 \rangle$

3. a)



4. $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -2$; amplitudy - f_1 : 4, f_2 : $\frac{3}{2}$, f_3 : 2

5. a) $a = \frac{3}{2}$

b) $a = -2$

6. a) $a = 6$

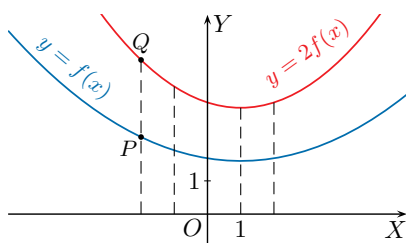
b) $a = \sqrt{2}$

c) $a = -\sqrt{3}$

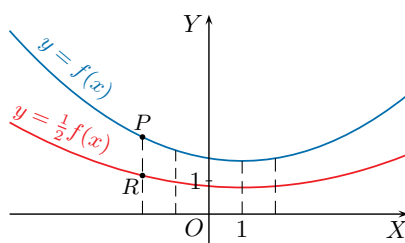
d) $a = -6\sqrt{3}$

7. Przeczytaj informację w ramce.

Na rysunkach poniżej pokazano, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = 2f(x)$ oraz wykres funkcji $y = \frac{1}{2}f(x)$.

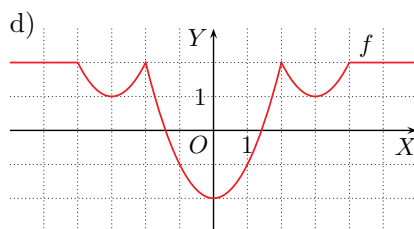
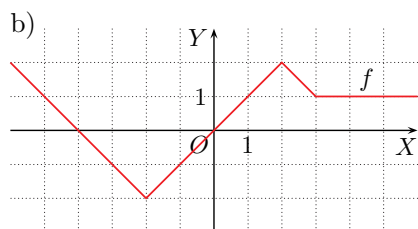
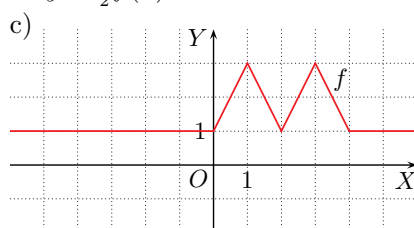
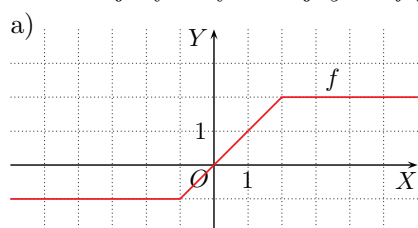


Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = 2f(x)$ należy punkt $Q(x_0, 2y_0)$.



Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}f(x)$ należy punkt $R(x_0, \frac{1}{2}y_0)$.

Naszkicuj wykresy funkcji $y = 2f(x)$ oraz $y = \frac{1}{2}f(x)$.



8. Naszkicuj wykresy funkcji: f , g i h .

a) $f(x) = x$, $g(x) = 3f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = \frac{1}{4}f(x)$

c) $f(x) = |x|$, $g(x) = -2f(x)$, $h(x) = -\frac{1}{3}f(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $g(x) = \frac{3}{2}f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

9. Czy wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = af(x)$, gdzie $a \neq 1$, mogą mieć punkty wspólne?

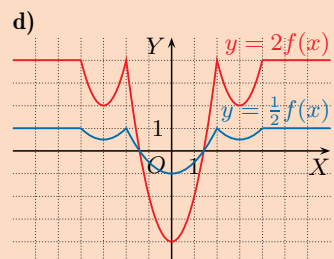
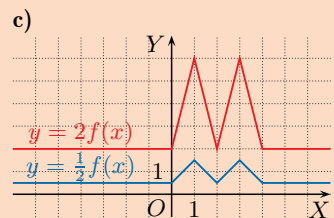
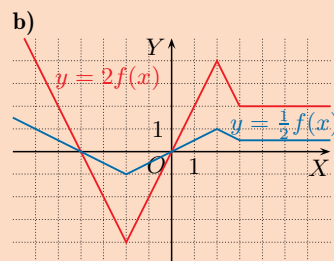
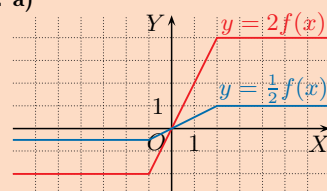
9. $f(x) = af(x)$, gdzie $a \neq 1$

$$f(x)(1 - a) = 0, a \neq 1$$

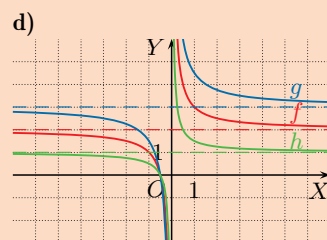
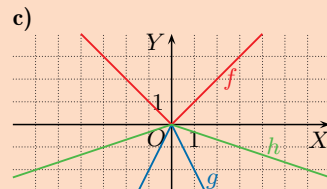
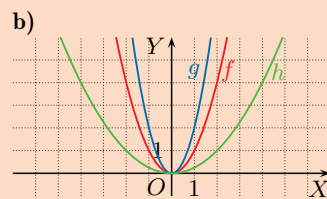
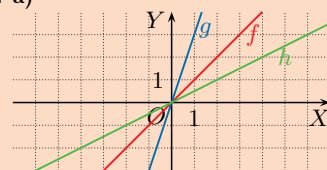
$$f(x) = 0$$

Zatem wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = af(x)$, gdzie $a \neq 1$, mają punkty wspólne, gdy funkcja f ma miejsca zerowe.

7. a)



8. a)



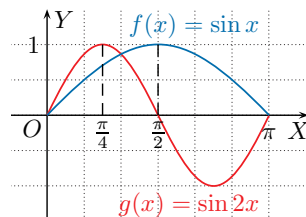
Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $y = af(x)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności,
- szkicuje wykresy funkcji będących złożeniem kilku przekształceń i określa ich własności.

*1.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)

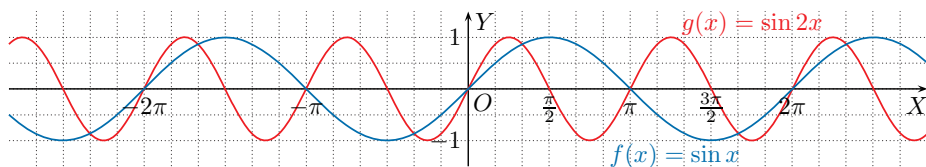
W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin 2x$. Na rysunku przedstawiono wykresy tych funkcji dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
$\sin 2x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



Zauważ, że funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 1 dla $x = \frac{\pi}{2}$, natomiast funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 1 dla $x = \frac{\pi}{4}$.

Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $2x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, czyli dla $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin 2x$ jest równy π .



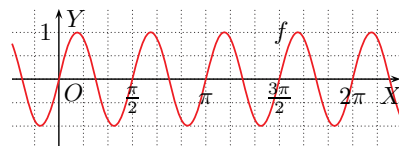
Wykres funkcji g jest w stosunku do wykresu funkcji f „ściśnięty” wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 1

okres podstawowy: $T = \frac{\pi}{2}$,
miejsca zerowe: $x = \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 1

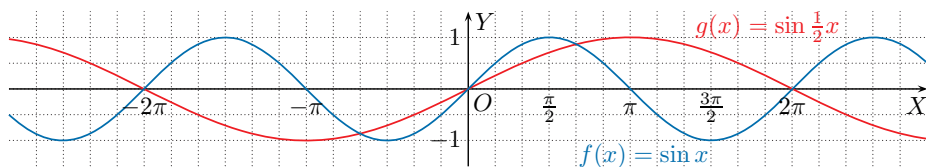
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin 4x$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.



Przykład 1

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ i naskicuj jej wykres.

Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $\frac{1}{2}x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, czyli dla $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ jest równy 4π .



Wykres funkcji g jest w stosunku do wykresu funkcji f „rozciągnięty” wzdłuż osi OX .

Multiteka

- Wykres funkcji sinus
- Wykres funkcji cosinus
- Wykres funkcji tangens
- Wykres funkcji cotangens
- Wykresy funkcji trygonometrycznych

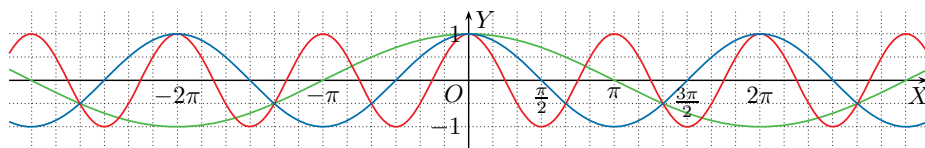
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

Generator
testów i sprawdzianów

Okres podstawowy funkcji $y = \sin ax$ oraz funkcji $y = \cos ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{2\pi}{a}$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$ i $h(x) = \cos \frac{1}{2}x$. Dobierz wzór do każdego wykresu. Podaj okres podstawowy oraz miejsca zerowe każdej z funkcji: f , g i h .



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

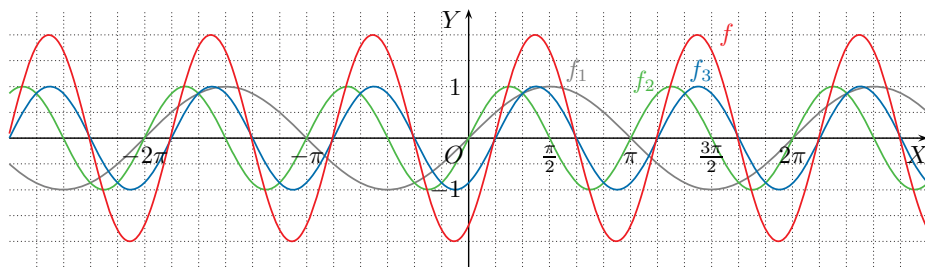
- a) $f(x) = \cos 4x$ b) $f(x) = \sin 3x$ c) $f(x) = -\cos \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = -\sin \frac{1}{2}x$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = 2 \sin 2(x - \frac{\pi}{6})$, a następnie szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \sin 2x, \quad f_3(x) = \sin 2(x - \frac{\pi}{6}) \quad \text{ i } \quad f(x) = 2 \sin 2(x - \frac{\pi}{6}).$$



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f .

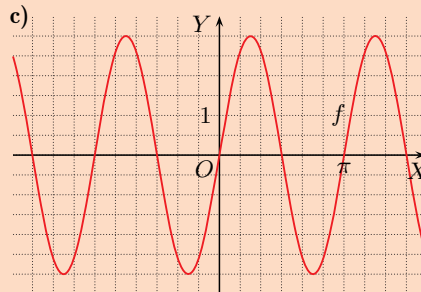
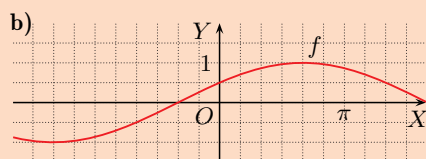
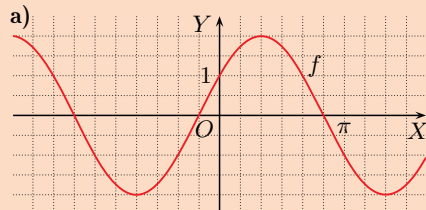
- a) $f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3})$ b) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{2})$

Ćwiczenie 5

Podaj miejsca zerowe funkcji f należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

- a) $f(x) = \sin 4x$ b) $f(x) = 2 \sin \frac{x}{4}$ c) $f(x) = \frac{1}{2} \cos \pi x$

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 2

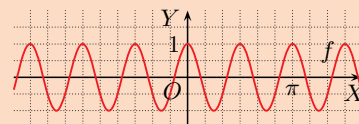
niebieski: f , $T = 2\pi$,
miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$;

czerwony: g , $T = \pi$,
miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$,
 $k \in \mathbb{Z}$;

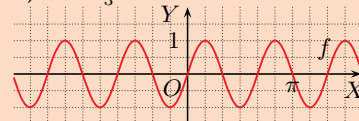
zielony: h , $T = 4\pi$,
miejsca zerowe: $x = \pi + 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3

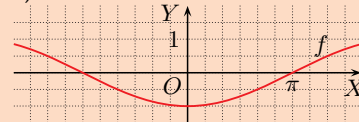
- a) $T = \frac{\pi}{2}$



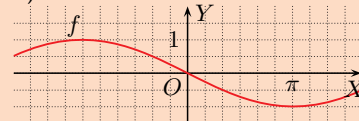
- b) $T = \frac{2\pi}{3}$



- c) $T = 4\pi$



- d) $T = 4\pi$



Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że przed naszkicowaniem wykresu należy odpowiednio przekształcić wzór funkcji.

Ćwiczenie 5

- a) $x \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$

- b) $x = 0$

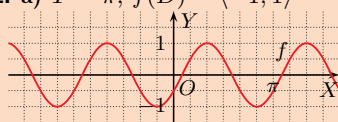
- c) $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}\}$

Ćwiczenie 6

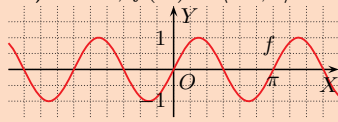
- a) $T = 2\pi$,
miejsca zerowe: $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $T = \frac{\pi}{3}$,
miejsca zerowe: $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
c) $T = 1$,
miejsca zerowe: $x = k, k \in \mathbb{Z}$

Odpowiedzi do zadań

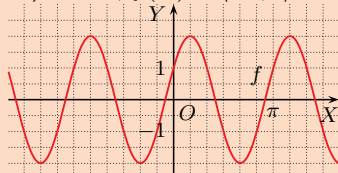
1. a) $T = \pi, f(D) = \langle -3; 3 \rangle$
b) $T = \pi, f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$
c) $T = \frac{2\pi}{3}, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$
d) $T = 4\pi, f(D) = \langle -3; 3 \rangle$
e) $T = \frac{2\pi}{3}, f(D) = \langle -4; 4 \rangle$
f) $T = 4\pi, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$
2. a) $T = \pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$



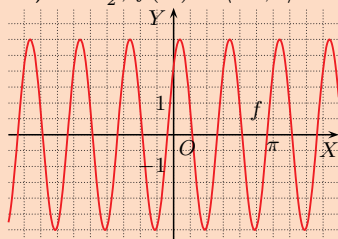
- b) $T = \pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$



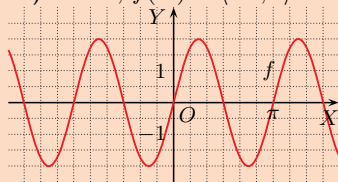
- c) $T = \pi, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$



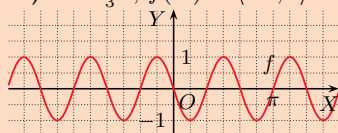
- d) $T = \frac{\pi}{2}, f(D) = \langle -3; 3 \rangle$



- e) $T = \pi, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$



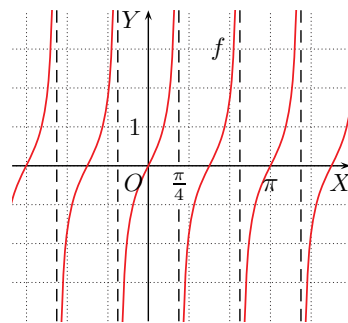
- f) $T = \frac{2\pi}{3}, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$



Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} 2x$. Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

Okres podstawowy funkcji f jest równy $\frac{\pi}{2}$.
 $\operatorname{tg} 2x = 0$ dla $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Okres podstawowy funkcji $y = \operatorname{tg} ax$ oraz $y = \operatorname{ctg} ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{\pi}{a}$.

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ c) $f(x) = \operatorname{tg} \pi x$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

- a) $f(x) = 3 \sin 2x$ c) $f(x) = -2 \sin 3x$ e) $f(x) = 4 \cos 3x$
b) $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$ d) $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2}$ f) $f(x) = 2 \sin(-\frac{x}{2})$

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

- a) $f(x) = \cos 2(x - \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = 3 \cos(4x - \frac{\pi}{4})$
b) $f(x) = \sin 2(x - \pi)$ e) $f(x) = 2 \sin(\pi - 2x)$
c) $f(x) = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - 3x)$

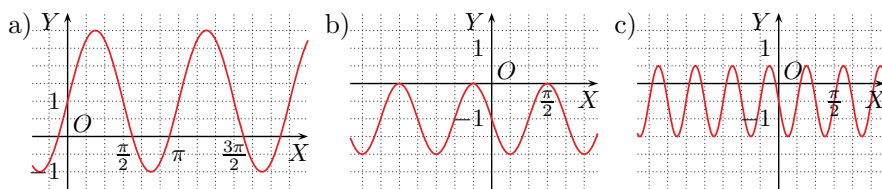
3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \sin \pi x$ b) $f(x) = \cos 2\pi x$ c) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

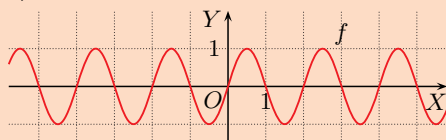
4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj wartość największą i wartość najmniejszą tej funkcji.

- a) $f(x) = 2 \sin(3x + \pi) + 1$ b) $f(x) = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) - 2$

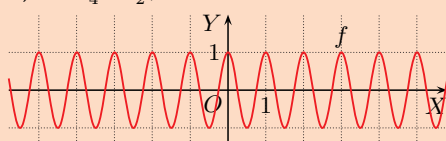
5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = A \sin Bx + C$, gdzie A, B, C są pewnymi stałymi. Wyznacz ich wartości.



3. a) $x = k, k \in \mathbb{Z}$



- b) $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



- c) $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$

4. a) wartość największa: 3,
wartość najmniejsza: -1

- b) wartość największa: 1,
wartość najmniejsza: -5

5. a) $A = 2, B = 2, C = 1$

- b) $A = -1, B = 3, C = -1$

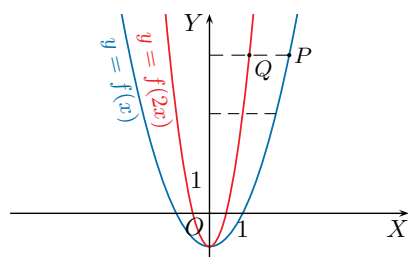
- c) $A = -1, B = 6, C = -\frac{1}{2}$

6. Wyznacz dziedzinę oraz miejsca zerowe funkcji f i funkcji g . Naszkicuj ich wykresy oraz podaj okresy podstawowe.

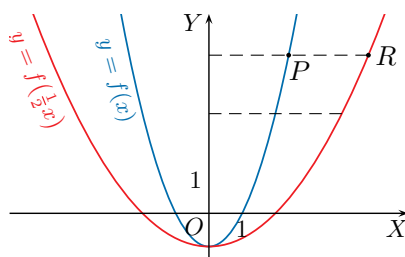
- a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, $g(x) = \operatorname{tg}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6})$
 b) $f(x) = -\operatorname{tg} 2x$, $g(x) = -\operatorname{tg} 2(x - \frac{\pi}{4})$
 c) $f(x) = \operatorname{tg}(-\frac{x}{2})$, $g(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2})$
 d) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$, $g(x) = \operatorname{ctg}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9})$

7. Przeczytaj informację w ramce.

Na rysunkach poniżej pokazano, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = f(2x)$ oraz wykres funkcji $y = f(\frac{1}{2}x)$.

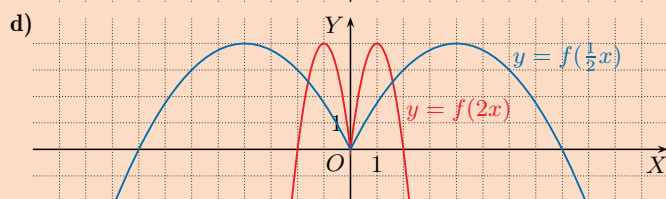
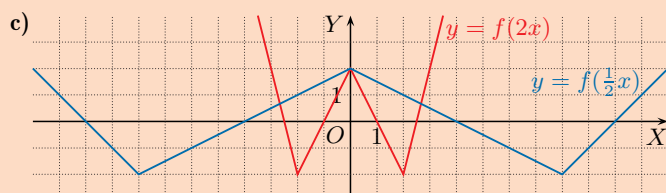
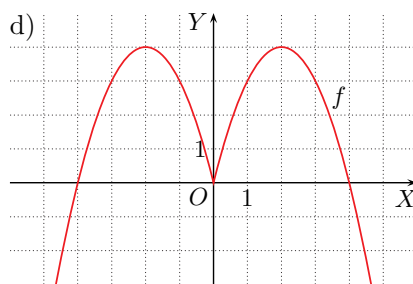
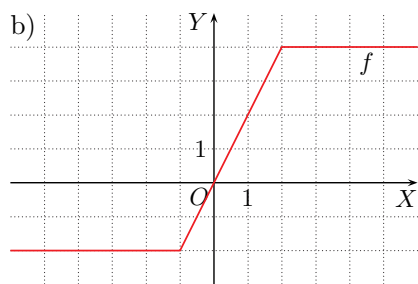
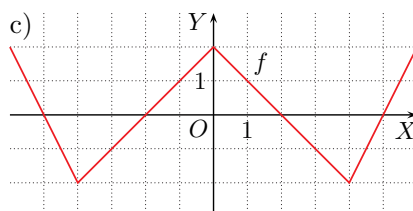
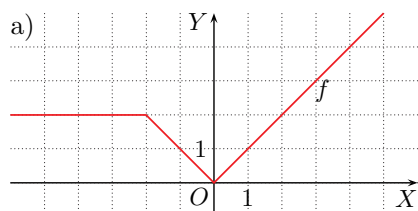


Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = f(2x)$ należy punkt $Q(\frac{x_0}{2}, y_0)$.

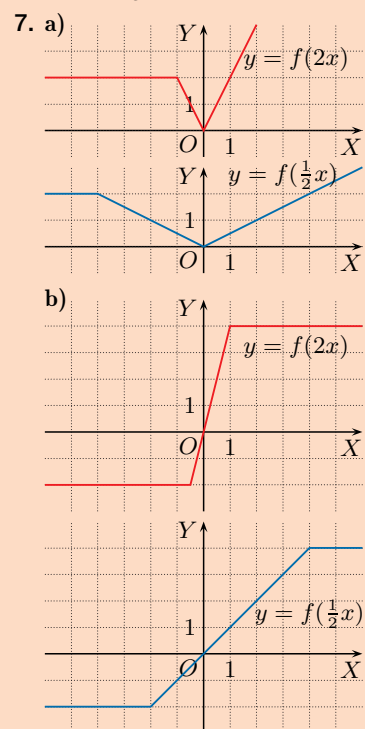


Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = f(\frac{1}{2}x)$ należy punkt $R(2x_0, y_0)$.

Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(2x)$ oraz $y = f(\frac{1}{2}x)$.



6. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\pi + 3k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 3k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $T_f = 3\pi$;
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{(3k+2)\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2} + 3k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$, $T_g = 3\pi$
 b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $T_f = \frac{\pi}{2}$;
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$,
 $k \in \mathbf{Z}$, $T_g = \frac{\pi}{2}$
 c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $T_f = 2\pi$;
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$, $T_g = 2\pi$
 d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = \frac{3}{2}\pi + 3k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$, $T_f = 3\pi$;
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + 3k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{11}{6}\pi + 3k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$, $T_g = 3\pi$



Ruch po okręgu

A diagram of a circular sector. The center of the circle is labeled O . A radius is drawn from O to a point P on the circumference, labeled r . Another radius is drawn from O to a point P_1 on the circumference. The angle between these two radii at the center O is labeled α . The arc connecting P and P_1 is labeled l .

Prędkość kątową ω zwykle podaje się w radianach na sekundę [rad/s]. Miara łukowa kąta α to stosunek długości łuku l do promienia r ($\alpha = \frac{l}{r}$), więc otrzymujemy $\omega = \frac{l}{r \cdot t}$ i stąd mamy zależność $v = r \cdot \omega$.

Przykład

Ziemia wykonuje pełny obrót wokół swojej osi w ciągu 24 godzin, zatem prędkość katowa jej ruchu obrotowego jest równa:

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ [rad/h]}$$

$$v = r\omega = 6370 \cdot \frac{\pi}{12} \approx 1668 \text{ [km/h]}$$

Dla punktu P leżącego na szerokości geograficznej x prędkość liniowa wyraża się wzorem:

$$v_P = v \cos x \text{ (uzasadnij)}$$

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$r_P = r \cos x$$

$$v_P = r_P \cdot \omega = r \cos x \cdot \omega = v \cos x$$

- 

Odpowiedzi do zadań

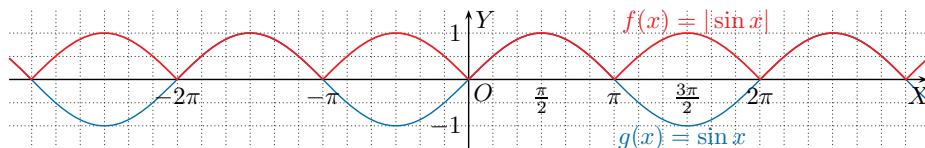
1. $v \approx 1072 \text{ km/h}$
2. 4 razy
3. około 10,2 obrotu; $20,4\pi \text{ rad/s}$
4. prędkość liniowa: około 6,28 km/h,
prędkość kątowa: $\frac{5}{9}\pi \text{ rad/s}$

*1.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |\sin x|$ i podaj jej okres podstawowy.

Wykres funkcji $f(x) = |\sin x|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX tej części wykresu funkcji $g(x) = \sin x$, która znajduje się pod osią OX . Pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.



Okres podstawowy funkcji f jest równy π .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

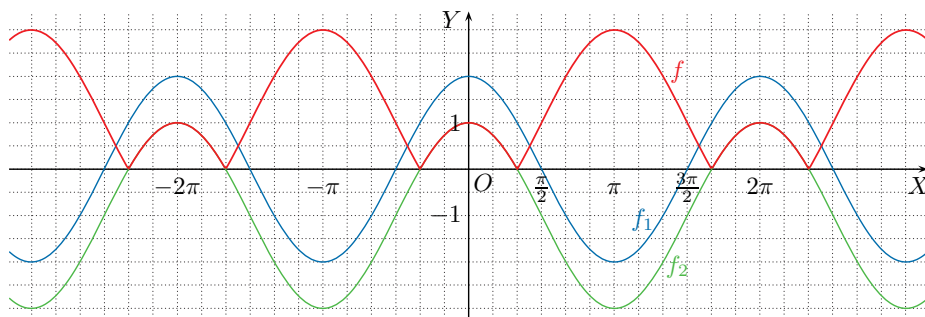
- a) $f(x) = |\cos x|$ b) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ c) $f(x) = -|\sin x|$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2 \cos x - 1|$ i podaj jej okres podstawowy.

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

$$f_1(x) = 2 \cos x, \quad f_2(x) = 2 \cos x - 1 \quad \text{i} \quad f(x) = |2 \cos x - 1|.$$



Okres podstawowy funkcji f jest równy 2π .

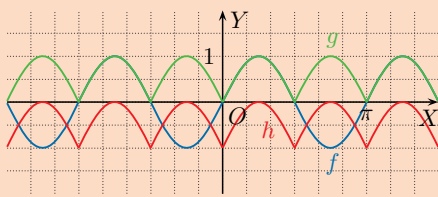
Ćwiczenie 2

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f , g i h . Podaj okresy podstawowe tych funkcji.

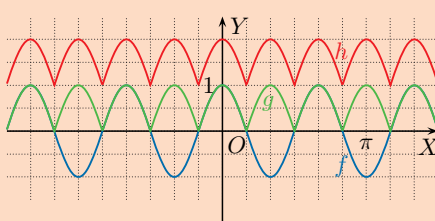
- a) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = |\sin 2x|$, $h(x) = |\sin 2x| - 1$
 b) $f(x) = \cos 3x$, $g(x) = |\cos 3x|$, $h(x) = |\cos 3x| + 1$

Ćwiczenie 2

a) $T_f = \pi$, $T_g = T_h = \frac{\pi}{2}$



b) $T_f = \frac{2\pi}{3}$, $T_g = T_h = \frac{\pi}{3}$

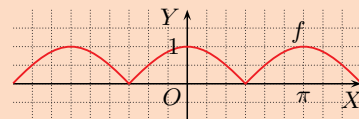


Uczeń:

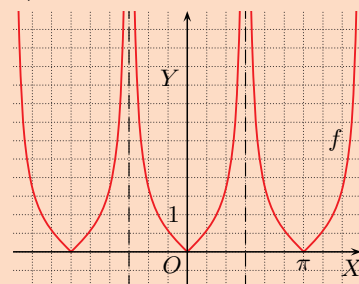
- szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną, i określa ich własności,
- szkicuje wykresy funkcji trygonometrycznych będących złożeniem kilku przekształceń i określa ich własności,
- stosuje wykresy funkcji w zadaniach różnych typów.

Ćwiczenie 1

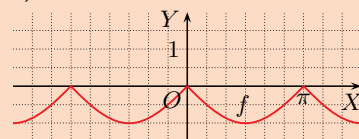
a) $T = \pi$



b) $T = \pi$



c) $T = \pi$



Multiteka

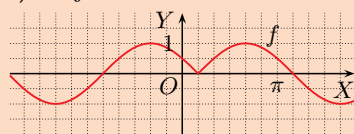
- Przekształcenia wykresu funkcji sinus (2)
- Przekształcenia wykresu funkcji cosinus (2)
- Przekształcenia wykresu funkcji tangens (2)
- Przekształcenia wykresu funkcji cotangens (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

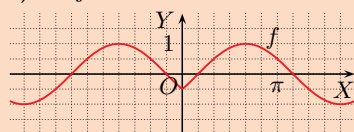
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

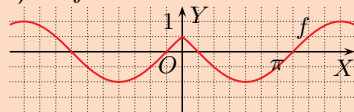
a) nie jest



b) nie jest



c) nie jest

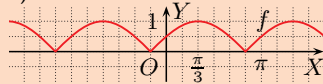


Odpowiedzi do zadań

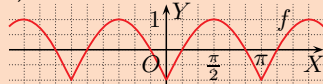
1. a)



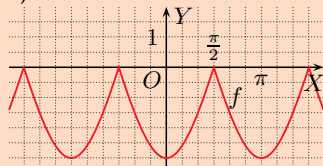
b)



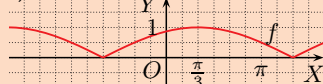
c)



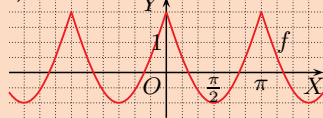
d)



e)



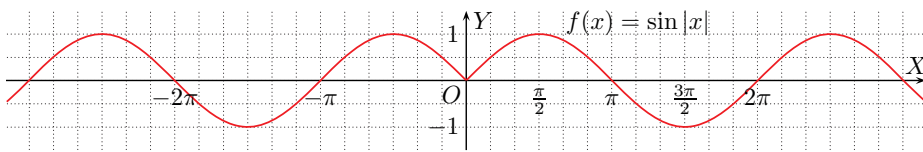
f)



Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin|x|$. Czy funkcja f jest okresowa?

Wykres funkcji $f(x) = \sin|x|$ jest symetryczny względem osi OY . Dla $x \geq 0$ wykres funkcji f pokrywa się z wykresem funkcji $y = \sin x$. Zauważ, że dla $x < 0$ wykres funkcji f pokrywa się z wykresem funkcji $y = -\sin x$.



Funkcja f nie jest funkcją okresową.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Czy funkcja f jest okresowa?

a) $f(x) = \sin|x - \frac{\pi}{6}|$ b) $f(x) = \sin(|x| - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = \cos(|x| + \frac{\pi}{3})$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ c) $f(x) = 2|\sin x| - 1$ e) $f(x) = |\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})|$
b) $f(x) = |\cos(x - \frac{\pi}{3})|$ d) $f(x) = -3|\cos x|$ f) $f(x) = 2 - |3 \sin x|$

2. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = -|\operatorname{tg} x|$ c) $f(x) = |\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6})|$ e) $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$
b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - 1$ d) $f(x) = |\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})|$ f) $f(x) = |\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4})|$

3. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = |\cos 2x|$ c) $f(x) = |2 \sin 3x|$ e) $f(x) = |\operatorname{tg} 2x|$
b) $f(x) = |\sin \frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = |4 \cos 3x|$ f) $f(x) = |\operatorname{ctg} \frac{1}{2}x|$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązania?

a) $f(x) = |\sin x| + 2$ b) $f(x) = |\cos x| - 1$ c) $f(x) = |\sin(x - \pi)| - 1$

5. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin |2x|$ c) $f(x) = 2 - \sin |x|$ e) $f(x) = 2 \sin |2x| - 1$
b) $f(x) = \cos |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = 1 - \cos |x|$ f) $f(x) = 3 \cos |2x| + 1$

2. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$
d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$
e) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$
f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

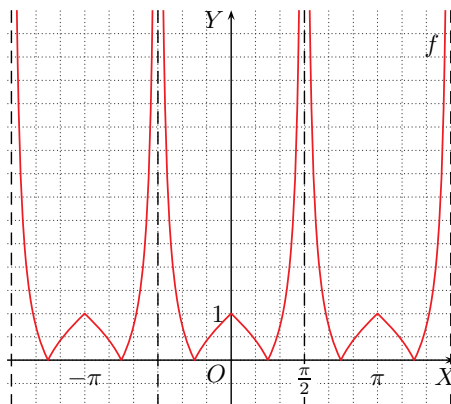
3. a) $T = \frac{\pi}{2}, f(D) = \langle 0; 1 \rangle$
b) $T = 2\pi, f(D) = \langle 0; 1 \rangle$
c) $T = \frac{\pi}{3}, f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
d) $T = \frac{\pi}{3}, f(D) = \langle 0; 4 \rangle$
e) $T = \frac{\pi}{2}, f(D) = \langle 0; \infty \rangle$
f) $T = 2\pi, f(D) = \langle 0; \infty \rangle$

4. a) $a \in \langle 2; 3 \rangle$
b) $a \in \langle -1; 0 \rangle$
c) $a \in \langle -1; 0 \rangle$
5. a) $f(D) = \langle -1; 1 \rangle$
b) $f(D) = \langle -1; 1 \rangle$
c) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$
d) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
e) $f(D) = \langle -3; 1 \rangle$
f) $f(D) = \langle -2; 4 \rangle$

6. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj przedziały, w których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

- a) $f(x) = |\sin x| + \sin x$
 b) $f(x) = |\cos x| + \cos x$
 c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$
 d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = ||\operatorname{tg} x| - 1|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ należących do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$ w zależności od parametru m .



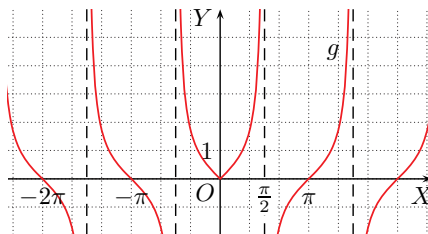
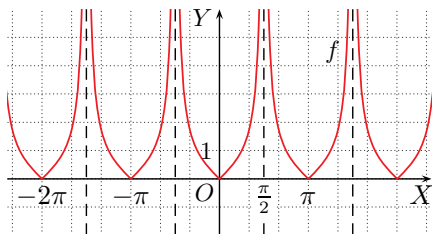
8. Podaj zbiory wartości funkcji f oraz funkcji $g(x) = |f(x)|$.

- a) $f(x) = 3 \sin 2x$ c) $f(x) = 2 \sin x - 3$ e) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos \pi x - 1$
 b) $f(x) = \sin 3x + 1$ d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$ f) $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{-1}$

9. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązania?

- a) $f(x) = |3 \sin(2x - \frac{\pi}{2})|$ c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + 2$ e) $f(x) = \frac{1}{|2 - \cos x|}$
 b) $f(x) = 2 - |\cos 2x|$ d) $f(x) = |\operatorname{tg}^2 x - 4|$ f) $f(x) = \frac{1}{2 - |\cos x|}$

10. Podaj rozwiązania równania $|\operatorname{tg} x| = 1$ oraz równania $\operatorname{tg} |x| = 1$ należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$. Skorzystaj z wykresów funkcji $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ i $g(x) = \operatorname{tg} |x|$.



11. Naskicuj wykres funkcji f .

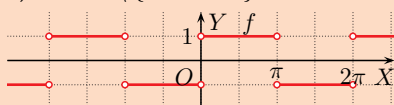
- a) $f(x) = -\operatorname{tg} |x| + 1$ b) $f(x) = \operatorname{tg} |x - \frac{\pi}{3}|$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(|x| - \frac{\pi}{3})$

12. Podaj dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

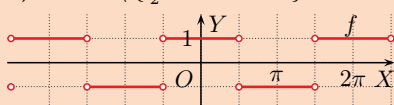
- a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ b) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ c) $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$

10. $|\operatorname{tg} x| = 1$, gdy $x \in \{-\frac{7}{4}\pi, -\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$,
 $\operatorname{tg} |x| = 1$, gdy $x \in \{-\frac{5}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$

12. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



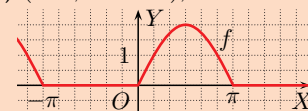
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



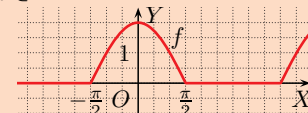
- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$



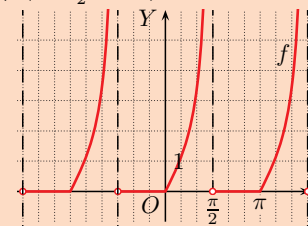
6. a) $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$



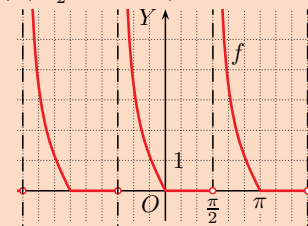
- b) $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$



- c) $(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$



- d) $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

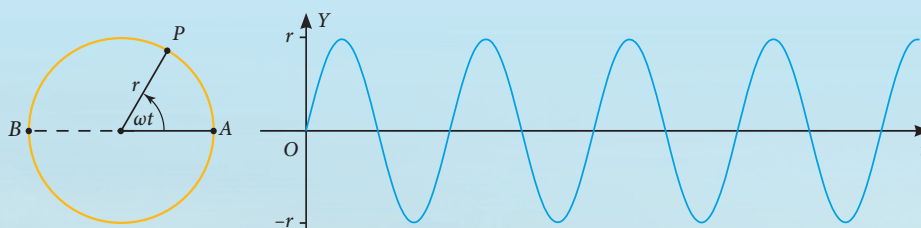


7. 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
 4 dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$,
 7 dla $m = 1$,
 8 dla $m \in (0; 1)$

8. a) $f(D_f) = \langle -3; 3 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle 0; 3 \rangle$
 b) $f(D_f) = g(D_g) = \langle 0; 2 \rangle$
 c) $f(D_f) = \langle -5; -1 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle 1; 5 \rangle$
 d) $f(D_f) = g(D_g) = \langle 1; \infty \rangle$
 e) $f(D_f) = \langle -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \rangle$,
 $g(D_g) = \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$
 f) $f(D_f) = g(D_g) = (0; 1)$
 9. Zauważmy, że zbiór wartości parametru a to zbiór wartości funkcji f .
 a) $a \in \langle 0; 3 \rangle$ b) $a \in \langle 1; 2 \rangle$
 c) $a \in \langle 2; \infty \rangle$ d) $a \in (0; \infty)$
 e) $a \in \langle \frac{1}{3}; 1 \rangle$ f) $a \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$

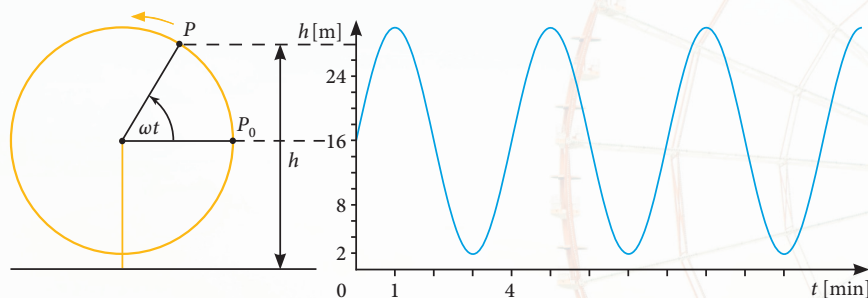
Ruch po okręgu a sinusoida

Na rysunku niżej punkt P porusza się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością kątową ω po okręgu o promieniu r w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (prędkość kątowna to stosunek kąta zakreślonego podczas ruchu do czasu, w którym to nastąpiło). Początkowe położenie punktu P oznaczono przez A – jest to jeden z końców poziomej średnicy AB . Wykres przedstawiający zmiany odległości punktu P od średnicy AB w czasie jest sinusoidą.



Diabelski młyn

Diabelski młyn to obracające się wielkie koło, na którym są zamocowane wagoniki. Na rysunku schematycznie pokazano diabelski młyn o średnicy 28 m, obracający się ze stałą prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wagonik w najniższym położeniu jest zawieszony 2 m nad ziemią, a jeden pełny obrót koła trwa 4 minuty.



Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ wagonik znajdował się w punkcie P_0 , czyli 16 m nad ziemią. Wysokość h , na której wagonik znalazł się po upływie czasu t (punkt P na rysunku), jest opisana wzorem:

$$h(t) = 14 \sin(\omega t) + 16$$

- 1** Na jakiej wysokości nad ziemią znajdzie się ten wagonik po upływie 5 minut?
A na jakiej po upływie 8 minut?

- 1.** Po 5 minutach wagonik znajdzie się 30 m nad ziemią, a po 8 minutach – 16 m.

*1.11. Tożsamości trygonometryczne

Tożsamość trygonometryczna to taka równość, w której występują funkcje trygonometryczne i która jest prawdziwa dla tych wszystkich wartości zmiennej, dla których wyrażenia występujące w tej równości mają sens.

Przypomnijmy, że między wartościami funkcji trygonometrycznych kąta ostrego x zachodzą podane obok związki.

Równości te są też prawdziwe dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$, dla którego obie strony równości są określone.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ jedyńska trygonometryczna
2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
3. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$

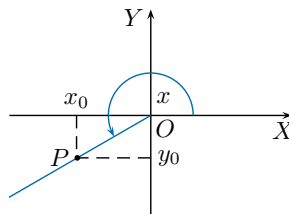
Dowód jedynki trygonometrycznej

Niech punkt $P(x_0, y_0)$, różny od początku układu współrzędnych, będzie dowolnym punktem na ramieniu końcowym kąta x . Wówczas:

$$\sin x = \frac{y_0}{r}, \quad \cos x = \frac{x_0}{r}$$

gdzie $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Zatem:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{y_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{r^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2} = 1$$



D Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamości trygonometryczne: 2, 3 i 4.

D Ćwiczenie 2

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

- a) $(1 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
- b) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$

Ćwiczenie 1

Przyjmujemy te same założenia co w dowodzie jedynki trygonometrycznej.

2. $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y_0}{r} : \frac{x_0}{r} = \frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} x$, gdzie $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
 3. $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x_0}{r} : \frac{y_0}{r} = \frac{x_0}{y_0} = \operatorname{ctg} x$, gdzie $\sin x \neq 0$, czyli $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
 4. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{x_0}{y_0} = 1$, gdzie $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
- Zatem $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Ćwiczenie 2

- a) $(1 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x = \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cos x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
- b) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{ctg} x) = 1 + \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 1 = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$

Uczeń:

- stosuje podstawowe tożsamości trygonometryczne w prostych sytuacjach,
- dowodzi tożsamości trygonometrycznych, podając odpowiednie założenia,
- oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich.

Ćwiczenie 3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \\ & + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \\ & + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ & = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot \\ & \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 1 = \\ & = \sin^2 x - \cos^2 x \end{aligned}$$

c) Zakładamy, że tangens jest określony oraz $\sin x \cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

d) Zakładamy, że tangens jest określony oraz $\cos^2 x \neq 1$, czyli $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) = \\ & = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x \right) = \\ & = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x - 1} = \\ & = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x} = \\ & = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ & = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ & = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} = \\ & = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} = \\ & = \frac{1^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} = 1 \end{aligned}$$

D Przykład 1

$$\text{Udowodnij, że } \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Zakładamy, że tangens jest określony, $1 + \sin x \neq 0$ oraz $\cos x \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = && \text{Korzystamy z tożsamości } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \\ &= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\cos x(1 + \sin x)} = \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = && \text{Korzystamy z tożsamości } \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \\ &= \frac{\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

D Ćwiczenie 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

$$\text{a)} \quad (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2 \quad \text{c)} \quad \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\text{b)} \quad \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{d)} \quad \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że podane wyrażenie jest równe 1 dla wszystkich x , dla których jest określone.

$$\text{a)} \quad \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x - 1} \quad \text{b)} \quad \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \quad \text{c)} \quad \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}$$

Czasami, aby udowodnić tożsamość trygonometryczną, warto przekształcić zarówno jej prawą, jak i lewą stronę.

D Przykład 2

Udowodnij, że $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} L = \cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = && \text{Przekształcamy lewą stronę równości.} \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = 1 - 2 \sin^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned} \quad \text{Przekształcamy prawą stronę równości.}$$

Równość $L = P$ zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, zatem udowodniliśmy powyższą tożsamość trygonometryczną.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

$$\text{a)} \quad \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{b)} \quad \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg} x)^2$$

Ćwiczenie 5

a) Zakładamy, że tangens jest określony oraz $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$L = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} - 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} - \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$P = \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}, \text{ czyli } L = P$$

b) Zakładamy, że tangens jest określony oraz $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{tg} x)^2 &= \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{\cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1 + 2 \cos x \sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Przykład 3

Oblicz $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$, jeśli wiadomo, że $\sin x = \frac{3}{5}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

Wartość $\cos x$ obliczamy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \cos x &= -\frac{4}{5} \quad \text{lub} \quad \cos x = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Dla $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ cosinus jest ujemny, zatem $\cos x = -\frac{4}{5}$. Stąd:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{4}{3}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .

- a) $\sin x = -\frac{4}{5}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ c) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
b) $\cos x = -\frac{12}{13}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 7

Udowodnij powyższe tożsamości trygonometryczne.

Przykład 4

Oblicz $\cos x$ i $\sin x$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.

Korzystamy z tożsamości $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ i otrzymujemy:

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

stąd $\cos^2 x = \frac{1}{10}$, czyli $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Dla $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ cosinus jest dodatni, zatem $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Korzystamy z tożsamości $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ i otrzymujemy:

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .

- a) $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ c) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
b) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ i $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ d) $\operatorname{ctg} x = -4$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

Ćwiczenie 8

- a) $\sin x = -\frac{5}{13}$, $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}$
b) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = 2$
c) $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg} x = -3$
d) $\sin x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos x = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 6

- a) $\cos x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$,
 $\operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}$
b) $\sin x = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$,
 $\operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}$
c) $\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{2}$
d) $\cos x = \frac{\sqrt{23}}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{46}}{23}$,
 $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{46}}{2}$

Ćwiczenie 7

Zakładamy, że tangens jest określony oraz $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{tg}^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Zakładamy, że cotangens jest określony oraz $\sin x \neq 0$, czyli $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{ctg}^2 x &= 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

1. d) $2 \sin^2 x - 1 = 1 - 2 \cos^2 x$
 $2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$
 $2 = 2$
 e) $L = \cos^2 x(1 + \tan^2 x) =$
 $= \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1 = P$
2. a) $L = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} =$
 $= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 b) $L = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x \sin x}{\cos x \sin x}} + \frac{\cos x}{\cos x \sin x} =$
 $= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x} = P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{1 - \cos x}{\sin x} =$
 $= \frac{\sin^2 x - (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \sin x} =$
 $= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x}{(1 + \cos x) \sin x} = 0$
 d) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 Obie strony równości mnożymy przez $\sin x(1 + \cos x)$ i otrzymujemy:
 $(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x =$
 $= 2 + 2 \cos x$
 $1 + 2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x =$
 $= 2 + 2 \cos x$
 $2 + 2 \cos x = 2 + 2 \cos x$
3. a) $L = \frac{(1 - \sin x)^2 - (1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} =$
 $= \frac{2(-2 \sin x)}{\cos^2 x} = P,$
 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $L = \frac{\tan x(1 + \cot^2 x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$
 $= (\tan x + \cot x) \cdot \cos^2 x =$
 $= \frac{1}{\sin x \cos x} \cdot \cos^2 x = P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 c) $L = \frac{(\cot x + 1) \tan x}{(\cot x - 1) \tan x} =$
 $= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $L = \left(\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) \cdot \tan x =$
 $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} \cdot \tan x = \frac{\tan x}{\cos x} =$
 $= P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 e) $L = \frac{\sin x}{\cos x} : \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) =$
 $\frac{\sin x}{\cos x} : \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \sin^2 x =$
 $= P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 f) $L = \frac{(\tan x - \cot x) \tan x}{(\tan x + \cot x) \tan x} =$
 $= \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = P,$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Zadania

- D 1.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
- a) $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$ d) $2 \sin^2 x - 1 = 1 - 2 \cos^2 x$
 b) $\cos x \sin^2 x + \cos^3 x = \cos x$ e) $\cos^2 x + \tan^2 x \cos^2 x = 1$
 c) $1 - 2 \sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$ f) $\cos x + \tan^2 x \cos x = \frac{1}{\cos x}$
- D 2.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
- a) $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$ d) $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin x}$
 b) $\frac{\tan x + \cos x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ e) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$
 c) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ f) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{2}{\cos x}$
- D 3.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
- a) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} - \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{-4 \sin x}{\cos^2 x}$ d) $\frac{\cos x + \tan x \sin x}{\cot x} = \frac{\tan x}{\cos x}$
 b) $\frac{\tan x(1 + \cot^2 x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x \cos x}$ e) $\frac{\tan x}{\tan x + \cot x} = \sin^2 x$
 c) $\frac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ f) $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$
4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .
- a) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ c) $\sin x = \frac{2}{3}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
 b) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ i $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x (uwzględnij dwa przypadki).
- a) $\sin x = \frac{1}{3}$ c) $\cos x = -\frac{2}{3}$ e) $\sin x = \frac{7}{25}$ g) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
 b) $\sin x = -\frac{12}{13}$ d) $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ f) $\cos x = -\frac{7}{25}$ h) $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$
6. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .
- a) $\tan x = -\frac{1}{2}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ c) $\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
 b) $\tan x = -\frac{1}{2}$ i $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ d) $\cot x = \frac{2}{3}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
7. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x (uwzględnij dwa przypadki).
- a) $\tan x = \frac{3}{4}$ b) $\tan x = -4$ c) $\tan x = -\frac{12}{5}$ d) $\tan x = \frac{1}{2}$
- 8.** Oblicz $\tan^2 x + \cot^2 x$ oraz $\tan^3 x + \cot^3 x$, jeśli $\tan x + \cot x = 3$.
6. a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cot x = -2$ c) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos x = \frac{2}{3}, \cot x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 b) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cot x = -2$ d) $\sin x = -\frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \tan x = \frac{3}{2}$
7. a) $\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}, \cot x = \frac{4}{3}$ lub $\sin x = -\frac{3}{5}, \cos x = -\frac{4}{5}, \cot x = \frac{4}{3}$
 b) $\sin x = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos x = -\frac{\sqrt{17}}{17}, \cot x = -\frac{1}{4}$
 lub $\sin x = -\frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos x = \frac{\sqrt{17}}{17}, \cot x = -\frac{1}{4}$
 c) $\sin x = -\frac{12}{13}, \cos x = \frac{5}{13}, \cot x = -\frac{5}{12}$ lub $\sin x = \frac{12}{13}, \cos x = -\frac{5}{13}, \cot x = -\frac{5}{12}$
 d) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cot x = 2$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cot x = 2$
8. $\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = 9 - 2 = 7,$
 $\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x \cot x + \cot^2 x) = 3(7 - 1) = 18$

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = x$, $y = \sin x$ i $y = \operatorname{tg} x$.

Dla „małych” kątów x wykres funkcji $y = x$ jest dobrym przybliżeniem wykresów funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \operatorname{tg} x$.

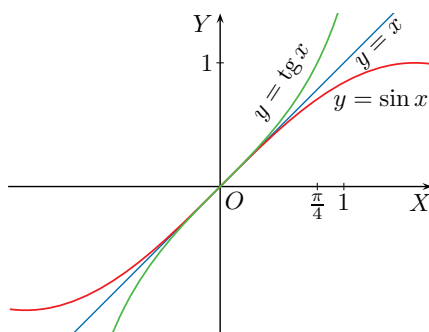
Na przykład $\frac{\pi}{100} \approx 0,0314159$, natomiast:

$$\sin \frac{\pi}{100} \approx 0,0314108,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{100} \approx 0,0314263.$$

Zwróć uwagę, że:

- jeśli $x > 0$, to $\sin x < x$,
- jeśli $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, to $\operatorname{tg} x > x$.



D 1. Nie korzystając z kalkulatora, uzasadnij podaną nierówność.

a) $\sin \frac{\pi}{20} < 0,2$

b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{10} > 0,09$

c) $\sin^2 \frac{\sqrt{\pi}}{10} < 0,032$

Przybliżone wartości funkcji sinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Na przykład:

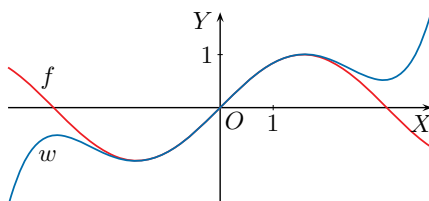
$$\sin \frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{4} \right)^5 \approx 0,707$$

Przybliżone wartości funkcji cosinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

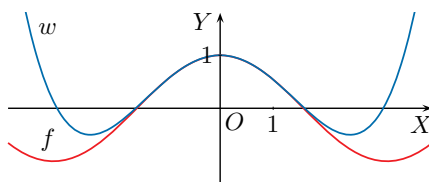
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Na przykład:

$$\cos \frac{\pi}{6} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{6} \right)^4 \approx 0,8660539.$$



Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $w(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.



Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \cos x$ i $w(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. Sprawdź, czy błąd podanego wyżej przybliżenia wartości $\cos \frac{\pi}{6}$ jest mniejszy od 0,00003.

3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przybliżonych wartości funkcji sinus i cosinus, korzystając z powyższych wzorów.

α	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin \alpha$	0,309	0,434	0,707
$\cos \alpha$	0,951	0,901	0,707

1. a) $\sin \frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{20} < \frac{4}{20} = 0,2$

b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{10} > \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 = \frac{\pi^2}{100} > \frac{3^2}{100} > 0,09$

c) $\sin^2 \frac{\sqrt{\pi}}{10} < \left(\frac{\sqrt{\pi}}{10} \right)^2 = \frac{\pi}{100} < \frac{3,2}{100} = 0,032$

2. $\cos \frac{\pi}{6} \approx 0,8660254$

$0,8660539 - 0,8660254 = 0,0000285 < 0,00003$

Uczeń:

- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów,
- stosuje wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta,
- wykorzystuje wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych połowy kąta,
- stosuje poznane wzory do przekształcania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne, w tym do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych,
- wyznacza zbiór wartości funkcji, stosując wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów,
- wyprowadza wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta i funkcje trygonometryczne połowy kąta.

*1.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Twierdzenie

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ prawdziwe są poniższe wzory.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{sinus sumy kątów}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \text{sinus różnicy kątów}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{cosinus sumy kątów}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \text{cosinus różnicy kątów}$$

Dowód wzoru na sinus sumy kątów i wskazówki, jak udowodnić pozostałe wzory, został podany na str. 75.

Przykład 1

a) Oblicz $\sin 75^\circ$.

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów.

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

b) Oblicz $\sin \frac{\pi}{12}$.

Korzystamy ze wzoru na sinus różnicy kątów.

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

- Oblicz $\cos 75^\circ$, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów.
- Oblicz $\sin 105^\circ$, korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów.
- Oblicz $\cos \frac{\pi}{12}$, korzystając ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 2

Oblicz.

- $\cos 28^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 28^\circ \cdot \sin 17^\circ = \cos(28^\circ + 17^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin 3^\circ \cdot \cos 33^\circ - \cos 3^\circ \cdot \sin 33^\circ = \sin(3^\circ - 33^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
- $\sin \frac{3}{10}\pi \cdot \cos \frac{1}{5}\pi + \cos \frac{3}{10}\pi \cdot \sin \frac{1}{5}\pi = \sin\left(\frac{3}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Ćwiczenie 1

- $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\sin 85^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \cdot \cos 85^\circ$ c) $\cos \frac{8}{7}\pi \cdot \cos \frac{1}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi \cdot \sin \frac{1}{7}\pi$
b) $\sin 33^\circ \cdot \cos 12^\circ + \sin 12^\circ \cdot \cos 33^\circ$ d) $\sin \frac{\pi}{18} \cdot \sin \frac{4}{9}\pi - \cos \frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{4}{9}\pi$

Ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów bezpośrednio wynikają wzory na sinus podwojonego kąta i cosinus podwojonego kąta.

D Ćwiczenie 3

Wyprowadź podane obok wzory na sinus podwojonego kąta i cosinus podwojonego kąta.

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$:

- a) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, b) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.

Przykład 3

Oblicz $\cos 2\alpha$, jeśli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$, jeśli:

- a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, b) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ oraz $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$.

Przykład 4

Oblicz $\sin \frac{\pi}{8}$ i $\cos \frac{\pi}{8}$.

Podstawiamy $\alpha = \frac{\pi}{8}$ do wzoru $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \\ \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Sprzeczność, bo $\sin \frac{\pi}{8} > 0$.

Po skorzystaniu z jedyńki trygonometrycznej otrzymujemy $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Ćwiczenie 6

Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli:

- a) $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $2\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, b) $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz $2\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

Ćwiczenie 6

a) $2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1}{3}$, więc $\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{4})$, zatem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos^2 2\alpha = \frac{4}{5}$ i $2\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, więc $\cos 2\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$2 \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$, więc $\sin \alpha = \frac{\sqrt{50+20\sqrt{5}}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{50-20\sqrt{5}}}{10}$

Ćwiczenie 2

- a) $\sin(85^\circ - 25^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\sin(33^\circ + 12^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\cos(\frac{8}{7}\pi - \frac{1}{7}\pi) = \cos \pi = -1$
d) $-\cos(\frac{1}{18}\pi + \frac{8}{18}\pi) = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$

Ćwiczenie 3

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \\ &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

- a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$
b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

Ćwiczenie 5

- a) $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$,
więc $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
zatem $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$
b) $\sin^2 \alpha = \frac{144}{169}$ i $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$,
więc $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$,
zatem $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$,
 $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$

Ćwiczenie 7

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{1 - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 8

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) &= 2 - \sqrt{3} \\ \text{b) } \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) &= 2 + \sqrt{3} \\ \text{c) } \operatorname{tg}(45^\circ + 60^\circ) &= -2 - \sqrt{3} \\ \text{d) } \operatorname{tg}(2 \cdot 60^\circ) &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 9

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 = \\ &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \sin(30^\circ + \beta) &= \frac{3+4\sqrt{3}}{10}, \\ \sin(60^\circ - \beta) &= \frac{3\sqrt{3}-4}{10} \\ \text{b) } \sin(30^\circ + \beta) &= \frac{4\sqrt{3}-3}{10}, \\ \sin(60^\circ - \beta) &= -\frac{3\sqrt{3}+4}{10} \\ \text{c) } \sin(30^\circ + \beta) &= \frac{5-12\sqrt{3}}{26}, \\ \sin(60^\circ - \beta) &= \frac{5\sqrt{3}+12}{26} \\ \text{d) } \sin(30^\circ + \beta) &= -\frac{24+7\sqrt{3}}{50}, \\ \sin(60^\circ - \beta) &= \frac{7-24\sqrt{3}}{50} \\ 2. \text{ a) } \cos(45^\circ + \beta) &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}, \\ \cos(60^\circ - \beta) &= \frac{3+\sqrt{6}}{6} \\ \text{b) } \cos(45^\circ + \beta) &= \frac{4+\sqrt{2}}{6}, \\ \cos(60^\circ - \beta) &= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ i } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}.$$

Dowód

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Ćwiczenie 7

Udowodnij podane obok tożsamości trygonometryczne.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz.

$$\text{a) } \operatorname{tg} 15^\circ \quad \text{b) } \operatorname{tg} 75^\circ \quad \text{c) } \operatorname{tg} 105^\circ \quad \text{d) } \operatorname{tg} 120^\circ$$

Ćwiczenie 9

Udowodnij, że dla $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, zachodzi tożsamość $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$.

Zadania

- Oblicz $\sin(30^\circ + \beta)$ i $\sin(60^\circ - \beta)$, jeśli wiadomo, że:
 - $\sin \beta = \frac{4}{5}$ i $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$,
 - $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ i $\beta \in (90^\circ; 180^\circ)$,
 - $\cos \beta = \frac{5}{13}$ i $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$,
 - $\sin \beta = -\frac{7}{25}$ i $\beta \in (180^\circ; 270^\circ)$.
- Oblicz $\cos(45^\circ + \beta)$ i $\cos(60^\circ - \beta)$, jeśli wiadomo, że:
 - $\cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$,
 - $\sin \beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$.
- Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$, jeśli wiadomo, że:

$$\sin \alpha = \frac{24}{25} \text{ i } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \text{ oraz } \cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ i } \beta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$$
 - Oblicz $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$, jeśli wiadomo, że:

$$\sin \alpha = -0,8 \text{ i } \alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi) \text{ oraz } \cos \beta = -0,75 \text{ i } \beta \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$$
 - Oblicz $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$, jeśli wiadomo, że:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ i } \alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \text{ oraz } \cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ i } \beta \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$$
- Uzasadnij, że poniższa zależność jest tożsamością trygonometryczną.
 - $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
 - $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
 - $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$
 - $\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$
 - $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
 - $\cos 4\alpha = 1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

- $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{44}{125}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{117}{125}$
 - $\sin(\alpha - \beta) = \frac{12+3\sqrt{7}}{20}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{7}-9}{20}$
 - $\sin(\alpha - \beta) = 0$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{7}{9}$
- $P = \frac{1}{2}[\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)] = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \sin \beta = L$
 - analogicznie jak a)
 - $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha =$
 $= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha =$
 $= -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$
 - analogicznie jak d)
 - $\cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = 1 - 2(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

D 5. Uzasadnij, że poniższa zależność jest tożsamością trygonometryczną.

- a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$
 b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
 c) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$
 d) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

6. Oblicz.

- a) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ$ c) $\sin \frac{1}{12} \pi \sin \frac{3}{4} \pi - \cos \frac{1}{12} \pi \cos \frac{3}{4} \pi$
 b) $\sin 111^\circ \cos 66^\circ - \cos 111^\circ \sin 66^\circ$ d) $\cos \frac{4}{3} \pi \cos \frac{2}{3} \pi + \sin \frac{4}{3} \pi \sin \frac{2}{3} \pi$

7. Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli wiadomo, że:

- a) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, c) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$,
 b) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$, d) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.

D 8. a) Wyprowadź podane obok wzory.

b) Oblicz $\sin \frac{\pi}{12}$ i $\cos \frac{\pi}{12}$.

9. Oblicz $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$, jeśli wiadomo, że:

- a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$,
 b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$.

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f i naszkicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \sin x - \cos x$ c) $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$
 b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$

Wskazówka. W podpunkcie b) zauważ, że $f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$.

11. Oblicz $\operatorname{tg} 2\alpha$, jeśli wiadomo, że:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} + 1$, d) $\operatorname{tg} \alpha = 2 + \sqrt{3}$.

12. Oblicz $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, a $\operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{2}$.

10. a) $f(x) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, $f(D_f) = \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

b) $f(x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$, $f(D_f) = \langle -2; 2 \rangle$

c) $f(x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$, $f(D_f) = \langle -2; 2 \rangle$

d) $f(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$, $f(D_f) = \langle -2; 2 \rangle$

11. a) $\frac{4}{3}$ **b)** 1 **c)** -1 **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{5}$

5. a) $L = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha = P$

b) $L = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = P$

c) $L = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cdot (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = P$

d) analogicznie jak **c)**

6. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $-\frac{1}{2}$

7. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

8. a) Korzystamy ze wzorów z ćwiczenia 4.

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{b) } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

9. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Uczeń:

- zapisuje dany kąt w postaci $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ lub $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,
- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów z zastosowaniem wzorów redukcyjnych (także z wykorzystaniem tablic wartości trygonometrycznych lub kalkulatora),
- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów z zastosowaniem własności funkcji trygonometrycznych.

*1.13. Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

D Przykład 1

Udowodnij wzór redukcyjny.

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \qquad \text{c) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \qquad \text{d) } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Skorzystamy ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów.

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - 1 \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\text{d) } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Wzory redukcyjne

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij wzór redukcyjny.

$$\text{a) } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \qquad \text{b) } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \qquad \text{c) } \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Ćwiczenie 1

$$\text{a) } \sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\text{b) } \cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha = -1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Multiteka

• Wzory redukcyjne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.13

Generator
testów i sprawdzianów

W podanych wzorach redukcyjnych miarę kąta można przedstawić w postaci $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$, gdzie $k \in \mathbf{N}$ oraz $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$. Zauważmy, że:

- jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja sinus zmienia się na cosinus, a funkcja cosinus – na funkcję sinus (mówimy, że funkcja zmienia się na cofunkcję). Analogicznie jest dla pary funkcji tangens i cotangens;
- jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja pozostaje bez zmiany;
- znak plus lub minus przed funkcją zależy od tego, czy wartość wyjściowej funkcji jest dodatnia, czy ujemna w danej ćwiartce układu współrzędnych.

$\sin \alpha > 0$	$\sin \alpha > 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha < 0$	$\operatorname{tg} \alpha > 0$
$\operatorname{ctg} \alpha < 0$	$\operatorname{ctg} \alpha > 0$
$\sin \alpha < 0$	$\sin \alpha < 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha > 0$	$\operatorname{tg} \alpha < 0$
$\operatorname{ctg} \alpha > 0$	$\operatorname{ctg} \alpha < 0$

Dla kątów, których miary podano w stopniach, wzory redukcyjne mają następującą postać:

Wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	
$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

Przykład 2

Oblicz $\sin 210^\circ$, korzystając ze wzoru $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

$$\sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Zauważ, że ten sam wynik otrzymamy, zapisując kąt 210° w postaci $180^\circ + 30^\circ$ i korzystając ze wzoru $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

Ćwiczenie 2

- a) $\sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $\cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 c) $\operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$
 d) $\cos(\frac{5}{3}\pi + 2\pi) = \cos \frac{5}{3}\pi = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 e) $\sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 f) $\cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 g) $\sin(30^\circ - 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 h) $-\operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 i) $\operatorname{tg}(45^\circ - 360^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$
 j) $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 k) $\cos \frac{2}{3}\pi = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
 l) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Odpowiedzi do zadań

2. a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$
 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $-\sqrt{3}$
 i) $-\sqrt{3}$ j) -1 k) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ l) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 i) -1 j) $-\frac{1}{2}$ k) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ l) $-\sqrt{3}$

5. a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Przykład 3

Oblicz $\cos(-\frac{13}{4}\pi)$.

$$\begin{aligned}\cos(-\frac{13}{4}\pi) &= \cos \frac{13}{4}\pi = \\ &= \cos(2\pi + \frac{5}{4}\pi) = \cos \frac{5}{4}\pi = \\ &= \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Korzystamy z okresowości funkcji cosinus.

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\sin 240^\circ$ d) $\cos \frac{11}{3}\pi$ g) $\sin(-330^\circ)$ j) $\sin(-\frac{11}{4}\pi)$
 b) $\cos 480^\circ$ e) $\sin \frac{5}{3}\pi$ h) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$ k) $\cos(-\frac{16}{3}\pi)$
 c) $\operatorname{tg} 225^\circ$ f) $\cos \frac{7}{6}\pi$ i) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$ l) $\operatorname{ctg}(-\frac{4}{3}\pi)$

Zadania

- D 1. Udowodnij wzór redukcyjny.

- a) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ c) $\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin \alpha$
 b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ d) $\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

2. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\cos(-\frac{4}{3}\pi)$ d) $\sin(-\frac{5}{6}\pi)$ g) $\sin \frac{8}{3}\pi$ j) $\cos(-11\pi)$
 b) $\sin \frac{5}{4}\pi$ e) $\cos(-\frac{2}{3}\pi)$ h) $\operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi$ k) $\operatorname{ctg} \frac{4}{3}\pi$
 c) $\cos \frac{7}{4}\pi$ f) $\cos(-\frac{11}{4}\pi)$ i) $\operatorname{ctg}(-\frac{7}{6}\pi)$ l) $\operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi$

3. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\sin 120^\circ$ d) $\cos 855^\circ$ g) $\operatorname{tg} 510^\circ$ j) $\sin(-870^\circ)$
 b) $\sin 135^\circ$ e) $\cos 840^\circ$ h) $\operatorname{tg} 570^\circ$ k) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$
 c) $\cos 330^\circ$ f) $\sin 660^\circ$ i) $\operatorname{tg} 1035^\circ$ l) $\operatorname{ctg}(-750^\circ)$

4. Oblicz, korzystając z wartości podanych obok.

- a) $\sin 72^\circ$ d) $\sin 666^\circ$
 b) $\cos 108^\circ$ e) $\sin(-468^\circ)$
 c) $\cos 234^\circ$ f) $\cos(-864^\circ)$

α	18°	36°	54°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

5. Wiadomo, że $\cos x = \frac{1}{4}$ oraz $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Oblicz:

- a) $\sin(\frac{3\pi}{2} + x)$, b) $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, c) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$.

1. a) $\sin(\pi + \alpha) = \sin \pi \cos \alpha + \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + (-1) \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha$
 b) $\cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cos \alpha - \sin \pi \sin \alpha = (-1) \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$
 c) $\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \cos \frac{3}{2}\pi \cos \alpha - \sin \frac{3}{2}\pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$
 d) $\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = \sin \frac{3}{2}\pi \cos \alpha - \cos \frac{3}{2}\pi \sin \alpha = (-1) \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$

4. a) $\sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$$\text{b) } \cos(90^\circ + 18^\circ) = -\sin 18^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{c) } \cos(180^\circ + 54^\circ) = -\cos 54^\circ = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{d) } \sin(2 \cdot 360^\circ - 54^\circ) = -\sin 54^\circ = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\text{e) } \sin(-108^\circ - 360^\circ) = -\sin 108^\circ = -\cos 18^\circ = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{f) } \cos(-2 \cdot 360^\circ - 144^\circ) = \cos 144^\circ = \cos(180^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

6. Oblicz.

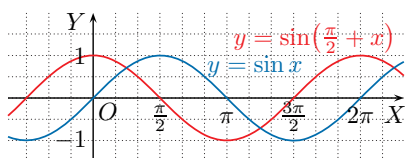
- a) $2 \sin 120^\circ + 4 \cos 60^\circ$ d) $4 \sin 45^\circ \cos 135^\circ$ g) $\sin^2 310^\circ + \cos^2 310^\circ$
 b) $\sin 420^\circ \cos(-390^\circ)$ e) $\operatorname{tg} 300^\circ \operatorname{ctg} 210^\circ$ h) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 225^\circ$
 c) $\operatorname{ctg} 120^\circ + \operatorname{tg}(-210^\circ)$ f) $\frac{2 \cos 120^\circ}{\operatorname{ctg} 120^\circ} \operatorname{tg} 45^\circ$ i) $\operatorname{tg}^2 780^\circ - 3 \operatorname{ctg}^2 420^\circ$

7. Oblicz.

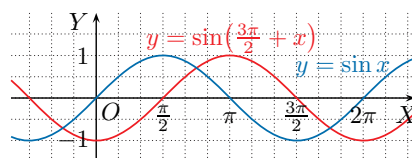
- a) $\sin \frac{5}{6}\pi + \cos(-\frac{\pi}{3})$ d) $\sin \frac{7}{6}\pi + \cos(-\frac{7}{3}\pi)$
 b) $6 \operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi \cos \frac{7}{3}\pi$ e) $\sin^2(-\frac{13}{6}\pi) + \cos^2 \frac{7}{4}\pi$
 c) $8 \sin \frac{5}{4}\pi \cos(-\frac{4}{3}\pi)$ f) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{7\pi}{3}$

D 8. Przeczytaj informację w ramce.

Wzory redukcyjne można uzasadnić, korzystając z odpowiedniego przesunięcia wykresu funkcji trygonometrycznej. Poniżej przedstawiono uzasadnienia wzorów: $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ oraz $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$.



Wykres funkcji $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = \cos x$.



Wykres funkcji $y = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = -\cos x$.

Uzasadnij wzór, stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji.

- a) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$ b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x$

9. Korzystając z podanego obok fragmentu tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz:

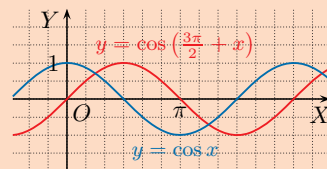
- a) $\sin 413^\circ$, d) $\sin 589^\circ$,
 b) $\cos 769^\circ$, e) $\cos 860^\circ$,
 c) $\operatorname{tg} 597^\circ$, f) $\operatorname{tg} 954^\circ$.

D 10. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, uzasadnij, że wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0^\circ; 45^\circ \rangle$.

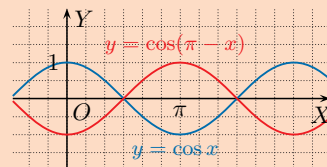
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504

6. a) $\sqrt{3} + 2$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 d) -2 e) -3 f) $\sqrt{3}$
 g) 1 h) 1 i) 2
 7. a) 1 b) $-3\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 0
 e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

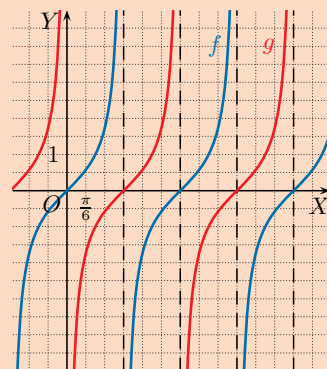
8. a)



b)



- c) $f(x) = \operatorname{tg} x$,
 $g(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$



9. a) $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ \approx 0,7986$
 b) $\cos 49^\circ = \sin 41^\circ \approx 0,6561$
 c) $\operatorname{tg} 57^\circ = \operatorname{ctg} 33^\circ \approx 1,5399$
 d) $\sin 229^\circ = -\cos 41^\circ \approx -0,7547$
 e) $\sin 140^\circ = -\cos 40^\circ \approx -0,7660$
 f) $\operatorname{tg} 54^\circ = \operatorname{ctg} 36^\circ \approx 1,3764$

10. Dla dowolnego kąta β istnieje kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$ taki, że $\beta = k \cdot 90^\circ + \alpha$.
 Jeżeli $\alpha \in \langle 0^\circ; 45^\circ \rangle$, to korzystając z odpowiedniego wzoru redukcyjnego, wartości funkcji kąta $k \cdot 90^\circ + \alpha$ możemy wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .
 Jeżeli $\alpha \in \langle 45^\circ; 90^\circ \rangle$, to $\beta = (k+1) \cdot 90^\circ - (90^\circ - \alpha)$ i $(90^\circ - \alpha) \in \langle 0^\circ; 45^\circ \rangle$.
 Zatem korzystając z odpowiedniego wzoru redukcyjnego, wartości funkcji trygonometrycznych kąta $(k+1) \cdot 90^\circ - (90^\circ - \alpha)$ możemy wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta $(90^\circ - \alpha)$.

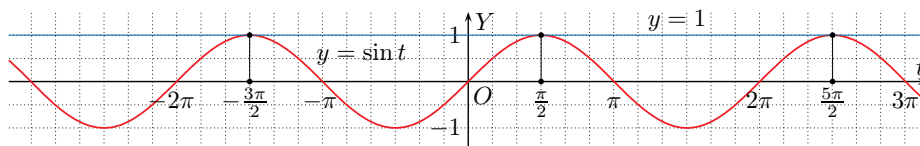
Uczeń:

- rozwiązuje proste równania trygonometryczne,
- rozwiązuje równania trygonometryczne, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

1.14. Równania trygonometryczne (1)*Przykład 1**

Rozwiąż równanie $\sin 2x = 1$.

Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\sin t = 1$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = 1$:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x :

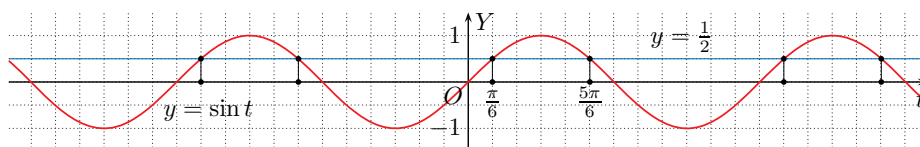
$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Podstawiamy $t = 2x - \frac{\pi}{6}$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\sin t = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = \frac{1}{2}$:

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x = 1$

d) $2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

g) $6 \sin(\pi - \frac{\pi x}{4}) = 3$

b) $\cos 2x = -1$

e) $\cos(3x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

h) $2 \sin \pi x - \sqrt{3} = 0$

c) $\cos 4x = \frac{1}{2}$

f) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

i) $2 \cos 2\pi x + \sqrt{2} = 0$

Ćwiczenie 1

a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

g) $x = \frac{2}{3} + 8k$ lub $x = \frac{10}{3} + 8k, k \in \mathbf{Z}$

h) $x = \frac{1}{3} + 2k$ lub $x = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}$

i) $x = \frac{3}{8} + k$ lub $x = \frac{5}{8} + k, k \in \mathbf{Z}$

Multiteka

- Równania trygonometryczne – sinus
- Równania trygonometryczne – cosinus
- Równania trygonometryczne – tangens

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.14

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Oblicz sumę dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania $\sin^2 x = 1$.

$$\sin^2 x = 1, \text{ gdy } \sin x = 1 \text{ lub } \sin x = -1$$

Pierwiastkami równania $\sin^2 x = 1$ są liczby postaci: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Suma dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania jest równa:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2} + 9\pi\right) &= 10 \cdot \frac{\pi}{2} + (1 + 2 + \dots + 9)\pi = \\ &= 5\pi + 45\pi = 50\pi \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania.

a) $\cos^2 x = 1$ b) $2\sin^2 x = 1$ c) $4\sin^2 x = 3$

Ćwiczenie 3

Ile pierwiastków równania należy do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$?

a) $\sin^2 3x = 1$ c) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ e) $|\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)| = 1$
b) $2\cos^2 2x = 1$ d) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$ f) $|\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)| = 1,5$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$.

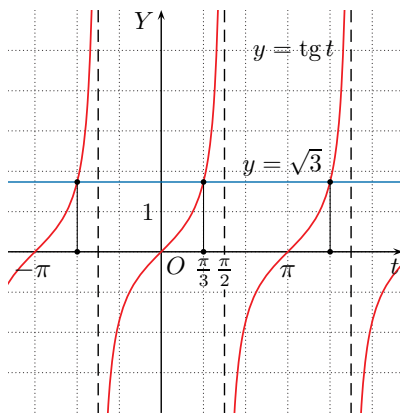
Zakładamy, że $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, czyli $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Podstawiamy $t = 4x$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$. Z wykresu funkcji tangens odczytujemy rozwiązania tego równania: $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Wracamy do niewiadomej x :

$$4x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$



Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} 2x = -1$ c) $\operatorname{tg}^2 2x = 3$ e) $3\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
b) $3\operatorname{tg} \pi x = \sqrt{3}$ d) $3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1$ f) $\sqrt{6}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$.

a) $\operatorname{tg}^2 2x = 1$ b) $\operatorname{tg}^2 4x = 1$ c) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 1$

Ćwiczenie 4

a) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{1}{6} + k, k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 5

a) $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = 2\pi$
b) $\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{16} + \dots + \frac{15\pi}{16} = 4\pi$
c) $\frac{\pi}{2}$

Ćwiczenie 2

a) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 $\pi + 2\pi + 3\pi + \dots + 10\pi = 55\pi$
b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
 $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \dots + \frac{19}{4}\pi = 25\pi$
c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi + \frac{7}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi + \frac{11}{3}\pi + \frac{13}{3}\pi + \frac{14}{3}\pi = 25\pi$

Ćwiczenie 3

a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$
12 pierwiastków
b) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
16 pierwiastków
c) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$ lub $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
8 pierwiastków
d) $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
9 pierwiastków
e) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
9 pierwiastków
f) $x = k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
9 pierwiastków

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
 b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 c) $x = \frac{1}{12}\pi + k\pi, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 d) $x = \pi + 4k\pi, x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 e) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$
2. a) $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
 d) $x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$
 e) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 f) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
3. a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$
 c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 d) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
 e) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
4. a) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$
 b) $x = -\frac{1}{6} + k, x = \frac{1}{6} + k, k \in \mathbf{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.
 a) $\sin 4x = 1$ c) $2 \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 1$ e) $2 \cos(\frac{\pi}{4} - x) = -\sqrt{2}$
 b) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ d) $\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1$ f) $2 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$
2. Rozwiąż równanie.
 a) $\operatorname{tg} 4x = -1$ c) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $3 \operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$
 b) $\operatorname{tg} 6x = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ f) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$
3. Rozwiąż równanie.
 a) $\sin^2 4x = 1$ c) $4 \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = 3$ e) $|2 \cos 3x| = 1$
 b) $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$ d) $6 \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 3$ f) $|\sin 2x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$
4. Rozwiąż równanie.
 a) $\operatorname{tg}^2(4x - \frac{\pi}{2}) = 1$ b) $3 \operatorname{tg}^2 \pi x = 1$ c) $|\sqrt{3} \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})| = 3$
5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $\sin^2 x = 3 \sin x$.

$$\sin^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 3) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = 3$$

Równanie $\sin x = 3$ jest sprzeczne. Równanie $\sin x = 0$ jest spełnione przez liczby postaci $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$ – jest to rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

- a) $\sin^2 x = -\sin x$ c) $\sin^3 x + \sin x = 0$ e) $4 \sin^3 x = \sin x$
 b) $2 \cos^2 x = \cos x$ d) $2 \cos^3 x - \cos x = 0$ f) $3 \cos^3 x = 4 \cos x$
6. Rozwiąż równanie.
 a) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$ b) $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$ c) $\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$
7. Podaj rozwiązania równania należące do przedziału $(-\pi; 2\pi)$.
 a) $2 \sin^2 x = \sin x$ c) $4 \cos^3 x - \cos x = 0$ e) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$
 b) $2 \cos^2 x = \sqrt{2} \cos x$ d) $3 \sin x - 4 \sin^3 x = 0$ f) $3 \operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$
8. Rozwiąż równanie.
 a) $\cos 2x(1 + \operatorname{tg} x) = 0$ b) $\sin x \operatorname{tg} 2x = \sin x$ c) $\cos 2x = \sin 4x$
5. a) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 7. a) $-\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi$
 b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ b) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$
 c) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ c) $-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$
 d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ d) $-\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$
 e) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ e) $-\pi, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi$
 f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ f) $-\pi, -\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{12}, 0, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi, 2\pi$
6. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 8. a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

*1.15. Równania trygonometryczne (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

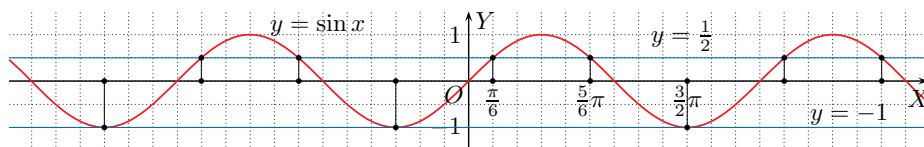
Podstawiamy $t = \sin x$, zakładamy, że $t \in \langle -1; 1 \rangle$, i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1, \quad t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Wracamy do niewiadomej x : $\sin x = -1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązanie równania:

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Uwaga. Powyższe rozwiązanie można też zapisać w postaci $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x - \cos x = 1$

c) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$

b) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

d) $\frac{\cos x + \cos^2 x + \frac{1}{4}}{\sin x} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 2 = 0$$

$$\sin x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3$

c) $2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos x + 1$

b) $4\cos^2 x - \sin^2 x = -1$

d) $2 + \sin^2 x = 4 - \cos^2 x + \cos x$

Ćwiczenie 2

a) $\cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $\cos x = -1, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Uczeń:

- rozwiązuje równania trygonometryczne, które można sprowadzić do równań wielomianowych,
- stosuje wzory na sumę i różnicę sinusów i cosinusów.

Ćwiczenie 1

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$,
 $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = 2k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$,
 $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $\operatorname{tg} x = -1$,
 $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $\cos x = -\frac{1}{2}$,
 $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Multiteka

- Równania trygonometryczne – sinus
- Równania trygonometryczne – cosinus
- Równania trygonometryczne – tangens

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.15

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Rozwiąż równanie $2 \sin x \cos x - \sin x - 2 \cos x + 1 = 0$.

Grupujemy wyrazy znajdujące się po lewej stronie równania.

$$\sin x(2 \cos x - 1) - (2 \cos x - 1) = 0 \quad \text{Wyłączamy wspólny czynnik.}$$

$$(2 \cos x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = 1$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Zatem $x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi: k \in \mathbf{Z}\}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 1 = 0$

b) $4 \sin x \cos x - 2 \cos x - 2 \sin x + 1 = 0$

c) $2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x + 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

d) $4 \sin x \cos x + 2\sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos x + 3$

Przykład 4

Wyznacz te pierwiastki równania $4 \cos 5x \cos 2x = 2 \cos 7x + 1$, które należą do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$.

Korzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów:

$$\cos 7x = \cos(5x + 2x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$$

Zatem równanie można zapisać w postaci:

$$4 \cos 5x \cos 2x = 2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \sin 2x + 1$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 5x \sin 2x = 1$$

$$2 \cos(5x - 2x) = 1 \quad \text{Korzystamy ze wzoru}$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$ należą pierwiastki: $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{5}{9}\pi$, $x = \frac{7}{9}\pi$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz te pierwiastki równania, które należą do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $2 \sin 5x \sin 3x = 1 - \cos 8x$

c) $2 \sin 3x \cos x = \sin 2x - 1$

b) $4 \cos 3x \cos x = 2 \cos 2x + \sqrt{3}$

d) $4 \sin 5x \cos 3x = 2 \sin 8x + \sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

a) $\cos 2x = 1$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
 $0, \pi, 2\pi$

b) $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$
lub $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
 $\frac{\pi}{24}, \frac{11}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, \frac{23}{24}\pi, \frac{25}{24}\pi, \frac{35}{24}\pi,$
 $\frac{37}{24}\pi, \frac{47}{24}\pi$

c) $\sin 4x = -1$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$,
 $k \in \mathbf{Z}$
 $\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$

d) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$
lub $x = \frac{3}{8}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
 $\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi$

Ćwiczenie 3

a) $(2 \sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

b) $(2 \cos x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

c) $(\cos x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

d) $(2 \sin x - \sqrt{3})(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$ d) $\cos^2 x + 2 \sin x = 1$
 b) $\cos^2 x + 6 \cos x + 5 = 0$ e) $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 3$
 c) $2 \sin^2 x - \sin x = 1$ f) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{3} \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin 2x = \cos x$ d) $\cos^3 x - \cos 2x = 1$
 b) $\cos x + \sin 2x = 0$ e) $\sin 2x \operatorname{tg} x = \sin x$
 c) $\cos 2x - \sin x = 0$ f) $\sin x \cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \sin 2x + 2 \sin x = 2 \cos x + 1$ d) $\sin^2 2x + 6 \sin^2 x = 6$
 b) $2 \sin^2 x - \sin^2 2x = \cos^2 2x$ *e) $1 + \sin 2x = \cos 2x$
 c) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ *f) $\frac{1}{2}(\cos 4x - 1) = \cos^2 x$

4. Znajdź liczby należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ i spełniające równanie:

- a) $\sin x + \cos x = 1$, d) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$,
 b) $\sin x - \cos x = 1$, e) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$,
 c) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$, f) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$.

5. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin x - \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x - 1$ c) $\sin 2x - \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin x - 1$
 b) $\operatorname{tg} x - 2 \sin x = 2 - \frac{1}{\cos x}$ d) $\cos 2x = 1 + 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$

*6. Wyznacz największy ujemny pierwiastek równania.

- a) $4 \sin 6x \cos x - 2 \sin 5x = 1$ c) $2 \sin 2x \cos^2 2x - \sin 2x \cos 4x = 1$
 b) $2 \sin 6x \sin 3x = 1 - \cos 9x$ d) $\sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 4x = \operatorname{tg} 2x$

$$\sin \beta = \sin \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + 2k\pi \text{ lub } \beta = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos \beta = \cos \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + 2k\pi \text{ lub } \beta = -\alpha + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

*7. Rozwiąż równanie, korzystając z powyższej własności.

- a) $\sin 3x - \sin 2x = 0$ d) $\cos 4x + \cos 3x = 0$
 b) $\sin 4x + \sin 3x = 0$ e) $\cos 3x - \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0$
 c) $\cos 5x - \cos 3x = 0$ f) $\sin 2x - \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

5. a) $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

6. a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{2}{3}\pi$ c) $-\frac{3}{4}\pi$ d) $-\frac{3}{8}\pi$

7. a) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{2}{7}k\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = (2k+1)\pi,$

$x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$

$k \in \mathbf{Z}$

2. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$
 $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$

$k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{3}{8}\pi + k\pi,$

$k \in \mathbf{Z}$

3. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$
 $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$
 $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

4. a) $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ b) $\frac{\pi}{2}, \pi$ c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

e) $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

f) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$

Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów

Twierdzenie

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ prawdziwe są poniższe wzory.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{suma sinusów}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{różnica sinusów}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{suma cosinusów}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{różnica cosinusów}$$

Dowód wzoru na sumę sinusów

Niech $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$, wówczas $x + y = \alpha$ oraz $x - y = \beta$. Zatem:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin(x + y) + \sin(x - y) = \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = \\ &= 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Dowody pozostałych wzorów przeprowadza się analogicznie.

Przykład

Rozwiąż równanie $\sin 5x + \sin x = 0$.

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin x &= 2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} = \quad \text{Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów.} \\ &= 2 \sin 3x \cos 2x \end{aligned}$$

Zatem zapisujemy równanie w postaci:

$$\begin{aligned} 2 \sin 3x \cos 2x &= 0 \\ \sin 3x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x &= 0 \\ 3x = k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, &\text{ gdzie } k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, &\text{ gdzie } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

1. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x - \sin 2x = \sin x$

c) $\cos 6x + \sin 5x + \cos 2x = \sin 3x$

b) $\cos 5x - \sin 3x = \cos x$

d) $\cos 7x - \sin 7x = \cos x - \sin x$

2. Korzystając ze wzoru na sumę sinusów lub sumę cosinusów, oblicz wartość wyrażenia:

a) $2 \cos 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 80^\circ$,

c) $\sin 37^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$,

b) $2 \sin 115^\circ \cos 70^\circ - \sin 185^\circ$,

d) $\cos 52^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$.

Wskazówka. W podpunkcie a) znajdź kąty α i β takie, że $\frac{\alpha + \beta}{2} = 70^\circ$ i $\frac{\alpha - \beta}{2} = 10^\circ$.

2. a) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$,

$$2 \cos 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 80^\circ = \cos 80^\circ + \cos 60^\circ - \cos 80^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

b) $\alpha = 185^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

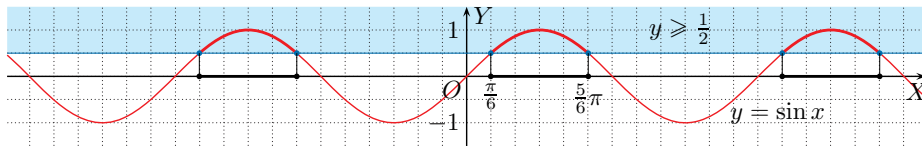
d) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

1. a) $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$
 $2 \sin x \cos 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\sin x (\cos 2x - \cos x) = 0$
 $\sin x (-2 \sin \frac{3}{2}x \sin \frac{x}{2}) = 0$
 $x = k\pi$, $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
- b) $-2 \sin 3x \sin 2x - \sin 3x = 0$
 $\sin 3x (2 \sin 2x + 1) = 0$
 $x = -\frac{5}{12}\pi + k\pi$,
 $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
- c) $2 \cos 4x (\cos 2x + \sin x) = 0$
 $\cos 4x = 0$ lub
 $\cos 2x + \cos (\frac{\pi}{2} - x) = 0$
 $\cos (\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \cos (\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}) = 0$
 $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$,
 $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$
- d) $2 \sin 3x (\sin 4x + \cos 4x) = 0$
 $\sin 3x = 0$ lub
 $\sin 4x + \sin (\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$
 $\sqrt{2} \cos (4x - \frac{\pi}{4}) = 0$
 $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{k\pi}{3}$,
 $k \in \mathbf{Z}$

*1.16. Nierówności trygonometryczne

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $\sin x \geq \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Powyższy zapis oznacza, że zbiór rozwiązań nierówności jest sumą wszystkich przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

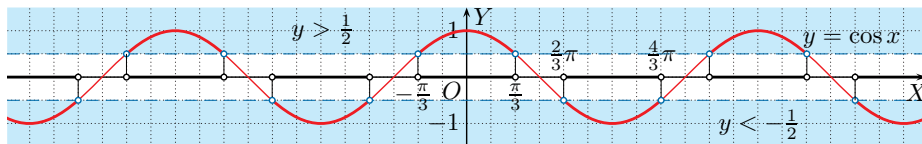
- a) $2 \sin x \leq 1$ b) $\cos x > -\frac{1}{2}$ c) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $\cos^2 x > \frac{1}{4}$.

Zauważmy, że nierówność $\cos^2 x > \frac{1}{4}$ jest równoważna dwóm warunkom:

$$\cos x < -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x > \frac{1}{2}$$



Z wykresu funkcji cosinus odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad \text{lub} \quad x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Odpowiedź można zapisać prościej: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

- a) $2 \sin^2 x < 1$ b) $4 \cos^2 x \geq 3$ c) $|\cos x| \leq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ zachodzi nierówność?

- a) $4 \sin^2 x > 3$ b) $2 \cos^2 x \leq 1$ c) $|2 \sin x| \leq \sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$, czyli $x \in \left[\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 3

a) $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}\pi; \frac{5\pi}{3}\pi\right)$

b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{4}\pi; \frac{7\pi}{4}\pi\right\rangle$

c) $x \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}\pi; \frac{5\pi}{4}\pi \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{4}\pi; 2\pi \rangle$

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności trygonometryczne, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych,
- rozwiązuje nierówności trygonometryczne, stosując odpowiednie podstawienia.

Ćwiczenie 1

a) $x \in \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

Multiteka

- Nierówności trygonometryczne – sinus
- Nierówności trygonometryczne – cosinus
- Nierówności trygonometryczne – tangens

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.16

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

- a) $3x \in \langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \rangle$,
 $x \in \langle \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \rangle$,
 $k \in \mathbf{Z}$
- b) $2x \in (-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$,
 $x \in (-\frac{5\pi}{12} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\pi)$,
 $k \in \mathbf{Z}$
- c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\frac{x}{2} \in \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle$,
 $x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
- d) $\cos 2x > \frac{1}{2}$ lub $\cos 2x < -\frac{1}{2}$,
 $2x \in (-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi)$,
 $x \in (-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 5

- a) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
- b) $x \in \langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
- c) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$,
 $k \in \mathbf{Z}$
- d) $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 6

- a) $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi) \cup$
 $\cup (\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
- b) $x \in (-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$,
 $k \in \mathbf{Z}$

Ćwiczenie 7

- a) $x \in \langle 0; \frac{\pi}{8} \rangle \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{8}\pi) \cup (\frac{3\pi}{4}\pi; \pi)$
- b) $x \in (\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{5\pi}{16}\pi; \frac{3\pi}{8}\pi) \cup$
 $\cup (\frac{9\pi}{16}\pi; \frac{5\pi}{8}\pi) \cup (\frac{13\pi}{16}\pi; \frac{7\pi}{8}\pi)$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$.

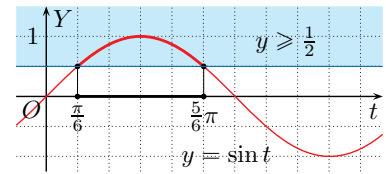
Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy nierówność $\sin t \geq \frac{1}{2}$. Z wykresu funkcji sinus odczytujemy:

$$t \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$2x \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x \in \langle \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$



Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $\sin 3x \leq \frac{1}{2}$ b) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$ c) $\sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$ d) $\cos^2 2x > \frac{1}{4}$

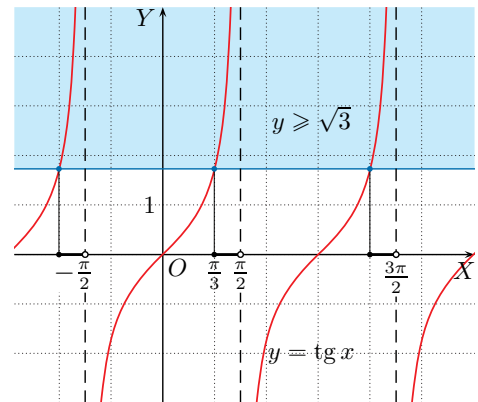
Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

Zakładamy, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Z wykresu funkcji tangens odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \langle \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$



Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

- a) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg} x > -1$
- b) $\operatorname{tg} x \geq 1$ d) $\operatorname{tg} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność: a) $\operatorname{tg}^2 x > 1$, b) $\operatorname{tg}^2 2x \leq 1$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich $x \in \langle 0; \pi \rangle$ zachodzi nierówność: a) $\operatorname{tg} 2x \leq 1$, b) $\operatorname{tg} 4x > 1$?

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $2 \sin x < \sqrt{2}$ b) $2 \sin x \geq \sqrt{3}$ c) $2 \cos x \geq -\sqrt{3}$

2. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sin 3x \geq -\frac{1}{2}$ c) $2 \cos 2x \geq 1$ e) $\operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$
- b) $2 \sin \frac{x}{2} < \sqrt{3}$ d) $\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} \leq 2$ f) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x \leq -1$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{1}{4}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
- b) $x \in \langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
- c) $x \in \langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
2. a) $x \in \langle -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
- b) $x \in (-\frac{8}{3}\pi + 4k\pi; \frac{2}{3}\pi + 4k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
- c) $x \in \langle -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
- d) $x \in \langle -\frac{5\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
- e) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
- f) $x \in \langle \frac{2}{3}\pi + k\pi; \pi + k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sin x \geq 1$ c) $|\cos x| < 1$ e) $\sin^2 x < 1$
b) $\cos x < 1$ d) $|\sin x| \geq 1$ f) $\cos^2 x \geq 1$

4. Dla jakich $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$ zachodzi nierówność?

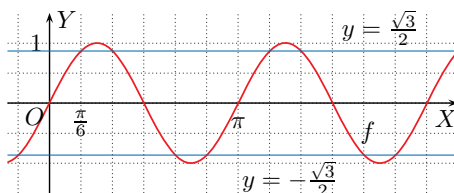
- a) $|2 \cos x| > 1$ c) $\cos^2 x \geq \frac{1}{2}$ e) $4 \cos^2 2x - 3 < 0$
b) $|2 \sin x| > \sqrt{3}$ d) $4 \sin^2 x \leq 1$ f) $2 \sin^2 2x - 1 > 0$

5. Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ zachodzi nierówność?

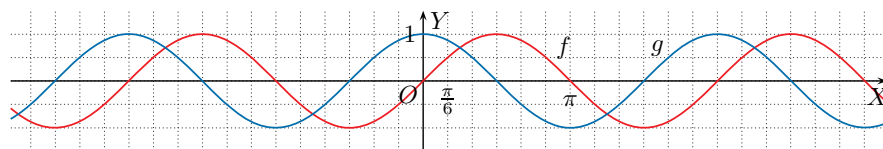
- a) $\operatorname{tg} x < -1$ c) $\operatorname{tg}^2 x - 1 \leq 0$ e) $|3 \operatorname{tg} 2x| < \sqrt{3}$
b) $3 \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg}^2 x - 3 > 0$ f) $|\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}| > 3$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin 2x$. Korzystając z rysunku, podaj rozwiązanie nierówności:

- a) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\sin 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



7. a) Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$. Dla jakich $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$ zachodzi nierówność $\sin x \geq \cos x$?



b) Dla jakich $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$ zachodzi nierówność $\sin x < -\cos x$?

8. Narysuj wykresy odpowiednich funkcji i odczytaj z nich zbiór rozwiązań nierówności zawarty w przedziale $(0; \pi)$.

- a) $\sin x \leq \operatorname{tg} x$ b) $\sin 2x \geq \cos x$ c) $|\cos x| > \sin x$

9. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sin x + |\sin x| > 1$ b) $2 \cos x + |\cos x| \leq \frac{3}{2}$ c) $|\sin x| \cdot \cos x \geq \frac{1}{2}$

10. Rozwiąż nierówność.

- a) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0$ c) $2 \sin^2 x - 3 \cos x > 3$
b) $2 \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x > 2$ d) $5 \cos x \leq 4 + \cos 2x$

11. Rozwiąż nierówność.

- a) $3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x < 3$ b) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x \leq 0$

3. a) $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

d) $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

f) $x \in \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$

4. a) $x \in \langle -\pi; -\frac{2}{3}\pi \rangle \cup \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}\pi; \pi \rangle$

b) $x \in \langle -\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \rangle$

c) $x \in \langle -\pi; -\frac{3}{4}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \pi \rangle$

d) $x \in \langle -\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; \pi \rangle$

e) $x \in \langle -\frac{11}{12}\pi; -\frac{7}{12}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle -\frac{5}{12}\pi; -\frac{\pi}{12} \rangle \cup$

$\cup \langle \frac{\pi}{12}; \frac{5}{12}\pi \rangle \cup \langle \frac{7}{12}\pi; \frac{11}{12}\pi \rangle$

f) $x \in \langle -\frac{7}{8}\pi; -\frac{5}{8}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle -\frac{3}{8}\pi; -\frac{\pi}{8} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{8}; \frac{3}{8}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle \frac{5}{8}\pi; \frac{7}{8}\pi \rangle$

5. a) $x \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi \rangle \cup \langle \frac{3}{2}\pi; \frac{7}{4}\pi \rangle$

b) $x \in \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$

c) $x \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \rangle$

d) $x \in \langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle \frac{4}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi \rangle \cup \langle \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi \rangle$

e) $x \in \langle 0; \frac{\pi}{12} \rangle \cup \langle \frac{5}{12}\pi; \frac{7}{12}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle \frac{11}{12}\pi; \frac{13}{12}\pi \rangle \cup \langle \frac{17}{12}\pi; \frac{19}{12}\pi \rangle \cup$

$\cup \langle \frac{23}{12}\pi; 2\pi \rangle$

f) $x \in \langle \frac{2}{3}\pi; \pi \rangle \cup \langle \pi; \frac{4}{3}\pi \rangle$

6. a) $x \in \langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \rangle$,
 $k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \langle \frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \rangle$,
 $k \in \mathbf{Z}$

7. a) $x \in \langle -\pi; -\frac{3}{4}\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi \rangle \cup$
 $\cup \langle \frac{9}{4}\pi; 3\pi \rangle$

b) $x \in \langle -\pi; -\frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \rangle \cup$
 $\cup \langle \frac{11}{4}\pi; 3\pi \rangle$

8. a) $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

b) $x \in \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; \pi \rangle$

c) $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \pi \rangle$

9. a) $x \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbf{Z} \}$

10. a) $x \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \langle \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \langle \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; (2k+1)\pi \rangle \cup \langle (2k+1)\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \mathbf{R}$

11. a) $x \in \langle -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

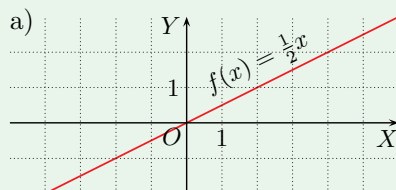
b) $x \in \langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \rangle \cup \langle k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

*1.17. Zagadnienia uzupełniające

Różnowartościowość funkcji

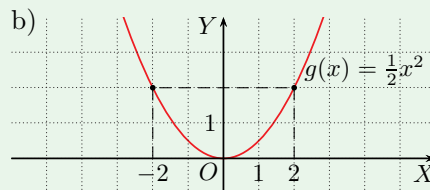
Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **różnowartościowa** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości.

Przykład 1



Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $f(x) = \frac{1}{2}x$ **jest** różnowartościowa.

Jeśli $x_1 \neq x_2$, to $\frac{1}{2}x_1 \neq \frac{1}{2}x_2$.



Funkcja $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ **nie jest** różnowartościowa.

Na przykład $-2 \neq 2$, ale $g(-2) = g(2)$.

Uwaga. Dowolna prosta równoległa do osi OX (prosta o równaniu $y = m$) przecina wykres funkcji różnowartościowej w co najwyżej jednym punkcie.

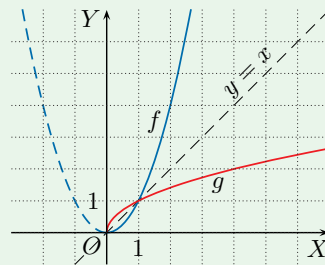
Funkcje odwrotne

Jeśli funkcja $f: X \rightarrow Y$, gdzie Y jest zbiorem wartości funkcji f (tzn. dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$), jest różnowartościowa, to istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $g(f(x)) = x$. Funkcję g nazywamy funkcją **odwrotną** do funkcji f .

Przykład 2

Funkcja $g: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$ określona za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$, gdyż dla każdego $x \in \langle 0; \infty \rangle$ zachodzi równość:

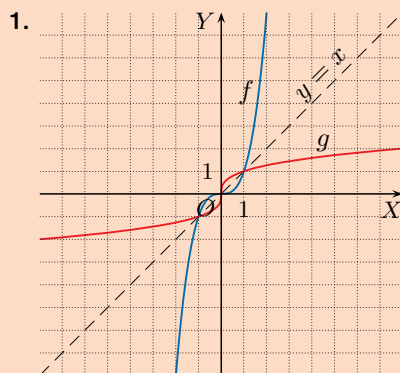
$$g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$



Uwaga. Jeśli funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f , to funkcja f jest funkcją odwrotną do funkcji g . Wykresy wzajemnie odwrotnych funkcji f i g są do siebie symetryczne względem prostej $y = x$.

- Naszczuj wykresy funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ – odwrotnej do f .

Odpowiedzi do zadań

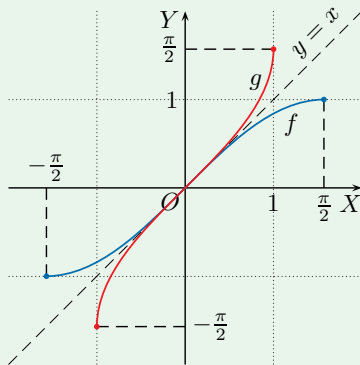


■ Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

Rozpatrzmy funkcję $f: \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ określoną wzorem $f(x) = \sin x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

Funkcja $g: \langle -1; 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus sinus** i zapisuje się ją: $g(x) = \arcsin x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.



Przykład 3

a) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

b) $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$

2. Oblicz.

a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arcsin(-\frac{1}{2})$

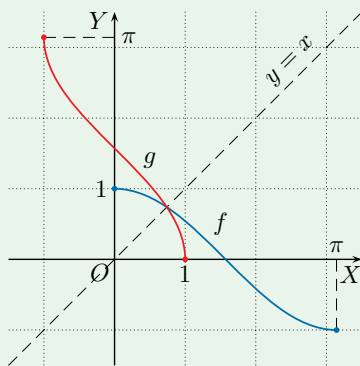
c) $\arcsin(-1)$

2. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{2}$

Rozpatrzmy funkcję $f: \langle 0; \pi \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ określoną wzorem $f(x) = \cos x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

Funkcja $g: \langle -1; 1 \rangle \rightarrow \langle 0; \pi \rangle$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus cosinus** i zapisuje się ją: $g(x) = \arccos x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.



Przykład 4

a) $\cos 0 = 1$, więc $\arccos 1 = 0$

b) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, więc $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

3. Oblicz.

a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

c) $\arccos(-1)$

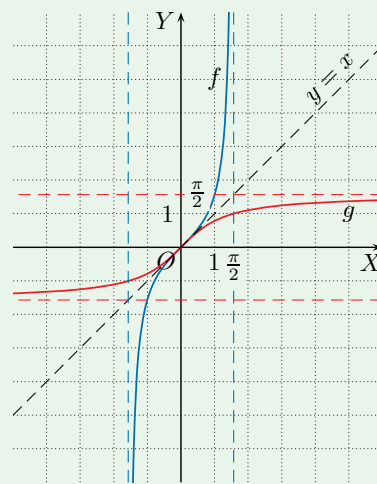
3. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3}{4}\pi$ c) π

Rozpatrzmy funkcję $f: (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja $g: \mathbf{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus tangens** i zapisuje się ją: $g(x) = \operatorname{arctg} x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zwróć uwagę na to, że wykres funkcji $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ma asymptoty poziome $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$.



Przykład 5

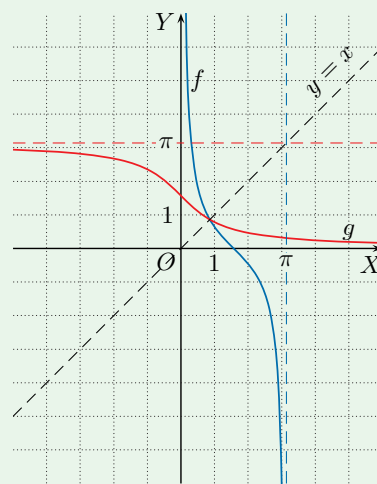
a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, więc $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ b) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$

Rozpatrzmy funkcję $f: (0; \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja $g: \mathbf{R} \rightarrow (0; \pi)$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus cotangens** i zapisuje się ją: $g(x) = \operatorname{arccotg} x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zwróć uwagę na to, że wykres funkcji $g(x) = \operatorname{arccotg} x$ ma asymptoty poziome $y = 0$ i $y = \pi$.



Przykład 6

a) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, więc $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$

b) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, więc $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$

4. Oblicz.

a) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$

b) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{arctg} (-1)$

d) $\operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{3}$

■ Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów – dowody

Rozpatrzmy kąty α i β położone tak jak na rysunku obok, gdzie:

$$\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$$

Punkt A jest punktem przecięcia ramienia końcowego kąta $\alpha + \beta$ z okręgiem jednostkowym.

Prowadzimy odcinek AB prostopadły do ramienia końcowego kąta α , odcinki BC i AD prostopadłe do osi OX oraz odcinek EB prostopadły do odcinka AD .

Kąt EAB ma miarę α (uzasadnij).

Boki trójkąta OAB mają długości:

$$|OA| = 1, |OB| = \cos \beta, |AB| = \sin \beta$$

Zauważmy, że $\frac{|BC|}{|OB|} = \sin \alpha$, więc:

$$|BC| = |OB| \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$$

Podobnie $\frac{|AE|}{|AB|} = \cos \alpha$, więc:

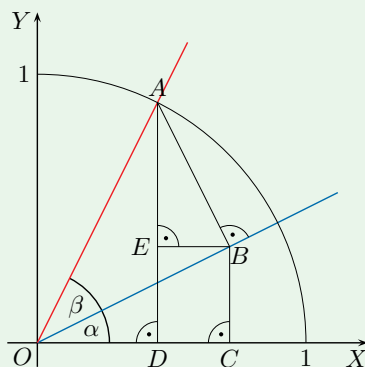
$$|AE| = |AB| \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$$

oraz $\frac{|AD|}{|OA|} = \sin(\alpha + \beta)$, więc:

$$|AD| = |OA| \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

Zatem otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= |AD| = |ED| + |AE| = |BC| + |AE| = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



- D 5.** Korzystając z powyższego rysunku, uzasadnij, że:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \text{ gdzie } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$$

Wskazówka. Rozpatrz długości odcinków OD , DC i OC .

- D 6.** Wykaż prawdziwość wzoru $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, gdy:

- *a) $\alpha, \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\alpha + \beta \in (90^\circ; 180^\circ)$,
- *b) $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\beta, \alpha + \beta \in (90^\circ; 180^\circ)$.

- D 7.** Uzasadnij wzory na sinus i cosinus różnicy kątów. Skorzystaj ze wzorów na sinus i cosinus sumy kątów oraz własności:

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta \text{ i } \cos(-\beta) = \cos \beta$$

- 6. b)** $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\beta, \alpha + \beta \in (90^\circ; 180^\circ)$
Niech $\gamma = \angle AOD$, wówczas $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.
 $\angle AFD = \angle OFB = 90^\circ - \alpha$, czyli $\angle DAF = \alpha$

$$\angle AOB = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$$

$$|OA| = 1, |OB| = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta,$$

$$|AB| = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

$$\frac{|BC|}{|OB|} = \sin \alpha, \text{ czyli } |BC| = -\sin \alpha \cos \beta$$

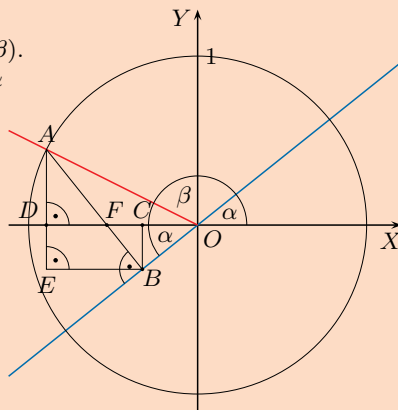
$$\frac{|AE|}{|AB|} = \cos \alpha, \text{ więc } |AE| = \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin \gamma =$$

$$= |AD| = |AE| - |ED| = |AE| - |BC| =$$

$$= \cos \alpha \sin \beta - (-\sin \alpha \cos \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



Uzasadnienie, że $\angle EAB = \alpha$:

Prosta EB jest równoległa do osi OX , stąd $\angle OBE = \alpha$ (kąty naprzemianległe). Zatem:

$$\angle EBA = 90^\circ - \alpha$$

czyli:

$$\begin{aligned} \angle EAB &= 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \\ &= \alpha \end{aligned}$$

- 5.** Zauważmy, że $\frac{|OC|}{|OB|} = \cos \alpha$, więc:

$$\begin{aligned} |OC| &= |OB| \cos \alpha = \\ &= \cos \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

Podobnie $\frac{|EB|}{|AB|} = \sin \alpha$, więc:

$$\begin{aligned} |EB| &= |AB| \sin \alpha = \\ &= \sin \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{|OD|}{|OA|} = \cos(\alpha + \beta), \text{ więc:}$$

$$\begin{aligned} |OD| &= |OA| \cos(\alpha + \beta) = \\ &= \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy:

$$\cos(\alpha + \beta) = |OD| =$$

$$= |OC| - |DC| =$$

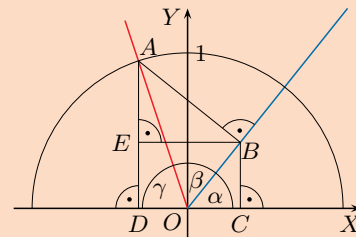
$$= |OC| - |EB| =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

- 6.** Rozpatrzmy kąty α i β położone tak jak na rysunku, gdzie:

a) $\alpha, \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$

oraz $\alpha + \beta \in (90^\circ; 180^\circ)$



$$\angle EAB = \alpha, |OA| = 1$$

$$|OB| = \cos \beta, |AB| = \sin \beta$$

$$\frac{|BC|}{|OB|} = \sin \alpha, \text{ czyli:}$$

$$|BC| = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \cos \alpha, \text{ więc:}$$

$$|AE| = \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$= \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin \gamma =$$

$$= |AD| = |ED| + |AE| =$$

$$= |BC| + |AE| =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

- 7.** $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) =$
 $= \sin \alpha \cos(-\beta) +$
 $+ \cos \alpha \sin(-\beta) =$
 $= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) =$$

$$= \cos \alpha \cos(-\beta) +$$

$$- \sin \alpha \sin(-\beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



Zestawy powtórzeniowe

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{2}{9}\pi$ b) $\frac{3}{5}\pi$ c) $\frac{11}{18}\pi$ d) $\frac{4}{5}\pi$

2. a) 108° b) $157,5^\circ$
c) 100° d) 165°

3. a) 0 b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 8 f) $-\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) -4
c) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ d) -1
e) -3 f) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. a) $\alpha = 225^\circ$ b) $\alpha = 315^\circ$
c) $\alpha = 135^\circ$ d) $\alpha = 315^\circ$
e) $\alpha = 150^\circ$ f) $\alpha = 240^\circ$

7. a) $x = \frac{2}{3}\pi$
b) $x = \frac{4}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi$
c) $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$
d) $x = -\frac{5}{6}\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6}$
e) $x = -\frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{\pi}{4}$
f) $x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$
g) $x = 3\pi$
h) $x = -\frac{4}{3}\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi$

8. a), c), d) 28π b) 32π

Zestaw I

1. Podaj miarę łukową kąta.

a) 40° b) 108° c) 110° d) 144°

2. Podaj miarę kąta w stopniach.

a) $\frac{3}{5}\pi$ b) $\frac{7}{8}\pi$ c) $\frac{5}{9}\pi$ d) $\frac{11}{12}\pi$

3. Oblicz.

a) $(\sin 30^\circ + \cos 120^\circ) \cdot \operatorname{tg} 930^\circ$ d) $\frac{\sin 120^\circ + \cos 300^\circ}{\operatorname{tg}(-225^\circ)} - \sin(-390^\circ)$
b) $\sin 225^\circ \cdot \operatorname{tg} 495^\circ - \cos 330^\circ$ e) $(\sin(-315^\circ) + 3 \cos 45^\circ)^2$
c) $\cos(-570^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-1230^\circ)$ f) $\frac{\sin 270^\circ + 2 \cos(-60^\circ)}{\operatorname{tg}(-225^\circ)} + \cos(-240^\circ)$

4. Oblicz.

a) $\sin(-\frac{5}{3}\pi) - \operatorname{tg} \frac{31}{6}\pi - \cos \frac{3}{2}\pi$ d) $(\sin \frac{13}{6}\pi + \cos \frac{7}{3}\pi) \cdot \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$
b) $\sqrt{2} \cos \frac{5}{4}\pi + \sqrt{3} \operatorname{tg}(-\frac{25}{3}\pi)$ e) $3(\cos \frac{4}{3}\pi + \sin \frac{11}{6}\pi)$
c) $\frac{\sin \frac{37}{6}\pi - 2 \cos \frac{\pi}{6}}{-\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi}$ f) $\frac{\sin \frac{5}{4}\pi - \cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi}$

5. Wyznacz kąty $\alpha \in (-360^\circ; 360^\circ)$ spełniające warunek:

a) $\sin \alpha = \sin 15^\circ$, c) $\cos \alpha = \cos 55^\circ$, e) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 85^\circ$,
b) $\sin \alpha = -\sin 15^\circ$, d) $\cos \alpha = -\cos 55^\circ$, f) $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 85^\circ$.

6. Wyznacz kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ spełniający warunki:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ i $\cos \alpha < 0$, d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin \alpha < 0$,
b) $\operatorname{ctg} \alpha = -1$ i $\cos \alpha > 0$, e) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$,
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos \alpha < 0$, f) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.

7. Wyznacz rozwiązania równania należące do podanego przedziału.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\pi; 2\pi)$ f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$
c) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, $(0; \pi)$ g) $\cos^2 x = 1$, $(2\pi; 4\pi)$
d) $|\sin x| = \frac{1}{2}$, $(-\pi; 0)$ h) $|\cos x| = \frac{1}{2}$, $(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2})$

8. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; 8\pi \rangle$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\sin x = 0,9$ d) $\sin x = 0,3$

5. a) $\alpha \in \{-345^\circ, -195^\circ, 15^\circ, 165^\circ\}$
b) $\alpha \in \{-165^\circ, -15^\circ, 195^\circ, 345^\circ\}$
c) $\alpha \in \{-305^\circ, -55^\circ, 55^\circ, 305^\circ\}$
d) $\alpha \in \{-235^\circ, -125^\circ, 125^\circ, 235^\circ\}$
e) $\alpha \in \{-275^\circ, -95^\circ, 85^\circ, 265^\circ\}$
f) $\alpha \in \{-265^\circ, -85^\circ, 95^\circ, 275^\circ\}$



9. Wyznacz rozwiązania równania należące do podanego zbioru.

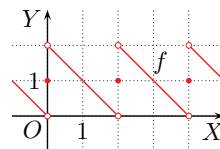
a) $\operatorname{tg} x = 1, (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$

c) $|\operatorname{tg} x| = \frac{\sqrt{3}}, (2\pi; \frac{5}{2}\pi) \cup (\frac{5}{2}\pi; 3\pi)$

b) $\operatorname{tg}^2 x = 3, (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

d) $|\operatorname{ctg} x| = \frac{\sqrt{3}}, (-\pi; 0)$

10. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o okresie 2. Naszkicuj wykres tej funkcji w przedziale $\langle -4; 4 \rangle$. Ile rozwiązań równania $f(x) = 1$ należy do tego przedziału?



11. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości i miejsca zerowe.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 2$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) - 1$

b) $f(x) = -1 - \cos(x - \frac{\pi}{6})$

d) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$

12. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ,$

c) $\sin \alpha = -\frac{1}{3}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ,$

b) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ,$

d) $\cos \alpha = \frac{1}{4}, 270^\circ < \alpha < 360^\circ.$

13. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ,$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -2, 270^\circ < \alpha < 360^\circ,$

b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ,$

d) $\operatorname{ctg} \alpha = 3, 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$

14. Czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną?

a) $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x$

c) $2 \cos^2 x \operatorname{tg} x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$

b) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \sin^2 x = \cos^2 x$

d) $(\cos x - 1) \operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x}$

D 15. Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos^4 x - 2 \cos^2 x - \sin^4 x$ jest funkcją stałą.

D 16. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$

d) $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

b) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$

e) $\sin x \cos x + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x (\cos^2 x + 1)$

c) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

f) $\frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} + \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{\cos x}$

17. Podaj liczbę rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ w zależności od parametru m .

a) $\cos x + 1 = m$

b) $2 \sin x - 1 = m$

c) $|\sin x| + \frac{1}{2} = m$

18. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?

a) $f(x) = 1 - 3 \sin x$

b) $f(x) = |\operatorname{tg} 3x| - 4$

c) $f(x) = \frac{2}{|\sin x - 3|}$

15. $f(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2 \cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$

16. a) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

b) $\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sin^2 x - \cos^2 x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $\operatorname{tg} x (\cos^2 x + 1) = \operatorname{tg} x \cos^2 x + \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x + \operatorname{tg} x = \sin x \cos x + \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

f) $\frac{\sin x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\frac{1}{\sin x}(\cos x + \sin x)}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{\cos x}, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

9. a) $x = \frac{5}{4}\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}$

c) $x = \frac{13}{6}\pi, x = \frac{17}{6}\pi$

d) $x = -\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{3}$

10. 8

11. a) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$,
brak miejsc zerowych

b) $f(D) = \langle -2; 0 \rangle$,
 $x = \frac{\pi}{6} + (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $f(D) = \mathbf{R}$,
 $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $f(D) = \mathbf{R}, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

12. a) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$

b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$

c) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$

d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4},$
 $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

13. a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10},$
 $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \operatorname{ctg} \alpha = 3$

b) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13},$
 $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{2}$

c) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

14. a), b), c), d) tak

17. a) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
1 dla $m = 0$, 2 dla $m \in (0; 2)$

b) 0 dla
 $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$,

1 dla $m \in \{-3, 1\}$,
2 dla $m \in (-3; -1) \cup (-1; 1)$,
3 dla $m = -1$

c) 0 dla
 $m \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$,
2 dla $m = \frac{3}{2}$, 3 dla $m = \frac{1}{2}$,
4 dla $m \in (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

18. a) $m \in \langle -2; 4 \rangle$

b) $m \in \langle -4; \infty \rangle$

c) $m \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$

Zestaw II

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0
d) 1 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- a), b) tak c), d) nie
- a) $\frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} = \frac{2}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} =$
 $= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$
 $= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$
b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$
 $= \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$
 $= \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha$
c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta =$
 $= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} =$
 $= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$
 $= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
d) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta =$
 $= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} =$
 $= \frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} =$
 $= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$
- a) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$, $\sin x = -\frac{24}{25}$,
 $\cos x = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$
b) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $\sin x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos x = -\frac{1}{9}$,
 $\operatorname{tg} x = 4\sqrt{5}$
- a), b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) 0
- $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$
- a) $-\frac{24}{25}$ b) $-\frac{7}{5}$ c) $\frac{24}{7}$
- a) $\sin 3x = \frac{11\sqrt{5}}{25}$, $\cos 3x = \frac{2\sqrt{5}}{25}$
b) $\sin 3x = -\frac{5\sqrt{3}}{9}$,
 $\cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{9}$

Zestaw II

- Oblicz.
a) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ d) $\sin 23^\circ \cdot \cos 67^\circ + \cos 23^\circ \cdot \sin 67^\circ$
b) $\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ$ e) $\cos 66^\circ \cdot \sin 21^\circ - \sin 66^\circ \cdot \cos 21^\circ$
c) $\sin^2 75^\circ - \cos^2 15^\circ$ f) $\sin 82^\circ \cdot \sin 52^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 52^\circ$
- Czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną?
a) $1 + \sin \alpha = (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2$ c) $\sin^4 \alpha + 8 \cos^2 \alpha = 8 \cos^4 \alpha + 1$
b) $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ d) $\sin \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) + 2 \cos \alpha = \sin \alpha$
- Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
a) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
b) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ d) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$
- a) Oblicz $\cos \frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$ oraz $\operatorname{tg} x$, jeśli $\sin \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ i $x \in (\pi; 3\pi)$.
b) Oblicz $\sin \frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$ oraz $\operatorname{tg} x$, jeśli $\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ i $x \in (3\pi; 4\pi)$.
- Oblicz.
a) $\sin 15^\circ + \sin 105^\circ$ b) $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$ c) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 105^\circ$
- Oblicz $\sin 2x$ i $\cos 2x$, jeśli $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ i $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = -2 \cos x$.
- Wiadomo, że $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4})$. Oblicz:
a) $\sin 2x$, b) $\cos x - \sin x$, c) $\operatorname{tg} 2x$.
- Oblicz $\sin 3x$ i $\cos 3x$, jeśli:
a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.
- Naszkicuj wykres funkcji f .
a) $f(x) = -2|\sin x|$ c) $f(x) = -4|\cos x| + 4$ e) $f(x) = 4|\sin 2x|$
b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + 3$ d) $f(x) = -|\operatorname{tg} x| - 2$ f) $f(x) = |\operatorname{tg} \frac{x}{3}| - 4$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ należących do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ w zależności od parametru m .
a) $f(x) = \sin 2x - 1$ d) $f(x) = \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2}$ g) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - 1$
b) $f(x) = \sin 2x + 1$ e) $f(x) = -2 \cos(2x + \frac{\pi}{2})$ h) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2$
c) $f(x) = 3|\sin 2x|$ f) $f(x) = 1 + |\sin(2x - \frac{\pi}{3})|$ i) $f(x) = -|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| - 1$
- a) 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$,
2 dla $m \in \{-2, 0\}$,
4 dla $m \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$,
5 dla $m = -1$
b) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
2 dla $m \in \{0, 2\}$,
4 dla $m \in (0; 1) \cup (1; 2)$,
5 dla $m = 1$
c) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$,
4 dla $m = 3$, 5 dla $m = 0$,
8 dla $m \in (0; 3)$
d) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$,
1 dla $m = -1$, 2 dla $m \in (-1; 2)$
e) 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$,
2 dla $m \in \{-2, 2\}$,
4 dla $m \in (-2; 0) \cup (0; 2)$,
5 dla $m = 0$
f) 0 dla $m \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$,
4 dla $m \in \{1, 2\}$,
8 dla $m \in (1; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; 2)$,
9 dla $m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
g) 2 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, 3 dla $m = -1$
h) 2 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, 3 dla $m = 2$
i) 0 dla $m \in (-1; \infty)$,
2 dla $m \in (-\infty; -1)$



11. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$?

- a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2 - \sin x$ c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $g(x) = \sqrt{2}$
b) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \sin x$ d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, $g(x) = 1$

12. Uprość wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \cos x \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(-x) \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
b) $f(x) = \cos(-x) \sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi - x) \cos(\frac{\pi}{2} + x)$
c) $f(x) = \cos(\frac{3\pi}{2} - x) \cos(\pi - x) - \sin(\pi + x) \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$

13. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \cos(-3x) = 1$ c) $2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ e) $3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}$
b) $2 \sin(2x - \pi) = 1$ d) $2 \cos^2(3x + \pi) = 1$ f) $\operatorname{tg}^2(2x + \frac{\pi}{2}) = 3$

14. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$ d) $5 \cos^2 x + 7 \sin^2 x = 6$
b) $\sin^2 x - \sin x = 2$ e) $\cos^2 x + 5 \sin x = 5$
c) $\sin^2 x - 3 \cos x = 3$ f) $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin x - 1$

15. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$ d) $\sin x \cos 2x - \sin x = \frac{1}{2} \sin 4x - \sin 2x$
b) $\cos^4 x + \cos^4(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ e) $\cos x \cos 2x = \sin x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 3x$
c) $\operatorname{tg}^2 x + \cos 2x = 1$ f) $\sin x \cos 2x = \sin 2x - \frac{3}{2} \sin x$

16. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

- a) $2 \cos^3 x - \cos^2 x = 2 \cos x - 1$ *b) $\cos x + |\cos x| = \sin 2x$

17. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej wartości najmniejszą i największą.

- a) $f(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$ *c) $f(x) = \cos^2 x + |\sin x| \cdot \sin x$
b) $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ *d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{ctg} x + \sin 2x$

18. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos 2x$, której dziedziną jest przedział $\langle 0; 2\pi \rangle$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) > \frac{3}{4}$.

19. Podaj rozwiązania nierówności należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

- a) $\sin(x - \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$ b) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) \geq 1$ c) $2 \cos(\frac{\pi}{3} - x) \leq -\sqrt{3}$

20. Wyznacz zbiór tych $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$, które spełniają podane warunki.

- a) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \\ \sin x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 \sin x + 1 \geq 0 \\ 2 \cos x - 1 \leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |2 \sin x| < 3 \\ |\cos x| < 1 \end{cases}$

11. a) 1 b) 3 c) 1 d) 2

12. a), b) $f(x) = \cos 2x$

c) $f(x) = 0$

13. a) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$,
 $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

f) $x = -\frac{5}{12}\pi + \frac{k\pi}{2}$,
 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

14. a) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$,
 $k \in \mathbf{Z}$

15. a) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$

f) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

16. a) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

b) $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

17. a), b), d) $-2, 2$ c) $-1, 1$

18. $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$, $x \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup$
 $\cup (\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi) \cup (\frac{5}{3}\pi; 2\pi)$

19. a) $x \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\pi; 2\pi)$

b) $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{11}{6}\pi; 2\pi)$

c) $x \in (\frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi)$

20. a) $(0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$

b) $\langle -\pi; -\frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{3}; \frac{7}{6}\pi \rangle$

c) $(-\pi; 0) \cup (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$

**Przykład**

Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób (Metoda analizy starożytnych)

Metoda analizy starożytnych rozwiązywania równań polega na kolejnym przekształcaniu równania wyjściowego w ten sposób, aby każde następne równanie wynikało z poprzedniego (nie musi być mu równoważne). Zbiór rozwiązań ostatniego równania zawiera wszystkie rozwiązania równania wyjściowego. Na koniec należy sprawdzić, które liczby z tego zbioru spełniają równanie wyjściowe.

Obie strony równania $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ podnosimy do kwadratu.

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$$

$$1 + \sin 2x = 2$$

$$\sin 2x = 1$$

Zatem $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, czyli $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Teraz sprawdzimy, które z otrzymanych liczb spełniają równanie wyjściowe.

Dla $k = 2n$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \\ &= \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Dla $k = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi\right) = \\ &= \sin\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right) = \sin \frac{5}{4}\pi + \cos \frac{5}{4}\pi = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

Sprzeczność

Zatem jedynymi rozwiązaniami równania są liczby $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

II sposób

Zauważ że:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

Zatem:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbf{Z}$$

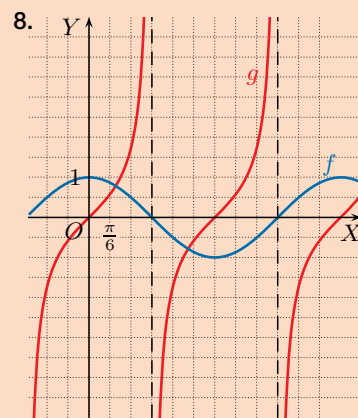
Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Jeśli $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, to kąt α może mieć miarę:
A. -390° , B. 780° , C. 1650° , **D. 1950° .**
 - Jeśli $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$, to:
A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$, B. $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, **C. $\alpha = \frac{7}{6}\pi$,** D. $\alpha = \frac{4}{3}\pi$.
 - Jeśli $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\operatorname{tg} x > 0$, to wyrażenie $\cos^2 x + \sin x$ jest równe:
A. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, B. $-\frac{1}{2}$, C. $\frac{1}{2}$, D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
 - Jeśli $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$, to $\sin^2 2\alpha$ jest równy:
A. $\frac{3}{4}$, B. $\frac{1}{2}$, C. $\frac{1}{4}$, D. $\frac{1}{8}$.
 - Jeśli $\cos x = -\frac{1}{2}$ i $x \in (\pi; 3\pi)$, to $\cos \frac{x}{2}$ jest równy:
A. $\frac{1}{2}$, **B. $-\frac{1}{2}$,** C. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, D. $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
 - Wyrażenie $\sin 7^\circ 30' \cdot \cos 52^\circ 30' - \sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$ jest równe:
A. $-\frac{1}{2}$, **B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,** C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - Niech $a = \cos 75^\circ + \cos 165^\circ$. Liczba a należy do przedziału:
A. $(-1,5; -0,7)$, B. $(-0,7; -0,5)$, C. $(-0,5; 0)$, D. $(0; 0,5)$.
 - Niech n będzie liczbą punktów wspólnych wykresów funkcji $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in \langle 0; 99\pi \rangle$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbf{Z}$. Wówczas n jest równe:
A. 98, B. 99, **C. 100,** D. 198.
 - Tożsamością trygonometryczną jest wyrażenie:
A. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$, **C. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$,**
B. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$, D. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.
 - Dokładnie cztery rozwiązania w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ ma równanie:
A. $2\cos^2 x = 1$, B. $\cos^2 x = 1$, C. $2\sin^2 x = 1$, **D. $\sin^2 x = 1$.**
 - Najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geq \sqrt{3}$ jest:
A. 1, B. 2, **C. 3,** D. 4.
7. $a = \cos 75^\circ + \cos 165^\circ = 2 \cos 120^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cos(90^\circ + 30^\circ) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,7071$
9. $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-(1-2\sin^2 \alpha)}{1+2\cos^2 \alpha-1} = \frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$
10. A. $\cos 2x = 0$ dla $x \in \{-\frac{7}{4}\pi, -\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$
B. $\cos x = -1$ lub $\cos x = 1$ dla $x \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$
C. $\cos 2x = 0$
D. $\sin x = -1$ lub $\sin x = 1$ dla $x \in \{-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\}$

4. $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4}$
 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$
 $\sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$
5. $x \in (\pi; 3\pi)$, czyli
 $\frac{x}{2} \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$,
 zatem $\cos \frac{x}{2} < 0$
 $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$
 $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{4}$
 $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$



Zauważmy, że w każdym z przedziałów:

$\langle 0; 2\pi \rangle$, $\langle 2\pi; 4\pi \rangle$, ...

..., $\langle 96\pi; 98\pi \rangle$

mamy po 2 punkty wspólne.

W przedziale $\langle 98\pi; 99\pi \rangle$

mamy również 2 punkty wspólne.

Zatem $n = 49 \cdot 2 + 2 = 100$.



Odpowiedzi do zadań

1. $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{3}{4} \approx 0,1319$
 Należy zakodować: 131.

2. $\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}} \approx 0,6999$
 Należy zakodować: 069.

3. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$
 $\cos x = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \approx -0,5547$
 Należy zakodować: 554.

4. $x = \frac{1}{12} + k$ lub $x = \frac{5}{12} + k$,
 $k \in \mathbb{Z}$
 $a = \frac{1}{12} \approx 0,0833$
 Należy zakodować: 083.

6. $\cos x(\sin x - \cos x) = 0$
 $x \in \left\{-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$

7. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$
 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
 lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$
 $\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{23\pi}{6} = 8\pi$

10. $\Delta = 16\sin^2 x - 8\cos 2\alpha =$
 $8(4\sin^2 \alpha - 1) > 0$ dla
 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
 $= 16\sin^2 \alpha - 4\cos 2\alpha =$
 $= 24\sin^2 \alpha - 4 > 8$ dla
 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
 Zatem:
 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Punkt $P(-3, -\sqrt{7})$ należy do ramienia końcowego kąta α . Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby:

$$\frac{\operatorname{tg} 585^\circ - \sin 675^\circ}{\sin 495^\circ + 2 \cos 750^\circ}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Dany jest kąt $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ taki, że $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$. Wyznacz cosinus kąta x . Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

Zadanie 4 (2 pkt)

Liczba a jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania:

$$2 \sin 2\pi x - 1 = 0$$

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby a .

Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2|\sin x| \cdot \cos x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

Zadanie 6 (4 pkt)

Wyznacz liczby $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ spełniające równanie $\sin 2x - \cos 2x = 1$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Oblicz sumę pierwiastków równania $2\sin^2 x + 1 = \sqrt{3}\cos x$ należących do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Rozwiąż równanie $2\sin x \cos 2x + \sin 5x = 2\sin 2x \cos 3x$.

Zadanie 9 (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0; \pi)$ równanie:

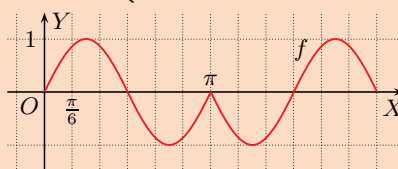
$$(2\cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos \alpha = 0$$

ma dwa różne pierwiastki?

Zadanie 10 (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru α suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 4x \sin \alpha + 2\cos 2\alpha = 0$ jest większa od 8?

$$5. f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{dla } x \in \langle 0; \pi \rangle \\ -\sin 2x & \text{dla } x \in (\pi; 2\pi) \end{cases}$$



0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
 4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$,
 5 dla $m = 0$

8. $2\sin x \cos 2x + \sin 5x = 2\sin 2x \cos 3x$
 $(\sin 3x - \sin x) + \sin 5x = \sin 5x - \sin x$
 $\sin 3x = 0$
 $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

9. $2\cos \alpha - 1 \neq 0$, więc $\alpha \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \pi)$
 $\Delta = 16 - 4(2\cos \alpha - 1) \cdot 4\cos \alpha =$
 $= 16(1 - 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha) =$
 $= 16(1 - \cos \alpha)(1 + 2\cos \alpha)$
 $\Delta > 0$ dla $\alpha \in (0; \frac{2}{3}\pi)$
 Zatem $\alpha \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi)$.