



4 Statystyka

Poniższa tabela zawiera szacunkowe dane dotyczące liczebności populacji bobra na terenie Polski w wybranych latach. Dane te pokazują, że od ostatniego ćwierćwiecza XX wieku następuje ciągły przyrost populacji bobra w naszym kraju.

Rok	1976	1980	1982	1986	1992	1994	2003	2020
Liczebność	500	1000	1800	3000	6000	7400	20 660	137 000

Na podstawie: *Krajowy plan ochrony gatunku. Bóbr europejski*, oprac. Andrzej Czech, Kraków 2007; www.wody.gov.pl

W tym rozdziale poznajemy pojęcia statystyczne związane z analizą danych. Wykorzystuje się je do opisu różnych zjawisk, także przy podejmowaniu kluczowych decyzji gospodarczych i społecznych.

Multiteka

- Czy olej rybny wpływa na inteligencję?
- Czy można wierzyć IQ?
- Diagram Nightingale
- Najpopularniejsze zwierzę domowe
- Nieprzewidziana wygrana
- Wizualizacja danych
- Zliczanie tłumu
- Zwykły Joe

Uczeń:

- oblicza średnią arytmetyczną zestawu danych,
- oblicza średnią arytmetyczną danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób,
- wykorzystuje w zadaniach średnią arytmetyczną.

4.1. Średnia arytmetyczna

Przykład 1

W tabeli podano, ile punktów zdobyli dwaj zawodnicy *A* i *B* w sześciu kolejnych meczach koszykówki.

<i>A</i>	8	18	10	20	16	12
<i>B</i>	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika *A*:

$$\frac{8 + 18 + 10 + 20 + 16 + 12}{6} = 14$$

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika *B*:

$$\frac{24 + 18 + 4 + 0 + 0 + 2}{6} = 8$$

Definicja

Średnią arytmetyczną n liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Zamiast „średnia arytmetyczna” będziemy czasami pisać krótko: „średnia”.

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zauważ, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	2,9
Tomek	5	4	–	5	3	3	4	4	5	3	4,0

Ćwiczenie 2

$\bar{x} = \frac{35000}{9} \approx 3889$ [zł]
siedmiu pracowników

Ćwiczenie 2

Wynagrodzenia miesięczne pracowników pewnej firmy wyniosły (w złotych): 3300, 3250, 5500, 3350, 7500, 3300, 3000, 3100 i 2700. Ilu pracowników tej firmy otrzymało wynagrodzenie poniżej średniej?

Ćwiczenie 3

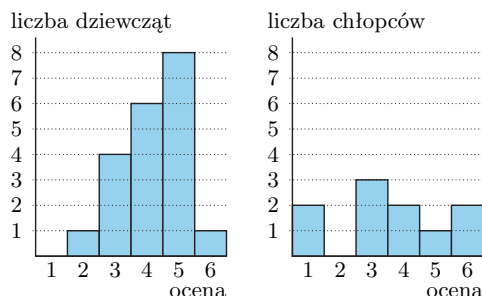
Oblicz średnie arytmetyczne zestawów danych A , B i C . Sformułuj wniosek.

$$A = \{7, 7, 3, 4, 4, 11\}, \quad B = \{17, 17, 13, 14, 14, 21\}, \quad C = \{27, 27, 23, 24, 24, 31\}$$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:



$$\bar{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 4 + 6 + 8 + 1} = \frac{84}{20} = 4,2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\bar{x}_c = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \frac{36}{10} = 3,6$$

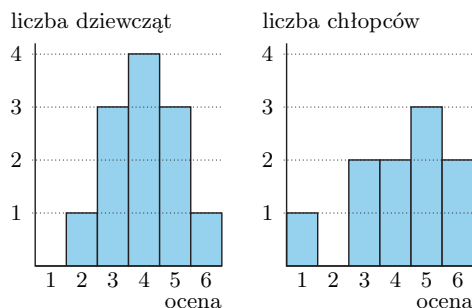
Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

$$\bar{x}_k = \frac{20 \cdot \bar{x}_d + 10 \cdot \bar{x}_c}{10 + 20} = \frac{84 + 36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę na to, że $\bar{x}_k$ nie jest równe $\frac{\bar{x}_d + \bar{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 4

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z biologii w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz średnie ocen z biologii dla grupy dziewcząt, grupy chłopców oraz dla całej klasy.



Ćwiczenie 5

a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \dots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1 .

b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7 .

Ćwiczenie 5

a) $\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_8}{7} = 17$, czyli $x_2 + x_3 + \dots + x_8 = 119$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8}{8} = \frac{x_1 + 119}{8} = 16, \text{ czyli } x_1 = 9$$

b) $\frac{x_1 + x_3 + x_5 + x_7}{4} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_7) - (x_2 + x_4 + x_6)}{4} = \frac{120 \cdot 7 - 100 \cdot 3}{4} = \frac{840 - 300}{4} = \frac{540}{4} = 135$

Ćwiczenie 3

$$\bar{x}_A = \frac{36}{6} = 6$$

$$\bar{x}_B = \frac{96}{6} = 16$$

$$\bar{x}_C = \frac{156}{6} = 26$$

Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to ich średnia arytmetyczna również zwiększy się o tę wartość.

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} \bar{x}_d &= \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 3 + 4 + 3 + 1} = \\ &= \frac{48}{12} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_c &= \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{1 + 2 + 2 + 3 + 2} = \\ &= \frac{42}{10} = 4,2 \end{aligned}$$

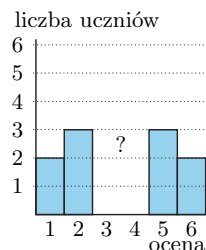
$$\bar{x}_k = \frac{12 \cdot 4 + 10 \cdot 4,2}{22} = \frac{90}{22} \approx 4,09$$

Odpowiedzi do zadań

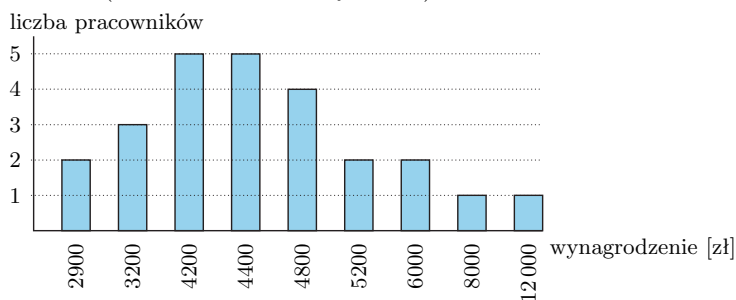
- $\frac{12 \cdot 50 - 36}{12} = \frac{564}{12} = 47$
- dst – 5 osób
db – 5 osób
 - dst – 10 osób
db – 0 osób
 - dst – 2 osoby
db – 8 osób
- $\frac{15 \cdot 3800 + 2200}{15 + 1} = 3700$ [zł]
 - $\frac{15 \cdot 3800 + 3 \cdot 2300}{15 + 3} = \frac{63900}{18} = 3550$ [zł]
- x – wynagrodzenie nowego pracownika
 - $\frac{20 \cdot 3200 + x}{20 + 1} = 3200 \cdot 1,02$
 $\frac{64000 + x}{21} = 3264$
 $x = 68544 - 64000 = 4544$ [zł]
 - $\frac{64000 + x}{21} = 3200 \cdot 0,99$
 $x = 3168 \cdot 21 - 64000 = 2528$ [zł]

Zadania

- Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?



- Na diagramie przedstawiającym zestawienie ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie nie zaznaczono liczby ocen dobrych i dostatecznych. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, jeśli wiadomo, że średnia ocen z geografii w tej klasie wynosi: a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65.
- W pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 3800 zł. Jakie będzie średnie miesięczne wynagrodzenie, jeśli firma dodatkowo zatrudni: a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 2200 zł, b) trzech stażystów, każdego z wynagrodzeniem miesięcznym 2300 zł?
- Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest: a) o 2% wyższe niż poprzednio, b) o 1% niższe niż poprzednio?
- Na diagramie przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia pracowników banku (12 000 zł zarabia dyrektor).



- Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tym banku?
 - Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie 10 najlepiej zarabiających pracowników, a ile – 10 zarabiających najgorzej?
 - Jaką podwyżkę otrzymał dyrektor, jeśli wszyscy pozostali pracownicy dostali po 400 zł podwyżki, a średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 10%?
- $\frac{120000}{25} = 4800$ [zł]
 - najlepiej zarabiający: $\frac{61600}{10} = 6160$ [zł]
 najgorzej zarabiający: $\frac{36400}{10} = 3640$ [zł]
 - x – podwyżka dyrektora
 $\frac{24 \cdot 400 + x}{25} = 480$
 $x = 2400$ zł

Czy wiesz, że...

Średnia arytmetyczna jest „wrażliwa” na dane bardzo odbiegające od pozostałych, dlatego czasem obliczamy ją po odrzuceniu z zestawu pewnej liczby danych największych i najmniejszych. Tak obliczona średnia nosi nazwę **średniej obciętej**.

Średnia obcięta ma swoje zastosowania np. w sporcie. Obliczenie ostatecznej oceny w jeździe figurowej na lodzie czy gimnastyce sportowej polega na odrzuceniu dwóch skrajnych ocen i obliczeniu średniej obciętej pozostałych.



6. Oblicz średnią podanego zestawu liczb oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb skrajnych (najmniejszej i największej).

a) 0, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 127

b) 11, 12, 12, 13, 15, 17, 82

7. Oblicz średnią arytmetyczną zestawu liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $2, 2^2, \dots, 2^{12}$ oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb najmniejszych i dwóch liczb największych.

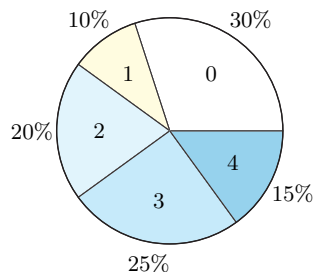
8. Czy w zamieszczonym obok kwadracie można skreślić jeszcze jedną liczbę tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- a) wzrosła o 1, b) zmalała o 1, c) wzrosła o $33\frac{1}{3}\%$?

Powtórzenie

9. W grupie 240 osób przeprowadzono sondaż. Każdej osobie zadano pytanie: „Ile godzin dziennie spędzasz, oglądając seriale telewizyjne?”. Wyniki sondażu przedstawiono na diagramie kołowym. Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych danych.



10. Oblicz x , jeśli wiadomo, że średnia arytmetyczna podanego zestawu liczb jest równa 4,5.

a) 2, 2, 3, 3, 3, x , 8, 8

b) 0, 1, 1, 1, 2, 2, x , x , 13, 15

9. $\frac{4 \cdot 36 + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 48 + 1 \cdot 24}{240} = 1,85$ [h]

1,85 h = 1 h 51 min

10. a) $\frac{29+x}{8} = 4,5$, czyli $x = 7$

b) $\frac{35+2x}{10} = 4,5$, czyli $x = 5$

6. a) średnia:

$$\frac{0+2+3+4+6+9+9+127}{8} = 20$$

średnia obcięta:

$$\frac{2+3+4+6+9+9}{6} = 5,5$$

- b) średnia:

$$\frac{11+12+12+12+13+15+17+82}{7} = \frac{162}{7} = 23\frac{1}{7}$$

średnia obcięta:

$$\frac{12+12+13+15+17}{5} = \frac{69}{5} = 13,8$$

7. średnia:

$$\frac{2+2^2+\dots+2^{12}}{12} = \frac{2 \cdot \frac{1-2^{12}}{1-2}}{12} = 682,5$$

średnia obcięta:

$$\frac{2^3+\dots+2^{10}}{8} = \frac{8 \cdot \frac{1-2^8}{1-2}}{8} = 255$$

8. $\frac{1+6+8+9}{4} = \frac{24}{4} = 6$

x – kolejna skreślona liczba

a) $\frac{24+x}{5} = 7$, czyli $x = 11$, tak

b) $\frac{24+x}{5} = 5$, czyli $x = 1$, nie

c) $\frac{24+x}{5} = 8$, czyli $x = 16$, tak

Uczeń:

- wyznacza medianę i dominantę zestawu danych,
- odczytuje informacje ze skali centylowej,
- wyznacza medianę i dominantę danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób,
- wykorzystuje w zadaniach medianę i dominantę.

Ćwiczenie 1

a) 3 b) 10,5 c) 5,5

Ćwiczenie 2

a) 530, 540, 550, 550, 560, 565, 570, 590

mediana: 555 kg

b) 490, 500, 500, 505, 510, 540

mediana: 502,5 kg

c) 490, 500, 500, 505, 510, 530, 540, 540, 550, 550, 560, 565, 570, 590

mediana: 540 kg

Ćwiczenie 3

$$\frac{3+4}{2} = 3,5$$

4.2. Mediana, skala centylowa i dominanta

Poza średnią arytmetyczną rozpatrujemy też inne wielkości służące do analizy danych. Jedną z nich jest wartość środkowa – **mediana**. Aby ją wyznaczyć, porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

1, 2, 2, 2, 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,

–3, –3, 0, 0, 2, 7, 9, 11, 13, 17, 18 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, 3, 8, 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5,5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub jej równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę podanych liczb.

a) 1, 2, 3, 10, 20

b) 6, 10, 11, 11, 20, 7

c) 18, 6, 4, 10, 5, 4

Ćwiczenie 2

W stadninie zważono wszystkie konie i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach):

– ogiery: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560, 540;

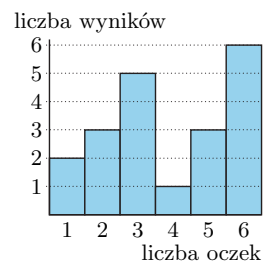
– klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi: a) ogierów, b) klaczy, c) wszystkich koni w stadninie.

Ćwiczenie 3

Rzucono 20 razy kostką. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy otrzymano poszczególne liczby oczek.

Wyznacz medianę uzyskanych wyników.



Ćwiczenie 4

Podaj przykład pięciu liczb, których mediana jest:

a) większa od ich średniej arytmetycznej,

b) mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 5

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 8, 6, 3, x , 8, $x+4$, 4, 6, 7, 8 jest równa 7. Ile wynosi mediana tego zestawu liczb?

Ćwiczenie 4

Przykładowa odpowiedź:

a) 1, 1, 5, 6, 7, mediana: 5, średnia: 4

b) 1, 2, 3, 6, 8, mediana: 3, średnia: 4

Ćwiczenie 5

$$\frac{2x+54}{10} = 7, \text{ czyli } x = 8$$

3, 4, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 12

mediana: $\frac{7+8}{2} = 7,5$

Multiteka

• Skala centylowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

Aby wskazać położenie wybranej danej względem innych danych, używa się **skali centylowej**. Podając centyl, któremu odpowiada liczba x (mówimy też: w którym mieści się liczba x), określamy, jaki jest procent liczb mniejszych lub równych tej liczbie.

Przykład 1

W poniższej tabeli podano, jakie wartości centyli odpowiadają poszczególnym wynikom procentowym uzyskanym na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym przeprowadzonym w maju 2019 roku.

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1	34	21	68	64
2	1	36	23	70	66
4	1	38	26	72	69
6	1	40	28	74	71
8	1	42	30	76	74
10	2	44	33	78	76
12	3	46	35	80	78
14	4	48	38	82	80
16	5	50	40	84	82
18	7	52	43	86	85
20	8	54	45	88	87
22	10	56	48	90	89
24	12	58	51	92	91
26	13	60	53	94	93
28	15	62	56	96	96
30	17	64	58	98	98
32	19	66	61	100	100

Źródło: <https://cke.gov.pl>

Z tabeli można odczytać, że:

- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 30% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 17. centylowi, co oznacza, że 17% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 83% maturzystów uzyskało wynik wyższy.
- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 70% możliwych do zdobycia punktów, to wynik ten odpowiada 66. centylowi, co oznacza, że 66% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 34% maturzystów uzyskało wynik wyższy.

Ćwiczenie 6

- a) 60%
b) 40. centyl: 50%,
80. centyl: 82%

Ćwiczenie 6

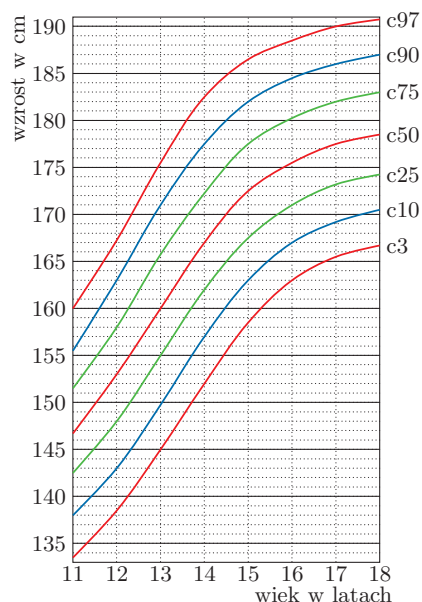
- a) Ile procent maturzystów podchodzących do egzaminu maturalnego z matematyki podstawowej w maju 2019 roku uzyskało wynik lepszy od maturzysty, który zdobył na tym egzaminie 50% punktów?
b) Jaki procentowy wynik z egzaminu maturalnego z matematyki podstawowej w maju 2019 roku odpowiada 40. centylowi, a jaki – 80. centylowi wyników egzaminu?

Przykład 2

Przedstawiona obok siatka jest siatką centylową wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat.

Zaznaczone linie opisują centyle: 3, 10, 25, 50, 75, 90 i 97.

- W wieku 13 lat chłopiec o wzroście 160 cm mieści się w 50. centylu.
- W wieku 16 lat chłopiec o wzroście większym (lub równym) od 75% swoich rówieśników mierzy ponad 180 cm.



Siatka centylowa wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat

Źródło: <http://www.czd.pl>

Ćwiczenie 7

- a) 50. b) 10%

Ćwiczenie 7

- a) Czternastoletni chłopiec ma 167 cm wzrostu. W którym centylu mieści się jego wzrost?
b) Siedemnastolatek ma 186 cm wzrostu. Ile procent jego rówieśników jest od niego wyższych?

Kolejną wielkością przydatną podczas analizy danych jest **dominanta** – wartość, która występuje wśród danych najczęściej (dominanta bywa również nazywana **wartością modalną** lub **modą**).

Na przykład dla liczb: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 dominantą jest liczba 2.

Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty.

Ćwiczenie 8

Sprzedawca zanotował rozmiary butów męskich, które sprzedał pewnego dnia: 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43, 45, 46. Wyznacz medianę i dominantę tych danych. Który rozmiar butów był kupowany najczęściej?

Ćwiczenie 8

41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 44, 44, 45, 45, 46
mediana: 43, dominanta: 42
Najczęściej był kupowany rozmiar 42.

Ćwiczenie 9

Nauczyciel biologii zrobił zestawienie wyników trzech sprawdzianów przeprowadzonych w dwudziestoposobowej klasie (tabela obok). Po

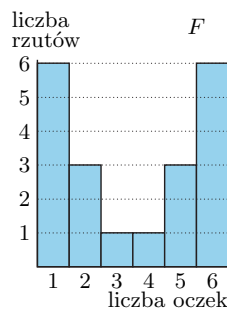
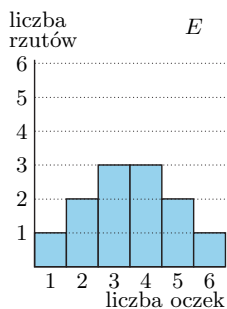
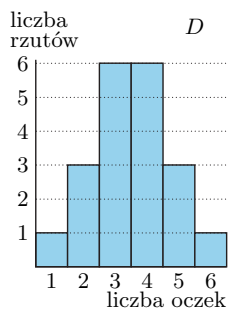
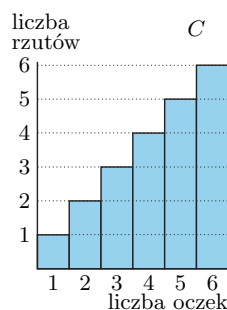
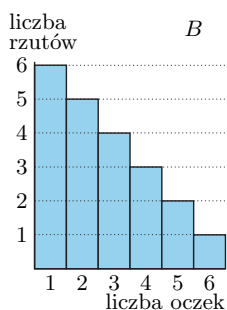
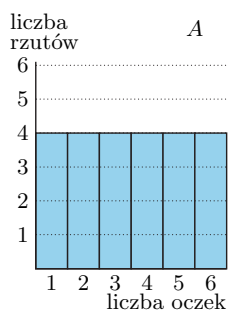
Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	2	19	2

kolejnym sprawdzianie dopisał do niego nowe oceny. Wyznacz dominantę i medianę ocen w nowym zestawieniu, jeśli wiadomo, że z tego sprawdzianu:

- wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,
- połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – niedostateczną.

Zadania

- Oznaczmy przez $\bar{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c , 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c , jeśli:
 - $\bar{x} = D$,
 - $\bar{x} = M$.
- Każda z osób A, B, C, D, E, F wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzucanych w każdej serii.



- $D = 4$, $\bar{x} = \frac{27+c}{10} = 4$, czyli $c = 13$
 - 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4
 Jeżeli $c \geq 4$, to $M = 3,5$ i $\bar{x} = \frac{27+c}{10} = 3,5$, czyli $c = 8$.
 Jeżeli $c \leq 3$, to $M = 3$ i $\bar{x} = \frac{27+c}{10} = 3$, czyli $c = 3$.
 Zatem $c = 3$ lub $c = 8$.

Ćwiczenie 9

- mediana: 4, dominantą: 3
- mediana: 3, dominantą: 5

Odpowiedzi do zadań

- $A: M = \frac{3+4}{2} = 3,5$,
 nie ma dominanty,
 $\bar{x} = 3,5$
 $B: M = 2$, $D = 1$, $\bar{x} = 2\frac{2}{3}$
 $C: M = 5$, $D = 6$, $\bar{x} = 4\frac{1}{3}$
 $D: M = \frac{3+4}{2} = 3,5$,
 $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\bar{x} = 3,5$
 $E: M = \frac{3+4}{2} = 3,5$,
 $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\bar{x} = 3,5$
 $F: M = \frac{3+4}{2} = 3,5$,
 $D_1 = 1$, $D_2 = 6$, $\bar{x} = 3,5$

3. a)

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wyników	5	6	7	8	9	10

$$M = 4, D = 6, \bar{x} = \frac{175}{45} = 3\frac{8}{9}$$

b)

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wyników	10	9	8	7	6	5

$$M = 3, D = 1, \bar{x} = \frac{140}{45} = 3\frac{1}{9}$$

c)

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wyników	7	7	7	7	7	7

$$M = 3,5, \text{nie ma dominanty,}$$

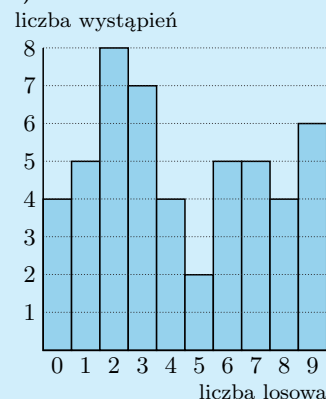
$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 21}{7 \cdot 6} = 3,5$$

4. a) $\bar{x} = \frac{226}{50} = 4,52, M = 5,$

liczba 2: 32. centyl,

liczba 7: 88. centyl

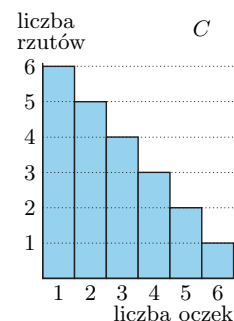
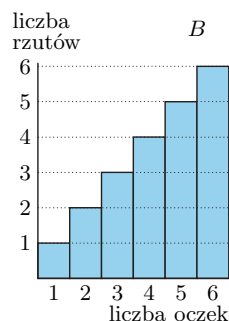
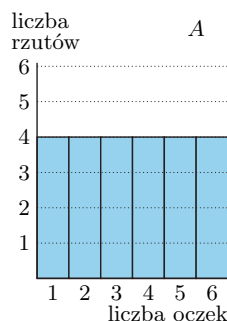
b)



$$\bar{x} = \frac{219}{50} = 4,38, M = 4,$$

$$D = 2, \text{liczba 3: 48. centyl}$$

3. Każda z osób A, B, C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzuconych łącznie przez osoby: a) A i B , b) A i C , c) B i C .



Czy wiesz, że...

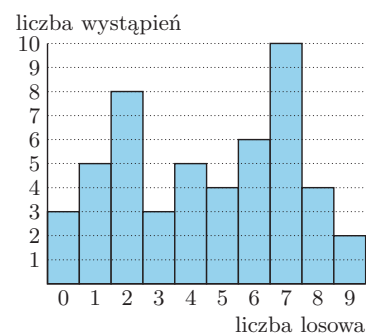
W niektórych zagadnieniach (np. w kryptografii) wykorzystuje się liczby losowe. Liczby te można wygenerować za pomocą programu komputerowego lub można skorzystać z odpowiednich tablic. Poniżej podano osiem wierszy tablicy liczb losowych, w której występują liczby od 0 do 9 odpowiednio pogrupowane.

1.	46016	24742	21311	88342	67778	20741	26755	55382	96777	06729
2.	89311	86439	32128	17700	90725	01936	23678	54622	27342	96439
3.	09006	57476	64080	47646	68020	32924	68500	81779	17120	57784
4.	84642	87958	96983	80086	19451	53725	82606	54516	62617	67000
5.	88645	63989	45783	33657	54733	68580	97232	98073	27454	36174
6.	75815	34604	83791	91421	09176	49317	17045	79972	65081	32075
7.	37019	94048	44462	48948	29999	19107	51184	89352	00122	07222
8.	01324	69795	95403	20891	89075	82476	02147	19961	84203	02724

4. Wykonano diagram dla liczb z pierwszego wiersza powyższej tablicy liczb losowych.

a) Oblicz ich średnią arytmetyczną oraz medianę. Któremu centylowi odpowiada liczba 2, a któremu liczba 7?

b) Wykonaj analogiczny diagram dla liczb z drugiego wiersza tablicy. Wyznacz ich średnią arytmetyczną, medianę i dominantę. Któremu centylowi odpowiada liczba 3?



5. Poniżej przedstawiono tabelę zawierającą skalę centylową wyników egzaminu maturalnego z historii (poziom rozszerzony, maj 2019 roku).

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1	34	53	68	90
2	2	36	56	70	91
4	3	38	59	72	92
6	6	40	62	74	93
8	10	42	65	76	95
10	13	44	67	78	95
12	17	46	69	80	96
14	20	48	71	82	97
16	24	50	74	84	98
18	27	52	76	86	98
20	31	54	78	88	99
22	34	56	80	90	99
24	38	58	82	92	99
26	41	60	84	94	99
28	44	62	85	96	100
30	47	64	87	98	100
32	50	66	88	100	100

Źródło: <https://cke.gov.pl>

- a) Jaki wynik procentowy gwarantował znalezienie się w gronie 16% maturzystów, którzy uzyskali najlepsze wyniki na tym egzaminie?
- b) Wynik procentowy pewnego maturzysty równy jest medianie wyników egzaminu, a wynik jego kolegi odpowiada 80. centylowi. O ile punktów procentowych różnią się ich wyniki z tego egzaminu?

Powtórzenie

6. W klasie Marty 10% uczniów otrzymało ze sprawdzianu ocenę bardzo dobrą, a pozostali uzyskali ocenę dobrą albo dostateczną. Średnia wszystkich ocen wyniosła 3,6. Wyznacz medianę i dominantę ocen z tego sprawdzianu.
7. Znajdź taką liczbę całkowitą x , aby poniższy zestaw danych miał tylko jedną dominantę i aby była ona równa jego średniej arytmetycznej.
- a) 4, x , 2, 5, 4, 4, 5, 12, 6, 5, 3 b) 1, x , 2 x , 1, 6, 9, 1, 6, 9, 6, 9
8. Skorzystaj z tabeli zamieszczonej przy zadaniu 5. i podaj, ile procent maturzystów podchodzących do egzaminu z historii w maju 2019 roku uzyskało wynik lepszy od maturzysty, który zdobył na tym egzaminie 68% punktów.

7. a) $\bar{x} = \frac{50+x}{11} = 4$ lub $\bar{x} = \frac{50+x}{11} = 5$

$x = -6$ (sprzeczne) lub $x = 5$

Zatem $x = 5$.

b) $\bar{x} = \frac{48+3x}{11} = 1$ lub $\bar{x} = \frac{48+3x}{11} = 6$ lub $\bar{x} = \frac{48+3x}{11} = 9$

$3x = -37$ (sprzeczne) lub $x = 6$ lub $x = 17$ (sprzeczne)

Zatem $x = 6$.

5. a) 60%

b) Mediana wyników: 32%

80. centyl: 56%

$56 - 32 = 24$ punkty procentowe

6. Niech x będzie odsetkiem uczniów z oceną 4, a y – odsetkiem uczniów z oceną 3.

$$\begin{cases} 0,1 \cdot 5 + x \cdot 4 + y \cdot 3 = 3,6 \\ x + y = 0,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,4 \\ y = 0,5 \end{cases}$$

$$M = \frac{3+4}{2} = 3,5, D = 3$$

8. 10%

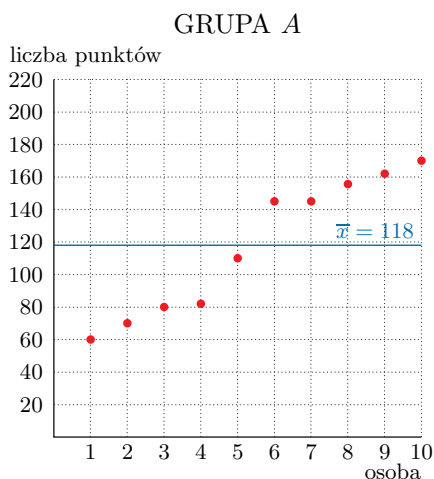
Uczeń:

- oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych,
- oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych przedstawionych różnymi sposobami.

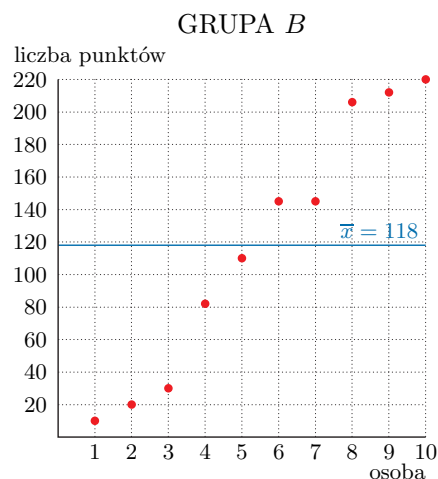
4.3. Odchylenie standardowe

Przykład 1

W dwóch dziesięcioosobowych grupach studentów przeprowadzono ten sam egzamin oceniany w skali 0–220 punktów. Wyniki otrzymane w grupach A i B przedstawiono na diagramach.



Wyniki w grupie A: 60, 70, 80, 82, 110, 145, 145, 156, 162, 170



Wyniki w grupie B: 10, 20, 30, 82, 110, 145, 145, 206, 212, 220

Obydwa zestawy danych mają średnią arytmetyczną równą 118, medianę – 127,5 oraz dominantę – 145. Jednak rozproszenie wyników w grupie B jest znacznie większe niż w grupie A. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Definicja

Wariancją liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Uwaga. Wariancja jest równa σ^2 i jest w ten sposób oznaczana.

Przykład 2

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią i wariancję:

$$\bar{x} = \frac{4+9+11+13+13}{5} = 10$$
$$\sigma^2 = \frac{(4-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(13-10)^2+(13-10)^2}{5} = \frac{56}{5} = 11,2$$

Zatem odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{11,2} \approx 3,35$.

Ćwiczenie 1

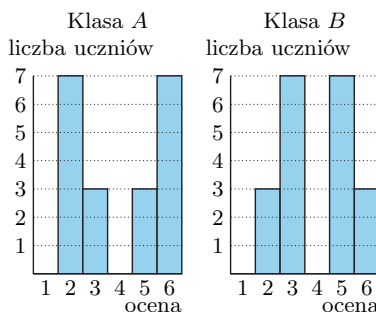
Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych:

- a) 4, 5, 6, 7, 8; b) 3, 6, 6, 6, 9; c) 8, 12, 13, 13, 14.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A.

Obliczając wariancję w klasie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:



$$\sigma_A^2 = \frac{7 \cdot (2-4)^2 + 3 \cdot (3-4)^2 + 3 \cdot (5-4)^2 + 7 \cdot (6-4)^2}{20} = \frac{62}{20} = 3,1$$

Odchylenie standardowe $\sigma_A = \sqrt{3,1} \approx 1,76$.

Analogicznie obliczamy wariancję w klasie B:

$$\sigma_B^2 = \frac{3 \cdot (2-4)^2 + 7 \cdot (3-4)^2 + 7 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{20} = \frac{38}{20} = 1,9$$

Odchylenie standardowe $\sigma_B = \sqrt{1,9} \approx 1,38$. Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla którego zestawu danych, A czy B, odchylenie standardowe jest większe.

- A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5 B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

Ćwiczenie 3

Oblicz odchylenia standardowe zestawów liczb A i B. Sformułuj wniosek.

- A: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 B: 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14

Ćwiczenie 2

$$\bar{x}_A = \frac{33}{11} = 3, \sigma_A = \sqrt{\frac{12+2+2+12}{11}} = \sqrt{\frac{28}{11}} > \sqrt{2}$$

$$\bar{x}_B = \frac{27}{9} = 3, \sigma_B = \sqrt{\frac{4+2+2+4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} < \sqrt{2}$$

$$\sigma_A > \sigma_B$$

Ćwiczenie 3

$$A: \bar{x} = 3, \sigma = \sqrt{1} = 1; B: \bar{x} = 13, \sigma = \sqrt{1} = 1$$

Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wielkość, to odchylenie standardowe się nie zmienia.

Ćwiczenie 1

a) $\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$

$$\sigma^2 = \frac{4+1+1+1+4}{5} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2} \approx 1,41$$

b) $\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$

$$\sigma^2 = \frac{9+9}{5} = 3,6$$

$$\sigma = \sqrt{3,6} \approx 1,9$$

c) $\bar{x} = \frac{60}{5} = 12$

$$\sigma^2 = \frac{16+1+1+4}{5} = 4,4$$

$$\sigma = \sqrt{4,4} \approx 2,1$$

Ćwiczenie 4

$$X: \bar{x} = 0$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{2+8+18}{6}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$Y: \bar{x} = 0$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{200+800+1800}{6}} = \sqrt{\frac{1400}{3}} = 10\sqrt{\frac{14}{3}}$$

dziesięć razy

Ćwiczenie 5

$$X: \bar{x} = 3500 \text{ zł}$$

$$\sigma^2 = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^4}{20} = 50000 \text{ [zł}^2\text{]}$$

$$\sigma = 100\sqrt{5} \approx 223,61 \text{ [zł]}$$

$$Y: \bar{x} = 3500 \text{ zł}$$

$$\sigma^2 = 1050000 \text{ zł}^2$$

$$\sigma = 100\sqrt{105} \approx 1024,70 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 4

Dane są zbiory: $X = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ i $Y = \{10, -10, 20, -20, 30, -30\}$. Ile razy odchylenie standardowe liczb ze zbioru Y jest większe od odchylenia standardowego liczb ze zbioru X ?

Ćwiczenie 5

W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch firmach. Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe wynagrodzeń w firmie X i w firmie Y .

	Firma X			Firma Y		
Liczba pracowników	2	16	2	16	2	2
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	3000	5000	6000

Uwaga. Odchylenie standardowe jest wyrażane w tej samej jednostce co analizowane dane, a wariancja – w tej jednostce podniesionej do kwadratu.

Wariancję liczb można również obliczyć, korzystając z podanego niżej wzoru.

Wariancja liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\bar{x}$, wyraża się za pomocą wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

Przykład 4

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4.

Obliczamy średnią arytmetyczną, a następnie wariancję:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{4 + 3 + 2 + 1} = \frac{4 + 6 + 6 + 4}{10} = \frac{20}{10} = 2 \\ \sigma^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - (\bar{x})^2 = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2}{10} - 2^2 = \\ &= \frac{4 + 12 + 18 + 16}{10} - 4 = \frac{50}{10} - 4 = 1\end{aligned}$$

Wariancja: $\sigma^2 = 1$, odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{1} = 1$.

Ćwiczenie 6

W pewnej firmie analizowano staż pracy pracowników – dane zestawiono w tabeli. Oblicz średni staż pracy pracowników tej firmy oraz wariancję i odchylenie standardowe.

Staż pracy w latach	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba pracowników	6	5	3	2	4	2	3	2	0	1

Ćwiczenie 6

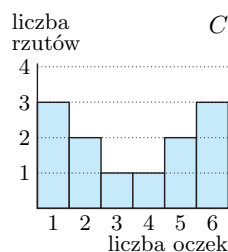
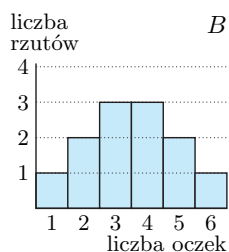
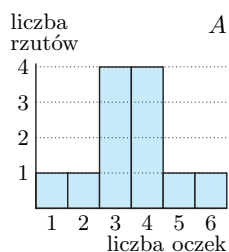
$$\bar{x} = \frac{112}{28} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{632}{28} - 16 = 22\frac{4}{7} - 16 = 6\frac{4}{7}$$

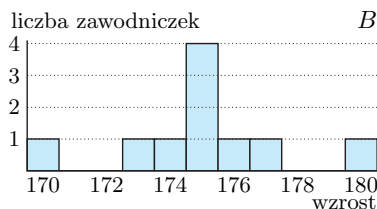
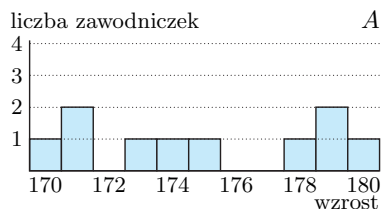
$$\sigma \approx 2,56$$

Zadania

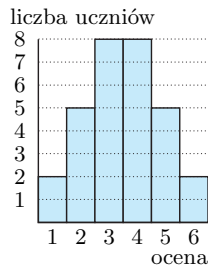
- Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe danych:
 - 5, 5, 5, 5, 5, 5;
 - 4, 4, 4, 6, 6, 6;
 - 3, 3, 3, 7, 7, 7;
 - 3, 4, 5, 5, 6, 7;
 - 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9;
 - 4, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 10.
- Przed rozpoczęciem zawodów sumo zważono sześciu zawodników i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach): 170, 190, 160, 170, 180, 150. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych danych.
- Każda z osób A, B, C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Oblicz odchylenie standardowe liczb oczek wyrzuconych w każdej serii.



- Na diagramach poniżej przedstawiono dane dotyczące wzrostu (w centymetrach) zawodniczek dwóch szkolnych drużyn piłki ręcznej A i B (łącznie z rezerwowymi). Oblicz odchylenia standardowe dla każdej drużyny oraz dla obu drużyn razem.



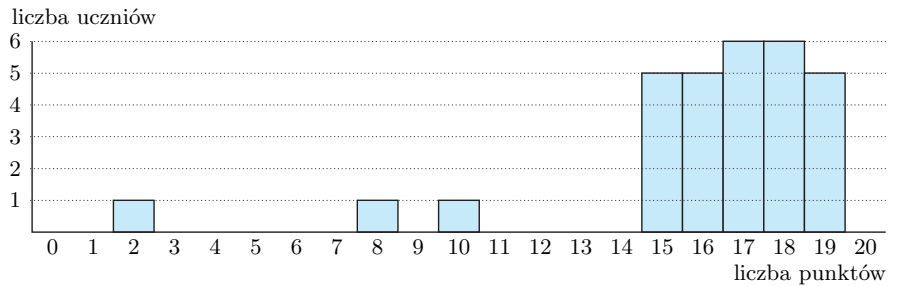
- Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIc.
 - Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.
 - Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe?
 - Ilu uczniów otrzymało ocenę mieszczącą się w przedziale $(\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma)$?



Odpowiedzi do zadań

- $\bar{x} = 5, \sigma^2 = 0, \sigma = 0$
 - $\bar{x} = 5, \sigma^2 = 1, \sigma = 1$
 - $\bar{x} = 5, \sigma^2 = 4, \sigma = 2$
 - $\bar{x} = 5, \sigma^2 = \frac{5}{3}, \sigma \approx 1,29$
 - $\bar{x} = 6, \sigma^2 = \frac{16}{3}, \sigma \approx 2,31$
 - $\bar{x} = 8, \sigma^2 = 4,25, \sigma \approx 2,06$
- $\bar{x} = 170 \text{ kg}, \sigma^2 \approx 166,7 \text{ kg}^2, \sigma \approx 12,9 \text{ kg}$
- $\bar{x}_A = \frac{42}{12} = 3,5$
 $\sigma_A = \sqrt{\frac{19}{12}} \approx 1,26$
 $\bar{x}_B = \frac{42}{12} = 3,5$
 $\sigma_B = \sqrt{\frac{23}{12}} \approx 1,38$
 $\bar{x}_C = \frac{42}{12} = 3,5$
 $\sigma_C = \sqrt{\frac{47}{12}} \approx 1,98$
- $\bar{x}_A = \frac{1750}{10} = 175$
 $\sigma_A = \sqrt{12,8} \approx 3,58 \text{ [cm]}$
 $\bar{x}_B = \frac{1750}{10} = 175$
 $\sigma_B = \sqrt{6} \approx 2,45 \text{ [cm]}$
 $\bar{x} = \frac{3500}{20} = 175$
 $\sigma = \sqrt{9,4} \approx 3,07 \text{ [cm]}$
- $\bar{x} = 3,5$
 - $\sigma \approx 1,3$
 - 16
 - 30

6. Sprawdzan ze statystyki przeprowadzony w klasie IIIa był punktowany w skali od 0 do 20 punktów. Jego wyniki przedstawiono na poniższym diagramie.



- a) Ilu uczniów otrzymało wynik spoza przedziału $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$?
 b) Czy któryś uczeń otrzymał wynik spoza przedziału $(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma)$?

7. a) $\bar{x}_a = \bar{x} + 2$, $M_a = M + 2$,
 $D_a = D + 2$, $\sigma_a = \sigma$
 b) $\bar{x}_b = 2\bar{x}$, $M_b = 2M$,
 $D_b = 2D$, $\sigma_b = 2\sigma$

7. Rozpatrzmy dane: $x_1, x_2, \dots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{x}$, medianie M , dominancie D i odchyleniu standardowym σ . Wyznacz średnią arytmetyczną, medianę, dominantę i odchylenie standardowe danych:

- a) $x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_n + 2$, b) $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n$.

Powtórzenie

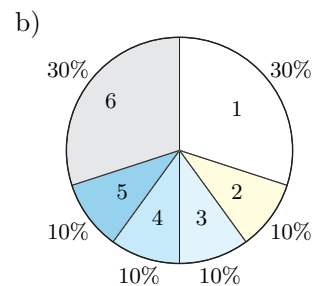
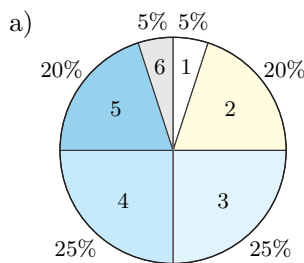
8. a) $\bar{x} = 30 \text{ min}$, $\sigma^2 = 350 \text{ min}^2$,
 $\sigma \approx 18,71 \text{ min}$
 b) $\bar{x} = 30 \text{ min}$,
 $\sigma^2 = 33\frac{1}{3} \text{ min}^2$, $\sigma \approx 5,77 \text{ min}$
 c) $\bar{x} = 30 \text{ min}$,
 $\sigma^2 = 160 \text{ min}^2$, $\sigma \approx 12,65 \text{ min}$

8. Grupę dziesięciorga uczniów zapytano o to, ile minut każdy z nich jedzie do szkoły. Dziewczęta podały odpowiedzi: 60, 30, 20, 10, natomiast chłopcy: 30, 35, 20, 35, 25, 35. Oblicz średni czas dojazdu oraz wariancję i odchylenie standardowe dla:

- a) grupy dziewcząt,
 b) grupy chłopców,
 c) całej dziesięcioosobowej grupy.

9. a) $\bar{x} = 3,5$, $\sigma^2 = 1,65$,
 $\sigma \approx 1,28$
 b) $\bar{x} = 3,5$, $\sigma^2 = 4,25$,
 $\sigma \approx 2,06$

9. Wykonano serię 60 rzutów kostką. Na diagramie przedstawiono otrzymane wyniki. Oblicz ich wariancję i odchylenie standardowe.



6. $\bar{x} = \frac{480}{30} = 16$
 $\sigma = \sqrt{\frac{196+64+36+5+6+24+45}{30}} = \sqrt{\frac{376}{30}} \approx 3,54$
 a) $\bar{x} - \sigma \approx 12,46$, $\bar{x} + \sigma \approx 19,54$
 trzech uczniów
 b) $\bar{x} - 3\sigma \approx 5,38$, $\bar{x} + 3\sigma > 19$
 tak, jeden uczeń

Korelacja

O dodatniej korelacji między dwiema zmiennymi w statystyce mówimy, gdy wzrost jednej z nich powiązany jest ze wzrostem drugiej.

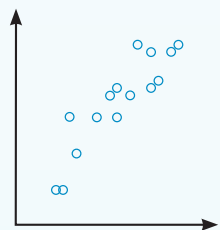
Na przykład zbierając dane dotyczące czasu spędzonego na bieganiu i liczby spalonych kalorii, możemy oczekiwać dodatniej korelacji tych danych.

Aby zmierzyć korelację między zmiennymi x i y na podstawie par danych: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, których średnie arytmetyczne wynoszą odpowiednio $\bar{x}$ i $\bar{y}$, oblicza się współczynnik korelacji r Pearsona [czyt. pirsona]:

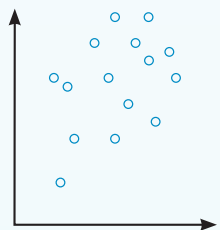
$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

Wartość tego współczynnika dla korelacji dodatnich jest liczbą z przedziału $(0; 1)$.

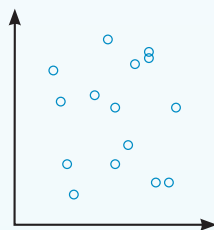
Poniższe wykresy przedstawiają zestawy danych o silnej, słabej i zerowej korelacji.



silna korelacja dodatnia,
 $r = 0,9$



słaba korelacja dodatnia,
 $r = 0,4$



korelacja zerowa,
 $r = 0$

1 W tabeli zestawiono informacje o wzroście (x , w cm) i masie ciała (y , w kg) 10 osób. Oblicz współczynnik korelacji dla tych danych.

x	167	169	172	174	175	176	177	178	180	184
y	69	67	74	70	70	74	78	76	82	80

1. $r = \frac{194}{\sqrt{229,6} \cdot \sqrt{226}} \approx 0,85$

Inne miary rozrzutu danych

Miarą rozrzutu danych jest również **rozstęp**, czyli różnica między największą i najmniejszą z danych liczb.

1. a) 13: rozstęp 9°C , $\sigma = 3^{\circ}\text{C}$
 14: rozstęp 6°C , $\sigma \approx 2,06^{\circ}\text{C}$
 15: rozstęp 9°C , $\sigma \approx 3,08^{\circ}\text{C}$
 16: rozstęp 6°C , $\sigma \approx 2,24^{\circ}\text{C}$
 b) rozstęp: 15°C , $\sigma \approx 3,82^{\circ}\text{C}$

1. W poniższej tabeli podano wyniki pomiarów temperatury powietrza (w $^{\circ}\text{C}$) przeprowadzonych w ciągu czterech kolejnych dni listopada.

Dzień \ Godzina	6	8	10	12	14	16	18	20
13 listopada	-4	-2	-1	0	3	5	4	3
14 listopada	-1	0	1	3	5	5	2	1
15 listopada	2	3	6	9	11	10	9	6
16 listopada	4	6	8	10	10	8	6	4

Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe:

- a) wyników uzyskanych każdego dnia,
 b) wszystkich wyników uzyskanych w ciągu czterech dni.
2. Zbierz dane dotyczące wzrostu uczniów w twojej klasie. Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe tych danych.

Jako miary rozrzutu danych używa się też odchylenia przeciętnego.

Odchyleniem przeciętnym (bezwzględnym) liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{x}$ nazywamy liczbę określoną za pomocą wzoru:

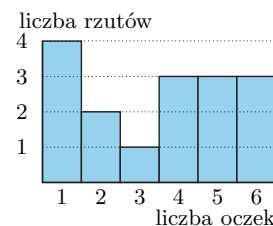
$$d = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Odchylenia przeciętnego używał Pierre Simon de Laplace [czyt. pier simą de laplas] (1749–1827).

3. Sprawdź, czy odchylenie przeciętne dla podanych liczb jest mniejsze, równe czy większe od odchylenia standardowego.

a) 5, 10 b) 2, 4, 6, 12 c) 2, 4, 6, 8, 15

4. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek podczas serii rzutów kostką. Oblicz średnią arytmetyczną, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne tych danych.



3. a) $\bar{x} = 7,5$, $d = \frac{2,5+2,5}{2} = 2,5$, $\sigma = \sqrt{\frac{2,5^2+2,5^2}{2}} = \sqrt{6,25} = 2,5$, równe
 b) $\bar{x} = 6$, $d = \frac{4+2+6}{4} = 3$, $\sigma = \sqrt{\frac{16+4+36}{4}} = \sqrt{14} \approx 3,74$, mniejsze
 c) $\bar{x} = 7$, $d = \frac{5+3+1+1+8}{5} = 3,6$, $\sigma = \sqrt{\frac{25+9+2+64}{5}} = \sqrt{20} \approx 4,47$, mniejsze
 4. $\bar{x} = 3,5$, $\sigma \approx 1,87$, $d = 1,6875$

4.4. Średnia ważona

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3 + 1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Agata, Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1 + x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Agata	5	3	$\frac{3 \cdot 5 + 3}{4} = \frac{18}{4}$	4,5
Marek	6	2	$\frac{3 \cdot 6 + 2}{4} = \frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3 \cdot 3 + 5}{4} = \frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy średnią ważoną.

Definicja

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \dots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$ z podanymi wagami.

- a) $n_1 = 3, n_2 = 1$ b) $n_1 = 1, n_2 = 1$ c) $n_1 = 0,5, n_2 = 0,5$

Zauważ, że jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona liczb jest równa ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12	8
Waga	2	1	3	4

b)

Liczba	7	3	4	5
Waga	0,2	0,3	0,5	0,4

Uczeń:

- oblicza średnią ważoną zestawu liczb z podanymi wagami,
- stosuje w zadaniach średnią ważoną.

Ćwiczenie 1

a) $\bar{x}_w = \frac{18}{4} = 4,5$

b) $\bar{x}_w = \frac{10}{2} = 5$

c) $\bar{x}_w = \frac{5}{1} = 5$

Ćwiczenie 2

a) $\bar{x}_w = \frac{89}{10} = 8,9$

b) $\bar{x}_w = \frac{6,3}{1,4} = 4,5$

Zadania

1. Konkurs składa się z czterech etapów ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano liczby punktów, które zdobyli finaliści. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał konkurs?
2. Dane są liczby x_1, x_2, x_3 i x_4 . Sprawdź, czy w przykładach A i B średnia ważona jest taka sama.

Etap	I	II	III	IV
Waga	0,2	0,8	0,4	0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8

A:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	3	2	5	2

B:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	0,6	0,4	1	0,4

3. Oblicz t , jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 6,5.

a)

Liczba	t	4	8
Waga	0,3	0,3	0,9

b)

Liczba	15	9	3
Waga	2	3	t

4. Oblicz w , jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 5.

a)

Liczba	3	9	w
Waga	0,7	0,3	0,1

b)

Liczba	10	8	6	2
Waga	w	3	5	8

5. Ocena semestralna z matematyki jest średnią ważoną ocen z wagami podanymi w tabeli. Tomek otrzymał następujące oceny:

- prace domowe: 1, 1, 1,
- kartkówki: 3, 1, 2,
- klasówki: 3, 6, 6.

Dla jakiej wartości n średnia ważona tych ocen jest równa: a) 3, b) 4?

Kategoria	Waga
praca domowa	1
kartkówka	2
klasówka	n

Powtórzenie

6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	11	12	13
Waga	0,1	0,3	0,6

b)

Liczba	3	5	8	11
Waga	0,8	0,1	0,4	0,3

2. A: $\bar{x}_w = \frac{3x_1+2x_2+5x_3+2x_4}{12} = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{1}{6}x_4$
 B: $\bar{x}_w = \frac{0,6x_1+0,4x_2+x_3+0,4x_4}{2,4} = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{1}{6}x_4$

Zatem w obu przykładach średnia ważona jest taka sama.

Odpowiedzi do zadań

1. Adam: $\bar{x}_w = \frac{13,4}{2} = 6,7$
 Marek: $\bar{x}_w = \frac{14}{2} = 7$
 Piotr: $\bar{x}_w = \frac{13,8}{2} = 6,9$
 Konkurs wygrał Marek.

3. a) $\frac{0,3t+1,2+7,2}{1,5} = 6,5$
 $0,3t = 9,75 - 8,4$
 $t = 4,5$

- b) $\frac{30+27+3t}{5+t} = 6,5$
 $3,5t = 24,5$
 $t = 7$

4. a) $\frac{2,1+2,7+0,1w}{1,1} = 5$
 $0,1w = 5,5 - 4,8$
 $w = 7$

- b) $\frac{10w+24+30+16}{w+16} = 5$
 $10w + 70 = 5w + 80$
 $w = 2$

5. $\bar{x}_w = \frac{3+12+15n}{3+6+3n} = \frac{5+5n}{3+n}$

- a) $\frac{5+5n}{3+n} = 3$
 $2n = 4$
 $n = 2$

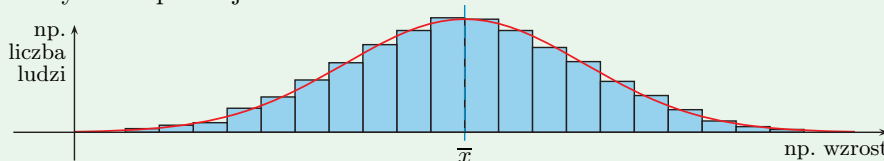
- b) $\frac{5+5n}{3+n} = 4$
 $n = 7$

6. a) 12,5 b) 5,875

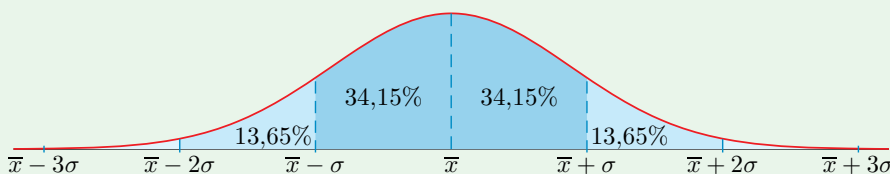
4.5. Zagadnienia uzupełniające

Rozkład normalny

Przy analizie wielu zjawisk, gdy mamy do dyspozycji dużą liczbę danych, diagram, za pomocą którego je porządkujemy, często ma taki kształt jak na rysunku poniżej:



Zdarza się to m.in. wówczas, gdy porządkujemy takie dane, jak wzrost i waga ludzi czy długość liści określonego drzewa. Taki rozkład danych nosi nazwę **rozkładu normalnego**. Krzywa (zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym) jest nazywana **krzywą Gaussa**. Jest ona symetryczna względem prostej pionowej poprowadzonej przez średnią arytmetyczną danych. Jeśli rozkład danych jest rozkładem normalnym, to około 68,3% danych różni się od średniej o mniej niż odchylenie standardowe σ , a około 95,6% danych różni się od średniej o mniej niż 2σ . **Reguła trzech sigm** mówi, że do przedziału $(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma)$ należy około 99,7% danych.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $0,683 \cdot 500 = 341,5$,
czyli 342 osoby

b) $\frac{500-342}{2} = 79$

c) $\frac{100\%-95,6\%}{2} = 2,2\%$

$0,022 \cdot 500 = 11$

2. Wzrost mniejszy niż
 $\bar{x} - \sigma = 171$ cm

ma $\frac{100\%-68,3\%}{2} = 15,85\%$
uczniów.

$0,1585 \cdot 200 = 31,7 \approx 32$

Zatem wzrost powyżej
171 cm ma 168 uczniów.

1. Przyjmijmy, że wyniki testu IQ przeprowadzonego w grupie 500 osób mają rozkład normalny ze średnią $\bar{x} = 100$ i odchyleniem standardowym $\sigma = 15$. Oszacuj, ile osób z tej grupy uzyskało wynik testu:

a) między 85 a 115, b) większy od 115, c) większy od 130.

2. Zebrano dane dotyczące wzrostu 200 uczniów liceum sportowego. Mają one rozkład normalny o średniej $\bar{x} = 177$ cm i odchyleniu standardowym $\sigma = 6$ cm. Oszacuj, ilu uczniów ma wzrost powyżej 171 cm.

3. Żarówki produkowane przez pewną firmę przepalają się średnio po 2000 godzin. Przyjmując, że zebrane dane mają rozkład normalny, oszacuj, ile żarówek z partii liczącej 20 000 sztuk przepali się przed upływem 1400 godzin, a ile przed upływem 1100 godzin, jeżeli odchylenie standardowe $\sigma = 300$ godzin.

3. $1400 = \bar{x} - 2\sigma$

$\frac{100\%-95,6\%}{2} = 2,2\%$

$0,022 \cdot 20000 = 440$

$1100 = \bar{x} - 3\sigma$

$\frac{100\%-99,7\%}{2} = 0,15\%$

$0,0015 \cdot 20000 = 30$

Przed upływem 1400 godzin przepali się 440 żarówek,
a przed upływem 1100 godzin – 30 żarówek.

Multiteka

• Krzywa Gaussa

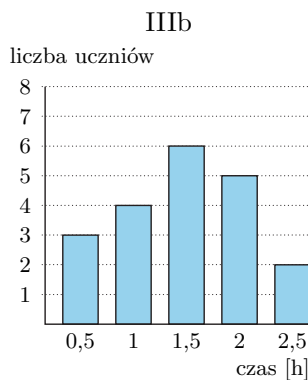
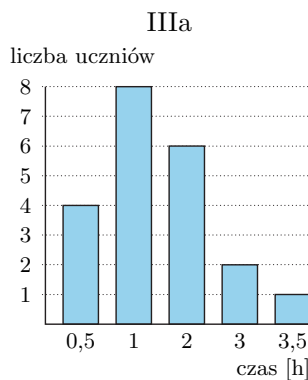
Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.
 - 5, 4, 3, 2, 4, 3, 5, 4
 - 9, 12, 9, 12, 7, 9, 94, 8, 20
 - 8, 8, 1, 3, 4, 6, 1, 6, 8
 - 4, 16, 13, 5, 7, 16, 15, 4
- Studenci matematyki zdawali egzamin w dwóch grupach. W tabeli podano liczby poszczególnych ocen, jakie otrzymali. Oblicz średnią ocen z egzaminu dla każdej grupy.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Grupa I	3	6	5	3	3	2
Grupa II	0	3	4	6	4	3

- W ciągu kolejnych siedmiu dni szkolnego rajdu rowerowego przebyto trasy długości: 26 km, 34 km, 40 km, 44 km, 45 km, 37 km, 26 km. Oblicz średnią długość trasy przebytej jednego dnia oraz odchylenie standardowe.
- Wagi urodzeniowe sześciu noworodków urodzonych jednego dnia na oddziale pewnego szpitala były równe (w gramach): 3500, 3100, 2850, 3300, 3550, 4700. Oblicz średnią wagę noworodków oraz odchylenie standardowe.
- W klasach IIIa oraz IIIb pewnej szkoły przeprowadzono ankietę. Każdy uczeń odpowiedział na pytanie: „Ile godzin dziennie oglądasz telewizję?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej klasy oraz dla obu klas razem.



- IIIa: $\bar{x} = \frac{31,5}{21} = 1,5$ [h], $M = 1$ h, $D = 1$ h
 IIIb: $\bar{x} = \frac{29,5}{20} = 1,475$ [h], $M = 1,5$ h, $D = 1,5$ h
 Obie klasy:

Czas [h]	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Liczba uczniów	7	12	6	11	2	2	1

$$\bar{x} = \frac{61}{41} \approx 1,49 \text{ [h]}, M = 1,5 \text{ h}, D = 1 \text{ h}$$

Odpowiedzi do zadań

- 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5
 $\bar{x} = \frac{30}{8} = 3,75$, $M = 4$,
 $D = 4$
 - 7, 8, 9, 9, 9, 12, 12, 20, 94
 $\bar{x} = \frac{180}{9} = 20$, $M = 9$,
 $D = 9$
 - 1, 1, 3, 4, 6, 6, 8, 8, 8
 $\bar{x} = \frac{45}{9} = 5$, $M = 6$,
 $D = 8$
 - 4, 4, 5, 7, 13, 15, 16, 16
 $\bar{x} = \frac{80}{8} = 10$,
 $M = \frac{7+13}{2} = 10$,
 $D_1 = 4$, $D_2 = 16$
- grupa I: $\bar{x} = \frac{77}{22} = 3,5$
 grupa II: $\bar{x} = \frac{80}{20} = 4$
- $\bar{x} = \frac{252}{7} = 36$ [km]
 $\sigma = \sqrt{\frac{366}{7}} \approx 7,23$ [km]
- $\bar{x} = \frac{21000}{6} = 3500$ [g]
 $\sigma = \sqrt{\frac{2065000}{6}} \approx 586,66$ [g]

6. a) $\bar{x}_w = \frac{55}{11} = 5$
 b) $\bar{x}_w = \frac{25,1}{2} = 12,55$

7. A: $5,6 \approx 6$, B: $5,4 \approx 5$,
 C: $4,2 \approx 4$, D: $3,8 \approx 4$,
 E: $3,2 \approx 3$

Zestaw II

1. $\frac{a+b+c+d}{4} = 8$, czyli
 $a + b + c + d = 32$
 A: $\frac{a+b+c+d+0}{5} = \frac{32}{5} \neq 8$
 B: $\frac{a+b+c+d+13}{5} = \frac{45}{5} = 9$
 C: $\frac{2(a+b+c+d)}{8} = \frac{64}{8} \neq 16$
2. $\bar{x}_d = \frac{1837}{11} = 167$ [cm]
 $\bar{x} = \frac{5004}{30} = 166,8$ [cm]
 a) 6 dziewcząt
 b) 11 chłopców

6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	2	9	6	8
Waga	5	1	2	3

b)

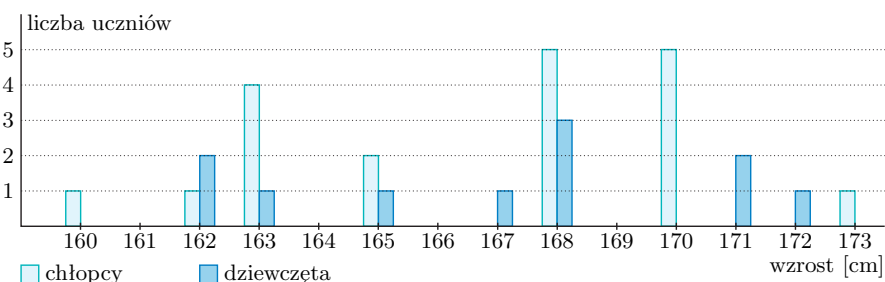
Liczba	5	10	12	20
Waga	0,1	1,1	0,3	0,5

7. Ocena roczna jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ocen: za pierwszy semestr z wagą 0,4 i za drugi semestr z wagą 0,6. Jakie oceny roczne otrzymali uczniowie, których oceny semestralne podano w tabeli?

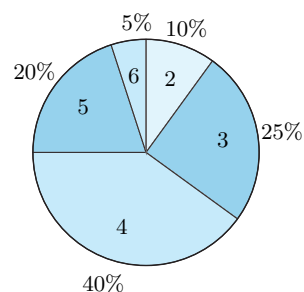
Uczeń	A	B	C	D	E
I semestr	5	6	3	2	5
II semestr	6	5	5	5	2

Zestaw II

1. Średnia arytmetyczna liczb: a, b, c, d jest równa 8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
 A. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 0$ jest równa 8.
 B. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 13$ jest równa 9.
 C. Średnia arytmetyczna liczb: a, a, b, b, c, c, d, d jest równa 16.
2. Na poniższym diagramie przedstawiono dane dotyczące wzrostu dziewcząt i chłopców w pewnej klasie liceum.



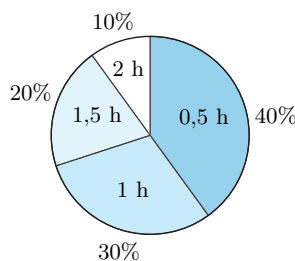
- a) Ile dziewcząt ma wzrost większy niż średni wzrost w grupie dziewcząt?
 b) Ilu chłopców ma wzrost większy niż średni wzrost wszystkich uczniów w klasie?
3. Na diagramie kołowym podano procentowy rozkład ocen semestralnych z matematyki w pewnej szkole. Oblicz średnią ocen z matematyki w tej szkole. Ile wynosi odchylenie standardowe przedstawionych danych?



3. $\bar{x} = 0,1 \cdot 2 + 0,25 \cdot 3 + 0,4 \cdot 4 + 0,2 \cdot 5 + 0,05 \cdot 6 = 3,85$
 $\sigma^2 = 15,85 - 14,8225 = 1,0275$
 $\sigma = \sqrt{1,0275} \approx 1,01$



4. Grupie uczniów zadano pytanie: „Ile godzin dziennie poświęcasz na czytanie książek?”. Wyniki ankiety przedstawiono na zamieszczonym obok diagramie. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe tych wyników.



5. a) Średnia arytmetyczna liczb: 2, 1, 5, a , 4, 1 jest równa ich wariancji. Oblicz a .
b) Średnia arytmetyczna liczb: 7, 3, x , y , 8, 5, 6 jest równa 5, a odchylenie standardowe jest równe 2. Oblicz x i y , jeśli $x < y$.
6. Uczniów klasy IIIa podzielono na grupy według pierwszych liter nazwisk: grupa I – od A do K, grupa II – od L do P, grupa III – od R do Ż. Średnią ocen semestralnych z języka polskiego w każdej z grup przedstawiono w tabeli.

	Grupa I	Grupa II	Grupa III
Liczba uczniów	12	8	10
Średnia ocen w grupie	3,5	3,25	4,3

Troje uczniów w grupie I otrzymało na koniec semestru ocenę niedostateczną. O ile byłyby wyższa średnia ocen w tej grupie, a o ile w całej klasie, gdyby uczniowie ci na koniec semestru otrzymali ocenę dopuszczającą, a oceny reszty uczniów pozostały bez zmian?

7. W pewnej kuracji stosuje się lek X lub lek Y . Lek X podano jednej grupie pacjentów, a lek Y – drugiej. Poniżej przedstawiono dane dotyczące skuteczności każdego z nich (z podziałem na płeć pacjentów). Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Który lek jest skuteczniejszy?

Lek X		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		200	300	500
Lek skuteczny	liczba osób	30	120	150
	procent osób	15%	40%	30%

Lek Y		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		400	100	500
Lek skuteczny	liczba osób	80	45	125
	procent osób	20%	45%	25%

4. $\bar{x} = 1 \text{ h}$
 $\sigma^2 = 1,25 - 1 = 0,25 \text{ [h}^2\text{]}$
 $\sigma = 0,5 \text{ h}$

5. a) $\bar{x} = \frac{13+a}{6}$
 $\sigma^2 = \frac{2 \cdot 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + a^2}{6} +$
 $- \left(\frac{13+a}{6}\right)^2$
 $\frac{47+a^2}{6} - \frac{169+26a+a^2}{36} = \frac{13+a}{6}$
 $5a^2 - 32a + 35 = 0$
 $a = 1,4 \text{ lub } a = 5$
b) $\bar{x} = \frac{29+x+y}{7} = 5$
 $\sigma = \sqrt{\frac{183+x^2+y^2}{7} - 25} = 2$
 $x = 2, y = 4$

6. Suma ocen wzrosłaby o 3, więc średnia ocen w grupie I byłaby wyższa o $\frac{3}{12} = 0,25$, a średnia ocen w klasie byłaby wyższa o $\frac{3}{30} = 0,1$.

7. Nie można rozstrzygnąć, który lek jest skuteczniejszy.



W przykładzie będziemy korzystać z poniższego wzoru na wariancję liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

Przykład

Grupę siedmiorga uczniów zapytano o to, ile czasu każdemu z nich zajmuje powrót ze szkoły do domu. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli. Oblicz odchylenie standardowe czasu powrotu dla całej siedmioosobowej grupy.

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba pytaných	4	3
Średni czas [min]	40	35
Odchylenie standardowe [min]	4	2

Niech x_1, x_2, x_3 i x_4 będą czasami powrotu dziewcząt ze szkoły do domu, a y_1, y_2 i y_3 – czasami powrotu chłopców. Oznaczmy średnie czasy dziewcząt i chłopców odpowiednio przez $\bar{x}_d$ i $\bar{y}_c$. Wówczas $\bar{x}_d = 40$ i $\bar{y}_c = 35$.

Obliczamy średni czas $\bar{x}$ powrotu ze szkoły do domu dla całej grupy uczniów (jest on średnią ważoną liczb $\bar{x}_d$ i $\bar{y}_c$):

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot \bar{x}_d + 3 \cdot \bar{y}_c}{4 + 3} = \frac{4 \cdot 40 + 3 \cdot 35}{7} = \frac{265}{7} \approx 37,86$$

Wariancja dla czworga dziewcząt dana jest wzorem:

$$\sigma_d^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} - (\bar{x}_d)^2$$

Zatem:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4(\sigma_d^2 + (\bar{x}_d)^2) = 4(4^2 + 40^2) = 6464$$

Wariancja dla trzech chłopców dana jest wzorem:

$$\sigma_c^2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} - (\bar{y}_c)^2$$

Zatem:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3(\sigma_c^2 + (\bar{y}_c)^2) = 3(2^2 + 35^2) = 3687$$

Obliczamy wariancję dla całej siedmioosobowej grupy:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{7} - (\bar{x})^2 \approx \frac{6464 + 3687}{7} - (37,86)^2 \approx 16,76$$

Zatem odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 4,09$ min

Odpowiedź: Odchylenie standardowe dla całej grupy wynosi 4,09 min.



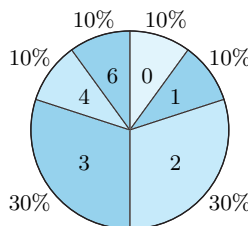
Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. W pewnej firmie jest zatrudnionych 10 osób. Ich miesięczne wynagrodzenia wynoszą: 2900 zł, 3100 zł, 3100 zł, 3240 zł, 3290 zł, 3300 zł, 3320 zł, 3750 zł, 5800 zł, 8000 zł. Ilu pracowników tej firmy ma wynagrodzenie wyższe od wynagrodzenia średniego?

A. 6 B. 4 C. 3 **D. 2**

2. Grupie 50 losowo wybranych osób w pewnym mieście zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. O ile mediana otrzymanych danych jest niższa od ich średniej arytmetycznej?

A. 0,1 C. 0,3
B. 0,2 D. 0,4



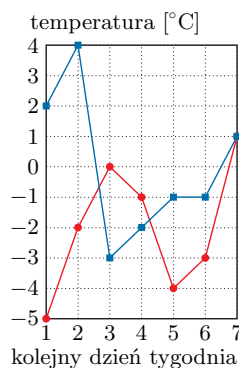
3. Liczby a, b, c, d ustawiono w kolejności rosnącej, a ich mediana jest równa 7. Jeśli $bc = 24$, to:

A. $(b - c)^2 = 0$, C. $(b - c)^2 = 100$,
B. $(b - c)^2 = 25$, D. $(b - c)^2 = 144$.

4. Rafał przez dwa tygodnie ferii, codziennie o godzinie 12, mierzył temperaturę powietrza. Wyniki pomiarów przedstawił na wykresie (kolorem niebieskim zaznaczył wyniki z pierwszego tygodnia, a kolorem czerwonym – z drugiego).

Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią temperaturę w pierwszym tygodniu, $\bar{x}_2$ – w drugim, a $\bar{x}_3$ – w obu tygodniach. Wówczas:

A. $\bar{x}_2 < \bar{x}_1 < \bar{x}_3$, C. $\bar{x}_1 < \bar{x}_3 < \bar{x}_2$,
B. $\bar{x}_3 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2$, D. $\bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_1$.



5. W tabeli podano liczby z dwoma zestawami wag. Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią tych liczb z wagami X , a $\bar{x}_2$ – ich średnią z wagami Y . Wówczas $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ jest równe:

@

A. 6, B. 4, C. 2, D. 0.

Liczba	10	15	20
Waga X	0,5	0,4	0,1
Waga Y	0,3	1,2	1,5

Odpowiedzi do zadań

1. $\bar{x} = \frac{39800}{10} = 3980$ [zł]

2. $M = 2,5$, $\bar{x} = 2,6$

3. $M = \frac{b+c}{2} = 7$, czyli $b + c = 14$ oraz $bc = 24$, zatem $b = 2$ i $c = 12$

4. $\bar{x}_1 = 0$
 $\bar{x}_2 = -2$
 $\bar{x}_3 = -1$

5. $\bar{x}_1 = \frac{13}{1} = 13$
 $\bar{x}_2 = \frac{51}{3} = 17$



Odpowiedzi do zadań

- $\frac{2x+26}{9} = 4$, czyli $x = 5$
2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6
 $M = 5, D = 5$
- $Y: \bar{x} = 48$
 $Z: \bar{x} = 53$
 $X: \bar{x} = 0,5x + 26$
 $48 < 0,5x + 26 < 53$
 $44 < x < 54$
Zatem $45 \leq x \leq 53$.
- Niech a, b, c – sumy ocen odpowiednio w grupach A, B i C .

$$\begin{cases} \frac{a+b}{18} = 4 \\ \frac{b+c}{16} = 3 \\ \frac{a+b+c}{24} = 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 36 \\ c = 12 \end{cases}$$
 $\bar{x}_A = 4,5, \bar{x}_B = 3,6, \bar{x}_C = 2$
- $\bar{x} = \frac{80000+54000+66000}{20+15+15} = \frac{200000}{50} = 4000$ [zł]
 $\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n} - \bar{x}^2$
 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = n(\sigma^2 + \bar{x}^2)$
 $20 \cdot (400^2 + 4000^2) +$
 $+15 \cdot (500^2 + 3600^2) +$
 $+15 \cdot (\sigma_3^2 + 4400^2) =$
 $= 50 \cdot (600^2 + 4000^2)$
 $323200000 + 198150000 +$
 $+15\sigma_3^2 + 290400000 =$
 $= 818000000$
 $15\sigma_3^2 = 6250000$
 $\sigma_3 = \sqrt{\frac{6250000}{15}} \approx 645,50$ [zł]

■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Karolina ma z chemii następujące oceny: 5, 2, 3, x , 5, $x+1$, 5, 3, 2. Oblicz x , jeśli wiadomo, że średnia ocen wynosi 4. Wyznacz ich medianę i dominantę.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wynik egzaminu jest średnią ważoną punktów uzyskanych z testów: z matematyki z wagą 0,5, z geografii z wagą 0,2 oraz z języka obcego z wagą 0,3. Ile może wynosić wynik z matematyki kandydata X , jeśli zdał on egzamin lepiej od kandydata Y , ale gorzej od kandydata Z ?

Kandydat	X	Y	Z
Matematyka	x	40	60
Geografia	40	50	40
Język obcy	60	60	50

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 3 (4 pkt)

Uczniowie pisali sprawdzian w trzech grupach A, B i C , liczących odpowiednio 8, 10 i 6 osób. Średnia ocen w grupach A i B łącznie wyniosła 4, a w grupach B i C łącznie wyniosła 3. Oblicz średnią ocen dla każdej z grup, jeśli średnia całej klasy była równa 3,5.

Zadanie 4 (4 pkt)

Pewna firma ma trzy zakłady produkcyjne. W tabeli podano informacje o średnich zarobkach w tych zakładach.

	Zakład I	Zakład II	Zakład III
Liczba pracowników	20	15	15
Średnie wynagrodzenie	4000 zł	3600 zł	4400 zł
Odchylenie standardowe	400 zł	500 zł	σ_3

Oblicz odchylenie standardowe zarobków w zakładzie III, jeśli odchylenie standardowe zarobków wszystkich pracowników tych zakładów jest równe 600 zł.

Zadanie 5 (4 pkt)

W fokarium zważono wszystkie foki: osiem samców i cztery samice. Średnia waga samców była równa 250 kg z odchyleniem standardowym 50 kg. Średnia waga samic była równa 150 kg z odchyleniem standardowym 30 kg. Do fokarium przybyły dwie samice ważące po 170 kg. Oblicz średnią wagę oraz odchylenie standardowe wag wszystkich fok przebywających teraz w fokarium.

- Niech $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$ – wagi samców, y_1, y_2, y_3, y_4 – wagi pierwszych 4 samic. Średnia waga wszystkich fok:

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 250 + 4 \cdot 150 + 2 \cdot 170}{14} = \frac{2940}{14} = 210 \text{ [kg]}$$

Wariancja wag samców:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_8^2}{8} - 250^2 = 50^2$$

$$\text{czyli } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_8^2 = 520000$$

$$\text{Wariancja wag 4 samic: } \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2}{4} - 150^2 = 30^2, \text{ czyli } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 93600$$

Wariancja wag wszystkich fok:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2+\dots+x_8^2+y_1^2+\dots+y_4^2+2 \cdot 170^2}{14} - 210^2 = \frac{671400}{14} - 44100 \approx 3857,14 \text{ [kg}^2\text{]}$$

$$\text{Odchylenie standardowe wag wszystkich fok: } \sigma \approx 62,11 \text{ kg}$$

Indeks

- ciąg 112
 - arytmetyczny 128, 129, 130
 - geometryczny 142, 143, 145, 146
 - liczb Catalana 163
 - liczbowy 113
 - malejący 119
 - niemalejący 121
 - nierosnący 121
 - nieskończony 112
 - rosnący 119
 - skończony 114
 - stały 121
- dominanta 178
- działania na potęgach 10, 11, 14
- dziedzina
 - funkcji logarytmicznej 32, 33
 - funkcji wykładniczej 17
- efektywna stopa procentowa 157
- figura
 - osiowosymetryczna 94
 - środkowosymetryczna 97
- funkcja
 - logarytmiczna 32
 - wykładnicza 17
- iloraz ciągu geometrycznego 142
- kapitalizacja odsetek 156
- krzywa Gaussa 192
- liczba logarytmowana 22
- liczby losowe 180
- logarytm 22, 23
 - dziesiętny 26
- mediana 176
- nominalna stopa procentowa 157
- odchylenie
 - przeciętne 188
 - standardowe 182
- odległość
 - między prostymi równoległymi 64
 - między punktami w układzie współrzędnych 55
 - punktu od prostej 62
- okres kapitalizacji 156
- okręgi
 - przecinające się 76
 - rozłączne 76
 - styczne 76
- oś symetrii 93, 94
- podciąg ciągu 149
- podstawa logarytmu 22
- pole trójkąta w układzie współrzędnych 66
- potęga o wykładniku
 - całkowitym 10
 - rzeczywistym 13, 14
 - wymiernym 11
- procent składany 155
- proste
 - prostopadłe w układzie współrzędnych 61
 - równoległe w układzie współrzędnych 61
- punkt styczności prostej i okręgu 80
- reguła trzech sigm 192
- rekurencyjne określenie ciągu 123
- rozkład normalny 192
- rozpad promieniotwórczy 41
- rozstęp 188
- równanie
 - kierunkowe prostej 61
 - ogólne prostej 61
 - okręgu 67
 - okręgu w postaci kanonicznej 68
 - okręgu w postaci ogólnej 75
- różnica ciągu arytmetycznego 128
- sieczna okręgu 80
- silnia 124
- skala
 - centylowa 177
 - Richtera 45
- styczna do okręgu 80
- suma początkowych wyrazów ciągu
 - arytmetycznego 136, 137
 - geometrycznego 148
- symetria
 - osiowa 93
 - środkowa 97
 - względem osi układu współrzędnych 94
 - względem początku układu współrzędnych 98
- średnia
 - arytmetyczna 130, 161, 172
 - geometryczna 146, 161
 - obcięta 175
 - ważona 189
- środek symetrii 97
- środkowa trójkąta 59

twierdzenie
 o logarytmie iloczynu 28
 o logarytmie ilorazu 28
 o logarytmie potęgi 30
 o zmianie podstawy logarytmu 44
 odwrotne do twierdzenia
 Pitagorasa 54
 Pitagorasa 54
 układ równań
 nieoznaczony 83
 oznaczony 83
 sprzeczny 83
 wariancja 182, 184
 współczynnik kierunkowy prostej 61
 współrzędne środka odcinka 58
 wyraz ciągu 112
 wzór ogólny
 ciagu 115
 ciagu arytmetycznego 128
 ciagu geometrycznego 143
 wzrost wykładniczy 41
 zbiór wartości
 funkcji logarytmicznej 33
 funkcji wykładniczej 17

Tablice logarytmów dziesiętnych

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3944	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6294	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7789	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996