



3 Ciągi

Pojęciem ciągu posługujemy się w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z kolejno ustawionymi i ponumerowanymi obiektami. Mogą to być obiekty matematyczne lub inne. W rozdziale tym omawiamy ciągi liczbowe, czyli takie, których kolejnymi wyrazami są liczby. Przykłady ciągów:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$ – ciąg odwrotności kolejnych liczb pierwszych,

1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414214, 1,4142136, ... – ciąg kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.

Multiteka

• Ciąg Fibonacciego

Uczeń:

- wyznacza kolejne wyrazy ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów,
- wyznacza wyrazy ciągu opisanego słownie,
- szkicuje wykres ciągu.

Ćwiczenie 1

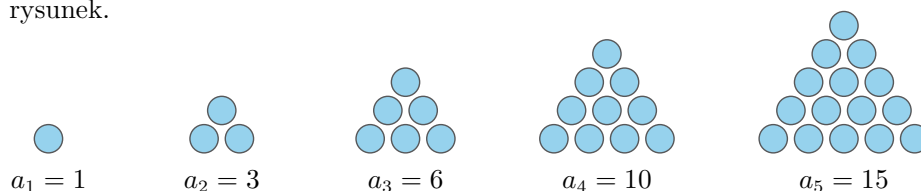
- a) $a_n = 2^n$,
 $a_9 = 512$, $a_{10} = 1024$
- b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
 $a_9 = \frac{1}{512}$, $a_{10} = \frac{1}{1024}$
- c) $a_n = (-1)^n$,
 $a_9 = -1$, $a_{10} = 1$
- d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$,
 $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = -\frac{1}{10}$

Komentarz

W tym miejscu warto wspomnieć uczniom o **Encyklopedii ciągów liczb całkowitych**, o której mowa na str. 163.

3.1. Pojęcie ciągu

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, ... to kolejne liczby trójkątne – nazwę wyjaśnia poniższy rysunek.



Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, ... wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyraz $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$.

Ogólnie, n -ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyrazy a_9 oraz a_{10} tego ciągu.

- a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... c) -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...
- b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

Definicja

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

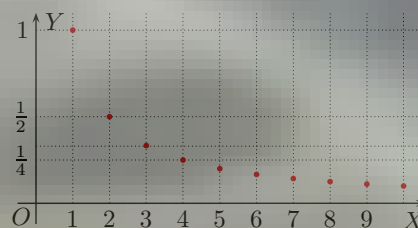
Czasem za dziedzinę ciągu przyjmowany jest zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbf{N}$.

Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko: „ciąg”.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n) . Kolejne wartości funkcji a , czyli wyrazy ciągu: $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, ..., oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \dots$

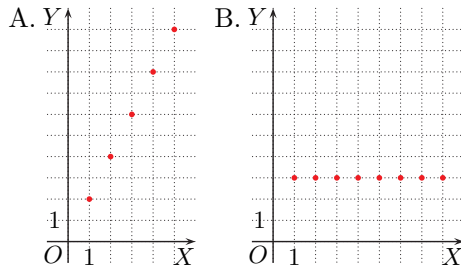
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Ćwiczenie 2

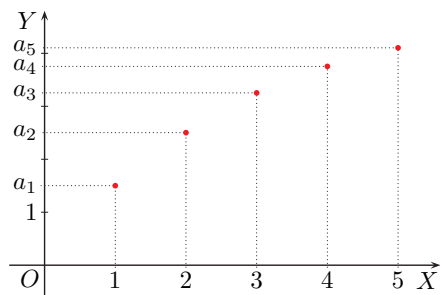
Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10, ..., a na rysunku B wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyrazy siedemnasty oraz setny każdego z tych ciągów.



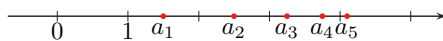
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres ciągu:

- połówek kolejnych liczb naturalnych: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
- kolejnych potęg liczby $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
- naprzemiennego: 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu będziemy zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).



Ćwiczenie 4

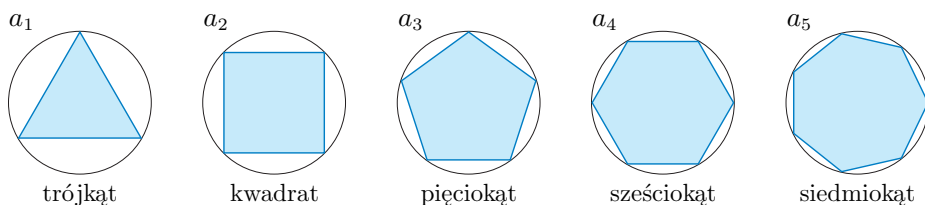
Zaznacz na osi liczbowej pięć początkowych wyrazów danego ciągu.

- $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}, \frac{15}{2}, \dots$
- $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Większość ciągów przez nas rozpatrywanych to ciągi, których wyrazami są liczby – takie ciągi nazywamy **ciągami liczbowymi**. Oprócz ciągów liczbowych rozpatruje się również inne ciągi, np. ciąg prostych, ciąg wielokątów.

Przykład 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono pięć początkowych wyrazów ciągu wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1.



Ćwiczenie 4

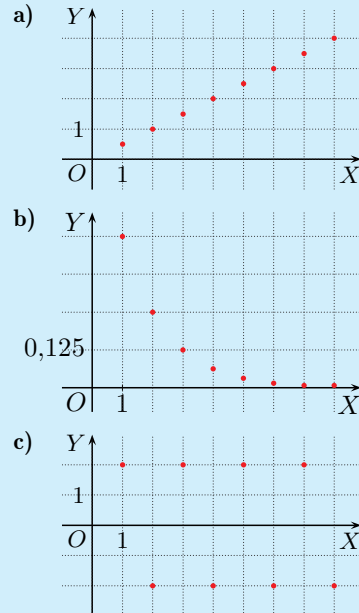
- Number line from 0 to 1 with points labeled a1, a2, a3, a4, a5.
- Number line from 0 to 1 with points labeled a5, a3, a2, a1, a4.
- Number line from 0 to 1 with points labeled a4, a2, a1, a3, a5.

Ćwiczenie 2

A: $a_n = 2n$, $a_{17} = 34$, $a_{100} = 200$

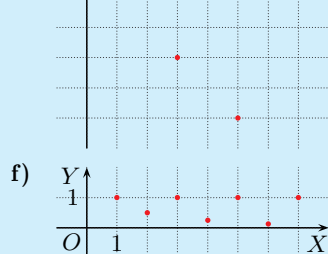
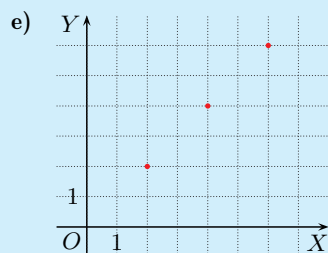
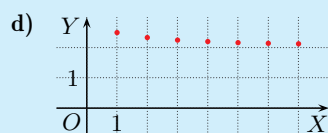
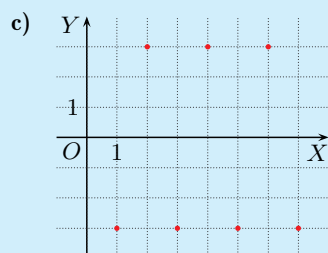
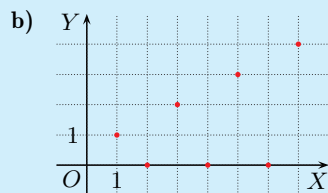
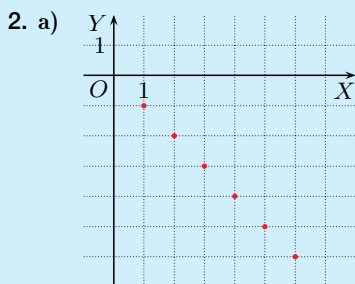
B: $a_n = 3$, $a_{17} = 3$, $a_{100} = 3$

Ćwiczenie 3



Odpowiedzi do zadań

1. a) $a_7 = 13$, $a_8 = 15$, $a_9 = 17$,
 $a_{10} = 19$
 b) $a_7 = \frac{1}{14}$, $a_8 = \frac{1}{16}$, $a_9 = \frac{1}{18}$,
 $a_{10} = \frac{1}{20}$
 c) $a_7 = 17$, $a_8 = 19$, $a_9 = 23$,
 $a_{10} = 29$



Rozpatrujemy również **ciągi skończone**, czyli takie, których dziedziną jest zbiór skończony $\{1, 2, \dots, n\}$. Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy **ciągami n -wyrazowym**.

Przykład 4

W tabeli przedstawiono dwa różne ciągi siedmiowyrazowe: (a_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności następowania po sobie oraz (b_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności alfabetycznej.

Zwróć uwagę na to, że w przeciwieństwie do zbiorów kolejność wyrazów w ciągu ma znaczenie. Jeżeli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy nowy ciąg.

n	(a_n)	(b_n)
1	poniedziałek	czwartek
2	wtorek	niedziela
3	środa	piątek
4	czwartek	poniedziałek
5	piątek	sobota
6	sobota	środa
7	niedziela	wtorek

Zadania

- Podaj wyrazy a_7 , a_8 , a_9 i a_{10} ciągu:
 - kolejnych liczb nieparzystych dodatnich: 1, 3, 5, 7, ...
 - odwrotności kolejnych liczb parzystych dodatnich: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, ...
 - kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, ...

- Naszkicuj wykres ciągu o wyrazach:

- $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$
- $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$
- $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$
- $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}, \dots$
- $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

- Wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_6$ ciągu są przybliżeniami dziesiętnymi liczby x , do pierwszego, drugiego, ..., szóstego miejsca po przecinku. Wypisz te wyrazy.

- $x = \sqrt{2}$
- $x = \sqrt{3}$
- $x = \pi$

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309505$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73205080756887729$$

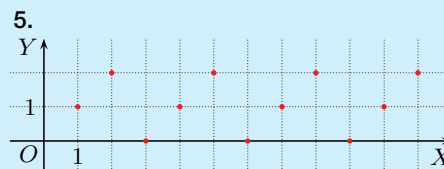
$$\pi \approx 3,14159265358979324$$

Powtórzenie

- Podaj wyrazy a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 ciągu:
 - sześcianów kolejnych liczb naturalnych dodatnich,
 - odwrotności kwadratów kolejnych liczb nieparzystych dodatnich.
- Naszkicuj wykres ciągu reszt z dzielenia kolejnych liczb naturalnych dodatnich przez 3.

- $a_1 = 1,4$, $a_2 = 1,41$, $a_3 = 1,414$,
 $a_4 = 1,4142$, $a_5 = 1,41421$,
 $a_6 = 1,414214$
 - $a_1 = 1,7$, $a_2 = 1,73$, $a_3 = 1,732$,
 $a_4 = 1,7321$, $a_5 = 1,73205$,
 $a_6 = 1,732051$
 - $a_1 = 3,1$, $a_2 = 3,14$, $a_3 = 3,142$,
 $a_4 = 3,1416$, $a_5 = 3,14159$,
 $a_6 = 3,141593$

- $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_4 = 64$,
 $a_5 = 125$
 - $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{9}$, $a_3 = \frac{1}{25}$, $a_4 = \frac{1}{49}$,
 $a_5 = \frac{1}{81}$



3.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg można opisać słownie, podając warunki, jakie spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

Jest to ciąg: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jest to ciąg: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu:

a) kolejnych liczb naturalnych, których pierwiastek jest liczbą niewymierną,

b) kolejnych liczb pierwszych większych od 30.

Innym sposobem określenia ciągu jest podanie wzoru na n -ty wyraz ciągu – taki wzór nazywamy **wzorem ogólnym ciągu** (zwanym też wzorem jawnym).

Przykład 2

a) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4, otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$$

b) Oblicz dziesięć początkowych wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 10, otrzymujemy:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) oraz wyraz a_{10} .

a) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ c) $a_n = \frac{-3}{n(n+2)}$ d) $a_n = n^3 - n^2$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_{10} .

a) $a_n = (-1)^{n+1}$ c) $a_n = (-1)^n \cdot n$ e) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}$
b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$ d) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$ f) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$

Ćwiczenie 3

a) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, a_{10} = -1$
b) $a_1 = 2, a_2 = -4, a_3 = 8, a_4 = -16, a_{10} = -1024$
c) $a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = 4, a_{10} = 10$
d) $a_1 = -4, a_2 = 8, a_3 = -16, a_4 = 32, a_{10} = 2048$
e) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{5}, a_{10} = \frac{9}{11}$
f) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{3}{5}, a_3 = \frac{5}{7}, a_4 = -\frac{7}{9}, a_{10} = -\frac{19}{21}$

Uczeń:

- wyznacza wzór ogólny ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów,
- wyznacza wskazane wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym,
- wyznacza wyrazy ciągu spełniające dany warunek,
- wyznacza wzór ogólny ciągu spełniającego podane warunki.

Ćwiczenie 1

- a) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10
b) 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na określenie „wzór jawny”, które oznacza wzór pozwalający obliczyć dowolny wyraz ciągu, bez konieczności obliczania wyrazów wcześniejszych.

Ćwiczenie 2

a) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{9}{4}, a_4 = \frac{16}{5}, a_{10} = \frac{100}{11}$
b) $a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{15}{17}, a_{10} = \frac{99}{101}$
c) $a_1 = -1, a_2 = -\frac{3}{8}, a_3 = -\frac{1}{5}, a_4 = -\frac{1}{8}, a_{10} = -\frac{1}{40}$
d) $a_1 = 0, a_2 = 4, a_3 = 18, a_4 = 48, a_{10} = 900$

Multiteka

- Wykresy wybranych ciągów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

Generator
testów i sprawdzianów

Czasem na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można odgadnąć regułę, według której mogły one powstać, co pozwala zaproponować wzór ogólny tego ciągu.

Przykład 3

Kolejne wyrazy ciągu	Przykładowy wzór ogólny ciągu
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	$a_n = 2n + 1$
4, 7, 12, 19, 28, ...	$a_n = n^2 + 3$
-3, 3, -3, 3, -3, ...	$a_n = (-1)^n \cdot 3$

Ćwiczenie 4

- a) $a_n = 3^{n-1}$
- b) $a_n = n^2 - 1$
- c) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$
- d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^n$
- e) $a_n = \sqrt{n}$
- f) $a_n = \frac{3}{n^2+1}$
- g) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
- h) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$

Ćwiczenie 5

- a) $a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 4$
- b) $a_4 = 8, a_5 = 27, a_6 = 64$
- c) $a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = -2$

Ćwiczenie 4

Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu.

- a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...
- b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, ...
- c) -1, 4, -9, 16, -25, 36, ...
- d) 3, -9, 27, -81, 243, ...
- e) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ...
- f) $\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{17}, \frac{3}{26}, \frac{3}{37}, \dots$
- g) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \frac{1}{6 \cdot 7}, \dots$
- h) $\frac{1}{1 \cdot 4}, -\frac{1}{2 \cdot 5}, \frac{1}{3 \cdot 6}, -\frac{1}{4 \cdot 7}, \frac{1}{5 \cdot 8}, \dots$

Zauważmy, że na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu możemy podać różne wzory na n -ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 5

Trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) są równe: -1, 0 i 1. Oblicz wyrazy a_4, a_5 i a_6 , jeśli:

- a) $a_n = n - 2$,
- b) $a_n = (n - 2)^3$,
- c) $a_n = 1 - |n - 3|$.

Przykład 4

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zeru?

$$25 - n^2 = 0$$

$$n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbf{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zeru jest a_5 .

Ćwiczenie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

- a) $a_n = 12 - 3n$
- b) $a_n = 14 - 3n$
- c) $a_n = n^2 - 4$
- d) $a_n = 40 - n^2$

Ćwiczenie 6

- a) $a_4 = 0; a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$
- b) brak wyrazów równych 0; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
- c) $a_2 = 0; a_n > 0$ dla $n \geq 3$ i $n \in \mathbf{N}$
- d) brak wyrazów równych 0; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Zadania

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = 4n - 2 & \text{d)} a_n = \frac{(-1)^n}{n} & \text{g)} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \\ \text{b)} a_n = 3n - n^2 & \text{e)} a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n} & \text{h)} a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{2} \\ \text{c)} a_n = 2^n - n & \text{f)} a_n = (-1)^{n+1} + n & \text{i)} a_n = n^2 + (-n)^{n-1} \end{array}$$

2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} & \text{c)} a_n = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{n-1} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \\ \text{b)} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} & \text{d)} a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \end{array}$$

3. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \dots & \text{d)} 2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots \\ \text{b)} \frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \dots & \text{e)} \frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots \\ \text{c)} -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots & \text{f)} 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \dots \end{array}$$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = n^2(n-3) & \text{c)} a_n = n^3 - 4n^2 + 4n & \text{e)} a_n = n^4 - 13n^2 + 36 \\ \text{b)} a_n = \frac{n^2 - 4n + 3}{n+1} & \text{d)} a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2n^2 + 4} & \text{f)} a_n = \frac{(n^3 - 64)(64 - n^2)}{3n - 1} \end{array}$$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

$$\text{a)} a_n = n^2 - 5n - 10 \quad \text{b)} a_n = n^2 - 11n + 10 \quad \text{c)} a_n = 3n^2 - 10n + 8$$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe jeden?

$$\text{a)} a_n = n^2 - 2n - 14 \quad \text{b)} a_n = \frac{2n-3}{n+1} \quad \text{c)} a_n = \frac{n^2 - 6n + 15}{n+3}$$

7. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od wyrazów ciągu (b_n) ?

$$\text{a)} a_n = n(n-5), \quad b_n = \frac{n}{n+5} \quad \text{b)} a_n = 2n+6, \quad b_n = (n^2-9)(n-5)$$

8. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami całkowitymi.

$$\text{a)} a_n = \frac{n+4}{n} \quad \text{b)} a_n = \frac{2n+8}{n+1} \quad \text{c)} a_n = \frac{36-n^2}{n^2}$$

D 9. Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

$$\text{a)} a_n = 2n^2 - n + 9, \quad b_n = 6 - 8n \quad \text{b)} a_n = 4n^3, \quad b_n = 4n^2 - n$$

9. a) $a_n = b_n$, gdy $2n^2 - n + 9 = 6 - 8n$

$$2n^2 + 7n + 3 = 0$$

$$n = -3 \notin \mathbf{N}_+ \text{ lub } n = -\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}_+$$

Zatem równanie $a_n = b_n$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbf{N}_+$, czyli wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

$$\text{b)} a_n = b_n, \text{ gdy } 4n^3 = 4n^2 - n$$

$$n(2n-1)^2 = 0$$

$$n = 0 \notin \mathbf{N}_+ \text{ lub } n = \frac{1}{2} \notin \mathbf{N}_+$$

Zatem równanie $a_n = b_n$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbf{N}_+$, czyli wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2, 6, 10, 14, 18

b) 2, 2, 0, -4, -10

c) 1, 2, 5, 12, 27

d) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$

e) $3, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{5}$

f) 2, 1, 4, 3, 6

g) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

h) 0, 2, 0, 4, 0

i) 2, 2, 18, -48, 650

2. a) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}$

b) 0, 4, 0, 16, 0, 64

c) 2, 2, 6, $\frac{4}{3}$, 10, $\frac{6}{5}$

d) $\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 16, \frac{1}{7}, 36$

3. a) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$

b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}$

d) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$

e) $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$

f) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2 \cdot 3^n}$

4. a) a_3 b) a_1, a_3 c) a_2

d) brak wyrazów równych 0

e) a_2, a_3 f) a_4, a_8

5. a) $a_1, a_2, \dots, a_6$

b) $a_2, a_3, \dots, a_9$

c) brak wyrazów ujemnych

6. a) a_5 b) a_4 c) a_3, a_4

7. a) $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$

b) $n \in \mathbf{N}_+ \setminus \{3, 4, 5\}$

8. a) $a_n = 1 + \frac{4}{n} \in \mathbf{Z}$,

gdy $n \in \{1, 2, 4\}$,

a_1, a_2, a_4

b) $a_n = 2 + \frac{6}{n+1} \in \mathbf{Z}$,

gdy $n \in \{1, 2, 5\}$,

a_1, a_2, a_5

c) $a_n = \frac{36}{n^2} - 1 \in \mathbf{Z}$,

gdy $n \in \{1, 2, 3, 6\}$,

a_1, a_2, a_3, a_6

10. a) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$
 b) $a_n = -\frac{2}{3}n + 1$
 c) $a_n = -\frac{1}{3}n + 9$

11. $a_n = n^2 - 6n + 5$
 $a_1, a_2, \dots, a_7$

12. Parabola $y = a(x - 2)^2 + 8$ przechodzi przez punkt $(0, 0)$,
 czyli $0 = a(0 - 2)^2 + 8$.
 Zatem $y = -2(x - 2)^2 + 8 =$
 $= -2x^2 + 8x$,
 czyli $a_n = -2n^2 + 8n$.

13. a) $\frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3$
 b) $-1, 0, 3, 8, 15, 24$
 c) $-3, 5, -7, 9, -11, 13$
 d) $2, -1, 4, -3, 6, -5$
 e) $1, 0, -1, -2, -3, -2$
 f) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$

15. a) 6 b) 8 c) 7

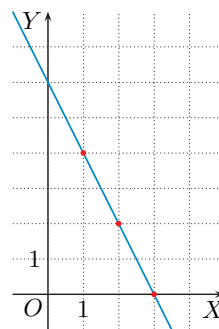
10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej przedstawionym na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Punkty $(1, 4)$ i $(3, 0)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

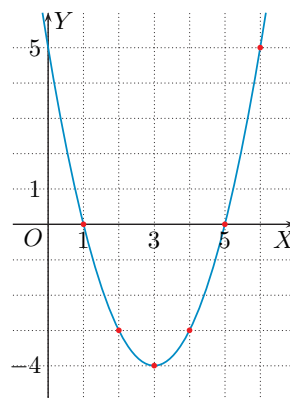
i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x + 6$,
 czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.



Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeśli jego wykres zawiera się w prostej:

- a) przechodzącej przez punkty $(2, 2)$ i $(6, 0)$,
 b) równoległej do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ oraz największy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$,
 c) prostopadłej do prostej $y = 3x$ oraz $a_6 = 7$.

11. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeżeli jego wykres jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq 12$?



12. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(2, 8)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Powtórzenie

13. Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- a) $a_n = 6 - \frac{3}{2}n$ c) $a_n = (-1)^n(2n + 1)$ e) $a_n = |n - 5| - 3$
 b) $a_n = n^2 - 2n$ d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n + 1$ f) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

14. Uzasadnij, że ciąg (a_n) ma dwa wyrazy równe zeru.

- D a) $a_n = n^2 - 7n + 12$ c) $a_n = (n^2 - 1)(n^2 - 9)$ e) $a_n = |n - 4| - 2$
 b) $a_n = n^3 - 6n^2 + 5n$ d) $a_n = n^4 - 5n^2 + 4$ f) $a_n = \frac{n^2 - 8n + 15}{n + 15}$

15. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (a_n) ?

- a) $a_n = 7n - n^2$ b) $a_n = 18 + 7n - n^2$ c) $a_n = \frac{60 - n^2}{n + 4}$

14. a) $n^2 - 7n + 12 = (n - 3)(n - 4)$

Zatem $a_3 = a_4 = 0$.

- b) $n(n^2 - 6n + 5) = n(n - 1)(n - 5)$

Zatem $a_1 = a_5 = 0$.

- c) $(n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n - 1)(n + 1)(n - 3)(n + 3)$

$-1 \notin \mathbf{N}_+$ i $-3 \notin \mathbf{N}_+$

Zatem $a_1 = a_3 = 0$.

- d) $(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$

$-1 \notin \mathbf{N}_+$ i $-2 \notin \mathbf{N}_+$

Zatem $a_1 = a_2 = 0$.

- e) $|n - 4| = 2$, gdy $n = 2$ lub $n = 6$

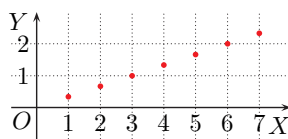
Zatem $a_2 = a_6 = 0$.

- f) $n^2 - 8n + 15 = (n - 3)(n - 5)$. Zatem $a_3 = a_5 = 0$.

3.3. Ciągi monotoniczne

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

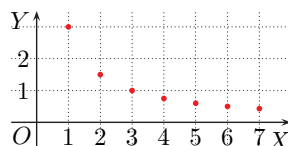


Ciąg (a_n) nazywamy **ciągim rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbf{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m > a_n$.

Przykład 2

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



Ciąg (a_n) nazywamy **ciągim malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbf{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m < a_n$.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład ciągu:

- malejącego o wszystkich wyrazach większych od 10,
- rosnącego o wszystkich wyrazach ujemnych.

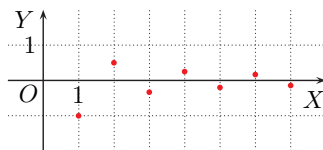
Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Aby stwierdzić, że ciąg ten nie jest ani rosnący, ani malejący, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).



Uczeń:

- podaje przykłady ciągów monotonicznych, których wyrazy spełniają podane warunki,
- uzasadnia, że dany ciąg nie jest monotoniczny,
- wyznacza wyraz a_{n+1} ciągu określonego wzorem ogólnym,
- bada monotoniczność ciągu, korzystając z definicji,
- wyznacza wartość parametru występującego we wzorze ciągu tak, aby ciąg był ciągiem monotonicznym.

Ćwiczenie 1

- np. $a_n = 10 + \frac{1}{n}$
- np. $a_n = -\frac{1}{n}$

Multiteka

- Wykresy wybranych ciągów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $a_2 < a_3$, ale $a_3 > a_4$,
więc ciąg nie jest monotoniczny.
b) $a_1 > a_2$, ale $a_4 < a_5$,
więc ciąg nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 3

- a) $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$,
 $a_4 = 1$, $a_5 = 4$; nie jest
b) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$,
 $a_4 = 0$, $a_5 = -5$; nie jest
c) $a_1 = -1$, $a_2 = -5$, $a_3 = -7$,
 $a_4 = -7$, $a_5 = -5$; nie jest

Ćwiczenie 4

- a) $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$
b) $a_{n+1} = \frac{-2n-2}{3n+1}$
c) $a_{n+1} = \frac{n-2}{n^2+2n+2}$
d) $a_{n+1} = \frac{n^2+2n}{2n-3}$

Ćwiczenie 5

- a) $a_{n+1} = n^2 + n$
 $a_{n+1} - a_n = 2n > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
b) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+5}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{4}{(n+4)(n+5)} > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
c) $a_{n+1} = \frac{2n}{2n+3}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)} > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
d) $a_{n+1} = \frac{4n+5}{3n+4}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest monotoniczny.

- a) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -\sqrt{5}, -3, -3\frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny?

- a) $a_n = (n-3)^2$ b) $a_n = -n^2 + 4n$ c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest monotoniczny, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Wyznacz wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4} \quad \text{Wyraz } a_{n+1} \text{ otrzymujemy, wstawiając we wzorze ogólnym } n+1 \text{ w miejsce } n.$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ b) $a_n = \frac{-2n}{3n-2}$ c) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$ d) $a_n = \frac{n^2-1}{2n-5}$

D Przykład 5

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{Wyznaczamy wyraz } a_{n+1}.$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Zauważmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

- a) $a_n = n^2 - n$ b) $a_n = \frac{n}{n+4}$ c) $a_n = \frac{2n-2}{2n+1}$ d) $a_n = \frac{4n+1}{3n+1}$

D Ćwiczenie 6

Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

- a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{4n+2}{5n-1}$ c) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$ d) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

Ćwiczenie 6

a) $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

b) $a_{n+1} = \frac{4n+6}{5n+4}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{-14}{(5n-1)(5n+4)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

c) $a_{n+1} = \frac{n+3}{2n+5}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(2n+3)(2n+5)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

d) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$
Zauważmy, że $(n+1)^2 > n^2$, więc $(n+1)^2 + 1 > n^2 + 1$, czyli
 $a_n = \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} = a_{n+1}$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \leq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 7

Jakie liczby można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać ciąg niemalejący?

- a) 1, 2, 3, 4, $?$, $?$, 4, 5, 6, ... b) 1, $\frac{3}{2}$, $?$, 2, $?$, $?$, 3, 3, 3, ...

Ćwiczenie 8

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n) , dla którego: a) $a_2 = a_3 = 2$, $a_5 = 1$, b) $a_4 = a_6 = -1$, $a_7 = -2$.

Zadania

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

- a) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \frac{3+n}{n}$ e) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ g) $a_n = \frac{2n^2+3}{2n+6}$
b) $a_n = 2n - n^2$ d) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$ h) $a_n = \frac{4-2n^2}{2n^2-1}$

D 2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = n^2 - 2n$ b) $a_n = 1 - n^2$ c) $a_n = 3 + \frac{7}{n}$ d) $a_n = -4 + \frac{2}{n^2}$

D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n}{2n-1}$ e) $a_n = \frac{2n-4}{3n+5}$ g) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$
b) $a_n = \frac{3n}{n+2}$ d) $a_n = \frac{3n+2}{4n+1}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{3-4n}$ h) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

D 4. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ten ciąg nie jest monotoniczny.

- a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ c) $a_n = |n - 4|$ e) $a_n = (n - 1)(n - 3)$
b) $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = |n^2 - 4|$ f) $a_n = 8n - n^2$

3. a) $a_{n+1} - a_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

d) $a_{n+1} - a_n = \frac{-5}{(4n+1)(4n+5)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

e) $a_{n+1} - a_n = \frac{22}{(3n+5)(3n+8)} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

f) $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(4n+1)(4n-3)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

g) $a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

h) $a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

Ćwiczenie 7

a) $a_5 = a_6 = 4$

b) $a_3 \in \langle \frac{3}{2}; 2 \rangle$, $a_5 \in \langle 2; 3 \rangle$,

$a_6 \in \langle 2; 3 \rangle$ i $a_5 \leq a_6$

Ćwiczenie 8

Przykładowa odpowiedź:

a) 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1

b) 2, 2, 2, -1, -1, -1, -2, -2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $n^2 + 2n$ b) $-n^2 + 1$

c) $\frac{n+4}{n+1}$ d) $\frac{2n+2}{n+6}$

e) $\frac{3n-1}{2n+3}$ f) $\frac{-3n-1}{4n-1}$

g) $\frac{2n^2+4n+5}{2n+8}$ h) $\frac{-2n^2-4n+2}{2n^2+4n+1}$

2. a) $a_{n+1} - a_n = 2n - 1 > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

b) $a_{n+1} - a_n = -2n - 1 < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.

c) $a_{n+1} - a_n = -\frac{7}{n(n+1)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.

d) $a_n = \frac{2}{n^2} - 4$

$a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2} - 4$

Zauważmy, że $(n+1)^2 > n^2$, więc $\frac{2}{(n+1)^2} < \frac{2}{n^2}$, czyli

$a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2} - 4 < \frac{2}{n^2} - 4 = a_n$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.

4. a) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}$

$a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$

b) $5, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{3}, 3\frac{3}{4}, 4\frac{1}{5}$

$a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$

c) $3, 2, 1, 0, 1$

$a_3 > a_4$, ale $a_4 < a_5$

d) $3, 0, 5, 12, 21$

$a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$

e) $0, -1, 0, 3, 8$

$a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$

f) $7, 12, 15, 16, 15$

$a_3 < a_4$, ale $a_4 > a_5$

5. a) malejący
b) stały
c) rosnący

6. a) $k < 1$
b) $k > 1$
c) $k = 1$

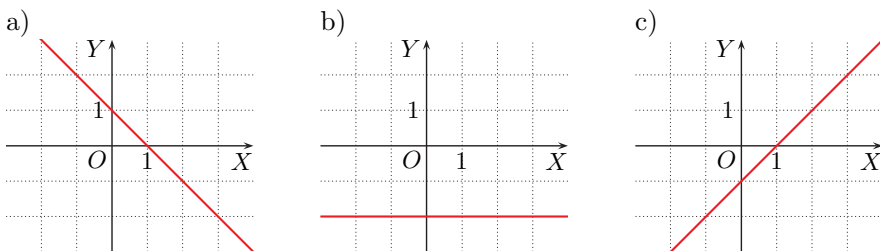
7. a) $k \in (\frac{3}{2}; \infty)$
b) $k \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
c) $k \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

8. a) nierosnący dla $t \geq 9$,
niemalejący dla $t \leq 9$
b) nierosnący dla $t \in \langle -3; 3 \rangle$,
niemalejący dla
 $t \in (-\infty; -3] \cup \langle 3; \infty)$
c) nierosnący dla
 $t \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$,
niemalejący dla $t \in \langle 0; 2 \rangle$

9. a) np. $a_n = -n$
b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$

10. a) 1, 0, 1, 4, 9
 $a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$
b) -5, -8, -9, -8, -5
 $a_2 > a_3$, ale $a_3 < a_4$
c) 3, 2, 1, 0, 1
 $a_3 > a_4$, ale $a_4 < a_5$
d) 3, 4, 3, 0, 5
 $a_1 < a_2$, ale $a_2 > a_3$

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.



6. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = (k-1)x$. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest:

- a) malejący, b) rosnący, c) stały?

7. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

- a) $a_n = (2k-3)n-6$ b) $a_n = (k^2-1)n+4$ c) $a_n = (3-k^2)n$

8. Dla jakich wartości parametru t ciąg (a_n) jest nierosnący, a dla jakich niemalejący?

- a) $a_n = (3 - \frac{1}{3}t)n + 2$ b) $a_n = (t^2 - 9)(n + 1)$ c) $a_n = -n(t^2 - 2t)$

9. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest rosnący.

- b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest malejący.

Powtórzenie

10. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ciąg ten nie D jest monotoniczny.

- a) $a_n = (2-n)^2$ b) $a_n = n^2 - 6n$ c) $a_n = |n-4|$ d) $a_n = |n^2 - 4n|$

11. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) oraz różnicę $a_{n+1} - a_n$.

- a) $a_n = \frac{n-1}{n}$ b) $a_n = \frac{3n-3}{n+1}$ c) $a_n = \frac{2n-4}{2n+1}$ d) $a_n = \frac{2n-4}{3n+2}$

12. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = 4n - 2$ c) $a_n = n^2 - 8$ e) $a_n = 2 + \frac{5}{n}$ g) $a_n = \frac{n+3}{n+1}$
b) $a_n = -n + 7$ d) $a_n = 3n - n^2$ f) $a_n = 4 - \frac{2}{n}$ h) $a_n = \frac{4-n}{n+2}$

11. a) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}$, $r = \frac{1}{n(n+1)}$

- b) $a_{n+1} = \frac{3n}{n+2}$, $r = \frac{6}{(n+1)(n+2)}$

- c) $a_{n+1} = \frac{2n-2}{2n+3}$, $r = \frac{10}{(2n+1)(2n+3)}$

- d) $a_{n+1} = \frac{2n-2}{3n+5}$, $r = \frac{16}{(3n+2)(3n+5)}$

12. a), c), f) rosnący

- b), e), g), h) malejący

- d) nierosnący

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ciąg (a_n) możemy określić, podając jego pierwszy wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1} , wyrażony za pomocą poprzedniego wyrazu (lub kilku poprzednich). Taki sposób określenia ciągu nazywamy **rekurencyjnym**.

Przykład 1

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno: 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$a_4 = a_3^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$

Ćwiczenie 1

Poniżej podano rekurencyjne określenie ciągu (a_n) i obliczono wyrazy a_2 i a_3 .

Oblicz wyrazy a_4 , a_5 i a_6 .

a)	$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0 \\ a_3 &= a_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1 \end{aligned}$
b)	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{aligned}$
c)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{aligned}$

Ćwiczenie 2

Oblicz wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_6$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

- | | |
|--|---|
| a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{64} \\ a_{n+1} = 2^n \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ |

Ćwiczenie 2

- a) $a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -7, a_5 = -10, a_6 = -13$
 b) $a_2 = -6, a_3 = -12, a_4 = -24, a_5 = -48, a_6 = -96$
 c) $a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -9, a_5 = -35, a_6 = -115$
 d) $a_2 = \frac{1}{32}, a_3 = \frac{1}{8}, a_4 = 1, a_5 = 16, a_6 = 512$
 e) $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 46, a_5 = 2112, a_6 = 4460539$
 f) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$

Uczeń:

- wyznacza początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie,
- wyznacza wzór rekurencyjny ciągu, gdy dany jest wzór ogólny ciągu,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności związane ze wzorem rekurencyjnym ciągu.

Ćwiczenie 1

- a) $a_4 = a_3^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$,
 $a_5 = a_4^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$,
 $a_6 = a_5^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$
 b) $a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$,
 $a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$,
 $a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$
 c) $a_4 = 2a_3 + (-1)^3 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$,
 $a_5 = 2a_4 + (-1)^4 = 2 \cdot 13 + 1 = 27$,
 $a_6 = 2a_5 + (-1)^5 = 2 \cdot 27 - 1 = 53$

Multiteka

• Rekurencja

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 10$
b) $a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11, a_6 = 18$
c) $a_3 = 0, a_4 = -1, a_5 = 1, a_6 = 2$
d) $a_3 = 0, a_4 = -3, a_5 = -4, a_6 = 7$

Przykład 2

Oblicz wyrazy $a_3, a_4, \dots, a_{10}$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (z wyjątkiem pierwszego i drugiego) jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Jego dziesięć początkowych wyrazów to:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Ciąg ten znany jest jako **ciąg Fibonacciego** [czyt. fibonacczego] nazwany tak na cześć Leonarda z Pizy (ok. 1180–1250), zwanego Fibonaccim.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

- a) $\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - n \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

D Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - n^2 - a_n = -n^2 < 0 \quad \text{dla } n \in \mathbf{N}_+, \text{ zatem ciąg } (a_n) \text{ jest malejący.}$$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n + 4n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n^2 \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^n} \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Rekurencji używa się do definiowania niektórych pojęć matematycznych. Jednym z przykładów jest $n!$ (*n silnia*). Dla $n > 1$ symbol $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Przyjmuje się również, że $0! = 1$ oraz $1! = 1$. Rekurencyjna definicja $n!$:

$$\begin{cases} 0! = 1, 1! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4

- a) $a_{n+1} - a_n = 4n^2 - 1 > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
b) $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2^n} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.

Komentarz

Zauważmy, że w podpunktach c) i d) wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

- c) $a_{n+1} - a_n = n^2 a_n - a_n = a_n(n^2 - 1) \geq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest niemalejący.

- d) $a_{n+1} - a_n = \frac{3n+1}{n+2} \cdot a_n - a_n = a_n \cdot \frac{2n-1}{n+2} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

Podanie wzoru ogólnego ciągu, który jest określony rekurencyjnie, może być trudne. Natomiast jeśli znamy wzór ogólny ciągu, to ciąg ten możemy zdefiniować rekurencyjnie.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n(n+1)$. Określ ten ciąg rekurencyjnie.

Wyznaczamy wyrazy: $a_1 = 1 \cdot 2 = 2$ oraz $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$.

- Ciąg możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n+2$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjne określenie ciągu (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

- Rekurencyjne określenie ciągu możemy również wyznaczyć na podstawie ilorazu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$$

Stąd otrzymujemy inne rekurencyjne określenie ciągu (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Określ rekurencyjnie ciąg (a_n) na dwa sposoby. Skorzystaj najpierw z różnicy $a_{n+1} - a_n$, a następnie z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- a) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2 \cdot 3^n$ e) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
b) $a_n = n^2 + 1$ d) $a_n = (-1)^n$ f) $a_n = \sqrt{n+1}$

Zadania

1. Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu (a_n). Ile liczb dodatnich jest wśród dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

- a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 10, \quad n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n-1)^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (a_n + \frac{1}{2})^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = na_n^2 - 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 5

- f) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $a_2 = 0$, $a_3 = 10$, $a_4 = 30$, $a_5 = 70$, 8 liczb dodatnich
b) $a_2 = 4$, $a_3 = 0$, $a_4 = -8$, $a_5 = -24$, 2 liczby dodatnie
c) $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $a_4 = -5$, $a_5 = 11$, 5 liczb dodatnich
d) $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 14$, 8 liczb dodatnich
e) $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{9}{16}$, $a_5 = \frac{289}{256}$, 8 liczb dodatnich
f) $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 15$, 10 liczb dodatnich

Ćwiczenie 5

- a) $a_1 = 3$,
 $a_{n+1} - a_n = 2$
 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1}$
 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+1} a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $a_1 = 2$,
 $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$
 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+2n+2}{n^2+1}$
 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = 3a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \cdot (-1)^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = -a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

2. a) 4 b) 3 c) 6 d) 2

3. a) $a_3 = -1, a_4 = 3, a_5 = -4$

b) $a_3 = -48, a_4 = 56, a_5 = 52$

c) $a_3 = -2, a_4 = 3, a_5 = -1$

d) $a_4 = 3, a_5 = 5$

4. a) $a_2 = x - 1, a_3 = x - 5,$

$a_4 = x - 14, a_5 = x - 30$

$a_2 + a_5 = 2x - 31 = 9,$

czyli $x = 20$

Ciąg jest malejący.

b) $a_2 = 2x + 1, a_3 = 4x + 1,$

$a_4 = 8x + 3, a_5 = 16x + 5$

$a_2 + a_5 = 18x + 6 = 9,$

czyli $x = \frac{1}{6}$

Ciąg jest rosnący.

5. a) Jeśli $a_1 = -1$, to

$a_2 = 2$ oraz $a_3 = a_4 = 0$.

Jeśli $a_1 = 1$, to

$a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Jeśli $a_1 = 2$, to

$a_2 = 2$ oraz $a_3 = a_4 = 0$.

Zatem we wszystkich przypadkach $a_4 = 0$.

b) Jeśli $a_1 = -1$, to $a_2 = 3,$
 $a_3 = a_4 = 0$.

Jeśli $a_1 = 1$, to

$a_2 = -1, a_3 = 4, a_4 = 0$.

Jeśli $a_1 = 2$, to

$a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Zatem we wszystkich przypadkach $a_4 = 0$.

6. a) 0 b) 2 c) $\frac{5}{3}$ d) 2

2. Ile jest liczb ujemnych wśród sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) ?

a)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2, n \geq 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 4a_n, n \geq 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2 - na_n, n \geq 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - na_n - 4, n \geq 1 \end{cases}$$

3. Oblicz wyraz a_5 ciągu (a_n) .

a)
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n - a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = 32, a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, n \geq 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, n \geq 1 \end{cases}$$

4. Oblicz x , jeśli $a_2 + a_5 = 9$. Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

a)
$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2, n \geq 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$$

D 5. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru:

a) $a_{n+1} = a_n^2 - na_n,$

b) $a_{n+1} = a_n^2 - (n+1)a_n.$

Wykaż, że niezależnie od tego, którą z liczb: $-1, 1, 2$ przyjmiemy za a_1 , otrzymamy tę samą wartość wyrazu a_4 .

6. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geq 1$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli:

a) $a_2 = -\frac{1}{2},$

b) $a_2 = \frac{3}{2},$

c) $a_3 = 1,$

d) $a_4 = 1\frac{1}{4}.$

Powtórzenie

7. Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) .

a)
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2n, n \geq 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \geq 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - n^2, n \geq 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n \geq 1 \end{cases}$$

8. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n^2 + na_n$. Którą z liczb: $-2, -1, 0, 1, 2$ należy wybrać jako a_1 , aby:

a) $a_3 = 0,$

b) $a_3 = 8?$

7. a) $a_3 = 0, a_4 = -6, a_5 = 28, a_6 = 774$

b) $a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = -25, a_6 = -100$

c) $a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = a_6 = \frac{1}{2}$

d) $a_3 = 9, a_4 = 15, a_5 = 33, a_6 = 63$

8. $a_2 = a_1^2 + a_1, a_3 = a_2^2 + 2a_2$

a) $a_3 = a_2(a_2 + 2) = 0$, gdy $a_2 = 0$ lub $a_2 = -2$

Równanie $a_1^2 + a_1 = -2$ nie ma rozwiązania.

Zatem $a_1(a_1 + 1) = 0$, gdy $a_1 = -1$ lub $a_1 = 0$.

b) $a_2^2 + 2a_2 = 8$, gdy $a_2 = -4$ lub $a_2 = 2$

Równanie $a_1^2 + a_1 = -4$ nie ma rozwiązania.

Zatem $a_1^2 + a_1 = 2$, gdy $a_1 = -2$ lub $a_1 = 1$.

Ciąg Fibonacciego

Pierwsze dwa wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 ...

Złota liczba a ciąg Fibonacciego

Niech ciąg (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Rozpatrzmy kolejne ilorazy $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

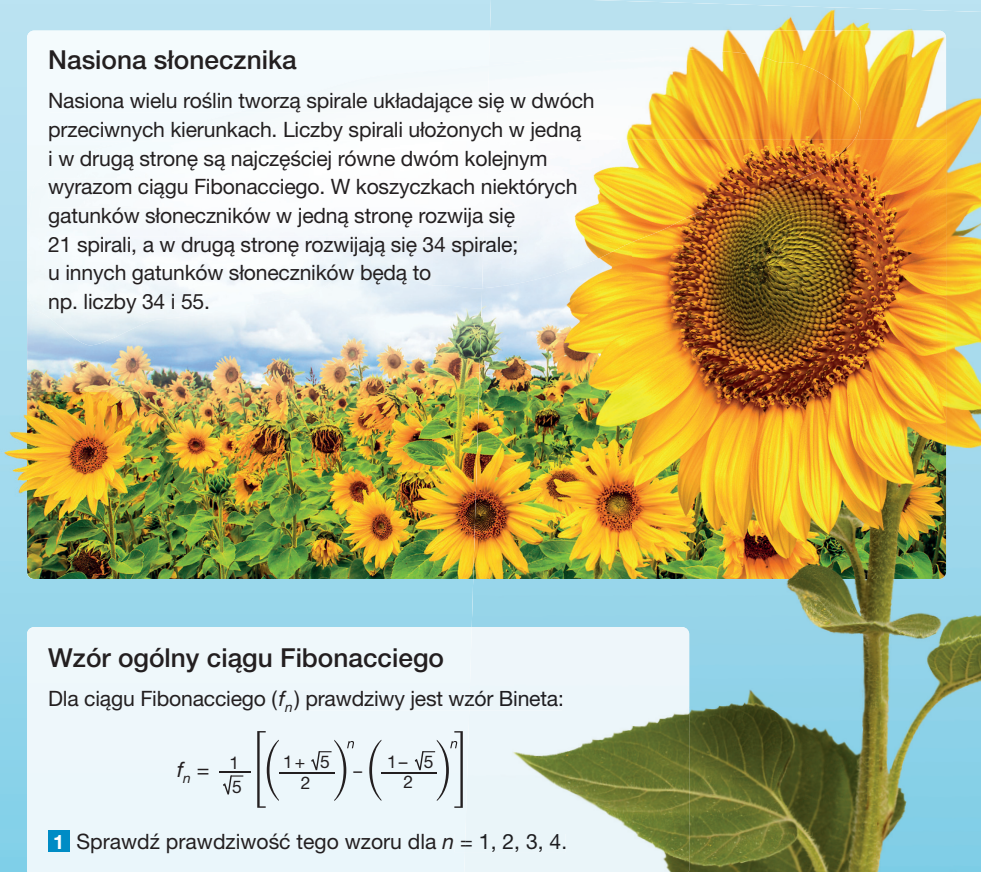
$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,6; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,61538...$$

Wartości tych ułamków są coraz bliższe złotej liczbie:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Nasiona słonecznika

Nasiona wielu roślin tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Liczby spirali ułożonych w jedną i w drugą stronę są najczęściej równe dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego. W koszykach niektórych gatunków słoneczników w jedną stronę rozwija się 21 spirali, a w drugą stronę rozwijają się 34 spirale; u innych gatunków słoneczników będą to np. liczby 34 i 55.



Wzór ogólny ciągu Fibonacciego

Dla ciągu Fibonacciego (f_n) prawdziwy jest wzór Bineta:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

1 Sprawdź prawdziwość tego wzoru dla $n = 1, 2, 3, 4$.

Odpowiedzi do zadań

$$1. f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1$$

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{16+8\sqrt{5}}{8} - \frac{16-8\sqrt{5}}{8} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{8} = 2$$

$$f_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^4 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{56+24\sqrt{5}}{16} - \frac{56-24\sqrt{5}}{16} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{48\sqrt{5}}{16} = 3$$

Uczeń:

- podaje przykłady ciągów arytmetycznych,
- wyznacza wskazane wyrazy ciągu arytmetycznego, gdy dane są jego pierwszy wyraz i różnica,
- określa monotoniczność ciągu arytmetycznego,
- wyznacza wzór ogólny ciągu arytmetycznego, gdy dane są dowolne dwa jego wyrazy,
- stosuje związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego do wyznaczania wyrazów tego ciągu,
- wyznacza wartości niewiadomych, tak aby wraz z podanymi wartościami tworzyły ciąg arytmetyczny,
- stosuje w zadaniach własności ciągu arytmetycznego.

Ćwiczenie 1

- a) $r = 9$,
kolejne wyrazy: 30, 39
- b) $r = \frac{2}{3}$,
kolejne wyrazy: $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$
- c) $r = -4$,
kolejne wyrazy: -5, -9

3.5. Ciąg arytmetyczny (1)

Przykład 1

Pani Jola postanowiła kupić sprzęt narciarski za 2100 zł. W tym celu w pierwszym miesiącu odłożyła 450 zł, a w każdym następnym odkładała po 150 zł. W tabeli podano stan oszczędności pani Joli w kolejnych miesiącach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	1650	1800	1950	2100

Zauważ, że każda z wymienionych w tabeli kwot (oprócz pierwszej) jest większa od poprzedniej o tę samą stałą wartość. Wymienione liczby stanowią przykład ciągu arytmetycznego.

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągą arytmetyczną**, jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 1

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

- a) 3, 12, 21, ... b) $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3, \dots$ c) 7, 3, -1, ...

Przykład 2

Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 6$ oraz $r = 5$.

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 + 5 = 11$$

$$a_3 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

$$a_4 = 6 + 3 \cdot 5 = 21$$

⋮

$$a_{11} = 6 + 10 \cdot 5 = 56$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu arytmetycznego, obliczamy $a_1 + (11 - 1)r$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Multiteka

- Wykres ciągu arytmetycznego i geometrycznego

dla nauczyciel.pl | Kartkówka 3.5

Generator
testów i sprawdzianów

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 3

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 1, 11, 21, 31, 41, ... Oblicz trzydziesty wyraz tego ciągu.

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$, zatem wzór ogólny ma postać $a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 10 = 10n - 9$. Obliczamy trzydziesty wyraz: $a_{30} = 10 \cdot 30 - 9 = 291$.

Ćwiczenie 2

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$ c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

Ćwiczenie 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

- a) $a_1 = 4$, $a_4 = 10$, b) $a_1 = -5$, $a_6 = 20$, c) $a_1 = 5$, $a_{10} = 2\frac{3}{4}$.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:

- **rosnący**, gdy $r > 0$, ■ **malejący**, gdy $r < 0$, ■ **stały**, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

- a) 9, 3, -3, -9, -15, -21, ... b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$ c) 2, 2, 2, 2, ...

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

- a) $a = 3$, $b = k + 1$, $c = 3k - 6$ b) $a = 1$, $b = k^2$, $c = k^2 + 2k + 2$

Liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:
 $b - a = c - b$

Ćwiczenie 6

Dane są wyrazy a_1 , a_2 , a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wyrazy a_4 i a_5 . Określ monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru m .

- a) $a_1 = 4$, $a_2 = m + 6$, $a_3 = 2m + 8$ c) $a_1 = 1$, $a_2 = m^2$, $a_3 = 2m^2 - 1$
b) $a_1 = \frac{1}{2}m$, $a_2 = m - 3$, $a_3 = \frac{3}{2}m - 6$ d) $a_1 = m^2$, $a_2 = m$, $a_3 = 2m - m^2$

Ćwiczenie 6

- a) $r = m + 2$, $a_4 = 3m + 10$, $a_5 = 4m + 12$
rosnący dla $m > -2$, malejący dla $m < -2$, stały dla $m = -2$
b) $r = \frac{1}{2}m - 3$, $a_4 = 2m - 9$, $a_5 = \frac{5}{2}m - 12$
rosnący dla $m > 6$, malejący dla $m < 6$, stały dla $m = 6$
c) $r = m^2 - 1$, $a_4 = 3m^2 - 2$, $a_5 = 4m^2 - 3$
rosnący dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, malejący dla $m \in (-1; 1)$, stały dla $m \in \{-1, 1\}$
d) $r = m - m^2$, $a_4 = 3m - 2m^2$, $a_5 = 4m - 3m^2$
rosnący dla $m \in (0; 1)$, malejący dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, stały dla $m \in \{0, 1\}$

Ćwiczenie 2

- a) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$,
 $a_{20} = 40$

b) $a_n = 4 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} =$
 $= \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{2}$, $a_{20} = 13\frac{1}{2}$

c) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-1) =$
 $= -n + 4$, $a_{20} = -16$

Ćwiczenie 3

- a) $a_4 = a_1 + 3r$, czyli $r = 2$,
 $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 2$

b) $20 = -5 + 5r$, czyli $r = 5$,
 $a_n = -5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 10$

c) $2\frac{3}{4} = 5 + 9r$, czyli $r = -\frac{1}{4}$,
 $a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-\frac{1}{4}) =$
 $= -\frac{1}{4}n + 5\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

- a) $r = -6$, malejący,
 $a_n = -6n + 15$

b) $r = \frac{3}{4}$, rosnący, $a_n = \frac{3}{4}n + 1$

c) $r = 0$, stały, $a_n = 2$

Ćwiczenie 5

- a) $k = 5$
b) $k = -1$ lub $k = 3$

Przykład 4

Jaką liczbę należy wstawić między liczby a i b , aby otrzymany w ten sposób ciąg był arytmetyczny?

Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Wówczas:

$$\begin{aligned}x - a &= b - x \\x &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b . Otrzymujemy zatem ciąg: $a, \frac{a+b}{2}, b$.

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Dowód

Dla $n \geq 2$ wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r możemy zapisać w postaci: $a_{n-1} = a_n - r$ i $a_{n+1} = a_n + r$. Zatem:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Ćwiczenie 7

a) $x = 23$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{5}{12}$

Ćwiczenie 7

Oblicz x , jeśli podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

a) 9, x , 37 b) 4, x , -8 c) $\frac{1}{2}$, x , $\frac{1}{3}$

Odpowiedzi do zadań

- a) $a_{14} = 34$, rosnący
b) $a_{11} = -36$, malejący
c) $a_{20} = 10,5$, rosnący
d) $a_{35} = 1,4$, rosnący
- a) $r = 7$, $a_n = 7n - 1$
b) $r = 3$, $a_n = 3n - 7$
c) $r = -\frac{1}{2}$, $a_n = 9\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$
- a) $a_n = 2n - 1$
b) $a_n = -3n + 15$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{15}{2}$

Zadania

- Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Określ monotoniczność tego ciągu.
a) $a_1 = -5$, $r = 3$, $n = 14$ c) $a_1 = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 20$
b) $a_1 = 4$, $r = -4$, $n = 11$ d) $a_1 = -2$, $r = 0,1$, $n = 35$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 6$, $a_3 = 20$ b) $a_1 = -4$, $a_4 = 5$ c) $a_1 = 9$, $a_6 = 6\frac{1}{2}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $r = 2$, $a_3 = 5$ b) $r = -3$, $a_5 = 0$ c) $r = \frac{1}{2}$, $a_7 = -4$
- Wyznacz liczby:
a) a, b tak, aby ciąg: 1, $a, b, 10$ był arytmetyczny,
b) a, b, c tak, aby ciąg: 2, $a, b, c, 100$ był arytmetyczny.

4. a) $r = 3$, $a = 4$, $b = 7$

b) I sposób

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$100 = 2 + 4r, \text{ czyli } r = \frac{49}{2}$$

$$\text{Zatem } a = \frac{53}{2}, b = 51, c = \frac{151}{2}.$$

II sposób

(ze średniej arytmetycznej)

$$b = \frac{2+100}{2} = 51$$

$$a = \frac{2+51}{2} = \frac{53}{2}$$

$$c = \frac{51+100}{2} = \frac{151}{2}$$

5. Wstaw między liczby 1 i 25:
 a) pięć liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny,
 b) siedem liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.
6. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_{12} .
 a) $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$
7. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.
 a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ \frac{a_1}{a_5} = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 16 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{a_5}{a_1} = -1 \\ a_2 \cdot a_7 = -1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_3 = \frac{5}{a_4} + 2 \end{cases}$
8. Oblicz x , jeśli wiadomo, że podane liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego:
 a) $-2, 2 + x, 4 + x^2$, b) $2x - 3, 3x - 5, \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.
9. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?
10. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli wiadomo, że różnica tego ciągu jest równa 1, a iloczyn trzech ostatnich wyrazów jest równy -60 .

Powtórzenie

11. a) Liczby 3, x , y , 15 tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby x i y .
 b) Liczby 4, x , y , z , 50 tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby x , y i z .
12. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_6 .
 a) $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_8 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 = 0 \\ a_8 = -12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_{10} = -1 \\ a_{16} = 2 \end{cases}$
13. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego poniższe warunki. Który wyraz tego ciągu jest równy 0?
 a) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_4 = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 12 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 27 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 5 \\ a_1 + a_3 = -4 \end{cases}$

12. a) $a_n = 3n - 4$, $a_6 = 14$
 b) $a_n = 20 - 4n$, $a_6 = -4$
 c) $a_n = \frac{1}{2}n - 6$, $a_6 = -3$

13. a) $\begin{cases} 2a_1 + 2r = 0 \\ 2a_1 + 4r = -8 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_1 = 4 \\ r = -4 \end{cases}$
 $a_n = 8 - 4n$, $a_2 = 0$

13. b) $\begin{cases} 2a_1 + 3r = 12 \\ 3a_1 + 9r = 27 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$a_n = 2n + 1, a_n \neq 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

- c) $\begin{cases} r = -9 \\ a_1 = 7 \end{cases}$
 $a_n = 16 - 9n$, $a_n \neq 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}$

5. a) 5, 9, 13, 17, 21
 b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
6. a) $a_n = 44 - 4n$, $a_{12} = -4$
 b) $a_n = -\frac{21}{2} + \frac{1}{2}n$, $a_{12} = -\frac{9}{2}$
 c) $a_n = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}n$, $a_{12} = \frac{23}{4}$
7. a) $a_1 = 21$, $r = -5$
 b) $a_1 = -2$, $r = 5$
 c) $a_1 = -2$, $r = 2$
 d) $a_1 = \frac{7}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$
 e) $a_1 = -1$, $r = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 1$, $r = -\frac{1}{2}$
 f) $a_1 = -1$, $r = 2$ lub $a_1 = \frac{5}{2}$, $r = -\frac{3}{2}$
8. a) Ciąg jest rosnący, czyli $2 + x - (-2) > 0$, stąd $x > -4$.
 $\frac{-2+4+x^2}{2} = 2 + x$
 $x^2 - 2x - 2 = 0$
 $x = 1 - \sqrt{3}$ lub $x = 1 + \sqrt{3}$
 b) Ciąg jest rosnący, czyli $3x - 5 - (2x - 3) > 0$,
 stąd $x > 2$.
 $3x - 5 - (2x - 3) =$
 $= \frac{1}{4}x^2 + x - 2 - (3x - 5)$
 $x^2 - 12x + 20 = 0$
 $x = 2$ lub $x = 10$, ale $x > 2$
 Zatem $x = 10$.
9. $\begin{cases} a_2 + a_4 = 2 \\ a_6 - a_3 = 9 \end{cases}$
 $\begin{cases} 2a_1 + 4r = 2 \\ 3r = 9 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_1 = -5 \\ r = 3 \end{cases}$
 $a_n = 3n - 8 = 40$, czyli
 $n = 16$
 Zatem $a_{16} = 40$.
10. $r = 1$ oraz
 $(a_3 - 1)a_3(a_3 + 1) = -60$
 $a_3^3 - a_3 + 60 = 0$
 $a_3 = -4$
 Wyrazy ciągu: $-6, -5, -4, -3$
11. a) $x = 7$, $y = 11$
 b) $x = 15,5$, $y = 27$, $z = 38,5$

Uczeń:

- udowadnia, że dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym,
- udowadnia, że ciąg jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres jest zawarty w pewnej prostej,
- stosuje własności ciągu arytmetycznego w zadaniach różnego typu.

Komentarz

Uczniowie bardzo często próbują wykazywać, że ciąg jest arytmetyczny, badając tylko trzy pierwsze wyrazy ciągu. Dlatego warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 1 b.

Ćwiczenie 1

- a) $a_4 - a_3 = 2 \neq a_5 - a_4 = 4$
Zatem ciąg nie jest arytmetyczny.
- b) $a_3 - a_2 = -1 \neq a_4 - a_3 = -1\frac{1}{2}$
Zatem ciąg nie jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 2

- a) $a_{n+1} - a_n =$
 $= 6(n+1) - 2 - 6n + 2 = 6$
dla dowolnej liczby $n \in \mathbf{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
- b) $a_{n+1} - a_n =$
 $= \frac{2(n+1)-5}{3} - \frac{2n-5}{3} = \frac{2}{3}$
dla dowolnej liczby $n \in \mathbf{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
- c) $a_{n+1} - a_n =$
 $= \sqrt{2}(n+1) - \sqrt{2}n = \sqrt{2}$
dla dowolnej liczby $n \in \mathbf{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
- d) $a_{n+1} - a_n =$
 $= 13 - \frac{1}{10}(n+1) - 13 + \frac{1}{10}n =$
 $= -\frac{1}{10}$ dla dowolnej liczby
 $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg jest arytmetyczny.

3.6. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = n^2 + n + 1$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$a_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$$

Aby pokazać, że ciąg nie jest arytmetyczny, wystarczy wskazać wyrazy a_k , a_{k+1} oraz a_n , a_{n+1} takie, że $a_{k+1} - a_k \neq a_{n+1} - a_n$.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ oraz $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$, zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

b) $a_n = (n-2)^3 + 2$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (1-2)^3 + 2 = 1 \quad a_3 = (3-2)^3 + 2 = 3$$

$$a_2 = (2-2)^3 + 2 = 2 \quad a_4 = (4-2)^3 + 2 = 10$$

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$, ale $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że ciąg o podanych początkowych wyrazach nie jest arytmetyczny.

a) 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, ...

b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \dots$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnic między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu. Należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{3n+2}{2}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Różnica ta jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 6n - 2$ b) $a_n = \frac{2n-5}{3}$ c) $a_n = \sqrt{2}n$ d) $a_n = 13 - \frac{n}{10}$

Przykład 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

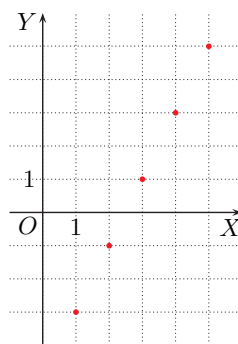
Narysuj wykres tego ciągu.

Różnica tego ciągu jest równa 2.

Wyznaczamy wzór ogólny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wykres tego ciągu jest zawarty w prostej $y = 2x - 5$.



Ćwiczenie 3

- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 6, 4, 2, 0, -2, ... Naskicuj wykres tego ciągu i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.
- Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.
- Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 2$.

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres zawiera się w pewnej prostej $y = ax + b$.

Zadania

- Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n$.
 - Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
- Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.
 - $a_n = n^2 - 3n$
 - $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
 - $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$
- Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
 - $a_n = 3n - 1$
 - $a_n = \frac{n+2}{6}$
 - $a_n = \frac{\sqrt{5}n+1}{2}$
 - $a_n = 4 - 2n$
 - $a_n = \frac{1}{2}(n-7)$
 - $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2}$
- Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy.
 - $y = 5x - 4$
 - $y = -3x + 1$
 - $y = \sqrt{3}x - 2$

- $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
 - $a_{n+1} - a_n = 4 - 2(n+1) - 4 + 2n = -2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
 - $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+2}{6} - \frac{n+2}{6} = \frac{1}{6}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
 - $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(n+1-7) - \frac{1}{2}(n-7) = \frac{1}{2}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
 - $a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{5}(n+1)+1}{2} - \frac{\sqrt{5}n+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.
 - $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2} = \frac{(3n-2)(3n+2)}{3n+2} = 3n-2$
 $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ciąg jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 3

- $r = -2$, $a_n = -2n + 8$,
 $y = -2x + 8$
- $a_n = 3n - 2$,
 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$,
 $a_4 = 10$, $a_5 = 13$
- $y = 2x + 1$

Ćwiczenie 4

Założmy, że wykres ciągu (a_n) zawiera się w prostej $y = ax + b$. Wówczas $a_n = a \cdot n + b$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ i $a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (a \cdot n + b) = a$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, czyli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Założmy, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas istnieją $a, r \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ $a_n = a_1 + (n-1)r = r \cdot n + a_1 - r$. Zatem wykres ciągu (a_n) zawiera się w prostej $y = ax + b$, gdzie $a = r$, $b = a_1 - r$.

Odpowiedzi do zadań

- $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$,
 $a_4 = 4$, $a_5 = 5$
 - $a_6 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 = 126$
 $a_5 - a_4 = 1 \neq a_6 - a_5 = 121$,
zatem ciąg nie jest ciągiem arytmetycznym.
- $a_1 = -2$, $a_2 = -2$, $a_3 = 0$
 $a_2 - a_1 = 0 \neq a_3 - a_2 = 2$
 - $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$
 $a_2 - a_1 = \frac{1}{3} \neq a_3 - a_2 = \frac{1}{6}$
 - $a_1 = 6$, $a_2 = 15$,
 $a_3 = 24$, $a_4 = 30$
 $a_3 - a_2 = 9 \neq a_4 - a_3 = 6$
- $a_n = 5n - 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 6$,
 $a_3 = 11$, $a_4 = 16$
 - $a_n = -3n + 1$, $a_1 = -2$,
 $a_2 = -5$, $a_3 = -8$, $a_4 = -11$
 - $a_n = n\sqrt{3} - 2$, $a_1 = \sqrt{3} - 2$,
 $a_2 = 2\sqrt{3} - 2$, $a_3 = 3\sqrt{3} - 2$,
 $a_4 = 4\sqrt{3} - 2$

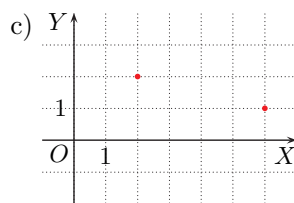
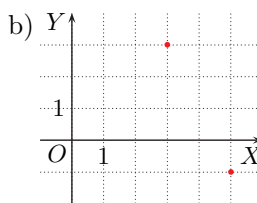
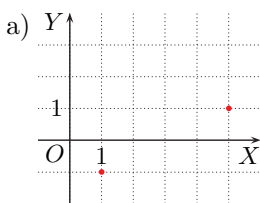
5. a) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}$; $a_n > 0$
dla $n \geq 4$
b) $a_n = -2n + 9$; $a_n > 0$
dla $n \leq 4$
c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{5}{2}$; $a_n > 0$
dla $n \leq 9$

6. a) $a_{n+1} - a_n = 3 > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny i rosnący.
 $a_n = 3n - 8$, $a_{10} = 22$
b) $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny i rosnący.
 $a_n = (n+2)\sqrt{2}$, $a_{10} = 12\sqrt{2}$
7. a) $f(n) = n^2 - 2n + 3$,
 $f(n+1) = n^2 + 2$,
 $a_n = 2n - 1$,
 $a_{n+1} - a_n = 2$ dla $n \in \mathbf{N}_+$.
Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
b) $f(n) = an^2 + bn + c$,
 $f(n+1) = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$,
 $a_n = 2an + a + b$,
 $a_{n+1} - a_n = 2a$ dla $n \in \mathbf{N}_+$.
Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
8. a) 36 b) 6, 8

10. a)–d) jest arytmetyczny
e), f) nie jest arytmetyczny

11. a) $y = 2x + 3$,
 $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}$
b) $y = -\frac{1}{3}x + 10$, $a_{30} = 0$
c) $y = x - 14$, $a_{14} = 0$

5. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



- D** 6. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Uzasadnij, że jest on arytmetyczny i rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.
- a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$ dla $n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = 3\sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt{2} \end{cases}$ dla $n \geq 1$
- D** 7. a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.
b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.
8. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.
b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych, jeżeli przeciwprostokątna ma długość 10.
- D** 9. a) Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.
b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego obwód jest równy 18.

Powtórzenie

10. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
- a) $a_n = 4n - 7$ c) $a_n = 1 - 2n$ e) $a_n = n^2 - 1$
b) $a_n = \frac{1}{2}n + 3$ d) $a_n = \frac{n+1}{3}$ f) $a_n = 8 - n^3$
11. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 0?
- a) $a_1 = 5$, $r = 2$ b) $a_6 = 8$, $r = -\frac{1}{3}$ c) $a_{10} = -4$, $r = 1$
9. a) Niech a , $a + r$, $a + 2r$ ($a > 0$, $r > 0$) – długości boków trójkąta.
Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$.
Stąd długości boków trójkąta są równe $a = 3r$, $a + r = 4r$, $a + 2r = 5r$.
Zatem trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.
Niech $3r$, $4r$, $5r$ będą długościami boków trójkąta podobnego do trójkąta o bokach 3, 4, 5. Zauważmy, że:
 $(3r)^2 + (4r)^2 = (5r)^2$ oraz $4r - 3r = 5r - 4r = r$,
zatem $3r$, $4r$, $5r$ tworzą ciąg arytmetyczny.
b) 13,5

Suma, różnica, iloczyn i iloraz ciągów

Ciąg (c_n) nazywamy **sumą** ciągów (a_n) i (b_n) , jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość $c_n = a_n + b_n$.

Podobnie definiujemy **różnicę** i **iloczyn** ciągów (a_n) i (b_n) oraz ich **iloraz** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ przy założeniu, że $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 1

Dane są ciągi $a_n = 3n + 5$ i $b_n = 2n + 1$.

- Ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) dany jest wzorem:

$$c_n = (3n + 5) + (2n + 1) = 5n + 6$$

- Ciąg (d_n) będący iloczynem ciągów (a_n) i (b_n) dany jest wzorem:

$$d_n = (3n + 5) \cdot (2n + 1) = 6n^2 + 13n + 5$$

- Dane są ciągi $a_n = 2n - 1$ i $b_n = n + 1$. Podaj wzór ogólny ciągu (c_n) oraz oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

$$\text{a) } c_n = a_n + b_n \quad \text{b) } c_n = a_n - b_n \quad \text{c) } c_n = a_n \cdot b_n \quad \text{d) } c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

- D** 2. Dane są ciągi $a_n = n^2$ i $b_n = \frac{12}{n}$. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny? Odpowiedź uzasadnij.

$$\text{a) } c_n = a_n + b_n \quad \text{b) } c_n = a_n - b_n \quad \text{c) } c_n = a_n \cdot b_n \quad \text{d) } c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

D Przykład 2

Dane są ciągi rosnące (a_n) i (b_n) . Uzasadnij, że ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) też jest rosnący.

Ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$. Wyznaczamy różnicę $c_{n+1} - c_n$:

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$$

Zatem $c_{n+1} - c_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, czyli ciąg (c_n) jest rosnący.

- D** 3. Uzasadnij, że suma ciągów malejących jest ciągiem malejącym.

- Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = a_n \cdot b_n$:

$$\text{a) jest stały,} \quad \text{b) jest malejący,} \quad \text{c) nie jest monotoniczny.}$$

- D** 5. Dane są ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) . Wykaż, że ciąg $c_n = 2a_n + 3b_n$ też jest ciągiem arytmetycznym.

- Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami malejącymi, stąd $a_{n+1} - a_n < 0$ oraz $b_{n+1} - b_n < 0$. Niech $c_n = a_n + b_n$.

Wtedy $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (c_n) jest malejący.

- a) np. $a_n = n$, $b_n = -\frac{1}{n}$ - ciągi rosnące, $c_n = -1$ - ciąg stały

$$\text{b) np. } a_n = b_n = -\frac{1}{n} \text{ - ciągi rosnące, } c_n = \frac{1}{n^2} \text{ - ciąg malejący}$$

$$\text{c) np. } a_n = n - 2, b_n = n - 3 \text{ - ciągi rosnące,}$$

$$c_n = (n - 2)(n - 3) \text{ - ciąg nie jest monotoniczny, bo } c_1 > c_2 = c_3 < c_4$$

- Ciągi (a_n) i (b_n) są arytmetyczne, zatem istnieją liczby $r_a, r_b \in \mathbf{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$a_{n+1} - a_n = r_a \quad \text{oraz} \quad b_{n+1} - b_n = r_b$$

$$c_{n+1} - c_n = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} - 2a_n - 3b_n = 2(a_{n+1} - a_n) + 3(b_{n+1} - b_n) = 2r_a + 3r_b$$

dla $n \in \mathbf{N}_+$. Zatem ciąg (c_n) jest arytmetyczny.

Odpowiedzi do zadań

- $c_n = 3n$, $c_1 = 3$, $c_2 = 6$, $c_3 = 9$, $c_4 = 12$
 - $c_n = n - 2$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$
 - $c_n = 2n^2 + n - 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 9$, $c_3 = 20$, $c_4 = 35$
 - $c_n = \frac{2n-1}{n+1}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{5}{4}$, $c_4 = \frac{7}{5}$
- $c_n = n^2 + \frac{12}{n}$, $c_1 = 13$, $c_2 = 10$, $c_3 = 13$, $c_4 = 19$
 $c_1 > c_2$, ale $c_2 < c_3$, zatem ciąg (c_n) nie jest monotoniczny.
 - $c_n = n^2 - \frac{12}{n}$, $c_1 = -11$, $c_2 = -2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 13$
 $c_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - \frac{12}{n+1}$
 $c_{n+1} - c_n = 2n + 1 + \frac{12}{n(n+1)} > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (c_n) jest rosnący.
 - $c_n = 12n$, $c_1 = 12$, $c_2 = 24$, $c_3 = 36$, $c_4 = 48$
 $c_{n+1} = 12n + 12$
 $c_{n+1} - c_n = 12 > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (c_n) jest rosnący.
 - $c_n = \frac{n^3}{12}$, $c_1 = \frac{1}{12}$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_3 = \frac{9}{4}$, $c_4 = \frac{16}{3}$
 $c_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{12} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{12}$
 $c_{n+1} - c_n = \frac{3n^2 + 3n + 1}{12} > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (c_n) jest rosnący.

- oblicza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego,
- stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego w zadaniach różnego typu, w tym tekstowych.

Ćwiczenie 1

$$\text{a) } S_{50} = \frac{51 \cdot 50}{2} = 1275$$

b) Zapiszmy S_n na dwa sposoby
i dodajmy równości stronami:

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n$$

$$S_n \equiv n + n - 1 + \dots + 2 + 1$$

$$2S_n = n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1 + n + 1$$

$$2S_n = (n+1) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(n+1)n}{2}, \text{ czyli}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)

Sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy symbolem S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Przykład 1

Oblicz sumę S_{100} wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Zapisujemy sumę S_{100} na dwa sposoby i dodajemy równości stronami:

$$\begin{array}{r} S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Zatem $2S_{100} = 101 \cdot 100$, czyli $S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) od 1 do 50,

b) od 1 do n .

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Dowód

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r , to sumę jego n początkowych wyrazów możemy zapisać w postaci:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \dots + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r)$$

oraz możemy zapisać sumowane wyrazy w odwrotnej kolejności:

$$S_n = (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + (n-2)r) + \dots + (a_1 + r) + a_1$$

Dodajemy do siebie stronami powyższe równania i otrzymujemy:

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r) + \dots + (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r)$$

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład 2

Oblicz sumy S_5 i S_8 ciągu arytmetycznego: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \frac{2+10}{2} \cdot 5 = 30$$

$$S_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 72$$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz wyraz a_6 , a następnie sumę S_6 ciągu arytmetycznego: 1, 4, 7, 10, ...

b) Oblicz wyraz a_{20} , a następnie sumę S_{20} ciągu arytmetycznego: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...

W obliczeniach wykorzystuje się również podaną niżej postać wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 3

Oblicz sumę S_{21} ciągu arytmetycznego: 3, 8, 13, 18, ...

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 5$, zatem:

$$S_{21} = \frac{2 \cdot 3 + (21-1) \cdot 5}{2} \cdot 21 = \frac{6+100}{2} \cdot 21 = 53 \cdot 21 = 1113$$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz sumę S_{31} ciągu arytmetycznego: 3, 7, 11, ...

b) Oblicz sumę S_{13} ciągu arytmetycznego: -5, -8, -11, ...

Przykład 4

Ustal, ile wyrazów ma skończony ciąg arytmetyczny: 6, 10, 14, ..., 86, oraz oblicz ich sumę.

Zauważmy, że liczby: 6, 10, 14, ..., 86 tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 6$, ostatnim wyrazie $a_n = 86$ i różnicy $r = 4$.

Liczbę wyrazów ciągu wyznaczamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$:

$$86 = 6 + (n-1) \cdot 4$$

skąd otrzymujemy $n = 21$. Zatem $S_{21} = \frac{6+86}{2} \cdot 21 = 46 \cdot 21 = 966$.

Ćwiczenie 4

Ustal, ile wyrazów ma podany skończony ciąg arytmetyczny, i oblicz ich sumę.

a) 6, 11, 16, ..., 101 b) -4, -7, -10, ..., -37 c) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{3}$, ..., $\frac{25}{3}$

Ćwiczenie 2

a) $a_6 = 1 + 5 \cdot 3 = 16$,

$$S_6 = \frac{1+16}{2} \cdot 6 = 51$$

b) $a_{20} = \frac{1}{2} + 19 \cdot \frac{1}{2} = 10$,

$$S_{20} = \frac{\frac{1}{2}+10}{2} \cdot 20 = 105$$

Ćwiczenie 3

a) $S_{31} = \frac{2 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{2} \cdot 31 = 1953$

b) $S_{13} = \frac{2 \cdot (-5) + 12 \cdot (-3)}{2} \cdot 13 = -299$

Ćwiczenie 4

a) $101 = 6 + (n-1) \cdot 5$

$$n = 20, S_{20} = 1070$$

b) $-37 = -4 + (n-1) \cdot (-3)$

$$n = 12, S_{20} = -246$$

c) $\frac{25}{3} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 1$

$$n = 9, S_{20} = 39$$

Ćwiczenie 5

$$a_1 = 5, a_n = 95, r = 6$$

$$95 = 5 + (n-1) \cdot 6, \text{ czyli } n = 16$$

$$S_{16} = \frac{(5+95) \cdot 16}{2} = 800$$

Ćwiczenie 6

$$\text{a) } a_1 = 1, a_n = 197, r = 4$$

$$197 = 1 + (n-1) \cdot 4, \text{ czyli } n = 50$$

$$S_{50} = \frac{(1+197) \cdot 50}{2} = 4950$$

$$\text{b) } a_1 = 2, a_n = 197, r = 3$$

$$197 = 2 + (n-1) \cdot 3, \text{ czyli } n = 66$$

$$S_{66} = \frac{(2+197) \cdot 66}{2} = 6567$$

Odpowiedzi do zadań

$$1. \text{ a) } 115 \quad \text{b) } -185 \quad \text{c) } 10,5$$

$$2. \text{ a) } a_1 = 0, a_{10} = 18, S_{10} = 90$$

$$\text{b) } a_1 = -4, a_{10} = 5, S_{10} = 5$$

$$\text{c) } a_1 = 18, a_{10} = -36, \\ S_{10} = -90$$

$$3. \text{ a) } 11 \text{ wyrazów, suma: } 209$$

$$\text{b) } 15 \text{ wyrazów, suma: } 75$$

$$\text{c) } 20 \text{ wyrazów, suma: } -440$$

$$4. \text{ a) } a_1 = 14, a_n = 2020, r = 2$$

$$2020 = 14 + (n-1) \cdot 2,$$

$$\text{czyli } n = 1004$$

$$S_{1004} = \frac{(14+2020) \cdot 1004}{2} = \\ = 1021068$$

$$\text{b) } a_1 = 11, a_n = 99, r = 2$$

$$99 = 11 + (n-1) \cdot 2,$$

$$\text{czyli } n = 45$$

$$S_{45} = \frac{(11+99) \cdot 45}{2} = 2475$$

Przykład 5

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1.

Liczby, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, mają postać $6n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Warunki zadania spełniają zatem liczby:

$$6 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 6 \cdot 1 + 1 = 7, \quad 6 \cdot 2 + 1 = 13, \quad \dots, \quad 6 \cdot 16 + 1 = 97$$

Tworzą one 17-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 6$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ostatnim wyrazie $a_{17} = 97$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1+97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 5.

Ćwiczenie 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 200, których reszta z dzielenia:

a) przez 4 jest równa 1,

b) przez 3 jest równa 2.

Zadania

1. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

$$\text{a) } a_1 = -2 \text{ i } r = 3$$

$$\text{b) } a_1 = 4 \text{ i } r = -5$$

$$\text{c) } a_1 = 1,5 \text{ i } r = -0,1$$

2. Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .

$$\text{a) } a_4 = 6 \text{ i } a_8 = 14$$

$$\text{b) } a_6 = 1 \text{ i } a_8 = 3$$

$$\text{c) } a_2 = 12 \text{ i } a_4 = 0$$

3. Ustal, ile wyrazów ma podany niżej skończony ciąg arytmetyczny, oraz oblicz ich sumę.

$$\text{a) } 4, 7, 10, \dots, 34$$

$$\text{b) } \frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, \dots, 9\frac{2}{3}$$

$$\text{c) } -3, -5, -7, \dots, -41$$

4. a) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 13 a 2021.

b) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych dodatnich.

5. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez:

$$\text{a) } 3,$$

$$\text{b) } 5,$$

$$\text{c) } 7.$$

6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, które:

a) są dwucyfrowe,

b) są trzycyfrowe,

c) są mniejsze od 500.

5. a) $a_1 = 12, a_n = 99, r = 3$

$$99 = 12 + (n-1) \cdot 3, \text{ czyli } n = 30$$

$$S_{16} = \frac{(12+99) \cdot 30}{2} = 1665$$

b) $a_1 = 10, a_n = 95, r = 5$

$$95 = 10 + (n-1) \cdot 5, \text{ czyli } n = 18$$

$$S_{18} = \frac{(10+95) \cdot 18}{2} = 945$$

c) $a_1 = 14, a_n = 98, r = 7$

$$98 = 14 + (n-1) \cdot 7, \text{ czyli } n = 13$$

$$S_{13} = \frac{(14+98) \cdot 13}{2} = 728$$

6. a) Niech S – suma wszystkich liczb dwucyfrowych, T – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3, $S - T$ – szukana suma. Zatem:

$$S - T = \\ = \frac{(10+99) \cdot 90}{2} - \frac{(12+99) \cdot 30}{2} = \\ = 4905 - 1665 = 3240$$

$$\text{b) } 329400 \quad \text{c) } 83167$$

7. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia:
- przez 5 jest równa 1 i które są mniejsze od 100,
 - przez 4 jest równa 3 i które są większe od 10 oraz mniejsze od 80,
 - przez 6 jest równa 4 i które są większe od 30 oraz mniejsze od 120.
8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez 4 lub 5.

Najmniejszą liczbą dwucyfrową dodatnią podzielną przez 4 jest liczba $12 = 3 \cdot 4$, a największą taką liczbą jest $96 = 24 \cdot 4$. Są 22 takie liczby. Ich suma $S_1 = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 1188$.

Najmniejszą liczbą dwucyfrową dodatnią podzielną przez 5 jest liczba $10 = 2 \cdot 5$, a największą taką liczbą jest $95 = 19 \cdot 5$. Jest 18 takich liczb. Ich suma $S_2 = \frac{10+95}{2} \cdot 18 = 945$.

Rozpatrzmy liczby dwucyfrowe dodatnie podzielne przez 4 i 5 – są to liczby podzielne przez 20. Ich suma $S_3 = 20 + 40 + 60 + 80 = 200$.

Suma S wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest równa $S = S_1 + S_2 - S_3$ (dlaczego?). Zatem $S = 1188 + 945 - 200 = 1933$.

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez: a) 2 lub 3, b) 3 lub 5, c) 5 lub 9.

Powtórzenie

9. Oblicz sumy S_9 i S_{18} danego ciągu arytmetycznego.
- 1, 3, 5, 7, ...
 - 5, 2, -1, -4, ...
 - $-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 4, \dots$
10. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
- $a_1 = 23, r = -2$
 - $a_1 = -5, r = 4$
 - $a_1 = 2,5, r = -0,2$
11. Oblicz sumę, której składnikami są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.
- $7 + 11 + 15 + \dots + 47 + 51$
 - $5 - 7 - 9 - \dots - 29 - 31$
 - $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 99\frac{1}{2} + 100$
 - $-18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18$
12. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa:
- 3,
 - 4,
 - 3 lub 4.
12. a) $a_1 = 3, a_n = 98, r = 5, n = 20, S_{20} = 1010$
 b) $a_1 = 4, a_n = 99, r = 5, n = 20, S_{20} = 1030$
 c) $S = 1010 + 1030 = 2040$

7. a) $a_1 = 1, a_n = 96, r = 5, n = 20, S_{20} = 970$
 b) $a_1 = 11, a_n = 79, r = 4, n = 18, S_{18} = 810$
 c) $a_1 = 34, a_n = 118, r = 6, n = 15, S_{15} = 1140$
8. a) Niech S – suma liczb podzielnych przez 2 i mniejszych od 1001, T – suma liczb podzielnych przez 3 i mniejszych od 1001, U – suma liczb podzielnych przez 6 i mniejszych od 1001, $S + T - U$ – szukana suma. Zatem:
- $$S + T - U = \frac{(2+1000) \cdot 500}{2} + \frac{(3+999) \cdot 333}{2} - \frac{(6+996) \cdot 166}{2} = 250500 + 166833 - 83166 = 334167$$
- b) 234168 c) 145059

9. a) $S_9 = 81, S_{18} = 324$
 b) $S_9 = -63, S_{18} = -369$
 c) $S_9 = 49\frac{1}{2}, S_{18} = 220\frac{1}{2}$
10. a) 140 b) 130 c) 16
11. a) $a_1 = 7, a_n = 51, r = 4, n = 12, S_{12} = 348$
 b) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 100, r = \frac{1}{2}, n = 200, S_{200} = 10050$
 c) $a_1 = -5, a_n = -31, r = -2, n = 14, S_{14} = -252$
 d) $a_1 = -18, a_n = 18, r = 3, n = 13, S_{13} = 0$

Uczeń:

- rozwiązuje równania, stosując wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego,
- uzasadnia wzory, stosując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego,
- bada monotoniczność ciągu, korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)

D Przykład 1

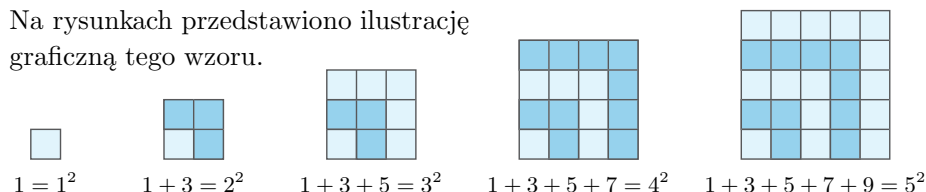
Uzasadnij wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych dodatnich:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2n - 1$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

Na rysunkach przedstawiono ilustrację graficzną tego wzoru.



D Przykład 2

Uzasadnij wzór $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$ dla $n \in \mathbf{N}_+$.

Podane składniki sumy tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i wyrazie $a_n = 3n - 2$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{1 + (3n - 2)}{2} \cdot n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.

$$\text{a) } n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^3 + n^2}{2} \qquad \text{b) } 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

D Przykład 3

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: 5, 8, 11, ... należy dodać, aby otrzymać sumę 185?

W danym ciągu mamy: $a_1 = 5$, $r = 3$, $S_n = 185$, zatem:

$$\frac{2 \cdot 5 + (n - 1) \cdot 3}{2} \cdot n = 185 \quad / \cdot 2$$

$$3n^2 + 7n = 370$$

$$3n^2 + 7n - 370 = 0$$

$$\Delta = 4489, \quad \sqrt{\Delta} = 67$$

$$n_1 = \frac{-7 - 67}{6} \notin \mathbf{N}_+, \quad n_2 = \frac{-7 + 67}{6} = 10$$

Należy dodać 10 początkowych wyrazów.

Ćwiczenie 1

a) $a_1 = n$, $r = n$, $a_n = n^2$

Zatem dla $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{n + n^2}{2} \cdot n = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

b) $a_1 = 1$, $r = 1$, $a_n = n - 1$

Zatem dla $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{1 + n - 1}{2} \cdot (n - 1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Ćwiczenie 2

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: 3, 5, 7, 9, ... należy dodać, aby otrzymać sumę 255?

Zadania

- Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę 546?
a) 6, 8, 10, ... b) 13, 17, 21, ... c) -24, -22, -20, ...
- Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r . Wyznacz największą wartość n , dla której $S_n < 100$.
a) $a_1 = 4, r = 8$ b) $a_1 = -5, r = 5$ c) $a_1 = 1, r = \sqrt{2}$
- Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego jest równa 30, a iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 11. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?
- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = \frac{5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{n + 3}$ c) $a_n = \frac{4 + 8 + 12 + \dots + 4n}{n + 2}$
b) $a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n + 5}$ d) $a_n = \frac{6 + 12 + 18 + \dots + 6n}{n^2}$
- Rozwiąż równanie.
a) $(1 + x) + (3 + x) + (5 + x) + \dots + (25 + x) = 130$
b) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + (4 + 7x) + \dots + (50 + 99x) = 275$
c) $(1 + x) + (5 + 2x) + (9 + 3x) + \dots + (61 + 16x) = -48$
- Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 7, a suma dwóch wyrazów środkowych jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu oraz sumę wszystkich jego wyrazów.

Powtórzenie

- Ile co najmniej początkowych wyrazów danego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę większą od 200?
a) -9, -7, -5, -3, -1, 1, ... b) -4, -3, -2, -1, 0, 1, ...
- Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.
a) $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n + 1)$
b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$
- a) $(1 + 3 + \dots + 25) + 13x = 130, \frac{(1+25) \cdot 13}{2} + 13x = 130, x = -3$
b) $x = -0,4$ c) $x = -4$
- $a_1 = 1, r = \frac{2}{3}$ lub $a_1 = 7, r = -\frac{2}{3}, S_{10} = 40$
- a) 21 b) 26
- a) $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = \frac{(6+6n)n}{2} = 3n(1 + n)$
b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = \frac{(4+6n-2)n}{2} = n(3n + 1)$

Ćwiczenie 2

$$a_1 = 3, r = 2, S_n = 255$$

$$\frac{23+(n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = 255$$

$$n^2 + 2n - 255 = 0$$

$$n = 15 \text{ lub } n = -17 \notin \mathbf{N}_+$$

Należy dodać 15 początkowych wyrazów.

Odpowiedzi do zadań

- a) 21 b) 14 c) 39
- a) $S_n = 4n^2, n = 4$
b) $S_n = \frac{5n-15}{2} \cdot n, n \in (-5; 8)$,
czyli $n = 7$
c) $S_n = \frac{2+(n-1)\sqrt{2}}{2} \cdot n$
 $S_{11} = (1 + 5\sqrt{2}) \cdot 11 < 100$
 $S_{12} = (2 + 11\sqrt{2}) \cdot 6 > 100$
 $n = 11$
- $$\begin{cases} \frac{2a_1+4r}{2} \cdot 5 = 30 \\ (a_1 + r)(a_1 + 3r) = 11 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ r = 5 \end{cases}$$
$$S_n = \frac{5n-13}{2} \cdot n > 100$$
$$5n^2 - 13n - 200 > 0$$
$$n_1 = \frac{13-\sqrt{4169}}{10} < 0$$
$$n_2 = \frac{13+\sqrt{4169}}{10} \approx 7,8$$

Należy dodać 8 początkowych wyrazów.
- a) rosnący
b) rosnący
c) $a_n = \frac{2n(1+n)}{n+2}$
$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)(n+2)}{n+3}$$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)} > 0$$

dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

d) $a_n = \frac{3(1+n)}{n}$
$$a_{n+1} = \frac{3(n+2)}{n+1}$$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{-3}{n(n+1)} < 0$$

dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

Uczeń:

- podaje przykłady ciągów geometrycznych,
- wyznacza wyrazy ciągu geometrycznego, gdy dane są jego pierwszy wyraz i iloraz,
- wyznacza wzór ogólny ciągu geometrycznego, gdy dane są dowolne dwa jego wyrazy,
- wyznacza wartości niewiadomych tak, aby wraz z podanymi wartościami tworzyły ciąg geometryczny.

Ćwiczenie 1

$$P_2 = 0,8 \text{ cm}^2, P_3 = 3,2 \text{ cm}^2, \\ P_4 = 12,8 \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 2

- a) $q = 2, a_4 = 24, a_5 = 48$
b) $q = 3, a_4 = 1, a_5 = 3$
c) $q = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{4}$
d) $q = \frac{1}{4}, a_4 = 1, a_5 = \frac{1}{4}$
e) $q = -2, a_4 = -8, a_5 = 16$
f) $q = -\frac{1}{3}, a_4 = 1, a_5 = -\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) $a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27, a_5 = 81$
b) $a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1$
c) $a_2 = -5, a_3 = 5, a_4 = -5, a_5 = 5$
d) $a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = 1, a_4 = -2, a_5 = 4$
e) $a_2 = 1, a_3 = \sqrt{2}, a_4 = 2, a_5 = 2\sqrt{2}$
f) $a_2 = 2\sqrt{3}, a_3 = 6\sqrt{2}, a_4 = 12\sqrt{3}, a_5 = 36\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

- a) $q = 9$ b) $q = \frac{3}{2}$
c) $q = \frac{1}{6}$ d) $q = -\frac{3}{4}$
e) $q = -2\sqrt{2}$ f) $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ćwiczenie 1

Pole koła K_1 jest równe $0,2 \text{ cm}^2$. Pole każdego kolejnego koła jest czterokrotnie większe od pola koła poprzedniego. Oblicz pola kół K_2, K_3 i K_4 .



Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz ciągu geometrycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

- a) 3, 6, 12, ... c) 4, 2, 1, ... e) 1, -2, 4, ...
b) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$ d) 64, 16, 4, ... f) -27, 9, -3, ...

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_2, a_3, a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $a_1 = 1, q = 3$ c) $a_1 = 5, q = -1$ e) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, q = \sqrt{2}$
b) $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$ d) $a_1 = \frac{1}{4}, q = -2$ f) $a_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{6}$

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Ćwiczenie 4

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że jego dwa kolejne wyrazy to:

- a) 27 i 243, c) -216 i -36, e) $\sqrt{2}$ i -4,
b) $\frac{8}{9}$ i $\frac{4}{3}$, d) $-\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{10}$, f) $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$.

Multiteka

- Wykres ciągu arytmetycznego i geometrycznego

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.9

Generator
testów i sprawdzianów

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ciągiem geometrycznym.

- a) 4, 8, 16, 32, 60, 120, ... b) 1, -2, 4, -8, 16, 32, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \frac{81}{64}, \dots$

Przykład 1

Oblicz jedenasty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 3$ oraz iloraz ciągu $q = 2$.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$\vdots$

$$a_{11} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu geometrycznego, obliczamy $a_1 \cdot q^{11-1}$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

- a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2, n = 6,$ e) $a_1 = -2, q = -3, n = 5,$
b) $a_1 = 25, q = \frac{1}{5}, n = 7,$ f) $a_1 = -7, q = -1, n = 15,$
c) $a_1 = 8, q = \frac{2}{3}, n = 4,$ g) $a_1 = 5, q = \sqrt{2}, n = 9,$
d) $a_1 = \frac{1}{10}, q = 2\frac{1}{2}, n = 6,$ h) $a_1 = \sqrt{3}, q = -\frac{\sqrt{3}}{3}, n = 8.$

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

- a) $a_4 = 1, q = \frac{1}{2},$ b) $a_6 = 16, q = -2,$ c) $a_8 = 81, q = 3.$

Zadania

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7 .

- a) 128, 64, 32, ... c) $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \dots$ e) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$
b) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$ d) $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \dots$ f) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $q = \frac{1}{2}, a_n = 2^{8-n}, a_7 = 2$
b) $q = 4, a_n = 4^{n-3}, a_7 = 256$
c) $q = -3, a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^{n-6}, a_7 = 3$
d) $q = \frac{4}{5}, a_n = (\frac{4}{5})^{n-5}, a_7 = \frac{16}{25}$
e) $q = -\sqrt{2}, a_n = -(-\sqrt{2})^n, a_7 = 8\sqrt{2}$
f) $q = \frac{3}{2}, a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}, a_7 = \frac{81}{32}$

Ćwiczenie 5

- a) $\frac{a_4}{a_3} = 2$, ale $\frac{a_5}{a_4} = \frac{60}{32} \neq 2$,

zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

- b) $\frac{a_5}{a_4} = \frac{16}{-8} = -2$, ale

$\frac{a_6}{a_5} = \frac{32}{16} \neq -2$, zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

- c) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$, ale $\frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2} \neq \frac{3}{4}$,

zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

Ćwiczenie 6

- a) $a_6 = 4$
b) $a_7 = \frac{1}{625}$
c) $a_4 = \frac{64}{27}$
d) $a_6 = \frac{625}{64}$
e) $a_5 = -162$
f) $a_{15} = -7$
g) $a_9 = 80$
h) $a_8 = -\frac{1}{27}$

Ćwiczenie 7

- a) $a_1 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = 8$
b) $a_1 = \frac{16}{(-2)^5} = -\frac{1}{2}$
c) $a_1 = \frac{81}{3^7} = \frac{1}{27}$

2. a) $q = \sqrt{2}$, $a_4 = 4 + 2\sqrt{2}$,
 $a_5 = 4\sqrt{2} + 4$
 b) $q = \sqrt{2} + 1$, $a_4 = 2\sqrt{2} + 3$,
 $a_5 = 5\sqrt{2} + 7$
3. a) $a_n = \frac{125}{96} \cdot \left(\frac{8}{25}\right)^{n-1}$
 b) $a_n = \frac{54}{25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$
 c) $a_n = -\frac{7}{2} \cdot (-2)^{n-1}$
 lub $a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^{n-1}$
 d) $a_n = -\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}$
 e) $a_n = -1024 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 lub $a_n = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 f) $a_n = -\frac{1}{243} \cdot (-3)^{n-1}$
 lub $a_n = \frac{1}{243} \cdot 3^{n-1}$
4. a) $-243, -81, -3$
 b) $\frac{3}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}$
 c) $3, 12, 24, 96$
 d) $\frac{1}{3}, -1, -9, 27$
 e) $4, 2, 1, \frac{1}{2}$
 f) $\frac{5}{3}, 5, 15, 45$
5. a) $q = 3$, $a_3 = 72$, $a_4 = 216$,
 $a_5 = 648$
 b) $q = -3$, $a_3 = 18$,
 $a_4 = -54$, $a_5 = 162$
 c) $q = \frac{4}{3}$, $a_3 = 1\frac{1}{3}$, $a_4 = 1\frac{7}{9}$,
 $a_5 = 2\frac{10}{27}$
 d) $q = -6$, $a_3 = -12$,
 $a_4 = 72$, $a_5 = -432$
 e) $q = \frac{2}{3}$, $a_3 = -5\frac{1}{3}$,
 $a_4 = -3\frac{5}{9}$, $a_5 = -2\frac{10}{27}$
 f) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $a_5 = \frac{1}{2}$

2. Oblicz wyrazy czwarty i piąty podanego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2, \dots$ b) $\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1, \dots$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_4 = a_1 \cdot q^3$ oraz $a_6 = a_1 \cdot q^5$, zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{54}{6}$$

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot (-3)^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \dots$).

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{2}{9} \cdot 3^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$).

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że:

- a) $a_2 = \frac{5}{12}$, $a_3 = \frac{2}{15}$, c) $a_2 = 7$, $a_4 = 28$, e) $a_6 = 32$, $a_{10} = 2$,
 b) $a_3 = 1\frac{1}{2}$, $a_4 = 1\frac{1}{4}$, d) $a_3 = -3$, $a_6 = -24$, f) $a_6 = 1$, $a_8 = 9$.

4. Oblicz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego.

- a) $\boxed{?}, \boxed{?}, -27, -9, \boxed{?}$ c) $\boxed{?}, 6, \boxed{?}, \boxed{?}, 48, \boxed{?}$ e) $8, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \frac{1}{4}$
 b) $\boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 3, -6$ d) $\boxed{?}, \boxed{?}, 3, \boxed{?}, \boxed{?}, -81$ f) $\frac{5}{9}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 135$

Powtórzenie

5. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz wyrazy a_3 , a_4 i a_5 .

- a) $a_1 = 8$, $a_2 = 24$ c) $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = 1$ e) $a_1 = -12$, $a_2 = -8$
 b) $a_1 = 2$, $a_2 = -6$ d) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 2$ f) $a_1 = 2$, $a_2 = \sqrt{2}$

6. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $a_1 = 15$, $a_4 = 5$ b) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{10}$, $a_4 = 10$

7. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $a_1 = \frac{1}{8}$, $q = 2$ b) $a_1 = 64$, $q = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{256}$, $q = -4$

6. a) $a_2 = 5\sqrt[3]{9}$, $a_3 = 5\sqrt[3]{3}$

b) $a_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $a_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

c) $a_2 = \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$, $a_3 = -\sqrt[3]{10}$

7. a) $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2}$

b) $a_2 = -32$, $a_3 = 16$

c) $a_2 = \frac{1}{64}$, $a_3 = -\frac{1}{16}$

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Przykład 1

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan konta wyniesie:

$$2000 \cdot 105\% = 2000 \cdot 1,05 = 2100 \text{ [zł]}$$

Po upływie dwóch lat:

$$2100 \cdot 105\% = 2100 \cdot 1,05 = 2205 \text{ [zł]}$$

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Wpłata:	2000,00
$2000,00 \cdot 1,05 =$	2100,00
$2100,00 \cdot 1,05 =$	2205,00
$2205,00 \cdot 1,05 =$	2315,25
$2315,25 \cdot 1,05 \approx$	2431,01
$2431,01 \cdot 1,05 \approx$	2552,56

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest:

- **rosnący**, gdy $q > 1$, ■ **malejący**, gdy $0 < q < 1$, ■ **stały**, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 1

- D** a) Sformułuj i uzasadnij analogiczne twierdzenie o monotoniczności ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie ujemnym.
b) Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij. Podaj przykłady odpowiednich ciągów geometrycznych i określ ich monotoniczność.

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$	$-1, 2, -4, 8, -16, \dots$ nie jest monotoniczny	$1, -2, 4, -8, 16, \dots$ nie jest monotoniczny
$q = 0$	$-3, 0, 0, 0, 0, \dots$ niemalejący	$3, 0, 0, 0, 0, \dots$ nierosnący
$0 < q < 1$	$-16, -8, -4, -2, -1, \dots$ rosnący	$16, 8, 4, 2, 1, \dots$ malejący
$q > 1$	$-1, -2, -4, -8, -16, \dots$ malejący	$1, 2, 4, 8, 16, \dots$ rosnący

Uwaga. Stałym ciągiem geometrycznym jest również ciąg: $0, 0, 0, 0, \dots$. Jego pierwszy wyraz $a_1 = 0$, a iloraz może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli:

- a) $a_3 = 2, a_5 = 4, 5$, b) $a_1 = -8, a_5 = -\frac{1}{2}$, c) $a_2 = -4, a_6 = -64$.

Ćwiczenie 2

- a) $q = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{8}{9}, a_n = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
b) $q = \frac{1}{2}, a_1 = -8, a_n = -8 \cdot 2^{1-n} = -2^{4-n}$
c) $q = 2, a_1 = -2, a_n = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

Uczeń:

- określa monotoniczność ciągu geometrycznego,
- udowadnia, że dany ciąg jest ciągiem geometrycznym,
- stosuje w zadaniach związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego,
- stosuje własności ciągu geometrycznego w zadaniach różnego typu.

Ćwiczenie 1

- a) Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 < 0$ jest:
- rosnący, gdy $0 < q < 1$,
 - malejący, gdy $q > 1$,
 - stały, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 3

a) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{5} = \frac{1}{2}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Ciąg jest malejący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q \in (0; 1)$.

b) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{7}\right)^n} = -\frac{1}{7}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{7}$. Ciąg nie jest monotoniczny, ponieważ $q < 0$.

c) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}}{-\frac{1}{3} \cdot 2^n} = 2$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = 2$. Ciąg jest malejący, ponieważ $a_1 < 0$ i $q > 1$.

d) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{-2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{3}$. Ciąg jest rosnący, ponieważ $a_1 < 0$ i $q \in (0; 1)$.

e) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6 \cdot (\sqrt{2})^n}{6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}} = \sqrt{2}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \sqrt{2}$. Ciąg jest rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q > 1$.

f) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{2n+3}}{4^{2n+1}} = 16$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = 16$. Ciąg jest rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q > 1$.

Ćwiczenie 4

Liczby a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, czyli $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

a) $x = -\frac{1}{5}$

b) $x = 0$ lub $x = 2$

c) $x = 0$ lub $x = 2$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest geometryczny, należy sprawdzić, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Wyznaczamy iloraz ciągu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 4^n} = 4$$

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest geometryczny. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q = 4 > 1$.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = \frac{5}{2^n}$

c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$

e) $a_n = 6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$

d) $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

f) $a_n = 4^{2n+1}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Liczby a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz x .

a) $x, x+1, x-3$

b) $\frac{1}{x+1}, x, 3x^2$

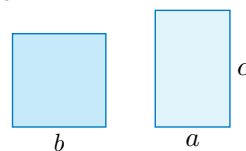
c) $x^2-1, x+1, 2x-1$

Średnia geometryczna

Jeśli liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny są dodatnie, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb a i c .

Pole kwadratu o boku b jest równe polu prostokąta o bokach a i c , jeśli b jest równe średniej geometrycznej liczb a i c .



Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Zadania

- D** 1. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.
a) $a_n = \frac{4}{3^n}$ b) $a_n = 2 \cdot (-5)^n$ c) $a_n = 4 \cdot (\sqrt{3})^{n+1}$ d) $a_n = -2 \cdot 5^{2n-1}$
- D** 2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Uzasadnij, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 - n + 2$ nie jest geometryczny.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 2, 4, 8, 14, ... Badamy ilorazy:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{14}{8} \neq 2$$

Zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

- a) $a_n = n^2 - 2n + 2$ b) $a_n = -n^2 + 4n - 2$
3. Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .
- a) $\begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ a_2^2 = 25a_3^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_4 = 3a_2 \\ a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_2 + a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = 120 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases}$
4. Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Suma dwóch liczb środkowych jest równa 24, a suma dwóch liczb skrajnych jest równa 36. Wyznacz te liczby.
5. Liczby x, y, z tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby, a suma tych trzech liczb jest równa 77. Wyznacz te liczby.

Powtórzenie

6. Określ monotoniczność ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
- a) $a_1 = \frac{1}{15}, q = \frac{6}{5}$ c) $a_1 = -6, q = \frac{2}{3}$ e) $a_1 = -\frac{1}{6}, q = -9$
b) $a_1 = 10, q = 0,49$ d) $a_1 = -4, q = \sqrt{2}$ f) $a_1 = -3, q = \sqrt[3]{-1}$
7. Wyznacz x i y tak, aby podane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Określ monotoniczność tego ciągu.
- a) 2, x , 32, y b) 1, x , 2, y c) 18, x , 8, y d) x , $\frac{1}{10}$, y , 10
6. a), c) rosnący b), d) malejący
e), f) nie jest monotoniczny
7. a) $x = 8, y = 128$, rosnący lub $x = -8, y = -128$, nie jest monotoniczny
b) $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$, rosnący lub $x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$, nie jest monotoniczny
c) $x = 12, y = 5\frac{1}{3}$, malejący lub $x = -12, y = -5\frac{1}{3}$, nie jest monotoniczny
d) $x = \frac{1}{100}, y = 1$, rosnący lub $x = -\frac{1}{100}, y = -1$, nie jest monotoniczny

Odpowiedzi do zadań

1. a), d) malejący
b) nie jest monotoniczny
c) rosnący
2. a) Kolejne wyrazy ciągu:
1, 2, 5, ...
 $\frac{a_2}{a_1} = 2$, ale $\frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{2} \neq 2$
Ciąg nie jest geometryczny.
b) Kolejne wyrazy ciągu:
1, 2, 1, ...
 $\frac{a_2}{a_1} = 2$, ale $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2} \neq 2$
Ciąg nie jest geometryczny.
3. a) $a_n = -4^{7-n}$
b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$
lub $a_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$
c) $a_n = 5^{3-n}$ lub $a_n = -5^{3-n}$
d) $a_n = 5^{n-1}$
e) $a_n = (\frac{1}{2})^{n-3}$
lub $a_n = -(\frac{1}{2})^{n-3}$
f) $a_n = -\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$
lub $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$
4. Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego, $b = aq$,
 $c = aq^2$, $d = aq^3$.
Ciąg jest malejący i $a > 0$ (bo $a + d > 0$), więc $0 < q < 1$.
$$\begin{cases} aq + aq^2 = 24 \\ a + aq^3 = 36 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = 32 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem $a = 32, b = 16, c = 8, d = 4$.
5. Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego.
 $q > 0, y = xq, z = xq^2$
$$\begin{cases} 2(x + y) = y + z \\ x + y + z = 77 \end{cases}$$

Po podstawieniu:
$$\begin{cases} 2x + xq - xq^2 = 0 \\ x + xq + xq^2 = 77 \end{cases}$$
$$\begin{cases} q = 2 \\ x = 11 \end{cases}$$

Zatem $x = 11, y = 22, z = 44$.

Uczeń:

- oblicza sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego,
- stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w zadaniach różnego typu.

Komentarz

Warto zauważyć, że dla $q > 1$ wygodniej jest używać wzoru w postaci $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Ćwiczenie 1

- a) $S_6 = 1 \cdot \frac{1-3^6}{1-3} = 364$
 b) $S_6 = 1 \cdot \frac{1-(-2)^6}{1-(-2)} = -21$
 c) $S_6 = 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$

Ćwiczenie 2

- a) $S_5 = \frac{1}{32} \cdot \frac{1-2^5}{1-2} = \frac{31}{32}$
 b) $S_5 = \frac{1}{32} \cdot \frac{1-4^5}{1-4} = \frac{341}{32}$
 c) $S_5 = 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dowód

Kolejne wyrazy ciągu to: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_n = a_1q^{n-1}$, zatem:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \\ qS_n &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony równania przez q .

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a_1 - a_1q^n \\ S_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ S_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Dzielimy obie strony równania przez $1-q$ (z założenia $q \neq 1$).

Uwaga. Jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem $S_n = n \cdot a_1$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

- a) 1, 3, 9, 27, ... b) 1, -2, 4, -8, ... c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{32}$ oraz:

- a) $q = 2$, b) $q = 4$, c) $q = 1$.

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:

- a) $a_1 = 3, a_2 = -6, n = 6,$ b) $a_1 = -4, a_2 = -12, n = 5.$

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 1456$$

$$1 - 3^n = -728$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Należy dodać sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 4

a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 635?

b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

Ćwiczenie 5

Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 26, a suma drugiego i piątego wyrazu jest równa -78 . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -61 ?

Ciąg (b_n) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n) , jeśli możemy go otrzymać poprzez wybranie jego wyrazów spośród wyrazów ciągu (a_n) bez zmiany ich kolejności.

Na przykład podciągami ciągu geometrycznego 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... są:

2, 8, 32, 128, 512, ... – podciąg wyrazów o numerach parzystych,

1, 4, 16, 64, 256, ... – podciąg wyrazów o numerach nieparzystych,

512, 1024, 2048, 4096, ... – podciąg wyrazów podzielnych przez 512.

Ćwiczenie 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a iloraz jest równy -2 . Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

- a) nieparzystych, b) parzystych.

Ćwiczenie 3

a) $S_6 = 3 \cdot \frac{1-(-2)^6}{1+2} = -63$

b) $S_5 = -4 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = -484$

Ćwiczenie 4

a) $5 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 635$

$$2^n = 128$$

$$n = 7$$

b) $2 \cdot \frac{1-(\frac{3}{2})^n}{1-\frac{3}{2}} = 16\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{81}{16}$$

$$n = 4$$

Ćwiczenie 5

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 26 \\ a_2 + a_5 = -78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(1+q^3) = 26 \\ a_1q(1+q^3) = -78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(1+q^3) = 26 \\ a_1q(1+q^3) = -78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -3 \\ a_1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -3 \\ a_1 = -1 \end{cases}$$

$$-1 \cdot \frac{1-(-3)^n}{1+3} = -61$$

$$n = 5$$

Ćwiczenie 6

a) $S_5 = 3 \cdot \frac{1-4^5}{1-4} = 1023$

b) $S_5 = -6 \cdot \frac{1-4^5}{1-4} = -2046$

Odpowiedzi do zadań

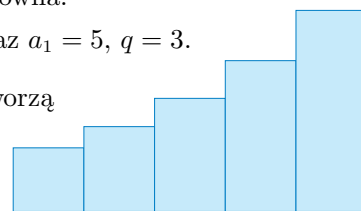
1. a) $15\frac{15}{16}$ b) $26\frac{242}{243}$
c) -1275 d) -56
2. a) -255 b) $\frac{211}{72}$
c) $93(1 - \sqrt{2})$ d) 100
5. a) 4 b) $1091,2$ c) 2
d) 48 e) $1 + \sqrt{2}$ f) 9
6. $S_n = 5 \cdot \frac{1-2^n}{1-2}$
 $2^n = \frac{S_n}{5} + 1$
a) $2^n = 64$
 $n = 6$
b) $2^n = 512$
 $n = 9$
c) $2^n = 1024$
 $n = 10$
7. a) $258 = 6 \cdot \frac{1-(-2)^n}{1+2}$
 $(-2)^n = -128$
 $n = 7$
b) $1820 = 5 \cdot \frac{3^n-1}{3-1}$
 $3^n = 729$
 $n = 6$
8. $\frac{781}{90} = P \cdot \frac{(\frac{4}{3})^5 - 1}{\frac{4}{3} - 1}$
 $\frac{781}{90} = P \cdot \frac{781}{81}$
 $P = 0,9 \text{ cm}^2$

Zadania

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli jego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:
a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}$, b) $18, 6$, c) $15, -30$, d) $-7, -7$.
2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:
a) $a_1 = -1, q = 2, n = 8$, c) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}, n = 10$,
b) $a_1 = \frac{2}{9}, q = \frac{3}{2}, n = 5$, d) $a_1 = 5, q = 1, n = 20$.
3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	5	162	242
-32	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	$-63\frac{1}{2}$
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	-32	$-60 + 30\sqrt{2}$

4. Pola dziesięciu kwadratów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$. Największy spośród tych kwadratów ma pole równe 1 cm^2 . Oblicz sumę ich:
a) pól, b) obwodów.
5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:
a) $q = 2, S_4 = 60$, c) $q = 3, S_6 = 728$, e) $q = -\sqrt{2}, S_6 = -7$,
b) $q = \frac{1}{2}, S_4 = 2046$, d) $q = -\frac{1}{2}, S_5 = 33$, f) $q = -1, S_{13} = 9$.
6. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy dodać, aby otrzymać:
a) 315, b) 2555, c) 5115?
7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli suma wszystkich wyrazów jest równa:
a) 258 oraz $a_1 = 6, q = -2$, b) 1820 oraz $a_1 = 5, q = 3$.
8. Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90} \text{ cm}^2$. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



4. a) $S_{10} = 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512} [\text{cm}^2]$
b) Długość boku największego z kwadratów: 1 cm
Obwód największego z kwadratów: $a_1 = 4 \text{ cm}$
Iloraz ciągu: $q = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $S_{10} = 4 \cdot \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{31}{8} (2 + \sqrt{2}) [\text{cm}]$

9. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:
 a) $S_3 = 35$, a różnica wyrazów pierwszego i czwartego jest równa 17,5,
 b) $S_4 = 20$, a różnica wyrazów pierwszego i trzeciego jest równa 8.
10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 33, a różnica wyrazów pierwszego i szóstego jest równa 99. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.
11. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x$ i ilorazie $q = -1$, jeśli wiadomo, że n jest liczbą:
 a) parzystą, b) nieparzystą.
12. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $S_5 - S_3 = 72$ i $a_4 - a_3 = 12$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
13. Suma czterech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 8, a suma kolejnych czterech jest równa 72. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.
14. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6, a stosunek sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu do sumy kolejnych pięciu wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.
15. Dany jest dziesięciowyrazowy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 341, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 682. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Powtórzenie

16. Oblicz sumę S_5 podanego ciągu geometrycznego.
 a) 2, 8, 32, ... b) -2, -6, -18, ... c) 4, -6, 9, ...
17. Oblicz sumy S_6 i S_7 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
 a) $a_1 = 2, q = -3$ b) $a_1 = 7, q = -1$ c) $a_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$
18. Kartki pocztowe ułożono w stosy. W pierwszym stosie ułożono 4 kartki, a w każdym następnym dwukrotnie więcej kartek niż w poprzednim. Ile kartek było w największym stosie, jeżeli łącznie ułożono:
 a) 60 kartek, b) 1020 kartek, c) 4092 kartki?
19. Pierwszy odcinek łamanej ma długość 64 cm, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Z ilu odcinków składa się ta łamana, jeśli ma ona długość: a) 124 cm, b) 127,5 cm, c) 127,875 cm?

19. Niech n – liczba odcinków łamanej, S_n – długość łamanej.

$$S_n = 64 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

a) $128 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 124$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{32}, n = 5$$

b) $128 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 127,5$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{256}, n = 8$$

c) $128 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 127,875$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1024}, n = 10$$

9. a) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
 b) $a_n = (-1)^n \cdot 3^{n-1}$
 lub $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}$

10. $S_5 = 33, a_1 - a_6 = 99$

$$a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 33$$

$$i \ a_1 (1 - q^5) = 99$$

$$1 - q = 3, \text{ więc } q = -2$$

$$a_1 = 3$$

$$S_{10} = -1023$$

11. a) 0 b) x

12. 381 lub $\frac{2186}{3}$

13.
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 72 \\ a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 8 \\ a_1 q^4(1 + q + q^2 + q^3) = 72 \\ q^4 = 9 \\ q = \sqrt{3}, a_1 = \sqrt{3} - 1 \\ a_5 = 9(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

14. $\frac{6(1+q+q^2+q^3+q^4)}{6q^5(1+q+q^2+q^3+q^4)} = \frac{3}{4}$,
 czyli $a_6 = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8$

15. $a_n = 2^{n-1}$

16. a) 682 b) -242 c) $13\frac{3}{4}$

17. a) $S_6 = -364, S_7 = 1094$

b) $S_6 = 0, S_7 = 7$

c) $S_6 = 60\frac{2}{3}, S_7 = 60\frac{7}{9}$

18. Niech n – liczba stosów, a_n – liczba kartek w n -tym stosie, S_n – liczba wszystkich kartek.

$$S_n = 4 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 4(2^n - 1)$$

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

a) $4(2^n - 1) = 60$

$$2^n = 16$$

$$n = 4$$

$$a_4 = 32$$

b) $4(2^n - 1) = 1020$

$$2^n = 256$$

$$n = 8$$

$$a_8 = 512$$

c) $4(2^n - 1) = 4092$

$$2^n = 1024$$

$$n = 10$$

$$a_{10} = 2048$$

Uczeń:

- stosuje w zadaniach własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Przykład 1

Suma trzech liczb tworzących rosnący ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Rozpatrujemy ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy $r > 0$, dla którego spełnione są warunki:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 12 \\ a_1^2 + (a_1 + r)^2 + (a_1 + 2r)^2 = 56 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $3a_1 + 3r = 12$, czyli $a_1 = 4 - r$.

Podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} (4 - r)^2 + 4^2 + (4 + r)^2 &= 56 \\ 16 - 8r + r^2 + 16 + 16 + 8r + r^2 &= 56 \\ 2r^2 &= 8 \\ r &= -2 \quad \text{lub} \quad r = 2 \end{aligned}$$

Zgodnie z założeniem $r > 0$, czyli $a_1 = 4 - r = 4 - 2 = 2$.

Zatem szukane liczby to 2, 4 i 6.

Przykład 2

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 3, a od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zapisujemy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $a - r$, a , $a + r$. Ich suma:

$$\begin{aligned} a - r + a + a + r &= 21 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Zatem szukane liczby mają postać: $7 - r$, 7 , $7 + r$.

Zgodnie z warunkami zadania liczby $4 - r$, 4 , $6 + r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zatem zachodzi równość:

$$\begin{aligned} 4^2 &= (4 - r)(6 + r) \\ r^2 + 2r - 8 &= 0 \\ r &= -4 \quad \text{lub} \quad r = 2 \end{aligned}$$

Dla $r = -4$ otrzymujemy liczby: 11, 7, 3.

Dla $r = 2$ otrzymujemy liczby: 5, 7, 9.

Multiteka

- Wykres ciągu arytmetycznego i geometrycznego

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.12

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

- a) Suma trzech liczb tworzących malejący ciąg arytmetyczny jest równa 15, a suma ich kwadratów jest równa 93. Wyznacz te liczby.
- b) Liczby a , b , c , których suma jest równa 12, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1$, $b + 2$, $c + 6$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a , b , c .

Zadania

1. a) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu.
- b) Jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 20. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.
2. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) . Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych do sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równy $\frac{9}{8}$. Suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

3. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_5 = 68 \text{ i } a_2 + a_6 = 136$$

Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 2044?

4. W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 11, a suma pięciu ostatnich – jest równa 33. Oblicz iloraz oraz wyrazy pierwszy i szósty tego ciągu.
5. Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1, a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
6. Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.
7. a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
- b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1 , wyrazy pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

6. Niech a_1 , $a_1 + r$, $a_1 + 3r$ – szukane liczby, które tworzą ciąg geometryczny.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r + a_1 + 3r = 28 \\ (a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 3r) \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} a_1 = 9\frac{1}{3} \\ r = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 4 \\ r = 4 \end{cases}$$

Zatem szukane liczby to: $9\frac{1}{3}$, $9\frac{1}{3}$, $9\frac{1}{3}$ lub 4, 8, 16.

7. a) $\frac{4+2r}{4} = \frac{4+6r}{4+2r}$

$$r = 0 \text{ lub } r = 2, S_9 = 36 \text{ lub } S_9 = 108$$

$$\text{b) } \frac{-1+r}{-1} = \frac{-1+4r}{-1+r}$$

$$r = 0 \text{ lub } r = -2, \text{ ale ciąg jest malejący, czyli } r = -2.$$

$$S_6 = -36$$

Ćwiczenie 1

- a) 8, 5, 2

- b) $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$

lub $a = 11$, $b = 4$, $c = -3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $a_6 = a_1 + 5r = 0$

$$S_{11} = \frac{(2a_1+10r) \cdot 11}{2} = \frac{2(a_1+5r) \cdot 11}{2} = 0$$

- b) $a_{11} = a_1 + 10r = 20$

Szukamy sumy:

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{21}$,
która jest sumą 11 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy $2r$, czyli

$$S_{11} = \frac{(2a_1+10 \cdot 2r) \cdot 11}{2} = \frac{2(a_1+10r) \cdot 11}{2} = 220$$

2. $\begin{cases} \frac{a_2+a_4+\dots+a_{20}}{a_1+a_3+\dots+a_{19}} = \frac{9}{8} \\ a_3 + a_7 = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{a_1+10r}{a_1+9r} = \frac{9}{8} \\ 2a_1 + 8r = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$a_n = 2n - 4$$

3. $\begin{cases} a_1 + a_1q^4 = 68 \\ a_1q + a_1q^5 = 136 \\ a_1(1 + q^4) = 68 \\ a_1q(1 + q^4) = 136 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{68}{1+q^4} \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

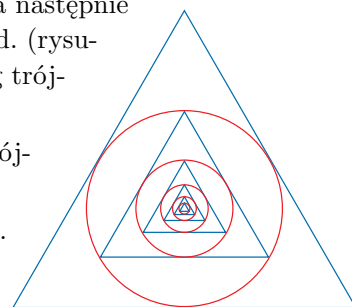
$$2^n = 512, n = 9$$

4. $q = 3$, $a_1 = \frac{1}{11}$, $a_6 = 22\frac{1}{11}$

5. 2, 7, 12 lub 18, 7, -4

8. $b - r, b, b + r$ – ciąg arytmetyczny
 $b - r + b + b + r = 15$, więc
 $b = 5$
 $5 - r, 6, 9 + r$ – ciąg geometryczny
 $\frac{6}{5-r} = \frac{9+r}{6}$
 $r = 3$ lub $r = -6$
Szukane liczby to: 2, 5, 8 lub 11, 5, -1.
9. $b - r, b, b + r$ – ciąg arytmetyczny
 $b - r, b, b + r + 4$ – malejący ciąg geometryczny
 $b - r + b + b + r + 4 = 13$, więc
 $b = 3$
 $3^2 = (3 - r)(7 + r)$ i $r < 0$,
więc $r = -6$
Szukane liczby to: 9, 3, 1.
10. a) 10, 20 lub $-\frac{15}{2}, \frac{45}{4}$
b) 2, 8
11. 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$ lub $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{9}{16}, \frac{15}{16}$
12. a) Niech a_n, a_{n+1} ($n \in \mathbf{N}_+$) – długości boków dwóch kolejnych trójkątów: opisanego na okręgu o promieniu r i wpisanego w ten okrąg. Stąd:
 $r = \frac{a_n \sqrt{3}}{6}$ i $r = \frac{a_{n+1} \sqrt{3}}{3}$
Zatem $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.
Niech (L_n) – ciąg obwodów trójkątów.
 $\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{3a_{n+1}}{3a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$
Zatem ciąg obwodów trójkątów jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $3a_1$ i ilorazie $\frac{1}{2}$.

8. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeśli pierwszą i drugą z tych liczb zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
9. Trzy liczby, których suma jest równa 13, tworzą malejący ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej liczby odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
10. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.
11. Z czterech zapisanych kolejno liczb pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeśli suma pierwszej i ostatniej jest równa 1, a suma drugiej i trzeciej jest równa $\frac{3}{4}$.
12. W trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, a następnie w okrąg wpisujemy trójkąt równoboczny itd. (rysunek obok). Otrzymujemy w ten sposób ciąg trójkątów równobocznych i ciąg okręgów.
- D** a) Uzasadnij, że ciąg obwodów kolejnych trójkątów jest geometryczny. Podaj jego iloraz.
b) Bok największego trójkąta ma długość 4. Oblicz sumę obwodów pięciu największych trójkątów oraz sumę ich pól.



Powtórzenie

13. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów wynosi 56. Wyznacz te liczby.
14. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie ciągiem geometrycznym. Wyznacz te liczby, jeśli suma wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 26.
15. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 52. Jeśli pierwszą i drugą liczbę zostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 16, to otrzymamy kolejne wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

12. b) $L_1 = 3 \cdot 4 = 12$

$$\text{Suma obwodów: } 12 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = 23\frac{1}{4}$$

$$P_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

czyli pola trójkątów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{4}$.

$$\text{Suma pól: } 4\sqrt{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{4})^5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{341}{64}\sqrt{3}$$

13. 2, 4, 6 lub 6, 4, 2
14. -6, 6, 18 lub 10, 6, 2
15. 4, 12, 36

3.13. Procent składany

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym r , wzrośnie po roku do kwoty $k(1+r)$.

Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po trzech latach, a do jakiej po dwudziestu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]

Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$ [zł]

Kwota po 3 latach: $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$ [zł]

Zauważ, że w kolejnych latach doliczane są odsetki w wysokości 6% do kapitału powiększonego o odsetki z poprzednich lat.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że każdego roku do każdej złotówki bank dopisuje 6% odsetek, czyli co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

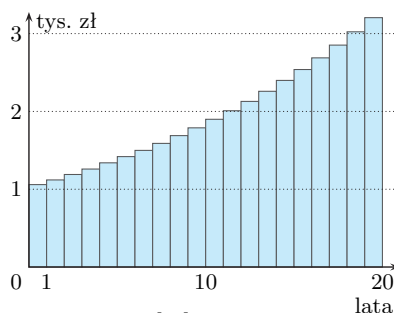
po roku: $k \cdot 1,06$

po 2 latach: $k \cdot (1,06)^2$

po 3 latach: $k \cdot (1,06)^3$

⋮

po 20 latach: $k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$ [zł]



Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r , po n latach wzrośnie do kwoty $k(1+r)^n$.

Ćwiczenie 1

Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r ?

a) $n = 5$, $r = 4,5\%$

b) $n = 8$, $r = 5,5\%$

c) $n = 10$, $r = 3\%$

Ćwiczenie 1

a) $5000 \cdot (1 + 0,045)^5 \approx 6230,91$ [zł]

b) $5000 \cdot (1 + 0,055)^8 \approx 7673,43$ [zł]

c) $5000 \cdot (1 + 0,03)^{10} \approx 6719,58$ [zł]

Uczeń:

- oblicza wysokość kapitału przy różnych okresach kapitalizacji,
- oblicza wysokość kapitału na lokacie systematycznego oszczędzania,
- oblicza oprocentowanie lokaty,
- ustala okres oszczędzania,
- rozwiązuje zadania związane z kredytami.

Komentarz

Warto się upewnić, czy uczniowie dobrze rozumieją, że oprocentowanie $r = 6\%$ oznacza $r = \frac{6}{100}$ i nie będą podstawiać za r liczby 6.

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Do jakiej kwoty wzrósłby ten kapitał po trzech latach, gdyby odsetki nie były opodatkowane, a do jakiej – gdyby od naliczanych odsetek pobierany był co roku podatek w wysokości 20%?

Jeśli odsetki nie byłyby opodatkowane, to oszczędności po trzech latach wyniosłyby:

$$5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25 \text{ [zł]}$$

Jeśli od naliczanych odsetek byłby pobierany podatek, to odsetki te byłyby pomniejszane o 20%, zatem w pierwszym roku wpłacona kwota wzrosłaby o:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku o:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach kapitał wzrósłby do:

$$5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58 \text{ [zł]}$$

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek płaci się tylko od dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat przy oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wysokość dopisanych odsetek. Jak zmieni się wielkość kapitału, jeśli od odsetek naliczany jest podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał w wysokości 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja odsetek była roczna, od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku, a oprocentowanie:

- w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,
- w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,
- w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Ćwiczenie 2

$$5000 \cdot (1 + 0,05)^{10} \approx 8144,47 \text{ [zł]}$$

$$\text{Odsetki: } 8144,47 - 5000 = 3144,47 \text{ [zł]}$$

$$5000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 0,8)^{10} \approx 7401,22 \text{ [zł]}$$

$$\text{Różnica kapitału: } 8144,47 - 7401,22 = 743,25 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } 800 \cdot 1,08^2 \cdot 1,04^3 \approx 1049,63 \text{ [zł]}$$

$$\text{Po opodatkowaniu: } 800 \cdot (1,064)^2 \cdot (1,032)^3 \approx 995,43 \text{ [zł]}$$

$$\text{b) } 800 \cdot 1,04^3 \cdot 1,08^2 \approx 1049,63 \text{ [zł]}$$

$$\text{Po opodatkowaniu: } 800 \cdot (1,032)^3 \cdot (1,064)^2 \approx 995,43 \text{ [zł]}$$

$$\text{c) } 800 \cdot 1,07^2 \cdot 1,05^2 \cdot 1,02 \approx 1030 \text{ [zł]}$$

$$\text{Po opodatkowaniu: } 800 \cdot (1,056)^2 \cdot (1,04)^2 \cdot 1,016 \approx 980,34 \text{ [zł]}$$

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli dopisywane są co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

Twierdzenie

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym r i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wzrośnie do:

$$k \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A , B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: w banku A – co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wyniesie:

w banku A : $1000 \cdot (1 + 0,06) = 1060$ [zł],

w banku B : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 \approx 1000 \cdot 1,06136 = 1061,36$ [zł],

w banku C : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} \approx 1000 \cdot 1,06168 = 1061,68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, 61,36 zł i 61,68 zł. Kapitał wzrośnie więc: w banku A – o 6%, w banku B – o $\frac{61,36}{1000} = 0,06136 \approx 6,14\%$, a w banku C – o $\frac{61,68}{1000} = 0,06168 \approx 6,17\%$.

Roczną stopę procentową r taką, że odsetki w wysokości $\frac{r}{m}$ kapitalizowane są m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa p , przy której odsetki kapitalizowane są raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Ćwiczenie 4

Bank X oferuje kapitalizację półroczną przy rocznej stopie 8%, a bank Y – kapitalizację kwartalną przy rocznej stopie r . Dla jakiej wartości stopy r oprocentowanie w skali roku jest w obu bankach najbardziej zbliżone?

A. $r = 4\%$

B. $r = 7,92\%$

C. $r = 8\%$

Ćwiczenie 4

$$p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

$$p_X = \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^2 - 1 = 0,0816$$

$$\text{A. } p_Y = \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,0406$$

$$\text{B. } p_Y = \left(1 + \frac{0,0792}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,0816$$

$$\text{C. } p_Y = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,0824$$

Dla $r = 7,92\%$.

Ćwiczenie 5

a) $10000(1 + 0,04)^5 \approx$

$\approx 12166,53$ [zł]

b) $10000 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{10} \approx$

$\approx 12189,94$ [zł]

c) $10000 \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{20} \approx$

$\approx 12201,90$ [zł]

d) $10000 \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{60} \approx$

$\approx 12209,97$ [zł]

Ćwiczenie 6

$200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-(1,05)^{10}}{1-1,05} \approx$

$\approx 2641,36$ [zł]

Ćwiczenie 8

$\frac{0,06}{12} = 0,005$

a) $(60 - 25) \cdot 12 = 420$ okresów kapitalizacji

$100 \cdot 1,005 \cdot \frac{1-1,005^{420}}{1-1,005} \approx$

$\approx 143183,39$ [zł]

b) $(65 - 25) \cdot 12 = 480$ okresów kapitalizacji

$100 \cdot 1,005 \cdot \frac{1-1,005^{480}}{1-1,005} \approx$

$\approx 200144,82$ [zł]

c) $(67 - 25) \cdot 12 = 504$ okresy kapitalizacji

$100 \cdot 1,005 \cdot \frac{1-1,005^{504}}{1-1,005} \approx$

$\approx 228151,10$ [zł]

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane:

- a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał, d) co miesiąc.

Ćwiczenie 6

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rodzice założyli konto trzynastoletniej córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje co rok. Jaką kwotę będzie miała na koncie ich córka w wieku 18 lat?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$200 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 200 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05 =$$

$$= 200(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) =$$

Korzystamy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego.

$$= 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-(1,05)^5}{1-1,05} \approx 1160,38 \text{ [zł]}$$

Jaka kwota byłaby na koncie opisanym w powyższym przykładzie, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 7

a) Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co rok. Jakie środki zostaną zgromadzone na koncie pani Ani po 8 latach, a jakie – po 20 latach oszczędzania?

b) Jaki kapitał znajdzie się na koncie osiemnastolatka, jeżeli rodzice, począwszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku co rok 300 zł? Oprocentowanie wynosiło 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Pawła, gdy będzie on w wieku: a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?

Ćwiczenie 7

a) Po 8 latach:

$$500 \cdot 1,04^8 + 500 \cdot 1,04^7 + \dots + 500 \cdot 1,04 = 500(1,04 + \dots + 1,04^7 + 1,04^8) =$$

$$= 500 \cdot 1,04 \cdot \frac{1-1,04^8}{1-1,04} \approx 4791,40 \text{ [zł]}$$

Po 20 latach:

$$500 \cdot 1,04^{20} + 500 \cdot 1,04^{19} + \dots + 500 \cdot 1,04 = 500(1,04 + \dots + 1,04^{19} + 1,04^{20}) =$$

$$= 500 \cdot 1,04 \cdot \frac{1-1,04^{20}}{1-1,04} \approx 15484,60 \text{ [zł]}$$

b) $\frac{0,06}{12} = 0,005$

$$300 \cdot 1,005^{18 \cdot 12} + 300 \cdot 1,005^{17 \cdot 12} + \dots + 300 \cdot 1,005^{12} =$$

$$= 300 \left[1,005^{12} + (1,005^{12})^2 + (1,005^{12})^3 + \dots + (1,005^{12})^{18} \right] =$$

$$= 300 \cdot 1,005^{12} \cdot \frac{1-(1,005^{12})^{18}}{1-1,005^{12}} \approx 10001,43 \text{ [zł]}$$

Zadania

- Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
a) $n = 2$, $r = 5\%$ b) $n = 5$, $r = 5\%$ c) $n = 10$, $r = 3\%$
 - Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło:
a) w pierwszym roku 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
b) w pierwszym roku 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
 - Oprocentowanie lokat w banku A wynosiło w kolejnych czterech latach 9%, 8%, 7% i 6%. Stopa procentowa w banku B była w tym czasie stała i wynosiła r . Oblicz r , jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie opłacalne i oba banki kapitalizowały odsetki rocznie.
 - Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co rok? Jaką kwotę należałoby wpłacić, aby uzyskać taki sam kapitał końcowy po trzech latach?
 - Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane: a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
 - Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli wiadomo, że firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?
 - Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie chłopiec ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k zł? Do jakiej kwoty wzrośnie ten kapitał na koniec okresu oszczędzania?
 - Kuba zamierza kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansuje ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych ma Kuba, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosi 8% w skali roku?
5. a) $3000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^{2 \cdot 3} \approx 3582,16$ [zł]
b) $3000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4 \cdot 3} \approx 3586,85$ [zł]
c) $3000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 3} \approx 3590,04$ [zł]
d) $3000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{365}\right)^{365 \cdot 3} \approx 3591,60$ [zł] przy założeniu, że rok nie jest przestępny

Odpowiedzi do zadań

- a) $2000 \cdot (1 + 0,05)^2 = 2205$ [zł]
b) $2000 \cdot 1,05^5 \approx 2552,56$ [zł]
c) $2000 \cdot 1,03^{10} \approx 2687,83$ [zł]
- a) $600 \cdot 1,06 \cdot 1,055 \cdot 1,04^3 \approx 754,76$ [zł]
b) $600 \cdot 1,055 \cdot 1,04^3 \cdot 1,06 \approx 754,76$ [zł]
- k – wpłacony kapitał
Bank A : $k \cdot 1,09 \cdot 1,08 \cdot 1,07 \cdot 1,06$
Bank B : $k \cdot (1 + r)^4$
 $(1 + r)^4 = 1,09 \cdot 1,08 \cdot 1,07 \cdot 1,06$
 $r \approx 7,5\%$
- k – kapitał
Po 5 latach: $k \cdot 1,04^5 = 1217$,
czyli $k \approx 1000$ [zł]
Po 3 latach: $k \cdot 1,04^3 = 1217$,
czyli $k \approx 1082$ [zł]
- $10000 \cdot 1,1^n = 13310$
 $n = 3$
- $k \cdot 1,05^9 = 7757$
 $k \approx 5000$ zł
Po 18 latach:
 $5000 \cdot 1,05^{18} \approx 12033,10$ [zł]
- k – wysokość kredytu
 $k \cdot 0,08 = 1200$, czyli
 $k = 15000$ [zł]
Środki własne:
 $40000 - 15000 = 25000$ [zł]

9. a) $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot n} = 2000$
 $1,005^{12n} = 2$
 $\log 1,005^{12n} = \log 2$
 $n = \frac{\log 2}{12 \log 1,005} \approx 11,58$
 Kapitał podwoi się po 12 latach.
 b) $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12 \cdot n} = 2000$
 $1,0025^{12n} = 2$
 $\log 1,0025^{12n} = \log 2$
 $n = \frac{\log 2}{12 \log 1,0025} \approx 23,17$
 Kapitał podwoi się po 24 latach.

11. a) $4000 \cdot (1 + 0,04)^2 =$
 $= 4326,40$ [zł]
 b) $4000 \cdot 1,03^5 \approx 4637,10$ [zł]
 c) $4000 \cdot 1,04^{10} \approx 5920,98$ [zł]

12. Zysk w ciągu 5 lat:
 $50000 \cdot (1,06^5 - 1,05^5) \approx$
 $\approx 3097,20$ [zł]
 Zysk w ciągu 10 lat:
 $50000 \cdot (1,06^{10} - 1,05^{10}) \approx$
 $\approx 8097,65$ [zł]

13. k – kapitał
 Bank A:
 $k \cdot \left(1 + \frac{0,0544}{12}\right)^{12 \cdot 2} \approx 1,1147k$
 Bank B:
 $k \cdot \left(1 + \frac{0,055}{4}\right)^{4 \cdot 2} \approx 1,1154k$
 Bank C:
 $k \cdot \left(1 + \frac{0,056}{2}\right)^{2 \cdot 2} \approx 1,1168k$
 Bank D:
 $k \cdot (1 + 0,0565)^2 \approx 1,1162k$
 Najkorzystniejsze warunki oferuje bank C.

9. Kapitał w wysokości 1000 zł wpłacono do banku na lokatę z miesięczną kapitalizacją odsetek. Po ilu latach kapitał ten się podwoi, jeżeli wiadomo, że oprocentowanie w skali roku wynosi: a) 6%, b) 3%?
10. Pan Lech na budowę domu zaciągnął kredyt w wysokości 100 000 zł, oprocentowany 10% w skali roku. Kredyt będzie spłacany w równych ratach po 30 000 zł na koniec każdego roku, przy czym ostatnia rata może być mniejsza. Odsetki naliczane są rocznie tylko od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono sposób obliczania stanu zadłużenia po kolejnych latach.

Rok	Doliczone odsetki	Stan zadłużenia
1.	$0,1 \cdot 100\,000 = 10\,000$	$100\,000 + 10\,000 - 30\,000 = 80\,000$
2.	$0,1 \cdot 80\,000 = 8000$	$80\,000 + 8000 - 30\,000 = 58\,000$
3.	$0,1 \cdot 58\,000 = 5800$	$58\,000 + 5800 - 30\,000 = 33\,800$
4.	$0,1 \cdot 33\,800 = 3380$	$33\,800 + 3380 - 30\,000 = 7180$
5.	$0,1 \cdot 7180 = 718$	$7180 + 718 - 7898 = 0$

Zatem łącznie trzeba spłacić $4 \cdot 30\,000 + 7898 = 127\,898$ [zł].

a) Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu w wysokości 100 000 zł, oprocentowanego 20% w skali roku, spłacanego na tych samych zasadach co kredyt pana Lecha. Jaką kwotę trzeba łącznie spłacić?

b) Ile czasu trwałoby spłacanie takiego kredytu, gdyby oprocentowanie wynosiło 25% w skali roku?

Powtórzenie

11. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 4000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
- a) $n = 2$, $r = 4\%$ b) $n = 5$, $r = 3\%$ c) $n = 10$, $r = 4\%$
12. Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie, a następnie pożyczył ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?
13. Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:
 bank A – 5,44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
 bank B – 5,5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
 bank C – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
 bank D – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
 Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

10. a)

Rok	Doliczone odsetki	Stan zadłużenia
1.	$0,2 \cdot 100\,000 = 20\,000$	$100\,000 + 20\,000 - 30\,000 = 90\,000$
2.	$0,2 \cdot 90\,000 = 18\,000$	$90\,000 + 18\,000 - 30\,000 = 78\,000$
3.	$0,2 \cdot 78\,000 = 15\,600$	$78\,000 + 15\,600 - 30\,000 = 63\,600$
4.	$0,2 \cdot 63\,600 = 12\,720$	$63\,600 + 12\,720 - 30\,000 = 46\,320$
5.	$0,2 \cdot 46\,320 = 9\,264$	$46\,320 + 9\,264 - 30\,000 = 25\,584$
6.	$0,2 \cdot 25\,584 = 5\,116,80$	$25\,584 + 5\,116,80 - 30\,000 = 700,80$
7.	$0,2 \cdot 700,80 = 140,16$	$700,80 + 140,16 - 840,96 = 0$

Łącznie trzeba spłacić 180 840,96 zł. b) 9 lat

3.14. Zagadnienia uzupełniające

■ Średnia arytmetyczna i średnia geometryczna

Rozpatrzmy liczby nieujemne x i y . Między średnią arytmetyczną tych liczb $S_A = \frac{x+y}{2}$ a ich średnią geometryczną $S_G = \sqrt{xy}$ zachodzi zależność:

$$S_G \leq S_A$$

Aby udowodnić tę nierówność, przekształcamy ją równoważnie:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Obie strony nierówności są nieujemne.

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$$

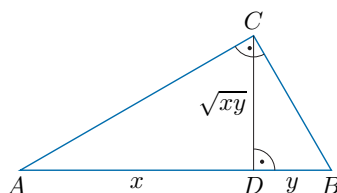
$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$0 \leq (x - y)^2$$

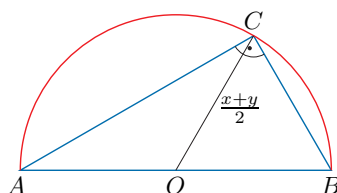
Ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa, zatem udowodniliśmy nierówność wyjściową dla dowolnych nieujemnych liczb x i y .

Nierówność $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ można również udowodnić geometrycznie, rozważając odpowiednie odcinki w trójkącie prostokątnym.

- D** 1. a) Uzasadnij, że wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie dzieli ona przeciwprostokątną (skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów).

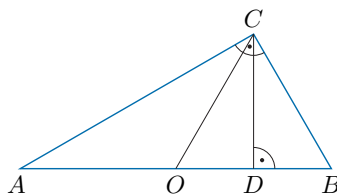


- b) Uzasadnij, że jeśli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość $x + y$, to odcinek łączący środek przeciwprostokątnej z wierzchołkiem kąta prostego tego trójkąta ma długość $\frac{x+y}{2}$.



- c) Punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC , punkt D – spodkiem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Uzasadnij, że zachodzi nierówność:

$$|CD| \leq |CO|$$



Odpowiedzi do zadań

1. a) Niech $|CD| = h$.

Zauważmy, że trójkąty ADC i CDB są podobne (cecha KKK), zatem:

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|CD|}{|DB|}, \text{ czyli } \frac{x}{h} = \frac{h}{y}$$

Stąd $h^2 = xy$, zatem $h = \sqrt{xy}$.

- b) Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej, czyli:

$$|OC| = |OA| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{x+y}{2}$$

- c) W trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest jego przeciwprostokątna. Zauważmy, że trójkąt CDO jest prostokątny, a bok CO jest jego przeciwprostokątną i wtedy $|CD| < |CO|$. Jeżeli trójkąt ABC jest równoramienny, to $|CD| = |CO|$. Zatem $|CD| \leq |CO|$.

■ Wykres ciągu geometrycznego

Wykres ciągu geometrycznego:

$$q, q^2, q^3, \dots$$

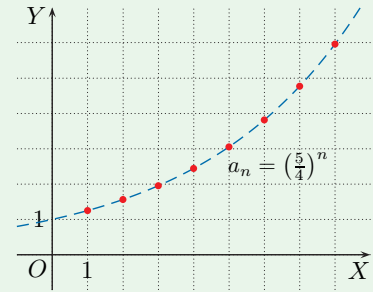
jest zawarty w wykresie funkcji wykładniczej $y = q^x$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Ogólnie, wykres ciągu geometrycznego:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

jest zawarty w wykresie funkcji $y = aq^{x-1}$.



2. a) $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 24; q = 2$

b) $a_1 = 6, a_2 = 2, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{2}{9}; q = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{16}; q = \frac{1}{4}$

d) $a_1 = \frac{1}{16}, a_2 = \frac{1}{8}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{2}; q = 2$

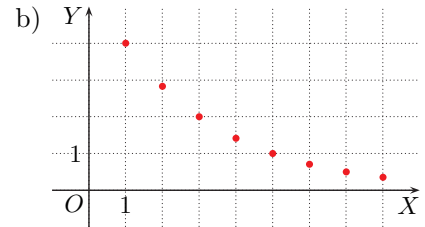
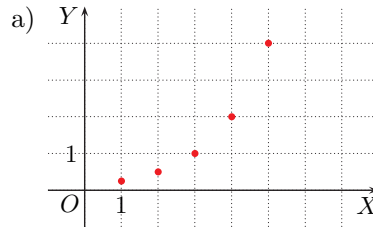
3. a) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-1}$

b) $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1}$

2. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, którego wykres jest zawarty w wykresie funkcji f . Podaj iloraz tego ciągu.

a) $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$ b) $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ c) $f(x) = \frac{16}{4^x}$ d) $f(x) = 2^{x-5}$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres ciągu geometrycznego (a_n) . Zapisz w postaci $f(x) = a \cdot q^{x-1}$ wzór funkcji, w której wykresie jest zawarty wykres tego ciągu.

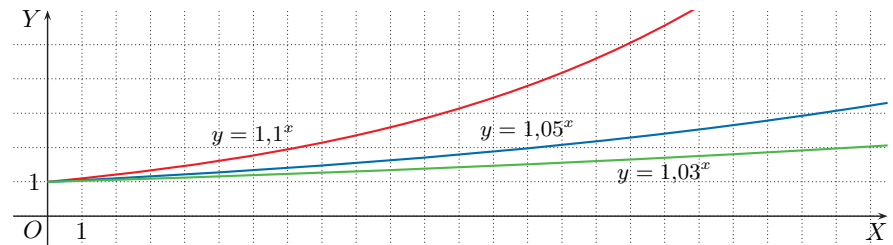


4. a) 24 b) 14 c) 7



4. Podaj przybliżoną liczbę lat, po której nastąpi podwojenie kwoty złożonej na lokatę bankową z kapitalizacją roczną o oprocentowaniu w skali roku: a) 3%, b) 5%, c) 10%.

Skorzystaj z wykresów przedstawionych poniżej.



Sprawdź otrzymane wyniki, korzystając z kalkulatora.

■ Ciągi liczb całkowitych

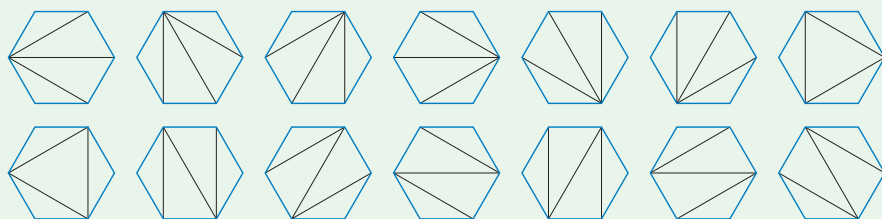
Ponad pięćdziesiąt lat temu amerykański matematyk Neil Sloane [czyt. nil słohn] stworzył katalog ciągów liczb całkowitych obecnie funkcjonujący jako **Encyklopedia ciągów liczb całkowitych w wersji on-line** (oeis.org). Opisanych jest w niej ponad ćwierć miliona różnych ciągów. Aby znaleźć informacje o ciągu, należy podać jego numer w katalogu, nazwę lub początkowe wyrazy. Na przykład:

- pod numerem A000045 znajduje się ciąg Fibonacciego (patrz str. 124),
- pod numerem A000108 znajduje się ciąg liczb Catalana [czyt. katalana]:
1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

Ciąg liczb Catalana określony jest wzorem $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Zatem:

$$c_1 = \frac{2!}{2!1!} = 1, c_2 = \frac{4!}{3!2!} = 2, c_3 = \frac{6!}{4!3!} = 5, c_4 = \frac{8!}{5!4!} = 14, \dots$$

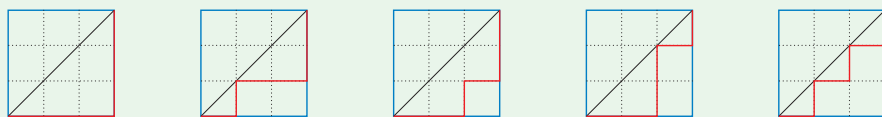
Ciąg ten ma wiele interpretacji geometrycznych, np. dla $(n+2)$ -kąta wypukłego liczba jego możliwych podziałów na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi jest równa n -tej liczbie Catalana. Dla sześciokąta istnieje 14 takich podziałów:



Rozważmy teraz kwadrat o wymiarach $n \times n$ z siatką całkowitą, jak na rysunku poniżej, oraz drogi prowadzące z lewego dolnego rogu tego kwadratu do jego prawego górnego rogu spełniające warunki:

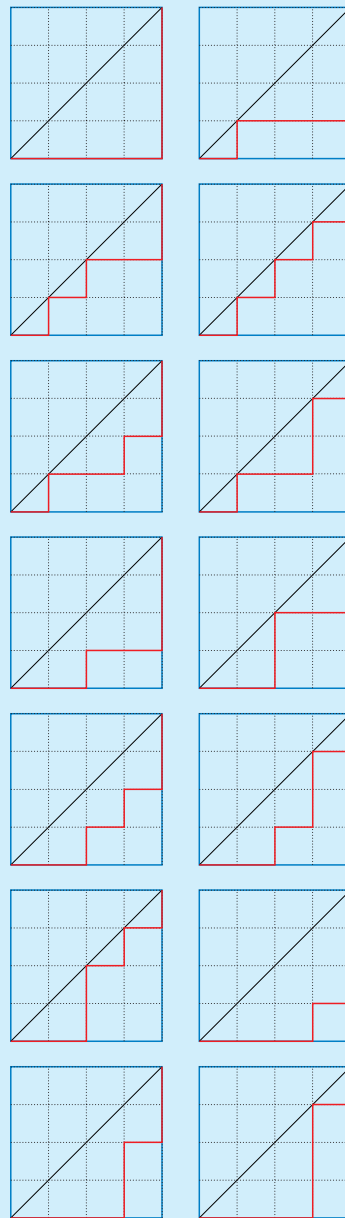
- poruszamy się po siatce całkowitej w prawo albo w górę,
- nie przechodzimy nad przekątną kwadratu.

Okazuje się, że liczba takich dróg jest n -tą liczbą Catalana. Na poniższych rysunkach przedstawiono wszystkie możliwe drogi dla $n = 3$ ($c_3 = 5$).



5. Narysuj odpowiednie rysunki i sprawdź, czy dla kwadratu 4×4 istnieje $c_4 = 14$ różnych dróg spełniających warunki opisane wyżej.

5.



Odpowiedzi do zadań

- $21 - 24 = -3$
 - $-\frac{1}{2} - (-\frac{7}{2}) = 3$
 - $\frac{105}{10} - \frac{32}{64} = 10$
 - $-2 - 4 = -6$
- $4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1 = -4$
 - $4 \cdot (-1) - 6 \cdot \frac{1}{2} = -7$
- $b_{n+1} - b_n = 1 > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (b_n) jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.
 - $b_{n+1} - b_n = 2n + 1 > 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym, ale jest rosnący.
 - $r = b_{n+1} - b_n = -2 < 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (b_n) jest malejącym ciągiem arytmetycznym.
 - $b_{n+1} - b_n = \frac{-3}{n(n+1)} < 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym, ale jest malejący.
 - $b_{n+1} - b_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym, ale jest malejący.
 - $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2} < 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (b_n) jest malejącym ciągiem arytmetycznym.
- $a_6 = 12, a_9 = 18$
 - $a_6 = -30, a_9 = -45$
 - $a_6 = 8, a_9 = 11$
 - $a_6 = -5, a_9 = -11$
 - $a_6 = 50, a_9 = 80$
 - $a_6 = 5\frac{1}{2}, a_9 = 4$
- $a_n = 2n - 2, a_8 = 14$
 - $a_n = 3n - 6, a_8 = 18$
 - $a_n = -2n + 10, a_8 = -6$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz $a_{10} - b_8$.
 - $a_n = 2n + 1, b_n = 3n$
 - $a_n = \frac{8-n}{4}, b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$
 - $a_n = \frac{n^2+5}{n}, b_n = \frac{5n-8}{n^2}$
 - $a_n = \sqrt[3]{2-n}, b_n = n^{\frac{2}{3}}$
- Oblicz $4a_2 - 6b_4$.
 - $a_n = \log_4 n, b_n = \log_5(2n - 3)$
 - $a_n = (-1)^{n^2-1}, b_n = (\sqrt{2})^{n-6}$
- Czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym? Określ jego monotoniczność.
 - $b_n = n + 1$
 - $b_n = n^2$
 - $b_n = -2n + 3$
 - $b_n = \frac{n+3}{n}$
 - $b_n = \frac{1}{n}$
 - $b_n = 4 - \frac{n}{2}$
- Oblicz wyrazy a_6 i a_9 ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
 - $a_1 = 2, r = 2$
 - $a_1 = -5, r = -5$
 - $a_1 = 3, r = 1$
 - $a_1 = 5, r = -2$
 - $a_1 = 0, r = 10$
 - $a_1 = 8, r = -\frac{1}{2}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz wyraz a_8 .
 - $a_2 = 2, a_4 = 6$
 - $a_2 = 0, a_5 = 9$
 - $a_4 = 2, a_{10} = -10$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 \cdot a_2 = 10 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 32 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 6 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$
- Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_1 = 2, a_{10} = 29$
 - $a_1 = 3, r = 2$
 - $a_2 = 5, a_{10} = 21$
 - $a_2 = -8, r = 3$
 - $a_1 = 16, S_4 = 52$
 - $a_3 = -4, S_{10} = -15$
- Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_1 = \frac{1}{3}, a_{100} = \frac{2}{3}$
 - $a_{10} = -1, a_{100} = -11$
 - $a_1 = 5, a_{99} + a_{101} = 150$
 - $a_3 + a_6 = 4\frac{1}{2}, a_{10} - a_4 = 3$
- Kula tocząca się po równi pochyłej w pierwszej sekundzie przebyła drogę 0,5 m, a w każdej następnej sekundzie – drogę o 1 m dłuższą niż w poprzedniej. Oblicz drogę, którą przebyła kula w ciągu początkowych dziesięciu sekund.

- $a_n = 3n - 1$ lub $a_n = -3n + 8$
 - $a_n = 2n - 12$ lub $a_n = 2n$
 - $a_n = n + 1$ lub $a_n = 5n - 11$
- a) 222 b) 168 c) 168
d) 66 e) 60 f) -6
- a) 50 b) -550 c) 4000 d) 2525
- $a_1 = 0,5, r = 1$
 $S_{10} = \frac{(2 \cdot 0,5 + 9 \cdot 1) \cdot 10}{2} = 50$ [m]

- D** 10. Oblicz wyrazy a_1 , a_2 , a_3 i a_8 ciągu $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.
11. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.
 a) $b_n = 2^{-n}$ b) $b_n = 3 \cdot 5^n$ c) $b_n = 2^{3n-1}$
12. Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n) .
 a) $a_1 = 3$, $q = 2$ b) $a_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$ c) $a_2 = -25$, $a_3 = 5$
13. Oblicz wyraz a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
 a) $a_1 = 2$, $a_4 = 250$ b) $a_1 = 64$, $a_6 = 2$
14. Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
 a) $a_6 = 100$, $q = 10$ c) $a_4 = 1$, $a_3 \cdot a_4 = 3$
 b) $a_2 = 4$, $a_7 = 128$ d) $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 = -8a_6$
15. Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
 a) $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$ c) $a_1 = 1$, $a_2 + a_3 = 20$
 b) $a_1 = -10$, $q = -\frac{1}{2}$ d) $a_1 = -4$, $S_3 = -12$
16. Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu $a_1 = 9$, a iloraz $q = 4$. Ile wyrazów ma ten ciąg?
17. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 192?
18. Który z ciągów ma większy czwarty wyraz?

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = (b_n)^2 - n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$
19. Oblicz $2a_5 - b_7$.
 a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (-2)^n \cdot a_n \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = b_n - (-1)^n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
20. Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n) .
 a) $a_n = n^2 - 3n + 1$ b) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ c) $a_n = \log n$

20. a) np. $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2(n-1) \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 b) np. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n^2+n} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 c) np. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \log \frac{n+1}{n} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

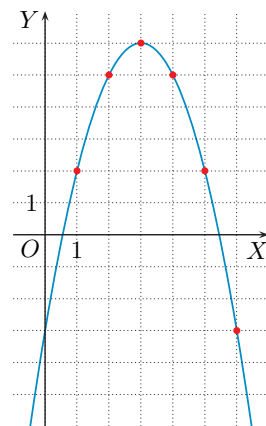
10. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 20$,
 $a_8 = 240$
 $n(n+1)(n+2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, zatem jeden z czynników jest liczbą podzielną przez 3, czyli $a_n \in \mathbb{N}_+$.
11. a), b), c) ciąg geometryczny
 a) ciąg malejący
 b), c) ciąg rosnący
12. a) 24, 48, 96, 192, 384
 b) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{32}$
 c) -1 , $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $-\frac{1}{625}$
13. a) 1250 b) 4
14. a) $a_3 = \frac{1}{10}$, $a_5 = 10$
 b) $a_3 = 8$, $a_5 = 32$
 c) $a_3 = 3$, $a_5 = \frac{1}{3}$
 d) $a_3 = 2$, $a_5 = \frac{1}{2}$
 lub $a_3 = a_5 = 0$
15. a) $\frac{93}{16}$ b) $-\frac{55}{8}$
 c) 341 lub 521
 d) -44 lub -20
16. $9 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 765$
 $4^n = 256$
 $n = 4$
17. $\begin{cases} a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 21 \\ a_1 q^3 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 168 \end{cases}$
 $q^3 = 8$, czyli $q = 2$ oraz $a_1 = 3$
 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} = 192$ dla $n = 7$
18. $a_4 = 26$ i $b_4 = 46$,
 czyli $b_4 > a_4$
19. a) 1024 b) $60\frac{1}{7}$

Zestaw II

- a), c), d) malejący
b) rosnący
- a) $a_{n+1} - a_n = 1 > 0$
dla $n \geq 1$, więc ciąg jest rosnący.
b) $a_{n+1} - a_n = -2 < 0$
dla $n \geq 1$, więc ciąg jest malejący.
c) $a_1 = 1 > a_2 = 0 < a_3 = 1 > a_4 = 0$, więc ciąg nie jest monotoniczny.
d) $a_1 = 2 > 0$
i $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1$ dla $n \geq 1$,
więc ciąg jest rosnący.
- $a_n = -n^2 + 6n - 3$,
 $a_n \leq -18$ dla $n \geq 8$
- $a_n = \frac{1}{3}n^2 - 2n$, $a_9 = 9$,
 $a_{18} = 72$
- a) 165150 b) 82350
- a) $a_1 = 11$, $a_n = 99$
 $99 = 11 + (n-1) \cdot 4$,
czyli $n = 23$
 $S_{23} = \frac{(11+99) \cdot 23}{2} = 1265$
b) $a_1 = 16$, $a_n = 93$
 $93 = 16 + (n-1) \cdot 7$,
czyli $n = 12$
 $S_{12} = \frac{(16+93) \cdot 12}{2} = 654$
- a) $x = 3 + 2(n-1) > 0$
Stąd $n = \frac{x-1}{2}$.
 $\frac{3+x}{2} \cdot \frac{x-1}{2} = 48$
Zatem $x = 13$.
b) $x = -30$
c) $x = 37$
d) $x = 29$
- a) $\frac{x+1}{3} - (x-2) = 5x - \frac{x+1}{3}$
 $x = \frac{1}{2}$
b) $3x + 16 = x^2 - 3x$
 $x^2 - 6x - 16 = 0$
 $x = -2$ lub $x = 8$

Zestaw II

- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = \frac{-n+2}{3}$ b) $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$ c) $a_n = \frac{2n^2+1}{2n^2}$ d) $a_n = \frac{5-3n}{2n+1}$
- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeżeli jego wykres jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq -18$?
- Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(3, -3)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_9 i a_{18} .
- Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych dodatnich, które są:
a) podzielne przez 3, b) podzielne przez 6.
- Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 5, które:
a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe.
- Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez k jest równa r .
a) $k = 4$, $r = 3$ b) $k = 7$, $r = 2$
- Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .
a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \dots + x = 156$
b) $8 + 6 + 4 + \dots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \dots + x = 110$
- Dla jakich wartości x liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?
a) $a = x - 2$, $b = \frac{x+1}{3}$, $c = 5x$ b) $a = -16$, $b = 3x$, $c = x^2$



- a) Niech S – suma wszystkich liczb dwucyfrowych,
 T – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5, $(S - T)$ – szukana suma.
 $S = 10 + 11 + \dots + 99 = \frac{(10+99) \cdot 90}{2} = 4905$
 $T = 10 + 15 + 20 + \dots + 95 = 5 \cdot (2 + 3 + \dots + 19) = 5 \cdot \frac{(2+19) \cdot 18}{2} = 945$
 $S - T = 4905 - 945 = 3960$
b) Niech S – suma wszystkich liczb trzycyfrowych,
 T – suma liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, $(S - T)$ – szukana suma.
 $S = 100 + 101 + \dots + 999 = \frac{(100+999) \cdot 900}{2} = 494550$
 $T = 100 + 105 + \dots + 995 = 5 \cdot (20 + 21 + \dots + 199) = 5 \cdot \frac{(20+199) \cdot 180}{2} = 98550$
 $S - T = 494550 - 98550 = 396000$

D 10. Uzasadnij, że jeśli liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to jest to ciąg stały.

11. a) Trzy liczby, których suma jest równa 6, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

b) Trzy liczby, których suma jest równa 7, tworzą ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

12. a) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma pierwszego, drugiego i piątego wyrazu tego ciągu jest równa 27, natomiast liczby $a_1 - 1, a_2 - 1$ i $a_5 - 4$ tworzą rosnący ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

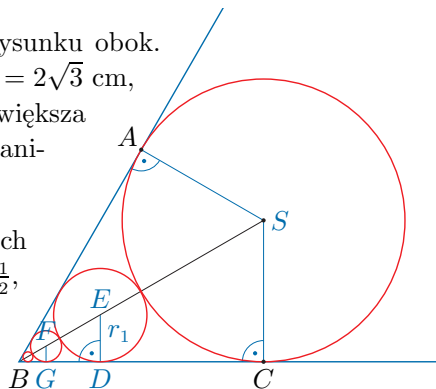
b) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma pierwszego, drugiego i czwartego wyrazu tego ciągu jest równa 40, natomiast liczby $a_1, a_2 - 1$ i a_4 tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

13. Suma trzech wyrazów a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 0. Jeśli do pierwszego wyrazu dodamy 1, do drugiego dodamy 2, a od trzeciego odejmiemy 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz a_1, a_2, a_3 .

D 14. Cztery okręgi położone są jak na rysunku obok.

Wykaż, że jeśli $\angle ABC = 60^\circ$ i $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm, to suma długości tych okręgów jest większa od 18,6 cm. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami.

15. Pola pięciu trójkątów równobocznych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a suma tych pól jest równa $31\sqrt{3}$. Oblicz obwód największego spośród tych trójkątów.



16. Kapitał w wysokości 800 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wysokość kapitału po roku, jeśli przez sześć pierwszych miesięcy roczna stopa procentowa wynosiła:

- a)** 6%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 3%,
b) 3%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 6%.

14. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zauważmy, że trójkąty $\triangle BCS, \triangle BDE, \triangle BGF$ i $\triangle BHI$ są podobne (z cechy KKK) oraz $|CS| = 2$ i $|BS| = 4$.

Zatem:

$$\frac{2}{|DE|} = \frac{4}{4-2|DE|}, \text{ czyli } |DE| = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{|GF|} = \frac{4}{4-2|DE|-|GF|}, \text{ czyli } |GF| = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{|HI|} = \frac{4}{4-2|DE|-2|GF|-|HI|}, \text{ czyli } |HI| = \frac{2}{27}$$

Suma długości okręgów:

$$2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot \frac{2}{3} + 2\pi \cdot \frac{2}{9} + 2\pi \cdot \frac{2}{27} = 4\pi \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{160\pi}{27} \approx 18,62 > 18,6 \text{ [cm]}$$

$$\text{Suma pól kół: } \pi \cdot 2^2 + \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \pi \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \pi \left(\frac{2}{27}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1-(\frac{1}{9})^4}{1-\frac{1}{9}} = 4 \frac{364}{729} \pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

10. Niech a, b, c – ciąg arytmetyczny i geometryczny, r – różnica ciągu arytmetycznego.

Wówczas $b = a + r, c = a + 2r$ oraz $b^2 = ac$. Po podstawieniu otrzymujemy:

$$(a + r)^2 = a \cdot (a + 2r)$$

Stąd $r = 0$, czyli ciąg jest stały.

11. a) 1, 2, 3 lub 4, 2, 0

b) 1, 2, 4 lub 4, 2, 1

$$\text{12. a) } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_5 = 27 \\ \frac{a_2-1}{a_1-1} = \frac{a_5-4}{a_2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 5r = 27 \\ \frac{a_1+r-1}{a_1-1} = \frac{a_1+4r-4}{a_1+r-1} \end{cases}$$

$$13r^2 - 63r + 72 = 0$$

$$r = 3 \text{ lub } r = \frac{24}{13} \notin \mathbb{Z}$$

$$a_n = 3n + 1$$

$$\text{b) } a_n = 7n - 3$$

13. $a_1 = -5, a_2 = 0, a_3 = 5$

lub $a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = 2$

15. Niech a – długość boku największego spośród danych trójkątów.

Suma pól tych trójkątów:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}} = 31\sqrt{3}$$

Stąd $a = 8$, czyli $Ob = 24$.

16. a), b) około 836,74 zł



Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 1

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n^2$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$.

Dla $n > 1$ wyraz a_n możemy wyznaczyć ze wzoru $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 4n - 2$$

Stąd $a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) = 4$ dla $n > 1$.

Należy jeszcze obliczyć różnicę $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = (4 \cdot 2 - 2) - 2 = 4$$

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 2

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = n^2 - 4$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 1^2 - 4 = -3$.

Wyznaczamy wyraz a_n dla $n > 1$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 4) - ((n-1)^2 - 4) = 2n - 1$$

Stąd $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - (2n - 1) = 2$ dla $n > 1$.

Obliczmy $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ oraz różnicę $a_2 - a_1 = 3 - (-3) = 6 \neq 2$.

Otrzymaliśmy $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 3

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n + 3$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Wyznaczamy wyraz a_n dla $n > 1$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n + 3) - (2(n-1) + 3) = 2$$

Zatem dla $n > 1$ wszystkie wyrazy są równe 2, ale $a_1 = 5$.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszyte. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu:
 A. $a_n = (n-1)^2 + 5$,
 B. $a_n = (n-2)^2 + 5$,
 C. $a_n = (n-3)^2 + 5$,
 D. $a_n = (n-4)^2 + 5$.
 - Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n+6}{n}$. Żaden wyraz tego ciągu nie jest równy:
 A. 8,
 B. 6,
 C. 5,
 D. 3.
 - Ciągiem malejącym jest ciąg:
 A. $a_n = n(2-n)$,
 B. $a_n = n(3-n)$,
 C. $a_n = n(4-n)$,
 D. $a_n = n(5-n)$.
 - Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7(n-1) + 4$. Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy równej:
 A. -4,
 B. -3,
 C. 4,
 D. 7.
 - Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2} \cdot n - 1$. Suma S_5 tego ciągu jest równa:
 A. $5\sqrt{2} - 1$,
 B. $10\sqrt{2} - 1$,
 C. $10\sqrt{2} - 5$,
 D. $15\sqrt{2} - 5$.
 - Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym wyraz $a_4 = 36$ i iloraz $q = 3$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:
 A. $\frac{4}{9}$,
 B. $1\frac{1}{3}$,
 C. 4,
 D. 12.
 - Dany jest ciąg geometryczny $a_n = 54 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest liczbą należącą do przedziału:
 A. $\langle -18; -16 \rangle$,
 B. $\langle -16; -14 \rangle$,
 C. $\langle -14; -12 \rangle$,
 D. $\langle -12; -10 \rangle$.
 - Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 2. Suma wyrazów a_{11} i a_{21} tego ciągu jest równa:
 A. 120,
 B. 124,
 C. 128,
 D. 132.
 - Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa:
 A. 1535,
 B. 1540,
 C. 1595,
 D. 1760.
- A. $a_5 = 21$
 B. $a_5 = 14$
 C. $a_5 = 9$
 D. $a_5 = 6$
 - A. $\frac{2n+6}{n} = 8$ dla $n = 1$
 B. $\frac{2n+6}{n} = 6$ dla $n = \frac{3}{2}$,
 sprzeczne, bo $n \in \mathbb{N}_+$
 C. $\frac{2n+6}{n} = 5$ dla $n = 2$
 D. $\frac{2n+6}{n} = 3$ dla $n = 6$
 - A. $a_{n+1} = 1 - n^2$,
 $a_{n+1} - a_n = 1 - 2n < 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$
 B. $a_1 = 2 = a_2$
 C. $a_1 = 3 = a_3$
 D. $a_1 = 4 = a_4$
 - $a_n = 7n - 3$
 $a_{n+1} = 7n + 4$
 $a_{n+1} - a_n = 7$
 - $a_{n+1} - a_n =$
 $= \sqrt{2}(n+1) - 1 - \sqrt{2}n + 1 =$
 $= \sqrt{2}$
 Ciąg (a_n) jest ciągiem
 arytmetycznym o różnicy
 $r = \sqrt{2}$ oraz $a_1 = \sqrt{2} - 1$.
 $S_5 = \frac{2(\sqrt{2}-1)+4\sqrt{2}}{2} \cdot 5 =$
 $= 15\sqrt{2} - 5$
 - $a_4 = a_1 \cdot q^3$, czyli
 $36 = a_1 \cdot 3^3$, zatem $a_1 = \frac{4}{3}$
 - $a_1 = -18$, $a_2 = 6$,
 $q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{3}$
 $S_4 = -18 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{3})^4}{1 + \frac{1}{3}} = -13\frac{1}{3}$
- Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wzorze ogólnym $a_n = 4n - 2$.
 Zatem $a_{11} + a_{21} = 42 + 82 = 124$.
 - $13 + 16 + \dots + 97 = \frac{(13+97) \cdot 29}{2} = 1595$



Odpowiedzi do zadań

- $a_{n+1} - a_n = -\frac{n+4}{n+3} + \frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$,
czyli ciąg (a_n) jest rosnący.
- $a_{n+1} - a_n = n^2 - n + 3 = n(n-1) + 3 > 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$,
czyli ciąg (a_n) jest rosnący.
- $9 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 765$
 $n = 4$
- $a_1 = 4$, dla $n > 1$:
 $a_n = 6n - 2n^2 - 6(n-1) + 2(n-1)^2 = 8 - 4n$
 $a_{n+1} = 4 - 4n$, $a_{n+1} - a_n = -4$
oraz $a_2 - a_1 = -4$, więc ciąg ten jest arytmetyczny.
- $a - r$, a , $a + r$ – długości boków trójkąta
 $a - r + a + a + r = 24$, czyli $a = 8$
 $64 + (8 - r)^2 = (8 + r)^2$, skąd $r = 2$
Długości boków: 6, 8, 10
- $a - r$, a , $a + r$ – trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego
 $a - r + a + a + r = 12$, skąd $a = 4$
 $(4 - r)^2 + 16 + (4 + r)^2 = 56$,
czyli $r = -2$ lub $r = 2$
Wyrazy ciągu: 2, 4, 6 lub 6, 4, 2
- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Z twierdzenia Pitagorasa:
 $|AC|^2 = a^2 + (aq)^2$, stąd
 $|A'C|^2 = (aq^2)^2 + a^2 + (aq)^2$
$$\begin{cases} (aq^2)^2 + a^2 + (aq)^2 = 84 \\ a \cdot aq \cdot aq^2 = 64 \end{cases}$$

oraz $a, q > 0$
 $a = 2$, $q = 2$ lub $a = 8$, $q = \frac{1}{2}$
 $P_C = 2a^2q + 2a^2q^2 + 2a^2q^3 = 112 \text{ [cm}^2\text{]}$

■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = -\frac{n+3}{n+2}$.

D Zadanie 2 (2 pkt)

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (4 pkt)

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = 6n - 2n^2$. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 5 (4 pkt)

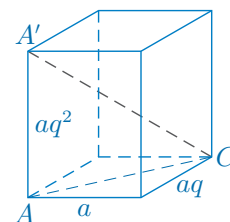
Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że tworzą one ciąg arytmetyczny.

Zadanie 6 (4 pkt)

Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Zadanie 7 (5 pkt)

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny. Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{84}$ cm, a jego objętość jest równa 64 cm^3 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.



Zadanie 8 (5 pkt)

Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 30 oraz $a_2 \cdot a_4 = 11$. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?

Zadanie 9 (4 pkt)

Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 13. Drugi wyraz jest o 5 mniejszy od różnicy między trzecim i pierwszym wyrazem. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

$$8. \begin{cases} a + a + r + a + 2r + a + 3r + a + 4r = 30 \\ (a + r)(a + 3r) = 11 \end{cases} \quad \text{oraz } r > 0$$

$$a = -4, r = 5, a_n = 5n - 9$$

$$\frac{(-13+5n)n}{2} > 100 \text{ dla } n > \frac{13+\sqrt{4169}}{10} \approx 7,8$$

Trzeba dodać co najmniej 8 początkowych wyrazów.

$$9. \begin{cases} a + aq + aq^2 = 13 \\ aq + 5 = aq^2 - a \end{cases}$$

$$a = 1 \text{ i } q = 3$$

$$a_4 = 1 \cdot 3^3 = 27$$