



2 Geometria analityczna

W tym rozdziale opisujemy i badamy figury geometryczne położone w prostokątnym układzie współrzędnych, w którym jednostki na obu osiach mają równe długości.

Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej na wyspie w archipelagu Utklippan w Szwecji – szerokość geograficzna: $55^{\circ}57'10''\text{N}$, długość geograficzna: $15^{\circ}42'06''\text{E}$.

Multiteka

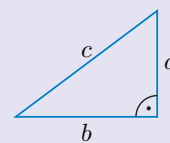
- Topologia
- Układ współrzędnych biegunowych
- Współrzędne kartezjańskie

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $c = 2\sqrt{6}$,
 $Ob = 2(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$
 b) $b = 3\sqrt{3}$,
 $Ob = 3(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$
 c) $a = \frac{3}{2}$, $Ob = 6$

2. a) $x = 6$
 b) $x = 2\sqrt{10}$

3. Niech a będzie długością podstawy trójkąta, wówczas:
 $a + 2(a - 2) = 32$,
 czyli $a = 12$ cm.

Stąd długość ramienia: 10 cm.

Wysokość trójkąta:

$$\sqrt{10^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 8 \text{ [cm]}$$

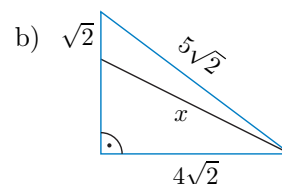
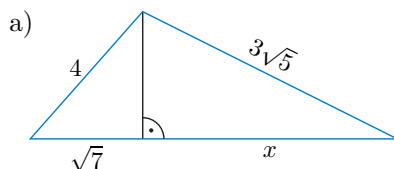
Zatem pole trójkąta:

$$P = 48 \text{ cm}^2$$

1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Oblicz jego obwód.

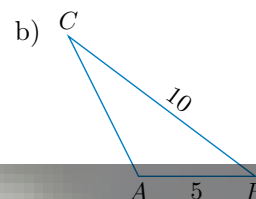
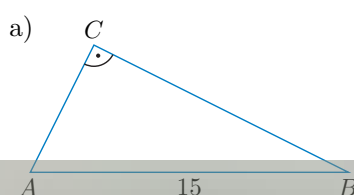
a) $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$ b) $a = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{5}$ c) $b = 2$, $c = \frac{5}{2}$

2. Oblicz x .



3. Podstawa trójkąta równoramiennego jest dłuższa od ramienia o 2 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że jego obwód jest równy 32 cm.

4. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest równa 6. Oblicz obwód trójkąta ABC .



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

5. a), b), c), e) jest
 d), f) nie jest

5. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

a) 5, 12, 13 c) $2\frac{1}{4}$, 3, $3\frac{3}{4}$ e) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$
 b) 8, 15, 17 d) 15, 18, 25 f) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, 6

4. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C .

$$\text{a) } \begin{cases} |AC|^2 = 6^2 + |AD|^2 \\ |BC|^2 = 6^2 + (15 - |AD|)^2 \\ |AC|^2 + |BC|^2 = 15^2 \end{cases}$$

$$6^2 + |AD|^2 + 6^2 + (15 - |AD|)^2 = 15^2$$

$$|AD|^2 - 15|AD| + 36 = 0$$

$$|AD| = 3 \text{ lub } |AD| = 12$$

$$\begin{cases} |AC| = 3\sqrt{5} \\ |BC| = 6\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Zatem } Ob = 3(5 + 3\sqrt{5}).$$

$$\text{b) } 6^2 + (|AD| + 5)^2 = 10^2, \\ \text{czyli } |AD| = 3$$

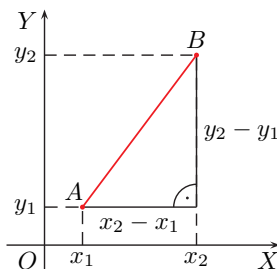
$$6^2 + |AD|^2 = |AC|^2, \text{ czyli } |AC|^2 = 45, \text{ stąd } |AC| = 3\sqrt{5} \\ \text{Zatem } Ob = 3(5 + \sqrt{5}).$$

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Rozważmy punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Twierdzenie

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość między punktami $A(2, 5)$ i $B(-1, 1)$.

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami A i B .

a) $A(-3, -1), B(-5, -1)$

c) $A(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), B(\frac{1}{2}, -1)$

b) $A(5, -6\frac{1}{2}), B(-7, -1\frac{1}{2})$

d) $A(3 + \sqrt{3}, \sqrt{7}), B(\sqrt{3}, -4 + \sqrt{7})$

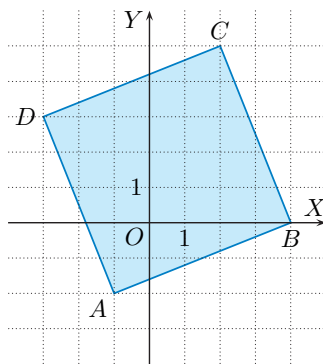
Przykład 2

Oblicz obwód kwadratu $ABCD$ (rysunek obok).

Z rysunku odczytujemy: $A(-1, -2), B(4, 0)$, zatem:

$$\sqrt{(4 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy $4\sqrt{29}$.



Ćwiczenie 2

Oblicz obwód prostokąta o kolejnych wierzchołkach $A(-6, 1), B(-3, -3), C(5, 3), D(2, 7)$.

Ćwiczenie 2

$$|AB| = \sqrt{(-3 + 6)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$|BC| = \sqrt{(5 + 3)^2 + (3 + 3)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$Ob = 2(5 + 10) = 30$$

Uczeń:

- oblicza odległości między punktami w układzie współrzędnych,
- stosuje wzór na odległość między punktami w zadaniach dotyczących wielokątów w układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 1

a) $|AB| = -3 + 5 = 2$

b) $|AB|^2 = (-7 - 5)^2 + (-1\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2})^2 = 169$
 $|AB| = 13$

c) $|AB|^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^2 + (-1 + \frac{2}{3})^2 = \frac{5}{36}$
 $|AB| = \frac{\sqrt{5}}{6}$

d) $|AB|^2 = (\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3})^2 + (-4 + \sqrt{7} - \sqrt{7})^2 = 25$
 $|AB| = 5$

Ćwiczenie 3

$$Ob_{\triangle ABC} = 5 + 10 + 3\sqrt{5} = 15 + 3\sqrt{5}$$

$$Ob_{\triangle DEF} = \sqrt{26} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 4

a) $|AB| = \sqrt{26}$, $|AC| = 5$,
 $|BC| = \sqrt{29}$, czyli nie jest
równoramienny.

b) $|AB| = |BC| = \sqrt{17}$,
 $|AC| = 3\sqrt{2}$, czyli jest
równoramienny.

c) $|AB| = |AC| = 15$,
 $|BC| = 6\sqrt{5}$, czyli jest
równoramienny.

d) $|AB| = 2\sqrt{3}$,
 $|AC| = \sqrt{15 - 6\sqrt{3}}$, $|BC| = \sqrt{3}$,
czyli nie jest równoramienny.

Ćwiczenie 5

a) $|AB| = \sqrt{26}$,
 $|AC| = |BC| = \sqrt{13}$,
 $(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$
Trójkąt jest równoramienny
i prostokątny.

b) $|AB| = 4\sqrt{2}$,
 $|AC| = |BC| = 4\sqrt{5}$
Trójkąt jest równoramienny i nie
jest prostokątny.

c) $|AB| = 2\sqrt{5}$, $|AC| = \sqrt{29}$,
 $|BC| = 3\sqrt{5}$
Trójkąt nie jest równoramienny
i nie jest prostokątny.

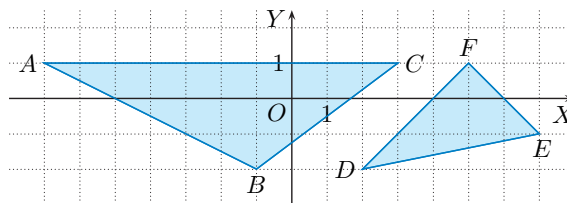
d) $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|AC| = 3\sqrt{10}$,
 $|BC| = 6\sqrt{2}$
Trójkąt nie jest równoramienny
i jest prostokątny.

Odpowiedzi do zadań

1. $Ob_{KLMN} = 11 + \sqrt{17} <$
 $< 11 + 5 = 16$
 $Ob_{PQRS} = 9 + \sqrt{26} + \sqrt{5} >$
 $> 9 + 5 + 2 = 16$
Zatem $Ob_{PQRS} > Ob_{KLMN}$.

Ćwiczenie 3

Oblicz obwody trójkątów
 ABC i DEF przedstawio-
nych na rysunku obok.



Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny.

- a) $A(1, 3)$, $B(6, 4)$, $C(4, -1)$ c) $A(-3, -3)$, $B(12, -3)$, $C(6, 9)$
b) $A(0, 0)$, $B(4, -1)$, $C(3, 3)$ d) $A(-1, 0)$, $B(2, \sqrt{3})$, $C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$

Przykład 3

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -4)$, $B(4, 2)$ i $C(1, 5)$ jest prostokątny.

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że: $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.

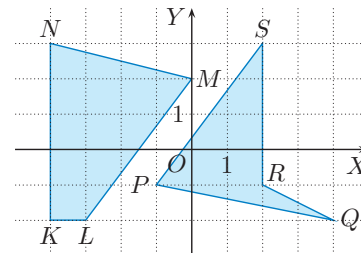
Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny. Czy jest prostokątny?

- a) $A(-1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(2, 4)$ c) $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$
b) $A(-3, 0)$, $B(1, -4)$, $C(5, 4)$ d) $A(-4, 0)$, $B(-1, -3)$, $C(5, 3)$

Zadania

1. Który z czworokątów $KLMN$ i $PQRS$ (rysunek obok) ma większy obwód?
2. Który z odcinków AB i CD jest dłuższy?
a) $A(1, -2)$, $B(4, 4)$, $C(2, 2)$, $D(8, -2)$
b) $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 1)$, $D(4, 6)$
c) $A(3, -2)$, $B(8, -2)$, $C(-2, 2)$, $D(2, 5)$



3. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.
a) $A(3, 0)$, $B(-6, 8)$, $C(-2, -2)$ b) $A(-5, -1)$, $B(4, 1)$, $C(3, 5)$

2. a) $|AB| = \sqrt{45}$, $|CD| = \sqrt{52}$, $|CD| > |AB|$

b) $|AB| = \sqrt{40}$, $|CD| = \sqrt{50}$, $|CD| > |AB|$

c) $|AB| = 5 = |CD|$

3. a) Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki trójkąta:

$$a_{AC} = \frac{2}{5}, a_{BC} = -\frac{5}{2}$$

Zauważmy, że $a_{AC} \cdot a_{BC} = -1$, zatem trójkąt jest prostokątny.

b) Obliczamy kwadraty długości boków trójkąta:

$$|AB|^2 = 85, |BC|^2 = 17, |AC|^2 = 100$$

Zauważmy, że $85 + 17 \neq 100$, zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa trójkąt nie jest prostokątny.

4. Sprawdź, czy trójkąty ABC i DEF są przystające lub podobne.
- a) $A(2, 2)$, $B(8, 5)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 0)$, $E(4, -3)$, $F(5, -1)$
b) $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 4)$, $D(4, 4)$, $E(0, 2)$, $F(-2, -4)$
5. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia prostych:
- a) $y = x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY ,
b) $y = x + 2$ i $y = 3x - 6$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX .
6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu $ABCD$.
- a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 3)$
b) $A(-5, -2)$, $B(2, -1)$, $C(7, 4)$, $D(0, 3)$
7. Wyznacz współrzędne punktów należących do prostej l , których odległość od punktu P jest równa d .
- a) $l: y = 2x - 2$, $P(5, 3)$, $d = \sqrt{10}$ b) $l: y = -x + 6$, $P(3, 2)$, $d = \sqrt{13}$
8. Dane są punkty $A(-2, 2)$ i $C(5, 3)$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D prostokąta $ABCD$, jeśli należą one do prostej o równaniu $y = 4 - x$.
9. Dane są wierzchołki $A(-4, 2)$, $B(8, -2)$ i $C(6, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawie AB . Oblicz współrzędne wierzchołka D .

Powtórzenie

10. Narysuj łamaną $PQRST$ i oblicz jej długość.
- a) $P(-7, 0)$, $Q(-1, 3)$, $R(-3, 4)$, $S(-1, 5)$, $T(3, 3)$
b) $P(6, -2)$, $Q(2, 1)$, $R(-1, -1)$, $S(6, -6)$, $T(2, -6)$
11. Wierzchołkami kwadratu są punkty $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 4)$ i $D(-4, 3)$. Oblicz obwód tego kwadratu oraz długość jego przekątnej.
- D** 12. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, a następnie oblicz jego obwód i pole.
- a) $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$, $C(4, 6)$, $D(1, 6)$
b) $A(-3, -3)$, $B(1, -5)$, $C(1, 9)$, $D(-3, 1)$
13. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny. Oblicz jego pole.
- a) $A(0, -2)$, $B(3, 7)$, $C(-3, 4)$ b) $A(3, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(0, -4)$
12. a) Odcinki AB i CD są równoległe do osi OX , więc są równoległe, a zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Jego wysokość $h = |6 - 2| = 4$ oraz $|AB| = 9$, $|BC| = 2\sqrt{5}$, $|CD| = 3$, $|DA| = 4\sqrt{2}$. Zatem $Ob = 12 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$, $P = 24$.
b) Odcinki AD i BC są równoległe do osi OY , więc są równoległe, a zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Jego wysokość $h = |1 + 3| = 4$ oraz $|AB| = 2\sqrt{5}$, $|BC| = 14$, $|CD| = 4\sqrt{5}$, $|DA| = 4$. Zatem $Ob = 18 + 6\sqrt{5}$, $P = 36$.
13. a) jest, $P = \frac{45}{2}$
b) nie jest, $P = 9$

4. a) $|AB| = |DE| = 3\sqrt{5}$,
 $|AC| = |EF| = \sqrt{5}$,
 $|BC| = |DF| = 5\sqrt{2}$,
więc trójkąty są przystające.
b) $|AB| = 5$, $|AC| = \sqrt{10}$,
 $|BC| = \sqrt{5}$, $|DE| = 2\sqrt{5}$,
 $|DF| = 10$, $|EF| = 2\sqrt{10}$,
więc trójkąty są podobne.
5. a) $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6$,
wysokości: 4 , $3\sqrt{2}$, $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
b) $Ob = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2} + 4$,
wysokości: 6 , $2\sqrt{2}$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$
6. a) $Ob = 4\sqrt{10}$, $|AC| = 4\sqrt{2}$,
 $|BD| = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{10}}{5}$
b) $Ob = 20\sqrt{2}$, $|AC| = 6\sqrt{5}$,
 $|BD| = 2\sqrt{5}$, $h = 3\sqrt{2}$
7. a) $Q(x, 2x - 2)$ – punkt należący do prostej l
 $(5 - x)^2 + (3 - (2x - 2))^2 = 10$
 $5x^2 - 30x + 40 = 0$
 $x = 2$ lub $x = 4$
Współrzędne punktów: $(2, 2)$,
 $(4, 6)$
b) $(1, 5)$, $(6, 0)$
8. $B(4, 0)$, $D(-1, 5)$
9. Proste AB i CD są równoległe, czyli $a_{AB} = a_{CD} = -\frac{1}{3}$. Niech $D(x, y)$. Wtedy prosta CD : $y = -\frac{1}{3}x + 6$. Trapez jest równoramienny, stąd:
 $(x + 4)^2 + (-\frac{1}{3}x + 6 - 2)^2 = (6 - 8)^2 + (4 + 2)^2 =$
 $x = -6$ lub $x = \frac{6}{5}$
 $D(-6, 8)$ lub $D(\frac{6}{5}, \frac{28}{5})$
10. a) $7\sqrt{5}$ b) $9 + \sqrt{13} + \sqrt{74}$
11. $Ob = 4\sqrt{10}$, $|AC| = 2\sqrt{5}$

Uczeń:

- wyznacza współrzędne środka odcinka, gdy dane są współrzędne jego końców,
- wyznacza współrzędne jednego z końców odcinka, gdy dane są współrzędne jego środka i drugiego końca,
- stosuje wzór na środek odcinka w zadaniach dotyczących własności wielokątów w układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 1

- a) $S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (2, 1)$
b) $S\left(\frac{-4+5}{2}, \frac{1-8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$
c) $S\left(\frac{\frac{1}{2}+3}{2}, \frac{-2+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{6}\right)$

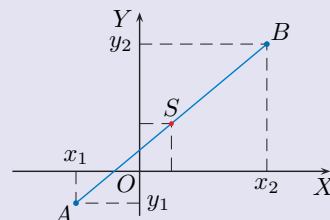
2.2. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

Środek odcinka

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB , jeśli $A(-3, 2)$ i $B(5, -4)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne: $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .

- a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$ b) $A(-4, 1)$, $B(5, -8)$ c) $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$

Przykład 2

Punkt $S(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu A , jeśli punkt B ma współrzędne $(-3, 4)$.

Niech punkt A ma współrzędne (x_1, y_1) , wówczas:

$$\frac{x_1 - 3}{2} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{y_1 + 4}{2} = 5$$

$$x_1 - 3 = 2 \quad \text{i} \quad y_1 + 4 = 10$$

$$x_1 = 5 \quad \text{i} \quad y_1 = 6$$

Ćwiczenie 2

a) Dany jest punkt $A(5, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli punkt $S(-1, -3)$ jest środkiem odcinka AB .

b) Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, -2)$ i $B(7, y)$. Oblicz długość odcinka AB .

c) Punkt $S(1, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, y)$ i $B(x + y, x - y)$. Oblicz długość odcinka AB .

Ćwiczenie 2

a)
$$\begin{cases} \frac{5+x}{2} = -1 \\ \frac{8+y}{2} = -3 \end{cases}$$

czyli $x = -7$, $y = -14$.
Zatem $B(-7, -14)$.

b)
$$\begin{cases} \frac{x+7}{2} = 2 \\ \frac{-2+y}{2} = 1 \end{cases}$$

czyli $x = -3$, $y = 4$.
Zatem $A(-3, -2)$, $B(7, 4)$
oraz $|AB| = 2\sqrt{34}$.

c)
$$\begin{cases} \frac{2x+y}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{cases}$$

czyli $x = 2$, $y = -2$.
Zatem $A(2, -2)$, $B(0, 4)$
oraz $|AB| = 2\sqrt{10}$.

Przypomnijmy, że **środkową trójkąta** nazywamy odcinek łączący jego wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Przykład 3

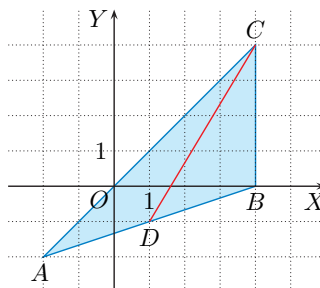
Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C .

Niech D będzie środkiem odcinka AB :

$$D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = D(1, -1)$$

Obliczamy długość środkowej:

$$|CD| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$



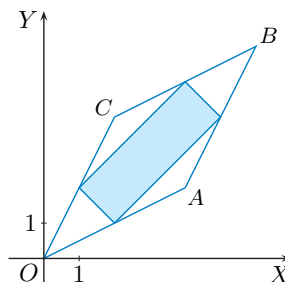
Ćwiczenie 3

Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .

- a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$, $C(-2, 3)$ b) $A(-6, -1)$, $B(2, 3)$, $C(-4, 5)$

Zadania

- Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych.
 - $A(1, 6)$, $B(-7, 2)$
 - $A(-7, 7)$, $B(11, 1)$
 - $A(9, \sqrt{7})$, $B(-4, -\sqrt{7})$
- Dany jest punkt $A(4, 5)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
 - $S(-2, 3)$
 - $S(6, 7)$
 - $S(-3, 1)$
- Dany jest punkt $A(-4, -3)$. Oblicz długość odcinka AB , jeśli:
 - jego środkiem jest punkt $(-1, -2)$,
 - jego środek leży na osi OX , a odcięta punktu B jest równa 2.
- Oblicz długości przekątnych rombu o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 6)$ i $C(2, 4)$ (rysunek obok). Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu $OABC$.
- Dany jest prostokąt o wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(8, 3)$, $C(6, 7)$ i $D(-6, 1)$.
 - Oblicz obwód prostokąta $ABCD$.
 - Oblicz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta $ABCD$.



Ćwiczenie 3

Oznaczmy środki odcinków AB , AC i BC odpowiednio S_{AB} , S_{AC} i S_{BC} .

- a) $S_{AB}(2, 1)$, $S_{AC}(-2, 1)$, $S_{BC}(2, 3)$
 $|CS_{AB}| = 2\sqrt{5}$, $|BS_{AC}| = 2\sqrt{17}$, $|AS_{BC}| = 4\sqrt{2}$
- b) $S_{AB}(-2, 1)$, $S_{AC}(-5, 2)$, $S_{BC}(-1, 4)$
 $|CS_{AB}| = 2\sqrt{5}$, $|BS_{AC}| = 5\sqrt{2}$, $|AS_{BC}| = 5\sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań

- a) $S(-3, 4)$, $|SO| = 5$
 b) $S(2, 4)$, $|SO| = 2\sqrt{5}$
 c) $S(2\frac{1}{2}, 0)$, $|SO| = 2\frac{1}{2}$
- a) $B(-8, 1)$
 b) $B(8, 9)$
 c) $B(-10, -3)$
- a) $|AS| = \sqrt{10}$, czyli $|AB| = 2\sqrt{10}$.
 b) Środkiem odcinka AB jest punkt $S(x_S, 0)$, a punkt $B(2, y_B)$, zatem:

$$\frac{-3+y_B}{2} = 0$$
 czyli $y_B = 3$.
 $|AB| = 6\sqrt{2}$
- Długości przekątnych rombu:
 $|BO| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 2\sqrt{2}$

I sposób

Długości boków prostokąta: $\sqrt{2}$ i $3\sqrt{2}$, czyli pole $P = 6$.

II sposób

Pole prostokąta:

$$P = \frac{1}{2}P_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |AC| = 6$$

5. a) Długości boków prostokąta: $|AD| = |BC| = 2\sqrt{5}$ i $|AB| = |DC| = 6\sqrt{5}$, czyli obwód $Ob = 16\sqrt{5}$.
 b) Długość boku rombu: $5\sqrt{2}$, czyli $Ob = 20\sqrt{2}$.

6. a) $S_{AC}(8, 2)$, $S_{BD}(8, 2)$, jest
 b) $S_{AC}(4\frac{1}{2}, 2)$, $S_{BD}(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$,
 nie jest

7. $S(3, 2)$, $D(7, 5)$

9. a) Współrzędne punktów A i B mają postać (x, x) ,
 stąd $|AS| = |BS| =$
 $= \sqrt{(3-x)^2 + (3-x)^2} =$
 $= 2\sqrt{2}$.
 $(3-x)^2 = 2^2$, czyli
 $x = 1$ lub $x = 5$
 Zatem $A(1, 1)$, $B(5, 5)$ lub
 $A(5, 5)$, $B(1, 1)$.
 b) $A(16, 14)$, $B(8, 8)$ lub
 $A(8, 8)$, $B(16, 14)$

10. a) $S_{AB}(2, 1)$,
 $r = \frac{1}{2}|AB| = \sqrt{13}$,
 $|SP| = \sqrt{13} = r$, zatem
 punkt P należy do okręgu.
 b) $S_{AB}(1, 3)$,
 $r = \frac{1}{2}|AB| = 2\sqrt{10}$,
 $|SP| = 2\sqrt{10} = r$, zatem
 punkt P należy do okręgu.

11. a) II b) III c) I d) IV
 12. $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 5)$, $(-2, 4)$
 13. a) $2\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$
 b) $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, $2\sqrt{26}$
 14. a) $(-1, -2)$, $r = 5$
 b) $(-1, 1)$, $r = 2\sqrt{10}$
 15. $|AB| = 6\sqrt{5}$, $|CD| = 2\sqrt{5}$,
 $|PQ| = 4\sqrt{5}$

6. Wyznacz współrzędne środków odcinka AC i odcinka BD . Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?

- a) $A(-2, -1)$, $B(17, 2)$, $C(18, 5)$, $D(-1, 2)$
 b) $A(1, -1)$, $B(7, 1)$, $C(8, 5)$, $D(2, 2)$

7. Punkty $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ i $C(5, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC oraz współrzędne wierzchołka D .

8. a) Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $(2, 1)$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(1, -2)$. Oblicz pole i obwód tego kwadratu.
 b) Pole kwadratu jest równe 20, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(3, 6)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu, jeśli punkt ten należy do prostej $x = 4$.

9. Odcinek AB leżący na prostej k ma długość d . Środkiem tego odcinka jest punkt S . Wyznacz współrzędne punktów A i B .

- a) $k: y = x$, $d = 4\sqrt{2}$, $S(3, 3)$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 2$, $d = 10$, $S(12, 11)$

10. Czy punkt P należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek AB ?

- a) $A(-1, -1)$, $B(5, 3)$, $P(0, 4)$ b) $A(-5, 5)$, $B(7, 1)$, $P(-1, -3)$

Powtórzenie

11. W której ćwiartce układu współrzędnych leży środek odcinka AB ?

- a) $A(-17, 3)$, $B(7, 19)$ c) $A(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$, $B(-\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$
 b) $A(1, 2)$, $B(-2, -3)$ d) $A(\frac{5}{4}, \frac{4}{5})$, $B(-\frac{4}{5}, -\frac{5}{4})$

12. Wyznacz współrzędne środków boków kwadratu o wierzchołkach $A(-3, 2)$, $B(1, 0)$, $C(3, 4)$ i $D(-1, 6)$.

13. Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .

- a) $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$, $C(-3, 8)$ b) $A(-2, -1)$, $B(10, 3)$, $C(2, 3)$

14. Wyznacz współrzędne środka okręgu o średnicy PQ i oblicz jego promień.

- a) $P(-4, 2)$, $Q(2, -6)$ b) $P(-7, -1)$, $Q(5, 3)$

15. W trapezie o wierzchołkach $A(6, 5)$, $B(-6, -1)$, $C(-2, -3)$ oraz $D(2, -1)$ punkt P jest środkiem ramienia AD , a punkt Q – środkiem ramienia BC . Oblicz długości odcinków AB , CD i PQ .

8. a) Długość przekątnej kwadratu: $2\sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = 2\sqrt{10}$

Długość boku kwadratu: $2\sqrt{5}$

Zatem $P = 20$, $Ob = 8\sqrt{5}$.

- b) Długość boku kwadratu: $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Długość przekątnej kwadratu: $2\sqrt{10}$

Punkt przecięcia przekątnych: $(4, y)$

$$\sqrt{(4-3)^2 + (y-6)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10}$$

$$(y-6)^2 = 9, \text{ czyli } y = 3 \text{ lub } y = 9$$

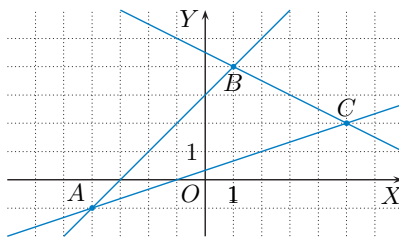
Szukany punkt: $(4, 3)$ lub $(4, 9)$

Prosta w układzie współrzędnych

Równanie prostej postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, jest równy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1. Wyznacz równania prostych AB , AC i BC (rysunek obok).
2. Wyznacz równanie prostej PQ . Czy należy do niej punkt C ?
 a) $P(-2, 1)$, $Q(2, 5)$, $C(4, 8)$
 b) $P(-1, 7)$, $Q(3, -1)$, $C(-2, 9)$



Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej l .
 a) $P(1, 3)$, $l: y = 4x + 2$ b) $P(20, 9)$, $l: y = -\frac{1}{5}x + 2$
4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l .
 a) $A(3, -1)$, $l: y = 2x + 7$ b) $A(12, 7)$, $l: y = -6x + 1$
5. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .
 a) $A(-2, 1)$, $B(6, 5)$ b) $A(-5, 3)$, $B(1, -1)$ c) $A(-2, -2)$, $B(0, 4)$

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

6. Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.
 a) $3x - y - 4 = 0$ b) $-4x + 2y + 5 = 0$ c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3 = 0$
7. Prosta l przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do prostej k . Wyznacz równanie prostej l .
 a) $P(4, 5)$, $k: 2x - y - 7 = 0$ b) $P(\frac{1}{2}, -1)$, $k: 2x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$
6. a) $y = 3x - 4$ b) $y = 2x - \frac{5}{2}$ c) $y = -\frac{3}{2}x + 9$
7. a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = \frac{1}{6}x - \frac{13}{12}$

Odpowiedzi do zadań

1. $AB: y = x + 3$,
 $AC: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$,
 $BC: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
2. a) $y = x + 3$, nie
 b) $y = -2x + 5$, tak

3. a) $y = 4x - 1$
 b) $y = -\frac{1}{5}x + 13$

4. a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 b) $y = \frac{1}{6}x + 5$

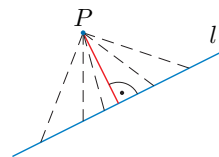
5. a) $a_{AB} = \frac{1}{2}$
 Środek odcinka AB : $(2, 3)$
 Symetralna odcinka AB :
 $y = -2x + 7$
 b) $a_{AB} = -\frac{2}{3}$
 Środek odcinka AB : $(-2, 1)$
 Symetralna odcinka AB :
 $y = \frac{3}{2}x + 4$
 c) $a_{AB} = 3$
 Środek odcinka AB : $(-1, 1)$
 Symetralna odcinka AB :
 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Uczeń:

- oblicza odległość punktu od prostej,
- oblicza odległość między prostymi równoległymi,
- stosuje wzór na odległość punktu od prostej do obliczania pól wielokątów.

2.3. Odległość punktu od prostej

Przypomnijmy, że **odległością punktu P od prostej l** nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.

**Przykład 1**

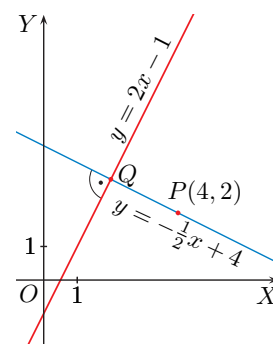
Oblicz odległość punktu $P(4, 2)$ od prostej $y = 2x - 1$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do prostej $y = 2x - 1$. Jest ono postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktu P i otrzymujemy $2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, czyli $b = 4$.

Zatem $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$



i otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych: $Q(2, 3)$.

Obliczamy długość odcinka PQ :

$$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$$

Zatem odległość punktu P od prostej $y = 2x - 1$ jest równa $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość punktu P od prostej l .

a) $P(5, 1)$, $l: y = x$

b) $P(-1, 3)$, $l: y = \frac{4}{3}x - 4$

Jeżeli metodę opisaną w przykładzie 1. zastosujemy w przypadku ogólnym, to otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym:

$$Ax + By + C = 0$$

wyraża się za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ćwiczenie 1

a) Równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P :

$$y = -x + 6$$

Punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne $Q(3, 3)$. Zatem:

$$|PQ| = \sqrt{(5-3)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P :

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

Punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne $Q(3, 0)$. Zatem $|PQ| = 5$.

Przykład 2

Oblicz odległość punktu $P(5, -1)$ od prostej $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$4x + 3y - 6 = 0$$

i odczytujemy z niego wartości współczynników: $A = 4$, $B = 3$ i $C = -6$. Wartości te razem ze współrzędnymi $x_0 = 5$ i $y_0 = -1$ podstawiamy do wzoru:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|20 - 3 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz odległości punktów $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ i $C(-1, 3)$ od prostej l .

- a) $l: y - x = 1$ b) $l: 3x - y - 7 = 0$ c) $l: y = -\frac{1}{2}x + 2,5$

Przykład 3

Punkty $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ i $C(2, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz pole tego trójkąta.

Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru $P = \frac{1}{2}a \cdot h$, w którym $a = |AB|$, a h jest odległością punktu C od prostej AB .

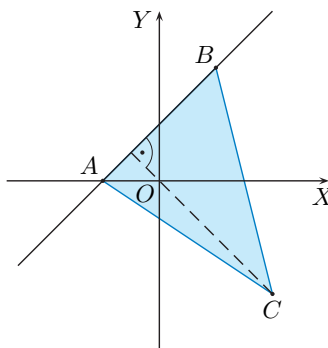
$$a = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = x + 1$ i zapisujemy je w postaci ogólnej: $x - y + 1 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB :

$$h = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5$.



Ćwiczenie 3

Oblicz odległość punktu C od prostej l oraz pole trójkąta ABC , którego wierzchołki A i B są punktami przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych.

- a) $l: y = 3x + 6$, $C(2, -4)$ b) $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$, $C(1, -1)$

Ćwiczenie 4

Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{3}{5}x - 6$ z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołek D ma współrzędne $(1, 4)$.

Ćwiczenie 4

Prosta AB przecina osie układu współrzędnych w punktach $A(10, 0)$ i $B(0, -6)$, zatem:

$$|AB| = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

Odległość punktu D od prostej AB : $d = \frac{47\sqrt{34}}{34}$

Pole równoległoboku $ABCD$: $P = 2\sqrt{34} \cdot \frac{47\sqrt{34}}{34} = 94$

Ćwiczenie 2

a) $d_A = \sqrt{2}$, $d_B = 0$, $d_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $d_A = \sqrt{10}$, $d_B = \sqrt{10}$,

$d_C = \frac{13\sqrt{10}}{10}$

c) $d_A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_B = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $d_C = 0$

Ćwiczenie 3

a) Odległość punktu C od prostej l : $d = \frac{8\sqrt{10}}{5}$

Prosta l przecina osie układu współrzędnych w punktach $A(-2, 0)$ i $B(0, 6)$, zatem:

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

Pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{5} = 16$$

b) Odległość punktu C od prostej l : $d = \sqrt{13}$

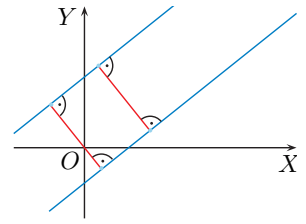
Prosta l przecina osie układu współrzędnych w punktach $A(6, 0)$ i $B(0, 4)$, zatem:

$$|AB| = 2\sqrt{13}$$

Pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej. Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych (dlaczego?).



Ćwiczenie 5

- a) Do prostej $y = x - 1$ należy punkt $(0, -1)$, zatem:

$$d = 2\sqrt{2}$$
- b) Do prostej $y = 2x - 1$ należy punkt $(0, -1)$, zatem:

$$d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$
- c) Do prostej $y = \frac{1}{2}x + 6$ należy punkt $(0, 6)$, zatem:

$$d = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$
- d) Do prostej $y = \frac{3}{2}x + 1$ należy punkt $(0, 1)$, zatem:

$$d = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $l: 2x - 5y - 30 = 0$,
 $d_A = \frac{48\sqrt{29}}{29}$, $d_B = \frac{45\sqrt{29}}{29}$,
nie jest
- b) $l: 4x - 3y - 15 = 0$,
 $d_A = d_B = 5$, jest
- c) $l: 12x + 5y = 0$,
 $d_A = 5$, $d_B = \frac{54}{13}$, nie jest
2. Równania prostych zawierających boki czworokąta:
 $AB: x - 3y - 5 = 0$,
 $BC: x + y - 9 = 0$,
 $CD: y = \frac{25}{4}$,
 $AD: x = -1$.
 $d_{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, $d_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,
 $d_{CD} = 2\frac{1}{4}$, $d_{AD} = 3$

Przykład 4

Oblicz odległość między prostymi $l: 3x - 2y + 2 = 0$ i $k: 3x - 2y - 11 = 0$.
Dane proste są równoległe. Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = 1$, zatem punkt $A(0, 1)$ należy do tej prostej.
Obliczamy odległość punktu A od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

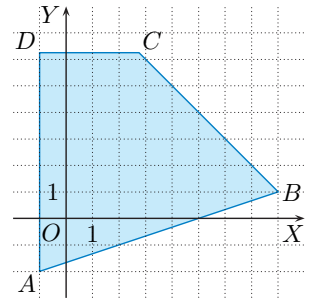
Ćwiczenie 5

Oblicz odległość między prostymi:

- a) $y = x - 1$ i $y = x + 3$, c) $x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x + 6$,
b) $y = 2x - 1$ i $y = 2x + 2$, d) $3x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Zadania

1. Oblicz odległości punktów A i B od prostej l . Czy prosta AB jest równoległa do prostej l ?
- a) $A(1, 4)$, $B(5, 5)$, $l: y = \frac{2}{5}x - 6$
b) $A(-4, -2)$, $B(2, 6)$, $l: y = 1\frac{1}{3}x - 5$
c) $A(-5, -1)$, $B(7, -6)$, $l: y = -2,4x$
2. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-1, -2)$, $B(8, 1)$, $C(\frac{11}{4}, \frac{25}{4})$ i $D(-1, \frac{25}{4})$ (rysunek obok). Oblicz odległości punktu $S(2, 4)$ od boków tego czworokąta.
3. Punkty $A(6, 4)$, $B(-3, 7)$ i $C(-2, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB oraz pole tego równoległoboku.
4. Oblicz pole trójkąta ABC .
- a) $A(-1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$ b) $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$, $C(2, -1)$



3. Równanie prostej $AB: x + 3y - 18 = 0$
Odległość punktu C od prostej $AB: d_C = 2\sqrt{10}$
Długość boku $AB: 3\sqrt{10}$
Pole równoległoboku: $P = 3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 60$
4. a) Równanie prostej $AB: 3x + 4y - 1 = 0$.
 $d(C, AB) = \frac{17}{5}$, $|AB| = 5$
Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{17}{5} = 8\frac{1}{2}$.
b) Równanie prostej $AB: x - y + 3 = 0$.
 $d(C, AB) = 3\sqrt{2}$, $|AB| = 5\sqrt{2}$
Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15$.

5. Oblicz pole koła stycznego jednocześnie do prostych k i l .
 a) $k: 2x - y + 4 = 0, l: 2x - y - 6 = 0$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 6, l: y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$
6. Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi oraz oblicz pole czworokąta $ABCD$.
 a) $A(-2, -6), B(6, 2), C(0, 3), D(-3, 0)$
 b) $A(-9, -2), B(3, -6), C(3, 4), D(0, 5)$
7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie prostej l_2 równoległej do prostej $l_1: y = 2x$, jeśli wiadomo, że odległość między tymi prostymi jest równa 4.

Równanie prostej l_2 ma postać $y = 2x + b$. Dla $x = 0$ otrzymujemy punkt $P(0, b)$ należący do tej prostej. Zapisujemy równanie prostej l_1 w postaci ogólnej: $-2x + y = 0$. Wyznaczamy odległość punktu P od tej prostej:

$$\frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot b + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}$$

Ale $\frac{|b|}{\sqrt{5}} = 4$, zatem $|b| = 4\sqrt{5}$, czyli równanie prostej l_2 zapisujemy w postaci:

$$y = 2x + 4\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad y = 2x - 4\sqrt{5}$$

Wyznacz równanie prostej odległej o 10 od prostej: a) $y = x$, b) $y = x + 3$.

8. a) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = 2x - 4$ z osiami układu współrzędnych, a punkt C leży na prostej $y = 2x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABC .
 b) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{1}{2}x - 6$ z osiami układu współrzędnych, a punkty C i D leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x - 1$. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

Powtórzenie

9. Oblicz odległość punktu P od prostej l .
 a) $P(8, -4), l: y = 2,5x + 5$ b) $P(2, \frac{1}{2}), l: y = -\frac{3}{4}x + 2$
10. Oblicz odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC .
 a) $A(-3, -1), B(5, -3), C(2, 4)$ b) $A(-2, -2), B(2, 0), C(4, 6)$
11. Oblicz odległość między prostymi k i l .
 a) $k: y = \frac{1}{2}x + 3, l: y = \frac{1}{2}x - 2$ b) $k: 3x + 4y + 4 = 0, l: y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

9. a) $2\sqrt{29}$ b) 0
 10. a) $d = \frac{25\sqrt{17}}{17}, P = 25$
 b) $d = 2\sqrt{5}, P = 10$
 11. a) $2\sqrt{5}$ b) 1

5. a) Odległość między prostymi $d = 2\sqrt{5}$, czyli promień koła $r = \sqrt{5}$ i pole $P = 5\pi$.
 b) Odległość między prostymi $d = 10$, czyli $r = 5$ i pole $P = 25\pi$.
6. a) $AB \parallel CD, d = \frac{7\sqrt{2}}{2}, P = 38,5$
 b) $AB \parallel CD, d = 3\sqrt{10}, P = 75$
7. a) $y = x + 10\sqrt{2}$
 lub $y = x - 10\sqrt{2}$
 b) $y = x + 3 - 10\sqrt{2}$
 lub $y = x + 3 + 10\sqrt{2}$

8. a) Współrzędne punktów: $A(0, -4), B(2, 0)$, zatem:
 $|AB| = 2\sqrt{5}$
 Odległość między prostymi jest równa wysokości trójkąta $h = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, zatem pole:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 6$
- b) Współrzędne punktów: $A(0, -6), B(12, 0)$, zatem:
 $|AB| = 6\sqrt{5}$
 Odległość między prostymi jest równa wysokości równoległoboku $h = 2\sqrt{5}$, zatem pole:
 $P = 6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 60$

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

Twierdzenie

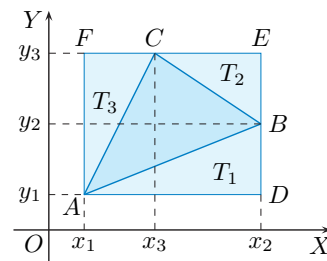
Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

W dowodzie powyższego wzoru na pole trójkąta ABC (rysunek obok), korzysta się np. z tego, że pole to można zapisać w postaci:

$$P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$$

gdzie $ADEF$ jest prostokątem, a P_1 , P_2 , P_3 są odpowiednio polami trójkątów T_1 , T_2 , T_3 .



Przykład 1

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(-1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(1, 5)$, korzystając z podanego wzoru. Następnie sprawdź otrzymany wynik, odejmując od pola prostokąta $ADEF$ sumę pól trójkątów T_1 , T_2 i T_3 .

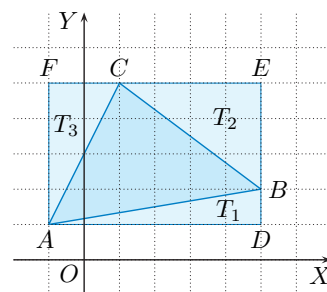
Współrzędne $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_2 = 2$, $x_3 = 1$, $y_3 = 5$ podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2| = \\ &= \frac{1}{2} |(-1) \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2| = \\ &= \frac{1}{2} |-2 + 25 + 1 + 5 - 5 - 2| = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11 \end{aligned}$$

Sprawdzamy otrzymany wynik:

$$P_{ADEF} = 6 \cdot 4 = 24, \quad P_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3, \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Zatem $P = P_{ADEF} - (P_1 + P_2 + P_3) = 24 - 13 = 11$.



Przykład 2

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(-2, -3)$, $B(8, 2)$, $C(4, 5)$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |(-2) \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) - (-2) \cdot 5 - 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 2| = \\ &= \frac{1}{2} |-4 + 40 - 12 + 10 + 24 - 8| = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25 \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 14 b) 26

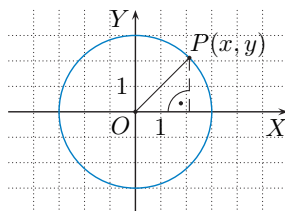
1. Korzystając z podanego wzoru, oblicz pole trójkąta ABC .

a) $A(-3, 3)$, $B(3, -2)$, $C(5, 1)$ b) $A(1, 6)$, $B(-3, -2)$, $C(6, 3)$

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych (1)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu $P(x, y)$ tego okręgu spełniają równanie:

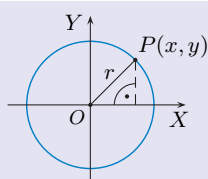
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Równanie okręgu

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



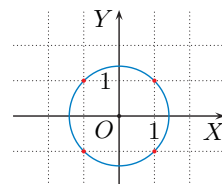
Uwaga. Zamiast „okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$ ” będziemy też pisać krótko: „okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ ”.

Przykład 1

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = \sqrt{2}$ (rysunek obok) ma równanie:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Należą do niego cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ i $(1, -1)$.



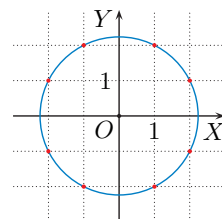
Ćwiczenie 1

Podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r . Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

- a) $r = 2$ b) $r = 4$ c) $r = 5$ d) $r = 7$

Ćwiczenie 2

Do okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ (rysunek obok) należy osiem punktów o obu współrzędnych całkowitych. Podaj równanie tego okręgu oraz współrzędne tych punktów.



Ćwiczenie 3

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ i promieniu r oraz należące do niego punkty o obu współrzędnych całkowitych. Przedstaw to na rysunku.

- a) $r = 2\sqrt{2}$ b) $r = 3\sqrt{2}$ c) $r = \sqrt{10}$ d) $r = \sqrt{17}$

Ćwiczenie 2

$x^2 + y^2 = 5$,
 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, 2)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$

Ćwiczenie 3

- a) $x^2 + y^2 = 8$,
 $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$
b) $x^2 + y^2 = 18$,
 $(3, 3)$, $(-3, 3)$, $(-3, -3)$, $(3, -3)$
c) $x^2 + y^2 = 10$,
 $(3, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 3)$, $(-3, 1)$, $(-3, -1)$, $(-1, -3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$
d) $x^2 + y^2 = 17$,
 $(4, 1)$, $(1, 4)$, $(-1, 4)$, $(-4, 1)$, $(-4, -1)$, $(-1, -4)$, $(1, -4)$, $(4, -1)$

Uczeń:

- podaje równanie okręgu o danych środku i promieniu,
- sprawdza, czy punkt należy do danego okręgu,
- podaje współrzędne środka i promień okręgu, korzystając z postaci kanonicznej równania okręgu,
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, przechodzącego przez dany punkt,
- wyznacza równanie okręgu, gdy dane są współrzędne końców jego średnicy,
- wyznacza równanie okręgu wpisanego w kwadrat i opisanego na kwadracie, prostokącie lub trójkącie prostokątnym,
- stosuje równanie okręgu w zadaniach.

Ćwiczenie 1

- a) $x^2 + y^2 = 4$,
4 punkty: $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$
b) $x^2 + y^2 = 16$,
4 punkty: $(4, 0)$, $(0, 4)$, $(-4, 0)$, $(0, -4)$
c) $x^2 + y^2 = 25$, 12 punktów:
 $(5, 0)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$,
 $(0, 5)$, $(-3, 4)$, $(-4, 3)$,
 $(-5, 0)$, $(-4, -3)$, $(-3, -4)$,
 $(0, -5)$, $(3, -4)$, $(4, -3)$
d) $x^2 + y^2 = 49$,
4 punkty: $(7, 0)$, $(0, 7)$, $(-7, 0)$, $(0, -7)$

Ćwiczenie 4

- a) $x^2 + y^2 = 36$
- b) $x^2 + y^2 = 64$
- c) $x^2 + y^2 = 3$
- d) $x^2 + y^2 = 50$

Ćwiczenie 5

- a) $r = 13, x^2 + y^2 = 169$
- b) $r = 3\sqrt{2}, x^2 + y^2 = 18$
- c) $r = \sqrt{41}, x^2 + y^2 = 41$
- d) $r = 2\sqrt{2}, x^2 + y^2 = 8$

Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ przechodzącego przez punkt:

- a) $(0, 6),$
- b) $(-8, 0),$
- c) $(\sqrt{3}, 0),$
- d) $(0, 5\sqrt{2}).$

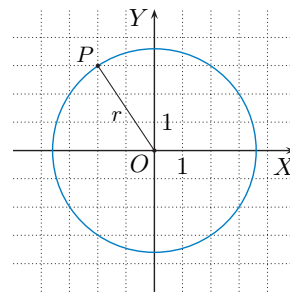
Przykład 2

Punkt $P(-2, 3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$. Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$:

$$(-2)^2 + 3^2 = r^2$$

Stąd $r^2 = 13$, czyli równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 = 13$, a jego promień $r = \sqrt{13}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie i promień okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$, jeśli okrąg ten przechodzi przez punkt P .

- a) $P(5, -12)$
- b) $P(-3, -3)$
- c) $P(-4, -5)$
- d) $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

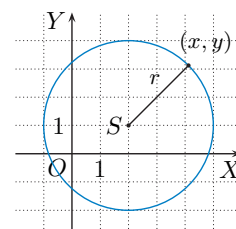
Wzór na odległość między dwoma punktami można wykorzystać do otrzymania równania okręgu o środku w punkcie (a, b) i promieniu r .

Przykład 3

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, 1)$ i promieniu $r = 3$.

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów (x, y) , których odległość od punktu $S(2, 1)$ jest równa 3, zatem jego równanie ma postać:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} &= 3 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 9\end{aligned}$$



Twierdzenie

Okrąg o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

Na przykład równanie $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36$ jest spełnione przez współrzędne wszystkich punktów należących do okręgu o środku $(3, -5)$ i promieniu 6.

Ćwiczenie 6

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r , a następnie narysuj ten okrąg.

- a) $S(2, 5)$, $r = 3$ b) $S(-7, 6)$, $r = 2$ c) $S(-4, -3)$, $r = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 7

Podaj współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

- a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$, e) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = 2\frac{7}{9}$,
b) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 9$, f) $x^2 + (y + \frac{9}{4})^2 = 10$,
c) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$, g) $(x - 1\frac{1}{6})^2 + y^2 = 45$,
d) $(x + 5)^2 + (y + 9)^2 = 225$, h) $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 8$.

Przykład 4

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, -1)$ przechodzącego przez punkt $P(3, 1)$.

Obliczamy promień: $r = |SP| = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

Zatem równanie okręgu ma postać: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P .

- a) $S(0, -1)$, $P(1, 1)$ b) $S(-3, -1)$, $P(-1, 3)$ c) $S(-1, 1)$, $P(2, 2)$

D Przykład 5

Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(2, 3)$ i promieniu 6.

Równanie okręgu o środku w punkcie $(2, 3)$ i promieniu 6 w postaci kanonicznej ma postać $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$.

Przekształcamy to równanie: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$$

D Ćwiczenie 9

a) Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(-3, 5)$ i promieniu 2.

b) Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 12 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(1, -6)$ i promieniu 5.

Ćwiczenie 9

a) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) = 4$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$$

b) $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 25$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 12y + 36) = 25$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 12y + 12 = 0$$

Ćwiczenie 6

a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

b) $(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 4$

c) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 2$

Ćwiczenie 7

a) $S(2, 5)$, $r = 4$

b) $S(4, -5)$, $r = 3$

c) $S(-3, 2)$, $r = 10$

d) $S(-5, -9)$, $r = 15$

e) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $r = \frac{5}{3}$

f) $S(0, -\frac{9}{4})$, $r = \sqrt{10}$

g) $S(1\frac{1}{6}, 0)$, $r = 3\sqrt{5}$

h) $S(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $r = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 8

a) $x^2 + (y + 1)^2 = 5$

b) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$

c) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x^2 + y^2 = 100$, A i B należą
 b) $x^2 + y^2 = 34$, B należy
 c) $x^2 + y^2 = 16$, A należy
 d) $x^2 + y^2 = 20$, A należy

2. a) 5π b) 4π

3. a) $S(-3, 6)$, $r = 2\sqrt{2}$
 b) $S(0, 1)$, $r = \sqrt{3}$
 c) $S(1, -5)$, $r = 4$
 d) $S(\sqrt{2}, 0)$, $r = 3\sqrt{2}$

4. K_1 – III, K_2 – IV, K_3 – II, K_4 – I

5. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$
 b) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$
 c) $(x+6)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{16}$
 d) $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{4})^2 = \frac{25}{4}$
 e) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 20$
 f) $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 27$

6. a) $(x-2)^2 + y^2 = 10$
 b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$
 c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$
 d) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 32$
 e) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$
 f) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$

7. a) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$
 b) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$
 c) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$
 d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
 e) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$
 f) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 17$

8. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 7$
 $(x^2+4x+4)+(y^2-8y+16) = 7$
 $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$

Zadania

1. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$ przechodzącego przez punkt P . Czy punkty A i B należą do tego okręgu?
 a) $P(0, -10)$, $A(6, -8)$, $B(-8, -6)$ c) $P(3, \sqrt{7})$, $A(0, -4)$, $B(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 b) $P(-5, 3)$, $A(-6, 0)$, $B(-3, -5)$ d) $P(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $A(2, 4)$, $B(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

2. Narysuj w jednym układzie współrzędnych okręgi K_1 i K_2 . Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami.

a) $K_1: x^2 + y^2 = 5$, $K_2: x^2 + y^2 = 10$

b) $K_1: x^2 + y^2 = 13$, $K_2: x^2 + y^2 = 17$

3. Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień.

a) $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 8$

c) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 16$

b) $x^2 + (y-1)^2 = 3$

d) $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 18$

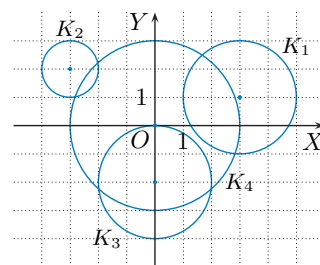
4. Dopasuj okręgi K_1 , K_2 , K_3 i K_4 (rysunek obok) do odpowiednich wzorów.

I. $x^2 + y^2 = 9$

II. $x^2 + (y+2)^2 = 4$

III. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

IV. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$



5. Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .

a) $S(1, 3)$, $r = 2$

c) $S(-6, 2)$, $r = \frac{3}{4}$

e) $S(-5, -1)$, $r = 2\sqrt{5}$

b) $S(-2, -3)$, $r = 7$

d) $S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, $r = 2\frac{1}{2}$

f) $S(\sqrt{3}, 0)$, $r = 3\sqrt{3}$

6. Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie S i przechodzi przez punkt P .

a) $S(2, 0)$, $P(1, 3)$

c) $S(2, -3)$, $P(4, -1)$

e) $S(-5, 2)$, $P(-8, -2)$

b) $S(4, 1)$, $P(1, -3)$

d) $S(-3, 1)$, $P(1, 5)$

f) $S(-4, -2)$, $P(-1, 0)$

7. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB . Narysuj ten okrąg.

a) $A(1, 2)$, $B(7, 2)$

c) $A(-1, -2)$, $B(3, 6)$

e) $A(-3, -4)$, $B(5, 2)$

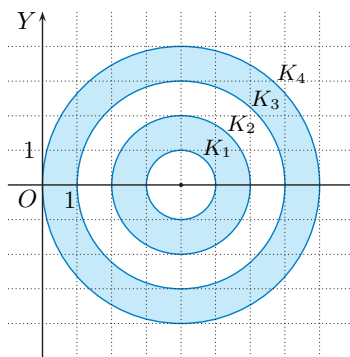
b) $A(-3, 3)$, $B(-3, -5)$

d) $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$

f) $A(-2, -3)$, $B(6, -1)$

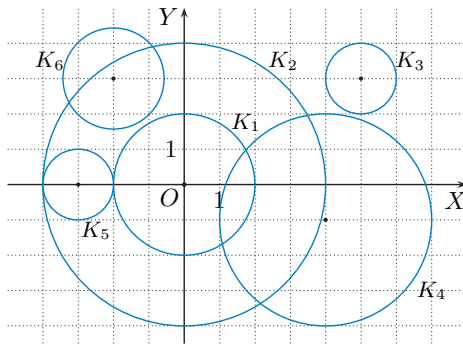
- D** 8. Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(-2, 4)$ i promieniu $\sqrt{7}$.

9. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC .
- a) $A(-1, 2), B(6, -2), C(3, 4)$ c) $A(2, 3), B(5, -1), C(-3, -7)$
b) $A(-2, -4), B(6, 0), C(0, 2)$ d) $A(-4, 1), B(4, -3), C(8, 5)$
10. Wyznacz równanie okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$ i okręgu wpisanego w ten kwadrat.
- a) $A(0, 6), B(2, 0), C(8, 2), D(6, 8)$
b) $A(-2, 0), B(0, -4), C(4, -2), D(2, 2)$
11. Wyznacz równanie okręgu, do którego należą wierzchołki prostokąta $ABCD$.
- a) $A(-3, -1), B(1, -3), C(4, 3), D(0, 5)$
b) $A(-9, 2), B(-1, -4), C(2, 0), D(-6, 6)$
12. a) Podaj równania okręgów K_1, K_2, K_3 i K_4 przedstawionych na rysunku obok.
b) Do których z przedstawionych okręgów należą punkty $A(4 - \sqrt{6}, \sqrt{3}), B(1, -\sqrt{7})$ i $C(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?
c) Jaki procent koła ograniczonego okręgiem K_4 został zacieniowany?
d) Podaj równanie okręgu o środku $(1, 0)$, który ma z okręgiem K_4 jeden punkt wspólny.



Powtórzenie

13. Punkt P należy do okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$. Oblicz długość łuku tego okręgu wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α .
- a) $P(-2, 2), \alpha = 90^\circ$ b) $P(5, \sqrt{11}), \alpha = 120^\circ$ c) $P(-3, -4), \alpha = 72^\circ$
14. Podaj równania okręgów $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ przedstawionych na rysunku obok.
15. Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu oraz oblicz współrzędne punktu A .
- a) $B(7, 1), S(3, -1)$
b) $B(1, 5), S(-2, 1)$



14. $K_1: x^2 + y^2 = 4, K_2: x^2 + y^2 = 16,$
 $K_3: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1,$
 $K_4: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9,$
 $K_5: (x + 3)^2 + y^2 = 1,$
 $K_6: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
15. a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20, A(-1, -3)$
b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25, A(-5, -3)$

9. a) $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$
b) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 20$
c) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{125}{4}$
d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$

10. a) Środek okręgu jest środkiem przekątnej AC : $S(4, 4)$.

Promień okręgu opisanego:

$$\frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{80} = 2\sqrt{5}$$

Promień okręgu wpisanego:

$$\frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}$$

Równanie okręgu opisanego:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

Równanie okręgu wpisanego:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

- b) Równanie okręgu opisanego:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

Równanie okręgu wpisanego:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

11. a) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{65}{4}$

b) $(x + \frac{7}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{125}{4}$

12. a) $K_1: (x - 4)^2 + y^2 = 1,$

$K_2: (x - 4)^2 + y^2 = 4,$

$K_3: (x - 4)^2 + y^2 = 9,$

$K_4: (x - 4)^2 + y^2 = 16$

- b) $A \in K_3, B \in K_4, C \in K_1$

c) Pole koła ograniczonego okręgiem K_4 jest równe 16π .

Pole obszaru zacieniowanego:

$$16\pi - 9\pi + 4\pi - \pi = 10\pi$$

$$\text{Zatem } \frac{10\pi}{16\pi} \cdot 100\% = 62,5\%.$$

d) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

lub $(x - 1)^2 + y^2 = 49$

13. a) Promień okręgu: $2\sqrt{2}$

Długość łuku:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi$$

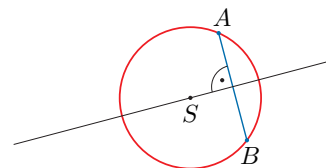
- b) 4π c) 2π

Uczeń:

- wyznacza równanie okręgu spełniającego podane warunki.

2.5. Okrąg w układzie współrzędnych (2)

Przypomnijmy, że jeśli odcinek AB jest cięciwą okręgu, to środek okręgu należy do symetralnej tej cięciwy.

**Przykład 1**

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(0, 5)$ i $B(4, 1)$, którego środek należy do prostej $l: x = -2$.

Odcinek AB jest cięciwą okręgu. Jego środkiem jest punkt $P(2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{4 - 0} = \frac{-4}{4} = -1$$

Symetralna odcinka AB (prosta k na rysunku obok) jest do niego prostopadła, zatem jej współczynnik kierunkowy jest równy 1. Jej równanie ma więc postać: $y = x + b$.

Ponieważ punkt $P(2, 3)$ należy do prostej k , otrzymujemy: $3 = 2 + b$, skąd $b = 1$.

Prosta k opisana jest więc równaniem:

$$y = x + 1$$

Środek okręgu S jest punktem przecięcia prostej k i prostej l . Aby wyznaczyć jego współrzędne, rozwiązujemy układ równań:

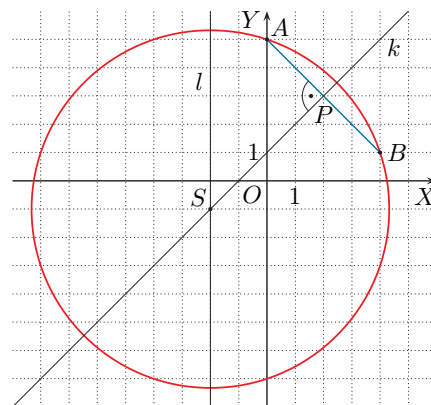
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Zatem otrzymujemy $S(-2, -1)$.

Obliczamy promień okręgu:

$$|SA| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Równanie okręgu ma postać: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 40$.

**Ćwiczenie 1**

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B , którego środek należy do prostej l .

a) $A(-2, 2)$, $B(2, 4)$, $l: y = 1$

b) $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, $l: y = x - 2$

Ćwiczenie 1

a) Środek odcinka AB : $P(0, 3)$

Współczynnik kierunkowy prostej AB : $\frac{1}{2}$

Symetralna odcinka AB : $y = -2x + 3$

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Środek okręgu: $S(1, 1)$

Promień okręgu: $|SA| = \sqrt{10}$

Równanie okręgu: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

b) Środek odcinka AB : $P(4, -4)$

Współczynnik kierunkowy prostej AB : 1

Symetralna odcinka AB : $y = -x$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Środek okręgu: $S(1, -1)$

Promień okręgu: $|SA| = \sqrt{20}$

Równanie okręgu: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$

Multiteka

- Okrąg i trójkąt w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A(-4, -2)$, $B(6, -2)$ i $C(2, 4)$.

Środkiem okręgu opisanego na trójkącie jest punkt przecięcia symetralnych jego boków. Wyznamy symetralne boków AB i AC trójkąta ABC (rysunek obok).

Zauważmy, że symetralną boku AB jest prosta k : $x = 1$.

Aby wyznaczyć równanie symetralnej boku AC , skorzystamy z tego, że jest ona prostopadła do boku AC i przechodzi przez jego środek – punkt $P(-1, 1)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AC :

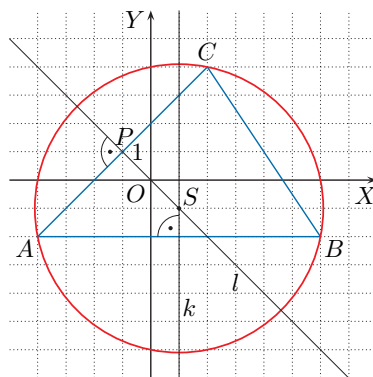
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4 - (-2)}{2 - (-4)} = \frac{4+2}{2+4} = 1$$

Zatem symetralna boku AC , prosta l , ma współczynnik kierunkowy równy -1 , więc jej równanie ma postać: $y = -x + b$.

Ponieważ punkt $P(-1, 1)$ należy do prostej l , otrzymujemy równanie:

$$1 = -(-1) + b$$

Stąd $b = 0$, czyli prosta l ma równanie $y = -x$. Środek okręgu S jest punktem przecięcia prostej k i prostej l , zatem ma współrzędne $(1, -1)$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

a) $A(6, 5)$, $B(0, -1)$, $C(2, 5)$

b) $A(3, 6)$, $B(-3, -6)$, $C(3, -2)$

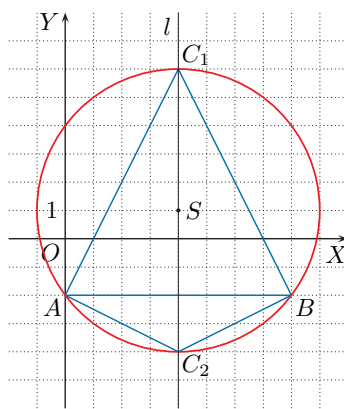
Przykład 3

Okrąg $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$ jest opisany na trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB , gdzie $A(0, -2)$ i $B(8, -2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

Środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC jest punkt $S(4, 1)$, a promień tego okręgu jest równy 5.

Zauważmy, że symetralną podstawy AB trójkąta ABC jest prosta l : $x = 4$.

Punkt C należy do prostej l oraz $|SC| = 5$, zatem ma on współrzędne $(4, 6)$ lub $(4, -4)$.



Ćwiczenie 2

a) Środek odcinka AB : $P(3, 2)$

Symetralna odcinka AB :

$$y = -x + 5$$

Środek odcinka AC : $Q(4, 5)$

Symetralna odcinka AC : $x = 4$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Środek okręgu: $S(4, 1)$

Promień okręgu: $|SB| = \sqrt{20}$

Równanie okręgu:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

b) Środek odcinka AB : $P(0, 0)$

Symetralna odcinka AB :

$$y = -\frac{1}{2}x$$

Środek odcinka AC : $Q(3, 2)$

Symetralna odcinka AC : $y = 2$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = 2 \end{cases}$$

Środek okręgu: $S(-4, 2)$

Promień okręgu: $|SA| = \sqrt{65}$

Równanie okręgu:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 65$$

Ćwiczenie 3

Symetralna odcinka AB : $x = 1$,
stąd $C(1, y)$

$$S(1, 1) \text{ oraz } |SC| = 2\sqrt{2}$$

$$|SC| = \sqrt{(y-1)^2} = |y-1| = 2\sqrt{2}$$

$$C(1, 1 + 2\sqrt{2}) \text{ lub } C(1, 1 - 2\sqrt{2})$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $(x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{145}{4}$

b) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 50$

c) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 26$

2. a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 40$

b) $x^2 + (y-2)^2 = 20$

c) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 50$

d) $(x+\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{65}{2}$

e) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

f) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$

3. Długość podstawy: $|AB| = 8$
Środek odcinka AB : $P(2, -1)$

Prosta AB : $y = -1$

Symetralna odcinka AB :

$x = 2$, stąd $C(2, y)$

$$S(2, 2) \text{ oraz } |SC| = 5$$

$$|SC| = \sqrt{(y-2)^2} =$$

$$= |y-2| = 5$$

$$y = -3 \text{ lub } y = 7$$

a) $C(2, 7)$, $|PC| = 8$

Pole trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$

b) $C(2, -3)$, $|PC| = 2$

Pole trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$

4. Długość podstawy: $|AB| = 6$

Środek odcinka AB : $P(6, 1)$

Symetralna odcinka AB :

$y = 1$, stąd $C(x, 1)$

$$S(2, 1) \text{ oraz } |SC| = 5$$

$$|SC| = \sqrt{(x-2)^2} =$$

$$= |x-2| = 5$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 7$$

$$C(-3, 1) \text{ lub } C(7, 1)$$

$$|AC| = 3\sqrt{10} \text{ lub } |AC| = \sqrt{10}$$

$$Ob = 6(\sqrt{10} + 1) \text{ lub}$$

$$Ob = 2(\sqrt{10} + 3)$$

Ćwiczenie 3

Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w okrąg $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C , jeśli $A(-1, -1)$ i $B(3, -1)$ są wierzchołkami przy podstawie tego trójkąta.

Zadania

1. Punkt P jest środkiem cięciwy AB okręgu, którego środek należy do prostej l . Wyznacz równanie tego okręgu.

a) $A(3, 5)$, $P(4, 3)$, $l: x = -1$

c) $A(-2, 3)$, $P(2, 5)$, $l: y = x$

b) $A(4, 0)$, $P(1, -1)$, $l: y = 5$

d) $A(2, -3)$, $P(-1, -1)$, $l: y = x + 1$

2. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

a) $A(-3, 2)$, $B(9, 2)$, $C(5, 10)$

d) $A(-7, -3)$, $B(3, -1)$, $C(1, 5)$

b) $A(-2, 6)$, $B(-2, -2)$, $C(4, 4)$

e) $A(0, -3)$, $B(7, -2)$, $C(7, 4)$,

c) $A(3, -3)$, $B(9, 3)$, $C(-3, 9)$

f) $A(-5, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(1, 2)$

3. Okrąg $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ jest opisany na trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB , gdzie $A(-2, -1)$, $B(6, -1)$. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wierzchołek C leży:

a) w I ćwiartce układu współrzędnych,

b) w IV ćwiartce układu współrzędnych.

4. Okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ jest opisany na trójkącie równoramiennym ABC , którego podstawą jest odcinek AB , gdzie $A(6, -2)$, $B(6, 4)$. Oblicz obwód tego trójkąta.

Powtórzenie

5. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-2, 4)$ i $B(4, 4)$, którego środek należy do prostej $l: y = -1$.

6. Okrąg $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 29$ jest opisany na trójkącie ABC . Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jest on:

a) prostokątny równoramienny,

b) prostokątny, a jedna jego przyprostokątna jest zawarta w osi OY ,

c) równoramienny ostrokątny oraz $A(-3, 4)$ i $B(-3, 0)$ są wierzchołkami przy jego podstawie,

d) równoramienny rozwartokątny oraz $A(-3, 4)$ i $B(7, 4)$ są wierzchołkami przy jego podstawie.

5. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 34$

6. $S(2, 2)$, $r = \sqrt{29}$

a) Przeciwpromiennik: $2r = 2\sqrt{29}$

Przyprostokątne: $\sqrt{58}$, $\sqrt{58}$

Pole trójkąta: $P = 29$

b) Przeciwpromiennik: $2\sqrt{29}$

Punkty przecięcia okręgu z osią OY : $(0, 7)$, $(0, -3)$

Przyprostokątne: 10 , $\sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 10^2} = 4$

Pole trójkąta: $P = 20$

c) $2(\sqrt{29} + 5)$

d) $5(\sqrt{29} - 2)$

Postać ogólna równania okręgu

Równanie okręgu zapisane w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

można przekształcić do **postaci ogólnej**:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

gdzie A , B i C są pewnymi stałymi.

Przykład 1

Zapisz równanie okręgu $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ w postaci ogólnej.

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 = 0$$

Nie zawsze równanie postaci $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ jest równaniem okręgu.

Przykład 2

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10 = 0$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2 \cdot 5y + 25) - 10 - 1 - 25 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 36$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(-1, -5)$ i promieniu 6.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

$$(x^2 + 2 \cdot 3x + 9) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + 13 - 9 - 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Powyższe równanie jest prawdziwe tylko dla $x = -3$ i $y = 2$, zatem spełniają je jedynie współrzędne punktu $(-3, 2)$. Nie jest to więc równanie okręgu.

c) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + (y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) + 3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{2}$$

Suma kwadratów nie może być liczbą ujemną, więc powyższe równanie jest sprzeczne (zbiór rozwiązań jest pusty) i nie może być równaniem okręgu.

1. Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4\frac{1}{2} = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6y + 2x = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 - 20x - 4y + 2 = 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ – równanie okręgu

b) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = -2$ – nie jest to równanie okręgu

c) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$ – równanie okręgu

d) $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 0$ – nie jest to równanie okręgu

e) $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ – równanie okręgu

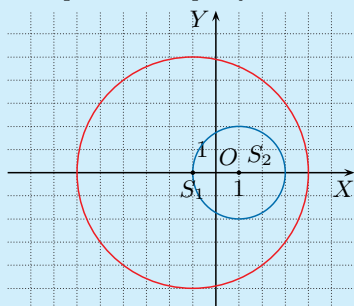
f) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$ – równanie okręgu

Uczeń:

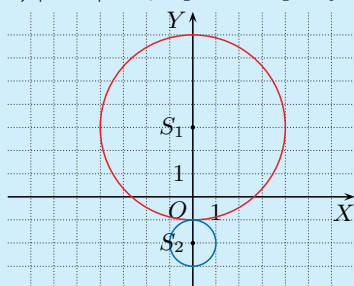
- określa liczbę punktów wspólnych dwóch okręgów,
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami,
- oblicza promień okręgu o danym środku, znając jego położenie względem okręgu opisanego równaniem.

Ćwiczenie 1

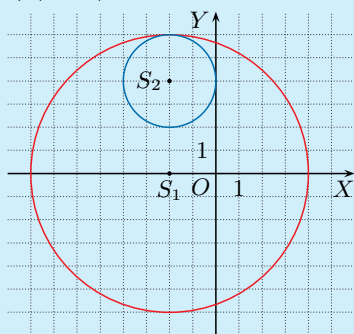
- a) $|S_1 S_2| = 2$,
brak punktów wspólnych



- b) $|S_1 S_2| = 5$, 1 punkt wspólny



- c) $|S_1 S_2| = 4$, 1 punkt wspólny



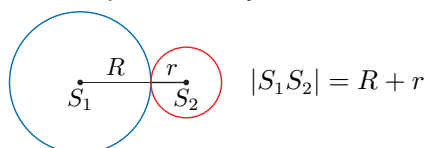
2.6. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

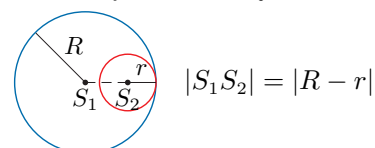
Okręgi styczne

(mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie

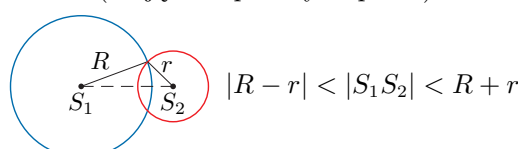


styczne wewnętrznie



Okręgi przecinające się

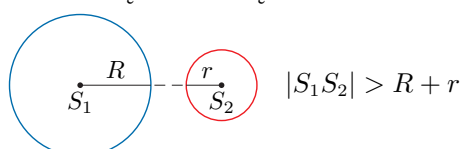
(mają dwa punkty wspólne)



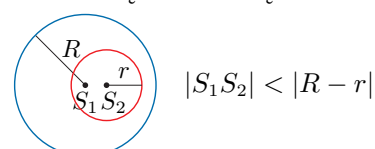
Okręgi rozłączne

(nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



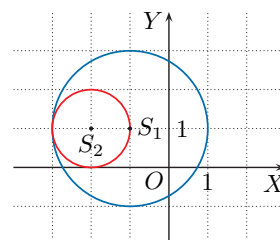
rozłączne wewnętrznie



Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku $S_1(-1, 1)$ i promieniu $R = 2$ oraz okrąg o środku $S_2(-2, 1)$ i promieniu $r = 1$.

Zauważ, że $|R - r| = 1 = |S_1 S_2|$. Okręgi te mają jeden punkt wspólny (są styczne wewnętrznie).

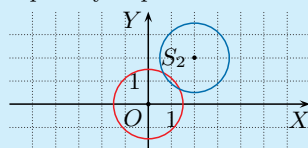


Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu R oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

- a) $S_1(-1, 0)$, $R = 5$, $S_2(1, 0)$, $r = 2$ c) $S_1(-2, 0)$, $R = 6$, $S_2(-2, 4)$, $r = 2$
b) $S_1(0, 3)$, $R = 4$, $S_2(0, -2)$, $r = 1$ d) $S_1(0, 0)$, $R = \frac{3}{2}$, $S_2(2, 2)$, $r = \frac{3}{2}$

- d) $|S_1 S_2| = 2\sqrt{2}$,
2 punkty wspólne



Multiteka

- Położenie okręgów w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi:

$$K_1: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16 \quad \text{ i } \quad K_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4?$$

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(3, 4)$, a jego promień $R = 4$.

Środkiem okręgu K_2 jest punkt $S_2(1, 2)$, a jego promień $r = 2$.

Obliczamy odległość między środkami tych okręgów:

$$|S_1S_2| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$R+r = 6$ oraz $|R-r| = 2$, zatem $|R-r| < |S_1S_2| < R+r$ (gdyż $2 < 2\sqrt{2} < 6$), więc okręgi K_1 i K_2 mają dwa punkty wspólne (przecinają się).

Ćwiczenie 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi K_1 i K_2 ?

a) $K_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 20, \quad K_2: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$

b) $K_1: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 49, \quad K_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

c) $K_1: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 36, \quad K_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

d) $K_1: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 40, \quad K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

Przykład 3

Dany jest okrąg $K_1: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie $S_2(5, 4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(-3, -2)$, a jego promień $R = 5$.

Obliczamy odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 :

$$|S_1S_2| = \sqrt{(5-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

Dane okręgi mają jeden punkt wspólny, gdy:

- są styczne zewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = 5 + r$, skąd $r = 5$ lub
- są styczne wewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = |5 - r|$, skąd $r = 15$.

Ćwiczenie 3

Dany jest okrąg $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

a) $S_2(4, 2)$

b) $S_2(-4, 4)$

Ćwiczenie 4

Dany jest okrąg $(x+7)^2 + (y-5)^2 = 25$ oraz okrąg o środku w punkcie $S(5, -4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają dwa punkty wspólne?

Ćwiczenie 4

$S_1(-7, 5), R = 5, |S_1S| = 15$

Okręgi mają dwa punkty wspólne, gdy $|R-r| < |S_1S| < R+r$.

$$|5-r| < 15 < 5+r$$

$$r \in (-10; 20) \text{ i } r > 10$$

Zatem $r \in (10; 20)$.

Ćwiczenie 2

a) $S_1(1, 1), R = 2\sqrt{5}$

$S_2(7, 4), r = \sqrt{5}$

$$|S_1S_2| = 3\sqrt{5}$$

$$R+r = 3\sqrt{5} = |S_1S_2|$$

okręgi styczne zewnętrznie

1 punkt wspólny

b) $S_1(3, 2), R = 7$

$S_2(2, -1), r = 3$

$$|S_1S_2| = \sqrt{10}$$

$$|R-r| = 4 > \sqrt{10} = |S_1S_2|$$

okręgi rozłączne wewnętrznie

0 punktów wspólnych

c) $S_1(-3, 3), R = 6$

$S_2(-1, -1), r = 2$

$$|S_1S_2| = \sqrt{20}$$

$$R+r = 8 \text{ oraz } |R-r| = 4,$$

$$\text{zatem } |R-r| < |S_1S_2| < R+r$$

okręgi przecinają się

2 punkty wspólne

d) $S_1(4, 4), R = 2\sqrt{10}$

$S_2(1, 3), r = \sqrt{10}$

$$|S_1S_2| = \sqrt{10}$$

$$|R-r| = \sqrt{10} = |S_1S_2|$$

okręgi styczne wewnętrznie

1 punkt wspólny

Ćwiczenie 3

$S_1(-3, 2), R = 4$

a) $|S_1S_2| = 7$

Okręgi styczne zewnętrznie:

$$|S_1S_2| = 7 = 4 + r, \text{ więc } r = 3$$

Okręgi styczne wewnętrznie:

$$|S_1S_2| = 7 = |4 - r|, \text{ więc } r = 11$$

b) $|S_1S_2| = \sqrt{5}$

Okręgi styczne zewnętrznie:

$$|S_1S_2| = \sqrt{5} = 4 + r,$$

$$\text{więc } r = \sqrt{5} - 4 < 0$$

Okręgi styczne wewnętrznie:

$$|S_1S_2| = \sqrt{5} = |4 - r|,$$

$$\text{więc } r = 4 - \sqrt{5} \text{ lub } r = 4 + \sqrt{5}$$

Odpowiedzi do zadań

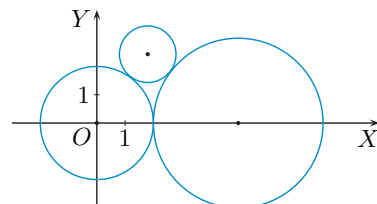
- d – odległość między środkami okręgów
 - $d = 6$, styczne zewnętrznie
 - $d = 5$, styczne wewnętrznie
 - $d = 5$, przecinają się
 - $d = 5\sqrt{2}$, przecinają się
 - $d = 2\sqrt{2}$, rozłączne wewnętrznie
 - $d = 13$, rozłączne zewnętrznie
- a) $d = 13$,
1 punkt dla $r \in \{5, 21\}$,
2 punkty dla $r \in (5; 21)$
b) $d = \sqrt{41}$,
1 punkt dla
 $r \in \{\sqrt{41} - 4, \sqrt{41} + 4\}$,
2 punkty dla
 $r \in (\sqrt{41} - 4; \sqrt{41} + 4)$
c) $d = 4\sqrt{5}$,
1 punkt dla
 $r \in \{4\sqrt{5} - 7, 4\sqrt{5} + 7\}$,
2 punkty dla
 $r \in (4\sqrt{5} - 7; 4\sqrt{5} + 7)$
- a) $K_1: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$,
 $K_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 2$,
styczne zewnętrznie
b) $K_1: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 8$,
 $K_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$,
przecinają się
c) $K_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$,
 $K_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$,
przecinają się

5. a) 0 b) 0 c) 2 d) 1

- a) 1 punkt dla $r \in \{3, 7\}$,
2 punkty dla $r \in (3; 7)$
b) 1 punkt dla
 $r \in \{3\sqrt{5} - 5, 3\sqrt{5} + 5\}$,
2 punkty dla
 $r \in (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$

Zadania

- Dane są okręgi K_1 i K_2 . Oblicz odległość między środkami tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.
 - $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$, $K_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 16$
 - $K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$, $K_2: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$
 - $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 90$, $K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$
 - $K_1: (x+4)^2 + (y-5)^2 = 84$, $K_2: (x+5)^2 + (y+2)^2 = 16$
 - $K_1: (x+1)^2 + (y-8)^2 = 49$, $K_2: (x-1)^2 + (y-6)^2 = 4$
 - $K_1: (x-7)^2 + (y-2)^2 = 49$, $K_2: (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$
- Oblicz odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 . Dla jakich wartości r , gdzie $r > 0$, okręgi te mają jeden punkt wspólny, a dla jakich – dwa punkty wspólne?
 - $K_1: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 64$, $K_2: (x+7)^2 + (y-4)^2 = r^2$
 - $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$, $K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = r^2$
 - $K_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 49$, $K_2: (x+6)^2 + (y-1)^2 = r^2$
- Średnicą okręgu K_1 jest odcinek AB , a średnicą okręgu K_2 – odcinek CD . Wyznacz równania tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.
 - $A(-3, -1)$, $B(1, 3)$, $C(3, 3)$, $D(1, 5)$
 - $A(-5, 1)$, $B(-1, -3)$, $C(1, -1)$, $D(1, 5)$
 - $A(-2, 1)$, $B(4, 1)$, $C(3, 2)$, $D(1, 4)$
- Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, położone są w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



Powtórzenie

- Ile punktów wspólnych mają okręgi $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ i K_2 ?
 - $K_2: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$
 - $K_2: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$
 - $K_2: (x-4)^2 + (y+4)^2 = 5$
 - $K_2: (x-6)^2 + (y+7)^2 = 225$
- Dany jest okrąg K_1 o środku $S_1(1, 3)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okrąg ten ma jeden punkt wspólny z okręgiem K_2 , a dla jakich – dwa punkty wspólne?
 - $K_2: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$
 - $K_2: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

- Niech $h = |DO_3|$.

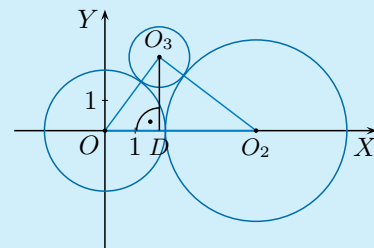
Z warunków zadania: $|OO_2| = 5$, $|O_2O_3| = 4$, $|OO_3| = 3$. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt OO_2O_3 jest prostokątny. Obliczamy pole trójkąta OO_2O_3 na dwa sposoby:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 5h$$

czyli $h = \frac{12}{5}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODO_3 mamy:

$$|OD|^2 + h^2 = |OO_3|^2$$

czyli $|OD| = \frac{9}{5}$. Zatem współrzędne środka najmniejszego okręgu: $O_3(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.



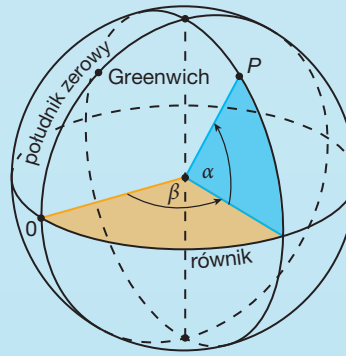
Współrzędne geograficzne

Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:

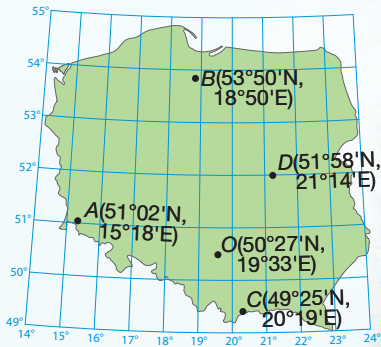
szerokość geograficzną (kąt α mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),

długość geograficzną (kąt β mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).

Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.



Na mapie punkt O oznacza położenie zamku Ogrodzieniec ($50^{\circ}27'N$, $19^{\circ}33'E$) pokazanego na zdjęciu obok.



1 Czy potrafisz wskazać, które z punktów A, B, C, D odpowiadają położeniu zamków na zdjęciach?



Zamek w Niedzicy



Zamek w Czersku



Zamek Czocho



Zamek w Gniewie

Odpowiedzi do zadań

1. A – Zamek Czocho
B – Zamek w Gniewie
C – Zamek w Niedzicy
D – Zamek w Czersku

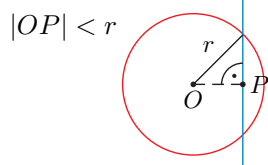
Uczeń:

- podaje liczbę punktów wspólnych i określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z jego promieniem,
- korzysta z własności stycznej do okręgu,
- podaje równania stycznych do okręgu równoległych do osi układu współrzędnych.

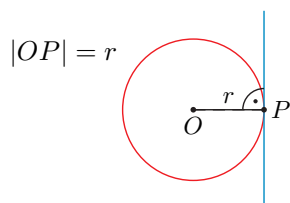
2.7. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

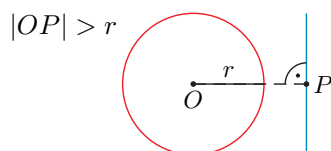
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.



Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.



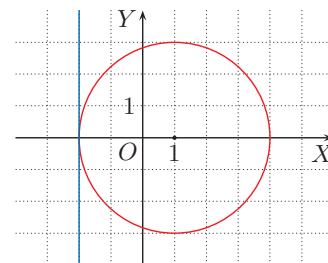
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $(1, 0)$ ma prosta $x = -2$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla $r = 3$ (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla $r > 3$,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla $0 < r < 3$.



Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $S(2, -2)$, $k: y = 2$ | c) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $k: x = 1 - \sqrt{2}$ |
| b) $S(-2, 2)$, $k: x = \sqrt{3}$ | d) $S(-1, 3)$, $k: y = x + 2$ |

Ćwiczenie 1

- | | |
|---|---|
| a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$ | c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2} - \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \infty)$ |
| b) 0 punktów dla $r \in (0; 2 + \sqrt{3})$,
1 punkt dla $r = 2 + \sqrt{3}$,
2 punkty dla $r \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$ | d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; \infty)$ |

Multiteka

- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i prosta $l: x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

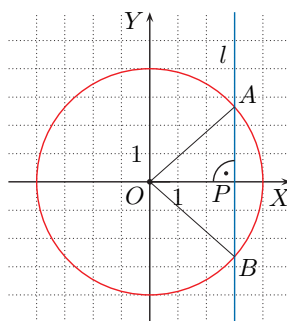
Środkiem okręgu jest punkt $(0, 0)$, a promień jest równy 4. Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą.

Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 2\sqrt{7}$$



Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 25$.

- a) $l: x = 4$ b) $l: x = -1$ c) $l: y = \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu.

- a) $l: x = 3, S(-1, -2)$ b) $l: y = -2, S(4, 1)$

Przykład 3

Ile punktów wspólnych z okręgiem o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$ ma prosta $l: x - 3y + 3 = 0$?

Promień okręgu jest równy $\sqrt{10}$, a środkiem okręgu jest punkt $S(4, -1)$. Obliczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta są styczne – mają jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 4 ma prosta l ?

- a) $S(3, 4), l: 12x + 5y - 4 = 0$ c) $S(-3, 2), l: 4x + 3y + 6 = 0$
b) $S(7, 4), l: 3x + 4y - 12 = 0$ d) $S(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), l: x + y = 0$

Ćwiczenie 4

Niech d – odległość środka okręgu od prostej.

- a) $d = 4 = r$, zatem jest jeden punkt wspólny.
b) $d = 5 > r$, zatem nie ma punktów wspólnych.
c) $d = 0 < r$, zatem są dwa punkty wspólne.
d) $d = 4 = r$, zatem jest jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 2

Środek okręgu: $S(2, 0)$,

promień: $r = 5$,

P – środek cięciwy

a) $|SP| = 2$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

Zatem $|AB| = 2\sqrt{21}$.

b) $|SP| = 3$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Zatem $|AB| = 8$.

c) Odległość środka okręgu

$S(2, 0)$ od prostej $x - 2y = 0$:

$$|SP| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Zatem $|AB| = \frac{22\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 3

a) $|SP| = 4, |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$,

$r^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, zatem:

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

b) $|SP| = 3, |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$,

$r^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, zatem:

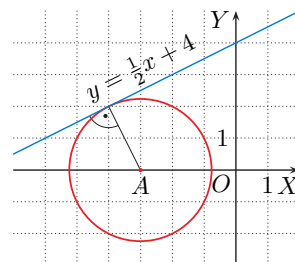
$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 18$$

Odpowiedzi do zadań

- 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; 8)$,
1 punkt dla $r = 8$,
2 punkty dla $r \in (8; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; \frac{5}{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{5}{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{5}{2}; \infty)$
- $\sqrt{5}$ b) 5
 - $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $2\sqrt{10}$
- $d = \sqrt{5}$, 2 punkty
 - $d = 2\sqrt{5}$, 0 punktów
 - $d = 2\sqrt{2}$, 2 punkty
 - $d = \sqrt{13}$, 0 punktów
 - $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$, 2 punkty
 - $d = 3$, 1 punkt
- 0 punktów dla $r \in (0; 2)$,
1 punkt dla $r = 2$,
2 punkty dla $r \in (2; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{5})$,
1 punkt dla $r = 2\sqrt{5}$,
2 punkty dla $r \in (2\sqrt{5}; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; \frac{23}{5})$,
1 punkt dla $r = \frac{23}{5}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{23}{5}; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; \frac{8\sqrt{5}}{5})$,
1 punkt dla $r = \frac{8\sqrt{5}}{5}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{8\sqrt{5}}{5}; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{6})$,
1 punkt dla $r = 2\sqrt{6}$,
2 punkty dla $r \in (2\sqrt{6}; \infty)$
 - 0 punktów dla $r \in (0; \frac{11}{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{11}{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{11}{2}; \infty)$
- 1 b) 2 c) 0 d) 2

Zadania

- Ile punktów wspólnych z okręgiem $(x+3)^2 + (y-1)^2 = r^2$ ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?
 - $k: y = 5$
 - $k: x = 5$
 - $k: x = -\frac{1}{2}$
- Prosta l jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A . Oblicz promień tego okręgu.
 - $l: y = \frac{1}{2}x + 4$, $A(-3, 0)$ (rysunek obok)
 - $l: 3x + 4y - 5 = 0$, $A(-4, -2)$
 - $l: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $A(2, 1)$
 - $l: y = 3x - 1$, $A(-5, 4)$
- Oblicz odległość punktu S od prostej l . Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma ta prosta?
 - $S(1, 3)$, $l: 2x + y = 0$
 - $S(-7, 2)$, $l: x - 2y + 1 = 0$
 - $S(-2, 4)$, $l: x - y + 2 = 0$
 - $S(-1, -2)$, $l: \frac{2}{3}x - y + 3 = 0$
 - $S(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $l: 3x + y - 1 = 0$
 - $S(-8\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$, $l: x - 7y + 7 = 0$
- Określ liczbę punktów wspólnych prostej l z okręgiem o środku w punkcie S w zależności od promienia r tego okręgu.
 - $l: 3x + 4y - 1 = 0$, $S(1, 2)$
 - $l: \frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2} = 0$, $S(-5, 1)$
 - $l: \frac{4}{3}x - y + 4 = 0$, $S(5, 3)$
 - $l: x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$, $S(3, 2)$
 - $l: \sqrt{2}x - y = 0$, $S(6, 0)$
 - $l: \sqrt{3}x - y + 4 = 0$, $S(2\sqrt{3}, -1)$



Powtórzenie

- Ile punktów wspólnych ma podany okrąg z prostą $y = -2$?
 - $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$
 - $(x-8)^2 + (y+1)^2 = 4$
 - $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 4$
 - $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$
- Uzasadnij, że prosta k jest styczna do okręgu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.
 - $k: y = \frac{4}{3}x + 9$
 - $k: y = \frac{3}{4}x - 5$
- Ile punktów wspólnych ma okrąg $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 17$ z prostą AB ?
 - $A(-2, -1)$, $B(4, -4)$
 - $A(0, -3)$, $B(2, 5)$
 - $A(1, -2)$, $B(3, 4)$
- Podaj równania stycznych do okręgu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 49$ równoległych do osi:
 - OX ,
 - OY .

- Środek okręgu: $S(1, 2)$, promień okręgu: $r = 5$

- Obliczamy odległość środka S od prostej $k: 4x - 3y + 27 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 27|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

Zatem prosta k jest styczna do okręgu.

- Obliczamy odległość środka S od prostej $k: 3x - 4y - 20 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

Zatem prosta k jest styczna do okręgu.

- 2 b) 1 c) 0

- $y = -8$, $y = 6$ b) $x = -4$, $x = 10$

2.8. Układy równań – powtórzenie

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania i podaj jego interpretację geometryczną.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych.

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 2(3y - 5) + 5y = 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania.

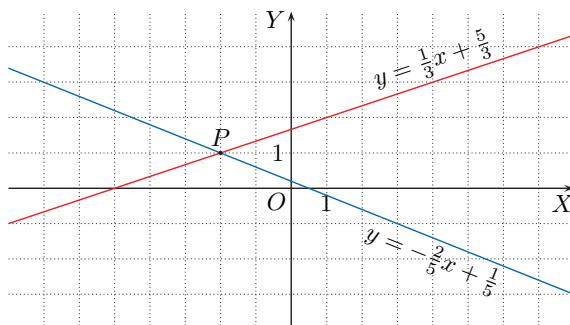
Podstawiamy wyrażenie $3y - 5$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 6y - 10 + 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 11y = 11 / : 11 \end{cases}$$

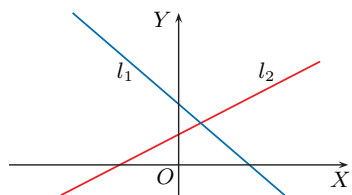
$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

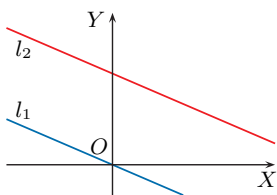


Aby przedstawić interpretację geometryczną układu równań, równania przekształcamy do postaci $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ i $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$. Rysujemy proste określone tymi równaniami. Punkt $P(-2, 1)$ jest punktem przecięcia tych prostych.

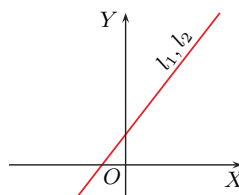
Przypomnijmy, że jeśli proste l_1 i l_2 odpowiadają równaniom układu, to możliwa jest jedna z następujących sytuacji.



Układ oznaczony – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ sprzeczny – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony – proste pokrywają się.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

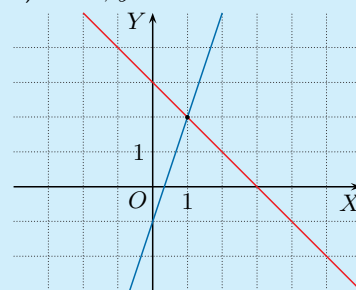
c) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

Uczeń:

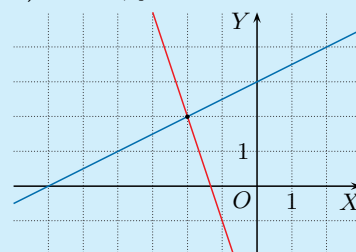
- rozwiązuje algebraicznie układ równań i podaje interpretację geometryczną rozwiązania,
- wyznacza punkty wspólne prostej i paraboli; podaje interpretację geometryczną rozwiązania.

Ćwiczenie 1

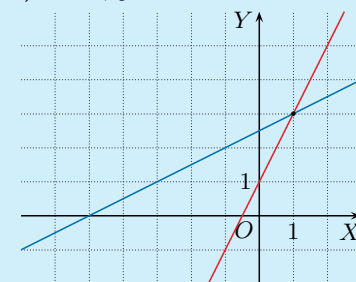
a) $x = 1, y = 2$



b) $x = -2, y = 2$

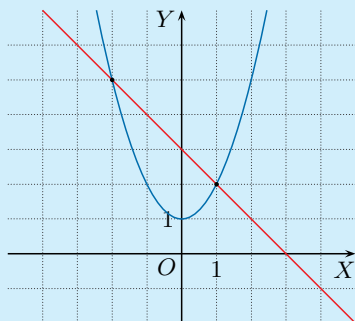


c) $x = 1, y = 3$

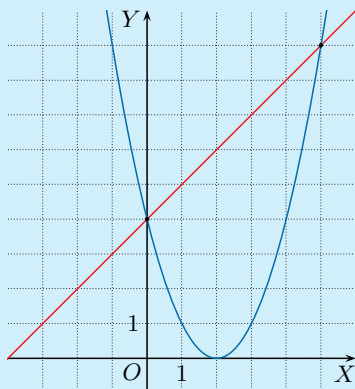


Ćwiczenie 2

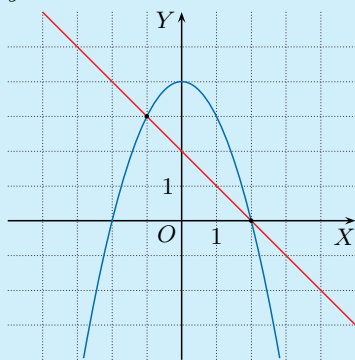
a) $x = -2, y = 5$ lub $x = 1, y = 2$



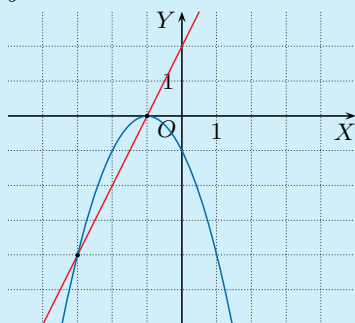
b) $x = 0, y = 4$ lub $x = 5, y = 9$



c) $x = -1, y = 3$ lub $x = 2, y = 0$



d) $x = -3, y = -4$ lub $x = -1, y = 0$



Przypomnijmy, że prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$ i podaj jego interpretację geometryczną.

Układ rozwiążemy metodą podstawiania. Do drugiego równania w miejsce y podstawiamy wyrażenie $2x - 2$ i otrzymujemy:

$$2x - 2 = x^2 - 2$$

$$2x - x^2 = 0$$

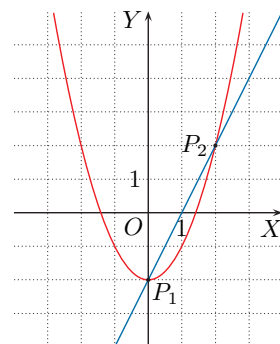
$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2$$

Dla każdej wartości niewiadomej x obliczamy wartość niewiadomej y i otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Na rysunku przedstawiono prostą $y = 2x - 2$ i parabolę $y = x^2 - 2$. Mają one dwa punkty wspólne: $P_1(0, -2)$ i $P_2(2, 2)$.



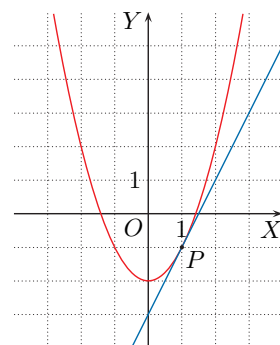
Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = x^2 - 2$ i prostą $y = 2x - 3$. Mają one jeden punkt wspólny: $P(1, -1)$.

Układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

ma zatem jedno rozwiązanie (rozwiąż ten układ algebraicznie).



Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

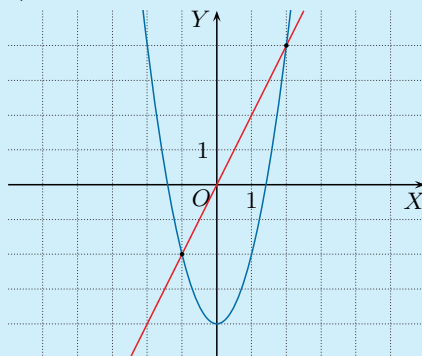
e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4 \\ y = 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = (x - 2)^2 \end{cases}$

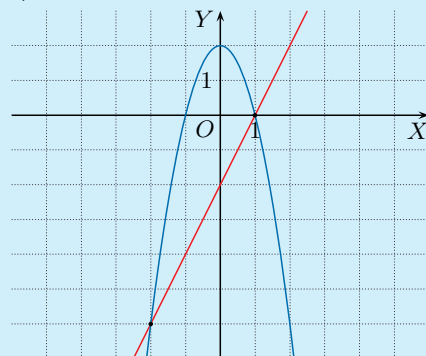
d) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -(x + 1)^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -2x^2 + 2 \end{cases}$

e) $x = -1, y = -2$ lub $x = 2, y = 4$



f) $x = -2, y = -6$ lub $x = 1, y = 0$



Zadania

1. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x + y = -5 \\ 5x - 3y = -3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 3y = -10 \end{cases} \end{array}$$

2. Boki trójkąta są zawarte w prostych: $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków. Narysuj ten trójkąt.

3. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = x - 5 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = (x - 1)^2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = -x^2 - 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = (x + 3)^2 \end{cases} \end{array}$$

4. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = 2x^2 - 2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y = -2x - 6 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2(x - 1)^2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - 2 \end{cases} \end{array}$$

Powtórzenie

5. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \end{array}$$

6. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych parabolę $y = -x^2 + 3$ oraz prostą k . Odczytaj współrzędne ich punktów wspólnych.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} k: y = x + 1 & \text{c)} k: y = 2x & \text{e)} k: y = -x - 3 \\ \text{b)} k: y = -x + 1 & \text{d)} k: y = 2x + 3 & \text{f)} k: y = 2x + 4 \end{array}$$

7. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g .

$$\text{a)} f(x) = 2x, g(x) = 2x^2 - 4x \quad \text{b)} f(x) = -2x + 4, g(x) = x^2 - 4x + 4$$

4. a) $x = -2, y = 6$ lub $x = 1, y = 0$
 b) $x = 0, y = 2$ lub $x = 3, y = 8$
 c) $x = -2, y = -2$
 d) $x = -4, y = -6$ lub $x = 2, y = 0$
 e) $x = 4, y = 4$
 f) układ sprzeczny

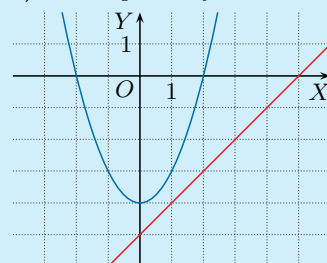
5. a) $x = 2, y = -1$
 b) $x = -2, y = 2$
 c) $x = 1, y = 3$

6. a) $x = -2, y = -1$ lub $x = 1, y = 2$
 b) $x = -1, y = 2$ lub $x = 2, y = -1$
 c) $x = -3, y = -6$ lub $x = 1, y = 2$
 d) $x = -2, y = -1$ lub $x = 0, y = 3$
 e) $x = -2, y = -1$ lub $x = 3, y = -6$
 f) $x = -1, y = 2$

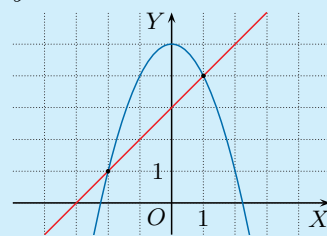
7. a) $x = 0, y = 0$ lub $x = 3, y = 6$
 b) $x = 0, y = 4$ lub $x = 2, y = 0$

Odpowiedzi do zadań

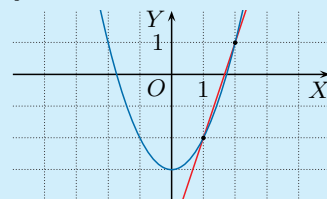
1. a) $x = -1, y = -3$
 b) $x = -3, y = 1$
 c) $x = 1, y = 0$
 d) $x = -\frac{9}{7}, y = -\frac{8}{7}$
 e) $x = -1, y = 2$
 f) $x = 2, y = 4$
 2. $(0, 2), (3, 6), (4, -1)$
 3. a) układ sprzeczny



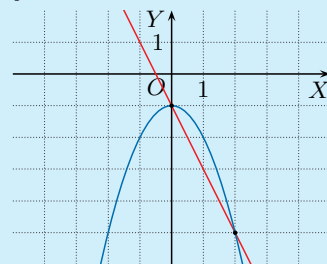
- b) $x = -2, y = 1$ lub $x = 1, y = 4$



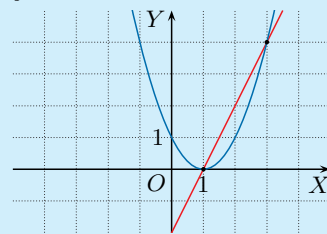
- c) $x = 1, y = -2$ lub $x = 2, y = 1$



- d) $x = 0, y = -1$ lub $x = 2, y = -5$



- e) $x = 1, y = 0$ lub $x = 3, y = 4$



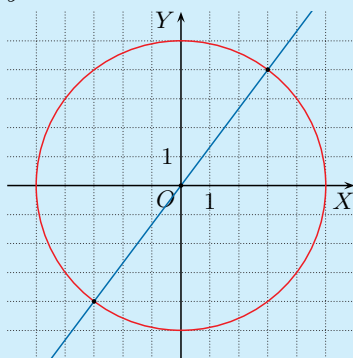
- f) $x = -5, y = 4$ lub $x = -2, y = 1$

Uczeń:

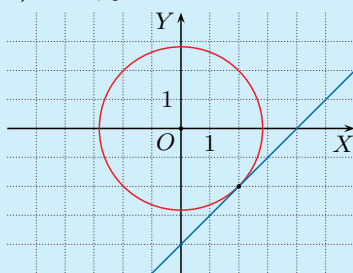
- rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których jedno opisuje prostą, a drugie – okrąg o środku w początku układu współrzędnych,
- rozwiązuje zadania dotyczące wielokątów wpisanych w dany okrąg.

Ćwiczenie 1

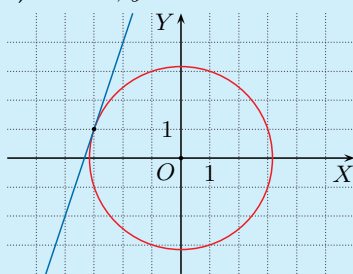
- a) $x = -3, y = -4$ lub $x = 3, y = 4$



- b) $x = 2, y = -2$



- c) $x = -3, y = 1$



2.9. Punkty wspólne prostej i okręgu (1)

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

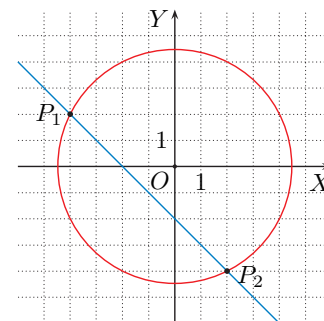
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $y = -x - 2$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{aligned} x^2 + (-x - 2)^2 &= 20 \\ 2x^2 + 4x - 16 &= 0 \quad / : 2 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ x &= -4 \quad \text{lub} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Okrąg $x^2 + y^2 = 20$ i prosta $x + y + 2 = 0$ mają dwa punkty wspólne: $P_1(-4, 2)$ i $P_2(2, -4)$.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

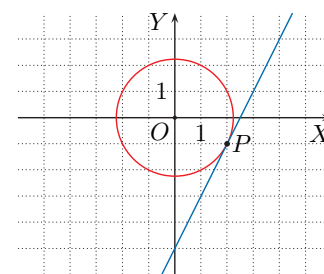
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Do pierwszego równania podstawiamy $y = 2x - 5$:

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 5)^2 &= 5 \\ 5x^2 - 20x + 20 &= 0 \quad / : 5 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x - 5$ jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 5$ w punkcie $P(2, -1)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 &= 25 \\ y &= \frac{4}{3}x \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 &= 8 \\ y &= x - 4 \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 &= 10 \\ y &= 3x + 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Multiteka

- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wyznacz punkty wspólne prostej $y = -x - 6$ oraz okręgu $x^2 + y^2 = 20$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez te punkty.

Podstawiamy $y = -x - 6$ do równania okręgu:

$$x^2 + (-x - 6)^2 = 20$$

$$2x^2 + 12x + 16 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

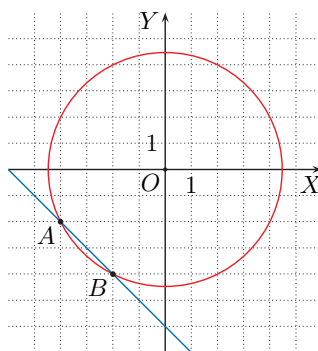
$$x = -4 \text{ lub } x = -2$$

Dla $x = -4$ otrzymujemy $y = -2$,

dla $x = -2$ otrzymujemy $y = -4$.

Zatem punktami wspólnymi są: $A(-4, -2)$ oraz $B(-2, -4)$. Obliczamy długość cięciwy:

$$|AB| = \sqrt{(-2 - (-4))^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



Ćwiczenie 2

Prosta l przecina okrąg K w punktach A i B . Oblicz długość cięciwy AB .

a) $l: y = x - 5$, $K: x^2 + y^2 = 17$

b) $l: y = 3x - 10$, $K: x^2 + y^2 = 20$

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono kwadrat wpisany w okrąg $x^2 + y^2 = 10$. Bok AB jest zawarty w prostej $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Wyznacz wierzchołki tego kwadratu.

Podstawiamy $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ do równania okręgu:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)^2 = 10$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 10$$

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{15}{4} = 0 \quad / \cdot \frac{4}{5}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

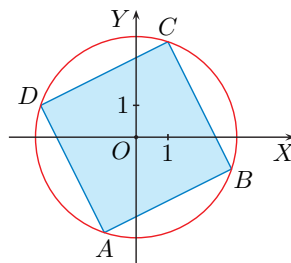
$$x = -1 \text{ lub } x = 3$$

Dla $x = -1$ otrzymujemy $y = -3$, a dla $x = 3$ otrzymujemy $y = -1$.

Zatem wierzchołek A ma współrzędne $(-1, -3)$, a wierzchołek B ma współrzędne $(3, -1)$.

Punkt $O(0, 0)$ jest środkiem przekątnej AC oraz $A(-1, -3)$, zatem wierzchołek C ma współrzędne $(1, 3)$.

Punkt $O(0, 0)$ jest środkiem przekątnej BD oraz $B(3, -1)$, zatem wierzchołek D ma współrzędne $(-3, 1)$.



Ćwiczenie 2

a) $A(1, -4)$, $B(4, -1)$,

$$|AB| = 3\sqrt{2}$$

b) $A(2, -4)$, $B(4, 2)$,

$$|AB| = 2\sqrt{10}$$

Ćwiczenie 3

$(-3, -2)$, $(-2, -3)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$

Odpowiedzi do zadań

- a) $x = -1$, $y = -1$ lub $x = 1$, $y = 1$
b) $x = -2$, $y = 3$ lub $x = 2$, $y = -3$
c) $x = -2$, $y = 1$
d) $x = -3$, $y = -1$ lub $x = 1$, $y = 3$
e) $x = -4$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = -4$
f) $x = 3$, $y = -1$
g) $x = 1$, $y = -5$ lub $x = 5$, $y = 1$
h) $x = -2$, $y = -3$ lub $x = 3$, $y = -2$
i) układ sprzeczny
- Prosta przechodząca przez środek okręgu i dany wierzchołek: $y = -x$
Prosta prostopadła do wyznaczonej prostej i przechodząca przez środek okręgu: $y = x$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Szukane punkty: $(-3, -3)$, $(3, 3)$
- $(-3, -3)$, $(3, 3)$
- $(-4, 2)$, $(-2, -4)$, $(4, -2)$, $(2, 4)$, $Ob = 8\sqrt{10}$
- $(6, 2)$, $(2, -6)$, $(-6, -2)$, $(-2, 6)$, $P = 80$
- a) $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(-1, -4)$, $(-4, -1)$
b) $(-1, 5)$, $(5, -1)$, $(1, -5)$, $(-5, 1)$
- $(3, 4)$, $(3, -4)$, $(-4, -3)$, $(-4, 3)$
- a) $x = 0$, $y = -4$ lub $x = 4$, $y = 0$
b) $x = -2$, $y = -5$ lub $x = 2$, $y = 5$
c) $x = -4$, $y = 3$ lub $x = 0$, $y = -5$
d) $x = -4$, $y = 2$

Ćwiczenie 3

Wierzchołki prostokąta $ABCD$ należą do okręgu $x^2 + y^2 = 13$, a bok BC jest zawarty w prostej $y = -x + 5$. Wyznacz te wierzchołki.

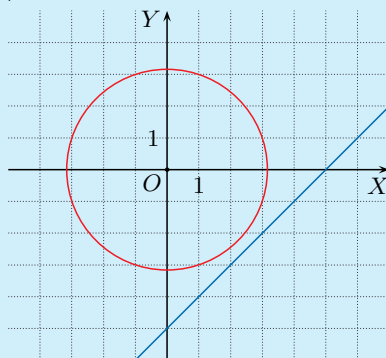
Zadania

- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ 3x - 2y - 13 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - 5y - 13 = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 3x - y - 10 = 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - 2y - 10 = 0 \end{cases}$
- W okrąg $x^2 + y^2 = 18$ wpisano trójkąt równoramienny prostokątny. Wierzchołek kąta prostego tego trójkąta ma współrzędne $(-3, 3)$. Wyznacz jego pozostałe wierzchołki.
- W okrąg $x^2 + y^2 = 20$ jest wpisany kwadrat, którego jedna z przekątnych jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{2}x$. Wyznacz wierzchołki tego kwadratu i oblicz jego obwód.
- W okrąg $x^2 + y^2 = 40$ jest wpisany kwadrat, którego jeden z boków jest zawarty w prostej $y = 2x - 10$. Wyznacz wierzchołki tego kwadratu i oblicz jego pole.
- Wierzchołki prostokąta $ABCD$ należą do okręgu K , a jeden z jego boków jest zawarty w prostej l . Wyznacz te wierzchołki.
a) $l: x - y + 3 = 0$, $K: x^2 + y^2 = 17$ b) $l: x + y + 4 = 0$, $K: x^2 + y^2 = 26$

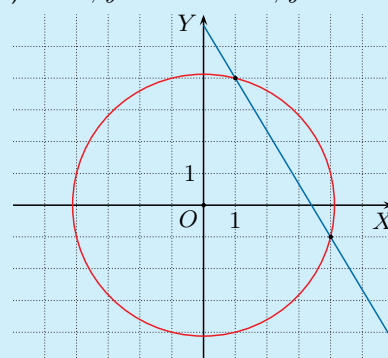
Powtórzenie

- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x - 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 2x - y + 10 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 5x + 3y - 17 = 0 \end{cases}$
- Przekątne trapezu są zawarte w prostych $y - x = 1$ i $x + y = -1$. Wyznacz wierzchołki tego trapezu, jeśli należą one do okręgu $x^2 + y^2 = 25$.

e) układ sprzeczny



f) $x = 1$, $y = 4$ lub $x = 4$, $y = -1$



2.10. Punkty wspólne prostej i okręgu (2)

Przykład 1

Wyznacz punkty wspólne prostej $y = x - 5$ i okręgu $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

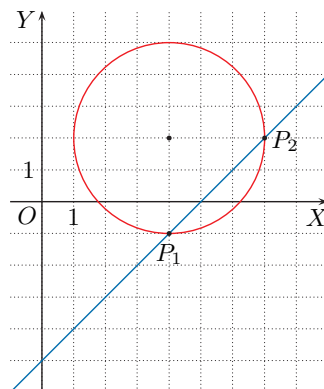
Do równania okręgu podstawiamy $y = x - 5$:

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + (x - 5 - 2)^2 &= 9 \\(x - 4)^2 + (x - 7)^2 &= 9 \\x^2 - 8x + 16 + x^2 - 14x + 49 &= 9 \\2x^2 - 22x + 56 &= 0 \quad / : 2 \\x^2 - 11x + 28 &= 0 \\x &= 4 \text{ lub } x = 7\end{aligned}$$

Dla $x = 4$ otrzymujemy $y = -1$,

a dla $x = 7$ otrzymujemy $y = 2$.

Zatem punktami wspólnymi prostej i okręgu są punkty $P_1(4, -1)$ i $P_2(7, 2)$.



Ćwiczenie 1

Wyznacz punkty wspólne prostej l i okręgu K . Wykonaj rysunek.

a) $l: y = x + 4$, $K: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $l: y = x + 2$, $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że prosta $l: y = 2x - 3$ nie ma punktów wspólnych z okręgiem K .

a) $K: (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 18$

b) $K: (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 9$

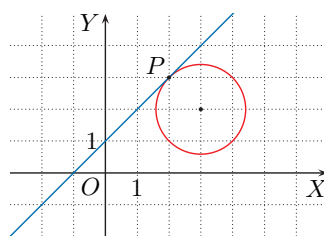
Przykład 2

Wyznacz punkty wspólne prostej $y = x + 1$ i okręgu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

Do równania okręgu podstawiamy $y = x + 1$:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (x + 1 - 2)^2 &= 2 \\x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 &= 2 \\2x^2 - 8x + 8 &= 0 \quad / : 2 \\x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x - 2)^2 &= 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

Wówczas $y = 3$, zatem prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny: $P(2, 3)$.



Prosta $y = x + 1$ i okrąg o środku $(3, 2)$ i promieniu $\sqrt{2}$ są styczne w punkcie $P(2, 3)$.

Ćwiczenie 2

Do równania okręgu podstawiamy $y = 2x - 3$.

a) $(x + 1)^2 + (2x - 3 - 5)^2 = 18$

$(x + 1)^2 + (2x - 8)^2 = 18$

$5x^2 - 30x + 47 = 0$

$\Delta = 30^2 - 4 \cdot 5 \cdot 47 = -40 < 0$ – brak rozwiązania

Zatem prosta l nie ma punktów wspólnych z okręgiem K .

b) $(x - 6)^2 + (2x - 3 - 1)^2 = 9$

$(x - 6)^2 + (2x - 4)^2 = 9$

$5x^2 - 28x + 43 = 0$

$\Delta = 28^2 - 4 \cdot 5 \cdot 43 = -76 < 0$ – brak rozwiązania

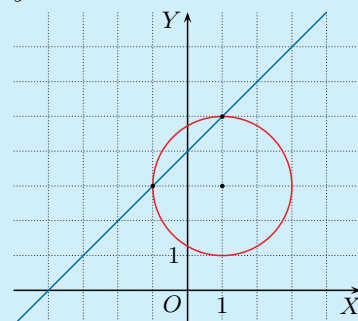
Zatem prosta l nie ma punktów wspólnych z okręgiem K .

Uczeń:

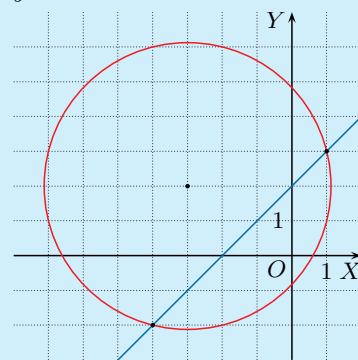
- rozwiązuje algebraicznie układy równań, z których jedno jest równaniem okręgu, a drugie – równaniem prostej,
- stosuje układy równań do rozwiązywania zadań dotyczących okręgów i wielokątów.

Ćwiczenie 1

a) $x = -1$, $y = 3$ lub $x = 1$, $y = 5$



b) $x = -4$, $y = -2$ lub $x = 1$, $y = 3$



Multiteka

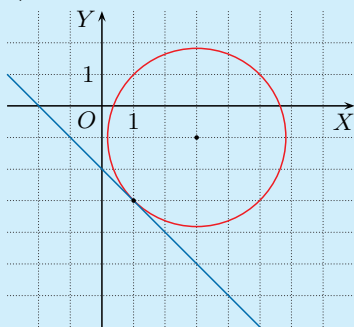
- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.10

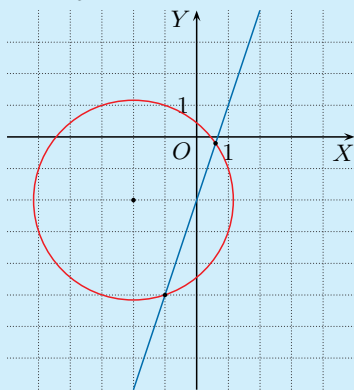
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

a) $x = 1, y = -3$



b) $x = -1, y = -5$ lub $x = \frac{3}{5}, y = -\frac{1}{5}$



Ćwiczenie 3

Wyznacz punkty wspólne prostej l i okręgu K . Wykonaj rysunek.

a) $l: y = -x - 2, K: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$

b) $l: y = 3x - 2, K: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$

Przykład 3

W okrąg $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli jeden z jego boków jest zawarty w prostej $y = 2x + 2$.

Podstawiamy $y = 2x + 2$ do równania okręgu:

$$(x - 2)^2 + (2x + 2 - 1)^2 = 10$$

$$(x - 2)^2 + (2x + 1)^2 = 10$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 = 10$$

$$5x^2 = 5 \quad / : 5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 1$$

Dla $x = -1$ mamy $y = 0$, a dla $x = 1$ mamy $y = 4$, zatem współrzędne dwóch wierzchołków kwadratu to $A(1, 4)$ i $B(-1, 0)$.

Współrzędne wierzchołka $C(x_C, y_C)$ wyznaczymy, korzystając z tego, że środek okręgu $S(2, 1)$ jest środkiem przekątnej kwadratu AC :

$$\frac{x_C + 1}{2} = 2 \quad \text{ i } \quad \frac{y_C + 4}{2} = 1$$

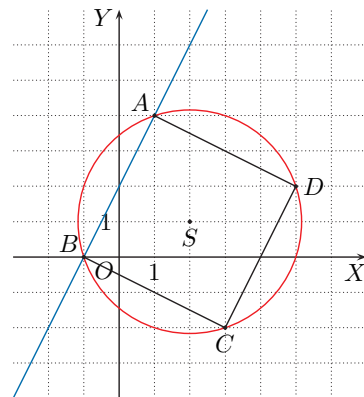
Stąd $C(3, -2)$.

Analogicznie korzystamy z tego, że punkt $S(2, 1)$ jest środkiem przekątnej kwadratu BD , aby wyznaczyć współrzędne wierzchołka $D(x_D, y_D)$:

$$\frac{x_D - 1}{2} = 2 \quad \text{ i } \quad \frac{y_D + 0}{2} = 1$$

Stąd $D(5, 2)$.

Wierzchołkami kwadratu są punkty $A(1, 4)$, $B(-1, 0)$, $C(3, -2)$ i $D(5, 2)$.



Ćwiczenie 4

a) W okrąg $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli jeden z jego boków jest zawarty w prostej $y = -3x - 1$.

b) W okrąg $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli jedna z jego przekątnych jest zawarta w prostej $4x - 3y = 8$.

Ćwiczenie 4

a) $(x + 3)^2 + (-3x - 1 - 3)^2 = 5$

$$(x + 3)^2 + (-3x - 4)^2 = 5$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = -1 \text{ lub } x = -2$$

$$A(-2, 5), B(-1, 2)$$

$$\text{Środek okręgu: } S(-3, 3)$$

$$\frac{x_C - 2}{2} = -3 \quad \text{ i } \quad \frac{y_C + 5}{2} = 3, \text{ czyli } C(-4, 1)$$

$$\frac{x_D - 1}{2} = -3 \quad \text{ i } \quad \frac{y_D + 2}{2} = 3, \text{ czyli } D(-5, 4)$$

$$\text{Wierzchołki kwadratu: } (-5, 4), (-2, 5),$$

$$(-1, 2), (-4, 1)$$

b) Równanie przekątnej: $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$

$$(x - 2)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 = 25$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 5$$

$$(-1, -4), (5, 4)$$

$$\text{Równanie drugiej przekątnej kwadratu:}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$(x - 2)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}\right)^2 = 25$$

$$x = 6 \text{ lub } x = -2$$

$$(6, -3), (-2, 3)$$

$$\text{Wierzchołki kwadratu: } (5, 4), (-2, 3),$$

$$(-1, -4), (6, -3)$$

Przykład 4

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ (2y - 4)^2 + y^2 - 6(2y - 4) - 2y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie:

$$4y^2 - 16y + 16 + y^2 - 12y + 24 - 2y = 0$$

$$5y^2 - 30y + 40 = 0 \quad / : 5$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$y = 2 \text{ lub } y = 4$$

Dla $y = 2$ otrzymujemy $x = 0$, a dla $y = 4$ otrzymujemy $x = 4$.

Zatem układ równań ma dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Uwaga. Równanie $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(3, 1)$ i promieniu $\sqrt{10}$ (sprawdź). Zatem otrzymane pary liczb są współrzędnymi punktów wspólnych tego okręgu i prostej $x - 2y = -4$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} x - y = -4 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 21 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 18 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 4x + 3y = -7 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y = -9 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y = -3 \end{cases}$$

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij, że podany układ równań nie ma rozwiązania.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x^2 + y^2 + 4x + 8y = -11 \end{cases}$$

Ćwiczenie 6

a)
$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ x^2 + (2x + 2)^2 - 6x + 4(2x + 2) = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x^2 + 8x + 4 - 6x + 8x + 8 - 3 = 0$$

$$5x^2 + 10x + 9 = 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 < 0 - \text{brak rozwiązania}$$

Zatem układ nie ma rozwiązań.

b)
$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ x^2 + (\frac{2}{3}x + 2)^2 + 4x + 8(\frac{2}{3}x + 2) = -11 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 4 + 4x + \frac{16}{3}x + 16 + 11 = 0$$

$$13x^2 + 108x + 279 = 0$$

$$\Delta = 108^2 - 4 \cdot 13 \cdot 279 < 0 - \text{brak rozwiązania}$$

Zatem układ nie ma rozwiązań.

Równanie okręgu

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 +$$

$$-9 - 1 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

Ćwiczenie 5

a) $x = -1, y = 3$

lub $x = 1, y = 5$

b) $x = -3, y = -1$

lub $x = \frac{27}{5}, y = \frac{9}{5}$

c) $x = -4, y = -1$

lub $x = -\frac{8}{5}, y = -\frac{1}{5}$

d) $x = 0, y = -3$

lub $x = 6, y = 1$

e) $x = -1, y = -1$

f) układ sprzeczny

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A(2, 0), B(3, 1), |AB| = \sqrt{2}$
b) $A(1, 0), B(3, -4), |AB| = 2\sqrt{5}$
2. $(0, 4), (5, 3), (4, -2), (-1, -1), P = 26$
3. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$
 $A(-6, 0), B(2, 4)$
Wierzchołek C leży na symetralnej podstawy AB .
Równanie symetralnej AB :
 $y = -2x - 2$
 $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$
 $C(0, -2)$ lub $C(-4, 6)$
4. a) $A(1, 5), B(-3, 1)$
 $\frac{x_C+1}{2} = 3$ i $\frac{y_C+5}{2} = -1$,
czyli $C(5, -7)$
 $\frac{x_D-3}{2} = 3$ i $\frac{y_D+1}{2} = -1$,
czyli $D(9, -3)$
b) $A(1, 3), B(-1, 9)$
 $\frac{x_C+1}{2} = -3$ i $\frac{y_C+3}{2} = 5$,
czyli $C(-7, 7)$
 $\frac{x_D-1}{2} = -3$ i $\frac{y_D+9}{2} = 5$,
czyli $D(-5, 1)$
5. a) $x = 0, y = 1$
lub $x = 4, y = -3$
b) $x = -3, y = 0$
c) $x = 1, y = -2$
lub $x = 2, y = 1$
d) $x = 0, y = -2$
e) $x = 0, y = -2$
f) $x = -5, y = -1$
lub $x = 3, y = 3$

Zadania

1. Okrąg K i prosta l przecinają się w punktach A i B . Oblicz $|AB|$.
a) $K: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1, l: y = x - 2$
b) $K: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 10, l: y = -2x + 2$
2. Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ zawarta jest w prostej $3x + 2y - 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole.
3. W okrąg $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego podstawa jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.
4. a) Jeden z boków prostokąta jest zawarty w prostej $y = x + 4$, a jego wierzchołki należą do okręgu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$. Wyznacz współrzędne tych wierzchołków.
b) Jeden z boków kwadratu wpisanego w okrąg $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 20$ jest zawarty w prostej $y = -3x + 6$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.
5. Rozwiąż układ równań.
a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x^2 + y^2 + 6x = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y + 15 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x^2 + y^2 - 10x + 8y = -12 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12 \end{cases}$

Powtórzenie

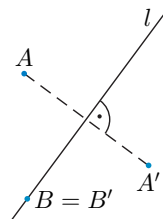
6. Wyznacz punkty wspólne prostej l i okręgu K . Wykonaj rysunek.
a) $l: y = 4x + 6, K: (x+6)^2 + (y+1)^2 = 17$
b) $l: x - 3y + 2 = 0, K: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$
7. Rozwiąż układ równań.
a) $\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$
6. a) $x = -2, y = -2$
b) $x = 1, y = 1$ lub $x = \frac{17}{5}, y = \frac{9}{5}$
7. a) $x = 0, y = 1$ lub $x = 1, y = 6$
b) $x = -8, y = -4$ lub $x = 0, y = 2$

2.11. Symetria osiowa

Założmy, że punkt A nie należy do prostej l .

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem prostej l** , jeżeli punkty A i A' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka AA' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka AA').

Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).

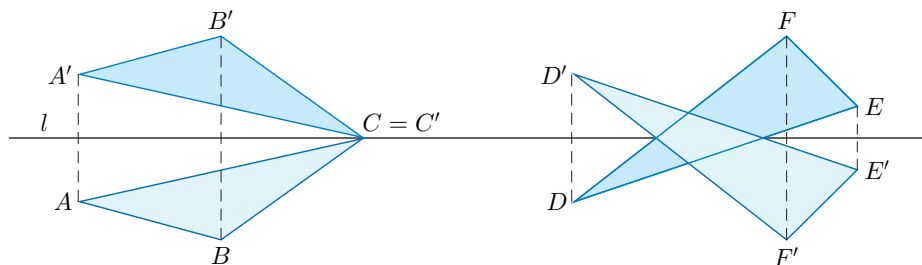


Definicja

Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l .

Prostą l nazywamy **osią symetrii**.

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty ABC i DEF oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej l – odpowiednio trójkąty $A'B'C'$ i $D'E'F'$.



Odległość między obrazami dwóch punktów w symetrii osiowej jest równa odległości między tymi punktami (mówimy, że symetria osiowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami). Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

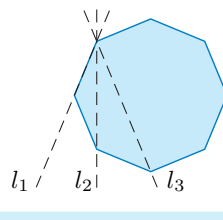
Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie ośmiokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

a) l_1 ,

b) l_2 ,

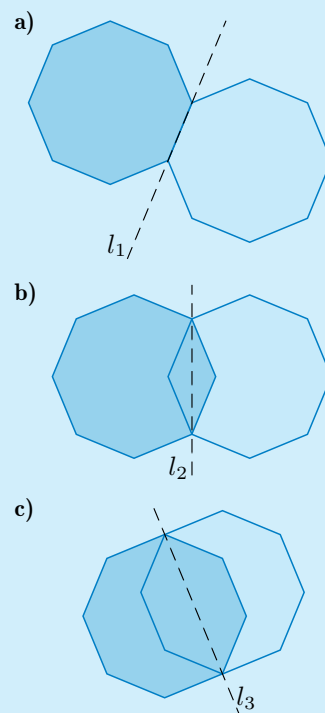
c) l_3 .



Uczeń:

- wskazuje figury osiowo symetryczne i podaje liczbę ich osi symetrii,
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem osi układu współrzędnych,
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem jednej z osi układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków,
- podaje równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem jednej z osi układu współrzędnych,
- sprawdza, czy odcinki są symetryczne względem osi układu współrzędnych,
- stosuje własności symetrii osiowej w zadaniach.

Ćwiczenie 1



Multiteka

- Symetria
- Symetria osiowa
- Symetria względem osi układu współrzędnych
- Przekształcenia na płaszczyźnie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.11

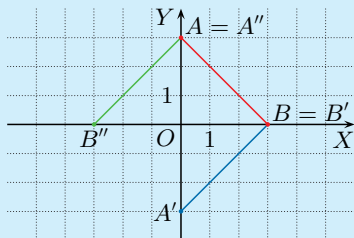
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

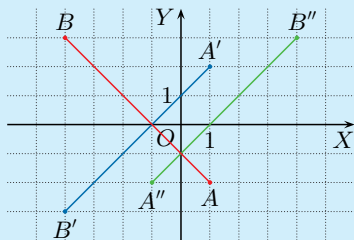
kwadrat: 4,
trójkąt równoboczny: 3,
prostokąt: 2,
koło: nieskończenie wiele

Ćwiczenie 3

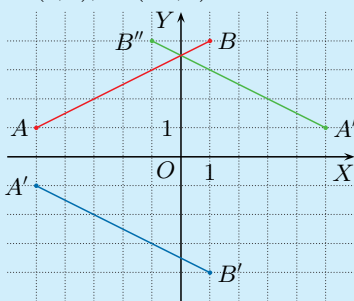
a) $A'(0, -3)$, $B'(3, 0)$, $A''(0, 3)$,
 $B''(-3, 0)$



b) $A'(1, 2)$, $B'(-4, -3)$,
 $A''(-1, -2)$, $B''(4, 3)$



c) $A'(-5, -1)$, $B'(1, -4)$,
 $A''(5, 1)$, $B''(-1, 4)$



Ćwiczenie 5

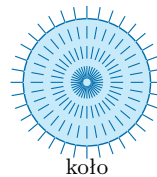
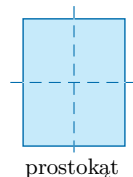
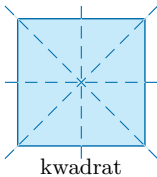
a) $A'(-2, -1)$, $B'(2, 3)$,
 $C'(4, 1)$, $D'(0, -3)$

b) $A''(2, 1)$, $B''(-2, -3)$,
 $C'''(-4, -1)$, $D''(0, 3)$

Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej l . Prosta l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

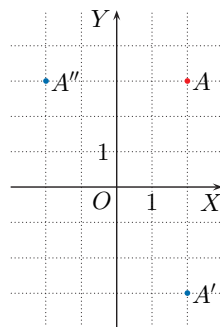
Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.



■ Symetria względem osi układu współrzędnych

Przykład 1

Obrazem punktu $A(2, 3)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A'(2, -3)$. Obrazem punktu $A(2, 3)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $A''(-2, 3)$.



Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $P'(x, -y)$.

Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $P''(-x, y)$.

Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka $A'B'$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OX oraz odcinka $A''B''$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OY . Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki AB , $A'B'$ i $A''B''$.

a) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ b) $A(1, -2)$, $B(-4, 3)$ c) $A(-5, 1)$, $B(1, 4)$

Ćwiczenie 4

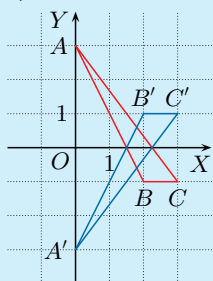
Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, -1)$. Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 5

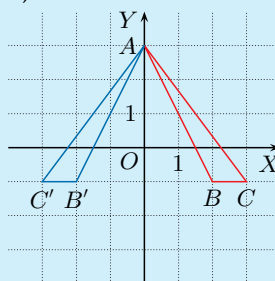
Dane są punkty $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$, $C(4, -1)$ i $D(0, 3)$. Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 4

a)



b) $A' = A$

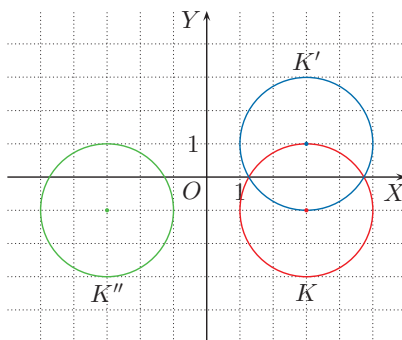


Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg K dany równaniem $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem osi OX (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OX).

Okrąg K'' jest symetryczny do okręgu K względem osi OY (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OY).



Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów K' i K'' z powyższego przykładu.

Ćwiczenie 7

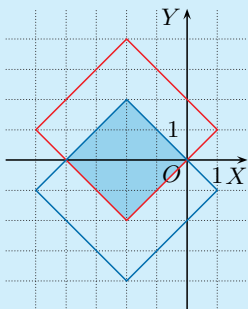
Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY .

- a) $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ c) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) $K: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$ d) $K: (x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$

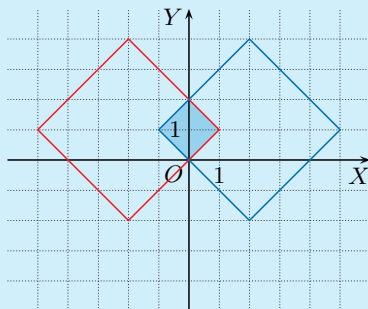
Zadania

- Sprawdź, czy odcinki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi OX lub osi OY .
a) $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$, $A'(-2, -1)$, $B'(3, 2)$
b) $A(-3, 4)$, $B(-1, -2)$, $A'(3, 4)$, $B'(1, -2)$
c) $A(-4, -3)$, $B(2, 2)$, $A'(-4, 3)$, $B'(-2, 2)$
d) $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $A'(2, 0)$, $B'(0, -4)$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OX oraz trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OY .
a) $A(-1, 2)$, $B(5, 3)$, $C(2, 5)$ c) $A(-3, 2)$, $B(0, -3)$, $C(3, 2)$
b) $A(-3, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(0, 3)$ d) $A(-3, -1)$, $B(9, -2)$, $C(2, 1)$
- Oblicz pole części wspólnej kwadratu K o wierzchołkach $(-5, 1)$, $(-2, -2)$, $(1, 1)$, $(-2, 4)$ oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu K względem:
a) osi OX , b) osi OY .

3. a) $P = 8$



b) $P = 2$



Ćwiczenie 6

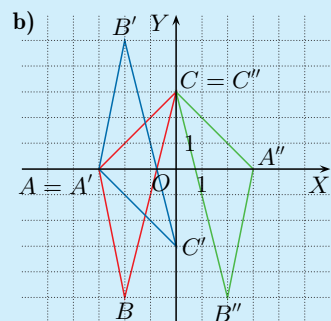
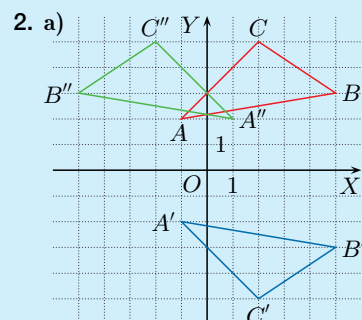
$$K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4, \\ K'': (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Ćwiczenie 7

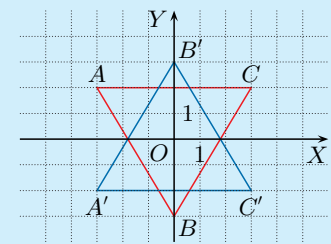
- a) $K': (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$,
 $K'': (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$
b) $K': (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$,
 $K'': (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$
c) $K': (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$,
 $K'': (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
d) $K': (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 49$,
 $K'': (x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$

Odpowiedzi do zadań

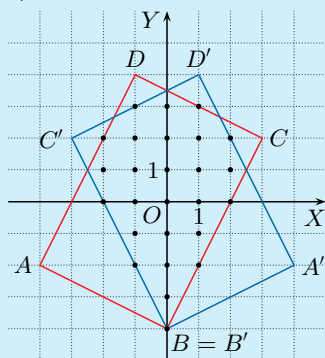
1. a) OX b) OY c), d) nie są



c) $A'' = C$, $B'' = B$, $C'' = A$

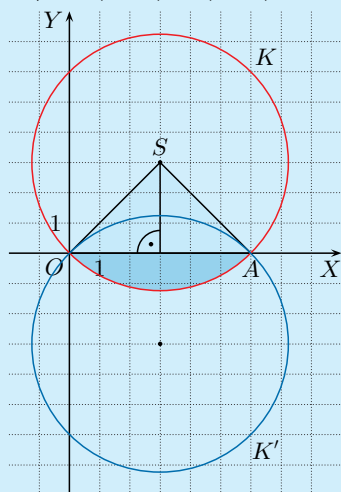


4. a) 26



b) $P = 14$,
 $Ob = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{5})$,
 18 punktów

5. a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$, należy
 b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 41$, nie należy
 c) $(x + 3)^2 + y^2 = 4$, należy
 d) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 40$, należy
7. a) $K': (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$



$A(6, 0)$, $S(3, 3)$

Pole wycinka koła:

$$P_w = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 18 = \frac{9}{2}\pi$$

Pole trójkąta OAS:

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

Pole części wspólnej kół:

$$P = 2(P_w - P_T) = 9(\pi - 2)$$

- b) $K': x^2 + (y + 3\sqrt{3})^2 = 36$,
 $P = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$

4. a) Prostokąt $A'B'C'D'$ jest symetryczny względem osi OY do prostokąta o wierzchołkach $A(-4, -2)$, $B(0, -4)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wielokąta będącego częścią wspólną tych prostokątów?

b) Równoległobok $A'B'C'D'$ jest symetryczny względem osi OX do równoległoboku o wierzchołkach $A(-4, 0)$, $B(2, -2)$, $C(4, 2)$ i $D(-2, 4)$. Oblicz pole i obwód deltoidu będącego częścią wspólną tych równoległoboków. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego deltoidu?

5. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX . Sprawdź, czy punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu K' .

- a) $K: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + y^2 = 4$
 b) $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 41$ d) $K: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$

6. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OY . Narysuj te okręgi i odczytaj współrzędne ich punktów wspólnych. Sprawdź wynik, podstawiając współrzędne odczytanych punktów do równań okręgów K i K' . Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów K i K' oraz punkty wspólne tych okręgów.

- a) $K: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$
 b) $K: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$ d) $K: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$

*7. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX . Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.

- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$ b) $K: x^2 + (y - 3\sqrt{3})^2 = 36$

Powtórzenie

8. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta symetrycznego do trójkąta o wierzchołkach $A(-3, -1)$, $B(6, -4)$ i $C(0, 0)$ względem:

- a) osi OX , b) osi OY .

9. Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY . Narysuj okręgi K , K' i K'' .

- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ c) $K: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$
 b) $K: (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$ d) $K: (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$

6. a) $K': (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$, $(0, 1)$, $(0, -5)$, $P = 24$

b) $K': (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$, $(0, 3)$, $(0, -1)$, $P = 8$

c) $K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$, $(0, 3)$, $(0, -1)$, $P = 12$

d) $K': (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$, $(0, 7)$, $(0, -1)$, $P = 16$

8. a) $A'(-3, 1)$, $B'(6, 4)$, $C'(0, 0)$

b) $A'(3, -1)$, $B'(-6, -4)$, $C'(0, 0)$

9. a) $K': (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$, $K'': (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

b) $K': (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$, $K'': (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$

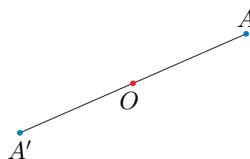
c) $K': (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$, $K'': (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$

d) $K': (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$, $K'': (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$

2.12. Symetria środkowa

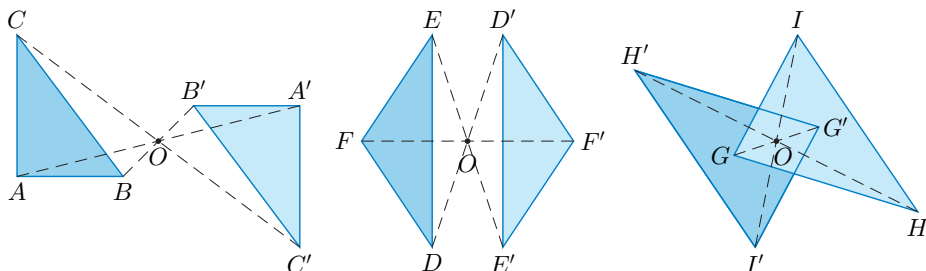
Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem punktu O** ($A \neq O$), jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty A i A' .

Punktem symetrycznym do O jest on sam.



Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty ABC , DEF i GHI oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu O .



Symetria środkowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami. Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny ABC , a następnie przekształć go symetrycznie względem:

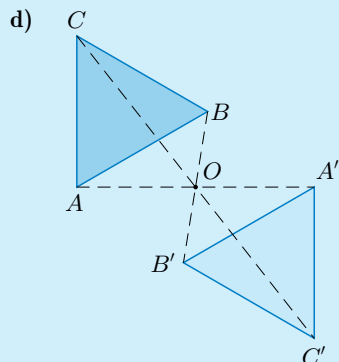
- jednego z jego wierzchołków,
- środką jednego z jego boków,
- punktu przecięcia jego dwusiecznych,
- punktu leżącego na zewnątrz niego.

Figurę nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli istnieje taki punkt O , że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2

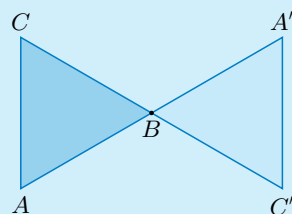
równoległobok (punkt przecięcia przekątnych),
prosta (każdy punkt tej prostej),
kwadrat (punkt przecięcia przekątnych),
odcinek (środek tego odcinka)

Uczeń:

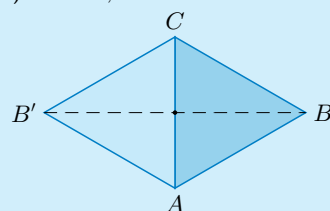
- wskazuje figury środkowosymetryczne,
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem początku układu współrzędnych,
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem początku układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków,
- podaje równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem początku układu współrzędnych,
- stosuje w zadaniach własności symetrii środkowej.

Ćwiczenie 1

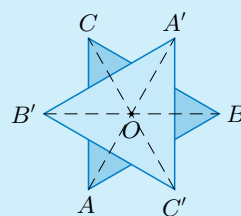
a) $B' = B$



b) $A' = C$, $C' = A$



c)



Multiteka

- Symetria środkowa
- Symetria środkowa w układzie współrzędnych

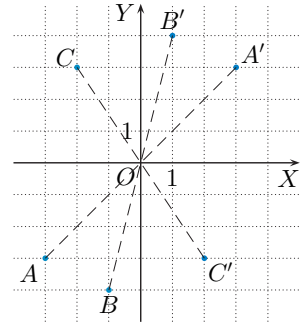
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.12

Generator
testów i sprawdzianów

■ Symetria względem początku układu współrzędnych

Przykład 1

Punktami symetrycznymi do punktów $A(-3, -3)$, $B(-1, -4)$ i $C(-2, 3)$ względem początku układu współrzędnych są odpowiednio punkty $A'(3, 3)$, $B'(1, 4)$ i $C'(2, -3)$.



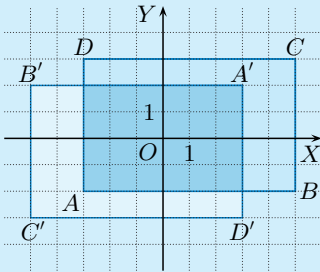
Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P'(-x, -y)$.

Ćwiczenie 3

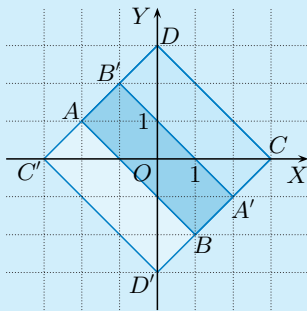
- a) $A'(-3, 2)$, $B'(2, 1)$, $C'(1, -4)$
 b) $A'(-2, 2)$, $B'(-1, -3)$, $C'(3, -1)$

Ćwiczenie 4

- a) $P = 6 \cdot 4 = 24$



- b) $P = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$



Ćwiczenie 3

Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$.

- a) $A(3, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 4)$ b) $A(2, -2)$, $B(1, 3)$, $C(-3, 1)$

Ćwiczenie 4

Prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a) $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 3)$, $D(-3, 3)$
 b) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 0)$, $D(0, 3)$

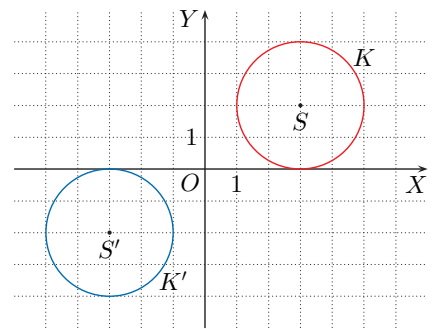
Przykład 2

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(3, 2)$, a jego promień $r = 2$.

Zatem środkiem okręgu K' jest punkt symetryczny do S względem początku układu współrzędnych, czyli $S'(-3, -2)$, a jego promień $r' = 2$.

Oznacza to, że okrąg K' jest dany równaniem $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

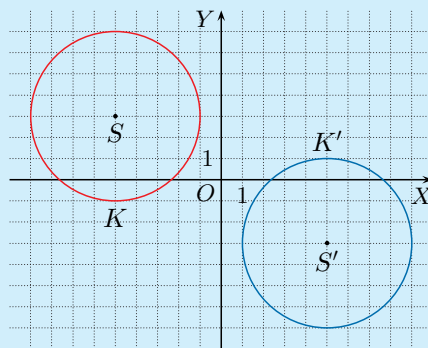


Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$. Narysuj te okręgi.

Ćwiczenie 5

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$



Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu K . Narysuj te okręgi.

- a) $K: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ c) $K: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$
 b) $K: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ d) $K: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

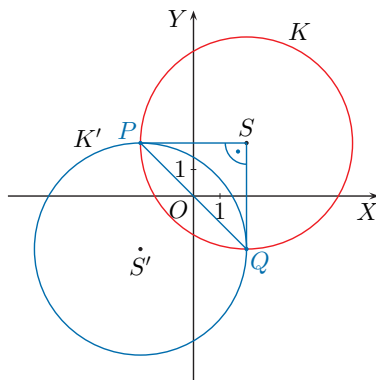
Ćwiczenie 7

Okrąg K dany jest równaniem:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

- a) Wyznacz równanie okręgu K' .
 b) Uzasadnij, że punkty $P(-2, 2)$ i $Q(2, -2)$ są punktami wspólnymi okręgów K i K' .
 c) Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.



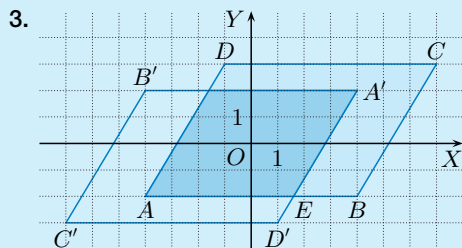
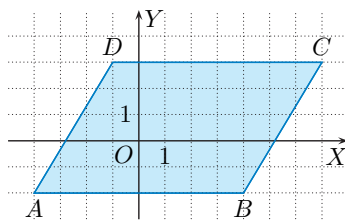
Zadania

- Punkt A' położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA' , jeśli wiadomo, że:

a) $A(3, 4)$, b) $A(-1, 4)$, c) $A(-6, -8)$, d) $A(a, a)$.
- Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt $ABCD$ i znajdź jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.

a) $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$
 b) $A(-3, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-3, 2)$
 c) $A(-4, -3)$, $B(2, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-5, -1)$
- Równoległobok $A'B'C'D'$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) w symetrii względem punktu O . Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.
- Wyznacz równanie okręgu K' będącego obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Narysuj okręgi K i K' .

a) $K: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$ c) $K: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$
 b) $K: (x+4)^2 + (y-1)^2 = 17$ d) $K: (x+2)^2 + (y+3)^2 = 10$



Prosta $A'D'$: $y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3}$, prosta AB : $y = -2$

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu E : $\frac{5}{3}x - \frac{14}{3} = -2$, czyli $x = \frac{8}{5}$.

Zatem $|AE| = 4 + \frac{8}{5} = \frac{28}{5}$.

Pole części wspólnej: $P = |AE| \cdot 4 = 22,4$

Ćwiczenie 6

- a) $K': (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$
 b) $K': (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$
 c) $K': (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
 d) $K': (x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$

Ćwiczenie 7

- a) $K': (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$
 b) Sprawdzamy, czy punkty P i Q należą do obu okręgów.

Okrąg K :

$$(-2-2)^2 + (2-2)^2 = 16,$$

P należy do K

$$(2-2)^2 + (-2-2)^2 = 16,$$

Q należy do K

Okrąg K' :

$$(-2+2)^2 + (2+2)^2 = 16,$$

P należy do K'

$$(2+2)^2 + (-2+2)^2 = 16,$$

Q należy do K'

Zatem okręgi K i K' mają dwa punkty wspólne: $P(-2, 2)$ i $Q(2, -2)$.

c) Pole wycinka koła:

$$P_w = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$$

Pole trójkąta PQS :

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

Pole części wspólnej kół:

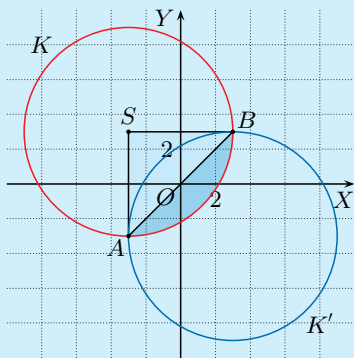
$$P = 2(P_w - P_T) = 8(\pi - 2)$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 10 b) $2\sqrt{17}$
 c) 20 d) $2\sqrt{2}|a|$

4. a) $K': (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$
 b) $K': (x-4)^2 + (y+1)^2 = 17$
 c) $K': (x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$
 d) $K': (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$

5. $K': (x-3)^2 + (y+3)^2 = 36$



$A(-3, -3), B(3, 3), S(-3, 3)$

Pole wycinka koła:

$$P_w = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 36 = 9\pi$$

Pole trójkąta ABS :

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$$

Pole części wspólnej kół:

$$P = 2(P_w - P_T) = 18(\pi - 2)$$

6. Niech:

$$K: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Wówczas:

$$K': (x-a)^2 + (y+b)^2 = r^2,$$

$$K'': (x+a)^2 + (y+b)^2 = r^2$$

Jednocześnie okrąg K_O symetryczny do okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych ma promień r i środek $S_O(-a, -b)$, czyli K_O ma równanie:
 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = r^2$
 Zatem $K_O = K''$.

7. a) $K': (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

b) $K': (x-9)^2 + (y-5)^2 = 4$

9. a) $K': (x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) $K': (x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$

K

5. W jednym układzie współrzędnych narysuj okrąg $K: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$ oraz okrąg K' będący obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Wyznacz równanie okręgu K' i oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.

$\square$ 6. Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem osi OX , a okrąg K'' jest obrazem okręgu K' w symetrii względem osi OY . Uzasadnij, że okrąg K'' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych.

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

K'

Dany jest okrąg $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem punktu $P(3, 1)$.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(4, -2)$.

Niech $S'(x_1, y_1)$ będzie środkiem okręgu K' .

Wówczas punkt $P(3, 1)$ jest środkiem odcinka SS' , zatem:

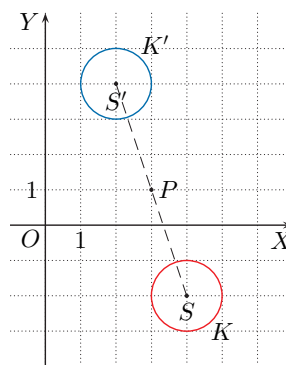
$$\frac{4+x_1}{2} = 3 \quad \text{ i } \quad \frac{-2+y_1}{2} = 1$$

$$x_1 = 2 \quad \text{ i } \quad y_1 = 4$$

Środkiem okręgu K' jest punkt $S'(2, 4)$.

Ponieważ promienie okręgów K i K' są równe, okrąg K' opisany jest równaniem:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$$



Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem punktu P . Narysuj okręgi K i K' .

a) $K: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9, \quad P(2, 1)$

b) $K: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4, \quad P(3, 2)$

Powtórzenie

8. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.

a) $A(-3, 2), B(3, -4), C(6, 2)$

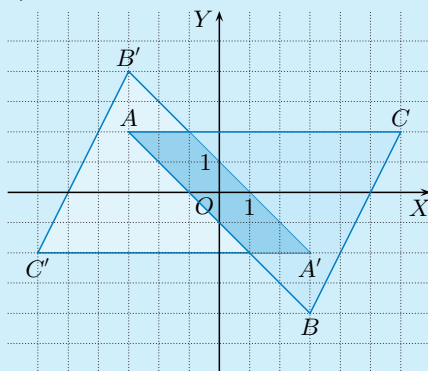
b) $A(-3, -4), B(3, 2), C(-3, 0)$

9. Wyznacz równanie okręgu K' będącego obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Narysuj te okręgi.

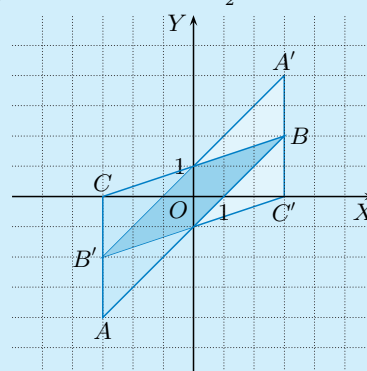
a) $K: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$

b) $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

8. a) $P = 2 \cdot 4 = 8$



b) $P = 2 \cdot P_{DBE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 6$



2.13. Zagadnienia uzupełniające

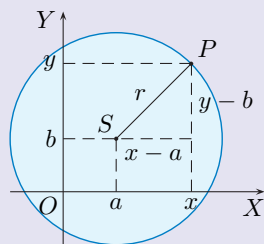
■ Koło w układzie współrzędnych

Przypomnijmy, że kołem o środku w punkcie S i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza od r lub równa r (zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła).

Punkt $P(x, y)$ należy do koła o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu r , gdy $|PS| \leq r$.

Koło o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$



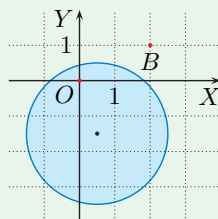
Przykład 1

Sprawdź, czy punkty $O(0, 0)$ i $B(2, 1)$ należą do koła, którego punkty spełniają nierówność $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 \leq 4$.

Sprawdzamy, czy współrzędne punktów O i B spełniają nierówność opisującą koło.

Punkt O : $(0 - \frac{1}{2})^2 + (0 + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \leq 4$, czyli punkt O należy do koła.

Punkt B : $(2 - \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} > 4$, czyli punkt B leży na zewnątrz koła.



1. Narysuj koła K_1 , K_2 i K_3 opisane nierównościami:

$$K_1: x^2 + y^2 \leq 16, \quad K_2: (x - 2)^2 + y^2 \leq 4, \quad K_3: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$$

Do których z tych kół należy punkt P ?

- a) $P(-2, 2)$ b) $P(2, 2)$ c) $P(2, -1)$ d) $P(2, 0)$

2. Wyznacz nierówność opisującą koło o najmniejszym polu i o środku w punkcie $S(1, 1)$, jeżeli do tego koła należy punkt P .

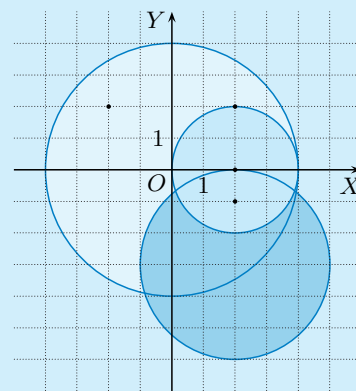
- a) $P(5, -2)$ b) $P(-7, -5)$ c) $P(3, 3)$ d) $P(-3, 0)$

2. Zauważmy, że $r^2 = |SP|^2$.

- a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 25$
 b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 100$
 c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 8$
 d) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 17$

Odpowiedzi do zadań

1. a) K_1 b) K_1, K_2
 c), d) K_1, K_2, K_3



■ Punkty wspólne dwóch okręgów

Przykład 2

Wyznacz punkty wspólne okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 = 5 \text{ i } K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$$

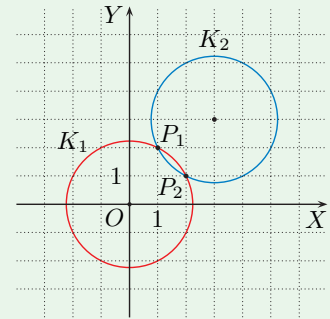
Przekształcamy równanie okręgu K_2 :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y = -13$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y = -13 \end{cases}$$



Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i otrzymujemy:

$$6x + 6y = 18, \text{ skąd } y = -x + 3$$

Podstawiamy $y = -x + 3$ do równania $x^2 + y^2 = 5$:

$$x^2 + (-x + 3)^2 = 5$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 2$$

Dla $x = 1$ otrzymujemy $y = 2$, a dla $x = 2$ otrzymujemy $y = 1$, zatem punktami wspólnymi okręgów są: $P_1(1, 2)$ i $P_2(2, 1)$.

Przykład 3

Wyznacz punkty wspólne okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 = 8 \text{ i } K_2: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$$

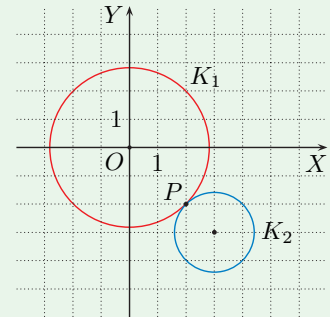
Przekształcamy równanie okręgu K_2 :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = 2$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y = -16$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 - 6x + 6y = -16 \end{cases}$$



Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i otrzymujemy:

$$6x - 6y = 24, \text{ skąd } y = x - 4$$

Podstawiamy $y = x - 4$ do równania $x^2 + y^2 = 8$:

$$x^2 + (x - 4)^2 = 8$$

$$\begin{aligned}2x^2 - 8x + 8 &= 0 \\x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x - 2)^2 &= 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

Zatem $y = -2$, więc okręgi K_1 i K_2 mają jeden punkt wspólny: $P(2, -2)$.

Przykład 4

Wyznacz punkty wspólne okręgów:

$$K_1: (x + 3)^2 + y^2 = 13 \quad \text{i} \quad K_2: (x - 3)^2 + y^2 = 25$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + y^2 = 13 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i otrzymujemy:

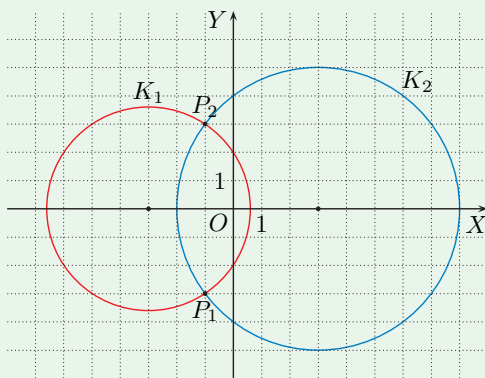
$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = -12$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned}2x \cdot 6 &= -12 \\x &= -1\end{aligned}$$

Podstawiamy $x = -1$ do równania $(x + 3)^2 + y^2 = 13$ i otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 = 9$, skąd $y = -3$ lub $y = 3$.

Zatem punktami wspólnymi okręgów są: $P_1(-1, -3)$ i $P_2(-1, 3)$.



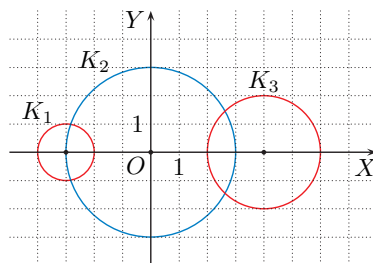
3. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{aligned}\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 4)^2 = 9 \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 9 \\ (x + 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

4. Podaj równania okręgów K_1 , K_2 i K_3 przedstawionych na rysunku. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecinają się okręgi:

a) K_1 i K_2 ,

b) K_2 i K_3 .



4. $K_1: (x + 3)^2 + y^2 = 1$,

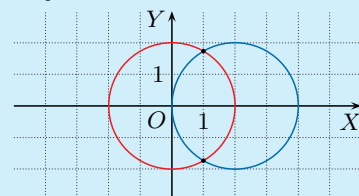
$$K_2: x^2 + y^2 = 9,$$

$$K_3: (x - 4)^2 + y^2 = 4$$

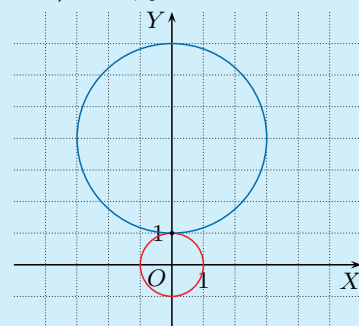
$$\text{a) } \left(-\frac{17}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right), \left(-\frac{17}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$$

$$\text{b) } \left(\frac{21}{8}, -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right), \left(\frac{21}{8}, \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$$

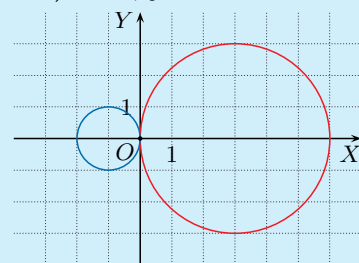
3. a) $x = 1, y = -\sqrt{3}$ lub $x = 1, y = \sqrt{3}$



b) $x = 0, y = 1$



c) $x = 0, y = 0$



Odpowiedzi do zadań

- $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 15$; współliniowe
 - $|AB| = 8\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{5}$; współliniowe
 - $|AB| = 10$, $|BC| = 10$, $|AC| = 14\sqrt{2}$; niewspółliniowe
 - $|AB| = 6\sqrt{2}$, $|BC| = 3\sqrt{2}$, $|AC| = 9\sqrt{2}$; współliniowe
- $2\sqrt{5}$
 - 5
 - $2\sqrt{5}$
 - 2,5
- $(0, 1)$, $(2, -2)$, $(4, -5)$
 - $(\frac{1}{2}, 4)$, $(2, 5)$, $(\frac{7}{2}, 6)$
- $B(-5, 2)$
 - $B(7, 10)$
 - $B(-2, -1)$
 - $B(2\sqrt{3} - 3, 0)$
- Obliczamy długości boków trójkąta:
 $|AB| = |BC| = 2\sqrt{10}$
 $|AC| = 4\sqrt{5}$
Dwa boki mają tę samą długość, czyli trójkąt jest równoramienny. Zauważmy, że:
 $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$
zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt jest prostokątny. Środek okręgu opisanego to środek przeciwprostokątnej, czyli punkt $(4, 4)$.
 - $S(1, -2)$
 - $S(-4, 4)$
 - $S(-1, 3)$
- $Ob = 12\sqrt{5}$, $S(0, 1)$, $r = 5$
 - $Ob = 24\sqrt{2}$, $S(2, 0)$, $r = 2\sqrt{10}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz długości odcinków AB , BC i AC . Czy punkty A , B i C są współliniowe?
 - $A(-4, 5)$, $B(0, 2)$, $C(8, -4)$
 - $A(13, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$
 - $A(-4, -12)$, $B(2, -4)$, $C(10, 2)$
 - $A(-2\sqrt{2}, 8)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -4)$
- Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC .
 - $A(6, 3)$, $B(1, 4)$, $C(3, -2)$
 - $A(-1, 5)$, $B(0, -1)$, $C(6, 5)$
 - $A(-3, 3)$, $B(-5, \frac{3}{2})$, $C(3, -\frac{7}{2})$
 - $A(1, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(\frac{9}{2}, \frac{13}{2})$
- Wyznacz współrzędne punktów dzielących odcinek AB na cztery równe części.
 - $A(-2, 4)$, $B(6, -8)$
 - $A(-1, 3)$, $B(5, 7)$
- Dany jest punkt $A(3, -2)$. Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli punkt S jest środkiem odcinka AB .
 - $S(-1, 0)$
 - $S(5, 4)$
 - $S(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
 - $S(\sqrt{3}, -1)$
- Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - $A(0, 6)$, $B(2, 0)$, $C(8, 2)$
 - $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 2)$
 - $A(-7, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 10)$
 - $A(2, -2)$, $B(4, 6)$, $C(-6, 0)$
- Oblicz obwód prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu, do którego należą punkty A , B , C i D .
 - $A(-5, 1)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$, $D(3, 5)$
 - $A(-4, 2)$, $B(4, -6)$, $C(8, -2)$, $D(0, 6)$
- W trójkącie o wierzchołkach ABC poprowadzono środkową AD i wysokość AE . Oblicz ich długości.
 - $A(2, -1)$, $B(1, 2)$, $C(-3, 4)$
 - $A(7, 2)$, $B(2, 7)$, $C(-4, -5)$
- Sprawdź, czy prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są przystające lub podobne.
 - $A(-1, -1)$, $B(3, -3)$, $C(7, 5)$, $D(3, 7)$, $E(-8, 1)$, $F(4, -5)$, $G(7, 1)$, $H(-5, 7)$
 - $A(-7, -2)$, $B(-5, -5)$, $C(1, -1)$, $D(-1, 2)$, $E(1, 4)$, $F(5, -2)$, $G(8, 0)$, $H(4, 6)$

7. a) $|AD| = 5$, $|AE| = \sqrt{5}$

b) $x_D = \frac{2-4}{2} = -1$, $y_D = \frac{7-5}{2} = 1$, czyli $D(-1, 1)$ oraz $|AD| = \sqrt{65}$

Wyznaczamy długość $|AE|$. Prosta BC : $y = 2x + 3$, czyli $2x - y + 3 = 0$

$$|AE| = \frac{|2 \cdot 7 - 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

8. a) $|AB| = |CD| = 2\sqrt{5}$, $|BC| = |AD| = 4\sqrt{5}$,

$$|EF| = |GH| = 6\sqrt{5}$$
, $|FG| = |HE| = 3\sqrt{5}$

Prostokąty $ABCD$ i $FGHE$ są podobne w skali $\frac{2}{3}$.

b) $|AB| = |CD| = \sqrt{13} = |FG| = |HE|$

$$|BC| = |AD| = 2\sqrt{13} = |EF| = |GH|$$

Prostokąty $ABCD$ i $FGHE$ są przystające.



9. Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r . Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

a) $S(-4, 0)$, $r = 5$

c) $S(-1, 2)$, $r = 4$

b) $S(2, 3)$, $r = 5$

d) $S(-3, -4)$, $r = 1$

10. Podaj współrzędne środka i promień okręgu K . Oblicz pole kwadratu wpisanego w ten okrąg.

a) $K: x^2 + (y - 5)^2 = 64$

c) $K: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$

b) $K: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 81$

d) $K: (x + 11)^2 + (y + 13)^2 = 40$

11. Które z punktów: P , Q , R , należą do okręgu K ?

a) $P(8, 2)$, $Q(-1, -1)$, $R(5, -2)$, $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

b) $P(-4, 6)$, $Q(3, 2)$, $R(-4, 0)$, $K: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$

c) $P(5, -1)$, $Q(1, -4)$, $R(6, -7)$, $K: (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$

12. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB .

a) $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$

d) $A(0, 0)$, $B(4, 4)$

b) $A(-2, -2)$, $B(-2, 6)$

e) $A(-3, -1)$, $B(1, 1)$

c) $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$

f) $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$

13. Wyznacz punkty wspólne okręgu K z osiami układu współrzędnych. Podaj równanie okręgu K_1 symetrycznego do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

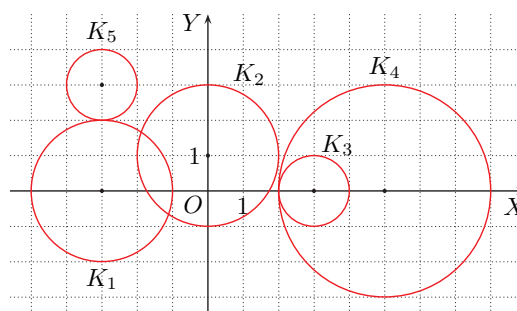
a) $K: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

b) $K: (x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

14. Podaj równania okręgów K_1 , K_2 , K_3 , K_4 oraz K_5 , przedstawionych na rysunku obok. Dla której pary okręgów odległość między ich środkami jest równa:

a) sumie ich promieni,

b) bezwzględnej wartości różnicy ich promieni?



15. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(0, 4)$ i $B(4, 0)$. Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.

15. $K_1: x^2 + y^2 = 16$, $K_2: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$
Pole wycinka koła K_1 wyznaczonego przez kąt środkowy $AOB = 90^\circ$:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 16 = 4\pi$$

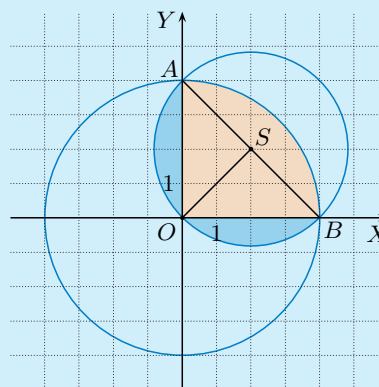
Pole wycinka koła K_2 wyznaczonego przez kąt środkowy $ASO = 90^\circ$:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8 = 2\pi$$

Pole trójkąta ASO : $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

Pole części wspólnej kół K_1 i K_2 :

$$P = 4\pi + 2(2\pi - 4) = 8(\pi - 1)$$



9. a) $(x + 4)^2 + y^2 = 25$,
(1, 0), (-9, 0), (0, 3), (0, -3)
b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$,
(-2, 0), (6, 0), (0, 3 - $\sqrt{21}$),
(0, 3 + $\sqrt{21}$)
c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$,
(-2 $\sqrt{3}$ - 1, 0), (2 $\sqrt{3}$ - 1, 0),
(0, 2 - $\sqrt{15}$), (0, 2 + $\sqrt{15}$)
d) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$,
brak punktów wspólnych
z osiami układu współrzędnych

10. a) $S(0, 5)$, $r = 8$, $P = 128$

b) $S(3, -4)$, $r = 9$, $P = 162$

c) $S(2, 5)$, $r = 2\sqrt{5}$, $P = 40$

d) $S(-11, -13)$, $r = 2\sqrt{10}$,
 $P = 80$

11. a) P , Q b) P , R c) Q

12. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

b) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$

c) $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = 12\frac{1}{4}$

d) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

e) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$

f) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$

13. a) (3, 0), (0, 3),

$K_1: (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

b) (-4, 0), (0, 4),

$K_1: (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

14. $K_1: (x + 3)^2 + y^2 = 4$,

$K_2: x^2 + (y - 1)^2 = 4$,

$K_3: (x - 3)^2 + y^2 = 1$,

$K_4: (x - 5)^2 + y^2 = 9$,

$K_5: (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$

a) K_1 i K_5

b) K_3 i K_4

Zestaw II

1. a) $3\sqrt{2}$ b) $\frac{13}{5}$ c) $\sqrt{10}$
2. a) $|AB| = 4\sqrt{2}$, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $P = 6$
b) $|AB| = 5\sqrt{2}$, $d = 5\sqrt{2}$, $P = 25$
3. a) $h = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $P = 42$
b) $h = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $P = 1$
4. a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$
5. Podane proste są równoległe.
a) Punkt $A(1, 0)$ należy do prostej $x + 2y - 1 = 0$.
Odległość punktu A od prostej $x + 2y - 6 = 0$:
$$\frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

b) Punkt $A(-2, 1)$ należy do prostej $3x + 4y + 2 = 0$.
Odległość punktu A od prostej $3x + 4y - 8 = 0$:
$$\frac{|3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$
6. a) $y = x - \frac{3}{2}$
b) $y = 2x + 2$
7. a) $k: y = -3x + 3$,
 $l: y = 3x - 3$,
 $m: y = 3x + 3$
b) $k: y = \frac{1}{2}x + 1$,
 $l: y = -\frac{1}{2}x - 1$,
 $m: y = -\frac{1}{2}x + 1$
c) $k: y = \frac{3}{2}x - 2$,
 $l: y = -\frac{3}{2}x + 2$,
 $m: y = -\frac{3}{2}x - 2$
8. a) Środek przekątnej AC : $S(1, 3)$
 $|AS| = 2\sqrt{5}$
Współczynnik kierunkowy przekątnej AC : $-\frac{1}{2}$
Przekątna BD zawiera się w prostej: $y = 2x + 1$
Wierzchołki B i D mają postać $(x, 2x + 1)$, a ich odległość od S jest równa $|AS|$:
$$\sqrt{(x-1)^2 + (2x+1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $x = -1$ lub $x = 3$
Zatem $B(-1, -1)$, $D(3, 7)$.
b) $B(13, -7)$, $D(-3, 9)$

Zestaw II

1. Oblicz odległość punktu $A(1, -2)$ od prostej:
a) $x + y - 5 = 0$, b) $3x + 4y - 8 = 0$, c) $x - 3y = -3$.
2. Oblicz długość odcinka AB , odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC .
a) $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$, $C(1, 3)$ b) $A(5, 4)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, -4)$
3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Oblicz wysokość opuszczoną z wierzchołka C oraz pole tego równoległoboku.
a) $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$, $C(7, 3)$ b) $A(0, -4)$, $B(-1, -6)$, $C(3, 3)$
4. Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi.
a) $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$, $C(1, -1)$, $D(4, 2)$
b) $A(-1, 3)$, $B(1, -1)$, $C(5, 1)$, $D(2, 7)$
5. Oblicz odległość między prostymi.
a) $x + 2y - 1 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ b) $3x + 4y + 2 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$
6. Wyznacz równanie prostej równoległej do podanych prostych oraz równo odległej od każdej z nich.
a) $x - y + 2 = 0$, $x - y - 5 = 0$ b) $2x - y - 3 = 0$, $2x - y + 7 = 0$
7. Prosta k jest symetralną odcinka AB . Wyznacz równanie prostej l będącej obrazem prostej k w symetrii względem osi OX oraz prostej m będącej obrazem prostej k w symetrii względem osi OY .
a) $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$ b) $A(0, 6)$, $B(4, -2)$ c) $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$
8. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D czworokąta $ABCD$, jeśli:
a) jest on kwadratem oraz $A(-3, 5)$ i $C(5, 1)$,
b) jest on rombem oraz $A(1, -3)$, $C(9, 5)$ i $|BD| = 2|AC|$.
9. Pole rombu $ABCD$ jest równe 32. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D , jeśli wiadomo, że:
a) $A(-4, -2)$, $C(4, 6)$, b) $A(2, 3)$, $C(4, 1)$.
10. Punkty $A(2, 0)$ i $C(4, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości $2\sqrt{5}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i oblicz jego pole.
9. a) $|AC| = 8\sqrt{2}$, $\frac{8\sqrt{2} \cdot |BD|}{2} = 32$, czyli $|BD| = 4\sqrt{2}$
Środek przekątnej AC : $S(0, 2)$. Przekątna BD zawiera się w prostej: $y = -x + 2$.
Wierzchołki B i D mają postać $(x, -x + 2)$, a ich odległość od S jest równa $\frac{1}{2}|BD|$:
$$\sqrt{(x-0)^2 + (-x+2-2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2}$$

 $x^2 = 4$, czyli $x = 2$ lub $x = -2$. Zatem $B(2, 0)$, $D(-2, 4)$.
b) $B(-5, -6)$, $D(11, 10)$
10. Punkt przecięcia przekątnych: $S(3, 1)$. Równanie prostej AC : $y = x - 2$.
Równanie symetralnej odcinka AC : $y = -x + 4$, stąd współrzędne wierzchołków B i D są postaci $(x, -x + 4)$.
$$\sqrt{(x-2)^2 + (-x+4-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

 $x = 0$ lub $x = 6$. Zatem $B(6, -2)$, $D(0, 4)$. $P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$.

11. Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .

- a) $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$, $K_2: (x-5)^2 + (y+4)^2 = 25$
 b) $K_1: (x+4)^2 + (y+1)^2 = 36$, $K_2: (x+4)^2 + (y+6)^2 = 3$
 c) $K_1: (x-2)^2 + (y+5)^2 = 17$, $K_2: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 16$
 d) $K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$, $K_2: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$

12. Okrąg o środku w punkcie S_1 jest styczny do prostej l , a okrąg o środku w punkcie S_2 jest styczny do prostej k . Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- a) $S_1(-1, 4)$, $l: x = 1$, $S_2(1, 4)$, $k: x = 3$
 b) $S_1(-3, -3)$, $l: y = -2$, $S_2(-3, -4)$, $k: y = -6$
 c) $S_1(-2, 5)$, $l: y = -x + 7$, $S_2(4, -1)$, $k: y = x + 3$
 d) $S_1(1, 1)$, $l: y = \frac{3}{4}x - 4$, $S_2(8, 9)$, $k: y = -\frac{3}{4}x + 6$

13. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

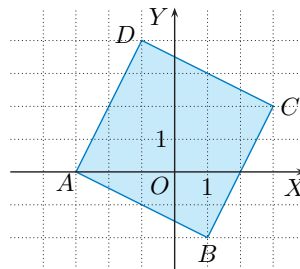
- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 17 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$

14. Oblicz odległość między punktami, których współrzędne (x, y) spełniają układ równań.

- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases}$

15. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$ (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:

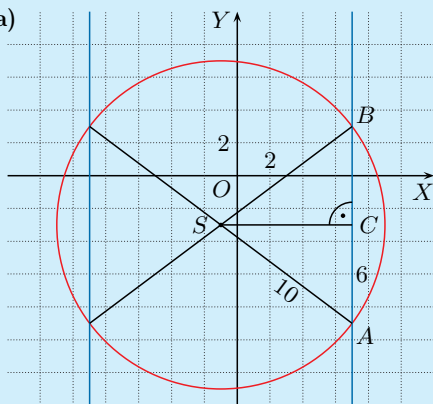
- a) wpisanego w ten kwadrat,
 b) opisanego na tym kwadracie.



16. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 100$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

- a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.

16. a)



$$|SC| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

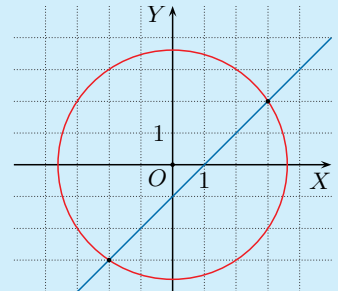
$$x = -9 \text{ lub } x = 7$$

- b) $x = -5\sqrt{2} - 1$ lub $x = 5\sqrt{2} - 1$
 c) $x = -5\sqrt{3} - 1$ lub $x = 5\sqrt{3} - 1$
 d) $x = -1$

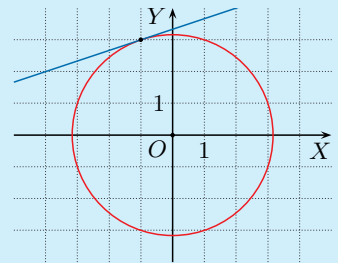
11. a) styczne zewnętrznie
 b), c) przecinają się
 d) rozłączne zewnętrznie

12. a) $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $|S_1S_2| = 2$, przecinają się
 b) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $|S_1S_2| = 1$, styczne wewnętrznie
 c) $r_1 = 2\sqrt{2}$, $r_2 = 4\sqrt{2}$, $|S_1S_2| = 6\sqrt{2}$, styczne zewnętrznie
 d) $r_1 = \frac{17}{5}$, $r_2 = \frac{36}{5}$, $|S_1S_2| = \sqrt{113}$, rozłączne zewnętrznie

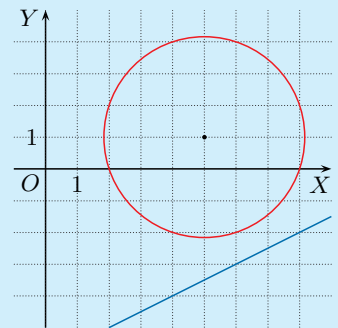
13. a) $x = -2$, $y = -3$ lub $x = 3$, $y = 2$



b) $x = -1$, $y = 3$



f) układ sprzeczny



14. a) $(2, -4)$, $(6, 0)$, $d = 4\sqrt{2}$
 b) $(-7, -1)$, $(1, 5)$, $d = 10$

15. a) $x^2 + (y-1)^2 = 5$
 b) $x^2 + (y-1)^2 = 10$



Aby wyznaczyć równanie symetralnej odcinka AB , możemy skorzystać z tego, że jest to prosta:

- prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek,
- będąca zbiorem punktów równo odległych od punktów A i B .

Przykład

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, w której zawarty jest odcinek AB :

$$a = \frac{-1-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka AB – prosta l – jest do niego prostopadła, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 2.

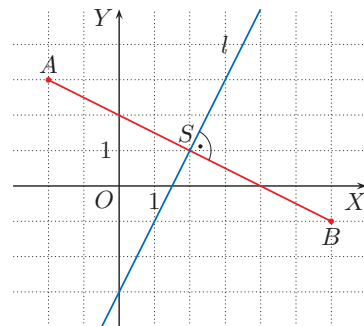
Wyznaczamy środek odcinka AB :

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Podstawiamy współrzędne punktu S do równania prostej $y = 2x + b$:

$$1 = 2 \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = -3$$

Prosta l opisana jest równaniem $y = 2x - 3$.



II sposób

Punkt $P(x, y)$ należy do symetralnej odcinka AB , gdy:

$$|PA| = |PB|$$

$$|PA| = \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 3)^2}$$

$$|PB| = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - (-1))^2}$$

Zatem:

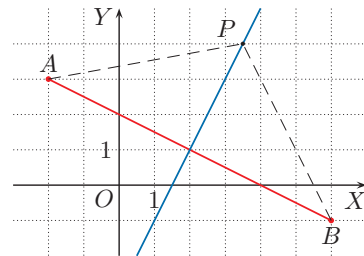
$$\sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - (-1))^2}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 6)^2 + (y + 1)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1$$

$$-8y = -16x + 24 \quad / : (-8)$$

$$y = 2x - 3$$



Odpowiedź: Symetralna odcinka AB jest prostą o równaniu $y = 2x - 3$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Punkty $A(-3, 2)$, $B(1, 2)$, $C(5, 6)$ i $D(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału:

A. $(13; 16)$,
B. $(16; 19)$,
C. $(19; 22)$,
D. $(22; 25)$.

2. Odległość punktu $P(1, 4)$ od prostej $y = \frac{2}{3}x - 1$ jest równa odległości tego punktu od prostej:

A. $y = \frac{2}{3}x + 1$,
B. $y = \frac{2}{3}x + 8$,
C. $y = -\frac{3}{2}x - 1$,
D. $y = -\frac{3}{2}x - 8$.

3. Dane są wierzchołki $B(5, 3)$ i $C(7, 7)$ równoległoboku $ABCD$. Wierzchołki A i D leżą na prostej $y = 2x + 3$. Pole tego równoległoboku jest równe:

A. 18, B. 20, C. 24, D. 28.

4. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 = 100$?

A. 4 B. 8 C. 9 D. 12

5. Dany jest okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu 3 oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny, jeśli:

A. $S_1(1, 2)$, $S_2(4, 5)$,
B. $S_1(2, 1)$, $S_2(3, 2)$,
C. $S_1(-6, 2)$, $S_2(-2, -1)$,
D. $S_1(-4, -3)$, $S_2(-2, -2)$.

6. Okrąg o środku w punkcie $S(-1, 2)$ i promieniu $\sqrt{10}$ ma dwa punkty wspólne z prostą AB , gdy:

A. $A(-3, -2)$, $B(1, -1)$,
B. $A(-2, -5)$, $B(2, 2)$,
C. $A(0, 5)$, $B(3, 4)$,
D. $A(2, 1)$, $B(4, 7)$.

7. Punkty $A(-4, -4)$, $B(6, -4)$ i $C(14, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Okrąg, którego środkiem jest punkt przecięcia przekątnych tego rombu, styczny do boku AB , dany jest równaniem:

A. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$,
B. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$,
C. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$,
D. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

8. Punkty $A(-3, 7)$, $B(17, -3)$ i $C(13, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek D ma współrzędne:

A. $(-7, 15)$, B. $(-4, 10)$, C. $(-4, 8)$, D. $(-20, 10)$.

6. Niech d – odległość punktu S od prostej AB , $r = \sqrt{10}$.
Okrąg ma 2 punkty wspólne z prostą, gdy $d < r$.

A. $d = \sqrt{\frac{196}{17}} > \sqrt{10}$

B. $d = \sqrt{\frac{441}{65}} < \sqrt{10}$

C. $d = \sqrt{10} = r$

D. $d = \sqrt{10} = r$

7. Środek przekątnej AC : $S(5, -1)$

Prosta AB : $y = -4$

Odległość środka S od prostej AB : $r = 3$

$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$

1. Obwód równoległoboku:

$$Ob = 2(|AB| + |BC|) = 2(4 + 4\sqrt{2}) = 8 + 8\sqrt{2}$$

Zauważmy, że $8\sqrt{2} = \sqrt{128}$ oraz $11^2 < 128 < 12^2$, czyli $11 < 8\sqrt{2} < 12$.

Zatem $8 + 8\sqrt{2} \in (19; 20)$.

2. $2x - 3y - 3 = 0$,

$$d_P = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}$$

A. $2x - 3y + 3 = 0$,

$$d_P = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

B. $2x - 3y + 24 = 0$,

$$d_P = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 24|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$$

C. $3x + 2y + 2 = 0$,

$$d_P = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

D. $3x + 2y + 16 = 0$,

$$d_P = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 16|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{27\sqrt{13}}{13}$$

3. $|BC| = 2\sqrt{5}$

Odległość wierzchołka B od prostej $2x - y + 3 = 0$:

$$h = \frac{|2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$P = 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 20$$

4. $(0, 10)$, $(10, 0)$, $(0, -10)$,

$$(-10, 0), (6, 8), (8, 6),$$

$$(-6, -8), (-8, -6), (-6, 8),$$

$$(-8, 6), (6, -8), (8, -6)$$

5. A. $|S_1 S_2| = 3\sqrt{2}$

B. $|S_1 S_2| = \sqrt{2}$

C. $|S_1 S_2| = 5 = 3 + 2$

D. $|S_1 S_2| = \sqrt{5}$



Odpowiedzi do zadań

1. Środek odcinka AB : $(-4, 3)$
Środek odcinka CD : $(8, -2)$
Odległość między środkami:
13
2. 5
3. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
4. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, $d = 6$
5. $|AB| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$
 $|BC| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$
 $|CD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$
 $|DA| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$
 $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$,
więc czworokąt $ABCD$ jest
rombem.
 $|AC| = 8\sqrt{2}$ i $|BD| = 4\sqrt{2}$,
czyli pole:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32$
 $P = |AB| \cdot h = 2\sqrt{10} \cdot h = 32$,
czyli wysokość $h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
6. $C(-4, 4)$, $D(-1, 0)$
Środek boku CD : $P(-\frac{5}{2}, 2)$
Symetralna boku CD jest do
niego prostopadła i prze-
chodzi przez punkt P .
 $a_{CD} = -\frac{4}{3}$, czyli symetralna
boku CD ma równanie:
 $y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{8}$
7. Środki okręgów: $S_1(4, 3)$
i $S_2(1, -3)$
Promienie okręgów: $r_1 = \sqrt{5}$
i $r_2 = 2\sqrt{5}$
 $|S_1S_2| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} =$
 $= r_1 + r_2$
Zatem okręgi są styczne
zewnątrznie.
8. $S(2, 1)$, $r = 5$, $\angle ACB = 90^\circ$
i $|AC| = |BC|$, więc bok AB
jest średnicą okręgu i jest
prostopadły do CS .
 $a_{CS} = \frac{4}{3}$, $a_{AB} = -\frac{3}{4}$,
prosta AB : $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

Zatem $A(6, -2)$, $B(-2, 4)$.

■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(-3, 5)$, $C(5, -1)$ i $D(11, -3)$. Oblicz odległość między środkami odcinków AB i CD .

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz odległość punktu $P(1, 6)$ od prostej $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz równanie okręgu o środku $S(4, 1)$ stycznego do prostej $y = -2$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu $K: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ względem osi OX . Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

D Zadanie 5 (5 pkt)

Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$, $C(6, 7)$ i $D(0, 5)$ jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

Zadanie 6 (4 pkt)

Punkty $A(4, 2)$ i $B(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(0, 3)$. Wyznacz równanie symetralnej boku CD .

D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \quad \text{ i } \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$$

są styczne zewnętrznie.

Zadanie 8 (5 pkt)

W okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ wpisano trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku $C(-1, -3)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

W okrąg $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$ wpisano kwadrat, którego jedna przekątna jest zawarta w prostej $x - 2y + 2 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

$$9. \begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$A(2, 2), C(6, 4)$$

Prosta prostopadła do prostej AC i przechodząca przez środek okręgu: $y = -2x + 11$

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y = -2x + 11 \end{cases}$$

$$B(5, 1), D(3, 5)$$