

6 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skale logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 317).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli



Multibook

- Trzęsienia ziemi i skala Richtera
- Spirale w przyrodzie
- Ulubiona gra cesarza

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729
2. a) 81
b) -32
c) -216
d) 1
3. a) $\frac{1}{16}$
b) $\frac{1}{625}$
c) $\frac{1}{216}$
d) $\frac{1}{729}$
e) $-\frac{1}{4}$
f) $\frac{1}{25}$
g) $\frac{1}{16}$
h) $-\frac{1}{243}$
4. a) $\frac{1}{64}$
b) $\frac{16}{81}$
c) $11\frac{25}{64}$
d) 1
e) $1\frac{4}{5}$
f) $3\frac{3}{8}$
g) $\frac{64}{125}$
h) $\frac{81}{10000}$
5. a) x
b) y
c) y
d) x
6. a) 2^{10}
b) 2^8
c) 2^4
d) 2^7
e) 2^2
f) 2^{10}
g) 2^2
h) 2^7
i) 2^{13}

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz:
a) 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots, 10$, b) 3^n dla $n = 0, 1, \dots, 6$.
2. Oblicz.
a) $(-3)^4$ b) $(-2)^5$ c) $(-6)^3$ d) $(-5)^0$

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i liczby $a \neq 0$ definiujemy: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

3. Oblicz.
a) 4^{-2} c) 6^{-3} e) $(-4)^{-1}$ g) $(-2)^{-4}$
b) 5^{-4} d) 9^{-3} f) $(-5)^{-2}$ h) $(-3)^{-5}$
4. Oblicz.
a) $(\frac{1}{4})^3$ c) $(1\frac{1}{2})^6$ e) $(\frac{5}{9})^{-1}$ g) $(1\frac{1}{4})^{-3}$
b) $(\frac{2}{3})^4$ d) $(\frac{13}{7})^0$ f) $(\frac{2}{3})^{-3}$ h) $(3\frac{1}{3})^{-4}$
5. Która z liczb jest większa: x czy y ?
a) $x = 2^{10}$, $y = (-2)^{11}$ c) $x = (-3)^4$, $y = (-4)^4$
b) $x = 5^4$, $y = (-5)^6$ d) $x = (-5)^3$, $y = (-7)^3$

Twierdzenie

Dla $x, y \in \mathbb{Z}$ i $a, b \neq 0$:

$$\begin{aligned} \blacksquare a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \blacksquare a^x \cdot b^x &= (ab)^x & \blacksquare (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\ \blacksquare \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \blacksquare \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{aligned}$$

6. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.
a) $2^4 \cdot 2^6$ d) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^0$ g) $2^{-4} : 2^{-6}$
b) $4^2 \cdot 2^4$ e) $2^{-3} \cdot 2^5$ h) $(2^2)^3 \cdot 2$
c) $2^7 : 2^3$ f) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ i) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$
7. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.
a) $2^4 \cdot 4^3 \cdot 2^{-1}$ c) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$ e) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$
b) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$ d) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$ f) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

7. a) 2^9
b) 2^{22}
c) 2^{-3}
d) 2^6
e) 2^0
f) 2^6

6.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $81^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $169^{\frac{1}{2}}$ g) $8^{\frac{1}{3}}$ i) $81^{\frac{1}{4}}$ k) $256^{\frac{1}{4}}$
b) $100^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $441^{\frac{1}{2}}$ h) $27^{\frac{1}{3}}$ j) $64^{\frac{1}{6}}$ l) $1024^{\frac{1}{10}}$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

a) $8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$ b) $9^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $32^{\frac{4}{5}}$ c) $81^{2,5}$ d) $625^{-\frac{1}{4}}$ e) $64^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = 2^4 = 16$
b) $8^{\frac{7}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{7}{3} - \frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$
c) $25^{\frac{3}{2}} : 125^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} : (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Uczeń:

- zapisuje pierwiastek n -tego stopnia w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku $\frac{1}{n}$,
- oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych,
- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym.

Ćwiczenie 1

- a) 9
b) 10
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{11}$
e) 13
f) 21
g) 2
h) 3
i) 3
j) 2
k) 4
l) 2

Ćwiczenie 2

- a) 4
b) 16
c) 59049
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{16}$
f) 729

Ćwiczenie 3

- a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) 5
e) 3 f) 2 g) 36 h) $\sqrt[6]{7}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1024 b) 9
c) 16 d) 5
2. np.: a) $7^{\frac{5}{6}}$ b) $3^{\frac{13}{4}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{6}}$
d) $5^{-\frac{5}{3}}$ e) $3^{\frac{10}{3}}$ f) 5^{-3}
3. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{3}{2}}$
d) $5^{\frac{2}{3}}$ e) $5^{\frac{3}{4}}$
4. a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{4}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{5}}$
d) $3^{-\frac{3}{2}}$ e) $3^{\frac{5}{4}}$
5. a) $5^{\frac{1}{8}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{12}}$ d) $3^{\frac{5}{6}}$
e) 2^{-1} f) $2^{\frac{3}{4}}$ g) $3^{\frac{7}{8}}$ h) $3^{\frac{5}{3}}$
6. a) 243 b) 625 c) 8
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{5}$
g) 100000 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ i) $\frac{1}{12}$
j) $\frac{1}{3}$ k) 16 l) 25
7. a) 0,027 b) 2 c) 0,04 d) $\frac{1000}{27}$
e) 8 f) 0,0016 g) 1 h) 64
8. np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2
d) 6^{-6} e) 2^{-31} f) 1^1

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}}$ c) $3^{\frac{3}{2}} : \sqrt{3}$ e) $15^{0,5} \cdot 0,36^{0,25}$ g) $(6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}) : 6^{\frac{1}{6}}$
b) $(\frac{3}{20})^{\frac{1}{4}} \cdot (\frac{5}{12})^{\frac{1}{4}}$ d) $(25\sqrt{5}) : 5^{\frac{3}{2}}$ f) $20^{\frac{1}{3}} \cdot 2,5^{-\frac{1}{3}}$ h) $7 : (7^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{7})$

Zadania

1. Oblicz.
a) $\sqrt{16^5}$ b) $\sqrt[3]{27^2}$ c) $\sqrt[5]{32^4}$ d) $(\sqrt[6]{125})^2$
2. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbb{Q}$.
a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{3})^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$
b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0,5} \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{-6}$
3. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt[4]{125}$
4. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.
a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{3^4}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ e) $3 \cdot \sqrt[4]{3}$
5. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$.
a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$ c) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ e) $2 : 8^{\frac{2}{3}}$ g) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
b) $(\sqrt{5})^3$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$ f) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ h) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$
6. Oblicz.
a) $9^{\frac{5}{2}}$ d) $8^{-\frac{2}{3}}$ g) $10\,000^{1,25}$ j) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$
b) $125^{\frac{4}{3}}$ e) $27^{-\frac{4}{3}}$ h) $81^{-0,375}$ k) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$
c) $16^{\frac{3}{4}}$ f) $25^{-\frac{1}{2}}$ i) $144^{-0,5}$ l) $5^3 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$
7. Oblicz.
a) $0,09^{\frac{3}{2}}$ c) $0,008^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$ g) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$
b) $0,25^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0081^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{4}{5}}$ h) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$
8. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $a \in \mathbb{N}$.
a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : (64^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-3})$
b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{27}{8})^{-3} \cdot 1,5^6$

6.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrafiemy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x , gdy x jest liczbą niewymierną (w celu sformułowania ścisłej definicji wykorzystuje się pojęcie granicy ciągu – zostanie ono omówione w dalszym toku nauki).

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4,655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4,706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4,727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4,728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4,728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się” do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się” do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9,518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9,738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9,738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9,738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9,738517742$

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $5^{\sqrt{2}}$.



Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Ćwiczenie 1

$5^{\sqrt{3}} \approx 16,2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,5548$

Uczeń:

- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku rzeczywistym,
- upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach,
- porównuje liczby przedstawione w postaci potęg.

Ćwiczenie 2

- a) $3^\pi \approx 31,5443$
b) $5^\pi \approx 156,9925$
c) $\pi^\pi \approx 36,4622$

Ćwiczenie 3

- a) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
b) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
c) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
d) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^π .

$2^{3,14}$	$\approx 8,815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8,824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8,824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^π	$\approx 8,824977827$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby 2^π .



Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne podanej liczby.

- a) 3^π b) 5^π c) π^π

Podane w poprzedniej lekcji wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned} \blacksquare a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \blacksquare a^x \cdot b^x &= (ab)^x & \blacksquare (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\ \blacksquare \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \blacksquare \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

- a) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ c) $6^\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^\pi = 9^\pi$
b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$ d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ c) $(5^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$ e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$
b) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$ d) $(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$ h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Ćwiczenie 4

- a) $5^3 = 125$
b) $3^4 = 81$
c) $5^{3-1} = 25$
d) $2^{7-2} = 32$
e) $7^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1$
f) $3^{2\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}} = 3$
g) $2^5 = 32$
h) $\frac{6 \cdot 3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}} = 6$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}})^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$
 b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $(3^{\sqrt{3}})^{1-\sqrt{3}}$ f) $(\sqrt{3})^\pi \cdot (\sqrt{3})^\pi$

2. Oblicz.

- a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$
 b) $5^{\pi+3} : 5^\pi$ e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$ h) $4^{\pi+3} \cdot 3^\pi : 12^\pi$
 c) $(\frac{3}{5})^{\sqrt{6}-1} \cdot (\frac{5}{3})^{\sqrt{6}+2}$ f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}\sqrt{7}}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$ i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot (6^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$
 b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot (3^{-\sqrt{3}})^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

- a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$
 b) $q = 0,5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = (\frac{81}{16})^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3}} &\approx 3,32199709 \\ 3^{\sqrt{3}} &\approx 6,70499185 \\ 6^{\sqrt{3}} &\approx 22,2739634 \end{aligned}$$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

- a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$
 b) $x = 1,5^{4-2\sqrt{3}}, y = (\frac{4}{9})^{2+\sqrt{3}}, z = (\frac{9}{4})^{\sqrt{3}-2}$
 c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}}, y = 25^{2-3\sqrt{5}}, z = 0,0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

6. Wstaw w miejsce [?] jeden ze znaków: $>$, $<$ lub $=$, tak by powstało zdanie prawdziwe.

- a) $2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}}$ [?] 4^5 c) $\frac{4^{2\sqrt{3}} \cdot 8}{16^{\sqrt{3}+1}}$ [?] $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi^{1-\sqrt{2}} \cdot \pi^{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}$ [?] $\frac{1}{\pi^3}$
 b) $9^{\frac{\sqrt{7}}{2}} \cdot 27^{-\frac{\sqrt{7}}{3}}$ [?] 3 d) $\frac{9^{-2\sqrt{5}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}}{81^{1-\sqrt{5}}}$ [?] $\frac{1}{27}$ f) $\frac{2^{2\pi} \cdot 9^\pi}{36^{\pi-1}}$ [?] 6

7. Dla jakiej liczby x prawdziwa jest równość?

- a) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^x = 1$ b) $5^{1-\pi} \cdot 5^x = 5$ c) $(5^{\sqrt{2}})^x = 25$

6. a) $L = 2^{5\sqrt{5}} \cdot 2^{5(2-\sqrt{5})} = 2^{10} = 4^5$

b) $L = 3^{\sqrt{7}} \cdot 3^{-\sqrt{7}} = 1$, zatem należy wstawić „ $<$ ”

c) $L = \frac{2^{4\sqrt{3}+3}}{2^{4\sqrt{3}+4}} = \frac{1}{2}$

d) $L = \frac{3^{-4\sqrt{5}+1}}{3^{4-4\sqrt{5}}} = \frac{1}{27}$

e) $L = \frac{\pi^2}{\pi^2} = 1$, zatem należy wstawić „ $>$ ”

f) $L = \frac{6^{2\pi}}{6^{2\pi-2}} = 6^2$, zatem należy wstawić „ $>$ ”

7. a) $x = -\sqrt{2}$

b) $x = \pi$

c) $x = \sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $3^{5-\sqrt{2}}$

b) $3^{1+\sqrt{2}}$

c) 3^4

d) $3^{\sqrt{3}-3}$

e) $3^{\sqrt{7}}$

f) 3^π

2. a) 36

b) 125

c) $\frac{125}{27}$

d) 1

e) 1

f) 343

g) 3

h) 64

i) 216

3. a) $2^{\sqrt{7}+4}$

b) $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$

c) $3^{\sqrt{5}-3}$

d) $3^{3-2\sqrt{3}}$

e) $3^{-6\pi}$

f) $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$

4. a) $q = 4^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{3}} > 6$,
nie należy

b) $q = \frac{1}{2} \cdot 3^{\sqrt{3}} \approx 3,35$,
należy

c) $q = 6^{\sqrt{3}} : 2 \approx 11,1 > 6$,
nie należy

d) $q = (\frac{3}{2})^{\sqrt{3}} < \frac{7}{3} < 3$,
nie należy

5. a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 2^{\sqrt{2}},$
 $z = 2^{-\sqrt{2}}; y = \frac{1}{z}$

b) $x = (\frac{3}{2})^{4-2\sqrt{3}},$
 $y = (\frac{2}{3})^{2(2+\sqrt{3})},$

$z = (\frac{3}{2})^{2(\sqrt{3}-2)} =$

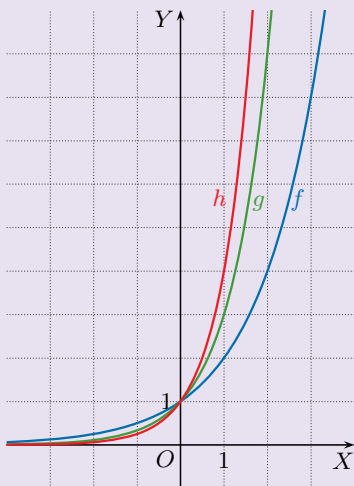
$= (\frac{3}{2})^{-(4-2\sqrt{3})}; x = \frac{1}{z}$

c) $x = 5^{3-6\sqrt{5}}, y = 5^{4-6\sqrt{5}},$
 $z = 5^{-4} \cdot 5^{6\sqrt{5}} = 5^{-(4-6\sqrt{5})};$
 $y = \frac{1}{z}$

Uczeń:

- oblicza wartości funkcji wykładniczej dla podanych argumentów,
- sprawdza, czy podany punkt należy do wykresu danej funkcji wykładniczej,
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej i podaje jej własności,
- porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej,
- wyznacza wzór funkcji wykładniczej na podstawie współrzędnych punktu należącego do jej wykresu oraz szkicuje ten wykres,
- rozwiązuje proste równania i nierówności wykładnicze, korzystając z wykresu funkcji wykładniczej.

Ćwiczenie 1



Punkt wspólny: $(0, 1)$

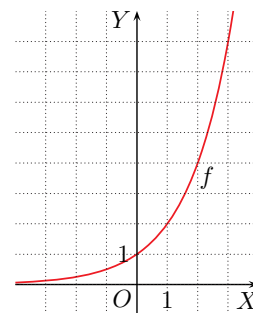
6.3. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.



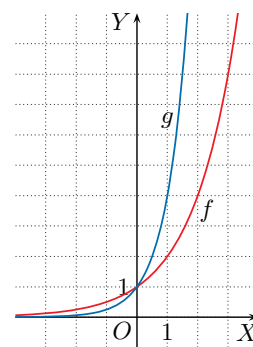
Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbb{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

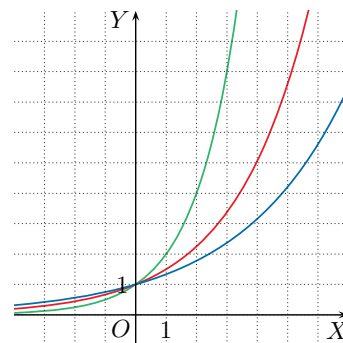
Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.

- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g . Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.
- Które spośród punktów:

$$A(4, 3\frac{15}{81}), B(-4, \frac{81}{256}), C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

należą do wykresu funkcji h ?



Ćwiczenie 2

- zielony – f , czerwony – g , niebieski – h
- $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = 3$
- B, C

Multibook

- Wykres funkcji wykładniczej
- Liczba e

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.3

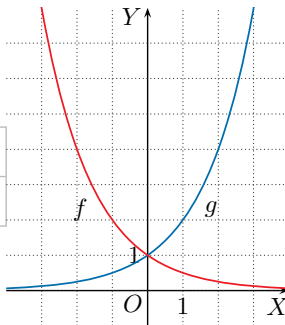
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

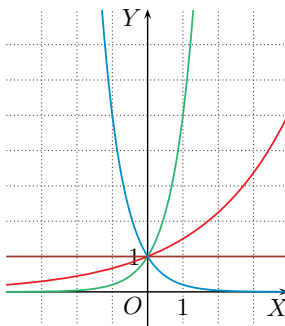
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY , ponieważ $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = g(-x)$.



Ćwiczenie 3

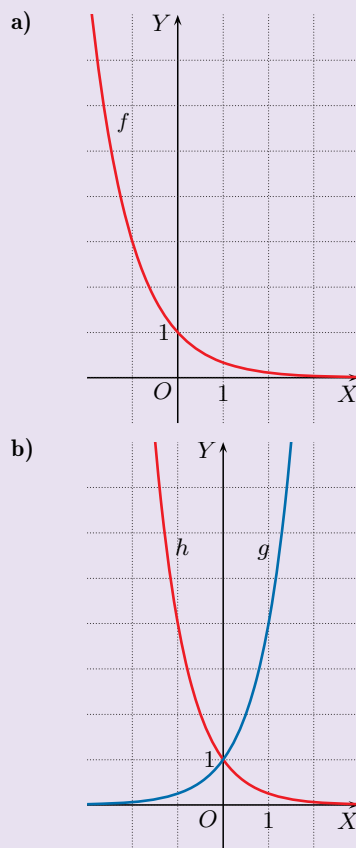
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = (\frac{1}{4})^x$.



Ćwiczenie 4

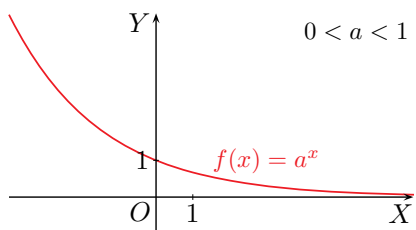
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0,2^x$, $h(x) = 1,5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

Ćwiczenie 3

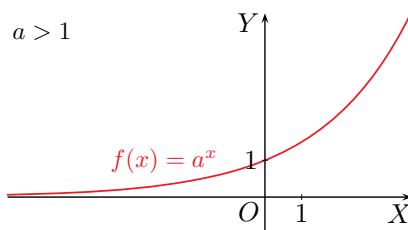


Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX , która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Ćwiczenie 4

zielony – f , niebieski – g ,
czerwony – h , brązowy – k

Ćwiczenie 5

- a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^{\pi} < 7^{3,2}$
c) $0,6^{\frac{1}{2}} < 0,6^{\frac{3}{4}} < 0,6^{\frac{3}{8}} < 0,6^{0,35} < 0,6^{\frac{1}{3}}$
d) $(\frac{1}{3})^2 < (\frac{1}{3})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}} < (\frac{1}{3})^{1,5} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(-4) = \frac{1}{81}$, $f(-3) = \frac{1}{27}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$,
 $f(3) = 27$, $f(4) = 81$
b) $f(-4) = \frac{1}{256}$, $f(-3) = \frac{1}{64}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$,
 $f(3) = 64$, $f(4) = 256$
c) $f(-4) = 256$, $f(-3) = 64$,
 $f(-\frac{1}{2}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{64}$, $f(4) = \frac{1}{256}$
d) $f(-4) = 16$, $f(-3) = 8$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{8}$, $f(4) = \frac{1}{16}$
e) $f(-4) = \frac{1}{4096}$,
 $f(-3) = \frac{1}{512}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}$,
 $f(3) = 512$, $f(4) = 4096$
f) $f(-4) = 0,00000001$,
 $f(-3) = 0,000001$,
 $f(-\frac{1}{2}) = 0,1$, $f(\frac{1}{2}) = 10$,
 $f(3) = 1000000$,
 $f(4) = 100000000$
2. $f(x) = 4^x$
a), b), d) tak
c) nie
3. a), c) nie
b), d) tak
4. a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
c) $f(x) = 4^x$
d) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$
5. a), b) malejąca
c) rosnąca

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, stąd:

$$10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$$

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, stąd:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{0,3}$, $5^{0,33}$ c) $0,6^{\frac{1}{2}}$, $0,6^{\frac{1}{3}}$, $0,6^{\frac{3}{4}}$, $0,6^{\frac{3}{8}}$, $0,6^{0,35}$
b) $7^{3,1}$, $7^{3,2}$, 7^{π} , $7^{\sqrt{5}}$ d) $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{1}{3})^{1,5}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.
a) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ e) $f(x) = 8^x$
b) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ f) $f(x) = 100^x$
2. Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$
4. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M . Naskicuj wykres tej funkcji.
a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$
5. Określ monotoniczność funkcji f .
a) $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ b) $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$ c) $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$
6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
a) $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{7}{5}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[3]{\pi}$, $\pi^{\frac{1}{2}}$, $\pi^{\frac{3}{7}}$, $\pi^{\frac{1}{\pi}}$
b) $(\frac{3}{4})^5$, $(\frac{3}{4})^6$, $(\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$, $(\frac{3}{4})^{\sqrt{26}}$ d) 9^0 , 9^{-2} , $9^{-\sqrt{3}}$, $9^{-\sqrt{\pi}}$
6. a) $2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{3}}$
b) $(\frac{3}{4})^6 < (\frac{3}{4})^{\sqrt{26}} < (\frac{3}{4})^5 < (\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$
c) $\pi^{\frac{1}{\pi}} < \sqrt[3]{\pi} < \pi^{\frac{3}{7}} < \pi^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{-2} < 9^{-\sqrt{\pi}} < 9^{-\sqrt{3}} < 9^0$

7. Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.
- a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 8^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}, 32^{\frac{\pi}{10}}, 256^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}, (\frac{1}{9})^{2,6}, (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}, (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{243}$
8. Podaj współrzędne trzech punktów należących do wykresu funkcji f , tak aby każda z tych współrzędnych była liczbą wymierną. Naskicuj wykres funkcji f .
- a) $f(x) = (\sqrt{3})^x$ b) $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ c) $f(x) = (\sqrt[3]{2})^x$
9. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.
- a) $f(x) = 3^x, g(x) = 4x + 1$ d) $f(x) = (\frac{1}{3})^x, g(x) = x + 4$
b) $f(x) = 2^x, g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ e) $f(x) = (\frac{1}{4})^x, g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$
c) $f(x) = 4^x, g(x) = 5 - x$ f) $f(x) = (\frac{1}{2})^x, g(x) = |x| + 1$
10. Podaj zbiór rozwiązań nierówności, korzystając z odpowiednich wykresów.
- a) $2^x > 3^x$ b) $3^x \leq 4^x$ c) $(\frac{1}{2})^x \leq (\frac{1}{3})^x$ d) $(\frac{1}{4})^x < 3^x$

Czy wiesz, że...

W opisach niektórych zagadnień praktycznych korzysta się z funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$. Liczba e (oznaczenie to wprowadził Leonhard Euler [czyt. ojler]) jest liczbą niewymierną:

$$e = 2,718281828\dots$$

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = e^x$ oraz dla porównania wykresy funkcji $g(x) = 2^x$ i $h(x) = 3^x$.

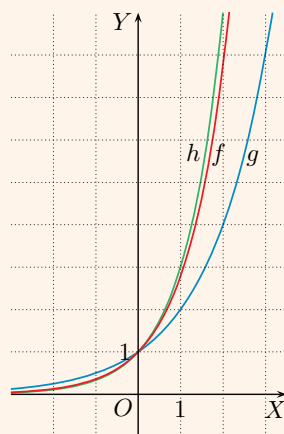
Coraz dokładniejsze przybliżenia liczby e otrzymujemy, obliczając wartości wyrażenia:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

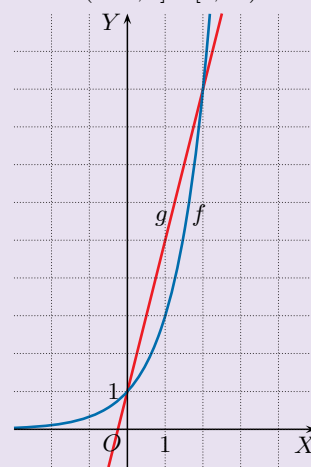
dla coraz większych liczb naturalnych:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937\dots, \quad \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048\dots,$$

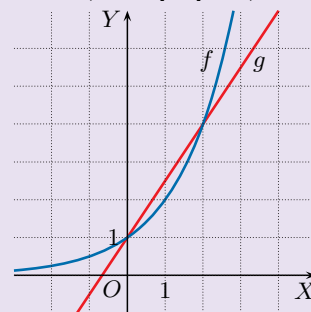
$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169\dots, \quad \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,7182\dots$$



7. a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^{\sqrt{3}}, 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2^{\sqrt{2}}, 32^{\frac{\pi}{10}} = 2^{\frac{\pi}{2}}, 256^{\frac{1}{4}} = 2^2$
 $256^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}} > 32^{\frac{\pi}{10}} > 8^{\frac{1}{2}} > 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}, (\frac{1}{9})^{2,6} = (\frac{1}{3})^{5,2}, (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{3})^{\frac{9}{2}}, (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{3})^6, \frac{1}{243} = (\frac{1}{3})^5$
 $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}} > (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{243} > (\frac{1}{9})^{2,6} > (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$
8. Przykładowa odpowiedź:
- a) $(-2, \frac{1}{3}), (0, 1), (2, 3)$
b) $(-2, 2), (0, 1), (2, \frac{1}{2})$
c) $(-3, \frac{1}{2}), (0, 1), (3, 2)$
9. a) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$



- b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$



11. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: $9, 2\sqrt{2}, (\sqrt{e})^4, e^{1,5}, e^{\sqrt{3}}$.

9. c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in [1; \infty)$
d) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1]$
e) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1]$
f) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 0\}, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup \{0\}$
10. a) $x \in (-\infty; 0)$
b) $x \in [0; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0]$
d) $x \in (0; \infty)$

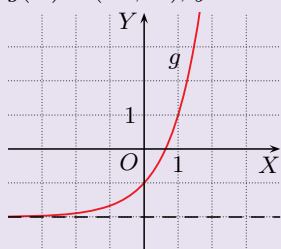
11. $2\sqrt{2} < e^{1,5} < e^{\sqrt{3}} < (\sqrt{e})^4 < 9$

Uczeń:

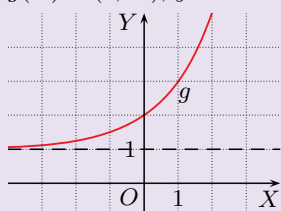
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej, stosując przesunięcie o wektor albo symetrię względem osi układu współrzędnych, i podaje własności tej funkcji,
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej otrzymany w wyniku złożenia przesunięcia o wektor i symetrii względem osi układu współrzędnych oraz podaje wartości tej funkcji,
- rozwiązuje graficznie proste nierówności wykładnicze, korzystając z odpowiednio przekształconego wykresu funkcji wykładniczej.

Ćwiczenie 1

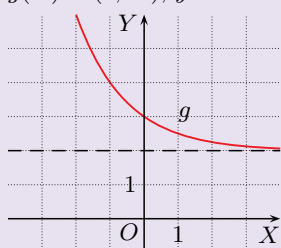
a) $g(D) = (-2; \infty)$, $y = -2$



b) $g(D) = (1; \infty)$, $y = 1$



c) $g(D) = (2; \infty)$, $y = 2$

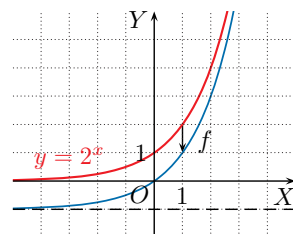


6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 1 jednostkę w dół, czyli o wektor $[0, -1]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-1; \infty)$. Prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f .



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $g(x) = 3^x - 2$

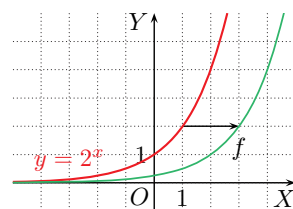
b) $g(x) = 2^x + 1$

c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor $[2, 0]$.

Funkcja f przyjmuje wartość równą 1 dla argumentu $x = 2$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość równą 1?

a) $f(x) = 3^{x-1}$

b) $f(x) = 2^{x+2}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

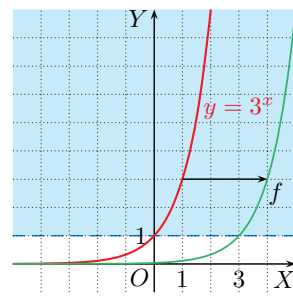
Przykład 3

Jak należy przekształcić wykres funkcji $y = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \frac{3^x}{27}$? Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości większe od 1?

$$f(x) = \frac{3^x}{27} = \frac{3^x}{3^3} = 3^{x-3}$$

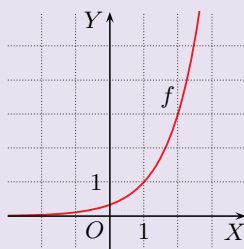
Wykres funkcji $y = 3^x$ należy przesunąć o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.

Nierówność $f(x) > 1$ zachodzi dla $x \in (3; \infty)$.

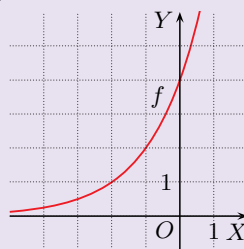


Ćwiczenie 2

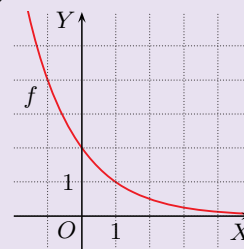
a) $x = 1$



b) $x = -2$



c) $x = 1$



Multibook

- Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej (1)
- Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Jak należy przekształcić wykres funkcji $y = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji f ? Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

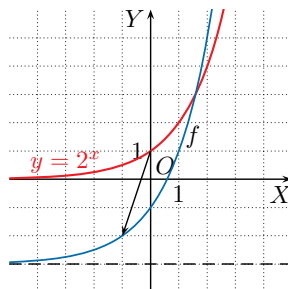
a) $f(x) = \frac{2^x}{16}$ b) $f(x) = \frac{2^x}{1024}$ c) $f(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^{x+1} - 3$. Podaj jej zbiór wartości oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o wektor $[-1, -3]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-3; \infty)$, a asymptotą poziomą jej wykresu – prosta $y = -3$.



Ćwiczenie 4

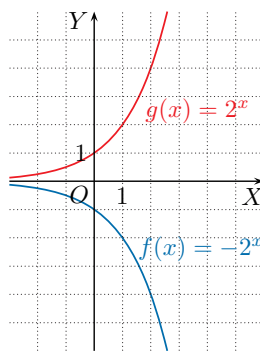
Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^{x-1} + 2$ b) $f(x) = \frac{2^x}{4} - 2$ c) $f(x) = \frac{2^{x+3} + 4}{4}$

Przykład 5

Wykres funkcji $f(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).

Funkcja g jest funkcją rosnącą, a funkcja f – funkcją malejącą.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

a) $g(x) = -3^x$ b) $g(x) = -4^x$ c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

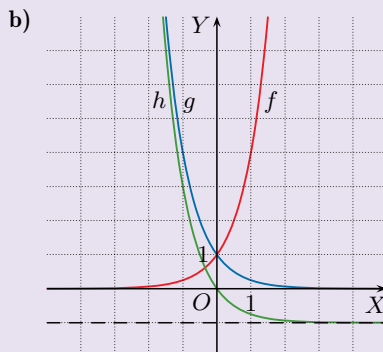
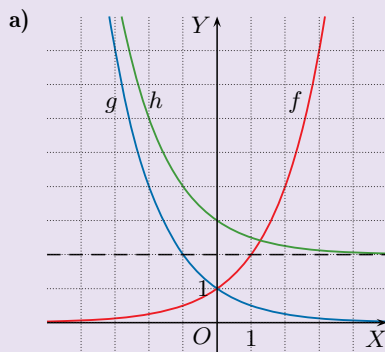
Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = a^{-x}$, gdzie $a > 0$, możemy odbić symetrycznie względem osi OY wykres funkcji $y = a^x$ lub skorzystać z zależności $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Ćwiczenie 6

Naszkicuj kolejno wykresy funkcji f , g i h .

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$, $h(x) = 2^{-x} + 2$
b) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4^{-x}$, $h(x) = 4^{-x} - 1$

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 3

a) $f(x) = \frac{2^x}{24} = 2^{x-4}$

Należy przesunąć o wektor $[4, 0]$.

$f(x) \geq 1$ dla $x \in [4; \infty)$

b) $f(x) = \frac{2^x}{2^{10}} = 2^{x-10}$

Należy przesunąć o wektor $[10, 0]$.

$f(x) \geq 1$ dla $x \in [10; \infty)$

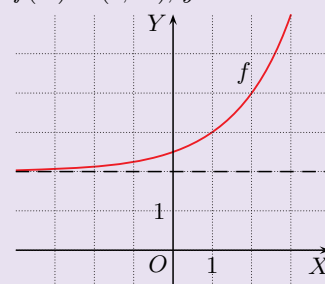
c) $f(x) = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^x = 2^{x+\frac{1}{2}}$

Należy przesunąć o wektor $[-\frac{1}{2}, 0]$.

$f(x) \geq 1$ dla $[-\frac{1}{2}; \infty)$

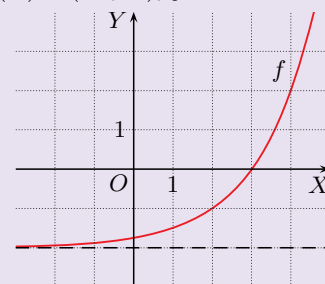
Ćwiczenie 4

a) $f(D) = (2; \infty)$, $y = 2$



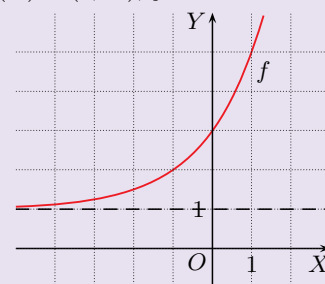
b) $g(x) = 2^{x+1} + 1$,

$f(D) = (-2; \infty)$, $y = -2$



c) $g(x) = 2^{x+1} + 1$,

$f(D) = (1; \infty)$, $y = 1$



Ćwiczenie 5

a), b) malejąca

c) rosnąca

Odpowiedzi do zadań

- $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y = 2$
 - $f(D) = (-1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
asymptota: $y = -1$
 - $f(D) = (-3; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
asymptota: $y = -3$
 - $f(D) = (-4; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
asymptota: $y = -4$
 - $f(D) = (1; \infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y = 1$

2. $a = -3$

3. a) $a = -4$

b) $a = 3$

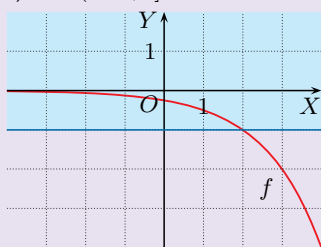
c) $a = -16$

4. a) $x \in [-2; \infty)$

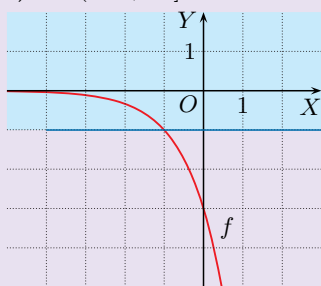
b) $x \in [3; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -2]$

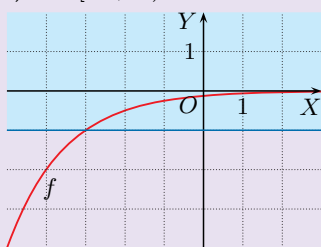
5. a) $x \in (-\infty; 2]$



b) $x \in (-\infty; -1]$



c) $x \in [-3; \infty)$



- $f(D_f) = (-3; \infty)$,
 $g(D_g) = (-\infty; 3)$
 - $f(D_f) = (1; \infty)$,
 $g(D_g) = (-\infty; -1)$
 - $f(D_f) = (-2; \infty)$,
 $g(D_g) = (-\infty; 2)$

Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^x + 2$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

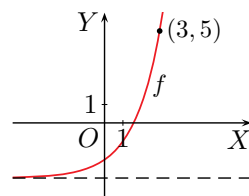
e) $f(x) = 4^{-x} - 4$

b) $f(x) = 3^x - 1$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

f) $f(x) = 3^{-x} + 1$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a .



- Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P . Podaj wartość współczynnika a .

a) $P(0, -3)$

b) $P(2, 7)$

c) $P(4, 0)$

- Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

a) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

b) $f(x) = \frac{2^x}{8}$

c) $f(x) = \frac{0,04}{5^x}$

- Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.

a) $f(x) = -2^{x-2}$

b) $f(x) = -3^{x+1}$

c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

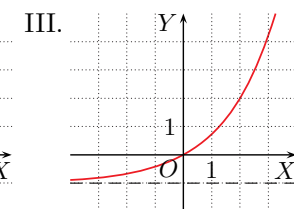
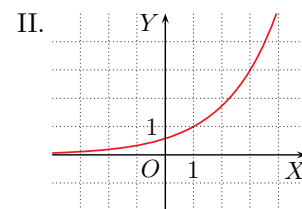
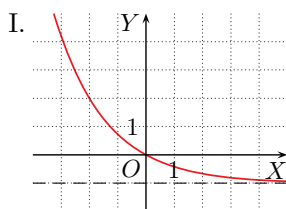
- Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .

a) $f(x) = 2^x - 3$

b) $f(x) = 3^x + 1$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

- Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = (\sqrt{3})^{x-1}$, $g(x) = (\sqrt{3})^x - 1$ i $h(x) = (\sqrt{3})^{-x} - 1$. Dopasuj wzór do wykresu.



- Wykres funkcji $f(x) = 5^x$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano wykres funkcji g . Podaj wzór funkcji g i jej zbiór wartości.

a) $\vec{v} = [0, -3]$

b) $\vec{v} = [1, 2]$

c) $\vec{v} = [-2, 4]$

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsce zerowe oraz zbiór wartości.

a) $f(x) = 2^{x-2} - 4$

c) $f(x) = \frac{4}{2^x} + 2$

e) $f(x) = (\sqrt{2})^{2x-4} - 1$

b) $f(x) = 3^{x+1} - 1$

d) $f(x) = 3 - \frac{9}{3^x}$

f) $f(x) = 1 - 2^{-x+3}$

- f - II, g - III, h - I

8. a) $g(x) = 5^x - 3$, $g(D) = (-3; \infty)$

b) $g(x) = 5^{x-1} + 2$, $g(D) = (2; \infty)$

c) $g(x) = 5^{x+2} + 4$, $g(D) = (4; \infty)$

9. a) $f(x) = 0$ dla $x = 4$, $f(D) = (-4; \infty)$

b) $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $f(D) = (-1; \infty)$

c) brak miejsc zerowych, $f(D) = (2; \infty)$

d) $f(x) = 0$ dla $x = 1$, $f(D) = (-\infty; 3)$

e) $f(x) = 0$ dla $x = 2$, $f(D) = (-1; \infty)$

f) $f(x) = 0$ dla $x = 3$, $f(D) = (-\infty; 1)$

6.5. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Przykład 1

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$.

c) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

$$\log_a b = x$$

$\swarrow$ liczba logarytmowana
 $\leftarrow$ logarytm
 $\swarrow$ podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log_2 32$

c) $\log_2 1$

e) $\log_2 \frac{1}{64}$

g) $\log_2 \sqrt{8}$

b) $\log_2 2$

d) $\log_2 \frac{1}{4}$

f) $\log_2 \sqrt{2}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_3 81$

d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

g) $\log_7 7\sqrt{7}$

j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

e) $\log_9 3$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

c) $\log_3 \frac{1}{27}$

f) $\log_9 \frac{1}{27}$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

l) $\log_6 216$

Zauważmy, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

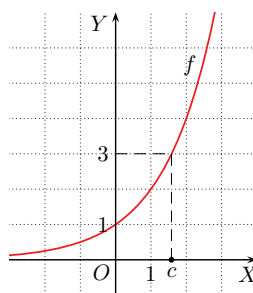
Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c , że $2^c = 3$.

Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1,5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.



Uczeń:

- oblicza logarytm danej liczby,
- stosuje do obliczeń równości wynikające z definicji logarytmu,
- wyznacza podstawę logarytmu lub liczbę logarytmowaną, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
- podaje przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych z wykorzystaniem tablic,
- udowadnia twierdzenie dotyczące niewymierności liczby, np. $\log_2 3$.

Ćwiczenie 1

- 5
- 1
- 0
- 2
- 6
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 2

- 4
- 2
- 3
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{3}{2}$
- $\frac{3}{2}$
- 3
- $-\frac{1}{2}$
- 4
- $\frac{2}{3}$
- 3

Ćwiczenie 3

Przyjmijmy, że podana liczba jest wymierna. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie, że:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \log_2 5 &= \frac{m}{n} \\ 5 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 5^n &= 2^m \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest podzielna przez 5, a prawa nie. Zatem $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

b) Dowód alogiczny jak w punkcie a).

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \log_2 6 &= \frac{m}{n} \\ 6 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 3^n \cdot 2^n &= 2^m \\ 3^n &= 2^{m-n} \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest podzielna przez 3, a prawa nie. Zatem $\log_2 6$ jest liczbą niewymierną.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \log_6 2 &= \frac{m}{n} \\ 2 &= 6^{\frac{m}{n}} \\ 2^n &= 3^m \cdot 2^m \\ 2^{n-m} &= 3^m \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest podzielna przez 3, a lewa nie. Zatem $\log_6 2$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 4

- a) 100
- b) 15
- c) 10
- d) -3
- e) 3
- f) 7
- g) 10
- h) 1

Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$. Zatem:

$$\begin{aligned} 3 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 3^n &= 2^m \end{aligned} \quad \text{Podnosimy obie strony} \\ \text{równości do potęgi } n.$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzielną przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

- a) $\log_2 5$
- b) $\log_3 5$
- c) $\log_2 6$
- d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają podane obok własności.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$\begin{aligned} \log_a a^x &= x \\ a^{\log_a b} &= b \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\log_2 2^{100}$
- c) $\log_{1,1} 1,1^{10}$
- e) $2^{\log_2 3}$
- g) $0,4^{\log_{0,4} 10}$
- b) $\log_6 6^{15}$
- d) $\log_{\pi} \pi^{-3}$
- f) $3^{\log_3 7}$
- h) $5^{\log_5 1}$

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10.

Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$, np. $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Poniżej zamieszczono fragment tablicy, w której znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279

Ćwiczenie 5

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

- a) $\log 1,5$,
- b) $\log 1,11$,
- c) $\log 1,62$,
- d) $\log 1,68$.

Ćwiczenie 5

- a) 0,1761
- b) 0,0453
- c) 0,2095
- d) 0,2253

Zadania

- Oblicz.

a) $\log_2 64$	e) $\log_2 0,125$	i) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$	m) $\log_3 \sqrt{27}$
b) $\log_2 512$	f) $\log_4 2$	j) $\log_{\sqrt{2}} 4$	n) $\log_3 \frac{1}{81}$
c) $\log_2 \frac{1}{32}$	g) $\log_4 8$	k) $\log_{\sqrt{2}} 32$	o) $\log_5 625$
d) $\log_2 \frac{1}{1024}$	h) $\log_4 \frac{1}{1024}$	l) $\log_3 \sqrt{3}$	p) $\log_5 0,04$
- Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$	c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$	e) $\log_{0,2} 125$	g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
b) $\log_{0,1} 10^6$	d) $\log_{0,25} 16$	f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$	h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$
- Oblicz.

a) $2^{\log_2 9}$	c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$	e) $4^{\log_2 9}$	g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$	d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$	f) $81^{\log_3 0,5}$	h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$
- Oblicz.

a) $\log 1000$	c) $\log 10^6$	e) $\log \sqrt{10}$
b) $\log 0,1$	d) $\log 0,0001$	f) $\log 10\sqrt{10}$
- Oblicz.

a) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{8}$	c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log \sqrt[3]{10}$	e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1$
b) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$	d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$	f) $\log_{\frac{2}{3}} 1,5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$
- Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 25 = 2$	b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$	c) $\log_a 0,25 = -1$	d) $\log_a 64 = -3$
--------------------	-----------------------------	-----------------------	---------------------
- Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$	c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$	e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$	g) $\log b = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$	d) $\log_7 b = 0$	f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$	h) $\log b = -1$
- Oblicz.

a) $\log_2(\log 100)$	c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log_2 8)$	e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$
b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$	d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$	f) $\log_8\left(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2)\right)$
- Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_a a^3$	b) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$	c) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$	d) $\log_{a^2} a^{10}$	e) $\log_{\sqrt{a}} a^4$
-----------------	--------------------------------	----------------------------------	------------------------	--------------------------

- | | |
|--|--|
| a) $\log_2 2 = 1$ | a) $a > 0, a \neq 1, \log_a a^3 = 3$ |
| b) $\log_{0,1} 10 = -1$ | b) $a > 0, a \neq 1, \log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}$ |
| c) $\log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{1}{2}$ | c) $a > 0, a \neq 1, \log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3} = -\frac{5}{2}$ |
| d) $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 4$ | d) $a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1, \log_{a^2} a^{10} = 5$ |
| e) $\log_9(\log_8 2) = \log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ | e) $a > 0, a \neq 1, \log_{\sqrt{a}} a^4 = 8$ |
| f) $\log_8\left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}\right) = \log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ | |

Odpowiedzi do zadań

- a) 6 b) 9
c) -5 d) -10
e) -3 f) $\frac{1}{2}$
g) $\frac{3}{2}$ h) -5
i) $-\frac{1}{4}$ j) 4
k) 10 l) $\frac{1}{2}$
m) $\frac{3}{2}$ n) -4
o) 4 p) -2
- a) -1 b) -6
c) 7 d) -2
e) -3 f) 3
g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$
- a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$
d) 3 e) 81 f) $\frac{1}{16}$
g) 3 h) 4
- a) 3 b) -1 c) 6
d) -4 e) $\frac{1}{2}$ f) $1\frac{1}{2}$
- a) $2 + \log_4 \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} =$
 $= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
b) $7 - (-3) = 10$
c) $-2 + \frac{1}{3} = -1\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
e) $2 - 0 = 2$
f) $-1 - (-3) = 2$
- a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$
c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$
- a) $b = 32$ b) $b = 2$
c) $b = 9$ d) $b = 1$
e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$
g) $b = 10^6$ h) $b = \frac{1}{10}$

Uczeń:

- stosuje twierdzenia o logarytmach iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- podaje odpowiednie założenia i zapisuje w prostszej postaci wyrażenia zawierające logarytmy,
- stosuje twierdzenia o logarytmach iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
- udowadnia twierdzenia o logarytmach.

Ćwiczenie 1

I sposób

Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$. Wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q}$$

$$\frac{x}{y} = a^{p-q}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

II sposób

Na mocy twierdzenia o logarytmie iloczynu mamy:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y =$$

$$= \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) = \log_a x$$

$$\text{Zatem } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

6.6. Własności logarytmów

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia: $\log_a x = p$ oraz $\log_a y = q$, wtedy:

$$x = a^p \text{ i } y = a^q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

$$\log_a(x \cdot y) = p + q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy równość $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$ jest prawdziwa.

$$\log_2 96 = \log_2(32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3 \quad \text{Równość jest prawdziwa.}$$

b) Sprawdź, czy równość $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$ jest prawdziwa.

$$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2 \quad \text{Równość jest prawdziwa.}$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

d) $\log 0,07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

Oblicz.

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 2

a) $\log_2 6 = \log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$, równość prawdziwa

b) $\log 500 = \log(100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$, równość prawdziwa

c) $\log_2 \frac{8}{3} = \log_2 8 - \log_2 3 = 3 - \log_2 3$, równość prawdziwa

d) $\log 0,07 = \log \frac{7}{100} = \log 7 - \log 100 = \log 7 - 2$, równość prawdziwa

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_6 4 + \log_6 9$ d) $\log_5 15 - \log_5 75$ g) $\log_5 0,04 - \log_5 0,008$
b) $\log 8 + \log 125$ e) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$ h) $\log 6 - \log 2 - \log 3$
c) $\log_3 54 - \log_3 2$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$ i) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech $\log_a x = q$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$. Zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$

$$x^p = a^{p \cdot q}$$

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

Korzystamy z definicji logarytmu.

Przykład 3

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0,3$$

Ćwiczenie 4

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- a) $\log x^6$ b) $\log \frac{1}{x^3}$ c) $\log \sqrt{x}$ d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$

Przykład 4

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$3 + \log_2 7 =$$

$$= \log_2 8 + \log_2 7 =$$

$$= \log_2 (8 \cdot 7) = \log_2 56$$

Zapisujemy 3 jako $\log_2 8$.

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu.

Ćwiczenie 5

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

- a) $2 + \log_3 5$ b) $3 \log_2 10 - 1$ c) $2 \log_{\frac{1}{2}} 6 - 2$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Ćwiczenie 4

$$a) \log x^6 = 6 \log x = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$b) \log \frac{1}{x^3} = -3 \log x = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$c) \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$d) \log \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{2} \log x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$e) \log \frac{x^3}{\sqrt{x}} = \log x^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log x = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Ćwiczenie 5

$$a) \log_3 9 + \log_3 5 = \log_3 45$$

$$b) \log_2 1000 - \log_2 2 = \log_2 500$$

$$c) \log_{\frac{1}{2}} 36 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} (36 : \frac{1}{4}) = \log_{\frac{1}{2}} 144$$

$$d) \log_3 81 - \log_3 36 = \log_3 \frac{81}{36} = \log_3 \frac{9}{4}$$

Ćwiczenie 3

- a) 2
b) 3
c) 3
d) -1
e) 2
f) -2
g) 1
h) 0
i) -3

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2 b) -3 c) 1 d) 2

3. a) $x > 0$,

$$\log x^3 + \log x^2 = \log x^5$$

b) $x > 0$,

$$\log x^{\frac{1}{2}} + \log x^{-\frac{3}{2}} = \log x^{-1} = \log \frac{1}{x}$$

c) $x \neq 0$,

$$\log x^2 + \log 10 = \log(10x^2)$$

d) $x > 0$,

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} x^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2x^2}$$

e) $x > 0$, $y > 0$,

$$\log_3 x^2 + \log_3 y + \log_3 3 = \log_3(3x^2y)$$

f) $x > 0$, $y > 0$,

$$\log_5(2x) + \log_5 \frac{1}{xy^2} + \log_5 \sqrt{5} = \log_5 \frac{2\sqrt{5}}{y^2}$$

g) $x > 0$, $y > 0$,

$$\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{y} + \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{\sqrt{x}}{4y}$$

h) $x \neq 0$,

$$\log(2x^2) + \log(2x^2) + \log(2x^2) + \log \frac{1}{1000} = \log \frac{x^6}{125}$$

4. a) $(\log_8 2 + \log_8 32 + \log_8 8)^{\log_3 5} =$

$$= (\log_8 8)^{\log_3 5} = 1$$

b) $(-3 + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{9}{2})^4 =$
 $= (-3 + \log_3 3)^4 = (-2)^4 = 16$

c) $6^{\log_6 3 + \log_6 4} = 6^{\log_6 12} = 12$

d) $9^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

5. a) $\log_3 9 + \log_3 x^8 =$
 $= 2 + 8 \cdot (-\frac{1}{4}) = 0$

b) $\log_3 x^4 - \log_3 81 =$
 $= 4 \cdot (-\frac{1}{4}) - 4 = -5$

c) $\frac{1}{4}(\log_3 3 + \log_3 x^6) =$
 $= \frac{1}{4}(1 + 6 \cdot (-\frac{1}{4})) = -\frac{1}{8}$

d) $\log_3 27 + \log_3 x^{-\frac{3}{2}} =$
 $= 3 - \frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{4}) = 3\frac{1}{6}$

6. a) $a = \log(2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 =$
 $= p + 2$

b) $a = \log \frac{2}{100} = \log 2 - \log 100 = p - 2$

c) $a = \log \frac{4}{100} = \log 2^2 - \log 100 =$
 $= 2 \log 2 - 2 = 2p - 2$

d) $a = \log(2^4 \cdot 100) = 4 \log 2 + \log 100 =$
 $= 4p + 2$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$

c) $\log 0,12 - \log 0,3 + \log 25$

b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$

d) $\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15$

D 2. Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.

a) $\log x^2 y^2 = \log x + \log y + \log xy$

b) $\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$

c) $\log xyz = \log \frac{x}{y} + \log y^2 z$

d) $\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$

e) $2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z} \right)^{-1} - 5 \log z$

3. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw je w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $\log x^3 + 2 \log x$

e) $2 \log_3 x + \log_3 y + 1$

b) $\log \sqrt{x} - \frac{3}{2} \log x$

f) $\frac{1}{3} \log_5 8x^3 - 2 \log_5 y \sqrt{x} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} \log x^4 + 1$

g) $\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y - 2$

d) $1 - 2 \log_{\frac{1}{2}} x$

h) $\frac{1}{2} \log 4x^4 + \frac{1}{3} \log 8x^6 + \frac{1}{4} \log 16x^8 - 3$

4. Oblicz.

a) $(2 \log_8 \sqrt{2} + \log_8 32 - 1)^{\log_3 5}$

c) $6^{0,25 \log_6 81 - 2 \log_6 0,5}$

b) $(\log_2 \frac{1}{8} - \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 4,5)^{\log_{\sqrt{2}} 4}$

d) $9^{\log_{64} 4 + 0,5 \log_{27} 3}$

5. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_3 9x^8$

b) $\log_3 \frac{x^4}{81}$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3x^6}$

d) $\log_3 \frac{27 \sqrt[3]{x}}{x}$

6. Niech $p = \log 2$. Wyraż liczbę a za pomocą p .

a) $a = \log 200$

b) $a = \log 0,02$

c) $a = \log 0,04$

d) $a = \log 1600$

7. Niech $p = \log_3 2$ oraz $q = \log_3 5$. Wyraż liczbę a za pomocą p i q .

a) $a = \log_3 20$

c) $a = \log_3 \frac{2}{25}$

e) $a = \log_3 3\frac{1}{8}$

g) $a = \log_3 \sqrt{10}$

b) $a = \log_3 100$

d) $a = \log_3 0,4$

f) $a = \log_3 \frac{\sqrt{5}}{2}$

h) $a = \log_3 0,2\sqrt{2}$

8. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0,6$ oraz $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 80$,

c) $\log \frac{5}{4}$,

e) $\log 2,5$,

g) $\log 5\sqrt{2}$,

b) $\log 50$,

d) $\log 0,5$,

f) $\log 0,64$,

h) $\log 25\sqrt[3]{4}$.

7. a) $a = \log_3(2^2 \cdot 5) = 2 \log_3 2 + \log_3 5 = 2p + q$

b) $a = \log_3(2^2 \cdot 5^2) = 2 \log_3 2 + 2 \log_3 5 = 2p + 2q$

c) $a = \log_3 2 - \log_3 5^2 = p - 2q$

d) $a = \log_3 \left(\frac{2}{5} \right) = \log_3 2 - \log_3 5 = p - q$

e) $a = \log_3 \left(\frac{25}{8} \right) = \log_3 5^2 - \log_3 2^3 =$
 $= 2 \log_3 5 - 3 \log_3 2 = 2q - 3p$

f) $a = \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \log_3 2 = \frac{1}{2}q - p$

g) $a = \frac{1}{2} \log_3(2 \cdot 5) = \frac{1}{2} \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 5 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$

h) $a = \log_3 \left(\frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right) = \log_3 5^{-1} + \frac{1}{2} \log_3 2 = \frac{1}{2}p - q$

8. a) 1,9

b) 1,7

c) 0,1

d) -0,3

e) 0,4

f) -0,2

g) 0,85

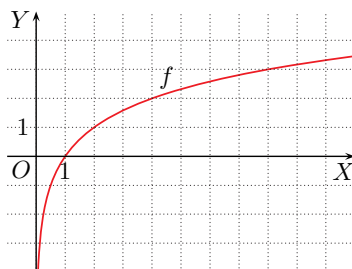
h) 1,6

6.7. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Definicja

Funkcję $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ oraz $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$ nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

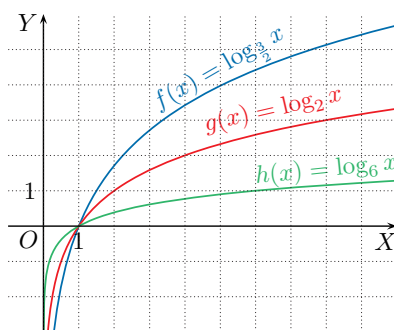
$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_3 x, \quad h(x) = \log_4 x$$

Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

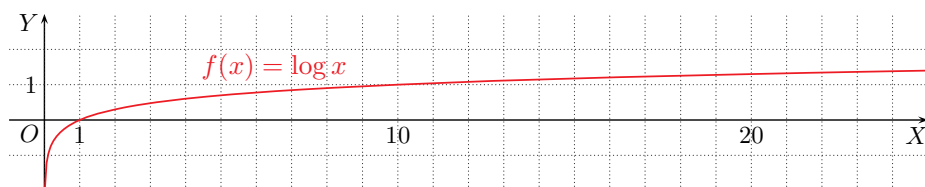
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log_6 x$. Do którego z tych wykresów należy podany punkt?

- a) $(8, 3)$ b) $(2\frac{1}{4}, 2)$ c) $(36, 2)$



Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



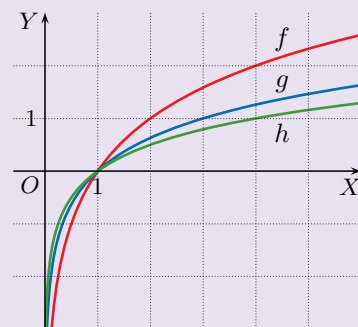
Ćwiczenie 3

Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = \log x$ przyjmuje wartość: a) 2, b) 6?

Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji logarytmicznej i określa jej własności,
- oblicza podstawę logarytmu we wzorze funkcji logarytmicznej, gdy dane są współrzędne punktu należącego do wykresu tej funkcji,
- wyznacza zbiór wartości funkcji logarytmicznej o podanej dziedzinie,
- rozwiązuje proste nierówności logarytmiczne, korzystając z wykresu funkcji logarytmicznej,
- wykorzystuje własności funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań różnego typu, w tym zadań z parametrem.

Ćwiczenie 1



Punkt wspólny wykresów: $(1, 0)$

Ćwiczenie 2

a) $g(8) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 2$

b) $f(2\frac{1}{4}) = \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = \log_{\frac{3}{2}} (\frac{3}{2})^2 = 2$

c) $h(36) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

Ćwiczenie 3

a) $10^2 = 100$

b) $10^6 = 1000000$

Multibook

- Wykres funkcji logarytmicznej

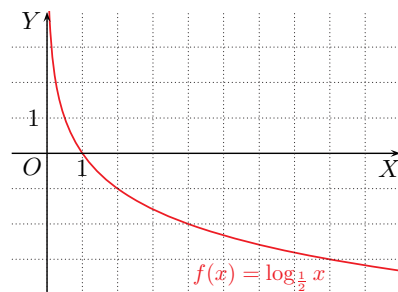
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.7

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

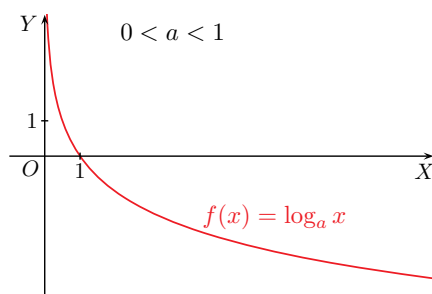


Ćwiczenie 4

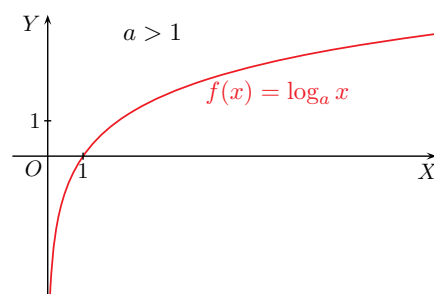
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1, 0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX .



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



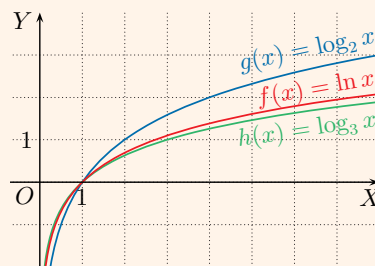
Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Czy wiesz, że...

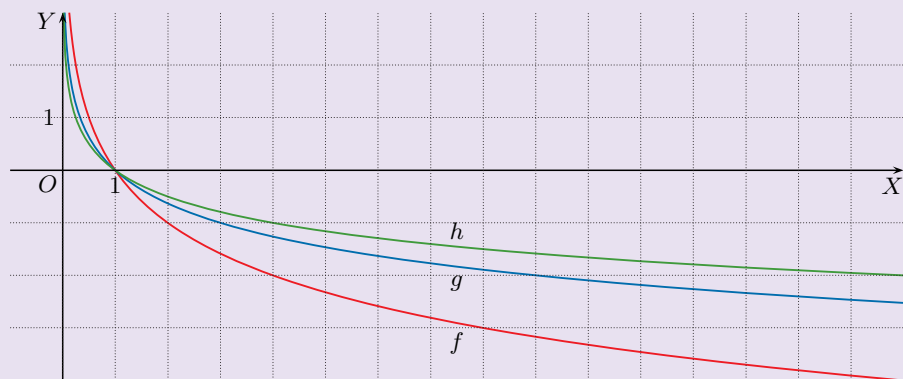
W zastosowaniach, obok logarytmu dziesiętnego, często występuje logarytm przy podstawie e , gdzie $e = 2,718281828\dots$ (patrz str. 299).

Logarytm ten nazywamy **logarytmem naturalnym**. Zamiast pisać $\log_e x$, używamy oznaczenia $\ln x$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \ln x$. Dla porównania w tym samym układzie współrzędnych narysowano wykresy funkcji $g(x) = \log_2 x$ i $h(x) = \log_3 x$.



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

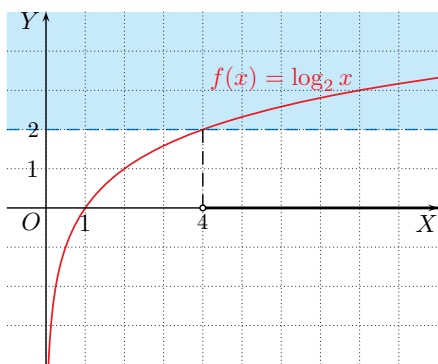
Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne w przypadku, gdy: a) $a \in (1; \infty)$, b) $a \in (0; 1)$?

Przykład 4

Korzystając z wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności $\log_2 x > 2$.

Równanie $\log_2 x = 2$ jest prawdziwe dla $x = 4$.

Funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest funkcją rosnącą określoną dla $x \in (0; \infty)$. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(4; \infty)$.

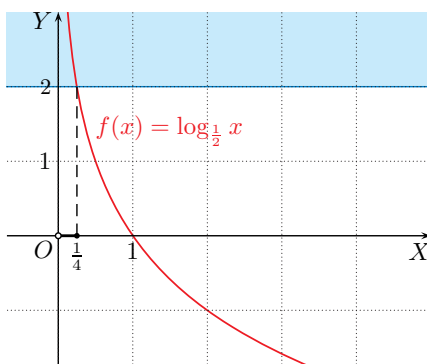


Przykład 5

Korzystając z wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$.

Równanie $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$ jest prawdziwe dla $x = \frac{1}{4}$.

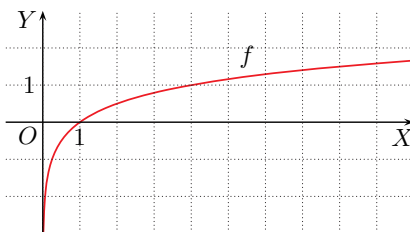
Funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest funkcją malejącą określoną dla $x \in (0; \infty)$. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(0; \frac{1}{4}]$.



Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Korzystając z tego wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności.

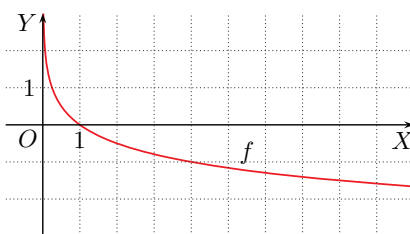
- a) $\log_4 x \geq 1$ c) $\log_4 x > -1$
b) $\log_4 x < 1$ d) $\log_4 x \leq -1$



Ćwiczenie 7

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Korzystając z tego wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $\log_{\frac{1}{4}} x > 1$ c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq -1$
b) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 1$ d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -1$



Ćwiczenie 5

- a) Jeśli $a \in (1; \infty)$, to
 $f(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$
oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$.
b) Jeśli $a \in (0; 1)$, to
 $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$
oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$.

Ćwiczenie 6

- a) $x \in [4; \infty)$
b) $x \in (0; 4)$
c) $x \in (\frac{1}{4}; \infty)$
d) $x \in (0; \frac{1}{4}]$

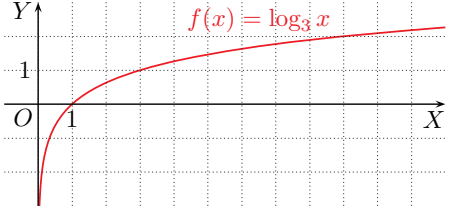
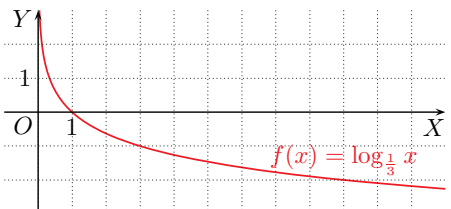
Ćwiczenie 7

- a) $x \in (0; \frac{1}{4})$
b) $x \in [\frac{1}{4}; \infty)$
c) $x \in (0; 4]$
d) $x \in (4; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

- $a = 3$
 - $a = 5$
 - $a = \frac{1}{2}$
 - $a = \sqrt{2}$
- $f(x) = \log_5 x$
 - $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
 - $f(x) = \log_8 x$
 - $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$
- $f(D_f) = (-\infty; 0)$
 - $f(D_f) = [1; \infty)$
 - $f(D_f) = [-1; 3]$
 - $f(D_f) = [-\frac{1}{2}; 10]$
- $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$
 - $m \in (-\infty; 0)$
 - $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
- $m \in (2; 3)$
 - $m \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$
 - $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
- $f(D_f) = [-1; 0]$
 - $f(D_f) = [-3; 2]$
 - $f(D_f) = [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$
 - $f(D_f) = [-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}]$
- $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$
 - $m \in (-\infty; 0)$
 - $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
- $m \in (2; 3)$
 - $m \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$
 - $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
- $x \in (3; \infty)$
 - $x \in (0; 3]$
 - $x \in [9; \infty)$
 - $x \in (0; \frac{1}{9})$
- $x \in (0; \frac{1}{3})$
 - $x \in [\frac{1}{3}; \infty)$
 - $x \in (0; \frac{1}{9}]$
 - $x \in (9; \infty)$

Zadania

- Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?
 - $P(27, 3)$
 - $P(625, 4)$
 - $P(32, -5)$
 - $P(4, 4)$
- Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ należy punkt P . Naskicuj ten wykres.
 - $P(5, 1)$
 - $P(5, -1)$
 - $P(2, \frac{1}{3})$
 - $P(2, 2)$
- Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f .
 - $D_f = (0; 1)$
 - $D_f = [2; \infty)$
 - $D_f = [\frac{1}{2}; 8]$
 - $D_f = [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1024]$
- Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f .
 - $f(x) = \log_3 x, D_f = [\frac{1}{3}; 1]$
 - $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, D_f = [\frac{1}{9}; 27]$
 - $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x, D_f = [\frac{1}{2}; 8]$
 - $f(x) = \log_8 x, D_f = [\frac{1}{2}; \sqrt{2}]$
- Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?
 - $f(x) = \log_{2m} x$
 - $f(x) = \log_{1-m} x$
 - $f(x) = \log_{m^2} x$
- Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?
 - $f(x) = \log_{m-2} x$
 - $f(x) = \log_{4m^2} x$
 - $f(x) = \log_{1-m^2} x$
- Korzystając z wykresu funkcji f (rysunek obok), określ, dla jakich liczb rzeczywistych zachodzi podana nierówność.

 - $\log_3 x > 1$
 - $\log_3 x \leq 1$
 - $\log_3 x \geq 2$
 - $\log_3 x < -2$
- Korzystając z wykresu funkcji f (rysunek obok), określ, dla jakich liczb rzeczywistych zachodzi podana nierówność.

 - $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$
 - $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$
 - $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$
 - $\log_{\frac{1}{3}} x < -2$

9.* Uzasadnij, że wykres funkcji $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0, a \neq 1, x > 0$, jest symetryczny względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji $g(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

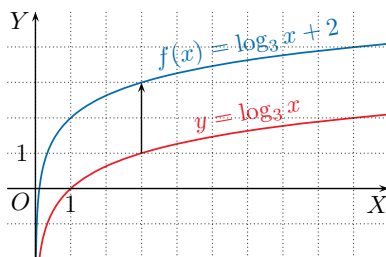
- Punkt (x, y) należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^y = x$, czyli punkt (y, x) należy do wykresu funkcji $g(x) = a^x$.
 Zatem oba wykresy są symetryczne względem prostej $y = x$.

6.8. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3 x + 2$.

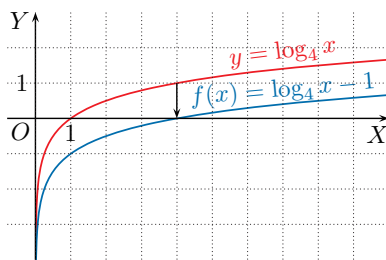
Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_4 x - 1$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_4 x$ o 1 jednostkę w dół, czyli o wektor $[0, -1]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

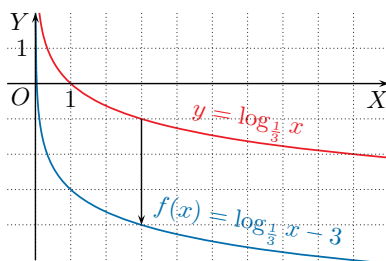
a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 x + 1$, $h(x) = \log_2 x - 3$

b) $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = \log_5 x + 2$, $h(x) = \log_5 x - 1$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół, czyli o wektor $[0, -3]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.

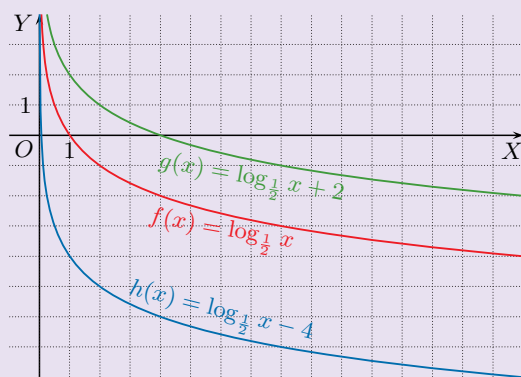


Ćwiczenie 2

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$$

Ćwiczenie 2

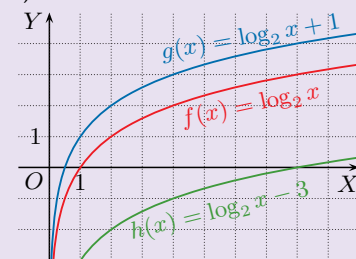


Uczeń:

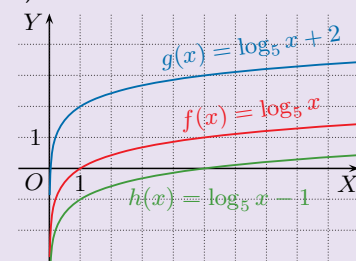
- szkicuje wykres funkcji logarytmicznej, stosując poznane przekształcenia, i określa jej własności,
- wyznacza dziedzinę funkcji logarytmicznej,
- rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące funkcji logarytmicznej,
- rozwiązuje nierówności logarytmiczne, korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji logarytmicznej,
- rozwiązuje graficznie równania, znajdując na rysunku punkty wspólne wykresu funkcji logarytmicznej i prostej,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiory punktów, których współrzędne są opisane za pomocą nierówności logarytmicznych.

Ćwiczenie 1

a)



b)



Multibook

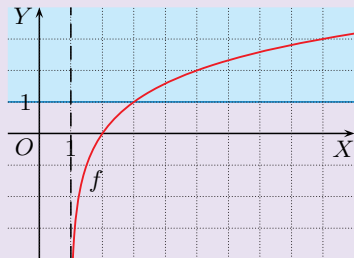
- Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznej (1)
- Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznej (2)
- Skala logarytmiczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.8

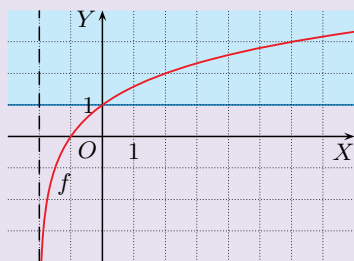
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

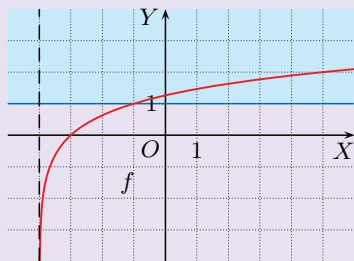
- a) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
 asymptota: $x = 1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [3; \infty)$



- b) $D = (-2; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
 asymptota: $x = -2$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [0; \infty)$



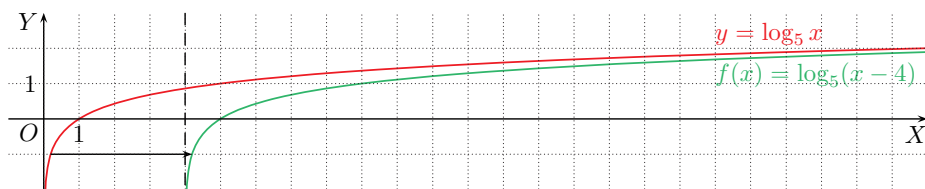
- c) $D = (-4; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -3$,
 asymptota: $x = -4$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [-1; \infty)$



Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_5(x-4)$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo, czyli o wektor $[4, 0]$.

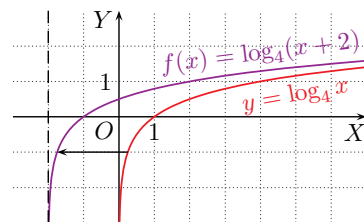


Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_4(x+2)$. Dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości nieujemne?

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 .



Nierówność $\log_4(x+2) \geq 0$ zachodzi dla $x \in [-1; \infty)$.

Ćwiczenie 3

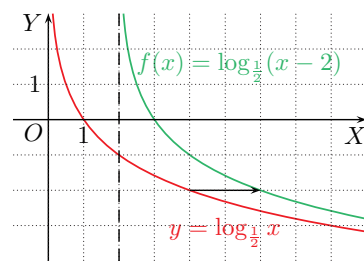
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = \log_2(x-1)$ b) $f(x) = \log_2(x+2)$ c) $f(x) = \log_3(x+4)$

Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor $[2, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 2$.



Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

Przykład 7

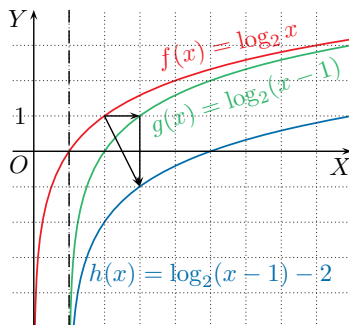
W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x-1)$, $h(x) = \log_2(x-1) - 2$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[1, 0]$.

Wykres funkcji h możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji g o wektor $[0, -2]$.

Zauważmy, że wykres funkcji h możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[1, -2]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $(0; \infty)$, a funkcji g i h – zbiór $(1; \infty)$.

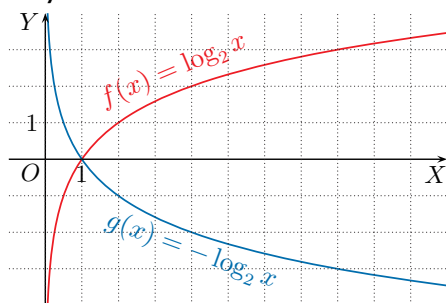


Ćwiczenie 5

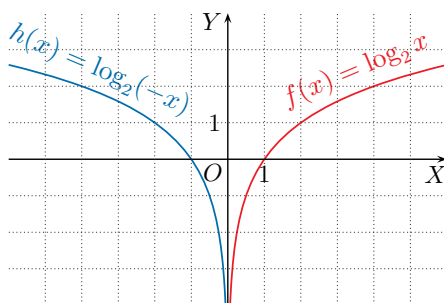
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \log_2(x-2) + 1$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 2$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 2$ e) $f(x) = \log_4(x-1) - 3$
 c) $f(x) = \log_3(x+2) - 1$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 2$

Przykład 8



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OX . $D_f = D_g = (0; \infty)$
 Zauważ, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.



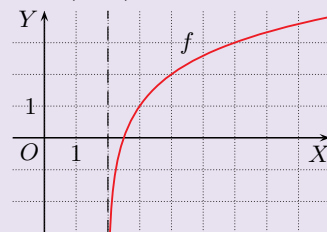
Wykresy funkcji f i h są symetryczne względem osi OY .
 $D_f = (0; \infty)$, $D_h = (-\infty; 0)$.

Ćwiczenie 4

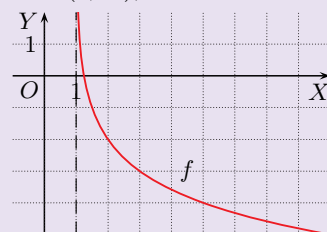
- a) $D = (3; \infty)$, $x = 3$
 b) $D = (-4; \infty)$, $x = -4$
 c) $D = (2; \infty)$, $x = 2$

Ćwiczenie 5

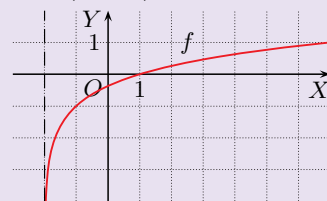
- a) $D = (2; \infty)$, $x = 2$



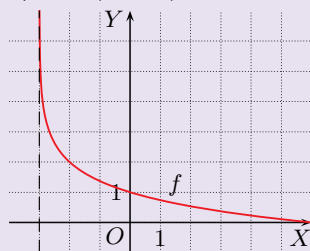
- b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$



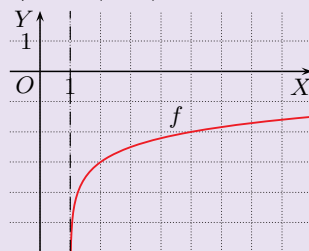
- c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$



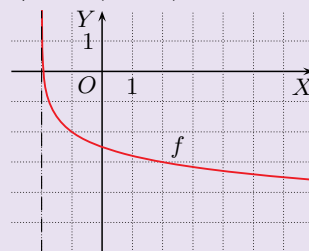
- d) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$



- e) $D = (1; \infty)$, $x = 1$

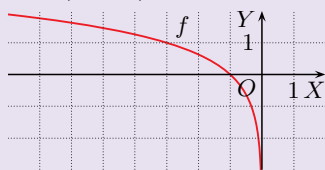


- f) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

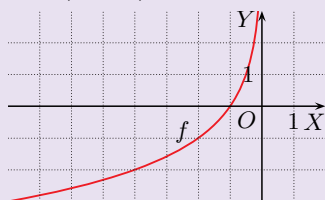


Ćwiczenie 6

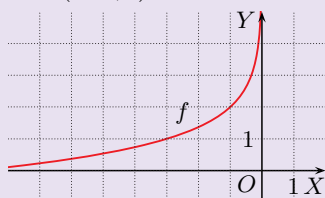
a) $D = (-\infty; 0)$



b) $D = (-\infty; 0)$



c) $D = (-\infty; 0)$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 4$
b) $x = \frac{1}{3}$
c) $x = \frac{1}{9}$
2. a) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$
3. a) $D = (-1; \infty)$; $x \in (-1; 3)$
b) $D = (1; \infty)$; $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
c) $D = (2; \infty)$; $x \in (2; \frac{55}{27})$
d) $D = (-3; \infty)$; $x \in (-3; 0)$
e) $D = (-4; \infty)$; $x \in (-2; \infty)$
f) $D = (1; \infty)$; $x \in (\frac{28}{27}; \infty)$
4. a) $[-1, -2]$;
 $g(x) = \log_2(x+1) - 2$
b) $[2, 1]$;
 $g(x) = \log_2(x-2) + 1$
5. a), b) $D = (0; \infty)$
c), d) $D = (-\infty; 0)$
6. a) $D = (-\infty; 1)$
b) $D = (-\infty; -2)$
c) $D = (-\infty; -1)$

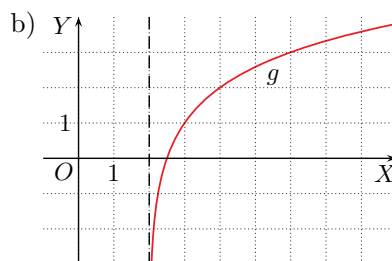
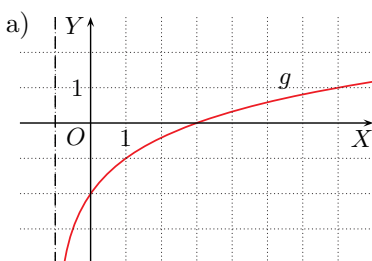
Ćwiczenie 6

Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

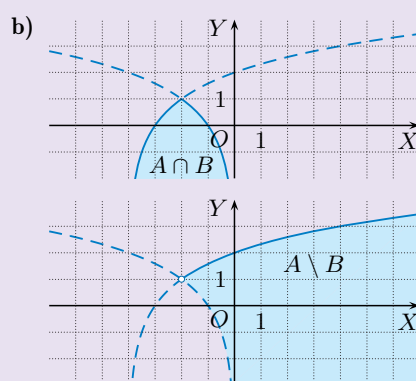
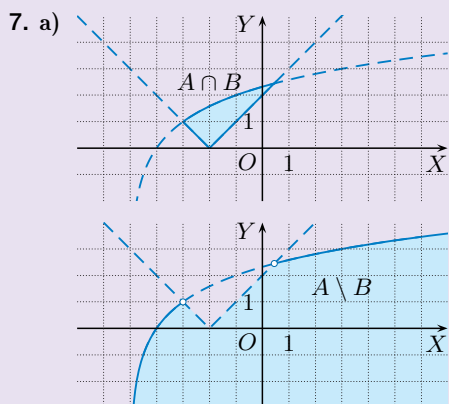
- a) $f(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) + 2$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej miejsce zerowe.
a) $f(x) = \log_2 x - 2$ b) $f(x) = \log_3 x + 1$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$
2. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.
a) $f(x) = \log_2(x+3)$ b) $f(x) = \log_3(x-1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$
3. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.
a) $f(x) = \log_2(x+1) - 2$ d) $f(x) = \log_3(x+3) - 1$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 1$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4) + 1$
c) $f(x) = \log_3(x-2) + 3$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 3$
4. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$, aby otrzymać wykres funkcji g ? Podaj wzór funkcji g .



5. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.
a) $f(x) = 2 - \log_2 x$ c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$
b) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$
6. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.
a) $f(x) = \log_2(1-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-2-x)$ c) $f(x) = \log_3(-1-x)$
7. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq \log_2(x+5)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq |x+2|\}$
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq \log_2(x+4)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq \log_2(-x)\}$



Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności człowieka dla częstotliwości 1000 Hz),

L – poziom natężenia dźwięku.

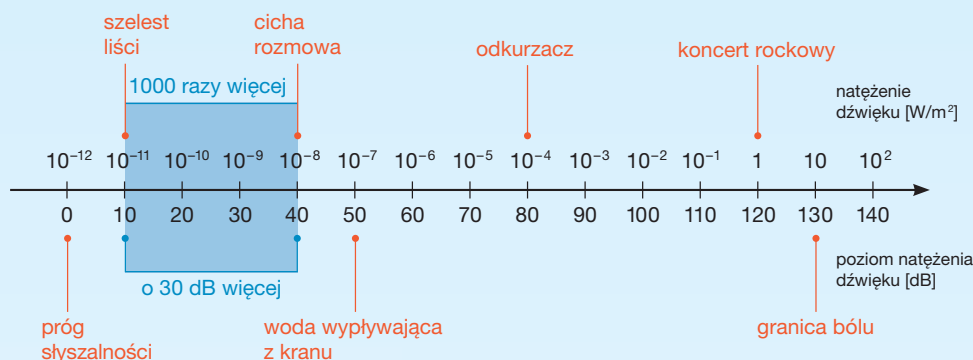
Poziom natężenia dźwięku podaje się w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2 , to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$



Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

$$1. L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \frac{2I}{10^{-12}} - 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} = 10 \cdot \log \left(\frac{2I}{10^{-12}} : \frac{I}{10^{-12}} \right) = 10 \log 2 \approx 3 \text{ [dB]}$$

Uczeń:

- stosuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu przy przekształcaniu wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- wykorzystuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu w zadaniach na dowodzenie,
- udowadnia twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu.

R

6.9. Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a , b i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Dowód

Niech a , b i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$. Niech $\log_b x = p$, $\log_a b = q$, wówczas:

$$x = b^p, \quad b = a^q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$x = (a^q)^p = a^{q \cdot p} \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$q \cdot p = \log_a x \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x / : \log_a b \quad \log_a b \neq 0, \text{ gdyż } b \neq 1.$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \frac{1}{9}$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c .

- a) $\log_{0,1} 7$, $c = 10$ c) $\log_7 11$, $c = 49$ e) $\log_2 6$, $c = \frac{1}{2}$
 b) $\log_8 3$, $c = 2$ d) $\log 625$, $c = 0,1$ f) $\log_{\frac{1}{3}} 12$, $c = 3$

Wzór z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu czasem wygodnie jest zapisać w postaci iloczynu:

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$$

D Ćwiczenie 2

Udowodnij podaną równość.

- a) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3$
 b) $\log 0,1 \cdot \log_{0,1} 0,01 \cdot \log_{0,01} 0,001 \cdot \log_{0,001} 0,0001 = -4$

Ćwiczenie 1

- a) $\frac{\log 7}{\log_{0,1} 7} = -\log 7 = \log \frac{1}{7}$
 b) $\frac{\log_2 3}{\log_2 8} = \frac{\log_2 3}{3} = \frac{1}{3} \log_2 3 = \log_2 \sqrt[3]{3}$
 c) $\frac{\log_{49} 11}{\log_{49} 7} = \frac{\log_{49} 11}{\frac{1}{2}} = 2 \log_{49} 11 = \log_{49} 121$
 d) $\frac{\log_{0,1} 625}{\log_{0,1} 10} = \frac{\log_{0,1} 625}{-1} = -\log_{0,1} 625 = \log_{0,1} \frac{1}{625}$
 e) $\frac{\log \frac{1}{2} 6}{\log \frac{1}{2} 2} = \frac{\log \frac{1}{2} 6}{-1} = -\log_{\frac{1}{2}} 6 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$
 f) $\frac{\log_3 12}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 12}{-1} = -\log_3 12 = \log_3 \frac{1}{12}$

Ćwiczenie 2

- a) $L = \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 =$
 $= \log_2 6 \cdot \log_6 8 = \log_2 8 =$
 $= 3 = P$
 b) $L = \log 0,01 \cdot \log_{0,01} 0,0001 =$
 $= \log 0,0001 = -4 = P$

D Ćwiczenie 3

Udowodnij podaną równość dla $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $x \in \mathbb{R}_+$.

a) $\log_{\sqrt{a}} x = \log_a x^2$ b) $\log_{a^2} x = \log_a \sqrt{x}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podany obok wzór.

Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

D Przykład 2

Udowodnij własność: jeśli $a > 1$ i $b > 1$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Podstawiamy $t = \log_a b$. Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, otrzymujemy:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

Przy podanych założeniach $t > 0$, zatem obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$\begin{aligned} t^2 + 1 &\geq 2t && \text{Zwróć uwagę na to, że kolejne} \\ t^2 - 2t + 1 &\geq 0 && \text{nierówności są równoważne.} \\ (t - 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij podaną własność.

- a) Jeśli $a \in (0; 1)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.
b) Jeśli $a \in (1; \infty)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \leq -2$.

Zadania

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

- a) $\log_{16} 3$ c) $\log_{\sqrt{2}} 11$ e) $\log_4 6 + \log_8 6$
b) $\log_{0,5} 7$ d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

D 2. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

- a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$ c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$
b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log \frac{1}{16}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

3. Wyraż liczbę a za pomocą p , gdzie $p = \log_3 2$.

- a) $a = \log_9 2$ c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$ e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$ g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$
b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$ d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$ f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$ h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a) $L = \log_2 25 + \frac{\log_2 25}{\log_2 4} = \log_2 25 + \frac{\log_2 25}{2} = \log_2 25 + \frac{1}{2} \log_2 25 = \frac{3}{2} \log_2 25 = \log_2 25^{\frac{3}{2}} = \log_2 125 = P$

b) $L = \frac{\log 4}{\log 0,1} + \frac{\log 16}{\log 0,01} = \frac{\log 4}{-1} + \frac{\log 16}{-2} = -\log 4 - \frac{1}{2} \log 16 = \log 4^{-1} + \log 16^{-\frac{1}{2}} = \log \frac{1}{4} + \log \frac{1}{4} = \log \frac{1}{16} = P$

c) $L = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{\log_{\frac{1}{3}} 3} + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{\log_{\frac{1}{3}} 9} = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{-1} + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{-2} = -\log_{\frac{1}{3}} 4 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 = -\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 = \log_{\frac{1}{3}} 4^{-\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{3}} 0,125 = P$

d) $L = \frac{\log_2 9}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{-1} + \frac{\log_2 9}{2} = -\log_2 9 + \frac{1}{2} \log_2 9 = -\frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \frac{1}{3} = P$

Ćwiczenie 3

a) $L = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{2}} = 2 \log_a x = \log_a x^2 = P$

b) $L = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{\log_a x}{2} = \frac{1}{2} \log_a x = \log_a \sqrt{x} = P$

Ćwiczenie 4

$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$

Ćwiczenie 5

a) Podstawiamy $t = \log_a b$.
Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$,

otrzymujemy: $t + \frac{1}{t} \geq 2$.

Przy podanych założeniach $t > 0$.
Obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$\begin{aligned} t^2 + 1 &\geq 2t \\ t^2 - 2t + 1 &\geq 0 \\ (t - 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

b) Podstawiamy $t = \log_a b$.
Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$,

otrzymujemy: $t + \frac{1}{t} \leq -2$.

Przy podanych założeniach $t < 0$.
Obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$\begin{aligned} t^2 + 1 &\geq -2t \\ t^2 + 2t + 1 &\geq 0 \\ (t + 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\log_2 \sqrt[4]{3}$ b) $\log_2 \frac{1}{7}$
c) $\log_2 121$ d) $\log_2 9^{-\frac{1}{3}}$
e) $\log_2 6^{\frac{5}{6}}$ f) $\log_2 3^{-\frac{11}{6}}$
3. a) $a = \frac{1}{2}p$ b) $a = -\frac{1}{3}p$
c) $a = 4p$ d) $a = \frac{1}{8}p$
e) $a = -2 - p$ f) $a = 3 + 3p$
g) $a = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}p$ h) $a = -\frac{1}{3}p$

4. a) $x = 5$
 b) $x = 81$
 c) $x = 9$
 d) $x = 10^6 \cdot \sqrt[3]{100}$
5. a) $L = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3}{2} = \frac{a}{2} = P$
 b) $L = \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 3}{\frac{1}{2}} = 2 \log_2 3 = 2a = P$
 c) $L = \frac{1}{\log_2 \frac{1}{8}} = \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{1}{8}} = \frac{\log_2 3}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \log_2 3 = -\frac{2}{3}a = P$
 d) $L = \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 (3 \cdot 2)} = \frac{1}{\log_2 3 + \log_2 2} = \frac{1}{a+1} = P$
 e) $L = \log_2 \sqrt{3} + \log_2 9 = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 3^2 = \frac{1}{2} \log_2 3 + 2 \log_2 3 = 2,5 \log_2 3 = 2,5a = P$
 f) $L = \log_2 \sqrt{3} + \log_4 9 = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 3 = 1,5 \log_2 3 = 1,5a = P$
6. a) $\log_a x = \frac{\log \sqrt{a} x}{\log \sqrt{a} a^2} = \frac{t}{4}$
 b) $\log \sqrt[3]{a} x = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[3]{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{3}} = 3 \log_a x = 9t$
7. a) $L = \log_a x^2 = \frac{\log_a x^2}{\log_a a^2} = \frac{2 \log_a x}{2} = \log_a x = P$
 b) $L = \log \sqrt[3]{a} x = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[3]{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{3}} = 3 \log_a x = \log_a x^3 = P$
 c) $L = \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = P$
 d) $L = \log_{a^n} x^n = \frac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \frac{n \log_a x}{n} = \log_a x = P$
 e) $L = \log \sqrt[n]{a} x = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[n]{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{n}} = n \log_a x = \log_a x^n = P$
 f) $L = \log_{a^p} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^p} = \frac{\log_a x}{p} = \frac{1}{p} \log_a x = \log_a x^{\frac{1}{p}} = P$
8. a, b, c, d $\in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4. Oblicz x .
 a) $\log_4 x = \log_{64} 125$
 b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$
 c) $\log_4 x = \log_8 27$
 d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$
5. Niech $a = \log_2 3$. Uzasadnij podany wzór.
 a) $\log_4 3 = \frac{a}{2}$
 b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2a$
 c) $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{8}} = -\frac{1}{3}a$
 d) $\log_6 2 = \frac{1}{a+1}$
 e) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 2} = 2,5a$
 f) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 4} = 1,5a$
6. Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Uzasadnij własność.
 a) Jeśli $\log_{\sqrt{a}} x = t$, to $\log_{a^2} x = \frac{t}{4}$.
 b) Jeśli $\log_{a^3} x = t$, to $\log_{\sqrt[3]{a}} x = 9t$.
7. Wykaż, że dla $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$ podany wzór jest prawdziwy.
 a) $\log_a x^2 = \log_a x$
 b) $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3$
 c) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$
 d) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$
 e) $\log_{\sqrt[n]{a}} x = \log_a x^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$
 f) $\log_{a^p} x = \log_a x^{\frac{1}{p}}$, gdzie $p \neq 0$
8. Wiadomo, że $\log_a a = \frac{1}{2}$. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.
 a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d$
 b) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} \cdot \log_b \frac{1}{c} \cdot \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{d}$
9. Wykaż, że dla $a \in (0; 1)$ i $b \in (1; \infty)$ zachodzi podana nierówność.
 a) $\log_a b - \log_a^2 b < 0$
 b) $\log_b^2 a + \log_{\frac{1}{a}} b > 0$
 c) $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \leq -2$
 d) $\log_a^2 b + \log_{\sqrt{a}} b \geq -1$
- 10.* Wyznacz dziedzinę funkcji f i narysuj jej wykres.
 a) $f(x) = \log_2 \sqrt{x} + \log_4 x$
 b) $f(x) = \log_2 x^4 - \log_{\sqrt{2}} x$
 c) $f(x) = \log_4 x^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x$
 d) $f(x) = \log_8 x^3 - \frac{1}{4} \log_{\sqrt{2}} x$

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.



Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,465$$

Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

- a) $\log_3 7$ b) $\log_6 3$ c) $\log_{0,5} 9$

9. Niech $t = \log_a b$. Przy podanych założeniach $t < 0$.
 a) $\log_a b - \log_a^2 b = t - t^2 < 0$
 b) Przy podanych założeniach $\log_b^2 a > 0$ oraz $\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{1}{\log_b \frac{1}{a}} = -\frac{1}{\log_b a} > 0$, zatem $\log_b^2 a + \log_{\frac{1}{a}} b > 0$.
 c) $\frac{1}{\log_a b} + \log_a b + 2 = \frac{1}{t} + t + 2 = \frac{t^2 + 2t + 1}{t} = \frac{(t+1)^2}{t} < 0$
 Zatem $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \leq -2$.
 d) $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} = 2 \log_a b$
 $\log_a^2 b + 2 \log_a b + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 \geq 0$
 Zatem $\log_a^2 b + \log_{\sqrt{a}} b \geq -1$.
10. $D = (0; \infty)$
 a) $f(x) = \log_2 x$
 b) $f(x) = 2 \log_2 x$
 c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
 d) $f(x) = \log_4 x$
11. a) 1,771
 b) 0,613
 c) -3,170

6.10. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

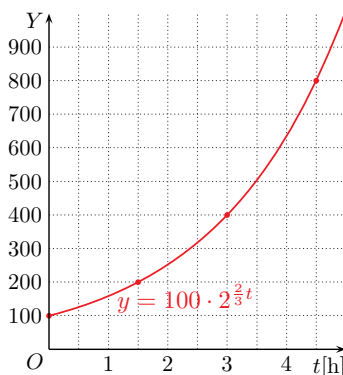
Wzrost wykładniczy

Liczbę bakterii hodowanych w warunkach laboratoryjnych, w zależności od czasu t mierzonych w godzinach, wyraża wzór: $y = y_0 \cdot a^t$, gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą.

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Ustalono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu 1,5 godziny. Wyznacz wzór opisujący liczebność kolonii bakterii w zależności od czasu.

Zauważmy, że $y_0 = 100$ oraz dla $t = 1,5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1,5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}}$. Otrzymujemy więc wzór $y = 100 \cdot 2^{\frac{2}{3}t}$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

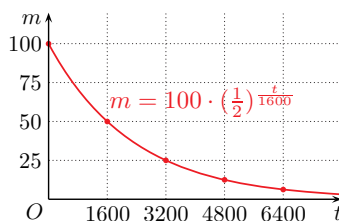
Rozpad promieniotwórczy

Okres połowicznego rozpadu to czas, po którym masa izotopu zmniejsza się o połowę. Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Przykład 2

Okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to jego masa po upływie t lat wyraża się wzorem:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Ćwiczenie 1

$$10800 = y_0 \cdot a^6 = y_0 \cdot a^2 \cdot a^4 = 1200 \cdot a^4$$

$$a^4 = 9$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$1200 = y_0 \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$\text{Zatem } y_0 = 400.$$

$$\text{Po 10 godzinach: } y = 400 \cdot (\sqrt{3})^{10} = 97200.$$

Uczeń:

- wykorzystuje funkcje wykładniczą i logarytmiczną do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym, dotyczących wzrostu wykładniczego i rozpadu promieniotwórczego.

Multibook

- Wzrost wykładniczy w przyrodzie
- Datowanie radiowęglowe
- Czy podane wyrażenia są równoważne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.10



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

a) $12,5 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $\frac{t}{1600} = 3$
 $t = 4800$ lat

b) $0,01 = 10,24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
 $\frac{t}{1600} = 10$
 $t = 16000$ lat

Ćwiczenie 3

$m = 0,25m_0$

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$

$\frac{t}{28} = 2$

$t = 56$ lat

$m = 0,125m_0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}} = \frac{1}{8}$

$\frac{t}{28} = 3$

$t = 84$ lata

Masa próbki zmniejszy się o 75% po 56 latach, a o 87,5% po 84 latach.

Ćwiczenie 4

a) $0,5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\frac{t}{5700} = 1$

$t = 5700$ lat

b) $0,25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\frac{t}{5700} = 2$

$t = 11400$ lat

Komentarz

Zauważmy, że w ćwiczeniu 4. nie są potrzebne powyższe rachunki. Zawartość izotopu zmniejszy się o 50% po 5700 latach, bo jest to okres jego połowicznego rozpadu. Połowa, która zostanie, rozpadnie się na pół po kolejnych 5700 latach, czyli zawartość izotopu zmniejszy się o 75% po 11400 latach.

Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226 o masie:

- a) 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,
b) 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^b, \text{ gdy } a = b.$$

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.

Przykład 3

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0,66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$0,66 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,66}{\log 0,5} \approx 3417$$

Znalezisko ma około 3417 lat.

Jeśli $a = b > 0$, to
 $\log a = \log b$.



Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.

Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1,875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Ćwiczenie 5

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1,875 \cdot 10^{-13}}{1,5 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{t}{5700} = 3$$

$$t = 17100 \text{ lat}$$

Zadania

- Z próbki jodu-131 o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.
 - Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.
- Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.
- Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.
- Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym stosunek ilości izotopu ^{14}C do ilości izotopu ^{12}C jest równy $1:10^{13}$.
- Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:
 - egipskiej mumii mającej 3330 lat,
 - kości zwierzęcia mającej 17 000 lat.

Czy wiesz, że...

W niektórych modelach wzrostu liczby ludności zakłada się, że wzrost ten ma charakter wykładniczy. Przyjmijmy, że wzrost liczby ludności wyraża wzór:

$$N = N_0 \cdot e^{kt}$$

(liczba e – patrz str. 299), gdzie N_0 jest początkową liczbą ludności, t – czasem mierzonym w latach, N – liczbą ludności po upływie czasu t oraz k – odpowiednio dobraną stałą.

Wyznamy stałą k dla USA w latach 1900–2000.

Z tabeli odczytujemy: $N_0 = 76$ mln, $N = 275$ mln, $t = 100$ lat. Otrzymujemy więc:

$$275 = 76 \cdot e^{100k}$$

Rok 1900	Rok 2000
76 mln	275 mln

Liczba ludności USA

Stąd $100k = \ln \frac{275}{76}$ (logarytm naturalny – patrz str. 310), zatem $k \approx 0,013$.

Aby oszacować liczbę ludności USA w wybranym roku XX w., możemy skorzystać ze wzoru $N = 76 \cdot e^{0,013t}$, gdzie t oznacza liczbę lat, które upłynęły od 1900 r. Obliczmy na przykład liczbę ludności w latach 1950 i 1990:

$$N_{1950} = 76 \cdot e^{0,013 \cdot 50} \approx 146 \text{ mln}, \quad N_{1990} = 76 \cdot e^{0,013 \cdot 90} \approx 245 \text{ mln}$$

Uwaga. W rzeczywistości liczba ludności USA w 1950 r. wynosiła około 152 mln, a w 1990 r. – około 250 mln.

Odpowiedzi do zadań

- $1,2 = 4,8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} = \frac{1}{4}$
 $\frac{16}{T} = 2$
 $T = 8$ dni
 - $5 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{T}}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{T}} = \frac{1}{8}$
 $\frac{7}{T} = 3$
 $T = 2\frac{1}{3}$ doby
 $T = 56$ h
- $m = 0,25m_0$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\,000}{T}} = \frac{1}{4}$
 $\frac{100\,000}{T} = 2$
 $T = 50\,000$ lat
- $m = 0,8m_0$
 $0,8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
 $\log 0,8 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
 $\log 0,8 = \frac{t}{5700} \log 0,5$
 $t = 5700 \cdot \frac{\log 0,8}{\log 0,5} \approx 1835$ [lat]
 - $m = 0,2m_0$
 $0,2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
 $\log 0,2 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
 $\log 0,2 = \frac{t}{5700} \log 0,5$
 $t = 5700 \cdot \frac{\log 0,2}{\log 0,5} \approx 13235$ [lat]

- $\frac{m}{m_0} = \frac{10^{-13}}{1,5 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{15}$
 $\frac{1}{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
 $\log \frac{1}{15} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
 $\log \frac{1}{15} = \frac{t}{5700} \log \frac{1}{2}$
 $t = 5700 \cdot \frac{\log \frac{1}{15}}{\log \frac{1}{2}} \approx 22269$ [lat]
- $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3330}{5700}}, \frac{m}{m_0} \approx 67\%$
 - $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17000}{5700}}, \frac{m}{m_0} \approx 13\%$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \log_{\frac{5}{6}} 6$
b) $x = 3$
c) $x = \log_{\frac{9}{7}} 63$
d) $x = \log_{\frac{9}{8}} \frac{1}{4}$
e) $x = \log_{15} \frac{3}{2}$
2. a) $x = 2$
b) $x = \log_3 18$
c) $x = -1$
d) $x = 0$
e) $x = -1$
3. a) $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 16 = 0$
 $(2^x - 4)^2 = 0$
 $2^x = 4, x = 2$
b) $5^{2x} + 5 \cdot 5^x - 6 = 0$
 $(5^x - 1)(5^x + 6) = 0$
 $5^x = 1, x = 0$
c) $4 \cdot 4^{2x} - 4 \cdot 4^x + 1 = 0$
 $(2 \cdot 4^x - 1)^2 = 0$
 $4^x = \frac{1}{2}$
 $4^x = 4^{-\frac{1}{2}}, x = -\frac{1}{2}$
d) $2^{2x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^x + 8 = 0$
 $(2^x - 2)(2^x - 4) = 0$
 $2^x = 2$ lub $2^x = 4$
 $x = 1$ lub $x = 2$
e) $(\frac{1}{2})^{2x} - 3 \cdot (\frac{1}{2})^x + 2 = 0$
 $((\frac{1}{2})^x - 1)((\frac{1}{2})^x - 2) = 0$
 $(\frac{1}{2})^x = 1$ lub $(\frac{1}{2})^x = 2$
 $x = -1$ lub $x = 0$
f) Obie strony równania
mnożymy przez 7^x .
 $7^{2x} - 14 = 5 \cdot 7^x$
 $7^{2x} - 5 \cdot 7^x - 14 = 0$
 $(7^x + 2)(7^x - 7) = 0$
 $7^x = 7, x = 1$
4. a) $3^x + 3^{-x} = 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-x}$,
gdzie $x \neq 0$
 $3 \cdot 3^{-x} = 3^x$
 $3^{1-x} = 3^x$
 $1 - x = x, x = \frac{1}{2}$
b) Obie strony równania
mnożymy przez iloczyn
mianowników.
 $6 - 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x - 2 = 0$,
gdzie $x \neq 0, x \neq 1$
 $2^x = 4, x = 2$
c) Obie strony równania
mnożymy przez mianownik.
 $1 - 4^x = 1 - 2^{2x}$, gdzie $x \neq 0$
 $1 - 2^{2x} = 1 - 2^{2x}$
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dowiedz się więcej

Równania wykładnicze

1. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż równanie.

- a) $5^x = 6^{x+1}$
- b) $11^{x-3} = 13^{3-x}$
- c) $7^{x+1} = 3^{2x-2}$
- d) $3^{2x} = 2^x \cdot 4^{x-1}$
- e) $4 \cdot 2^{x-3} = 10^x \cdot 3^{x-1}$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż równanie.

- a) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 63$
- b) $3^x + 3^{x-1} - 24 = 0$
- c) $(\frac{1}{2})^{3x+1} + (\frac{1}{2})^{3x} = 12$
- d) $20 \cdot 4^{x-1} + \sqrt{2}^{4x} = 6$
- e) $16^{x+1} + 4^{2x} + 2^{4x} = \frac{9}{8}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $4^x - 8 \cdot 2^x + 16 = 0$
- b) $5^{x+1} + 25^x = 6$
- c) $4 \cdot 16^x = 4^{x+1} - 1$
- d) $4^x + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}$
- e) $\frac{1}{4^x} - \frac{3}{2^x} + 2 = 0$
- f) $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 5$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$
- b) $\frac{3}{2^x - 1} + \frac{2}{2 - 2^x} = 0$
- c) $\frac{1 - 4^x}{1 - 2^x} = 2^x + 1$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^{-x} = 2$
- b) $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 2$

Wskazówka. W podpunkcie a) zauważ, że $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

6. Rozwiąż równanie.

- a) $8^x - 4^{x+1} + 2^{x+2} = 0$
- b) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$
- c) $16^x - 5 \cdot 8^x + 4^{x+1} = 0$
- d) $81^x - 9^x + 9^{1-x} - 9 = 0$
- e) $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$
- f) $2 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 = 0$

5. a) $2(2 - \sqrt{3})^x = 2$

$$(2 - \sqrt{3})^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\text{b) Zauważmy, że } 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Niech } t = (3 + 2\sqrt{2})^x > 0.$$

$$\frac{1}{t} + t = 2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$(3 + 2\sqrt{2})^x = 1, x = 0$$

6. a) $x = 1$

$$\text{b) } x = 0 \text{ lub } x = 1$$

$$\text{c) } x = 0 \text{ lub } x = 2$$

$$\text{d) } x = 0 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } x = 4$$

$$\text{f) } x = 4$$

Równania logarytmiczne

1. Przeczytaj podany w ramce przykład. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_3(x^2 - 7) &= 2 \\ \text{b) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) &= -1 \\ \text{c) } \log_2(9x - x^2) &= 3 \\ \text{d) } \log_2|x^2 - 1| &= 3 \end{aligned}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_4(\log_2 x) &= -\frac{1}{2} \\ \text{b) } \log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) &= 1 \end{aligned}$$

3. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_{0,3}(\log_5(x^2 + 1)) &= 0 \\ \text{b) } \log_3(\log_3(\log_3 x)) &= 0 \end{aligned}$$

4. Rozwiąż równanie. Podaj wykorzystane własności logarytmu.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 x + \log_2(x - 3) &= 2 & \text{d) } \log_2 x + \log_2(x + 3) &= 2 \\ \text{b) } \log(2x + 1) + \log(x + 1) &= 1 & \text{e) } \log_3 x = 1 - \log_3(x - 2) \\ \text{c) } \log_3(4 - x) - \log_3 x &= 2 & \text{f) } \log_{\frac{1}{2}}(4x + 8) - \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) &= -3 \end{aligned}$$

5. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_4 x + \log_2 x &= 9 & \text{c) } \log_2 x - 2\log_4(x - 1) &= 2 \\ \text{b) } \log x - \log_{0,1}(x + 3) &= 1 & \text{d) } \log\left(\frac{1}{2}x + x^2\right) &= \frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}(x - x^2) \end{aligned}$$

6. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \log_x(1 - x) = 1 \quad \text{b) } \log_x|x - 1| = 0 \quad \text{c) } \log_{(x-1)}(3x - 5) = 2$$

7. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_3^2 x + 3\log_3 x &= 0 & \text{f) } \log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 &= 0 \\ \text{b) } \log_2^2 x - \log_2 x^4 &= 0 & \text{g) } \log^2 x - \log x^2 &= 8 \\ \text{c) } \log x - \frac{1}{\log x} &= 0 & \text{h) } \frac{1}{\log x - 1} + \frac{3}{\log x + 1} &= 2 \\ \text{d) } \log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x} &= 8 & \text{i) } \frac{\log(x+1)}{\log(2x-1)} &= 1 \\ \text{e) } 2\log_4 x = 1 + \frac{1}{\log_4 x} & & \text{j) } \frac{\log(4x+1)}{\log(x+1)} &= 2 \end{aligned}$$

Wskazówka. W podpunkcie a) zastosuj podstawienie $t = \log_3 x$.

$$\begin{aligned} \text{5. a) } \log_4 x + \frac{\log_4 x}{\log_4 2} &= 9, x > 0 \\ 3\log_4 x &= 9, x = 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log x - \frac{\log(x+3)}{\log 0,1} &= 1, \\ x > 0 \\ \log x(x+3) &= 1 \\ x(x+3) &= 10 \\ x_1 = -5 < 0, x_2 = 2, \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Rozwiąż równanie } \log_3(2x - 4) = 2.$$

Zakładamy, że $2x - 4 > 0$, czyli $x > 2$.

$$\log_3(2x - 4) = 2$$

$$2x - 4 = 3^2$$

Stąd $2x = 13$, czyli $x = 6,5$.

$$\text{1. a) } x < -\sqrt{7} \text{ lub } x > \sqrt{7}$$

$$x^2 - 7 = 9$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 4$$

$$\text{b) } x < 0 \text{ lub } x > 1$$

$$x^2 - x = 2$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 2$$

$$\text{c) } 0 < x < 9$$

$$9x - x^2 = 8$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 8$$

$$\text{d) } x \neq 1$$

$$|x^2 - 1| = 8$$

$$x^2 - 1 = 8 \text{ lub } x^2 - 1 = -8$$

$$x^2 = 9 \text{ lub } x^2 = -7$$

$$x^2 = -7 \text{ (sprzeczność)}$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

$$\text{2. a) } \log_2 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{2}} x = 3$$

$$x = \frac{1}{8}$$

$$\text{c) } \log_2(\log_4 |x|) = 1$$

$$\log_4 |x| = 2$$

$$|x| = 16$$

$$x = -16 \text{ lub } x = 16$$

$$\text{d) } \log_{\sqrt{2}}(\log_3 x^2) = 2$$

$$\log_3 x^2 = 2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

$$\text{3. a) } x = -2 \text{ lub } x = 2$$

$$\text{b) } x = 27$$

$$\text{c) } x = -6 \text{ lub } x = 6$$

$$\text{d) } x = 1$$

$$\text{4. a) } x = 4 \quad \text{b) } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } x = \frac{2}{5} \quad \text{d) } x = 1$$

$$\text{e) } x = 3 \quad \text{f) } x = 6$$

$$\text{6. a) } 0 < x < 1$$

$$1 - x = x, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } x > 0, x \neq 1$$

$$|x - 1| = 1$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2, \text{ zatem } x = 2$$

$$\text{c) } x > 1\frac{2}{3}, x \neq 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = 3, \text{ zatem } x = 3$$

$$\text{7. a) } x = \frac{1}{27} \text{ lub } x = 1$$

$$\text{b) } x = 1 \text{ lub } x = 16$$

$$\text{c) } x = \frac{1}{10} \text{ lub } x = 10$$

$$\text{d) } x = 16$$

$$\text{e) } x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = 4$$

$$\text{f) } x = \frac{1}{4} \text{ lub } x = 2$$

$$\text{g) } x = \frac{1}{100} \text{ lub } x = 10000$$

$$\text{h) } x = 1 \text{ lub } x = 100$$

$$\text{i) } x = 2$$

$$\text{j) } x = 2$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{27}$ d) $\frac{1}{80}$
2. a) 25 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3
3. a) 1 b) 2 c) 20 d) $\frac{4}{121}$
4. a) $3^{-\frac{1}{6}}$ b) $3^{\frac{3}{8}}$ c) $5^{\frac{7}{8}}$ d) $2^{\frac{53}{24}}$
5. a) $5^{\sqrt{5}}$, $25\sqrt{5} = 5^{2,5}$,
 $125^{\frac{4}{5}} = 5^{2,4}$, $25^{1,1} = 5^{2,2}$
 $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} <$
 $< 25\sqrt{5} < 5^{2\sqrt{2}}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{8}} = 2^{-\frac{3}{2}}$,
 $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{4}}$, $0,5 = 2^{-1}$,
 $16^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$, $4^{-0,5\sqrt{3}} = 2^{-\sqrt{3}}$
 $4^{-0,5\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 <$
 $< (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
 c) $9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$,
 $\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}}$, $(\sqrt[3]{3})^{-2} = 3^{-\frac{2}{3}}$
 $3^{-0,5\pi} < (\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} <$
 $< 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
 d) $(4,5)^{-2} = \frac{8}{162}$,
 $\sqrt{0,4}^{\sqrt{12}} = (\frac{2}{5})^{\sqrt{12}}$,
 $(2,5)^{-2,4} = (\frac{2}{5})^{2,4}$,
 $0,064 = \frac{8}{125} = (\frac{2}{5})^3$
 $4,5^{-2} < 0,064 < 2,5^{-2,4} <$
 $< \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$
6. a) $10^{1,1} = 10 \cdot 10^{0,1} \approx$
 $\approx 12,5893$
 b) $10^{-0,9} = 10^{0,1} \cdot 10^{-1} \approx$
 $\approx 0,1259$
 c) $10^{-1,9} = 10^{0,1} \cdot 10^{-2} \approx$
 $\approx 0,0126$
 d) $10^{-2,9} = 10^{0,1} \cdot 10^{-3} \approx$
 $\approx 0,0013$
7. a) $f(x) = 4^x$
 b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
 c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

Powtórzenie

Zestaw I

1. Oblicz.
 a) $\frac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$ b) $\frac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2}$ c) $\frac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}}$ d) $\frac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}}$
2. Oblicz.
 a) $25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ b) $64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}}$ c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}}$ d) $0,001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,09^{\frac{1}{2}}$
3. Oblicz.
 a) $5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$ c) $\sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ d) $\frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{44}} \cdot (\frac{2}{11})^3$
4. Zapisz liczbę w postaci potęgi a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.
 a) $3^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{27}}{9}$ b) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ d) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}$
5. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.
 a) $5^{\sqrt{5}}$; $25\sqrt{5}$; $125^{\frac{4}{5}}$; $25^{1,1}$; $5^{2\sqrt{2}}$ c) $9^{\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt[4]{27}$; $(\sqrt[3]{3})^{-2}$; $3^{-0,5\pi}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$; $0,5$; $16^{-\frac{1}{3}}$; $4^{-0,5\sqrt{3}}$ d) $4,5^{-2}$; $\sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$; $2,5^{-2,4}$; $0,064$
6. Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia: $\sqrt[10]{10} \approx 1,258925$.
 a) $10^{1,1}$ b) $10^{-0,9}$ c) $10^{-1,9}$ d) $10^{-2,9}$
7. Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, o którym wiadomo, że przechodzi przez punkt P .
 a) $P(\frac{5}{2}, 32)$ b) $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ c) $P(-6, 729)$
8. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.
 a) $f(x) = 2^x - 4$ c) $f(x) = 4^{x+2} - 3$ e) $f(x) = 2 + 2^{-x}$
 b) $f(x) = 3^{x-1} + 2$ d) $f(x) = 4 - 2^x$ f) $f(x) = 1 - 3^{-x}$
9. Oblicz.
 a) $\log_3 27$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$ j) $27^{\log_3 2}$
 b) $\log_{27} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$ k) $\sqrt{27}^{\log_3 2}$
 c) $\log_3 \frac{1}{243}$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ i) $\log_{\sqrt{27}} 3$ l) $3^{1-\log_3 2}$
8. a) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$ b) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
 c) $f(D) = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = \log_4 3 - 2$ g) 6 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{2}{3}$
 d) $f(D) = (-\infty; 4)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$ j) 8 k) $2\sqrt{2}$ l) $\frac{3}{2}$
 e) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
 f) $f(D) = (-\infty; 1)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$
9. a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -5
 d) $-\frac{1}{3}$ e) -3 f) $\frac{1}{6}$
 g) 6 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{2}{3}$
 j) 8 k) $2\sqrt{2}$ l) $\frac{3}{2}$

10. Oblicz $\sqrt{ab}$.

a) $a = \log_3 9$, $b = \log_2 256$

b) $\log_2 a = 5$, $\log_4 b = \frac{1}{2}$

11. Oblicz x .

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$

d) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$

12. Oblicz x .

a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$

c) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$

b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$

d) $\log x = \log 80 - 3 \log 2$

■ Zestaw II

1. Oblicz.

a) $49^{0,7} \cdot 7^{-1,4} \cdot 27^{\frac{4}{3}}$

b) $\sqrt[4]{32} \cdot 10^{0,75} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$

c) $6^{-0,5} \cdot 2^{2,5} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$

2. Oblicz.

a) $18^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$

b) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$

c) $(3^{-0,75})^{-4} : (9^{-1,5})^{\frac{1}{3}}$

3. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\left(\frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) : \left(\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{4}{3}}\right)$

c) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right)^{-2} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

b) $\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$

d) $(x^{1,5} \cdot y^{-0,25}) : (x^{0,5} \cdot y^{-1,25})$

4. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = (2^{-3})^{-2}$, $y = (2\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}$

b) $x = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{-0,5}$, $y = 9^{-0,75} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$

5. Oblicz.

a) $\log_4(\log_2 16)$

c) $\log_8(\log_4 2)$

e) $\log_6\left(\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3})\right)$

b) $\log_2(\log_4 16)$

d) $\log_3(\log_8 2)$

f) $\log_8\left(\log_9\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}\right)\right)$

6. Oblicz.

a) $\log_3 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_8 9$

b) $\log_6 9 \cdot \log_3 8 \cdot \log_2 36$

7. Przedstaw podaną liczbę w postaci logarytmu o podstawie 3.

a) $\log_{27} 8$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 0,2$

c) $\log_{3\sqrt{3}} 64$

d) $\log_{\frac{1}{9}} 25$

8. Przedstaw podane wyrażenie za pomocą $p = \log_4 3$.

a) $\log_3 64$

b) $\log_2 27$

c) $\log_{\sqrt{2}} 24$

6. a) $\log_3 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_8 9 = \log_3 6 \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 6} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 8} = \log_3 9 = 2$

b) $\log_2 6^2 \cdot \log_6 9 \cdot \log_3 8 = 2 \log_2 6 \cdot \frac{\log_2 9}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = 2 \cdot \frac{2 \log_2 3}{\log_2 3} \cdot \log_2 2^3 = 12$

7. a) $\log_{27} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 27} = \frac{3 \log_3 2}{3} = \log_3 2$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = -\log_{\frac{1}{3}} 5 = -\frac{\log_3 5}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\frac{\log_3 5}{-1} = \log_3 5$

c) $\log_{3\sqrt{3}} 64 = 3 \log_{3\sqrt{3}} 4 = 3 \frac{\log_3 4}{\log_3 3^{\frac{3}{2}}} = 3 \cdot \frac{2}{3} \log_3 4 = 2 \log_3 4 = \log_3 16$

d) $\log_{\frac{1}{9}} 25 = 2 \log_{\frac{1}{9}} 5 = 2 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 \frac{1}{9}} = -\log_3 5 = \log_3 \frac{1}{5}$

8. a) $\log_3 4^3 = 3 \log_3 4 = \frac{3}{\log_4 3} = \frac{3}{p}$

b) $\log_2 3^3 = 3 \log_2 3 = 3 \cdot \frac{\log_4 3}{\log_4 2} = 6p$

c) $\log_{\sqrt{2}} 24 = \log_{\sqrt{2}} 8 + \log_{\sqrt{2}} 3 = 6 + \frac{\log_4 3}{\log_4 \sqrt{2}} = 4p + 6$

10. a) 4

b) 8

11. a) $x = 16$

b) $x = 8$

c) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x = -64$ lub $x = 64$

12. a) $x = 36$

b) $x = 9$

c) $x = 100$

d) $x = 10$

Zestaw II

1. a) 81

b) 20

c) 12

2. a) 15

b) -2

c) 81

3. a) $x > 0$, $y \neq 0$, $\frac{3}{xy}$

b) $x > 0$, $y > 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

c) $a \neq 0$, $b > 0$, $\frac{1}{ab}$

d) $x > 0$, $y > 0$, xy

4. a) $x = 2^6 = 64$,

$y = (4 \cdot 5 - 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$
 $x > y$

b) $x = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-0,5} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$,

$y = 9^{-\frac{3}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{6}{4}} = 9$
 $y > x$

5. a) 1

b) 1

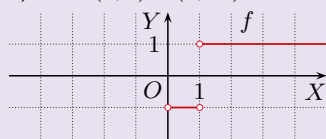
c) $-\frac{1}{3}$

d) -1

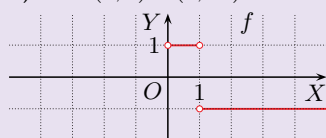
e) 0

f) $-\frac{1}{3}$

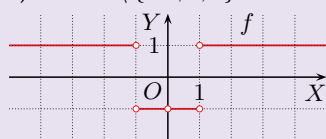
9. a) $\frac{10}{a} + \frac{5}{b}$
b) $3a + \frac{4}{3}b$
10. a) $3^{\log_3 \sqrt{3}^{27}} = 3^2 = 9$
b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_4 \sqrt{2}^{32}} =$
 $= (\sqrt[3]{4})^{\log_{\sqrt{2}} 32} =$
 $= (\sqrt[3]{4})^2 = 2\sqrt[3]{2}$
c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5} =$
 $= 7^{\log_7 (5^{\log_3 7})} - 7^{\log_3 5} =$
 $= 7^{\log_3 7 \cdot \log_3 5} - 7^{\log_3 5} =$
 $= 7^{\log_3 5} - 7^{\log_3 5} = 0$
11. a) $x = 4$
b) $x = 1024$
c) $x = 16$
12. a) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$,
 $g(D) = (-1; \infty)$
b) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$,
 $g(D) = (-\infty; 0)$
c) $g(x) = -2^x$,
 $g(D) = (-\infty; 0)$
13. a, c) $[0; \infty)$
b) $[4; \infty)$
14. a) $D = (3; \infty)$, $x = 3$
b) $D = (-4; \infty)$, $x = -4$
c) $D = (2; \infty)$, $x = 2$
d) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
e, f) $D = (-\infty; 0)$, $x = 0$
15. a) $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$



b) $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$



c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$



9. Przedstaw podaną liczbę za pomocą a i b , gdzie $a = \log_2 3$, $b = \log_4 5$.
a) $\log_3 1024 + \log_5 1024$ b) $\log_4 121 \cdot \log_{11} 27 - \log_8 0,04$
10. Oblicz.
a) $3^{\log_3 \sqrt{3}^{27}}$ b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_4 \sqrt{2}^{32}}$ c) $* 5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$
11. Znajdź liczbę x spełniającą podany warunek.
a) $\log(\log_4 x) = 0$ b) $\log_5(\log_4 x) = 1$ c) $\log_4(\log_4 x) = \frac{1}{2}$
12. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej wzór i zbiór wartości.
a) $g(x) = f(x-1) - 1$ b) $g(x) = -f(x+2)$ c) $g(x) = -f(-x)$
13. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości nieujemne.
a) $f(x) = 4 \cdot 2^{2x} - 4$ b) $f(x) = \frac{1}{64} \cdot 2^{x+3} - 2$ c) $f(x) = \frac{9}{3^{-x}+1} - 3$
14. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.
a) $f(x) = \log_6(x-3) - 1$ d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4) - 1$ e) $f(x) = \log_5(-x) - 1$
c) $f(x) = -\log_4(x-2)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) + 1$
15. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.
a) $f(x) = \frac{\log x}{|\log x|}$ b) $f(x) = \frac{|\log_{0,5} x|}{\log_{0,5} x}$ c) $f(x) = \frac{|\log |x||}{\log |x|}$
16. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej miejsca zerowe.
a) $f(x) = \log_{0,5}(1-x^3)$ d) $f(x) = \log_3(x^2+x+1)$
b) $f(x) = \log_{0,1}(x^2-1)$ e) $f(x) = \log_2(x^2-5x+4)$
c) $f(x) = \log_{0,1}|2x+3|$ f) $f(x) = -1 + \log|x^2-1|$
17. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geq g(x)$.
a) $f(x) = \log_2(x+1)$, $g(x) = 1 + \log_{0,5} x$
b) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$, $g(x) = -1 + \log_3(x-3)$
18. Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość równą m ?
a) $f(x) = \log_3(3-x) - \log_3(x+1)$, $m = 0$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x-6) + \log_{\frac{1}{4}}(10-x)$, $m = -1$
16. a) $D = (-\infty; 1)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$
b) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $f(x) = 0$ dla $x = -2$, $x = -1$
d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $x = 0$
e) $D = (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -\sqrt{11}$, $x = \sqrt{11}$
17. a) $x \in [1; \infty)$
b) $x \in (3; 6]$
18. a) $x = 1$
b) $x = 8$



Zadania z kontekstem realistycznym

1. Skala Richtera jest skalą logarytmiczną służącą do określania siły trzęsienia ziemi. Miarą tej siły jest liczba:

$$M = \log \frac{A}{A_0}$$

gdzie A – maksymalna amplituda drgań (w centymetrach) zarejestrowana w odległości 100 km od epicentrum, A_0 – wartość wzorcowa równa 10^{-4} cm (drgania niewyczuwalne przez człowieka). Liczbę M wyraża się w stopniach skali Richtera.

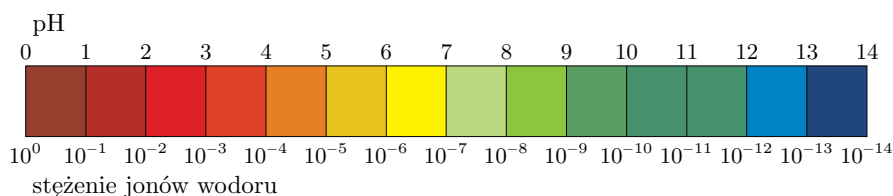
a) Oblicz siłę trzęsienia ziemi o amplitudzie drgań 1000 razy większej od wartości wzorcowej A_0 .

b) 20 kwietnia 2013 r. w południowych Chinach odnotowano trzęsienie ziemi o sile 6,6 stopni w skali Richtera. Oblicz, ile razy większą amplitudę drgań miało to trzęsienie ziemi od amplitudy najsilniejszego ze wstrząsów wtórnych, który miał siłę 5,1 stopnia.



2. Przykładem wykorzystania skali logarytmicznej jest stosowana w chemii skala pH, opisująca odczyn roztworu.

pH roztworu określa się za pomocą wzoru $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, gdzie $[\text{H}^+]$ oznacza stężenie jonów wodoru w roztworze, mierzone w molach na dm^3 . Woda o $\text{pH} = 7$ ma odczyn obojętny. Roztwory o pH mniejszym niż 7 mają odczyn kwasowy, roztwory o pH większym niż 7 – odczyn zasadowy.



Oblicz pH roztworu o podanym stężeniu jonów H^+ . Odpowiedź podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. Czy jest to roztwór zasadowy, czy kwasowy?

- a) Sok pomarańczowy – stężenie jonów H^+ wynosi $6,8 \cdot 10^{-5}$ moli na dm^3 .
 b) Wino – stężenie jonów H^+ wynosi $4 \cdot 10^{-4}$ moli na dm^3 .
 c) Woda morska – stężenie jonów H^+ wynosi $2,2 \cdot 10^{-9}$ moli na dm^3 .



3. W jonizacyjnych czujnikach dymu wykorzystuje się izotop ameryku ^{241}Am o okresie połowicznego rozpadu $T = 432$ lata. Po jakim czasie próbka ameryku straci 5% swojej masy?

$$3. \quad 0,95m = m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{432}}$$

$$0,95 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{432}}$$

$$\log 0,95 = \frac{t}{432} \log 0,5$$

$$t = 432 \cdot \frac{\log 0,95}{\log 0,5} \approx 32$$

Próbka straci 5% masy po około 32 latach.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3 stopnie w skali Richtera
 b) około 31,6 razy

2. a) około 4,2 – kwasowy
 b) około 3,4 – kwasowy
 c) około 8,7 – zasadowy



Rozwiązywanie zadań takich jak poniższe przykłady rozpoczynamy od wyznaczenia dziedziny wskazanej funkcji.

Przykład 1

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2 - 2x + 8)$. Dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana?

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x , dla których spełniony jest warunek:

$$-x^2 - 2x + 8 > 0$$

Rozwiązujemy tę nierówność i otrzymujemy: $x \in (-4; 2)$ – sprawdź.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-4; 2)$.

Zauważmy, że funkcja logarytmiczna o podstawie $a \in (0; 1)$ jest funkcją malejącą. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla największej możliwej wartości wyrażenia $-x^2 - 2x + 8$ dla $x \in (-4; 2)$.

Wyznaczamy największą wartość trójkątnu kwadratowego:

$$y = -x^2 - 2x + 8$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \in (-4; 2)$$

$$y_w = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 9$$

Zatem najmniejsza wartość funkcji f jest równa: $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

Odpowiedź: Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą -2 dla $x = -1$.

→ Zadanie 7, str. 335

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_3 \frac{1}{5}(1-x)(x-7)$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x , dla których:

$$\frac{1}{5}(1-x)(x-7) > 0$$

$$x \in (1; 7)$$

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (1; 7)$.

Liczba x jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $\frac{1}{5}(1-x)(x-7) = 1$.

$$\frac{1}{5}(1-x)(x-7) = 1 \quad / \cdot 5$$

$$-x^2 + 8x - 7 = 5$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Rozwiązaniem ostatniego równania są liczby 2 i 6.

Zatem $f(x) = 0$ dla $x \in \{2, 6\}$.

Odpowiedź: $x = 2$, $x = 6$

→ Zadanie 8, str. 335



W zadaniach 1–10, 16.2 i 17.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt o współrzędnych

- A. $(-1, -4)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{4}, 1)$

Zadanie 2 (0–1)

Wartość funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ jest liczbą całkowitą dla

- A. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = 2$
B. $x = -3$ D. $x = 10$

Zadanie 3 (0–1)

Wartość funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$ jest liczbą wymierną dla

- A. $x = 1$ C. $x = -3$
B. $x = -1$ D. $x = -6$

Zadanie 4 (0–1)

Funkcją rosnącą jest funkcja

- A. $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$ C. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$ D. $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$

Zadanie 5 (0–1)

Która funkcja ma dodatnie miejsce zerowe?

- A. $f(x) = 6^x - 6$ C. $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
B. $g(x) = 4^x + 4$ D. $k(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$

Zadanie 6 (0–1)

Prawdziwa jest nierówność

- A. $3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1,5}$ C. $2^\pi \leq 2^{3,14}$
B. $0,5^{\sqrt{2}} \leq 0,5^{1,5}$ D. $4^\pi \leq 4^{3,141}$

Zadanie 7 (0–1)

Prawdziwa jest nierówność

- A. $\log_2 8 < \log_3 9$ C. $\log_2 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 3$
B. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9$ D. $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_3 3$

Zadanie 8 (0–1)

Punkt $(8, -3)$ należy do wykresu funkcji

- A. $f(x) = \log_6(x - 6) - 6$ C. $f(x) = \log_3(x - 3) - 3$
B. $f(x) = \log_4(x - 4) - 4$ D. $f(x) = \log_2(x - 2) - 2$

5. A. $f(1) = 0$
B. $g(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
C. $h(-1) = 0$
D. $k(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$

7. A. $3 < 2$, nie
B. $-3 < -2$, tak
C. $-1 > -1$, nie
D. $0 > 1$, nie

8. A. $\log_6 2 - 6 \neq -3$
B. $\log_4 4 - 4 = 1 - 4 = -3$
C. $\log_3 5 - 3 \neq -3$
D. $\log_2 6 - 2 \neq -3$

9. $x = -\left(3^{\frac{4}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} = -3$
 $f(x) = 10^6$

10. $\log_3 31,25 = \log_3 \frac{125}{4} =$
 $= \log_3 5^3 - \log_3 2^2 = 3b - a$

11. $x = 5^{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$
 $y = 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4}}$
 $xy = 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5$
 $\frac{x}{y} = 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} 12. \log x^2 y^3 &= \log((xy)^2 \cdot y) = \\ &= \log(xy)^2 + \log y = \\ &= 2 \log xy + \log y \\ \log x^2 y^3 &= \log(x \cdot xy \cdot y^2) = \\ &= \log x + \log xy + \log y^2 = \\ &= \log x + 2 \log y + \log xy \end{aligned}$$

Zadanie 9 (0-1)

Wartość funkcji $f(x) = 10^{-2x}$ dla $x = -(\sqrt[6]{81})^{\frac{3}{2}}$ należy do przedziału

- A.** $(0; 1]$ **C.** $(100; 1000]$
B. $(1; 100]$ **D.** $(10\,000; \infty)$

Zadanie 10 (0-1)

Jeśli $a = \log_3 2$ i $b = \log_3 5$, to $\log_3 31,25$ jest równy

- A.** $3a - 2b$ **B.** $2a - 3b$ **C.** $3b - 2a$ **D.** $2b - 3a$

Zadanie 11 (0-1)

Dane są liczby $x = 25^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{5}$ i $y = 125^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn $x \cdot y$ jest równy 5.	P	F
Iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\sqrt{5}$.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$\log x^2y^3 = 2 \log xy + \log y.$	P	F
$\log x^2y^3 = \log x + 2 \log y + \log xy.$	P	F

Zadanie 13 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = (\sqrt{2})^x - 8$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Miejsce zerowe funkcji f jest równe

- A.** 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8
2. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie
- E.** $(-8, 0)$ **F.** $(-7, 0)$ **G.** $(0, -7)$ **H.** $(0, -8)$

Zadanie 14 (0-3)

Uzupełnij zdanie.

Dziedziną funkcji $f(x) = \log_2(x + 4)$ jest przedział $[-4, \infty)$, jej miejscem zerowym jest -4 , a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -4$.

14. $(-4; \infty)$, $x = -3$, $x = -4$

**Zadanie 15 (0-1)**

Dane są funkcja $f(x) = 3^{-x}$ oraz liczby $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Prawdziwa jest nierówność

A.	$f(x_1) < f(x_2)$,	ponieważ	1.	$x_1 < x_2$ i f jest funkcją rosnącą.
			2.	$x_1 > x_2$ i f jest funkcją malejącą.
B.	$f(x_1) > f(x_2)$,		3.	$x_1 > x_2$ i f jest funkcją rosnącą.

Zadanie 16

Dane są liczby $x = \log_a(\sqrt{3} + 1)$ i $y = \log_a(\sqrt{3} - 1)$.

D Zadanie 16.1 (0-2)

Uzasadnij, że dla $a = 4$ zachodzi równość $x + y = \frac{1}{2}$.

Zadanie 16.2 (0-1)

Równość $x - y = 1$ zachodzi dla

A. $a = 2$

B. $a = 2\sqrt{3}$

C. $a = 2 - \sqrt{3}$

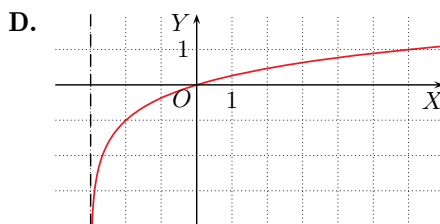
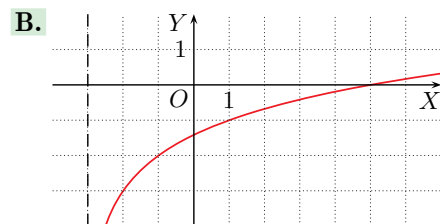
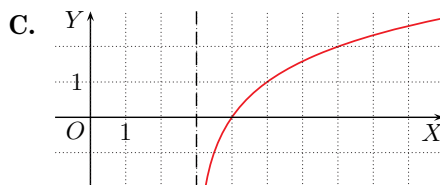
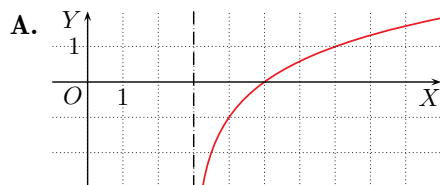
D. $a = 2 + \sqrt{3}$

Zadanie 17

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(x + 3) - 3$.

Zadanie 17.1 (0-1)

Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku

**Zadanie 17.2 (0-1)**

Oblicz $f(1) - f(13)$.

$$\begin{aligned} 16.1. \quad x + y &= \log_4(\sqrt{3} + 1) + \\ &+ \log_4(\sqrt{3} - 1) = \\ &= \log_4(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = \\ &= \log_4(3 - 1) = \log_4 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16.2. \quad x - y &= \log_a \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \\ &= \log_a \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \\ &= \log_a \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \\ &= \log_a(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$17.2. \quad f(1) - f(13) = \log_2 4 - 3 - (\log_2 16 - 3) = 2 - 3 - (4 - 3) = -2$$



18. $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}} =$
 $= 2^{3+2\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} = 2^3 = 8$
 Zatem szukaną liczbą jest 10.

19. $8 = 2^3 = 2^{\frac{n}{4}}$
 $\frac{n}{4} = 3$
 $n = 12$
 Liczba 12 ma 6 naturalnych dzielników.

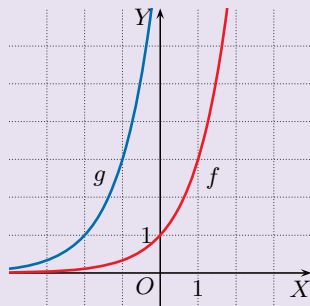
20. $\log_a 8 = \frac{3}{2}$, więc $a^{\frac{3}{2}} = 8$
 $a = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 4$

21. $L = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 2 = 20$
 $P = 5 \cdot 4 = 20 = L$

22. $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3} =$
 $= \log_2 \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \log_2 4 = 2 \in \mathbb{Q}$

23. $-1 = a^{-\frac{1}{2}} - 3$
 $\sqrt{\frac{1}{a}} = 2$
 $a = \frac{1}{4}$
 $f(x) = (\frac{1}{4})^x - 3$
 $f(-5) = (\frac{1}{4})^{-5} - 3 = 1021$

24. $f(x) = 3^x$,
 $g(x) = 9 \cdot 3^x = 3^{x+2}$



Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[-2, 0]$. Zatem $|PQ| = 2$.

25. $a = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5} = 5$
 $b = \log_3 3^{15} - \log_3 27 =$
 $= 15 - 3 = 12$
 $c = 13$
 $Ob = 30$

Zadanie 18 (0-2)

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile dzielników będących liczbami naturalnymi ma liczba n spełniająca równanie $8 = (\sqrt[4]{2})^n$?

Zadanie 20 (0-2)

Punkt $P(8, \frac{3}{2})$ należy do wykresu funkcji $y = \log_a x$. Wyznacz a .

D Zadanie 21 (0-2)

Udowodnij równość $4 \log_9 3 + 9 \log_3 9 = 5 \log_3 81$.

D Zadanie 22 (0-2)

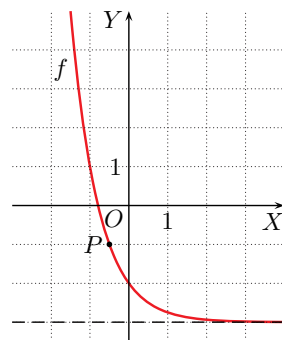
Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

Zadanie 23 (0-3)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Punkt P ma współrzędne $(-\frac{1}{2}, -1)$. Oblicz wartość funkcji f dla $x = -5$.



Zadanie 24 (0-4)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P , a wykres funkcji g w punkcie Q . Oblicz długość odcinka PQ .

Zadanie 25 (0-4)

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5}$ i $b = \log_3 3^{15} - \log_3 27$.

Zadanie 26 (0-4)

Liczba p jest rozwiązaniem równania $x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, a liczba q – rozwiązaniem równania $4^6 x - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$. Oblicz sumę odwrotności kwadratów tych liczb.

Zadanie 27 (0-4)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

26. $p \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$$3p = 1$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$$4^6 q - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$$

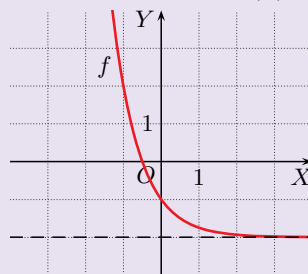
$$2^{12} q = 2^{10} + 2^{10}$$

$$2^{12} q = 2^{11}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 9 + 4 = 13$$

27. $a = \frac{1}{4}$, $b = -2$, $f(x) = (\frac{1}{4})^x - 2$



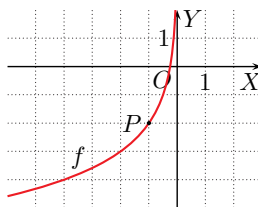
**Zadanie 1 (0-2)**

Wyraż liczbę:

$$\frac{1}{\log_4 3} + \frac{1}{\log_{2\sqrt{2}} 9}$$

za pomocą a , gdzie $a = \log_3 2$.**Zadanie 2 (0-3)**Dane są liczby $a = \log_2 5$ oraz $b = \log_5 3$. Wyraż $\log_4 36$ za pomocą a i b .**Zadanie 3 (0-3)**Liczba m jest rozwiązaniem równania:

$$(\sqrt{7})^{2m} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-m} = 98$$

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = m^x - 4$.**Zadanie 4 (0-3)**Do wykresu funkcji $f(x) = \log_p(-4x)$ należy punkt P (rysunek obok). Wyznacz miejsca zerowe funkcji f oraz funkcji $g(x) = f(x+2)$.**D Zadanie 5 (0-3)**Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt o współrzędnych (p, q) , gdzie $p = \log_{\frac{1}{4}} 256$ oraz $q = \log_{2\sqrt{2}} 64$. Uzasadnij, że liczba naturalna:

$$n = f(-6) - f(-2)$$

jest liczbą doskonałą (czyli jest sumą wszystkich swoich dzielników mniejszych od niej samej).

D Zadanie 6 (0-4)Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$. Udowodnij własność: jeśli $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 + x_2 = 0$, to $f(x_1) + f(x_2) = 0$.**Zadanie 7 (0-4) → Przykład 1, str. 330**Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = \log_3(x+4) + \log_3(2-x)$ w przedziale $[-3; 1]$.**Zadanie 8 (0-3) → Przykład 2, str. 330**Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_9(x^2 + 4x - 5)$.**D Zadanie 9 (0-3)**Uzasadnij, że dla $a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wyrażenie $\log_a b^2 \cdot \log_b \sqrt[3]{a}$ przyjmuje stałą wartość.**Zadanie 10 (0-4)**Dla jakiej wartości parametru a miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2^x - |\log_a 2 + 1|$ jest równe 1?

$$6. x_2 = -x_1$$

$$f(x_2) = \log_2 \frac{x_2+1}{x_2-1} = \log_2 \frac{-x_1+1}{-x_1-1} = \log_2 \frac{x_1-1}{x_1+1} = \log_2 \left(\frac{x_1+1}{x_1-1} \right)^{-1} = -\log_2 \frac{x_1+1}{x_1-1} = -f(x_1), \text{ czyli } f(x_1) + f(x_2) = 0$$

$$7. 2$$

$$8. x = -2 - \sqrt{10}, x = -2 + \sqrt{10}$$

$$9. \log_a b^2 \cdot \log_b \sqrt[3]{a} = 2 \log_a b \cdot \frac{\log_a a^{\frac{1}{3}}}{\log_a b} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ dla } a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

$$10. f(1) = 2 - |\log_a 2 + 1| = 0$$

Jeśli $\log_a 2 + 1 > 0$, to $f(1) = 2 - \log_a 2 - 1 = 0$, czyli $\log_a 2 = 1$, skąd $a = 2$.Jeśli $\log_a 2 + 1 < 0$, to $f(1) = 2 + \log_a 2 + 1 = 0$, czyli $\log_a 2 = -3$, skąd $a^{-3} = 2$,

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Odpowiedzi do zadań

- $$\frac{1}{\log_4 3} + \frac{1}{\log_{2\sqrt{2}} 9} =$$

$$= \log_3 4 + \log_9 2\sqrt{2} =$$

$$= 2 \log_3 2 + \frac{3}{2} \log_9 2 =$$

$$= 2a + \frac{3 \log_3 2}{2 \log_3 9} = 2a + \frac{3a}{4} = 2\frac{3}{4}a$$
- $$\log_4(4 \cdot 9) = \log_4 4 + \log_4 9 =$$

$$= 1 + 2 \log_4 3 = 1 + 2 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} =$$

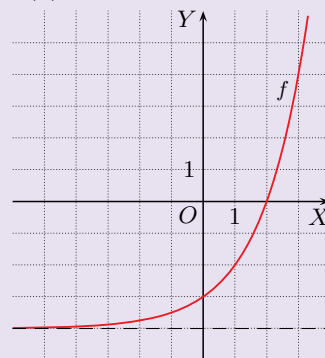
$$= 1 + \log_2 3 = 1 + \frac{\log_5 3}{\log_5 2} =$$

$$= 1 + \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 1 + ab$$
- $$7^m + 7^{m-1} = 56$$

$$\frac{8}{7} \cdot 7^m = 56$$

$$m = 2$$

$$f(x) = 2^x - 4$$



- $$P(-1, -2)$$

$$-2 = \log_p 4, \text{ gdzie } p > 0$$

$$\text{oraz } p \neq 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 0 \text{ dla } x = -\frac{1}{4},$$

$$g(x) = 0 \text{ dla } x = -2\frac{1}{4}$$
- $$p = -4 \text{ oraz } q = 4$$

$$4 = a^{-4}, \text{ gdzie } a > 0$$

$$a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \text{ czyli } f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^x$$

$$n = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{-2} =$$

$$= 2^3 - 2 = 6$$

Dzielniki liczby 6 mniejsze od niej samej: 1, 2, 3. $1 + 2 + 3 = 6$, zatem jest to liczba doskonała.

Indeks

- alfabet grecki 195
- asymptota 118
 - hiperboli 118, 126, 127, 129
 - pionowa 118
 - pozioma 118
- cosinus kąta 183, 198
- cotangens kąta 183
- czworokąt
 - bicentryczny 259
 - wypukły 207
- deltoid 212
- długość
 - łuku okręgu 226
 - okręgu 226
- dwumian 50
- działania na potęgach 290, 291, 294
- dziedzina
 - naturalna funkcji 147
 - wyrażenia wymiernego 131
- funkcja
 - dwóch zmiennych 61
 - homograficzna 125
 - logarytmiczna 309
 - wykładnicza 297
 - wymierna 148
- funkcje równe 148
- funkcje trygonometryczne
 - kąta ostrego 183
 - kąta wypukłego 198
- hiperbola 118, 125
 - równoosiowa 129
- hiperbole sprzężone 129
- hiperboloida 130
- iloczyn pierwiastków równania kwadratowego 24
- iloczyn potęg o tych samych podstawach 290, 291, 294
 - wykładnikach 290, 291, 294
- iloraz potęg o tych samych podstawach 290, 291, 294
 - wykładnikach 290, 291, 294
- jednomian
 - stopnia n 50
 - zerowy 50
- jedynka trygonometryczna 192
- kąt
 - środkowy w okręgu 226, 237
 - wpisany w okrąg 237, 238
- koło 229
- konstrukcja
 - dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg 277
 - pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg 277
 - stycznej do okręgu 236
 - sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg 277
 - wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie 236
- krzywa łańcuchowa 39
- kwadrat 207
- liczba
 - e 299, 310
 - π 226
 - logarytmowana 303
 - pierwiastków równania kwadratowego 10
- logarytm 303
 - dziesiętny 304
 - naturalny 310
- najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 32
- największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 32
- nierówność
 - kwadratowa 14, 27
 - wielomianowa 100
 - wymierna 144

odcinek koła (kołowy) 230
 odcinki w trapezie 214
 odległość punktu od prostej 232
 okrąg 226
 dopisany do trójkąta 252
 okręgi
 przecinające się 227, 233
 rozłączne 227, 233
 rozłączne wewnętrznie 227
 rozłączne zewnętrznie 227, 233
 styczne 227, 233
 styczne wewnętrznie 227, 233
 styczne zewnętrznie 227, 233
 oś symetrii hiperboli 119
 parabola 39
 paraboloida obrotowa 61
 pierścień kołowy 229
 pierwiastek
 dwukrotny wielomianu 92
 jednokrotny wielomianu 92
 k -krotny wielomianu 92
 równania kwadratowego 10
 wielomianu 72, 85, 88
 podstawa logarytmu 303
 podstawowe twierdzenie algebry 67
 pole
 deltoidu 212
 koła 229
 rombu 209
 równoległoboku 208
 trapezu 211
 trójkąta 203, 204, 206
 trójkąta opisanego na okręgu 249
 trójkąta równobocznego 204
 trójkąta wpisanego w okrąg 246
 wycinka koła (kołowego) 229
 postać
 iloczynowa funkcji kwadratowej 12
 kanoniczna funkcji homograficznej 125
 ogólna funkcji homograficznej 125
 potęga potęgi 290, 291, 294
 promień
 okręgu dopisanego do trójkąta 252
 okręgu opisanego na trójkącie
 równobocznym 244
 okręgu wpisanego w trójkąt 250
 promień
 okręgu wpisanego w trójkąt
 równoboczny 248
 wewnętrzny pierścienia kołowego 229
 zewewnętrzny pierścienia kołowego 229
 prostokąt 207
 przekątna kwadratu 177
 punkt
 Fermata 216
 styczności 227, 232
 ramię
 końcowe kąta 197
 początkowe kąta 197
 romb 207, 209
 rozpad promieniotwórczy 321
 rozwiązanie trójkąta 189
 równanie
 dwukwadratowe 17
 hiperboli 129
 kwadratowe 10, 27
 logarytmiczne 325
 wielomianowe 72
 wykładnicze 324
 wymierne 138, 140
 równoległobok 207, 208
 różnica
 n -tych potęg 64
 sześciąt 63
 schemat Hornera 80
 siatka znaków 104
 sieczna
 okręgu 232
 paraboli 21
 sinus kąta 183, 198
 skala logarytmiczna 317
 stopień
 iloczynu wielomianów 58
 jednomianu wielu zmiennych 57
 sumy wielomianów 53
 wielomianu 50
 wielomianu wielu zmiennych 57
 styczna
 do okręgu 232
 do paraboli 21

- suma
 - pierwiastków równania
 - kwadratowego 24
 - sześciątów 63
- szerokość pierścienia kołowego 229
- sześciąt
 - różnicy 62
 - sumy 62
- środek
 - okręgu dopisanego do trójkąta 252
 - okręgu opisanego na trójkącie 244
 - okręgu wpisanego w trójkąt 248
 - symetrii hiperboli 119
- tangens kąta 183, 198
- tożsamość trygonometryczna 192, 194, 195, 199, 200
- trapez 207, 211
 - równoramienny 207
- trójka pitagorejska 180
- trójkąt
 - Heron 206
 - Pascala 66
- trójmian 50
- twierdzenie
 - Bézouta 85
 - cosinusów 270
 - o cięciwach 241
 - o logarytmie iloczynu 306
 - o logarytmie ilorazu 306
 - o logarytmie potęgi 307
 - o odcinkach stycznych 233
 - o pierwiastkach całkowitych wielomianu 88
 - o pierwiastkach wielomianu stopnia n 93
- twierdzenie
 - o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian 84
 - o siecznych 278
 - o stycznej i siecznej 278
 - o zmianie podstawy logarytmu 318
 - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 177
 - Pitagorasa 176, 181
 - Ptolemeusza 256
 - sinusów 265
- warunek
 - opisania okręgu na czworokącie 253
 - wpisania okręgu w czworokąt 257
- wielokąt
 - foremny 261
 - wklęsły 207
 - wypukły 207
- wielomian
 - stopnia n 50
 - wielu zmiennych 55
 - zerowy 50
- współczynnik
 - jednomianu 50
 - kierunkowy prostej 202
 - wielomianu 50
- wycinek koła (kołowy) 229
- wyraz wolny wielomianu 50
- wyrazy wielomianu 50
- wyrażenie wymierne 131
- wysokość trójkąta równobocznego 177
- wzory Viète'a 24
- wzór
 - Cardano 91
 - Heron 206
- wzrost wykładniczy 321

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,430
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,301
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,081
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,636
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,290

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

$$\bullet |a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet |-a| = |a|$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\bullet |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

$$\bullet \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

$$\bullet \sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

$$\bullet \sqrt{a^2} = |a|$$

Dla $a, b \geq 0$:

$$\bullet \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

$$\bullet \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

$$\bullet \sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

$$\bullet \sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$:

$$\bullet a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad \bullet a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\bullet a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\bullet a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\bullet \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\bullet (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarytmy

Dla $a, b > 0$, $a \neq 1$:

$$\bullet \log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Dla $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $p \in \mathbb{R}$:

$$\bullet \log_a a = 1$$

$$\bullet \log_a 1 = 0$$

$$\bullet \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\bullet \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\bullet \log_a b^p = p \log_a b$$

$$\bullet a^{\log_a b} = b$$

Dla $a, b, x > 0$, $a, b \neq 1$:

$$\bullet \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\bullet \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\bullet (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\bullet (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\bullet a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\bullet (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\bullet (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\bullet a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\bullet a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$:

$$\bullet a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Równania

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$

Dla $b \neq 0, d \neq 0$:

- równanie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

jest równoważne równaniu:

$$ad = bc$$

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Dla $a > 0$:

- $|x| = a \Leftrightarrow (x = -a \text{ lub } x = a)$
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ lub } x > a)$

Równanie prostej

- Równanie kierunkowe: $y = ax + b$
- Równanie ogólne: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$

- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

- Współczynnik kierunkowy prostej:

$$y = ax + b$$

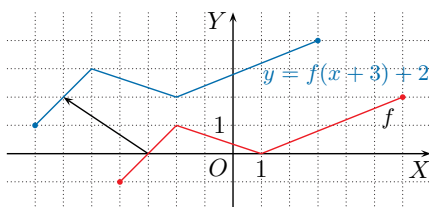
przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

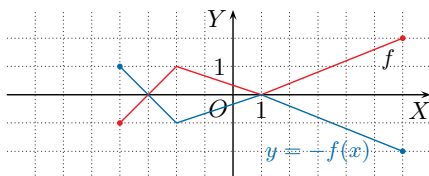
- Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:
 - równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
 - prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Przekształcanie wykresów funkcji

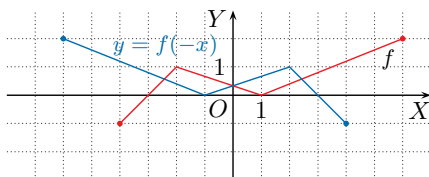
- Wykres funkcji $y = f(x-p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.



- Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .



- Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .



Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego
 $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:
 $\Delta = b^2 - 4ac$
- Pierwiastki równania kwadratowego:
 - jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):
 $x_0 = -\frac{b}{2a}$
 - jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:
 $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
 Współrzędne wierzchołka paraboli:
 $(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Postać kanoniczna:
 $f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$
- Postać iloczynowa:
 - jeśli $\Delta > 0$, to:
 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0$,
 gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,
 - jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$,
 gdzie x_0 jest pierwiastkiem,
 - jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Wzory Viète'a

Jeżeli równanie kwadratowe:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ma pierwiastki x_1 i x_2 , to:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to:

$$r = w(a)$$

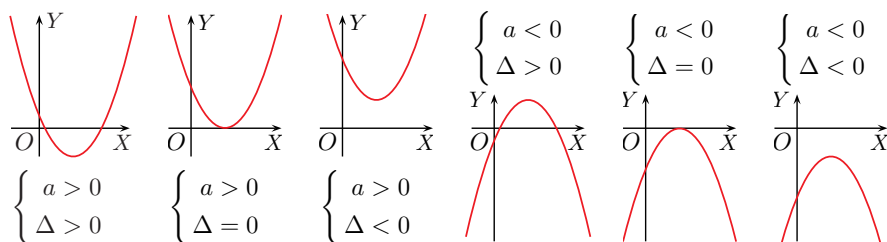
Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian:

$$w(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

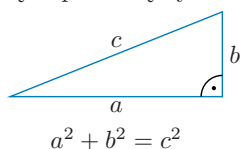
(gdzie $a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Położenie paraboli względem osi OX



Twierdzenie Pitagorasa

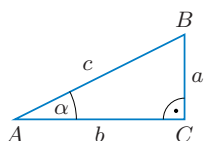
W trójkącie prostokątnym:



Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

W trójkącie prostokątnym:

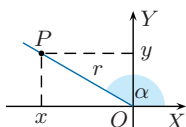
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Dla $P(x, y)$ oraz $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$



Wzory trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$:

- $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq 90^\circ$

Tożsamości trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

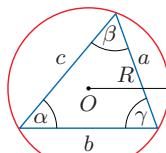
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq 90^\circ$

Wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Twierdzenie sinusów

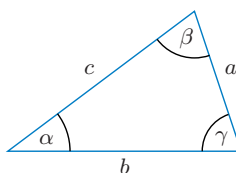
Dla dowolnego trójkąta:



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

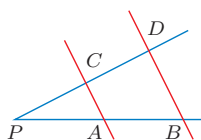
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

$$\bullet \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

$$\bullet \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$



Trójkąty

- Dowolny trójkąt

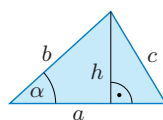
$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = p \cdot r$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



R – promień okręgu opisanego,
 r – promień okręgu wpisanego,
 p – połowa obwodu

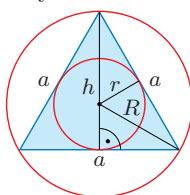
- Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

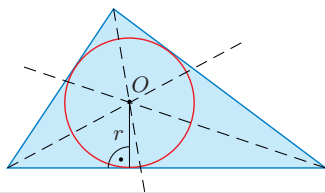
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



Okrąg wpisany w trójkąt

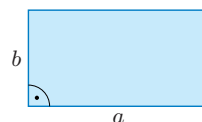
Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Czworokąty

- Prostokąt

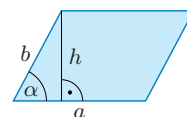
$$P = ab$$



- Równoległobok

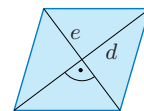
$$P = ah$$

$$P = ab \sin \alpha$$



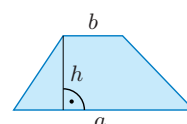
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Koło i okrąg

- Długość okręgu:

$$l = 2\pi r$$

- Pole koła:

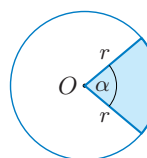
$$P = \pi r^2$$

- Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

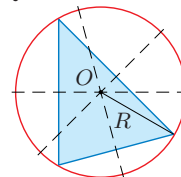
- Długość łuku okręgu:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



Okrąg opisany na trójkącie

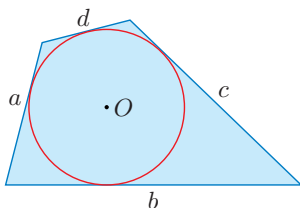
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy:

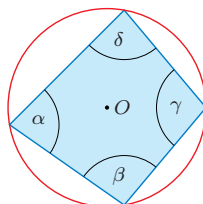
$$a + c = b + d$$



Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy:

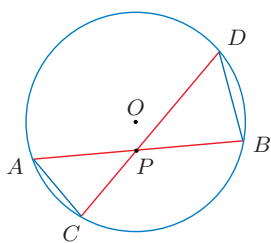
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

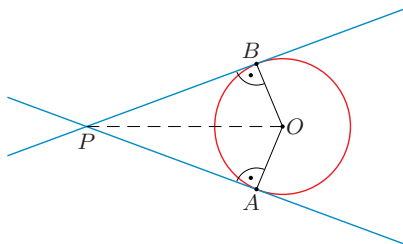
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

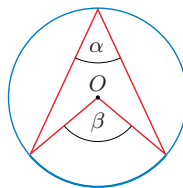
$$|PA| = |PB|$$



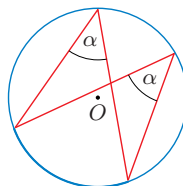
Kąty w okręgu

- Kąt α wpisany w okrąg i kąt środkowy β oparte na tym samym łuku:

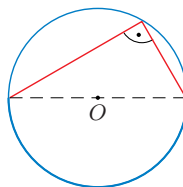
$$\beta = 2\alpha$$



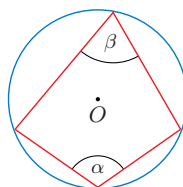
- Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



- Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



- Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku obok, jest równa 180° .



Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Portal dla nauczyciela

Źródło wartościowych i rzetelnie opracowanych pomocy dydaktycznych, ułatwiających przygotowanie i prowadzenie lekcji. Materiały są czytelnie podzielone na kategorie, co pozwala zaoszczędzić czas potrzebny na przygotowanie zajęć.



ponad
200 000
użytkowników



- gotowe zadania i testy
- aplikacja Ondorio do automatycznego sprawdzania testów i kartkówek

Multibook **NOWOŚĆ!**

- podręcznik multimedialny dla nauczyciela
- atrakcyjne materiały cyfrowe do wyświetlania na lekcji

e-booki

- elektroniczna wersja podręcznika ucznia

Dokumentacja nauczyciela

- programy nauczania
- rozkłady materiału
- plany wynikowe
- podręczniki nauczyciela

Sprawdzanie wiedzy

- kartkówki
- klasówki
- sprawdziany



**MOJA
NOWA ERA**

- jedno konto do wszystkich portali Nowej Ery
- łatwa aktualizacja danych w profilu użytkownika z automatycznie modyfikowanym dostępem do zasobów
- szybki dostęp do zasobów szkolnych
- personalizowany panel wiadomości

Pamiętaj o corocznej aktualizacji danych!

moja.nowaera.pl

Generator

testów i sprawdzianów

Przygotuj
sprawdzian
w kilka minut

Wygodna i prosta aplikacja do tworzenia materiałów sprawdzających wiedzę. Zawiera setki zadań, w tym typu maturalnego.

Nowość – filtr pozwalający wyszukać zadania, które **od września 2024 r.** wykraczają poza wymagania uszczuplonej podstawy programowej.



1. Wejdź na stronę generator.nowaera.pl i zaloguj się przez konto Moja Nowa Era. Jeśli jeszcze nie masz konta – załóż je.



2. Pobierz gotową kartkówkę do lekcji, klasówkę do działu, sprawdzian semestralny lub roczny dla 4 grup. Edytuj materiały testujące, aby je dostosować do potrzeb swoich i uczniów.



3. Samodzielnie twórz materiały testujące. Skorzystaj z gotowych zadań lub dodaj własne. Wszystkie gotowe zadania zostały przygotowane w 4 równoważnych wersjach. Możesz utworzyć nawet 8 grup testów. Wszystkie zadania zawierają odpowiedź, punktację i orientacyjny czas potrzebny uczniom na rozwiązanie.



4. Wydrukuj pobrane testy i klucze odpowiedzi. Do kartkówek i krótkich testów wybierz ekonomiczną wersję wydruku (ekowydruk) z mniejszą liczbą stron.

