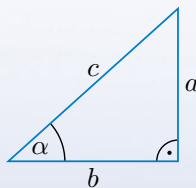


4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin \alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c \sin \alpha$.

Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65° , wykonujemy mnożenie $40 \cdot \sin 65^\circ$. Ponieważ $\sin 65^\circ \approx 0,9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.



Multibook

- Jak duża jest Ziemia
- Geometria hiperboliczna
- Tunel na wyspie Samos
- Zjawisko paralaksy
- Dowód twierdzenia Pitagorasa
- Sekret tabliczki Plimpton 322
- Odległość Ziemi od Słońca i Księżycy

Uczeń:

- podaje twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego,
- stosuje twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości odcinków w trójkątach prostokątnych,
- korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego,
- przeprowadza dowody twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Komentarz

Warto polecić uczniom, aby zapisali równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o przyprostokątnych k i l oraz przeciwprostokątnej m – dzięki temu uczniowie oswoją się z innymi oznaczeniami.

Ćwiczenie 1

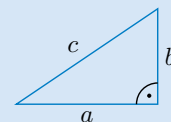
- 50
- 3
- $3\sqrt{2}$
- 4
- 4
- $\frac{\sqrt{17}}{2}$

4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. W poniższym dowodzie korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

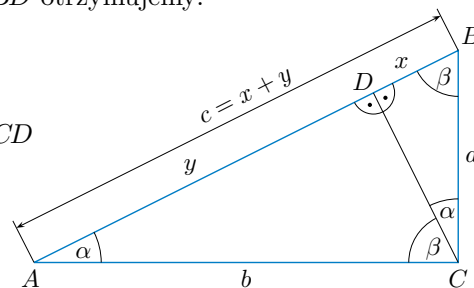
Dowód

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy KKK stwierdzamy, że trójkąty CBD , ACD i ABC są podobne. Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$
$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$
$$b^2 = cy$$



Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

a) $a = 30$, $b = 40$

c) $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = 2\sqrt{2} + 1$

e) $a = b = 2\sqrt{2}$

b) $a = \sqrt{5}$, $b = 2$

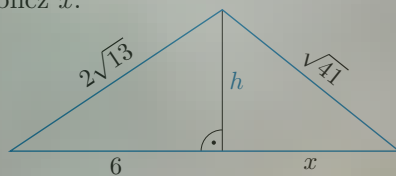
d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

f) $a = \frac{1}{b} = 2$

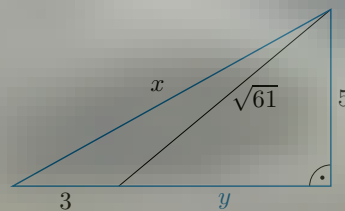
Ćwiczenie 2

Oblicz x .

a)



b)



Ćwiczenie 2

a) $h^2 = (2\sqrt{13})^2 - 6^2$
 $h^2 = (\sqrt{41})^2 - x^2$
 $52 - 36 = 41 - x^2$
 $x = 5$

b) $y^2 = (\sqrt{61})^2 - 5^2 = 36$
 $y = 6$
 $x^2 = (3 + y)^2 + 5^2 = 106$
 $x = \sqrt{106}$

Multibook

- Dowody twierdzenia Pitagorasa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator
testów i sprawdzianów

Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a, b, c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.

Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

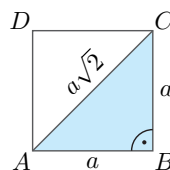
Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest trójkątem prostokątnym.

- a) 3, 4, 5 b) 6, 8, 10 c) 5, 9, 11 d) 2, 4, $2\sqrt{5}$

Szczególne znaczenie ma **trójkąt prostokątny będący połową kwadratu**, czyli trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

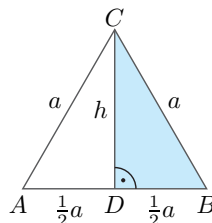


Ćwiczenie 4

- D** a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.
b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2 .

Drugi ważny trójkąt prostokątny to **trójkąt będący połową trójkąta równobocznego**, czyli trójkąt o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ćwiczenie 5

- D** a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.
b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm .

Ćwiczenie 5

- a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

zatem $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- b) $12\sqrt{3} \text{ cm}$

Komentarz

Podczas wspólnej analizy dowodu warto polecić uczniom wykonanie odpowiednich rysunków pomocniczych.

Ćwiczenie 3

- a), b), d) jest
c) nie jest

Ćwiczenie 4

- a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa: $d^2 = a^2 + a^2$, zatem $d = a\sqrt{2}$.
b) $12(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$

Ćwiczenie 6

- a) $2(\sqrt{2} + 1)$
 b) $6(\sqrt{2} + 2)$
 c) $8(\sqrt{2} + 1)$

Ćwiczenie 7

- a) $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$
 b) $2(\sqrt{3} + 3)$
 c) $3(\sqrt{3} + 1)$

Odpowiedzi do zadań

1. Niech a będzie długością przyprostokątnej.

a) Długości boków trójkąta:
 $a, a, a\sqrt{2}$
 $2a + a\sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{2})$
 $a = 3\sqrt{2}$

Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = 9$

b) Zachodzi równanie:
 $a\sqrt{2} = a + 2(\sqrt{2} - 1)$
 $a(\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{2} - 1)$
 $a = 2$

Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = 2$

c) Środkowa jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i $\frac{a}{2}$, zatem:

$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}a = 4\sqrt{5}$$

$$a = 8$$

Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = 32$

2. Jest to trójkąt o kątach ostrych 30° i 60° , stąd:

$$x\sqrt{3} - x = 12 - 4\sqrt{3},$$

czyli $x = 4\sqrt{3}$.

Zatem $P = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

3. a) $h\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, czyli $h = 2\sqrt{2}$

$$x = h = 2\sqrt{2}$$

$$y = x\sqrt{2} = 4$$

b) $y = 4\sqrt{2}$

$$x + 4 = 4\sqrt{3}$$

$$x = 4(\sqrt{3} - 1)$$

5. Długość krótszej przyprostokątnej: $6\sqrt{3}$

Niech $x, y > 0$ będą długościami środkowych. Wówczas:

$$(6\sqrt{3})^2 + 9^2 = x^2$$

$$x = 3\sqrt{21}$$

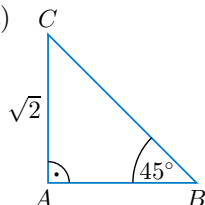
$$(3\sqrt{3})^2 + 18^2 = y^2$$

$$y = 3\sqrt{39}$$

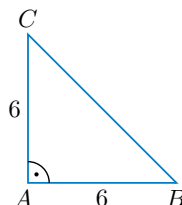
Ćwiczenie 6

Oblicz obwód trójkąta ABC .

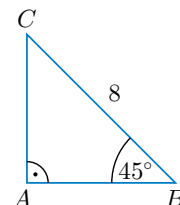
a)



b)



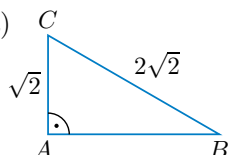
c)



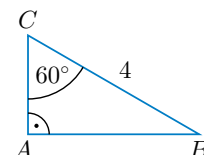
Ćwiczenie 7

Oblicz obwód trójkąta ABC .

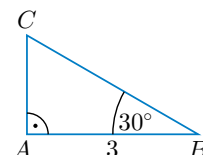
a)



b)



c)

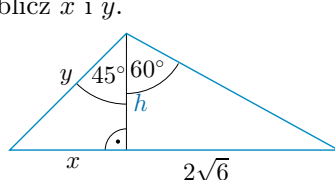


Zadania

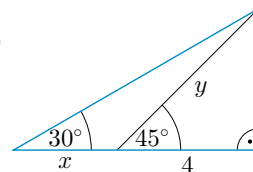
- Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego:
 - obwód jest równy $6(1 + \sqrt{2})$,
 - przeciwprostokątna jest o $2(\sqrt{2} - 1)$ dłuższa od przyprostokątnej,
 - środkowa poprowadzona na przyprostokątną ma długość $4\sqrt{5}$.
- Różnica długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa $12 - 4\sqrt{3}$. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta.

3. Oblicz x i y .

a)

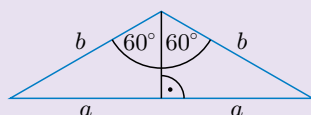


b)



- Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość $8\sqrt{3}$ cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120° . Oblicz obwód tego trójkąta.
 - Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45° , a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

4. a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



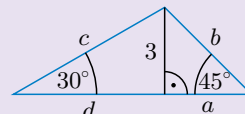
$$2a = 8\sqrt{3} \text{ cm oraz } a = b\frac{\sqrt{3}}{2},$$

zatem:

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}a = 8 \text{ cm}$$

$$Ob = 2a + 2b = 8(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

- b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

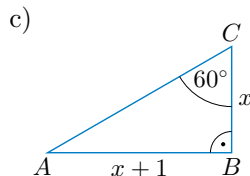
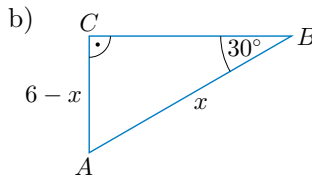
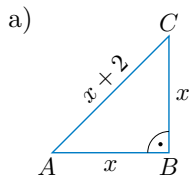


$$a = 3 \text{ cm, } b = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm,}$$

$$c = 2 \cdot 3 = 6 \text{ [cm], } d = c\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$Ob = 3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

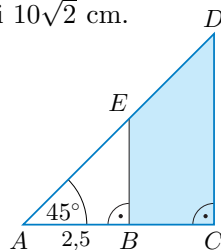
6. Oblicz obwód trójkąta ABC .



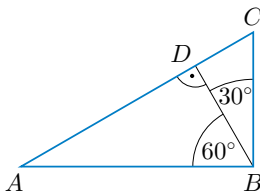
7. a) Oblicz wysokość rombu o kącie ostrym 60° i obwodzie $32\sqrt{3}$ cm.
b) Oblicz obwód rombu o kącie ostrym 45° i wysokości $10\sqrt{2}$ cm.

8. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm. Punkt P jest środkiem odcinka AB . Oblicz wysokości trójkąta APC .

9. Krótsza przekątna trapezu $BCDE$ na rysunku obok ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{41}$. Oblicz obwód trójkąta ACD .

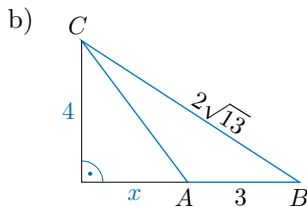
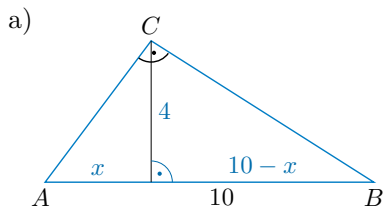


10. Pole trójkąta BCD przedstawionego na rysunku obok jest równe $8\sqrt{3}$. Oblicz obwód trójkąta ABD .



11. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwa razy większy od drugiego kąta, a suma długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $6(2 + \sqrt{3})$. Oblicz pole tego trójkąta.

12. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

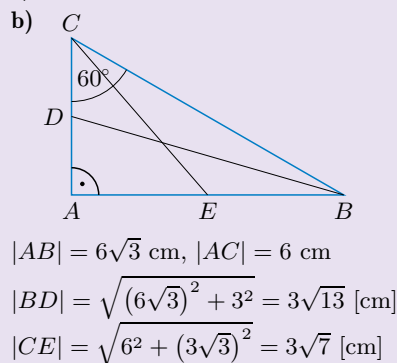


13. a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

- b) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

12. a) $|AC|^2 = x^2 + 16$
 $|BC|^2 = (10 - x)^2 + 16$
 $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$
 $x^2 - 10x + 16 = 0, 0 < x < 5$
 $x = 2$
 $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 10 = 2(5 + 3\sqrt{5})$
 b) $16 + (x + 3)^2 = 52, x > 0$
 $(x + 3)^2 = 36$
 $x + 3 = 6$
 $x = 3$
 $|AC| = 5$
 $Ob = 8 + 2\sqrt{13} = 2(4 + \sqrt{13})$

13. a) $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm



6. a) $x + 2 = x\sqrt{2}$
 $x = 2\sqrt{2} + 2$
 $Ob = 2(3\sqrt{2} + 4)$

- b) $x = 2(6 - x)$
 $x = 4$
 $Ob = 2(\sqrt{3} + 3)$

- c) $x + 1 = x\sqrt{3}$
 $x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$
 $Ob = 2\sqrt{3} + 3$

7. a) 12 cm

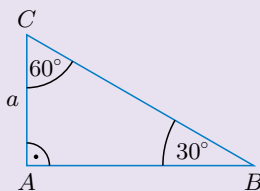
- b) 80 cm

8. $|PC| = 2$ cm
 $|PA| = 2\sqrt{3}$ cm
 $|PQ| = \sqrt{3}$ cm

9. $|BC| = \sqrt{|EC|^2 - |BE|^2} = 2$
 $Ob = 4,5(2 + \sqrt{2})$

10. $|BD| = |CD|\sqrt{3}$
 $8\sqrt{3} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |CD| = \frac{|BD|^2}{2\sqrt{3}}$
 $|BD| = 4\sqrt{3}, |AB| = 8\sqrt{3},$
 $|AD| = 12$
 $Ob = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 12 =$
 $= 12(1 + \sqrt{3})$

11. Jest to trójkąt o kątach ostrych 30° i 60° .



Jeżeli $|AC| = a$, to
 $|CB| = 2a, |AB| = a\sqrt{3}$.

Z warunków zadania:

$$a(\sqrt{3} + 2) = 6(2 + \sqrt{3})$$

$$a = 6$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

14. Niech $x, y > 0$ będą przyprostokątnymi trójkąta.

a) $x + y + 13 = 30$,
czyli $y = 17 - x$
 $x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$
 $x = 5$ lub $x = 12$

Przyprostokątne trójkąta:
5 cm, 12 cm

b) $y = \frac{x+2}{2}$
 $x^2 + \frac{(x+2)^2}{4} = 4$
 $x = 1,2$
 $y = 1,6$
 $Ob = 4,8$ cm

15. $x, x+2$ – długości przekątnych rombu

Długość boku rombu: $\sqrt{41}$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = 41$
 $x = 8$

Długości przekątnych:
8 cm, 10 cm

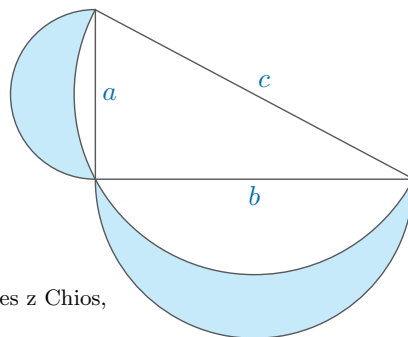
18. $a^2 + b^2 =$
 $= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 =$
 $= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 =$
 $= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 =$
 $= (x^2 + y^2)^2 = c^2$

- a) 7, 24, 25
b) 8, 15, 17
c) 12, 35, 37
d) 20, 21, 29
e) 5, 12, 13
f) 27, 36, 45

14. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
b) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

15. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

- 16.* Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 cm i 15 cm. Boki trójkąta są średnicami półkół wyznaczających księżycy Hipokratesa (rysunek obok). Oblicz sumę pól tych księżyców i porównaj ją z polem trójkąta.



Księżycy Hipokratesa (Hipokrates z Chios, grecki matematyk z V w. p.n.e.)

- 17.* a) Z kwadratu o boku 1 odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny. Oblicz obwód tego ośmiokąta.
b) Z kwadratu odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny o boku 1. Oblicz obwód tego kwadratu.

Liczby naturalne a, b, c będące długościami boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**. Są nimi na przykład:

3, 4, 5, bo $3^2 + 4^2 = 5^2$, również 6, 8, 10 czy 9, 12, 15
5, 12, 13, bo $5^2 + 12^2 = 13^2$, również 10, 24, 26
7, 24, 25, bo $7^2 + 24^2 = 25^2$, również 14, 48, 50

Wszystkie trójki pitagorejskie możemy otrzymać, korzystając ze wzorów:

$a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, $c = x^2 + y^2$, gdzie $x > y$ oraz $x, y \in \mathbb{N}_+$ lub biorąc wielokrotności otrzymanych liczb.

18. Wykaż, że jeśli a, b, c są określone powyższymi wzorami, to $a^2 + b^2 = c^2$.

D Korzystając z tych wzorów, znajdź trójki pitagorejskie dla:

- a) $x = 4$, $y = 3$, c) $x = 6$, $y = 1$, e) $x = 3$, $y = 2$,
b) $x = 4$, $y = 1$, d) $x = 5$, $y = 2$, f) $x = 6$, $y = 3$.

16. Suma pól półksiężyców:

$$P = P_{\Delta} + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= P_{\Delta} + \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2 - c^2) = P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab = 60 \text{ cm}^2$$

Suma pól półksiężyców jest równa polu trójkąta.

17. a) Na rogach odcinamy trójkąty prostokątne równoramienne o ramieniu x , gdzie $0 < x < \frac{1}{2}$. Wtedy długość boku ośmiokąta możemy wyrazić na dwa sposoby:

$$x\sqrt{2} = 1 - 2x, \text{ czyli } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wówczas bok ośmiokąta: $x\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$, a jego obwód: $8(\sqrt{2} - 1)$.

b) Na rogach odcinamy trójkąty prostokątne równoramienne o ramieniu x , gdzie $0 < x < \frac{1}{2}$. Wtedy $x\sqrt{2} = 1$, czyli $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wówczas bok kwadratu: $2x + 1 = \sqrt{2} + 1$, a jego obwód: $4(\sqrt{2} + 1)$.

Dowody twierdzenia Pitagorasa

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa. Autorem pierwszego z przedstawionych poniżej dowodów jest 20. prezydent Stanów Zjednoczonych James Abram Garfield [czyt. dżejms abram garfild] (1831–1881).

Dowód 1

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a + b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC , CDE i ACE :

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

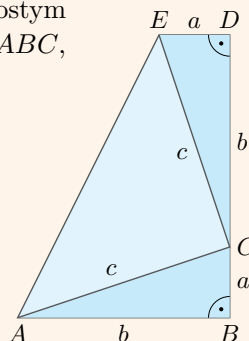
Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a + b)(a + b)$$

i otrzymujemy równość:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



Dowód 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy kwadrat o boku $a + b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek poniżej).

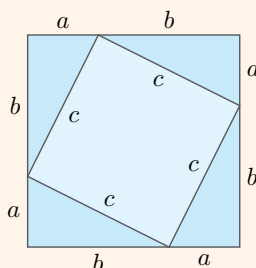
Duży kwadrat ma bok równy $a + b$, więc jego pole:

$$P = (a + b)^2$$

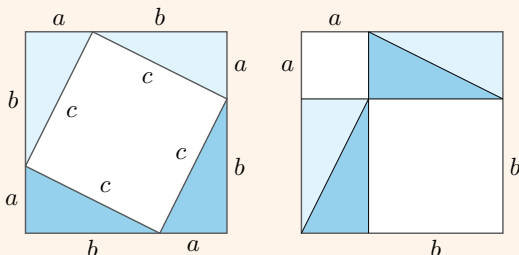
Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b$$

Zatem $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.



- D** 1. Przeprowadź dowód twierdzenia Pitagorasa, korzystając z rysunków przedstawionych obok. W tym celu porównaj pola białych kwadratów.



1. Oba rysunki przedstawiają kwadrat o boku długości $a + b$.

Obliczamy pole tego kwadratu:

z pierwszego rysunku: $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$,

z drugiego rysunku: $a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$.

Zatem $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$, czyli $c^2 = a^2 + b^2$.

2. a) Niech P_T , P_K – pola odpowiednio trójkąta i małego kwadratu.

Pole dużego kwadratu:

$$\begin{aligned} P &= c^2 \\ P &= 4P_T + P_K = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = \\ &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

b) Z założeń zadania:

$c = 8$, czyli $c^2 = a^2 + b^2 = 64$.

Ponadto $a - b = 2$.

$$\begin{cases} (2+b)^2 + b^2 = 64 \\ a = 2+b \end{cases}$$

$$b^2 + 2b - 30 = 0$$

$$\Delta = 124, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{31}$$

$$b = \frac{-2-2\sqrt{31}}{2} < 0$$

$$\text{lub } b = \frac{-2+2\sqrt{31}}{2} = \sqrt{31} - 1$$

Zatem:

$$a = \sqrt{31} + 1, b = \sqrt{31} - 1.$$

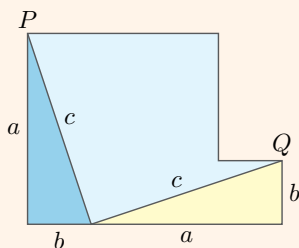
- D** 2. a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, wyznaczając pole dużego kwadratu przedstawionego na rysunku obok.

b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b .

Dowód 3

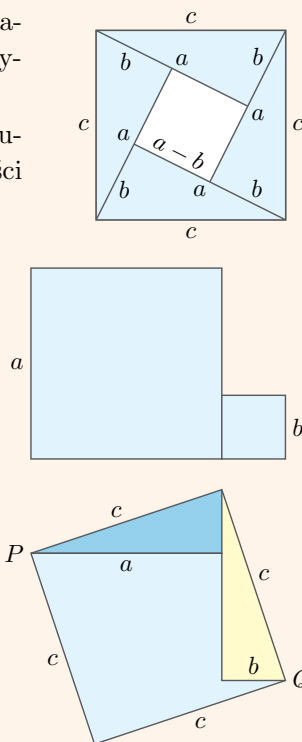
Rozpatrzmy dwa kwadraty o bokach a i b położone jak na rysunku obok. Suma ich pól jest równa $a^2 + b^2$.

Trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c są przystające (rysunek poniżej).



Niebieski trójkąt obracamy wokół punktu P , a żółty – wokół punktu Q , aż otrzymamy kwadrat o boku c .

$$\text{Zatem } a^2 + b^2 = c^2.$$



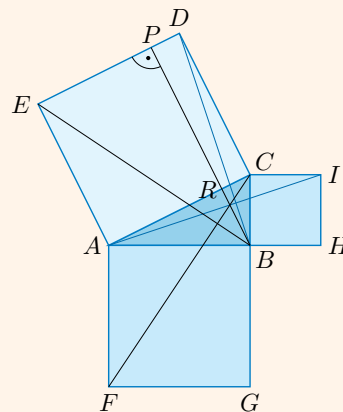
Twierdzenie Pitagorasa można sformułować następująco:

Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych.

Szkic dowodu 4

- Trójkąty FAC i BAE są przystające.
- Pole trójkąta FAC jest równe połowie pola kwadratu $AFGB$.
- Pole trójkąta BAE jest równe połowie pola prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $AFGB$ jest równe polu prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $CBHI$ jest równe polu prostokąta $DCRP$.

Przedstawione powyżej rozumowanie pochodzi z I księgi „Elementów” Euklidesa.



- D** 3. Uzasadnij kolejne etapy szkicu dowodu 4.

3. ■ $|FA| = |BA|$ (boki kwadratu $FABG$), $|AC| = |AE|$ (boki kwadratu $AEDC$),
 $|\sphericalangle FAC| = 90^\circ + |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle BAE|$

Zatem na mocy cechy BKB: $\triangle FAC \equiv \triangle BAE$.

■ Wysokość trójkąta FAC opuszczona z wierzchołka C jest równa długości boku AB .

$$P_{FAC} = \frac{1}{2}|FA| \cdot |AB| = \frac{1}{2}P_{AFGB}$$

■ Wysokość trójkąta BAE opuszczona z wierzchołka B jest równa długości boku EP .

$$P_{BAE} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |EP| = \frac{1}{2}P_{AEPR}$$

■ $\triangle FAC \equiv \triangle BAE$, czyli $P_{FAC} = P_{BAE}$, zatem $P_{AFGB} = P_{AEPR}$.

■ Analogicznie $\triangle ICA \equiv \triangle BCD$, $P_{ICA} = \frac{1}{2}P_{CBHI}$ oraz $P_{BCD} = \frac{1}{2}P_{DCRP}$, czyli $P_{CBHI} = P_{DCRP}$.

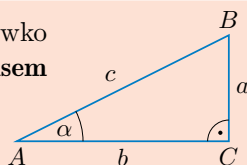
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

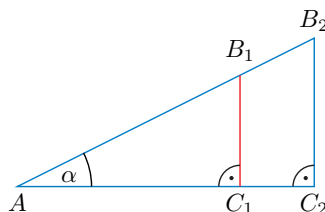
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α .

Definiuje się też stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta. Jest to **cotangens** kąta: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Zwróć uwagę na to, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α . Z podobieństwa trójkątów AB_1C_1 i AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

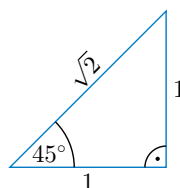
$$\sin \alpha < 1 \text{ i } \cos \alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° (rysunek obok).

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



Uczeń:

- podaje definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym,
- podaje wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60° ,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w bardziej złożonych sytuacjach,
- uzasadnia proste zależności, korzystając z własności funkcji trygonometrycznych.

Komentarz

Warto polecić uczniom, aby zapisali definicje funkcji trygonometrycznych dla trójkąta o przyprostokątnych k i l oraz przeciwprostokątnej m – dzięki temu uczniowie oswoją się z innymi oznaczeniami.

Ćwiczenie 1

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ oraz

$a < c$ i $b < c$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} < \frac{c}{c} = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} < \frac{c}{c} = 1$$

Ćwiczenie 2

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

Komentarz

Po tym ćwiczeniu warto zaproponować uczniom konkurs na odgadywanie miary kąta α . Nauczyciel podaje wartości funkcji trygonometrycznych, a uczniowie podają miary kątów. Wygrywa uczeń, który poda miarę kąta z największą dokładnością.

Ćwiczenie 3

a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13},$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$

b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{15}{17},$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{8}{17},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \operatorname{tg} \beta = \frac{15}{8}$$

c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{3},$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 4

Zauważmy, że $\cos \alpha = |OB_1|,$

$\cos \beta = |OB_2|$ oraz

$|OB_1| > |OB_2|,$

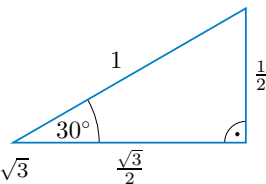
zatem $\cos \alpha > \cos \beta.$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (rysunek obok).

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



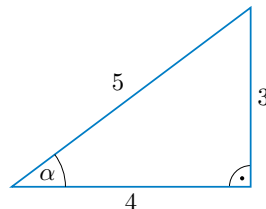
Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° .

Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie na rysunku obok.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$



Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a, b, c .

a) $a = 5, b = 12, c = 13$ b) $a = 8, b = 15, c = 17$ c) $a = \frac{1}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{3}{2}$

Można udowodnić, że:

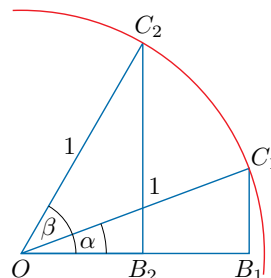
• jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\sin \alpha < \sin \beta$,

• jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos \alpha > \cos \beta$.

Aby uzasadnić pierwszą zależność, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 oraz OB_2C_2 takie, że punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1 (rysunek obok). Wówczas:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{1} = |B_1C_1|, \sin \beta = \frac{|B_2C_2|}{1} = |B_2C_2|$$

oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin \alpha < \sin \beta$.



D Ćwiczenie 4

Uzasadnij drugą z podanych zależności.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

a) 6, 8, 10

c) 1, 4, $\sqrt{17}$

e) $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 5$

b) 7, 24, 25

d) 1, 4, $\sqrt{15}$

f) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$

b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{7}{25}, \cos \alpha = \sin \beta = \frac{24}{25},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}, \operatorname{tg} \beta = \frac{24}{7}$

c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{17}}{17}, \cos \alpha = \sin \beta = \frac{4\sqrt{17}}{17},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}, \operatorname{tg} \beta = 4$

d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{4}, \cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{15}$

e) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = 2$$

f) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}$$

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Czy wiesz, że...

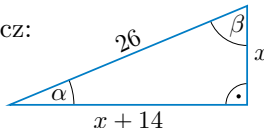
Skróty nazw funkcji trygonometrycznych pochodzą od łacińskich słów:

- *sin* od *sinus* – zagięcie, zatoka;
- *cos* od *complementi sinus* – sinus dopełnienia;
- *tg* od *tangens* – styczna.

3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 i 2 dzieli go na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:

- a) długości przyprostokątnych,
b) wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ oraz $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$.



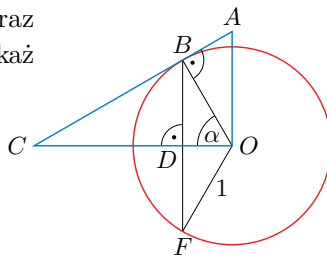
5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 9 i 10. Jedna z przekątnych dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego: a) przekątną, b) ramieniem.

8. Dane są okrąg o środku O i promieniu 1 oraz trójkąt prostokątny AOC (rysunek obok). Wskaż odcinek, którego długość jest równa:

- a) $\sin \alpha$, b) $\cos \alpha$, c) $\operatorname{tg} \alpha$.



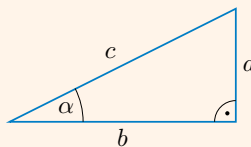
- D 9. Uzasadnij, że na rysunku obok:

- a) $|CO| = \frac{1}{\cos \alpha}$, b) $|AO| = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Czy wiesz, że...

W trójkącie prostokątnym rozpatruje się również funkcje trygonometryczne kąta ostrego:

- secans kąta α : $\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha}$
- cosecans kąta α : $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \alpha}$



7. a) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$, $\cos \alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8}$

- b) $\sin \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2}$

8. a) BD i DF

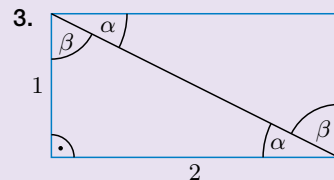
- b) DO

- c) BC

9. a) W trójkącie CBO : $\cos \alpha = \frac{|BO|}{|CO|} = \frac{1}{|CO|}$, czyli $|CO| = \frac{1}{\cos \alpha}$.

- b) Zauważmy, że: $\angle BCO = 90^\circ - \alpha$, zatem $\angle CAO = \alpha$.

- W trójkącie ABO : $\sin \alpha = \frac{|BO|}{|AO|} = \frac{1}{|AO|}$, czyli $|AO| = \frac{1}{\sin \alpha}$.



Przekątna prostokąta ma długość $\sqrt{5}$.

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = 2$$

4. a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$(x+14)^2 + x^2 = 26^2$$

$$x^2 + 14x - 240 = 0$$

$$\Delta = 1156, \sqrt{\Delta} = 34$$

$$x = \frac{-14-34}{2} < 0 \text{ lub}$$

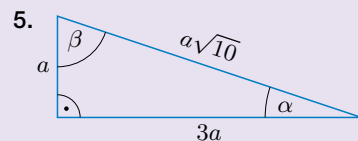
$$x = \frac{-14+34}{2} = 10$$

Zatem długości przyprostokątnych wynoszą: 10, 24.

b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13},$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \beta = 3$$

6. $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{9}{10},$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{19}}{10},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}, \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$$

Uczeń:

- odczytuje z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego lub miarę kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznej,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Komentarz

Rozwiązując trójkąty prostokątne, korzystamy w tym podręczniku z tablic wartości funkcji trygonometrycznych umieszczonych na końcu. Jeżeli jest taka potrzeba, długości boków zaokrąglamy do dwóch miejsc po przecinku. Należy pamiętać, że wyniki mogą się różnić w zależności od tego, czy w obliczeniach korzystamy z funkcji trygonometrycznych, czy z twierdzenia Pitagorasa.

Ćwiczenie 1

h – wysokość budynku

a) $\frac{h}{5} = \operatorname{tg} 58^\circ \approx 1,6003$,
czyli $h \approx 8$ m

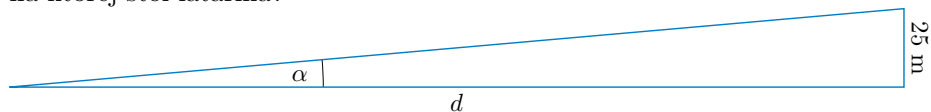
b) $\frac{h}{12} = \operatorname{tg} 39^\circ \approx 0,8098$,
czyli $h \approx 9,72$ m

4.3. Trygonometria – zastosowania

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 385. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

Przykład 1

Wierchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0,0875$.

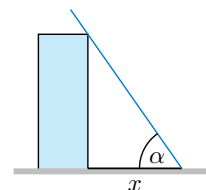
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{25}{0,0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α .

a) $x = 5$ m, $\alpha = 58^\circ$

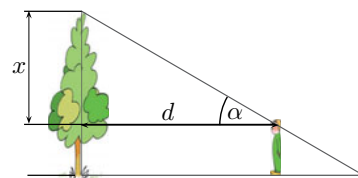
b) $x = 12$ m, $\alpha = 39^\circ$



Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jaka jest wysokość tego drzewa?

$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$



Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0,5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0,5543 \approx 36$ [m].
Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1,5 = 37,5$ [m].

Ćwiczenie 2

Przyjmij, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią, i oblicz wysokość drzewa w przypadku, gdy:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m,

b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Ćwiczenie 2

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w przykładzie 2.

a) $\frac{x}{22} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0,8391$, czyli $x \approx 18,46$ m

Wysokość drzewa: $h \approx 18,46 + 1,5 = 19,96$ [m]

b) $\frac{x}{100} = \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0,2493$, czyli $x \approx 24,93$ m

Wysokość drzewa: $h \approx 24,93 + 1,5 = 26,43$ [m]

Multibook

- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie położenia statku

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.3

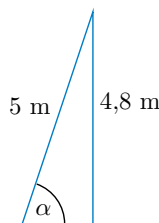
Generator
testów i sprawdzianów

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Przykład 3

Drabinę o długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?

$\sin \alpha = \frac{4,8}{5} = 0,96$. Z tabeli odczytujemy: $\alpha \approx 74^\circ$.



Ćwiczenie 3

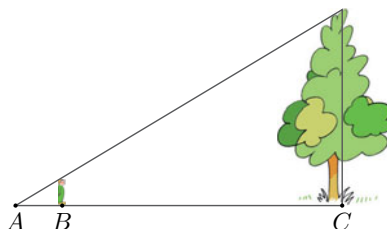
Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

- 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,
- 4,5 m, jeśli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Zadania

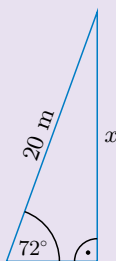
- Naciągnięty sznurek długości 20 m, którego jeden koniec jest przymocowany do ziemi, a na drugim końcu jest przyczepiony latawiec, tworzy z poziomem kąt 70° . Na jakiej wysokości nad ziemią znajduje się latawiec?
- O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53° ?

- Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Wiadomo, że uczeń ma 180 cm wzrostu, $|BC| = 18$ m, a promienie słoneczne padają pod kątem 31° do powierzchni ziemi. Jaka jest wysokość drzewa?



- Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72° . Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?
- Drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą w tym momencie promienie słoneczne?
 - Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt 54° . Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?

4.



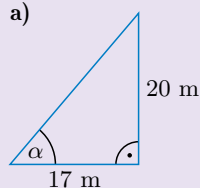
Oznaczmy wysokość, na jaką sięgnie drabina, przez h .

$$\frac{x}{20} = \sin 72^\circ \approx 0,9511$$

czyli $x \approx 19,02$ m.

$$\text{Zatem } h \approx 19,02 + 2,4 = 21,42 \text{ [m].}$$

5. a)

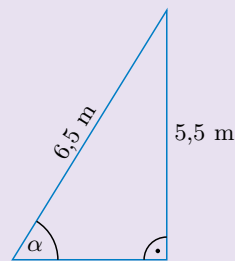


$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{20}{17} \approx 1,1765 \\ \alpha &\approx 50^\circ \end{aligned}$$

b) około 64°

Ćwiczenie 3

a)



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{5,5}{6,5} \approx 0,8462 \\ \alpha &\approx 58^\circ \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{4,5} \approx 0,2222 \\ \alpha &\approx 77^\circ \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

- Oznaczmy wysokość, na jakiej znajduje się latawiec, przez h .



$$\frac{h}{20} = \sin 70^\circ$$

$$h \approx 20 \cdot 0,9397 \approx 18,79 \text{ [m]}$$

- $6 \sin 73^\circ - 6 \sin 53^\circ \approx 0,95 \text{ [m]}$

- Oznaczmy wysokość drzewa przez h .

$$\operatorname{tg} 31^\circ = \frac{1,8}{|AB|}$$

zatem:

$$|AB| \approx \frac{1,8}{0,6009} \approx 3 \text{ [m]}$$

$$|AC| \approx 3 + 18 = 21 \text{ [m]}$$

$$\operatorname{tg} 31^\circ \approx \frac{h}{21}$$

zatem:

$$h \approx 21 \cdot 0,6009 \approx 12,62 \text{ [m]}$$

6. a) około 12,59 m
b) około 8,81 m
7. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{50}{|CA|}$$

zatem:

$$|CA| \approx \frac{50}{0,5774} \approx 86,6$$

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{50}{|AB| + |CA|}$$

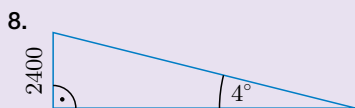
zatem:

$$|AB| + |CA| \approx \frac{50}{0,1763} \approx$$

$$\approx 283,6$$

$$|AB| \approx 283,6 - 86,6 = 197$$

Długość pasa startowego wynosi około 197 m.

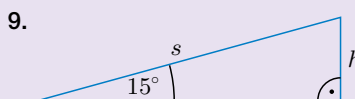


$$\operatorname{tg} 4^\circ = \frac{2400}{x}$$

zatem:

$$x \approx \frac{2400}{0,0699} \approx 34334,8$$

Powinien rozpocząć ten manewr około 34,33 km od początku pasa startowego.

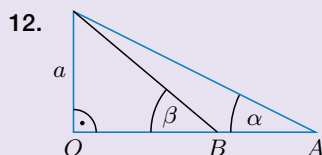


Obliczamy drogę, jaką pokona samolot: $v = \frac{s}{t}$, czyli $s = 80 \cdot 120 = 9600$

Obliczamy wysokość, jaką osiągnie samolot:

$$\frac{h}{s} = \sin 15^\circ \approx 0,2588, \text{ czyli } h \approx 2484,48 \text{ m}$$

10. około 91,53 m



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\frac{a}{|AO|} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ czyli}$$

$$|AO| = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{a}{|BO|} = \operatorname{tg} \beta, \text{ czyli}$$

$$|BO| = \frac{a}{\operatorname{tg} \beta}$$

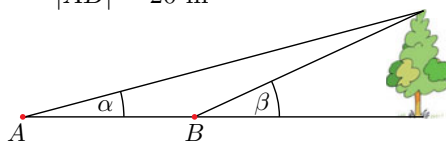
$$|AB| = |AO| - |BO| =$$

$$= a \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right),$$

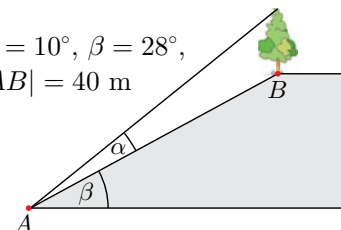
co należało wykazać.

6. Oblicz wysokość drzewa.

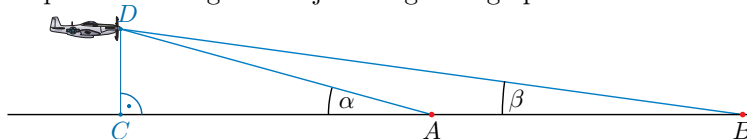
a) $\alpha = 15^\circ, \beta = 25^\circ,$
 $|AB| = 20 \text{ m}$



b) $\alpha = 10^\circ, \beta = 28^\circ,$
 $|AB| = 40 \text{ m}$



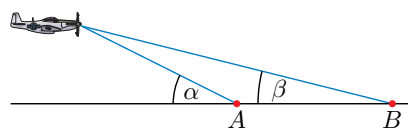
7. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10^\circ$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



8. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4° . Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

9. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaka wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

10. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 8^\circ$. Na jakiej wysokości leci samolot?

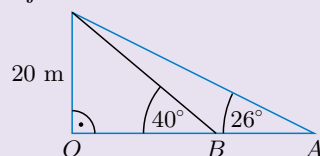


11. a) Komin fabryczny ma wysokość 20 m. Jego wierzchołek widać z punktu A pod kątem 26° , a z punktu B pod kątem 40° . Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Jaka jest odległość między punktami A i B? Rozpatrz dwa przypadki. W obliczeniach pominij grubość komina.

- b) Wierzchołek komina jest widoczny z powierzchni ziemi pod kątem 42° , a po przejściu 50 m w kierunku komina – pod kątem 61° . Oblicz wysokość komina.

- D 12. Obserwator stojący na szczycie latarni morskiej na wysokości a metrów nad poziomem morza zobaczył pod kątem α do poziomu łódź płynącą w kierunku latarni. Po pewnym czasie znów spojrział w tym kierunku i zobaczył tę samą łódź pod kątem β wciąż płynącą w kierunku latarni. Wykaż, że odległość, jaką łódź przeplłynęła między kolejnymi obserwacjami, była równa $a \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right)$.

11. a) Podstawę komina oznaczmy przez O. 1° Punkty A i B znajdują się po tej samej stronie komina.



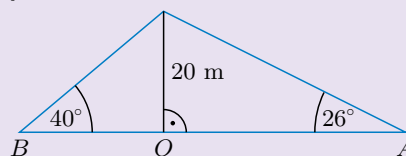
$$\frac{20}{|OB|} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0,8391$$

$$\text{zatem } |OB| \approx 23,84 \text{ m}$$

$$\frac{20}{|OB| + |AB|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0,4877$$

$$\text{czyli } |AB| \approx 17,17 \text{ m}$$

- 2° Punkty A i B znajdują się po przeciwnych stronach komina.



Jak w przypadku 1° mamy $|OB| \approx 23,84 \text{ m}$.

$$\frac{20}{|OA|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0,4877, \text{ czyli } |OA| \approx 41 \text{ m}$$

$$\text{Stąd } |AB| = |OA| + |OB| \approx 64,84 \text{ m}$$

- b) około 89,88 m

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków oraz miar jego trzech kątów.

Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

- długości dowolnych dwóch boków lub
- długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

Przykład 1

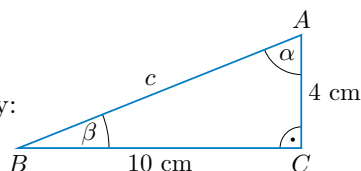
Rozwiąż trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{10} = 0,4$. Z tablic (str. 385) odczytujemy:

$\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.



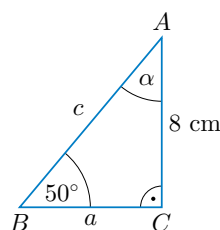
Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta 50° ma długość 8 cm.

$$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{c}{a} = \sin 50^\circ \approx 0,766, \text{ stąd } c \approx 10,44 \text{ cm.}$$

$$\frac{c}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1,1918, \text{ stąd } a \approx 6,71 \text{ cm.}$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, o którym wiadomo, że:

- dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
- długości jego przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
- jego przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37° ,
- długość jego przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

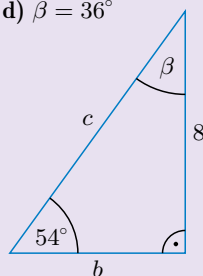
1 minuta (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.

1 sekunda (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.

Na przykład $24,5^\circ = 24^\circ 30'$.

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 60' \\ 1' &= 60'' \\ 1^\circ &= 3600'' \end{aligned}$$

d) $\beta = 36^\circ$



$$c = \frac{8}{\sin 54^\circ} \approx 9,89 \text{ [cm]},$$

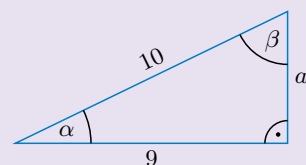
$$b \approx \sqrt{(9,89)^2 - 8^2} = \sqrt{34,01} \approx 5,81 \text{ [cm]}$$

Uczeń:

- rozwiązuje trójkąty prostokątne,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach i prostopadłościanach.

Ćwiczenie 1

a)

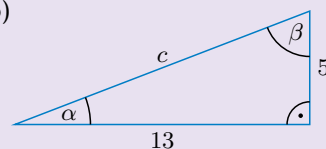


$$a = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19} \text{ [cm]}$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{10}, \text{ czyli } \alpha \approx 26^\circ,$$

$$\beta \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$$

b)

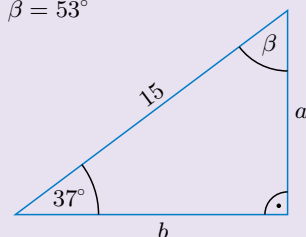


$$c = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{174} \text{ [cm]}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{13} \approx 0,3846, \text{ czyli}$$

$$\alpha \approx 21^\circ, \beta \approx 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$$

c) $\beta = 53^\circ$



$$a = 15 \sin 37^\circ \approx 9,03 \text{ [cm]},$$

$$b = 15 \sin 53^\circ \approx 11,98 \text{ [cm]}$$

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

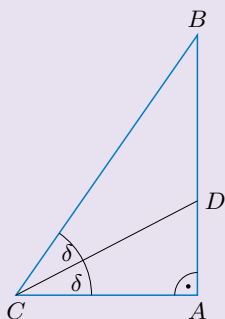
- a) $3^{\circ}36'$
b) $2^{\circ}24'$
c) $9'$
d) $7'12''$
e) $25'12''$

Ćwiczenie 3

$\frac{|AB|}{10} = \sin 55^{\circ} \approx 0,8192$,
czyli $|AB| \approx 8,192$

$\frac{|AC|}{10} = \cos 55^{\circ} \approx 0,5736$,
czyli $|AC| \approx 5,736$

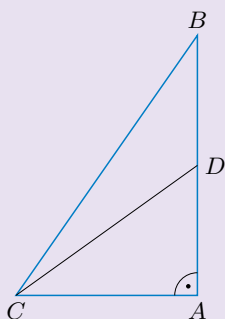
a)



$\delta = 27,5^{\circ}$, $\frac{|AC|}{|CD|} = \cos 27,5^{\circ}$
 $|CD| \approx \frac{5,736}{0,887} = 6,47$

Kąty: $27^{\circ}30'$, 35° , $117^{\circ}30'$

b)



$|CD| = \sqrt{|AC|^2 + \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} \approx 7,05$

$\operatorname{tg} |\angle ADC| = \frac{|AC|}{\frac{1}{2}|AB|} \approx 1,4$

$|\angle ADC| \approx 54^{\circ}$,

czyli $|\angle BDC| \approx 126^{\circ}$

Kąty: 35° , około 126° , około 19°

Przykład 3

Wyraż w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta 45° .

$$\frac{45^{\circ}}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

Ćwiczenie 2

Wyraż w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

- a) 360° , b) 4° , c) 15° , d) 12° , e) 42° .

Przykład 4

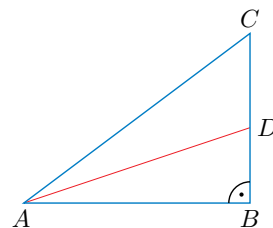
Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC . Wiadomo, że $|AB| = 8$ i $|BC| = 6$. Oblicz miary kątów trójkąta ADC .

$$\operatorname{tg} |\angle BAC| = \frac{6}{8} = 0,75, \text{ czyli } |\angle BAC| \approx 37^{\circ}$$

Zatem: $|\angle CAD| \approx \frac{1}{2} \cdot 37^{\circ} = 18^{\circ}30'$

$$|\angle ACD| \approx 90^{\circ} - 37^{\circ} = 53^{\circ}$$

$$|\angle ADC| \approx 180^{\circ} - 18^{\circ}30' - 53^{\circ} = 108^{\circ}30'$$



Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Wiadomo, że $|\angle BCA| = 55^{\circ}$ oraz $|CB| = 10$. Na boku AB obrano punkt D w taki sposób, że odcinek CD jest:

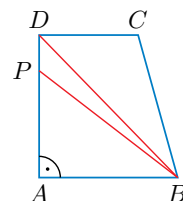
- a) zawarty w dwusiecznej kąta BCA , b) środkową trójkąta ABC .

Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD .

Zadania

1. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43^{\circ}46'25''$, a kąt ABC – miarę $73^{\circ}42'10''$.

- a) Wyznacz miary kątów trójkąta BCD .
b) Wyznacz miary kątów trójkąta ABP w przypadku, gdy punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC .



2. Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.

- a) 4 cm, 6 cm b) 1 cm, 7 cm c) 8 cm, 10 cm

3. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC , o którym wiadomo, że ma kąt prosty przy wierzchołku C oraz:

- a) $|\angle CAB| = 34^{\circ}$, $|CB| = 6$, b) $|\angle CBA| = 66^{\circ}$, $|AB| = 10$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $|\angle BCD| = 106^{\circ}17'50''$

$$|\angle DBC| = 27^{\circ}28'35''$$

$$|\angle BDC| = 46^{\circ}13'35''$$

$$\text{b) } |\angle PAB| = 90^{\circ}$$

$$|\angle ABP| = 36^{\circ}51'5''$$

$$|\angle BPA| = 53^{\circ}8'55''$$

2. a) $2\sqrt{13}$ cm, około: 34° , 56°

$$\text{b) } 5\sqrt{2} \text{ cm, około: } 8^{\circ}, 82^{\circ}$$

$$\text{c) } 2\sqrt{41} \text{ cm, około: } 39^{\circ}, 51^{\circ}$$

3. a) $|\angle ABC| = 56^{\circ}$

$$|AC| = 6 \operatorname{tg} 56^{\circ} \approx 8,9$$

$$|AB| = \frac{6}{\sin 34^{\circ}} \approx 10,73$$

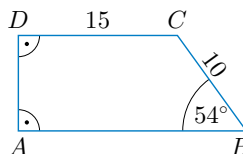
$$\text{b) } |\angle BAC| = 24^{\circ}$$

$$|AC| = 10 \sin 66^{\circ} \approx 9,14$$

$$|BC| = 10 \cos 66^{\circ} \approx 4,07$$

4. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.
 b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.
 c) Wysokość trapezu równoramiennego wynosi 5 cm. Przekątna tego trapezu ma długość 13 cm i tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów tego trapezu.

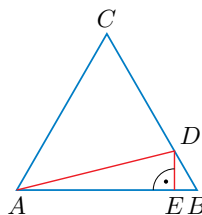
5. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).



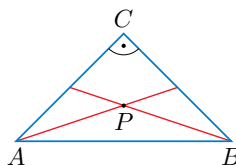
6. a) Przekątne deltoidu mają długości 20 i 30. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.
 b) Obwód równoległoboku jest równy 90, a wysokość opuszczona na bok długości 30 jest równa 10. Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

7. Wysokość rombu poprowadzona do jego boku podzieliła go w stosunku 1 : 3. Wyznacz kąty tego rombu.

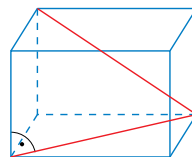
8. W trójkącie równobocznym ABC o boku 12 na boku CB obrano taki punkt D , że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED oraz długości boków trójkąta ABD .



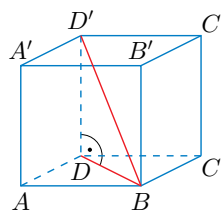
9. Środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC o ramieniu długości 6 cm przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta ABP oraz przybliżone miary jego kątów.



10. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy długości 1 i 3 oraz wysokości 2 (rysunek obok). Oblicz miarę kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.

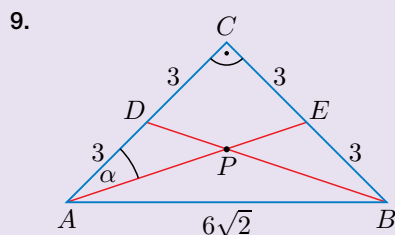


11. Dany jest sześcian o krawędzi a (rysunek obok). Wyznacz obwód i miary kątów ostrych trójkąta:



a) BDD' ,

b) $DD'O$, gdzie O jest środkiem odcinka BD .



$$|AE| = |BD| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{ [cm]},$$

$$|AP| = |BP| = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Zatem boki trójkąta ABP mają długości: $2\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $6\sqrt{2}$ cm.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

zatem $\alpha \approx 26^\circ 30'$ i stąd:

$$|\angle PAB| = |\angle PBA| \approx 45^\circ - 26^\circ 30' = 18^\circ 30'$$

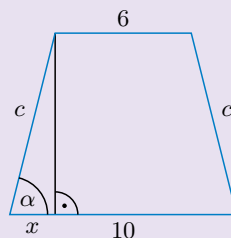
Zatem kąty trójkąta ABP mają miary około: $18^\circ 30'$, $18^\circ 30'$, 143° .

10. około 32°

11. a) $Ob = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})a$, kąty: około 35° , około 55°

- b) $Ob = \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$, kąty: około 35° , około 55°

4. a)



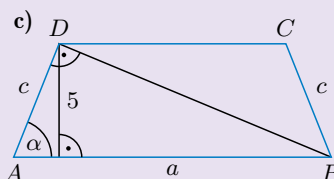
Obliczamy długość ramienia c : $6 + 10 + 2c = 32$, zatem $c = 8$ dm.

$$\cos \alpha = \frac{x}{c} = \frac{2}{8} = 0,25,$$

zatem $\alpha \approx 75^\circ 30'$.

Drugi kąt trapezu ma miarę około: $180^\circ - 75^\circ 30' = 104^\circ 30'$.

- b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{6} \approx 1,333$, $\alpha \approx 53^\circ$



$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5a = \frac{1}{2} \cdot 13c$$

$$\text{czyli } \frac{c}{a} = \frac{5}{13} = \cos \alpha,$$

zatem $\alpha \approx 67^\circ$.

Drugi kąt trapezu ma miarę około: $180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

5. $|AB| \approx 20,88$, $|AD| \approx 8,09$,

$$|\angle DCA| \approx 28^\circ$$

6. a) 90° , około 53° , około $108^\circ 30'$, około $108^\circ 30'$

- b) około 42° , 138°

7. około $75^\circ 30'$, $104^\circ 30'$ lub około 41° , 139°

8. Niech $\alpha = |\angle DAE|$, $|BD| = 3$.

$$\sin |\angle DBE| = \frac{|ED|}{|BD|}$$

$$\text{czyli } |ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$|EB| = 3 \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$$

$$\text{czyli } |AE| = 10\frac{1}{2}.$$

Wówczas:

$$|AD|^2 = (10\frac{1}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 = (3\sqrt{13})^2$$

$$|AD| = 3\sqrt{13}$$

Zatem boki trójkąta ABD mają długości: 12, 3, $3\sqrt{13}$.

Uczeń:

- podaje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta oraz między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i $90^\circ - \alpha$,
- wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich,
- sprawdza, czy istnieje kąt ostry spełniający podane zależności,
- stosuje poznane związki do upraszczania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne,
- uzasadnia związki między funkcjami trygonometrycznymi.

Ćwiczenie 1

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, w której zapisie występują funkcje trygonometryczne, prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są zależności:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Uwaga. Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza $(\sin \alpha)^2$, analogicznie $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ i $\operatorname{tg}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha)^2$.

Tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

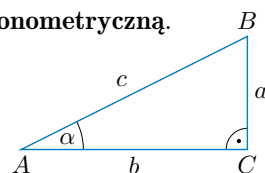
Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich jak na rysunku obok:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{ i } \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.



Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{ oraz } \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z tożsamości podanych wyżej – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.

Wartość $\cos \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie, dlatego wartość $-\frac{4}{5}$ odrzucamy.

Komentarz

Po rozwiązaniu przykładu 1. warto powiedzieć uczniom, że sytuacje, w których dana będzie wartość jednej funkcji trygonometrycznej, a potrzebna będzie wartość innej funkcji trygonometrycznej, będą się zdarzać dość często w różnych działach matematyki. Dlatego sprawne posługiwanie się tożsamościami trygonometrycznymi jest bardzo ważną umiejętnością.

Ćwiczenie 2

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$.

Przykład 2

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

Wartość $\sin \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.}$$

Obliczamy wartość $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 3

a) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = 0,8$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

b) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

c) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

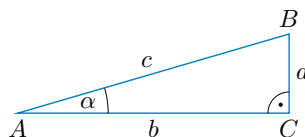
Przykład 3

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Zauważ, że dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$ otrzymamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ oraz $\cos \alpha = \frac{24}{25}$.



Ćwiczenie 4

Narysuj odpowiedni trójkąt prostokątny i oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{20}$ e) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ g) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ h) $\cos \alpha = \frac{5}{6}$

e) Trójkąt o bokach długości: 2, $\sqrt{5}$, 3

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

f) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, 3

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

g) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = 2$$

h) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{11}$, 5, 6

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

Ćwiczenie 2

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 3

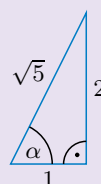
a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$

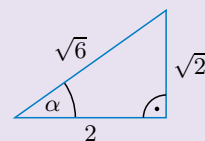
Ćwiczenie 4

a)



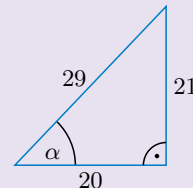
$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b)



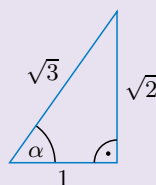
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

c)



$$\sin \alpha = \frac{21}{29}, \cos \alpha = \frac{20}{29}$$

d)



$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Odpowiedzi do zadań

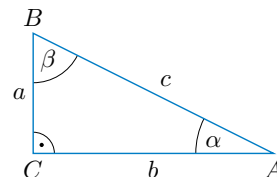
- $\sin \alpha = 0,6$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$
 - $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
 - $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
 - $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$
 - $\sin \alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$
 - $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
 - $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
 - $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$
- $\cos \alpha = \frac{1}{3} \sin \alpha$
 $\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3} \sin \alpha\right)^2 = 1$
 $\frac{10}{9} \sin^2 \alpha = 1$
 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
 - $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$
 $\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
 $\frac{5}{4} \cos^2 \alpha = 1$
 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$
 - nie
 $\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{6} \neq \frac{2\sqrt{6}}{5}$
 - nie
 $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3} \neq \frac{4}{5}$
 - $\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm
 - $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm
- 1
 - $\frac{5}{9}$

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.



Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Ćwiczenie 5

Uzasadnij drugą i trzecią z podanych wyżej tożsamości trygonometrycznych.

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

Zadania

- Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .
 - $\cos \alpha = 0,8$
 - $\cos \alpha = \frac{3}{5}$
 - $\sin \alpha = \frac{1}{4}$
 - $\sin \alpha = 0,4$
 - $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$
 - $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{5}$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$
- Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. Oblicz $\sin \alpha$.
 - Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$. Oblicz $\cos \alpha$.
- Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?
 - $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{5}$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$
- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $c = 10$ cm
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $c = 39$ cm
- Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia.
 - $\frac{6 \sin \alpha - 8 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$
 - $\frac{\sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1}{1 - \sin^2 \alpha}$

Ćwiczenie 5

Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznych:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

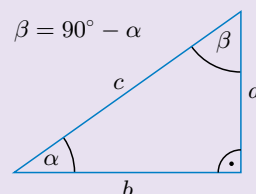
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Ćwiczenie 6

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{3}{10}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}, \sin \alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$



6. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Oblicz obwód tego trójkąta.

- a) $|AC| = 12$, $\sin |\angle BAC| = \frac{5}{13}$ c) $|BC| = \sqrt{3}$, $\sin |\angle ABC| = \frac{\sqrt{6}}{3}$
 b) $|AC| = 4$, $\sin |\angle ABC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $|BC| = 6$, $\cos |\angle BAC| = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

7. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$ c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = m$. Wyznacz wartość wyrażenia.

- a) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$ c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$
 b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)$ d) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

D 9. Uzasadnij podaną obok tożsamość. Korzystając z niej, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α w przypadku, gdy:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$.

10. Kąt α jest kątem ostrym i $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$. Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ b) $\sin \alpha - \cos \alpha$ c) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$

D **11.** Wykaż, że dla kąta ostrego α podana równość jest tożsamością.

- a) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$ d) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 b) $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$ e) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
 c) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$ f) $\frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

Czy wiesz, że...

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

$A \alpha$ alfa	$H \eta$ eta	$N \nu$ ni	$T \tau$ tau
$B \beta$ beta	$\Theta \theta$ teta	$\Xi \xi$ ksi	$\Upsilon \upsilon$ ypsilon
$\Gamma \gamma$ gamma	$I \iota$ jota	$O o$ omikron	$\Phi \phi$ fi
$\Delta \delta$ delta	$K \kappa$ kappa	$\Pi \pi$ pi	$X \chi$ chi
$E \varepsilon$ epsilon	$\Lambda \lambda$ lambda	$P \rho$ ro	$\Psi \psi$ psi
$Z \zeta$ dzeta	$M \mu$ mi	$\Sigma \sigma$ sigma	$\Omega \omega$ omega

6. a) $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{13}$, czyli

$$|BC| = \frac{5}{13} \cdot |AB|$$

$$|AB|^2 = 12^2 + \left(\frac{5}{13} \cdot |AB|\right)^2$$

$$|AB| = 13, |BC| = 5$$

Zatem $Ob = 30$.

b) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, czyli

$$|AB| = 4\sqrt{5}$$

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = 8$$

Zatem $Ob = 4(\sqrt{5} + 3)$.

c) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, czyli

$$|AC| = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot |AB|$$

$$|AB|^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot |AB|\right)^2$$

$$|AB| = 3, |AC| = \sqrt{6}$$

Zatem $Ob = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

d) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, czyli

$$|AC| = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot |AB|$$

$$|AB|^2 = 6^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot |AB|\right)^2$$

$$|AB| = 3\sqrt{13}, |AC| = 9$$

Zatem $Ob = 3(\sqrt{13} + 5)$.

7. a), c), d) tak

b) nie

8. a) m^2

b) $1 - 2m^2$

c) $1 + 2m\sqrt{1 - m^2}$

d) $m + \sqrt{1 - m^2}$

9. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

b) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

10. a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$1,4^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,48$$

b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - 0,96 = 0,04$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -0,2 \quad \text{lub} \quad \sin \alpha - \cos \alpha = 0,2$$

c) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$

$$\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = -0,296 \quad \text{lub} \quad \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = 0,296$$

11. a) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

b) $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

$$c) \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$$

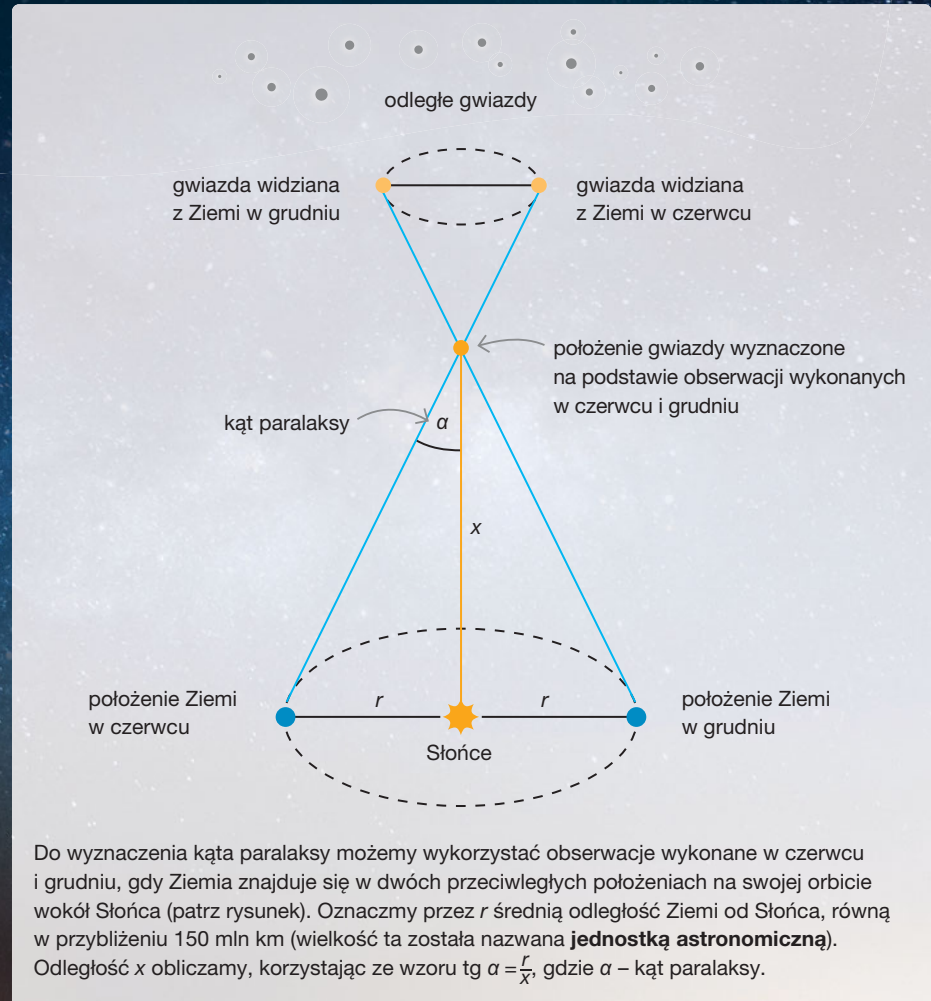
d) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

e) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$f) \frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)} = \frac{\sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (-\sin^2 \alpha)} = 1$$

Trygonometria i astronomia

Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.

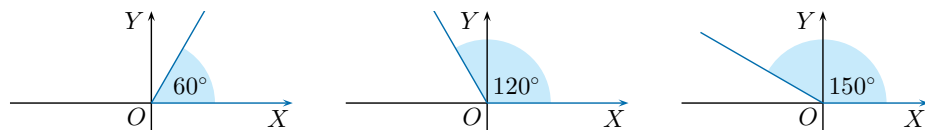


1. Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proximy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0,77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0,77'' \approx 0,00000373$.

$$1. \ x = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{150\,000\,000}{0,00000373} \approx 40\,214\,477\,211\,796 \text{ [km]}$$

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

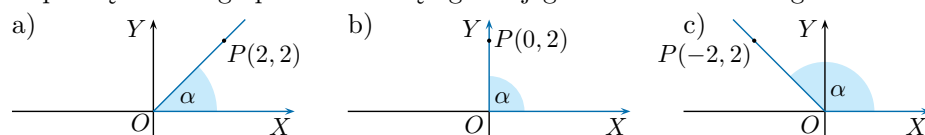
W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w taki sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX . Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do ramienia końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Figurę nazywamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $[0^\circ; 180^\circ]$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$.

Ćwiczenie 1

Do ramienia końcowego kąta należy punkt P . Podaj miarę tego kąta oraz współrzędne innego punktu należącego do jego ramienia końcowego.



Przykład 1

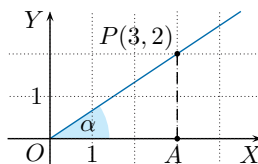
Dany jest trójkąt POA , w którym $P(3, 2)$ i $A(3, 0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

Rozważamy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok). Oznaczmy miarę kąta POA przez α .

Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.



Ćwiczenie 2

Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

- a) $P(3, 4)$, $A(3, 0)$ b) $P(6, 8)$, $A(6, 0)$ c) $P(\sqrt{3}, 1)$, $A(\sqrt{3}, 0)$

Ćwiczenie 2

- a) $|OP| = 5$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
 b) $|OP| = 10$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
 c) $|OP| = 2$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Uczeń:

- określa znak funkcji trygonometrycznej kąta rozwartego,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu; przedstawia ten kąt na rysunku,
- stosuje wzory:
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$,
 $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
 do obliczania wartości wyrażeń,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych,
- zaznacza w układzie współrzędnych kąt, gdy dana jest wartość jego funkcji trygonometrycznej.

Ćwiczenie 1

- a) 45° , np. $(1, 1)$
 b) 90° , np. $(0, 1)$
 c) 135° , np. $(-1, 1)$

Multibook

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)

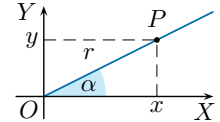
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.6

Generator
testów i sprawdzianów

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

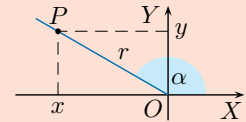


Podane wyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ umieszczonego w układzie współrzędnych.

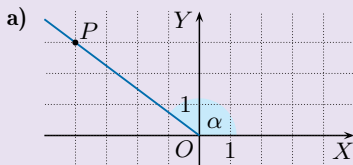
Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$. Wtedy:

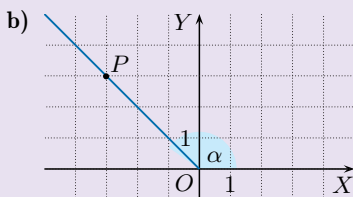
$$\begin{aligned} \blacksquare \sin \alpha &= \frac{y}{r}, & \blacksquare \cos \alpha &= \frac{x}{r}, & \text{gdzie } r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \blacksquare \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} & (x \neq 0, \text{ czyli } \alpha \neq 90^\circ) \end{aligned}$$



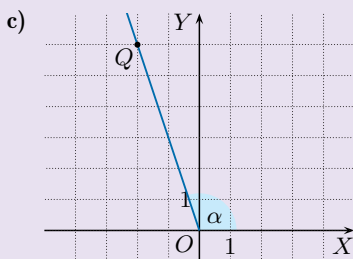
Ćwiczenie 3



$$\begin{aligned} x &= -4, y = 3, r = 5 \\ \sin \alpha &= \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= -3, y = 3, r = 3\sqrt{2} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= -2, y = 6, r = 2\sqrt{10} \\ \sin \alpha &= \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -3 \end{aligned}$$

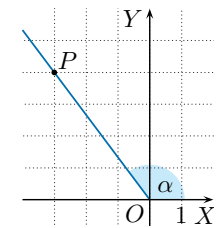
Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Punkt P ma współrzędne $(-3, 4)$, zatem $x = -3$, $y = 4$, czyli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$



Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q . Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

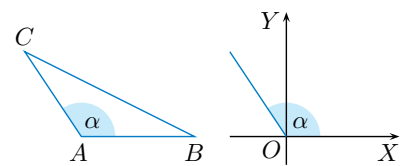
$$\text{a) } P(-4, 3), Q(-8, 6) \quad \text{b) } P(-3, 3), Q(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \quad \text{c) } P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), Q(-2, 6)$$

Ćwiczenie 4

Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α , które są dla niego określone.

$$\text{a) } \alpha = 0^\circ \quad \text{b) } \alpha = 90^\circ \quad \text{c) } \alpha = 180^\circ$$

Jako wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie ABC przyjmujemy wartości funkcji trygonometrycznych przystającego do niego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych.



Komentarz

Należy polecić uczniom, aby wykonali ćwiczenie 4.

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 0^\circ &= 0, \cos 0^\circ = 1, \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \\ \text{b) } \sin 90^\circ &= 1, \cos 90^\circ = 0, \\ \text{c) } \sin 180^\circ &= 0, \cos 180^\circ = -1, \operatorname{tg} 180^\circ = 0 \end{aligned}$$

Komentarz

Jeśli będzie taka potrzeba, można na początku tej lekcji przypomnieć uczniom, jak się oblicza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 90° (wykorzystajmy odpowiednie trójkąty). Można też poprosić uczniów, aby sami wykonali takie ćwiczenie w domu przed tą lekcją.

Twierdzenie

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

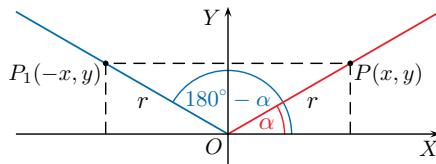
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej).

Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg} \alpha.$$



Przykład 3

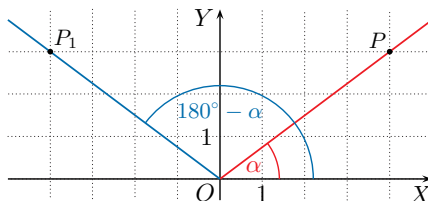
Punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}.$$



Ćwiczenie 5

Narysuj w układzie współrzędnych dwa kąty: α , do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

Twierdzenie

Dla kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ prawdziwe są wzory:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 90^\circ$$

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120° .

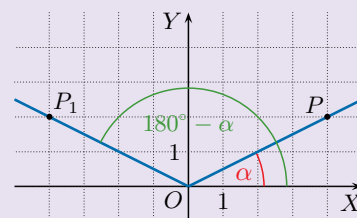
$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 5

$P(4, 2)$, $P_1(-4, 2)$



$$r = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 6

a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$

b) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 7

a) Niech punkt $P(x, y)$ leży na ramieniu końcowym wypukłego kąta α oraz $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

b) Zauważmy, że $x \leq r$ i $y \leq r$.
 Zatem $\sin \alpha = \frac{y}{r} \leq \frac{r}{r} = 1$ oraz
 $\cos \alpha = \frac{x}{r} \leq \frac{r}{r} = 1$.

Ćwiczenie 8

a) $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 9

a) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$

c) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{10}$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin |\angle AOP| = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos |\angle AOP| = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} |\angle AOP| = -4$,
 b) $\sin |\angle AOQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos |\angle AOQ| = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} |\angle AOQ| = -\frac{1}{2}$,
 c) $\sin |\angle AOR| = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,
 $\cos |\angle AOR| = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$,
 $\operatorname{tg} |\angle AOR| = -\frac{5}{4}$,

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

a) $\alpha = 135^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$.

D Ćwiczenie 7

- a) Uzasadnij podane obok twierdzenie.
 b) Uzasadnij, że dla dowolnego kąta wypukłego α zachodzą nierówności:
 $\sin \alpha \leq 1$ i $\cos \alpha \leq 1$

Dla kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ prawdziwe są zależności:

■ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

■ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$

Przykład 5

Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos^2 \alpha = \frac{15}{16}, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ lub } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ cosinus jest ujemny, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\text{Obliczamy wartość } \operatorname{tg} \alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Ćwiczenie 8

Oblicz $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek:

a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

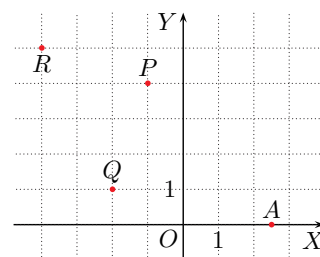
a) $\angle AOP$ b) $\angle AOQ$ c) $\angle AOR$

2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\sin \alpha - \sin \beta$.

a) $P(-2, 4)$, $Q(4, 2)$ b) $P(-9, 3)$, $Q(2, 6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\cos \alpha + \cos \beta$.

a) $P(3, 1)$, $Q(-1, \frac{1}{2})$ b) $P(-2, 4)$, $Q(-4, 2)$ c) $P(-2, \sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$



2. a) $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10} + (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = \frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$

b) $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} + (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

4. Oblicz.

a) $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ b) $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$ c) $4 \cos 150^\circ - 3 \operatorname{tg} 135^\circ$

5. Oblicz.

a) $\frac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3 \operatorname{tg} 150^\circ}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 120^\circ}$ e) $\frac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ}$
 b) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 385), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.

$$\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0,8192$$

$$\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0,9781$$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

7. Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta rozwartego α spełniającego warunek:

a) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. Oblicz $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta rozwartego α spełniającego warunek:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

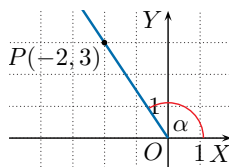
Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, taki że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, więc np. punkt $P(-2, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α . Zaznaczamy ten punkt w układzie współrzędnych i rysujemy ramię końcowe kąta α .

$$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$$\text{stad } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$



Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ spełniający podany warunek oraz oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$

5. a) $\frac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{-3 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = -1$

b) $\frac{-\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -3$

c) $\frac{-\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$

d) $\frac{-\operatorname{tg} 45^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ)} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = 2 - \sqrt{2}$

e) $\frac{-\cos 45^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

f) $\frac{-\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ}{-\cos 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$

4. a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $3 - 2\sqrt{3}$

6. a) $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ \approx 0,9659$

b) $\sin 165^\circ = \sin 15^\circ \approx 0,2588$

c) $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ \approx -0,6428$

d) $\cos 175^\circ = -\cos 5^\circ \approx -0,9962$

e) $\operatorname{tg} 142^\circ = -\operatorname{tg} 38^\circ \approx -0,7813$

f) $\operatorname{tg} 163^\circ = -\operatorname{tg} 17^\circ \approx -0,3057$

7. a) $\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$

b) $\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -2$

8. a) $\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

c) $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

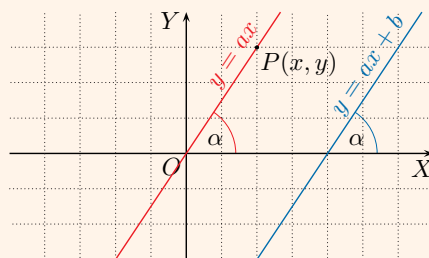
$\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$

b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

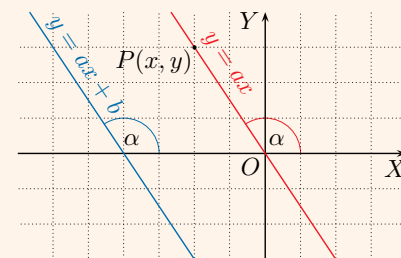
c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

Współczynnik kierunkowy prostej

$a > 0$



$a < 0$



Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ czyli } y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

Zauważ też, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest równy tangensowi kąta α , który ta prosta tworzy z osią OX :

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 30°
b) 60°
c) 135°

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX .
a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y + x = 0$
2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz miarę kąta między prostymi:

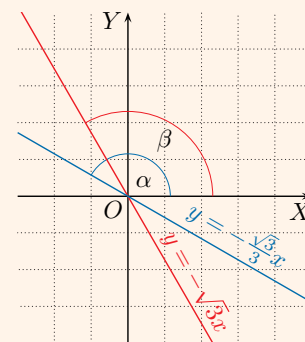
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ i } y = -\sqrt{3}x$$

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150^\circ$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120^\circ$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\alpha - \beta = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



Wyznacz miarę kąta między prostymi:

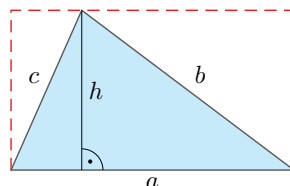
$$\text{a) } y = -\sqrt{3}x \text{ i } y = x, \quad \text{b) } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 \text{ i } y = -x + 2.$$

2. a) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, czyli $\alpha = 120^\circ$
 $\operatorname{tg} \beta = 1$, czyli $\beta = 45^\circ$
 $\alpha - \beta = 75^\circ$
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 30^\circ$
 $\operatorname{tg} \beta = -1$, czyli $\beta = 135^\circ$
 $\beta - \alpha = 105^\circ$
Kąt ostry między prostymi: $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

4.7. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



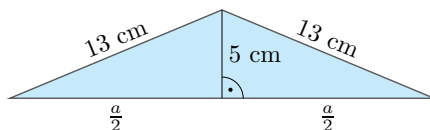
Przykład 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 13 cm, a wysokość opuszczona na podstawę jest równa 5 cm.

Obliczmy połowę długości podstawy trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$\frac{a}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60 \text{ [cm}^2\text{]}.$$



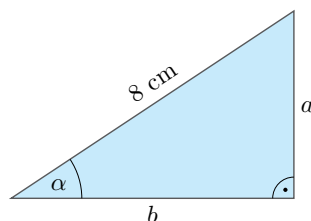
Przykład 2

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8 cm, a $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ (rysunek obok). Oblicz pole tego trójkąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{8} = \frac{3}{4}, \text{ stąd } b = 6 \text{ [cm]}.$$

$$a = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 6 = 6\sqrt{7} \text{ [cm}^2\text{]}.$$



Ćwiczenie 1

Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 28 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,
- cosinus kąta przy jego podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Ćwiczenie 2

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,
- tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,
- jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

Niech a , b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta. Wówczas:

$$\text{a) } \frac{a}{26} = \frac{5}{13}, \text{ czyli } a = 10 \text{ oraz } b = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24.$$

$$P = 120 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} = 2,4, \text{ skąd } a = 2,4b.$$

$$a^2 + b^2 = 6,76b^2 = 26^2, \text{ zatem } b = 10 \text{ oraz } a = 24.$$

$$P = 120 \text{ cm}^2$$

$$\text{c) } \frac{a}{26} + \frac{a}{26} = \sqrt{3}, \text{ czyli } a = 13\sqrt{3} \text{ oraz } b = \sqrt{26^2 - (13\sqrt{3})^2} = 13.$$

$$P = \frac{169}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Uczeń:

- podaje różne wzory na pole trójkąta,
- dobiera odpowiedni wzór i oblicza pole trójkąta,
- wykorzystuje umiejętność wyznaczania pól trójkątów do obliczania pól innych wielokątów,
- dowodzi zależności w trójkątach z zastosowaniem trygonometrii,
- wyprowadza wzór:
$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$
- wykorzystuje poznane wzory na pole trójkąta do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

Niech a oznacza długość podstawy, b – długość ramienia trójkąta. Wówczas $a + 2b = 28$.

$$\text{a) } a = b + 4$$

$$a = 12, b = 8$$

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{7} \text{ [cm]}$$

$$P = 12\sqrt{7} \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$$

$$a = 8, b = 10$$

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21} \text{ [cm]}$$

$$P = 8\sqrt{21} \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 3

Niech a oznacza długość ramienia trójkąta. Wówczas:

a) $P = \frac{1}{2} \cdot a^2 = 4,5 \text{ cm}^2$,
czyli $a = 3 \text{ cm}$

$Ob = 2a + a\sqrt{2} = 3(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$

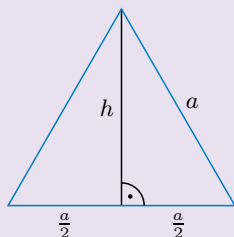
b) $Ob = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2}) = 15(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$

$a = 15 \text{ cm}$

$P = \frac{1}{2} \cdot a^2 = 112,5 \text{ cm}^2$

Ćwiczenie 4

a)



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2, \text{ czyli}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Zatem: $P = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

b) Bok trójkąta jest równy $10\sqrt{3} \text{ cm}$, czyli pole:

$$P = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 5

a) $P = \frac{16}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) $Ob = 36\sqrt{3} \text{ cm}$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu $4,5 \text{ cm}^2$.

b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2}) \text{ cm}$.

Ćwiczenie 4

D a) Udowodnij podany obok wzór.

b) Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3} \text{ cm}$.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 5

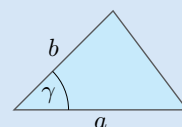
a) Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm .

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$



Dowód

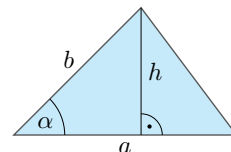
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a .

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin \alpha$, więc $h = b \sin \alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



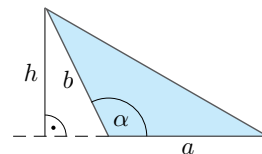
2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a .

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ i otrzymujemy $h = b \sin \alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



D Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Ćwiczenie 6

Dla $\alpha = 90^\circ$ mamy $\sin \alpha = 1$, czyli $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2}ab$.

Przykład 3

Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = 6\sqrt{3}$, $|AC| = 4$ i kącie $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

Kąt BAC jest zawarty między bokami AB i AC , zatem:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC , o którym wiadomo, że:

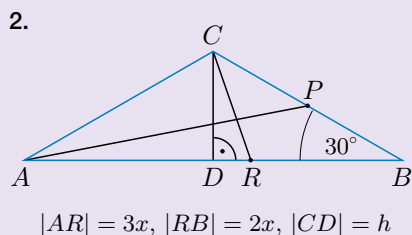
- $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$,
- $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $\sphericalangle CAB = 120^\circ$,
- $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $\sphericalangle ABC = 35^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 100^\circ$,
- $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $\sphericalangle ABC = 15^\circ$.

Ćwiczenie 8

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC , którego pole jest równe 12 cm^2 , bok AB ma długość 4 cm , a kąt CAB ma miarę: a) 30° , b) 45° , c) 120° .

Zadania

- Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = 7 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$ oraz kącie $\sphericalangle CAB = 120^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.
 - Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm , a kąt przy podstawie ma miarę $22^\circ 30'$.
- Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12+8\sqrt{3}) \text{ cm}$. Punkt P jest środkiem boku BC , a punkt R dzieli bok AB w stosunku $3:2$. Oblicz pole trójkąta:
 - APC , b) ARC , c) PRB .
- Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Pole trójkąta jest równe 36 cm^2 . Oblicz obwód tego trójkąta.
 - W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.
- Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi $0,3$. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości jego boków.



Wyznaczamy potrzebne długości:

$$|DB| = 2,5x = h\sqrt{3}, \text{ czyli } |AB| = 2\sqrt{3}h$$

$$\text{oraz } |AC| = |BC| = 2h, \text{ zatem:}$$

$$2\sqrt{3}h + 4h = 12 + 8\sqrt{3}$$

$$h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|AC| = |BC| = 4\sqrt{3} \text{ cm}, |AB| = 12 \text{ cm},$$

$$|AR| = \frac{36}{5} \text{ cm}, |RB| = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

$$\text{a) } P_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \sin(180^\circ - 120^\circ) = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{b) } P_{\triangle ARC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{36}{5} \sin 30^\circ = \frac{36}{5}\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{c) } P_{\triangle PRB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot 2\sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{12}{5}\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ćwiczenie 7

$$\text{a) } P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 15$$

$$\text{b) } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sphericalangle BAC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \\ P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$$

$$\text{d) } \sphericalangle BAC = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \sin 30^\circ = 4,5$$

Ćwiczenie 8

$$\text{a) } 12 \text{ cm}$$

$$\text{b) } 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{c) } 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Odpowiedzi do zadań

$$\text{1. a) } P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(180^\circ - 120^\circ) = \frac{35}{2} \sin 60^\circ = \frac{35\sqrt{3}}{4}$$

b) Kąt między ramionami ma miarę:

$$180^\circ - 2 \cdot 22^\circ 30' = 135^\circ$$

Zatem pole:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \sin(180^\circ - 135^\circ) = 32 \sin 45^\circ = 16\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{3. a) } 6(2\sqrt{2} + \sqrt{10}) \text{ cm}$$

$$\text{b) } 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ,$$

$$Ob = 4(2\sqrt{3} + 3) \text{ cm}$$

4. Niech a oznacza długość podstawy, b – długość ramienia trójkąta. Wówczas:

$$\frac{b}{a+2b} = \frac{3}{10}, \text{ czyli } b = \frac{3}{4}a$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$$

$$P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = 8\sqrt{5},$$

$$\text{czyli } a = 8, b = 6$$

5. $P = 24 \text{ cm}^2$,
 $Ob = 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \text{ cm}$

6. $P_1 = 36(\sqrt{3} - 1)$,
 $P_2 = 36(3 - \sqrt{3})$

7. $|BD| = |BC| =$
 $= \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2} = 5$
 Trójkąt ABC jest trójkątem
 o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, gdzie
 $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$
 i $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$.

Stąd:

$|\sphericalangle CBD| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 i $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDC| = 30^\circ$.

Zauważmy, że

$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC| = 30^\circ$,
 czyli trójkąt ADC jest równo-
 ramienne, zatem $|CD| = 5\sqrt{3}$.

Obwód trójkąta BCD :

$Ob = 5(2 + \sqrt{3})$

Pole trójkąta BCD :

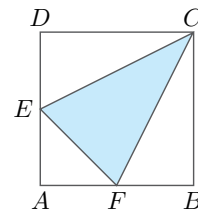
$P = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \sin 120^\circ = \frac{25}{4} \sqrt{3}$

8. $P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$
 Największa wartość $\sin \alpha = 1$
 jest osiągnięta dla kąta
 $\alpha = 90^\circ$.

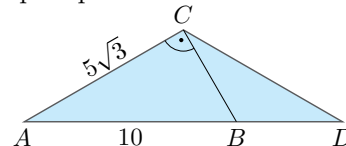
9. $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \sin 120^\circ =$
 $= x^2 \sin 60^\circ = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$

10. a) 6
 b) $4\sqrt{6}$
 c) 12
 d) 36

5. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



6. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45° . Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku $2:1$. Oblicz pola powstałych trójkątów.



7. Na rysunku obok $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD .

8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b . Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?

- D** 9. Dany jest trójkąt o bokach długości a i $2a$ oraz kącie między tymi bokami o mierze 120° . Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości a .

Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze **wzoru Herona** (Heron z Aleksandrii, I w. n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu tego trójkąta.

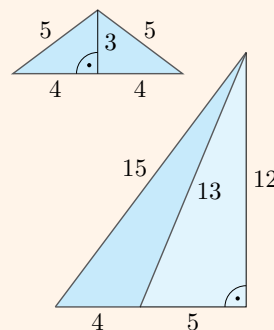
10. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona.

- a) 3, 4, 5 b) 4, 5, 7 c) 5, 5, 6 d) 9, 10, 17

Czy wiesz, że...

Trójkątami Herona nazywamy trójkąty, których długości boków oraz pole wyrażają się liczbami naturalnymi.

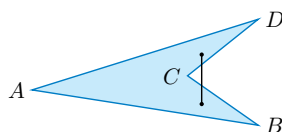
Przykładami trójkątów Herona są trójkąt o bokach 5, 5, 8 (który powstał przez złączenie dwóch trójkątów prostokątnych o bokach 3, 4, 5) oraz trójkąt o bokach 4, 13, 15 (który powstał przez odcięcie z trójkąta prostokątnego o bokach 9, 12, 15 trójkąta prostokątnego o bokach 5, 12, 13).



Czworokąty wypukłe

Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa jego punkty jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.

Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoboki i trapezy.



Czworokąt $ABCD$ nie jest wypukły.

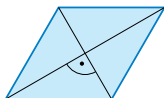


Kwadrat



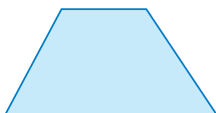
- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Romb



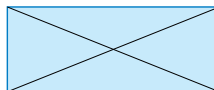
- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez



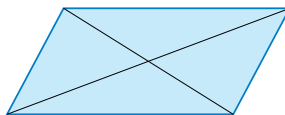
- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180° .

Prostokąt



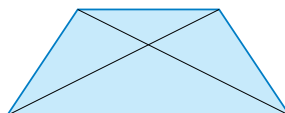
- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Równoległobok



- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je w tym samym stosunku.

Uczeń:

- podaje własności równoległoboku i rombu,
- podaje wzory na pola równoległoboku i rombu,
- oblicza pola równoległoboku i rombu,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w równoległobokach,
- uzasadnia związki miarowe w równoległobokach.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}6h_1 &= 90, \text{ skąd } h_1 = 15 \\10h_2 &= 90, \text{ skąd } h_2 = 9 \\h_1 - h_2 &= 6 \text{ cm}\end{aligned}$$

4.8. Pola czworokątów (1)

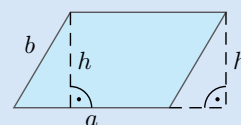
Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Twierdzenie

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Przykład 1

Pole równoległoboku o bokach długości 6 cm i 9 cm jest równe 24 cm². Oblicz wysokości tego równoległoboku.

Oznaczmy przez h_1 wysokość opuszczoną na bok długości 6 cm, a przez h_2 wysokość opuszczoną na bok długości 9 cm.

Wówczas $6h_1 = 24$, czyli $h_1 = 4$ cm, oraz $9h_2 = 24$, czyli $h_2 = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}$ [cm].

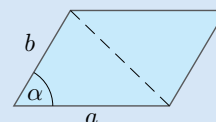
Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a jego pole jest równe 90 cm². Oblicz różnicę wysokości tego równoległoboku.

Twierdzenie

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie α zawartym między nimi wyraża się wzorem:

$$P = ab \sin \alpha$$



Dowód

Przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające (cecha BKB) o bokach a , b i kącie między nimi równym α . Zatem:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha$$

Ćwiczenie 2

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45°, b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 2

a) $P = 8 \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ = 48\sqrt{2}$

b) Kąt ostry α spełnia warunek $180^\circ - \alpha = 5\alpha$, czyli $\alpha = 30^\circ$.

$$P = 8 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 48$$

Ćwiczenie 3

Równoległobok o bokach 6 cm i 12 cm ma pole P . Oblicz miarę kąta ostrego tego równoległoboku.

- a) $P = 36 \text{ cm}^2$ b) $P = 36\sqrt{2} \text{ cm}^2$ c) $P = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Ćwiczenie 4

Oblicz wysokości równoległoboku, którego boki mają długości 6 i $6\sqrt{3}$, a kąt rozwarty ma miarę 120° .

Ćwiczenie 5

- D** a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.
b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30° .

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

D Ćwiczenie 6

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1, d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Przykład 2

Pole rombu jest równe 108 cm^2 , a jedna z jego przekątnych ma długość 18 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej.

Oznaczmy przez d_2 długość drugiej przekątnej. Wówczas $\frac{1}{2} \cdot 18d_2 = 108$, skąd $d_2 = 12 \text{ cm}$.

Przykład 3

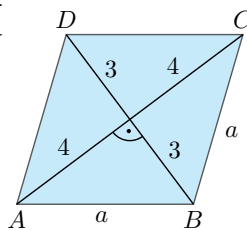
Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?

Długość boku rombu obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5 \text{ cm}$. Obliczamy pole rombu:

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 [\text{cm}^2]$$

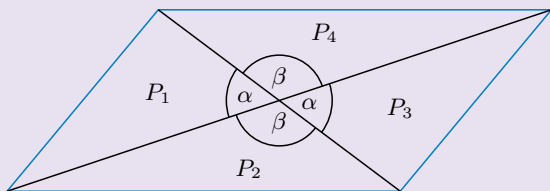
Jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4,8 [\text{cm}]$$



Ćwiczenie 5

- a) Oznaczmy przekątne równoległoboku przez c i d .



$$\beta = 180^\circ - \alpha, \sin \beta = \sin \alpha$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin \alpha = P_3$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin \beta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin \alpha = P_4$$

$$\text{Zatem } P_1 = P_2 = P_3 = P_4.$$

$$\text{b) } P = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 5 \sin 30^\circ \right) = 12,5 [\text{cm}^2]$$

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } P = 6 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 36$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\text{b) } P = 6 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 36\sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\text{c) } P = 6 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 36\sqrt{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Ćwiczenie 4

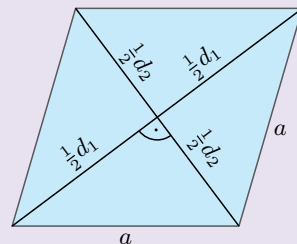
$$P = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ = 36\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 6h_1 = 54, \text{ więc } h_1 = 9$$

$$P = 6\sqrt{3}h_1 = 54, \text{ więc } h_1 = 3\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 6

Korzystamy z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.



$$P = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}d_1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2}d_2 \right) \right) = \frac{d_1d_2}{2}$$

Ćwiczenie 7

a) Krótsza przekątna ma długość 10.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$$

$$h = \frac{P}{a} = \frac{120}{13}$$

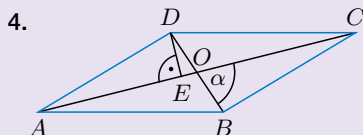
$$\begin{aligned} \text{b) } \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$P = 6 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 24\sqrt{2}$$

$$h = a \sin \alpha = 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 18 cm^2
b) 1 cm, 2 cm
2. a) $P = 12$, $Ob = 4(3 + \sqrt{2})$
b) $P = 16\sqrt{3}$, $Ob = 24$
c) $P = 32$, $Ob = 26$



Z założeń zadania:

$$|DB| = x, |AC| = 3x$$

gdzie $x > 0$, zatem:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} x \cdot 3x \cdot \sin \alpha = \\ &= x^2 \sqrt{2} = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

czyli $x = 4 \text{ cm}$. Wówczas:

$$\frac{|DE|}{2} = \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{zatem: } |DE| = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} |EO| &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \\ &= \frac{2}{3} [\text{cm}] \end{aligned}$$

$$\text{czyli } |AE| = 5\frac{1}{3} \text{ cm.}$$

Obliczamy bok równoległoboku: $|AD|^2 = \left(5\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$.

Stąd $|AD| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$.

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} |AD|^2 + |DO|^2 &= \\ &= (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 36 = |AO|^2 \end{aligned}$$

zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ADO jest prostokątny, czyli:

$$|\sphericalangle ADB| = 90^\circ \text{ oraz}$$

$|\sphericalangle DBC| = 90^\circ$ (jako kąt naprzemianległy z kątem ADB).

Obwód: $8(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}$.

5. a) 0,96
b) 10 cm
6. a) $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$
b) 480 cm^2
7. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 7

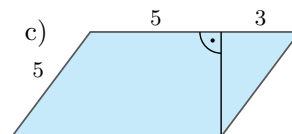
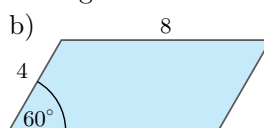
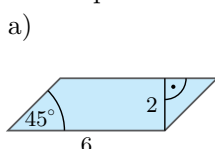
Oblicz pole i wysokość rombu:

- a) o boku 13 i jednej z przekątnych równej 24,
- b) o boku 6 i kącie ostrym α takim, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Zadania

1. a) Oblicz pole równoległoboku, którego kąt rozwarty ma miarę 150° , a boki mają długości 4 cm i 9 cm.
b) Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2 , obwód 24 cm, a sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25. Oblicz wysokości tego równoległoboku.

2. Oblicz pole i obwód równoległoboku.



- D** 3. a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α , to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} pq \sin \alpha$$

b) Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33° . Oblicz pole tego równoległoboku.

- D** 4. Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$ przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej. Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych. Oblicz obwód tego równoległoboku.

5. a) Oblicz sinus kąta ostrego rombu o przekątnych długości 12 cm i 16 cm.
b) Oblicz wysokość rombu o polu równym 120 cm^2 i obwodzie 48 cm.
6. a) W rombie o boku długości 4 cm i kącie ostrym 60° połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano prostokąt. Oblicz jego pole.
b) Jedna z przekątnych rombu o obwodzie 104 cm jest o 28 cm dłuższa od drugiej przekątnej. Oblicz pole tego rombu.
7. W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

3. a) W ćwiczeniu 5a) uzasadniliśmy, że:

$$P_{\triangle AOD} = P_{\triangle BOC} = P_{\triangle DOC} = P_{\triangle AOB}$$

zatem:

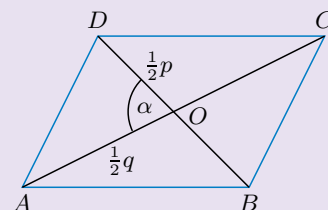
$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2} q \sin \alpha = \frac{1}{2} pq \sin \alpha$$

- b) Kąt ostry między przekątnymi ma miarę:

$$12^\circ + 33^\circ = 45^\circ$$

zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \sin 45^\circ = 15\sqrt{2} [\text{cm}^2]$$



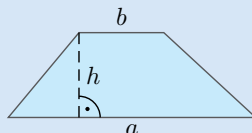
4.9. Pola czworokątów (2)

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Twierdzenie

Pole trapezu o podstawach długości a , b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

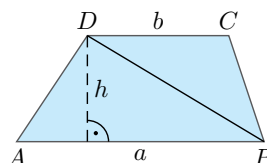


Dowód

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD . Trójkąty te mają taką samą wysokość h , a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$.



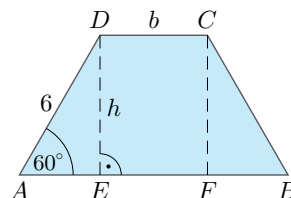
Ćwiczenie 1

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego:

- podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,
- ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Przykład 1

Podstawa AB trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość 10, jego ramię ma długość 6, a kąt ostry ma miarę 60° (rysunek obok). Oblicz pole tego trapezu.



Obliczamy wysokość trapezu: $h = 6 \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Zatem $|AE|^2 = 6^2 - h^2 = 9$, czyli $|AE| = 3$, oraz $b = |AB| - 2|AE| = 4$.

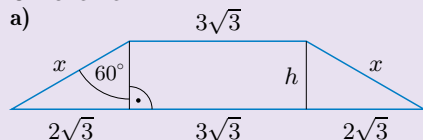
Pole trapezu: $P = \frac{1}{2}(4 + 10) \cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego:

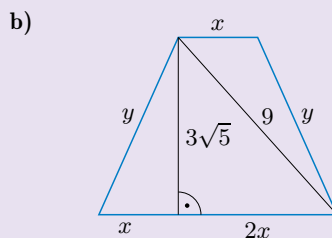
- krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150° ,
- jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 2



$$h = 2, \quad x = 4$$

$$P = 10\sqrt{3}, \quad Ob = 2(5\sqrt{3} + 4)$$



$$2x = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{5})^2} = 6, \text{ czyli } x = 3$$

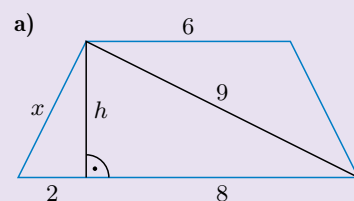
$$y = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{6}$$

$$P = 18\sqrt{5}, \quad Ob = 6(\sqrt{6} + 2)$$

Uczeń:

- podaje własności trapezu równoramiennego,
- oblicza pole trapezu,
- oblicza pole deltoidu,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach,
- uzasadnia związki miarowe w czworokątach.

Ćwiczenie 1

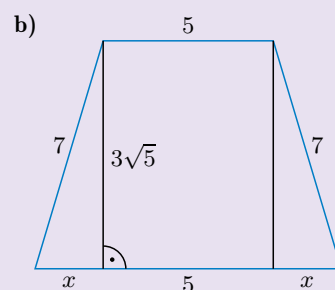


$$h = \sqrt{9^2 - 8^2} = \sqrt{17}$$

$$P = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot \sqrt{17} = 8\sqrt{17}$$

$$x = \sqrt{2^2 + (\sqrt{17})^2} = \sqrt{21}$$

$$Ob = 2(8 + \sqrt{21})$$



$$x = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2} = 2$$

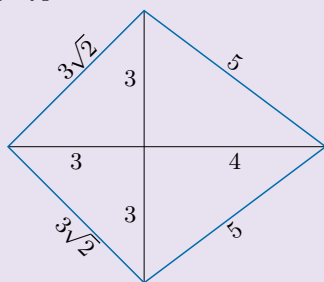
$$P = 21\sqrt{5}, \quad Ob = 28$$

Ćwiczenie 4

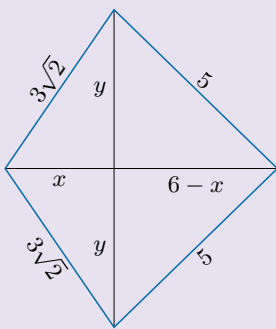
$$\begin{aligned} P &= P_{\triangle ACD} + P_{\triangle ACB} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_2 \cdot d_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_2 \cdot d_1 = \\ &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

I przypadek: $P = 21$



II przypadek: $P = \frac{\sqrt{1751}}{2}$



Przykład 2

Dany jest trapez $ABCD$ o kątach ostrych α i β , krótszej podstawie długości 4 i wysokości równej 6 (rysunek obok). Pole tego trapezu jest równe 42, a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$. Oblicz $\operatorname{tg} \beta$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DE|}{|AE|}, \text{ stąd } |AE| = \frac{6}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4.$$

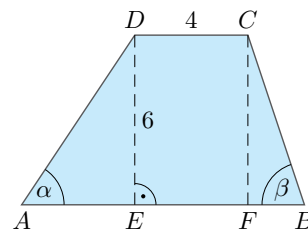
Pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h = \frac{1}{2}(|AB| + 4) \cdot 6 = 42$$

Zatem $|AB| + 4 = 14$, czyli $|AB| = 10$. Obliczamy długość odcinka FB :

$$|FB| = |AB| - (|AE| + |CD|) = 10 - (4 + 4) = 2$$

$$\text{Stąd } \operatorname{tg} \beta = \frac{|CF|}{|FB|} = \frac{6}{2} = 3.$$



Ćwiczenie 3

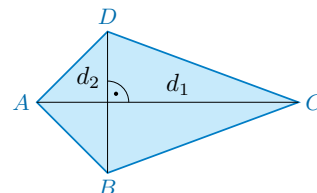
Dany jest trapez o wysokości 4 cm, krótszej podstawie $5\sqrt{5}$ cm oraz kątach ostrych α i β takich, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \beta = \frac{4\sqrt{21}}{21}$. Oblicz pole tego trapezu.

Definicja

Deltoid to czworokąt, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym i jedna z nich dzieli drugą na połowy.

D Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2 . Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



Przykład 3

Pole deltoidu jest równe 24 cm^2 , a jedna z jego przekątnych jest trzy razy dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

Długość krótszej przekątnej oznaczmy przez x . Druga przekątna ma wtedy długość $3x$. Wyznaczamy pole deltoidu:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 3x = 24$$

Stąd $x^2 = 16$. Zatem przekątne mają długości $x = 4 \text{ cm}$ oraz $3x = 12 \text{ cm}$.

Ćwiczenie 5

Boki deltoidu mają długości $3\sqrt{2}$ i 5, a krótsza przekątna ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.

Ćwiczenie 3

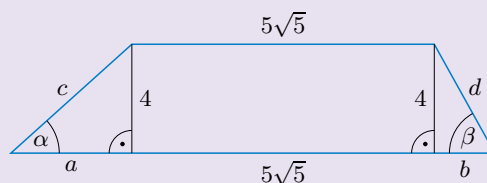
$\sin \alpha = \frac{4}{c} = \frac{2}{3}$, zatem $c = 6$ oraz

$$a = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{d} = \frac{4\sqrt{21}}{21}, \text{ zatem } d = \sqrt{21}$$

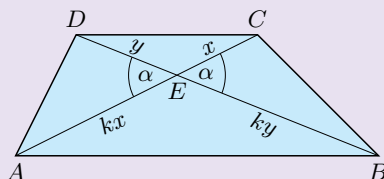
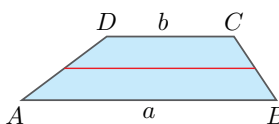
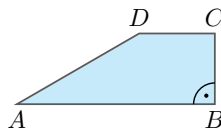
$$\text{oraz } b = \sqrt{21 - 4^2} = \sqrt{5}$$

$$P = \frac{5\sqrt{5} + (2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + \sqrt{5})}{2} \cdot 4 = 26\sqrt{5} [\text{cm}^2]$$



Zadania

- W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.
- W trapezie prostokątnym na rysunku obok sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm . Oblicz pole tego trapezu.
- Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2 . Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.
- Działkę budowlaną w kształcie trapezu o kolejnych bokach długości 50 m , 25 m , 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości $1,5 \text{ m}$? Oblicz pola tych działek.
- Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E . Wykaż, że trójkąty AED i BEC mają równe pola.
- Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.
- Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm , krótsza podstawa ma $7,5 \text{ cm}$, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm . Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.
- Ramiona trapezu mają długości 7 cm i 9 cm , a suma długości jego podstaw wynosi 16 cm . Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie części, których stosunek pól jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole tego trapezu.
- Przekątne trapezu równoramiennego o polu S zawierają się w dwusiecznych jego kątów ostrych. Jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz miary kątów i długości boków tego trapezu.
- Działkę budowlaną w kształcie trapezu równoramiennego o bokach długości 50 m , 20 m , 50 m , 80 m podzielono na dwie części o równych polach powierzchni płotem równoległym do podstaw trapezu. Jaka jest długość płotu rozdzielającego te części?



- Zauważmy, że $|\angle EAB| = |\angle ECD|$ oraz $|\angle EBA| = |\angle EDC|$ (kąty naprzemianległe) oraz $|\angle AEB| = |\angle DEC|$ (kąty wierzchołkowe). Na mocy cechy KKK $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, ich skalę podobieństwa oznaczmy przez k .
 $|\angle AED| = |\angle BEC| = \alpha$ (kąty wierzchołkowe)
Wówczas $P_{AED} = \frac{1}{2}kx \cdot y \cdot \sin \alpha$ oraz $P_{BCE} = \frac{1}{2}ky \cdot x \cdot \sin \alpha$.
Zatem $P_{AED} = P_{BCE}$.

Odpowiedzi do zadań

- $6(6 + \sqrt{2}) \text{ cm}$
- $\frac{320}{9}\sqrt{5} \text{ cm}^2$
- $0,8$
- $|AK| = 15$, $|AD| = 25$
 $\cos \alpha = \frac{|AK|}{|AD|} = \frac{3}{5}$
 $\cos \alpha = \frac{|AG|}{x} = \frac{3}{5}$, zatem
 $|AG| = \frac{3}{5}x$, $|EF| = 50 - \frac{6}{5}x$
Porównujemy obwody trapezów:
 $50 - 2x + 20 + |EF| = 50 + 2x + |EF|$
 $x = 5$, $|AG| = 3$, $|GE| = 4$,
 $|EF| = 50 - 2 \cdot 3 = 44$
Długość potrzebnej siatki:
 $120 + 44 - 2 \cdot 1,5 = 161 \text{ [m]}$,
 $P_1 = \frac{50+44}{2} \cdot 4 = 188 \text{ [m}^2\text{]}$,
 $\triangle AKD \sim \triangle AGE$, skala podobieństwa jest równa $5:1$,
więc $|DK| = 20$, stąd:
 $P_2 = \frac{50+20}{2} \cdot 20 - 188 = 512 \text{ m}^2$
- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Po „usunięciu” prostokąta $KLCD$ otrzymujemy trójkąt, którego bok A_1B_1 ma długość $a - b$.

Trójkąt $E_1F_1C_1$ jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ (cecha BKB) w skali $1:2$, zatem:
 $|E_1F_1| = \frac{1}{2}|A_1B_1| = \frac{1}{2}(a - b)$
Stąd:
 $|EF| = \frac{1}{2}(a - b) + b = \frac{a+b}{2}$
- $a = 12,5 \text{ cm}$, $P = 24 \text{ cm}^2$
- $24\sqrt{5} \text{ cm}^2$
- kąty: 60° , 120° ,
ramiona: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$,
podstawy: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$, $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$
- $10\sqrt{34} \approx 58,3 \text{ [m]}$

Odcinki w trapezie

Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b . Odcinek łączący ramiona tego trapezu równoległy do jego podstaw oraz przechodzący przez punkt przecięcia jego przekątnych ma długość równą średniej harmonicznej długości podstaw:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Szkic dowodu

Trójkąty ABP i CDP są podobne, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$.

Z podobieństwa trójkątów GDP i ADB :

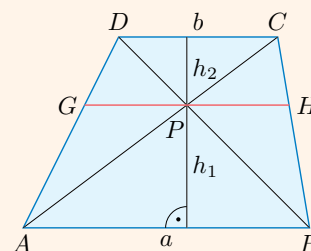
$$\frac{a}{|GP|} = \frac{h_1+h_2}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

Stąd $|GP| = \frac{ab}{a+b}$.

$\triangle PHC \sim \triangle ABC$, zatem analogicznie:

$$\frac{a}{|PH|} = \frac{a+b}{b}, \text{ czyli } |PH| = \frac{ab}{a+b}.$$

Stąd $|GH| = |GP| + |PCH| = \frac{2ab}{a+b}$.



Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b . Odcinek równoległy do podstaw tego trapezu dzielący go na dwa trapezy o równych polach ma długość równą średniej kwadratowej długości podstaw trapezu: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Szkic dowodu

Pole trapezu $ABCD$: $P = \frac{a+b}{2}(h_1+h_2)$.

Odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu $ABCD$ i dzieli go na dwa trapezy o równych polach, zatem: $\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = \frac{P}{2}$, więc $h_1 = \frac{P}{a+x}$,

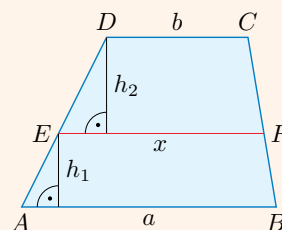
oraz $\frac{b+x}{2} \cdot h_2 = \frac{P}{2}$, więc $h_2 = \frac{P}{b+x}$.

Stąd otrzymujemy:

$$P = \frac{a+b}{2} \left(\frac{P}{a+x} + \frac{P}{b+x} \right) \quad / \cdot \frac{2(a+x)(b+x)}{P}$$

$$2(a+x)(b+x) = (a+b)(b+x+a+x)$$

Z ostatniego równania wyznaczamy $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.



D 1. Uzupełnij powyższe szkice dowodów o niezbędne uzasadnienia.

1. $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ na mocy cechy KKK:

$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD|$ (kąty wierzchołkowe),

$|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CDP|$ oraz $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DCP|$ (kąty naprzemianległe)

$\triangle GDP \sim \triangle ADB$ na mocy cechy KKK:

$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle GDP|$ (ten sam kąt),

$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DGP|$ oraz $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DPG|$ (kąty odpowiadające)

$\triangle PHC \sim \triangle ABC$ na mocy cechy KKK:

$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle PCH|$ (ten sam kąt),

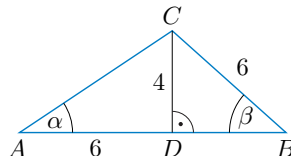
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CPH|$ oraz $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CHP|$ (kąty odpowiadające)

Powtórzenie

Zestaw I

1. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole prostokąta.

2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β trójkąta ABC przedstawionego na rysunku obok.



3. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 60, a tangens jednego z jego kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe $4\sqrt{2}$, a sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
c) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 16. Kąty ostre α i β spełniają zależność $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC .

- a) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,2)$ c) $A(-6,1)$, $B(6,-4)$, $C(6,1)$
b) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-4,1)$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α spełniającego podany warunek.

- a) $\sin \alpha = 0,1$ c) $\cos \alpha = \frac{1}{6}$ e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$ g) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$
b) $\cos \alpha = 0,9$ d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$ h) $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$

6. Oblicz długość podstawy AB oraz długość ramienia trójkąta równoramiennego ABC , którego:

- a) wysokość CD jest równa 6 cm, a $|\angle ACB| = 40^\circ$,
b) pole jest równe 12 cm^2 , a $|\angle CAB| = 40^\circ$.

7. a) Obserwator widzi wierzchołek 70-metrowej wieży stojącej na płaskim terenie pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? W obliczeniach pominiń wzrost obserwatora.

- b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.

5. a) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{35}$

d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$

f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

h) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$

6. a) $|AB| \approx 4,37 \text{ cm}$, $|AC| \approx 6,39 \text{ cm}$

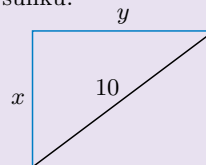
b) $|AB| \approx 7,56 \text{ cm}$, $|AC| \approx 4,94 \text{ cm}$

7. a) około 329,26 m

b) około 70°

Odpowiedzi do zadań

1. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



I sposób

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

czyli $x = 6$, $y = 8$.

Zatem pole $P = 48$.

II sposób

$$P = xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$P = \frac{1}{2}(14^2 - 10^2) = 48$$

2. $|AC| = 2\sqrt{13}$, $|BD| = 2\sqrt{5}$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, \sin \beta = \frac{2}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3. a) 10, 24, 26

b) $4(\sqrt{2} + 2)$

c) $16\sqrt{7}$

4. a) $\sin \beta = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$$\cos \beta = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$$

b) $\sin \alpha = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$$\cos \alpha = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$$

c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$,

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$

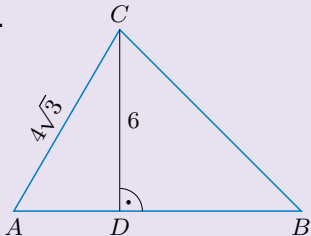
d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$,

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$$

8. $|BC'| = |AC'| - |AB| = \frac{4,5}{\operatorname{tg} 18^\circ} - \frac{4,5}{\operatorname{tg} 32^\circ} \approx 6,65 \text{ [m]}$
9. a) $x = 500 \sin 5^\circ \approx 43,6 \text{ [m]}$
 b) $\frac{0,13}{s} = \sin 5^\circ$
 $s \approx 1,49 \text{ [km]}$
 $t = \frac{s}{v} \approx \frac{1,49}{4,5} \approx 0,33 \text{ [h]}$,
 czyli około 20 minut
10. $\frac{|SC|}{|BC|} = \operatorname{tg} 50^\circ$,
 stąd $|BC| = \frac{|SC|}{\operatorname{tg} 50^\circ}$
 $\frac{|SC|}{800 + |BC|} = \operatorname{tg} 29^\circ$,
 stąd $|SC| = \frac{800 \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 29^\circ} \approx 829 \text{ [m]}$

Zestaw II

1. 
 $|AD| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 2\sqrt{3} \text{ [cm]}$
 $\triangle ADC$ jest trójkątem $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ o kącie 30° w wierzchołku C , co oznacza, że $\triangle BDC$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Stąd $|DB| = 6 \text{ cm}$.
 Zatem:
 $P = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 6) \cdot 6 = 6(\sqrt{3} + 3) \text{ [cm}^2\text{]}$
2. 6 cm, $6\sqrt{3} \text{ cm}$, $6\sqrt{3} \text{ cm}$

3. Niech $P \in AD$ będzie położony tak, że $|\sphericalangle BPC| = 120^\circ$. Wówczas $|\sphericalangle BPA| = 120^\circ$ oraz $|\sphericalangle CPA| = 120^\circ$. Rozpatrzmy punkt P_1 leżący wewnątrz trójkąta ABP : $|\sphericalangle ABP_1| < |\sphericalangle ABP|$ oraz $|\sphericalangle BAP_1| < |\sphericalangle BAP|$, więc $|\sphericalangle BP_1A| > 120^\circ$.

Analogicznie dla punktu P_2 .

Trójkąty BPD i CPD są przystające i mają miary $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

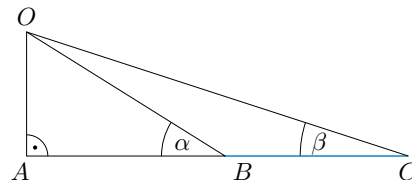
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{|PD|} = \sqrt{3}, \text{ więc } |PD| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|BP| = |CP| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$|AP| = 1 - |PD| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Zatem } |AP| + |BP| + |CP| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3}, \text{ co należało wykazać.}$$

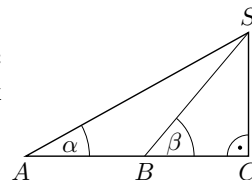
8. Z punktu obserwacyjnego O znajdującego się na wysokości 4,5 m nad ziemią widać brzegi rzeki pod kątami $\alpha = 32^\circ$ i $\beta = 18^\circ$ (rysunek obok). Oblicz szerokość rzeki w tym miejscu.



9. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5° .

- a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?
 b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

10. Z punktów A i B oddalonych od siebie o 800 m widać szczyt góry S pod kątami $\alpha = 29^\circ$ i $\beta = 50^\circ$ (rysunek obok). Oblicz wysokość SC tej góry.



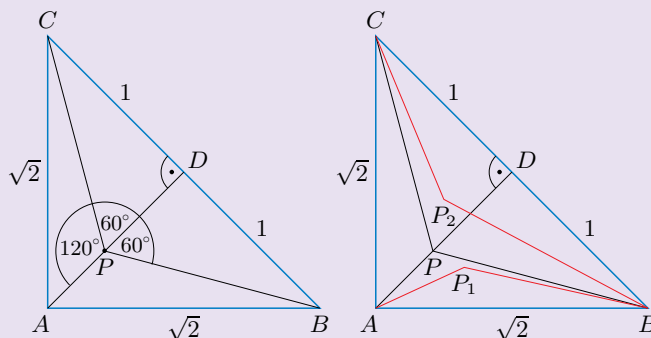
Zestaw II

1. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75° , bok AC ma długość $4\sqrt{3} \text{ cm}$, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
2. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.
3. Przeczytaj informację w ramce, a następnie rozwiąż zadanie.

Punkt trójkąta taki, że suma jego odległości od wierzchołków tego trójkąta jest najmniejsza, nosi nazwę **punktu Fermata** (punktu Torricellego). Można wykazać, że:

- jeśli któryś z kątów trójkąta ma miarę 120° lub większą, to punktem Fermata jest wierzchołek tego kąta;
- jeśli wszystkie kąty trójkąta mają miary mniejsze od 120° , to punkt Fermata leży wewnątrz trójkąta i każdy z boków trójkąta widać z tego punktu pod kątem 120° .

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o przeciwprostokątnej długości 2. Niech punkt P będzie takim punktem tego trójkąta, że suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza. Wykaż, że suma ta jest równa $1 + \sqrt{3}$.



4. Trapez prostokątny ma kąt ostry α , dłuższą podstawę a , krótszą podstawę b i wysokość h . Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu.
- a) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm b) $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ cm, $h = 4$ cm
5. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P . Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD .
6. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz pole tego trapezu.
- 7.* W trapezie równoramiennym przekątna o długości 10 cm tworzy z jednym z ramion kąt 90° , a z drugim – kąt 30° . Oblicz obwód tego trapezu.
8. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α , do którego ramienia końcowego należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.
- a) $P(1, 4)$ b) $P(-1, 4)$ c) $P(-3, 2)$ d) $P(-2, 3)$
9. Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ spełniający podane równanie.

D a) $\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos \alpha$ b) $\sqrt{5} \sin \alpha = 5 - \sqrt{5}$ c) $3 \cos \alpha + \sqrt{3} = 6$

10. Oblicz.

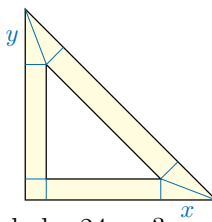
- a) $\sin 30^\circ (\cos 0^\circ - 2 \cos 135^\circ)$ e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$
b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$ f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$
c) $\frac{\sin 150^\circ - 2 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$ g) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$
d) $\frac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$ h) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

11. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.

- D** a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$ c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$ d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

- 12.* Ekierki mające kształt połowy kwadratu o boku 20 cm są produkowane z drewnianych listew o szerokości 2 cm i grubości 2 mm. Jaka jest objętość drewna zużytego do wyprodukowania 1000 takich ekier? Pomijamy objętość odpadów. Jaka byłaby objętość drewna zużytego do wyprodukowania z takich samych listew 1000 ekier mających kształt połowy trójkąta równobocznego o boku 24 cm?



11. a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2(90^\circ - 37^\circ) = \sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ = 1$
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2(90^\circ - 18^\circ) = \sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1$
c) $\sin 20^\circ \cdot \cos(90^\circ - 20^\circ) + \cos^2 20^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$
d) $\sin^2 26^\circ + \sin(90^\circ - 26^\circ) \cdot \cos 26^\circ = \sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ = 1$

12. 1° Pole podstawy ekierki:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 20^2 - \frac{1}{2} (20 - 2 - 2 - 2\sqrt{2})^2 = 68 + 32\sqrt{2} \approx 113,255 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Objętość 1000 ekier: } V = 1000 \cdot P \cdot 0,2 \approx 22\,651 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$2^\circ x = 2\sqrt{3}, y = \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ}$$

Pole podstawy ekierki:

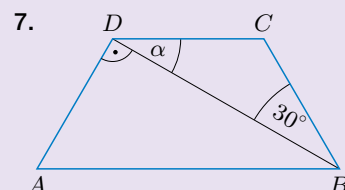
$$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} - \frac{1}{2} (12 - 2 - 2\sqrt{3}) (12\sqrt{3} - 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ}) \approx 87,717 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Objętość 1000 ekier: } V = 1000 \cdot P \cdot 0,2 \approx 17\,543 \text{ [cm}^3\text{]}$$

4. a) $Ob = 2(11 + 3\sqrt{3})$ cm,
 $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
b) $Ob = 4(8 + \sqrt{3})$ cm,
 $d_1 = 2\sqrt{29}$ cm,
 $d_2 = 2\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ cm

5. $\sin |\angle PAD| = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\cos |\angle PAD| = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} |\angle PAD| = \frac{1}{3}$,

6. $21(3 - \sqrt{3})$



Przyjmijmy: $|\angle CDB| = \alpha$,
wówczas $|\angle DBA| = \alpha$ oraz
 $|\angle DAB| = 30^\circ + \alpha$, czyli
 $\alpha = 30^\circ$.

Stąd:

$$|AD| = |BC| = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$|AB| = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Trójkąt DBC jest równoramienny, czyli:

$$|DC| = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Zatem } Ob = \frac{50\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

8. a) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 4$
b) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -4$
c) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$
d) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$

9. a) $\frac{1}{6} \cos \alpha = \frac{1}{4}$,
 $\cos \alpha = \frac{3}{2} \geq 1$ – sprzeczność
b) $\sin \alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}-5}{5} =$
 $= \sqrt{5} - 1 \geq 1$ – sprzeczność
c) $\cos \alpha = \frac{6-\sqrt{3}}{3} =$
 $= 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \geq 1$ – sprzeczność

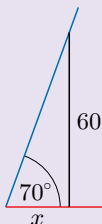
10. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
b) 0
c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
f) 1
g) $3 - \sqrt{3}$
h) $-\frac{8}{3}$



$$1. \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{60}{x}$$

$$x = \frac{60}{\operatorname{tg} 70^\circ} \approx \frac{60}{2,75} =$$

$$= 21,8 \approx 22 \text{ [cm]}$$



$$2. 17,43 \text{ m}$$

$$3. \sin 40^\circ = \frac{|AD|}{|SD|}$$

$$|SD| = \frac{|AD|}{\sin 40^\circ} \approx \frac{320}{0,6428} \approx 498$$

$$\sin 65^\circ = \frac{|AD|}{|BD|}$$

$$|BD| = \frac{|AD|}{\sin 65^\circ} \approx \frac{320}{0,9063} \approx 353$$

$$|SA| = \sqrt{498^2 - 320^2} \approx$$

$$\approx 381,6$$

$$|AB| = |BD| \cos 65^\circ \approx$$

$$\approx 353 \cdot 0,4226 \approx 149,18$$

$$|SB| = |SA| - |AB| =$$

$$= 381,6 - 149,18 \approx 232$$

Droga niebieska:

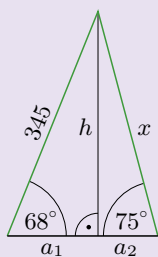
$$|SD| \approx 498 \text{ m}$$

Droga czerwona:

$$|SB| + |BD| \approx 585 \text{ m}$$

$$4. 39 \text{ m}$$

5.



$$\sin 68^\circ = \frac{h}{345}$$

$$h = 345 \sin 68^\circ \approx 319,88$$

$$a_1 = \sqrt{345^2 - h^2} \approx 129,24$$

$$\sin 75^\circ = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sin 75^\circ} \approx 331,16$$

$$a_2 = \sqrt{x^2 - h^2} \approx 85,70$$

Długość trasy:

$$345 + x + a_1 + a_2 \approx 891 \text{ m}$$

Uwaga.

Gdyby pośrednie wyniki były zaokrąglane:

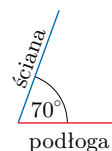
- do 4 miejsc po przecinku, to otrzymalibyśmy wynik 892 m,
- do części całkowitych, to otrzymalibyśmy wynik 890 m.

$$6. 14,2 \text{ m}$$



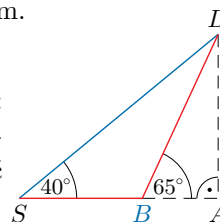
Zadania z kontekstem realistycznym

1. Ściana pokoju na poddaszu jest nachylona do podłogi pod kątem 70° . W jakiej najmniejszej odległości od krawędzi podłogi można ustawić biurko o wysokości 60 cm? Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm.



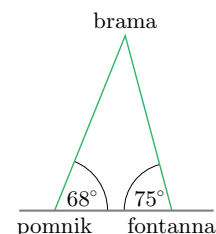
2. Wzdłuż stromej ulicy zamontowano barierkę o długości 200 m. Pierwsze 100 m barierki jest nachylone pod kątem 4° do poziomu, a drugie 100 m – pod kątem 6° do poziomu. Oblicz różnicę wysokości między końcem barierki a jej początkiem z dokładnością do 0,01 m.

3. Z domu Tomka (oznaczonego na rysunku obok literą D) do szkoły (oznaczonej literą S) prowadzą dwie drogi: jedna zaznaczona kolorem czerwonym, a druga – niebieskim. Odcinek AD ma długość 320 m. Oblicz długość każdej z tych dróg z dokładnością do 1 m.



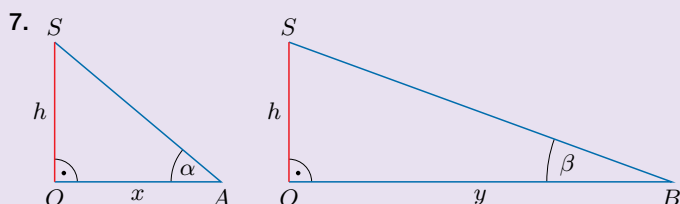
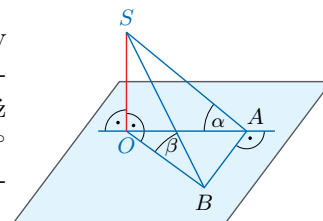
4. Wieża widokowa stoi na płaskim terenie. Z punktu A widać jej wierzchołek pod kątem 40° , a z punktu B , leżącego o 100 m dalej od wieży niż punkt A , widać go pod kątem 15° . Oblicz wysokość wieży z dokładnością do 1 m.

5. W parku od bramy wejściowej do alei głównej prowadzą dwie ścieżki: jedna biegnie do pomnika, druga do fontanny (rysunek obok). Od bramy do pomnika jest 345 m. Oblicz długość trasy spaceru od bramy wejściowej do pomnika, następnie do fontanny i z powrotem do bramy. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m.



6. Przekrój poprzeczny wału ochronnego ma kształt trapezu równoramiennego. Szerokość wału u szczytu wynosi 5 m, a boczne nasypy o długości 6 m są nachylone do poziomu pod kątem 40° . Oblicz szerokość wału u podstawy z dokładnością do 0,1 m.

7. Z punktu A położonego na wschód od wieży widać jej szczyt pod kątem $\alpha = 40^\circ$. Z punktu B leżącego 800 m dalej na południe niż punkt A widać szczyt wieży pod kątem $\beta = 20^\circ$ (rysunek obok). Oblicz wysokość wieży z dokładnością do 1 m.

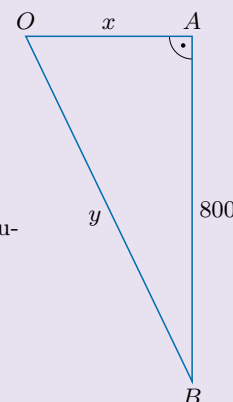


Dzielimy stronami równości $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x}$ oraz $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{y}$ i otrzymujemy $\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} \approx 2,3054$. Zatem $y \approx 2,3054x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO :

$$800 = \sqrt{y^2 - x^2} \approx x \sqrt{2,3054^2 - 1} \approx 2,0772x$$

skąd $x \approx 385$. Zatem $h = x \operatorname{tg} 40^\circ \approx 323 \text{ m}$.



**Przykład**

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB

i CDB (cecha KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Zatem:

$$|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB :

$$\cos \beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Zatem } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP , więc $\frac{|AP|}{|AB|} = \sin \beta$, stąd:

$$|AP| = |AB| \cdot \sin \beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

III sposób

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy wysokość CD trójkąta ABC :

$$|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Pole trójkąta ABC obliczamy na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP| \text{ [cm}^2\text{]}$$

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

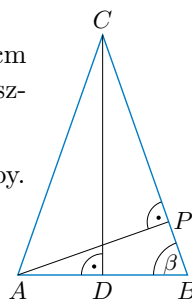
IV sposób

Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy równania: $|AP|^2 = 4^2 - x^2$ oraz $|AP|^2 = 6^2 - (6 - x)^2$. Rozwiązujemy równanie $4^2 - x^2 = 6^2 - (6 - x)^2$ i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm oraz $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Odpowiedź: $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm

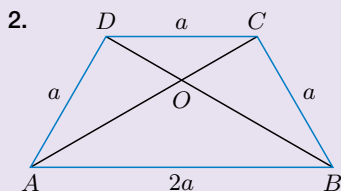
→ Zadanie 15, str. 222

→ Zadanie 9, str. 224





1. Trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości $\frac{c\sqrt{2}}{2}$.



Zauważmy, że:

$$|\angle DAB| = |\angle CBA| = 60^\circ$$

$$|\angle ADC| = |\angle BCD| = 120^\circ$$

Trójkąt DCB jest równoramienny, czyli:

$$|\angle CDB| = |\angle CBD| = 30^\circ$$

Zatem $|\angle DBA| = 30^\circ$

i analogicznie $|\angle CAB| = 30^\circ$,

czyli $|\angle AOB| = 120^\circ$ oraz

$$|\angle COB| = 60^\circ.$$

3. A. $\sqrt{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq \tan 30^\circ$
 B. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \neq 1$
 C. $\cos \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
 D. $2 \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \neq \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

W zadaniach 1–8, 11.1 i 13.2 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c , może mieć pole równe

- A. $\frac{1}{4}c^2$ B. $\frac{1}{3}c^2$ C. $\frac{1}{2}c^2$ D. c^2

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

Zadanie 3 (0–1)

Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość

- A. $\sqrt{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} = \tan 30^\circ$ C. $\cos \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
 B. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$ D. $2 \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

Zadanie 4 (0–1)

Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału

- A. $(0^\circ; 30^\circ)$ B. $(30^\circ; 45^\circ)$ C. $(45^\circ; 60^\circ)$ D. $(60^\circ; 90^\circ)$

Zadanie 5 (0–1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

- A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$ C. $2 \sin^2 30^\circ - 2 \cos^2 30^\circ$
 B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$ D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4} \tan 45^\circ$

Zadanie 6 (0–1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

- A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$ C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$
 B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$ D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

Zadanie 7 (0–1)

Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \tan 135^\circ) \cdot \frac{\tan 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby

- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

Zadanie 8 (0–1)

Pole rombu o boku $4\sqrt{2}$ cm i kącie rozwartym 135° jest równe

- A. 8 cm^2 B. $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$ C. 16 cm^2 D. $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$

5. A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ = \sin 40^\circ - \sin 40^\circ = 0 \neq 1$
 B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ = \sin 29^\circ + \sin 29^\circ = 2 \sin 29^\circ \neq 2 \sin 30^\circ = 1$
 C. $2 \sin^2 30^\circ - 2 \cos^2 30^\circ = 2((\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2) = -1 \neq 1$
 D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4} \tan 45^\circ = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{4} = 1$
 6. A. $\sin(90^\circ - 29^\circ) + \cos(180^\circ - 29^\circ) = \cos 29^\circ - \cos 29^\circ = 0 \neq 1$
 B. $\sin(180^\circ - 29^\circ) - \cos(90^\circ - 29^\circ) = \sin 29^\circ - \sin 29^\circ = 0 \neq 1$
 C. $\sin(180^\circ - 29^\circ) \cdot \cos(90^\circ - 29^\circ) = \sin^2 29^\circ \neq 1$
 D. $\sin(180^\circ - 29^\circ) : \cos(90^\circ - 29^\circ) = \frac{\sin 29^\circ}{\sin 29^\circ} = 1$
 7. $(\sin 150^\circ + \tan 135^\circ) \cdot \frac{\tan 120^\circ}{\cos 150^\circ} = (\frac{1}{2} - 1) \cdot \frac{-\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$
 8. $P = (4\sqrt{2})^2 \cdot \sin 135^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2} [\text{cm}^2]$

**Zadanie 9 (0–1)**

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 41 cm, a jedna z przyprostokątnych ma długość 40 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus jednego z kątów tego trójkąta jest równy $\frac{9}{41}$.	P	F
Tangens jednego z kątów tego trójkąta jest równy $4\frac{4}{9}$.	P	F

Zadanie 10 (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt prostokątny ABC .

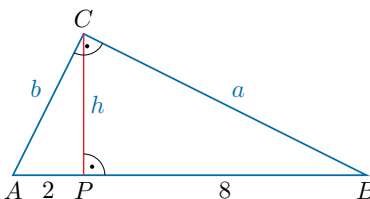
Uzupełnij zdania tak, aby były prawdziwe.

Długość boku BC jest równa $4\sqrt{5}$.

Obwód trójkąta ABC jest równy $10 + 6\sqrt{5}$.

Sinus kąta ABC jest równy $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Cosinus kąta ACP jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Zadanie 11**

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ (rysunek obok).

Zadanie 11.1 (0–1)

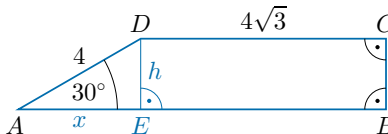
Tangens kąta CAB jest równy

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

**Zadanie 11.2 (0–2)**

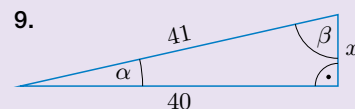
Oblicz sinus kąta ADC oraz pole trójkąta ADC .

Zadanie 12 (0–2)

Kąt ostry α spełnia warunek $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta α jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.	P	F
Iloczyn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równy $\frac{1}{5}$.	P	F
Tangens kąta α jest równy $\frac{1}{2}$.	P	F



9.

$$\begin{aligned} x^2 &= 41^2 - 40^2 = \\ &= (41 - 40)(41 + 40) = 81 \\ x &= 9 \\ \cos \beta &= \frac{x}{41} = \frac{9}{41} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{40}{41} = 4\frac{4}{41} \end{aligned}$$

10. $a^2 + b^2 = 100$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów PBC oraz APC :

$$h^2 = a^2 - 64$$

$$h^2 = b^2 - 4$$

Dodajemy równania stronami i otrzymujemy:

$$2h^2 = a^2 + b^2 - 68$$

$$2h^2 = 100 - 68$$

$$h^2 = 16$$

$$h = 4$$

$$a = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

11.1. $\frac{h}{4} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, czyli $h = 2$

$$\frac{x}{4} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$|AB| = x + |EB| = 6\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} |\sphericalangle CAB| = \frac{h}{|AB|} = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

11.2. $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ADE| + 90^\circ =$

$$= 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$\sin |\sphericalangle ADC| =$$

$$= \sin(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$P_{\triangle ADC} =$$

$$= \frac{1}{2} |AD| \cdot |DC| \cdot \sin |\sphericalangle ADC| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad &\cos \alpha = 2 \sin \alpha \\ &\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 1 \\ &5 \sin^2 \alpha = 1 \\ &\sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \\ &\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ &\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

13.1. $\sin \alpha = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \\&= \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \\&= \frac{\sqrt{21}}{5} \neq 0,6\end{aligned}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

13.2. $\sin \alpha = \frac{|CD|}{|AC|}$, więc:

$$\begin{aligned}|CD| &= |AC| \sin \alpha = \\&= 10 \cdot 0,4 = 4\end{aligned}$$

Trójkąt CDB jest prostokątny i równoramienny, więc:

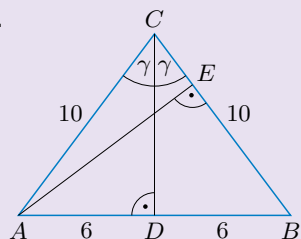
$$|BC| = |CD|\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

14. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha =$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\sin \alpha > 0, \text{ więc } \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

15.



Niech $|\angle ACD| = \gamma$.

$$\sin \gamma = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ, \text{ zatem } \gamma < 45^\circ.$$

$|\angle ACB| = 2\gamma < 90^\circ$, czyli trójkąt ABC jest ostrokątny.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$\begin{aligned}|CD|^2 &= |AC|^2 - |AD|^2 = \\&= 10^2 - 6^2 = 64\end{aligned}$$

$$|CD| = 8$$

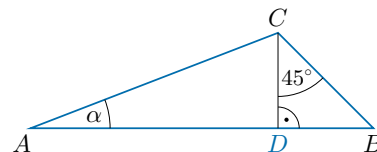
$$\begin{aligned}P_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \\&= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AE| = \\&= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |AE| = 5|AE| = 48\end{aligned}$$

$$\text{Zatem } |AE| = 9,6 \text{ cm.}$$

Zadanie 13

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok), w którym $\sin \alpha = 0,4$ oraz $|AC| = 10$.



Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta α jest równy 0,6.	P	F
Sinus kąta $90^\circ - \alpha$ jest równy $\frac{\sqrt{21}}{5}$.	P	F

Zadanie 13.2 (0-1)

Długość boku BC jest równa

A. $2\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$

D. $5\sqrt{2}$

Zadanie 14 (0-1)

Dany jest równoległobok o bokach długości 4 cm i 8 cm. Kąt rozwarty tego równoległoboku ma miarę α taką, że $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Sinus kąta α jest równy

A.	$\frac{\sqrt{15}}{4}$,	a pole równoległoboku jest równe	1.	$8\sqrt{15} \text{ cm}^2$.
B.	$\frac{1}{4}$,		2.	$4\sqrt{15} \text{ cm}^2$.
			3.	8 cm^2 .

Zadanie 15 (0-1) → Przykład, str. 219

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 12 cm i ramieniu długości 10 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ten jest rozwartokątny.	P	F
Wysokość tego trójkąta opuszczona na jego ramię ma długość 9,4 cm.	P	F

Zadanie 16 (0-2)

Tangens kąta ostrego α jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Oblicz $\cos \alpha$.

16. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{3}{2} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

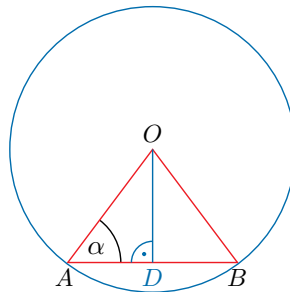
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

**Zadanie 17 (0-2)**

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β . Oblicz $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Zadanie 18 (0-2)

Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Wiadomo, że $\sin \alpha = 0,8$. Oblicz długość cięciwy AB .

**Zadanie 19 (0-2)**

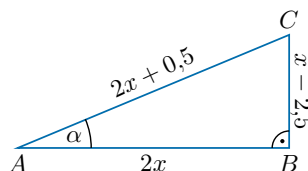
Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$. Punkt P jest spodkiem wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C . Oblicz długości odcinków AP i BP .

Zadanie 20 (0-2)

Kwadrat odwrotności sinusa pewnego kąta rozwartego jest równy 5. Oblicz cosinus tego kąta.

Zadanie 21 (0-4)

Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunku obok oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

**Zadanie 22 (0-4)**

Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \sin \beta)^2$.

Zadanie 23 (0-4)

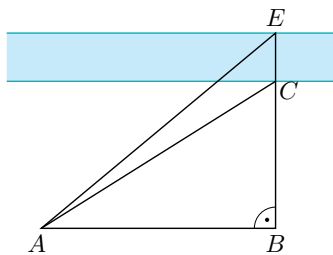
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości równej 3 cm. Jeden z dwóch kątów ostrych przylegających do dłuższej podstawy ma miarę 45° . Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 24 (0-4)

Przekątne rombu mają długości 4 cm i 8 cm. Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.

Zadanie 25 (0-4)

Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), wykonano pomiary w terenie: $|AC| = 120$ m, $|\angle CAB| = 32^\circ$, $|\angle CAE| = 8^\circ$. Oblicz szerokość rzeki.



17. Długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{10}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$$

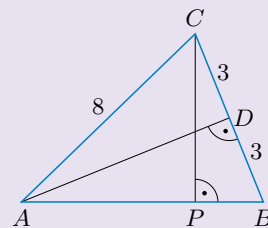
18. $\sin \alpha = \frac{|OD|}{|AO|}$, czyli:

$$|OD| = 0,8 \cdot 6 = 4,8$$

$$|AD| = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6$$

$$|AB| = 2|AD| = 7,2$$

19.



$$|AD| = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{55} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |PC|,$$

czyli $|PC| = \frac{3\sqrt{55}}{4}$

$$|BP| = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3\sqrt{55}}{4}\right)^2} = 2,25$$

$$|AP| = 5,75$$

20. $\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 = 5$, czyli $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha \in (90^\circ; 180^\circ),$$

$$\text{stad } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

21. $(2x + 0,5)^2 = (x - 2,5)^2 +$

$$+ (2x)^2 \text{ i } x > 2,5$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \text{ i } x > 2,5,$$

$$\text{czyli } x = 6$$

$$Ob = 5x - 2 = 28,$$

$$\sin \alpha = \frac{3,5}{12,5} = \frac{7}{25},$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{12,5} = \frac{24}{25},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3,5}{12} = \frac{7}{24}$$

22. Długości boków: $2n$, $2n + 2$,

$$2n + 4, \text{ gdzie } n > 0.$$

$$(2n)^2 + (2n + 2)^2 =$$

$$= (2n + 4)^2, \text{ gdzie } n > 0$$

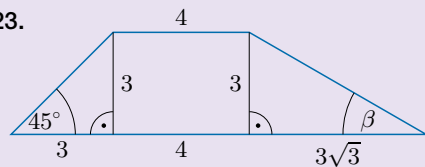
$$\text{Stad } n = 3 \text{ oraz długości}$$

$$\text{boków trójkąta: } 6, 8, 10$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

23.



$$\text{tg } \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ zatem } \beta = 30^\circ$$

$$\cos(180^\circ - 45^\circ) \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$= -\cos 45^\circ \cdot (-\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

24. $\frac{3}{5}$

25. $\frac{|BC|}{120} = \sin 32^\circ$, czyli $|BC| = 120 \cdot \sin 32^\circ$

$$\frac{|AB|}{120} = \cos 32^\circ, \text{ czyli } |AB| = 120 \cdot \cos 32^\circ$$

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \text{tg } 40^\circ,$$

$$\text{czyli } |BE| = 120 \cdot \cos 32^\circ \cdot \text{tg } 40^\circ$$

$$|CE| = |BE| - |BC| =$$

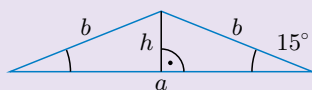
$$= 120 \cdot (\cos 32^\circ \cdot \text{tg } 40^\circ - \sin 32^\circ) \approx$$

$$\approx 120 \cdot (0,848 \cdot 0,8391 - 0,5299) \approx$$

$$\approx 21,8 \text{ [m]}$$

Odpowiedzi do zadań

- $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$
 $1 + \cos \beta = 1 + \cos(180^\circ - \alpha) =$
 $= 1 - \cos \alpha = 1 - \frac{\sqrt{15}}{4}$
- $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{\sin 22^\circ 30'}{\cos 22^\circ 30'}$
 $= \frac{\sin 22^\circ 30'}{\sqrt{1 - \sin^2 22^\circ 30'}} = \sqrt{2} - 1$
 $\sin 22^\circ 30' = (\sqrt{2} - 1) \cdot$
 $\cdot \sqrt{1 - \sin^2 22^\circ 30'}$
 $\sin^2 22^\circ 30' = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (1 - \sin^2 22^\circ 30')$
 $\sin^2 22^\circ 30' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$
 $\sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$
- $P = 5$, $Ob = 7,5 + \frac{\sqrt{185}}{2}$
- $18(2 + \sqrt{3})$
- Niech b będzie długością ramienia. Kąt między ramionami jest równy 150° .



Obliczamy pole trójkąta na dwa sposoby:

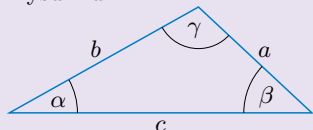
$$P = \frac{1}{2}b^2 \sin(180^\circ - 150^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}b^2 \sin 30^\circ = \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2}ah$$

Zatem $b^2 = 2ah$, czyli:

$$b = \sqrt{2ah}$$

- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \text{ czyli } b = \frac{2P}{a \sin \gamma}$$

$$P = \frac{1}{2}ac \sin \beta, \text{ czyli } c = \frac{2P}{a \sin \beta}$$

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{2P^2 \sin \alpha}{a^2 \sin \gamma \sin \beta}$$

$$\text{Stąd } a^2 = \frac{2P \sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta},$$

$$\text{czyli } a = \sqrt{\frac{2P \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}.$$

Zadanie 1 (0-2)

Kąty α i β spełniają warunki: $\alpha < \beta$, $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $1 + \cos \beta$.

Zadanie 2 (0-2)

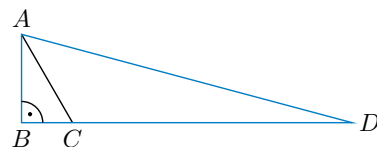
Wiadomo, że $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$. Oblicz $\sin 22^\circ 30'$.

Zadanie 3 (0-4)

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |DA| = 5$, $|AB| = 11$, punkt M jest środkiem boku AD , a P – punktem przecięcia prostych CM i AB . Oblicz pole i obwód trójkąta APM .

Zadanie 4 (0-5)

Kąt BAC na rysunku obok ma miarę 30° , kąt CAD – miarę 45° , a odcinek $|AB|$ ma długość 6. Oblicz pole trójkąta ABD .



D Zadanie 5 (0-3)

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości a i kącie przy podstawie o mierze 15° . Uzasadnij, że jeśli wysokość opuszczona na podstawę jest równa h , to ramię tego trójkąta ma długość $\sqrt{2ah}$.

D Zadanie 6 (0-3)

Miary kątów trójkąta wynoszą odpowiednio α , β , γ , a jego pole jest równe P . Wykaż, że:

$$a = \sqrt{\frac{2P \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

gdzie a jest długością boku leżącego naprzeciw kąta α .

D Zadanie 7 (0-4)

Kąt ostry rombu ma miarę 30° , a jego pole jest równe P . Wykaż, że suma długości przekątnych tego rombu jest równa $2\sqrt{3P}$.

Zadanie 8 (0-5)

- Wykaż, że długości dwóch dowolnych boków trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do wysokości opuszczonych na te boki.
- Oblicz wysokości trójkąta o bokach długości 4, 5 i 7.

Zadanie 9 (0-3) → Przykład, str. 219

Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie $|AB| = 20$ oraz ramionach długości 26. Oblicz długości odcinków, na które wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka A dzieli ramię BC .

- Niech a oznacza długość boku rombu, a d_1, d_2 oznaczają długości przekątnych.

$$P = a^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\text{czyli } a^2 = 2P$$

$$P = \frac{1}{2}d_1 d_2, \text{ czyli } d_1 d_2 = 2P$$

$$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = a^2/4$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 = 8P$$

$$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 =$$

$$= 8P + 4P = 12P$$

$$\text{Zatem } d_1 + d_2 = 2\sqrt{3P}.$$

- a) a, b – długości boków trójkąta, h_a, h_b – wysokości opuszczone na te boki.

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b, \text{ czyli}$$

$$ah_a = bh_b = 2P$$

Iloczyn boku i wysokości opuszczonej na ten bok jest dla danego trójkąta stały, zatem wielkości te są odwrotnie proporcjonalne.

$$\text{b) } \frac{8\sqrt{6}}{7}, 2\sqrt{6}, \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

$$9. 7\frac{9}{13}, 18\frac{4}{13}$$