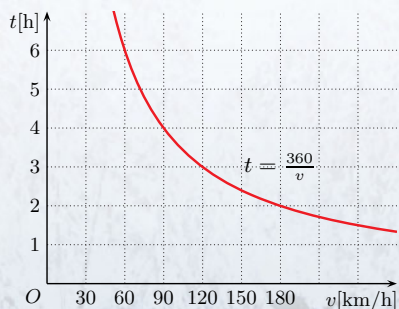


# 3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym krótszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



### Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ , podaje jej własności oraz wyznacza równania asymptot jej wykresu,
- szkicuje wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  w podanym zbiorze,
- odczytuje z wykresu współrzędne punktów przecięcia prostej i hiperboli,
- wyznacza współczynnik  $a$  tak, aby funkcja  $f(x) = \frac{a}{x}$  spełniała podane warunki.

### Ćwiczenie 1

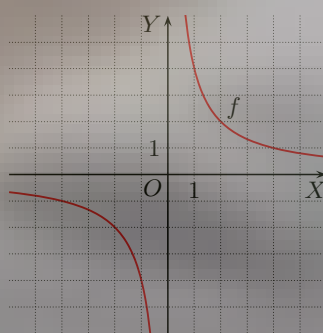
a)  $A(\frac{1}{2}, 8)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $D(4, 1)$ ,  $E(8, \frac{1}{2})$

b)

|        |                |    |    |    |                |
|--------|----------------|----|----|----|----------------|
| $x$    | -8             | -4 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | -4 | -8             |

|        |               |   |   |   |               |
|--------|---------------|---|---|---|---------------|
| $x$    | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8             |
| $f(x)$ | 8             | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |



## 3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Rozpatrzmy funkcję  $f(x) = \frac{1}{x}$  – jest ona określona dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sporządzamy tabelę wartości funkcji  $f$ , a następnie szkicujemy jej wykres.

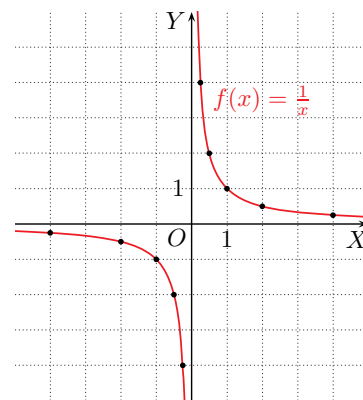
|        |                |                |    |                |                |               |               |   |               |               |
|--------|----------------|----------------|----|----------------|----------------|---------------|---------------|---|---------------|---------------|
| $x$    | -4             | -2             | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2             | 4             |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2             | -4             | 4             | 2             | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ , gdzie  $a \neq 0$ , oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie o wektor nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$ :

- dla  $x < 0$  funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla  $x > 0$  – przyjmuje wartości dodatnie,
- funkcja  $f$  nie ma miejsc zerowych,
- funkcja  $f$  jest **malejąca w przedziałach**  $(-\infty; 0)$  i  $(0; \infty)$ .

**Uwaga.** Funkcja  $f(x) = \frac{1}{x}$  **nie** jest malejąca w zbiorze  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ .



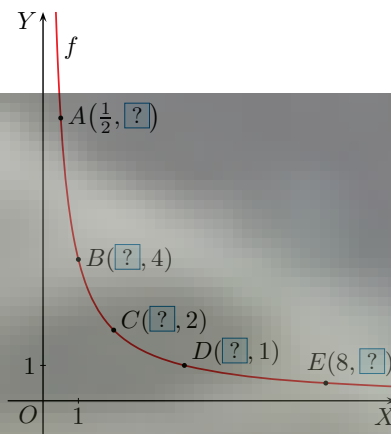
Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  „zbliża się” do prostej poziomej  $y = 0$  oraz „zbliża się” do prostej pionowej  $x = 0$ . O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

### Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli  $f(x) = \frac{4}{x}$ .

- a) Podaj brakujące współrzędne punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ .
- b) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.



### Ćwiczenie 2

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{2}{x}$    b)  $f(x) = \frac{3}{x}$    c)  $f(x) = \frac{8}{x}$

### Ćwiczenie 2

a)

|        |                |    |    |                |               |   |   |               |
|--------|----------------|----|----|----------------|---------------|---|---|---------------|
| $x$    | -4             | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4             |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | -4             | 4             | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

b)

|        |                |    |    |                |               |   |   |               |
|--------|----------------|----|----|----------------|---------------|---|---|---------------|
| $x$    | -6             | -3 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 3 | 6             |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -3 | -6             | 6             | 3 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

c)

|        |    |    |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -8 | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| $f(x)$ | -1 | -2 | -4 | -8 | 8 | 4 | 2 | 1 |

### Multibook

- Wykres proporcjonalności odwrotnej
- Przekształcenia wykresu proporcjonalności odwrotnej

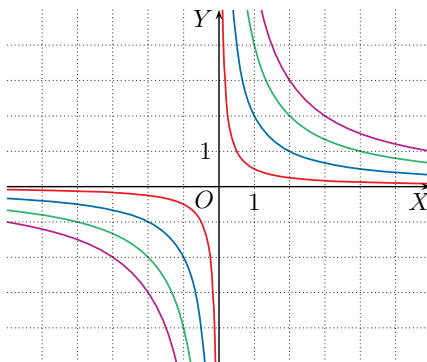
dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.1

**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $g(x) = \frac{2}{x}$ ,  $h(x) = \frac{4}{x}$  oraz  $k(x) = \frac{6}{x}$ .

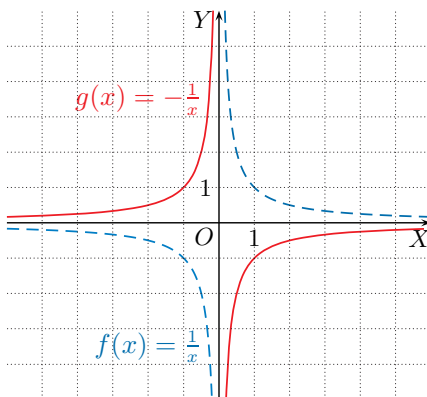
- Oblicz wartości każdej z tych funkcji dla  $x = 1$  oraz dla  $x = -2$ .
- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Do których hiperbol należą punkty:  $A(2, 3)$ ,  $B(\frac{2}{3}, 3)$ ,  $C(4, \frac{1}{8})$ ,  $D(-4, -\frac{1}{2})$ ,  $E(-\frac{2}{3}, -6)$ ?



Aby naszkicować wykres funkcji  $g(x) = -\frac{1}{x}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , można wykorzystać odpowiednią tabelę wartości funkcji lub odbić symetrycznie względem osi  $OX$  wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Własności funkcji  $g(x) = -\frac{1}{x}$ :

- dla  $x < 0$  funkcja  $g$  przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla  $x > 0$  – przyjmuje wartości ujemne,
- funkcja  $g$  nie ma miejsc zerowych,
- funkcja  $g$  jest **rosnąca w przedziałach**  $(-\infty; 0)$  i  $(0; \infty)$ , ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie,
- prosta  $y = 0$  jest asymptotą poziomą, a prosta  $x = 0$  – asymptotą pionową wykresu funkcji  $g$ .



### Ćwiczenie 4

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

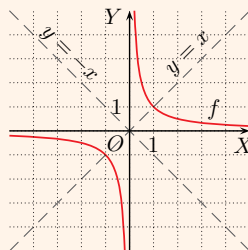
- $f(x) = -\frac{2}{x}$
- $f(x) = -\frac{3}{x}$
- $f(x) = -\frac{4}{x}$
- $f(x) = -\frac{0,5}{x}$

#### Czy wiesz, że...

- Wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  ma dwie **osie symetrii**. Są to proste  $y = x$  oraz  $y = -x$ .

- Punkt  $O(0, 0)$  jest **środkiem symetrii** wykresu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Ogólnie, proste  $y = x$  i  $y = -x$  są osiami symetrii, a punkt  $O(0, 0)$  jest środkiem symetrii dowolnej hiperboli o równaniu  $y = \frac{a}{x}$ .



### Ćwiczenie 3

a)  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(-2) = -\frac{1}{4}$ ,

$g(1) = 2$ ,  $g(-2) = -1$ ,

$h(1) = 4$ ,  $h(-2) = -2$ ,

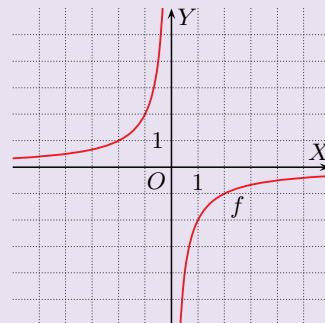
$k(1) = 6$ ,  $k(-2) = -3$

- b) czerwony –  $f$ , niebieski –  $g$ , zielony –  $h$ , fioletowy –  $k$

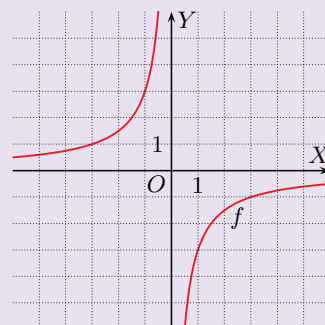
- c)  $A - k$ ,  $B - g$ ,  $C - f$ ,  $D - g$ ,  $E - h$

### Ćwiczenie 4

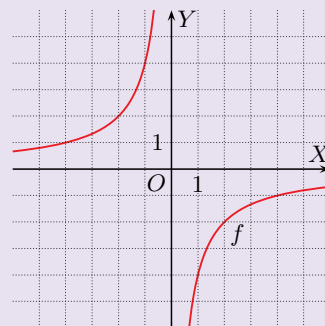
|        |               |    |    |    |    |                |
|--------|---------------|----|----|----|----|----------------|
| $x$    | -4            | -2 | -1 | 1  | 2  | 4              |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2  | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ |



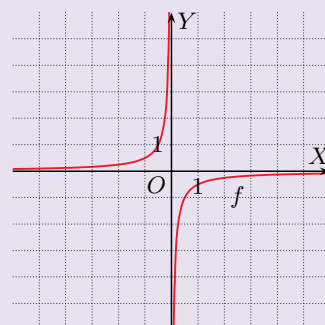
|        |    |    |                |               |    |    |
|--------|----|----|----------------|---------------|----|----|
| $x$    | -3 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 3  |
| $f(x)$ | 1  | 3  | 6              | -6            | -3 | -1 |



|        |    |    |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|----|----|
| $x$    | -4 | -2 | -1 | 1  | 2  | 4  |
| $f(x)$ | 1  | 2  | 4  | -4 | -2 | -1 |



|        |               |               |                |               |                |                |
|--------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
| $x$    | -2            | -1            | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1              | 2              |
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1              | -1            | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ |



## Odpowiedzi do zadań

- wartość najmniejsza: 3, wartość największa: 6
  - wartość najmniejsza: -4, wartość największa: -2
  - wartość najmniejsza:  $\frac{1}{4}$ , wartość największa:  $\frac{1}{2}$
  - wartość najmniejsza: -5, wartość największa:  $-\frac{5}{2}$
- $f(D) = [\frac{1}{2}; 2]$
  - $f(D) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
  - $f(D) = [-2; 0) \cup (0; 4]$
- $a = -8, f(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
  - $a = -16, f(-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
  - $a = -14, f(-2\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
  - $a = \frac{1}{4}, f(-2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$
- $a = -3, P(1, -3),$   
 $f(x) > -3$  dla  
 $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
  - $a = -6, P(2, -3),$   
 $f(x) > -3$  dla  
 $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
- $a = 2,$   
wartość najmniejsza: -2,  
wartość największa: 1
  - $a = -4,$   
wartość najmniejsza: -2,  
wartość największa: 4
  - $a = -6,$   
wartość najmniejsza: -3,  
wartość największa: 6
- Wyznaczamy punkty przecięcia prostej z hiperbolą.  

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$
 $A(1, 2), B(-1, -2)$   
 Zatem  $|AB| = 2\sqrt{5}$ .

## Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale  $[1; 2]$ .
  - $f(x) = \frac{6}{x}$
  - $f(x) = -\frac{4}{x}$
  - $f(x) = \frac{1}{2x}$
  - $f(x) = -\frac{5}{x}$
- Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{4}{x}$ , której dziedziną jest zbiór  $D$ . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
  - $D = [2; 8]$
  - $D = (-2; 0) \cup (0; 2)$
  - $D = (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$
- Dla jakiej wartości współczynnika  $a$  punkt  $P$  należy do hiperboli będącej wykresem funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ? Oblicz wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x = -2\sqrt{2}$ .
  - $P(-1, 8)$
  - $P(\frac{1}{2}, -32)$
  - $P(-4, 3\frac{1}{2})$
  - $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Oblicz  $a$ . Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą  $y = -3$ . Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartości większe od -3.
 

a)

b)
- Dla jakiej wartości współczynnika  $a$  punkt  $P$  należy do hiperboli będącej wykresem funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ? Naszkicuj wykres tej funkcji i podaj wartość największą i wartość najmniejszą, jakie ta funkcja przyjmuje dla argumentów ze zbioru  $[-4; -1] \cup [2; 6]$ .
  - $P(2\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} - 1)$
  - $P(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$
  - $P(\sqrt{6} - \sqrt{24}, \sqrt{6})$
- Oblicz odległość między punktami przecięcia prostej  $y = 2x$  z hiperbolą  $y = \frac{2}{x}$ .
- Wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  przecina prostą  $y = x$  w punktach  $P_1$  i  $P_2$ . Oblicz  $a$ , gdy: a)  $|P_1P_2| = 4\sqrt{2}$ , b)  $|P_1P_2| = 8$ .

- Wyznaczamy punkty przecięcia prostej z hiperbolą.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{a}{x} \end{cases}$$

$$P_1(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}), P_2(\sqrt{a}, \sqrt{a}), a > 0 \text{ (lub } P_1(\sqrt{a}, \sqrt{a}), P_2(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}))$$

$$\text{Zatem odległość } |P_1P_2| = 2\sqrt{2a}.$$

- $2\sqrt{2a} = 4\sqrt{2}, a = 4$

- $2\sqrt{2a} = 8, a = 8$



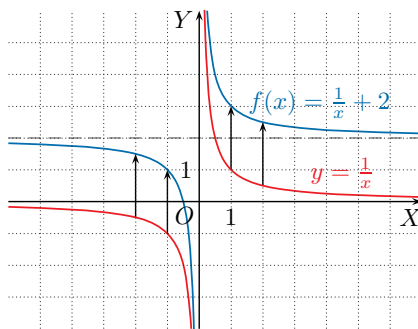
## 3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

### Przykład 1

Wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$  otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli  $y = \frac{1}{x}$  o 2 jednostki w górę, czyli o wektor  $[0, 2]$ .

Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest zbiór  $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ .

Prosta  $y = 2$  jest asymptotą poziomą wykresu funkcji  $f$ , a prosta  $x = 0$  – asymptotą pionową.



### Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

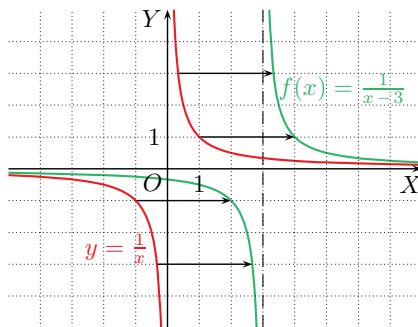
- a)  $f(x) = \frac{1}{x} + 3$       c)  $f(x) = \frac{4}{x} - 3$       e)  $f(x) = -\frac{3}{x} + 1$   
b)  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$       d)  $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$       f)  $f(x) = -\frac{1}{2x} - 4$

### Przykład 2

Wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli  $y = \frac{1}{x}$  o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor  $[3, 0]$ .

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

Prosta  $x = 3$  jest asymptotą pionową wykresu funkcji  $f$ , a prosta  $y = 0$  – asymptotą poziomą.



Przypomnijmy, że wykres funkcji  $y = f(x-p)$  dla  $p > 0$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o  $p$  jednostek w prawo wzdłuż osi  $OX$ .

### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę i równania asymptot wykresu tej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.

- a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$       b)  $f(x) = \frac{2}{x-4}$       c)  $f(x) = \frac{-1}{x-1}$       d)  $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

### Ćwiczenie 2

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , asymptoty:  $x = 2$ ,  $y = 0$   
Funkcja  $f$  jest malejąca w przedziałach  $(-\infty; 2)$  i  $(2; \infty)$ .  
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ , asymptoty:  $x = 4$ ,  $y = 0$   
Funkcja  $f$  jest malejąca w przedziałach  $(-\infty; 4)$  i  $(4; \infty)$ .  
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , asymptoty:  $x = 1$ ,  $y = 0$   
Funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziałach  $(-\infty; 1)$  i  $(1; \infty)$ .  
d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , asymptoty:  $x = 2$ ,  $y = 0$   
Funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziałach  $(-\infty; 2)$  i  $(2; \infty)$ .

### Uczeń:

- przesuwając wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  o dany wektor, podaje wzór i określa własności otrzymanej funkcji,
- wyznacza dziedzinę funkcji określonej wzorem  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  i podaje równania asymptot jej wykresu,
- podaje współrzędne wektora, o jaki należy przesunąć wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ , aby otrzymać wykres funkcji  $y = \frac{a}{x-p} + q$ ; szkicuje wykres funkcji  $y = \frac{a}{x-p} + q$ ,
- wyznacza równanie hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku,
- dobiera wzór funkcji do jej wykresu,
- wyznacza wzór funkcji spełniającej podane warunki,
- wyznacza równania osi symetrii oraz współrzędne środka symetrii hiperboli opisanej danym równaniem.

### Ćwiczenie 1

- a)  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$   
asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = 3$   
b)  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$   
asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = -1$   
c)  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$   
asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = -3$   
d)  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$   
asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = 2$   
e)  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$   
asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = 1$   
f)  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$   
asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = -4$

### Multibook

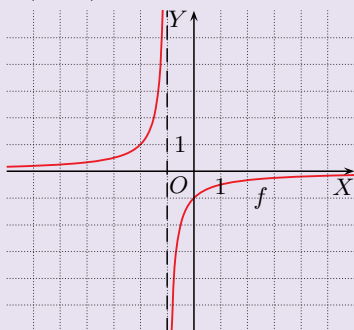
- Postać kanoniczna funkcji homograficznej

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.2

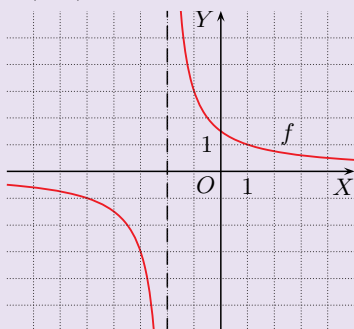
**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 3

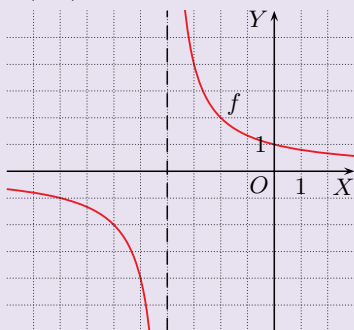
- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  
 asymptoty:  $x = -1$ ,  $y = 0$ ,  
 $P(0, -1)$



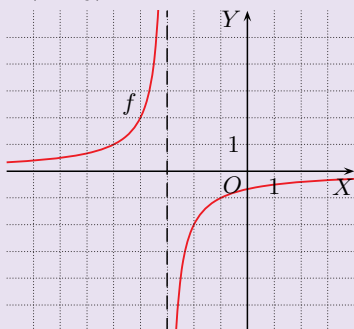
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  
 asymptoty:  $x = -2$ ,  $y = 0$ ,  
 $P(0, \frac{3}{2})$



- c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ,  
 asymptoty:  $x = -4$ ,  $y = 0$ ,  
 $P(0, 1)$



- d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ,  
 asymptoty:  $x = -3$ ,  $y = 0$ ,  
 $P(0, -\frac{2}{3})$

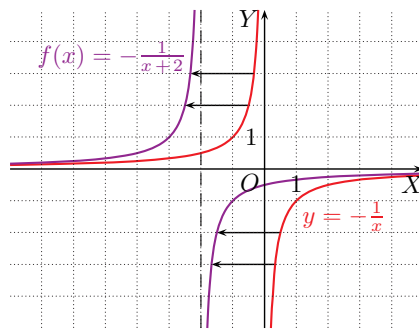


### Przykład 3

Wykres funkcji  $f(x) = -\frac{1}{x+2}$  otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli  $y = -\frac{1}{x}$  o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor  $[-2, 0]$ .

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta  $x = -2$ , a asymptotą poziomą – prosta  $y = 0$ .



Przypomnijmy, że wykres funkcji  $y = f(x+p)$  dla  $p > 0$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o  $p$  jednostek w lewo wzdłuż osi  $OX$ .

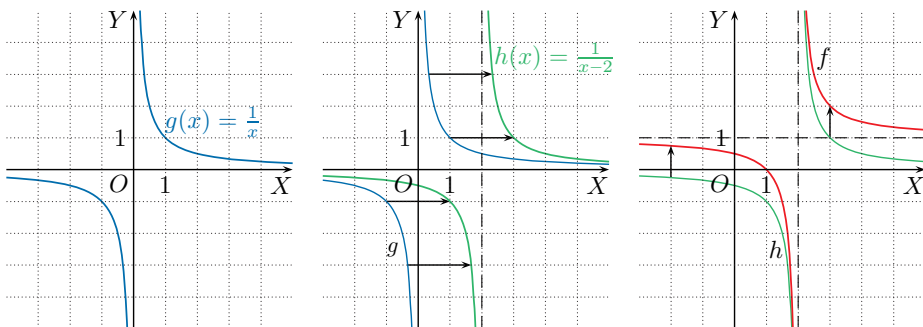
### Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę tej funkcji i równania asymptot jej wykresu. Wyznacz punkt przecięcia wykresu z osią  $OY$ .

- a)  $f(x) = -\frac{1}{x+1}$     b)  $f(x) = \frac{3}{x+2}$     c)  $f(x) = \frac{4}{x+4}$     d)  $f(x) = -\frac{2}{x+3}$

### Przykład 4

Wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$  możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji  $g(x) = \frac{1}{x}$  o wektor  $[2, 0]$ , a następnie o wektor  $[0, 1]$  (lub w odwrotnej kolejności). Można też od razu przesunąć wykres funkcji  $g$  o wektor  $[2, 1]$ .



Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Prosta  $x = 2$  jest asymptotą pionową wykresu funkcji  $f$ , a prosta  $y = 1$  jest jego asymptotą poziomą.

Przypomnijmy, że wykres funkcji  $y = f(x-p) + q$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o wektor  $[p, q]$ .

#### Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz równania asymptot jej wykresu.

a)  $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$       b)  $f(x) = -\frac{1}{x-1} + 2$       c)  $f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$

#### Ćwiczenie 5

Podaj wektor, o jaki należy przesunąć wykres funkcji  $f$ , aby otrzymać wykres funkcji  $g$ .

a)  $f(x) = \frac{3}{x}$ ,  $g(x) = \frac{3}{x-4} - 6$       c)  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $g(x) = -3 + \frac{1}{2x-4}$   
b)  $f(x) = -\frac{5}{x}$ ,  $g(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$       d)  $f(x) = -\frac{1}{3x}$ ,  $g(x) = 1 + \frac{1}{9-3x}$

#### Ćwiczenie 6

O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji  $f$ , aby otrzymać hiperbolę, której asymptotami są podane proste?

a)  $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ ,  $x = 3$ ,  $y = -6$       b)  $f(x) = -\frac{2}{x+3} - \frac{5}{3}$ ,  $x = -2$ ,  $y = -\frac{1}{2}$

#### Ćwiczenie 7

Wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $a \neq 0$ , przesunięto o wektor  $[p, q]$ . Podaj wzór i równania asymptot otrzymanej hiperboli.

## Zadania

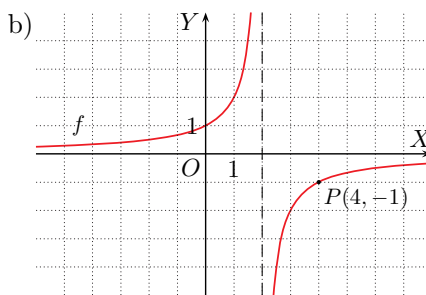
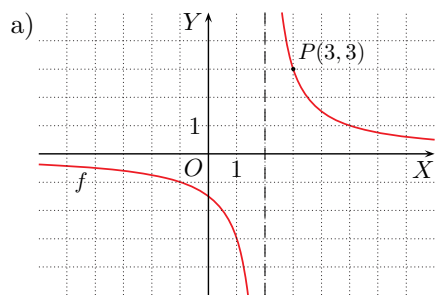
1. Wykres funkcji  $g$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  o 3 jednostki w dół,      c)  $f(x) = -\frac{2}{x}$  o 2 jednostki w górę,

b)  $f(x) = \frac{4}{x}$  o 3 jednostki w lewo,      d)  $f(x) = -\frac{1}{x}$  o 2 jednostki w prawo.

Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$ . Podaj wzór funkcji  $g$ , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-2}$ . Podaj wartość współczynnika  $a$  i oblicz  $f(1\frac{3}{4})$  i  $f(-4)$ .



2. a)  $a = 3$ ,  $f(1\frac{3}{4}) = -12$ ,  $f(-4) = -\frac{1}{2}$

b)  $a = -2$ ,  $f(1\frac{3}{4}) = 8$ ,  $f(-4) = \frac{1}{3}$

#### Ćwiczenie 4

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ,

asymptoty:  $x = -2$ ,  $y = -3$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,

asymptoty:  $x = 1$ ,  $y = 2$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,

asymptoty:  $x = -1$ ,  $y = 3$

#### Ćwiczenie 5

a)  $[4, -6]$

b)  $[-2, 2]$

c)  $[2, -3]$

d)  $[3, 1]$

#### Ćwiczenie 6

a) asymptoty wykresu

funkcji  $f$ :  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,

asymptoty hiperboli:

$x = 3$ ,  $y = -6$ , wektor  $[3, -8]$

b) asymptoty wykresu

funkcji  $f$ :  $x = -3$ ,  $y = -\frac{5}{3}$ ,

asymptoty hiperboli:

$x = -2$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ , wektor  $[1, \frac{7}{6}]$

#### Ćwiczenie 7

$g(x) = \frac{a}{x-p} + q$ ,

asymptoty:  $x = p$ ,  $y = q$

#### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ,

asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = -3$

b)  $g(x) = \frac{4}{x+3}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ,

$g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

asymptoty:  $x = -3$ ,  $y = 0$

c)  $g(x) = -\frac{2}{x} + 2$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$g(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,

asymptoty:  $x = 0$ ,  $y = 2$

d)  $g(x) = -\frac{1}{x-2}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,

$g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

asymptoty:  $x = 2$ ,  $y = 0$

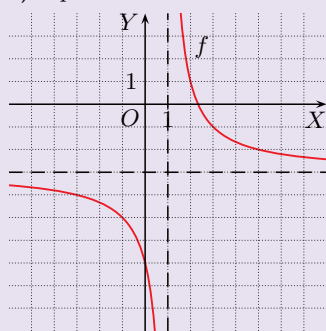
3. a)  $g(x) = \frac{1}{x-1} + 4$ ,  
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ,  
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{4\}$ ,  
 asymptoty:  $x = 1$ ,  $y = 4$

b)  $g(x) = \frac{2}{x+2} - 1$ ,  
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$ ,  
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ ,  
 asymptoty:  $x = -2$ ,  $y = -1$

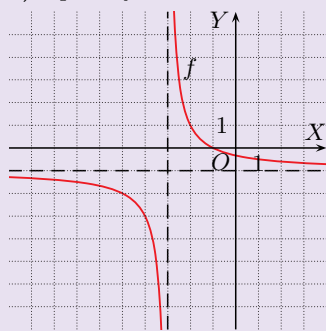
c)  $g(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$ ,  
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ ,  
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$ ,  
 asymptoty:  $x = -1$ ,  $y = 3$

d)  $g(x) = -\frac{2}{x-2} - 4$ ,  
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ ,  
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$ ,  
 asymptoty:  $x = 2$ ,  $y = -4$

4. a) 6 punktów



b) 4 punkty



c) 2 punkty

d) 4 punkty

5. a)  $y = \frac{2}{x+1} + 2$

b)  $y = \frac{3}{2(x-3)} - 1$

c)  $y = -\frac{1}{3(x-2)} + 1$

d)  $y = -\frac{4}{3(x+1)} - 2$

6. a)  $g(x) = \frac{4}{x-2} - 9$

b)  $g(x) = \frac{2}{3(x-\frac{1}{2})} + 5$

c)  $g(x) = \frac{5}{4(x-3)} - \frac{3}{4}$

d)  $g(x) = \frac{3\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - 6$

3. Przesuń wykres funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Podaj wzór otrzymanej funkcji, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\vec{u} = [1, 4]$

c)  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $\vec{u} = [-1, 3]$

b)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $\vec{u} = [-2, -1]$

d)  $f(x) = -\frac{2}{x}$ ,  $\vec{u} = [2, -4]$

4. Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do tego wykresu.

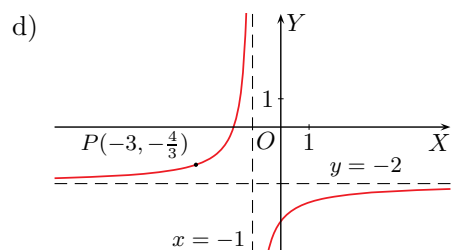
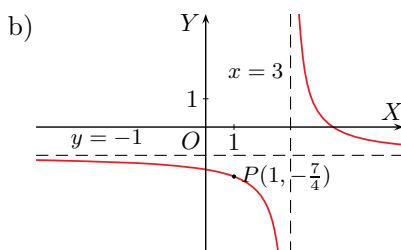
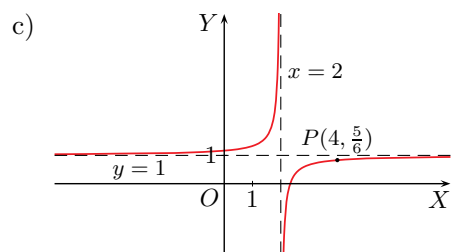
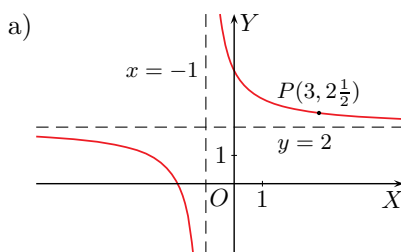
a)  $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

c)  $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$

b)  $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

d)  $f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2$

5. Wyznacz równanie przedstawionej hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku.



6. Wykres funkcji  $g$ , do którego należy punkt  $P$ , otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  o wektor  $\vec{u}$ . Wyznacz wzór funkcji  $g$ .

a)  $\vec{u} = [2, -9]$ ,  $P(6, -8)$

c)  $\vec{u} = [3, -\frac{3}{4}]$ ,  $P(-2, -1)$

b)  $\vec{u} = [\frac{1}{2}, 5]$ ,  $P(\frac{1}{3}, 1)$

d)  $\vec{u} = [-\sqrt{2}, -6]$ ,  $P(1, -3\sqrt{2})$

7. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii hiperboli o równaniu:

a)  $y = \frac{3}{x} - 6$ , b)  $y = \frac{2}{x-4} + 1$ , c)  $y = \frac{5}{x+1} + 3$ , d)  $y = -\frac{1}{x-7} + 8$ .

8. Wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $a \neq 0$ , przesunięto o wektor  $[p, q]$ . Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii otrzymanej hiperboli.

7. a) wektor przesunięcia  $[0, -6]$ ,  
 osie symetrii:  $y = x - 6$ ,  $y = -x - 6$ ,  
 środek symetrii:  $S(0, -6)$

b) wektor przesunięcia  $[4, 1]$ ,  
 osie symetrii:  $y = (x - 4) + 1 = x - 3$ ,  $y = -(x - 4) + 1 = -x + 5$ ,  
 środek symetrii:  $S(4, 1)$

c) wektor przesunięcia  $[-1, 3]$ ,  
 osie symetrii:  $y = (x + 1) + 3 = x + 4$ ,  $y = -(x + 1) + 3 = -x + 2$ ,  
 środek symetrii:  $S(-1, 3)$

d) wektor przesunięcia  $[7, 8]$ ,  
 osie symetrii:  $y = (x - 7) + 8 = x + 1$ ,  $y = -(x - 7) + 8 = -x + 15$ ,  
 środek symetrii:  $S(7, 8)$

8.  $y = x - p + q$ ,  $y = -x + p + q$ ,  $S(p, q)$



## R 3.3. Funkcja homograficzna

Funkcję postaci  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , gdzie  $c \neq 0$ , określoną dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ , jeżeli nie jest ona funkcją stałą, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Podaną w definicji postać wzoru funkcji homograficznej nazywamy **postacią ogólną**.

Wykresem funkcji homograficznej jest **hiperbola** – możemy ją otrzymać przez przesunięcie o wektor hiperboli  $y = \frac{r}{x}$ , gdzie  $r$  jest pewną stałą.

### Przykład 1

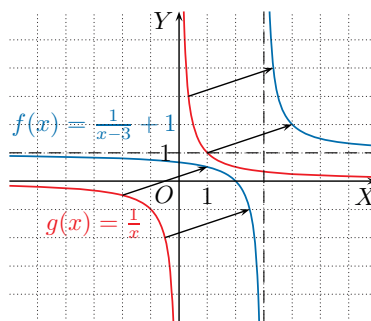
Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ .

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 1$$

Wykres funkcji  $f$  otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji  $g(x) = \frac{1}{x}$  o wektor  $[3, 1]$ .



### Przykład 2

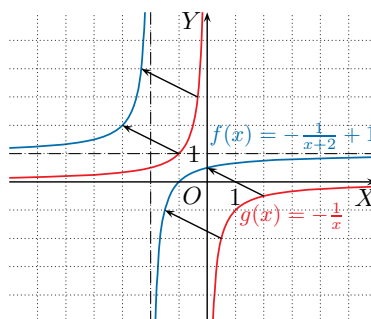
Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ .

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 1$$

Wykres funkcji  $f$  otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji  $g(x) = -\frac{1}{x}$  o wektor  $[-2, 1]$ .



### Definicja

Postać  $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$  i  $r \neq 0$ , nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji homograficznej.

### Ćwiczenie 1

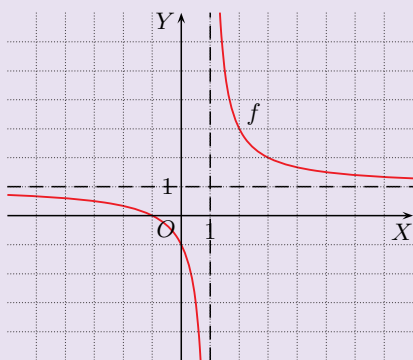
Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej i naszkicuj wykres tej funkcji.

a)  $f(x) = \frac{-x+1}{x}$

b)  $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c)  $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

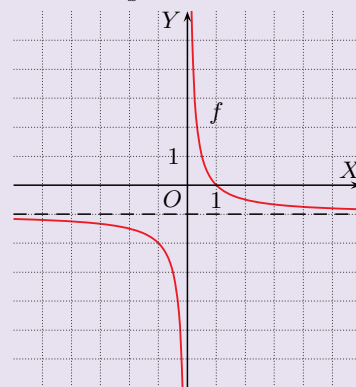


### Uczeń:

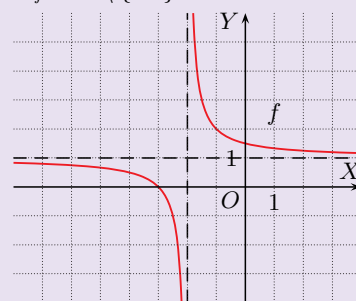
- przekształca wzór ogólny funkcji homograficznej do postaci kanonicznej,
- szkicuje wykres funkcji homograficznej i określa jej własności,
- wyznacza równania asymptot wykresu funkcji homograficznej,
- podaje przykładowy wzór funkcji homograficznej, znając jej dziedzinę i zbiór wartości,
- rozwiązuje zadania tekstowe dotyczące funkcji homograficznej,
- rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące funkcji homograficznej.

### Ćwiczenie 1

a)  $f(x) = \frac{1}{x} - 1, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



b)  $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$



### Multibook

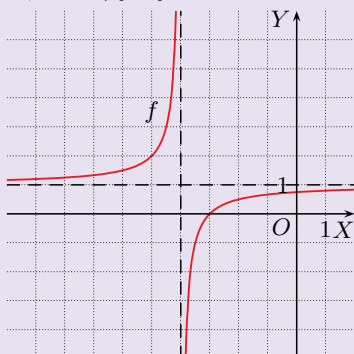
- Postać kanoniczna funkcji homograficznej

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.3

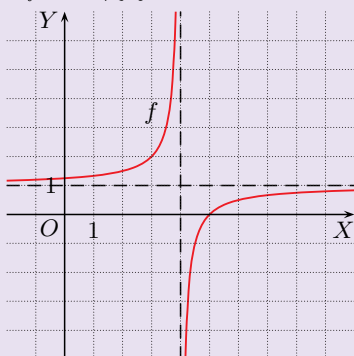
**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 2

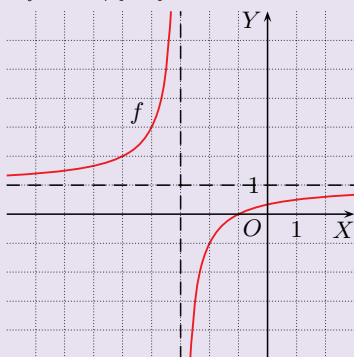
a)  $f(x) = -\frac{1}{x+4} + 1$ ,  
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$



b)  $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 1$ ,  
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$



c)  $f(x) = -\frac{2}{x+3} + 1$ ,  
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$



### Ćwiczenie 2

Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej i naskicuj wykres tej funkcji.

a)  $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$

b)  $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$

c)  $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$

### Przykład 3

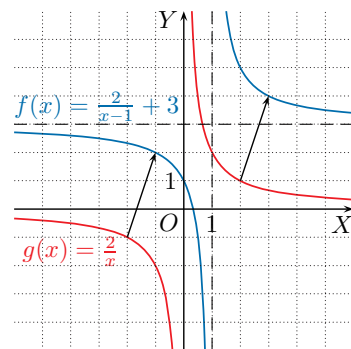
Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ .

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$\frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

Wykres funkcji  $f$  otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji  $g(x) = \frac{2}{x}$  o wektor  $[1, 3]$ .



### Ćwiczenie 3

Wstaw w miejsce  $\boxed{?}$  odpowiednią liczbę. Zapisz wyrażenie w postaci kanonicznej.

a)  $\frac{3x+4}{x+1} = \frac{3(x+1)+\boxed{1}}{x+1}$  c)  $\frac{-2x+8}{x-3} = \frac{-2(x-3)+\boxed{2}}{x-3}$  e)  $\frac{4x+9}{x+2} = \frac{4(x+2)+\boxed{1}}{x+2}$

b)  $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{3(x+1)-\boxed{1}}{x+1}$  d)  $\frac{-2x+5}{x-3} = \frac{-2(x-3)-\boxed{1}}{x-3}$  f)  $\frac{4x-3}{x+2} = \frac{4(x+2)-\boxed{11}}{x+2}$

Z postaci kanonicznej funkcji homograficznej możemy odczytać równania asymptot jej wykresu.

### Twierdzenie

Asymptotami wykresu funkcji  $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$  i  $r \neq 0$ , są proste  $x = p$  i  $y = q$ .

### Przykład 4

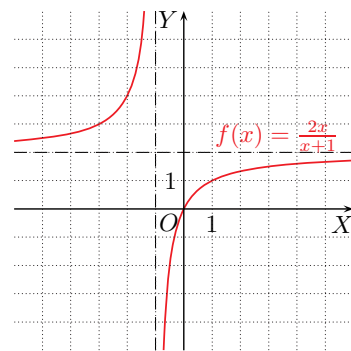
Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1)-2}{x+1} = \frac{-2}{x+1} + 2$$

Asymptotą pionową wykresu funkcji  $f$  jest prosta  $x = -1$ , a asymptotą poziomą – prosta  $y = 2$ .



### Ćwiczenie 3

a)  $\frac{1}{x+1} + 3$

b)  $\frac{-1}{x+1} + 3$

c)  $\frac{2}{x-3} - 2$

d)  $\frac{-1}{x-3} - 2$

e)  $\frac{1}{x+2} + 4$

f)  $\frac{-11}{x+2} + 4$

### Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj równania asymptot wykresu tej funkcji.

- a)  $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$       c)  $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$       e)  $f(x) = \frac{-3x-10}{x+4}$   
 b)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$       d)  $f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$       f)  $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$

### Zadania

1. Przedstaw wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej. Podaj równania asymptot wykresu funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$       c)  $f(x) = \frac{4x+6}{x+2}$       e)  $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+2}{x+3}$   
 b)  $f(x) = \frac{-3x+10}{x-3}$       d)  $f(x) = \frac{-2x+3}{x-4}$       f)  $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$

2. Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

- a)  $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$       b)  $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$       c)  $f(x) = \frac{-4x-11}{x+2}$

3. Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

- a)  $f(x) = \frac{x-4}{x-5}$       b)  $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$       c)  $f(x) = -\frac{2x}{x+1}$

4. Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej przedziały monotoniczności.

- a)  $f(x) = \frac{3x-11}{x-4}$       c)  $f(x) = \frac{-2x-5}{x+2}$       e)  $f(x) = \frac{-3x+8}{-x+2}$   
 b)  $f(x) = \frac{-4x-5}{x+1}$       d)  $f(x) = \frac{-4x+6}{x-2}$       f)  $f(x) = \frac{-8x+6}{2x-1}$

5. Dla jakiej wartości parametru  $m$  punkt  $P$  należy do wykresu funkcji  $f$ ? Wyznacz równania asymptot wykresu tej funkcji dla otrzymanego  $m$ .

- a)  $f(x) = \frac{4x+m}{-3x-1}$ ,  $P(-3, 2)$       b)  $f(x) = \frac{mx-3}{2x+4}$ ,  $P(-4, 1)$

6. Podaj przykład takiej funkcji homograficznej  $f$ , której dziedziną jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ , a zbiorem wartości – zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{q\}$ .

- a)  $p = 0$ ,  $q = 1$       c)  $p = 1$ ,  $q = 4$       e)  $p = 7$ ,  $q = -3$   
 b)  $p = 0$ ,  $q = -5$       d)  $p = -7$ ,  $q = 0$       f)  $p = \sqrt{2}$ ,  $q = \sqrt{2}$

7. Podaj równania asymptot wykresu funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = \frac{-6x+9}{3x+6}$   
 b)  $f(x) = \frac{10x+1}{\frac{1}{2}x-4}$

Wykres funkcji homograficznej  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ma asymptotę pionową  $x = -\frac{d}{c}$  i asymptotę poziomą  $y = \frac{a}{c}$ .

4. a)  $f(x) = \frac{1}{x-4} + 3$ ,  
maleje w  $(-\infty; 4)$  i w  $(4; \infty)$   
 b)  $f(x) = -\frac{1}{x+1} - 4$ ,  
rośnie w  $(-\infty; -1)$  i w  $(-1; \infty)$   
 c)  $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$ ,  
rośnie w  $(-\infty; -2)$  i w  $(-2; \infty)$   
 d)  $f(x) = -\frac{2}{x-2} - 4$ ,  
rośnie w  $(-\infty; 2)$  i w  $(2; \infty)$   
 e)  $f(x) = -\frac{2}{x-2} + 3$ ,  
rośnie w  $(-\infty; 2)$  i w  $(2; \infty)$   
 f)  $f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - 4$ ,  
maleje w  $(-\infty; \frac{1}{2})$  i w  $(\frac{1}{2}; \infty)$

5. a)  $m = 28$ ,  $x = -\frac{1}{3}$ ,  $y = -\frac{4}{3}$   
 b)  $m = \frac{1}{4}$ ,  $x = -2$ ,  $y = \frac{1}{8}$   
 6. a) np.  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$   
 b) np.  $f(x) = \frac{1}{x} - 5$   
 c) np.  $f(x) = \frac{1}{x-1} + 4$   
 d) np.  $f(x) = \frac{1}{x+7}$   
 e) np.  $f(x) = \frac{1}{x-7} - 3$   
 f) np.  $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}} + \sqrt{2}$   
 7. a)  $x = -2$ ,  $y = -2$   
 b)  $x = 8$ ,  $y = 20$

### Ćwiczenie 4

- a)  $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$ ,  
asymptoty:  $x = -1$ ,  $y = -2$   
 b)  $f(x) = \frac{3}{x-1} + 2$ ,  
asymptoty:  $x = 1$ ,  $y = 2$   
 c)  $f(x) = \frac{-1}{x+3} + 2$ ,  
asymptoty:  $x = -3$ ,  $y = 2$   
 d)  $f(x) = \frac{-2}{x-3} - 1$ ,  
asymptoty:  $x = 3$ ,  $y = -1$   
 e)  $f(x) = \frac{2}{x+4} - 3$ ,  
asymptoty:  $x = -4$ ,  $y = -3$   
 f)  $f(x) = \frac{8}{x-2} + 3$ ,  
asymptoty:  $x = 2$ ,  $y = 3$

### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $f(x) = \frac{2}{x+3} + 2$ ,  
asymptoty:  $x = -3$ ,  $y = 2$   
 b)  $f(x) = \frac{1}{x-3} - 3$ ,  
asymptoty:  $x = 3$ ,  $y = -3$   
 c)  $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 4$ ,  
asymptoty:  $x = -2$ ,  $y = 4$   
 d)  $f(x) = \frac{-5}{x-4} - 2$ ,  
asymptoty:  $x = 4$ ,  $y = -2$   
 e)  $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{1}{2}$ ,  
asymptoty:  $x = -3$ ,  $y = \frac{1}{2}$   
 f)  $f(x) = \frac{-1}{x+\frac{1}{2}} + 2$ ,  
asymptoty:  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = 2$   
 2. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ ,  
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$   
 b)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$   
 c)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$   
 3. a)  $f(x) > 0$  dla  
 $x \in (-\infty; 4) \cup (5; \infty)$ ,  
 $f(x) < 0$  dla  $x \in (4; 5)$   
 b)  $f(x) > 0$  dla  
 $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$ ,  
 $f(x) < 0$  dla  $x \in (-3; -2)$   
 c)  $f(x) > 0$  dla  $x \in (-1; 0)$ ,  
 $f(x) < 0$  dla  
 $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

8. a)  $(-2, 1), (2, -3), (4, 7), (8, 3)$

b)  $(-6, -2), (-4, -1), (-3, 1), (-1, -7), (0, -5), (2, -4)$

c)  $(-8, 1), (-2, 0), (0, -1), (1, -2), (2, -4), (3, -10), (5, 14), (6, 8), (7, 6), (8, 5), (10, 4), (16, 3)$

9. a) dla  $c = -2$  stała,  
dla  $c = 0$  liniowa,  
dla  $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$  homograficzna

b) dla  $c = 8$  stała,  
dla  $c \neq 8$  homograficzna

c) dla  $c = 0$  liniowa,  
dla  $c \neq 0$  homograficzna

#### Komentarz

W zadaniu 9 a) dla  $c = -2$  otrzymujemy funkcję stałą  $f(x) = -2$ , której dziedziną jest  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ . Nie jest to funkcja liniowa, gdyż dziedziną funkcji liniowej jest  $\mathbb{R}$ .

10. a)  $f(x) = 3, D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,  
nie jest  
b)  $f(x) = -4, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ,  
nie jest  
c)  $f(x) = -\frac{1}{2}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  
nie jest

11. a)  $f(x) = \frac{-3}{x+3} + 4$   
b)  $f(x) = \frac{-6}{x+3} + \frac{1}{3}$   
c)  $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{6}$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{7x-4}{x-1}$ .

$$f(x) = \frac{7x-4}{x-1} = \frac{7(x-1)+7-4}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 7, \text{ gdzie } x \neq 1$$

Ponieważ 7 jest liczbą całkowitą,  $f(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$ . Zatem  $x-1$  musi być dzielnikiem całkowitym liczby 3. Oznacza to, że:

$$x-1 \in \{-3, -1, 1, 3\}, \text{ czyli } x \in \{-2, 0, 2, 4\}$$

Istnieją cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji  $f$ . Są to punkty:  $(-2, 6), (0, 4), (2, 10), (4, 8)$ .

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

b)  $f(x) = \frac{-3x-10}{x+2}$

c)  $f(x) = \frac{2x+4}{x-4}$

9. Określ wartości  $c$ , dla których funkcja  $f$  jest odpowiednio: funkcją homograficzną, liniową, stałą.

a)  $f(x) = \frac{4x-6}{cx+3}$

b)  $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-4}{x-c}$

c)  $f(x) = \frac{6x}{cx-5}$

10. Czy funkcja  $f$  jest funkcją homograficzną? Naszkicuj wykres funkcji  $f$  (zwróć uwagę na jej dziedzinę).

a)  $f(x) = \frac{3x-9}{x-3}$

b)  $f(x) = \frac{-2x-8}{\frac{1}{2}x+2}$

c)  $f(x) = \frac{x-2}{4-2x}$

11. Przeczytaj podaną w ramce informację.

Funkcję homograficzną można przedstawić w postaci kanonicznej, wykonując dzielenie, np.:

$$f(x) = \frac{3x-10}{x-4} = \frac{2}{x-4} + 3$$

bo  $(3x-10) : (x-4) = 3$  reszta 2.

Wykonaj dzielenie i przedstaw funkcję  $f$  w postaci  $f(x) = \frac{r}{x+3} + q$ .

a)  $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$

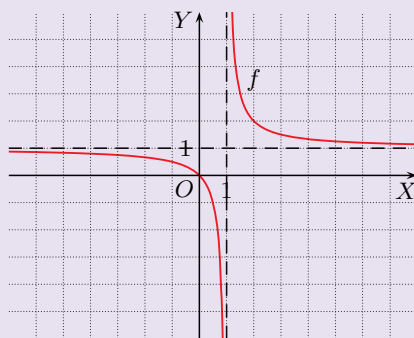
b)  $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-5}{x+3}$

c)  $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}{x+3}$

12. a) Suma dwóch liczb  $x$  i  $y$  jest równa ich iloczynowi. Podaj wzór funkcji opisującej zależność  $y$  od  $x$  i naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Pole prostokąta o bokach długości  $x$  cm,  $y$  cm jest równe  $2(x+y)$  cm<sup>2</sup>. Podaj wzór funkcji opisującej zależność  $y$  od  $x$ . Określ dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

12. a)  $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

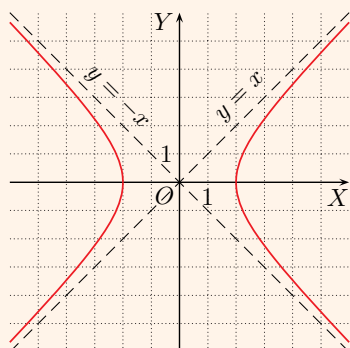


b)  $f(x) = \frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 2, D_f = (2; \infty)$

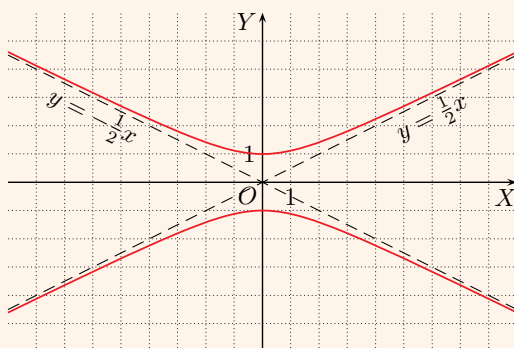


# Hiperbola

Rozpatruje się też hiperbole określone równaniami  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  lub  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ , gdzie  $a, b > 0$ . Jeśli  $a = b$ , to asymptoty hiperboli są do siebie prostopadłe, a taką hiperbolę nazywamy **równoosiową** (rysunek po lewej).



Hiperbola  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$



Hiperbola  $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

W tabeli przedstawiono dane dotyczące punktów przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz równania jej asymptot.

| Równanie hiperboli            | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$                | $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$                |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Punkty przecięcia z osią $OX$ | $(a, 0)$ i $(-a, 0)$                                   | brak                                                   |
| Punkty przecięcia z osią $OY$ | brak                                                   | $(0, a)$ i $(0, -a)$                                   |
| Równania asymptot             | $y = \frac{b}{a} \cdot x$ i $y = -\frac{b}{a} \cdot x$ | $y = \frac{a}{b} \cdot x$ i $y = -\frac{a}{b} \cdot x$ |

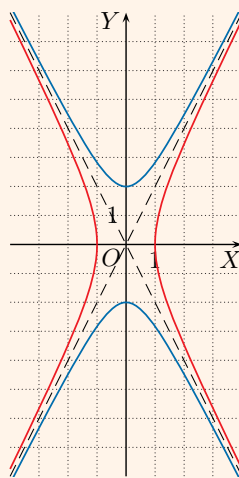
Na rysunku obok przedstawiono hiperbolę  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  (kolor czerwony) oraz hiperbolę  $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  (kolor niebieski).

Mają one wspólne asymptoty:  $y = -2x$  i  $y = 2x$ .

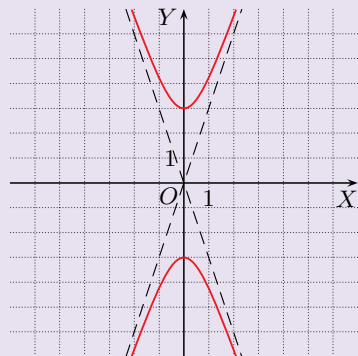
Hiperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  i  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  nazywamy **hiperbolami sprzężonymi**.

- Wyznacz punkty przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz równania jej asymptot. Naskicuj tę hiperbolę. Podaj równanie hiperboli sprzężonej.

- a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$       c)  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$   
 b)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$       d)  $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$

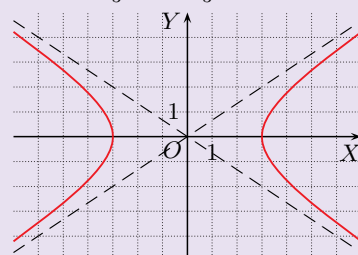


- d)  $(0, -3), (0, 3), y = -3x, y = 3x$ , hiperbola sprzężona:  $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$



## Odpowiedzi do zadań

1. a)  $(-3, 0), (3, 0),$   
 $y = -\frac{2}{3}x, y = \frac{2}{3}x,$

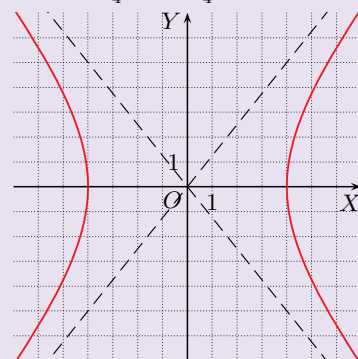


hiperbola sprzężona:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

- b)  $(-4, 0), (4, 0),$

$$y = -\frac{5}{4}x, y = \frac{5}{4}x,$$

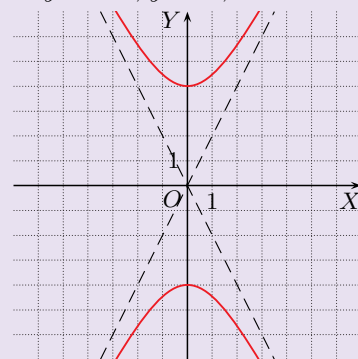


hiperbola sprzężona:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

- c)  $(0, -4), (0, 4),$

$$y = -2x, y = 2x,$$



hiperbola sprzężona:

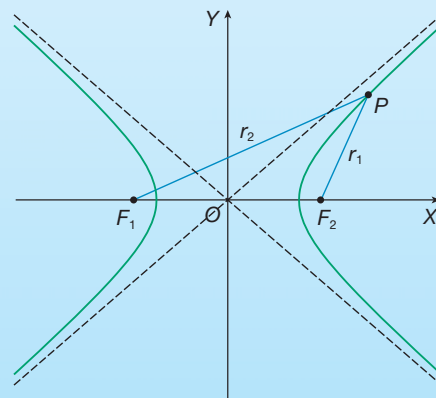
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$



# Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów  $P$  na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów  $F_1$  i  $F_2$ , zwanych ogniskami, jest stała:

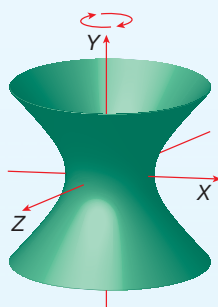
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



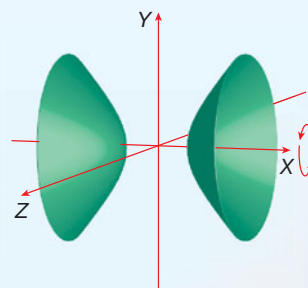
## Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obrocie pokazanej wyżej hiperboli wokół osi  $OY$  powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obrocie tej hiperboli wokół osi  $OX$  otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.



## Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszcza w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.



### 3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

**Wyrażenie wymierne** to ułamek, którego licznik i mianownik są wielomianami,

np.  $\frac{6x+4}{2}$ ,  $\frac{7}{x}$ ,  $\frac{x^2+3}{x-4}$ ,  $\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$ ,  $\frac{x^2-4}{x^2+1}$ .

**Dziedziną wyrażenia wymiernego** jest zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny wyrażenia wymiernego.

#### Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia  $\frac{2x^2-6x+5}{3x^2-7x}$ .

$3x^2-7x = 3x(x-\frac{7}{3}) = 0$  dla  $x = 0$  oraz dla  $x = \frac{7}{3}$ , więc dziedziną wyrażenia jest zbiór  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{7}{3}\}$ .

#### Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartość dla  $x = -1$ .

a)  $\frac{3x^5+2x^3+x}{x^2-9}$     c)  $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$     e)  $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$     g)  $\frac{14x^4+8x^2+4}{x^5+27x^2}$   
b)  $\frac{6x^2+3x-7}{4x^2-25}$     d)  $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$     f)  $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$     h)  $\frac{5x^2-10x}{x^3-5x^2+4x-20}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

#### Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia  $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$ , a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ .

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{x+2}$$

#### Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a)  $\frac{x^2-9}{3-x}$     c)  $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$     e)  $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$     g)  $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$   
b)  $\frac{3x^2-6x}{x-2}$     d)  $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$     f)  $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$     h)  $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$

#### Komentarz

Pojęcia mnożenia i dzielenia oraz dodawania i odejmowania wyrażeń wymiernych warto wyjaśnić uczniom na przykładach i poprzez opis słowny. Podczas wykonywania działań uczniowie często zapominają o dziedzinie. Dlatego warto przypilnować ich, aby zaczynali od wyznaczenia dziedziny. Przy dzieleniu wyrażeń wymiernych uczniowie często zapominają o założeniu, że licznik drugiego wyrażenia musi być różny od zera.

#### Uczeń:

- wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego i oblicza jego wartość dla danej wartości zmiennej,
- upraszcza w prostych przypadkach wyrażenia wymierne,
- wyznacza dziedziny iloczynu oraz ilorazu wyrażeń wymiernych,
- mnoży i dzieli wyrażenia wymierne,
- wykorzystuje mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych do rozwiązywania zadań,
- mnoży wyrażenia wymierne dwóch zmiennych i podaje konieczne założenia.

#### Ćwiczenie 1

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ ,  $\frac{3}{4}$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$ ,  $\frac{4}{21}$   
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ ,  $\frac{5}{4}$   
d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$ ,  $-4$   
e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$ ,  $-7,5$   
f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$ ,  $-\frac{1}{3}$   
g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ ,  $1$   
h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ ,  $-\frac{1}{2}$

#### Ćwiczenie 2

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,  $-x-3$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $3x$   
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$ ,  $\frac{2x}{x-5}$   
d)  $D = \mathbb{R}$ ,  $x$   
e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\frac{x+1}{x^3}$   
f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ ,  $-\frac{x+2}{x}$   
g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,  $\frac{x^2}{x-3}$   
h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  $\frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

### Ćwiczenie 3

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ , 4  
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ ,  $-\frac{2}{x}$   
 c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$ ,  $-\frac{(2x-1)(x-5)}{x}$   
 d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$ ,  $-\frac{x+3}{6(x-2)}$   
 e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  $\frac{x-2}{(x+2)^2}$   
 f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$ ,  $-\frac{x+1}{2(x-1)}$

### Ćwiczenie 4

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , 8  
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ ,  $-\frac{3}{2}$   
 c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ ,  $\frac{4}{3}$   
 d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ , 4  
 e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$ ,  $-\frac{1}{25}$   
 f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ ,  $\frac{10}{9}$

### Przykład 3

Wykonaj mnożenie  $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$ .

Zakładamy, że  $x^2 - 9 \neq 0$  i  $2x - 1 \neq 0$ , zatem  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$ .

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{1 \cancel{(2x-1)} (2x+1) \cancel{(x-3)}^1}{1 \cancel{(x-3)} (x+3) \cancel{(2x-1)}_1} = \frac{2x+1}{x+3}$$

### Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a)  $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$  c)  $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$  e)  $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$   
 b)  $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$  d)  $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x}$  f)  $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

### Przykład 4

Wykonaj dzielenie  $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$ .

Zakładamy, że  $x+4 \neq 0$  i  $3x+12 \neq 0$ , zatem  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ .

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{1 \cancel{2}}{1 \cancel{x+4}} \cdot \frac{3 \cancel{(x+4)}^1}{10 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

### Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a)  $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$  c)  $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$  e)  $\frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7}$   
 b)  $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$  d)  $\frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3}$  f)  $\frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6}$

### Przykład 5

Wykonaj dzielenie  $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$ .

Zakładamy, że  $x^2 - 1 \neq 0$ ,  $x+2 \neq 0$  i  $x^2 - x \neq 0$ ,  
 zatem  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$ .

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1 \cancel{x} \cancel{(x+2)}^1}{1 \cancel{(x-1)} (x+1)} \cdot \frac{x \cancel{(x-1)}^1}{x+2} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  
 $d \neq 0$

### Ćwiczenie 5

Wykonaj dzielenie.

- a)  $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2}$  c)  $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9}$  e)  $\frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$   
 b)  $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1}$  d)  $\frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1}$  f)  $\frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27}$

### Ćwiczenie 5

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ ,  $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2} = \frac{2(x-3)}{x} \cdot \frac{4x^2}{x-3} = 8x$   
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$ ,  $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} = (x-2)(x-1)$   
 c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ ,  $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9} = \frac{2x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{(x-3)^2}{6x^2} = \frac{x-3}{3x(x+3)}$   
 d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ ,  $\frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1} = \frac{(5-x)(25+5x+x^2)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x-5} = -\frac{x^2+5x+25}{x+1}$   
 e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $\frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \cdot \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = x^2+1$   
 f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$ ,  $\frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27} = \frac{x+4}{x^2-3x+9} \cdot \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x(x+4)} = \frac{x+3}{x}$

## Zadania

- Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?
  - $\frac{11x^2-5x-3}{x^2+4x+4}$
  - $\frac{17x^3-13x+2}{x^2-5x+6}$
  - $\frac{9x^4-2x^3+11x-6}{x^5-x^4-10x+4}$
- Które spośród liczb:  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  nie należą do dziedziny wyrażenia?
  - $\frac{16x^2+x+5}{x^3-9x^2}$
  - $\frac{x^2+6x+9}{x^4-4x^3+4x^2}$
  - $\frac{x^5-3x^4+x}{x^2-x-6}$
  - $\frac{2x^4-16x^3+9}{x^3-x^2-2x}$
- Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz wartość tego wyrażenia dla  $x = -1$ , jeśli liczba  $-1$  należy do jego dziedziny.
  - $\frac{x^6-7x^4}{x^3}$
  - $\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$
  - $\frac{x^4-3x^3}{x^4-9x^2}$
  - $\frac{-x^2+x^6}{x^4-2x^3+x^2}$
  - $\frac{2x^4+4x^3+2x^2}{x^3+x^2}$
  - $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$
  - $\frac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$
  - $\frac{2x^2+12x+18}{x^2+5x+6}$
- Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla  $x = -1$  i  $x = -2$ .
  - $\frac{2x^2-6x-10}{x^2+3x}$
  - $\frac{x^3-3x+3}{\frac{1}{2}x^2-1}$
  - $\frac{4x^2+8x}{\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}}$
  - $\frac{4x^3+4x^2+x}{2x^2-7x-4}$
- Zapisz dziedzinę wyrażenia jako sumę przedziałów. Oblicz wartości wyrażenia dla:  $x = -3, x = 1$  i  $x = 3$ .
  - $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$
  - $\frac{x^2+21}{x^2-3}$
  - $\frac{x+0,5}{4x^2-1}$
  - $\frac{3x^2-6x}{4x^2-9}$
- Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz wartość wyrażenia dla  $x = -2$ .
  - $\frac{4x+2}{x^2-x-2}$
  - $\frac{x^2+4x}{x^3+8x^2+16x}$
  - $\frac{x^3+x-2}{x^3-8}$
  - $\frac{2x^2+9x+4}{4x^2-1}$
  - $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$
  - $\frac{x^4-x}{x^3-2x^2+x}$
- Dane są wyrażenia  $A$  i  $B$ . Wyznacz dziedziny wyrażeń  $A, B$  oraz  $A \cdot B$ .
  - $A = \frac{x^2-2}{x^2-9x}, B = \frac{x^2+4x}{x^2+2x}$
  - $A = \frac{6x-5}{x^3-4x}, B = \frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$
  - $A = \frac{4x^2-1}{x^2-4}, B = \frac{9x-x^3}{4x-x^3}$
  - $A = \frac{5x^2-2x+4}{x^3-2x^2-x+2}, B = \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$
- Wykonaj mnożenie.
  - $\frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{3x}{2x-4}$
  - $\frac{3x+4,5}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+1,5}$
  - $\frac{x^2}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x^4}$
  - $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1}$
  - $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x-1}$
  - $\frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x}$
  - $\frac{4x^2-16}{6-3x} \cdot \frac{x^2}{4x+8}$
  - $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-1}$
  - $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-9}$

## Odpowiedzi do zadań

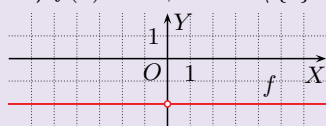
- a) tak b), c) nie
- a) 0 b) 0, 2  
c)  $-2, 3$  d)  $-1, 0, 2$
- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^3 - 7x, 6$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, 2(x+1), -1 \notin D$   
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x-1}{x+1}, -1 \notin D$   
d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{x+2}{x-2}, -\frac{1}{3}$   
e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x}{x+3}, -\frac{1}{2}$   
f)  $D = \mathbb{R}, \frac{x^2-1}{x^2+1}, 0$   
g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{(x^2+1)(x+1)}{x-1}, 0$   
h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}, \frac{2(x+3)}{x+2}, 4$
- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ , wartości kolejno:  $1, -5$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ , wartości kolejno:  $-10, 1$   
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$ , wartości kolejno:  $\frac{16}{3}, 0$   
d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 4\}$ , wartości kolejno:  $-\frac{1}{5}, -1$
- a)  $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$ , wartości kolejno:  $\frac{3}{5}, -1, 3$   
b)  $D = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ , wartości kolejno:  $5, -11, 5$   
c)  $D = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$ , wartości kolejno:  $-\frac{1}{14}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$   
d)  $D = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$ , wartości kolejno:  $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}$

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, -\frac{3}{2}$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, -\frac{2}{5}$   
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}, \frac{1}{2}$   
d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{4}$   
e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{3}{4}$  f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, -1$
- a)  $D_A = \mathbb{R} \setminus \{0, 9\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$   
b)  $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$   
c)  $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$   
d)  $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$
- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \frac{3}{2x}$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}, -3$   
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{3}{x^2}$   
d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$   
e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}, \frac{x+1}{2(x-1)}$   
f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}, \frac{(x-2)(x-3)}{x}$   
g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, -\frac{x^2}{3}$   
h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, -\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$   
i)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, x+3$

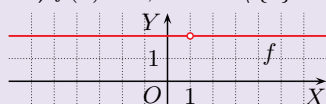
9. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{9}{2}$   
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, -\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$   
 c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}, \frac{2}{x}$   
 d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}, -\frac{2}{x-1}$   
 e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}, -\frac{x^2}{4}$   
 f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}, \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

10. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\}, (x+1)(x+3)$   
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\}, -\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$   
 c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}, \frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

11. a)  $f(x) = -2, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



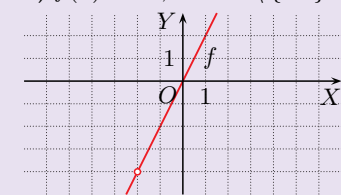
- b)  $f(x) = 2, D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



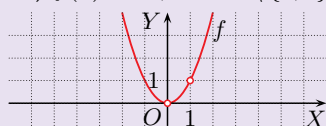
- c)  $f(x) = 3, D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$



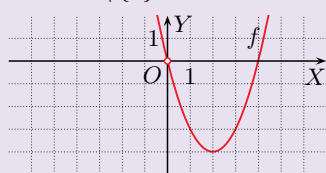
- d)  $f(x) = 2x, D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$



- e)  $f(x) = x^2, D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$



- f)  $f(x) = (x-2)^2 - 4, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



9. Wykonaj dzielenie.

a)  $\frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x}$

c)  $\frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x}$

e)  $\frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x}$

b)  $\frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2}$

d)  $\frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1}$

f)  $\frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

10. Uprość wyrażenie.

a)  $\frac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}}$

b)  $\frac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}}$

c)  $\frac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}}$

11. Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$  i narysuj jej wykres.

a)  $f(x) = \frac{-2}{\frac{x}{1}}$

c)  $f(x) = \frac{\frac{3x-6}{x}}{\frac{x-2}{x}}$

e)  $f(x) = \frac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$

b)  $f(x) = \frac{\frac{6}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$

d)  $f(x) = \frac{\frac{4x}{x+2}}{\frac{2}{x+2}}$

f)  $f(x) = \frac{\frac{2x-8}{2}}{\frac{x}{x^2}}$

12. Pole prostokąta wyraża się wzorem  $P = \frac{6}{x^2-4}$ , a długość jednego z jego boków jest równa  $\frac{2}{x-2}$ , gdzie  $x > 2$ . Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

| $a$                 | $b$                 | $P$                           |
|---------------------|---------------------|-------------------------------|
| $\frac{x+1}{x^2+1}$ | $\frac{1}{x+1}$     | $\frac{1}{x^2+1}$             |
| $\frac{6}{x^2+4}$   | $\frac{x+2}{2}$     | $\frac{3x+6}{x^2+4}, x > -2$  |
| $\frac{4}{x-3}$     | $\frac{x^2+2}{x+3}$ | $\frac{4x^2+8}{x^2-9}, x > 3$ |

13. Dany jest prostokąt o bokach  $a, b$  i polu  $P$ . Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij.

14. Wykonaj mnożenie.

a)  $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x}$

b)  $\frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4}$

c)  $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1}$

15. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Uprość wyrażenie  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4}$ .

Zakładamy, że  $x \neq y$  i  $x \neq -y$ .

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

Uprość wyrażenie.

a)  $\frac{(x+y)^3(x-y)}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^3+xy^2}{x^4-y^4}$

b)  $\frac{3x+y}{2x+y} \cdot \frac{8x^2+4xy}{9x^2-y^2}$

c)  $\frac{6x+3y}{8x^3+y^3} \cdot \frac{4x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

12.  $\frac{6}{x^2-4} : \frac{2}{x-2} = \frac{6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{2} = \frac{3}{x+2}$

14. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}, \frac{x(x+3)}{2(x+2)}$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}, -x^2+5x-4$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x+2}{x-1}$

15. a)  $x \neq -y, x \neq y, \frac{(x+y)^3(x-y)}{(x+y)^2} \cdot \frac{x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)} = x$

b)  $x \neq -\frac{1}{2}y, x \neq -\frac{1}{3}y, x \neq \frac{1}{3}y, \frac{3x+y}{2x+y} \cdot \frac{4x(2x+y)}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{4x}{3x-y}$

c)  $x \neq -\frac{1}{2}y, \frac{3(2x+y)}{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)} \cdot \frac{4x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{x^2+y^2}$



## R 3.5. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Reguły dodawania wyrażeń wymiernych są analogiczne do reguł dodawania ułamków. Szczególną uwagę należy zwrócić na dziedziny dodawanych wyrażeń.

### Przykład 1

Wykonaj dodawanie  $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$ . Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$ .

$$\begin{aligned}\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} &= \frac{-4x}{(2x+1)x} + \frac{2(2x+1)}{(2x+1)x} = \frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x} = \frac{2}{(2x+1)x}.\end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest  $(2x+1)x$ .

### Przykład 2

Wykonaj odejmowanie  $\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9}$ . Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \\&= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \\&= \frac{x+3-(1-x)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+2}{(x-3)(x+3)}.\end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest  $(x+3)(x-3)$ .

### Ćwiczenie 1

Wykonaj dodawanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

|                                    |                                          |                                           |
|------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|
| a) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+3}$ | c) $\frac{x+3}{x+4} + \frac{x-4}{x-1}$   | e) $\frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-x}$    |
| b) $\frac{x-5}{x} + \frac{x}{x+2}$ | d) $\frac{x+6}{x^2-9} + \frac{x-2}{x+3}$ | f) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x+1}$ |

### Ćwiczenie 2

Wykonaj odejmowanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

|                                  |                                       |                                             |
|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------|
| a) $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+3}$ | c) $\frac{x-1}{x+4} - \frac{x}{x+1}$  | e) $\frac{8}{x^2-16} - \frac{x+4}{x-4} + 1$ |
| b) $\frac{6}{x-2} - 3$           | d) $\frac{-4x}{x-4} - \frac{2x}{x+2}$ | f) $\frac{3x}{x+1} - \frac{x+2}{x} - 2$     |

### Ćwiczenie 3

Czy funkcja  $f$  jest funkcją homograficzną?

|                                                                    |                                                              |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{7x+7}{2x+4} + \frac{3x+5}{2x+4} - \frac{2x}{x+2}$ | b) $f(x) = \frac{x}{6-3x} - \frac{3}{x-2} + \frac{4x}{3x-6}$ |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|

### Ćwiczenie 3

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,

$$f(x) = \frac{10x+12}{2x+4} - \frac{4x}{2x+4} = \frac{6x+12}{2x+4} = \frac{6(x+2)}{2(x+2)} = 3 - \text{nie jest to funkcja homograficzna}$$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,

$$f(x) = \frac{-x}{3x-6} - \frac{9}{3x-6} + \frac{4x}{3x-6} = \frac{3x-9}{3x-6} = \frac{x-3}{x-2} - \text{jest to funkcja homograficzna}$$

### Uczeń:

- wyznacza dziedziny sumy i różnicy wyrażeń wymiernych,
- dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne,
- przekształca wzory, stosując działania na wyrażeniach wymiernych; wyznacza z danego wzoru wskazaną zmienną,
- wykorzystuje dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych do badania monotoniczności funkcji homograficznej.

### Ćwiczenie 1

|                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------|
| a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{6x-6}{x^2-9}$            |
| b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \frac{2x^2-3x-10}{x(x+2)}$     |
| c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}, \frac{2x^2+2x-19}{(x+4)(x-1)}$ |
| d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{x^2-4x+12}{x^2-9}$       |
| e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{4}{x^2-1}$            |
| f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$       |

### Ćwiczenie 2

|                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------|
| a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, \frac{6}{x(x+3)}$          |
| b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{12-3x}{x-2}$             |
| c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}, \frac{4x+1}{(x+4)(x+1)}$  |
| d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}, \frac{-6x^2}{(x-4)(x+2)}$  |
| e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}, -\frac{8x+24}{(x-4)(x+4)}$ |
| f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, -\frac{5x+2}{x(x+1)}$      |

### Ćwiczenie 4

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}, -\frac{2(x^2+12)}{x(x^2-16)}$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{8x}{(x-1)^2(x+1)}$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{7}{x(x-3)}$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 5\}, \frac{x-11}{x^2-25}$

e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{2(x^2-x-1)}{x(x-1)^2}$

f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}, \frac{4x+3}{x(4x^2-1)}$

### Ćwiczenie 5

a)  $f(x) = \frac{x+2-7}{x+2} = -\frac{7}{x+2} + 1$

Niech  $x_1, x_2 \in (-\infty; -2)$  oraz  $x_1 < x_2$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \\ &= \frac{-7}{x_2+2} - \frac{-7}{x_1+2} = \\ &= \frac{-7}{x_2+2} + \frac{7}{x_1+2} = \\ &= \frac{7(x_2-x_1)}{(x_1+2)(x_2+2)} > 0 \end{aligned}$$

gdyż  $x_2 - x_1 > 0$ ,  $x_1 + 2 < 0$  oraz  $x_2 + 2 < 0$ .

Zatem funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty; -2)$ .

b)  $f(x) = \frac{x-4+7}{x-4} = \frac{7}{x-4} + 1$

Niech  $x_1, x_2 \in (-\infty; 4)$  oraz  $x_1 < x_2$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \\ &= \frac{7}{x_2-4} - \frac{7}{x_1-4} = \\ &= \frac{7(x_1-x_2)}{(x_1-4)(x_2-4)} < 0 \end{aligned}$$

gdyż  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 - 4 < 0$  oraz  $x_2 - 4 < 0$ .

Zatem funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(-\infty; 4)$ .

### Przykład 3

Wykonaj odejmowanie  $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4}$ .

Dziedziną wyrażenia jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} &= \frac{1}{x(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{x(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{x-2-2x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest  $x(x+2)(x-2)$ .

### Ćwiczenie 4

Wykonaj działania.

a)  $\frac{3-x}{x^2+4x} - \frac{3+x}{x^2-4x}$

b)  $\frac{x+3}{x^2-2x+1} - \frac{x-3}{x^2-1}$

c)  $\frac{2}{x} - \frac{4}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2-3x}$

d)  $\frac{x+1}{x^2-25} - \frac{x+1}{x^2-5x} + \frac{x-1}{x^2+5x}$

e)  $\frac{2x-4}{x^2-2x+1} - \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x-1}$

f)  $\frac{6x-1}{4x^2-1} + \frac{3-2x}{2x^2-x} - \frac{1}{2x+1}$

### Przykład 4

Wykaż, że funkcja  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty; -3)$ .

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{x+3-4}{x+3} = \frac{-4}{x+3} + 1$$

Niech  $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$  oraz  $x_1 < x_2$ .

Badamy znak różnicy:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left( \frac{-4}{x_2+3} + 1 \right) - \left( \frac{-4}{x_1+3} + 1 \right) = \frac{-4}{x_2+3} + \frac{4}{x_1+3} = \\ &= \frac{-4(x_1+3) + 4(x_2+3)}{(x_1+3)(x_2+3)} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0 \end{aligned}$$

gdyż  $x_2 - x_1 > 0$ ,  $x_1 + 3 < 0$ ,  $x_2 + 3 < 0$ .

Zatem  $f(x_1) < f(x_2)$ , czyli funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty; -3)$ .

Funkcja  $f$  jest rosnąca w  $(-\infty; -3)$ , jeśli dla dowolnych  $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$ , takich że  $x_1 < x_2$ , zachodzi nierówność  $f(x_1) < f(x_2)$ , czyli  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

### Ćwiczenie 5

Wykaż, że funkcja  $f$  jest monotoniczna w podanym przedziale.

a)  $f(x) = \frac{x-5}{x+2}, (-2; \infty)$

b)  $f(x) = \frac{x+3}{x-4}, (-\infty; 4)$

c)  $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}, (-\infty; -1)$

d)  $f(x) = \frac{-3x-7}{x-5}, (-\infty; 5)$

e)  $f(x) = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$

Niech  $x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$  oraz  $x_1 < x_2$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &< x_2 + 1 \\ 3(x_1 + 1) &< 3(x_2 + 1) / : (x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ \frac{3}{x_2+1} &< \frac{3}{x_1+1} \\ \frac{3}{x_2+1} + 2 &< \frac{3}{x_1+1} + 2 \\ f(x_2) &< f(x_1) \end{aligned}$$

Zatem funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(-\infty; -1)$ .

d)  $f(x) = \frac{-3(x-5)-22}{x-5} = \frac{-22}{x-5} - 3$

Niech  $x_1, x_2 \in (-\infty; 5)$  oraz  $x_1 < x_2$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} x_1 - 5 &< x_2 - 5 / \cdot (-22) \\ -22(x_1 - 5) &> -22(x_2 - 5) / : \\ & / : (x_1 - 5)(x_2 - 5) \\ \frac{-22}{x_2-5} &> \frac{-22}{x_1-5} \\ \frac{-22}{x_2-5} - 3 &> \frac{-22}{x_1-5} - 3 \\ f(x_2) &> f(x_1) \end{aligned}$$

Zatem funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty; 5)$ .

## Zadania

### 1. Wykonaj działania.

a)  $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3}$

c)  $\frac{3x-6}{x-1} + \frac{6x-1}{2x+2}$

e)  $\frac{x}{x+5} + \frac{2-3x}{3x-1}$

b)  $\frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-1}$

d)  $\frac{3x-1}{x} - \frac{x-7}{2x-4}$

f)  $\frac{2x+1}{6-x} - \frac{3-2x}{x+6}$

### 2. Wykonaj działania.

a)  $\frac{x-6}{x-1} + \frac{2x-6}{x^2-1}$

c)  $\frac{3x}{x-1} + \frac{1-3x^2}{x^2-2x+1}$

e)  $\frac{x+2}{x^2} - \frac{x+3}{x^2+x}$

b)  $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{4}{2+x}$

d)  $\frac{2-x}{x+2} - \frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+4}$

f)  $\frac{x-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x^2-x}$

### 3. Wykonaj działania.

a)  $\frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{x^2+4}{x^2-4}$

c)  $\frac{x^2}{4x^2-9} + \frac{2-x}{2x-3} - \frac{6}{3-2x}$

b)  $\frac{4}{x^2+6x} - \frac{1-x}{2x} + \frac{x-1}{x+6}$

d)  $\frac{2x^2-7}{9x^2-6x+1} - \frac{2-3x^2}{3x-1} - x$

### 4. Uprość wyrażenie. Oblicz jego wartość dla $x = -3$ .

a)  $\frac{x^2+x-3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{2x-6} - 1$

b)  $\frac{-3x-3}{x^2-16} - \frac{x+1}{4-x} + \frac{5-x}{2x+8}$

### 5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

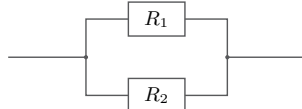
Wyznacz  $R_1$  ze wzoru  $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ .

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R_c}{R_c \cdot R_2}$$

Zatem  $R_1 = \frac{R_c \cdot R_2}{R_2 - R_c}$ .



$R_c$  jest oporem zastępczym układu dwóch oporników  $R_1$  i  $R_2$  połączonych równolegle.

Wyznacz  $R_2$  oraz  $R_c$  ze wzoru  $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ .

### 6. Wyznacz ze wzoru wskazaną zmienną.

a)  $P = \pi r^2 + \pi r l$ ,  $l$

e)  $F = mg - m\omega^2 R$ ,  $R$

b)  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ ,  $b$

f)  $F = mg - m\omega^2 R$ ,  $m$

c)  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ,  $h$

g)  $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ,  $m$

d)  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ,  $r$

h)  $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ,  $r$

6. a)  $l = \frac{P - \pi r^2}{\pi r}$

e)  $R = \frac{mg - F}{m\omega^2}$

b)  $b = \frac{2P}{h} - a$

f)  $m = \frac{F}{g - \omega^2 R}$

c)  $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

g)  $m = \frac{W r R}{GM(R-r)}$

d)  $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

h)  $r = \frac{RGMm}{WR + GMm}$

## Odpowiedzi do zadań

1. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ ,  $\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$ ,  $\frac{-x+10}{(x-1)(x-4)}$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $\frac{12x^2-13x-11}{2(x^2-1)}$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ ,  $\frac{5x^2-7x+4}{2x(x-2)}$

e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, \frac{1}{3}\}$ ,  $\frac{-14x+10}{(x+5)(3x-1)}$

f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, 6\}$ ,  $\frac{28x-12}{36-x^2}$

2. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $\frac{x^2-3x-12}{x^2-1}$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  $\frac{8}{x^2-4}$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $\frac{1-3x}{(x-1)^2}$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  $\frac{-2x^2-3x}{(x+2)^2}$

e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ,  $\frac{2}{x^2(x+1)}$

f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ,  $\frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)}$

3. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  $\frac{2x}{x^2-4}$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$ ,  $\frac{3x^2+3x+2}{2x(x+6)}$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$ ,  $\frac{-x^2+13x+24}{4x^2-9}$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ ,  $\frac{5x^2-7x-5}{(3x-1)^2}$

4. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,  $\frac{-x^2+15x-18}{2(x-3)^2}$ ,  $-1$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ ,  $\frac{x^2+13x-18}{2(x^2-16)}$ ,  $\frac{24}{7}$

5.  $R_2 = \frac{R_1 R_c}{R_1 - R_c}$ ,  $R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

### Uczeń:

- rozwiązuje równania wymierne, podaje i uwzględnia odpowiednie założenia.

### Ćwiczenie 1

- a)  $x = -4$   
b)  $x = \frac{1}{3}$   
c)  $x = -\frac{1}{2}$   
d)  $x = \frac{3}{2}$

### Komentarz

Kolejne etapy rozwiązywania równania wymiernego  $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$  warto omówić bardziej szczegółowo i zaproponować uczniom, aby rozszerzyli ten plan własnymi słowami. To pozwoli im na powtórzenie i lepsze zapamiętanie materiału.

### Ćwiczenie 2

- a) Zakładamy, że  $x \neq -2$ .

$$\frac{\frac{3}{2}x+3}{x+2} = 0 \quad / \cdot \frac{2}{3}$$
$$\frac{x+2}{x+2} = 0$$
$$1 = 0$$

Równanie jest sprzeczne.

- b) Zakładamy, że  $x \neq \frac{3}{2}$ .

$$\frac{-3x+\frac{9}{2}}{2x-3} = 0 \quad / \cdot \frac{2}{3}$$
$$\frac{-2x+3}{2x-3} = 0$$
$$-1 = 0$$

Równanie jest sprzeczne.

## 3.6. Równania wymierne (1)

### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $\frac{-2x+8}{x-3} = 0$ .

Zakładamy, że  $x - 3 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ . W wyznaczonej dziedzinie wyjściowe równanie jest równoważne równaniu:

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Liczba 4 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x+4}{x+2} = 0$       b)  $\frac{6x-2}{x} = 0$       c)  $\frac{4x+2}{2x-4} = 0$       d)  $\frac{2x-3}{2x+1} = 0$

### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $\frac{\frac{3}{2}x-6}{x-4} = 0$ .

Zakładamy, że  $x - 4 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 6 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ \frac{3}{2}x &= 6 \quad / \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Równanie jest sprzeczne, ponieważ liczba 4 nie spełnia założenia.

### D Ćwiczenie 2

Wykaż, że podane równanie jest sprzeczne.

a)  $\frac{\frac{3}{2}x+3}{x+2} = 0$       b)  $\frac{-3x+\frac{9}{2}}{2x-3} = 0$

Rozwiązywanie równania wymiernego  $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$  składa się z kilku etapów:

- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu  $w$  i przyjęcie założeń,
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu  $u$ ,
- uwzględnienie założeń i sformułowanie odpowiedzi.

### Przykład 3

Rozwiąż równanie  $\frac{(8x-4)(x+2)}{x(x-\frac{1}{2})} = 0$ .

Zakładamy, że  $x(x - \frac{1}{2}) \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ .

$$(8x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 8x - 4 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = -2$$

Liczba  $\frac{1}{2}$  nie spełnia założenia, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba  $-2$ .

### Multibook

- Kreator wykresów
- Równania wymierne

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.6

 **Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x(x-3)}{x(x+2)} = 0$       b)  $\frac{(x+\frac{1}{2})(x+4)}{(x-3)(2x+1)} = 0$       c)  $\frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9} = 0$

### Przykład 4

Rozwiąż równanie  $\frac{x^2-2x}{x^2-4} = 0$ .

Zakładamy, że  $x^2 - 4 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ .

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = 2$$

Odrzucamy  $x = 2$  jako sprzeczne z założeniem, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 0.

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x^2+4x}{x(x-6)} = 0$       b)  $\frac{x^2-16}{2x^2+8x} = 0$       c)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = 0$

## Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x-7}{x+3} = 0$       b)  $\frac{7x+21}{x-3} = 0$       c)  $\frac{-3x+9}{x-6} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{(x-3)(x+6)}{(x+3)(x+2)} = 0$       b)  $\frac{(2x+8)(x-16)}{x^2-16} = 0$       c)  $\frac{(9-x)(2-6x)}{x^2-1} = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x(x-5)(x+\frac{1}{3})}{(3x+1)(x+2)} = 0$       c)  $\frac{(x-3)(6x-4)}{(2x-3)(x+3)x} = 0$       e)  $\frac{x(3x-2)(9x-4)}{x^2(9x^2-4)} = 0$   
b)  $\frac{x(x+2)(x-4)}{x(x-2)(x+4)} = 0$       d)  $\frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x+2)(4-x)} = 0$       f)  $\frac{(2x+1)(x+3)}{x(4x^2-1)} = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-4x+1} = 0$       c)  $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = 0$       e)  $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2} = 0$   
b)  $\frac{9x^2+12x+4}{3x^2-x-2} = 0$       d)  $\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2} = 0$       f)  $\frac{6x^2+x-1}{3x^2+5x-2} = 0$

5. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x^3+2x^2+x}{(x+1)(x+2)} = 0$       c)  $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x} = 0$       e)  $\frac{x^3-7x^2+12x}{2x^4-5x^3-3x^2} = 0$   
b)  $\frac{x^3-9x}{x^2-6x+9} = 0$       d)  $\frac{2x^4+4x^3+x^2}{x^4-2x^2+1} = 0$       f)  $\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x} = 0$

5. a)  $x = 0$

b)  $x = -3, x = 0$

c) sprzeczne

d)  $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 0$

e)  $x = 4$

f)  $x = -2, x = -1$

### Ćwiczenie 3

a)  $x = 3$

b)  $x = -4$

c)  $x = -2$

### Ćwiczenie 4

a)  $x = -4$

b)  $x = 4$

c) sprzeczne

### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $x = 7$

b)  $x = -3$

c)  $x = 3$

2. a)  $x = -6, x = 3$

b)  $x = 16$

c)  $x = \frac{1}{3}, x = 9$

3. a)  $x = 0, x = 5$

b)  $x = -2, x = 4$

c)  $x = \frac{2}{3}, x = 3$

d)  $x = 3$

e)  $x = \frac{4}{9}$

f)  $x = -3$

4. a)  $x = -3$

b) sprzeczne

c)  $x = -1$

d)  $x = 4$

e)  $x = \frac{1}{2}$

f)  $x = -\frac{1}{2}$

### Uczeń:

- rozwiązuje równania wymierne i uwzględnia odpowiednie założenia,
- znajduje współrzędne punktów wspólnych hiperboli i prostej,
- rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, w których występują wyrażenia wymierne.

### Ćwiczenie 1

- a)  $x = \frac{1}{2}$
- b)  $x = 1$
- c)  $x = 2$
- d)  $x = 3$
- e)  $x = 2$
- f)  $x = 3$
- g)  $x = -\frac{7}{5}$
- h)  $x = 0$

### Ćwiczenie 2

- a)  $x = -2$  lub  $x = 1$
- b)  $x = -1$
- c)  $x = -5$  lub  $x = -1$
- d)  $x = 3$
- e)  $x = -6$  lub  $x = 1$
- f)  $x = -4$  lub  $x = -2$
- g)  $x = -3$  lub  $x = 1$
- h)  $x = 1$  lub  $x = \frac{3}{2}$

## 3.7. Równania wymierne (2)

### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $\frac{6}{x-1} = 4$ .

Zakładamy, że  $x-1 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

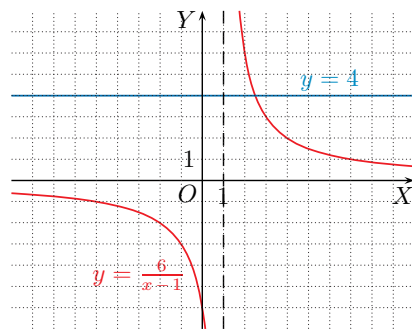
$$\frac{6}{x-1} = 4 / \cdot (x-1)$$

$$6 = 4x - 4$$

$$10 = 4x$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Liczba  $\frac{5}{2}$  spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.



Hiperbola  $y = \frac{6}{x-1}$  i prosta  $y = 4$  przecinają się w punkcie o odciętej  $\frac{5}{2}$ .

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{6}{x+1} = 4$

c)  $\frac{3}{-2x+7} = 1$

e)  $\frac{7x+6}{1-3x} = -4$

g)  $\frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0$

b)  $\frac{3x+2}{x} = 5$

d)  $\frac{2x}{x-1} = 3$

f)  $\frac{4-2x}{4-x} = -2$

h)  $\frac{2x+4}{x-1} + 4 = 0$

### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $\frac{2}{x-2} = x-1$ .

Zakładamy, że  $x-2 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

$$\frac{2}{x-2} = x-1 / \cdot (x-2)$$

$$2 = (x-1)(x-2)$$

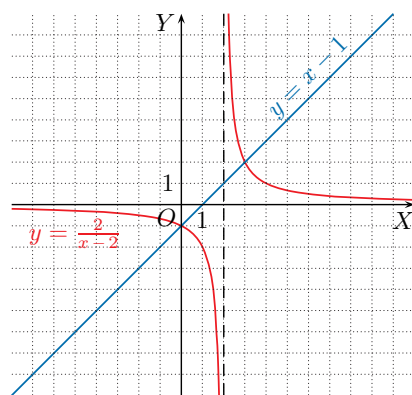
$$2 = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Liczby 0 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola  $y = \frac{2}{x-2}$  i prosta  $y = x-1$  przecinają się w punktach o odciętych 0 oraz 3.

### Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{2}{x} = x+1$

c)  $\frac{4}{x+3} = x+3$

e)  $\frac{6}{x} - 5 = x$

g)  $\frac{3}{x+2} = x$

b)  $-\frac{1}{x} = x+2$

d)  $\frac{9}{6-x} = x$

f)  $\frac{8}{x} + x = -6$

h)  $-\frac{6}{x-3} = 2x+1$

### Multibook

- Kreator wykresów
- Równania wymierne

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.7

**Generator**  
testów i sprawdzianów



### Przykład 3

Rozwiąż równanie  $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$ .

Zakładamy, że  $x+1 \neq 0$  i  $x-2 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ .

Przekształcamy równanie równoważnie przez pomnożenie „na krzyż”.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &= \frac{3}{x-2} \\ 2(x-2) &= 3(x+1) \\ 2x-4 &= 3x+3 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Liczba  $-7$  spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Dla  $b \neq 0$  i  $d \neq 0$  równość:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

jest równoważna równości:

$$ad = bc$$

Mnożenie „na krzyż” jest tym samym co pomnożenie obu stron równania przez iloczyn mianowników:

$$(x+1)(x-2)$$

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$

c)  $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$

e)  $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

b)  $\frac{4}{x-4} = \frac{3}{x-6}$

d)  $\frac{4}{2x-1} = \frac{-3}{3x+2}$

f)  $\frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1}$

### Przykład 4

Rozwiąż równanie  $\frac{x+4}{2x+1} - \frac{5}{x+2} = 0$ .

Zakładamy, że  $2x+1 \neq 0$  i  $x+2 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{2x+1} &= \frac{5}{x+2} \\ (x+4)(x+2) &= 5(2x+1) \\ x^2 + 6x + 8 &= 10x + 5 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \Delta &= (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \sqrt{\Delta} = 2 \\ x_1 &= \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{aligned}$$

Liczby 1 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{2x-5}$

c)  $\frac{x-1}{x} = \frac{2x-2}{x-8}$

e)  $\frac{x}{x+3} = \frac{6}{x+6}$

b)  $\frac{x+5}{2x+1} = \frac{1}{x+1}$

d)  $\frac{2x-2}{x-4} = \frac{x+3}{x}$

f)  $\frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1}$

### Ćwiczenie 3

a)  $x = -8$

b)  $x = 12$

c)  $x = -\frac{1}{4}$

d)  $x = -\frac{5}{18}$

e)  $x = 4$

f)  $x = -3$

### Ćwiczenie 4

a)  $x = 4, x = 6$

b)  $x = -2$

c)  $x = -8, x = 1$

d) sprzeczne

e)  $x = -3\sqrt{2}$  lub  $x = 3\sqrt{2}$

f)  $x = -9$  lub  $x = 0$

## Odpowiedzi do zadań

- $x = -8$
  - $x = 8$
  - $x = 2$
  - $x = 0$
  - $x = -1$
  - $x = 1$  lub  $x = 2$
- $x = -\frac{5}{2}$
  - $x = -2$
  - $x = -1$
  - $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $x = 6 - \sqrt{7}$  lub  $x = 6 + \sqrt{7}$
  - $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$  lub  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$
- $x = -5$  lub  $x = 3$
  - $x = 3$
  - $x = -3$
  - $x = 2$
  - $x = 1$
  - Równanie nie ma pierwiastków całkowitych.
- Równanie I nie ma rozwiązania, równania II, III, IV mają nieskończenie wiele rozwiązań.
- 1
  - 0
  - nieskończenie wiele
  - 2
  - nieskończenie wiele
  - 1
- $x = -5,5$
  - $x = -6$
  - $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
  - $x = -\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$  lub  $x = \frac{-3+3\sqrt{2}}{2}$
  - $x = 2$  lub  $x = 3$
  - $x = -8$
- $a = -\sqrt{2}$  lub  $a = 0$  lub  $a = \sqrt{2}$

## Zadania

- Rozwiąż równanie.
  - $\frac{4}{x} = \frac{3}{2+x}$
  - $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 0$
  - $\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}$
  - $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2}$
  - $\frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x+1}$
  - $\frac{x+1}{2x-1} - \frac{2}{x} = 0$
- Rozwiąż równanie.
  - $\frac{x+2}{x+4} - \frac{x+4}{x-2} = 0$
  - $\frac{4}{x} + \frac{x}{x+1} = 0$
  - $\frac{x+4}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$
  - $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x+1} = 0$
  - $\frac{8-2x}{x-1} + \frac{x-3}{x-4} = 0$
  - $\frac{2-x}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = 0$
- Znajdź pierwiastki całkowite równania.
  - $\frac{x}{-3} = \frac{-5}{x+2}$
  - $x = \frac{5x+3}{2x}$
  - $x+1 = \frac{2-2x}{x-1}$
  - $\frac{3}{x-1} = 2x-1$
  - $\frac{6x-4}{2-3x} = -2x$
  - $6x+1 = \frac{2}{x}$
- Które z podanych równań nie mają rozwiązań, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?
 

I.  $\frac{3x-3}{x-1} = 2$     II.  $\frac{6x-2}{3x-1} = 2$     III.  $\frac{1-4x}{8x-2} = -0,5$     IV.  $\frac{3x+9}{10x+30} = 0,3$
- Podaj liczbę rozwiązań równania.
  - $x+1 = \frac{2-2x}{x-1}$
  - $\frac{2x-2}{x-2} = \frac{x}{x-1}$
  - $\frac{6x-4}{2-3x} = -2$
  - $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{3x+1}$
  - $\frac{3-x}{2x-1} = \frac{2x-6}{2-4x}$
  - $x = \frac{3x-3}{x-1}$
- Rozwiąż równanie.
  - $\frac{2}{5x+10} = \frac{-3}{x^2-4}$
  - $\frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$
  - $\frac{1}{1-x} + \frac{x}{x-1} = 1$
  - $\frac{2x}{2x+3} - 1 = \frac{2x}{2x-3}$
  - $\frac{6}{x} - 1 = \frac{2}{x-1}$
  - $\frac{2x+1}{x^2-9} - \frac{3}{x-3} = 0$
- Dla jakiej wartości parametru  $a$  równanie  $\frac{a^2x-4}{2x-4} = 0$  jest sprzeczne?
- Rozwiąż równanie.
  - $\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x} = 2$
  - $\frac{3-x}{4x^2+4x+1} - \frac{5x}{2x+1} = 0$
  - $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1-x}{x^2+2x+1}$
  - $\frac{2x+1}{x^2+6x+9} + \frac{x-1}{9-x^2} = 0$
  - $\frac{2}{x+4} + \frac{3}{x-4} = \frac{14}{x^2-16}$
  - $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} + \frac{1}{2x} = 0$
  - $\frac{x+5}{x-4} + \frac{3}{x} = \frac{36}{x^2-4x}$
  - $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{4}{x^2-4}$
- $x = 0$  lub  $x = \frac{1}{2}$
  - $x = \frac{-3-\sqrt{39}}{10}$  lub  $x = \frac{-3+\sqrt{39}}{10}$
  - sprzeczne
  - $x = 0$  lub  $x = 7$
  - $x = 2$
  - $x = \frac{2}{7}$
  - $x = -12$
  - $x = -1$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji  $y = \frac{x+1}{x-2}$  i prostej  $y = x - 3$ .

Zakładamy, że  $x - 2 \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{x+1}{x-2} = x-3 \quad / \cdot (x-2)$$

$$x+1 = (x-2)(x-3)$$

$$x+1 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

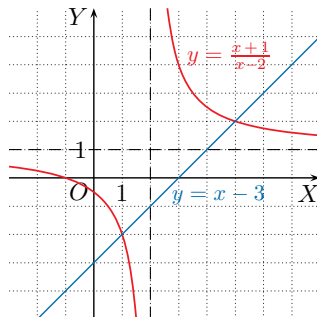
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

Obliczamy drugie współrzędne punktów wspólnych:

$$y_1 = 1 - 3 = -2, \quad y_2 = 5 - 3 = 2$$

Zatem punktami wspólnymi hiperboli i prostej są  $(1, -2)$  i  $(5, 2)$ .



Wyznacz współrzędne punktów wspólnych hiperboli  $y = \frac{2x+2}{x-1}$  i prostej:

a)  $y = x + 1$ ,

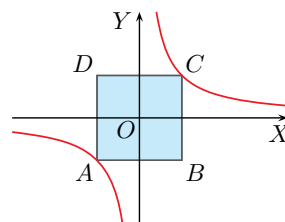
b)  $y = 2x + 2$ ,

c)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

10. Osie układu współrzędnych są osiami symetrii kwadratu  $ABCD$  (rysunek obok). Wierzchołki  $A$  i  $C$  należą do hiperboli  $y = \frac{a}{x}$ . Podaj współrzędne wierzchołków kwadratu i oblicz jego pole dla:

a)  $a = 4$ ,

b)  $a = 3$ .



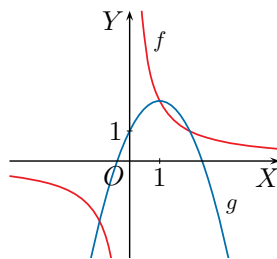
11. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a)  $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y = \frac{-4}{x-2} \\ y = -x - 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y = \frac{-x-1}{x+3} \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

12. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji  $f(x) = \frac{2}{x}$  i  $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ . Wyznacz współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.

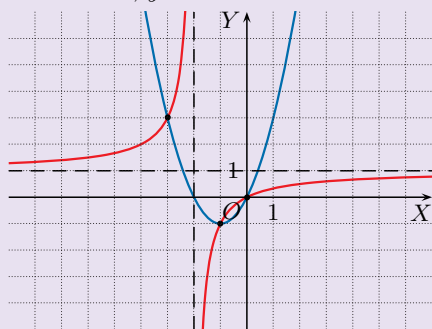


13. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

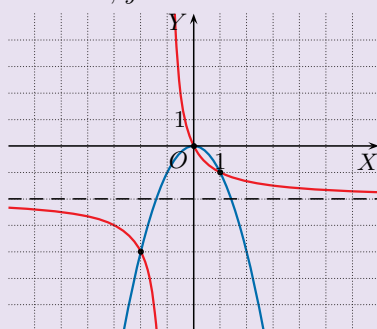
a)  $\begin{cases} y = \frac{x}{x+2} \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y = \frac{-2x}{x+1} \\ y = -x^2 \end{cases}$

13. a)  $x = -3, y = 3$  lub  $x = -1, y = -1$   
lub  $x = 0, y = 0$



- b)  $x = -2, y = -4$  lub  $x = 0, y = 0$   
lub  $x = 1, y = -1$



9. a)  $P_1(-1, 0), P_2(3, 4)$

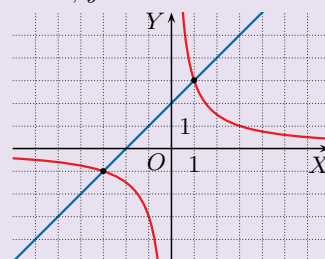
b)  $P_1(-1, 0), P_2(2, 6)$

c)  $P_1(-1, 0), P_2(5, 3)$

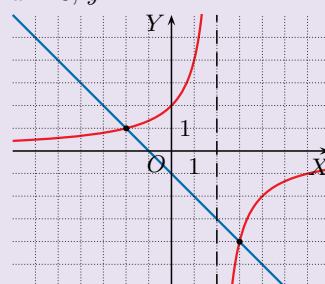
10. a)  $A(-2, -2), B(2, -2), C(2, 2), D(-2, 2), P = 16$

b)  $A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), B(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), C(\sqrt{3}, \sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), P = 12$

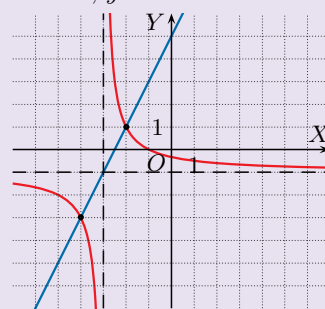
11. a)  $x = -3, y = -1$  lub  $x = 1, y = 3$



b)  $x = -2, y = 1$  lub  $x = 3, y = -4$



c)  $x = -4, y = -3$  lub  $x = -2, y = 1$



12.  $P_1(-1, -2), P_2(1, 2), P_3(2, 1)$

**Uczeń:**

- odczytuje z danego wykresu zbiór rozwiązań nierówności wymiernej,
- rozwiązuje nierówności wymierne i podaje odpowiednie założenia,
- stosuje nierówności wymierne do porównywania wartości funkcji,
- rozwiązuje graficznie nierówności wymierne,
- rozwiązuje układy nierówności wymiernych.

**Ćwiczenie 1**

- a)  $x \neq 0$ ,  $2x(x-2) < 0$ ,  
 $x \in (0; 2)$   
 b)  $x \neq 0$ ,  $x(x+2) \leq 0$ ,  
 $x \in [-2; 0)$   
 c)  $x \neq 0$ ,  $2x(4x+3) \leq 0$ ,  
 $x \in [-\frac{3}{4}; 0)$   
 d)  $x \neq 0$ ,  $4x(8x+3) > 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -\frac{3}{8}) \cup (0; \infty)$

**R 3.8. Nierówności wymierne****Przykład 1**

Rozwiąż nierówność  $\frac{3}{x} < -1$ .

Zakładamy, że  $x \neq 0$ .

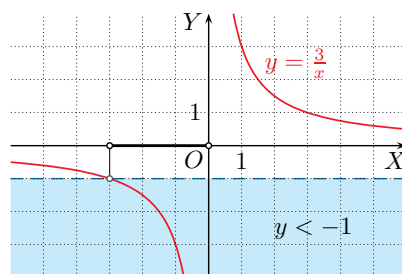
$$\frac{3}{x} < -1$$

$$\frac{3}{x} + 1 < 0$$

$$\frac{3+x}{x} < 0$$

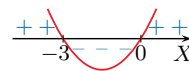
$$(3+x)x < 0$$

Iloraz dwóch liczb różnych od zera ma taki sam znak jak ich iloczyn.



Rozwiązanie nierówności  $\frac{3}{x} < -1$  można również odczytać z wykresu.

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności:  $x \in (-3; 0)$ .



**Uwaga.** Nierówność  $\frac{3}{x} < -1$  można również rozwiązać, mnożąc jej obie strony przez kwadrat mianownika (kwadrat wyrażenia różnego od zera jest zawsze dodatni). Otrzymujemy wtedy nierówność  $3x < -x^2$ .

**Ćwiczenie 1**

Rozwiąż nierówność.

- a)  $\frac{4}{x} > 2$       c)  $-\frac{3}{2x} \geq 2$   
 b)  $\frac{2}{x} \leq -1$       d)  $-\frac{3}{4x} < 2$

Dla  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  znak ilorazu  $\frac{a}{b}$  jest taki sam jak znak iloczynu  $a \cdot b$ .

**Przykład 2**

Rozwiąż nierówność  $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$ .

Zakładamy, że  $x \neq 3$ .

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leq 0$$

$$\frac{2x-5-3(x-3)}{x-3} \leq 0$$

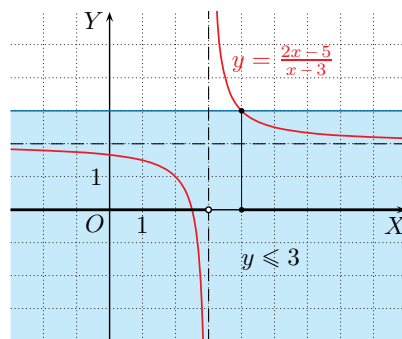
$$\frac{-x+4}{x-3} \leq 0$$

$$-(x-4)(x-3) \leq 0 \quad / \cdot (-1)$$

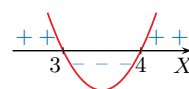
$$(x-4)(x-3) \geq 0$$

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$x \in (-\infty; 3) \cup [4; \infty)$$



Rozwiązanie nierówności  $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$  można również odczytać z wykresu.

**Multibook**

- Kreator wykresów
- Równania wymierne

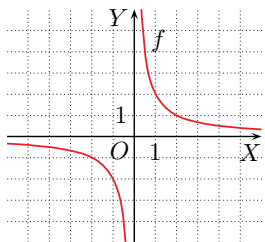
dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.8

**Generator**  
testów i sprawdzianów

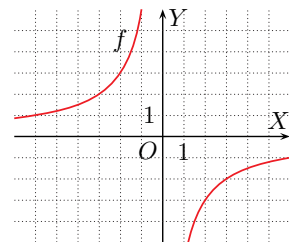
### Ćwiczenie 2

Odczytaj z wykresu funkcji  $f$  zbiory rozwiązań nierówności  $f(x) > 2$  oraz  $f(x) \geq -2$ . Sprawdź odpowiedzi, rozwiązując odpowiednie nierówności.

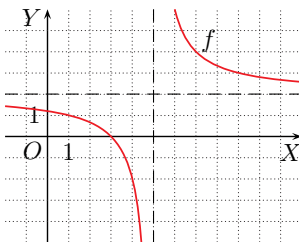
a)  $f(x) = \frac{2}{x}$



b)  $f(x) = -\frac{6}{x}$



c)  $f(x) = \frac{2x-6}{x-5}$



### Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{3}{x-2} \geq 1$

c)  $\frac{2}{4-x} < 3$

e)  $\frac{1-x}{x} \leq -4$

g)  $\frac{2x+3}{x+3} < 5$

b)  $\frac{2x+7}{x-4} > 3$

d)  $\frac{4x-7}{x-2} \leq 5$

f)  $\frac{2x-2}{x+1} > 2$

h)  $\frac{-7x+2}{x+\frac{1}{2}} \leq -6$

### Przykład 3

Rozwiąż nierówność  $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+2} \geq 2$ .

Zakładamy, że  $x \neq -2$  i  $x \neq 3$ .

$$\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)} + \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)} \geq \frac{2(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest  $(x+2)(x-3)$ .

$$\frac{x^2+2x}{(x+2)(x-3)} + \frac{x^2-3x}{(x+2)(x-3)} - \frac{2x^2-6x+4x-12}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{x+12}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

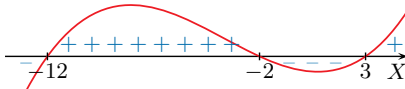
$$(x+12)(x+2)(x-3) \geq 0$$

Iloraz i iloczyn dwóch liczb mają ten sam znak.

Szkicujemy wykres wielomianu:

$$w(x) = (x+12)(x+2)(x-3)$$

Jego pierwiastkami są liczby:  $-12$ ,  $-2$  i  $3$ .



Odczytujemy rozwiązanie nierówności (z uwzględnieniem założeń):

$$x \in [-12; -2) \cup (3; \infty)$$

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} \leq 1$

c)  $\frac{x+3}{x-2} + 1 \leq \frac{7}{(x-2)^2}$

e)  $\frac{3}{x+2} \geq \frac{6}{x} - \frac{7}{x+3}$

b)  $\frac{x-1}{x+2} > 4 - \frac{3x}{x+4}$

d)  $1 - \frac{x}{x+1} \geq \frac{x-2}{x-1}$

f)  $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

### Ćwiczenie 4

a)  $x \neq 1$  i  $x \neq 3$ ,  $(7x-9)(x-3)(x-1) \leq 0$ ,  $x \in (-\infty; 1) \cup [\frac{9}{7}; 3)$

b)  $x \neq -2$  i  $x \neq -4$ ,  $(-15x-36)(x+2)(x+4) > 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{12}{5}; -2)$

c)  $x \neq 2$ ,  $(2x^2-3x-9)(x-2)^2 \leq 0$ ,  $x \in [-\frac{3}{2}; 2) \cup (2; 3]$

d)  $x \neq -1$  i  $x \neq 1$ ,  $(-x^2+2x+1)(x+1)(x-1) \geq 0$ ,  
 $x \in (-1; 1-\sqrt{2}] \cup (1; 1+\sqrt{2}]$

e)  $x \neq -3$  i  $x \neq -2$  i  $x \neq 0$ ,  $(4x^2-7x-36)(x+2)(x+3)x \geq 0$ ,  
 $x \in (-3; -\frac{9}{4}] \cup (-2; 0) \cup [4; \infty)$

f)  $x \neq -1$  i  $x \neq 0$  i  $x \neq 1$ ,  $(x^2+2x-1)(x-1)(x+1)x < 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1; 0) \cup (-1+\sqrt{2}; 1)$

### Ćwiczenie 2

a)  $f(x) > 2$  dla  $x \in (0; 1)$ ,  
 $f(x) \geq -2$  dla  $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$

b)  $f(x) > 2$  dla  $x \in (-3; 0)$ ,  
 $f(x) \geq -2$  dla  $x \in (-\infty; 0) \cup [3; \infty)$

c)  $f(x) > 2$  dla  $x \in (5; \infty)$ ,  
 $f(x) \geq -2$  dla  $x \in (-\infty; 4] \cup (5; \infty)$

### Ćwiczenie 3

a)  $x \neq 2$ ,  $(5-x)(x-2) \geq 0$ ,  
 $x \in (2; 5]$

b)  $x \neq 4$ ,  $(x-4)(-x+19) > 0$ ,  
 $x \in (4; 19)$

c)  $x \neq 4$ ,  $(4-x)(3x-10) < 0$ ,  
 $x \in (-\infty; \frac{10}{3}) \cup (4; \infty)$

d)  $x \neq 2$ ,  $(3-x)(x-2) \leq 0$ ,  
 $x \in (-\infty; 2) \cup [3; \infty)$

e)  $x \neq 0$ ,  $x(3x+1) \leq 0$ ,  
 $x \in [-\frac{1}{3}; 0)$

f)  $x \neq -1$ ,  $x+1 < 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -1)$

g)  $x \neq -3$ ,  $(-3x-12)(x+3) < 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; \infty)$

h)  $x \neq -\frac{1}{2}$ ,  $(5-x)(x+\frac{1}{2}) \leq 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [5; \infty)$

## Odpowiedzi do zadań

1. a)  $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$   
 b)  $x \in (-7; 3)$   
 c)  $x \in (-\infty; -7) \cup (-\frac{19}{3}; \infty)$   
 d)  $x \in (-\infty; \frac{9}{7}] \cup (\frac{5}{2}; \infty)$   
 e)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup (0; \infty)$   
 f)  $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$   
 g)  $x \in (-\infty; 5) \cup [10; \infty)$   
 h)  $x \in (-\frac{5}{2}; -\frac{13}{9}]$
2. a)  $x \in (-\infty; -2) \cup [-\frac{3}{2}; \infty)$   
 i)  $x > -2$ , zatem  $x \in [-\frac{3}{2}; \infty)$   
 b)  $x \in (-\infty; -1] \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$   
 i)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \infty)$ ,  
 zatem  $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$   
 c)  $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$   
 i)  $x > -1$ , zatem  $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$   
 d)  $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$   
 i)  $x > -1$ , zatem  $x \in (0; \infty)$   
 e)  $x < -1$  i  $x > -3$ ,  
 zatem  $x \in (-3; -1)$   
 f)  $x \in [-4; 2)$  i  $x \in [3; 5)$ ,  
 zatem układ sprzeczny
3. a)  $x \in (3; 4) \cup [5; \infty)$   
 b)  $x \in (-\infty; -5] \cup (-\frac{7}{2}; -3] \cup (-2; \infty)$   
 c)  $x \in (-1; 0) \cup (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$   
 d)  $x \in (-2; -\frac{1}{11}) \cup (1; \infty)$   
 e)  $x \in [-2; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$   
 f)  $x \in [-3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}) \cup [-3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; 3)$
4. a)  $A \cup B = (-\infty; -3] \cup (-2; \infty)$ ,  
 $A \cap B = (-1; 2)$ ,  
 $A \setminus B = (-2; -1]$   
 b)  $A \cup B = (-\infty; 2) \cup (3; 5]$ ,  
 $A \cap B = (-\infty; 1)$ ,  $A \setminus B = \emptyset$   
 c)  $A \cup B = (-\infty; -1) \cup (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{10}] \cup [0; \infty)$ ,  
 $A \cap B = (\frac{5}{2}; \infty)$ ,  
 $A \setminus B = (-\infty; -1) \cup [0; \frac{5}{2}]$
5. a)  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$   
 b)  $x \in [-\frac{1}{2}; 0)$   
 c)  $x \in \{0\} \cup (3; \infty)$   
 d)  $x \in (-\infty; -4) \cup [1; 4) \cup [5; \infty)$   
 e)  $x \in (-\infty; -5] \cup (-4; 0) \cup (0; 4)$   
 f)  $x \in (-2; -\frac{\sqrt{10}}{2}) \cup (-1; 0) \cup (\frac{\sqrt{10}}{2}; \infty)$   
 g)  $x \in (-\infty; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; -2) \cup (0; \infty)$   
 h)  $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$   
 i)  $x \in (-2; 0] \cup (2; 3]$

## Zadania

### 1. Rozwiąż nierówność.

- a)  $\frac{-6x+1}{2x+2} < 4$     c)  $\frac{x+5}{x+7} > -2$     e)  $\frac{3x+2}{5x} \geq -1$     g)  $\frac{-4x-5}{5-x} \leq 9$   
 b)  $\frac{8x+6}{3-x} > -5$     d)  $\frac{3x+1}{5-2x} \leq 2$     f)  $\frac{3x+6}{1-2x} > -4$     h)  $\frac{-x+7}{2x+5} \geq 4$

### 2. Rozwiąż układ nierówności.

- a)  $0 \leq \frac{2}{x+2} \leq 4$     c)  $-1 < \frac{3x+1}{x+1} < 3$     e)  $\frac{x+2}{x+1} \leq 1 \leq \frac{x+6}{x+3}$   
 b)  $-2 \leq \frac{2}{2x+1} < 2$     d)  $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$     f)  $\frac{x+4}{x-2} \leq 0 \leq \frac{3-x}{x-5}$

### 3. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

- a)  $\frac{x-3}{x-4} \leq \frac{x-1}{x-3}$     c)  $\frac{4-2x}{x+1} > \frac{1-x}{x}$     e)  $\frac{4-x}{2x-2} \geq \frac{x-3}{1-2x}$   
 b)  $\frac{x+3}{x+2} \geq \frac{x+3}{2x+7}$     d)  $\frac{x+3}{1-x} < \frac{5-x}{x+2}$     f)  $\frac{4x+2}{2x-6} \leq \frac{2x+2}{2x+3}$

### 4. Wyznacz zbiory: $A \cup B$ , $A \cap B$ oraz $A \setminus B$ .

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R}: \frac{8}{x+2} > 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: \frac{4}{x+1} \geq -2\}$   
 b)  $A = \{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{x-1} < 1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: \frac{x-1}{x-3} \geq \frac{x+1}{x-2}\}$   
 c)  $A = \{x \in \mathbb{R}: \frac{2x+1}{x+1} \geq 1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: \frac{4x-1}{4x+3} \leq \frac{2x+3}{2x-5}\}$

### 5. Rozwiąż nierówność.

- a)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} > 0$     d)  $\frac{2x-5}{x^2-16} \leq \frac{x}{x+4}$     g)  $\frac{2x+1}{2x^2+7x} < \frac{2x+3}{2x^2+5x}$   
 b)  $\frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} \leq 0$     e)  $\frac{x+3}{x^2-16} \geq \frac{2x}{x^2-4x}$     h)  $\frac{2x}{x^2-1} \leq \frac{2x+3}{3x^2+3x}$   
 c)  $\frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12} \geq 0$     f)  $\frac{x-1}{x^2+2x} > \frac{2-x}{x^2+x}$     i)  $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{6x+2}{x^2-4}$

### 6. Rozwiąż nierówność.

- a)  $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} \geq 2$     e)  $\frac{2}{9x^2-1} \leq \frac{3x+2}{3x-1} + 1$   
 b)  $\frac{1}{4-x} + \frac{3x}{x+2} < 3$     f)  $\frac{2x^2-3}{(x-1)^3} \geq \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$   
 c)  $\frac{4}{x-3} - 1 \leq \frac{2x+3}{2x+1}$     g)  $\frac{x+2}{x(x+1)} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{2x+2}{x(x+2)}$   
 d)  $\frac{3x}{x^2-4} > \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$     h)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} > \frac{2x+3}{x(x+1)}$

6. a)  $x \in (-\infty; -3) \cup [-\frac{5}{2}; -2)$   
 b)  $x \in (-2; \frac{22}{7}) \cup (4; \infty)$   
 c)  $x \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}] \cup (-\frac{1}{2}; 3) \cup [2 + 2\sqrt{2}; \infty)$   
 d)  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$   
 e)  $x \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{12}] \cup (-\frac{1}{3}; \frac{-3+\sqrt{17}}{12}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$   
 f)  $x \in (-\infty; 1) \cup [\frac{3}{2}; \infty)$   
 g)  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; \infty)$   
 h)  $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$



## 3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

Gdy jest podany wzór funkcji  $y = f(x)$ , ale nie została określona jej dziedzina, przyjmuje się, że dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ , dla których wzór funkcji ma sens liczbowy (taką dziedzinę nazywa się też **dziedziną naturalną** funkcji).

### Przykład 1

Określ dziedzinę funkcji  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ .

Wzór funkcji  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$  ma sens liczbowy, gdy  $x \geq 0$  (ze względu na wyrażenie pod pierwiastkiem) oraz  $x \neq 2$  (ze względu na mianownik ułamka). Zatem dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $D_f = [0; 2) \cup (2; \infty)$ .

### Ćwiczenie 1

Określ dziedzinę funkcji  $f$ .

- |                        |                                  |                                                  |
|------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{x-8}$ | d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$   | g) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}}$        |
| b) $f(x) = \sqrt{3-x}$ | e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$ | h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{x^2\sqrt{3-x}}$     |
| c) $f(x) = \sqrt{-x}$  | f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ | i) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x^2-4)\sqrt{x+2}}$ |

### Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$ .

Wzór funkcji  $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$  ma sens liczbowy, gdy  $x+1 > 0$ , zatem dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $D_f = (-1; \infty)$ .

Równość  $x^2 - 4 = 0$  jest spełniona przez  $x = -2$  oraz  $x = 2$ . Zauważ, że  $-2 \notin D_f$ , zatem jedynym miejscem zerowym funkcji  $f$  jest liczba 2.

### Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji  $f$ .

- |                                      |                                           |                                             |
|--------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$ | c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$ | e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$            |
| b) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2-x^2}$  | d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$ | f) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{1-x}}$ |

### Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji  $f$ .

- |                                  |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^2-16}{ x +4}$ | b) $f(x) = \frac{5- x }{x^2-25}$ | c) $f(x) = \frac{x(x-3)}{ x -3}$ |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

### Ćwiczenie 3

- a)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(-4) = f(4) = 0$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$ , brak miejsc zerowych  
c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ ,  $f(0) = 0$

### Uczeń:

- wyznacza dziedzinę i miejsce zerowe funkcji, w której wzorze występują ułamki i pierwiastki,
- wyznacza dziedzinę i miejsce zerowe funkcji wymiernej danej wzorem,
- bada, czy dane funkcje są równe, i szkicuje ich wykresy,
- wyznacza iloczyn i iloraz danych funkcji wymiernych, określa dziedzinę iloczynu i ilorazu,
- rozwiązuje zadania, korzystając z danego wykresu funkcji wymiernej, oraz zadania z parametrem dotyczące funkcji wymiernej.

### Ćwiczenie 1

- a)  $[8; \infty)$   
b)  $(-\infty; 3]$   
c)  $(-\infty; 0]$   
d)  $(0; \infty)$   
e)  $(2; \infty)$   
f)  $(-2; \infty)$   
g)  $(1; 6]$   
h)  $[-6; 0) \cup (0; 3)$   
i)  $(-2; 2) \cup (2; 4]$

### Ćwiczenie 2

- a)  $D = (-2, 2) \cup (2; \infty)$ , nie ma  
b)  $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0]$ ,  $f(0) = 0$   
c)  $D = (-2; 1]$ ,  $f(1) = 0$   
d)  $D = (3; \infty)$ , nie ma  
e)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , nie ma  
f)  $D = \{1\}$ ,  $f(1) = 0$

### Multibook

- Wykres funkcji wymiernej
- Równania wymierne z parametrem (2)

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.9

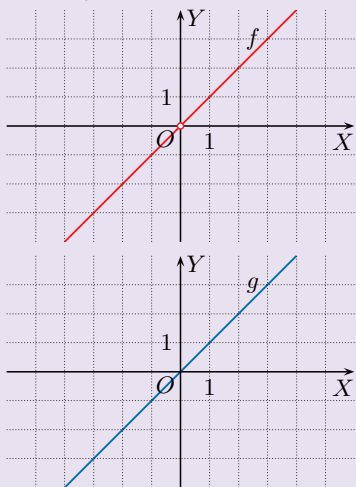
 **Generator**  
testów i sprawdzianów

#### Ćwiczenie 4

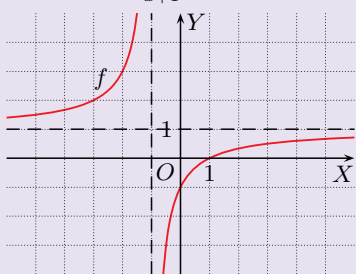
- a)  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$  b)  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$   
 c)  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, 0\}$  d)  $\mathbb{R}$  e)  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$   
 f)  $\mathbb{R} \setminus \{-3 - \sqrt{15}, -1, -3 + \sqrt{15}\}$

#### Ćwiczenie 5

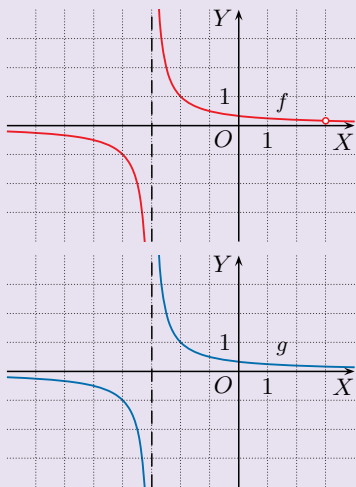
- a) nie,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ ,  
 czyli  $D_f \neq D_g$



- b) tak,  $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$   
 oraz  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = g(x)$



- c) nie,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ ,  
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ , czyli  $D_f \neq D_g$



#### Ćwiczenie 6

- a)  $f(x) + g(x) = \frac{x-12}{x(x-4)}$ ,  
 $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$   
 b)  $f(x) + g(x) = \frac{4x-1}{4x^2-1}$ ,  
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

#### Definicja

Funkcję postaci  $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$ , gdzie  $v$  i  $w$  są wielomianami ( $w \neq 0$ ), nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ , dla których  $w(x) \neq 0$ .

#### Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji wymiernej  $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$ .

- a)  $v(x) = 2x^6 - 1$ ,  $w(x) = 3x^2 - 6$  d)  $v(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ,  $w(x) = x^4 + 1$   
 b)  $v(x) = x - 1$ ,  $w(x) = x^4 - 16$  e)  $v(x) = x^2 - 4$ ,  $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$   
 c)  $v(x) = 2x^2 - x$ ,  $w(x) = 4x^3 + x^2$  f)  $v(x) = x^3 + x$ ,  $w(x) = x^3 + 7x^2 - 6$

#### Przykład 3

Określ dziedziny funkcji:  $f$ ,  $g$  i  $h$ , a następnie uprość ich wzory.

$$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } g(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } h(x) = \frac{x}{x-1}$$

Funkcje  $f$ ,  $g$ ,  $h$  opisane są tym samym wzorem, ale mają różne dziedziny.

#### Definicja

Funkcje  $f$  i  $g$  o przeciwdziedzinie  $\mathbb{R}$  są równe, jeśli mają tę samą dziedzinę  $D$  oraz dla każdego  $x \in D$  zachodzi równość  $f(x) = g(x)$ .

#### Ćwiczenie 5

Zbadaj, czy funkcje  $f$  i  $g$  są równe. Naszkicuj ich wykresy.

- a)  $f(x) = \frac{x^2}{x}$ ,  $g(x) = x$  c)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ ,  $g(x) = \frac{x+3}{(x+3)^2}$   
 b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ ,  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  d)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ ,  $g(x) = \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$

#### Ćwiczenie 6

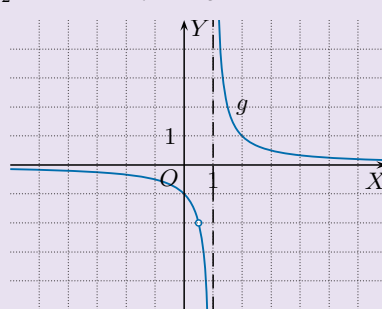
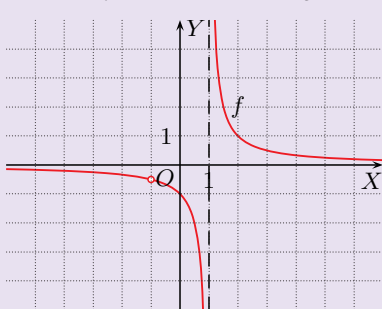
Wyznacz sumę funkcji wymiernych  $f$  i  $g$  oraz określ jej dziedzinę.

- a)  $f(x) = \frac{3}{x}$ ,  $g(x) = \frac{-2}{x-4}$   
 b)  $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ ,  $g(x) = \frac{1-x}{2x+1}$

Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi.

#### Ćwiczenie 5

- d) nie,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$ , czyli  $D_f \neq D_g$



#### Przykład 4

Wyznacz iloraz  $\frac{f}{g}$  funkcji  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  i  $g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$ .

Aby funkcje  $f$ ,  $g$  oraz ich iloraz były określone, muszą być spełnione warunki:  $x^2 - 1 \neq 0$ ,  $x + 1 \neq 0$ ,  $x^2 + 2x \neq 0$ , czyli  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$ .

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-1} : \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

#### Ćwiczenie 7

Wyznacz iloczyn  $f \cdot g$  oraz iloraz  $\frac{f}{g}$  funkcji  $f$  i  $g$ . Określ dziedziny iloczynu i ilorazu.

a)  $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$ ,  $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$

c)  $f(x) = \frac{4x^2-1}{x+3}$ ,  $g(x) = \frac{x^2-9}{2x+1}$

b)  $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-4}$ ,  $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

d)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+x}$

#### Zadania

1. Określ dziedzinę i podaj miejsca zerowe funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

c)  $f(x) = \frac{(4x-1)(x+1)(2x+1)}{4x^2-1}$

b)  $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

d)  $f(x) = \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-x}$

2. Funkcja  $h$  dana jest za pomocą wzoru  $h(x) = f(x) + g(x)$ . Określ dziedzinę funkcji  $h$ , podaj jej miejsca zerowe i wyznacz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.

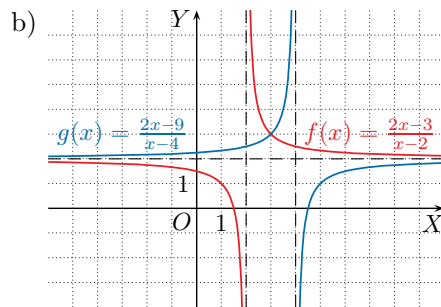
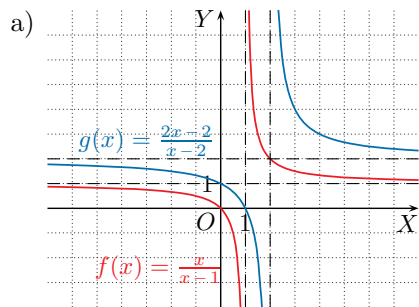
a)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x-2}$

c)  $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ ,  $g(x) = \frac{x-1}{3x+6}$

b)  $f(x) = \frac{2}{3x+1}$ ,  $g(x) = \frac{4}{1-x}$

d)  $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4}$ ,  $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$

3. Odczytaj z rysunku, dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartości większe od wartości funkcji  $g$ .



3. a)  $x \in (1; 2)$

b)  $x \in (2; 3) \cup (4; \infty)$

#### Ćwiczenie 7

a)  $f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{2(x+1)}$ ,

$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ ;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2(x+2)^2}$ ,

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

b)  $f(x) \cdot g(x) = \frac{2(2x-1)^2}{(x-2)(x+2)^2}$ ,

$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{x-2}$ ,  $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$

c)  $f(x) \cdot g(x) = (2x-1)(x-3)$ ,

$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}\}$ ;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x-1)(2x+1)^2}{(x-3)(x+3)^2}$ ,

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}, 3\}$

d)  $f(x) \cdot g(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-4x+5)}{x^3(x+1)}$ ,

$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x(x^2-4x+5)}$ ,

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

#### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $x = 1$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ ,  
brak miejsc zerowych

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ,  
 $x = -1$ ,  $x = \frac{1}{4}$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $x = 5$

2. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ ,  
 $h(x) = 0$  dla  $x = \frac{1}{2}$ ,  
 $h(x) \geq 0$  dla  $x \in (-1; \frac{1}{2}] \cup (2; \infty)$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 1\}$ ,  
 $h(x) = 0$  dla  $x = -\frac{3}{5}$ ,  
 $h(x) \geq 0$  dla  $x \in (-\infty; -\frac{3}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 1)$

c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}\}$ ,  
brak miejsc zerowych,  
 $h(x) \geq 0$  dla  $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  
 $h(x) = 0$  dla  $x = 1$ ,  
 $h(x) \geq 0$  dla  $x \in (-2; 1] \cup (2; \infty)$

4. a) np.  $y = \frac{-18}{x-3}$   
 b) np.  $y = \frac{-12}{(x+2)(x-1)}$   
 c) np.  $y = \frac{-36}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5. a)  $D_f = \mathbb{R}$ , gdy  
 $x^2 - kx + 1 \neq 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 czyli  $\Delta = k^2 - 4 < 0$ ,  
 stąd  $k \in (-2; 2)$ .

- b)  $D_f = \mathbb{R}$ , gdy  
 $x^2 - kx + k \neq 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 czyli  $\Delta = k^2 - 4k < 0$ ,  
 stąd  $k \in (0; 4)$ .

- c)  $D_f = \mathbb{R}$ , gdy  
 $kx^2 + kx + 1 \neq 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$   
 Jeśli  $k = 0$ ,  
 to  $kx^2 + kx + 1 = 1 \neq 0$ .  
 Jeśli  $k \neq 0$ ,  
 to  $kx^2 + kx + 1 \neq 0$   
 dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 gdy  $\Delta = k^2 - 4k < 0$ ,  
 czyli  $k \in (0; 4)$ .  
 Zatem  $k \in [0; 4)$ .

6. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  
 $f$  rośnie w  $(-\infty; -2] \cup [0; \infty)$ ,  
 $f$  maleje w  $[-2; -1)$   
 i w  $(-1; 0]$ ,  
 $f(x) < -3$  dla  
 $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$ ,  
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ ,  
 $g$  rośnie w:  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 1)$ ,  
 $(1; \infty)$ ,  
 $g(x) < -3$  dla  
 $x \in (-3; 0) \cup (1; \infty)$   
 b) Równanie  $f(x) = m$  ma:  
 0 rozwiązań dla  $m \in (-3; 1)$ ,  
 1 rozwiązanie dla  
 $m \in \{-3, 1\}$ ,  
 2 rozwiązania dla  
 $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ .  
 Równanie  $g(x) = m$  ma:  
 1 rozwiązanie dla  $m = -3$ ,  
 2 rozwiązania dla  
 $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

4. Podaj przykład funkcji wymiernej, której wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 6)$  i której dziedziną jest zbiór  $D$ .

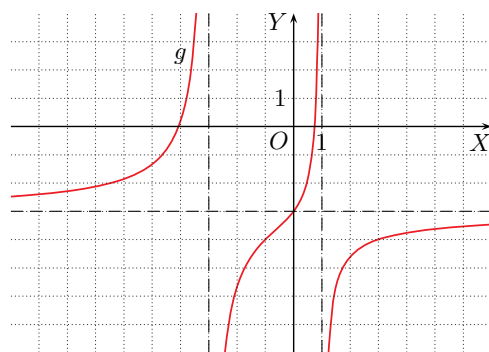
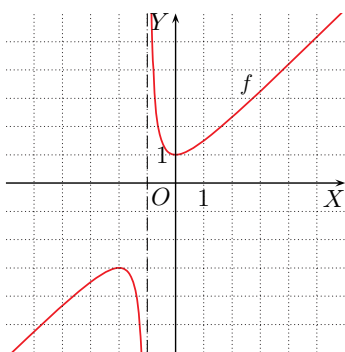
a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$       b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$       c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$

5. Dla jakich wartości parametru  $k$  dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

a)  $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+1}$       b)  $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+k}$       c)  $f(x) = \frac{4x-1}{kx^2+kx+1}$

6. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{-3x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$$



- a) Określ dziedziny funkcji  $f$  i  $g$ . Dla każdej z tych funkcji podaj jej przedziały monotoniczności oraz argumenty, dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od  $-3$ .

- b) Podaj liczbę rozwiązań równań  $f(x) = m$  oraz  $g(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ .

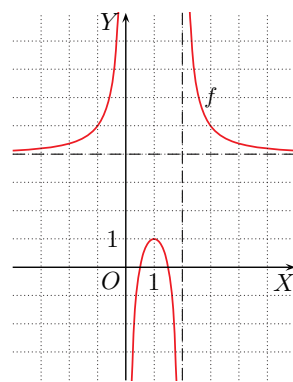
7. Niech  $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^3-2x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+x}$  i  $h(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^3+3x}$ .

- a) Określ dziedziny i uprość wzory tych funkcji.  
 b) Rozwiąż równanie  $f(x) + g(x) - 2h(x) = 0$ .  
 c) Rozwiąż nierówność  $f(x) \cdot g(x) - h(x) \leq 0$ .

8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{4x^2-8x+3}{x^2-2x}$$

- a) Podaj liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ .  
 b) Podaj liczbę rozwiązań równania  $f(x) = |m|$  w zależności od parametru  $m$ .



7. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ ,

$$f(x) = \frac{x+2}{x}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x}, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad h(x) = \frac{x+2}{x}$$

b)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

c)  $x \in (-\infty; -2]$

8. a) 0 rozwiązań dla  $m \in (1; 4]$ ,

1 rozwiązanie dla  $m = 1$ ,

2 rozwiązania dla  $m \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

b) 0 rozwiązań dla  $m \in [-4; -1) \cup (1; 4]$ ,

1 rozwiązanie dla  $m \in \{-1, 1\}$ ,

2 rozwiązania dla  $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

## 3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $|3x - 4| = 2$ .

$$3x - 4 = -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 4 = 2$$

$$3x = 2 \quad \text{lub} \quad 3x = 6$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2$$

### Twierdzenie

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| = a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = -a$  lub  $x = a$ .

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a)  $|5x - 3| = 2$       b)  $|9x + 5| = 4$       c)  $|\frac{2}{3}x + 4| = 6$       d)  $|6 - \frac{7}{5}x| = 1$

### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $|2x - 4| + |3x - 6| = 20$ .

$$2|x - 2| + 3|x - 2| = 20$$

$$5|x - 2| = 20 \quad / : 5$$

$$|x - 2| = 4$$

$$x - 2 = -4 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 4$$

$$x = -2 \quad \text{lub} \quad x = 6$$

### Twierdzenie

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

### Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a)  $|x - 3| + |2x - 6| = 9$

c)  $|4x + 2| - |2x + 1| + |6x + 3| = 4$

b)  $|4x - 8| + |2 - x| = 5$

d)  $|6x + 4| - |3x + 2| + |9x + 6| = 8$

### Twierdzenie

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| < a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $-a < x < a$ .

### Przykład 3

Rozwiąż nierówność  $|2x + 3| < 5$ .

$$-5 < 2x + 3 < 5 \quad / -3 \quad \text{Odejmujemy 3 od } -5, \text{ od } 2x + 3 \text{ i od } 5.$$

$$-8 < 2x < 2 \quad / : 2$$

$$-4 < x < 1$$

$$x \in (-4; 1)$$

### Uczeń:

- rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną,
- rozwiązuje równania i nierówności, w których występuje wartość bezwzględna tego samego wyrażenia.

### Ćwiczenie 1

a)  $x = \frac{1}{5}$  lub  $x = 1$

b)  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{9}$

c)  $x = -15$  lub  $x = 3$

d)  $x = \frac{25}{7}$  lub  $x = 5$

### Ćwiczenie 2

a)  $3|x - 3| = 9$

$$|x - 3| = 3$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 6$$

b)  $5|x - 2| = 5$

$$|x - 2| = 1$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

c)  $4|2x + 1| = 4$

$$|2x + 1| = 1$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 0$$

d)  $4|3x + 2| = 8$

$$|3x + 2| = 2$$

$$x = -\frac{4}{3} \quad \text{lub} \quad x = 0$$

### Ćwiczenie 3

- a)  $x \in [1; \frac{7}{3}]$   
b)  $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$   
c)  $x \in (-6; 2)$   
d)  $x \in (-\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$   
e)  $x \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty)$   
f)  $x \in [-18; 24]$   
g)  $x \in [-2; 10]$   
h)  $x \in (-\infty; -\frac{25}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $x = -2$  lub  $x = \frac{4}{3}$   
b)  $x = 1$  lub  $x = 2$   
c)  $x = -5$  lub  $x = \frac{5}{3}$   
d)  $x = -\frac{3}{2}$  lub  $x = \frac{15}{2}$   
e)  $x = -\frac{5}{4}$   
f) sprzeczne  
g)  $x = -2$  lub  $x = 2$   
h)  $x = -2$  lub  $x = -\sqrt{2}$  lub  $x = \sqrt{2}$  lub  $x = 2$   
2. a)  $x = -\frac{3}{2}$  lub  $x = \frac{11}{2}$   
b)  $x = -\frac{5}{2}$  lub  $x = -\frac{1}{2}$   
c)  $x = 4$  lub  $x = 8$   
d)  $x = 1$  lub  $x = 3$   
3. a)  $x \in (-\frac{9}{5}; 1)$   
b)  $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$   
c)  $x \in [-9; -3]$   
d)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{6}; \infty)$   
e)  $x \in (-\infty; -3] \cup [12; \infty)$   
f)  $x \in (-\infty; \frac{1}{24}) \cup (\frac{1}{8}; \infty)$   
g)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$   
h)  $x = \frac{1}{4}$   
4. a)  $\begin{cases} |2x+1| \geq 3 \\ |2x+1| \leq 5 \end{cases}$   
 $\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty) \\ x \in [-3; 2] \end{cases}$   
 $x \in [-3; -2] \cup [1; 2]$   
b)  $x \in [-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}] \cup [2; 3]$   
c)  $x \in [-2; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}; 2]$   
d)  $x \in [-1; 1]$

### Przykład 4

Rozwiąż nierówność  $|3x - 1| > 2$ .

$$\begin{aligned} 3x - 1 < -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 1 > 2 \\ 3x < -1 \quad \text{lub} \quad 3x > 3 \\ x < -\frac{1}{3} \quad \text{lub} \quad x > 1 \\ x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; \infty) \end{aligned}$$

### Twierdzenie

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| > a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x < -a$  lub  $x > a$ .

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a)  $|3x - 5| \leq 2$       c)  $|2x + 4| < 8$       e)  $|6 - 3x| \geq 9$       g)  $|\frac{3}{2}x + 6| \leq 9$   
b)  $|4x - 2| > 8$       d)  $|\frac{1}{3} + x| < \frac{1}{2}$       f)  $|\frac{1}{3}x - 1| \leq 7$       h)  $|\frac{2}{5}x - 2| > 3$

### Zadania

#### 1. Rozwiąż równanie.

- a)  $|3x + 1| = 5$       c)  $|\frac{3}{5}x + 1| = 2$       e)  $|4x + 5| = 0$       g)  $|x^2 - 1| = 3$   
b)  $|2x - 3| = 1$       d)  $|2 - \frac{2}{3}x| = 3$       f)  $|2x - 6| = -4$       h)  $|x^2 - 3| = 1$

#### 2. Rozwiąż równanie.

- a)  $|3x - 6| = 7 + |x - 2|$       c)  $|6 - x| + |\frac{1}{2}x - 3| + |2x - 12| = 7$   
b)  $|4x + 6| + |6x + 9| = 10$       d)  $|x - 2| + |2x - 4| + |4x - 8| = 7$

#### 3. Rozwiąż nierówność.

- a)  $|5x + 2| < 7$       c)  $|\frac{1}{3}x + 2| \leq 1$       e)  $|\frac{2}{3}x - 3| \geq 5$       g)  $|2x - 3| > 0$   
b)  $|3x - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$       d)  $|6x + 2| > 1$       f)  $|3x - \frac{1}{4}| > \frac{1}{8}$       h)  $|4x - 1| \leq 0$

#### 4. Wyznacz zbiór liczb $x$ spełniających podany warunek.

- a)  $3 \leq |2x + 1| \leq 5$       c)  $-2 \leq 4 - 3|x| \leq 3$   
b)  $4 \leq |2 - 3x| \leq 7$       d)  $3 \leq 5 - 2|x| \leq 6$

#### 5. Rozwiąż nierówność.

- a)  $|2x - 6| + |3x - 9| < 15$       d)  $|x + 1| + |3x + 3| \leq 6 - 2|x + 1|$   
b)  $|4x - 2| - |2x - 1| > 6$       e)  $2|x - 4| + |3x - 12| \leq 4 + |8 - 2x|$   
c)  $|3x - 3| - |1 - x| \geq 8$       f)  $|2x + 4| + 1 \leq |3x + 6| - |2 + x| + 2$

#### 6. Rozwiąż nierówność.

- a)  $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + 2|x - 5| \leq 9$       c)  $|2x + 8| + \sqrt{x^2 + 8x + 16} \geq 1$   
b)  $\sqrt{4x + x^2 + 4} + 3|x + 2| > 20$       d)  $\sqrt{1 - 2x + x^2} - |2x - 2| + 5 < 0$

#### 5. a) $x \in (0; 6)$

- b)  $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$   
c)  $x \in (-\infty; -3] \cup [5; \infty)$   
d)  $x \in [-2; 0]$   
e)  $x \in [\frac{8}{3}; \frac{16}{3}]$   
f)  $x \in \mathbb{R}$

#### 6. a) $|x - 5| + 2|x - 5| \leq 9$

- $|x - 5| \leq 3$   
 $x \in [2; 8]$   
b)  $|x + 2| + 3|x + 2| > 20$   
 $|x + 2| > 5$   
 $x \in (-\infty; -7) \cup (3; \infty)$   
c)  $2|x + 4| + |x + 4| \geq 1$   
 $|x + 4| \geq \frac{1}{3}$   
 $x \in (-\infty; -\frac{13}{3}] \cup [-\frac{11}{3}; \infty)$   
d)  $|x - 1| - 2|x - 1| < -5$   
 $|x - 1| > 5$   
 $x \in (-\infty; -4) \cup (6; \infty)$



## R 3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)

### Przykład 1

Aby rozwiązać równanie  $|x - 1| + 3x = 7$ , rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli  $x - 1 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty; 1)$ , 2° Jeśli  $x - 1 \geq 0$ , czyli  $x \in [1; \infty)$ , to  
to równanie przybiera postać:                      równanie przybiera postać:

$$\begin{array}{ll} -(x - 1) + 3x = 7 & (x - 1) + 3x = 7 \\ -x + 1 + 3x = 7 & 4x = 8 \\ 2x = 6 & x = 2 \quad 2 \in [1; \infty) \\ x = 3 & 3 \notin (-\infty; 1), \text{ sprzeczność} \end{array}$$

Zatem rozwiązaniem równania  $|x - 1| + 3x = 7$  jest liczba 2.

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |x - 1| - 2x = 4 & \text{c)} |x + 4| + 1 = 2x & \text{e)} |2x + 4| - 2x = 4 \\ \text{b)} |x - 1| + x = 2 & \text{d)} |3 - x| = x - 1 & \text{f)} x|x - 4| = x^2 + 4x \end{array}$$

### Przykład 2

Aby rozwiązać nierówność  $2|x + 2| + x \leq 1$ , rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli  $x + 2 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty; -2)$ , 2° Jeśli  $x + 2 \geq 0$ , czyli  $x \in [-2; \infty)$ ,  
to nierówność przybiera postać:                      to nierówność przybiera postać:

$$\begin{array}{ll} -2(x + 2) + x \leq 1 & 2(x + 2) + x \leq 1 \\ -2x - 4 + x \leq 1 & 2x + 4 + x \leq 1 \\ -x \leq 5 & 3x \leq -3 \\ x \geq -5 & x \leq -1 \\ x \in [-5; -2) & \text{Uwzględniamy} \\ & \text{założenie.} \\ & x \in [-2; -1] \end{array}$$

Zatem nierówność  $2|x + 2| + x \leq 1$  zachodzi dla  $x \in [-5; -1]$ .

### Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |x - 2| - 3x > 1 & \text{c)} |x - 5| < x + 5 & \text{e)} |3 - x| \leq x - |2x - 6| \\ \text{b)} |2x + 6| + x \leq 3 & \text{d)} |6 + x| \geq 2x + 6 & \text{f)} x|1 - x| \leq x + x^2 \end{array}$$

### Ćwiczenie 2

a) Dla  $x \in (-\infty; 2)$  mamy  $x < \frac{1}{4}$ , czyli  $x \in (-\infty; \frac{1}{4})$ .  
Dla  $x \in [2; \infty)$  mamy  $x < -\frac{3}{2}$  – sprzeczność.  
Ostatecznie  $x \in (-\infty; \frac{1}{4})$ .  
b) Dla  $x \in (-\infty; -3)$  mamy  $x \geq -9$ , czyli  $x \in [-9; -3)$ .  
Dla  $x \in [-3; \infty)$  mamy  $x \leq -1$ , czyli  $x \in [-3; -1]$ .  
Ostatecznie  $x \in [-9; -1]$ .

c) Dla  $x \in (-\infty; 5)$  mamy  $x > 0$ , czyli  $x \in (0; 5)$ .  
Dla  $x \in [5; \infty)$  mamy  $-5 < 5$ , czyli  $x \in [5; \infty)$ .  
Ostatecznie  $x \in (0; \infty)$ .  
d) Dla  $x \in (-\infty; -6)$  mamy  $x \leq -4$ , czyli  $x \in (-\infty; -6)$ .  
Dla  $x \in [-6; \infty)$  mamy  $x \leq 0$ , czyli  $x \in [-6; 0]$ .  
Ostatecznie  $x \in (-\infty; 0]$ .  
e) Dla  $x \in (-\infty; 3)$  mamy  $x \geq \frac{9}{4}$ , czyli  $x \in [2\frac{1}{4}; 3)$ .  
Dla  $x \in [3; \infty)$  mamy  $x \leq 4\frac{1}{2}$ , czyli  $x \in [3; 4\frac{1}{2}]$ .  
Ostatecznie  $x \in [2\frac{1}{4}; 4\frac{1}{2}]$ .  
f) Dla  $x \in (-\infty; 1)$  mamy  $2x^2 \geq 0$ , czyli  $x \in (-\infty; 1)$ .  
Dla  $x \in [1; \infty)$  mamy  $x \geq 0$ , czyli  $x \in [1; \infty)$ .  
Ostatecznie  $x \in \mathbb{R}$ .

### Uczeń:

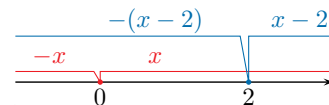
- rozwiązuje równania i nierówności typu  $|x - a| + bx = c$ ,  $|x - a| + bx < c$ ,
- rozwiązuje równania i nierówności zapisane za pomocą sumy kilku wartości bezwzględnych,
- rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując definicję oraz własności wartości bezwzględnej,
- przekształca wzory funkcji, w których występują sumy (lub różnice) wyrażeń ze znakiem wartości bezwzględnej, szkicuje wykresy tych funkcji i podaje ich własności.

### Ćwiczenie 1

- a) Dla  $x \in (-\infty; 1)$  mamy  $x = -1$ .  
Dla  $x \in [1; \infty)$  mamy  $x = -5$  – sprzeczność.  
Ostatecznie  $x = -1$ .  
b) Dla  $x \in (-\infty; 1)$  mamy  $1 = 2$  – sprzeczność.  
Dla  $x \in [1; \infty)$  mamy  $x = 1,5$ .  
Ostatecznie  $x = 1,5$ .  
c) Dla  $x \in (-\infty; -4)$  mamy  $x = -1$  – sprzeczność.  
Dla  $x \in [-4; \infty)$  mamy  $x = 5$ .  
Ostatecznie  $x = 5$ .  
d) Dla  $x \in (-\infty; 3)$  mamy  $x = 2$ .  
Dla  $x \in [3; \infty)$  mamy  $-3 = -1$  – sprzeczność.  
Ostatecznie  $x = 2$ .  
e) Dla  $x \in (-\infty; -2)$  mamy  $x = -2$  – sprzeczność.  
Dla  $x \in [-2; \infty)$  mamy  $4 = 4$  – równanie tożsamościowe.  
Ostatecznie  $x \in [-2; \infty)$ .  
f) Dla  $x \in (-\infty; 4)$  mamy  $x = 0$ .  
Dla  $x \in [4; \infty)$  mamy  $x = 0$  – sprzeczność.  
Ostatecznie  $x = 0$ .

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.11

 **Generator**  
testów i sprawdzianów

**Przykład 3**Rozwiąż równanie  $2|x| - |x - 2| = 1$ .1° Jeśli  $x \in (-\infty; 0)$ , to równanie przybiera postać:

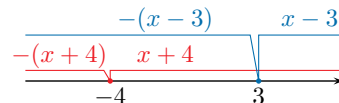
$$\begin{aligned} -2x - (-(x - 2)) &= 1 \\ -2x + x - 2 &= 1 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \quad -3 \in (-\infty; 0) \end{aligned}$$

2° Jeśli  $x \in [0; 2)$ , to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} 2x - (-(x - 2)) &= 1 \\ 2x + x - 2 &= 1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \quad 1 \in [0; 2) \end{aligned}$$

3° Jeśli  $x \in [2; \infty)$ , to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} 2x - (x - 2) &= 1 \\ 2x - x + 2 &= 1 \\ x &= -1 \quad -1 \notin [2; \infty), \text{ sprzeczność} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniami równania  $2|x| - |x - 2| = 1$  są liczby  $-3$  i  $1$ .**Przykład 4**Rozwiąż nierówność  $|x - 3| + |x + 4| < 9$ .1° Jeśli  $x \in (-\infty; -4)$ , to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} -(x - 3) - (x + 4) &< 9 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy:  $x \in (-5; -4)$ .2° Jeśli  $x \in [-4; 3)$ , to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} -(x - 3) + x + 4 &< 9 \\ 7 &< 9 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy:  $x \in [-4; 3)$ .3° Jeśli  $x \in [3; \infty)$ , to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 4 &< 9 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy:  $x \in [3; 4)$ .Zatem nierówność  $|x - 3| + |x + 4| < 9$  zachodzi dla  $x \in (-5; 4)$ .

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a)  $|x| + |x - 3| = 5$

b)  $|x + 4| - |2 - x| = 6$

c)  $|x| + |x - 2| = 2x - 2$

d)  $|x| + |x + 5| = 2x + 5$

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a)  $|x| + |x - 2| < 4$

b)  $|x - 1| + |3 - x| \geq 3$

c)  $|x + 2| - |3 - x| \leq x - 1$

d)  $|x| - |5 - x| > x - 2$

### Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem:

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| - 6$$

Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności  $f(x) \geq -2$ .

1° Dla  $x \in (-\infty; 1)$ :

$$f(x) = -(x - 1) - (x - 3) - 6 = -2x - 2$$

2° Dla  $x \in [1; 3]$ :

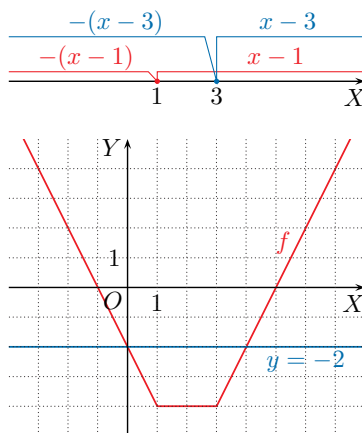
$$f(x) = (x - 1) - (x - 3) - 6 = -4$$

3° Dla  $x \in [3; \infty)$ :

$$f(x) = (x - 1) + (x - 3) - 6 = 2x - 10$$

Wzór funkcji  $f$  możemy więc zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -4 & \text{dla } x \in [1; 3] \\ 2x - 10 & \text{dla } x \in [3; \infty) \end{cases}$$



Nierówność  $f(x) \geq -2$  jest prawdziwa dla  $x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ .

### Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności  $f(x) \leq 4$ .

a)  $f(x) = |x + 3| + x - 1$

c)  $f(x) = 2x + |1 - x| + 2|x - 2|$

b)  $f(x) = |x - 1| - |x + 1| + 1$

d)  $f(x) = |x| + |x + 1| + |x - 2|$

### Ćwiczenie 6

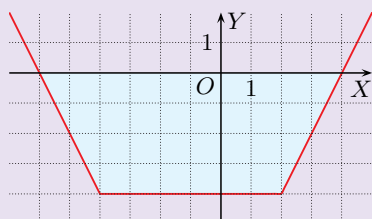
Oblicz pole obszaru ograniczonego osią  $OX$  i wykresem funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = |x + 4| + |x - 2| - 10$

b)  $f(x) = |x + 2| - |x| - x$

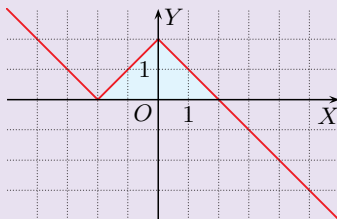
### Ćwiczenie 6

a) 
$$\begin{cases} -2x - 12 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ -4 & \text{dla } x \in [-4; 2) \\ 2x - 8 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$



$$P = \frac{(10+6) \cdot 4}{2} = 32$$

b) 
$$\begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x + 2 & \text{dla } x \in [-2; 0) \\ -x + 2 & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

### Ćwiczenie 3

a)  $x = -1$  lub  $x = 4$

b)  $x \in [2; \infty)$

c)  $x \in [2; \infty)$

d)  $x \in [0; \infty)$

### Ćwiczenie 4

a)  $x \in (-1; 3)$

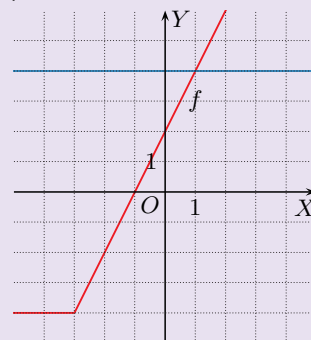
b)  $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}; \infty)$

c)  $x \in [-4; 0] \cup [6; \infty)$

d)  $x \in (-\infty; -3) \cup (3; 7)$

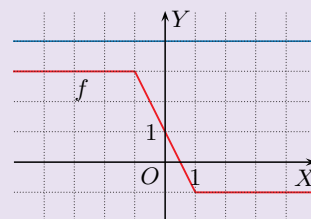
### Ćwiczenie 5

a) 
$$\begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ 2x + 2 & \text{dla } x \in [-3; \infty) \end{cases}$$



$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x \in (-\infty; 1]$$

b) 
$$\begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -2x + 1 & \text{dla } x \in [-1; 1) \\ -1 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$$



$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

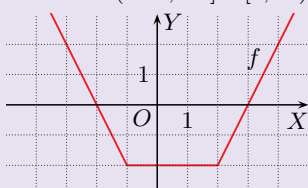
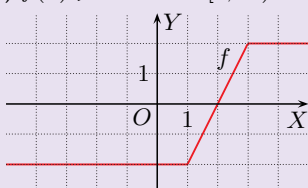
c) 
$$\begin{cases} -x + 5 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x + 3 & \text{dla } x \in [1; 2) \\ 5x - 5 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x = 1$$

d) 
$$\begin{cases} -3x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x + 3 & \text{dla } x \in [-1; 0) \\ x + 3 & \text{dla } x \in [0; 2) \\ 3x - 1 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x \in [-1; 1]$$

## Odpowiedzi do zadań

- $x = -\frac{1}{2}$
  - $x = -6$  lub  $x = 1$
  - $x = 3$
  - $x \in [-3; 0]$
  - $x \in [-2; 2]$
  - $x = -8$  lub  $x = 0$
- $x = -5$  lub  $x = -1$  lub  $x = 5$
  - $x = -2$  lub  $x = 4$
  - $x = -7$  lub  $x = 5$
  - $x = -7$  lub  $x = \frac{1}{3}$
- $x \in [0; 3]$
  - $x \in (-\infty; -1]$
  - $x \in \mathbb{R}$
  - $x \in (-1; 8)$
  - $x \in [-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}]$
  - sprzeczna
- $f(x) \geq 0$  dla  $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$
  - $f(x) \geq 0$  dla  $x \in [2; \infty)$
- $x = -2$  lub  $x = 0$  lub  $x = 2$
  - $x = -1$  lub  $x = 1$
  - sprzeczne
  - $x = -5$  lub  $x = -1$  lub  $x = 7$  lub  $x = 11$
  - $x = -\frac{3}{2}$
  - $x = -3$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$  lub  $x = 3$
- $x \in (-5; -1) \cup (1; 5)$
  - $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
  - $x \in (-\infty; -9) \cup (-5; -3) \cup (1; \infty)$
  - $x \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$
  - $x \in [1; 3]$
  - $x \in (-\infty; -\frac{15}{2}] \cup \{-\frac{1}{2}\} \cup [\frac{13}{2}; \infty)$

## Zadania

- Rozwiąż równanie.
  - $|x + 1| - |x| = 0$
  - $|x| - |x - 4| = 2$
  - $|x - 2| + |x + 2| = 4$
  - $|x| + |x + 5| = 7$
  - $|x + 3| + |x| = 3$
  - $|2x + 4| - |x - 1| = 3$
- Rozwiąż równanie.
  - $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - |x - 2| = x$
  - $|x - 2| - |x - 3| + |x| = 6$
  - $\sqrt{4 - 4x + x^2} + \sqrt{x^2} = 6$
  - $|4 - x| - |x| = |x + 3|$
- Rozwiąż nierówność.
  - $|x - 3| + |x| \leq 3$
  - $|1 - x| - |1 + x| \geq 2$
  - $|x - 5| + |x - 1| \geq 4$
  - $|3x - 6| - |x + 2| < 8$
  - $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |x| \leq 5$
  - $\sqrt{9 - 6x + x^2} - 3 > \sqrt{x^2}$
- Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj rozwiązanie nierówności  $f(x) \geq 0$ .
  - $f(x) = |x - 2| + |x + 1| - 5$
  - $f(x) = |1 - x| - |x - 3|$
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie  $||x| - 3| = 5$ .

Jeśli  $a > 0$ , to  $|x| = a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = a$  lub  $x = -a$ .

$$|x| - 3 = 5 \quad \text{lub} \quad |x| - 3 = -5$$

$$|x| = 8 \quad \text{lub} \quad |x| = -2 \quad \text{sprzeczność}$$

$$x = 8 \quad \text{lub} \quad x = -8$$

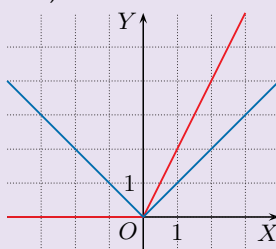
Rozwiązaniami równania  $||x| - 3| = 5$  są liczby  $-8$  i  $8$ .

Rozwiąż równanie.

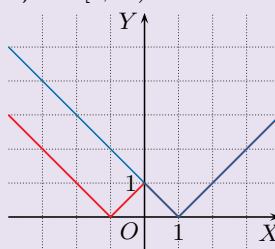
- $||x| - 1| = 1$
  - $||x| + 2| = 3$
- $|x + 1| + 5| = 4$
  - $|x - 3| - 6| = 2$
- $|2x + 3| + 3| = 3$
  - $||x| - 1| - 1| = 1$
- Rozwiąż nierówność.
  - $||x| - 3| < 2$
  - $||x| + 4| > 5$
  - $|x + 4| - 3| > 2$
  - $|2x - 1| + 2| \geq 3$
  - $|2 - x| + 5| \leq 6$
  - $|7 - |2x + 1|| \geq 7$
- Rozwiąż równanie.
  - $|x + |x|| = |x|$
  - $||x| - 1| = |x - 1|$
  - $|x - |x - 1|| = |x - 1|$

**Uwaga.** Zadanie 7. można rozwiązać algebraicznie, tak jak zadanie 5., lub graficznie.

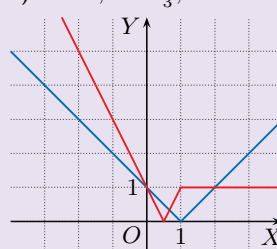
7. a)  $x = 0$



b)  $x \in [0; \infty)$



c)  $x = 0, x = \frac{2}{3}, x = 2$



## R 3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $\frac{2}{|x-1|} = 1$ .

Zakładamy, że  $x \neq 1$ .

Mnożymy obie strony równania przez  $|x-1|$  i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|x-1| &= 2 \\ x-1 &= -2 \quad \text{lub} \quad x-1 = 2 \\ x &= -1 \quad \text{lub} \quad x = 3\end{aligned}$$

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{3}{|x+2|} = 1$       b)  $\frac{2}{|7x-1|} = 5$       c)  $\frac{-5}{|2x-1|} = 3$       d)  $\frac{1}{|5x-2|} = 0$

### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| = 1$ .

Zakładamy, że  $x \neq 2$ .

$$\begin{aligned}\frac{|x+1|}{|x-2|} &= 1 \quad / \cdot |x-2| \\ |x+1| &= |x-2| \\ x+1 &= x-2 \quad \text{lub} \quad x+1 = -(x-2) \\ 1 &= -2 \quad \text{lub} \quad 2x = 1\end{aligned}$$

$$\left|\frac{p}{q}\right| = \frac{|p|}{|q|}, \text{ gdy } q \neq 0$$

$$\begin{aligned}|p| &= |q| \text{ oznacza, że:} \\ p &= q \quad \text{lub} \quad p = -q\end{aligned}$$

Pierwsze równanie jest sprzeczne, z drugiego otrzymujemy rozwiązanie  $x = \frac{1}{2}$ .

**Uwaga.** Równanie z przykładu 2. można też zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{x+1}{x-2} = -1 \quad \text{lub} \quad \frac{x+1}{x-2} = 1$$

### Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a)  $\left|\frac{2x-1}{6x+3}\right| = 1$       b)  $\left|\frac{2x+8}{-4x-1}\right| = 2$       c)  $\left|\frac{5x-1}{x-2}\right| = 4$       d)  $\left|\frac{5x-3}{3x-2}\right| = 0$

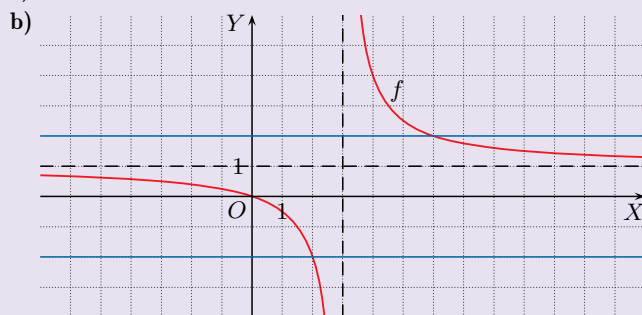
### Ćwiczenie 3

a) Rozwiąż równanie  $\left|\frac{x}{x-3}\right| = 2$ .

b) Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{x}{x-3}$ . Odczytaj z wykresu rozwiązania równania  $|f(x)| = 2$ .

### Ćwiczenie 3

a)  $x = 2$  lub  $x = 6$



### Uczeń:

- stosuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań i nierówności wymiernych,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających podane warunki.

### Ćwiczenie 1

- a)  $x = -5$  lub  $x = 1$   
b)  $x = \frac{3}{35}$  lub  $x = \frac{1}{5}$   
c), d) sprzeczne

### Ćwiczenie 2

- a)  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{4}$   
b)  $x = -1$  lub  $x = 1$   
c)  $x = -7$  lub  $x = 1$   
d)  $x = \frac{3}{5}$

### Multibook

- Wykres funkcji wymiernej
- Przekształcenia wykresu funkcji homograficznej
- Równania wymierne z parametrem (1)

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 3.12

**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 4

- a)  $|x - 1| < 2$ ,  $x \neq 1$ ,  
 $-1 < x < 3$ ,  
 $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$
- b)  $|x + 2| \geq 7$ ,  $x \neq -2$ ,  
 $x \leq -9$  lub  $x \geq 5$ ,  
 $x \in (-\infty; -9] \cup [5; \infty)$
- c)  $|3x + 1| \leq 2$ ,  $x \neq -\frac{1}{3}$ ,  
 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ,  
 $x \in [-1; -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$
- d)  $-3 \leq 1 + \frac{4}{x} \leq 3$ ,  $x \neq 0$ ,  
 $\frac{1+x}{x} \geq 0$  i  $\frac{2-x}{x} \leq 0$  i  $x \neq 0$ ,  
 $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$   
i  $x \in (-\infty; 0) \cup [2; \infty)$ ,  
zatem  $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$

### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $x = -\frac{5}{2}$  lub  $x = \frac{9}{2}$   
b)  $x = -\frac{3}{2}$  lub  $x = \frac{1}{2}$   
c)  $x = \frac{2}{3}$  lub  $x = \frac{10}{3}$   
d) sprzeczne  
e)  $x = -\frac{33}{4}$  lub  $x = -\frac{9}{2}$   
f)  $x = \frac{13}{4}$   
g)  $x = -\frac{1}{4}$   
h)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

### Przykład 3

Rozwiąż nierówność  $\frac{5}{|3-x|} > 1$ .

Zakładamy, że  $x \neq 3$ . Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez  $|3-x|$ . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3-x| &< 5 \\ -5 &< 3-x < 5 \\ x &\in (-2; 8) \end{aligned}$$

Uwzględniamy założenie i otrzymujemy rozwiązanie:  $x \in (-2; 3) \cup (3; 8)$ .

### Przykład 4

Rozwiąż nierówność  $\frac{1}{|x-2|} < 1$ .

Zakładamy, że  $x \neq 2$ . Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez  $|x-2|$ . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |x-2| &> 1 \\ x-2 &< -1 \quad \text{lub} \quad x-2 > 1 \\ x &< 1 \quad \text{lub} \quad x > 3 \end{aligned}$$

Zatem  $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$ .

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{2}{|x-1|} > 1$       b)  $\frac{7}{|x+2|} \leq 1$       c)  $\frac{6}{|3x+1|} - 2 \geq 1$       d)  $\left|1 + \frac{4}{x}\right| \leq 3$

## Zadania

### 1. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{7}{|x-1|} = 2$       c)  $\frac{2}{|6-3x|} = \frac{1}{2}$       e)  $\left|\frac{x-3}{x+6}\right| = 5$       g)  $\left|\frac{4x+1}{6x-1}\right| = 0$   
b)  $\frac{6}{|2x+1|} = 3$       d)  $\frac{1}{|4x-1|} = -2$       f)  $\left|\frac{2x-3}{5-x}\right| = 2$       h)  $\left|\frac{x-3}{6-2x}\right| = \frac{1}{2}$

### 2. Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{8}{|2x-6|} > 1$       d)  $\frac{2}{|x+3|} < 1$       g)  $\frac{-2}{|3x-2|} \leq \frac{-3}{|3x-2|} + 1$   
b)  $\frac{1}{|4x-8|} > -3$       e)  $\frac{1}{|4-x|} \leq 2$       h)  $\frac{-3}{|x-2|} > \frac{1}{|2x-4|} - 7$   
c)  $\frac{8}{|4-2x|} \leq -2$       f)  $\frac{6}{|1-2x|} \geq 1$       i)  $\frac{1}{|2x-1|} \leq \frac{1}{|3-6x|} + 3$

### 2. a) $x \in (-1; 3) \cup (3; 7)$

b)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

c) sprzeczna

d)  $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$

e)  $x \in (-\infty; \frac{7}{2}] \cup [\frac{9}{2}; \infty)$

f)  $x \in [-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{7}{2}]$

g)  $x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$

h)  $x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

i)  $x \in (-\infty; \frac{7}{18}] \cup [\frac{11}{18}; \infty)$

3. Rozwiąż nierówność.

- a)  $\left| \frac{2x-3}{x-2} \right| \leq 2$       d)  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 1$       g)  $\frac{1}{|x+4|} \leq \frac{1}{|x-2|}$   
 b)  $\left| \frac{3-x}{x+1} \right| > 2$       e)  $\left| \frac{x+2}{2x-3} \right| \leq 4$       h)  $\frac{6}{|4-x|} > \frac{1}{|2x+1|}$   
 c)  $\left| \frac{x-1}{x+7} \right| \leq 0$       f)  $\left| \frac{x+3}{x-1} \right| > 0$       i)  $\frac{2}{|x-4|} \geq \frac{1}{|2x+8|}$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie  $\frac{3x}{|x-2|} = 1$ .

Zakładamy, że  $x \neq 2$ .

1° Dla  $x > 2$  mamy  $\frac{3x}{x-2} = 1$ , czyli  $3x = x - 2$ .

Stąd  $x = -1$  – sprzeczne z założeniem, że  $x > 2$ .

2° Dla  $x < 2$  mamy  $\frac{3x}{-x+2} = 1$ , czyli  $3x = -x + 2$ .

Stąd  $x = \frac{1}{2}$ .

Zatem rozwiązaniem równania  $\frac{3x}{|x-2|} = 1$  jest liczba  $\frac{1}{2}$ .

Rozwiąż równanie.

- a)  $\frac{x}{|2x-1|} = 1$       b)  $\frac{1}{|x|} = x + 2$       c)  $\frac{2x}{|x-3|} = x - 2$

5.\* Rozwiąż nierówność.

- a)  $\frac{|x-1|}{x} > 0$       c)  $\frac{|1-x|}{x} < 0$       e)  $\left| \frac{2}{|x|} - 1 \right| < 3$   
 b)  $\frac{|x|}{x+2} > 2$       d)  $\left| \frac{2}{|x|} - 1 \right| \leq 0$       f)  $\left| \frac{2}{|x|} - 1 \right| > \frac{1}{2}$

6.\* Naskicuj wykres funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = \frac{x-1}{|x|}$       b)  $f(x) = \frac{|x|-1}{x}$       c)  $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

7.\* Zaznacz zbiór  $A$  w układzie współrzędnych.

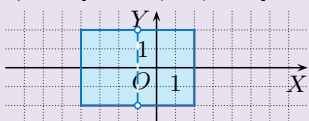
- a)  $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{|x+1|} \geq 1 \text{ i } |y| \leq 2 \right\}$   
 b)  $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{|5-x|} < \frac{1}{|x+1|} \right\}$

8.\* Na rysunku obok przedstawiono zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają nierówność:

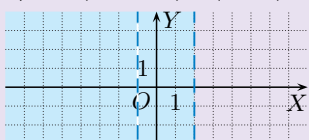
$$|y| \leq \frac{a}{|x+1|} - 1$$

Oblicz współczynnik  $a$ .

7. a)  $x \in [-4; -1) \cup (-1; 2]$ ,  $y \in [-2; 2]$



b)  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$ ,  $y \in \mathbb{R}$



8. Do figury należy punkt  $(0, 4)$ . Stąd mamy  $4 = a - 1$ . Zatem  $a = 5$ .

3. a)  $x \in (-\infty; \frac{7}{4}]$

b)  $x \in (-5; -1) \cup (-1; \frac{1}{3})$

c)  $x = 1$

d)  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

e)  $x \in (-\infty; \frac{10}{9}] \cup [2; \infty)$

f)  $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; \infty)$

g)  $x \in [-1; 2) \cup (2; \infty)$

h)  $x \in (-\infty; -\frac{10}{11}) \cup (-\frac{2}{13}; 4) \cup (4; \infty)$

i)  $x \in (-\infty; -\frac{20}{3}] \cup [-\frac{12}{5}; 4) \cup (4; \infty)$

4. a)  $x = \frac{1}{3}$  lub  $x = 1$

b)  $x = -1$  lub  $x = -1 + \sqrt{2}$

c)  $x = 6$

5. a)  $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

b)  $x \in (-2; -\frac{4}{3})$

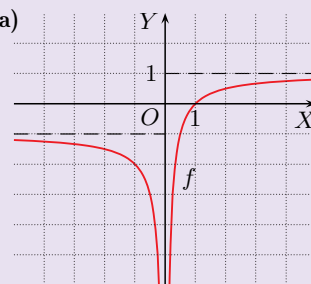
c)  $x \in (-\infty; 0)$

d)  $x = -2$  lub  $x = 2$

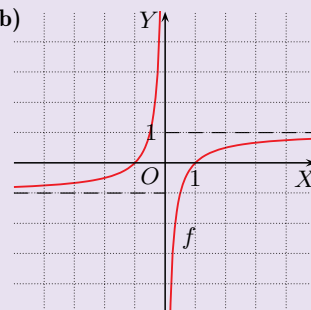
e)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

f)  $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{3}; 0) \cup (0; \frac{4}{3}) \cup (4; \infty)$

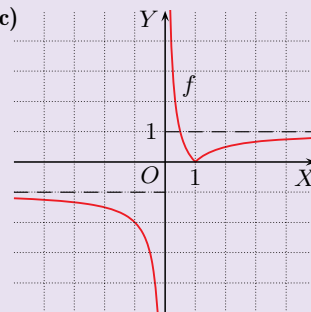
6. a)



b)



c)





**Uczeń:**

- wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań tekstowych.

**Ćwiczenie 1**

a)  $\frac{10+20}{x+30} = \frac{10}{x}$ ,

gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-30, 0\}$ ,

$x = 15$

Zatem szukany ułamek to  $\frac{10}{15}$ .

b) Niech  $x, x+3$

$(x > 0)$  – szukane liczby.

$\frac{x}{x+3} = \frac{75}{100}$ , gdzie  $x \neq -3$ ,

$x = 9$

Zatem szukane liczby to 9 i 12.

**Ćwiczenie 2**

a)  $\frac{30}{x+4} = \frac{24}{x}$ , gdzie  $x > 0$ ,

$x = 16$

Cukierki A kosztują 16 zł/kg.

Cukierki B kosztują 20 zł/kg.

b)  $\frac{20}{x+4} = \frac{12}{x-1}$ , gdzie  $x > 1$ ,

$x = 8,5$

Winogrona kosztują 8,50 zł/kg.

## 3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

**Przykład 1**

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmienia. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci  $\frac{6}{x}$ , wówczas nowy ułamek będzie miał postać  $\frac{6-2}{x-3}$ , czyli  $\frac{4}{x-3}$ . Otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$6(x-3) = 4x$$

$$x = 9$$

Zatem szukany ułamek to  $\frac{6}{9}$ .

**Ćwiczenie 1**

a) Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmienia. Jaki to ułamek?

b) Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

**Ćwiczenie 2**

a) Ola kupiła cukierki A w cenie  $x$  zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B, droższych o 4 zł/kg, i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A, a ile – cukierków B?

b) Cena winogron to obecnie  $x$  zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

### Zadania

1. a) Licznik pewnego ułamka jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 4, a mianownik o 7, to wartość ułamka się nie zmienia. Wyznacz ten ułamek.

b) Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

**Odpowiedzi do zadań**

1. a)  $\frac{x-3}{x} = \frac{x-3+4}{x+7}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0\}$

$x = 7$

Szukany ułamek:  $\frac{4}{7}$ .

b)  $2 \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x-2+9}{x+5}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$

$x^2 - x - 20 = 0$

$x = -4$  lub  $x = 5$

Nieskracalny ułamek:  $\frac{3}{5}$ .

2. a) Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile jego tata?  
b) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy  $\frac{3}{2}$ ?
3. a) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o  $x$  cm, a dłuższy bok – o  $3x$  cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3:4. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.  
b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o  $x$  cm, a drugi – o  $2x$  cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5:9. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.
4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Oznaczmy przez  $w$  pracę, którą należy wykonać. Wówczas:

$\frac{w}{4}$  – praca wykonana przez Piotrką w ciągu godziny,

$\frac{w}{8}$  – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,

$\frac{w}{4} + \frac{w}{8} = \frac{3}{8}w$  – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.

Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:

$$w : \frac{3}{8}w = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [h]}$$

czyli 2 godzin i 40 minut.

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

5. Dwie koparki, pracując razem, wykonują wykop w ciągu 8 dni. Gdyby pracowała tylko pierwsza z nich, wykop powstałby w ciągu 12 dni. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu drugiej koparce?
6. Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?
5. W ciągu jednego dnia pierwsza koparka wykonuje  $\frac{1}{12}$  wykopu, a obie –  $\frac{1}{8}$  wykopu. Druga koparka w ciągu jednego dnia wykonuje  $\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$  wykopu. Zatem druga koparka potrzebuje 24 dni.
6.  $\frac{\frac{1}{2}w}{6} = \frac{w}{12}$  – praca wykonana przez pierwszą koparkę w ciągu godziny  
 $\frac{\frac{1}{4}w}{9} = \frac{w}{18}$  – praca wykonana przez drugą koparkę w ciągu godziny  
 $\frac{w}{12} + \frac{w}{18} = \frac{5}{36}w$  – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny  
 $w : \frac{5}{36}w = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5} \text{ [h]}$   
Obie koparki potrzebują 7 godzin i 12 minut.

2. a) Niech  $x$  – wiek mamy,  
 $(x + 6)$  – wiek taty.

$$\frac{x}{x+6} = \frac{8}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 48$$

Mama ma 48 lat,

a tata 54 lata.

- b) Niech  $x$  – szukana liczba lat.

$$\frac{25+x}{13+x} = \frac{3}{2}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 11 \text{ lat}$$

3. a) Różnica obwodów:

$$2(x + 3x) = 8x$$

**I przypadek**

$$\frac{32-x}{51-3x} = \frac{3}{4}, \text{ gdzie } x \in (0; 17)$$

$$x = 5$$

Obwód zmniejszył się o 40 cm.

**II przypadek**

$$\frac{32-x}{51-3x} = \frac{4}{3}, \text{ gdzie } x \in (0; 17)$$

$$x = 12$$

Obwód zmniejszył się o 96 cm.

- b) Różnica obwodów:

$$2(x + 2x) = 6x$$

**I przypadek**

$$\frac{30+x}{18+2x} = \frac{5}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 180$$

**II przypadek**

$$\frac{30+x}{18+2x} = \frac{9}{5}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = -\frac{12}{13} - \text{sprzeczne}$$

**III przypadek**

$$\frac{30+2x}{18+x} = \frac{5}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

W tym przypadku sprzeczność można zauważyć bez obliczeń. Wiemy, że:

$$30 > 18 \text{ i } 2x > x, \text{ zatem}$$

$$30 + 2x > 18 + x, \text{ ale } 5 < 9.$$

**IV przypadek**

$$\frac{30+2x}{18+x} = \frac{9}{5}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 12$$

Zatem obwód zwiększył się o 72 cm lub o 1080 cm.

4.  $\frac{w}{10}$  – praca wykonana przez Artura w ciągu godziny  
 $\frac{w}{6}$  – praca wykonana przez Darka w ciągu godziny  
 $\frac{w}{10} + \frac{w}{6} = \frac{4}{15}w$  – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny  
 $w : \frac{4}{15}w = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ [h]}$   
Razem malowaliby 3 godziny i 45 minut.

#### Uczeń:

- wykorzystuje wielkości odwrotnie proporcjonalne do rozwiązywania zadań tekstowych dotyczących związku między drogą, prędkością i czasem.

#### Ćwiczenie 1

a)  $\frac{195}{v} = \frac{260}{v+20}$   
 $v = 60$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 60 km/h i 80 km/h.

- b) Niech  $v$  – średnia prędkość drugiego samochodu,  
 $(v + 30)$  – średnia prędkość pierwszego samochodu.

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot 350}{v+30} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 350}{v}$$

$$v = 60$$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 90 km/h i 60 km/h.

## 3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

#### Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Każdy jechał ze stałą prędkością. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi – 240 km od tego miasta. Prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz prędkości obu samochodów.

Oznaczmy przez  $v_1$  i  $v_2$  prędkości samochodów w km/h. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1 - 20} \quad \text{Korzystamy ze wzoru } t = \frac{s}{v}, \text{ gdzie } t - \text{czas, } s - \text{droga.}$$

$$320(v_1 - 20) = 240v_1, \text{ stąd } v_1 = 80 \text{ oraz } v_2 = 80 - 20 = 60$$

Prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

#### Ćwiczenie 1

- a) Samochód jadący z prędkością  $v$  pokonał odległość 195 km. Samochód jadący z prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz prędkości obu samochodów.

- b) Droga między miastami  $A$  i  $B$  ma 350 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody i jechały ze stałymi prędkościami. Pierwszy z nich jechał z prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał  $\frac{3}{5}$  trasy między miastami. Oblicz prędkości obu samochodów.

#### Ćwiczenie 2

- a) Pociąg ekspresowy jechał z prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i przebył trasę długości 360 km w czasie o godzinę krótszym. Oblicz prędkości tych pociągów.

- b) Trasa kolejowa z miasta  $A$  do miasta  $B$  ma 510 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i jechały ze stałymi prędkościami. Prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta  $A$ . Oblicz prędkości obu pociągów.



#### Ćwiczenie 2

- a) Niech  $v$  – średnia prędkość pociągu osobowego,  
 $(v + 30)$  – średnia prędkość pociągu ekspresowego.

$$\frac{360}{v} = \frac{360}{v+30} + 1, v > 0$$

$$v = 90$$

Średnie prędkości pociągów ekspresowego i osobowego wynosiły odpowiednio 120 km/h i 90 km/h.

- b) Niech  $v$  – średnia prędkość drugiego pociągu,  
 $(v + 10)$  – średnia prędkość pierwszego pociągu.

$$\frac{270}{v+10} = \frac{510-270}{v}$$

$$v = 80$$

Średnie prędkości pociągów wynosiły odpowiednio 90 km/h i 80 km/h.

## Zadania

- Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążyło jezioro w tym samym kierunku w stałym tempie. Prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz prędkości obu rowerzystów.
- Pociąg miał pokonać trasę między dwoma miastami w czasie określonym w rozkładzie jazdy. Z powodu awarii został zatrzymany na pół godziny na stacji pośredniej. Pozostałe 120 km przejechał z prędkością większą o 20 km/h i dzięki temu nadrobił powstałe opóźnienie. Oblicz, jaka powinna być średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem jazdy.
- Dwaj rowerzyści wyjechali jednocześnie na trasę długości 36 km. Prędkość pierwszego rowerzysty była o 6 km/h większa niż prędkość drugiego, więc pokonał on trasę w czasie o godzinę krótszym niż drugi. Oblicz prędkości obu rowerzystów.
- Tomek przejechał na rowerze 32 km szosą i 20 km polną drogą w czasie 2 godzin i 40 minut. Prędkość jazdy po szosie była o 20 km/h większa od prędkości jazdy po polnej drodze. Oblicz prędkość na szosie i prędkość na polnej drodze.
- a) Samochód przejechał drogę długości 120 km. Gdyby jechał z prędkością o 30 km/h większą, to czas jazdy byłby krótszy o 54 minuty. Jaka była prędkość samochodu?  
b) Samochód przejechał drogę z miasta  $A$  do miasta  $B$  o długości 240 km z prędkością  $v$ . W drodze powrotnej przez godzinę jechał z prędkością  $v$ , a następnie zwiększył prędkość o połowę, w rezultacie drogę powrotną przejechał w czasie o godzinę krótszym. Wyznacz prędkość  $v$ .
- \* a) Samochód przejechał drogę z miasta  $A$  do miasta  $B$  ze średnią prędkością 40 km/h. Z jaką średnią prędkością powinien jechać w drodze powrotnej, aby jego średnia prędkość w czasie całej podróży wyniosła 60 km/h?  
D b) Średnia prędkość jazdy samochodem z miasta  $A$  do miasta  $B$  wyniosła  $v_1$  km/h, a podczas drogi powrotnej  $v_2$  km/h. Wykaż, że średnia prędkość liczona dla całej podróży jest równa średniej harmonicznego prędkości  $v_1$  i  $v_2$ .

Średnią harmoniczną liczb dodatnich  $a$  i  $b$  nazywamy liczbę:

$$\bar{v}_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

## Odpowiedzi do zadań

- Niech  $v$ ,  $v + 5$  – średnie prędkości rowerzystów.  
 $\frac{3 \cdot 12}{v} = \frac{4 \cdot 12}{v+5}$ ,  $v > 0$   
 $v = 15$   
Średnie prędkości rowerzystów wynoszą odpowiednio 15 km/h i 20 km/h.
- Niech  $v$  – średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem,  $s$  – odległość między miastami.  
 $\frac{s}{v} = \frac{s-120}{v} + \frac{1}{2} + \frac{120}{v+20}$ ,  $v > 0$   
 $\frac{120}{v} = \frac{v+20+240}{2(v+20)}$   
 $v^2 + 20v - 4800 = 0$   
 $v = 60$   
Średnia prędkość pociągu powinna wynosić 60 km/h.
- Niech  $v$ ,  $v + 6$  – średnie prędkości rowerzystów.  
 $\frac{36}{v} = \frac{36}{v+6} + 1$ ,  $v > 0$   
 $v = 12$   
Średnie prędkości rowerzystów wynoszą odpowiednio 12 km/h i 18 km/h.
- Niech  $v$  – średnia prędkość na polnej drodze,  $(v + 20)$  – średnia prędkość na szosie.  
 $\frac{32}{v+20} + \frac{20}{v} = 2\frac{2}{3}$ ,  $v > 0$   
 $v = 12$   
Średnie prędkości jazdy po szosie i polnej drodze wynosiły odpowiednio 32 km/h i 12 km/h.
- a) Niech  $v$  – średnia prędkość samochodu.  
 $\frac{120}{v} = \frac{120}{v+30} + \frac{54}{60}$ ,  $v > 0$   
 $v = 50$   
Średnia prędkość samochodu wynosiła 50 km/h.

# Powtórzenie

## Odpowiedzi do zadań

- $a = 6$
  - $P, Q$
  - $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
  - $x \in (-\infty; 0) \cup [\frac{3}{2}; \infty)$
- $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0, y = 1$
  - $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0, y = -2$
  - $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}, x = 4, y = 0$
  - $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, x = -2, y = 0$
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\},$   
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\},$   
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\},$   
 $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
  - $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\},$   
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$   
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$   
 $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
  - $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\},$   
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$   
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$   
 $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $[-3, 3]$
  - $[4, 1]$
  - $[1, 1]$
- $g(x) = \frac{2}{x+2} + 3$
  - $g(x) = -\frac{1}{x-2} - 3$

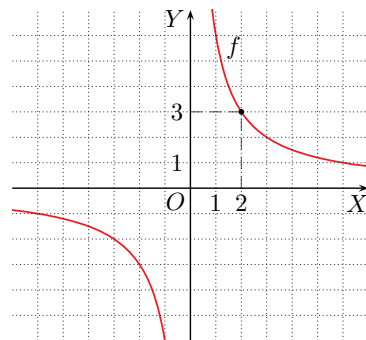
## Zestaw I

- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Oblicz  $a$ .

a) Które spośród punktów:  $P(-8, -\frac{3}{4}), Q(\frac{1}{2}, 12), R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  należą do wykresu funkcji  $f$ ?

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartości większe od  $-3$ .

c) Rozwiąż nierówność  $f(x) \leq 4$ .



- Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$ . Podaj dziedzinę funkcji  $g$  i równania asymptot jej wykresu.

a)  $f(x) = \frac{4}{x}, g(x) = \frac{4}{x} + 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x-4}$

b)  $f(x) = -\frac{3}{x}, g(x) = -\frac{3}{x} - 2$

d)  $f(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x+2}$

- Naszkicuj wykresy funkcji:  $f, g$  i  $h$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a)  $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = \frac{2}{x-1}, h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$

b)  $f(x) = \frac{3}{x}, g(x) = \frac{3}{x+1}, h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$

c)  $f(x) = -\frac{2}{x}, g(x) = -\frac{2}{x+2}, h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

- O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji  $g(x) = \frac{1}{x}$ , aby otrzymać wykres funkcji  $f$ ? Naszkicuj ten wykres.

a)  $f(x) = \frac{1}{x+3} + 3$

b)  $f(x) = \frac{1}{x-4} + 1$

c)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

- Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Naszkicuj wykres tej funkcji.

a)  $f(x) = \frac{2}{x}, \vec{u} = [-2, 3]$

b)  $f(x) = -\frac{1}{x}, \vec{u} = [2, -3]$

- Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a)  $\frac{m}{a} = \frac{2}{b}, b$

c)  $\frac{m}{a} - 2 - \frac{1}{a} = n, a$

e)  $S = \frac{a_1}{1-q}, q$

b)  $\frac{E}{e} = \frac{R+r}{r}, r$

d)  $m\left(m - \frac{2}{a}\right) = 2, a$

f)  $S = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, a_1$

6. a)  $b = \frac{2a}{m}$

b)  $r = \frac{eR}{E-e}$

c)  $a = \frac{m-1}{n+2}$

d)  $a = \frac{2m}{m^2-2}$

e)  $q = 1 - \frac{a_1}{S}$

f)  $a_1 = \frac{S(1-q)}{1-q^n}$

7. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x}{x-1} = 2$  d)  $-\frac{x}{x+2} = x$  g)  $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2-x}{x+1}$   
 b)  $\frac{x+1}{3-x} = 1$  e)  $\frac{x}{x-4} = x-3$  h)  $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x-4}{x+2} = 0$   
 c)  $\frac{2x-7}{x} = -5$  f)  $\frac{2x+10}{x+5} = x-2$  i)  $\frac{x-3}{1-x} + \frac{x+6}{x+2} = 0$

8. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{x^2+6x}{x^2-6x} = 0$  d)  $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4x+4} = 0$  g)  $\frac{x^2-2x-8}{x^2-x-2} = 0$   
 b)  $\frac{x^2-4}{x^2+2x} = 0$  e)  $\frac{4x^2-12x+9}{3x-2x^2} = 0$  h)  $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8} = 0$   
 c)  $\frac{x^2-3x}{2x^2-18} = 0$  f)  $\frac{8x^2-2}{4x^2+4x+1} = 0$  i)  $\frac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2} = 0$

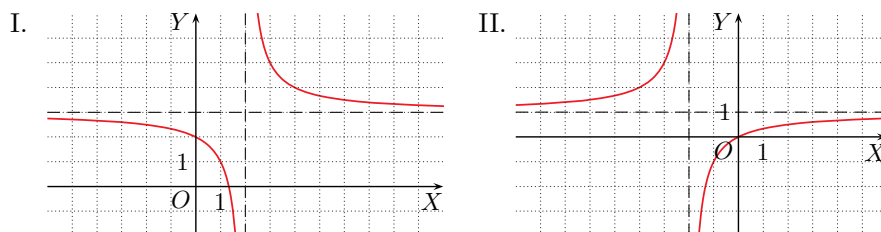
9. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a)  $\frac{x^2-1}{x+1}$  b)  $\frac{x^2+3x}{x^2-3x}$  c)  $\frac{x+2}{x^2+5x+6}$  d)  $\frac{x+5}{x^3+125}$

10. Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{a-x}{x}$ . Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji  $f$  przecina prostą  $y = 2$  oraz prostą  $y = x$ .

a)  $a = 2$  b)  $a = -1$  c)  $a = 1$  d)  $a = -2$

11. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji  $f(x) = \frac{x}{x+2}$  i  $g(x) = \frac{3x-4}{x-2}$ .



- a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji  $f$  i  $g$ .  
 b) Rozwiąż równania:  $g(x) = x$  oraz  $f(x) = -x$ .

12. Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i odczytaj rozwiązanie nierówności  $f(x) > 1$ .

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$  b)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{2}{x+2} & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

13. Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Rozwiąż równanie  $f(x) = x$ .

a)  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  c)  $f(x) = \frac{x}{1-x}$  e)  $f(x) = 2 + \frac{x+1}{x+3}$   
 b)  $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$  d)  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  f)  $f(x) = -\frac{2-x}{1-x}$

13. a) sprzeczne

- b)  $x = -1$  lub  $x = 3$   
 c)  $x = 0$   
 d) sprzeczne  
 e)  $x = -\sqrt{7}$  lub  $x = \sqrt{7}$   
 f)  $x = -\sqrt{2}$  lub  $x = \sqrt{2}$

7. a)  $x = 2$

- b)  $x = 1$   
 c)  $x = 1$   
 d)  $x = -3$  lub  $x = 0$   
 e)  $x = 2$  lub  $x = 6$   
 f)  $x = 4$   
 g)  $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$  lub  $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$   
 h)  $x = 0$   
 i)  $x = 0$

8. a)  $x = -6$

- b)  $x = 2$   
 c)  $x = 0$   
 d)  $x = 0$   
 e) sprzeczne  
 f)  $x = \frac{1}{2}$   
 g)  $x = -2$  lub  $x = 4$   
 h)  $x = 3$   
 i)  $x = -\frac{1}{3}$

9. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $x - 1$

- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ ,  $\frac{x+3}{x-3}$   
 c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$ ,  $\frac{1}{x+3}$   
 d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ ,  $\frac{1}{x^2-5x+25}$

10. a) z prostą  $y = 2$ :  $(\frac{2}{3}, 2)$ ;

- z prostą  $y = x$ :  
 $(1, 1)$ ,  $(-2, -2)$   
 b) z prostą  $y = 2$ :  $(-\frac{1}{3}, 2)$ ;  
 z prostą  $y = x$  - brak  
 c) z prostą  $y = 2$ :  $(\frac{1}{3}, 2)$ ;  
 z prostą  $y = x$ :  
 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ ,  
 $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$

- d) z prostą  $y = 2$ :  $(-\frac{2}{3}, 2)$ ;  
 z prostą  $y = x$  - brak

11. a) II -  $f$ ,  $x = 0$ ; I -  $g$ ,  $x = \frac{4}{3}$

- b)  $g(x) = x$  dla  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  
 $f(x) = -x$  dla  $x = -3$ ,  $x = 0$

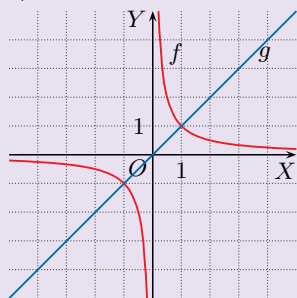
12. a)  $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

- b)  $x \in (-2; 0)$

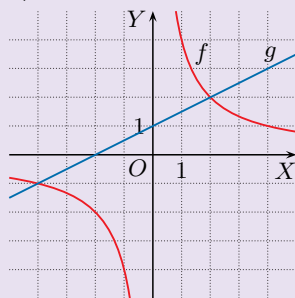


1. a)  $x \in (-\infty; 3) \cup [5; \infty)$   
b)  $x \in (-6; -2)$   
c)  $x \in (-\infty; -1) \cup [7; \infty)$   
d)  $x \in (0; 1)$   
e)  $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$   
f)  $x \in (0; \infty)$
2. a)  $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 2)$   
b)  $x \in (0; \frac{4}{3}] \cup (5; \infty)$   
c)  $x \in (-2; -1) \cup (0; 1)$   
d)  $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$   
e)  $x \in [-2; -\frac{2}{3}) \cup \{0\} \cup (6; \infty)$   
f)  $x \in [-5; 0)$
3. a)  $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$   
b)  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$   
c)  $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 4)$   
d)  $x \in (-2; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$   
e)  $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 0) \cup [3; \infty)$   
f)  $x \in (-3; -2]$
4. a)  $x \in (-3; 3)$   
b)  $x \in (-7; 1) \cup (5; \infty)$   
c)  $x \in (-\infty; -2) \cup [-\frac{1}{2}; 0) \cup (2; \infty)$
5. a)  $A \cup B = (-\infty; 1] \cup [2; \infty)$ ,  
 $A \cap B = [-2; 0) \cup (4; \infty)$ ,  
 $A \setminus B = [2; 4]$   
b)  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  
 $A \cap B = (-\infty; -2) \cup (0; 1)$ ,  
 $A \setminus B = [-2; -1)$
6. a)  $x = -\frac{3}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$   
b)  $x = -5$   
c)  $x \in [1; \infty)$   
d)  $x \in [1; 3]$   
e)  $x = 0$ ,  $x = 2$   
f)  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 2$   
g)  $x \in [1; 5]$   
h)  $x = -1$  i) sprzeczne
7. a) 1, 2 b) 2, 3, 5, 6  
c) 1, 2, 3, 4, 5
8. a)  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$  b)  $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$   
c)  $\mathbb{R} \setminus \{1 + \sqrt{2}\}$

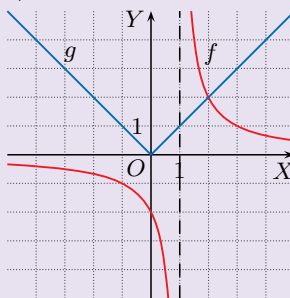
9. a)  $x = -1$ ,  $x = 1$



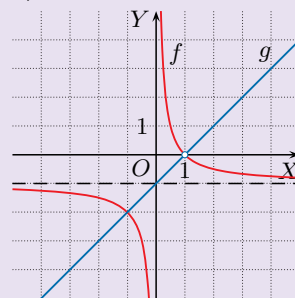
b)  $x = -4$ ,  $x = 2$



c)  $x = 2$



d)  $x = -1$



## Zestaw II

1. Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{x-5}{x-3} \geq 0$

c)  $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{1}{2}$

e)  $x - \frac{1}{x} < 0$

b)  $\frac{x+2}{x+6} < 0$

d)  $\frac{x+2}{x-1} < -2$

f)  $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2. Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{x(x+3)}{x-2} \leq 0$

c)  $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x+1)} < 0$

e)  $\frac{x^2(x+2)}{(x-6)(3x+2)} \geq 0$

b)  $\frac{3x-4}{x(x-5)} \geq 0$

d)  $\frac{(2x-1)(x+1)}{x(x+3)} > 0$

f)  $\frac{(x+5)(3x-2)}{x^3(6x-4)} \leq 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{(2x-1)^2}{4x^2-1} \leq 0$

c)  $\frac{x+2}{x^2-4x} < 0$

e)  $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x} \geq 0$

b)  $\frac{x^2-1}{x^2-5x+10} \geq 0$

d)  $\frac{2x-1}{2x^2-8} > 0$

f)  $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \leq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a)  $\frac{1}{x-3} < \frac{1}{x+3}$

b)  $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-3}{x-1} > 2$

c)  $\frac{x+3}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2+2x} \geq 0$

5. Wyznacz zbiory:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  oraz  $A \setminus B$ .

a)  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{4}{x}\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-7}{x-4} \leq 2\}$

b)  $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x+1} < 1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-2)^2(x+1)}{x+2} \geq 0\}$

6. Rozwiąż równanie.

a)  $|4x| + 2x = 3$

d)  $|x-1| + |x-3| = 2$

g)  $|x-1| + |x-5| = 4$

b)  $|x+3| - x = 7$

e)  $|2x-1| + |x-5| = 6$

h)  $4|x+1| + |x-1| = 2$

c)  $|1-x| + 1 = x$

f)  $|1-3x| - |x+6| = -3$

i)  $|x-7| = 2 - |4-x|$

7. Wyznacz liczby naturalne  $x$ , które spełniają poniższy warunek.

a)  $0 < \frac{3}{8-x} \leq \frac{1}{x}$

b)  $\left| \frac{5}{x-4} \right| > 2$

c)  $\left| \frac{x-10}{x} \right| \geq 1$

8. Wyznacz zbiór wartości funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} - 1$

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{3}x-1}{x+3}$

c)  $f(x) = \frac{x}{x+2} + \sqrt{2}$

9. Rozwiąż graficznie równanie  $f(x) = g(x)$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$

c)  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ,  $g(x) = |x|$

b)  $f(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

d)  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ ,  $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1}$



10. Rozwiąż graficznie równanie  $f(x) = g(x)$ .

a)  $f(x) = -x^2$ ,  $g(x) = \frac{-2}{x+1}$       b)  $f(x) = 2(x-2)^2$ ,  $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

11. Rozwiąż graficznie równanie  $f(x) = g(x)$ .

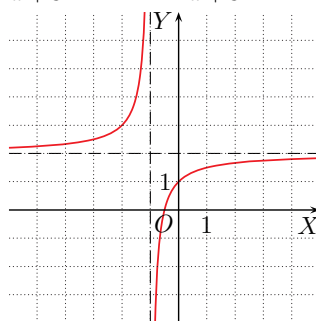
a)  $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$ ,  $g(x) = \frac{4}{x-2}$       b)  $f(x) = \frac{x}{x+3}$ ,  $g(x) = \frac{-6-x}{x+3}$

12. Podaj wzór funkcji homograficznej, której wykres przedstawiono na rysunku obok.

a) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby otrzymać wykres funkcji  $g$ ?

$$g(x) = \frac{-x-3}{x+2}$$

b) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby osiami symetrii otrzymanej hiperboli były proste:  $y = x - 4$  i  $y = -x - 2$ ?



13. Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{4}{x}$ . Dla jakiej wartości parametru  $m$  przedział  $(-8; 0)$  jest zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{4}{x} < m$ ?

14. Dla jakich wartości parametru  $m$  wykresy funkcji  $f(x) = \frac{x-m}{x}$  i  $g(x) = mx$  mają dokładnie jeden punkt wspólny?

15. Dla jakich wartości parametru  $m$  wykresy funkcji  $f$  i  $g$  nie mają punktów wspólnych?

a)  $f(x) = \frac{m}{x}$ ,  $g(x) = -mx$       c)  $f(x) = \frac{m}{x}$ ,  $g(x) = (m-1)x$

b)  $f(x) = \frac{m}{x}$ ,  $g(x) = mx$       d)  $f(x) = \frac{m-3}{x}$ ,  $g(x) = x+m$

16. Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie ma dwa rozwiązania ujemne?

a)  $(k+1)x^2 - 2kx = k-1$       b)  $(k-1)x^2 - (2k-1)x + k-2 = 0$

17. Dla jakich wartości parametru  $k$  dziedziną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{(k-1)x^2 + 2(2k-1)x + 5k-1}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych?

18. Dla jakich wartości parametru  $m$  dane proste są równoległe, a dla jakich prostopadłe?

a)  $y = \frac{-m}{m-1}x + 3$  i  $y = \frac{1-m}{m+2}x$       b)  $y = \frac{1}{1-m^2}x - 5$  i  $y = \frac{m+1}{m-1}x$

19. Dla jakich wartości parametru  $m$  nierówność jest prawdziwa dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ?

a)  $\frac{mx+2}{x^2+1} > 0$       b)  $\frac{3x^2-2x+1}{-x^2+mx-1} < 0$       c)  $\frac{(m-3)x+3}{-x^2+x-2} > -2$

18. a) równoległe dla  $m = \frac{1}{4}$ , prostopadłe dla  $m = -1$

b) nigdy nie są równoległe, prostopadłe dla  $m = 0$  i dla  $m = 2$

19. a)  $x^2 + 1 > 0$  dla  $m \in \mathbb{R}$ ,  $mx + 2 > 0$  dla  $m = 0$

b)  $3x^2 - 2x + 1 > 0$  dla  $m \in \mathbb{R}$ , ponieważ  $\Delta = -8 < 0$ .

$-x^2 + mx - 1 < 0$  dla dowolnego  $x$ , gdy  $\Delta < 0$ , czyli  $\Delta = m^2 - 4 < 0$  dla  $m \in (-2; 2)$ .

c) Nierówność można zapisać w postaci:  $\frac{-2x^2+(m-1)x-1}{-x^2+x-2} > 0$ .

$-x^2 + x - 2 < 0$  dla dowolnego  $x$ , ponieważ  $\Delta = -7 < 0$ .

Zatem dla dowolnego  $x$  musi być spełniony warunek:  $-2x^2 + (m-1)x - 1 < 0$ .

$\Delta = m^2 - 2m - 7 < 0$  dla  $m \in (1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$

10. a)  $x = 1$

b)  $x = 3$

11. a)  $x = 3$

b) sprzeczne

12.  $y = \frac{-1}{x+1} + 2$

a)  $[-1, -3]$

b)  $[2, -5]$

13.  $m = -\frac{1}{2}$

14.  $m = -\frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$

15. a)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) nie ma takich  $m$

c)  $m \in [0; 1]$

d)  $m \in (-6; 2)$

16. a) Równanie ma dwa rozwiązania ujemne  $x_1$  i  $x_2$ , gdy  $k \neq -1$ ,  $\Delta > 0$ ,  $x_1 x_2 > 0$  oraz  $x_1 + x_2 < 0$ .

$$\Delta = 4k^2 + 4(k-1)(k+1) = 8k^2 - 4 > 0 \text{ dla } k \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$$

$$x_1 x_2 = -\frac{k-1}{k+1} > 0$$

$$(k-1)(k+1) < 0$$

$$k \in (-1; 1)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2k}{k+1} < 0$$

$$2k(k+1) < 0$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$

$$k \in (-1; 0)$$



**Przykład**

Rozwiąż nierówność  $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ , gdzie  $x \neq 3$ .

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

**I sposób**

Rozpatrujemy dwa przypadki ze względu na znak mianownika.

1°  $x - 3 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty; 3)$       2°  $x - 3 > 0$ , czyli  $x \in (3; \infty)$

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

$$2x - 2 > x - 3$$

$$x > -1$$

Zatem  $x \in (-1; 3)$ .

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności.

$$2x - 2 < x - 3$$

$$x < -1$$

Sprzeczność z założeniem.

Nierówność  $\frac{2x-2}{x-3} < 1$  jest prawdziwa dla  $x \in (-1; 3)$ .

**II sposób**

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika ułamka.

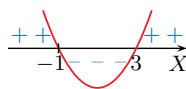
$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)^2 \quad (x-3)^2 > 0$$

$$(2x-2)(x-3) < (x-3)^2$$

$$(2x-2)(x-3) - (x-3)^2 < 0$$

$$(x-3)((2x-2) - (x-3)) < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$



Nierówność  $\frac{2x-2}{x-3} < 1$  jest prawdziwa dla  $x \in (-1; 3)$ .

**III sposób**

Postępujemy następująco:

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - 1 < 0$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} < 0$$

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

Wykorzystujemy fakt, że iloraz i iloczyn mają ten sam znak, i rozwiązujemy nierówność  $(x-3)(x+1) < 0$ , tak jak w II sposobie.

Nierówność  $\frac{2x-2}{x-3} < 1$  jest prawdziwa dla  $x \in (-1; 3)$ .

**Odpowiedź:**  $x \in (-1; 3)$

→ Zadania 4, 9, str. 174



W zadaniach 1–10, 13.2 i 15.2 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

### Zadanie 1 (0–1)

Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji  $f(x) = \frac{-4}{x-p} + q$  dla

- A.  $p = -3, q = 0$  C.  $p = 4, q = -3$   
B.  $p = 2, q = -1$  D.  $p = 1, q = 2$

2. Funkcja  $f(x) = \frac{a}{x+2}$  rośnie w każdym z przedziałów  $(-\infty; -2)$  i  $(-2; \infty)$  dla  $a < 0$ .

3. Asymptotą pionową wykresu funkcji  $f$  jest prosta  $x = 2$ , więc  $b = -2$ .  
Dla  $a = 3$  mamy  $f(5) > 0$ , zatem  $a = -3$ .

### Zadanie 2 (0–1)

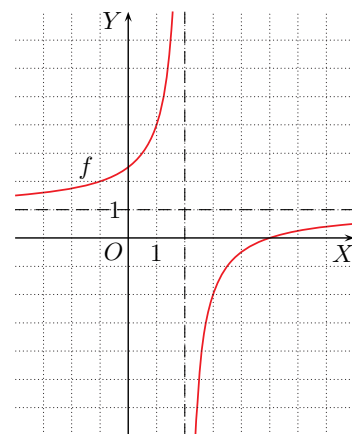
Funkcją rosnącą w każdym z przedziałów  $(-\infty; -2)$  i  $(-2; \infty)$  jest funkcja

- A.  $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{x+2}$  B.  $f(x) = \frac{6}{x+2}$  C.  $f(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{x+2}$  D.  $f(x) = \frac{-2+\sqrt{5}}{x+2}$

### Zadanie 3 (0–1)

Miejsce zerowe funkcji  $f(x) = \frac{a}{x+b} + 1$ , której wykres przedstawiono na rysunku obok, jest równe 5. Zatem

- A.  $a = 2$  i  $b = 2$  C.  $a = 3$  i  $b = -2$   
B.  $a = -2$  i  $b = 2$  D.  $a = -3$  i  $b = -2$



### Zadanie 4 (0–1)

Punkty  $P(1, 2)$  i  $Q(3, 4)$  należą do wykresu funkcji

- A.  $f(x) = \frac{3}{x-2} - 1$  C.  $f(x) = \frac{-3}{x-4} + 1$   
B.  $f(x) = \frac{-3}{x-2} + 1$  D.  $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

5.  $\frac{a(n+1)}{n+2} = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{(n+2)}{n+1}$   
 $a = \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n^2-4}{n^2-1}$

6.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$   
 $(x+2)(x+1) = (x+3)(x+4)$   
 $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12$   
 $-4x = 10$   
 $x = -\frac{5}{2}$

### Zadanie 5 (0–1)

Jeśli  $\frac{a(n+1)}{n+2} - \frac{n-2}{n-1} = 0$ , to

- A.  $a = \frac{(n-2)(n+1)}{(n+2)(n-1)}$  B.  $a = \frac{(n+2)(n-1)}{(n-2)(n+1)}$  C.  $a = \frac{n^2+4}{n^2+1}$  D.  $a = \frac{n^2-4}{n^2-1}$

### Zadanie 6 (0–1)

Rozwiązaniem równania  $\frac{x+2}{x+3} = \frac{x+4}{x+1}$  jest liczba

- A.  $-\frac{7}{2}$  B.  $-\frac{5}{2}$  C.  $-\frac{3}{2}$  D.  $-\frac{1}{2}$

### Zadanie 7 (0–1)

Liczby  $-5$  i  $1$  są rozwiązaniami równania

- A.  $\frac{8-8x}{x-1} = x-3$  C.  $\frac{6x+30}{x+5} = x+5$   
B.  $\frac{2-6x}{x+1} = x-3$  D.  $\frac{x+5}{x+1} = x+5$

7. A. Liczba 1 nie należy do dziedziny wyrażenia  $\frac{8-8x}{x-1}$ .

B. Liczba  $-5$  jest rozwiązaniem równania, gdyż:

$$\frac{2-6 \cdot (-5)}{-5+1} = -5-3$$

$$\frac{32}{-4} = -8$$

$$-8 = -8$$

Liczba 1 jest rozwiązaniem równania, gdyż:

$$\frac{2-6 \cdot 1}{1+1} = 1-3$$

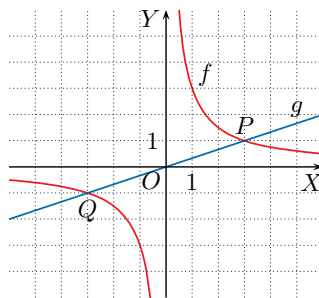
$$\frac{-4}{2} = -2$$

$$-2 = -2$$

**Zadanie 8 (0-1)**

Wykresy funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  i  $g(x) = bx$  przecinają się w punktach  $P(3, 1)$  i  $Q(-3, -1)$  (rysunek obok). Wynika stąd, że  $a + b$  jest równe

- A.  $-2\frac{2}{3}$       B. 0      **C.  $3\frac{1}{3}$**       D. 6

**Zadanie 9 (0-1)**

Jednym z rozwiązań równania  $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x}$  jest

- A.  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$       B.  $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$       C.  $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$       **D.  $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$**

**Zadanie 10 (0-1)**

Liczba  $a$  jest rozwiązaniem równania  $\frac{2x-3}{x-2} = 0$ , a liczba  $b$  jest rozwiązaniem równania  $\frac{3x-2}{x-3} = 0$ . Suma liczb  $a$  i  $b$  jest równa

- A.  $5\frac{5}{6}$**       B.  $5\frac{2}{3}$       C.  $5\frac{1}{2}$       D. 5

**Zadanie 11 (0-1)**

Dane są dwa wyrażenia wymierne  $F$  i  $G$  określone dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$ .

$$F = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}, \quad G = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Iloczyn  $F \cdot G$  jest równy

|           |                                    |                                   |           |                                      |
|-----------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------|--------------------------------------|
| <b>A.</b> | $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6},$ | a iloraz $\frac{F}{G}$ jest równy | <b>1.</b> | $\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 5x + 6}.$ |
|           |                                    |                                   | <b>2.</b> | $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}.$ |
|           |                                    |                                   | <b>3.</b> | $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x + 6}.$ |
| <b>B.</b> | $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x + 6},$ |                                   |           |                                      |

**Zadanie 12 (0-1)**

Dane jest równanie  $|x + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie rozwiązania tego równania

|                                  |          |          |
|----------------------------------|----------|----------|
| są liczbami niewymiernymi.       | <b>P</b> | <b>F</b> |
| należą do przedziału $(-2; 2)$ . | <b>P</b> | <b>F</b> |

8.  $f(3) = \frac{a}{3} = 1$ , więc  $a = 3$ .  
Z wykresu funkcji  $g$  odczytujemy jej współczynnik kierunkowy:  $b = \frac{1}{3}$ .

9.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$   
 $x(x-1) = 2(x+1)$   
 $x^2 - x = 2x + 2$   
 $x^2 - 3x - 2 = 0$   
 $\Delta = 9 + 8 = 17 = 0$   
 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$   
 $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

10.  $\frac{2x-3}{x-2} = 0, x \neq 2$   
 $\frac{2}{3}x - 3 = 0$   
 $x = \frac{9}{2} = a$   
 $\frac{3x-2}{x-3} = 0, x \neq 3$   
 $\frac{3}{2}x - 2 = 0$   
 $x = \frac{4}{3} = b$   
 $a + b = \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{27+8}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$

11.  $F = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$   
 $G = \frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3}{x+3}$

12. Rozwiązania równania:  
 $x = -3\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

**Zadanie 13**

Dane są dwa wyrażenia wymierne  $P$  i  $Q$  określone dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 4\}$ .

$$P = \frac{x+4}{9-x^2}, \quad Q = \frac{x^2-3x}{x-4}$$

**Zadanie 13.1 (0-1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                   |          |          |
|-------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| Dla $x = -\frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości dodatnie. | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Dla $x = \frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości ujemne.    | <b>P</b> | <b>F</b> |

$$13.2. P \cdot Q =$$

$$= \frac{-x-4}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x(x-3)}{x-4} =$$

$$= \frac{-x^2-4x}{(x+3)(x-4)}$$

**Zadanie 13.2 (0-1)**

Iloczyn wyrażeń  $P$  i  $Q$  zapisano w postaci  $\frac{-x^2+kx}{(x+3)(x-4)}$ , gdzie  $k$  jest liczbą rzeczywistą. Wynika stąd, że

- A.  $k = -6$       B.  $k = -4$       C.  $k = 4$       D.  $k = 6$

**Zadanie 14 (0-2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Dla argumentu równego  $-2$  wartość równą  $-1$  przyjmuje funkcja

- A.  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$       C.  $f(x) = \frac{-3x+2}{x+4}$       E.  $f(x) = \frac{-2x-1}{-2x+3}$   
 B.  $f(x) = \frac{x+4}{2x+2}$       D.  $f(x) = \frac{-3x-1}{2x-5}$       F.  $f(x) = \frac{x-4}{-4x-2}$

**Zadanie 15**

Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{\sqrt{2}-2x}{\sqrt{2}x-2}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$ .

**Zadanie 15.1 (0-2)**

Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

|                                                            |          |
|------------------------------------------------------------|----------|
| Funkcja $f$ dla $x = \sqrt{2} - 1$ przyjmuje wartość równą | <b>D</b> |
| Funkcja $f$ dla $x = \sqrt{2} + 1$ przyjmuje wartość równą | <b>A</b> |

- A.  $-1 - \sqrt{2}$       B.  $-2 + \sqrt{2}$       C.  $2\sqrt{2}$       D.  $1 - \sqrt{2}$       E.  $2 + \sqrt{2}$

**Zadanie 15.2 (0-1)**

Wykres funkcji  $f$  przecina osie układu współrzędnych w punktach  $(a, 0)$  i  $(0, b)$ . Iloczyn  $ab$  jest równy

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $-\sqrt{2}$       C.  $2$       D.  $2\sqrt{2}$

$$15. f(x) = \frac{1-\sqrt{2}x}{x-\sqrt{2}}$$

$$15.2. f(a) = \frac{1-\sqrt{2}a}{a-\sqrt{2}} = 0 \text{ dla } a = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Zadanie 16 (0-2)**

Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{a}{x}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Do jej wykresu należy punkt  $(2\sqrt{5} - 3, 2\sqrt{5} + 3)$ . Oblicz  $a$ .

**Zadanie 17 (0-2)**

Rozwiąż równanie  $|x - 1 + \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$ .

**Zadanie 18**

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f(x) = \frac{3}{2x} + b$ .

**Zadanie 18.1 (0-2)**

Oblicz najmniejszą wartość funkcji  $f$  w przedziale  $[\frac{1}{2}; 6]$ .

**Zadanie 18.2 (0-2)**

Rozwiąż równanie  $f(x) = x$ .

**Zadanie 19 (0-2)**

Rozwiąż równanie  $\frac{x}{\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{x-2\sqrt{2}}$ .

**D Zadanie 20 (0-3)**

Uzasadnij, że do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{4}{x} + 1$  należy dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

**Zadanie 21 (0-4)**

Dane są dwa prostokąty: jeden o bokach  $x$  cm i  $(x+4)$  cm oraz drugi o bokach  $(x+4)$  cm i  $(2x+2)$  cm. Stosunek długości krótszego boku do dłuższego boku dla obu prostokątów jest taki sam. Oblicz sumę pól tych prostokątów.

**Zadanie 22 (0-4)**

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył z prędkością  $v$ , a drugą połowę – z prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem  $t$ , w jakim pociąg przebył całą trasę, a prędkością  $v$ . Oblicz  $t$  dla  $v = 120$  km/h.

**Zadanie 23 (0-4)**

Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Gdy płynął z prądem rzeki, pokonał trasę o 50% dłuższą, niż byłby w stanie pokonać w tym samym czasie, gdyby płynął pod prąd. Oblicz prędkość prądu rzeki.

$$22. t(v) = \frac{70}{v} + \frac{70}{\frac{v}{2}} = \frac{210}{v}, v > 0$$

$$t(120) = \frac{210}{120} = 1\frac{45}{60}$$

$$t = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$$

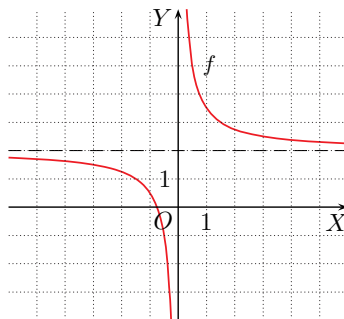
23. Oznaczmy przez  $v$  prędkość prądu rzeki. Wówczas:

$$10 + v = 1,5(10 - v)$$

$$10 + v = 15 - 1,5v$$

$$2,5v = 5$$

$$v = 2 \text{ km/h}$$



$$16. \frac{a}{2\sqrt{5}-3} = 2\sqrt{5} + 3$$

$$a = (2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3) = 4 \cdot 5 - 9 = 11$$

$$17. x = 0, x = 2 - 2\sqrt{3}$$

18. Prosta  $x = 2$  jest asymptotą poziomą funkcji  $f$ , zatem  $b = 2$ .

18.1. Funkcja  $f$  maleje w przedziale  $[\frac{1}{2}; 6]$ , zatem jej najmniejsza wartość w tym przedziale jest równa:

$$f(6) = \frac{3}{12} + 2 = 2\frac{1}{4}$$

$$18.2. x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$19. x = \sqrt{2}$$

20. Do wykresu funkcji  $f$  należy tyle punktów o obu współrzędnych całkowitych, ile liczba 4 ma dzielników całkowitych. Dzielniki całkowite liczby 4:  $-4, -2, -1, 1, 2, 4$ .

$$21. x \in (-1, \infty)$$

**Przypadek 1.**

Krótszy bok drugiego prostokąta ma długość  $2x + 2$ .

Wówczas:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2x+2}{x+4}$$

$$x = 2x + 2$$

$$x = -2$$

Sprzeczne z założeniem.

**Przypadek 2.**

Krótszy bok drugiego prostokąta ma długość  $x + 4$ .

Wówczas:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{x+4}{2x+2}$$

$$x(2x+2) = (x+4)^2$$

$$2x^2 + 2x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 8$$

Założenie spełnia tylko  $x = 8$ .

Suma pól prostokątów:

$$8 \cdot 12 + 12 \cdot 18 = 12 \cdot 26 = 312 \text{ [cm}^2\text{]}$$





## Odpowiedzi do zadań

1. Niech  $6x, 5x > 0$  będą długościami boków prostokąta  $P_1$ .

$$\frac{6x-2\frac{2}{3}}{5x-2\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}, 5x - 2\frac{2}{3} > 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$Ob = 2(6x + 5x) = 29\frac{1}{3}$$

2.  $x \neq \frac{1}{2}$  lub  $x \neq \frac{2}{3}$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Pokażemy, że } \frac{1}{x_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3.  $x_0 = \frac{17}{6}, x \in [\frac{11}{6}, \frac{17}{6}]$

4.  $\frac{1}{6}$

5.  $A = [0; 3] \cup (4; \infty)$

$$B = (-2; 2)$$

$$A \setminus B = [2; 3] \cup (4; \infty)$$

6.  $f(x) = \frac{3-m^2}{x-m} - m$

Funkcja  $f$  jest rosnąca w każdym z danych przedziałów, gdy  $3 - m^2 < 0$ , czyli dla  $m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ .

9.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Asymptotą poziomą jest prosta  $y = -2$ , zatem  $a = -2$ .

$$-2 \cdot \frac{1}{2} + b = 0, \text{ czyli } b = 1.$$

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$$

$$\frac{-2x+1}{x+3} \leq x + \frac{1}{3}$$

$$-\frac{(2x-1)}{x+3} - \frac{3x+1}{3} \leq 0$$

$$\frac{(2x-1)}{x+3} + \frac{3x+1}{3} \geq 0$$

$$\frac{6x-3+(3x+1)(x+3)}{3x+9} \geq 0$$

$$\frac{3x^2+16x}{x+3} \geq 0$$

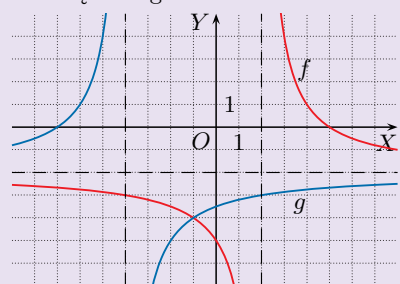
$$x(x + \frac{16}{3})(x + 3) \geq 0$$

$$x \in [-\frac{16}{3}; -3] \cup [0; \infty)$$

10. 70 km/h i 90 km/h

7.  $f(x) = \frac{6}{x-2} - 2$

Rozwiązanie graficzne:



$$f(x) \geq g(x) \text{ dla } x \in (-4; -1] \cup (2; \infty)$$

## Zadanie 1 (0-2)

Stosunek długości boków prostokąta  $P_1$  jest równy  $6:5$ . Jeśli każdy bok tego prostokąta skrócimy o  $2\frac{2}{3}$ , to otrzymamy prostokąt  $P_2$ , w którym stosunek boków jest równy  $4:3$ . Oblicz obwód prostokąta  $P_1$ .

## D Zadanie 2 (0-3)

Liczba  $x_1$  jest dodatnim pierwiastkiem równania  $\frac{x}{2x-1} = \frac{x-1}{3x-2}$ . Udowodnij, że prostokąt o bokach  $x_1$  i 1 jest podobny do prostokąta o bokach 1 i  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## Zadanie 3 (0-4)

Liczba  $x_0$  jest miejscem zerowym funkcji  $f(x) = \frac{14}{2x-1} - 3$ . Rozwiąż równanie  $|x - x_0| + |x - \frac{11}{6}| = 1$ .

## Zadanie 4 (0-3) → Przykład, str. 169

Liczba  $a$  jest najmniejszą, a liczba  $b$  największą liczbą naturalną spełniającą nierówność  $\frac{x^2+66}{x+3} \leq 14$ . Wyznacz iloraz  $\frac{a}{b}$ .

## Zadanie 5 (0-5)

Zbiór  $A$  jest zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{x^3-x^2-6x}{x^2-2x-8} \geq 0$ , a zbiór  $B$  – zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{x^2+4}{x^2-4} \leq 0$ . Wyznacz zbiór  $A \setminus B$ .

## Zadanie 6 (0-3)

Dana jest funkcja homograficzna  $f(x) = \frac{mx-3}{m-x}$ . Dla jakich wartości parametru  $m$  funkcja ta jest rosnąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty; m)$  i  $(m; \infty)$ ?

## Zadanie 7 (0-5)

Wykres funkcji  $g$  jest symetryczny względem prostej  $x = -1$  do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{10-2x}{x-2}$ . Rozwiąż nierówność  $f(x) - g(x) \geq 0$ .

## Zadanie 8 (0-4)

Naszkicuj wykresy funkcji  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$  oraz  $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ .

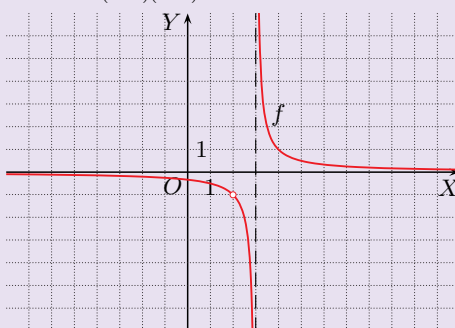
## Zadanie 9 (0-4) → Przykład, str. 169

Miejsce zerowe funkcji homograficznej  $f(x) = \frac{ax+b}{x+3}$  jest równe  $\frac{1}{2}$ , a asymptota pozioma wykresu tej funkcji przechodzi przez punkt  $(2, -2)$ . Rozwiąż nierówność  $f(x) \leq x + \frac{1}{3}$ .

## Zadanie 10 (0-3)

Z miasta  $A$  do oddalonego o 550 km miasta  $B$  wyruszył samochód jadący z prędkością  $v$  km/h. Godzinę później z miasta  $B$  tą samą drogą wyruszył samochód do miasta  $A$  z prędkością o 20 km/h większą. Samochody te minęły się w odległości 280 km od miasta  $A$ . Oblicz prędkości obu samochodów.

8.  $f(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } f(x) > 0 \\ -1 & \text{gdy } f(x) < 0 \end{cases}$$

