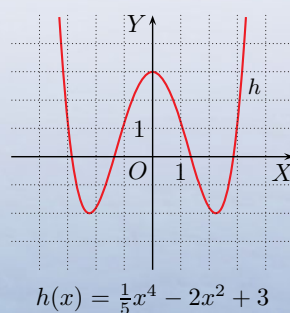
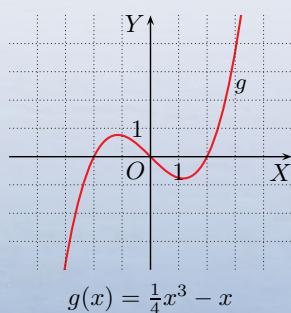
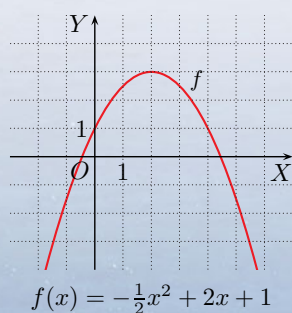


2 Wielomiany

Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Za pomocą wielomianu można opisać na przykład zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że gdy funkcja ma nieskończoną dziedzinę, nie jesteśmy w stanie narysować całego wykresu funkcji – rysujemy tylko jego fragment. Jednak aby nie wydłużać poleceń, używamy w takich sytuacjach określenia „wykres”.

Multibook

• Wykres wielomianu

Uczeń:

- rozróżnia wielomian, podaje przykład wielomianu, określa jego stopień i podaje wartości jego współczynników,
- zapisuje wielomian określonego stopnia o danych współczynnikach,
- zapisuje wielomian w sposób uporządkowany,
- oblicza wartość wielomianu dla danego argumentu,
- oblicza brakujące współrzędne punktu należącego do wykresu danego wielomianu,
- sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu danego wielomianu,
- wyznacza współczynniki wielomianu spełniającego dane warunki,
- określa stopień wielomianu w zależności od parametru,
- oblicza sumę współczynników wielomianu.

Ćwiczenie 1

- a) tak, stopnia 7
- b) tak, stopnia 1
- c), d) nie
- e) tak, stopnia 3

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.

Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

- a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$$y = x^3 + 2x$$

dwumian trzeciego stopnia

$$y = 5x^4 + 1$$

dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)

$$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$$

trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$$

wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, nazywamy **wielomianem stopnia n** .

Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.

Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.

Liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.

Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\text{st}(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$ c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$
b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$ d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

Współczynniki wielomianu: $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\text{st}(w) = 4$.

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

- a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$$

$$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$$

$$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w .

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

- a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

- a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

- a) $w(0) = -4$, $w(2) = 10$, $w(-2) = -26$
b) $w(0) = 1$, $w(2) = 21$, $w(-2) = 13$
c) $w(0) = -2$, $w(2) = 32$, $w(-2) = -44$
d) $w(0) = 3$, $w(2) = -47$, $w(-2) = -75$

Ćwiczenie 6

- a) $w(-\frac{1}{2}) = 6$, $w(\frac{3}{2}) = -24$
b) $w(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$, $w(\frac{3}{2}) = \frac{265}{2} = 132\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

a) $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(w) = 5$

b) $w(x) = 2x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - x$, $\text{st}(w) = 6$

c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 + 6x - 2$, $\text{st}(w) = 8$

d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5$, $\text{st}(w) = 10$

Ćwiczenie 3

a) $a_5 = -2$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$,
 $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $\text{st}(w) = 5$

b) $a_6 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 1$,
 $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$,
 $\text{st}(w) = 6$

c) $a_0 = 2^{10}$, $\text{st}(w) = 0$

Ćwiczenie 4

a) $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$

b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Odpowiedzi do zadań

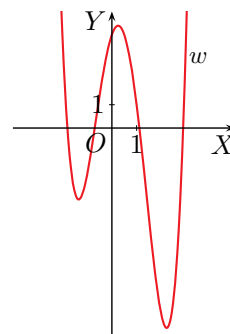
- $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$,
 $a_3 = 1, a_2 = -6, a_1 = 0$,
 $a_0 = 4$
 - $w(x) = -6x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 1$,
 $a_5 = -6, a_4 = 4, a_3 = -3$,
 $a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = -1$,
 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -4$
- $w(0) = -3, w(2) = 21$,
 $w(-2) = -19, w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
 - $w(0) = 2, w(2) = -20$,
 $w(-2) = 32, w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$
 - $w(0) = -4, w(2) = -6$,
 $w(-2) = -34, w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
 - $w(0) = -10, w(2) = 6$,
 $w(-2) = -58, w(\frac{1}{2}) = -11\frac{7}{16}$
- $a = 1, b = -2, c = -8, d = 4$
- punkt Q ,
 $u(-2) = -17 \neq 7, u(2) = -5$
 - punkt P ,
 $u(\frac{1}{2}) = 2, u(-\frac{1}{2}) = -2 \neq -1$
- $w(1) = a + 1 + 1 = 3, a = 1$
 - $w(3) = 81 - 9 + a = 0$,
 $a = -72$
 - $w(-4) = -64 + 16a + 3 = 3$,
 $a = 4$
 - $w(2) = 16a + 10 = -6$,
 $a = -1$
- $\begin{cases} 3 + a - b + 2 = 4 \\ -24 + 4a + 2b + 2 = 20 \end{cases}$
 $a = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}, b = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$
 - $\begin{cases} 81 - 27a + 9b + 2 = 11 \\ 1 + a + b + 2 = 7 \end{cases}$
 $a = 3, b = 1$
- 5 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,
3 dla $m = 2, 1$ dla $m = -2$
 - 6 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$,
4 dla $m = -4, 2$ dla $m = 0$

Zadania

- Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0,1x^4, v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$,
 $w(x) = 2x + 4x^4 - 3x^3 - 6x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:
 - stopnia trzeciego; uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3, a_2, a_1 i a_0 ,
 - stopnia piątego; uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę (patrz zadanie 9.).
- Oblicz wartości wielomianu w dla $x = 0, x = 2, x = -2$ i $x = \frac{1}{2}$.
 - $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$
 - $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$
 - $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$
 - $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$
- Punkty: $P(1, a), Q(-1, b), R(2, c), S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Oblicz współrzędne: a, b, c i d .
- Które spośród punktów: P, Q należą do wykresu wielomianu u ?
 - $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1, P(-2, 7), Q(2, -5)$
 - $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}, P(\frac{1}{2}, 2), Q(-\frac{1}{2}, -1)$
- Oblicz współczynnik a wielomianu w .
 - $w(x) = ax^2 + x + 1, w(1) = 3$
 - $w(x) = 3x^3 - x^2 + a, w(3) = 0$
 - $w(x) = x^3 + ax^2 + 3, w(-4) = 3$
 - $w(x) = ax^4 + 4x + 2, w(2) = -6$
- Oblicz współczynniki a i b wielomianu w .
 - $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2, w(-1) = 4, w(2) = 20$
 - $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2, w(-3) = 11, w(1) = 7$
- Określ stopień wielomianu w w zależności od parametru m .
 - $w(x) = (m^2 - 4)x^5 + (m + 2)x^3 + x$
 - $w(x) = (m^2 + 4m)x^6 + mx^4 - x^2$
- Podaj wielomian stopnia 4., którego współczynniki: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są takimi liczbami, że każda następna jest dwukrotnie większa od poprzedniej, a suma wszystkich jest równa 1.
- Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$. Oblicz sumę współczynników wielomianu w .
 - $w(x) = (x^3 - 27)(2x^2 + 11x)(x^2 - 1)$
 - $w(x) = (2x^3 - 5x + 2)^{101}$
- $a_0 + 2a_0 + 4a_0 + 8a_0 + 16a_0 = 1$
 $a_0 = \frac{1}{31}$
 $w(x) = \frac{16}{31}x^4 + \frac{8}{31}x^3 + \frac{4}{31}x^2 + \frac{2}{31}x + \frac{1}{31}$
- Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Wtedy:

$$w(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 =$$

$$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$
 co należało uzasadnić.
 - 0
 - 1



2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{ i } \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x} - 5 - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w . Podaj stopień wielomianu u , wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\text{st}(u) = 4$, $\text{st}(w) = 4$ oraz:

a) $\text{st}(u + w) = 4$, c) $\text{st}(u + w) = 2$, e) $\text{st}(u + w) = 0$.

b) $\text{st}(u + w) = 3$, d) $\text{st}(u + w) = 1$,

Twierdzenie

Jeśli wielomiany: u , w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$, to:

$$\text{st}(u + w) \leq \text{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w , jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Ćwiczenie 3

Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u , tzn.:

$$w(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$$

Uczeń:

- wyznacza sumę i różnicę wielomianów,
- określa stopnie sumy i różnicy wielomianów,
- szkicuje wykres wielomianu będącego sumą jednomianów stopni pierwszego i drugiego,
- odczytuje informacje z danego wykresu wielomianu,
- stosuje wielomian do opisanego np. pola powierzchni prostopadłościanu i określa dziedzinę tego wielomianu,
- oblicza wartość wielomianu dwóch (trzech) zmiennych dla danych argumentów,
- określa stopień wielomianu wielu zmiennych.

Ćwiczenie 1

a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 + -3x^2 + 2x$, $\text{st}(u) = 4$,

$\text{st}(w) = 3$, $\text{st}(u + w) = 4$

b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 + -2x^2 + 5$, $\text{st}(u) = 7$,

$\text{st}(w) = 7$, $\text{st}(u + w) = 4$

Ćwiczenie 2

a) np. $u(x) = x^4 + 1$, $w(x) = x^4$

b) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + x^3$

c) np. $u(x) = -x^4 - x + 1$,
 $w(x) = x^4 + x^2$

d) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + x + 1$

e) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + 1$

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= \underline{6x^4} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - 3 - \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{x^2} + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w .

Ćwiczenie 4

a) $u(x) - w(x) = 5x^9 + 4x^8 + 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $\text{st}(u) = 9$,
 $\text{st}(w) = 8$, $\text{st}(u - w) = 9$

b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 + -\frac{1}{2}x^2 + 1$, $\text{st}(u) = 6$,
 $\text{st}(w) = 6$, $\text{st}(u - w) = 4$

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów u , w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0,75x^6 - 0,2x^4 + 0,125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x) = \\ &= \underline{9x^4} - \underline{6x^3} - \underline{x^2} + 3 - \underline{10x^4} - \underline{2x^3} + \underline{4x^2} - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2 .

Ćwiczenie 5

a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7$,
 $h(-1) = 5$

b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4$,
 $h(-1) = -25$

Ćwiczenie 5

Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

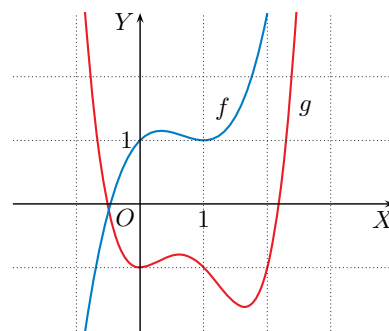
b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1,5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?

b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w ?



Ćwiczenie 6

a) $f(1) = 1$, $g(1) = -1$, $u(1) = 2f(1) + 4g(1) = -2$; należy

b) $f(0) = 1$, $g(0) = -1$, $a = w(0) = 2f(0) - 3g(0) = 5$

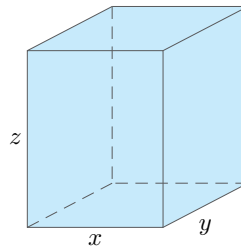
Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x, y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x, y, z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

Podaj wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej oraz wielomian opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x , y , z (rysunek obok).



$P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ dla $x, y, z > 0$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x, y, z) = xyz$.

Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę $u + w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \quad w(x, y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + w(x, y) &= 3x^2y + 6xy^2 - \underline{4xy} + 5xy^3 + \underline{4x^2y} + \underline{xy} + 2 = \\ &= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2 \end{aligned}$$

b) Wyznacz różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \quad w(x, y, z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2 \\ u(x, y, z) - w(x, y, z) &= 5x^2y^2z^2 - \underline{4xyz^2} - 5x^2y^2z + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 = \\ &= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz sumę $u + w$ i różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

a) $u(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2$, $w(x, y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + 3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + 1$, $w(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^2 - x + 4$

Ćwiczenie 8

Wyznacz sumę $u + w$ i różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

a) $u(x, y, z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3$, $w(x, y, z) = xy^2z^3 + 6x^2yz^2 + 2xyz^3$

b) $u(x, y, z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2$, $w(x, y, z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Ćwiczenie 7

a) $u(x, y) + w(x, y) = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - 9x^2y^2 - 4xy - 1$

$$u(x, y) - w(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^3 + 3x^2y^2 + 8xy + 5$$

b) $u(x, y) + w(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + \frac{10}{3}x^3y - \frac{1}{6}xy^2 - x + 5$

$$u(x, y) - w(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + \frac{8}{3}x^3y - \frac{5}{6}xy^2 + x - 3$$

Ćwiczenie 8

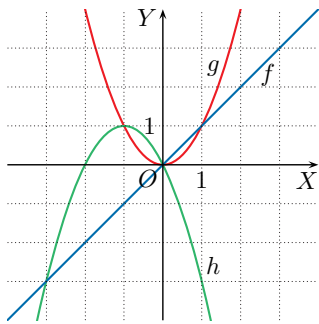
a) $u(x, y, z) + w(x, y, z) = -6x^2y^2z + 6x^2yz^2 + 5xy^2z^3 + xyz^3$

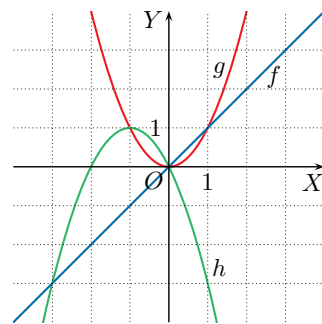
$$u(x, y, z) - w(x, y, z) = -6x^2y^2z - 6x^2yz^2 + 3xy^2z^3 - 3xyz^3$$

b) $u(x, y, z) + w(x, y, z) = 8x^2y + 14xz^2 - 4yz^2 + z^3$

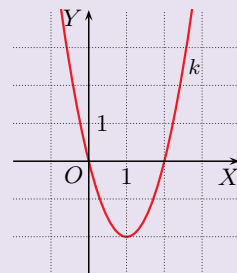
$$u(x, y, z) - w(x, y, z) = 8x^2y - 2xz^2 - 8y^2z + 2yz^2 - z^3$$

Zadania

- Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g .
 - $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 + 4$, $g(x) = \frac{1}{4}x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$
 - $f(x) = -2x^2 + 4x - x^6 + 2$, $g(x) = -5x + 3x^2 + x^6 - 3x^5$
 - $f(x) = 3x^4 + 2x^7 - 5 + 4x$, $g(x) = -3x + x^5 - 2x^7 + 2$
 - Wyznacz wielomiany $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$ oraz $u(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.
 - $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3$, $g(x) = -2x^4 + \frac{x^2}{3} + 2$
 - $f(x) = 3x^5 + 6x^3 - 9x$, $g(x) = 2x^5 + 4x^3 - 4x^2$
 - Wiadomo, że $f(x) = u(x) + 2w(x)$, $g(x) = 2u(x) - 3w(x)$, gdzie u i w są pewnymi wielomianami. Oblicz:
 - $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5) = 7$ i $w(5) = -2$,
 - $f(-3)$ i $g(-3)$, gdy $u(-3) = -4$ i $w(-3) = -6$,
 - $u(-\frac{1}{2})$ i $w(-\frac{1}{2})$, gdy $f(-\frac{1}{2}) = -9$ i $g(-\frac{1}{2}) = 13$.
 - Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q ?
 - $\text{st}(p) = 5$, $\text{st}(q) = 4$ c) $\text{st}(p) = m$, $\text{st}(q) = n$
 - $\text{st}(p) = 5$, $\text{st}(q) = 5$
 - Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametru a .
 - $u(x) = 2x^4 - 3x + 6$, $w(x) = ax^6 + 5x^2 + 4$
 - $u(x) = 3x^6 - ax^5 + 2x^2 - x$, $w(x) = -3x^6 - 6x^5 - 2x^2 + 9$
 - $u(x) = (a+1)x^3 - x^2 + 4x$, $w(x) = (a^2-1)x^4 + x^2 + 3$
 - Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametrów a i b .
 - $u(x) = ax^3 + x^2 - 6$, $w(x) = bx^5 + 7x^3 + x + 2$
 - $u(x) = ax^7 + 3x^2 + 4$, $w(x) = 3x^7 - bx^2 - 5x + 6$
 - $u(x) = (a+1)x^4 - bx^3 + 2x^2 + 1$,
 $w(x) = (-1-b)x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 9x$
 - Niech $h(x) = p \cdot f(x) + q \cdot g(x)$, gdzie $f(x) = x$ oraz $g(x) = x^2$. Wykresy tych wielomianów przedstawiono na rysunku obok.
 - Oblicz wartości p i q .
 - Naszkicuj wykres wielomianu:
 $k(x) = 2h(x) + 4g(x)$
- 



7. a) Zauważmy, że wykresem funkcji h jest parabola $y(x) = -x^2$ przesunięta o wektor $[-1, 1]$, czyli:
- $$\begin{aligned} h(x) &= -(x+1)^2 + 1 = \\ &= -x^2 - 2x = \\ &= -g(x) - 2f(x) \end{aligned}$$
- Zatem $p = -2$, $q = -1$.
- b) $k(x) = 2(x-1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$



8. Oblicz wartość wielomianu w dla podanych wartości x i y .

a) $w(x, y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y$, $x = -2$, $y = 3$

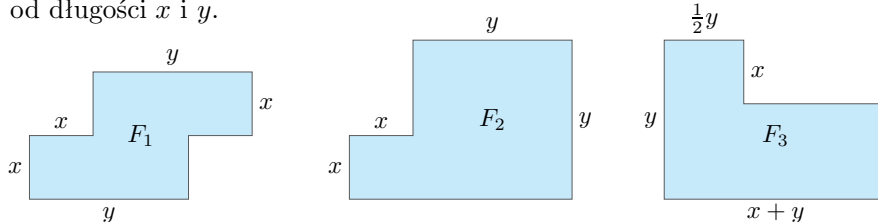
b) $w(x, y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{16}xy^4$, $x = 2$, $y = -4$

9. Wyznacz sumę $u+w$ oraz różnicę $u-w$ wielomianów u i w . Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $u(x, y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y$, $w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$

b) $u(x, y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y$, $w(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$

10. Wyznacz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1 , F_2 i F_3 w zależności od długości x i y .



11. Dla której trójki liczb, P czy Q , wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x, y, z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$

b) $w(x, y, z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$

c) $w(x, y, z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$$P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Stopień jednomianu wielu zmiennych jest sumą wykładników zmiennych w nim występujących. Na przykład jednomian x^2y^3 ma stopień równy 5, a jednomian xy^3z^4 ma stopień równy 8.

Stopień wielomianu wielu zmiennych jest równy największemu spośród stopni występujących w nim jednomianów.

Wielomian $u(x, y) = 6x^4y^2 - 8x^3y^2 + 12xy^4 + 3x^5$ jest stopnia 6.

Wielomian $w(x, y, z) = -3xy^3z^5 + 4x^4yz^3 - 2x^6y^2 + 7xz^5$ jest stopnia 9.

12. Wyznacz wielomian $v(x, y, z) = 2u(x, y, z) - 3w(x, y, z)$ oraz określ jego stopień.

a) $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2$, $w(x, y, z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$

b) $u(x, y, z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz$, $w(x, y, z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$

13. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x , y , z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x+1$, $y+2$, $z+3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

12. a) $v(x, y, z) = -x^2yz^2 + 6x^2yz - 2xyz^2 - 3xyz$, $\text{st}(v) = 5$

b) $v(x, y, z) = 4x^3y^2z - 2xy^2z^2 - 9xyz^2 + 5xyz + 6yz^2$, $\text{st}(v) = 6$

13. $P(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) + 2(x+1)(y+2) + 2(x+1)(z+3) + 2(y+2)(z+3) = 4xy + 4xz + 4yz + 10x + 8y + 6z + 22$

8. a) $w(-2, 3) = 66$

b) $w(2, -4) = 60$

9. a) $u(x, y) + w(x, y) = \frac{3}{2}x^3y - \frac{2}{3}x^2y - 2xy^2$,
 $u(x, y) - w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y + \frac{4}{3}x^2y - 4xy^2$,

$(u+w)(-2, 3) = -8$,

$(u-w)(-2, 3) = 76$

b) $u(x, y) + w(x, y) = -\frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{5}{12}xy^3$,

$u(x, y) - w(x, y) = \frac{4}{3}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{12}xy^3$,

$(u+w)(-2, 3) = -52,5$,

$(u-w)(-2, 3) = 25,5$

10. $P(x, y) = 2xy + (x^2 + y^2) + (x+y)(y-x) + \frac{1}{2}xy = \frac{5}{2}xy + 2y^2$

11. a) dla P : $w(x, y, z) = 1$,
dla Q : $w(x, y, z) = 3$,
czyli dla Q

b) dla P : $w(x, y, z) = 3$,
dla Q : $w(x, y, z) = -1$,
czyli dla P

c) dla P : $w(x, y, z) = 2$,
dla Q : $w(x, y, z) = \frac{1}{3}$,
czyli dla P

Uczeń:

- określa stopień iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia,
- wyznacza iloczyn danych wielomianów,
- podaje współczynnik przy najwyższej potęgze oraz wyraz wolny iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia wielomianów,
- stosuje wielomian do opisanie objętości prostopadłościanu i określa dziedzinę tego wielomianu,
- mnoży wielomiany i porównuje współczynniki przy odpowiedniej potęgze zmiennej,
- stosuje wielomiany wielu zmiennych w zadaniach różnych typów.

Ćwiczenie 1

- a) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
- b) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
- c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 3$
- d) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) &= (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\ &= 2x^3 - \underline{4x^2} + \underline{4x} - \underline{3x^2} + \underline{6x} - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\text{st}(w \cdot v) = \text{st}(w) + \text{st}(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w . Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

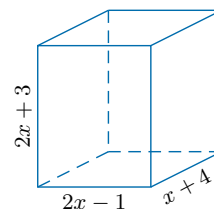
- a) $u(x) = x^3, w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ c) $u(x) = x - 1, w(x) = x^2 + x + 1$
b) $u(x) = x^2 - 1, w(x) = x^5 - x + 1$ d) $u(x) = 5 - 3x + x^2, w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \frac{1}{2}$$



Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \\ V(x) &= 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12 \end{aligned}$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b , c .

- a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$ c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$
b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$ d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned}u(x, y) \cdot w(x, y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\&= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\&= 2x^4 + x^2y^2 - 3x^2y - 4x^2y - 2y^3 + 6y^2 = \\&= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$
b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$
c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$
b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$
c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze otrzymanego wielomianu oraz jego wyraz wolny.

- a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$ d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$
b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$ e) $(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1)(x^2 - x - \frac{1}{4})$
c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$ f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

Ćwiczenie 4

- a) $2x^3y^2z + 2x^3yz^2 - x^2y^2z - x^2yz^2 + 2xy^2z^2 - y^2z^2$
b) $3x^3y^2z - 4x^3yz^2 - 2x^2y^3z + 4x^2y^2z^2 - xy^4z + 6xyz^2 - 8xz^3 + 2y^2z^2$
c) $x^3y^2z^2 + 2x^3yz^2 - x^3yz + 2xy^4z^2 + 4xy^3z^2 - 2xy^3z + 3xy^2z^4 + 6xyz^4 - 3xyz^3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 7x$, $a_4 = 2$, $a_0 = 0$
b) $4x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 8$, $a_4 = 4$, $a_0 = 8$
c) $2x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2 - x$, $a_6 = 2$, $a_0 = 0$
d) $-2x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 24x + 6$, $a_6 = -2$, $a_0 = 6$
e) $2x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$, $a_5 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{4}$
f) $-4x^6 - x^5 - 5\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$, $a_6 = -4$, $a_0 = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $V(x) = x^3 - x$, $x > 1$
b) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $x > -1$
c) $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, $x > \frac{1}{2}$
d) $V(x) = x^4 + 6x^3 - 54x - 81$, $x > 3$

Ćwiczenie 3

- a) $-4x^4 + 2x^3y - 2x^3 + 6x^2y^2 + x^2y - 3xy^3$
b) $3x^3y^3 - 2x^3y + 6x^2y^3 - 3x^2y + -3xy^3 + 4xy - y$
c) $4x^4y^3 - 12x^4y^2 + 3x^3y^4 + -11x^3y^3 + 10x^3y^2 + 3x^2y^3 + -2x^2y^2$

2. a) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -1$
 b) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 6$, $a_0 = -6$
 c) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = -4$, $a_0 = 1$
 d) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -6$
 e) $\text{st}(w) = 4$, $a_4 = -6$, $a_0 = 2$
 f) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = 12$, $a_0 = 6$
3. a) $v(x) = x^6 - 8x^5 + 16x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 9$, $\text{st}(v) = 6$
 b) $v(x) = 2x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 7x^2 + -4\sqrt{2}x + 8$, $\text{st}(v) = 4$
4. a) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 21x^4 + 2x^2$,
 $g(x) = 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$
 b) $f(x) = -6x^7 + 2x^6 + 6x^5 + -3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 1$,
 $g(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 + 6x^3 + -4x^2 + 2$
 c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 + -x + 1$,
 $g(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 4x$
5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20$, $x > 2$
 b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4$,
 $x \in (-2; -1) \cup (1; \infty)$
6. a) $u(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + 4x$, $m = 1$, $n = -11$
 b) $u(x) = -4x^6 + 2x^5 - x^3 + x^2$, $m = -4$, $n = 0$
 c) $u(x) = -2x^7 - 3x^5 + 2x^3$, $m = -3$, $n = -1$
7. a) $v(x, y) = 4x^4 - 12x^3y^2 + -4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
 b) $v(x, y) = -4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$
2. Podaj stopień wielomianu w , współczynnik przy najwyższej potędze oraz jego wyraz wolny bez wykonywania mnożenia wielomianów.
 a) $w(x) = (x - 1)(1 - x + x^2)$ d) $w(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
 b) $w(x) = (3x - 2)(2x^2 - x + 3)$ e) $w(x) = (1 - 2x)(1 + x)(3x^2 + 2)$
 c) $w(x) = (1 - x^2)(1 - x^2 + 4x^3)$ f) $w(x) = (4x^2 + 1)(1 - x^2)(6 - 3x)$
3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.
 a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ b) $w(x) = \sqrt{2}x^2 + x - 2\sqrt{2}$
4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.
 a) $u(x) = x^2 + 3x - 1$, $w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
 b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1$, $w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
 c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $w(x) = 3x^2 - 2x + 1$
5. Wyznacz wielomian zmiennej x wyrażający pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b , c .
 a) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = 2x - 4$ b) $a = x^2 + 4$, $b = x + 2$, $c = x^2 - 1$
6. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomiany u i w mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej?
 a) $u(x) = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x)$, $w(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + 4x$
 b) $u(x) = (x^2 - 2x^4)(2x^2 - x + 1)$, $w(x) = mx^6 + 2x^5 + nx^4 - x^3 + x^2$
 c) $u(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 2x^4)$, $w(x) = (m + 1)x^7 + (2n - 1)x^5 + 2x^3$
7. Wyznacz wielomian $v(x, y) = [u(x, y)]^2 - 2w(x, y)$.
 a) $u(x, y) = 2x^2 - xy$, $w(x, y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
 b) $u(x, y) = 3x^2y + 2xy^2$, $w(x, y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$
8. Wyznacz iloczyn.
 a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$ c) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$
 b) $(x + y)(x - 2y)(x - xy + y^2)$ d) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)(2x^2 + \sqrt{6}xy + 3y^2)$
9. Wyznacz iloczyn.
 a) $(x - 2y)(y - 2z)(z - 2x)$ c) $(2x - y)(3y + 2z)(2x + y)(3y - 2z)$
 b) $(x + y + z)(x - y - z)$ d) $(x + xy + xyz)(1 + x - yz)$
10. Wyznacz wielomian zmiennych x , y , z opisujący różnicę objętości prostopadłościanu o krawędziach długości: $x + 1$, $y + 2$, $z + 3$ oraz objętości prostopadłościanu o krawędziach długości: $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$.
8. a) $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 - 12xy^2$
 b) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + xy^3 - 2xy^2 - 2y^4$
 c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
 d) $2\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{3}y^3$
9. a) $-2x^2y + 4x^2z + 4xy^2 - 7xyz - 2xz^2 - 2y^2z + 4yz^2$
 b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
 c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
 d) $x^2yz + x^2y + x^2 - xy^2z^2 - xy^2z + xy + x$
10. $V(x, y, z) = (x + 1)(y + 2)(z + 3) - (x + 1)(y + 1)(z + 1) =$
 $= (x + 1)(yz + 3y + 2z + 6) - (x + 1)(yz + y + z + 1) =$
 $= (x + 1)(2y + z + 5) = 2xy + xz + 5x + 2y + z + 5$
 gdzie $x > -1$, $y > -1$, $z > -1$

Powierzchnie

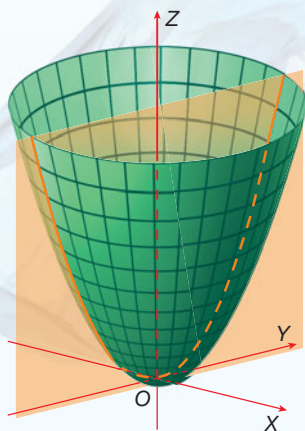
Funkcja f dwóch zmiennych to funkcja, której argumentami są pary liczb rzeczywistych (x, y) , a wartościami – liczby rzeczywiste z . Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest powierzchnią w trójwymiarowym układzie współrzędnych.

Wielomiany

Funkcja dwóch zmiennych może być wielomianem. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej równaniem:

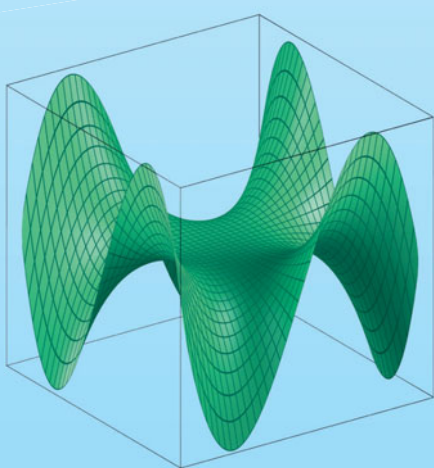
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wykresem tej funkcji jest powierzchnia nosząca nazwę **paraboloidy obrotowej**. Zwróć uwagę na to, że część wspólna tej paraboloidy i płaszczyzny OYZ jest parabolą o równaniu $z = y^2$, a część wspólna paraboloidy i płaszczyzny OXZ – parabolą o równaniu $z = x^2$.

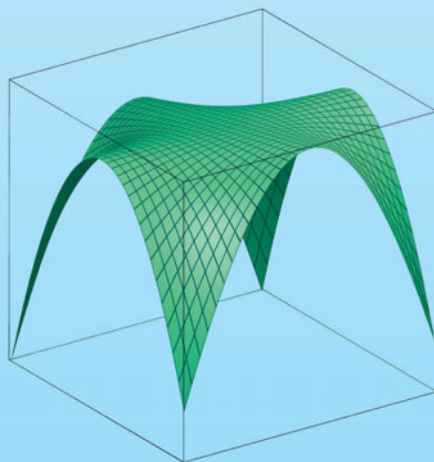


Poniżej przedstawiono inne przykłady powierzchni, które są wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

$$f(x, y) = xy^3 - x^3y$$



$$f(x, y) = x^4y^2 - 10x^2y^2 - y^2$$



1 Za pomocą odpowiedniego programu komputerowego znajdź przykłady innych powierzchni będących wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

Uczeń:

- stosuje wzory na sześcián sumy lub różnicy oraz wzory na sumę lub różnicę sześciánów,
- przekształca wyrażenie algebraiczne, stosując wzory skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do obliczania objętości,
- stosuje wzory $a^3 \pm b^3$ do usuwania niewymierności z mianownika,
- wyprowadza wzory skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 2

- $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
- $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
- $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
- $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
- $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
- $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

Ćwiczenie 3

- $2(10 + 7\sqrt{2})$
- $8(\sqrt{5} - 2)$
- $6(9 - 5\sqrt{3})$
- $2(25\sqrt{2} - 44)$
- $46\sqrt{5} + 61$
- $3(26\sqrt{3} - 45)$
- $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$
- $3(7\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$

Multibook

- Sześcián sumy i sześcián różnicy dwóch wyrazów
- Trójkąt Pascala
- Trójkąt Pascala – zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4**R**

2.4. Wzory skróconego mnożenia

TwierdzenieDla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

sześcián sumy

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

sześcián różnicy

Dowód wzoru na sześcián sumy

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

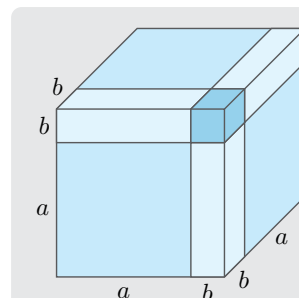
D Ćwiczenie 1

Wyprowadź wzór na sześcián różnicy, korzystając z tego, że:

- $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$,
- $(a - b)^3 = (a + (-b))^3$.

Przykład 1Zapisz $(x + 2)^3$ w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}(\textcircled{x} + \textcircled{2})^3 &= \\ &= \textcircled{x}^3 + 3 \cdot \textcircled{x}^2 \cdot \textcircled{2} + 3 \cdot \textcircled{x} \cdot \textcircled{2}^2 + \textcircled{2}^3 = \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8\end{aligned}$$



Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru na sześcián sumy.

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- $(x + 1)^3$
- $(x - 1)^3$
- $(x + 3)^3$
- $(x - 4)^3$
- $(2x + 3)^3$
- $(2x - 1)^3$
- $(3x + 1)^3$
- $(1 - 3x)^3$

Przykład 2Oblicz $(2 - \sqrt{3})^3$.

$$(2 - \sqrt{3})^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- $(2 + \sqrt{2})^3$
- $(\sqrt{5} - 1)^3$
- $(3 - \sqrt{3})^3$
- $(\sqrt{2} - 4)^3$
- $(1 + 2\sqrt{5})^3$
- $(2\sqrt{3} - 3)^3$
- $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$
- $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^3$

Ćwiczenie 1

- $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) =$
 $= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{suma sześcianów}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{różnica sześcianów}$$

D Ćwiczenie 4

Wprowadź wzory na sumę sześcianów i różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

d) $(x^2 - 6x + 36)(x + 6)$

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

e) $(x - 8)(x^2 + 8x + 64)$

c) $(x^2 - x + 1)(1 + x)$

f) $(2x^2 - 1)(4x^4 + 2x^2 + 1)$

Przykład 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 16) =$

$$= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) =$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$= (x^2)^3 - 4^3 = x^6 - 64$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

b) $(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1) =$

$$= (3x^2 - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1) =$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$= (3x^2)^3 - 1 = 27x^6 - 1$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

c) $((x + 2)^2 - 4x)(x^4 - 4x^2 + 16)$

b) $(3 + x)(3 - x)(x^4 + 9x^2 + 81)$

d) $(2x + 5)^2(4x^2 - 20x + 25)$

D Ćwiczenie 7

Wykaż prawdziwość podanego obok wzoru dla $n = 5$.

Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ i $n \geq 2$:

$$(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1) = a^n - 1$$

Ćwiczenie 8

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$

c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)(x^5 + 1)$

b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$

d) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 1)(x - 1)$

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = \\ &= (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = \\ &= (a - b)((a - b)^2 + 3ab) = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

$$(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a - a^4 - a^3 - a^2 - a - 1 = a^5 - 1$$

Ćwiczenie 5

a) $x^3 + 8$

b) $x^3 - 1$

c) $x^3 + 1$

d) $x^3 + 216$

e) $x^3 - 512$

f) $8x^6 - 1$

Ćwiczenie 6

a) $x^6 - 1$

b) $-x^6 + 729$

c) $x^6 + 64$

d) $16x^4 - 200x^2 + 625$

Ćwiczenie 8

a) $x^4 - 1$

b) $x^6 - 1$

c) $(x^5 - 1)(x^5 + 1) = x^{10} - 1$

d) $(x^4 - 1)(x^2 - 1) =$

$$= x^6 - x^4 - x^2 + 1$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
 b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
 c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
 e) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
 f) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$
 g) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$
 h) $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$
2. a) $5\sqrt{2} - 7$
 b) $45 + 29\sqrt{2}$
 c) $46\sqrt{5} - 61$
 d) $4(3\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$
3. a) 14
 b) $100\sqrt{2}$
 c) -74
 d) $22\sqrt{5}$
4. a) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
 b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
 c) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
 d) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
 e) $x^3 + x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{27}y^3$
 f) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
 g) $3\sqrt{3}x^3 + 9x^2y + 3\sqrt{3}xy^2 + y^3$
 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 - x^2y + \sqrt{3}xy^2 - y^3$
5. a) $(2x + 2y)^3 + (2x + 3y)^3 = 16x^3 + 60x^2y + 78xy^2 + 35y^3$
 b) $(3x + y)^3 - (x + 3y)^3 = 26x^3 + 18x^2y - 18xy^2 - 26y^3$

Zarówno wzór $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$, jak i wzór na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ są szczególnymi przypadkami poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla $n \geq 2$ różnica n -tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

D Ćwiczenie 9

Uzasadnij prawdziwość powyższego wzoru dla:

- a) $n = 4$, b) $n = 5$.

Ćwiczenie 10

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$ b) $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Zadania

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
 a) $(x + 4)^3$ c) $(x - 2)^3$ e) $(2x + 1)^3$ g) $(x - \sqrt{2})^3$
 b) $(x + 5)^3$ d) $(x - 3)^3$ f) $(5x - 1)^3$ h) $(x + \sqrt{3})^3$
2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi a .
 a) $a = \sqrt{2} - 1$ b) $a = 3 + \sqrt{2}$ c) $a = 2\sqrt{5} - 1$ d) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
3. Oblicz.
 a) $(1 + \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{2})^3$ c) $(2\sqrt{3} - 1)^3 - (2\sqrt{3} + 1)^3$
 b) $(4 + \sqrt{2})^3 - (4 - \sqrt{2})^3$ d) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 + (\sqrt{5} + \sqrt{2})^3$
4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
 a) $(2x + y)^3$ c) $(3x + 2y)^3$ e) $(x + \frac{1}{3}y)^3$ g) $(\sqrt{3}x + y)^3$
 b) $(x - 2y)^3$ d) $(2x - 3y)^3$ f) $(x - \frac{2}{3}y)^3$ h) $(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y)^3$
5. a) Wyznacz sumę objętości sześcianu o krawędzi długości $2x + 2y$ i sześcianu o krawędzi długości $2x + 3y$.
 b) Wyznacz różnicę objętości sześcianu o krawędzi długości $3x + y$ i sześcianu o krawędzi długości $x + 3y$.

Ćwiczenie 9

a) I sposób

$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4 = a^4 - b^4$$

II sposób

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$b) (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 = a^5 - b^5$$

Ćwiczenie 10

- a) $x^4 - 81$
 b) $x^5 - 32$

6. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x+5)^2(x^2-5x+25)$ c) $(3x-1)^2(9x^2+3x+1)$
b) $(x^2+5x+25)(x-5)^2$ d) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)$ dla $x = \sqrt[3]{9}$,
b) $(9x^2-6x+4)(3x+2)$ dla $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$,
c) $(x-\sqrt{5})^3-2x(x+5)(x-5)+(x+\sqrt{5})^3$ dla $x = \frac{1}{40}$,
d) $(x+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5}x+5)-(\sqrt{5}-x)(x^2+\sqrt{5}x+5)$ dla $x = \sqrt[3]{4}$.

8. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+x$ c) $(4x^2+2x+1)(2x-1)=26$
b) $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3+8x$ d) $(\frac{1}{4}x^2-x+4)(\frac{1}{2}x+2)=-9$

9. Skróć ułamek.

- a) $\frac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^2+1}$ b) $\frac{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}{a^5-1}, a \neq 1$

D 10. Uzasadnij prawdziwość wzoru.

- a) $a^8-b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
b) $a^9-b^9=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

11. Przedstaw wielomian jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

- a) a^6-b^6 b) a^6+b^6

D 12. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba:

- a) 4^n-1 jest podzielna przez 3, b) 7^n-1 jest podzielna przez 6.

13. Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{9}-2} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}-2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{9})^2+2\sqrt[3]{9}+2^2}{(\sqrt[3]{9})^2+2\sqrt[3]{9}+2^2} = \text{Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.} \\ &= \frac{\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4}{(\sqrt[3]{9})^3-2^3} = \frac{\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4}{9-8} = 3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4 \end{aligned}$$

Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$ b) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{10}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{11}{3-2\sqrt[3]{2}}$

10. a) $a^8-b^8=(a^4-b^4)(a^4+b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=$
 $=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

b) $a^9-b^9=(a^3)^3-(b^3)^3=(a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)=$
 $=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

11. a) $a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

b) $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

Zauważmy, że $a^4-a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-3a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(\sqrt{3}ab)^2=$
 $=(a^2+\sqrt{3}ab+b^2)(a^2-\sqrt{3}ab+b^2).$

Zatem $a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^2+\sqrt{3}ab+b^2)(a^2-\sqrt{3}ab+b^2).$

12. a) $4^n-1=(4-1)(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1)=3 \cdot (4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1)$

b) $7^n-1=(7-1)(7^{n-1}+7^{n-2}+\dots+7+1)=6 \cdot (7^{n-1}+7^{n-2}+\dots+7+1)$

6. a) $x^4+5x^3+125x+625$

b) $x^4-5x^3-125x+625$

c) $81x^4-27x^3-3x+1$

d) x^6-1

7. a) $x^6-8; 73$

b) $27x^3+8; -1$

c) $80x; 2$

d) $2x^3; 8$

8. a) $x=27$

b) $x=-8$

c) $x=\frac{3}{2}$

d) $x=-2\sqrt[3]{17}$

9. a) a^2-1

b) $a+1$

13. a) $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$

b) $\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4$

c) $2(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

d) $9+6\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}$

Trójkąt Pascala

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

są szczególnymi przypadkami rozwinięcia $(a+b)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach **trójkąta Pascala**.

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. dla $n = 8$ mamy: $8 = 1 + 7$, $28 = 7 + 21$, $56 = 21 + 35$, $70 = 35 + 35$).

Odpowiednie wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1. Podaj wzory na:

$$\text{a) } (a+b)^7, \quad \text{b) } (a-b)^7, \quad \text{c) } (a+b)^8, \quad \text{d) } (a-b)^8.$$

2. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n = 9$ i $n = 10$ oraz podaj wzory na $(a+b)^9$ i $(a-b)^{10}$.

3. Korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia, oblicz:

$$\text{a) } (\sqrt{2} + 1)^4, \quad \text{b) } (\sqrt{3} - 1)^4, \quad \text{c) } (\sqrt{2} + 1)^6, \quad \text{d) } (\sqrt{3} - 1)^6.$$

$$1. \text{ a) } a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$\text{b) } a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$\text{c) } a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$\text{d) } a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$$2. (a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9,$$

$$(a-b)^{10} = a^{10} - 10a^9b + 45a^8b^2 - 120a^7b^3 + 210a^6b^4 - 252a^5b^5 + 210a^4b^6 - 120a^3b^7 + 45a^2b^8 - 10ab^9 + b^{10}$$

Odpowiedzi do zadań

3. a) $12\sqrt{2} + 17$
b) $4(7 - 4\sqrt{3})$
c) $70\sqrt{2} + 99$
d) $8(26 - 15\sqrt{3})$

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów nazywamy **rozkładem wielomianu na czynniki**.

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki.

$$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2) \quad \text{Wylączamy } 4x^4 \text{ przed nawias.}$$

Zauważ, że wielomian w został już rozłożony na czynniki liniowe (stopnia pierwszego), ponieważ można go zapisać jako $w(x) = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3x - 2)$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{aligned} \text{a) } w(x) &= x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) = && \text{Wylączamy } x^4 \text{ przed nawias.} \\ &= x^4(x - 3)^2 && \text{Korzystamy ze wzoru } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } w(x) &= x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = && \text{Wylączamy } x \text{ przed nawias.} \\ &= x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = && \text{Dwukrotnie korzystamy ze wzoru} \\ &= x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) && a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \end{aligned}$$

Zauważ, że czynnika $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

$$\text{c) } w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1) \quad \text{Wylączamy } x^3 \text{ przed nawias.}$$

Czynnik $6x^2 - x + 1$ jest trójmianem kwadratowym, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż $\Delta = -23 < 0$.

Podstawowe twierdzenie algebry

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego zawsze istnieje, natomiast nie zawsze potrafimy go wyznaczyć – czasem jest to zbyt skomplikowane obliczeniowo, a czasem niemożliwe (w przypadku niektórych wielomianów stopnia większego od 4).

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } w(x) = x^4 - 7x^3 & \text{e) } w(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x \\ \text{b) } w(x) = 18x^3 + 30x^2 & \text{f) } w(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2 \\ \text{c) } w(x) = -2x^5 - 8x^4 & \text{g) } w(x) = -27x^6 + 18x^5 - 3x^4 \\ \text{d) } w(x) = -54x^3 + 36x^2 & \text{h) } w(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^3 + x \end{array}$$

Ćwiczenie 1

$$\begin{array}{l} \text{a) } w(x) = x^3(x - 7) \\ \text{b) } w(x) = 6x^2(3x + 5) \\ \text{c) } w(x) = -2x^4(x + 4) \\ \text{d) } w(x) = -18x^2(3x - 2) \\ \text{e) } w(x) = 6x(x + 1)^2 \\ \text{f) } w(x) = -3x^2(x - 2)^2 \\ \text{g) } w(x) = -3x^4(3x - 1)^2 \\ \text{h) } w(x) = \frac{1}{4}x(x^2 + 2)^2 \end{array}$$

Uczeń:

- wylacza wspólny czynnik przed nawias,
- stosuje wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy oraz wzór na różnicę kwadratów do rozkładu wielomianu na czynniki,
- wykorzystuje rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki do rozkładu wielomianu na czynniki,
- zapisuje wielomian w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia,
- rozkłada wielomian na czynniki w zadaniach różnych typów.

Ćwiczenie 2

- a) $w(x) = 3x(x^2 + 4)$,
 $x^2 + 4 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
b) $w(x) = \frac{1}{4}x^4(x^2 + 3)$,
 $x^2 + 3 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
c) $w(x) = -6x^3(x^2 + 7)$,
 $x^2 + 7 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
d) $w(x) = -\sqrt{2}x^5(x^2 + \sqrt{3})$,
 $x^2 + \sqrt{3} > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
e) $w(x) = x^9(7x^2 - 5x + 1)$,
 $\Delta = -3 < 0$
f) $w(x) = x^4(\frac{1}{4}x^2 + x + 2)$,
 $\Delta = -1 < 0$
g) $w(x) = -x^3(4x^2 - 3x + 7)$,
 $\Delta = -103 < 0$
h) $w(x) = x^3(3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{6})$, $\Delta = 12 - 24\sqrt{3} < 0$

D Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian w na czynniki. Jeżeli w rozkładzie pojawi się czynnik stopnia drugiego, uzasadnij, że nie da się go rozłożyć na czynniki liniowe.

- a) $w(x) = 3x^3 + 12x$ e) $w(x) = 7x^{11} - 5x^{10} + x^9$
b) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^4$ f) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + x^5 + 2x^4$
c) $w(x) = -6x^5 - 42x^3$ g) $w(x) = -4x^5 + 3x^4 - 7x^3$
d) $w(x) = -\sqrt{2}x^7 - \sqrt{6}x^5$ h) $w(x) = 3\sqrt{2}x^5 - 2\sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3$

Przykład 3

Rozłóż wielomian $w(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^3$ na czynniki.

$$w(x) = x^3(4x^2 + 3x - 1) \quad \text{Wyłączamy } x^3 \text{ przed nawias.}$$

Obliczamy pierwiastki trójkątnu kwadratowego $4x^2 + 3x - 1$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{1}{4}$$

Zatem trójkąt ten możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$4x^2 + 3x - 1 = 4(x + 1)(x - \frac{1}{4})$$

czyli wielomian w można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = 4x^3(x + 1)(x - \frac{1}{4})$$

Ćwiczenie 3

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ e) $w(x) = -2x^3 + 20x^2 - 10x$
b) $w(x) = 2x^5 - x^4 - x^3$ f) $w(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{5}{4}x^2$
c) $w(x) = -2x^3 - x^2 + 6x$ g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3$
d) $w(x) = 20x^5 + 14x^4 + 2x^3$ h) $w(x) = 4x^6 - 12x^5 + x^4$

Czy wiesz, że...

W 1799 r. Carl Friedrich Gauss [czyt. karł fridriś gałs] (1777–1855) podał dowód podstawowego twierdzenia algebry. Ze względu na swe wybitne osiągnięcia Gauss zyskał przydomek „princeps mathematicorum” [czyt. princeps matematikorum] (książę matematyków). Jako dziewiętnastoletni student Gauss wykazał możliwość konstrukcji (za pomocą cyrka i linijki) siedemnastokąta foremego. Życzył sobie, by został on wryty na jego nagrobku, ale jego życzenie nie zostało spełnione.



Ćwiczenie 3

- a) $w(x) = x^2(x - 3)(x + 1)$
b) $w(x) = 2x^3(x + \frac{1}{2})(x - 1)$
c) $w(x) = -2x(x - \frac{3}{2})(x + 2)$
d) $w(x) = 20x^3(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{5})$
e) $w(x) = -2x(x - 5 + 2\sqrt{5})(x - 5 - 2\sqrt{5})$
f) $w(x) = x^2(x - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$
g) $w(x) = 2x^3(x - \frac{2-\sqrt{2}}{2})(x - \frac{2+\sqrt{2}}{2})$
h) $w(x) = 4x^4(x - \frac{3}{2} + \sqrt{2})(x - \frac{3}{2} - \sqrt{2})$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}x$ b) $w(x) = 16x^5 - 4x^3$ c) $w(x) = 2x^4 - 6x^2$

2. Wyłącz przed nawias wskazany czynnik. Sprawdź, czy trójmian kwadratowy otrzymany w nawiasie można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, to podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

a) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3$, x^3 d) $w(x) = 6x^4 + 3x^3 - 3x^2$, $6x^2$

b) $w(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$, x^2 e) $w(x) = 6x^3 - 15x^2 + 9x$, $6x$

c) $w(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4$, $2x^4$ f) $w(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$, $\frac{3}{4}x^3$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$ g) $w(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x$ h) $w(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 + 5x + 4)$

c) $w(x) = -6x^5 + 5x^4 - x^3$ i) $w(x) = (2x^2 - 5x - 3)(2x^2 - 7x + 3)$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2$ j) $w(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 15x)$

e) $w(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + x$ k) $w(x) = (x^4 + x^3 - 6x^2)(x^5 + 2x^4 + 3x^3)$

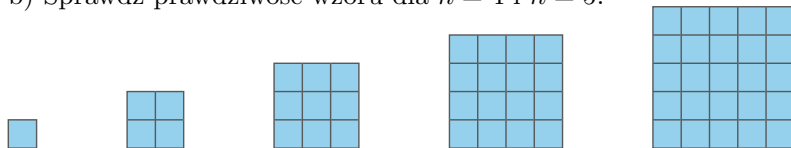
f) $w(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{8}{3}x^4 + 3x^3$ l) $w(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 + 4x + 1)$

4. Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

- a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ na czynniki.

- b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 4$ i $n = 5$.

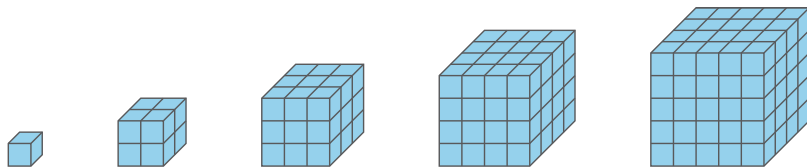


5. Sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

- a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ na czynniki.

- b) Oblicz sumę $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$.



4. a) $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

- b) Dla $n = 4$ mamy:

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$P = S(4) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 30$$

$L = P$, zatem dla $n = 4$ wzór jest prawdziwy.

Dla $n = 5$ mamy:

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$P = S(5) = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 = 55$$

$L = P$, zatem dla $n = 5$ wzór jest prawdziwy.

5. a) $S(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

b) $S(10) = \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 121 = 3025$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = 4x(x - \frac{1}{6})(x + \frac{1}{6})$
 b) $w(x) = 16x^3(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
 c) $w(x) = 2x^2(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$
2. a) $w(x) = x^3(x^2 - 2x + 5)$
 b) $w(x) = x^2(x - 3)(x + 2)$
 c) $w(x) = 2x^4(x - 1)^2$
 d) $w(x) = 6x^2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$
 e) $w(x) = 6x(x - \frac{3}{2})(x - 1)$
 f) $w(x) = \frac{3}{4}x^3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$
3. a) $w(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$
 b) $w(x) = 2x(x + \frac{1}{2})(x - 5)$
 c) $w(x) = -6x^3(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$
 d) $w(x) = x^2(x^2 + 3x + 4)$
 e) $w(x) = x(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$
 f) $w(x) = -\frac{1}{3}x^3(x - 9)(x + 1)$
 g) $w(x) = (x - 3)(x - 2) \cdot (x - 1)(x + 1)$
 h) $w(x) = (x - 4)(x + 1)^2 \cdot (x + 4)$
 i) $w(x) = 4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) \cdot (x - 3)^2$
 j) $w(x) = x^2(x - 3)(x - 1) \cdot (x + 2)(x + 5)$
 k) $w(x) = x^5(x - 2) \cdot (x + 3)(x^2 + 2x + 3)$
 l) $w(x) = x(x - 2)(x - 1) \cdot (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

Uczeń:

- stosuje metodę grupowania wyrazów i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do rozkładu wielomianów na czynniki,
- stosuje wzory na sumę i różnicę sześcianów do rozkładu wielomianu na czynniki,
- rozkłada dany wielomian na czynniki, stosując metodę podaną w przykładzie.

Ćwiczenie 1

- a) $w(x) = 2x^2(x^3 + 1) = 2x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$
b) $w(x) = -x^3(x^3 + 8) = -x^3(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
c) $w(x) = x(8x^3 - 1) = x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
d) $w(x) = x^2(1 - 0,001x^3) = x^2(1 - 0,1x)(1 + 0,1x + 0,01x^2)$
e) $w(x) = x^3(8x^3 - 27) = x^3(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
f) $w(x) = 2x(0,027x^3 + 1) = 2x(0,3x + 1)(0,09x^2 - 0,3x + 1)$

R

2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = x^7 + 8x^4$ na czynniki.

$$\begin{aligned} w(x) &= x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) = \\ &= x^4(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów.

Czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny na czynniki liniowe, gdyż $\Delta < 0$.

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 2x^5 + 2x^2$ c) $w(x) = 8x^4 - x$ e) $w(x) = 8x^6 - 27x^3$
b) $w(x) = -x^6 - 8x^3$ d) $w(x) = x^2 - 0,001x^5$ f) $w(x) = 0,054x^4 + 2x$

W pewnych przypadkach wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy.

Przykład 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{x^3 - 4x^2} + \underline{2x - 8} = \\ &= x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x^2 + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

Z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów można wyłączyć ten sam czynnik: $x - 4$.

b) $u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{7x^3 + 2x^2} - \underline{14x - 4} = x^2(7x + 2) - 2(7x + 2) = (x^2 - 2)(7x + 2) = \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(7x + 2) \end{aligned}$$

c) $u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{4x^5 - 2x^4} - \underline{16x^3 + 8x^2} = 2x^4(2x - 1) - 8x^2(2x - 1) = \\ &= (2x^4 - 8x^2)(2x - 1) = 2x^2(x^2 - 4)(2x - 1) = 2x^2(x - 2)(x + 2)(2x - 1) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $u(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$ e) $u(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$
b) $u(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ f) $u(x) = \sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1$
c) $u(x) = 4x^3 + x^2 - 16x - 4$ g) $u(x) = 8x^5 + 16x^3 - x^2 - 2$
d) $u(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x$ h) $u(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x^2$

Ćwiczenie 2

- a) $u(x) = (x^2 + 1)(x + 5)$
b) $u(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$
c) $u(x) = (x - 2)(x + 2)(4x + 1)$
d) $u(x) = x(x^2 + 1)(x + 3)$
e) $u(x) = (x - 5)(x + 5)(x + 4)$
f) $u(x) = (x - 1)(x + 1)(\sqrt{5}x - 1)$
g) $u(x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2)$
h) $u(x) = x^2(x^2 + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} w(x) = x^4 + 27x & \text{c)} w(x) = -x^4 - 64x & \text{e)} w(x) = 27x^6 + 8x^3 \\ \text{b)} w(x) = x^5 - 8x^2 & \text{d)} w(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 64x^2 & \text{f)} w(x) = 125x^8 - x^5 \end{array}$$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} w(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16 & \text{e)} w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 3x + 1 \\ \text{b)} w(x) = 14x^3 - 7x^2 + 4x - 2 & \text{f)} w(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 6x + 27 \\ \text{c)} w(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15 & \text{g)} w(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 2 \\ \text{d)} w(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3 & \text{h)} w(x) = \sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x \end{array}$$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{l} \text{a)} w(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ \text{b)} w(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2 \\ \text{c)} w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6 \end{array}$$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{l} \text{a)} w(x) = (20x^3 - 28x^2 + 8x)(x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12x) \\ \text{b)} w(x) = (-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2)(x^3 - 7x^2 - 4x + 28) \\ \text{c)} w(x) = (7x^4 + 14x^3 - 21x^2)(x^5 - 4x^3 - x^2 + 4) \\ \text{d)} w(x) = (3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2)(x^6 - 1) \end{array}$$

5. Przeczytaj podane w ramce przykłady, a następnie rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{l} \text{a)} w(x) = x^4 + 1 \\ \text{b)} w(x) = 4x^4 + 9 \\ \text{c)} w(x) = 9x^4 + 16 \\ \text{d)} w(x) = x^4 + 5x^2 + 9 \\ \text{e)} w(x) = 16x^4 - x^2 + 1 \\ \text{f)} w(x) = 4x^4 + 8x^2 + 9 \end{array}$$

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{l} \text{a)} w(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = \\ \quad = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ \quad = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \\ \text{b)} w(x) = x^4 + 6x^2 + 25 = \\ \quad = (x^2 + 5)^2 - 10x^2 + 6x^2 = \\ \quad = (x^2 + 5)^2 - 4x^2 = \\ \quad = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 5) \end{array}$$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 & \text{c)} w(x) = 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1 \\ \text{b)} w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3 & \text{d)} w(x) = 64x^3 + 12x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{5. a)} w(x) = x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ \quad = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ \text{b)} w(x) = 4x^4 + 9 = (4x^4 + 12x^2 + 9) - 12x^2 = (2x^2 + 3)^2 - (2\sqrt{3}x)^2 = \\ \quad = (2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3)(2x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) = 4(x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{2})(x^2 + \sqrt{3}x + \frac{3}{2}) \\ \text{c)} w(x) = (3x^2 + 4)^2 - 24x^2 = (3x^2 - 2\sqrt{6}x + 4)(3x^2 + 2\sqrt{6}x + 4) = \\ \quad = 9(x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}x + \frac{4}{3})(x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{6}x + \frac{4}{3}) \\ \text{d)} w(x) = (x^2 + 3)^2 - 6x^2 + 5x^2 = (x^2 + 3)^2 - x^2 = (x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3) \\ \text{e)} w(x) = (4x^2 + 1)^2 - 8x^2 - x^2 = (4x^2 + 1)^2 - 9x^2 = (4x^2 - 3x + 1)(4x^2 + 3x + 1) = \\ \quad = 16(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4})(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}) \\ \text{f)} w(x) = (2x^2 + 3)^2 - 12x^2 + 8x^2 = (2x^2 + 3)^2 - 4x^2 = (2x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 2x + 3) = \\ \quad = 4(x^2 - x + \frac{3}{2})(x^2 + x + \frac{3}{2}) \end{array}$$

Odpowiedzi do zadań

$$\begin{array}{l} \text{1. a)} x(x+3)(x^2-3x+9) \\ \text{b)} } x^2(x-2)(x^2+2x+4) \\ \text{c)} } -x(x+4)(x^2-4x+16) \\ \text{d)} } -\frac{1}{8}x^2(x-8)(x^2+8x+64) \\ \text{e)} } 27x^3(x+\frac{2}{3})(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}) \\ \text{f)} } 125x^5(x-\frac{1}{5})(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{25}) \\ \text{2. a)} (x+2)(x-2)(x^2+2x+4) \\ \text{b)} } (2x-1)(7x^2+2) \\ \text{c)} } (x-3)(2x^2+5) \\ \text{d)} } (x-3)(x+1)(x^2-x+1) \\ \text{e)} } \frac{1}{6}(3x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \\ \text{f)} } \frac{1}{3}(2x-9)(x-3)(x+3) \\ \text{g)} } (x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}) \\ \text{h)} } \sqrt{3}x(x+\sqrt{2})(x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ \text{3. a)} (x+1)^3(x-1)^2 \\ \text{b)} } 4(x-2)(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \cdot \\ \quad \cdot (x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \\ \text{c)} } 3(x+\frac{2}{3})(x-\sqrt{3}) \cdot \\ \quad \cdot (x+\sqrt{3})(x^2+1) \\ \text{4. a)} 20x^2(x-\frac{2}{5})(x-1) \cdot \\ \quad \cdot (x+6)(x^2+2) \\ \text{b)} } -\frac{1}{4}x^2(x-7)(x-2) \cdot \\ \quad \cdot (x+2)(x+4)^2 \\ \text{c)} } 7x^2(x-2)(x-1)^2(x+2) \cdot \\ \quad \cdot (x+3)(x^2+x+1) \\ \text{d)} } 3x^2(x-\frac{1}{3})^2(x-1)(x+1) \cdot \\ \quad \cdot (x^2-x+1)(x^2+x+1) \\ \text{6. a)} 2(x-1)(x^2-\frac{3}{2}x+1) \\ \text{b)} } 3(x+1)(x-\frac{7-\sqrt{13}}{6}) \cdot \\ \quad \cdot (x-\frac{7+\sqrt{13}}{6}) \\ \text{c)} } 8(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{4})(x-1) \\ \text{d)} } 64(x-\frac{1}{4})(x^2+\frac{7}{16}x+\frac{1}{16}) \end{array}$$

Uczeń:

- rozwiązuje równania wielomianowe metodą grupowania wyrazów i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias,
- wyznacza punkty przecięcia wykresu wielomianu i prostej oraz dwóch wielomianów,
- podaje przykład wielomianu, gdy dane są jego stopień i pierwiastki,
- wykorzystuje równania wielomianowe w zadaniach dotyczących związków miarowych w prostopadłościanach.

Ćwiczenie 1

- a) $2x^3(3x+1)=0$,
 $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=0$
- b) $-x^3(x+2)(x-2)=0$,
 $x=-2$ lub $x=0$ lub $x=2$
- c) $x^4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$,
 $x=-\sqrt{2}$ lub $x=0$
lub $x=\sqrt{2}$
- d) $-x^4(2x-3)=0$,
 $x=0$ lub $x=\frac{3}{2}$
- e) $\frac{1}{6}x(x+6)^2=0$,
 $x=-6$ lub $x=0$
- f) $-x^2(2x-1)^2=0$,
 $x=0$ lub $x=\frac{1}{2}$

2.7. Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x)=0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym** z niewiadomą x .

Rozkład wielomianu w na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego **pierwiastków**, czyli takich argumentów x , dla których spełnione jest równanie $w(x)=0$. Pierwiastki te nazywamy **rozwiązaniami równania**.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^3-x^2 &= 0 \\ \frac{1}{4}x^2(x-4) &= 0 \\ x^2=0 \text{ lub } x-4 &= 0 \\ x=0 \text{ lub } x &= 4\end{aligned}$$

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^3-6x^2+9x=0$.

$$\begin{aligned}x(x^2-6x+9) &= 0 \\ x(x-3)^2 &= 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ x=0 \text{ lub } x &= 3\end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $6x^4+2x^3=0$ c) $x^6+x=x+2x^4$ e) $\frac{1}{6}x^3+2x^2+6x=0$
- b) $-x^5+4x^3=0$ d) $\frac{x^4-4x^3}{2}=\frac{x^5-6x^3}{3}$ f) $-4x^4+4x^3-x^2=0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^5-2x^4-15x^3=0$.

$$\begin{aligned}x^3(x^2-2x-15) &= 0 \\ x=0 \text{ lub } x^2-2x-15 &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4+60=64, \quad \sqrt{\Delta}=8 \\ x_1 &= \frac{2-8}{2}=-3, \quad x_2 = \frac{2+8}{2}=5\end{aligned}$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: -3 , 0 i 5 .

Multibook

- Sześciąt sumy i sześciąt różnicy dwóch wyrazów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Przykład 4

Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$ e) $2x^2 - 3x = x - x^3$
b) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$ d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$ f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$

Przykład 5

Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ i osi OX .

Aby wyznaczyć pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu wielomianu w oraz osi OX , rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

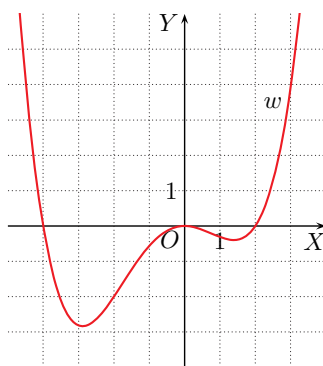
$$\frac{1}{16}x^2(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Szukane punkty: $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(2, 0)$.



$$w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Pierwiastki równania $w(x) = 0$ to miejsca zerowe wielomianu w .

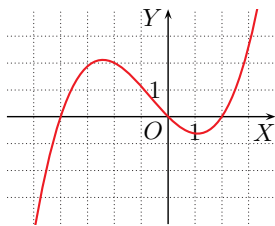
Ćwiczenie 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy wielomianów:

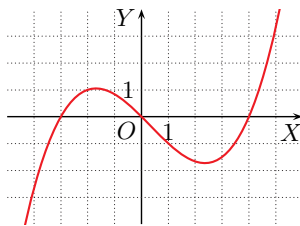
$$u(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x, \quad v(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - x, \quad w(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$$

Rozwiąż odpowiednie równania i podaj pierwiastki tych wielomianów. Do każdego z nich dopasuj wykres.

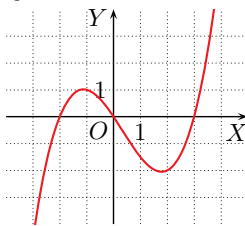
A.



B.



C.



Ćwiczenie 3

$$u(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - x - 6),$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 3, \text{ wykres C;}$$

$$v(x) = \frac{1}{12}x(x^2 - x - 12),$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 4, \text{ wykres B;}$$

$$w(x) = \frac{1}{8}x(x^2 + 2x - 8),$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 2, \text{ wykres A}$$

Ćwiczenie 2

a) $x(x^2 - 7x + 12) = 0$, $\Delta = 1$,
 $x = 0$ lub $x = 3$ lub $x = 4$

b) $-x^2(2x^2 - 9x - 5) = 0$,
 $\Delta = 121$, $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = 5$

c) $x(3x^2 + 4x + 1) = 0$, $\Delta = 4$,
 $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 0$

d) $x^3(4x^2 - 3x + 2) = 0$,
 $\Delta = -23 < 0$, $x = 0$

e) $x(x^2 + 2x - 4) = 0$, $\Delta = 20$,
 $x = -1 - \sqrt{5}$ lub $x = 0$
lub $x = -1 + \sqrt{5}$

f) $x^4(2x^2 - 2x - 1) = 0$,
 $\Delta = 12$, $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Ćwiczenie 4

- a) $(x^2 + 2)(x - 9) = 0$, $x = 9$
b) $(x - 2)(x + 2)(2x + 1) = 0$,
 $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2$
c) $x^2(x^2 + 1)(x + 5) = 0$,
 $x = -5$ lub $x = 0$
d) $x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (3x - 5) = 0$, $x = -\sqrt{2}$ lub
 $x = 0$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = \frac{5}{3}$
e) $(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4) \cdot$
 $\cdot (x + 2) = 0$, $x = -2$ lub $x = 2$
f) $(x^2 + \sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) = 0$,
 $x = 3\sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = 2$
b) $x = -3$ lub $x = 0$
lub $x = 3$
c) $x = -27$ lub $x = 0$
d) $x = 0$ lub $x = 2$
e) $x = -2$ lub $x = 0$
lub $x = 2$
f) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = 0$,
 $x = \sqrt{5}$
2. a) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$
b) $x = -2$ lub $x = -1$
lub $x = 0$
c) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 5$
d) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
e) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
f) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{2}{5}$
g) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 0$
h) $x = -6$ lub $x = 0$ lub $x = 2$
i) $x = -4$ lub $x = -1$
lub $x = 0$
j) $x = 0$ lub $x = 1$
k) $x = -6$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
l) $x = 0$

Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$\begin{aligned} w(x) &= x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1) = (x^2 - 9)(x - 1) = \\ &= (x - 3)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w , rozwiązujemy równanie:

$$(x - 3)(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby: -3 , 1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$ d) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$
b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$ e) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = 0$
c) $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$ f) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 6 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^3 = 4x^2$ c) $x^4 = -27x^3$ e) $x^5 - 16x = 0$
b) $x^5 = 9x^3$ d) $x^5 = 8x^2$ f) $x^6 - 25x^2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$ e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$ i) $x^3 + 4x = -5x^2$
b) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$ j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$
c) $x^4 = 4x^3 + 5x^2$ g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$ k) $3x^5 = \frac{x^7 + 3x^6}{6}$
d) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$ h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$ l) $\frac{20x^7 + x^3}{8} = \frac{x^7 - 2x^5}{2}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 3x^2 = 12 - 4x$ d) $1 - x^3 = x^2 - x$ g) $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
b) $2x^3 + 3 = x^2 + 6x$ e) $x^4 - 8x = 8 - x^3$ h) $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 = 3 + 2x$
c) $x^4 + 9x^3 = x + 9$ f) $x^4 + 4x^3 = x + 4$ i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 5x - 4 = 0$ b) $x^3 - 3x + 2 = 0$ c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$

Wskazówka. W podpunkcie a) zapisz $-5x$ jako $-x - 4x$.

3. a) $x = 3$

b) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{3}$

c) $x = -9$ lub $x = 1$

d) $x = -1$ lub $x = 1$

e) $x = -1$ lub $x = 2$

f) $x = -4$ lub $x = 1$

g) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

h) $x = -2$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = 2$

i) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $x^3 - x - 4x - 4 = 0$

$x(x^2 - 1) - 4(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - x - 4) = 0$, $x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

lub $x = -1$ lub $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

b) $x^3 - x - 2x + 2 = 0$

$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

$x = -2$ lub $x = 1$

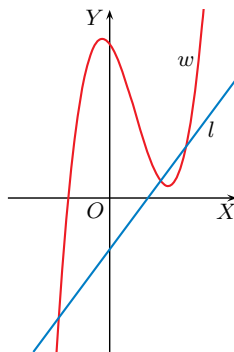
c) $x(x^3 - x - 6x + 6) = 0$

$x[x(x^2 - 1) - 6(x - 1)] = 0$

$x(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$

$x = -3$ lub $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 2$

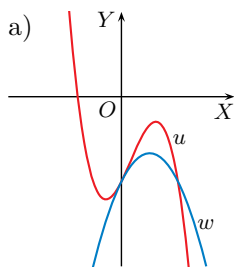
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ i prostą $l: y = 2x - 3$. Wyznacz punkty, w których prosta l przecina wykres wielomianu w .



6. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l .

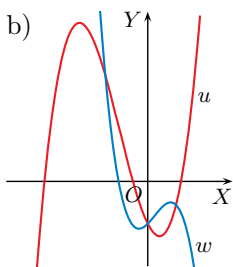
- a) $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$, $l: y = 4x + 2$
 b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 3$, $l: y = 3x + 1$
 c) $w(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2$, $l: y = 4x - 3$

7. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w .



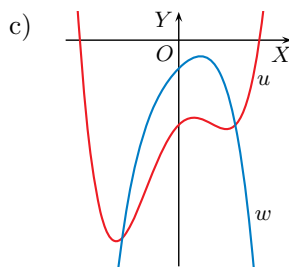
$$u(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$$

$$w(x) = -x^2 + 2x - 3$$



$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3$$

$$w(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$$



$$u(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + x - 3$$

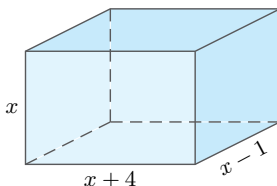
$$w(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: a) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, b) 1, 2, 3.

9. Podaj przykład wielomianu stopnia n , którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 i 3 , a wyraz wolny jest równy 1.

- a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 6$

10. Podaj wzór funkcji opisującej objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Dla jakiej wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 12?



- D** 11. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x cm, $(x - 3)$ cm, $(x + 5)$ cm i objętości 30 cm^3 . Uzasadnij, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest mniejsza od 56 cm.

12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x m, $(x + 1)$ m, $(4x - 3)$ m i objętości $0,75 \text{ m}^3$. Która ściana tego prostopadłościanu ma najmniejsze pole? Oblicz to pole.

11. $x(x - 3)(x + 5) = 30$ i $x > 3$, zatem $x = \sqrt{15}$.

Suma długości krawędzi:

$$S(x) = 12x + 8,$$

$$S(\sqrt{15}) = 12\sqrt{15} + 8 < 12\sqrt{16} + 8 = 56$$

12. $x(x + 1)(4x - 3) = 0,75$ i $x > \frac{3}{4}$, zatem $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Długości krawędzi prostopadłościanu: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m, $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ m, $(2\sqrt{3} - 3)$ m, czyli ściana o krawędziach $(2\sqrt{3} - 3)$ m, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m ma najmniejsze pole:

$$P = \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ m}^2 \approx 0,4 \text{ m}^2.$$

5. $(-2, -7)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$

6. a) $(-3, -10)$, $(0, 2)$, $(3, 14)$
 b) $(-\sqrt{2}, 1 - 3\sqrt{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$, $(\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2})$
 c) $(-1, -7)$, $(1, 1)$, $(3, 9)$

7. a) $(0, -3)$, $(2, -3)$
 b) $(-3, \frac{15}{2})$, $(0, -3)$, $(2, -\frac{5}{3})$
 c) $(-2, -7)$, $(2, -3)$

8. Przykładowa odpowiedź:

a) $w(x) = (x + \sqrt{2})^2 \cdot$

$$\cdot (x - \sqrt{2})^2 =$$

$$= (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$$

b) $w(x) =$

$$= (x - 1)^2 \cdot (x - 2)(x - 3) =$$

$$= x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

9. Przykładowa odpowiedź:

a) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$

$$\cdot (x - 3) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$$

b) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$

$$\cdot (x - 3)(x^2 + 1) = -\frac{1}{6}x^4 +$$

$$+ \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$$

c) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$

$$\cdot (x - 3)(x^4 + 1) = -\frac{1}{6}x^6 +$$

$$+ \frac{1}{6}x^5 + x^4 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$$

10. $V(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$, $x > 1$,
 $V(x) = 12$ dla $x = 2$

Uczeń:

- dzieli wielomian przez dwumian $x - a$,
- stosuje schemat Hornera,
- zapisuje wielomian w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$,
- sprawdza poprawność wykonanego dzielenia.

Komentarz

Po omówieniu tego tematu warto zapoznać uczniów ze schematem Hornera (str. 80), który pozwala na szybkie wykonanie dzielenia wielomianu przez dwumian postaci $x - a$.

R

2.8. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że jeśli n i m są liczbami całkowitymi (gdzie $m \neq 0$), to mówimy, że n jest podzielne przez m , jeśli istnieje taka liczba całkowita k , że $n = k \cdot m$.

Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian niezerowy q ($q \neq 0$), jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1

$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki podczas wykonywania tego dzielenia.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \end{array}$$

Dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy $3x$ przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy -4 przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy. Otrzymaliśmy resztę równą 0.

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$

b) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 3171 : 7 = 453 \\ -28 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 21 \\ -21 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ćwiczenie 1

- a) $x - 2$
- b) $9x + 12$
- c) $x^2 - 2x + 1$
- d) $2x^3 + x^2 - x$

Multibook

- Dzielenie wielomianów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak dla wielomianów w i q ($q \neq 0$) nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. W takiej sytuacji otrzymujemy iloraz oraz niezerową resztę.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\ \underline{-5x^2 - 10x} \\ 3x + 11 \\ \underline{-3x - 6} \\ 5 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 752 : 9 = 83 \\ \underline{-72} \\ 32 \\ \underline{-27} \\ 5 \\ 752 = 83 \cdot 9 + 5 \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz równy $5x + 3$ oraz resztę równą 5, co oznacza, że: $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.

Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (x - \frac{3}{2})$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (x - \frac{3}{2}) = 2x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 3x^2} \\ 2x^2 - 2x - 5 \\ \underline{-2x^2 + 3x} \\ x - 5 \\ \underline{-x + \frac{3}{2}} \\ -3\frac{1}{2} \end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} (2x^2 + 2x + 1) \cdot (x - \frac{3}{2}) - 3\frac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - \frac{3}{2} - 3\frac{1}{2} = \\ &= 2x^3 - x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

- a) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$ c) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$
b) $(4x^2 + 6x + 7) : (x + \frac{1}{2})$ d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : (x - \frac{1}{3})$

Zwróćmy uwagę na to, że w wyniku dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r , która jest funkcją stałą.

Ćwiczenie 2

- a) $x - 3$, reszta 4
b) $4x + 4$, reszta 5
c) $x^2 + 3x - 5$, reszta 4
d) $3x^3 + 3x^2 - 6x - 6$, reszta -2

Ćwiczenie 3

- a) $w(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 2$
b) $w(x) = (-2x^2 + 9x - 27) \cdot (x + 3) + 85$
c) $w(x) = (x^3 + 2x^2 - x)(x - 1)$
d) $w(x) = (3x^3 - 6x^2 + 11x - 13)(x + 2) + 25$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = q(x)(2x + 3)$, podzielny
b) $w(x) = q(x)(x^2 - 4x + 11) - 26$, niepodzielny
c) $w(x) = q(x)(-2x^3 + -6x^2 - 15x - 45) - 129$, niepodzielny
d) $w(x) = q(x)(4x^2 - 4x + 16) - 57$, niepodzielny
e) $w(x) = q(x)(2x^2 + x + 4)$, podzielny

Ćwiczenie 3

Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $q(x) = x - 2$
b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$, $q(x) = x + 3$
c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x$, $q(x) = x - 1$
d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1$, $q(x) = x + 2$

Wielomian w jest **podzielny** przez dwumian q , jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zero (jest wielomianem zerowym).

Zadania

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?
- a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12$, $q(x) = x - 4$
b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x + 2$
c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6$, $q(x) = x - 3$
d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9$, $q(x) = x + 3$
e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x - 1$
2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
- a) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $q(x) = x - 4$
b) $w(x) = x^3 + 3x + 7$, $q(x) = x + 3$
c) $w(x) = 3x^4 - x^2$, $q(x) = x - 1$
d) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4$, $q(x) = x + 6$
e) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2$, $q(x) = x + \frac{1}{2}$
f) $w(x) = 12x^3 + x^2 - x + 3$, $q(x) = x - \frac{1}{4}$
3. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.
- a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$
b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$
c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$
d) $(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 4) : (x - \frac{1}{2}) \stackrel{?}{=} 2x^3 - 4x + 8$
2. a) $w(x) = (2x^2 + 9x + 37)(x - 4) + 147$
b) $w(x) = (x^2 - 3x + 12)(x + 3) - 29$
c) $w(x) = (3x^3 + 3x^2 + 2x + 2)(x - 1) + 2$
d) $w(x) = (x^2 + 2x - 1)(x + 6) + 2$
e) $w(x) = (2x^2 + 6x)(x + \frac{1}{2}) - 2$
f) $w(x) = (12x^2 + 4x)(x - \frac{1}{4}) + 3$
3. a) $(-2x^2 - 3x + 3) \cdot (x - 3) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$, tak
b) $(-3x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 3) = -3x^3 + 7x^2 + 8x - 6$, nie
c) $(3x^3 - 2x^2 + 1) \cdot (x - 2) = 3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 2$, nie
d) $(2x^3 - 4x + 8) \cdot (x - \frac{1}{2}) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$, nie

4. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Rozłóż wielomian w na czynniki, jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian q .
- $w(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$, $q(x) = x - 1$
 - $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$, $q(x) = x + 2$
 - $w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$, $q(x) = x - 3$
 - $w(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 4$, $q(x) = x + 4$

Czy wiesz, że...

Dowolny wielomian w możemy podzielić przez wielomian q , jeżeli wielomian q nie jest wielomianem zerowym. Jako iloraz otrzymujemy pewien wielomian p oraz resztę r . Reszta r albo jest wielomianem zerowym, albo zachodzi zależność: $\text{st}(r) < \text{st}(q)$.

Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Dla danych wielomianów w i q , gdzie $q \neq 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:

$$w = p \cdot q + r$$

oraz $r \equiv 0$ lub $\text{st}(r) < \text{st}(q)$.

Przykład

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 - 6x} \\ -2x^2 + 2x - 1 \\ \underline{2x^2 + 2x + 6} \\ 4x + 5 \end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę $r(x) = 4x + 5$, czyli zachodzi następująca równość:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + 4x + 5$$

Zauważmy, że reszta jest wielomianem stopnia pierwszego.

5. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
- $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x^2 - 4$
 - $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2$, $q(x) = x^2 + x$
 - $w(x) = x^3 + 6$, $q(x) = x^2 + x + 1$
 - $w(x) = 4x^4 - 2x + 3$, $q(x) = x^2 - 1$
4. a) $w(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$
b) $w(x) = 2(x + 3)(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
c) $w(x) = 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3)$
d) $w(x) = (x + 4)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
5. a) $w(x) = (-3x - 1)(x^2 - 4) - 9x - 8$
b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) - 10x + 2$
c) $w(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 7$
d) $w(x) = (4x^2 + 4)(x^2 - 1) - 2x + 7$

Schemat Hornera

Algorytm zwany **schematem Hornera** pozwala na zmniejszenie liczby wykonywanych operacji mnożenia podczas obliczania wartości wielomianu dla danego argumentu (William Horner – angielski matematyk, żył w latach 1786–1837).

Rozpatrzmy wielomian:

$$\begin{aligned}w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\&= a_3 \cdot x \cdot x \cdot x + a_2 \cdot x \cdot x + a_1 \cdot x + a_0\end{aligned}$$

Aby obliczyć wartość tego wielomianu dla danego argumentu, należy wykonać sześć mnożeń i trzy dodawania.

Zauważmy, że:

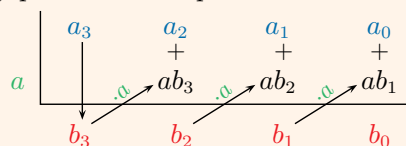
$$\begin{aligned}w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\&= (a_3x^2 + a_2x + a_1) \cdot x + a_0 = \\&= ((a_3 \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0\end{aligned}$$

Korzystając z otrzymanej postaci wielomianu w , możemy obliczyć jego wartość dla argumentu $x = a$, wykonując trzy mnożenia i trzy dodawania.

Jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned}w(a) &= ((a_3 \cdot a + a_2) \cdot a + a_1) \cdot a + a_0 \\&\quad \begin{array}{l} \boxed{b_3 = a_3} \\ \boxed{b_2 = ab_3 + a_2} \\ \boxed{b_1 = ab_2 + a_1} \\ \boxed{b_0 = ab_1 + a_0 = w(a)} \end{array}\end{aligned}$$

to obliczenia możemy przedstawić w postaci schematu:

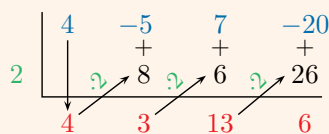


Przykład 1

Dany jest wielomian $w(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 20$. Korzystając ze schematu Hornera, oblicz $w(2)$.

$$\begin{aligned}b_3 &= 4 \\b_2 &= 2 \cdot 4 - 5 = 3 \\b_1 &= 2 \cdot 3 + 7 = 13 \\b_0 &= 2 \cdot 13 - 20 = 6 \\ \text{Zatem } w(2) &= 6.\end{aligned}$$

Zapis w postaci schematu:



1. Oblicz wartość wielomianu w dla argumentu a . Skorzystaj ze schematu Hornera.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7, \quad a = 3$

b) $w(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x - 1, \quad a = 2$

Schemat Hornera możemy również wykorzystać do wyznaczenia ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$.

Rozpatrzmy wielomian $w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zgodnie z przyjętymi poprzednio oznaczeniami mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= b_3x^3 + (b_2 - ab_3)x^2 + (b_1 - ab_2)x + b_0 - ab_1 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)a + b_0 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - a) + b_0 \end{aligned}$$

Zatem $b_3x^2 + b_2x + b_1$ jest ilorazem, a b_0 resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

Przykład 2

Wyznacz iloraz p i resztę r z dzielenia wielomianu $w(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$ przez dwumian $x - 2$. Wielomian w zapisz w postaci $w(x) = p(x)(x - 2) + r$.

Sporządzamy schemat:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -7 & 3 & -3 \\ 2 & & 10 & 6 & 18 \\ \hline & 5 & 3 & 9 & 15 \end{array}$$

Ze schematu odczytujemy iloraz $p(x) = 5x^2 + 3x + 9$ i resztę $r = 15$. Zatem $w(x) = (5x^2 + 3x + 9)(x - 2) + 15$.

2. Wykonaj w sposób tradycyjny dzielenie $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4)$. Porównaj zapis tego dzielenia z podanym niżej zapisem dzielenia wykorzystującym schemat Hornera.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -10 & 0 & -29 & 2 \\ 4 & & 12 & 8 & 32 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 8 & 3 & 14 \end{array}$$

Zwróć uwagę na współczynnik 0 przy x^2 .

3. Wykonaj dzielenie wielomianów, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3)$

c) $(x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 8) : (x - 2)$

b) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) : (x + 2)$

d) $(x^4 - 5x^2 - x - 2) : (x + 2)$

3. a) $6x^2 + 15x + 35$, reszta 114

b) $2x^2 - 10$, reszta 11

c) $x^3 - 4x^2 - 2x - 4$, reszta -16

d) $x^3 - 2x^2 - x + 1$, reszta -4

1. a) $w(x) = ((2x - 5)x - 4)x + 7$

$w(3) = (3 - 4) \cdot 3 + 7 = 4$

b) $w(x) = (((5x - 6)x - 3)x + 1)x - 1$

$w(2) = (((10 - 6) \cdot 2 - 3) \cdot 2 + 1) \cdot 2 - 1 = ((8 - 3) \cdot 2 + 1) \cdot 2 - 1 = 11 \cdot 2 - 1 = 21$

Uczeń:

- wyznacza wartości parametrów tak, aby wielomiany były równe, ustalając stopień wielomianów i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej,
- stosuje pojęcie równości wielomianów do rozkładu na czynniki.

Ćwiczenie 1

- a) $3a = 6$ i $2a^2 = 8$, czyli $a = 2$.
 b) $3a = 3$ i $2a^2 = 1$, zatem nie istnieje taka wartość parametru a .
 c) $3a = -9$ i $2a^2 = 18$, czyli $a = -3$.

R

2.9. Równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe, gdy są wielomianami zerowymi lub mają ten sam stopień, równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej oraz równe wyrazy wolne.

Ćwiczenie 1

Czy istnieje taka wartość parametru a , że wielomian $w(x) = 3ax^2 - x + 2a^2$ jest równy wielomianowi u ?

- a) $u(x) = 6x^2 - x + 8$ b) $u(x) = 3x^2 - x + 1$ c) $u(x) = -9x^2 - x + 18$

Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru m równość:

$$3x^3 + 8x^2 - 5x - 6 = (3x^2 - x - 2)(x + m)$$

jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Wykonujemy mnożenie:

$$\begin{aligned} (3x^2 - x - 2)(x + m) &= 3x^3 + 3mx^2 - x^2 - mx - 2x - 2m = \\ &= 3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m \end{aligned}$$

Aby wielomiany $3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$ oraz $3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m$ były równe, muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} 3m - 1 = 8 & \text{Współczynniki przy } x^2 \text{ muszą być równe.} \\ -m - 2 = -5 & \text{Współczynniki przy } x \text{ muszą być równe.} \\ -2m = -6 & \text{Wyrazy wolne muszą być równe.} \end{cases}$$

Wszystkie trzy równości są jednocześnie prawdziwe dla $m = 3$.

Przykład 2

Wyznacz wartość parametru a tak, aby iloczyn wielomianów $f(x) = ax - 4$ i $g(x) = ax - 1$ był równy wielomianowi $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$.

Wyznaczamy iloczyn $f \cdot g$:

$$f(x) \cdot g(x) = (ax - 4)(ax - 1) = a^2x^2 - ax - 4ax + 4 = a^2x^2 - 5ax + 4$$

Aby wielomiany $f(x) \cdot g(x) = a^2x^2 - 5ax + 4$ oraz $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$ były równe, muszą być równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej, czyli:

$$a^2 = 9, \text{ stąd } a = -3 \text{ lub } a = 3$$

$$-5a = 15, \text{ stąd } a = -3$$

Obie równości są jednocześnie prawdziwe dla $a = -3$.

Ćwiczenie 2

Dla jakiej wartości parametru m równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

- a) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x - m)$
- b) $x^4 - 2x^2 - 5x + 2 = (x^3 + 2x^2 + 2x - 1)(x - m)$
- c) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = (x^2 + 2x - 15)(x - m)$

Zadania

1. Dla jakiej wartości parametru m iloczyn wielomianów f i g jest równy wielomianowi h ?

- a) $f(x) = x - m$, $g(x) = x + 7$, $h(x) = x^2 + 4x - 21$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}mx - 2$, $g(x) = x + 2m + 1$, $h(x) = x^2 + 3x - 10$
- c) $f(x) = mx + 1$, $g(x) = x - 2m$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2. Dla jakiej wartości parametru a równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

- a) $x^3 - x^2 - x - 15 = (x^2 + ax + 5)(x - 3)$
- b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 = (x^2 + ax - 5)(x + 4)$
- c) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 18 = (2x^2 + ax + 9)(x + 2)$

3. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $u \cdot v - w$ jest wielomianem zerowym?

- a) $u(x) = -x + 4$, $v(x) = 2x^2 + ax + b$, $w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 5x + 12$
- b) $u(x) = 2ax + b$, $v(x) = x^2 - x$, $w(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$

4. Dla jakich wartości parametrów a i b równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

- a) $-x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x - 15 = (-x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 5)$
- b) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 1)$
- c) $2x^4 - 3x^3 + 7x + 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 6)(x + \frac{1}{2})$

5. Przedstaw wielomian w jako iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

- a) $w(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
- b) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x - 1$
- c) $^*w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x + 2$
- d) $^*w(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$
- e) $^*w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

5. W podpunktach a) i b) zauważmy, że dla liczb całkowitych a i b szukany iloczyn ma postać: $w(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1) = x^4 + x^3(a + b) + x^2ab + x(b - a) - 1$.

$$\text{a) } \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \quad \text{czyli } a = b = 1, \text{ zatem } w(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$$

- b) $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x - 1)$
- c) $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
- d) $w(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1)$
- e) $w(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + 2x + 1)$

Uwaga. Jeśli pomnożymy każdy z czynników przez -1 , też otrzymamy poprawne rozwiązanie.

Ćwiczenie 2

- a) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = x^4 + (1 - m)x^3 + (1 - m)x^2 + (1 - m)x - m$
 $1 - m = -1$, czyli $m = 2$.
- b) $x^4 - 2x^2 - 5x + 2 = x^4 + (2 - m)x^3 + (2 - 2m)x^2 + (-2m - 1)x + m$

$$\begin{cases} 2 - m = 0 \\ 2 - 2m = -2 \\ -2m - 1 = -5 \\ m = 2 \end{cases}$$

czyli $m = 2$

- c) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = x^3 + (2 - m)x^2 + (-2m - 15)x + 15m$

$$\begin{cases} 2 - m = -2 \\ -2m - 15 = -23 \\ 15m = 60 \end{cases}$$

czyli $m = 4$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) $x^2 + 4x - 21 = x^2 + (7 - m)x - 7m$
dla $m = 3$
b) $x^2 + 3x - 10 = \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 + \frac{1}{2}m - 2)x - 4m - 2$ dla $m = 2$
c) $2x^2 - 3x + 1 = mx^2 + (1 - 2m^2) \cdot x - 2m$
nie ma takiego m
- 2. a) $x^3 - x^2 - x - 15 = x^3 + (a - 3)x^2 + (5 - 3a) \cdot x - 15$ dla $a = 2$
b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 = x^3 + (a + 4)x^2 + (4a - 5) \cdot x - 20$ dla $a = -3$
c) $a = -8$
- 3. a) $a = 2$, $b = 3$
b) $a = \frac{1}{2}$, $b = -5$
- 4. a) $a = 0$, $b = -1$
b) $a = 1$, $b = 3$
c) $a = -4$, $b = 2$

Uczeń:

- sprawdza podzielność wielomianu przez dwumian $x - a$ bez wykonywania dzielenia,
- wyznacza resztę z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$,
- sprawdza, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu, i wyznacza pozostałe pierwiastki,
- wyznacza wartość parametru tak, aby wielomian był podzielny przez dany dwumian,
- sprawdza podzielność wielomianu przez wielomian $(x-p)(x-q)$ bez wykonywania dzielenia,
- przeprowadza dowód twierdzenia Bézouta.

Ćwiczenie 1

$$w(x) = p(x)(x - a) + r,$$

zatem

$$\begin{aligned} w(a) &= p(a)(a - a) + r = \\ &= p(a) \cdot 0 + r = r \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- $r = w(3) = 0$
- $r = w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
- $r = w(-1) = -1$
- $r = w(-2) = 0$

R

2.10. Twierdzenie Bézouta

Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy iloraz p oraz resztę r : $w(x) = p(x)(x - a) + r$. Reszta w tym przypadku jest wielomianem stopnia 0, zatem będziemy pisać krótko: reszta r .

Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wtedy możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x - 5$ przez dwumian $x - 4$, nie wykonując dzielenia.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x) = p(x)(x - 4) + r$. Dla $x = 4$:

$$w(4) = p(4)(4 - 4) + r = 0 + r = r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x - 4$:

$$r = w(4) = \frac{1}{8} \cdot 4^3 + 4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = 8 + 16 - 12 - 5 = 7$$

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to:

$$r = w(a)$$

D**Ćwiczenie 1**

Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)(x - a) + r$.

Przykład 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ przez dwumian $x + 2$, nie wykonując dzielenia.

$$r = w(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5 = -16 + 12 + 2 + 5 = 3$$

Ćwiczenie 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

- $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x - 3$
- $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$
- $w(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, $q(x) = x + 1$
- $w(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x + 6$, $q(x) = x + 2$

Multibook

- Czy wielomian jest podzielny przez dwumian

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.10

Generator
testów i sprawdzianów

Rozważmy przypadek, gdy reszta r z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ jest równa zeru ($r \equiv 0$), czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy” w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:

Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Dowód

Założmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , czyli $w(a) = 0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r :

$$w(x) = p(x)(x - a) + r$$

Podstawiamy $x = a$:

$$w(a) = p(a)(a - a) + r = r$$

Ale $w(a) = 0$, więc $r = 0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x - a$.

Założmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, czyli istnieje taki wielomian p , że $w(x) = p(x)(x - a)$. Wówczas $w(a) = p(a)(a - a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Przykład 3

Który z wielomianów: $w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ czy $u(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

$w(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

$u(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 4 - 6 = -14 \neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x - 1$
- b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 9$, $q(x) = x + 1$
- c) $w(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 11$, $q(x) = x - 3$
- d) $w(x) = x^4 + 8x^2 + 2x + 16$, $q(x) = x + 2$

Ćwiczenie 3

- a) $w(1) = 0$, jest
- b) $w(-1) = 0$, jest
- c) $w(3) = -16 \neq 0$, nie jest
- d) $w(-2) = 60 \neq 0$, nie jest

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w , więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Aby wyznaczyć wielomian p , wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline -2x^2 + x + 6 \\ 2x^2 - 4x \\ \hline -3x + 6 \\ 3x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki i rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$
- b) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$
- c) $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$
- d) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w , to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:
1. Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
2. Otrzymujemy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (jeżeli istnieją) są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w . Wyznaczamy te pierwiastki.

Zadania

1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

- a) $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$
- b) $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$
- c) $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4

- a) $w(x) = (x + 4)(x^2 + x - 2) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$
- b) $w(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 1) = (x - 1)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
- c) $w(x) = (x + 2)(x^2 - 3x - 4) = (x + 2)(x + 1)(x - 4)$
- d) $w(x) = (x - 3)(x^2 - x - 6) = (x + 2)(x - 3)^2$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $r = w(-1) = 0$
b) $r = w(2) = 2$
c) $r = w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

2. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.
- $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$, $a = 1$
 - $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$, $a = -2$
 - $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$, $a = -5$
3. Sprawdź, która z liczb: -1 , 1 czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
- $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$
 - $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$
 - $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$
 - $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$
4. Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q ?
- $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3$, $q(x) = x + 3$
 - $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6$, $q(x) = x - 2$
 - $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7$, $q(x) = x + 1$
5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u .
- $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $u(x) = (x - 1)(x + 3)$
 - $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $u(x) = 2x^2 + x - 1$
 - $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12$, $u(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

Czy wiesz, że...

Jeśli q jest wielomianem drugiego stopnia, to wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie p jest pewnym wielomianem oraz $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q .

6. a) Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 3$ wynosi 7 , a przez dwumian $x + 2$ wynosi -3 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez $(x - 3)(x + 2)$.
- b) Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ wynosi -1 , a przez dwumian $x - 2$ wynosi 3 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez $x^2 - 3x + 2$.
7. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u , nie wykonując dzielenia.
- $w(x) = x^7 - 33x + 11$, $u(x) = (x + 1)(x - 2)$
 - $w(x) = x^{99} - 1$, $u(x) = x^2 - 1$

7. a) $w(x) = p(x)(x + 1)(x - 2) + ax + b$,
 $w(-1) = 43$ i $w(2) = 73$, czyli $\begin{cases} -a + b = 43 \\ 2a + b = 73 \end{cases}$ zatem $r(x) = 10x + 53$
- b) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, czyli $w(x) = p(x)(x - 1)(x + 1) + ax + b$,
 $w(1) = 0$ i $w(-1) = -2$, czyli $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases}$ zatem $r(x) = x - 1$

2. a) $w(x) = (x - 7)(x - 1)(x + 2)$
b) $w(x) = 2(x + 2)(x + \frac{3}{2}) \cdot (x + 1)$
c) $w(x) = (x + 5)(x^2 - 3x + 4)$
3. a) $w(x) = (x - 2)(x^2 + x - 3)$,
 $2, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$
b) $w(x) = (x + 1) \cdot (2x^2 + 5x - 3)$, $-1, -3, \frac{1}{2}$
c) $w(x) = (x - 1) \cdot (2x^2 + x - 4)$,
 $1, \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$
d) $w(x) = -(x - 2) \cdot (x^2 + \frac{3}{2}x - 1)$, $2, -2, \frac{1}{2}$
4. a) $m = 7$
b) $m = -\sqrt{5}$, $m = \sqrt{5}$
c) $m = -2$, $m = 3$
5. a) jest
b) $u(x) = (x - \frac{1}{2})(x + 1)$,
 $w(-1) = -15 \neq 0$, nie jest
c) jest

6. a) $w(x) = p(x)(x - 3) \cdot (x + 2) + ax + b$,
 $w(3) = 7$ i $w(-2) = 3$, czyli
 $\begin{cases} 3a + b = 7 \\ -2a + b = -3 \end{cases}$
zatem $r(x) = 2x + 1$
b) $x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 1)$,
czyli $w(x) = p(x)(x - 2) \cdot (x - 1) + ax + b$,
 $w(1) = -1$ i $w(2) = 3$, czyli
 $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$
zatem $r(x) = 4x - 5$

Uczeń:

- wskazuje liczby, które mogą być pierwiastkami całkowitymi wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- rozwiązuje równania wielomianowe z wykorzystaniem twierdzeń o pierwiastkach całkowitych wielomianu,
- stosuje twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu w zadaniach różnych typów,
- przeprowadza dowód twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu.

R

2.11. Pierwiastki całkowite wielomianu

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód

Załóżmy, że $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ oraz liczba całkowita x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wówczas:

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$a_0 = -a_n x_1^n - a_{n-1} x_1^{n-1} - \dots - a_1 x_1 = x_1 (-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1)$$

Liczba $-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1$ jest całkowita, więc x_1 jest dzielnikiem a_0 .

Przykład 1

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Zgodnie z twierdzeniem, pierwiastków całkowitych wielomianu w szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = 3$, czyli wśród liczb: 1, -1, 3 i -3.

$$w(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w .

$$w(-1) = -2 + 3 + 8 + 3 \neq 0$$

Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu w .

$$w(3) = 54 + 27 - 24 + 3 \neq 0$$

Liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu w .

$$w(-3) = -54 + 27 + 24 + 3 = 0$$

Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu w .

Zatem jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu w są liczby 1 i -3.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $w(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 4$

d) $w(x) = x^4 - 7x^2 + 10$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pierwiastki całkowite równania.

a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{5}{2} = 0$

Wskazówka. W podpunkcie a) pomnóż obie strony równania przez 6.

Ćwiczenie 1

a) dzielniki: -1, 1, -3, 3; pierwiastek całkowity: 1

b) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -4, 4; pierwiastki całkowite: -4, 1

c) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6; pierwiastki całkowite: -2, 1, 3

d) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10; brak pierwiastków całkowitych

Ćwiczenie 2

a) $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$

dzielniki całkowite wyrazu wolnego: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6;

pierwiastki całkowite: -2, 3

b) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$

dzielniki całkowite wyrazu wolnego: -1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10;

pierwiastki całkowite: 1, 2, 5

Multibook

- Pierwiastki całkowite wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.11



Przykład 2

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 2$ są liczby: 1, -1, 2, -2. Obliczamy wartości wielomianu $w(x) = 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ dla tych liczb:

$$w(1) = -6 \neq 0, \quad w(-1) = -6 \neq 0, \quad w(2) = 0, \quad w(-2) = -60 \neq 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem całkowitym równania.

Wykonujemy dzielenie:

$$(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$$

i wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 + 2x - 1$:

$$\Delta = 4 + 20 = 24, \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{6}}{5}$$

Zatem pierwiastkami równania są liczby: $\frac{-1 - \sqrt{6}}{5}$, $\frac{-1 + \sqrt{6}}{5}$ i 2.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Zaczynj od znalezienia pierwiastka całkowitego.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$

b) $3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $2x^3 + 8x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$.

Wyraz wolny $a_0 = 9$ ma następujące dzielniki: 1, -1, 3, -3, 9, -9. Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem całkowitym tego równania. Zatem wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ jest podzielny przez $x - 1$:

$$(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

Otrzymany wielomian rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 9 &= x^2(x + 3) - 3(x + 3) = (x^2 - 3)(x + 3) = \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3) \end{aligned}$$

Stąd:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

Zatem rozwiązaniami równania są liczby: -3, $-\sqrt{3}$, 1 i $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 = 0$

d) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$

e) $\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

c) $2x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

f) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = 0$

Ćwiczenie 4

a) $w(x) = (x - 1)(x^3 - 3x^2 + 5x - 15) = (x - 1)(x^2 + 5)(x - 3)$, $x = 1$ lub $x = 3$

b) $w(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = (x - 1)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$,
 $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 1$ lub $x = 3$

c) $w(x) = (x + 1)(2x^3 - 10x^2 + x - 5) = (x + 1)(2x^2 + 1)(x - 5)$, $x = -1$ lub $x = 5$

d) $w(x) = (x - 1)(x^3 - 7x + 6) = (x - 1)(x^3 - x - 6x + 6) = (x - 1)^2(x + 3)(x - 2)$,
 $x = -3$ lub $x = 1$ lub $x = 2$

e) $2w(x) = (x - 1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x - 1)(x - 1)^3 = (x - 1)^4$, $x = 1$

f) $w(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 3x - 1)$, $x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ lub $x = -2$ lub $x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ lub $x = 2$

Ćwiczenie 3

a) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -2, 2, -4, 4,$$

$$w(-1) = -20 \neq 0, \quad w(1) = 0,$$

$$w(-2) < 0, \quad w(2) = -2 \neq 0,$$

$$w(-4) < 0, \quad w(4) = 0,$$

$$w(x) = (x - 4)(x - 1)^2,$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 4$$

b) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -2, 2,$$

$$w(-1) = 7 \neq 0, \quad w(1) = 3 \neq 0,$$

$$w(-2) = 0, \quad w(2) = 28 \neq 0,$$

$$w(x) = (x + 2)(3x^2 - 3x + 1),$$

$$x = -2$$

c) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -3, 3,$$

$$w(-1) = -2 \neq 0, \quad w(1) > 0,$$

$$w(-3) = 0, \quad w(3) > 0,$$

$$w(x) = (x + 3)(x^2 + 3x + 1),$$

$$x = -3 \text{ lub } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{lub } x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

d) $4x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$

dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -3, 3,$$

$$w(-1) = 2 \neq 0, \quad w(1) > 0,$$

$$w(-3) = 0, \quad w(3) > 0,$$

$$w(x) = (x + 3)(4x^2 + 4x + 1),$$

$$x = -3 \text{ lub } x = -\frac{1}{2}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -5$ lub $x = 1$
 b) $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 3$
 c) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{2}$
 d) $x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ lub $x = 1$ lub $x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$
 e) $x = -4$
 f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$
 g) $x = 3$
 h) $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 3$
2. a) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 3$
 b) $x = 1$
 c) $x = 1$ lub $x = 2$
 d) $x = -1$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = 1$
 e) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = -2$ lub $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ lub $x = 3$
 f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{2}$
3. a), b) $x = 2$
 c) $x = -3$ lub $x = 1$
 d) $x = -1$
 e) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -1$ lub $x = \sqrt{2}$
 f) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
4. a) $P(t) = 2t(6 - t^2) = -2t^3 + 12t$
 $6 - t^2 > 0$ i $t > 0$,
 zatem $t \in (0; \sqrt{6})$
 b) $-2t^3 + 12t = 8$
 dla $t = \sqrt{3} - 1$ lub $t = 2$
5. $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(3, \frac{13}{2})$,
 $(-3, \frac{13}{2})$

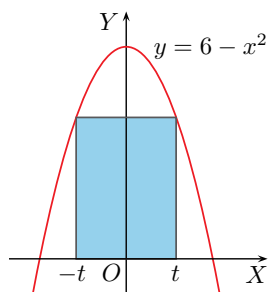
Zadania

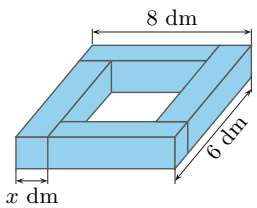
1. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$	e) $3x^3 + 11x^2 - 3x + 4 = 0$
b) $x^3 - 7x - 6 = 0$	f) $5x^2 - 2x = 1 - 6x^3$
c) $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$	g) $x^3 - 6 = 4x^2 - 5x$
d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$	h) $-3x^3 + 15x^2 - 20x + 6 = 0$
2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$	d) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$
b) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$	e) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$
c) $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$	f) $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$
3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = x^3$	d) $\frac{1}{6}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$
b) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$	e) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = x + \frac{1}{2}$
c) $\frac{x^3+x^2}{15} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$	f) $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = (3x-9)(2x^2+x)$
4. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe – nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 6 - x^2$ (rysunek obok).

a) Podaj wzór wielomianu opisującego pole tego prostokąta w zależności od t . Jaka jest dziedzina tej funkcji? b) Dla jakiej wartości t pole tego prostokąta jest równe 8?	
---	--
5. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Pole tego prostokąta jest równe 39. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.
6. Fragment drewnianej konstrukcji (rysunek obok) został wyprodukowany z belek, których przekrój jest kwadratem o boku x dm.

a) Objętość bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jest równa 24 dm^3 . Oblicz x . b) Objętość bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jest równa 80 dm^3 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.	
---	---
6. $V(x) = 8 \cdot 6 \cdot x - (8 - 2x)(6 - 2x)x = -4x^3 + 28x^2$ dla $x \in (0; 3)$
 - a) $x = 1$ dm
 - b) $-4x^3 + 28x^2 = 80$ dla $x = 2$ dm, czyli $P = 160 \text{ dm}^2$

Równania wielomianowe. Wzór Cardano

Istnieją wzory pozwalające rozwiązywać dowolne równania wielomianowe stopnia trzeciego i czwartego. Odkryli je Włosi: Niccolò Fontana, zwany także Tartaglia [czyt. tar-talja] (1499 lub 1500–1557), Girolamo Cardano [czyt. dżirolamo kardano] (1501–1576, rycina obok) i Lodovico Ferrari (1522–1565). W 1545 r. Cardano opublikował wzory pozwalające rozwiązać dowolne równanie postaci $x^3 + ax = b$.



1. Rozwiąż równanie $x^3 + x = 2$, korzystając:

a) z twierdzenia o pierwiastkach całkowitych,

b) z poniższego **wzoru Cardano** dla równania $x^3 + ax = b$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

2. Rozwiąż równanie, korzystając ze wzoru Cardano.

a) $x^3 - 2x - 21 = 0$

b) $x^3 + 6x - 20 = 0$

3.* Przeczytaj informację w ramce.

Równanie postaci:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

można sprowadzić do postaci $y^3 + ay = b$, podstawiając $x = y - \frac{a_2}{3}$.

a) Wyznacz pierwiastek równania $x^3 - 6x^2 + 18x - 18 = 0$, korzystając z powyższej informacji i wzoru Cardano.

b) Uzasadnij, że istnieją: pierwiastek x_1 równania $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$ oraz pierwiastek x_2 równania $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$ takie, że spełniony jest warunek $x_2 - x_1 = 2$.

Nie istnieje ogólna metoda znajdowania pierwiastków wielomianów stopnia $n \geq 5$. W 1803 r. ukazała się praca Włocha Paola Ruffiniego (1765–1822), w której dowodził on nieistnienia takiej metody dla wielomianów stopnia piątego. Dowód dla wielomianów stopnia $n \geq 5$ przedstawił w 1824 r. Norweg Niels Henrik Abel (1802–1829, rycina obok).



3. a) Podstawiamy $x = y + 2$ i otrzymujemy $(y + 2)^3 - 6(y + 2)^2 + 18(y + 2) - 18 = 0$
 $y^3 + 6y = -2$, czyli ze wzoru Cardano dla $a = 6$ i $b = -2$ mamy:
 $y = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4}$
 Zatem $x = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4} + 2$.

b) Do pierwszego równania podstawiamy $x_1 = y_1 - 1$ i otrzymujemy $(y_1 - 1)^3 + 3(y_1 - 1)^2 + 9(y_1 - 1) + 9 = 0$, skąd $y_1^3 + 6y_1 = -2$. Korzystając z podpunktu a), mamy: $y_1 = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4}$, czyli $x_1 = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4} - 1$.
 Do drugiego równania podstawiamy $x_2 = y_2 + 1$ i otrzymujemy $(y_2 + 1)^3 - 3(y_2 + 1)^2 + 9(y_2 + 1) - 5 = 0$
 $y_2^3 + 6y_2 = -2$, korzystając z podpunktu a), mamy: $y_2 = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4}$, czyli $x_2 = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4} + 1$.
 Zatem $x_2 - x_1 = \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4} + 1 - (\sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4} - 1) = 2$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 1$

$$\text{b) } x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{28}{27}} - 1}$$

2. a) $x = 3$

b) $x = 2$

Uczeń:

- wyznacza pierwiastki wielomianu i podaje ich krotność, gdy dany jest wielomian w postaci iloczynowej,
- bada, czy wielomian ma inne pierwiastki, oraz określa ich krotność, gdy dane są stopień wielomianu i jego pierwiastki całkowite,
- znając pierwiastek wielomianu i jego krotność, wyznacza pozostałe pierwiastki wielomianu,
- podaje przykłady wielomianu, gdy dane są jego stopień oraz pierwiastki i ich krotność,
- rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące pierwiastków wielokrotnych.

R

2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$.

$$w(x) = x(x^2 - 8x + 16) = x(x - 4)^2$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

W rozkładzie na czynniki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ czynnik $x - 4$ występuje dwa razy. Dlatego liczbę 4 nazywamy **pierwiastkiem dwukrotnym** (podwójnym) wielomianu w . Liczba 0 jest **pierwiastkiem jednokrotnym** (pojedynczym) tego wielomianu.

Definicja

Jeżeli w rozkładzie wielomianu w na czynniki występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to liczbę a nazywamy **pierwiastkiem k -krotnym** wielomianu w .

Przykład 2

Podaj pierwiastki wielomianu w i określ krotność każdego z nich.

a)

$$w(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$$

pierwiastki: 0 -2 3

krotność: trzykrotny jednokrotny dwukrotny

b)

$$w(x) = x^2(x^2 - 9)(x + 3)^3 = x^2(x - 3)(x + 3)(x + 3)^3 = x^2(x - 3)(x + 3)^4$$

pierwiastki: 0 3 -3

krotność: dwukrotny jednokrotny czterokrotny

Ćwiczenie 1

- a) $w(x) = (x - 2)^2(x + 2)$, jest
b) $w(x) = (x - 2)^3(x + 1)$,
nie jest

Ćwiczenie 1

Czy liczba 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu w ?

- a) $w(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$ b) $w(x) = (x - 2)^2(x^2 - x - 2)$

Ćwiczenie 2

Podaj pierwiastki wielomianu w oraz określ krotność każdego z nich.

- a) $w(x) = x^4(x + \frac{3}{2})^2(x - 1)$ c) $w(x) = (x - 4)^3(x^2 - 16)$
b) $w(x) = -3x(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ d) $w(x) = 7x(x - 2)(5x + 3)(x^2 - 4)^2$

Ćwiczenie 2

- a) $x = -\frac{3}{2}$ – dwukrotny,
 $x = 0$ – czterokrotny,
 $x = 1$ – jednokrotny
b) $x = 0$ – jednokrotny
c) $x = -4$ – jednokrotny,
 $x = 4$ – czterokrotny
d) $x = -2$ – dwukrotny,
 $x = -\frac{3}{5}$, $x = 0$ – jednokrotne,
 $x = 2$ – trzykrotny

Możemy mówić również o pierwiastkach jednokrotnych lub wielokrotnych równania wielomianowego $w(x) = 0$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$. Podaj krotność każdego pierwiastka.

Pierwiastków całkowitych wielomianu $w(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ szukamy wśród dzielników jego wyrazu wolnego: $w(1) = 4 - 7 + 2 + 1 = 0$, czyli liczba 1 jest pierwiastkiem.

Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 7x^2 + 2x + 1) : (x - 1) = 4x^2 - 3x - 1 \\ \underline{-4x^3 + 4x^2} \\ -3x^2 + 2x + 1 \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ -x + 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 - 3x - 1$:

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \quad x_1 = \frac{3-5}{8} = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3+5}{8} = 1$$

Zatem pierwiastkami równania $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ są liczby $-\frac{1}{4}$ i 1.

Równanie można zapisać w postaci $4(x - 1)^2(x + \frac{1}{4}) = 0$, więc liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym, a liczba $-\frac{1}{4}$ – pierwiastkiem jednokrotnym.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

c) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x = 0$

b) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

d) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$

Twierdzenie

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Powyższe twierdzenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia Bézouta.

Ćwiczenie 4

Poniżej podano wielomian w oraz wszystkie jego pierwiastki całkowite wraz z krotnością każdego z nich. Czy wielomian ten może mieć jeszcze inne pierwiastki?

a) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3$, pierwiastki jednokrotne: $-3, 1, 2$

b) $w(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, pierwiastek dwukrotny: 3

Ćwiczenie 3

a) $x = -3$ – jednokrotny,

$x = -1$ – dwukrotny

b) $x = -2$ – dwukrotny,

$x = 3$ – jednokrotny

c) $x = 0, x = 4$ – jednokrotne,

$x = 1$ – dwukrotny

d) $x = 1, x = 2$ – dwukrotne

Ćwiczenie 4

a) nie może

b) może

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$ – jednokrotne
b) $x = -1$ – dwukrotny, $x = 2$ – jednokrotny
c) $x = 2$ – jednokrotny, $x = 5$ – dwukrotny
d) $x = -3$ – jednokrotny, $x = 1$ – czterokrotny
e) $x = -3$ – trzykrotny, $x = 3$ – jednokrotny
f) $x = -2$, $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x = 3$ – jednokrotne
g) $x = -5$ – jednokrotny, $x = -2$, $x = 0$ – dwukrotny, $x = 2$ – trzykrotny
h) $x = -4$, $x = 2$ – jednokrotne, $x = 0$ – trzykrotny, $x = 3$ – dwukrotny
2. a) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$ – równanie ma tylko pierwiastki jednokrotne
b) $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 3(x+2)(x+\frac{1}{3})(x-2)$ – równanie ma tylko pierwiastki jednokrotne
c) $2x^3 + 8x^2 + 9x + 2 = 2(x+2)(x+\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \cdot (x+\frac{2+\sqrt{2}}{2})$ – równanie ma tylko pierwiastki jednokrotne
d) $x^3 + 6x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x^2 + x + 3)$ – równanie ma tylko pierwiastek jednokrotny
3. a) $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$ – jednokrotne
b) $x = 0$ – trzykrotny, $x = 3$ – dwukrotny
c) $x = -1$, $x = 1$ – dwukrotne
d) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ – dwukrotne
e) $x = 0$ – dwukrotny
f) $x = -2$ – dwukrotny, $x = 0$ – trzykrotny
g) $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$ – jednokrotne
h) $x = 0$ – dwukrotny
i) $x = 0$ – trzykrotny, $x = -2$, $x = 2$ – jednokrotne

Zadania

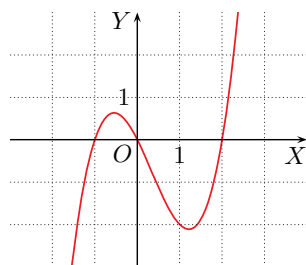
1. Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.
a) $(2x+1)(x^2+x-6) = 0$ e) $(x^2-9)(x+3)^2 = 0$
b) $(x+1)^2(2x-4) = 0$ f) $(x^2-x-6)(x^2+x-1) = 0$
c) $(5-x)(x^2-7x+10) = 0$ g) $(x^2-4)^2(x^4+3x^3-10x^2) = 0$
d) $(x^2+2x-3)(x-1)^3 = 0$ h) $(x^3+x^2-12x)(x^4-5x^3+6x^2) = 0$
2. Uzasadnij, że równanie nie ma pierwiastków wielokrotnych.
a) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$ c) $2x^3 + 8x^2 + 9x + 2 = 0$
b) $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 8x + 15 = 0$
3. Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.
a) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ g) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$
b) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 = 0$ e) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 = 0$ h) $3x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$
c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ f) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 = 0$ i) $x^7 - 16x^3 = 0$
4. Liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
a) $w(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$, $x_0 = 2$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$, $x_0 = -1$
c) $w(x) = -12x^3 + 16x^2 - 7x + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$
5. Podaj przykład wielomianu, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: -3 , 2 , 4 i którego stopień jest równy: a) 3 , b) 4 , c) 6 .
6. Podaj przykład wielomianu o wyrazie wolnym $a_0 = 2$, który ma tylko jeden pierwiastek dwukrotny równy 3 i którego stopień jest równy:
a) 2 , b) 4 , c) 6 .
7. Dla jakich wartości parametru a liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w ?
a) $w(x) = (x+3)(x^2+ax+6)$, $x_0 = -3$
b) $w(x) = (2x^2-7x-4)(x^2-4a^2)$, $x_0 = 4$
8. Czy istnieje taka wartość parametru a , dla której liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w ?
a) $w(x) = 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + ax + a + 10$, $x_0 = -1$
b) $w(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a+5)x + 4$, $x_0 = 2$
4. a) $x = -\frac{1}{3}$ b) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ c) $x = \frac{1}{3}$
5. a) np. $w(x) = (x+3)(x-2)(x-4)$
b) np. $w(x) = (x+3)^2(x-2)(x-4)$
c) np. $w(x) = (x+3)^3(x-2)^2(x-4)$
6. a) $w(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2$
b) np. $w(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2(x^2+1)$
c) np. $w(x) = \frac{1}{9}(x-3)^2(x^4+x^2+2)$
7. a) $a = 5$ b) $a = -2$, $a = 2$
8. a) tak, $a = -16$
b) $w(2) = 6a + 6 = 0$ dla $a = -1$
Wówczas $w(x) = (x-2)(x^3 - x^2 - 3x - 2) = (x-2)v(x)$.
 $v(2) = -4$, czyli liczba 2 nie jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w .

R 2.13. Wykres wielomianu

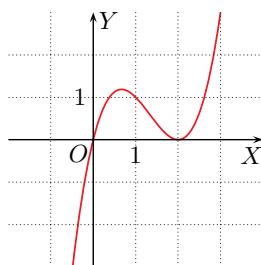
Wykresem wielomianu stopnia pierwszego, $w(x) = ax + b$, jest prosta, a wykresem wielomianu stopnia drugiego, $w(x) = ax^2 + bx + c$, jest parabola. Dokładne narysowanie wykresu wielomianu wyższego stopnia, bez korzystania z kalkulatora graficznego lub komputera, może okazać się bardzo pracochłonne. Można natomiast sprawnie naszkicować przybliżony kształt wykresu, gdy znamy pierwiastki wielomianu.

Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów trzeciego stopnia.

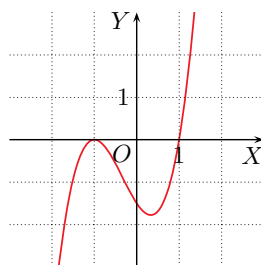
Wykresy wielomianów o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze:



$$y = x(x+1)(x-2)$$

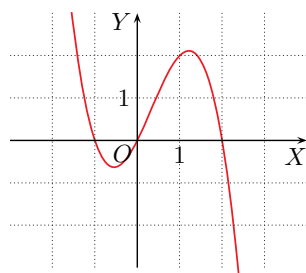


$$y = x(x-2)^2$$

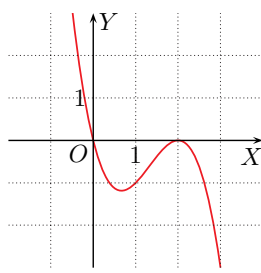


$$y = \frac{3}{2}(x+1)^2(x-1)$$

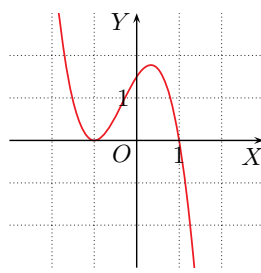
Wykresy wielomianów o ujemnym współczynniku przy najwyższej potędze:



$$y = -x(x+1)(x-2)$$



$$y = -x(x-2)^2$$



$$y = -\frac{3}{2}(x+1)^2(x-1)$$

Zauważ, że gdy wykres wielomianu przechodzi przez pierwiastek jednokrotny, wartości wielomianu zmieniają znak z dodatniego na ujemny lub odwrotnie. Mówimy wtedy, że wielomian **zmienia znak**. Natomiast w pierwiastkach dwukrotnych wielomian nie zmienia znaku.

Znak wielomianu w przedziale $(a; \infty)$, gdzie a jest największym pierwiastkiem, jest taki sam jak znak współczynnika przy najwyższej potędze. Wielomian zmienia znak tylko w pierwiastkach krotności nieparzystej.

Uczeń:

- szkicuje wykres wielomianu, gdy dana jest jego postać iloczynowa,
- dobiera wzór wielomianu do szkicu wykresu,
- podaje wzór wielomianu, gdy dane są współczynniki przy najwyższej potędze oraz szkic wykresu,
- szkicuje wykres danego wielomianu po wyznaczeniu jego pierwiastków.

Multibook

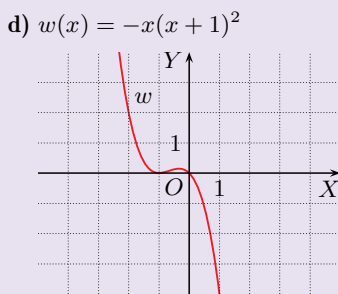
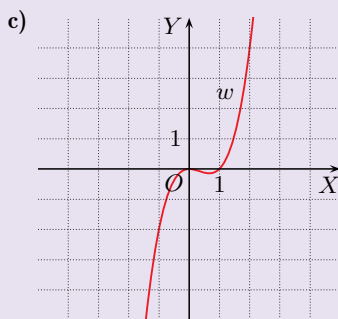
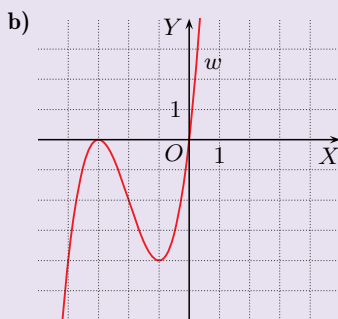
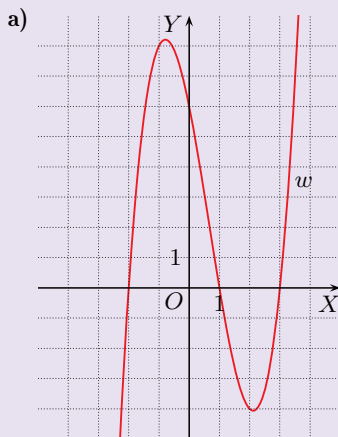
- Wykres wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.13



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1



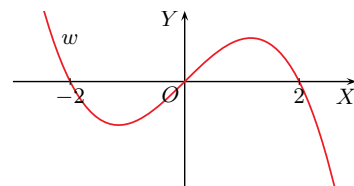
Przykład 1

Określ znak wielomianu w w przedziale $(a; \infty)$, gdzie a jest największym pierwiastkiem, i naszkicuj wykres tego wielomianu.

a) $w(x) = -x(x+2)(x-2)$

Wielomian w ma tylko pierwiastki jednokrotne: $-2, 0$ i 2 , co oznacza, że zmienia on znak w każdym z tych pierwiastków.

Współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc wielomian w przedziale $(2; \infty)$ przyjmuje wartości ujemne.



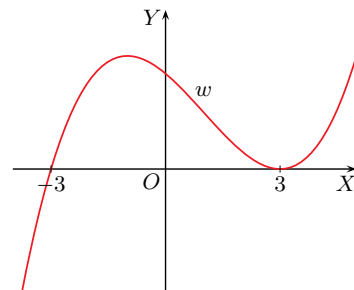
b) $w(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2(x+3)$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby:

-3 – pierwiastek jednokrotny – wielomian zmienia znak,

3 – pierwiastek dwukrotny – wielomian nie zmienia znaku.

Współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, więc wielomian w przedziale $(3; \infty)$ przyjmuje wartości dodatnie.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres wielomianu w .

a) $w(x) = (x-3)(x-1)(x+2)$

d) $w(x) = -x(x^2 + 2x + 1)$

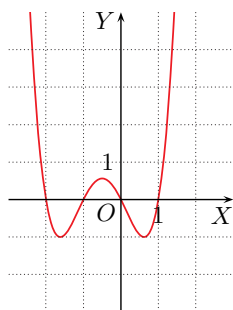
b) $w(x) = x(x+3)^2$

e) $w(x) = (1-x)(x^2 + 4x - 5)$

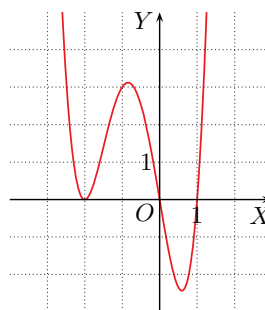
c) $w(x) = x^2(x-1)$

f) $w(x) = (2-x)(x^2 + 6x + 9)$

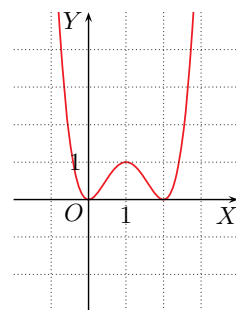
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów czwartego stopnia o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze.



$y = x(x+2)(x+1)(x-1)$

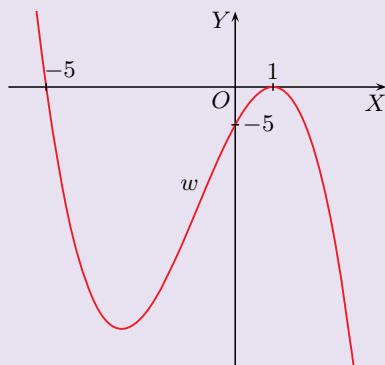


$y = \frac{3}{2}x(x-1)(x+2)^2$

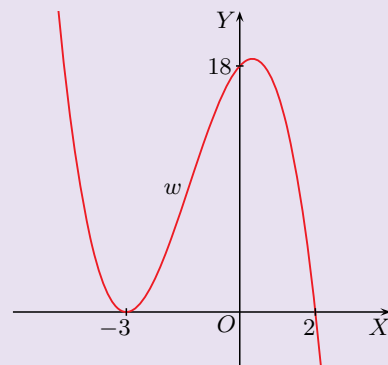


$y = x^2(x-2)^2$

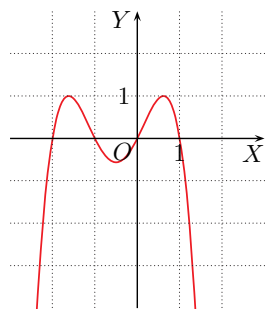
e) $w(x) = -(x-1)^2(x+5)$



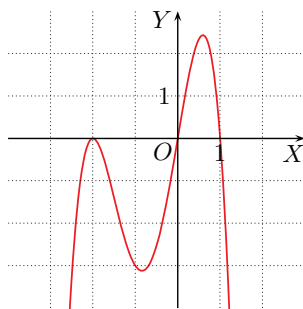
f) $w(x) = -(x-2)(x+3)^2$



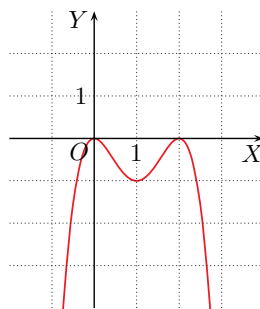
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów czwartego stopnia o ujemnym współczynniku przy najwyższej potędze.



$$y = -x(x+2)(x+1)(x-1)$$



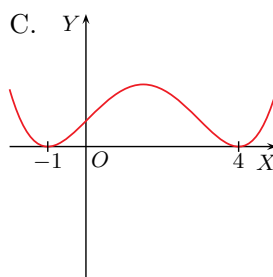
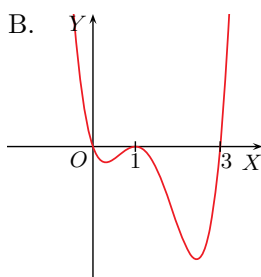
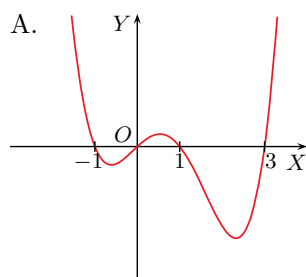
$$y = -\frac{3}{2}x(x-1)(x+2)^2$$



$$y = -x^2(x-2)^2$$

Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiono szkice wykresów wielomianów czwartego stopnia, dla których współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni ($a_4 > 0$).

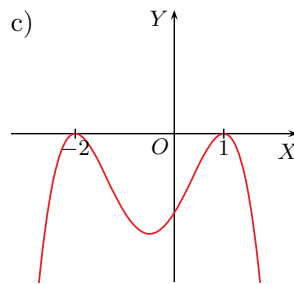
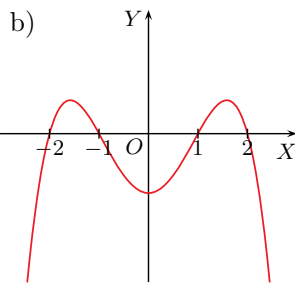
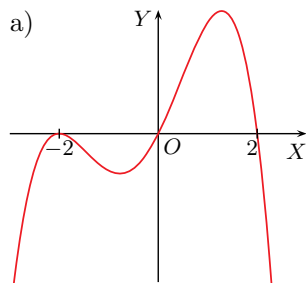


Dobierz szkic wykresu do każdego z podanych wielomianów:

$$u(x) = x(x-1)^2(x-3), \quad v(x) = (x+1)^2(x-4)^2, \quad w(x) = x(x+1)(x-1)(x-3).$$

Ćwiczenie 3

Poniżej przedstawiono szkic wykresu wielomianu czwartego stopnia o współczynniku $a_4 = -1$. Podaj wzór tego wielomianu.



Ćwiczenie 3

a) $w(x) = -x(x+2)^2(x-2)$

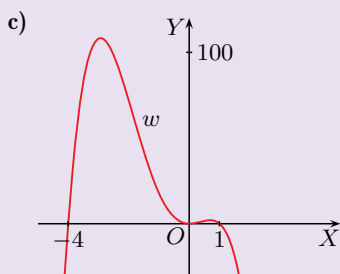
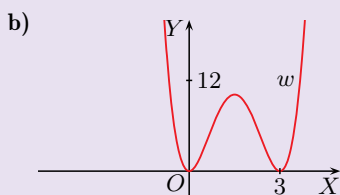
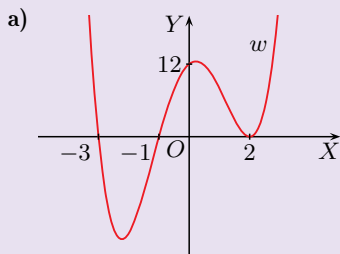
b) $w(x) = -(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

c) $w(x) = -(x+2)^2(x-1)^2$

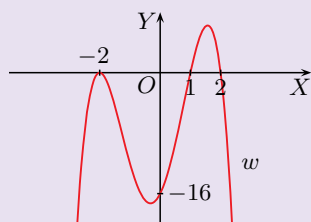
Ćwiczenie 2

A – w, B – u, C – v

Ćwiczenie 4



d) $w(x) = -2(x+2)^2(x-1) \cdot (x-2)$



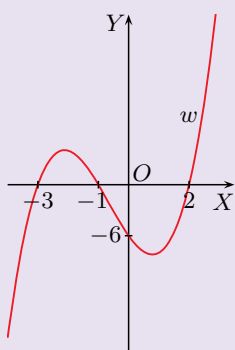
Ćwiczenie 5

- a) $w(x) = 4(x-3)(x+\frac{1}{2})^2(x+1)^3$
 b) $w(x) = \frac{1}{4}(x+3)(x+4)^2(x-3)^2$
 d) $w(x) = 5(x-1)^3(x+3)^2(x+1)$

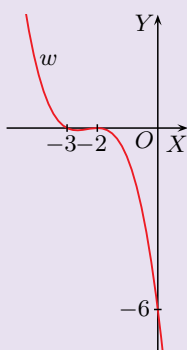
Odpowiedzi do zadań

2. a) $w(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$
 b) $w(x) = x(x+1)(x-2)^2$
 c) $w(x) = (x+2)^2(x-2)^2$

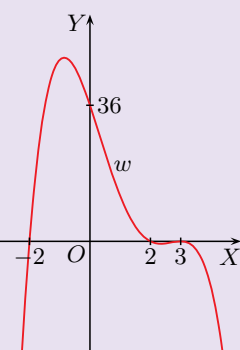
1. b)



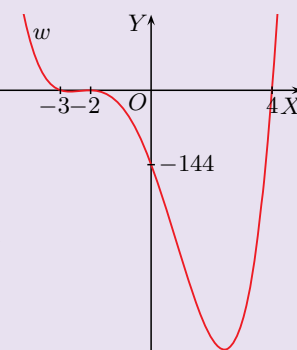
c)



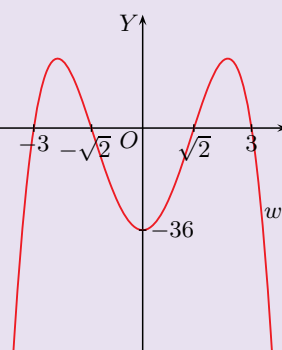
d)



e)



f)



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres wielomianu w .

- a) $w(x) = (x+3)(x+1)(x-2)^2$ c) $w(x) = -3x^2(x+4)(x-1)$
 b) $w(x) = 2x^2(x-3)^2$ d) $w(x) = -(x+2)(x-1)(2x^2-8)$

Przykład 2

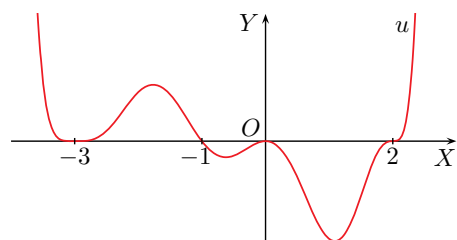
Naszkicuj wykres wielomianu $u(x) = 4x^2(x+3)^2(x+1)(x-2)^3$.

Stopień wielomianu: 8, jego pierwiastki: 0, -3, -1, 2.

Krotność pierwiastków wielomianu: -3, -1, 0, 2.
 dwukrotny, jednokrotny, dwukrotny, trzykrotny

Współczynnik przy najwyższej potęgę jest dodatni, więc wielomian u w przedziale $(2; \infty)$ przyjmuje wartości dodatnie.

W pierwiastkach o parzystej krotności (czyli w -3 i 0) wielomian nie zmienia znaku.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres wielomianu w .

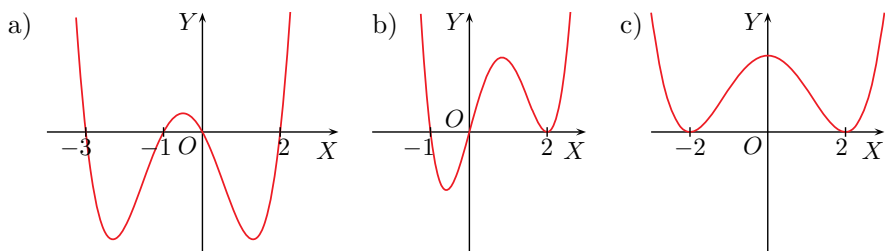
- a) $w(x) = (x-3)(2x+1)^2(x+1)^3$ c) $w(x) = -3(x-5)(x+1)^2(x-2)^2$
 b) $w(x) = \frac{1}{4}(x-3)(x+4)^2(x^2-9)$ d) $w(x) = -5(x-1)^2(x+3)^2(1-x^2)$

Zadania

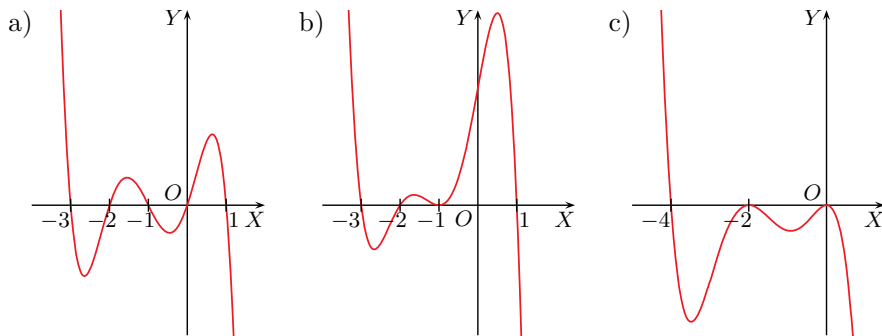
1. Naszkicuj wykres wielomianu w .

- a) $w(x) = (x-1)(x+2)(x+4)$ d) $w(x) = (3-x)^2(4-x^2)$
 b) $w(x) = -(x+3)(1+x)(2-x)$ e) $w(x) = 3(x-4)(x+2)^2(x+3)$
 c) $w(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(-x-2)^2$ f) $w(x) = -2(x^2-2)(x^2-9)$

2. Na rysunku poniżej przedstawiono szkic wykresu wielomianu czwartego stopnia o współczynniku $a_4 = 1$. Podaj wzór tego wielomianu.



3. Na rysunku poniżej przedstawiono szkic wykresu wielomianu piątego stopnia o współczynniku $a_5 = -1$. Podaj wzór tego wielomianu.



4. Naszkicuj wykres wielomianu w . Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości ujemne?

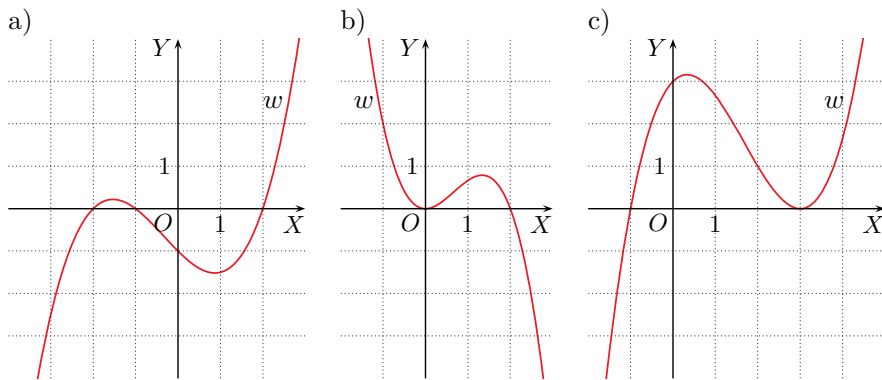
- a) $w(x) = (x-4)^2(x+3)$ d) $w(x) = 4x^2(x+1)(x-6)$
b) $w(x) = (x^2-5)(x+2)$ e) $w(x) = -3(x^2-4)(x-2)^2$
c) $w(x) = (1-x^2)(x-3)$ f) $w(x) = (x^2+6x+9)^2$

5. Naszkicuj wykres wielomianu w . Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości nieujemne?

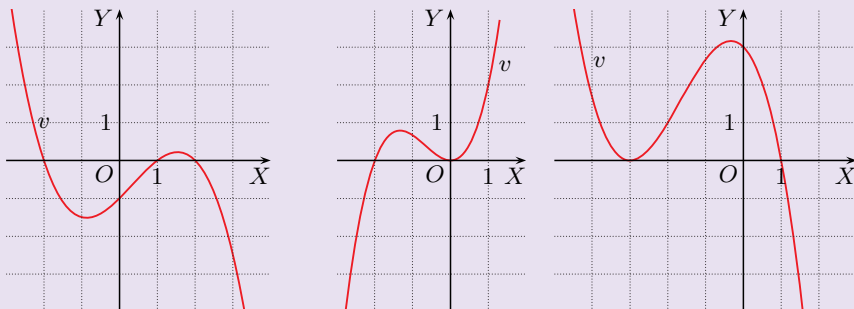
- a) $w(x) = (x-2)(x-3)^3(x-4)^4$ d) $w(x) = 2x(x+2)(x^2-4)(3-x)^3$
b) $w(x) = -x^2(x+1)^2(x+2)^2$ e) $w(x) = -7(x^2+3)(3-x^2)(3-x)^2$
c) $w(x) = 6x(x^2-6x)(x^2-x)$ f) $w(x) = (9x^2-1)(3x-1)^2(x-3)$

6. Dany jest wykres wielomianu w trzeciego stopnia. Naszkicuj wykres wielomianu $v(x) = w(-x)$ i zapisz jego wzór w postaci:

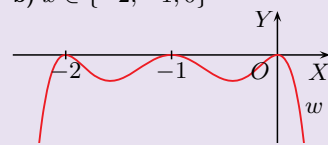
$$v(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$



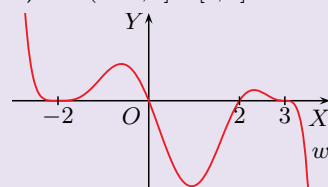
6. a) $v(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - 1$ b) $v(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2$ c) $v(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - x + 3$



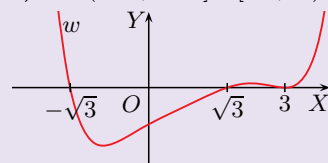
3. a) $w(x) = -x(x+3) \cdot (x+2)(x+1)(x-1)$
b) $w(x) = -(x+3)(x+2) \cdot (x+1)^2(x-1)$
c) $w(x) = -x^2(x+4)(x+2)^2$
4. a) $x \in (-\infty; -3)$
b) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-2; \sqrt{5})$
c) $x \in (-1; 1) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 6)$
e) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
f) Wielomian w nie przyjmuje wartości ujemnych.
5. a) $x \in (-\infty; 2] \cup [3; \infty)$
b) $x \in \{-2, -1, 0\}$



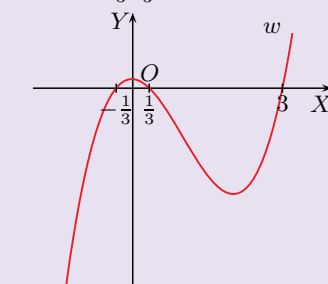
- c) $x \in [0; 1] \cup [6; \infty)$
d) $x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$



- e) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}; \infty)$



- f) $x \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}] \cup [3; \infty)$



Uczeń:

- rozwiązuje nierówności wielomianowe, korzystając ze szkicu wykresu lub postaci iloczynowej wielomianu,
- rozwiązuje nierówność wielomianową, gdy dany jest wzór ogólny wielomianu,
- stosuje nierówności wielomianowe do wyznaczenia dziedziny funkcji zapisanej za pomocą pierwiastków,
- wykonuje działania na zbiorach określonych nierównościami wielomianowymi,
- stosuje nierówności wielomianowe w zadaniach z parametrem.

Ćwiczenie 1

- a) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$
 b) $x \in [-2; 1] \cup [3; \infty)$

Ćwiczenie 2

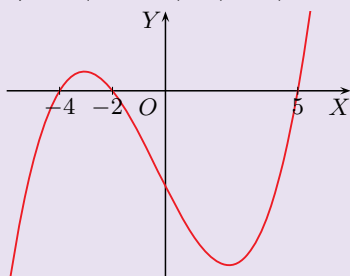
- a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$
 b) $x \in (1; 4)$
 c) $x \in (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$
 d) $x \in \{-1\} \cup [1; 4]$

Ćwiczenie 3

- a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1)$
 b) $x \in (-\infty; -1] \cup \{2\}$
 c) $x \in (-1; 2) \cup (2; \infty)$
 d) $x \in \{-3\} \cup [-1; \infty)$

Ćwiczenie 4

- a) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 5)$

**R 2.14. Nierówności wielomianowe****Przykład 1**

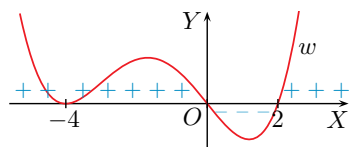
Na rysunku obok przedstawiono szkic wykresu wielomianu:

$$w(x) = x(x+4)^2(x-2)$$

Rozwiąż nierówność $x(x+4)^2(x-2) > 0$.

Z rysunku odczytujemy, że wielomian w przyjmuje wartości dodatnie dla:

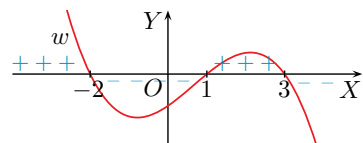
$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (2; \infty)$$

**Ćwiczenie 1**

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3)$$

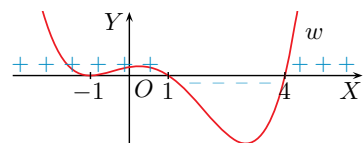
- a) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3) > 0$ b) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3) \leq 0$

**Ćwiczenie 2**

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = (x+1)^2(x-1)(x-4)$$

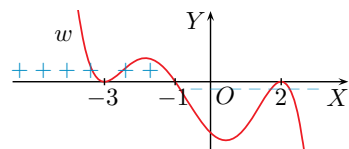
- a) $(x+1)^2(x-1)(x-4) > 0$ c) $(x+1)^2(x-1)(x-4) \geq 0$
 b) $(x+1)^2(x-1)(x-4) < 0$ d) $(x+1)^2(x-1)(x-4) \leq 0$

**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = -(x+3)^2(x+1)(x-2)^2$$

- a) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 > 0$ c) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 < 0$
 b) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 \geq 0$ d) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 \leq 0$

**Ćwiczenie 4**

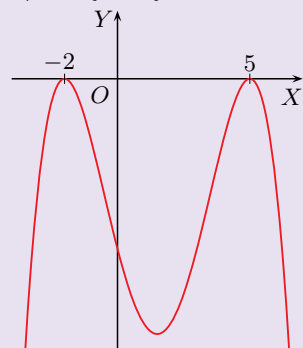
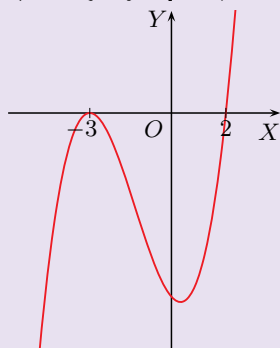
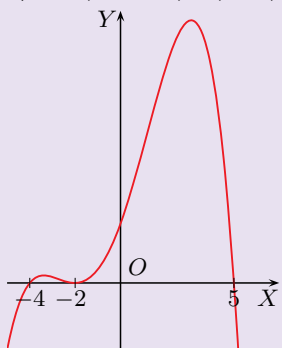
Naszkiecuj wykres odpowiedniego wielomianu i rozwiąż nierówność.

- a) $3(x-5)(x+2)(x+4) < 0$ c) $\frac{4}{5}(x+3)^2(x-2) \geq 0$
 b) $-2(x-5)(x+2)^2(x+4) < 0$ d) $-\frac{1}{2}(x-5)^2(x+2)^2 \geq 0$

- b) $x \in (-\infty; -4) \cup (5; \infty)$

- c) $x \in \{-3\} \cup [2; \infty)$

- d) $x \in \{-2, 5\}$

**Multibook**

- Wykres wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.14

Generator
testów i sprawdzianów

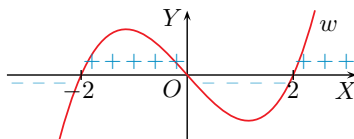
Przykład 2

Rozwiąż nierówność $x^3 - 4x > 0$.

Rozkładamy wielomian $w(x) = x^3 - 4x$ na czynniki:

$$w(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby: 0, 2 oraz -2. Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) > 0$: $x \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$.



Przykład 3

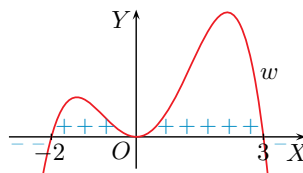
Rozwiąż nierówność $-x^4 + x^3 + 6x^2 \leq 0$.

Rozkładamy wielomian $w(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2$ na czynniki:

$$\begin{aligned} w(x) &= -x^4 + x^3 + 6x^2 = \\ &= -x^2(x^2 - x - 6) = \text{Pierwiastkami trójkianu } x^2 - x - 6 \text{ są liczby } -2 \text{ i } 3. \\ &= -x^2(x + 2)(x - 3) \end{aligned}$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby: 0 (pierwiastek dwukrotny), -2, 3. Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \leq 0$:

$$x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [3; \infty)$$



Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

- a) $-x^3 + 2x^2 - x < 0$ c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$ e) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 > 0$
b) $-x^3 + x^2 + 6x \geq 0$ d) $-x^4 + 10x^3 + 11x^2 > 0$ f) $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \leq 0$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $x(x + 2)(x^2 + x + 3) < 0$.

Trójkian $x^2 + x + 3$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Zatem możemy obie strony nierówności podzielić przez ten trójkian. Otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$x(x + 2) < 0$$

której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2; 0)$ – jest to zbiór rozwiązań wyjściowej nierówności.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x - 4) > 0$ b) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \leq 0$

Ćwiczenie 6

- a) $x^2 + 3x + 4 > 0$, zatem $(x + 4)(x - 1) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty)$
b) $(x^2 + 1)(x - 3) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; 3]$

Ćwiczenie 5

- a) $-x(x - 1)^2 < 0$
dla $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
b) $-x(x + 2)(x - 3) \geq 0$
dla $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 3]$
c) $(x + 1)(x - 1)^2 \leq 0$
dla $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$
d) $-x^2(x + 1)(x - 11) > 0$
dla $x \in (-1; 0) \cup (0; 11)$
e) $(x + 2)(x - 2)(2x + 1) > 0$
dla $x \in (-2; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
f) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \cdot (3x - 2) \leq 0$
dla $x \in (\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{2}{3}; \sqrt{2}]$

Ćwiczenie 7

- a) $w(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1; -1 + \sqrt{2}]$
b) $w(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -4] \cup [-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}]$
c) $w(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; 3]$
d) $w(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\frac{2}{3}; 0) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$
b) $x \in [-\frac{3}{4}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0] \cup \{2\}$
d) $x \in (0; 2)$
e) $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$
f) $x \in (0; \frac{1}{8})$
g) $x \in (-3; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
h) $x \in [1 - \sqrt{5}; 0] \cup [1 + \sqrt{5}; \infty)$
i) $x \in (-\infty; -\frac{5+\sqrt{33}}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{-5+\sqrt{33}}{2}; \infty)$
2. a) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [-1; 1]$
b) $x \in (-3; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\frac{3}{2}; \sqrt{5}]$
d) $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (-\frac{1}{3}; 2\sqrt{3})$
e) $x \in (-1; 5)$
f) $x \in (-\infty; -2] \cup [\sqrt[3]{6}; \infty)$
g) $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
h) $x \in [-\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt{2}; \infty)$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $x^3 - 6x^2 + 8x - 3 \leq 0$.

Szukamy pierwiastków całkowitych wielomianu:

$$w(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 3$$

wśród dzielników jego wyrazu wolnego, czyli wśród liczb: 1, -1, 3, -3.

$w(1) = 0$, więc 1 jest pierwiastkiem wielomianu w . Wykonujemy dzielenie:

$$(x^3 - 6x^2 + 8x - 3) : (x - 1) = x^2 - 5x + 3$$

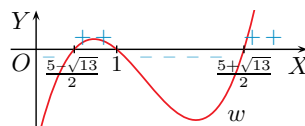
Obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 3$:

$$\Delta = 25 - 12 = 13, \quad x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy

zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \leq 0$:

$$x \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[1; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right]$$



Ćwiczenie 7

Wyznacz pierwiastki wielomianu w , a następnie rozwiąż nierówność $w(x) \leq 0$.

- a) $w(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
b) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 4$ d) $w(x) = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $9x^3 - 4x > 0$ d) $x^4 < 8x$ g) $2x^3 + 5x^2 - 3x > 0$
b) $4x^3 + 3x^2 \geq 0$ e) $x^4 \leq 8x^2$ h) $-x^3 + 2x^2 + 4x \leq 0$
c) $x^3 + 4x \leq 4x^2$ f) $x^3 > 8x^4$ i) $x^4 + 5x^3 - 2x^2 \geq 0$

2. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^3 + \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} \leq 0$ e) $x^4 - 5x^3 + x - 5 < 0$
b) $4x^3 + 12x^2 - x - 3 > 0$ f) $x^4 + 2x^3 - 6x - 12 \geq 0$
c) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 \leq 0$ g) $6x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 > 0$
d) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 6x - 2 < 0$ h) $\sqrt{3}x^5 - \sqrt{6}x^4 - \sqrt{6}x^3 + 2\sqrt{3}x^2 \geq 0$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^4 - x^3 - 2x - 4 \leq 0$ e) $(x^2 + 2x + 1)(3x^2 - x - 1) < 0$
b) $x^3 + 6x^2 + 6x > -5$ f) $(x^2 + x - 2)(2x^2 - 3x + 1) > 0$
c) $-x^3 + 2x^2 + 4x > 3$ g) $3(x^4 - x^2 + 1) < 4 - x^4$
d) $x^3 - 6x^2 + 12x \leq 8$ h) $x^4 - x^2 + 24 \geq 12(x^2 - 1)$

3. a) $x \in [-1; 2]$
b) $x \in (-5; \infty)$
c) $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$
d) $x \in (-\infty; 2]$
e) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$
f) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \infty)$
g) $x \in (-1; 1)$
h) $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; \infty)$

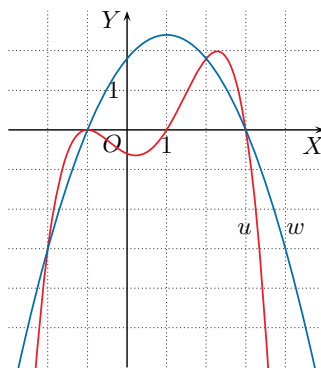
4. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.
- a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - 4x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - x^2 - 9x + 9 \leq 0\}$
 b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^4 - 16x^2 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0\}$
 c) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3x^3 - x^2 - 6x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x - x^2 > 2x^3\}$
5. Wyznacz zbiór tych argumentów x , dla których spełnione są jednocześnie nierówności $f(x) > g(x)$ i $g(x) \geq h(x)$.
- a) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = 4x^3 + 8x^2$, $h(x) = 4x^2 - x$
 b) $f(x) = x^4 + x^3$, $g(x) = 3x - x^2$, $h(x) = x^3 + 2x^2 - 9$
 c) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 3x^3 - 3x + 1$
6. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.
- a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$
7. Dla jakiej wartości parametru m liczba a jest miejscem zerowym funkcji f ? Rozwiąż nierówność $f(x) \geq 0$ dla wyznaczonej wartości m .
- a) $f(x) = x^3 - x^2 + mx + 4$, $a = 1$
 b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 4$, $a = -2$
 c) $f(x) = (2 - 3m)x^3 - 2x^2 + x - 2$, $a = -1$
 d) $f(x) = x^3 + (m^2 - 4)x^2 - 7x - 6$, $a = 3$

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2} + \sqrt{25 - x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 - 16x}$
 b) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^3 - 4x}} - \sqrt{x^2 - 9}$ e) $f(x) = \sqrt{x^3 - 7x^2 + 12x} + \frac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}$
 c) $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$ f) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{9x^4 - 12x^2 + 4}} - \frac{2x^3 - 4x}{\sqrt{-4x^4 + 17x^2 - 4}}$

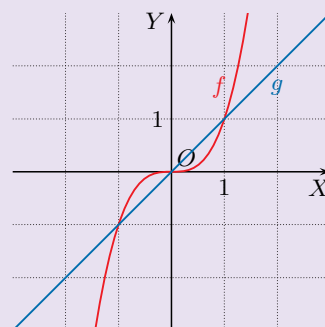
9. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu u czwartego stopnia oraz wykres trójmianu kwadratowego w . Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $u(x) \cdot w(x) > 0$
 b) $u(x) \cdot w(x) \leq 0$
 c) $u(x) - w(x) < 0$

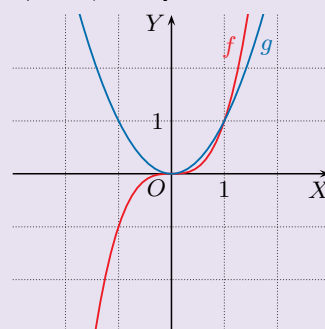


7. a) $m = -4$, $x \in [-2; 1] \cup [2; \infty)$
 b) $m = 0$, $x \in \{-2\} \cup [1; \infty)$
 c) $m = \frac{7}{3}$, $x \in (-\infty; -1]$
 d) $m = -2$ lub $m = 2$, $x \in [-2; -1] \cup [3; \infty)$
8. a) $D = \{0\} \cup [4; 5]$ b) $D = [3; \infty)$
 c) $D = (-\infty; -2] \cup [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [2; \infty)$
 d) $D = [-1; 0] \cup [4; \infty)$
 e) $D = (2; 3] \cup [4; \infty)$
 f) $D = \left(-2; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{3}; 2\right)$
9. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$
 b) $x \in [-1; 1] \cup \{3\}$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2) \cup (3; \infty)$

4. a) $A = (-2; 0) \cup (2; \infty)$,
 $B = (-\infty; -3] \cup [1; 3]$,
 $A \cap B = (2; 3]$,
 $A \setminus B = (-2; 0) \cup (3; \infty)$
 b) $A = (-4; 0) \cup (0; 4)$,
 $B = (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; \infty)$,
 $A \cap B = (-4; -2] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; 4)$,
 $A \setminus B = (-2; -1) \cup (1; 2)$
 c) $A = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{1}{3}; \sqrt{2}]$,
 $B = (-\infty; -1) \cup (0; \frac{1}{2})$,
 $A \cap B = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$,
 $A \setminus B = [\frac{1}{2}; \sqrt{2}]$
5. a) $\{-\frac{1}{2}\}$
 b) $(-\infty; -3] \cup [-\sqrt{3}; 0) \cup (1; \sqrt{3}]$
 c) $[\frac{1}{3}; 1]$
6. a) $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1]$



b) $x \in (-\infty; 1]$



Czy wiesz, że...

Nierówności wielomianowe można również rozwiązywać, korzystając z tak zwanej **siatki znaków**. Aby ją utworzyć, należy doprowadzić nierówność do postaci, w której po jednej stronie znajdzie się wielomian rozłożony na czynniki, a po drugiej stronie – zero. Na przykład:

$$(x + 4)(x - 1)(x - 3) < 0$$

Następnie należy określić znaki czynników w przedziałach wyznaczonych przez pierwiastki wielomianu.

	$x < -4$	-4	$-4 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x + 4$	–	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+
iloczyn	–	0	+	0	–	0	+

Z ostatniego wiersza tabeli odczytujemy, że nierówność zachodzi dla:

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; 3)$$

10. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$
 b) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{2}{3}; \sqrt{2}]$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$
 d) $x \in \{0\} \cup [1; 4]$
 e) $x \in (1; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; 3]$
 g) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 3)$
 h) $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; 2] \cup [3; \infty)$
11. $[-2; -1] \cup [3; \infty)$

10. Rozwiąż nierówność, korzystając z siatki znaków.

- a) $x(2x + 1)(x + 6) < 0$ e) $x^3 + 3x^2 - 4 > 0$
 b) $(2 - 3x)(x^2 - 2) \geq 0$ f) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \leq 0$
 c) $(x^2 - 4)(x - 3)^2 > 0$ g) $x^3 - 7x - 6 < 0$
 d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 \leq 0$ h) $(x^2 - 4)(x^2 + x - 12) \geq 0$

11. Aby rozwiązać nierówność:

$$(x + 2)(x + 1)(x - 3) \geq 0$$

uczeń sporządził siatkę znaków. Trzy znaki w tabeli są wpisane błędnie. Wskaż błędy i podaj poprawny zbiór rozwiązań nierówności.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x + 2$	–	0	+	+	× +	+	+
$x + 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+
iloczyn	* –	0	+	0	* –	0	+

R 2.15. Wielomiany – zastosowania

Ćwiczenie 1

Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 5 cm, 6 cm i 8 cm. Każdą jego krawędź zwiększono o x cm, w wyniku czego objętość prostopadłościanu wzrosła o 320 cm^3 . Oblicz x .

Ćwiczenie 2

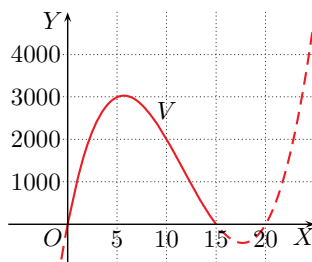
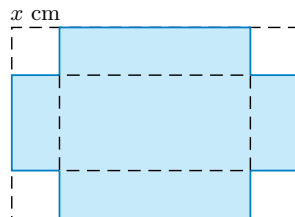
Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości x cm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek obok).

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V . Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.

c) Czy zachodzi nierówność $V(10) > V(2,5)$?

d) Dla jakich wartości x objętość pudełka jest równa 2000 cm^3 ?



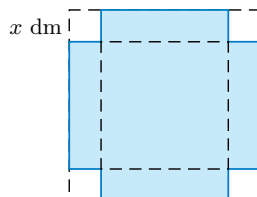
Ćwiczenie 3

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek poniżej).

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

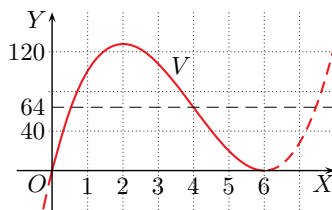
b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	128	108	64	20



c) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V . Odczytaj z wykresu przybliżone rozwiązanie nierówności $V(x) \leq 64$ dla $x \in (0; 6)$.

d) Rozwiąż algebraicznie nierówność $V(x) \leq 64$ dla $x \in (0; 6)$.



Ćwiczenie 3

a) $V(x) = (12 - 2x)^2 x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, $D = (0; 6)$

c) $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup [4; 6)$

d) $4x^3 - 48x^2 + 144x - 64 \leq 0$ i $x \in (0; 6)$

$$x^3 - 12x^2 + 36x - 16 \leq 0$$

Wykazujemy, że 4 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 16$.

Wielomian rozkładamy na czynniki liniowe: $w(x) = (x - 4)(x - 4 + 2\sqrt{3})(x - 4 - 2\sqrt{3})$.

Zatem $w(x) \leq 0$, gdy $x \in (-\infty; 4 - 2\sqrt{3}] \cup [4; 4 + 2\sqrt{3}]$.

Po uwzględnieniu założenia $x \in (0; 6)$ otrzymujemy $x \in (0; 4 - 2\sqrt{3}] \cup [4; 6)$.

Uczeń:

- opisuje wielomianem zależności dane w zadaniu i wyznacza dziedzinę tego wielomianu,
- rozwiązuje zadania tekstowe, wykorzystując działania na wielomianach i równania wielomianowe.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned} (5+x)(6+x)(8+x) &= \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 8 + 320 \\ x^3 + 19x^2 + 118x - 320 &= 0 \\ (x-2)(x^2 + 21x + 160) &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} \text{a) } V(x) &= (40-2x)(30-2x)x = \\ &= 4x^3 - 140x^2 + 1200x, \\ D &= (0; 15) \end{aligned}$$

$$\text{b) } x \approx 6 \text{ cm}, V(6) \approx 3024 \text{ cm}^3$$

Przybliżone wymiary:

$$28 \text{ cm} \times 18 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$$

$$\text{c) } V(10) = 2000,$$

$$V(2,5) = 2187,5$$

czyli $V(10) < V(2,5)$; nie jest

$$\begin{aligned} \text{d) } 4x^3 - 140x^2 + 1200x - 2000 &= 0 \\ x^3 - 35x^2 + 300x - 500 &= 0 \end{aligned}$$

Jednym z rozwiązań równania jest $x = 10$.

Zapisujemy równanie w postaci:

$$\begin{aligned} x^2(x-10) - 25x(x-10) + \\ + 50(x-10) &= 0 \end{aligned}$$

Zakładamy dalej, że $x \neq 10$.

$$x^2 - 25x + 50 = 0$$

$$\Delta = 625 - 200 = 425$$

$$\sqrt{\Delta} = 5\sqrt{17}$$

$$x_1 = \frac{25 - 5\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{25 + 5\sqrt{17}}{2} > \frac{45}{2} \notin (0, 15)$$

$$\text{Zatem } x = \frac{25 - 5\sqrt{17}}{2} \text{ lub } x = 10.$$

Multibook

- Wykres wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.15



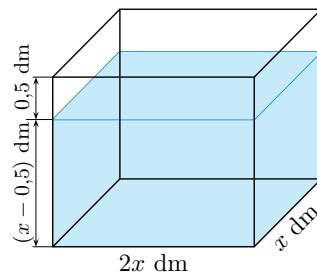
Odpowiedzi do zadań

- $V(x) = -2x^3 + 10x^2$,
 $D = (0; 5)$
 - $x = 3$, $x = 1 + \sqrt{7}$
- $2x^2(x - 0,5) = 112$ dla $x = 4$
Wymiary akwariów:
 $4 \text{ dm} \times 8 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$
- $V(x) = 4x^2(7 - x) = -4x^3 + 28x^2$,
 $D = (0; 7)$
 - $0,2 \text{ dm}^2 = 200 \text{ cm}^2$
 $4x^2(7 - x) = 200$ dla $x = 5$
lub $x = 1 + \sqrt{11}$
 $P_c(x) = 2 \cdot 2x \cdot 2x + 4 \cdot 2x \cdot (7 - x) = 56x$
 $P_c(5) = 280 \text{ cm}^2$
 $P_c(1 + \sqrt{11}) = 56(1 + \sqrt{11}) \text{ cm}^2$
- Oznaczmy bok domku przez H , a wysokość dachu przez h . Wówczas:
 $H = 16 - 2x$, $h = 5 - x$
Pole podstawy graniastoslupa:
 $P_p = 2x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (5 - x) = x(x + 5)$
 $V(x) = 2x(8 - x)(x + 5)$,
 $D = (0; 5)$
 - $2x(8 - x)(x + 5) < 240$
 $-2x^3 + 6x^2 + 80x - 240 < 0$
 $(x - 3)(x^2 - 40) > 0$
 $x \in (-2\sqrt{10}; 3) \cup (2\sqrt{10}; \infty)$
Uzeględniamy założenie
 $x \in (0; 5)$ i otrzymujemy
 $x \in (0; 3)$.

Zadania

- W prostopadłościanie, którego podstawą jest kwadrat o boku $x \text{ dm}$, suma długości wszystkich krawędzi jest równa 40 dm .
 - Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego prostopadłościanu. Określ dziedzinę tej funkcji.
 - Dla jakich wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 36 dm^3 ?

- Do akwariów (rysunek obok) wlewo 112 l wody, która sięgnęła do wysokości $(x - 0,5) \text{ dm}$. Podaj wymiary tego akwariów (pomiń grubość szkła).

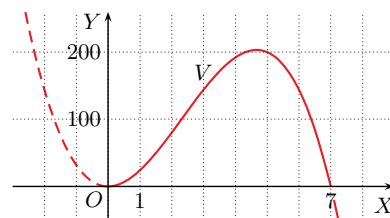


- Wyznacz wielomian V zmiennej x wyrażający objętość prostopadłościennego klocka o wymiarach $2x \text{ cm} \times 2x \text{ cm} \times (7 - x) \text{ cm}$. Określ dziedzinę tej funkcji.

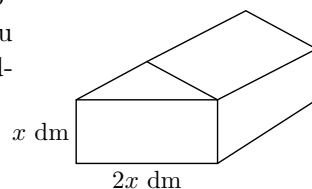
a) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$V(x)$	$6\frac{1}{2}$	24	$49\frac{1}{2}$	80	$112\frac{1}{2}$

- b) Ile jest równe pole powierzchni całkowitej tego klocka, jeśli wiadomo, że jego objętość jest równa $0,2 \text{ dm}^3$?



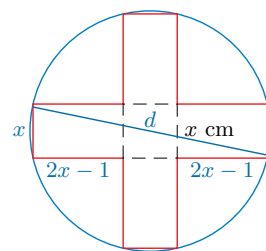
- Domek dla lalek ma kształt graniastoslupa prostego (rysunek obok). Wysokość tego domku w najwyższym punkcie wynosi 5 dm . Jego podłoga ma kształt prostokąta o obwodzie 32 dm .



- a) Wyraż objętość domku V jako funkcję zmiennej x . Określ dziedzinę tej funkcji.

- b) Dla jakich wartości x objętość domku jest mniejsza od 240 dm^3 ?

- Z tekturowego koła wycięto figurę w kształcie takim, jak pokazano na rysunku obok, i sklejono z niej otwarte prostopadłościenną pudełko. Podstawa pudełka jest kwadratem o boku $x \text{ cm}$, a wysokość pudełka jest równa $(2x - 1) \text{ cm}$. Jakie wartości może przyjmować pole koła, jeśli objętość pudełka jest większa od 112 cm^3 ?



- $x^2(2x - 1) > 112$ dla $x > 4 \text{ cm}$

Średnica koła d jest równa przekątnej prostokąta o bokach: x i $5x - 2$.

$$d = \sqrt{x^2 + (5x - 2)^2} > \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{340}$$

$$\text{Zatem pole koła } P = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 > 85\pi \text{ cm}^2.$$

Powtórzenie

Zestaw I

- Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ oraz $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.
 - $u(x) = 2w(x) + (1-x)p(x)$
 - $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$
- Dany jest wielomian w , dla którego $w(-1) = 4$ i $w(0) = 3$. Oblicz a i b .
 - $w(x) = x^3 + (a-b)x^2 - 4x + \frac{b}{2}$
 - $w(x) = -ax^3 + 3x^2 + a - 6b$
- Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = 3x^4 - 3x^2$
 - $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$
 - $w(x) = x^6 + 7x^5 + 6x^4$
 - $w(x) = 5x^5 - 10x^3 + 5x$
 - $w(x) = -3x^5 + 30x^3 - 75x$
 - $w(x) = 32x^6 - 16x^4 + 2x^2$
- Rozwiąż równanie.
 - $5x^2 + 2x^4 + x^3 = 0$
 - $-2x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
 - $x^5 - 7x^4 + 12x^3 = 0$
 - $20x^6 + x^5 = x^4$
 - $4x^5 + x^3 = 4x^4$
 - $x^4 = 2x^6 + x^5$
- Rozłóż wielomian w na czynniki i podaj jego pierwiastki.
 - $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
 - $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$
 - $w(x) = 5x^3 + x^2 - 15x - 3$
 - $w(x) = 125x^3 - 27$
 - $w(x) = 27x^4 + \frac{1}{8}x$
 - $w(x) = -14x^3 + 7x$
- Rozwiąż równanie. Ile pierwiastków tego równania należy do przedziału $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$?
 - $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
 - $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$
 - $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$
 - $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$
 - $81x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$
 - $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$
 - $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$
 - $4x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 = 0$
- Dla jakich wartości parametru m liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w ?
 - $w(x) = x^3 + (2m-1)x^2 - 3x + 7$, $a = 2$
 - $w(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 5$, $a = 3$
 - $w(x) = x^3 + 3x^2 + (m^2 - 2m)x + 2$, $a = -2$

- $w(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2)$,
pierwiastki: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$
 - $w(x) = x(x+2)(x+1)(x-2)$,
pierwiastki: $-2, -1, 0, 2$
 - $w(x) = 5(x + \sqrt{3})(x + \frac{1}{5})(x - \sqrt{3})$,
pierwiastki: $-\sqrt{3}, -\frac{1}{5}, \sqrt{3}$
 - $w(x) = 5(x - \frac{3}{5})(25x^2 + 15x + 9)$,
pierwiastek: $\frac{3}{5}$
 - $w(x) = 27x(x + \frac{1}{6})(x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{36})$,
pierwiastki: $-\frac{1}{6}, 0$
 - $w(x) = -14x(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$,
pierwiastki: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $w(2) = 8 + 4(2m-1) - 6 + 7 = 8m + 5 = 0$ dla $m = -\frac{5}{8}$
 - $w(3) = -27 + 9m - 3m + 5 = 6m - 22 = 0$ dla $m = \frac{11}{3}$
 - $w(-2) = -8 + 12 - 2(m^2 - 2m) + 2 = -2m^2 + 4m + 6 = -2(m^2 - 2m - 3) = -2(m+1)(m-3) = 0$
Zatem $m = -1$ lub $m = 3$.

Odpowiedzi do zadań

- $u(x) = -2x^2 + 3x - 1$,
 $\text{st}(u) = 2$
 - $u(x) = -2x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 1$, $\text{st}(u) = 5$
- $w(-1) = a - \frac{b}{2} + 3 = 4$,
 $w(0) = \frac{b}{2} = 3$, więc
 $a = 4, b = 6$
 - $w(-1) = 2a - 6b + 3 = 4$,
 $w(0) = a - 6b = 3$, więc
 $a = -2, b = -\frac{5}{6}$
- $w(x) = 3x^2(x-1)(x+1)$
 - $w(x) = 2x(x+1)^2$
 - $w(x) = x^4(x+1)(x+6)$
 - $w(x) = 5x(x-1)^2(x+1)^2$
 - $w(x) = -3x(x - \sqrt{5})^2 \cdot (x + \sqrt{5})^2$
 - $w(x) = 32x^2(x - \frac{1}{2})^2 \cdot (x + \frac{1}{2})^2$
- $x = 0$
 - $x = -4$ lub $x = 0$ lub $x = 1$
 - $x = 0$ lub $x = 3$ lub $x = 4$
 - $x = -\frac{1}{4}$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{1}{5}$
 - $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$
 - $x = -1$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{1}{2}$
- $x = 2; 0$
 - $x = -5$ lub $x = -1$ lub $x = 1; 1$
 - $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2; 0$
 - $x = -3$ lub $x = 1$ lub $x = 3; 1$
 - $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{9}$ lub $x = \frac{1}{3}; 3$
 - $x = -1$ lub $x = 2; 0$
 - $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{8}; 1$
 - $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1; 2$

8. a) $x^2 + 3x + 10$, reszta 31

b) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{8}$,
reszta $\frac{21}{16}$

c) $2x^3 + x^2 - 1$, reszta 5

9. a) $w(x) = (x+2) \cdot (x^2 - 2x + 6) - 7$

b) $w(x) = (x+2)(x^2 + 1) - 1$

c) $w(x) = (x+2)(4x^3 - x)$

d) $w(x) = (x+2) \cdot (x^2 + x - 11) + 20$

10. a) 7 b) 0 c) 0

8. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian p .

a) $w(x) = x^3 + x + 1$, $p(x) = x - 3$

b) $w(x) = x^4 + x^2 + 1$, $p(x) = x + \frac{1}{2}$

c) $w(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 6$, $p(x) = x - 1$

9. Dany jest wielomian w . Przedstaw go w postaci $w(x) = (x+2)p(x) + r$.

a) $w(x) = x^3 + 2x + 5$

c) $w(x) = 4x^4 + 8x^3 - x^2 - 2x$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

10. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .

a) $w(x) = 7x^4 - x^3 + 1$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$, $q(x) = x + 2$

c) $w(x) = -x^5 + 3x^2 + 10x$, $q(x) = x - 2$

■ Zestaw II

1. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, $a = -2$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 4$, $a = 4$

c) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $a = \frac{1}{2}$

d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$, $a = 1$

e) $w(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$, $a = 2$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 - 5x - 14 = 0$

f) $15x^3 + 8x^2 - 9x - 2 = 0$

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 = 0$

g) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$

h) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0$

3. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

a) $w(x) = (a+1)x^3 - x + a^3$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = x^3 - 6x - 3a$, $q(x) = x - a$

4. Wyznacz wartość parametru a , dla której reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + ax - 3$ przez dwumian:

a) $x - 1$ jest równa 4,

b) $x + 2$ jest równa 5.

Zestaw II

1. a) $x = 3$, $x = 4$,

$w(x) = (x+2)(x-3)(x-4)$

b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$,

$w(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x-4)$

c) nie ma więcej pierwiastków,

$w(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + x + 1)$

d) $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$,

$w(x) = (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})(x-1)$

e) $x = -3$, $w(x) = (x+3)(x-2)^2$

2. a) $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

b) $x = 7$

c) $x = -3$

d) $x = 3$

e) $x = 5$

f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{2}{3}$

g) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = 1$
lub $x = \sqrt{2}$

h) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -1$ lub $x = 2$
lub $x = \sqrt{5}$

4. a) $a = 6$

b) $a = -8$

5. Dla jakiej wartości parametru a wielomiany u i w są równe?

- a) $u(x) = (ax - 1)(ax + 2)$, $w(x) = 9x^2 - 3x - 2$
 b) $u(x) = (x^2 - a)(ax + 1)$, $w(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$
 c) $u(x) = -x^3 + (a^3 + a)x + 1$, $w(x) = ax^3 - 2x + a^2$

6. Rozwiąż nierówność.

- a) $(x + 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$ d) $(x - 3)^2(x^2 - 6x + 8) \geq 0$
 b) $(x^2 - 1)^3(x^2 - 2x + 1) \leq 0$ e) $(x^2 - 1)(7 - x)(1 - x) \leq 0$
 c) $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$ f) $(6 - x)^2(x - 3)(x + 5) \leq 0$

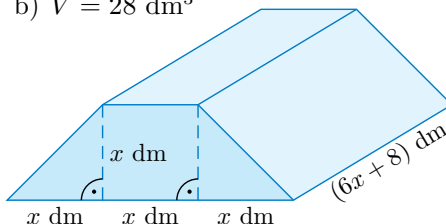
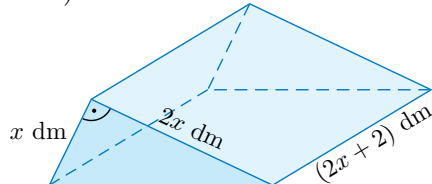
7. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^3 + x^2 - 20x > 0$ e) $x^3 + 4x^2 + x + 4 > 0$
 b) $x^3 - 3x^2 + 2x < 0$ f) $-x^3 + 3x^2 + 2x - 6 \leq 0$
 c) $-x^4 + 6x^3 - 9x^2 \leq 0$ g) $x^5 - x^3 - x^2 + 1 \geq 0$
 d) $3x^4 + x^3 + x^2 < 0$ h) $-x^5 + 3x^3 - 8x^2 + 24 < 0$

8. Drewniany klocek ma kształt graniastoslupa (rysunek poniżej), którego objętość jest równa V . Oblicz długość najdłuższej krawędzi tego klocka.

a) $V = 24 \text{ dm}^3$

b) $V = 28 \text{ dm}^3$



9. Krawędź podstawy graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $(2x - 3) \text{ dm}$, a jego wysokość jest równa $(x - \frac{1}{2}) \text{ dm}$. Objętość tego graniastoslupa jest równa $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^3$. Oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

D10. Niech $w(x) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $w(n)$ jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych.

D11. Wykaż, że jeśli wielomian trzeciego stopnia $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

to zachodzą związki:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

Są to wzory Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia.

10. Korzystamy z wzoru skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} w(x) &= (x^2 + 3x + 1 + 1)(x^2 + 3x + 1 - 1) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x) = \\ &= (x + 1)(x + 2)x(x + 3) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $w(n) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych.

11. $w(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$

$$\begin{aligned} &= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3 \\ w(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } \begin{cases} -a(x_1 + x_2 + x_3) = b \\ a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c \\ -ax_1x_2x_3 = d \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

5. a) $a = -3$

b) $a = 2$

c) $a = -1$

6. a) $x \in (-1; 2) \cup (3; \infty)$

b) $x \in [-1; 1]$

c) $x \in \{-1\} \cup [2; 5]$

d) $x \in (-\infty; 2] \cup \{3\} \cup [4; \infty)$

e) $x \in [-1; 7]$

f) $x \in [-5; 3] \cup \{6\}$

7. a) $x \in (-5; 0) \cup (4; \infty)$

b) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$

c) $x \in \mathbb{R}$

d) sprzeczna

e) $x \in (-4; \infty)$

f) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [3; \infty)$

g) $x \in [-1; \infty)$

h) $x \in (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

8. a) $V(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2x(2x + 2) = 24$
 $x = 2 \text{ dm}$, czyli najdłuższa krawędź ma długość 6 dm.

b) $V(x) = \frac{(x+3)x}{2} \cdot (6x + 8) = 28$
 $x = 1 \text{ dm}$, czyli najdłuższa krawędź ma długość 14 dm.

9. Zakładamy, że $x > \frac{3}{2}$. Pole podstawy graniastoslupa:

$$P_p(x) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(2x - 3)^2$$

Objętość graniastoslupa:

$$V(x) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(2x - 3)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(2x - 3)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} / : \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$(2x - 3)^2(2x - 1) - 3 = 0$$

$$8x^3 - 28x^2 + 30x - 12 = 0 / : 2$$

$$4x^3 - 14x^2 + 15x - 6 = 0$$

Pierwiastkiem całkowitym równania jest $x = 2$.

Równanie zapisujemy

w postaci:

$$(x - 2)(4x^2 - 6x + 3) = 0$$

Równanie $4x^2 - 6x + 3 = 0$ nie ma pierwiastków, zatem $x = 2$.

Pole podstawy: $P_p = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2$

Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ [dm}^2\text{]}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 2P_p + P_b = 3\sqrt{3} + 9 = 3(\sqrt{3} + 3) \text{ [dm}^2\text{]}$$



1. Objętość pudełka A : 72 cm^3 .
Objętość pudełka B :
 $V(x) = (6-x)(4-x)(3-x)$,
gdzie $x \in (0, 3)$.

Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}(6-x)(4-x)(3-x) &= 30 \\ x^3 - 13x^2 + 54x - 72 &= -30 \\ x^3 - 13x^2 + 54x - 42 &= 0\end{aligned}$$

Pierwiastkiem całkowitym równania jest $x = 1$.

Równanie zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2 - 12x + 42) &= 0 \\ \text{Równanie } x^2 - 12x + 42 = 0 &\text{ nie ma pierwiastków, zatem} \\ x &= 1.\end{aligned}$$

2. Zakładamy, że $x > 5$.

Objętość wody:

$$\begin{aligned}(2x-10) \cdot 4x \cdot 3x &= 54000 \\ 24x^2(x-5) &= 54000 \quad / : 24 \\ x^2(x-5) &= 2250 \\ x^3 - 5x^2 - 2250 &= 0\end{aligned}$$

Pierwiastkiem całkowitym równania jest $x = 15$.

Równanie zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned}(x-15)(x^2 + 10x + 150) &= 0 \\ \text{Równanie } x^2 + 10x + 150 = 0 &\text{ nie ma pierwiastków, zatem} \\ x &= 15.\end{aligned}$$

Wymiary ścian bocznych:

$60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ oraz

$45 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$.

Suma pól powierzchni ścian bocznych:

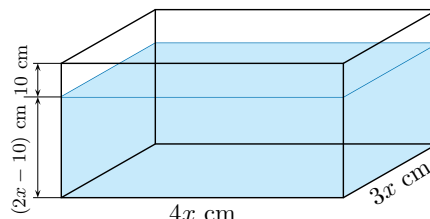
$$2(1800 + 1350) = 6300 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

3. a) $V(x) = x^2(x-2)$,
 $D = (2; \infty)$
b) $x^2(x-2) > 32$
 $x^3 - 2x^2 - 32 > 0$
 $(x-4)(x^2 + 2x^2 - 8) > 0$
 $(x-4)(x+4)(x-2) > 0$
 $x \in (-4; 2) \cup (4; \infty)$ i $x > 4$.
Zatem $x \in (4; \infty)$.

Zadania z kontekstem realistycznym

1. Prostopadłościenne pudełko A ma wymiary $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Prostopadłościenne pudełko B ma każdy wymiar mniejszy o $x \text{ cm}$ i objętość mniejszą o 42 cm^3 niż pudełko A . Oblicz x .

2. Do akwariuz przedstawionego na rysunku obok wiano 54 l wody. Głębokość wody wynosi $(2x - 10) \text{ cm}$. Oblicz sumę pól powierzchni ścianek bocznych tego akwariuz.

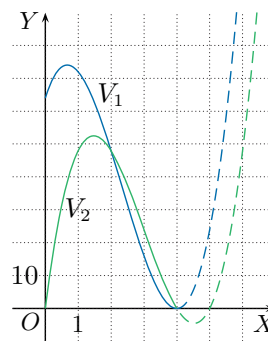
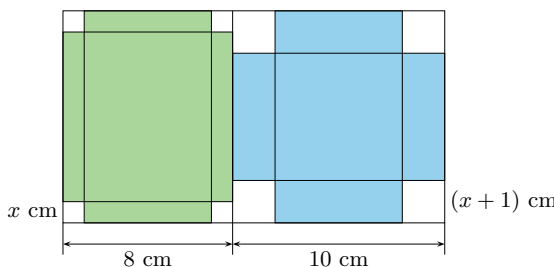


3. Podstawą prostopadłościennego zbiornika jest kwadrat o boku $x \text{ m}$, a krawędź boczna jest o 2 m krótsza od krawędzi podstawy.

- a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego zbiornika. Określ dziedzinę tej funkcji.
b) Dla jakich wartości x objętość tego zbiornika jest większa od 32 m^3 ?

4. Prostokątny arkusz kartonu o wymiarach $18 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ przecięto na dwa arkusze, z których jeden jest kwadratem. Z arkuszy wycięto w narożnikach kwadraty o bokach $(x+1) \text{ cm}$ oraz $x \text{ cm}$ (rysunek po lewej), a następnie pozostałe części sklejono i otrzymano dwa otwarte pudełka: P_1 – pudełko o podstawie kwadratowej oraz P_2 – pudełko o podstawie prostokątnej.

- a) Wyznacz wielomian V_1 zmiennej x opisujący objętość pudełka P_1 oraz wielomian V_2 zmiennej x opisujący objętość pudełka P_2 . Określ dziedziny tych funkcji.
b) Na rysunku po prawej przedstawiono wykresy wielomianów V_1 i V_2 . Odczytaj z nich, dla jakich wartości x pudełko P_1 będzie miało mniejszą objętość niż pudełko P_2 . Sprawdź otrzymaną odpowiedź, rozwiązując nierówność $V_1(x) < V_2(x)$.



4. a) $V_1(x) = 4(4-x)^2(x+1)$, $D_1 = (0; 4)$,
 $V_2(x) = 4x(4-x)(5-x)$, $D_2 = (0; 4)$
b) $4(4-x)^2(x+1) < 4x(4-x)(5-x)$, $x \in (0; 4)$
 $4(4-x) > 0$, więc nierówność jest równoważna nierówności:
 $(4-x)(x+1) < x(5-x) / \cdot (-1)$
 $(x-4)(x+1) > x(x-5)$
 $x^2 - 3x - 4 - x^2 + 5x > 0$
 $2x - 4 > 0$
 $x > 2$ oraz $x \in (0; 4)$
Zatem $x \in (2; 4)$.

**Przykład**

Dla jakich wartości parametrów a i b liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 9$?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Jeśli liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu w , to reszta z dzielenia tego wielomianu przez $x - 3$ jest równa 0.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + ax^2 + bx + 9) : (x - 3) = x^2 + (a + 3)x + 3a + b + 9 \\
 \underline{-x^3 + 3x^2} \\
 (a + 3)x^2 + bx + 9 \\
 \underline{-(a + 3)x^2 + 3(a + 3)x} \\
 (3a + b + 9)x + 9 \\
 \underline{-(3a + b + 9)x + 3(3a + b + 9)} \\
 9a + 3b + 36
 \end{array}$$

Otrzymujemy iloraz $u(x) = x^2 + (a + 3)x + 3a + b + 9$ i resztę $r = 9a + 3b + 36$.

Przekształcamy równanie $9a + 3b + 36 = 0$ i otrzymujemy $b = -3a - 12$.

Zatem iloraz ma postać $u(x) = x^2 + (a + 3)x - 3$.

Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w , więc jest pierwiastkiem wielomianu u :

$$u(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + (a + 3) \cdot 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -5$$

Obliczamy b : $b = -3 \cdot (-5) - 12 = 3$.

Otrzymaliśmy zatem: $a = -5$ i $b = 3$.

II sposób

Liczba 3 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu w , więc istnieją liczby $c, d \in \mathbb{R}$ takie, że zachodzi równość:

$$w(x) = (x - 3)^2(cx + d)$$

Stąd:

$$\begin{aligned}
 x^3 + ax^2 + bx + 9 &= (x^2 - 6x + 9)(cx + d) = \\
 &= cx^3 + (-6c + d)x^2 + (-6d + 9c)x + 9d
 \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki przy x^3 oraz wyrazy wolne i otrzymujemy $c = 1$ i $d = 1$.

Obliczamy a : $a = -6c + d = -6 + 1 = -5$.

Obliczamy b : $b = -6d + 9c = -6 + 9 = 3$.

Odpowiedź: $a = -5$ i $b = 3$

→ Zadanie 3, str. 116



1. $w(\sqrt{2}) = -12 + 2\sqrt{2} + 2a$
 $-w(-\sqrt{2}) = 12 + 2\sqrt{2} - 2a$
 $a = 6$

2. Współczynnik przy najwyższej potędze pierwszego czynnika jest równy -1 , drugiego $\sqrt{2}$, a trzeciego 2 , zatem:
 $-1 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = -2\sqrt{2}$

3. $((4x^2 + 1) + 2x) \cdot$
 $\cdot ((4x^2 + 1) - 2x) =$
 $= (4x^2 + 1)^2 - (2x)^2 =$
 $= 16x^4 + 8x^2 + 1 - 4x^2 =$
 $= 16x^4 + 4x^2 + 1$

5. $V(x) = (x-4)(x+4)(x^2-4) =$
 $= (x^2-16)(x^2-4) =$
 $= x^4 - 20x^2 + 64$

6. Rozwiązania równania:
 $x = -2, x = 0, x = 2\frac{1}{2}$.

7. A. $x(x^2 + 2x - 3) = 0$
B. $(x+1)(x-1)(x+3) = 0$
C. $(x-1)^2(x+3)^2 = 0$
D. $(x+1)(x-1)(x+3)^2 = 0$

W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x - 4$ spełnia warunek $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$.

Wynika stąd, że

- A. $a = 6$ B. $a = 4$ C. $a = 2$ D. $a = -2$

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest wielomian $w(x) = (2-x)(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)^2$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy

- A. $-8\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

Zadanie 3 (0–1)

Wyrażenie $(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$ jest równe

- A. $16x^4 + 4x^3 + 1$ C. $16x^4 + 4x^2 + 1$
B. $16x^4 - 4x^3 + 1$ D. $16x^4 - 4x^2 + 1$

Zadanie 4 (0–1)

Która para punktów należy do wykresu funkcji $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?

- A. $A_1(-1, 4), A_2(1, 6)$ C. $C_1(1, 6), C_2(-2, 2)$
B. $B_1(2, 8), B_2(-2, 6)$ D. $D_1(-2, 6), D_2(2, 10)$

Zadanie 5 (0–1)

Dany jest prostopadłościan o krawędziach $x-4, x+4, x^2-4$, gdzie $x > 4$. Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wzorem

- A. $V(x) = x^4 - 16$ C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$
B. $V(x) = x^4 - 64$ D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Zadanie 6 (0–1)

Wszystkie rozwiązania równania $x(2x+4)(2x-5) = 0$ należą do przedziału

- A. $[-5; 1\frac{2}{3}]$ B. $[-3\frac{2}{3}; 2]$ C. $[-3; 2\frac{2}{3}]$ D. $[-1\frac{2}{3}; 6]$

Zadanie 7 (0–1)

Liczby $-3, 1$ są jedynymi pierwiastkami równania

- A. $x^3 + 2x^2 = 3x$ C. $(x-1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$
B. $x(x^2 + x - 3) = 0$ D. $(x^2 - 1)(x+3)^2 = 0$

Zadanie 8 (0–1)

Wartość wielomianu $w(x, y, z) = 6x^2yz - 8xy^2z$ dla $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ i $z = -2$ jest równa

- A. $-3\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $3\frac{1}{2}$

**Zadanie 9 (0-1)**

Dane jest równanie $x(x+3)(x-2) = 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podane równanie ma trzy różne pierwiastki.	P	F
Iloczyn niezerowych pierwiastków tego równania jest równy 6.	P	F

Zadanie 10 (0-1)

Niech $x = -2a$ oraz $y = 3b$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Wyrażenie $x^2 - y^2$ jest równe

A.	$(2a - 3b)(2a + 3b),$	a wyrażenie $xy(x - y)$ jest równe	1.	$12a^2b - 18a^2.$
B.	$(2a - 3b)(-2a + 3b),$		2.	$18ab^2 - 12a^2.$
			3.	$12a^2b + 18ab^2.$

Zadanie 11 (0-2)

Dany jest wielomian $w(x, y) = -2xy^2 - xy^3 + x^2y$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
11.1	Wartość $w(2, -2)$ jest równa	B
11.2	Wartość $w(-2, 2)$ jest równa	E

A. -16

B. -8

C. 16

D. 32

E. 40

Zadanie 12 (0-1)

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - \sqrt{2}x^3 - x^2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość wielomianu w dla $-\sqrt{2}$ jest równa 2.	P	F
Wartość wielomianu w dla $2\sqrt{2}$ jest równa 8.	P	F

12. $w(-\sqrt{2}) = 2 \cdot 4 - \sqrt{2}(-2\sqrt{2}) - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$

$w(2\sqrt{2}) = 2 \cdot 64 - \sqrt{2}(16\sqrt{2}) - 8 = 128 - 32 - 8 = 88$



13.1. $w(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 9$
 $w(-2) = -16 + 4 + 12 + 9 = 9$
 $w(-\frac{3}{2}) =$
 $= -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + 9 + 9 =$
 $= -4\frac{1}{2} + 18 = 13\frac{1}{2} > 13$

13.2. $2x^3 + m^2x^2 - 6x + 9 - 6mx =$
 $= m^2x^2 - 6mx + 9$
 $2x^3 - 6x = 0 : 2$
 $x^3 - 3x = 0$
 $x(x^2 - 3) = 0$
 $x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$
 $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

14.2. $w(\sqrt{2}) =$
 $= (2 + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 3) + 3 =$
 $= (\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3) + 3 =$
 $= 2 - 9 + 3 = -4$

15.1. $w_0(x) = x(x^2 - 4x) =$
 $= x^2(x - 4)$
Suma pierwiastków: 4.
 $w_4(x) = x(x^2 - 4x + 4) =$
 $= x(x - 2)^2$
Suma pierwiastków: 2.

15.2. $w(x) = x(x^2 - 4x - 12)$
 $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$
 $x_1 = \frac{4-8}{2} = -2,$
 $x_2 = \frac{4+8}{2} = 6$
Pierwiastki wielomianu w :
 $-2, 0, 6.$

16. $\frac{1}{4}$

Zadanie 13

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^3 + m^2x^2 - 6x + 9$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli $m = -1$, to

dla $x = -2$ wielomian w przyjmuje wartość równą 9.	P	F
dla $x = -\frac{3}{2}$ wielomian w przyjmuje wartość większą od 13.	P	F

Zadanie 13.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $w(x) - 6mx = (mx - 3)^2$.

Zadanie 14

Dany jest wielomian $w(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3) + 3$.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x wielomian w można zapisać w postaci

A.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x,$	a jego wartość dla $x = -1$ jest równa	1.	0.
B.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 3x,$		2.	-1.
			3.	-2.

D Zadanie 14.2 (0-1)

Uzasadnij, że $w(\sqrt{2})$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15

Dany jest wielomian $w(x) = x(x^2 - 4x + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

D Zadanie 15.1 (0-1)

Uzasadnij, że dla $c = 0$ suma pierwiastków tego wielomianu jest większa od sumy pierwiastków dla $c = 4$.

Zadanie 15.2 (0-1)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w dla $c = -12$.

Zadanie 16 (0-2)

Oblicz średnią arytmetyczną pierwiastków wielomianu:

$$w(x) = x(2x - 1)(3x - 1)(6x - 1)$$

**D Zadanie 17 (0-2)**

Uzasadnij, że rozwiązaniem równania $0,75x^3 + 48 = 0$ jest liczba wymierna.

Zadanie 18 (0-2)

Oblicz $\sqrt{p}$, gdy p jest sumą pierwiastków równania $x(x-1)(16x-9) = 0$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile wspólnych pierwiastków mają poniższe równania?

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{i} \quad (x+4)(x^2 + 8x) = 0$$

Zadanie 20 (0-2)

Które liczby całkowite o wartości bezwzględnej mniejszej od 7 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x(\frac{2}{3}x + 4)(\frac{3}{4}x - 5)(\frac{4}{5}x + 6)$?

Zadanie 21

Dany jest wielomian $w(x) = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{8})(x^2 - 7x + 12\frac{1}{4})$.

Zadanie 21.1 (0-2)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w .

D Zadanie 21.2 (0-2)

Uzasadnij, że dla argumentów $1\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{2}$ wielomian w przyjmuje tę samą wartość.

Zadanie 22

Sumę sześciątów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Zadanie 22.1 (0-1)

Sprawdź prawdziwość powyższego wzoru dla $n = 4$.

D Zadanie 22.2 (0-3)

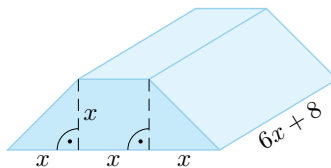
Korzystając z powyższego wzoru, uzasadnij, że suma sześciątów kolejnych liczb naturalnych od 1 do n jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

D Zadanie 23 (0-4)

Uzasadnij, że objętość prostopadłościanu o krawędziach $x-2$, x , $x+4$ jest opisana za pomocą wzoru $V(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$, gdzie $x > 2$. Sprawdź, czy dla $x = 2\sqrt{2}$ objętość tego prostopadłościanu jest liczbą wymierną.

Zadanie 24 (0-2)

Objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku obok jest równa objętości sześcianu o krawędzi $3x$. Oblicz x .



$$\begin{aligned} 17. \quad \frac{3}{4}x &= -48 / \cdot \frac{4}{3} \\ x^3 &= -64 \\ x^3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \quad p &= 0 + 1 + \frac{9}{16} \\ p &= \frac{25}{16} \\ \sqrt{p} &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$19. \text{ Jeden pierwiastek: } x = -4.$$

$$\begin{aligned} 20. \text{ Pierwiastki wielomianu } w: \\ 0, -6, \frac{20}{3}, \frac{15}{2} \\ \text{Pierwiastki całkowite wielomianu } w \text{ o wartości bezwzględnej mniejszej od 7:} \\ 0, -6. \end{aligned}$$

$$21. \quad w(x) = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})(x - \frac{7}{2})^2$$

$$21.1. \quad x = \frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} 21.2. \quad w(\frac{3}{2}) &= \\ &= \frac{1}{4}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2})(\frac{3}{2} - \frac{7}{2})^2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4 = 1 \\ w(\frac{9}{2}) &= \\ &= \frac{1}{4}(\frac{9}{2} - \frac{1}{2})(\frac{9}{2} - \frac{7}{2})^2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.2. \quad \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 &= \\ &= \frac{1}{4}n^2(n^2 + 2n + 1) = \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \\ &= (\frac{1}{2}n(n+1))^2 \\ \text{Jedna z liczb } n, n+1 &\text{ jest} \\ \text{parzysta, zatem } \frac{1}{2}n(n+1) &\text{ jest} \\ \text{liczbą naturalną.} \end{aligned}$$

$$23. \quad V(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2} + 16 - 16\sqrt{2} = 16$$

$$24. \text{ Pole podstawy graniastosłupa: } P_p = \frac{3x+x}{2} \cdot x = 2x^2, \text{ gdzie } x > 0.$$

$$\text{Objętość graniastosłupa: } V_g(x) = 2x^2(6x+8) = 12x^3 + 16x^2, \text{ gdzie } x > 0.$$

$$\text{Objętość sześcianu o krawędzi } x: V_s(x) = 27x^3, \text{ gdzie } x > 0.$$

Z zależności $V_g = V_s$ otrzymujemy:

$$12x^3 + 16x^2 = 27x^3$$

$$15x^3 - 16x^2 = 0$$

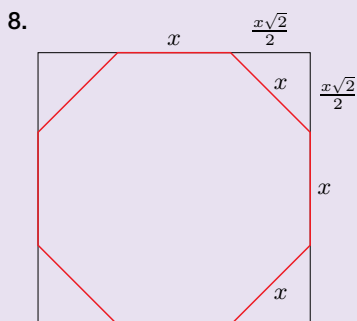
$$15x^2(x - \frac{16}{15}) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{16}{15}$$

Rozwiązanie $x = 0$ jest sprzeczne z założeniem, zatem $x = \frac{16}{15}$.

Odpowiedzi do zadań

1. $w(x) = (x-1)(x+1) \cdot (x^2 + 4x + 1)$
 $x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = -2 + \sqrt{3}$
 $w(x) \leq 0$ dla
 $x \in [-2 - \sqrt{3}; -1] \cup$
 $\cup [-2 + \sqrt{3}; 1]$
2. $w(k) = 3k^3 - 6k^2 - 4k + 8 =$
 $= (k-2)(3k^2 - 4) = 0$
 $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ lub $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 lub $k = 2$
3. $3x^3 + mx^2 + nx - 8 =$
 $= (x+2)^2(cx+d), c, d \in \mathbb{R}.$
 $3x^3 + mx^2 + nx - 8 = cx^3 +$
 $+ (4c+d)x^2 + (4c+4d)x + 4d$
 $c = 3, d = -2$
 Zatem $m = 10, n = 4.$
4. $B(4, 0), C(2, 5)$
5. $4(2 + \sqrt{2})$
7. $V(x) = x^4 - 18x^2 + 81,$
 $D = (-3; 3) \cup (3; \infty),$
 $V(x) \leq 256$ dla
 $x \in (-3; 3) \cup (3; 5]$



Pole podstawy:

$$P(x) = (x\sqrt{2} + x)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2x^2(1 + \sqrt{2}).$$

Objętość:

$$V(x) = 2x^2(1 + \sqrt{2})(x + 2) =$$

$$= 6(1 + \sqrt{2})$$

$$x^2(x + 2) = 3$$

$$x^3 + 2x^2 - 3 = 0$$

$$x = 1$$

Zadanie 1 (0-3)

Rozwiąż nierówność $x^4 + 4x^3 - 4x - 1 \leq 0$.

Zadanie 2 (0-3)

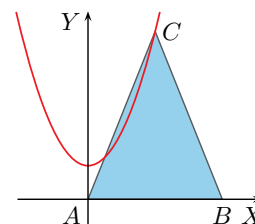
Dla jakich wartości parametru k wielomian $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + k^2x - 4k + 8$ jest podzielny przez dwumian $x - k$?

Zadanie 3 (0-3) → Przykład, str. 111

Wyznacz wartości parametrów m i n , dla których liczba -2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 8$.

Zadanie 4 (0-4)

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt równoramienny o podstawie AB i wierzchołkach $A(0, 0), B(x_0, 0)$, gdzie $x_0 > 0$, oraz wierzchołku C należącym do paraboli $y = x^2 + 1$. Pole tego trójkąta jest równe 10. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .



Zadanie 5 (0-4)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o wierzchołkach $A(x_0, 0)$ i $B(-x_0, 0)$, gdzie $x_0 > 0$, które są końcami jednej z przyprostokątnych. Pole tego trójkąta jest równe 8, a wierzchołek C należy do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Oblicz obwód tego trójkąta.

D Zadanie 6 (0-3)

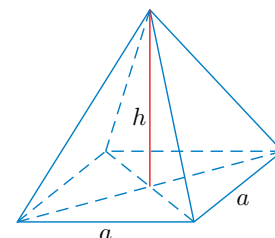
W pewnym wielomianie suma współczynników przy potęgach parzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach nieparzystych. Wykaż, że liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Zadanie 7 (0-4)

Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h , gdzie:

$$a = x + 3 \text{ i } h = 3(x^2 - 6x + 9)$$

Podaj dziedzinę funkcji V . Dla jakich wartości x zachodzi nierówność $V(x) \leq 256$?



Zadanie 8 (0-5)

Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest ośmiokąt foremny o boku x dm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa $(x + 2)$ dm, a jego objętość jest równa $6(1 + \sqrt{2})$ dm³. Oblicz x .

6. 1° Wielomian w jest stopnia parzystego $2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, wówczas:

$$w(x) = a_{2k}x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Z założenia $a_{2k} + \dots + a_2 + a_0 = a_{2k-1} + \dots + a_3 + a_1$, czyli

$$a_{2k} + \dots + a_2 + a_0 - (a_{2k-1} + \dots + a_3 + a_1) = 0.$$

$$w(-1) = a_{2k} - a_{2k-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 =$$

$$= a_{2k} + \dots + a_2 + a_0 - (a_{2k-1} + \dots + a_3 + a_1) = 0$$

Czyli liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu w .

2° Wielomian w jest stopnia nieparzystego $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, wówczas:

$$w(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Z założenia $a_{2k} + \dots + a_2 + a_0 = a_{2k+1} + \dots + a_3 + a_1$, czyli

$$a_{2k} + \dots + a_2 + a_0 - (a_{2k+1} + \dots + a_3 + a_1) = 0.$$

$$w(-1) = -a_{2k+1} + a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-2} + \dots + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 =$$

$$= a_{2k} + a_{2k-2} + \dots + a_4 + a_2 + a_0 - (a_{2k+1} + a_{2k-1} + \dots + a_3 + a_1) = 0$$

Czyli liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu w .