

NOWA
MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

2

LICEUM • TECHNIKUM • ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

NOWA MATEMATyka

Podręcznik Nauczyciela 2 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy, Doroty Ponczek, Jolanty Wesołowskiej *NOWA MATEMATyka 2* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (988/2/2025/z1).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025
ISBN 978-83-267-5317-6

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *NOWA MATEMATyka* dla klasy 2 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak, Jacek Klisowski.

Redakcja merytoryczna: Anna Drążek, Beata Zając.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak.

Projekt graficzny: Ewa Kaletyn.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Zdjęcie na okładce: Getty Images/Moment/Andriy Onufriyenko.

Zdjęcia: BE&W: Alamy Stock Photo – FirePhoto s. 175, Historic Images s. 91 (Niels Henrik Abel), Old Images s. 25, Science History Images s. 91 (Girolamo Cardano), Forum: Gonzales Photo/Inaki Esnaola s. 9, Getty Images: Connect Images s. 49, E+/4x6 s. 317 (gitarzysta), iStock/Getty Images Plus – Antonio_Diaz s. 317 (dziewczyna z ręką przy uchu), Davel5957 s. 39 (Gateway Arch), Moment – Roberto Moiola/Sysworld s. 117, shunli zhao s. 39 (lajacuch), Shutterstock: Daniel Prudek s. 130, Direk Yiamsaensuk s. 196, ID1974 s. 260, Jag_cz s. 61 (chusta), Nerthuz s. 322, Nicku s. 68, raphotography88 s. 289, remik44992 s. 162, Lech Chańko s. 41, M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2025 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 225.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnieść posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji.
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

NOWA MATeMATyka

2 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JOANNA CZARNOWSKA
GRZEGORZ JANOCZA
DOROTA PONCZEK
JOLANTA WESOŁOWSKA

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

NOWA MATeMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr hab. Anny Cegieli.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2025

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/2/2025/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum (2024)* autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025
ISBN 978-83-267-5280-3

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska, Renata Sawicka, Agnieszka Trzpił-Gajek, Beata Zając

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejevska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Spis treści

► 1. Funkcja kwadratowa i jej zastosowania

1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie	10
1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie	14
R 1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych	17
Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej – <i>przypomnij sobie</i>	20
R 1.4. Układy równań	21
R 1.5. Wzory Viète'a	24
R 1.6. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem	27
1.7. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	32
1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	35
Powtórzenie	40
Zadania z kontekstem realistycznym	43
Sposób na zadanie	44
Przed obowiązkową maturą z matematyki	45
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	48

► 2. Wielomiany

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu	50
2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	53
2.3. Mnożenie wielomianów	58
R 2.4. Wzory skróconego mnożenia	62
Trójkąt Pascala – <i>dowiedz się więcej</i>	66
2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)	67
R 2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)	70
2.7. Równania wielomianowe	72
R 2.8. Dzielenie wielomianów	76
Schemat Hornera – <i>dowiedz się więcej</i>	80
R 2.9. Równość wielomianów	82
R 2.10. Twierdzenie Bézouta	84
R 2.11. Pierwiastki całkowite wielomianu	88
Równania wielomianowe. Wzór Cardano – <i>dowiedz się więcej</i>	91
R 2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu	92
R 2.13. Wykres wielomianu	95
R 2.14. Nierówności wielomianowe	100
R 2.15. Wielomiany – zastosowania	105
Powtórzenie	107

Zadania z kontekstem realistycznym	110
Sposób na zadanie	111
Przed obowiązkową maturą z matematyki	112
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	116

► 3. Funkcje wymierne

3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	118
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor	121
R 3.3. Funkcja homograficzna	125
Hiperbola – dowiedz się więcej	129
3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	131
R 3.5. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	135
3.6. Równania wymierne (1)	138
3.7. Równania wymierne (2)	140
R 3.8. Nierówności wymierne	144
3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne	147
3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)	151
R 3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)	153
R 3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)	157
3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	160
3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	162
Powtórzenie	164
Zadania z kontekstem realistycznym	168
Sposób na zadanie	169
Przed obowiązkową maturą z matematyki	170
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	174

► 4. Trygonometria

4.1. Trójkąty prostokątne	176
Dowody twierdzenia Pitagorasa – dowiedz się więcej	181
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	183
4.3. Trygonometria – zastosowania	186
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	189
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	192
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego	197
Współczynnik kierunkowy prostej – dowiedz się więcej	202
4.7. Pole trójkąta	203
Czworokąty wypukłe – przypomnij sobie	207
4.8. Pola czworokątów (1)	208
4.9. Pola czworokątów (2)	211

Odcinki w trapezie – dowiedz się więcej	214
Powtórzenie	215
Zadania z kontekstem realistycznym	218
Sposób na zadanie	219
Przed obowiązkową maturą z matematyki	220
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	224
► 5. Planimetria	
5.1. Okrąg	226
5.2. Koło	229
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej	232
Konstrukcja stycznej do okręgu. Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie – dowiedz się więcej	236
5.4. Kąty w okręgu (1)	237
5.5. Kąty w okręgu (2)	241
5.6. Okrąg opisany na trójkącie	244
5.7. Okrąg wpisany w trójkąt	248
Okrąg dopisany do trójkąta – dowiedz się więcej	252
R 5.8. Okrąg opisany na czworokącie	253
Twierdzenie Ptolemeusza – dowiedz się więcej	256
R 5.9. Okrąg wpisany w czworokąt	257
5.10. Wielokąty foremne	261
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 18° , 36° , 54° , 72° – dowiedz się więcej	264
R 5.11. Twierdzenie sinusów	265
5.12. Twierdzenie cosinusów (1)	270
5.13. Twierdzenie cosinusów (2)	273
Konstrukcja wybranych wielokątów foremnych – dowiedz się więcej	277
Odcinki stycznych i siecznych – dowiedz się więcej	278
Powtórzenie	279
Zadania z kontekstem realistycznym	282
Sposób na zadanie	283
Przed obowiązkową maturą z matematyki	284
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	288
► 6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	
Potęga o wykładniku całkowitym – przypomnij sobie	290
6.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie	291
6.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym	293

6.3. Funkcja wykładnicza	296
6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej	300
6.5. Logarytm	303
6.6. Własności logarytmów	306
6.7. Funkcja logarytmiczna	309
6.8. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej	313
R 6.9. Zmiana podstawy logarytmu	318
6.10. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania	321
Równania wykładnicze – dowiedz się więcej	324
Równania logarytmiczne – dowiedz się więcej	325
Powtórzenie	326
Zadania z kontekstem realistycznym	329
Sposób na zadanie	330
Przed obowiązkową maturą z matematyki	331
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	335
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	336
Indeks	382
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	385
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	386

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Fioletowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

R Temat w całości obowiązujący w zakresie rozszerzonym.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu warto skorzystać z kalkulatora, oraz tematów ze wszystkimi takimi zadaniami.

***** Oznaczenie trudniejszych zadań.

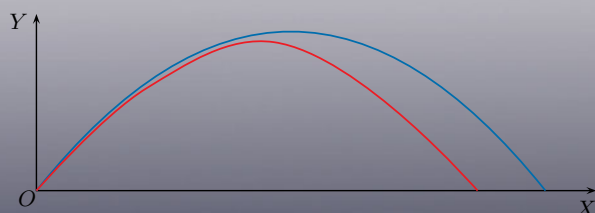
7. Zadania mniej typowe.

Sekcja **Przypomnij sobie** zawiera nieobowiązkowe powtórzenie przydatnych wiadomości przed wybranymi lekcjami.

Sekcja **Dowiedz się więcej** zawiera materiał nieobowiązkowy, rozszerzający treści z poprzedzających ją lekcji.

1 Funkcja kwadratowa i jej zastosowania

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub pocisku wystrzelonego pod takim kątem jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak opór powietrza sprawia, że tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (kolor czerwony na rysunku).



Uczeń:

- rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych metod i wzorów,
- wyznacza argument, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje daną wartość,
- przedstawia trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej i podaje jego pierwiastki.

1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

Równanie kwadratowe może mieć dwa pierwiastki, jeden pierwiastek lub nie mieć pierwiastków.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, oraz jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^2 - 9x + 9 = 0$.

Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 3}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 3}{4} = 3$$

b) Rozwiąż równanie $3x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 9 + 12 = 21 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}$$

c) Rozwiąż równanie $\frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 4 = 36 - 36 = 0$$

$\Delta = 0$, więc równanie ma jeden pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{3}$$

d) Rozwiąż równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8$$

$\Delta < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Multibook

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 3x - 18 = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ g) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $x^2 + 3x - 2 = 0$ h) $3x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$
c) $5x^2 - 11x + 2 = 0$ f) $2x^2 + 4x - 1 = 0$ i) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

Aby rozwiązać równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, rozkładamy jego lewą stronę na czynniki.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $-3x^2 + 48x = 0$.

$$\begin{aligned} -3x(x - 16) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Iloczyn czynników jest równy zero, gdy któryś z nich jest równy zero.

Pierwiastkami równania są liczby 0 i 16.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $2x^2 - 6x = 0$ c) $3x + 4x^2 = 0$ e) $5x = 10x^2$
b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{12}x = 0$ d) $-\frac{2}{3}x - 6x^2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}x^2$

Niektóre równania kwadratowe możemy rozwiązać, korzystając ze wzorów na różnicę kwadratów, kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $16x^2 - 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\begin{aligned} (4x - 1)(4x + 1) &= 0 \\ 4x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 4x + 1 &= 0 \\ 4x = 1 \quad \text{lub} \quad 4x &= -1 \end{aligned}$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki: $-\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$.

b) Rozwiąż równanie $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 &= 0 \\ 2x + 1 &= 0 \\ 2x &= -1 \end{aligned}$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 1

- a) $\Delta = 81$, $x_1 = -6$, $x_2 = 3$
b) $\Delta = 25$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0,5$
c) $\Delta = 81$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0,2$
d) $\Delta = 0$, $x_0 = 1,5$
e) $\Delta = 17$,
 $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$
f) $\Delta = 24$,
 $x_1 = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$
g) $\Delta = -7 < 0$, sprzeczne
h) $\Delta = 10$,
 $x_1 = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$, $x_2 = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$
i) $\Delta = 2$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $x = 0$ lub $x = 3$
b) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{9}$
c) $x = 0$ lub $x = -\frac{3}{4}$
d) $x = 0$ lub $x = -\frac{1}{9}$
e) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = 0$ lub $x = -1\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

- a) $x = -\frac{5}{2}$ lub $x = \frac{5}{2}$
b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -7$
d) $x = -\frac{1}{3}$
e) $x = 5$
f) $x = \frac{5}{2}$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $4x^2 - 25 = 0$ c) $x^2 + 14x + 49 = 0$ e) $25 + x^2 = 10x$
b) $1 - \frac{9}{4}x^2 = 0$ d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ f) $4x^2 + 15 = 20x - 10$

Przypomnijmy, że postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Wyrażenia $x - x_1$ i $x - x_2$ nazywamy **czynniki liniowymi**.

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można przedstawić w postaci iloczynowej (nie można go rozłożyć na czynniki liniowe).

Przykład 4

Przedstaw trójmian kwadratowy $y = 2x^2 - x - 3$ w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0$, więc trójmian ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{4} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}$$

Postać iloczynowa trójmianu: $y = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz pierwiastki trójmianu kwadratowego i przedstaw go, jeśli to możliwe, w postaci iloczynowej.

- a) $y = 6x^2 + x - 1$ d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$ g) $y = -9x^2 + 1$
b) $y = 2x^2 - 5x + 2$ e) $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4$ h) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x$
c) $y = -x^2 + \frac{10}{3}x - 1$ f) $y = -3x^2 + 2x + 2$ i) $y = 4x^2 - 4x + 2$

Ćwiczenie 4

a) $\Delta = 25, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, y = 6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$

b) $\Delta = 9, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, y = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$

c) $\Delta = \frac{64}{9}, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 3, y = -(x - \frac{1}{3})(x - 3)$

d) $\Delta = 16, x_1 = -1, x_2 = 7, y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 7)$

e) $\Delta = 18, x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}, y = (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

f) $\Delta = 28, x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{3}, y = -3(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3})(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3})$

g) $\Delta = 36, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, y = -9(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$

h) $\Delta = 9, x_1 = -12, x_2 = 0, y = -\frac{1}{4}x(x + 12)$

i) $\Delta = -16 < 0$. Trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków i nie można przedstawić go w postaci iloczynowej.

Zadania

1. Oblicz wyróżnik równania kwadratowego i określ liczbę jego pierwiastków.

- a) $x^2 - 3x + 4 = 0$ d) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ g) $8x^2 + 3x = 0$
 b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $6x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ h) $5x^2 - 9 = 0$
 c) $-3x^2 + 2x + 9 = 0$ f) $-\frac{2}{3}x^2 - 2x + 6 = 0$ i) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ g) $25x^2 + 5x - 6 = 0$
 b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$ e) $5x^2 + 2x + 1 = 0$ h) $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$
 c) $4x^2 + 5x + 1 = 0$ f) $-6x^2 + x + 1 = 0$ i) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 1 = 5 - 2x^2$ d) $(\frac{1}{2}x - 1)(\frac{1}{2}x + 1) = 2$ g) $(1 - x)^2 = \frac{1}{4}$
 b) $3(x^2 + 1) = 5$ e) $(x + 1)^2 = (1 - 2x)^2$ h) $(3x + 1)^2 = 9$
 c) $(x - 1)^2 = -2x$ f) $(3x - 2)^2 = (2x + 3)^2$ i) $(2x - 1)^2 = 4$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2-1}{3}$ c) $\frac{(x+2)^2}{2} - 2 = \frac{(x+3)^2}{3}$
 b) $\frac{x-2}{2} - \frac{x(x-2)}{6} = 0$ d) $\frac{(x+3)^2}{3} = x^2 + \frac{(x+4)^2}{3}$

5. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f . Oblicz $|x_1 - x_2|$.

- a) $f(x) = (x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$ c) $f(x) = (x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$
 b) $f(x) = 4x(x - \sqrt{2})$ d) $f(x) = (x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

6. Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą p .

- a) $f(x) = x^2 + 4x - 13$, $p = 8$ c) $f(x) = -4x^2 + 24x$, $p = 9$
 b) $f(x) = 3x^2 + 11x - 6$, $p = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x$, $p = -3$

7. Wyznacz argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują równe wartości.

- a) $f(x) = x^2 + 12$, $g(x) = -x^2 + 11x$ c) $f(x) = (2x - 1)^2$, $g(x) = 3x - 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ d) $f(x) = (3x + 2)^2$, $g(x) = (x - 4)^2$

8. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a) $y = x^2 + 2x - 24$ d) $y = -x^2 + 14x - 49$ g) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
 b) $y = 2x^2 - 11x + 15$ e) $y = -4x^2 - 12x - 9$ h) $y = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3$
 c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ f) $y = -3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ i) $y = 3x^2 - 5x + 4$

7. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = \frac{3}{2}$ lub $x = 4$

b) $f(x) = g(x)$ dla $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = 0$

c) $f(x) = g(x)$ dla $x = \frac{3}{4}$ lub $x = 1$

d) I sposób

$$(3x + 2)^2 = (x - 4)^2$$

$$8x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

II sposób

$$|3x + 2| = |x - 4|$$

$$3x + 2 = x - 4 \text{ lub } 3x + 2 = -(x - 4)$$

$$x = -3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

8. a) $y = (x + 6)(x - 4)$

$$b) y = 2(x - 3)(x - \frac{5}{2})$$

$$c) y = \frac{1}{2}(x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})$$

$$d) y = -(x - 7)^2$$

$$e) y = -4(x + \frac{3}{2})^2$$

$$f) y = -3(x - \frac{2+\sqrt{7}}{6})(x - \frac{2-\sqrt{7}}{6})$$

$$g) y = \frac{1}{4}(x + 4)^2$$

$$h) y = \frac{4}{3}(x - \frac{3}{2})^2$$

i) brak postaci iloczynowej

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\Delta = -7$, 0 pierwiastków

b) $\Delta = 49$, 2 pierwiastki

c) $\Delta = 112$, 2 pierwiastki

d) $\Delta = 0$, 1 pierwiastek

e) $\Delta = \frac{1}{4}$, 2 pierwiastki

f) $\Delta = 20$, 2 pierwiastki

g) $\Delta = 9$, 2 pierwiastki

h) $\Delta = 180$, 2 pierwiastki

i) $\Delta = -\frac{3}{2}$, 0 pierwiastków

2. a) $x = 7$ lub $x = -1$

b) $x = -4$ lub $x = \frac{1}{2}$

c) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{4}$

d) $x = \frac{1}{4}$ e) sprzeczne

f) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$

g) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = \frac{2}{5}$

h) $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

i) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 2$

3. a) $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) sprzeczne

d) $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$

e) $x = 0$ lub $x = 2$

f) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = 5$

g) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$

h) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$

i) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$

4. a) $x = -1$ lub $x = 1$

b) $x = 2$ lub $x = 3$

c) $x = -3\sqrt{2}$ lub $x = 3\sqrt{2}$

d) sprzeczne

5. a) $\frac{5}{6}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\sqrt{3}$

6. a) $f(x) = 8$ dla

$x = 3$ lub $x = -7$

b) $f(x) = -2$ dla

$x = \frac{1}{3}$ lub $x = -4$

c) $f(x) = 9$ dla

$x = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$ lub $x = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

d) $f(x) = -3$ dla

$x = -6 - 3\sqrt{3}$ lub

$x = -6 + 3\sqrt{3}$

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności kwadratowe,
- zaznacza na osi liczbowej iloczyn i różnicę zbiorów rozwiązań dwóch nierówności kwadratowych,
- stosuje nierówności kwadratowe do wyznaczania dziedziny funkcji, w której wzorze występują pierwiastki kwadratowe.

Ćwiczenie 1

- a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geq 0$ dla $x \in [-2; 3]$
b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$
c) $x^2 - 6x + 8 > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$
d) $x^2 - 6x + 8 < 0$ dla $x \in (2; 4)$

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

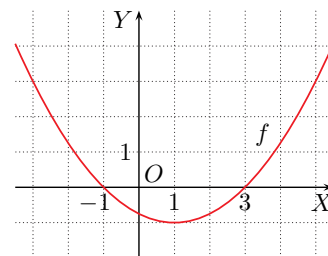
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3 .

Z wykresu możemy odczytać rozwiązania odpowiednich nierówności, np.:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \geq 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty),$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \leq 0 \text{ dla } x \in [-1; 3].$$

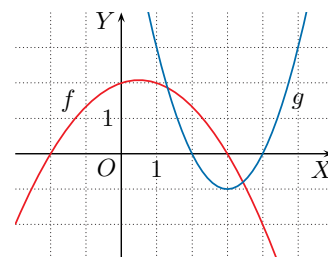


Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$ i $g(x) = x^2 - 6x + 8$.

Korzystając z tych wykresów, podaj rozwiązania nierówności.

- a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geq 0$ c) $x^2 - 6x + 8 > 0$
b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leq 0$ d) $x^2 - 6x + 8 < 0$



Przykład 2

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 4x - 15 < 0$.

Zaczynamy od rozwiązania równania $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

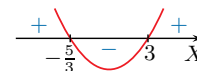
Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 14}{6} = 3$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez punkty $-\frac{5}{3}$ i 3 na osi OX .

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$3x^2 - 4x - 15 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{5}{3}; 3\right)$$



Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności.

Multibook

- Nierówność kwadratowa
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 7x - 4 < 0$.

Rozwiązujemy równanie $-2x^2 + 7x - 4 = 0$.

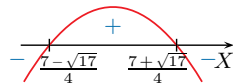
$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 49 - 32 = 17, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{7 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{17}}{-4} = \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez punkty $\frac{7 - \sqrt{17}}{4}$ i $\frac{7 + \sqrt{17}}{4}$ na osi OX .

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-2x^2 + 7x - 4 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{4}; \infty\right)$$


Zauważ, że zamiast nierówności $-2x^2 + 7x - 4 < 0$ możemy rozwiązać równoważną nierówność $2x^2 - 7x + 4 > 0$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 + 5x < 0$ c) $2x^2 + 7x - 4 > 0$ e) $5x^2 - 2x - 1 \geq 0$
b) $-4x^2 + x \leq 0$ d) $-3x^2 + 11x - 6 \geq 0$ f) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 < 0$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

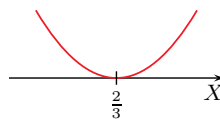
Rozwiązujemy równanie $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry.

Jedyny punkt wspólny paraboli z osią OX to $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.



Odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$9x^2 - 12x + 4 > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$ b) $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ c) $9x^2 - 12x + 4 < 0$

Ćwiczenie 4

Czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$, czy jest sprzeczna?

- a) $4x^2 + 1 \geq 0$ b) $-x^2 - 2 < 0$ c) $9x^2 + 4 \leq 0$

Ćwiczenie 2

- a) $x \in (-5; 0)$
b) $x \in (-\infty; 0] \cup [\frac{1}{4}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
d) $x \in [\frac{2}{3}; 3]$
e) $x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{6}}{5}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{6}}{5}; \infty\right)$
f) $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{15}) \cup (-3 + \sqrt{15}; \infty)$

Ćwiczenie 3

- a) $x \in \mathbb{R}$
b) $x = \frac{2}{3}$
c) sprzeczna

Ćwiczenie 4

- a), b) $x \in \mathbb{R}$
c) sprzeczna

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in [-1; \frac{1}{3}]$
 b) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$
 d) $x \in [2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}]$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (2; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; \frac{3+\sqrt{29}}{10}) \cup (\frac{3+\sqrt{29}}{10}; \infty)$
 g) $x \in (\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+3\sqrt{5}}{2})$
 h) $x \in (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}] \cup [1 + 2\sqrt{2}; \infty)$
 i) $x \in (\frac{3-\sqrt{17}}{8}; \frac{3+\sqrt{17}}{8})$
2. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 b) $x \in \mathbb{R}$
 c) $x \in \mathbb{R}$
 d) $x = -\frac{3}{2}$
 e) $x \in \mathbb{R}$
 f) sprzeczna
3. a) $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty)$
 b), c) sprzeczna
 d) $x \in (\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{5+\sqrt{17}}{4})$
 e) $x \in [\frac{-3-\sqrt{33}}{4}; \frac{-3+\sqrt{33}}{4}]$
 f) $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty)$
4. a) $x \in (0; \frac{2}{5})$
 b) $x \in [-\frac{1}{2}; 3]$
 c) $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1}{3}; \infty)$
 d) $x \in \mathbb{R}$
 e) $x \in \mathbb{R}$
 f) $x \in [-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}]$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.
 a) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \geq 0$ g) $x^2 + 5x - 5 < 0$
 b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$ e) $-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 < 0$ h) $-x^2 + 2x + 7 \leq 0$
 c) $-4x^2 + 5x - 1 < 0$ f) $5x^2 - 3x - 1 > 0$ i) $2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} < 0$
2. Rozwiąż nierówność.
 a) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 > 0$ e) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 5 \geq 0$
 b) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$ d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0$ f) $-\sqrt{2}x^2 + 3x \geq 3\sqrt{2}$
3. Rozwiąż nierówność.
 a) $x^2 + 2x \geq x + 1$ c) $3x^2 - 2x + 1 < x$ e) $3x - x^2 \leq 3 - 3x^2$
 b) $5x^2 + 4 \leq 10x - 20x^2$ d) $-2x^2 + 5x > 1$ f) $-x(2 - x) > 1 - x^2$
4. Rozwiąż nierówność.
 a) $(2x + 1)^2 + (x - 3)^2 < 10$ d) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$
 b) $3x - (1 - x)^2 \geq (x - 2)(x + 2)$ e) $2 - x^2 \leq (2 - x)^2$
 c) $(x - 3)^2 - 7 \leq (2x - 1)^2$ f) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{1}{2} - x)^2 \geq 3x$
5. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.
 a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 3x - x^2 \geq 0\}$
 b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 4 < 0\}$
 c) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x - 3 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + x + 12 \geq 0\}$
6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)} + \sqrt{x}$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jej wzór ma sens. Wyrażenia pod pierwiastkami muszą być nieujemne, czyli muszą jednocześnie zachodzić nierówności:

$$x(x-4) \geq 0 \quad \text{ i } \quad x \geq 0$$

Pierwsza nierówność jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{0\} \cup [4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{16 - x^2}$
- b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4} - \sqrt{1 - x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 6} - \sqrt{4x - x^2}$

5. a) $A = [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$, $B = [0; 3]$,
 $A \cap B = [2 - \sqrt{3}; 3]$,
 $A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3}]$
 b) $A = (-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \infty)$,
 $B = (1; 4)$,
 $A \cap B = (1; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1] \cup [4; \infty)$
 c) $A = (-\infty; 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}; \infty)$,
 $B = [-3; 4]$,
 $A \cap B = [-3; 2 - \sqrt{7})$,
 $A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (2 + \sqrt{7}; \infty)$
6. a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ i $x \geq 0$
 $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$ i $x \in [0; \infty)$,
 $D_f = [3; \infty)$
 b) $2x^2 + 7x - 4 \geq 0$ i $1 - x \geq 0$
 $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$ i $x \in (-\infty; 1]$,
 $D_f = (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; 1]$
 c) $x^2 - x - 6 \geq 0$ i $16 - x^2 \geq 0$
 $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$ i $x \in [-4; 4]$,
 $D_f = [-4; -2] \cup [3; 4]$
 d) $3x^2 + 7x - 6 \geq 0$ i $4x - x^2 \geq 0$
 $x \in (-\infty; -3] \cup [\frac{2}{3}; \infty)$ i $x \in [0; 4]$,
 $D_f = [\frac{2}{3}; 4]$

R 1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy niewiadomą pomocniczą $t = x^2$ (gdzie $t \geq 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}t^2 - 10t + 9 &= 0 \\ \Delta &= 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8 \\ t_1 &= \frac{10-8}{2} = 1 \geq 0, \quad t_2 = \frac{10+8}{2} = 9 \geq 0\end{aligned}$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\begin{aligned}x^2 &= 1 \quad \text{lub} \quad x^2 = 9 \\ x &= -1 \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 3\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad \text{b) } x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \qquad \text{c) } x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 21 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 21 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}t^2 - 10t + 21 &= 0 \\ \Delta &= 100 - 84 = 16, \quad \sqrt{\Delta} = 4 \\ t_1 &= \frac{10-4}{2} = 3 \geq 0, \quad t_2 = \frac{10+4}{2} = 7 \geq 0\end{aligned}$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\begin{aligned}x^2 &= 3 \quad \text{lub} \quad x^2 = 7 \\ x &= -\sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{7}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } x^4 - 8x^2 + 15 = 0 \qquad \text{b) } x^4 - 8x^2 + 12 = 0 \qquad \text{c) } x^4 - 11x^2 + 18 = 0$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned}\text{a) } x &= -\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{5} \\ \text{b) } x &= -\sqrt{6} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{6} \\ \text{c) } x &= -3 \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = 3\end{aligned}$$

Uczeń:

- rozpoznaje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych,
- rozwiązuje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych.

Ćwiczenie 1

Podstawiamy $t = x^2$, $t \geq 1$

$$\begin{aligned}\text{a) } t^2 - 5t + 4 &= 0 \\ \Delta &= 25 - 16 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3 \\ t_1 &= \frac{5-3}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x^2 &= 1 \quad \text{lub} \quad x^2 = 4 \\ x &= -2 \quad \text{lub} \quad x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 1 \\ &\text{lub} \quad x = 2 \\ \text{b) } x &= -4 \quad \text{lub} \quad x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 1 \\ &\text{lub} \quad x = 4 \\ \text{c) } x &= -4 \quad \text{lub} \quad x = -2 \quad \text{lub} \quad x = 2 \\ &\text{lub} \quad x = 4\end{aligned}$$

Uwaga do ćwiczenia 1.

W tym ćwiczeniu nie jest konieczne podstawianie. Wielu uczniów na poziomie rozszerzonym potrafi zapisać te równania w postaci iloczynowej.

$$\begin{aligned}\text{a) } (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ \text{b) } (x^2 - 1)(x^2 - 16) \\ \text{c) } (x^2 - 4)(x^2 - 16)\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

- a) $x = -\sqrt{6}$ lub $x = \sqrt{6}$
b) sprzeczne
c) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
d) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$
e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -1$ lub $x = 1$

Ćwiczenie 4

- a) 3 rozwiązania: $x = -3$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
b) 1 rozwiązanie: $x = 0$
c) 2 rozwiązania: $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$
d) 4 rozwiązania: $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$
e) 0 rozwiązań
f) 2 rozwiązania: $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ lub $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = 3$
b), d), f) sprzeczne
c) $x = -\sqrt{6}$ lub $x = \sqrt{6}$
e) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = 2$
2. a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{3}$
b) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$
c) $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{57}-7}{2}}$ lub $x = \sqrt{\frac{\sqrt{57}-7}{2}}$
d) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \sqrt{2}$
e) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$
f) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$

$$\Delta = 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10$$

$$t_1 = \frac{-8-10}{2} = -9 < 0, \quad t_2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x : $x^2 = 1$, czyli $x = -1$ lub $x = 1$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ f) $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

Ćwiczenie 4

Podaj liczbę rozwiązań równania.

- a) $x^4 - 9x^2 = 0$ c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
b) $x^4 + 9x^2 = 0$ d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ c) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$ e) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$
b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$ d) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ f) $x^4 - x^2 + 20 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ c) $x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ e) $4x^4 - 17x^2 + 18 = 0$
b) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$ d) $9x^4 - 19x^2 + 2 = 0$ f) $9x^4 + 14x^2 - 8 = 0$

3. Wyznacz pierwiastki równania należące do podanego przedziału.

- a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ c) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$, $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$
b) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$, $(-2; 0)$ d) $6x^4 - 7x^2 + 2 = 0$, $(-1; \frac{1}{2})$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $(x^2 - 3)^2 = (2x^2 - 1)(x^2 - 3)$ d) $x^4 + 4 = 3\sqrt{2}x^2$
b) $(x^2 + 2)^2 = (x^2 + 2)(3x^2 - 4)$ e) $x^4 + 4 = 3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2x^2)$
c) $(2x^2 + 3)^2 - 9 = 8 - (3 - x^2)^2$ f) $x^4 - 6 = 2\sqrt{3}x^2 - 9$

3. a) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

b) $x = -\sqrt{3}$

c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

d) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a), b) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$

c) sprzeczne

d) $x = -\sqrt[4]{8}$ lub $x = -\sqrt[4]{2}$ lub $x = \sqrt[4]{2}$ lub $x = \sqrt[4]{8}$

e) $x = -\sqrt{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$ lub $x = \sqrt{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$

f) $x = -\sqrt[4]{3}$ lub $x = \sqrt[4]{3}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Aby rozwiązać równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$, podstawiamy $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ c) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Aby rozwiązać równanie $x^2 - 2|x| - 8 = 0$, podstawiamy $t = |x|$ (zakładamy, że $t \geq 0$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \qquad x^2 = |x|^2 = t^2$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36, \quad \sqrt{\Delta} = 6$$

$$t_1 = \frac{2-6}{2} = -2 < 0, \quad t_2 = \frac{2+6}{2} = 4 \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x :

$$|x| = 4, \text{ czyli } x = -4 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ b) $x^2 - 7|x| + 10 = 0$ c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

Zakładamy, że $x \geq 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \text{ zatem } t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \geq 0, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \geq 0$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\sqrt{x} = 1 \text{ lub } \sqrt{x} = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiąż równanie.

a) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ b) $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$ c) $6x - \sqrt{x} - 1 = 0$

7. a) Zakładamy, że $x \geq 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 + t - 6 = 0, \quad \Delta = 1 + 24 = 25, \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = \frac{-1-5}{2} < 0, \text{ sprzeczne z założeniem}$$

$$t_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$\sqrt{x} = 2, \text{ czyli } x = 4$$

b) Zakładamy, że $x \geq 0$. Wówczas $x + 5\sqrt{x} + 6 \geq 6$, zatem równanie jest sprzeczne.

c) Zakładamy, że $x \geq 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$6t^2 - t - 1 = 0, \quad \Delta = 1 + 24 = 25, \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = \frac{1-5}{12} < 0, \text{ sprzeczne z założeniem}$$

$$t_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3}, \text{ czyli } x = \frac{4}{9}$$

5. a) $(x^3 - 1)(x^3 - 8) = 0$

$$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 8$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 2$$

b) $(x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0$

$$x^3 = -1 \text{ lub } x^3 = 8$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 2$$

c) $(x^4 + 1)(x^4 - 16) = 0$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

6. a) Podstawiamy $t = |x|$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t - 2)^2 = 0$$

$$t = 2$$

$$|x| = 2$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

b) Podstawiamy $t = |x|$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$\Delta = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t = 2 \text{ lub } t = 5$$

$$|x| = 2 \text{ lub } |x| = 5$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = -5 \text{ lub } x = 5$$

$$x = -5 \text{ lub } x = 5$$

c) Podstawiamy $t = |x|$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$\Delta = 49, \quad \sqrt{\Delta} = 7$$

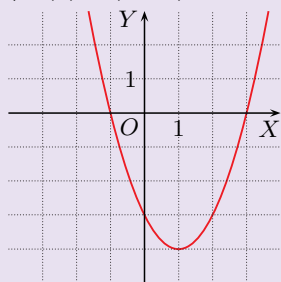
$$t = 6 \text{ lub } t = -1 < 0$$

$$|x| = 6$$

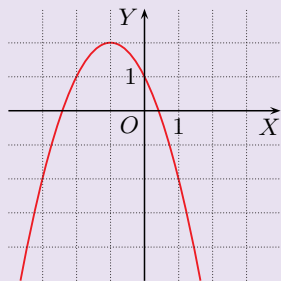
$$x = -6 \text{ lub } x = 6$$

Odpowiedzi do zadań

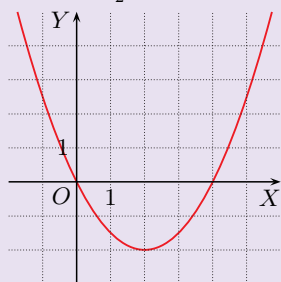
1. a) $f(x) = (x-1)^2 - 4$



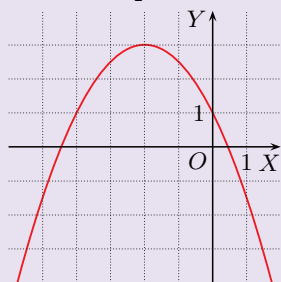
b) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$



c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$



d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$



e) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

f) $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$

Przypomnij sobie

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f :

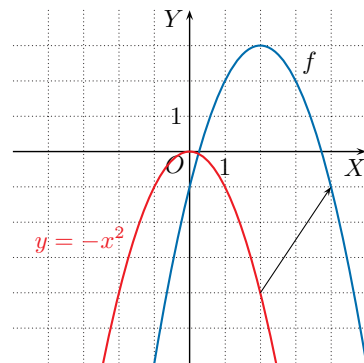
$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$y_w = f(x_w) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 3$$

Korzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $y = a(x-x_w)^2 + y_w$, gdzie $a \neq 0$, i otrzymujemy wzór funkcji f w postaci:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = -x^2$ o wektor $[2, 3]$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.

Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f :

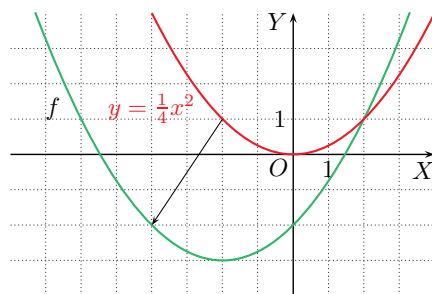
$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y_w = f(x_w) = \frac{1}{4}(-2)^2 - 2 - 2 = -3$$

Funkcja f ma postać kanoniczną:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x - (-2))^2 - 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ o wektor $[-2, -3]$.



1. Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji f , a następnie naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$

2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = 3x^2, g(x) = 3x^2 - 6x + 5$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2, g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 4x^2, g(x) = 4x^2 + 24x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2, g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

2. a) $g(x) = 3(x-1)^2 + 2, [1, 2]$

b) $g(x) = 4(x+3)^2 - 36, [-3, -36]$

c) $g(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1, [3, 1]$

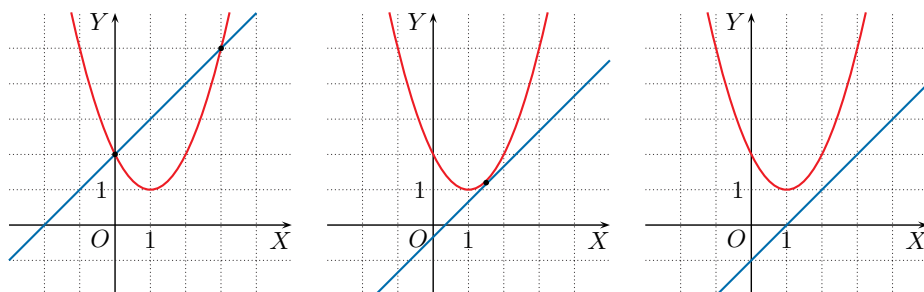
d) $g(x) = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{16}, [-\frac{1}{2}, -\frac{17}{16}]$

Multibook

- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

R 1.4. Układy równań

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy równanie $x^2 = 2x$, czyli:

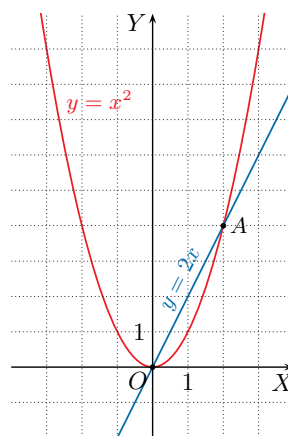
$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



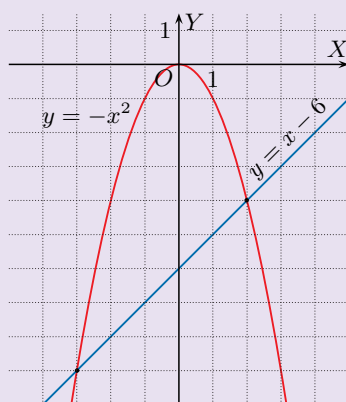
Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0, 0)$ i $A(2, 4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

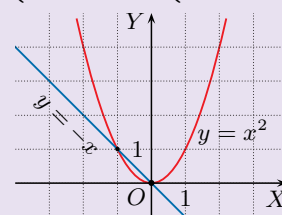


Uczeń:

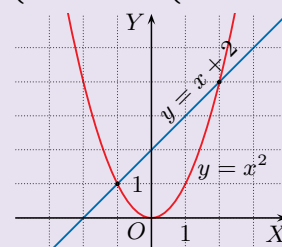
- rozwiązuje algebraicznie układ równań, z których jedno jest równaniem paraboli, a drugie – równaniem prostej, i podaje interpretację geometryczną rozwiązania,
- podaje interpretację geometryczną rozwiązania układu równań, znajdując punkty wspólne prostej i paraboli,
- zaznacza w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności.

Ćwiczenie 1

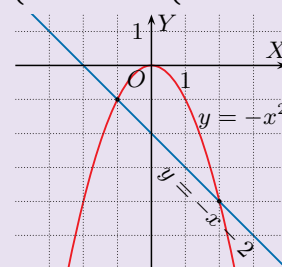
a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$



Multibook

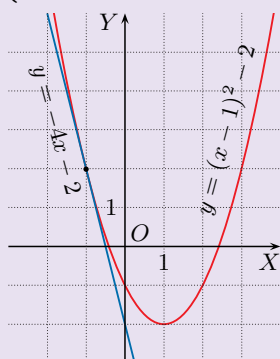
- Układy równań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

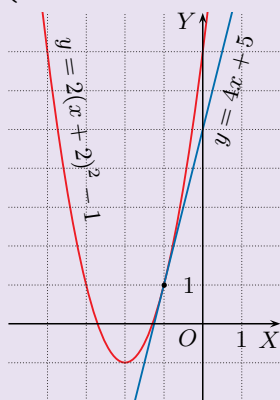
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

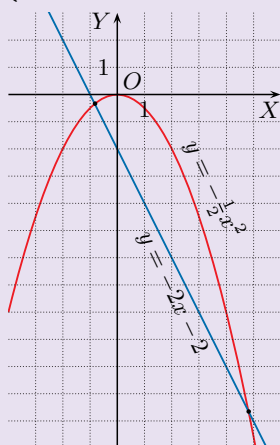


b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ y = 4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \\ y = -4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$



D Przykład 2

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.

Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Prosta } y = 2x - 1 \text{ i parabola } y = x^2 \text{ mają jeden punkt wspólny.}$$

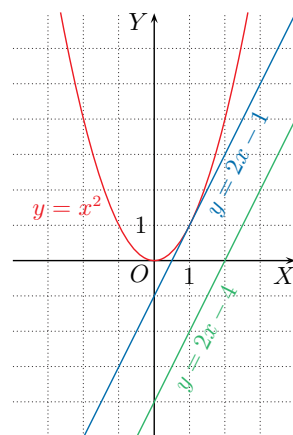
Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 4 &= 0 \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0 \end{aligned}$$

Równanie nie ma rozwiązania, czyli układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = 2x - 4$ nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4y = x^2 + 2x - 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$

$$x^2 + 2x + 3 = 3x + 1$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = -7 < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

b) $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$

$$-2x + 7 = -2x^2 + 4x + 2$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = -4 < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

$$-\frac{1}{4}x^2 - x - 2 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

$$\Delta = -3\frac{3}{4} < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

Zadania

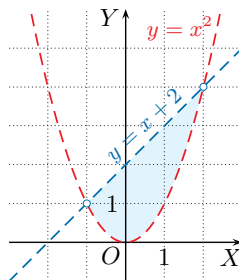
- Wyznacz współrzędne punktów przecięcia paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ oraz podanej prostej (rysunek obok).
 a) $l_1: y = \frac{1}{2}x$ b) $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$
- Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?
 a) $f(x) = -x + 2, g(x) = x^2 - 2x$ c) $f(x) = 2x - 4, g(x) = -2x^2$
 b) $f(x) = x - 6, g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1, g(x) = \frac{1}{2}x^2$
- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
 a) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$
- Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Wyznacz wektor $\vec{P_1P_2}$.
 a) $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = -2x + 3, g(x) = x^2$
 b) $f(x) = x + 1, g(x) = -2x^2 + 3$ d) $f(x) = -x - 2, g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < x + 2 \end{cases}$$

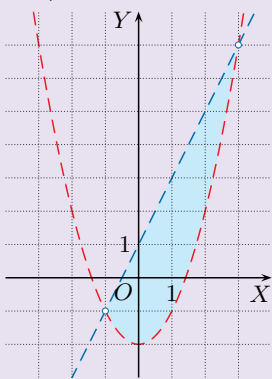
Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej prostej $y = x + 2$.



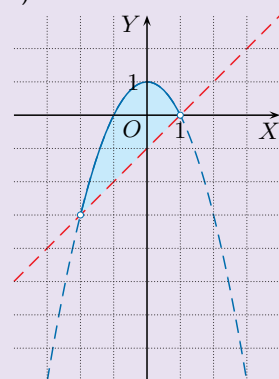
Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności.

- a) $\begin{cases} y > x^2 - 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y > x - 1 \\ y \leq -x^2 + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y < -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y \geq 0,5x^2 - 2 \end{cases}$

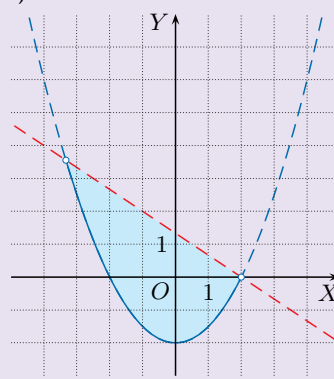
5. a)



b)

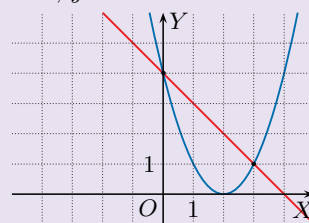


c)

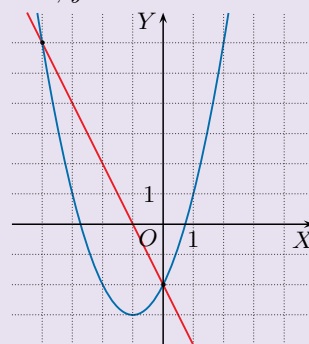


Odpowiedzi do zadań

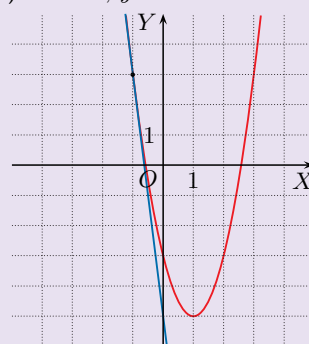
1. a) $(0, 0), (2, 1)$
 b) $(-4, 4), (2, 1)$
 2. a) 2 b) 0 c) 2 d) 1
 3. a) $x = 0, y = 4$ lub $x = 3, y = 1$



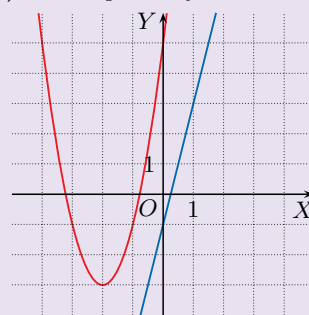
- b) $x = -4, y = 6$ lub $x = 0, y = -2$



- c) $x = -2, y = 6$ lub $x = 2, y = -2$
 d) $x = -4, y = 0$ lub $x = 2, y = 3$
 e) $x = -1, y = 3$



- f) układ sprzeczny



4. a) $[1, 1]$ b) $[\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}]$
 c) $[4, -8]$ d) $[3, -3]$

Uczeń:

- stosuje wzory Viète’a do wyznaczania sumy oraz iloczynu pierwiastków równania kwadratowego,
- określa znaki pierwiastków równania kwadratowego, wykorzystując wzory Viète’a,
- stosuje wzory Viète’a do obliczania wartości wyrażeń zawierających sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego,
- układa równanie kwadratowe, którego pierwiastki spełniają określone warunki,
- wyprowadza wzory Viète’a.

Ćwiczenie 1

a) $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$
 $= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, czyli:
 $b^2 = 4ac$

Wówczas:

$$2x_0 = 2 \cdot \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_0^2 = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 \cdot x_2 = -7$
b) $x_1 + x_2 = 1\frac{1}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -3\frac{1}{2}$
c) $x_1 + x_2 = 2\frac{1}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$
d) brak pierwiastków
e) $x_1 + x_2 = -12$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$
f) $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$

1.5. Wzory Viète’a

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, można wyznaczyć ich sumę i iloczyn.

Twierdzenie – wzory Viète’a

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Wzory Viète’a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, czyli gdy $\Delta \geq 0$.

D Ćwiczenie 1

Przeczytaj dowód wzoru na iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

- a) Udowodnij wzór na sumę pierwiastków równania kwadratowego.
b) Udowodnij, że jeśli $\Delta = 0$, czyli trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny x_0 , to wzory Viète’a mają postaci $2x_0 = -\frac{b}{a}$ i $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

- a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.
 $\Delta = 400 - 120 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki x_1, x_2 .
 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7,5$
b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$
 $\Delta = 49 - 72 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

- a) $x^2 - 9x - 7 = 0$ c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$ e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$
b) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$ d) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

Przykład 2

Określ znaki pierwiastków równania $7x^2 - 9x + 1 = 0$.

$\Delta = 81 - 28 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2 .

Korzystamy ze wzoru Viète'a na iloczyn pierwiastków:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{7}$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$, liczby x_1, x_2 mają ten sam znak (obie są ujemne lub obie są dodatnie). Korzystamy ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{7}$$

Oba pierwiastki mają ten sam znak oraz $x_1 + x_2 > 0$, zatem x_1, x_2 są liczbami dodatnimi.

Zwróć uwagę na to, że aby określić znaki pierwiastków równania kwadratowego, nie musimy ich wyznaczać. Możemy skorzystać z podanych obok warunków.

Liczby x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

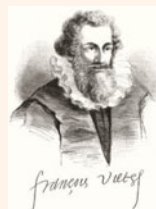
Ćwiczenie 3

Określ znaki pierwiastków równania.

- a) $x^2 - x - 25 = 0$ c) $12x^2 - 20x + 5 = 0$ e) $-2x^2 - 15x - 3 = 0$
b) $2x^2 + 6x + 3 = 0$ d) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ f) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + \frac{1}{2} = 0$

Czy wiesz, że...

François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III oraz Henryka IV, dla którego w 1590 r. złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.



Przykład 3

Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to suma ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków.

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = 1 + 100 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = -25 < 0$

Pierwiastki mają różne znaki.

b) $\Delta = 36 - 24 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} > 0$

$x_1 + x_2 = -3 < 0$

Oba pierwiastki są ujemne.

c) $\Delta = 400 - 240 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{12} > 0$,

$x_1 + x_2 = \frac{20}{12} > 0$

Oba pierwiastki są dodatnie.

d) $\Delta = 25 - 48 < 0$

Równanie nie ma pierwiastków.

e) $\Delta = 225 - 24 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} > 0$,

$x_1 + x_2 = -\frac{15}{2} < 0$

Oba pierwiastki są ujemne.

f) $\Delta = 6 - 2\sqrt{2} = \sqrt{36} - \sqrt{8} > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$

$x_1 + x_2 = \sqrt{3} > 0$

Oba pierwiastki są dodatnie.

Ćwiczenie 4

a) $\Delta = 1 + 4 > 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$

b) $\Delta = 36 + 24 > 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = (-3)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 12$$

c) $\Delta = 16 - 24 < 0$

Równanie nie ma pierwiastków.

Odpowiedzi do zadań

1. a) różne

b) ujemne

c) dodatnie

d) brak pierwiastków

e) dodatnie

f) różne

2. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$

3. a) -1 b) $-\frac{8}{3}$ c) $\frac{10}{3}$

4. a) 69 b) 12 c) 12

5. a) $\frac{13}{9}$ b) $\frac{57}{4}$ c) $\frac{65}{4}$

6. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \left(\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)^2 - \frac{2}{\frac{c}{a}} = \left(-\frac{b}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$

7. a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{23}{49}$

8. a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7$, czyli $b = -7a$.

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 3, \text{ czyli } c = 3a.$$

Wówczas:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49a^2 - 12a^2 = 37a^2 > 0,$$

zatem można ułożyć takie równanie.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3$, czyli $b = -3a$.

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 7, \text{ czyli } c = 7a.$$

Wówczas:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9a^2 - 28a^2 = -19a^2 < 0,$$

zatem nie można ułożyć takiego równania.

Przykład 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania $6x^2 - 9x + 2 = 0$.

Ponieważ $\Delta = 81 - 48 > 0$, równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2 .

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 1 = 0$

b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$

c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Zadania

1. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 + x - 1 = 0$

c) $13x^2 - 13x + 3 = 0$

e) $\sqrt{3}x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $15x^2 + 8x + 1 = 0$

d) $13x^2 + 13x + 4 = 0$

f) $-x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

D 2. Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki, to suma ich odwrotności jest równa $-\frac{b}{c}$.

3. Oblicz sumę odwrotności pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$

b) $-2x^2 - 8x - 3 = 0$

c) $4x^2 + 20x - 6 = 0$

4. Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 + 9x + 6 = 0$

b) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

5. Oblicz kwadrat różnicy pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$

b) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 2 = 0$

D 6. Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 , to suma odwrotności ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Wskazówka. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

7. Oblicz sumę odwrotności kwadratów pierwiastków równania.

a) $-x^2 + 10x + 10 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$

c) $-x^2 + 3x + 7 = 0$

8. Czy można ułożyć równanie kwadratowe tak, aby suma i iloczyn jego pierwiastków były odpowiednio równe: a) 7 i 3, b) 3 i 7?

9. Korzystając ze wzorów Viète'a, ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby dwa razy większe od pierwiastków równania:

a) $x^2 - 5x + 1 = 0$,

b) $-x^2 + 6x - 2 = 0$,

c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.

9. Pierwiastki danego równania: x_1, x_2 .

Pierwiastki szukanego równania: $x'_1 = 2x_1, x'_2 = 2x_2$.

a) $\Delta = 25 - 4 > 0, x_1 + x_2 = 5, x_1 \cdot x_2 = 1$

$$x'_1 + x'_2 = 2(x_1 + x_2) = 10$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4$$

Przykładowa odpowiedź: $x^2 - 10x + 4 = 0$.

b) $\Delta = 36 - 8 > 0, x_1 + x_2 = 6, x_1 \cdot x_2 = 2$

$$x'_1 + x'_2 = 12$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = 8$$

Przykładowa odpowiedź: $x^2 - 12x + 8 = 0$.

c) $\Delta = 9 - 2 > 0$,

$$x_1 + x_2 = 3, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x'_1 + x'_2 = 6, x'_1 \cdot x'_2 = 2$$

Przykładowa odpowiedź:

$$x^2 - 6x + 2 = 0.$$

R 1.6. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

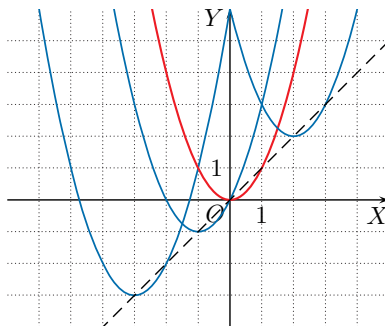
Przykład 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe?

Wykresem funkcji $y = (x - m)^2 + m$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne (m, m) , czyli leży na prostej $y = x$. Z rysunku odczytujemy, że funkcja:

$$y = (x - m)^2 + m$$

ma dwa miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 0)$.



Ćwiczenie 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi?

Przykład 2

Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2 - mx + 2 = 0$ w zależności od parametru m . Wyznacz te pierwiastki.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 - 16$$

• Równanie ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta = m^2 - 16 > 0$, czyli dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$. Wówczas:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 16}}{4} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 16}}{4}$$

• Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek, gdy $\Delta = m^2 - 16 = 0$, czyli dla $m = -4$ (wówczas $x_0 = -1$) i dla $m = 4$ (wówczas $x_0 = 1$).

• Równanie nie ma pierwiastków, gdy $\Delta = m^2 - 16 < 0$, czyli dla $m \in (-4; 4)$.

Ćwiczenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki? Wyznacz te pierwiastki.

$$\text{a) } -3x^2 + 2x - m = 0 \quad \text{b) } x^2 + (2m + 1)x + 5 = 0 \quad \text{c) } x^2 + mx - m = 0$$

Ćwiczenie 3

Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m .

$$\text{a) } x^2 + (m - 1)x + 2m - 5 = 0 \quad \text{b) } -2x^2 + 2mx + 2x + m - \frac{1}{2} = 0$$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = m^2 - 10m + 21 = (m - 7)(m - 3)$,
czyli równanie ma:

0 pierwiastków dla $m \in (3; 7)$,

1 pierwiastek dla $m \in \{3, 7\}$,

2 pierwiastki dla $m \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$.

b) $\Delta = 4m^2 + 16m = 4m(m + 4)$,

czyli równanie ma:

0 pierwiastków dla $m \in (-4; 0)$,

1 pierwiastek dla $m \in \{-4, 0\}$,

2 pierwiastki dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$.

Uczeń:

- przeprowadza analizę zadania z parametrem,
- zapisuje konieczne założenia tak, aby zachodziły warunki podane w treści zadania,
- wyznacza te wartości parametru, dla których są spełnione warunki zadania,
- rozwiązuje zadania z parametrem o znacznym stopniu trudności.

Ćwiczenie 1

Z rysunku odczytujemy, że funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka jest mniejsza od -1 , czyli dla $m \in (-\infty; -1)$.

Ćwiczenie 2

a) $\Delta = 4 - 12m > 0$, zatem $m \in (-\infty; \frac{1}{3})$.

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 12m}}{-6} = \frac{1 + \sqrt{1 - 3m}}{3},$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 3m}}{3}$$

b) $\Delta = 4m^2 + 4m - 19 > 0$,
zatem $m \in (-\infty; \frac{-1 - 2\sqrt{5}}{2}) \cup$

$$\cup \left(\frac{-1 + 2\sqrt{5}}{2}; \infty \right).$$

$$x_1 = \frac{-2m - 1 - \sqrt{4m^2 + 4m - 19}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-2m - 1 + \sqrt{4m^2 + 4m - 19}}{2}$$

c) $\Delta = m^2 + 4m > 0$,
zatem $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$.

$$x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2}$$

Multibook

- Równanie kwadratowe z parametrem

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } \begin{cases} \Delta = k^2 + 12 > 0 \\ x_1 x_2 = k - 2 < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ k < 2 \end{cases}$$

Równanie ma pierwiastki o różnych znakach dla $k \in (-\infty; 2)$.

$$\text{b) } \begin{cases} \Delta = (k+1)^2 > 0 \\ x_1 x_2 = -k < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ k > 0 \end{cases}$$

Równanie ma pierwiastki o różnych znakach dla $k \in (0; \infty)$.

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - kx + k - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach?

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$. Pierwiastki te mają jednakowe znaki, gdy iloczyn tych liczb jest dodatni: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

$$\Delta = k^2 - 4(k-1) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2, \quad \frac{c}{a} = k-1$$

Otrzymujemy zatem dwie nierówności, które muszą być spełnione jednocześnie:

$$(k-2)^2 > 0 \quad \text{i} \quad k-1 > 0$$

$$k \neq 2 \quad \text{i} \quad k > 1$$

Równanie ma zatem dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru k równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

$$\text{a) } x^2 - (k+2)x + k - 2 = 0 \qquad \text{b) } x^2 + (k-1)x - k = 0$$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2 - 4(m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest liczbą ujemną?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2 .

1° Dla $2m+1 = 0$, czyli dla $m = -\frac{1}{2}$, równanie jest liniowe – ma tylko jeden pierwiastek. Nie są więc spełnione warunki zadania.

2° Dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ równanie jest kwadratowe – ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-4(m-1))^2 - 4 \cdot (2m+1) \cdot 4 = 16m^2 - 64m$$

$$\Delta > 0, \quad \text{gdy} \quad 16m^2 - 64m > 0$$

$$16m(m-4) > 0$$

$$\text{(I)} \qquad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (4; \infty) \qquad m \neq -\frac{1}{2}$$

Sumę odwrotności pierwiastków wyznaczamy, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{4(m-1)}{4} = m-1$$

Warunek $m-1 < 0$ jest spełniony, gdy:

$$\text{(II)} \qquad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1) \qquad m \neq -\frac{1}{2}$$

Zatem ostatecznie wyjściowe równanie ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest ujemna, gdy warunki (I) i (II) są jednocześnie spełnione, czyli gdy $m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$.

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest większa od -6 ?

a) $(m+3)x^2 + (m+2)x + 1 = 0$ b) $mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$

Ćwiczenie 6

Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 17?

a) $x^2 + (k-1)x + 4 = 0$ b) $x^2 - (k-2)x + \frac{1}{2}k^2 + 1 = 0$

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m+2)x^2 - 2mx + m \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2 .

1° Dla $m = -2$ otrzymujemy nierówność liniową $4x - 2 \geq 0$. Nie spełnia ona warunków zadania.

2° Dla $m \neq -2$ otrzymujemy nierówność kwadratową.

Zachodzi ona dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy jednocześnie spełnione są dwa warunki:

$$\begin{cases} m+2 > 0 & \text{(I)} \\ \Delta \leq 0 & \text{(II)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Parabola ma ramiona skierowane} \\ \text{do góry i ma co najwyżej jeden} \\ \text{punkt wspólny z osią } OX. \end{array}$$

Warunek (I): $m \in (-2; \infty)$

Warunek (II): $\Delta = (-2m)^2 - 4m(m+2) = 4m^2 - 4m^2 - 8m = -8m$

$$\Delta \leq 0, \text{ gdy } m \in [0; \infty).$$

Zatem ostatecznie wyjściowa nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy $m \in [0; \infty)$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru k podana nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $x^2 - (k-3)x + 4k \geq 0$ b) $(k-1)x^2 - 2kx + k-1 \leq 0$

Zadania

D 1. Wykaż, że równanie $2x^2 + mx - 3 = 0$ ma rozwiązanie dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$.

D 2. Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m , dla której równanie $x^2 + (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

Ćwiczenie 5

a) $\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 8 > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -m-2 > -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq -3 \\ m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty) \\ m < 4 \end{cases}$$

$$m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$$

b) $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 6m + 1 > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -m+1 > -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \in (-\infty; 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}; \infty) \\ m < 7 \end{cases}$$

$$m \in (-\infty; 0) \cup (0; 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}; 7)$$

Ćwiczenie 6

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ &= \frac{b^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{c}{a} \end{aligned}$$

a) $\Delta = k^2 - 2k - 15 > 0$

dla $k \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

$$x_1^2 + x_2^2 = (k-1)^2 - 8 = 17$$

dla $k = -4$ i dla $k = 6$

b) $\Delta = -k^2 - 4k > 0$

dla $k \in (-4; 0)$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 - 4k = 17$$

dla $k = -\frac{15}{4}$

Ćwiczenie 7

a) $a = 1 > 0$, zatem nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = (k-3)^2 - 16k =$$

$$= k^2 - 22k + 9 \leq 0$$

dla $k \in [11 - 4\sqrt{7}; 11 + 4\sqrt{7}]$.

b) 1° Dla $k = 1$ otrzymujemy nierówność liniową $-2x \leq 0$, która nie spełnia warunków zadania.

2° Dla $k \neq 1$ otrzymujemy nierówność kwadratową, która jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy jednocześnie zachodzą dwa warunki:

$$\begin{cases} k-1 < 0 \\ \Delta = 8k-4 \leq 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} k < 1 \\ k \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem $k \in (-\infty; \frac{1}{2}]$.

Odpowiedzi do zadań

1. $\Delta = m^2 + 24 > 0$ dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$, czyli równanie ma rozwiązanie dla $m \in \mathbb{R}$.

2. $\Delta = -3m^2 + 2m - 3$

$$\Delta_m = 4 - 36 < 0$$

oraz współczynnik przy m^2 jest ujemny, czyli:

$$\Delta = -3m^2 + 2m - 3 < 0$$

dla każdego $m \in \mathbb{R}$, zatem równanie nie ma rozwiązania dla żadnej wartości parametru m .

3. a) $m \in (-\infty; \frac{9}{2}]$
 b) $m \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$
 c) $m \in (-\infty; 4]$
 d) $m \in (-\infty; -1] \cup (1; \infty)$
4. a) $k \in (-\infty; -3)$
 b) $k \in (5; \infty)$
 c) $k \in (1; \infty)$
 d) $k \in (1; \infty)$
5. a) $m \in (4; \infty)$
 b) $m \in (-3; -\frac{3}{4})$
 c) nie ma takiego m
 d) $m \in (2; \infty)$
6. a) $m \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$
 b) nie ma takiego m
7. a) $k \in (\frac{9}{4}; \infty)$
 b) $k \in [-6; 6]$
 c) $k \in (-2; 6)$
 d) $k \in [2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}]$
 e) Dla $k = -1$ otrzymujemy nierówność: $-2x - 1 \leq 0$, która nie jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
 Dla $k \neq -1$ nierówność jest spełniona, gdy:

$$\begin{cases} k + 1 < 0 \\ \Delta = 4k + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < -1 \\ k \leq -2 \end{cases}$$

 Zatem $k \in (-\infty; -2]$.
 f) Dla $k = 0$ otrzymujemy nierówność: $-2x - 1 > 0$, która nie jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
 Dla $k \neq 0$ nierówność zachodzi, gdy:

$$\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = -4k + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ k > 1 \end{cases}$$

 Zatem $k \in (1; \infty)$.

3. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jeden pierwiastek?
 a) $x^2 - 6x + 2m = 0$ c) $mx^2 - 4x + 1 = 0$
 b) $\frac{1}{2}x^2 - (m - 2)x + m - 2 = 0$ d) $(1 - m)x^2 - (4m - 4)x - 3m + 5 = 0$
4. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?
 a) $x^2 - 2x + k + 3 = 0$ c) $x^2 + (2k + 1)x - 2k + 2 = 0$
 b) $x^2 - (k - 4)x - k + 5 = 0$ d) $x^2 + (1 - 2k)x + 4 - 4k = 0$
5. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami dodatnimi?
 a) $x^2 - (m + 2)x + m + 5 = 0$ c) $x^2 + (2m - 5)x + 2m - 6 = 0$
 b) $x^2 + 4mx + m + 3 = 0$ d) $x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 - m - 6 = 0$
6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami ujemnymi?
 a) $\frac{1}{4}x^2 + x + m^2 - 4m = 0$ b) $-x^2 + \frac{m}{2}x - m + 1 = 0$
7. Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$?
 a) $x^2 + 3x + k > 0$ d) $x^2 - kx + k + 1 \geq 0$
 b) $x^2 + kx + 9 \geq 0$ e) $(k + 1)x^2 - 2x - 1 \leq 0$
 c) $x^2 - kx + k + 3 > 0$ f) $kx^2 + 2(k - 1)x + k - 1 > 0$
8. Dla jakich wartości parametru k funkcja f jest określona dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$?
 a) $f(x) = \sqrt{x^2 + (k + 2)x + 2k + 1}$ d) $f(x) = \sqrt{(k - 4)x^2 + 2kx + 2k}$
 b) $f(x) = \sqrt{(5 - k)x^2 + (k - 2)x + 1}$ e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{kx^2 + 2kx + 2}}$
 c) $f(x) = \sqrt{(2 - k)x^2 - 2x + 2 - k}$ f) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt{kx^2 + (2k - 1)x + 2k - 1}}$
9. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające podany warunek?
 a) $x^2 - (a - 4)x - 2a = 0$, $x_1 + x_2 > 2$
 b) $x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2)$
 c) $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$, $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 0$
 d) $-x^2 + (2a - 1)x + a = 0$, $(x_1 - x_2)^2 = 5$

8. a) $k \in [0; 4]$ b) $k \in [-4; 4]$ c) $k \in (-\infty; 1]$
 d) Rozpatrujemy nierówność $(k - 4)x^2 + 2kx + 2k \geq 0$.
 Dla $k = 4$ otrzymujemy nierówność: $8x + 8 \geq 0$, która nie jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
 Dla $k \neq 4$ nierówność zachodzi, gdy:

$$\begin{cases} k - 4 > 0 \\ \Delta = -4k^2 + 32k \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 4 \\ k \in (-\infty; 0] \cup [8; \infty) \end{cases}$$

 Zatem $k \in [8; \infty)$.
 e) $k \in [0; 2)$ f) $k \in (\frac{1}{2}; \infty)$
9. a) $a \in (6; \infty)$
 b) nie ma takiego a
 c) $a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; 2) \cup (6; \infty)$
 d) $a = -1$ lub $a = 1$

10. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 6?

a) $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ b) $x^2 - 6(a-3)x + a - 3 = 0$

11. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 16?

a) $x^2 - 2ax + 3 = 0$ b) $x^2 + (4-2a)x + a^2 + 1 = 0$

12. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + ax + 1 = 0$ jest równa 7?

13. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $-x^2 - 2x + a^2 + a + 1 = 0$ przyjmuje największą wartość?

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie ma tylko jedno rozwiązanie.

a) $x(x^2 - (2m-4)x + m - 2) = 0$ b) $(x+3)(x^2 + (m+3)x + m^2) = 0$

15. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$, która każdemu argumentowi $m \in \mathbb{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania.

a) $(m-1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ b) $(m^2 + 2m)x^2 + 2mx + 3 = 0$

16. Niech $y = f(m)$ będzie funkcją określającą wartość iloczynu dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x + m^2 + 4m + 1 = 0$ w zależności od parametru m . Podaj dziedzinę funkcji f oraz wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich iloczyn był najmniejszy.

17. Funkcja $y = f(m)$ opisuje sumę dwóch różnych pierwiastków równania:

$$\frac{1}{m}x^2 + (m+1)x + \frac{m}{64} = 0$$

Wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich suma była największa.

18. Dla jakich wartości parametru m równanie ma cztery różne pierwiastki?

a) $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ c) $x^4 + mx^2 - m - 6 = 0$
b) $x^4 - x^2 + m = 0$ d) $x^4 + (m-2)x^2 + 4 - m = 0$

19. Wyznacz liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m .

a) $x^4 + mx^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + m = 0$ c)* $|x^2 + 2x - 8| = m$

20. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające nierówność $|x_1| + |x_2| \leq 1$?

Wskazówka. Obie strony nierówności $|x_1| + |x_2| \leq 1$ można podnieść do kwadratu.

18. a) Aby równanie $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ miało cztery różne pierwiastki, równanie $t^2 + mt + 1 = 0$, gdzie $t = x^2 \geq 0$, musi mieć dwa różne pierwiastki dodatnie, zatem muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = -m > 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ m \in \mathbb{R} \\ m < 0 \end{cases}$$

Ostatecznie $m \in (-\infty; -2)$.

- b) $m \in (0; \frac{1}{4})$
c) $m \in (-\infty; -6)$
d) $m \in (-\infty; -2\sqrt{3})$

19. a) 0 dla $m \in (-4; \infty)$,
2 dla $m = -4$,
4 dla $m \in (-\infty; -4)$
b) 0 dla $m \in (0; \infty)$,
1 dla $m = 0$,
2 dla $m \in (-\infty; 0)$
c) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 dla $m \in \{0\} \cup (9; \infty)$,
3 dla $m = 9$,
4 dla $m \in (0; 9)$

20. $m \in (6; \infty)$

10. a) $a = -8$
b) $a \in (-\infty; 3) \cup (\frac{28}{9}; \infty)$

11. a) $a = -\frac{\sqrt{22}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{22}}{2}$
b) $a = 4 - \sqrt{17}$

12. $a = -3$, $a = 3$

13. $\Delta = 4(a^2 + a + 2) > 0$ dla $a \in \mathbb{R}$. Wyrażenie:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c} = -\frac{2}{a^2 + a + 1}$$

przyjmuje wartość największą, gdy mianownik $a^2 + a + 1$ przyjmuje wartość najmniejszą, czyli dla $a = -\frac{1}{2}$.

14. a) $m \in [2; 3)$

b) Rozwiązaniem równania jest -3 . Równanie to nie ma innych rozwiązań, gdy równanie:

$$x^2 + (m+3)x + m^2 = 0$$

1° ma tylko jedno rozwiązanie: $x = -3$, czyli dla $m = 3$;

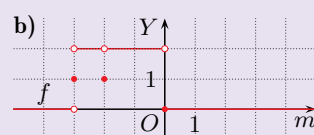
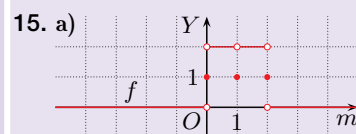
2° nie ma rozwiązań, czyli:

$$\Delta = -3m^2 + 6m + 9 < 0$$

skąd $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

Ostatecznie:

$$m \in (-\infty; -1) \cup [3; \infty).$$



16. $\Delta = -4m^2 - 16m > 0$, zatem $D_f = (-4; 0)$

$$f(m) = x_1 x_2 = m^2 + 4m + 1$$

Iloczyn $x_1 x_2$ jest najmniejszy, gdy funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość, czyli dla $m = -2$. Pierwiastki równania $x^2 - 2x - 3 = 0$:

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

17. $x_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{16}$, $x_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{16}$

Uczeń:

- stosuje pojęcia najmniejszej i największej wartości funkcji,
- wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym,
- stosuje własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

Ćwiczenie 1

Liczby oznaczamy przez p i q , wtedy:

a) $q = 38 - p$

$$p \cdot q = f(p) = p(38 - p) = -p^2 + 38p$$

$$p_w = 19, f(p_w) = 361$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 361.

b) $q = \frac{1}{2} - p$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \frac{1}{2}p$$

$$p_w = \frac{1}{4}, f(p_w) = \frac{1}{16}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{16}$.

c) $q = \sqrt{2} - p$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \sqrt{2}p$$

$$p_w = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(p_w) = \frac{1}{2}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{2}$.

1.7. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$$p + q = 12, \text{ zatem } q = 12 - p.$$

$$\text{Iloczyn tych liczb to } p \cdot q = p(12 - p) = 12p - p^2 = -p^2 + 12p.$$

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p \quad \text{Wykresem funkcji } f \text{ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.}$$

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

a) 38,

b) $\frac{1}{2}$,

c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

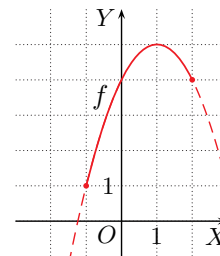
Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q .

Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.

Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_w = f(1) = 5$. Ponieważ $x_w \in [-1; 2]$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $[p_1; p_2]$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $[p_1; p_2]$, to obliczamy również $y_w = f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Ćwiczenie 2

$$p + 2q = 36, \text{ zatem } p = 36 - 2q$$

$$p \cdot q = f(q) = (36 - 2q)q = -2q^2 + 36q$$

$$q_w = 9, f(q_w) = 162$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 162.

Multibook

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Generator
testów i sprawdzianów

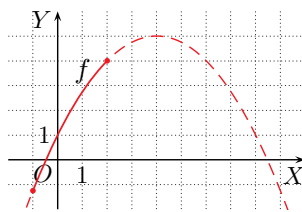
Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy kolejno:

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ oraz $f(2) = 4$
- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin [-1; 2]$

Zatem wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f przyjmowane są na końcach przedziału $[-1; 2]$, czyli są to odpowiednio $-\frac{5}{4}$ i 4 .



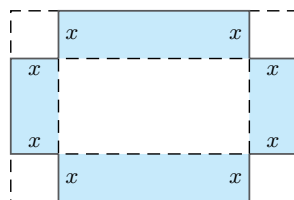
Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 8, [-3; 1]$ c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6, [-1; 3]$
 b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1, [0; 4]$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3, [-2; 1]$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów przedstawia funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji P : $D = (0; 20)$. $x > 0, 2x < 40, 2x < 60$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12,5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40000}{-32} = 1250$$

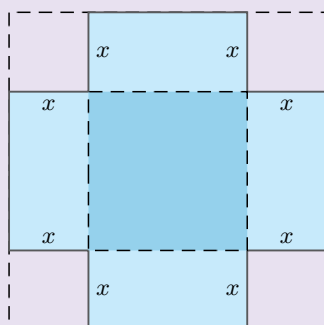
Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P jest przyjmowana dla x_w .

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2 .

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Ćwiczenie 4



Długość boku kwadratowego arkusza wynosi 40 cm. Pole powierzchni bocznej pudełka opisuje funkcja:

$$P(x) = 4(40 - 2x)x = -8x^2 + 160x, \quad x \in (0; 20)$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-160}{-16} = 10$$

Wartość ta jest równa:

$$f(10) = -800 + 1600 = 800$$

Boki wycinanych kwadratów mają długość 10 cm, a pole powierzchni bocznej wynosi 800 cm^2 .

Ćwiczenie 3

- a) $x_w = -2 \in [-3; 1]$,
 $y_w = f(x_w) = 4$ – wartość najmniejsza
 $f(-3) = 5$,
 $f(1) = 13$ – wartość największa
 b) $x_w = -1 \notin [0; 4]$,
 $f(0) = -1$ – wartość największa,
 $f(4) = -49$ – wartość najmniejsza
 c) $x_w = 2 \in [-1; 3]$,
 $y_w = f(x_w) = -2$ – wartość największa,
 $f(-1) = -11$ – wartość najmniejsza,
 $f(3) = -3$
 d) $x_w = -\frac{1}{2} \in [-2; 1]$,
 $y_w = f(x_w) = -\frac{7}{2}$ – wartość najmniejsza,
 $f(-2) = 1$ – wartość największa,
 $f(1) = 1$ – wartość największa

Komentarz

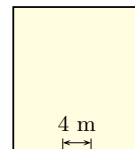
Samodzielne układanie zadań, które potem rozwiązujemy, to ważna umiejętność budująca głębsze zrozumienie przeróżnych pojęć. Warto zatem polecić takie ćwiczenie uczniom – mogą je wykonać samodzielnie lub w parach. W parach mogą rozwiązywać nawzajem swoje zadania. Jeśli będzie więcej czasu, można również zaproponować układanie zadań w grupach.

Odpowiedzi do zadań

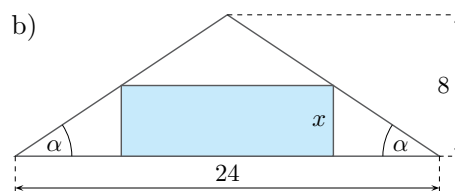
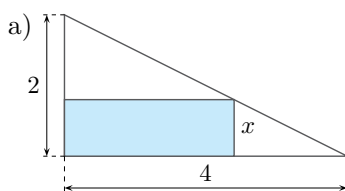
- a) najmniejsze:
 $f(0) = f(4) = -1$, $g(0) = -3$,
 największe: $f(2) = 3$,
 $g(4) = 9$
 b) najmniejsze: $f(-4) = -33$,
 $g(-1) = -\frac{7}{2}$,
 największe: $f(2) = 3$,
 $g(6) = 21$
- a) 8 b) 32
- Oznaczmy boki ogródka przez x i y , wówczas:
 $2(x + y) = 84$, czyli $y = 42 - x$
 Pole ogródka opisuje funkcja:
 $P(x) = x(42 - x)$,
 $D_P = (4; 42)$
 Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x = 21$.
 Wtedy $y = 42 - 21 = 21$.
 Wymiary ogródka o największej powierzchni: $21 \text{ m} \times 21 \text{ m}$.
- $7 \text{ m} \times 14 \text{ m}$
- $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$
- $3 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$
- a) $D_f = \mathbb{R}$
 Rozpatrzmy funkcję:
 $g(x) = x^2 - 4x + 8$
 w przedziale $[1; 4]$.
 Jej wartością najmniejszą jest $g(2) = 4$, a wartością największą $g(4) = 8$.
 Wartością najmniejszą funkcji f jest:
 $f(4) = \frac{1}{g(4)} = \frac{1}{8}$
 a wartością największą:
 $f(2) = \frac{1}{g(2)} = \frac{1}{4}$
- b) najmniejsze:
 $f(0) = f(4) = 2$,
 największa: $f(2) = 2\sqrt{2}$
 c) najmniejsza: $f(-1) = \frac{1}{3}$,
 największe:
 $f(-2) = f(0) = \frac{1}{2}$
 d) najmniejsze:
 $f(1) = f(5) = 4$,
 największa: $f(3) = 36$

Zadania

- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale: a) $[0; 4]$, b) $[-4; 6]$.
- Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.
 a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.
 b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.
- Trzeba ogrodzić prostokątną rabatę kwiatową o jak największej powierzchni, przy czym nie będzie ona grodzona na jednym boku na odcinku 4 m (rysunek obok). Wiadomo, że potrzeba do tego 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary ma ta rabata?



- Taras przylega jednym z boków do ściany domu (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego tarasu potrzeba 28 m bieżących paneli osłonowych i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten taras?
- Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Szkielet prostopadłościanu wykonano z 56 cm drutu. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jakie powinny być długości krawędzi tego prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Wyraż pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x . Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}$, $[1; 4]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2 - 10x + 4}}$, $[-2; 0]$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}$, $[0; 4]$

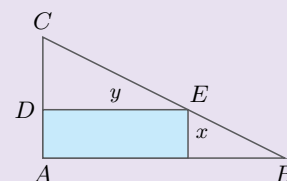
d) $f(x) = (x^2 - 6x + 3)^2$, $[1; 5]$

- a) Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC : $\frac{y}{4} = \frac{2-x}{2}$,
 czyli $y = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$.
 Zatem pole prostokąta opisuje funkcja:

$$P(x) = -2x^2 + 4x$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla $x_w = 1$. Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 1×2 .

b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 12×4



1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Przykład 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 209 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o 8 m .

Oznaczmy długość krótszego boku trawnika przez x ($x > 0$). Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}x(x + 8) &= 209 \\x^2 + 8x - 209 &= 0 \\ \Delta &= 64 + 836 = 900, \sqrt{\Delta} = 30 \\x_1 &= \frac{-8-30}{2} < 0, \quad x_2 = \frac{-8+30}{2} = 11\end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem trawnik ma wymiary $11 \text{ m} \times 19 \text{ m}$.

Ćwiczenie 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o: a) 6 m , b) 15 m .

Przykład 2

Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $12 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ ma zostać ułożony pas kostki brukowej o szerokości $x \text{ m}$ oraz powierzchni 63 m^2 (rysunek obok). Oblicz x .

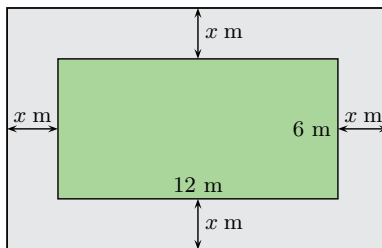
Powierzchnia pokryta kostką jest równa różnicy pól większego i mniejszego prostokąta:

$$(12 + 2x)(6 + 2x) - 12 \cdot 6 = 72 + 24x + 12x + 4x^2 - 72 = 4x^2 + 36x, \quad x > 0$$

Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}4x^2 + 36x &= 63 \\4x^2 + 36x - 63 &= 0 \\ \Delta &= 1296 + 1008 = 2304, \sqrt{\Delta} = 48 \\x_1 &= \frac{-36-48}{8} < 0, \quad x_2 = \frac{-36+48}{8} = 1,5\end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem szerokość pasa jest równa $1,5 \text{ m}$.



Uczeń:

- przeprowadza analizę zadania i zapisuje odpowiednie równanie, nierówność lub wzór funkcji kwadratowej opisujące daną zależność,
- znajduje rozwiązanie, które spełnia warunki zadania,
- przeprowadza analizę wyniku i podaje odpowiedź.

Ćwiczenie 1

Wymiary trawnika: $x, x + 6$, gdzie $x > 0$.

$$\begin{aligned}x(x + 6) &= 216 \\x^2 + 6x - 216 &= 0 \\ \Delta &= 36 + 864 = 900 \\x &= \frac{-6+30}{2} = 12 \text{ lub} \\x &= \frac{-6-30}{2} < 0\end{aligned}$$

Zatem trawnik ma wymiary $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$.

b) Wymiary trawnika:

$x, x + 15$, gdzie $x > 0$.

$$\begin{aligned}x(x + 15) &= 216 \\x^2 + 15x - 216 &= 0 \\ \Delta &= 225 + 864 = 1089 \\ \sqrt{\Delta} &= 33 \\x &= \frac{-15+33}{2} = 9 \text{ lub} \\x &= \frac{-15-33}{2} < 0\end{aligned}$$

Zatem trawnik ma wymiary $9 \text{ m} \times 24 \text{ m}$.

Multibook

- Krzywa łańcuchowa i krzywa balistyczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

$$(4 + 2x)(8 + 2x) - 4 \cdot 8 = 45$$

$$4x^2 + 24x - 45 = 0$$

$$\Delta = 576 + 720 = 1296$$

$$\sqrt{\Delta} = 36$$

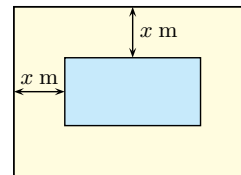
$$x = \frac{-24+36}{8} = 1,5 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-24-36}{8} < 0$$

Szerokość pasa wynosi 1,5 m.

Ćwiczenie 2

Wokół basenu o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ wyłożono kafelkami pas o szerokości $x \text{ m}$ oraz powierzchni 45 m^2 (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa?



Przykład 3

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny $x \text{ zł}$ za sztukę (tabela poniżej). Okazało się, że jest to zależność liniowa $s(x) = -40x + 3600$.

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł. Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Zysk ze sprzedaży jednej lalki, gdy kosztuje ona $x \text{ zł}$, jest równy $(x - 20) \text{ zł}$ (przyjmujemy, że $x \geq 20$). Określmy funkcję z opisującą roczny zysk ze sprzedaży s lalek dla ceny $x \text{ zł}$ za lalkę:

$$\begin{aligned} z(x) &= s(x) \cdot (x - 20) = (-40x + 3600)(x - 20) = \\ &= -40x^2 + 4400x - 72\,000, \text{ gdzie } x \in [20; 90] \end{aligned}$$

Funkcja z największą wartość przyjmuje w wierzchołku odpowiedniej paraboli:

$$x_w = -\frac{4400}{-80} = 55$$

Zatem zysk będzie największy dla ceny $x = 55 \text{ zł}$.

Wielkość sprzedaży będzie wówczas równa:

$$s(55) = -40 \cdot 55 + 3600 = 1400$$

a roczny zysk będzie wynosił:

$$z_{\max} = z(55) = 1400 \cdot (55 - 20) = 1400 \cdot 35 = 49\,000 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Dla ceny 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk w ciągu roku.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny $x \text{ zł}$ za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

a) Niech x oznacza cenę za jednego misia. Wielkość sprzedaży opisuje funkcja:

$$s(x) = 1000 - 50(x - 15) = -50x + 1750, \text{ gdzie } x \in [15; 35]$$

zysk = sprzedaż $\cdot$ (cena za sztukę - koszt jednej sztuki)

$$z(x) = (-50x + 1750) \cdot (x - 10) = -50x^2 + 2250x - 17500, \text{ gdzie } x \in [10; 35]$$

b) Funkcja z przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-2250}{-100} = 22,5$$

Zatem cenę misia należy ustalić na 22,50 zł. Wtedy wielkość sprzedaży to 625 sztuk, a zysk 7812,50 zł.

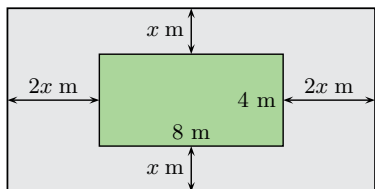
Ćwiczenie 4

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że każde obniżenie ceny o 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile powinien on obniżyć cenę, aby mieć największy zysk?

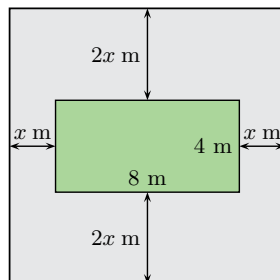
Zadania

- Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12\text{ m} \times 18\text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o $x\text{ m}$, a długość o $2x\text{ m}$. Powierzchnia placu wzrosła wówczas o 144 m^2 . Oblicz x .
- Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w prostokątną ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy, gdy:
 - $P = 2400\text{ cm}^2$, $x = 80\text{ cm}$, $y = 60\text{ cm}$,
 - $P = 2700\text{ cm}^2$, $x = 75\text{ cm}$, $y = 55\text{ cm}$.
- Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ ma zostać ułożona kostka brukowa. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji oblicz x .

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2



- Dany jest prostokąt o wymiarach $21\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakiej wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość 25 cm ?
- Dany jest prostokąt o wymiarach $3\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm ?
- Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest niekrótsza niż 6 m i nie dłuższa niż 10 m ?

3. Propozycja A: $(8 + 4x)(4 + 2x) = 32 + 66$

$x = 1,5\text{ m}$

Propozycja B: $(8 + 2x)(4 + 4x) = 32 + 78$

$x = 1,5\text{ m}$

5. $(3 + x)^2 + (10 + x)^2 > 13^2$

$x > 2$

6. Niech x oznacza szerokość pokoju, gdzie $x > 0$, wówczas:

$6^2 \leq x^2 + (x + 2)^2 \leq 10^2$, czyli

$(\sqrt{17} - 1)\text{ m} \leq x \leq 6\text{ m}$.

Ćwiczenie 4

Niech x oznacza, ile razy należy obniżyć cenę o 5 zł ,
 $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zysk opisuje funkcja:

$$\begin{aligned} z(x) &= (16 + 4x)(40 - 5x) = \\ &= -20(x + 4)(x - 8) \end{aligned}$$

Funkcja z przyjmuje największą wartość dla:

$$x_w = \frac{-4+8}{2} = 2$$

zatem cenę należy obniżyć o 10 zł .

Odpowiedzi do zadań

1. $(12+x)(18+2x) = 12 \cdot 18 + 144$
 $x = 3$

2. a – szerokość ramy

a) $(80 - 2a)(60 - 2a) = 2400$,
gdzie $a \in (0; 30)$

$a = 10\text{ cm}$

b) $(75 - 2a)(55 - 2a) = 2700$,
gdzie $a \in (0; 27,5)$

$a = \frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6\text{ [cm]}$

4. Zakładamy, że $x > 0$.

$$(x + 21)^2 + (x + 4)^2 = 25^2$$

$$x^2 + 42x + 21^2 +$$

$$+ x^2 + 8x + 16 = 25^2$$

$$2x^2 + 50x + 16 =$$

$$= (25 - 21)(25 + 21)$$

$$2x^2 + 50x + 16 = 4 \cdot 46 / : 2$$

$$x^2 + 25x + 8 = 92$$

$$x^2 + 25x - 84 = 0$$

$$\Delta = 625 + 336 = 961$$

$$\sqrt{\Delta} = 31$$

$$x_1 = \frac{-25-31}{2} < 0, \text{ sprzeczne}$$

$$x_2 = \frac{-25+31}{2} = 3$$

Zatem $x = 3$.

7. Niech $x - 7$, x , $x + 2$ będą długościami boków trójkąta. Wówczas:
 $(x - 7)^2 + x^2 = (x + 2)^2$, $x > 7$
 Zatem $x = 15$,
 czyli $Ob = 40$ cm.

8. $P(x) = 8 \cdot 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}(8 - x) \cdot (10 - x) = 18x - x^2$,
 $x \in (0; 8]$
 $P(x) \geq 0,4 \cdot 8 \cdot 10$
 $x^2 - 18x + 32 \leq 0$
 $x \in [2; 8]$

9. 15

11. a) Miejscami zerowymi są liczby 0 i 12, zatem parabola ma równanie postaci:

$$y = ax(x - 12)$$

Po podstawieniu współrzędnych wierzchołka (6, 4) do równania paraboli otrzymujemy $a = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

b) Miejscami zerowymi są liczby -6 i 6, zatem:

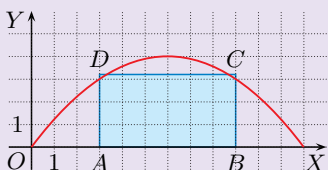
$$y = a(x - 6)(x + 6) = a(x^2 - 36).$$

Współrzędne wierzchołka:

$$(0, 4), \text{ czyli } a = -\frac{1}{9}.$$

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + 4.$$

12.



Prostokąt $ABCD$ na rysunku jest schematycznym przedstawieniem barki.

Punkt D ma współrzędne (3, 3, 1).

Parabola przedstawiająca most jest wykresem funkcji:

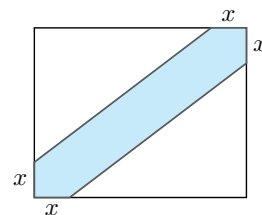
$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

Zauważmy, że:

$$f(3) = 3 < 3,1$$

czyli barka nie przeplynie pod mostem.

7. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC . Oblicz obwód tego trójkąta.

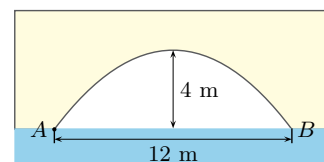


8. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

9. Powierzchnia stawu wynosiła 400 m^2 . Przez dwa kolejne lata, na skutek suszy, powierzchnia stawu się zmniejszała – w każdym roku o $p\%$. Po upływie dwóch lat staw miał powierzchnię 289 m^2 . Oblicz p .

10. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom: a) naturalnym, b) parzystym.

11. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



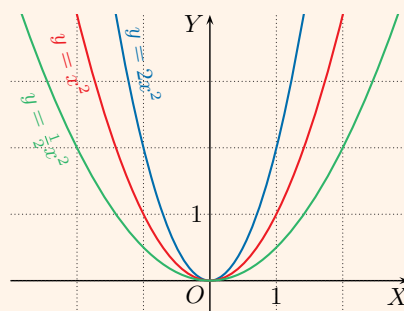
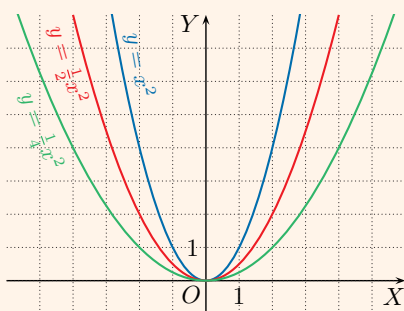
a) w punkcie A ,

b) w środku odcinka AB .

12. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 11. przeplynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Czy wiesz, że...

Wszystkie parabole są podobne. Aby się o tym przekonać, warto przyjrzeć się poniższym rysunkom (zauważ, że jednostki na osiach na rysunku po prawej są dwukrotnie większe niż na rysunku po lewej). Na przykład parabole narysowane kolorem czerwonym (na rysunku po prawej parabola dana wzorem $y = x^2$, a na rysunku po lewej parabola $y = \frac{1}{2}x^2$) są identyczne.



10. a) Długości boków trójkąta: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$(n - 3)(n + 1) = 0$$

$$n = 3 \text{ lub } n = -1 \notin \mathbb{N}_+$$

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt. Jego boki mają długości: 3, 4 i 5.

- b) Długości boków trójkąta: $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$4n^2 + (2n + 2)^2 = (2n + 4)^2$$

$$4n^2 + 4(n + 1)^2 = 4(n + 2)^2$$

$$n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$$

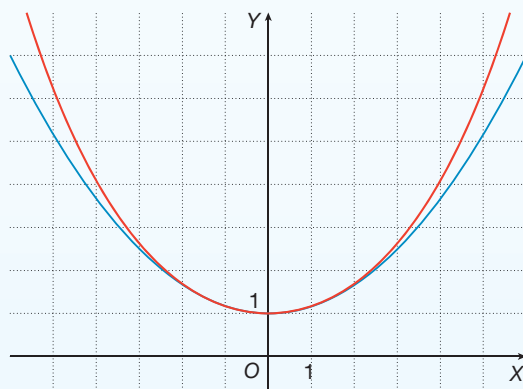
Z podpunktu a) mamy $n = 3$.

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt. Jego boki mają długości: 6, 8 i 10.

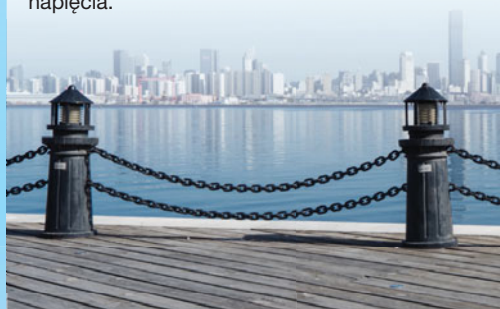
Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* [czyt. katenarią], od łacińskiego słowa *catena* [czyt. katena] oznaczającego łańcuch.

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Na zdjęciu monument Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych.



- 1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{4}$
 b) $x = 0$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$
 d) $x = -\frac{4}{9}$ lub $x = \frac{4}{9}$
 e) $x = -1$
 f) $x = 6$
2. a) $x = -1$ lub $x = 5$
 b) $x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ lub $x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$
 c) $x = 6$
 d) $x = -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$ lub $x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}$
 e) $x = -3$ lub $x = 0$
 f) $x = -4 - \sqrt{17}$ lub $x = -4 + \sqrt{17}$
3. a) $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
 b) $x = -\frac{5}{2}$
 c) sprzeczna
 d) $x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
 e) $x \in \mathbb{R}$
 f) $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; \infty)$
4. a) $A \cap B = [-1 - \sqrt{2}; -1] \cup [0; -1 + \sqrt{2}]$,
 $A \setminus B = (-1; 0)$
 b) $A \cap B = (-2 + \sqrt{2}; 3)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup [3; \infty)$
 c) $A \cap B = [2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}]$,
 $A \setminus B = (-3; 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}; 6)$
5. a) $x = -2$ lub $x = 2$
 b) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
 c) $x = -1$ lub $x = 1$
 d) $x = 0$
 e) $x = -4$ lub $x = 0$ lub $x = 4$
 f) sprzeczne

Powtórzenie

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

a) $4x^2 - 5x = 0$	e) $25x^2 - 1 = 0$	e) $x(x+2) = -1$
b) $x = \sqrt{2}x^2$	d) $1 - \frac{81}{16}x^2 = 0$	f) $x(x-8) = 4(x-9)$
2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$	c) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$	e) $x(x-5) = 2x(x-1)$
b) $2x^2 + 5x + 1 = 0$	d) $7x^2 + 2x = 1$	f) $2(1-5x) = (1-x)^2$
3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + x - 1 \geq 0$	c) $5x^2 - 5x + 2 < 0$	e) $4x - 3x^2 \leq 2 - x^2$
b) $4x^2 + 20x + 25 \leq 0$	d) $-3x^2 + 6x > 2$	f) $-x(4-x) > 4 - x^2$
4. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x - 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \geq 0\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 6 < 0\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 18 > x^2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x \leq 3\}$
5. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2 - 4)(x^2 + 9) = 0$	c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$	e) $x^4 - 16x^2 = 0$
b) $(9x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$	d) $x^4 + 16x^2 = 0$	f) $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$
6. Rozwiąż równanie. Zastosuj odpowiednie podstawienie.

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$	d) $8x^4 - 3x^2 - 3 = 0$	g) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$	e) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$	h) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$
c) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$	f) $x^4 - 2x^2 - 5 = 0$	i) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$
7. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

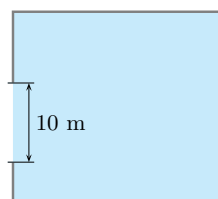
a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$	b) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$	c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$
--	--	---
8. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $[-2; 1]$	c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $[0; 2]$
b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0; 4]$	d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $[-2; 2]$

3. a) $x = -2$ lub $x = 2$
 b) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = 2$
 c) sprzeczne
 d) $x = -\frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$ lub $x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$
 e) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$
 f) $x = -\sqrt{1+\sqrt{6}}$ lub $x = \sqrt{1+\sqrt{6}}$
 g) $x = -2$ lub $x = 2$
 h) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
 i) sprzeczne
7. a) $x = -2$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 4$
 b) $x = 1$, $y = -2$ lub $x = 2$, $y = 1$
 c) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 4$
8. a) najmniejsza: $f(-1) = -2$,
 największa: $f(1) = 6$
 b) najmniejsza: $f(4) = -8$,
 największa: $f(1) = 1$
 c) najmniejsza: $f(0) = 1$,
 największa: $f(2) = 9$
 d) najmniejsza: $f(-2) = -12$,
 największa: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

9. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:
- a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

10. Trzeba ogrodzić prostokątny plac, przy czym nie będzie on grodzony na jednym boku na odcinku 10 m (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego placu potrzeba 240 m bieżących siatki ogrodzeniowej i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten plac?



11. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.
- a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?
- b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

12. Zdjęcie w kształcie prostokąta o bokach p dm i q dm oprawiono w ramę o szerokości x dm (rysunek obok). Pole powierzchni zdjęcia wraz z ramą jest równe P dm². Oblicz szerokość ramy.



- a) $p = 3$, $q = 5$, $P = 29,25$
b) $p = 4$, $q = 6$, $P = 35$

■ Zestaw II

1. Dla jakich wartości parametru c funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe?
- a) $f(x) = x^2 + 3x + c$ c) $f(x) = -x^2 + x + c + 1$
b) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{5}x - c$ d) $f(x) = x^2 + cx + c$
2. Dla jakich wartości parametru b funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?
- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$ b) $f(x) = -x^2 + 2bx - 1$
3. Wyznacz wspólne mniejsza zerowe funkcji f i g .
- a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$, $g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$
b) $f(x) = 6x^4 - 5x^2 + 1$, $g(x) = 6x^4 - 11x^2 + 4$

3. Wyznamy odcięte punktów wspólnych wykresów funkcji f i g oraz sprawdzimy, które z nich są miejscami zerowymi funkcji f .

$$\begin{aligned} \text{a) } & x^4 - 7x^2 + 12 = x^4 - 9x^2 + 18 \\ & 2x^2 - 6 = 0 \quad / : 2 \\ & x^2 - 3 = 0 \\ & x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3} \\ & f(x_1) = f(x_2) = 9 - 7 \cdot 3 + 12 = 0 \\ & \text{Zatem wspólnymi miejscami zerowymi funkcji } f \text{ i } g \text{ są liczby } -\sqrt{3} \text{ i } \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 6x^4 - 5x^2 + 1 = 6x^4 - 11x^2 + 4 \\ & 6x^2 - 3 = 0 \quad / : 3 \\ & x^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ & x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & f(x_1) = f(x_2) = 6 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0 \\ & \text{Zatem wspólnymi miejscami zerowymi funkcji } f \text{ i } g \text{ są liczby } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

9. a) $b = 4 - a$
Niech $f(a) = a^2 + b^2 =$
 $= a^2 + (4 - a)^2 = 2a^2 - 8a + 16$
Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $a_w = \frac{8}{4} = 2$.
Zatem $a = b = 2$.
b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$
c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$

10. Niech x i y będą długościami boków prostokąta.
Obwód tego prostokąta jest równy: $2x + 2y = 240 + 10$.
Zatem $y = 125 - x$.
Pole prostokąta:
 $P(x) = x(125 - x)$
Funkcja P przyjmuje największą wartość dla:
 $x_w = \frac{0+125}{2} = 62,5$
Zatem plac ma wymiary $62,5 \text{ m} \times 62,5 \text{ m}$.

11. a) $z(x) = (40 + x)(240 - x)$
Miejscami zerowymi funkcji z są liczby -40 i 240 .
Największą wartość przyjmuje ona dla:
 $x = \frac{-40+240}{2} = 100$
 $z(100) = 140^2 = 19600$
Zatem obniżenie ceny o 100 zł zwiększy zysk o:
 $z(100) - z(0) =$
 $= 19600 - 40 \cdot 240 =$
 $= 10000 \text{ [zł]}$
b) o 280 zł; zysk zwiększy się o 3920 zł

12. a) 0,75 dm b) 0,5 dm

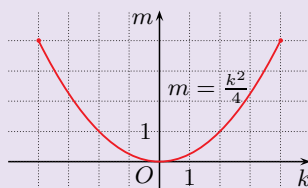
Zestaw II

1. a) $c = \frac{9}{4}$
b) $c = -5$
c) $c = -\frac{5}{4}$
d) $c = 0$, $c = 4$
2. a) $b \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$
b) $b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

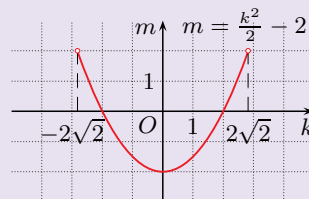
4. a) $x = 1$
 b) $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = -1$
 c) $x = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ lub $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$
 d) $x = -1 - \sqrt{3}$ lub $x = -1$ lub $x = -1 + \sqrt{3}$
5. a) $x = 3$ lub $x = 4$
 b) $x = -5$ lub $x = 0$ lub $x = 4$
6. a) $\Delta = 12^2 + 4 \cdot 15 \cdot 20 > 0$, zatem równanie ma dwa pierwiastki.
 $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2 =$
 $= (x_1 + x_2)^2 - 10x_1x_2 =$
 $= \frac{b^2}{a^2} - 10 \frac{c}{a} = \frac{1048}{75} = 13\frac{73}{75}$
 b) $\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 + 4(\sqrt{2}+1)$, $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki.
 $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2 = 7 - 2\sqrt{2}$
7. a) $f(x) = -3x^2 + 8x - 2$
 b) $f(x) = -2x^2 + 20x - 48$
8. a) $m \in (-\infty; 0)$
 b) nie ma takich m
 c) $m \in (-2; 0) \cup (0; 2)$
 d) $m \neq \frac{2}{3}$
9. a) $m \in (4 + 4\sqrt{2}; \infty)$
 b) $m \in (0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$
10. a) $m \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}]$
 b) $m \in [3; \infty)$
11. a) $m \in \{-2, -1\}$
 b) Dla $m = -1$
 $f(x) = 2 \notin [1; \infty)$.
 $f(\mathbb{R}) = [1; \infty)$, gdy $m + 1 > 0$
 i $y_w = 1$.
 $y_w = -\frac{\Delta}{4a} =$
 $= -\frac{(m+1)^2 - 4(m+1)(m+3)}{4(m+1)} =$
 $= -\frac{m+1-4(m+3)}{4} =$
 $= \frac{3m+11}{4} = 1$
 dla $m = -\frac{7}{3}$, ale $m > -1$,
 zatem nie ma takich m .

4. Rozwiąż równanie. Zastosuj odpowiednie podstawienie.
 a) $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$ c) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 2) = 24$
 b) $(x^2 + 4x)^2 + 7(x^2 + 4x) + 12 = 0$ d) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) = 2$
5. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązania.
 a) $\sqrt{7x - x^2 - 12} \cdot (x^2 - 1) = 0$ b) $(x^2 + 2x - 15) \cdot \sqrt{x^2 - 4x} = 0$
- D** 6. Uzasadnij, że podane równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2 . Oblicz wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$ bez wyznaczania tych pierwiastków.
 a) $15x^2 - 12x - 20 = 0$ b) $(\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 1 = 0$
7. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w przypadku, gdy:
 a) do jej wykresu należy punkt $(0, -2)$, suma jej miejsc zerowych jest równa $\frac{8}{3}$, a suma ich odwrotności jest równa 4,
 b) iloczyn jej miejsc zerowych jest równy 24, a parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(5, 2)$.
8. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?
 a) $x^2 + (m - 3)x + m = 0$ c) $\frac{1}{4}mx^2 + (m^2 - 1)x + m^3 - 4m = 0$
 b) $\frac{1}{4}x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ d) $(3m - 2)x^2 + mx + 1 - \frac{3}{2}m = 0$
9. Dla jakich wartości parametru m równanie:
 a) $2x^2 - mx + m + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie,
 b) $-x^2 + (2m - 2)x + m^2 - 2m = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?
10. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą x ?
 a) $mx^2 + 4x + m - 1 \leq 0$ b) $(m - 3)x^2 + (3 - m)x + m > 0$
11. Wyznacz wartości parametru m , dla których zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[1; \infty)$.
 a) $f(x) = x^2 + (2m + 2)x - m$ b) $f(x) = (m + 1)x^2 + (m + 1)x + m + 3$
- 12.** Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k, m) , dla których równanie $x^2 + kx + m = 0$:
 a) ma jedno rozwiązanie x_0 spełniające warunek $|x_0| \leq 2$,
 b) ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

12. a) $\Delta = k^2 - 4m = 0$ oraz $|x_0| = \left| -\frac{k}{2} \right| \leq 2$, skąd $m = \frac{k^2}{4}$ oraz $k \in [-4; 4]$.



- b) $\Delta = k^2 - 4m > 0$ oraz $x_1^2 + x_2^2 = k^2 - 2m = 4$, skąd $m < \frac{k^2}{4}$ oraz $m = \frac{k^2}{2} - 2$.
 Rozwiązujemy nierówność $\frac{k^2}{2} - 2 < \frac{k^2}{4}$ i otrzymujemy: $k \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

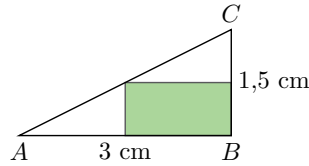




Zadania z kontekstem realistycznym

1. Według projektu pokój miał mieć wymiary $6 \text{ m} \times 9 \text{ m}$. W trakcie realizacji tego projektu krótszą ścianę pokoju wydłużono o $x \text{ m}$, a dłuższą skrócono o $x \text{ m}$ tak, aby powierzchnia tego pokoju była największa. Wyznacz x .

2. Na rysunku obok przedstawiono plan ścieżek w parku wykonany w skali $1:1000$. Prowadzą one wzdłuż boków trójkąta ABC . Między ścieżkami ma się znajdować prostokątny trawnik umieszczony jak na rysunku obok. Jaką największą powierzchnię może mieć taki trawnik?



3. Kawałek tkaniny ma kształt trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 m i 3 m . Aby uszyć prostokątną serwetę, krawcowa zamierza odciąć od niego dwa rogi. Jak powinna to zrobić, aby otrzymać serwetę o jak największej powierzchni?

4. Na klombie rosły w równych rzędach 24 krzaki róż. W każdym rzędzie posadzono jeszcze 2 krzaki i dodano jeden nowy rząd. Na klombie rośnie teraz 45 krzaków róż, po tyle samo w każdym rzędzie. Ile rzędów róż było na początku?

5. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku pionowo do góry strzałę z prędkością początkową 50 m/s . Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) można przybliżyć wzorem:

$$h(t) = 5 + 50t - 5t^2$$

gdzie t jest czasem lotu strzały (w sekundach).

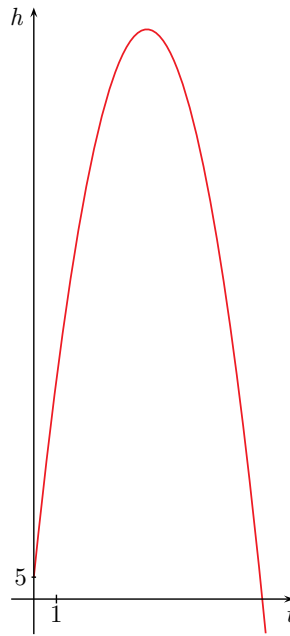
- a) Uzupełnij tabelę wartości funkcji h i określ jej dziedzinę.

t [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h [m]	50	85	110	125	130	125	110	85	50	5

- b) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała ponownie osiągnie wysokość, z jakiej ją wypuszczono?

- c) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie największą wysokość?

- d) Na jaką największą wysokość doleci strzała?



5. a) Muszą być spełnione warunki: $t \geq 0$ oraz $h(t) \geq 0$.

$$-5t^2 + 50t + 5 \geq 0 \quad / : -5$$

$$t^2 - 10t - 1 \leq 0$$

$$\Delta = 100 + 4 = 104, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{26}$$

$$t_1 = \frac{10 - 2\sqrt{26}}{2} = 5 - \sqrt{26}, t_2 = \frac{10 + 2\sqrt{26}}{2} = 5 + \sqrt{26}$$

$$\text{Zatem } t \in [5 - \sqrt{26}; 5 + \sqrt{26}] \cap [0; \infty) = [0; 5 + \sqrt{26}].$$

- b) po 10 s

- c) po 5 s

- d) 130 m

Odpowiedzi do zadań

1. Pole powierzchni pokoju:

$$P(x) = (6+x)(9-x)$$

Miejsca zerowe funkcji P :

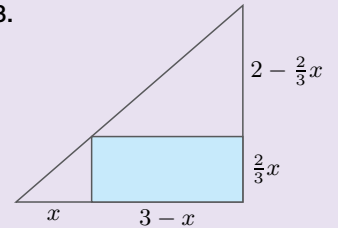
$$x = -6, x = 9$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość dla:

$$x_w = \frac{-6+9}{2} = 1,5$$

2. $112,5 \text{ m}^2$

- 3.



Pole prostokąta:

$$P(x) = \frac{2}{3}x(3-x)$$

Funkcja P największą wartość przyjmuje dla $x = 1,5$.

Zatem cięcia powinny przechodzić przez środki boków trójkąta.

4. x – liczba róż w rzędzie,
 y – liczba rzędów,
 x i y są naturalnymi dzielnikami liczby 24 oraz $xy = 24$.

I sposób

Rozwiązujemy równanie:

$$(x+2)(y+1) = 45$$

$$xy + x + 2y + 2 = 45$$

$$24 + x + 2y + 2 = 45$$

$$x + 2y - 19 = 0 \quad / \cdot x$$

$$x^2 + 2yx - 19x = 0$$

$$x^2 - 19x + 48 = 0$$

$$(x-3)(x-16) = 0$$

$x = 16$ nie jest dzielnikiem liczby 24, zatem $x = 3$ oraz $y = 8$.

II sposób

Sprawdzamy, które spośród dzielników x, y liczby 24 takie, że $xy = 24$, spełniają równanie $(x+2)(y+1) = 45$.

Zauważmy, że x musi być liczbą nieparzystą, a y – liczbą parzystą, zatem $x \in \{1, 3\}$. Para $(1, 24)$ nie spełnia równania, a para $(3, 8)$ spełnia równanie.

**Przykład**

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Równanie to ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases}$$

Liczby $x_1 - 2$ i $x_2 - 2$ są ujemne, gdy ich iloczyn jest dodatni, a suma ujemna.

$$\bullet \Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m - 1) = 4m^2 - 4m + 4$$

$$\Delta = 4m^2 - 4m + 4 > 0 \text{ dla } m \in \mathbb{R} \text{ (sprawdź).}$$

$$\bullet (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 4 = m - 1 - 4m + 4 = -3m + 3$$

$$\text{Zatem } (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -3m + 3 > 0.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla $m < 1$.

$$\bullet (x_1 - 2) + (x_2 - 2) = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{b}{a} - 4 = 2m - 4$$

$$\text{Zatem } (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0.$$

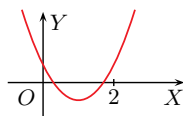
Nierówność ta jest prawdziwa dla $m < 2$.

Po uwzględnieniu powyższych warunków otrzymujemy: $m \in (-\infty; 1)$.

II sposób

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 - 2mx + m - 1$. Ponieważ $a > 0$, podany w zadaniu warunek zachodzi, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



Dwa różne pierwiastki równania są mniejsze od 2, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w < 2$ oraz $f(2) > 0$ (dlaczego?).

$$\bullet \Delta > 0 \text{ dla } m \in \mathbb{R} \text{ (sprawdź).}$$

$$\bullet x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2} = m$$

$$\text{Zatem } x_w < 2 \text{ dla } m < 2.$$

$$\bullet f(2) = 2^2 - 2m \cdot 2 + m - 1 = -3m + 3$$

$$\text{Nierówność } -3m + 3 > 0 \text{ jest prawdziwa dla } m < 1.$$

Odpowiedź: $m \in (-\infty; 1)$

→ Zadanie 6, str. 48



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie

- A. $x^2 - 4x + 5 = 0$ C. $x^2 - 5x + 6 = 0$
B. $x^2 - 3x - 4 = 0$ D. $x^2 + 5x - 6 = 0$

Zadanie 2 (0–1)

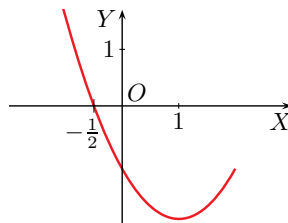
Pierwiastkami równania $2x^2 + bx + c = 0$ są liczby -3 i 4 , zatem

- A. $b = -1$ i $c = -12$ C. $b = 2$ i $c = -24$
B. $b = -2$ i $c = -24$ D. $b = 1$ i $c = -12$

Zadanie 3 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, -2)$. Drugim miejscem zerowym funkcji, której wykresem jest ta parabola, jest liczba

- A. $1\frac{1}{2}$ B. 2 C. $2\frac{1}{2}$ D. 3

**Zadanie 4 (0–1)**

Jednym z pierwiastków równania $4x^2 + 4x + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$ jest liczba

- A. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

Zadanie 5 (0–1)

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[0; 2]$ jest liczbą dodatnią dla

- A. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ C. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$
B. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$ D. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

Zadanie 6 (0–1)

Największa wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $[1; 2]$ jest równa

- A. 16 B. 4 C. 3 D. 0

Zadanie 7 (0–1)

Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2 . Obwód tej działki jest równy

- A. 64 m B. 68 m C. 72 m D. 76 m

Zadanie 8 (0–1)

Boki prostokąta P_1 o wymiarach $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ wydłużono o $x \text{ cm}$ i uzyskano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2 . Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą

- A. $3\sqrt{10} \text{ cm}$ B. $4\sqrt{10} \text{ cm}$ C. $3\sqrt{13} \text{ cm}$ D. $4\sqrt{13} \text{ cm}$

8. $(4 + x)(8 + x) = 96, x > 0$

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$(x + 16)(x - 4) = 0$$

$$x = 4$$

Długość przekątnej prostokąta P_2 :

$$\sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13} [\text{cm}]$$

1. A. $\Delta < 0$

B. $\Delta = 0$

C. $x_1 = 2, x_2 = 3$

D. $x_1 = -6, x_2 = 1$

2. $2(x + 3)(x - 4) =$
 $= 2(x^2 - x - 12) =$

$$= 2x^2 - 2x - 24$$

zatem $b = -2, c = -24$

3. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_w = 1,$
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_w,$
zatem $x_2 = 2\frac{1}{2}$

4. $4\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} =$
 $= 4 \cdot \frac{1}{8} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$

5. A. $x_w = 1, f(1) = 0$

B. $x_w = -1 \notin [0; 2],$
 $f(0) = -1$

C. $f(0) = 1, f(2) = 3$

6. $x_w = -1 \notin [1; 2],$
 $f(1) = 6, f(2) = 16$

7. Niech x oznacza krótszy bok działki. Wówczas:

$$x(x + 2) = 288, x > 0$$

$$x^2 + 2x - 288 = 0$$

$$(x + 18)(x - 16) = 0$$

$$x = 16$$

$$Ob = 68 [\text{m}]$$



9. $f(x) = 4(x - 3)^2 - 2$

Zadanie 9 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = (2x - 6)^2 - 2$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt

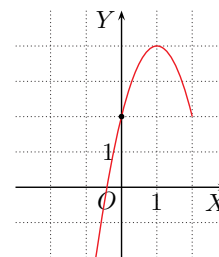
- A.** $(3, -2)$ **B.** $(3, 2)$ **C.** $(6, -2)$ **D.** $(-6, -2)$

2. Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś rzędnych w punkcie

- E.** $(0, 34)$ **F.** $(0, -18)$ **G.** $(0, -38)$ **H.** $(0, -2)$

Zadanie 10 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Oznaczmy przez x_1 , x_2 miejsca zerowe funkcji f , a przez x_w odciętą wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.



Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa

A.	2,	ponieważ	1.	$x_w = 2(x_1 + x_2).$
			2.	$x_w = x_1 + x_2.$
B.	1,		3.	$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}.$

Zadanie 11

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$.

Zadanie 11.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, -5)$.	P	F
Wykres funkcji f ma wierzchołek w punkcie $(-2, 5)$.	P	F

Zadanie 11.2 (0-1)

Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

Zadanie 12 (0-2)

Rozwiąż równanie $3x(x + 3) = (x + 3)^2$.

11.1. $f(0) = -4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{5}{2} = 5$

$x_w = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 2$

11.2. $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

12. $x = -3, x = \frac{3}{2}$

Zadanie 13 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale

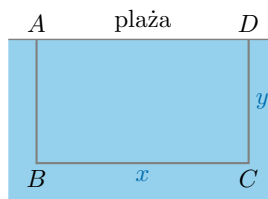
$[-2; 0]$ jest równa -2 .	P	F
$[2; 4]$ jest równa -4 .	P	F
$[0; 2]$ jest równa -6 .	P	F

Zadanie 14 (0-2)

Przy brzegu jeziora ma być wydzielone kąpielisko za pomocą liny o długości 72 m. Lina ta ma wyznaczyć prostokąt $ABCD$ jak na rysunku obok (wzdłuż plaży nie będzie liny).

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

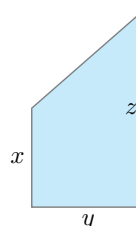
Ogrodzone w ten sposób największe możliwe kąpielisko będzie miało powierzchnię równą $?$, a wejście do kąpieliska z plaży będzie miało wtedy długość $?$.


Zadanie 15 (0-2)

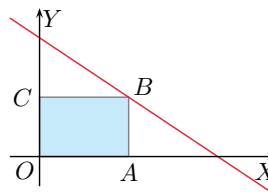
Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x+3)(x-5)$.

D Zadanie 16 (0-4)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest niemniejszy od 27.


Zadanie 17 (0-4)

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.

b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

16. $z = 2x$ i $y = 18 - x - z = 18 - 3x$

Pole trapezu: $P(x) = \frac{1}{2}(x+z)y = \frac{3}{2}x(6-x)$, gdzie $x \in (0; 6)$.

Funkcja P największą wartość przyjmuje dla $x_w = \frac{6+0}{2} = 3$, stąd $y = 9$, $z = 6$.

Długość czwartego boku trapezu: $u \geq y = 9$, więc obwód trapezu:

$$x + y + z + u = 18 + u \geq 18 + 9 = 27$$

17. a) Długości boków prostokąta: x_0 i $y_0 = -\frac{2}{3}x_0 + 4$.

Pole prostokąta: $P(x_0) = x_0 \cdot y_0 = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0$, gdzie $x_0 \in (0; 6)$

b) Największa wartość funkcji P jest osiągnięta dla $x_0 = 3$, stąd $y_0 = 2$.

Współrzędne wierzchołków: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 2)$ i $C(0, 2)$

13. $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

Najmniejsza wartość funkcji:

$$f(1) = -\sqrt{2} - 4.$$

$$[-2; 0]: f(0) = -4$$

$$[2; 4]:$$

$$f(2) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4 = -4,$$

$$f(4) = 16\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 4 > 0$$

$$[0; 6]: -6 < f(1)$$

14. $x + 2y = 72$

$$y = 36 - \frac{1}{2}x$$

Pole powierzchni kąpieliska:

$$P(x) = x(36 - \frac{1}{2}x)$$

$$x_w = 36$$

$$P(x_w) = 36 \cdot 18 = 648$$

Kąpielisko będzie miało powierzchnię 648 m^2 , a wejście do niego z plaży będzie miało długość 36 m.

15. $x_w = \frac{-3+5}{2} = 1$

$$f(x_w) = 2 \cdot 4 \cdot (-4) = -32$$



$$1. 36x^4 - 43x^2 + 12 = (x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}$$

$$2. m \neq 1 \text{ i } \Delta = 13 - 4m > 0, \text{ czyli } m < 3,25 \text{ i } m \neq 1, \text{ stąd } m_0 = 3.$$

$$3.1. \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{2}x = 0 \quad / \cdot 4$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 6$$

$$3.2. x^2 - 4(m+1)x = 0$$

Dla $m = -1$ równanie ma jedno rozwiązanie, dla $m \neq -1$ równanie ma dwa rozwiązania.

4. Niech P będzie funkcją opisującą pole zacieniowanego obszaru. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$4x + 4y = 8$$

czyli $y = 2 - x, x \in (0; 2)$.

$$P(x) = (\pi x^2 + \pi y^2 + 2x \cdot 2y) - \pi R^2 =$$

$$= \pi(x^2 + y^2) + 4xy - \pi R^2 =$$

$$= \pi R^2 + 4xy - \pi R^2 =$$

$$= 4x(2 - x)$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla $x_w = 1$.

Wartością tą jest $f(1) = 4$, czyli pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2 .

$$6. \text{ Niech } f(x) = x^2 + (m-1)x + 4.$$

Muszą być spełnione warunki:

$$\Delta > 0, x_w < 4 \text{ oraz } f(4) > 0.$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4^2 =$$

$$= (m+3)(m-5) > 0 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$$

$$x_w = \frac{1-m}{2} > 4 \text{ dla } m > -7$$

$$f(4) = 20 + 4(m-1) > 0 \text{ dla}$$

$$m > -4$$

$$\text{Zatem } m \in (-4; -3) \cup (5; \infty).$$

$$8. \Delta = k^2 - 2k = k(k-2) > 0$$

dla $k \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$

$$= k^2 - k > 2$$

$$k^2 - k - 2 > 0$$

$$(k-2)(k+1) > 0$$

$$k \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$$

Uwzględniamy warunek

$$\Delta > 0 \text{ i otrzymujemy:}$$

$$k \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty).$$

Zadanie 1 (0-2)

Oblicz sumę dodatnich pierwiastków równania $36x^4 - 43x^2 + 12 = 0$.

Zadanie 2 (0-2)

Wyznacz największą całkowitą wartość parametru m , dla której równanie $(m-1)x^2 - 3x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki.

Zadanie 3

Dane jest równanie z parametrem m .

$$\frac{1}{4}x^2 - x = mx$$

Zadanie 3.1 (0-2)

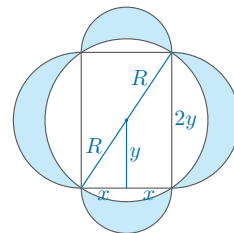
Rozwiąż to równanie dla $m = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3.2 (0-2)

Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od m .

D Zadanie 4 (0-5)

Każdy księżyc zbudowany na boku prostokąta jest ograniczony okręgiem opisanym na tym prostokącie oraz okręgiem, którego środkiem jest środek danego boku. Wykaż, że jeśli obwód prostokąta jest równy 8 cm , to pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2 .



Zadanie 5 (0-4)

Naszkicuj wykres funkcji f , która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 = 0$.

Zadanie 6 (0-4) → Przykład, str. 44

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

Zadanie 7 (0-5)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (3m - \frac{1}{2})x + 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 12$?

Zadanie 8 (0-4)

Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + kx + \frac{1}{2}k = 0$ jest większa od 2?

Zadanie 9 (0-4)

Dla jakich wartości parametru m funkcje $f(x) = (m-2)x^2 + (m-2)x$ oraz $g(x) = x^2 + 6x - 7$ mają ten sam zbiór wartości?

5. 1° Dla $m-1 = 0$, czyli dla $m = 1$ otrzymujemy $2 = 0$ sprzeczność, czyli $f(1) = 0$.

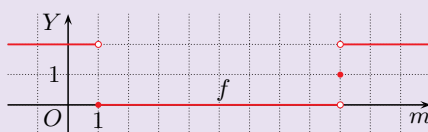
2° Dla $m \neq 1$ równanie jest kwadratowe.

$$\Delta = (m-1)(m-9)$$

$$f(m) = 0 \text{ dla } m \in (1; 9),$$

$$f(m) = 1 \text{ dla } m = 9,$$

$$f(m) = 2 \text{ dla } m \in (-\infty; 1) \cup (9; \infty).$$



$$7. m = \frac{1-4\sqrt{42}}{6}, m = \frac{1+4\sqrt{42}}{6}$$

9. Funkcje f i g mają ten sam zbiór wartości, gdy $m > 2$ oraz ich najmniejsze wartości są równe.

Dla funkcji g : $x_w = -3$,

$$f(x_w) = -16.$$

Dla funkcji g : $x_w = -\frac{1}{2}$,

$$g(x_w) = -\frac{1}{4}(m-2).$$

Zatem $-\frac{1}{4}(m-2) = -16$, skąd $m = 66$.