

5 Planimetria

Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w sytuacjach praktycznych, takich jak układanie kafelków lub bruku.

Bardzo ciekawe przykłady podziałów płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. ma-tri-ca kor-neli-sa esze-ra] (1898–1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.

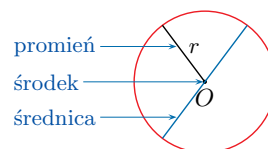


Uczeń:

- rozpoznaje kąty środkowe w okręgu,
- oblicza długość okręgu i długość łuku okręgu,
- określa liczbę punktów wspólnych dwóch okręgów,
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów, gdy dane są promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami,
- wykorzystuje styczność okręgów do rozwiązywania zadań.

5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .



Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π . Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka Williama Jonesa [czyt. liliama džonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3,14$.

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

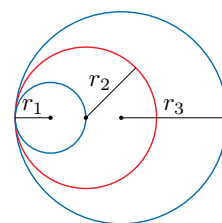
Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem $l = 2\pi r$.

Przykład 1

Oblicz długości okręgów o promieniach $r_1 = 0,5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1,5$ cm (rysunek obok).

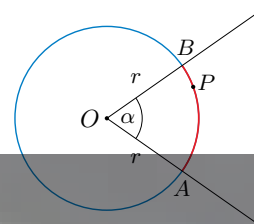
Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}l_1 &= 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ [cm]} \\l_2 &= 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]} \\l_3 &= 2\pi \cdot r_3 = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi \text{ [cm]}\end{aligned}$$



Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.

Na rysunku obok ramiona kąta środkowego α przecinają okrąg w punktach A i B , które dzielą ten okrąg na dwa łuki. Jeśli nie są one półokręgami, to mówiąc „łuk AB ”, będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\widehat{AB}$. Czasami stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku to łuk $\widehat{APB}$.



Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Ćwiczenie 1

$$3\pi = \frac{|\angle AOB|}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12$$
$$|\angle AOB| = 45^\circ$$

Ćwiczenie 1

Punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm. Jaką miarę ma kąt AOB ?

Multibook

- Liczba π
- Wzajemne położenie okręgów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

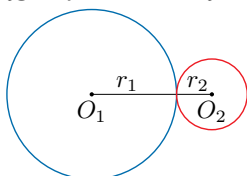
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miar kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1:3:5:7$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez końce kolejnych promieni leżące na okręgu.

Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

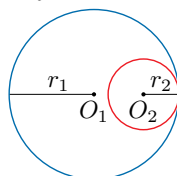
Okręgi styczne zewnętrznie



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie

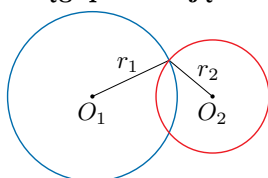


$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

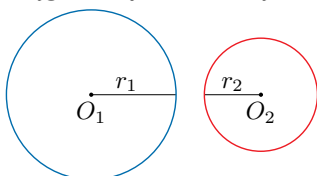
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



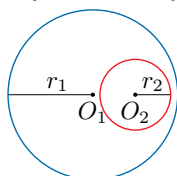
$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

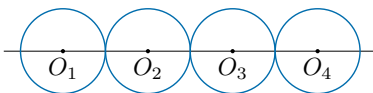
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej i $|O_1O_4| = 48$. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów.



Ćwiczenie 2

Długość okręgu: $l = 24\pi$ cm

Długości łuków:

$$\frac{1}{16}l = \frac{3}{2}\pi \text{ cm}$$

$$\frac{3}{16}l = \frac{9}{2}\pi \text{ cm}$$

$$\frac{5}{16}l = \frac{15}{2}\pi \text{ cm}$$

$$\frac{7}{16}l = \frac{21}{2}\pi \text{ cm}$$

Ćwiczenie 3

$6r = 48$, czyli $r = 8$

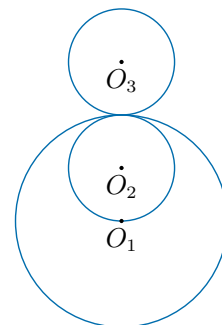
Zatem średnica: $2r = 16$

Odpowiedzi do zadań

- Długość okręgu: 10π cm.
Niech punkt O będzie środkiem okręgu. Trójkąt ABO jest trójkątem równobocznym o boku długości 5 cm, czyli $|\angle AOB| = 60^\circ$.
 $L = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{5}{3}\pi$ [cm]
- a) $L = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 12\pi = \frac{5}{2}\pi$ [cm]
b) $\frac{5}{4}\pi$ cm
c) $\frac{55}{12}\pi$ cm
- $2\pi = \frac{20^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$,
czyli $2r = 36$ cm
- $4\pi = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 18\pi$, czyli $\alpha = 80^\circ$
- a) $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -3$ lub $x = 1$
- a) $|O_1O_2| = 1; 0$
b) $|O_1O_2| = 5; 1$
c) $|O_1O_2| = 3; 1$
- Niech r – promień okręgów O_2 i O_3 , $2r$ – promień okręgu O_1 .
 $3r = 18$, czyli $r = 6$
 $2r = 12$
Średnice okręgów: 12, 12, 24
- a) $6\pi = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, czyli $r = 27$
b) $\frac{\pi}{2} = \frac{270^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, czyli $r = \frac{1}{3}$
c) $\pi = \frac{7,5^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, czyli $r = 24$
- $5 - 3 < n < 5 + 3$, $n \in \mathbb{N}$
 $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Zadania

- Punkty A, B należą do okręgu o średnicy 10 cm oraz $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość okręgu oraz długość łuku $\widehat{AB}$.
- Oblicz długość łuku okręgu o średnicy d wyznaczonego przez kąt środkowy α .
a) $d = 12$ cm, $\alpha = 75^\circ$ b) $d = 30$ cm, $\alpha = 15^\circ$ c) $d = 5$ cm, $\alpha = 330^\circ$
- Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 20° ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.
- Na okręgu o średnicy 18 cm kąt środkowy wyznacza łuk o długości 4π cm. Oblicz miarę tego kąta.
- Oblicz wartości x , dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrznie, b) wewnętrznie.
- Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?
a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$
b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$
c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$
- Punkty O_1, O_2 i O_3 , będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie oraz $|O_1O_3| = 18$. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów.



Sprawdź się

- Oblicz promień okręgu, w którym kąt środkowy α wyznacza łuk długości L .
a) $\alpha = 40^\circ$, $L = 6\pi$ b) $\alpha = 270^\circ$, $L = \frac{\pi}{2}$ c) $\alpha = 7^\circ 30'$, $L = \pi$
- Odległość między środkami przecinających się okręgów o promieniach 3 i 5 jest równa n , gdzie $n \in \mathbb{N}$. Podaj możliwe wartości n .
- Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrznie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku 1 : 3. Oblicz długości tych okręgów.
- Długość przekątnej prostokąta: $d = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ [cm]
Długości promieni okręgów: $\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm
Długości okręgów: $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm

5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Zwróć uwagę na to, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesesa.

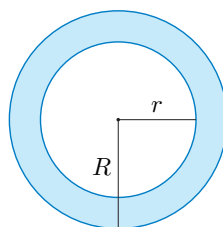
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem $P = \pi r^2$.

Ćwiczenie 1

- Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm^2 .
- Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2,25\pi \text{ cm}^2$.

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



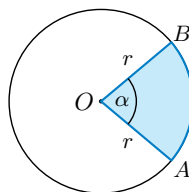
Ćwiczenie 2

- Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm . Podaj promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.
- Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi $17\pi \text{ cm}^2$. Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O ograniczoną łukiem $\widehat{AB}$ i promieniami OA i OB (wraz z brzegiem tej części) nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α .

- $r = 12$, $\alpha = 75^\circ$
- $r = 2$, $\alpha = 22^\circ 30'$
- $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 315^\circ$

Ćwiczenie 3

a) $P = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 30\pi$

b) $P = \frac{22,5^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{4}$

c) $P = \frac{315^\circ}{360^\circ} \cdot \pi (\sqrt{3})^2 = \frac{21}{8}\pi$

Uczeń:

- podaje wzory na pole koła i pole wycinka koła,
- stosuje poznane wzory do obliczania pól figur.

Ćwiczenie 1

- Bok kwadratu: $a = 6 \text{ cm}$
Promień koła: $r = 3 \text{ cm}$
Pole koła: $P = 9\pi \text{ cm}^2$
- Promień koła: $r = 1,5 \text{ cm}$
Długość okręgu: $l = 3\pi \text{ cm}$

Ćwiczenie 2

- Pole pierścienia:
 $P = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 24^2 = 49\pi \text{ [cm}^2\text{]}$
Promień koła: $r = 7 \text{ cm}$
- Niech r – promień wewnętrzny pierścienia kołowego.
 $\pi(r+1)^2 - \pi r^2 = 17\pi$
 $r = 8 \text{ cm}$
Promień wewnętrzny: 8 cm
Promień zewnętrzny: 9 cm

Multibook

- Pole koła
- Pole wycinka koła – zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 6^2 = 2\pi, \text{ skąd } \alpha = 20^\circ$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } P_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 36\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 90^\circ = 72$$

$$P = 36(\pi - 2)$$

$$\text{b) } P_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 24\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 60^\circ = 36\sqrt{3}$$

$$P = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\text{c) } P_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 12\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 30^\circ = 36$$

$$P = 12(\pi - 3)$$

Odpowiedzi do zadań

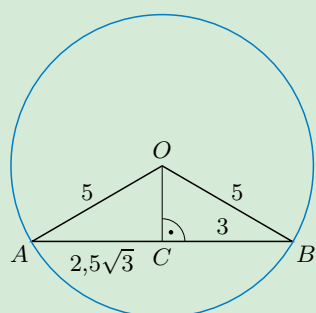
1. Promień koła: $r = \frac{3}{2}$

Pole zacieniowanego obszaru jest różnicą pola kwadratu i czterech pól kół:

$$P_Z = 6^2 - 4 \cdot \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 36 - 9\pi$$

Wiemy, że $\pi > 3$, zatem:
 $P_Z < 36 - 9 \cdot 3 = 9$.

2.



$$\sin |\angle AOC| = \frac{2.5\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\angle AOC| = 60^\circ,$$

$$|\angle AOB| = 120^\circ$$

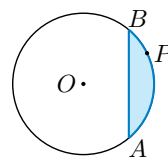
$$\text{Zatem } L_1 = \frac{10}{3}\pi, L_2 = \frac{20}{3}\pi,$$

$$P_1 = \frac{25}{3}\pi, P_2 = \frac{50}{3}\pi$$

Ćwiczenie 4

Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π . Oblicz miarę kąta α .

Część koła ograniczoną łukiem $\widehat{APB}$ i cięciwą AB (wraz z brzegiem tej części) nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.



Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze $\alpha = 45^\circ$ (rysunek poniżej).

Obliczamy pole wycinka koła AOB :

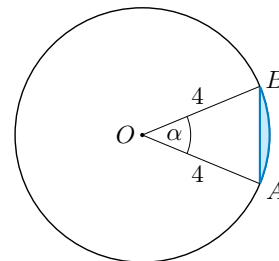
$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła:

$$P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$$



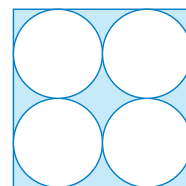
Ćwiczenie 5

Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają kąt środkowy AOB . Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt.

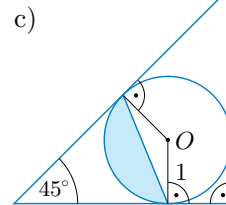
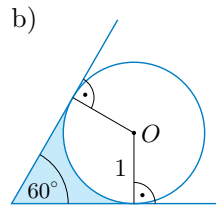
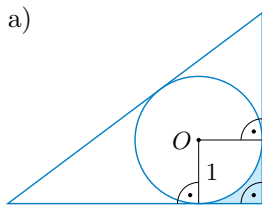
- a) $|\angle AOB| = 90^\circ$ b) $|\angle AOB| = 60^\circ$ c) $|\angle AOB| = 30^\circ$

Zadania

1. Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).



2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.
3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB . Pole trójkąta AOB jest równe $4\sqrt{2}$. Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła to koło.
4. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



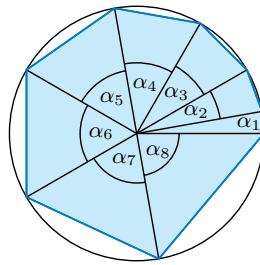
$$3. P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}, P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$$

$$4. \text{ a) } 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ b) } \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

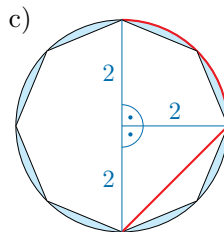
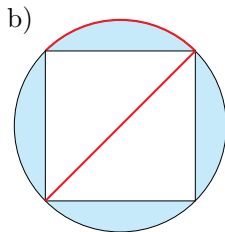
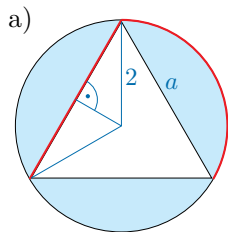
$$\text{ c) } \frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

5. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.



- a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8 .
b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6 .

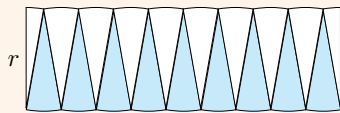
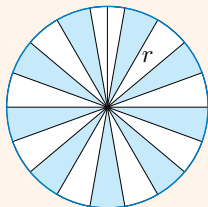
6. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki należą do okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.



- D** 7. Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Czy wiesz, że...

Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.



Dolna linia składająca się z łuków ma długość πr .

$$5. \alpha_1 + (\alpha_1 + 10^\circ) + \dots + (\alpha_1 + 70^\circ) = 360^\circ$$

$$\alpha_1 = 10^\circ$$

$$a) \alpha_8 = 80^\circ$$

$$P_8 = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3^2 = 2\pi$$

$$b) \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_6 = 60^\circ$$

Suma pól wycinków koła:

$$P_W = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 9\pi = \frac{9}{4}\pi$$

Suma pól trójkątów:

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot 9 \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 9 \sin 60^\circ = \frac{9}{4}(1 + \sqrt{3})$$

Suma pól odcinków koła:

$$P = P_W - P_T = \frac{9}{4}(\pi - 1 - \sqrt{3})$$

$$6. a) \frac{a}{2} = \sqrt{3}, \text{ czyli } a = 2\sqrt{3}$$

$$l = 2\sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

$$P = \pi \cdot 2^2 - \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 4\pi - 3\sqrt{3}$$

$$b) l = 4 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 4 + \pi$$

$$P = \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 4(\pi - 2)$$

$$c) l = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\sqrt{2} + \pi$$

$$P = \pi \cdot 2^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 45^\circ = 4(\pi - 2\sqrt{2})$$

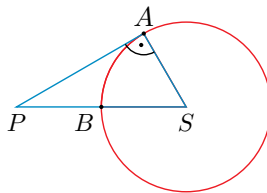
$$7. P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$$

Sprawdź się

8. Oblicz promień koła, którego wycinek wyznaczony przez kąt α ma pole P .

$$a) \alpha = 45^\circ, P = 0,75\pi \quad b) \alpha = 140^\circ, P = 7\pi \quad c) \alpha = 300^\circ, P = 18\pi$$

9. Punkt A należy do okręgu o środku w punkcie S (rysunek obok). Odległość od punktu P do środka okręgu jest równa 2 cm, a do punktu A jest równa $\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole:



- a) trójkąta PSA , b) wycinka koła BSA .

9. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin |\sphericalangle ASP|$, czyli $|\sphericalangle ASP| = 60^\circ$ oraz $|AS| = 1$ cm

$$a) P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{cm}^2]$$

$$b) P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6} [\text{cm}^2]$$

$$8. a) \frac{3}{4}\pi = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2, \text{ czyli } r = \sqrt{6}$$

$$b) 3\sqrt{2}$$

$$c) \frac{6}{5}\sqrt{15}$$

Uczeń:

- określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu,
- stosuje własności stycznej do okręgu do rozwiązywania zadań,
- określa liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu.

Ćwiczenie 1

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Rozważmy odcinki PQ , PA , PB oraz trójkąty prostokątne PQA i PQB . Najkrótszym z wymienionych odcinków jest odcinek PQ , bo w trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest zawsze krótsza od przeciwprostokątnej.

Komentarz

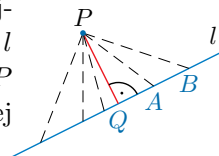
W uzasadnieniu do ćwiczenia 1. korzystamy z faktu, że w dowolnym trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dłuższa od każdej z jego przyprostokątnych.

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że spośród odcinków łączących dany punkt P z punktem leżącym na prostej l ($P \notin l$) najkrótszy jest ten, który jest do tej prostej prostopadły.

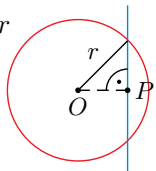
Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

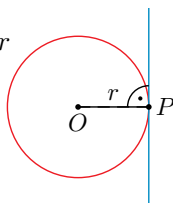
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$$|OP| < r$$



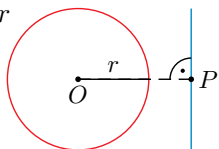
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$$|OP| = r$$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$$|OP| > r$$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Ćwiczenie 2

- Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P . Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.
- Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O . Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB . Wiadomo, że $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm. Oblicz promień okręgu.

Ćwiczenie 2

- $|AO| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ [cm]
- $|OP| = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ [cm]

Multibook

- Prosta i okrąg

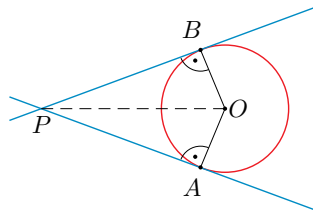
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator
testów i sprawdzianów

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| = |PB|$$

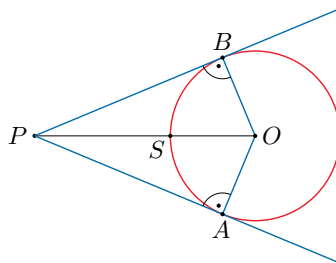


Powyższe twierdzenie można udowodnić, korzystając z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO .

Ćwiczenie 3

a) Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B . Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.

b) Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm, a odcinek PS ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu o środku w punkcie O .



Ćwiczenie 3

a) $|PA| = |PB| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ [cm]}$

$Ob = 28 \text{ cm}$

b) Niech r – promień okręgu.

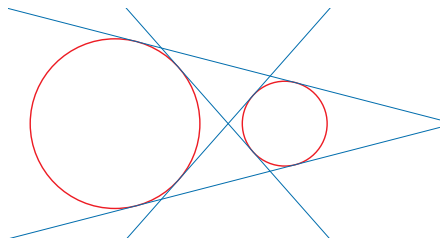
$$|PA| = |PB| = 17 - r$$

$$(17 - r)^2 + r^2 = (8 + r)^2$$

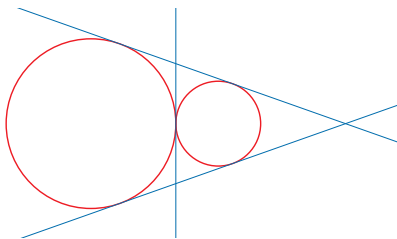
$$r = 5 \text{ cm}$$

Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

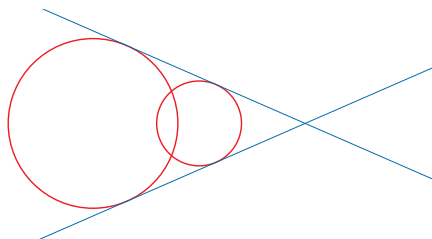
Okręgi rozłączne zewnętrznie;
cztery wspólne styczne



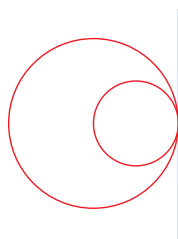
Okręgi styczne zewnętrznie;
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się;
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie;
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

- a) Okręgi przecinające się – 2 wspólne styczne
- b) Okręgi styczne zewnętrznie – 3 wspólne styczne
- c) Okręgi styczne wewnętrznie – 1 wspólna styczna
- d) Okręgi rozłączne zewnętrznie – 4 wspólne styczne

Ćwiczenie 5

- 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$,
- 1 dla $m \in \{-2, 6\}$,
- 2 dla $m \in (-2; 6)$

Ćwiczenie 6

Niech $|OP|$ – odległość środka okręgu od prostej, A, B – punkty przecięcia okręgu z prostą.

a) $|OP| = 3$
 $|AB| = 2|AP| = 2\sqrt{4^2 - 3^2} = 2\sqrt{7}$

b) $|OP| = 4, |AP| = 3$
 $r = |OA| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Ćwiczenie 4

Dane są okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

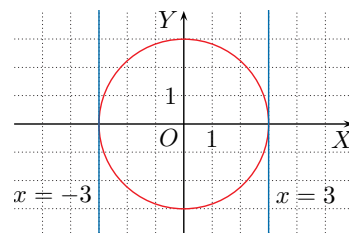
- a) $r_1 = 3\frac{1}{2}, r_2 = 4\frac{1}{2}, |O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$
- c) $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{2}, |O_1O_2| = \frac{1}{6}$
- b) $r_1 = 11, r_2 = 13, |O_1O_2| = 24$
- d) $r_1 = \sqrt{2}, r_2 = \sqrt{3}, |O_1O_2| = 4$

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku $O(0, 0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m ?

Prosta $x = m$ z danym okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3; 3)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.



Ćwiczenie 5

Dany jest okrąg o środku $S(0, 2)$ i promieniu 4. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $y = m$ w zależności od parametru m ?

Przykład 2

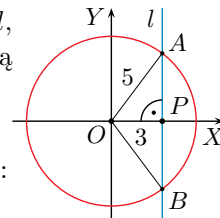
Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej $l: x = 3$ i okręgu o środku $O(0, 0)$ i promieniu 5.

Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$



Ćwiczenie 6

a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ oraz okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu 4.

b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ oraz okręgu o środku w punkcie $(-3, 2)$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadania

1. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 10 w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej dla:

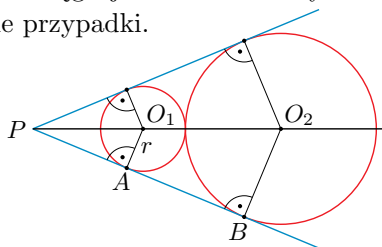
- a) $|AB| = 12,$
- b) $|AB| = 10\sqrt{2},$
- c) $|AB| = 10,$
- d) $|AB| = 20.$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) $x = -8$ lub $x = 8$
- b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
- c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$
- d) $x = 0$

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Punkt P należy do tej cięciwy i jego odległość od środka okręgu jest równa 5. Wyznacz współrzędne punktu P . Rozważ wszystkie przypadki.

3. Z punktu P poprowadzono wspólne styczne do okręgów o środkach w punktach O_1 i O_2 (rysunek obok). Wiadomo, że $|O_2B| = 5$ i $|O_2P| = 13$. Oblicz promień r okręgu o środku w punkcie O_1 .



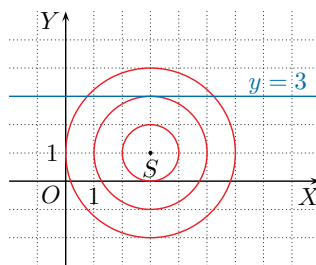
4. Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P . Oblicz pole trójkąta APB .

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3, 1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3, 1)$:

- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2; \infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0; 2)$.



Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

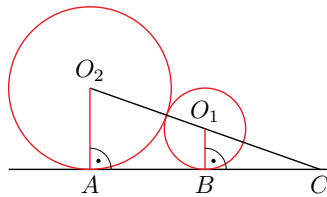
- a) $k: y = 3, S(3, -1)$ b) $k: x = -1, S(-\frac{3}{2}, 4)$ c) $k: x = \sqrt{2}, S(-1, 1)$

Sprawdź się

6. Punkty A i B należą do okręgu o środku S i promieniu r . Oblicz pole trójkąta ASB .

- a) $|AB| = 4$ cm, $r = 2\sqrt{10}$ cm b) $|AB| = 14$ cm, $r = 25$ cm

7. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach odpowiednio 1 i 2 są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta AB jest ich wspólną styczną. Oblicz długość odcinka CO_1 oraz pole trapezu ABO_1O_2 .



7. $\triangle CBO_1 \sim \triangle CAO_2$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{|CO_1|}{|CO_2|} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } |CO_1| = 3$$

$$|AB| = |BC| = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Pole trapezu: } P = \frac{1}{2}(1 + 2) \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

2. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$
lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$

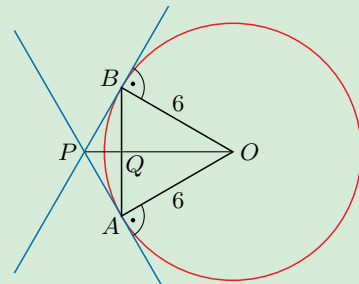
3. Zauważmy, że $\triangle PAO_1 \sim \triangle PBO_2$, stąd:

$$\frac{|O_1P|}{r} = \frac{|O_2P|}{|O_2B|}$$

$$\frac{13-5-r}{r} = \frac{13}{5}$$

$$r = \frac{20}{9}$$

4. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt ABO jest równoboczny, czyli $|\angle AOB| = 60^\circ$ i $|\angle AOP| = |\angle POB| = 30^\circ$.
Zatem $|PO| = 4\sqrt{3}$ cm.

$$|PQ| = |PO| - |QO| = 4\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$P_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

5. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{1}{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{1}{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = 1 + \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$
6. a) 12 cm^2
b) 168 cm^2

Uczeń:

- rozpoznaje kąty wpisane w okrąg oraz wskazuje łuki, na których są oparte te kąty,
- wykorzystuje twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia,
- wyznacza kąt między styczną a cięciwą okręgu.

Ćwiczenie 1

$$\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$$

a) $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

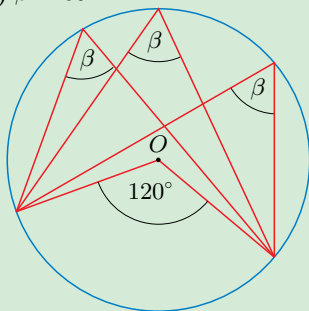
b) $8 \cdot 30^\circ = 240^\circ$

c) $11 \cdot 30^\circ = 330^\circ$

Ćwiczenie 2

a) 30°

b) $\beta = 60^\circ$



5.4. Kąty w okręgu (1)

Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez łuk $\widehat{AB}$ zaznaczony kolorem czerwonym.

Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\widehat{AB}$ lub na cięciwie AB .

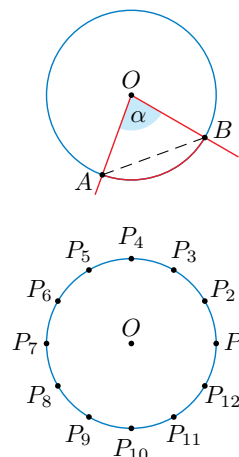
Ćwiczenie 1

Punkty $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

a) $\widehat{P_1P_2P_3}$,

b) $\widehat{P_4P_7P_{12}}$,

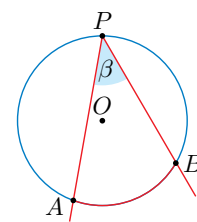
c) $\widehat{P_6P_1P_7}$.



Definicja

Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.



Twierdzenie

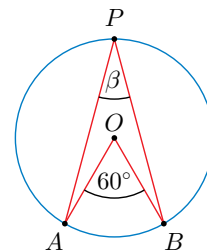
Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz zadanie 7, str. 187.

Ćwiczenie 2

a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).

b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^\circ$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α . Podaj miary tych kątów.



Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta środkowego opartego na tym samym łuku co kąt wpisany β .

a) $\beta = 15^\circ$

b) $\beta = 48^\circ$

c) $\beta = 137^\circ$

d) $\beta = 74^\circ 30'$

Ćwiczenie 3

a) 30°

b) 96°

c) 274°

d) 149°

Multibook

- Kąty w okręgu (1)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

Generator
testów i sprawdzianów

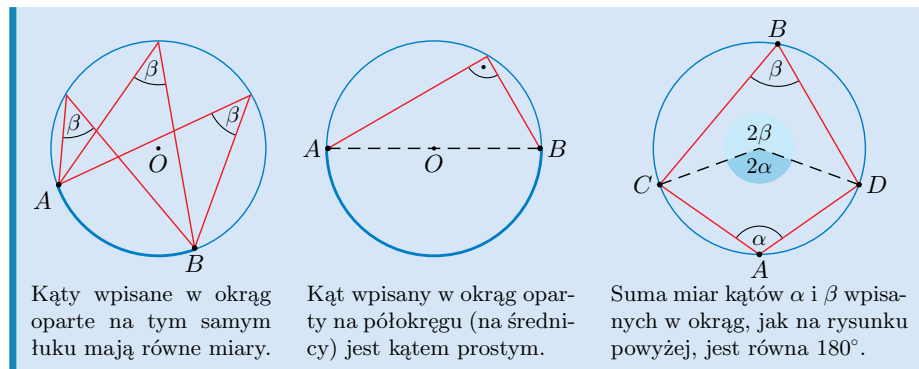
Ćwiczenie 4

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α . Oblicz miarę kąta $\alpha + \beta$ dla:

- a) $\alpha = 110^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\beta = 17^\circ$, d) $\beta = 105^\circ$.

Z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym wynikają następujące wnioski:

Twierdzenie

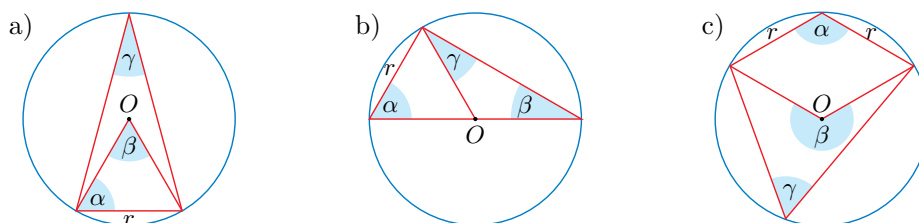


D Ćwiczenie 5

Uzasadnij każdy z powyższych wniosków.

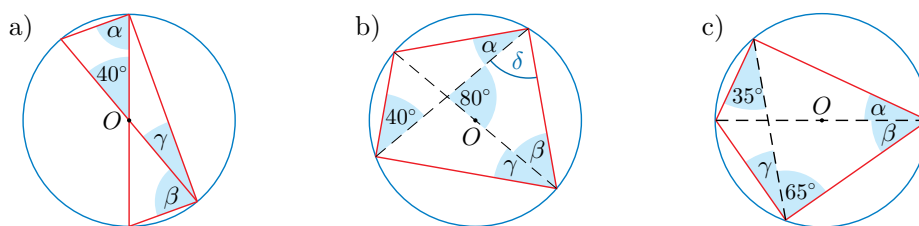
Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r . Oblicz miary kątów α , β i γ .



Ćwiczenie 7

Oblicz miary kątów α , β i γ .



Ćwiczenie 5

- Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku odpowiadają temu samemu kątowi środkowemu opartemu na tym łuku, zatem wszystkie są równe.
- Kąt środkowy oparty na półokręgu jest kątem półpełnym, czyli równym 180° , zatem kąt wpisany w okrąg i oparty na półokręgu jest o połowę mniejszy, czyli równy 90° .
- $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, zatem $\alpha + \beta = 180^\circ$

Ćwiczenie 4

- a) $\alpha + \beta = 110^\circ + 55^\circ = 165^\circ$
 b) $\alpha + \beta = 45^\circ + 22,5^\circ = 67,5^\circ$
 c) $\alpha + \beta = 34^\circ + 17^\circ = 51^\circ$
 d) $\alpha + \beta = 210^\circ + 105^\circ = 315^\circ$

Ćwiczenie 6

- a) $\alpha = \beta = 60^\circ$ (kąty w trójkącie równobocznym)
 $\gamma = \frac{1}{2}\beta = 30^\circ$ (kąty wpisane i środkowy oparte na tym samym łuku)
 b) $\alpha = 60^\circ$ (kąt w trójkącie równobocznym)
 $\beta = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ (kąty wpisane i środkowy oparte na tym samym łuku)
 $\gamma = \beta = 30^\circ$ (kąty w trójkącie równoramiennym)
 c) $\alpha = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$
 $\beta = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$ (kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku)
 $\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ (kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku)

Ćwiczenie 7

- a) $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$
 $\beta = \alpha = 70^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)
 $\gamma = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ$ (kąty wpisane i środkowy oparte na tym samym łuku)
 b) $\beta = 40^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)
 $\delta = 180^\circ - (80^\circ + \beta) = 60^\circ$
 $\alpha + \delta = 90^\circ$ (kąt wpisany oparty na półokręgu)
 $\alpha = 30^\circ$
 $\gamma = \alpha = 30^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)
 c) $\beta = 35^\circ$
 $\gamma = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$
 $\alpha = \gamma = 25^\circ$

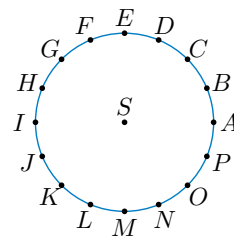
Odpowiedzi do zadań

- C lub O
 - F lub L
 - G lub K
 - C lub O
- $30^\circ, 60^\circ$
 - $45^\circ, 90^\circ$
 - $112,5^\circ, 225^\circ$
 - $3,75^\circ, 7,5^\circ$
- $|\sphericalangle ACD| = 20^\circ, |\sphericalangle CAD| = 20^\circ, |\sphericalangle ADC| = 140^\circ$
 - $|\sphericalangle ACD| = 65^\circ, |\sphericalangle CAD| = 65^\circ, |\sphericalangle ADC| = 50^\circ$
- $\alpha = 23^\circ, \beta = 134^\circ$
 - $\alpha = 51^\circ, \beta = 102^\circ$
 - $\alpha = 32^\circ, \beta = 64^\circ$
- $\alpha = 74^\circ, \beta = 37^\circ$
 - $\alpha = 113^\circ, \beta = 56^\circ 30'$
 - $\alpha = 72^\circ, \beta = 36^\circ$
- $\alpha = 30^\circ, \beta = 35^\circ$
 - $\alpha = 60^\circ, \beta = 70^\circ$
 - $\alpha = 50^\circ, \beta = 40^\circ$

Zadania

- Punkty $A, B, C, \dots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąta środkowego β . Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?

- $\beta = 45^\circ$
- $\beta = 112,5^\circ$
- $\beta = 225^\circ$
- $\beta = 315^\circ$



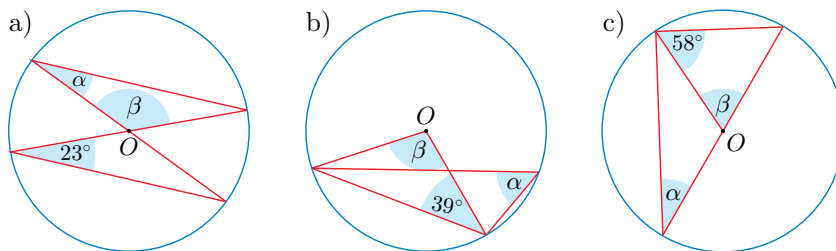
- Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miary kątów środkowego oraz wpisanego opartych na łuku o podanej długości.

- 2π
- 3π
- $\frac{15}{2}\pi$
- $\frac{\pi}{4}$

- Odcinek BD jest średnicą okręgu, a odcinek AC jest cięciwą prostopadłą do odcinka BD . Oblicz miary kątów trójkąta ADC w przypadku, gdy:

- $|\sphericalangle ACB| = 70^\circ$,
- $|\sphericalangle ABC| = 130^\circ$.

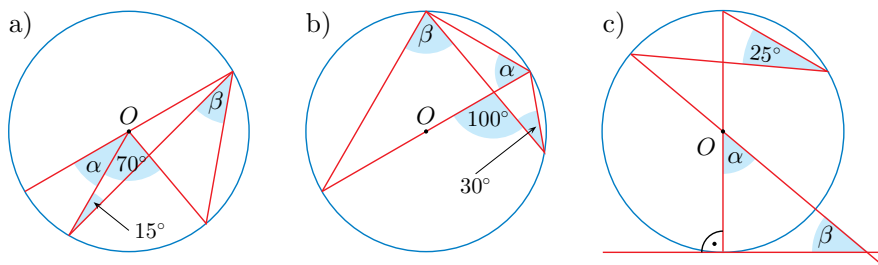
- Oblicz miary kątów α i β .



- Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α . Oblicz miary kątów α i β .

- $\alpha + \beta = 111^\circ$
- $\alpha = \beta + 56^\circ 30'$
- $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48^\circ$

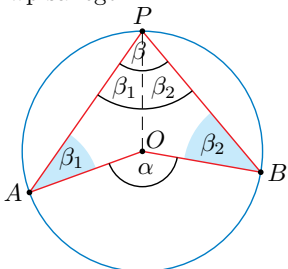
- ▶ 6. Oblicz miary kątów α i β .



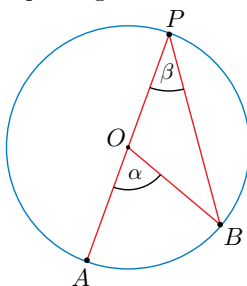
- D 7.** Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

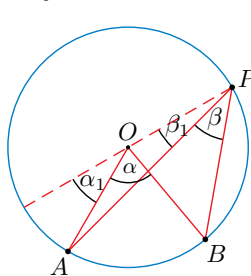
I. Środek O okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



II. Środek O okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek O okręgu leży poza kątem wpisanym.



Dowód przypadku I

Z punktu P prowadzimy promień PO . Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

7. Dowód przypadku II

Trójkąt BOP jest równoramienny, zatem:

$$|\angle BOP| = 180^\circ - 2\beta$$

$$\alpha = 180^\circ - |\angle BOP| =$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta$$

Dowód przypadku III

Na podstawie II mamy:

$$\alpha_1 = 2\beta_1$$

oraz

$$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$$

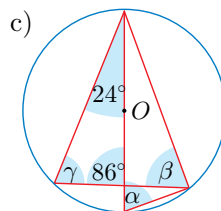
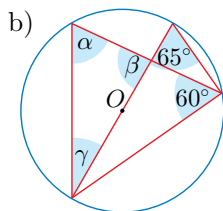
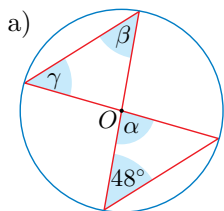
Zatem:

$$\alpha = 2\beta + 2\beta_1 - \alpha_1 =$$

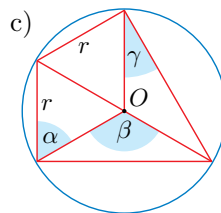
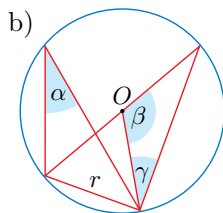
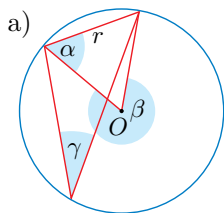
$$= 2\beta + 2\beta_1 - 2\beta_1 = 2\beta$$

Sprawdź się

8. Oblicz miary kątów α , β i γ .



9. Promień okręgu jest równy r . Oblicz miary kątów α , β i γ .



9. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 300^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 b) $\alpha = \gamma = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$
 c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

8. a) $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$

$$\beta = \gamma = 48^\circ$$

- b) $\alpha = 65^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

$$\gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \text{ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)}$$

$$\beta = 180^\circ - (65^\circ + 30^\circ) = 85^\circ$$

- c) $\gamma = 180^\circ - (24^\circ + 86^\circ) = 70^\circ$

$$\alpha = \gamma = 70^\circ \text{ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)}$$

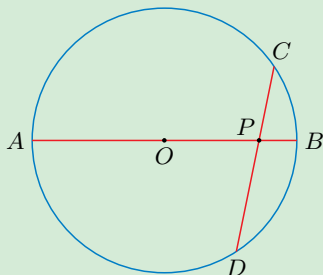
$$\beta = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

Uczeń:

- stosuje twierdzenie o cięciwach do wyznaczania długości odcinków w okręgach,
- formułuje twierdzenia dotyczące kątów w okręgu i dowodzi ich prawdziwości,
- przeprowadza dowód twierdzenia o cięciwach.

Ćwiczenie 1

- $x = 9$
- $x = 2\sqrt{2}$
- $x = 3$

Ćwiczenie 2

Na podstawie twierdzenia o cięciwach:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$$|PA| \cdot 1 = 2 \cdot 3$$

$$|PA| = 6 \text{ cm}$$

Średnica okręgu:

$$|PA| + |PB| = 7 \text{ cm}$$

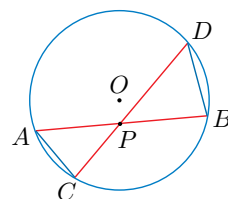
$$\text{Długość okręgu: } 7\pi \text{ cm}$$

5.5. Kąty w okręgu (2)

Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

**Dowód**

Kąty ACD i ABD są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, zatem $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$. Analogicznie uzasadniamy, że $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$. Również $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$ (uzasadnij), zatem na podstawie cechy KKK podobieństwa trójkątów stwierdzamy, że $\triangle APC \sim \triangle BPD$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

$$\text{czyli } |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$

Przykład 1

Oblicz długość odcinka PB (rysunek obok).

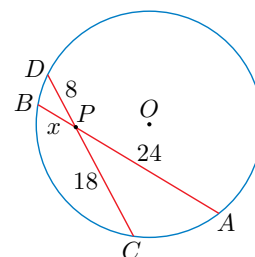
Na podstawie twierdzenia o cięciwach:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

czyli:

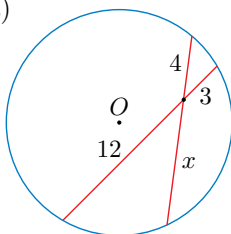
$$24 \cdot x = 18 \cdot 8$$

$$x = \frac{18 \cdot 8}{24} = 6$$

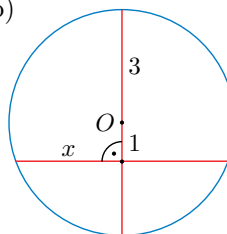
**Ćwiczenie 1**

Oblicz x .

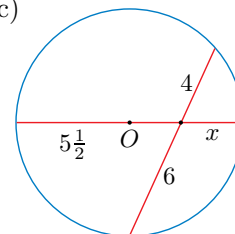
a)



b)



c)

**Ćwiczenie 2**

Średnica okręgu AB przecina cięciwę CD w punkcie P oraz $|PB| = 1 \text{ cm}$, $|PC| = 2 \text{ cm}$, $|PD| = 3 \text{ cm}$. Oblicz długość tego okręgu.

Ćwiczenie 3

- a) Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P , odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.
- b) Cięciwa przecina średnicę okręgu pod kątem prostym i dzieli ją na odcinki o długościach 6 cm i 24 cm. Oblicz długość tej cięciwy.

Przykład 2

Prosta AP jest styczna do okręgu o środku O w punkcie A . Kąt PAB ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta ACB .

Promień OA jest prostopadły do stycznej AP , zatem:

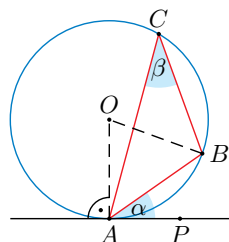
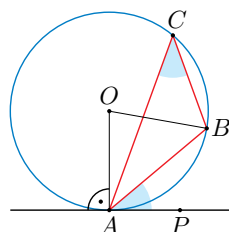
$$|\sphericalangle OAB| = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle AOB| = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$$

Kąt ACB jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB , zatem:

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

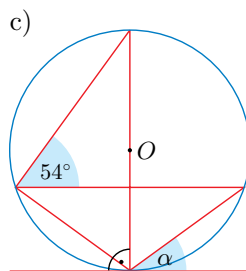
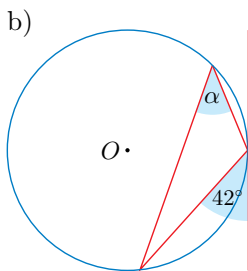
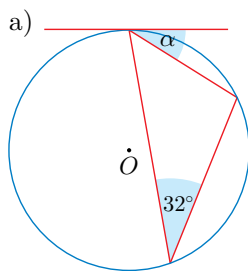


D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że kąty α i β na rysunku obok są równe, czyli że kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie.

Ćwiczenie 5

Wyznacz miarę kąta α .



Ćwiczenie 6

Wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB należą do okręgu. Kąt między bokiem BC a styczną do okręgu w punkcie B ma miarę 50° . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

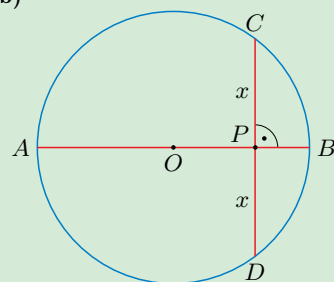
Ćwiczenie 6

50° , 50° , 80°

Ćwiczenie 3

- a) 8 cm, 12 cm

b)



$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$$24 \cdot 6 = x^2$$

$$x = 12 \text{ cm}$$

$$|CD| = 2x = 24 \text{ cm}$$

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BAP| &= 90^\circ - |\sphericalangle OAB| = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle AOB|) = \\ &= \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle ACB| \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

- a) $\alpha = 32^\circ$

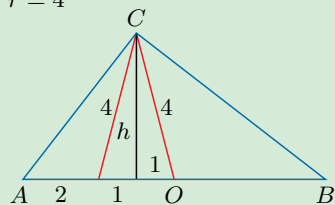
- b) $\alpha = 42^\circ$

- c) $\alpha = 36^\circ$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2(2r - 2) = 12$

$r = 4$



$$h^2 + 1^2 = 4^2$$

$$h = \sqrt{15}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{15} = 4\sqrt{15}$$

b) $\frac{3}{2} \cdot (2r - \frac{3}{2}) = 9$

$$r = \frac{15}{4}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (2 \cdot \frac{15}{4} - \frac{3}{2}) = 18$$

c) $|\angle ACD| = |\angle ABD|$ (kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku)

$|\angle CPD| = |\angle APB|$ (kąty wierzchołkowe)

Zatem $\triangle ABP \sim \triangle DPC$,

skala podobieństwa 3:2

Stąd $|AP| = \frac{3}{2}|DP| = 6$.

Średnica okręgu:

$$|AC| = |AP| + 2 = 8,$$

promień okręgu $r = 4$.

$|\angle ABC| = 90^\circ$ (kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy)

Trójkąt ABC jest prostokątny, zatem:

$$|BC| = \sqrt{8^2 - (3\sqrt{6})^2} =$$

$$= \sqrt{64 - 54} = \sqrt{10}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{15}$$

2. a) $\alpha = \gamma = \delta = 25^\circ$, $\beta = 50^\circ$

b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$, $\delta = 50^\circ$

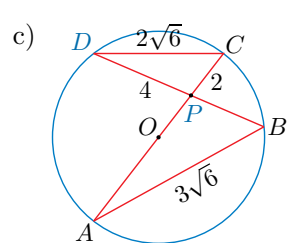
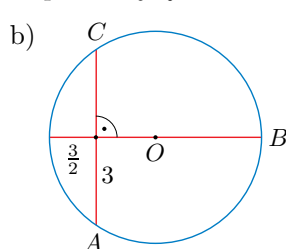
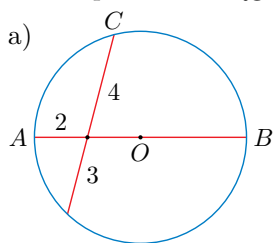
c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $\delta = 60^\circ$

3. a) 48°

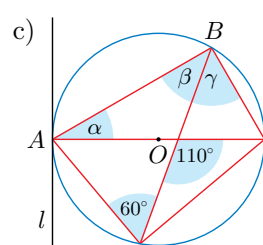
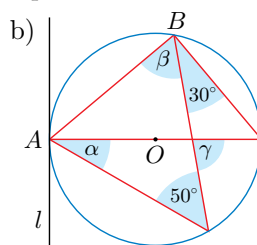
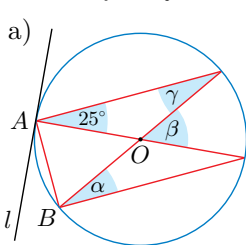
b) 15°

Zadania

1. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC .



2. Wyznacz miary kątów α , β , γ oraz miarę kąta ostrego δ między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A .

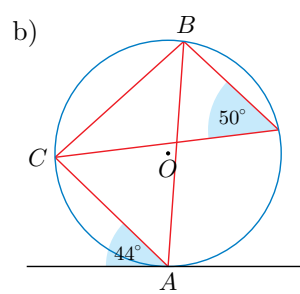
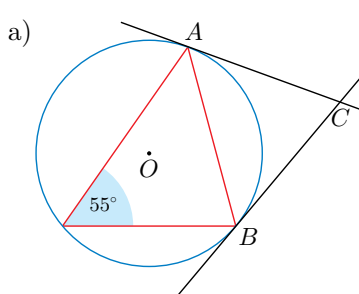


3. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB . Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę 96° . Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną przez punkt A .

- b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB . Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną przez punkt B .

Sprawdź się

4. Proste przedstawione na rysunku są styczne do okręgu w odpowiednich punktach. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .



4. a) $\alpha = \beta = 55^\circ$, $\gamma = 70^\circ$

b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 44^\circ$, $\gamma = 86^\circ$

5.6. Okrąg opisany na trójkącie

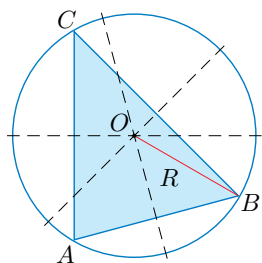
Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg.

Środek okręgu opisanego na trójkącie to punkt równo odległy od wierzchołków tego trójkąta.

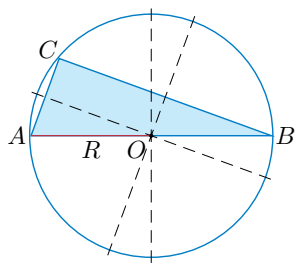
Na każdym trójkącie można opisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

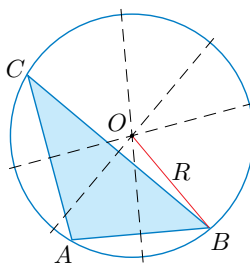
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

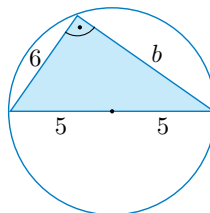
Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), czyli przeciwprostokątna ma długość:

$$c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, zatem $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.



Ćwiczenie 1

a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.

b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm². Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie równobocznym lub prostokątnym,
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na dowolnym trójkącie,
- stosuje wzór $P = \frac{abc}{4R}$,
- wyprowadza wzór $P = \frac{abc}{4R}$.

Ćwiczenie 1

a) $(2R)^2 = 7^2 + 12^2$

$$R = \frac{\sqrt{193}}{2} \text{ cm}$$

b) $P = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 4 = 18$

$$R = 4,5 \text{ cm}$$

$$l = 9\pi \text{ cm}$$

Multibook

- Okrąg opisany na trójkącie
- Okrąg i trójkąt

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.6

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Niech D będzie spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C , wówczas:

$$|CD| = R + |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli}$$

$$|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ćwiczenie 3

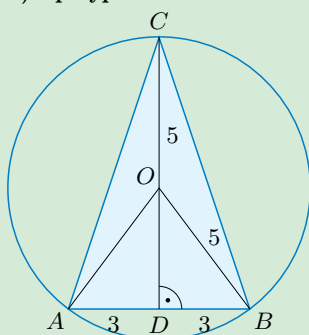
a) $10\sqrt{3}\pi$ cm

b) $8\sqrt{3}\pi$ cm

Ćwiczenie 5

a) Trójkąt AOB jest prostokątny, zatem $R = 2\sqrt{2}$.

b) I przypadek

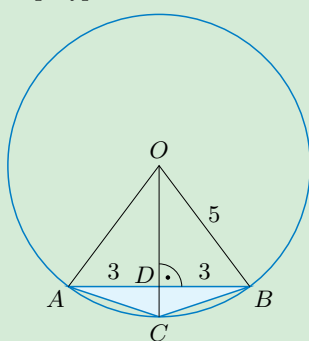


$$|OD| = 4 \text{ cm}$$

$$|DC| = 9 \text{ cm}$$

$$|AC| = |BC| = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

II przypadek



$$|OD| = 4 \text{ cm}$$

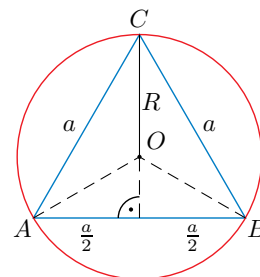
$$|DC| = 1 \text{ cm}$$

$$|AC| = |BC| = \sqrt{10} \text{ cm}$$

Twierdzenie

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Ćwiczenie 2

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 3

Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym:

a) o obwodzie równym 45 cm,

b) o polu równym $36\sqrt{3}$ cm².

Mówimy, że koło jest opisane na trójkącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 4

a) Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3}$ cm².

b) Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

Przykład 2

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 30° , a podstawa ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.

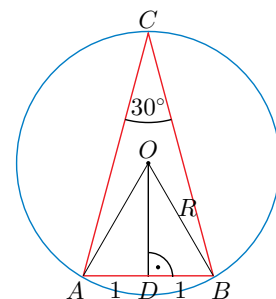
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB , czyli:

$$|\angle AOB| = 2|\angle ACB| = 60^\circ$$

Zatem trójkąt AOB jest równoboczny, więc:

$$R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$$

Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego: $|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.



Ćwiczenie 5

a) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 45° , a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) W okrąg o promieniu 5 cm jest wpisany trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta. Rozpatrz dwa przypadki.

Ćwiczenie 4

a) Bok trójkąta: $a = 16$ cm

Promień koła: $R = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm

Pole koła: $P = \frac{256}{3}\pi$ cm²

b) Bok trójkąta: $a = 6\sqrt{3}$ cm

Wysokość trójkąta: $h = 9$ cm

Pole trójkąta: $P = 27\sqrt{3}$ cm²

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a , b , c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Przykład 3

a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 9 cm, 10 cm, 17 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{85}{8}$ cm.

$$P = \frac{abc}{4R} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot \frac{85}{8}} = 36 \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) Dany jest trójkąt o bokach długości 10 cm, 17 cm, 21 cm i polu równym 84 cm^2 . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{10 \cdot 17 \cdot 21}{4 \cdot 84} = 10\frac{5}{8} \text{ [cm]}$$

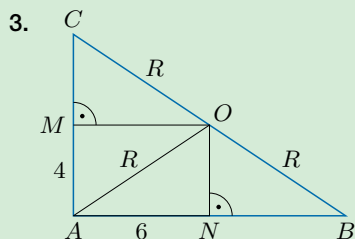
Ćwiczenie 6

a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 4 cm, 13 cm, 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8}$ cm.

b) Dany jest trójkąt o bokach długości 13 cm, 14 cm, 15 cm i polu równym 84 cm^2 . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadania

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym w przypadku, gdy:
 - pole tego trójkąta wynosi 8 cm^2 , a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm,
 - krótsza przyprostokątna tego trójkąta ma długość 5 cm, a jeden z jego kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego,
 - jest to trójkąt równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm.
- Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5 w przypadku, gdy:
 - jest to trójkąt równoramienny,
 - jedna przyprostokątna tego trójkąta jest trzy razy dłuższa od drugiej.
- Odległości środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od jego przyprostokątnych są równe 4 i 6. Oblicz pole tego trójkąta.



Zauważmy, że $|CM| = 4$ i $|AN| = 6$.

Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$

Ćwiczenie 6

- 24 cm^2
- $8,125 \text{ cm}$

Odpowiedzi do zadań

- 4 cm
 - 5 cm
 - $3(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$
- Przyprostokątne trójkąta:
 $5\sqrt{2}$
 $Ob = 10(1 + \sqrt{2})$
 - Przyprostokątne trójkąta:
 $x, 3x$
 $x^2 + (3x)^2 = 10^2$
 $x = \sqrt{10}$
 $Ob = 2(5 + 2\sqrt{10})$

4. $R = 4\sqrt{3}$

$\triangle AOE$ i $\triangle DOE$ są trójkątami o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, stąd:

$$|DE| = |EA| = 6$$

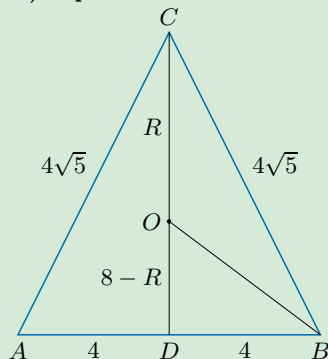
$$|EO| = 2\sqrt{3} = |EC|$$

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{ACD} = 48\sqrt{3}$$

5. a) I sposób



Wysokość trójkąta:

$|CD| = 8$ cm, wówczas:

$$(8 - R)^2 + 4^2 = R^2$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

II sposób

Wysokość trójkąta: 8 cm

Pole trójkąta: 32 cm^2

$$32 = \frac{8 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4R}$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

b) Wysokość trójkąta: 3 cm

Ramię trójkąta: 5 cm

Pole trójkąta: 12 cm^2

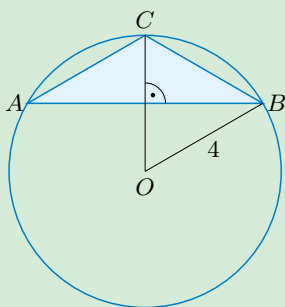
$$12 = \frac{8 \cdot 5 \cdot 5}{4R}$$

$$R = \frac{25}{6} \text{ cm}$$

6. a) $4\sqrt{10}(\sqrt{3} + \sqrt{13}) \text{ cm}$

b) $4\sqrt{3}(\sqrt{13} + \sqrt{10}) \text{ cm}$

8.

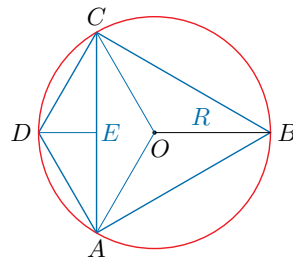


Trójkąt BOC jest równoboczny, czyli $|CB| = 4$

i $\angle ACB = 120^\circ$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$$

4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABC i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm w przypadku, gdy:

a) ramię tego trójkąta ma długość $4\sqrt{5}$ cm,

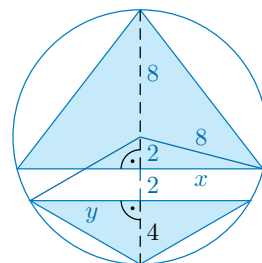
b) sinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.

6. Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h . Opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

a) $h = 20$ cm

b) $h = 6$ cm

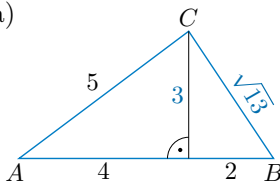
7. Na rysunku obok przedstawiono trójkąty równoramienne wpisane w okrąg o promieniu 8. Oblicz stosunek pól tych trójkątów.



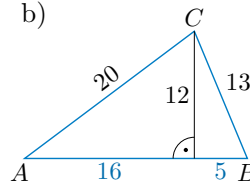
8. Trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Oblicz pole tego trójkąta.

9. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

a)



b)



Sprawdź się

10. Pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest równe 25π , a stosunek długości jego przyprostokątnych wynosi $1:7$. Oblicz pole tego trójkąta.

11. Trójkąt prostokątny ma pole równe 45, a wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku $1:4$. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

12. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie w przypadku, gdy wysokość opuszczona na jego podstawę ma długość: a) 10 cm, b) 3 cm.

7. $x = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$, $y = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

Stosunek pól: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{15} \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

9. a) $P = 9$

$$9 = \frac{6 \cdot 5 \cdot \sqrt{13}}{4R}$$

$$R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$$

b) $P = 126$

$$126 = \frac{21 \cdot 20 \cdot 13}{4R}$$

$$R = \frac{65}{6}$$

10. 7

11. 15π

12. a) 5,8 cm

b) $\frac{25}{6}$ cm

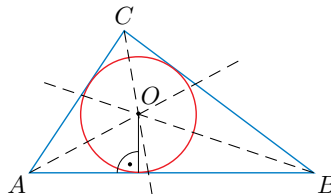
5.7. Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg nazywany wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest równo odległy od boków tego trójkąta. W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

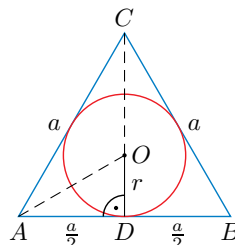


Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $\frac{1}{3}$ wysokości tego trójkąta.

Twierdzenie

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



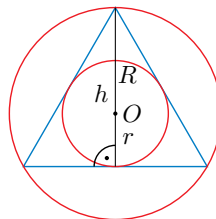
Dowód

Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC , czyli $|\angle OAD| = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \tan |\angle OAD| = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ćwiczenie 1

- Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.
- Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π .
- Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o polu $81\sqrt{3}$.

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie – mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość h trójkąta równobocznego w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka, czyli $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Ćwiczenie 2

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny lub prostokątny,
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w dowolny trójkąt,
- stosuje wzór $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$,
- wyprowadza wzór:

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Ćwiczenie 1

- $r = 3\sqrt{3}$
 $l = 6\sqrt{3}\pi$
- $r = 5$
 $5 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, czyli $a = 10\sqrt{3}$
 $Ob = 30\sqrt{3}$
- $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 81\sqrt{3}$
 $a = 18$
 $r = \frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3}$
 $L = 6\sqrt{3}\pi$

Ćwiczenie 2

- $a = 12$ cm
 $r = 2\sqrt{3}$ cm
 $R = 4\sqrt{3}$ cm
 $2\pi r + 2\pi R = 12\sqrt{3}\pi$ cm

Multibook

- Okrąg wpisany w trójkąt
- Okrąg i trójkąt

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

a) $c = 5$

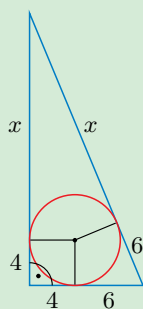
$$3 - r + 4 - r = 5 \\ r = 1$$

b) $c = 25$

$$7 - r + 24 - r = 25 \\ r = 3$$

Ćwiczenie 4

a)



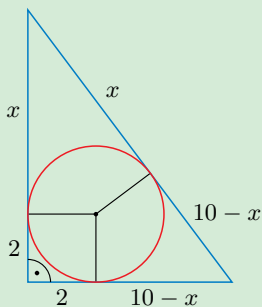
Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(x + 4)^2 + 10^2 = (x + 6)^2$$

Stąd $x = 20$.

Zatem pozostałe boki mają długości 24 cm i 26 cm.

b)



Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(x + 2)^2 + (2 + 10 - x)^2 = 10^2$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = 6$$

Zatem pozostałe boki mają długości 6 cm i 8 cm.

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

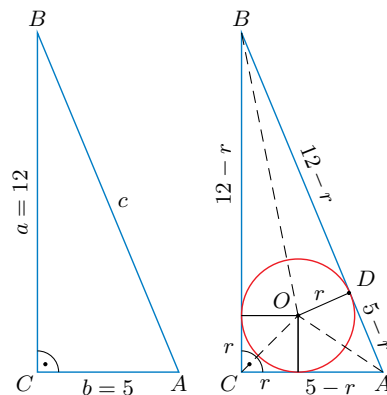
$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \text{ i } |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.

Stąd otrzymujemy $r = 2$.



Ćwiczenie 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 4

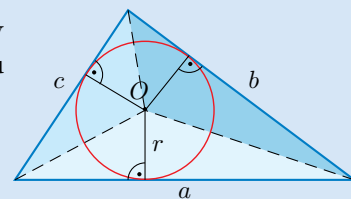
- a) Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
- b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

Ćwiczenie 5

Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 6

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π .

Ćwiczenie 5

$$P = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Ćwiczenie 6

$$r = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{5+5+6}{2} \cdot \frac{3}{2} = 12$$

Przykład 2

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$, a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a , b , c oraz polu P wyraża się wzorem:

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

Ćwiczenie 7

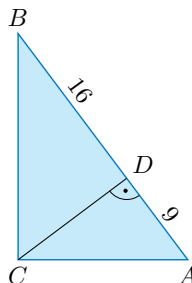
Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy jest w niego wpisany okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 8

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16.

- D** a) Uzasadnij, że trójkąty ABC , ACD i CBD są podobne.
b) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC .
c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD .



Zadania

- D** 1. a) Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
2. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30° . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60° . Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $P = \frac{a+a+a}{2} \cdot r = \frac{3}{2}ar$
b) $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 2^2 = 4$
2. a) $2(\sqrt{3} - 1)$
b) $6\pi(\sqrt{3} - 1)$

Ćwiczenie 7

c – przeciwprostokątna,

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

a) $c = 20$, $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16}{12+16+20} = 4$

b) $c = \sqrt{2}$,

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}{1+1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

c) $c = 26$, $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24}{10+24+26} = 4$

d) $c = 3$,

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+3} = \frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Ćwiczenie 8

a) $|\angle BAC| = |\angle CAD| = |\angle BCD|$ oraz $|\angle ACB| = |\angle ADC| = |\angle CDB| = 90^\circ$. Zatem trójkąty ABC , ACD , CBD są podobne (cecha KKK).

b) $\frac{|CA|}{9} = \frac{25}{|CA|}$, czyli $|CA| = 15$

$$\frac{|CB|}{16} = \frac{25}{|CB|}, \text{ czyli } |CB| = 20$$

$$r = 5, P = 25\pi$$

c) Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACD otrzymujemy:

$$|CD| = 12$$

Zatem dla trójkąta ACD :

$$r_1 = 3, P_1 = 9\pi$$

oraz dla trójkąta CBD :

$$r_2 = 4, P_2 = 16\pi$$

3. Niech h – wysokość trójkąta.

a) $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 12\right)^2} = 8$

$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$

$r = \frac{2 \cdot 48}{12 + 10 + 10} = 3$

b) $h = \sqrt{13^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 10\right)^2} = 12$

$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$

$r = \frac{2 \cdot 60}{10 + 13 + 13} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

5. Promienie kół: $r_1 = \frac{3}{2}$ cm,

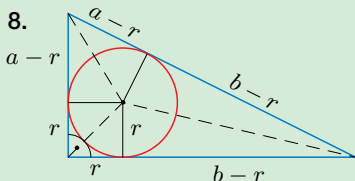
$r_2 = \frac{4}{3}$ cm

Różnica pól: $\frac{17}{36}\pi$ cm²

6. $r = \sqrt{2}$ cm

$|OA| = |OB| = \sqrt{6}$ cm

$|OC| = 3\sqrt{2}$ cm



$c = a - r + b - r$

$2r = a + b - c$

$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$

9. $\pi R^2 - \pi r^2 = 16\pi$
 $R^2 - r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

$\frac{a^2}{4} = 16$, czyli $a = 8$

$Ob = 24$

10. a) $\left(4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ cm

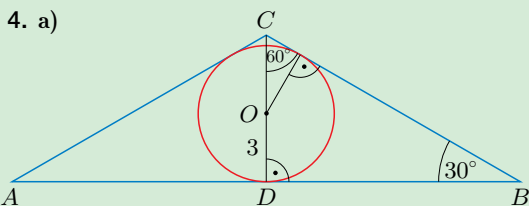
b) $4(\sqrt{3} - 1)$ cm

c) $(3\sqrt{5} - 5)$ cm

11. $Ob = 4(3 + \sqrt{13})$ cm

$l = 6(\sqrt{13} - 3)\pi$ cm

12. $6(2\sqrt{3} - 3)\pi$ cm



$|OC| = 2\sqrt{3}$

$|AC| = |BC| = 2(3 + 2\sqrt{3})$

$|DB| = (3 + 2\sqrt{3})\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} + 2)$,

czyli $|AB| = 6(\sqrt{3} + 2)$

b) $P = \frac{28}{3}\sqrt{3} + 16$

3. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x , a jego ramię – długość y . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) $x = 12$, $y = 10$

b) $x = 10$, $y = 13$

4. a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° . Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.

5. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.

6. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.

7. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

8. Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Sprawdź się

9. Pierścień kołowy ograniczony okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym i okręgiem w niego wpisanym ma pole równe 16π . Oblicz obwód tego trójkąta.

10. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny w przypadku, gdy:

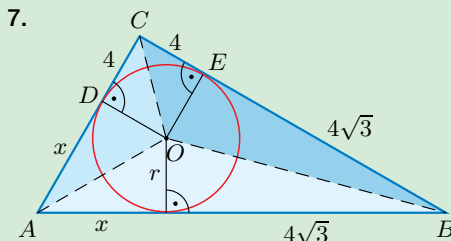
a) jego przyprostokątne mają długości 7 cm i 1 cm,

b) miara jednego z jego kątów ostrych wynosi 30° , a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta jest równa 8 cm,

c) środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 5 cm, a stosunek długości przyprostokątnych wynosi 1 : 2.

11. W trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość 12 cm, a pole jest równe 24 cm², wpisano okrąg. Oblicz obwód trójkąta i długość tego okręgu.

12. W trójkąt równoramienny, którego obwód jest równy $(12 + 6\sqrt{3})$ cm, a kąt przy podstawie ma miarę 30° , wpisano okrąg. Oblicz długość tego okręgu.



Czworokąt $CDEO$ jest rombem, który ma kąt prosty, więc jest kwadratem, czyli $\angle ACB = 90^\circ$.

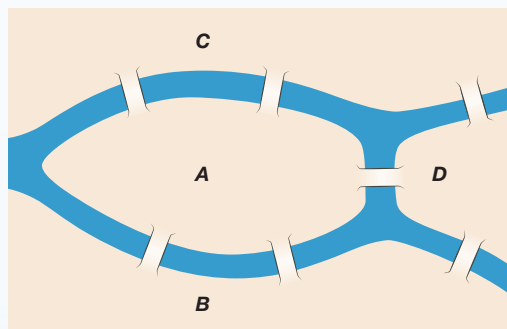
$$(4 + 4\sqrt{3})^2 + (4 + x)^2 = (x + 4\sqrt{3})^2$$

$$x = 4(2 + \sqrt{3})$$

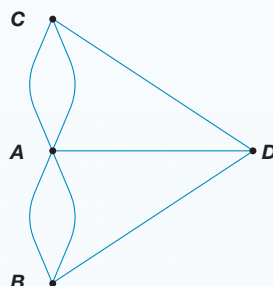
Pozostałe boki trójkąta: $4 + x = 4(\sqrt{3} + 3)$, $4\sqrt{3} + x = 8(\sqrt{3} + 1)$

Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregołą, było aż siedem mostów. Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło? Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone A i D), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litera B i C).



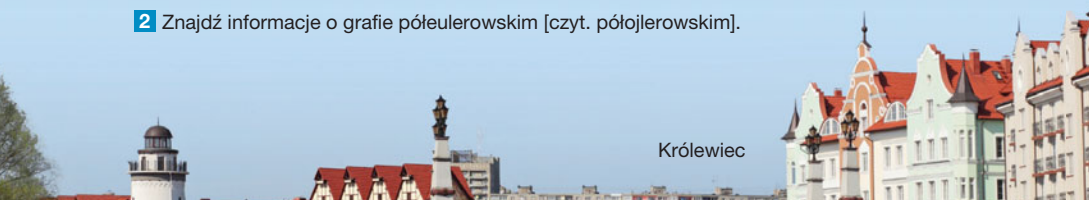
Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako A, B, C i D są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. W powyższym grafie stopień wierzchołka A jest równy 5, a stopnie wierzchołków B, C i D są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer” po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie”.

1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.

2 Znajdź informacje o grafie półeulerowskim [czyt. półojlerowskim].



Królewiec

Uczeń:

- rozpoznaje wielokąty foremne i podaje ich własności,
- oblicza miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego,
- wyznacza liczbę boków wielokąta foremnego, gdy dana jest suma miar jego kątów wewnętrznych,
- uzasadnia i stosuje zależność między długością boku wielokąta a promieniem okręgu opisanego na wielokącie foremnym lub wpisanego w wielokąt foremny.

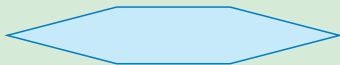
Ćwiczenie 1

Czworokąt niebędący wielokątem foremnym, który ma:

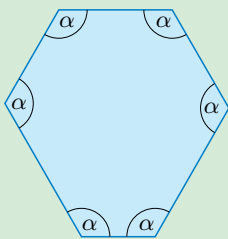
- a) równe boki, to romb,
- b) równe kąty, to prostokąt.

Sześciokąt niebędący wielokątem foremnym, który ma:

- a) równe boki:



- b) równe kąty (czyli $\alpha = 120^\circ$):



Ćwiczenie 2

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7
- f) 8
- g) 9
- h) 10

5.8. Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

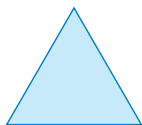
Ćwiczenie 1

Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają równe wszystkie: a) boki, b) kąty.

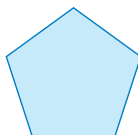
Ćwiczenie 2

Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

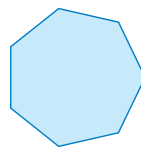
- a) trójkąt



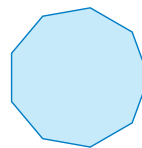
- c) pięciokąt



- e) siedmiokąt



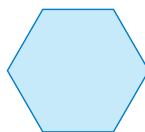
- g) dziewięciokąt



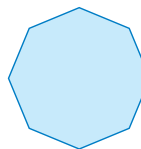
- b) kwadrat



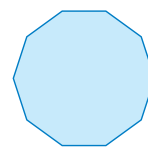
- d) sześciokąt



- f) ośmiokąt



- h) dziesięciokąt



Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

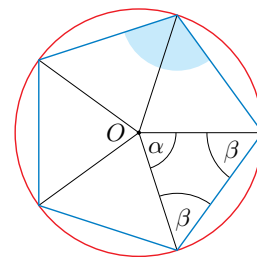
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.

Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, czyli:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

Zatem kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.



Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n -kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Ćwiczenie 3

Warto polecić uczniom wykonanie odpowiedniego rysunku.

I sposób

Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Zatem w n -kącie foremnym kąt wewnętrzny ma miarę:

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

II sposób

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Multibook

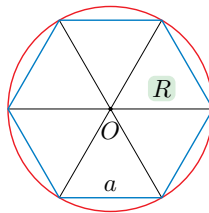
- Własności wielokątów foremnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.8

Generator
testów i sprawdzianów

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a . Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta:

$$R = a$$



Ćwiczenie 4

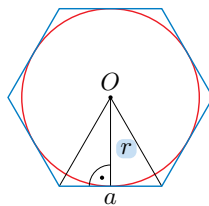
- Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu $150\sqrt{3}$.
- Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu 32π .

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy jest w niego wpisany okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a . Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 5

- Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie 54 cm.
- Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości 12π cm.

D Ćwiczenie 6

Dany jest n -kąt foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r . Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Zadania

- Oblicz miarę kąta wewnętrznego:
 - ośmiokąta foremnego,
 - dziesięciokąta foremnego.
- Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) 720° , b) 900° , c) 1260° , d) 1440° , e) 1620° ?
- Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na podanym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.
 - kwadrat o boku a
 - sześciokąt foremny o boku a

Odpowiedzi do zadań

- a) 135°
b) 144°
- a) 6
b) 7
c) 9
d) 10
e) 11
- a) $\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}\pi$
b) $\pi a^2 - \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}\pi$

Ćwiczenie 4

- $P_\Delta = \frac{150\sqrt{3}}{6} = 25\sqrt{3}$
 $R = a = 10$
 $l = 20\pi$
- $a = R = 4\sqrt{2}$
 $P = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5

- $a = 9$ cm
 $r = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm
 $P = \frac{243}{4}\pi$ cm²
- $r = 6$ cm
 $a = 4\sqrt{3}$ cm
 $2a = 8\sqrt{3}$ cm, $a\sqrt{3} = 12$ cm

Ćwiczenie 6

n -kąt foremny składa się z n trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości r , zatem:

$$P = n \cdot \frac{1}{2}ar = \frac{1}{2}nar$$

5. a) 9

b) Z każdego wierzchołka n -kąta wychodzą $n - 3$ przekątne. Zatem liczba przekątnych jest równa:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: $22,5^\circ$, 135° , $22,5^\circ$

$\triangle ACD$ i $\triangle AGF$: $22,5^\circ$,

$112,5^\circ$, 45°

$\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: $22,5^\circ$, 90° , $67,5^\circ$

7. Ośmiokąt foremny wpisany w okrąg składa się z ośmiu trójkątów równoramiennych o ramieniu długości r i kącie między ramionami 45° . Zatem:

$$P = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$$

8. Niech r – promień okręgu wpisanego w n -kąta foremny, R – promień okręgu opisanego na n -kącie foremnym.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2$$

$$R^2 - r^2 = 1$$

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot 1 = \pi$$

9. 48 cm

10. $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$

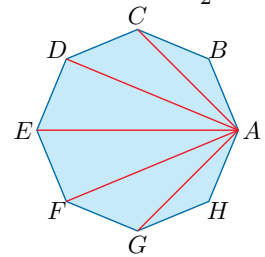
4. Sześciokąt foremny ma bok długości a i pole P . Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R , a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	4 cm	$2\sqrt{3} \text{ cm}$	$24\sqrt{3} \text{ cm}^2$
6 cm	6 cm	$3\sqrt{3} \text{ cm}$	$54\sqrt{3} \text{ cm}^2$
$\frac{4}{3}\sqrt{12} \text{ cm}$	$\frac{4}{3}\sqrt{12} \text{ cm}$	$\frac{2}{3}\sqrt{108} \text{ cm}$	16 cm^2
$8\sqrt{3} \text{ cm}$	$8\sqrt{3} \text{ cm}$	12 cm	$288\sqrt{3} \text{ cm}^2$

5. a) Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.

☒ b) Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n -kąta jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

6. Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



7. Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.

☒ 8. Dany jest n -kąta foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa $\pi \text{ cm}^2$ niezależnie od liczby boków wielokąta.

Sprawdź się

9. Oblicz obwód sześciokąta foremnego o polu równym $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

☒ 10. Suma długości przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka sześciokąta foremnego jest równa $12(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$. Oblicz pole tego sześciokąta.

11. a) Pole sześciokąta foremnego jest równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz różnicę długości okręgu opisanego na tym sześciokącie i okręgu wpisanego w ten sześciokąt.

b) Promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny jest równy 1 cm. Oblicz obwód i pole tego sześciokąta.

12. Punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami n -kąta foremnego. Styczna do okręgu opisanego na tym n -kącie przechodząca przez punkt A tworzy z bokiem AB kąt α . Wyznacz ten kąt dla:

a) $n = 8$,

b) $n = 10$,

c) $n = 12$.

11. a) Niech a – długość boku sześciokąta, r – promień okręgu wpisanego, R – promień okręgu opisanego.

$$6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}, \text{ czyli } a = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$2\pi R - 2\pi r = 2\pi a - 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2(2\sqrt{2} - \sqrt{6})\pi \text{ [cm]}$$

b) Niech a – długość boku sześciokąta.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 1, \text{ czyli } a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$Ob = 4\sqrt{3} \text{ cm}, P = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

12. a) $22,5^\circ$

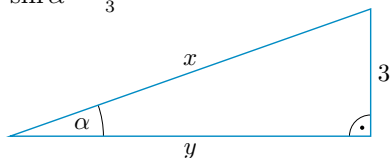
b) 18°

c) 15°

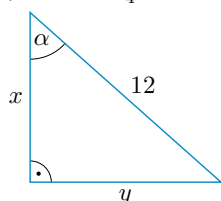
Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych

1. Oblicz x i y .

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

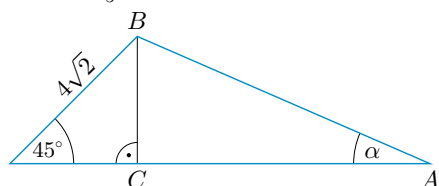


b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

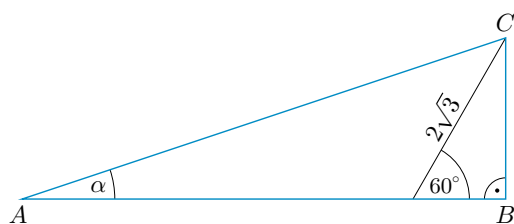


2. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC .

a) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$

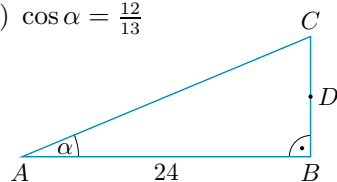


b) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

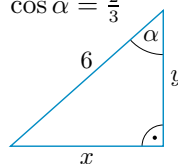


3. Oblicz długość środkowej AD trójkąta ABC .

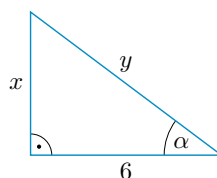
a) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$



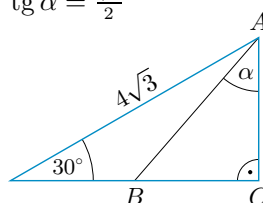
c) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$



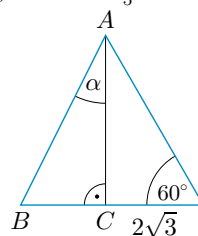
d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$



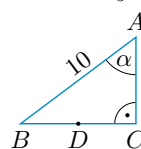
c) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$



d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$



b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 9, y = 6\sqrt{2}$
 b) $x = 3\sqrt{7}, y = 9$
 c) $x = 2\sqrt{5}, y = 4$
 d) $x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}$

2. a) $P = 4\sqrt{21}, Ob = 2(7 + \sqrt{21})$
 b) $P = \frac{27}{2}, Ob = 3(4 + \sqrt{10})$
 c) $P = 3\sqrt{3}, Ob = 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}$
 d) $P = 9, Ob = 3(3 + \sqrt{5})$

3. a) $\sqrt{601}$
 b) $2\sqrt{13}$

Uczeń:

- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów,
- przeprowadza dowód twierdzenia cosinusów.

5.9. Twierdzenie cosinusów (1)

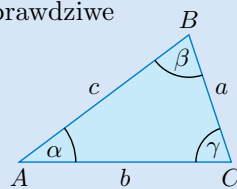
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. (Pozostałych dwóch zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ . Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.

Wówczas $\cos \gamma = 0$ i równość przybiera postać $c^2 = a^2 + b^2$ – jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej).

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\sphericalangle BAC$ jest ostry. Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h . Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a \cos \gamma, \quad |AD| = b - a \cos \gamma$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

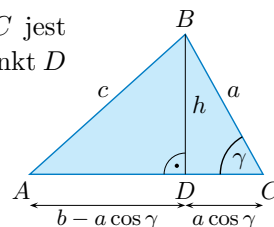
$$h^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (b - a \cos \gamma)^2$$

Zatem:

$$c^2 - (b - a \cos \gamma)^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2$$

$$c^2 - b^2 + 2ab \cos \gamma - a^2 \cos^2 \gamma = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma$$

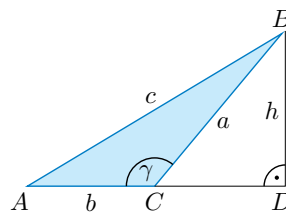
Ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



Ćwiczenie 1

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ w przypadku, gdy γ jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a \cos(180^\circ - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2 , korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD .



Ćwiczenie 1

$$|CD| = a \cos(180^\circ - \gamma) = -a \cos \gamma$$

$$h^2 = a^2 - |CD|^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = h^2 + (b + |CD|)^2$$

$$c^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma + (b - a \cos \gamma)^2$$

$$c^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Multibook

- Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.9



Przykład 1

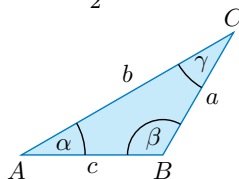
Uzasadnij, że trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$ i kącie $\gamma = 30^\circ$ jest równoramienny. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Aby obliczyć długość boku c , korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Zatem jest to trójkąt równoramienny. Z twierdzenia cosinusów wynika, że $\cos \beta < 0$ (sprawdź), zatem β jest kątem rozwartym. Stąd $\alpha = 30^\circ$ oraz $\beta = 120^\circ$.

**Ćwiczenie 2**

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .

a) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60^\circ$

c) $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$

b) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 150^\circ$

d) $b = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{Korzystamy z twierdzenia cosinusów.}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 18 - 90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α :

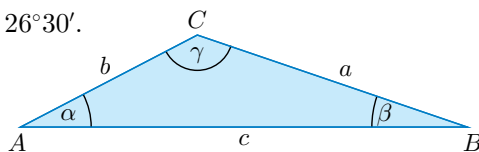
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{Korzystamy z twierdzenia cosinusów.}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 + 90 - 36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,8944$$

Z tablic (str. 251) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$$

**Ćwiczenie 3**

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

b) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

a) $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1 + 1 - 2 - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma = 150^\circ$, $\alpha = \beta = 15^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2}{2 \cdot 2(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

Ćwiczenie 2

a) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 60^\circ = 39$

$c = \sqrt{39}$

b) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 150^\circ$

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 = 74 + 35\sqrt{3}$

$c = \sqrt{74 + 35\sqrt{3}}$

c) $b^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 + -2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 5$

$b = \sqrt{5}$

d) $a^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 + -2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cos 135^\circ$

$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2 = 29$

$a = \sqrt{29}$

Odpowiedzi do zadań

- $\sqrt{7}$
 - $\sqrt{13}$
 - , d) $2\sqrt{13}$
- $d_1 = 2\sqrt{7}, d_2 = 2\sqrt{19}$
 - $d_1 = 2\sqrt{2}, d_2 = 2\sqrt{10}$
 - $d_1 = \sqrt{19}, d_2 = 7$
 - $d_1 = 2\sqrt{13}, d_2 = 2\sqrt{37}$
- $\alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 60^\circ$
 - $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 105^\circ$
- $\cos \alpha = \frac{7}{8}, \cos \beta = \frac{11}{16}$
 $\alpha \approx 29^\circ, \beta \approx 46,5^\circ,$
 $\gamma \approx 104,5^\circ$
 - $\cos \alpha = \frac{13}{14}, \cos \beta = \frac{11}{14}$
 $\alpha \approx 22^\circ, \beta \approx 38^\circ,$
 $\gamma \approx 120^\circ$
- Niech $x, 3x$ – długości boków trójkąta.
 $7^2 = x^2 + (3x)^2 +$
 $-2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ$
 $x = \sqrt{7}, 3x = 3\sqrt{7}$
 - Niech $x, 4x$ – długości boków trójkąta.
 $21^2 = x^2 + (4x)^2 +$
 $-2 \cdot x \cdot 4x \cdot \cos 120^\circ$
 $x = \sqrt{21}, 4x = 4\sqrt{21}$
- $\cos \gamma = \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}, P = \frac{3}{2}$
 - $\cos \gamma = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \sin \gamma = \frac{\sqrt{55}}{10},$
 $P = \frac{\sqrt{11}}{2}$
- $2\sqrt{17}$
 - $\sqrt{165}$
 - $\sqrt{30}$
 - $\sqrt{41 + 8\sqrt{5}}$
- 60°
 - 135°

Zadania

- Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .
 - $a = 4, b = \sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$
 - $a = 2, b = 6, \gamma = 120^\circ$
 - $b = 5, c = 3\sqrt{2}, \alpha = 45^\circ$
 - $a = 2\sqrt{3}, c = 4, \beta = 150^\circ$
- Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ zawarty między tymi bokami. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
 - $a = 2, b = 4\sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$
 - $a = 5, b = 3, \gamma = 60^\circ$
 - $a = 4, b = 2\sqrt{2}, \gamma = 45^\circ$
 - $a = 6, b = 8, \gamma = 120^\circ$
- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 4\sqrt{3}, c = 6$
 - $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3} + 3$
-  Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2, b = 3, c = 4$
 - $a = 3, b = 5, c = 7$
- 
 - Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt zawarty między nimi jest równy 60° . Trzeci bok tego trójkąta ma długość 7. Oblicz długości dwóch pozostałych boków.
 - Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt zawarty między nimi jest równy 120° . Trzeci bok tego trójkąta ma długość 21. Oblicz długości dwóch pozostałych boków.
- Oblicz $\cos \gamma$, $\sin \gamma$ i pole trójkąta ABC .
 - $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$
 - $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{3}$

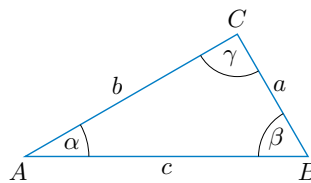
Sprawdź się

- Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .
 - $a = 6, b = 8, \cos \gamma = \frac{1}{3}$
 - $c = \sqrt{3}, b = 6, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 - $a = 5, c = 10, \cos \beta = -\frac{2}{5}$
 - $a = 4, c = 5, \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
- Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC .
 - $a = 5, b = \sqrt{19}, c = 3$
 - $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{10}, c = 2$
- Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC : $a = 6, b = 10$ oraz wiadomo, że $\sin \gamma = \frac{4}{5}$. Oblicz długość boku c w przypadku, gdy kąt γ jest:
 - ostry,
 - rozwart.
- $\cos \gamma = \frac{3}{5}$
 $c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5}$
 $c = 8$
 - $\cos \gamma = -\frac{3}{5}$
 $c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$
 $c = 4\sqrt{13}$

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)

Przykład 1

Kąty trójkąta ABC (rysunek obok) spełniają zależność $\alpha < \beta < \gamma$, a jego boki – zależność $a < b < c$.



Twierdzenie

W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Ćwiczenie 1

Boki trójkąta mają długości 6, $3\sqrt{2}$, $3 + 3\sqrt{3}$, a kąty mają miary 30° , 45° i 105° . Podaj długość boku leżącego naprzeciwko kąta: a) 30° , b) 105° .

Przykład 2

Dwa dłuższe boki trójkąta mają długości 4 i $3\sqrt{3}$, a najmniejszy kąt ma miarę 30° . Oblicz długość najkrótszego boku trójkąta.

Oznaczmy przez c długość najkrótszego boku trójkąta – bok ten leży naprzeciwko kąta 30° .

Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned}c^2 &= 4^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \\&= 16 + 27 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\end{aligned}$$

Zatem $c = \sqrt{7}$.

Ćwiczenie 2

a) Oblicz długość najkrótszego boku trójkąta, którego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i 5 cm, a najmniejszy kąt ma miarę 45° .

b) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150° .

Ćwiczenie 3

a) Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa 135° , a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3 + \sqrt{3})$ cm. Oblicz długość najkrótszego boku tego trójkąta.

b) Dwa kąty trójkąta mają miary 15° i 45° , a jego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $(\sqrt{3} - 1)$ cm. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.

Ćwiczenie 3

a) $\alpha + \beta = 135^\circ$, α, β – kąty ostre, więc $\alpha > 45^\circ$ i $\beta > 45^\circ$.

Najkrótszy bok leży naprzeciwko kąta $\gamma = 45^\circ$.

$$c^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot (3\sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{3}) \cos 45^\circ = 12$$

$$c = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

b) Najdłuższy bok leży naprzeciwko kąta 120° .

$$\begin{aligned}c^2 &= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cos 120^\circ = \\&= 4 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3} - 1) \left(-\frac{1}{2}\right) = 6\end{aligned}$$

$$c = \sqrt{6} \text{ cm}$$

Uczeń:

- wskazuje najmniejszy (największy) kąt w trójkącie, gdy dane są długości boków trójkąta,
- bada, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny,
- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Ćwiczenie 1

a) $3\sqrt{2}$

b) $3 + 3\sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

a) $c^2 = (3\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5 \cos 45^\circ = 13$

$$c = \sqrt{13} \text{ cm}$$

b) $c^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cos 150^\circ = 28$

$$c = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

Multibook

- Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.10



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

$$3^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \alpha$$

$$60 \cos \alpha = 25 + 36 - 9$$

$$\cos \alpha = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$$

$$6^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \gamma$$

$$30 \cos \gamma = 9 + 25 - 36$$

$$\cos \gamma = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}$$

Przykład 3

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt γ – największym. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\cos \gamma$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt γ – naprzeciwko najdłuższego. Na podstawie twierdzenia cosinusów:

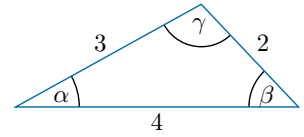
$$2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha = 25 - 24 \cos \alpha$$

$$\text{Stąd } \cos \alpha = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}.$$

Podobnie:

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \gamma = 13 - 12 \cos \gamma$$

$$\text{Zatem } \cos \gamma = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}.$$



Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt o bokach 3, 5 i 6. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a γ – największym. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\cos \gamma$.

D Przykład 4

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos \gamma < 0$, więc $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos \alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 5

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o podanych bokach. Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$

c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$

b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$

d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Ćwiczenie 5

a) $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, ostrokątny

b) $\cos \alpha = 0$, prostokątny

c) $\cos \beta = -\frac{1}{16}$, rozwartokątny

d) $\cos \gamma = -\frac{1}{48}$, rozwartokątny

Zadania

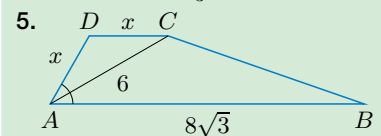
1. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o podanych bokach. Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?
 - a) $a = 6, b = 7, c = 8$ c) $a = 2, b = 2\sqrt{2}, c = 1$
 - b) $a = 10, b = 7, c = 5$ d) $a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = 2$
2. Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:
 - a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najdłuższego boku,
 - b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6.
3. Boki trójkąta mają długości 3, 4 i 6. Oblicz:
 - a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najkrótszego boku,
 - b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 4.
4. Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P . Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c .
 - a) $a = 4, b = 10, P = 12$ b) $a = 5, b = 6, P = 10\sqrt{2}$
5. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60° . Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD . Oblicz obwód tego trapezu.
6. Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Obwód równoległoboku jest równy 16. Oblicz długości jego przekątnych.

Sprawdź się

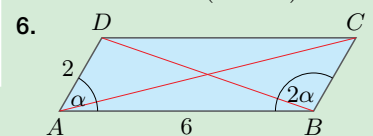
7. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o podanych bokach.
 - a) $a = 3, b = 2\sqrt{3}, c = 2$ b) $a = 3\sqrt{2}, b = 3, c = 4$
8. Oblicz długość:
 - a) najkrótszego boku trójkąta, którego dwa pozostałe boki mają długości 10 i $6\sqrt{3}$, a najmniejszy kąt ma miarę 30° ,
 - b) najdłuższego boku trójkąta, którego dwa pozostałe boki mają długości 6 i 8, a jeden z kątów ma miarę 120° .
9. Oblicz długości przekątnych rombu o boku a i kącie ostrym α .
 - a) $a = 6 \text{ cm}, \alpha = 30^\circ$ b) $a = 8 \text{ cm}, \alpha = 45^\circ$
7. a) $\frac{1}{12}$
b) $\frac{7}{24}$
8. a) $2\sqrt{7}$
b) $2\sqrt{37}$
9. a) $6\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ cm}, 12\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ cm}$
b) $8\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ cm}, 8\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ cm}$

Odpowiedzi do zadań

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży wewnątrz trójkąta, gdy trójkąt ten jest ostrokątny, czyli gdy cosinus największego kąta jest dodatni.
 - a) $\cos \gamma = \frac{1}{4}$, tak
 - b) $\cos \alpha = -\frac{13}{35}$, nie
 - c) $\cos \beta = -\frac{3}{4}$, nie
 - d) $\cos \alpha = 0$, nie
2. a) $\frac{1}{5}$
b) $2\sqrt{7}$
3. a) $\frac{43}{48}$
b) $\frac{\sqrt{74}}{2}$
4. a) $\cos \gamma = \frac{4}{5}, c = 2\sqrt{13}$
lub $\cos \gamma = -\frac{4}{5}, c = 6\sqrt{5}$
b) $\cos \gamma = \frac{1}{3}, c = \sqrt{41}$
lub $\cos \gamma = -\frac{1}{3}, c = 9$



$|\angle DAC| = |\angle CAB| = 30^\circ$
 $|\angle ACD| = |\angle CAB|$
 (kąty naprzemianległe)
 Zatem trójkąt ACD jest równoramienny, czyli $|AD| = |DC| = x$ oraz $|\angle ADC| = 120^\circ$.
 Z twierdzenia cosinusów:
 $6^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cos 120^\circ$
 $x = 2\sqrt{3}$
 $|CB|^2 = 6^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{3} \cos 30^\circ = 36 + 192 - 144 = 84$
 $|CB| = 2\sqrt{21}$
 $Ob = 8\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{21} = 2\sqrt{3}(6 + \sqrt{7})$



$\alpha + 2\alpha = 180^\circ$,
 czyli $\alpha = 60^\circ$
 $|BD|^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$
 $|BD| = 2\sqrt{7}$
 $|AC|^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ$
 $|AC| = 2\sqrt{13}$



Powtórzenie

Zestaw I

Odpowiedzi do zadań

1. a) π
b) $2\sqrt{3} - \frac{3}{4}\pi$

2. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$
b) $\alpha = 50^\circ, \beta = 55^\circ$
c) $\alpha = 100^\circ, \beta = 130^\circ$

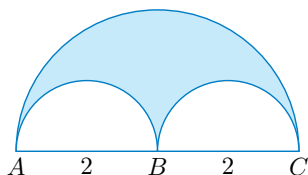
3. a) 60°
b) 30°

4. a) $22,5^\circ$
b) $67,5^\circ$

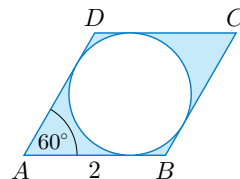
5. Niech a – długość przyprostokątnej.
 $Ob = 2a + a\sqrt{2}, R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
a) $2a + a\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$
 $a = 2, R = \sqrt{2}$
b) $2a + a\sqrt{2} = 4$
 $a = 2(2 + \sqrt{2}), R = 2(\sqrt{2} - 1)$
c) $2a + a\sqrt{2} = 1$
 $a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, R = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

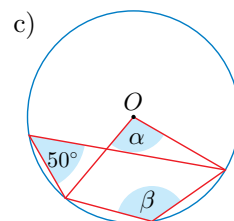
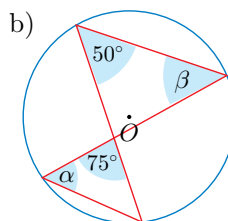
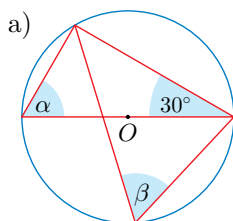
a) Wszystkie łuki są półokręgami.



b) Figura $ABCD$ jest rombem.



2. Wyznacz miary kątów α i β .

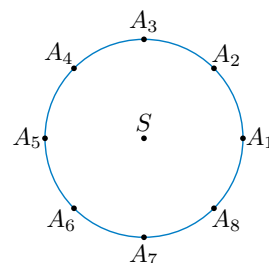


3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta ostrego między:

- a) cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B ,
b) cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C .

4. Punkty $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta ostrego między:

- a) cięciwą A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1 ,
b) cięciwą A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8 .



5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym, którego obwód jest równy:

- a) $4 + 2\sqrt{2}$, b) 4, c) 1.

6. a) Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe 27π . Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

b) Suma pól koła wpisanego w trójkąt równoboczny i koła na nim opisanego jest równa 60π . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

6. Niech a – długość boku trójkąta.

a) $R = 3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, czyli $a = 9$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

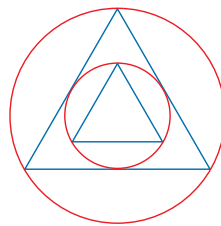
$$P = \frac{27}{4}\pi$$

b) $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \pi + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \pi = 60\pi$

$$a = 12$$

$$P = 36\sqrt{3}, Ob = 36$$

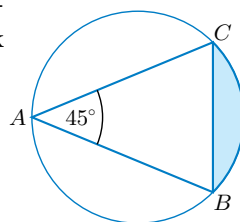
7. Suma długości okręgów przedstawionych na rysunku obok jest równa 12π . Oblicz sumę obwodów trójkątów równobocznych na tym rysunku.



8. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- a) stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,
b) jest on równoramienny.

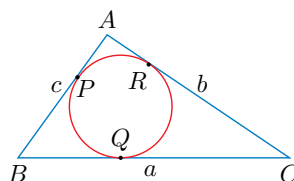
9. Trójkąt równoramienny ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok).



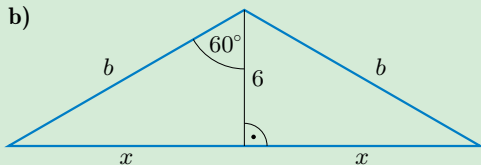
- a) Oblicz długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$.
b) Oblicz pole zacieniowanego odcinka koła.
c) Oblicz obwód trójkąta ABC .

Zestaw II

- Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego:
 - przyprostokątne mają długości 2 cm i 6 cm,
 - obwód jest równy 60 cm, a tangens jednego z jego kątów jest równy 2,4.
- W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.
- Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.
- Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość 3.
- W trójkąt o bokach $a = 16$, $b = 13$ i $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków AP , BQ i CR .
- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym:
 - o ramieniu 12 i kącie α przy podstawie takim, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,
 - o wysokości 6 opuszczonej na podstawę i kącie 120° między ramionami.



6. b)



$$x = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = 12$$

$$\text{Pole trójkąta: } P = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$\text{Długości boków trójkąta: } 12\sqrt{3}, 12, 12$$

$$\text{Promień okręgu opisanego na trójkącie: } R = \frac{12\sqrt{3} \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 36\sqrt{3}} = 12$$

7. Niech a – długość boku większego trójkąta, b – długość boku mniejszego trójkąta.

$$2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} + 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = 12\pi$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 2$$

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } b = 2\sqrt{3}$$

$$Ob = 3a + 3b = 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

8. a) $3,75 \text{ cm}^2$

- b) $6,25 \text{ cm}^2$

9. a) 6π , 4π

- b) $16(\pi - 2)$

- c) $8(\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} + 2})$

Zestaw II

1. a) $(4 - \sqrt{10}) \text{ cm}$

- b) 4 cm

2. $r = 3$, $P = 54$

3. $3\frac{1}{3} \text{ cm}$

4. $6\pi(\sqrt{2} - 1)$

5. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$|AP| = |AR| = x,$$

$$|BP| = |BQ| = y,$$

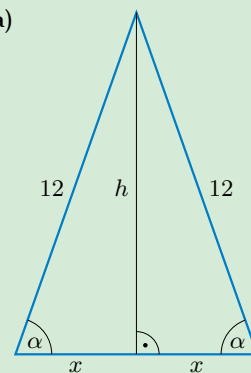
$$|CR| = |CQ| = z.$$

Wówczas:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + z = 13 \\ y + z = 16 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$$

Zatem $|AP| = 3$, $|BQ| = 6$, $|CR| = 10$.

6. a)



$$x = 12 \cos \alpha = 4$$

$$h = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$$

Długości boków trójkąta: 8, 12, 12

$$\text{Pole trójkąta: } P = 32\sqrt{2}$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie:

$$R = \frac{8 \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 32\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

**Przykład**

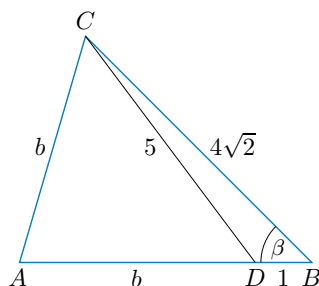
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC .

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Aby obliczyć $\cos \beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$\begin{aligned} 5^2 &= (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \beta \\ 25 &= 33 - 8\sqrt{2} \cos \beta \\ 8\sqrt{2} \cos \beta &= 8 \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



Obliczamy b , korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

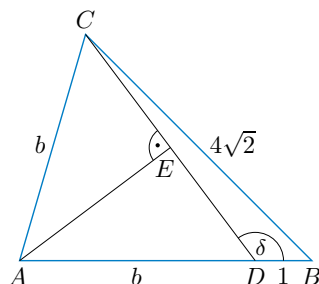
$$\begin{aligned} b^2 &= (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (b+1) \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \beta \\ b^2 &= b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8 \\ 6b &= 25 \\ b &= 4\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób

Aby obliczyć $\cos \delta$ (rysunek obok), korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$\begin{aligned} (4\sqrt{2})^2 &= 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos \delta \\ 32 &= 26 - 10 \cos \delta \\ 10 \cos \delta &= -6 \\ \cos \delta &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$



Zatem:

$$\cos |\sphericalangle ADC| = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta = \frac{3}{5}$$

Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD . Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos |\sphericalangle ADC| = \cos |\sphericalangle ADE| = \frac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{b}, \text{ czyli } b = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$

→ Zadanie 24, str. 217

Komentarz

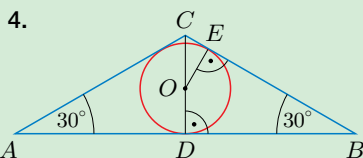
Po przeanalizowaniu sposobów rozwiązania tego zadania warto zaproponować uczniom, aby ułożyli plan postępowania.

1. $R = a\sqrt{2}$. Długość boku sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa R , zatem jego pole jest równe:

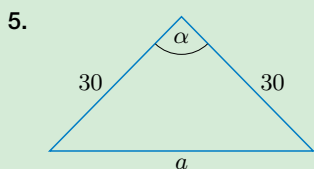
$$P = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}(a\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}a^2$$

2. $P = \frac{54^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{3}{20} \cdot 16\pi = \frac{12}{5}\pi = 2,4\pi$

3. $|AB| = 9$, $|BC| = 16$,
 $|AC| = 13$
 $16^2 = 9^2 + 13^2 - 2 \cdot 9 \cdot 13 \cos \alpha$
 $\cos \alpha = -\frac{1}{39}$



$$\begin{aligned} |\angle OCE| &= 60^\circ \\ |OD| &= |OE| = 6 \\ \frac{6}{|OC|} &= \sin 60^\circ, \text{ czyli} \\ |OC| &= 4\sqrt{3}, \text{ stąd} \\ |DC| &= 6 + 4\sqrt{3} \\ \frac{|DB|}{6+4\sqrt{3}} &= \tan 60^\circ, \text{ czyli} \\ |DB| &= 6\sqrt{3} + 12 \\ \text{Zatem } |AB| &= 12\sqrt{3} + 24. \end{aligned}$$



Z twierdzenia cosinusów:
 $a^2 = 30^2 + 30^2 +$
 $-2 \cdot 30 \cdot 30 \cdot \frac{1}{50} =$
 $= 2 \cdot 30^2 \left(1 - \frac{1}{50}\right) = 30^2 \cdot \frac{49}{25} =$
 $= \frac{30^2}{5^2} \cdot 7^2 = 6^2 \cdot 7^2 = 42^2$
 $a = 42$
 $Ob = 2 \cdot 30 + 42 = 102$

W zadaniach 1–8 i 12.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $6a^2$ C. $3\sqrt{3}a^2$ D. $6\sqrt{3}a^2$

Zadanie 2 (0–1)

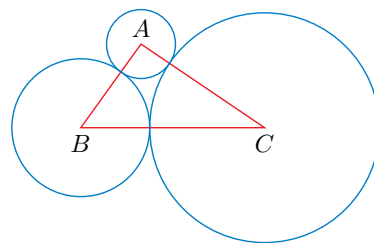
Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe

- A. $0,6\pi$ B. $1,2\pi$ C. $1,8\pi$ D. $2,4\pi$

Zadanie 3 (0–1)

Dane są trzy okręgi o środkach A , B , C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{16}$ C. $-\frac{1}{39}$ D. 0



Zadanie 4 (0–1)

W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° wpisano okrąg o średnicy 12. Podstawa tego trójkąta ma długość

- A. $6 + 4\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $24 + 12\sqrt{3}$ D. $36 + 24\sqrt{3}$

Zadanie 5 (0–1)

Cosinus kąta przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest równy $\frac{1}{50}$, a jego ramię ma długość 30. Obwód tego trójkąta jest równy

- A. 108 B. 102 C. 96 D. 92

Zadanie 6 (0–1)

W trójkącie ABC dane są: $|\angle BAC| = 120^\circ$, $|AB| = \sqrt{2} - 1$ i $|AC| = \sqrt{2} + 1$. Wskaż długość boku BC tego trójkąta.

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Dany jest trójkąt o bokach 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{6}$. Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy

- A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

Zadanie 8 (0–1)

Sąsiednie boki równoległoboku mają długości 4 i $2 + 2\sqrt{3}$, a jego kąt rozwarty ma miarę 150° . Jedną z przekątnych tego równoległoboku ma długość

- A. $2 + \sqrt{2}$ B. $2 + \sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

6. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC mamy:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos |\angle BAC| = \\ &= (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) \cdot \cos 120^\circ = \\ &= 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 2(2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$|BC| = \sqrt{7}$$

7. $2 < \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$, więc największy kąt α leży naprzeciw boku o długości $2\sqrt{2}$.

$$\cos \alpha = \frac{2^2 + (\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{4 + 6 - 8}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

8. $x^2 = 4^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot (2 + 2\sqrt{3}) \cos 30^\circ = 8$
 $x = 2\sqrt{2}$

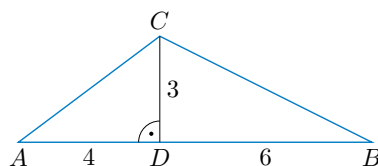


Zadanie 9 (0-1)

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok).

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Promień okręgu opisanego na trójkącie BCD jest równy 4,5.	P	F
Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 5.	P	F

Zadanie 10 (0-1)

Kąty trójkąta równoramiennego ABC mają miary α , α i 4α , a jego ramię ma długość 2.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

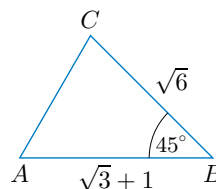
Obwód trójkąta ABC jest równy $4 + 4\sqrt{3}$.	P	F
Jedna ze środkowych trójkąta ABC ma długość $\sqrt{7}$.	P	F

Zadanie 11 (0-1)

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok).

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Bok AC ma długość równą



A.	2,	a pole trójkąta ABC jest równe	1.	$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.
B.	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$,		2.	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
C.	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,		3.	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 12

Dany jest romb o obwodzie 16 i kącie rozwartym α takim, że $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Zadanie 12.1 (0-1)

Pole tego rombu jest równe

- A.** $4\sqrt{15}$ **B.** $6\sqrt{15}$ **C.** $8\sqrt{5}$ **D.** $8\sqrt{15}$

Zadanie 12.2 (0-2)

Oblicz długość krótszej przekątnej tego rombu.

12. Bok rombu: $a = 4$.

Niech β będzie kątem ostrym rombu. Wówczas $\beta = 180^\circ - \alpha$, więc:

$$\cos \beta = -\cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\text{Zatem } \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

12.1. $P = a^2 \sin \beta = 16 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15}$

12.2. Niech d będzie długością krótszej przekątnej rombu. Leży ona naprzeciwko kąta ostrego, zatem:

$$d^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 32 - 8 = 24$$

$$d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

9. $|BC| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$R_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|BC| \neq 4,5$$

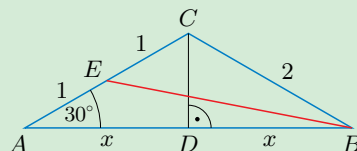
$$|AC| = 5$$

$$|AC|^2 + |CB|^2 = 25 + 45 = 70$$

$$|AB|^2 = 100$$

Zatem trójkąt ABC nie jest prostokątny, promień okręgu opisanego na tym trójkącie nie może więc być równy połowie $|AB|$.

10. $6\alpha = 180^\circ$, więc $\alpha = 30^\circ$.



$$x = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$Ob = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$|BE|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 1^2 +$$

$$-2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ =$$

$$= 13 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13 - 6 = 7$$

11. $|AC'|^2 = 6 + (\sqrt{3} + 1)^2 +$

$$-2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) =$$

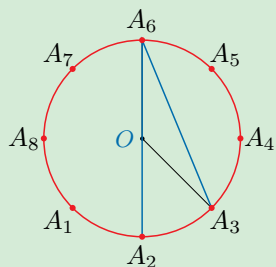
$$= 10 - 6 = 4$$

$$|AC| = 2$$

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

13.

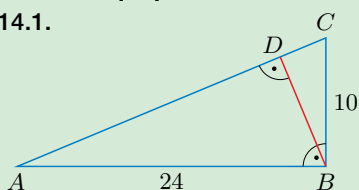


$$\begin{aligned} |\sphericalangle A_2OA_3| &= \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \\ |\sphericalangle A_2A_6A_3| &= \frac{1}{2}|\sphericalangle A_2OA_3| = \\ &= 22,5^\circ \end{aligned}$$

14. $a = 10$ cm, $c = 24$ cm

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{10^2 + 24^2} = \\ &= 2\sqrt{5^2 + 12^2} = 2\sqrt{169} = \\ &= 26 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

14.1.



R - promień koła opisanego na trójkącie ABC

$$R = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13 \text{ [cm]}$$

Pole koła opisanego na trójkącie ABC :

$$P = \pi R^2 = 169\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

14.2. Okrąg opisany na trójkącie ABD ma średnicę 24 cm, zatem długość tego okręgu jest równa 24 π cm.

Okrąg opisany na trójkącie BCD ma średnicę 10 cm, zatem długość tego okręgu jest równa 10 π cm.

Zadanie 13 (0-2)

Punkty $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na osiem równych łuków.

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi wybrane spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wyznaczonych miejscach.

Miarę równą $22^\circ 30'$ mają oraz .

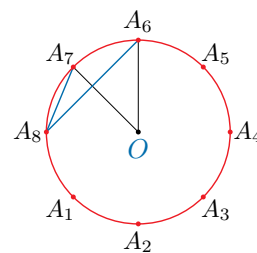
A. $\sphericalangle A_1A_4A_3$

C. $\sphericalangle A_6A_8A_7$

E. $\sphericalangle A_2A_6A_3$

B. $\sphericalangle A_8A_1A_5$

D. $\sphericalangle A_2A_7A_8$

F. $\sphericalangle A_5A_2A_3$


Zadanie 14

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i przyprostokątnych o długościach 10 cm oraz 24 cm.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe

A.	169 π cm ² ,	ponieważ średnica tego koła jest równa	1.	12 cm.
			2.	24 cm.
B.	144 π cm ² ,		3.	26 cm.

Zadanie 14.2 (0-2)

Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz długości okręgów opisanych na tych trójkątach.

Zadanie 15 (0-2)

Dany jest trójkąt o bokach długości 4, 5 i 6. Najmniejszy kąt tego trójkąta jest równy α , a największy β .

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
15.1	$\cos \alpha$ jest równy	D
15.2	$\cos \beta$ jest równy	A

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{4}{5}$

Zadanie 20, str. 217

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$\beta = 3\alpha$ oraz $\alpha + \beta = 4\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 45^\circ$

$$\frac{b}{a} = 2\sqrt{2}, \text{ skąd } b = 2\sqrt{2}a$$

$$d = 2\sqrt{5} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD otrzymujemy:

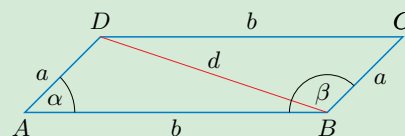
$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ (2\sqrt{5})^2 &= a^2 + (2\sqrt{2}a)^2 - 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$20 = a^2 + 8a^2 - 4a^2 = 5a^2$$

czyli $a = 2$ oraz $b = 4\sqrt{2}$.

$$P = ab \sin \alpha = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$$

$$Ob = 2(a + b) = 2(2 + 4\sqrt{2}) = 4(1 + 2\sqrt{2})$$





Zadanie 16 (0-2)

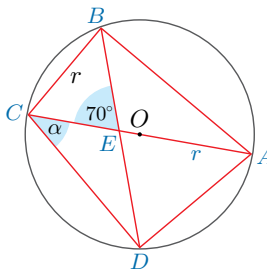
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy $\alpha < 180^\circ$ jest równe P . Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α ?

Zadanie 17 (0-2)

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2} + 1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 18 (0-3)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r . Wyznacz kąt α .



Zadanie 19 (0-2)

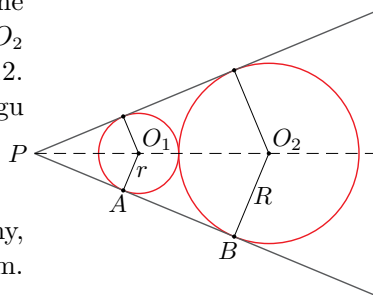
Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego najdłuższy bok ma długość 65, a najkrótszy 25.

Zadanie 20 (0-4)

Kąt rozwarty równoległoboku jest trzy razy większy od jego kąta ostrego, a stosunek długości jego boków jest równy $1:2\sqrt{2}$. Jego krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{5}$. Oblicz pole i obwód tego równoległoboku.

Zadanie 21 (0-4)

Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta $\angle O_1PA$ oraz promień r okręgu o środku O_1 .



Zadanie 22 (0-4)

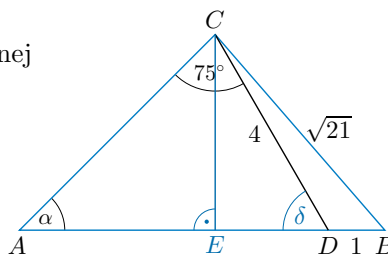
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 23 (0-4)

Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

D Zadanie 24 (0-4) → Przykład, str. 213

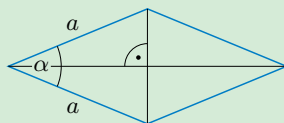
Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Uzasadnij, że kąt α ma miarę 45° , i oblicz obwód trójkąta ABC .



$$23. (a\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ,$$

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$



24. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta CDB :

$$\cos \angle CDB = \frac{|CD|^2 + |DB|^2 - |CB|^2}{2|CD| \cdot |DB|} = \frac{4^2 + 1^2 - (\sqrt{21})^2}{2 \cdot 4 \cdot 1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Zatem $\angle CDB = 120^\circ$, czyli $\delta = 60^\circ$. Trójkąt CED jest połową trójkąta równobocznego, więc $|ED| = 2$, $|EC| = 2\sqrt{3}$ oraz $\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

Trójkąt AEC jest połową kwadratu, więc $|AE| = |EC| = 2\sqrt{3}$ oraz

$$|AC| = \sqrt{2}|AE| = 2\sqrt{6}. \text{ Zatem } |AC| = |AE| + |ED| + |DB| = 2\sqrt{3} + 3.$$

$$Ob = |AB| + |BC| + |AC| = 2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{21} + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}$$

16. Z warunków zadania mamy:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = P$$

$$\frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot \pi (2r)^2 = 8 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = 8P$$

$$17. \pi \left(\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4} \pi = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \pi$$

18. Zauważmy, że $\triangle ABC$ jest trójkątem o kątach 30° , 60° , 90° , gdzie $\angle BAC = 30^\circ$. Stąd $\angle BDC = 30^\circ$.

$$\angle CED = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ = 40^\circ$$

19. $a = 25$, $c = 65$,

$$b = \sqrt{65^2 - 25^2} =$$

$$= \sqrt{(65-25)(65+25)} = \sqrt{40 \cdot 90} = \sqrt{3600} = 60$$

$$\text{Pole trójkąta: } P = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 60$$

Obwód trójkąta:

$$p = a + b + c = 150$$

Promień okręgu wpisanego:

$$r = \frac{2P}{p} = \frac{25 \cdot 60}{150} = 10$$

Długość okręgu wpisanego:

$$l = 2\pi r = 20\pi$$

21. $\angle O_1PA = \angle O_2PB$

Trójkąt PBO_2 jest prostokątny, więc:

$$|PO_2|^2 = |PB|^2 + |BO_2|^2,$$

$$\text{czyli } |PO_2| = 13.$$

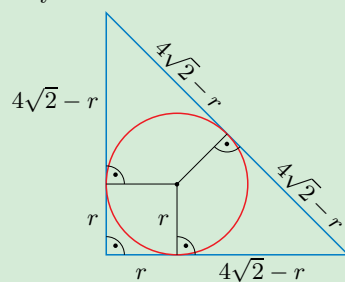
$$\text{Zatem } \sin \angle O_1PA = \frac{5}{13}.$$

$$|PO_1| = |PO_2| - R - r = 8 - r$$

$$\sin \angle O_1PA = \frac{r}{8-r} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Zatem } r = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$$

22. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$4\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 8, \text{ czyli } r = 4(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$$

Pole koła:

$$P = 16\pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$

Notatki

Indeks

- alfabet grecki 144
- asymptota 89
 - pionowa 89
 - pozioma 89
- cosinus kąta 131, 147
- czworokąt wypukły 158
- długość
 - łuku okręgu 174
 - okręgu 174
- deltoid 163
- dwumian 60
- dziedzina
 - naturalna funkcji 98
 - wyrażenia wymiernego 97
- figura wypukła 146
- funkcja
 - kwadratowa 18, 33
 - wymierna 98
- funkcje trygonometryczne
 - kąta ostrego 131
 - kąta wypukłego 147
- hiperbola 89, 108
- hiperboloidea 108
- interpretacja geometryczna
 - równania kwadratowego 31
- jednomian
 - stopnia n 60
 - zerowy 60
- jedynka trygonometryczna 141
- kąt
 - rozwarty 146
 - środkowy w okręgu 174, 184
 - wpisany w okrąg 184, 185
 - wypukły 146
- koło 177
- krzywa łańcuchowa 39
- kwadrat 158
 - różnicy 17
 - sumy 17
- liczba
 - π 174
 - pierwiastków równania kwadratowego 30
- najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 44
- największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 44
- nierówność kwadratowa 40
- odcinek koła (kołowy) 178
- odległość punktu od prostej 180
- okrąg 174
- okręgi
 - przecinające się 175, 181
 - rozłączne 175, 181
 - rozłączne wewnętrznie 175
 - rozłączne zewnętrznie 175, 181
 - styczne 175, 181
 - styczne wewnętrznie 175, 181
 - styczne zewnętrznie 175, 181
- oś symetrii paraboli 10, 15, 36
- parabola 10, 15
- pierścień kołowy 177
- pierwiastek podwójny
 - równania kwadratowego 30
- pierwiastki
 - równania kwadratowego 26, 30
 - wielomianu 70
- pole
 - deltoidu 163
 - koła 177
 - rombu 160
 - równoległoboku 159
 - trapezu 162
 - trójkąta 154, 155, 157
 - trójkąta opisanego na okręgu 196
 - trójkąta prostokątnego 153
 - trójkąta równobocznego 155
 - trójkąta wpisanego w okrąg 193
 - wycinka koła (kołowego) 177

postać
 iloczynowa funkcji kwadratowej 33
 kanoniczna funkcji kwadratowej 18
 ogólna funkcji kwadratowej 18
 promień
 okręgu opisanego na sześciokącie foremnym 201
 okręgu opisanego na trójkącie równobocznym 192
 okręgu wpisanego w sześciokąt foremny 201
 okręgu wpisanego w trójkąt 197
 okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny 195
 wewnętrzny pierścienia kołowego 177
 zewewnętrzny pierścienia kołowego 177
 proporcjonalność odwrotna 88
 prostokąt 158
 przekątna kwadratu 127
 punkt styczności 175, 180

 ramię
 końcowe kąta 146
 początkowe kąta 146
 romb 158, 160
 rozkład na czynniki liniowe funkcji kwadratowej 33
 rozwiązania
 równania kwadratowego 26, 30
 równania wielomianowego 70
 rozwiązanie trójkąta 138
 równanie
 kwadratowe 26
 wielomianowe 70
 wymierne 104
 z wartością bezwzględną 109
 równoległobok 158, 159
 różnica kwadratów 17

 sieczna okręgu 180
 sinus kąta 131, 147
 stopień
 iloczynu wielomianów 67
 sumy wielomianów 63
 wielomianu 60

 styczna do okręgu 180, 181
 szerokość pierścienia kołowego 177

 środek
 okręgu opisanego na trójkącie 191
 okręgu wpisanego w trójkąt 195

 tangens kąta 131, 147
 tożsamość trygonometryczna 141, 143, 148, 151
 trapez 158, 162
 równoramienny 158
 trójkąta pitagorejska 127
 trójmian 60
 kwadratowy 18
 twierdzenie
 cosinusów 204
 o cięciwach 188
 o odcinkach stycznych do okręgu 181
 odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 127
 Pitagorasa 126

 wartość bezwzględna liczby 109
 wielkości odwrotnie proporcjonalne 88
 wielokąt
 foremny 200
 wklęsły 158
 wypukły 158
 wielomian
 stopnia n 60
 wielu zmiennych 64
 zerowy 60
 współczynnik
 jednomianu 60
 proporcjonalności odwrotnej 88
 wielomianu 60
 współrzędne wierzchołka paraboli 19, 36
 wycinek koła (kołowy) 177
 wyraz wolny wielomianu 60
 wyrazy wielomianu 60
 wyrażenie wymierne 97
 wyróżnik trójmianu kwadratowego 19
 wysokość trójkąta równobocznego 128
 wzór Herona 157

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,430
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,301
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,081
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,636
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,290

Działania na ułamkach

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, c, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$
- $|-a| = |a|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|a - b| = |b - a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

- $\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Dla $a, b \geq 0$:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pierwiastek sześcienny

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $b \neq 0$:

- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b \geq 0$ i $b^n = a$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$:

- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Równania

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$

Dla $b \neq 0, d \neq 0$:

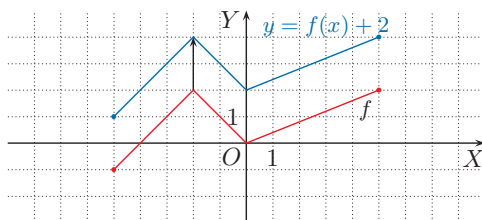
- równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jest równoważne równaniu $ad = bc$

Dla $a > 0$:

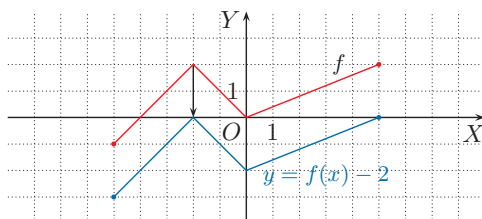
- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$

Przesuwanie wykresów funkcji

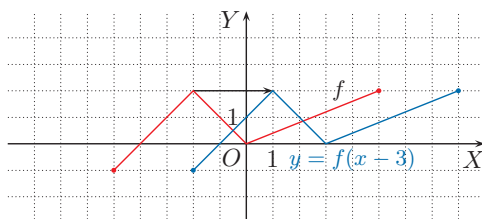
- Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY .



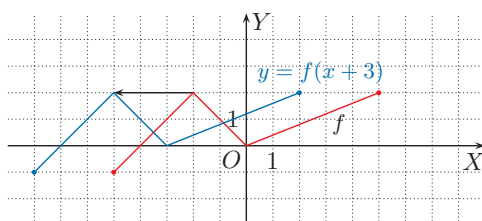
- Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY .



- Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .



- Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .



Logarytmy

Dla $a, b > 0, a \neq 1$:

- $\log_a b = x$, gdy $a^x = b$

Dla $a, b, c > 0, a \neq 1, p \in \mathbb{R}$:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^p = p \log_a b$

Równanie prostej

- Równanie kierunkowe: $y = ax + b$
- Równanie ogólne: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$
- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

- Współczynnik kierunkowy prostej:
przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:
– równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
– prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki równania kwadratowego:

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Postać kanoniczna:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$$

- Postać iloczynowa:

– jeśli $\Delta > 0$, to:

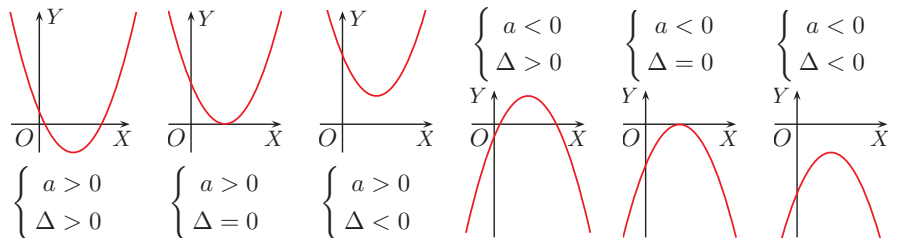
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0,$$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,

– jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$,
gdzie x_0 jest pierwiastkiem,

– jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

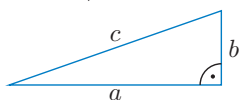
Położenie paraboli względem osi OX



Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



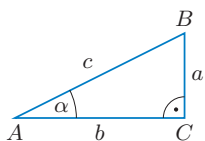
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

W trójkącie prostokątnym:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



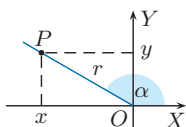
Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Dla $P(x, y)$ oraz $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$$



Wzory trygonometryczne

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq 90^\circ$$

Tożsamości trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ]$:

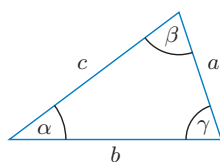
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

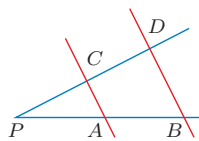
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$



Trójkąty i czworokąty

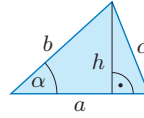
- Dowolny trójkąt

$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



R – promień okręgu opisanego,
 r – promień okręgu wpisanego

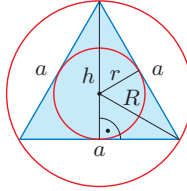
- Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

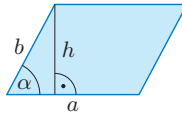
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



- Równoległobok

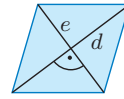
$$P = ah$$

$$P = ab \sin \alpha$$



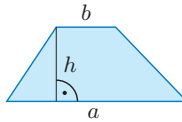
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

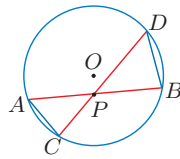
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Koło i okrąg

- Długość okręgu:

$$l = 2\pi r$$

- Pole koła:

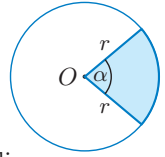
$$P = \pi r^2$$

- Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

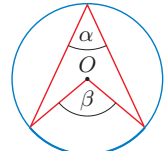
- Długość łuku okręgu:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

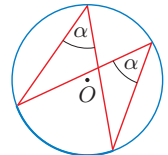


Kąty w okręgu

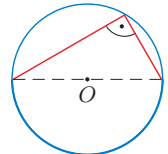
- Kąt wpisany α i kąt środkowy β oparte na tym samym łuku:
 $\beta = 2\alpha$



- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.



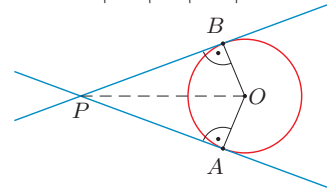
- Kąt wpisany oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| = |PB|$$



Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

dla**nauczyciela**.pl

Portal dla nauczyciela

Źródło wartościowych i rzetelnie opracowanych pomocy dydaktycznych, ułatwiających przygotowanie i prowadzenie lekcji. Materiały są czytelnie podzielone na kategorie, co pozwala zaoszczędzić czas potrzebny na przygotowanie zajęć.



ponad
200 000
użytkowników



- gotowe zadania i testy
- aplikacja Ondorio do automatycznego sprawdzania testów i kartkówek

Multibook **NOWOŚĆ!**

- podręcznik multimedialny dla nauczyciela
- atrakcyjne materiały cyfrowe do wyświetlania na lekcji

e-booki

- elektroniczna wersja podręcznika ucznia

Dokumentacja nauczyciela

- programy nauczania
- rozkłady materiału
- plany wynikowe
- podręczniki nauczyciela

Sprawdzanie wiedzy

- kartkówki
- klasówki
- sprawdziany



**MOJA
NOWA ERA**

- jedno konto do wszystkich portali Nowej Ery
- łatwa aktualizacja danych w profilu użytkownika z automatycznie modyfikowanym dostępem do zasobów
- szybki dostęp do zasobów szkolnych
- personalizowany panel wiadomości

Pamiętaj o corocznej aktualizacji danych!

moja.nowaera.pl

Generator

testów i sprawdzianów

Przygotuj
sprawdzian
w kilka minut

Wygodna i prosta aplikacja do tworzenia materiałów sprawdzających wiedzę. Zawiera setki zadań, w tym typu maturalnego.

Nowość – filtr pozwalający wyszukać zadania, które **od września 2024 r.** wykraczają poza wymagania uszczuplonej podstawy programowej.



1. Wejdź na stronę generator.nowaera.pl i zaloguj się przez konto Moja Nowa Era. Jeśli jeszcze nie masz konta – załóż je.



2. Pobierz gotową kartkówkę do lekcji, klasówkę do działu, sprawdzian semestralny lub roczny dla 4 grup. Edytuj materiały testujące, aby je dostosować do potrzeb swoich i uczniów.



3. Samodzielnie twórz materiały testujące. Skorzystaj z gotowych zadań lub dodaj własne. Wszystkie gotowe zadania zostały przygotowane w 4 równoważnych wersjach. Możesz utworzyć nawet 8 grup testów. Wszystkie zadania zawierają odpowiedź, punktację i orientacyjny czas potrzebny uczniom na rozwiązanie.



4. Wydrukuj pobrane testy i klucze odpowiedzi. Do kartkówek i krótkich testów wybierz ekonomiczną wersję wydruku (ekowydruk) z mniejszą liczbą stron.

