



6 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skale logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 313).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli

Multiteka

- Trzęsienia ziemi i skala Richtera
- Spirale w przyrodzie
- Ulubiona gra cesarza

Odpowiedzi do zadań

1. a) -1024 b) 625 c) $\frac{1}{64}$
 d) $\frac{1}{125}$ e) $11\frac{25}{64}$ f) 1
 g) $1\frac{4}{5}$ h) $3\frac{3}{8}$ i) $\frac{64}{125}$
 j) $\frac{81}{10000}$
2. a) 2^{10} b) 2^2 c) 2^7
 d) 2^{13} e) 2^{-16} f) 2^{22}
 g) 2^{-3} h) 2^6 i) 2^0 j) 2^6
3. np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2
 d) 6^{-6} e) 2^{-31} f) 1^1
4. a) 7 b) $\frac{2}{5}$ c) 4 d) $\frac{2}{3}$
 e) 4 f) 27 g) $\frac{125}{64}$
 h) $\frac{81}{16}$ i) $\frac{8}{27}$ j) $\frac{4}{9}$
5. np.: a) $7^{\frac{5}{6}}$ b) $3^{\frac{13}{4}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{6}}$
 d) $5^{-\frac{5}{3}}$ e) $3^{\frac{10}{3}}$ f) 5^{-3}
6. a) $x = \frac{16}{9}, y = 2, y > x$
 b) $x = 2,25, y = 2,56, y > x$
7. a) $x > 0, 2x^{\frac{2}{3}}$
 b) $x > 0, x^{\frac{3}{2}}$
 c) $x > 0, x$

Potęga o wykładniku wymiernym

1. Oblicz.
 a) $(-4)^5$ c) 4^{-3} e) $(1\frac{1}{2})^6$ g) $(\frac{5}{9})^{-1}$ i) $(1\frac{1}{4})^{-3}$
 b) $(-5)^4$ d) 5^{-3} f) $(\frac{13}{7})^0$ h) $(\frac{2}{3})^{-3}$ j) $(3\frac{1}{3})^{-4}$
2. Przedstaw liczbę w postaci 2^m .
 a) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ f) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$
 b) $2^{-4} : 2^{-6}$ g) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$
 c) $(2^2)^3 \cdot 2$ h) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$
 d) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$ i) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$
 e) $2^{-6} : (2^6 : 2^{-4})$ j) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$
3. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $a \in \mathbb{N}$.
 a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : (64^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-3})$
 b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{27}{8})^{-3} \cdot 1,5^6$
4. Oblicz.
 a) $49^{\frac{1}{2}}$ c) $64^{\frac{1}{3}}$ e) $8^{\frac{2}{3}}$ g) $(\frac{25}{16})^{\frac{3}{2}}$ i) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$
 b) $(\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}}$ d) $(\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{3}{4}}$ h) $(\frac{27}{8})^{\frac{4}{3}}$ j) $(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}$
5. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbb{Q}$.
 a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{3})^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$
 b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0,5} \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{-6}$
6. Która z liczb jest większa: x czy y ?
 a) $x = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{-4}, y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ b) $x = (\frac{2^6}{6^3})^{-\frac{2}{3}}, y = (\sqrt[3]{1,6})^6$
7. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.
 a) $\frac{(4x)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$
8. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.
 a) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{y} : y^{\frac{3}{2}}$ c) $\sqrt[3]{ab^{-2}} : (a^{-2}b)^{\frac{1}{3}}$ e) $\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{-1} \cdot \sqrt{xy} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$
 b) $(xy)^{\frac{2}{3}} : (\sqrt[3]{xy})^5$ d) $(ab^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{ab^2}$ f) $(x^{\frac{3}{4}}y)^{-2} : (x^{\frac{2}{3}}y)^{-3}$
8. a) $x \geq 0, y > 0, x^{\frac{5}{6}}y^{-1}$
 b) $xy \neq 0, x^{-1}y^{-1}$
 c) $ab \neq 0, \frac{a}{b}$
 d) $a > 0, b \neq 0, a^{-\frac{1}{2}}b$
 e) $x > 0, y > 0, x^{\frac{1}{6}}$
 f) $x > 0, y \neq 0, x^{\frac{1}{2}}y$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{Q}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5. $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

6.1. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrąfimy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x , gdy x jest liczbą niewymierną (w celu sformułowania ścisłej definicji wykorzystuje się pojęcie granicy ciągu – zostanie ono omówione w dalszym toku nauki).

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4,655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4,706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4,727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4,728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4,728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się” do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się” do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9,518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9,738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9,738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9,738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9,738517742$

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $5^{\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Ćwiczenie 1

$5^{\sqrt{3}} \approx 16,2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,5548$

Uczeń:

- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku rzeczywistym,
- upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach,
- porównuje liczby przedstawione w postaci potęg.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^π .

$2^{3,14}$	$\approx 8,815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8,824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8,824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^π	$\approx 8,824977827$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π , otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby 2^π .

Ćwiczenie 2

- a) $3^\pi \approx 31,5443$
- b) $5^\pi \approx 156,9925$
- c) $\pi^\pi \approx 36,4622$



Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne liczby: a) 3^π , b) 5^π , c) π^π .

Podane w „Warto powtórzyć” wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 3

- a) wzór 3.
- b) wzór 5.
- c) wzór 4.
- d) wzór 1.

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

- a) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$
- b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$
- c) $6^\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^\pi = 9^\pi$
- d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$
- b) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$
- c) $(5^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$
- d) $(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$
- e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
- f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$
- g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$
- h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Ćwiczenie 4

- a) $5^3 = 125$
- b) $3^4 = 81$
- c) $5^{3-1} = 25$
- d) $2^{7-2} = 32$
- e) $7^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1$
- f) $3^{2\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}} = 3$
- g) $2^5 = 32$
- h) $\frac{6 \cdot 3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}} = 6$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}} & \text{c)} \left(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{3}} & \text{e)} 6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}} \\ \text{b)} 3^3 : 3^{2-\sqrt{2}} & \text{d)} \left(3^{\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}} & \text{f)} (\sqrt{3})^\pi \cdot (\sqrt{3})^\pi \end{array}$$

2. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1} & \text{d)} 2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}} & \text{g)} 6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}} \\ \text{b)} 5^{\pi+3} : 5^\pi & \text{e)} 4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} & \text{h)} 4^{\pi+3} \cdot 3^\pi : 12^\pi \\ \text{c)} \left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2} & \text{f)} \frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{5}{3}\sqrt{7}}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}} & \text{i)} \frac{6^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(6^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2} \end{array}$$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3 & \text{c)} 9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1} & \text{e)} \frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi} \\ \text{b)} 2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} & \text{d)} 27 \cdot \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^2 & \text{f)} 7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}} \end{array}$$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4} & \text{c)} q = 6^{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \\ \text{b)} q = 0,5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}} & \text{d)} q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2^{\sqrt{3}} \approx 3,32199709 \\ 3^{\sqrt{3}} \approx 6,70499185 \\ 6^{\sqrt{3}} \approx 22,2739634 \end{array}$$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \\ \text{b)} x = 1,5^{4-2\sqrt{3}}, y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}}, z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2} \\ \text{c)} x = 125^{1-2\sqrt{5}}, y = 25^{2-3\sqrt{5}}, z = 0,0016 \cdot 5^{\sqrt{180}} \end{array}$$

6. Wstaw w miejsce $?$ jeden ze znaków: $>$, $<$ lub $=$, tak by powstało zdanie prawdziwe.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}} ? 4^5 & \text{c)} \frac{4^{2\sqrt{3}} \cdot 8}{16^{\sqrt{3}+1}} ? \frac{1}{2} & \text{e)} \frac{\pi^{1-\sqrt{2}} \cdot \pi^{1+\sqrt{2}}}{\pi^2} ? \frac{1}{\pi^3} \\ \text{b)} 9^{\frac{\sqrt{7}}{2}} \cdot 27^{-\frac{\sqrt{7}}{3}} ? 3 & \text{d)} \frac{9^{-2\sqrt{5}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}}{81^{1-\sqrt{5}}} ? \frac{1}{27} & \text{f)} \frac{2^{2\pi} \cdot 9^\pi}{36^{\pi-1}} ? 6 \end{array}$$

7. Dla jakiej liczby x prawdziwa jest równość?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 5^{\sqrt{2}} \cdot 5^x = 1 & \text{b)} 5^{1-\pi} \cdot 5^x = 5 & \text{c)} \left(5^{\sqrt{2}}\right)^x = 25 \end{array}$$

6. a) $L = 2^{5\sqrt{5}} \cdot 2^{5(2-\sqrt{5})} = 2^{10} = 4^5$

b) $L = 3^{\sqrt{7}} \cdot 3^{-\sqrt{7}} = 1$, zatem należy wstawić „ $<$ ”

c) $L = \frac{2^{4\sqrt{3}+3}}{2^{4\sqrt{3}+4}} = \frac{1}{2}$

d) $L = \frac{3^{-4\sqrt{5}+1}}{3^{4-4\sqrt{5}}} = \frac{1}{27}$

e) $L = \frac{\pi^2}{\pi^2} = 1$, zatem należy wstawić „ $>$ ”

f) $L = \frac{6^{2\pi}}{6^{2\pi-2}} = 6^2$, zatem należy wstawić „ $>$ ”

7. a) $x = -\sqrt{2}$ b) $x = \pi$ c) $x = \sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $3^{5-\sqrt{2}}$ b) $3^{1+\sqrt{2}}$
c) 3^4 d) $3^{\sqrt{3}-3}$
e) $3^{\sqrt{7}}$ f) 3^π

2. a) 36 b) 125
c) $\frac{125}{27}$ d) 1
e) 1 f) 343
g) 3 h) 64 i) 216

3. a) $2^{\sqrt{7}+4}$ b) $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$
c) $3^{\sqrt{5}-3}$ d) $3^{3-2\sqrt{3}}$
e) $3^{-6\pi}$ f) $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$

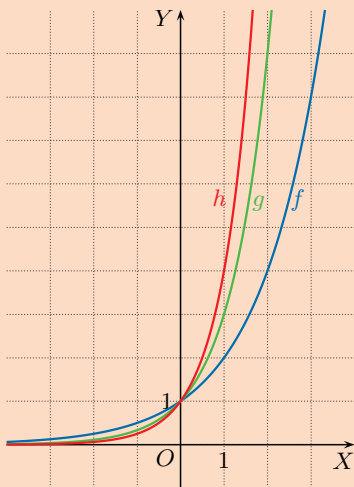
4. a) $q = 4^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{3}} > 6$,
nie należy
b) $q = \frac{1}{2} \cdot 3^{\sqrt{3}} \approx 3,35$,
należy
c) $q = 6^{\sqrt{3}} : 2 \approx 11,1 > 6$,
nie należy
d) $q = \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \frac{7}{3} < 3$,
nie należy

5. a) $x = 2^{4\sqrt{2}}$, $y = 2^{\sqrt{2}}$,
 $z = 2^{-\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{z}$
b) $x = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-2\sqrt{3}}$,
 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{2(2+\sqrt{3})}$,
 $z = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(\sqrt{3}-2)} =$
 $= \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4-2\sqrt{3})}$; $x = \frac{1}{z}$
c) $x = 5^{3-6\sqrt{5}}$, $y = 5^{4-6\sqrt{5}}$,
 $z = 5^{-4} \cdot 5^{6\sqrt{5}} = 5^{-(4-6\sqrt{5})}$,
 $y = \frac{1}{z}$

Uczeń:

- oblicza wartości funkcji wykładniczej dla podanych argumentów,
- sprawdza, czy podany punkt należy do wykresu danej funkcji wykładniczej,
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej i podaje jej własności,
- porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej,
- wyznacza wzór funkcji wykładniczej na podstawie współrzędnych punktu należącego do jej wykresu oraz szkicuje ten wykres,
- rozwiązuje proste równania i nierówności wykładnicze, korzystając z wykresu funkcji wykładniczej.

Ćwiczenie 1



Punkt wspólny: $(0, 1)$

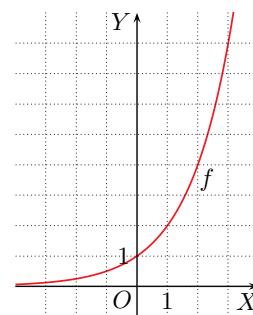
6.2. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.



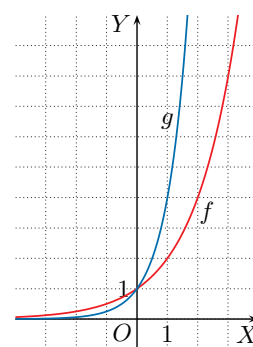
Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbf{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

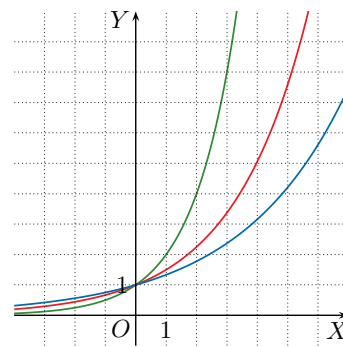
Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.

- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g . Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.
- Które spośród punktów:

$$A(4, 3\frac{15}{81}), B(-4, \frac{81}{256}), C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

należą do wykresu funkcji h ?



Ćwiczenie 2

- zielony – f , czerwony – g , niebieski – h
- $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = 3$
- B, C

Multiteka

- Wykres funkcji wykładniczej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.2

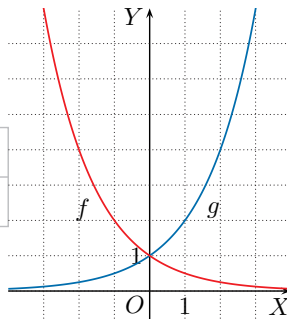
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY , ponieważ $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = g(-x)$.

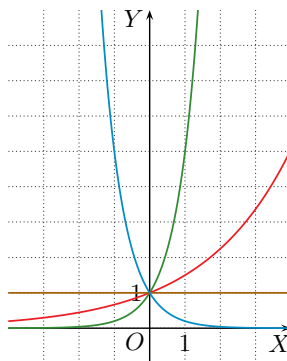


Ćwiczenie 3

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = (\frac{1}{4})^x$.

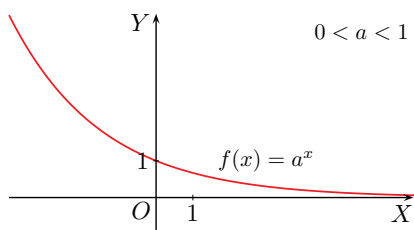
Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0,2^x$, $h(x) = 1,5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

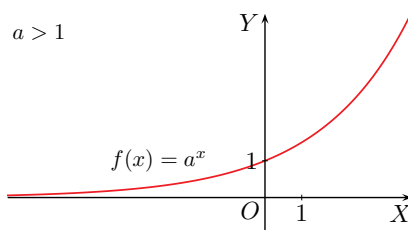


Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.

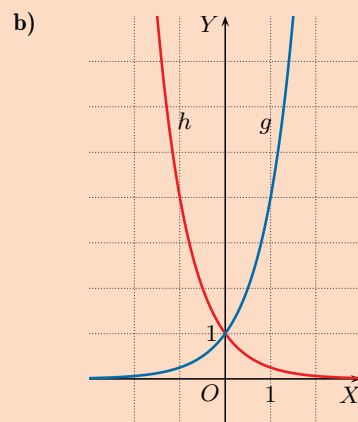
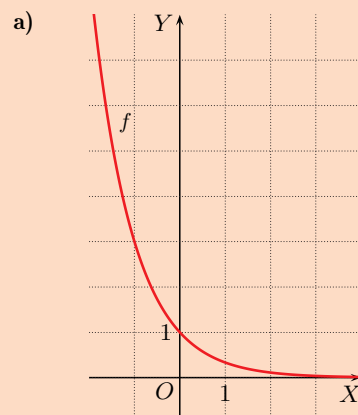


Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX , która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

zielony – f , niebieski – g ,
czerwony – h , brązowy – k

Ćwiczenie 5

- a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^{\pi} < 7^{3,2}$
c) $0,6^{\frac{1}{2}} < 0,6^{\frac{3}{7}} < 0,6^{\frac{3}{8}} < 0,6^{0,35} < 0,6^{\frac{1}{3}}$
d) $(\frac{1}{3})^2 < (\frac{1}{3})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}} < (\frac{1}{3})^{1,5} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(-4) = \frac{1}{81}$, $f(-3) = \frac{1}{27}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$,
 $f(3) = 27$, $f(4) = 81$
b) $f(-4) = \frac{1}{256}$, $f(-3) = \frac{1}{64}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$,
 $f(3) = 64$, $f(4) = 256$
c) $f(-4) = 256$, $f(-3) = 64$,
 $f(-\frac{1}{2}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{64}$, $f(4) = \frac{1}{256}$
d) $f(-4) = 16$, $f(-3) = 8$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{8}$, $f(4) = \frac{1}{16}$
e) $f(-4) = \frac{1}{4096}$,
 $f(-3) = \frac{1}{512}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}$,
 $f(3) = 512$, $f(4) = 4096$
f) $f(-4) = 0,00000001$,
 $f(-3) = 0,000001$,
 $f(-\frac{1}{2}) = 0,1$, $f(\frac{1}{2}) = 10$,
 $f(3) = 1000000$,
 $f(4) = 100000000$
2. $f(x) = 4^x$
a), b), d) tak
c) nie
3. a), c) nie
b), d) tak
4. a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
c) $f(x) = 4^x$
d) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$
5. a), b) malejąca
c) rosnąca

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, stąd:

$$10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$$

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, stąd:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{0,3}$, $5^{0,33}$ c) $0,6^{\frac{1}{2}}$, $0,6^{\frac{1}{3}}$, $0,6^{\frac{3}{7}}$, $0,6^{\frac{3}{8}}$, $0,6^{0,35}$
b) $7^{3,1}$, $7^{3,2}$, 7^{π} , $7^{\sqrt{5}}$ d) $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{1}{3})^{1,5}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.
a) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ e) $f(x) = 8^x$
b) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ f) $f(x) = 100^x$
2. Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$
4. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M . Naskicuj wykres tej funkcji.
a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$
5. Określ monotoniczność funkcji f .
a) $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ b) $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$ c) $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$
6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
a) $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{7}{5}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[3]{\pi}$, $\pi^{\frac{1}{2}}$, $\pi^{\frac{3}{7}}$, $\pi^{\frac{1}{\pi}}$
b) $(\frac{3}{4})^5$, $(\frac{3}{4})^6$, $(\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$, $(\frac{3}{4})^{\sqrt{26}}$ d) 9^0 , 9^{-2} , $9^{-\sqrt{3}}$, $9^{-\sqrt{\pi}}$
6. a) $2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{3}}$
b) $(\frac{3}{4})^6 < (\frac{3}{4})^{\sqrt{26}} < (\frac{3}{4})^5 < (\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$
c) $\pi^{\frac{1}{\pi}} < \sqrt[3]{\pi} < \pi^{\frac{3}{7}} < \pi^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{-2} < 9^{-\sqrt{\pi}} < 9^{-\sqrt{3}} < 9^0$

7. Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.
- a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 8^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}, 32^{\frac{\pi}{10}}, 256^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}, (\frac{1}{9})^{2,6}, (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}, (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{243}$
8. Podaj współrzędne trzech punktów należących do wykresu funkcji f , tak aby każda z tych współrzędnych była liczbą wymierną. Naskicuj wykres funkcji f .
- a) $f(x) = (\sqrt{3})^x$ b) $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ c) $f(x) = (\sqrt[3]{2})^x$
9. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.
- a) $f(x) = 3^x, g(x) = 4x + 1$ d) $f(x) = (\frac{1}{3})^x, g(x) = x + 4$
 b) $f(x) = 2^x, g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ e) $f(x) = (\frac{1}{4})^x, g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$
 c) $f(x) = 4^x, g(x) = 5 - x$ f) $f(x) = (\frac{1}{2})^x, g(x) = |x| + 1$
10. Podaj zbiór rozwiązań nierówności, korzystając z odpowiednich wykresów.
- a) $2^x > 3^x$ b) $3^x \leq 4^x$ c) $(\frac{1}{2})^x \leq (\frac{1}{3})^x$ d) $(\frac{1}{4})^x < 3^x$

Czy wiesz, że...

W zastosowaniach często korzysta się z funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$. Liczba e (oznaczenie wprowadzone przez Leonharda Eulera [czyt. ojlera]) jest liczbą niewymierną:

$$e = 2,718281828\dots$$

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = e^x$ oraz dla porównania wykresy funkcji $g(x) = 2^x$ i $h(x) = 3^x$.

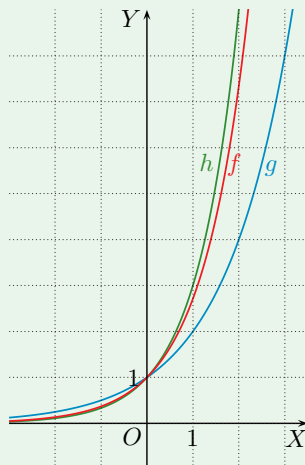
Coraz dokładniejsze przybliżenia liczby e otrzymujemy, obliczając wartość wyrażenia:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

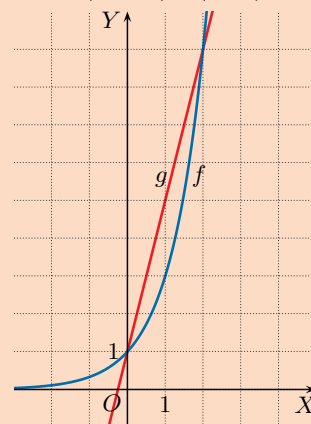
dla coraz większych liczb naturalnych:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937\dots, \quad \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048\dots,$$

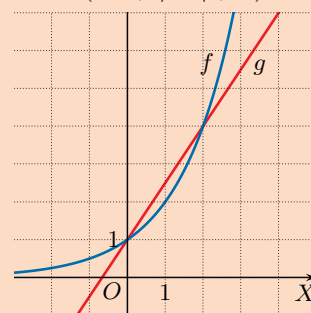
$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169\dots, \quad \left(1 + \frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} = 2,718280469\dots$$



7. a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^{\sqrt{3}}, 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2^{\sqrt{2}}, 32^{\frac{\pi}{10}} = 2^{\frac{\pi}{2}}, 256^{\frac{1}{4}} = 2^2$
 $256^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 32^{\frac{\pi}{10}} > 8^{\frac{1}{2}} > 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
 b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}, (\frac{1}{9})^{2,6} = (\frac{1}{3})^{5,2}, (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{3})^{\frac{9}{2}}, (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{3})^6, \frac{1}{243} = (\frac{1}{3})^5$
 $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}} > (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{243} > (\frac{1}{9})^{2,6} > (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$
8. Przykładowa odpowiedź:
 a) $(-2, \frac{1}{3}), (0, 1), (2, 3)$
 b) $(-2, 2), (0, 1), (2, \frac{1}{2})$
 c) $(-3, \frac{1}{2}), (0, 1), (3, 2)$
9. a) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$



- b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$



11. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: $9, 2\sqrt{2}, (\sqrt{e})^4, e^{1,5}, e^{\sqrt{3}}$.

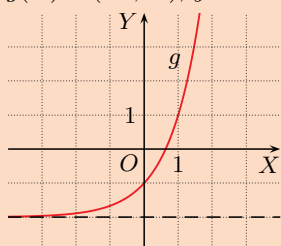
9. c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (1; \infty)$
 d) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1)$
 e) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1)$
 f) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 0\}, f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \{0\}$
10. a) $x \in (-\infty; 0)$
 b) $x \in (0; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 0)$
 d) $x \in (0; \infty)$
11. $2\sqrt{2} < e^{1,5} < e^{\sqrt{3}} < (\sqrt{e})^4 < 9$

Uczeń:

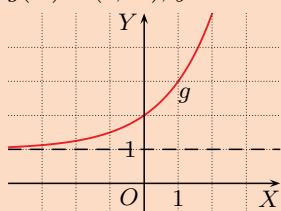
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej, stosując przesunięcie o wektor albo symetrię względem osi układu współrzędnych, i podaje jej własności,
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej otrzymany w wyniku złożenia przesunięcia o wektor i symetrii względem osi układu współrzędnych i podaje wartości tej funkcji,
- rozwiązuje graficznie proste nierówności wykładnicze, korzystając z odpowiednio przekształconego wykresu funkcji wykładniczej.

Ćwiczenie 1

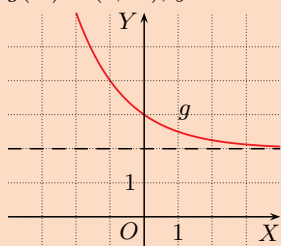
a) $g(D) = (-2; \infty)$, $y = -2$



b) $g(D) = (1; \infty)$, $y = 1$



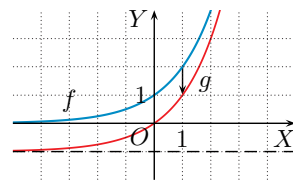
c) $g(D) = (2; \infty)$, $y = 2$



6.3. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (1)

Przykład 1

Wykres funkcji $g(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 1 jednostkę w dół, czyli o wektor $[0, -1]$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

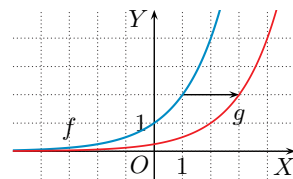
a) $g(x) = 3^x - 2$

b) $g(x) = 2^x + 1$

c) $g(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor $[2, 0]$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj odciętą punktu należącego do wykresu funkcji g , jeśli rzędna tego punktu jest równa 1.

a) $g(x) = 3^{x-1}$

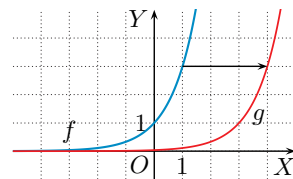
b) $g(x) = 2^{x+2}$

c) $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-1}$

Przykład 3

Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{3^x}{27}$?

$$g(x) = \frac{3^x}{27} = \frac{3^x}{3^3} = 3^{x-3}$$



Wykres funkcji f należy przesunąć o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.

Ćwiczenie 3

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $g(x) = \frac{2^x}{16}$

b) $g(x) = \frac{2^x}{1024}$

c) $g(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $g(x) = 2^{x-1} + 2$

b) $g(x) = \frac{2^x}{4} - 2$

c) $g(x) = \frac{2^{x+3} + 4}{4}$

Ćwiczenie 2

a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 1$

Ćwiczenie 3

a) $g(x) = \frac{2^x}{2^4} = 2^{x-4}$

Należy przesunąć o wektor $[4, 0]$.

b) $g(x) = \frac{2^x}{2^{10}} = 2^{x-10}$

Należy przesunąć o wektor $[10, 0]$.

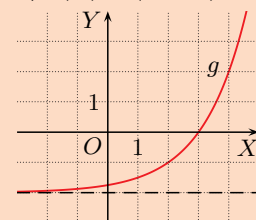
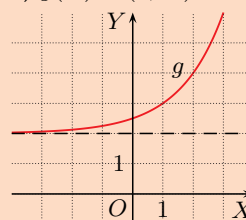
c) $g(x) = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^x = 2^{x+\frac{1}{2}}$

Należy przesunąć o wektor $[-\frac{1}{2}, 0]$.

Ćwiczenie 4

a) $g(D) = (2; \infty)$

b) $g(D) = (-2; \infty)$



c) $g(x) = 2^{x+1} + 1$,
 $g(D) = (1; \infty)$

Multiteka

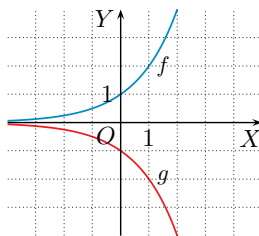
- Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej (1)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.3

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 4

Wykres funkcji $g(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

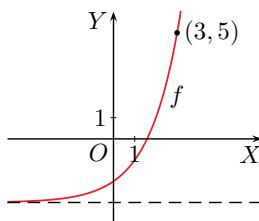
- a) $g(x) = -3^x$ b) $g(x) = -4^x$ c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

- a) $f(x) = 2^x + 2$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ e) $f(x) = 4^{-x} - 4$
b) $f(x) = 3^x - 1$ d) $f(x) = 3^{-x} + 1$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a .



3. Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P . Podaj wartość współczynnika a .

- a) $P(0, -3)$ b) $P(2, 7)$ c) $P(4, 0)$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = 4 \cdot 2^x$ b) $f(x) = \frac{2^x}{8}$ c) $f(x) = \frac{0,04}{5^x}$

5. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.

- a) $f(x) = -2^{x-2}$ b) $f(x) = -3^{x+1}$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

6. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i funkcji g .

- a) $f(x) = 2^x - 3$ b) $f(x) = 3^x + 1$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

7. Wykres funkcji $f(x) = 5^x$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano wykres funkcji g . Podaj wzór funkcji g i jej zbiór wartości.

- a) $\vec{v} = [0, -3]$ b) $\vec{v} = [1, 2]$ c) $\vec{v} = [-2, 4]$

8. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsce zerowe oraz zbiór wartości.

- a) $f(x) = 2^{x-2} - 4$ c) $f(x) = \frac{4}{2^x} + 2$ e) $f(x) = (\sqrt{2})^{2x-4} - 1$
b) $f(x) = 3^{x+1} - 1$ d) $f(x) = 3 - \frac{9}{3^x}$ f) $f(x) = 1 - 2^{-x+3}$

6. a) $f(D_f) = (-3; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 3)$

- b) $f(D_f) = (1; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; -1)$

- c) $f(D_f) = (-2; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 2)$

7. a) $g(x) = 5^x - 3$, $g(D) = (-3; \infty)$

- b) $g(x) = 5^{x-1} + 2$, $g(D) = (2; \infty)$

- c) $g(x) = 5^{x+2} + 4$, $g(D) = (4; \infty)$

8. a) $f(x) = 0$ dla $x = 4$, $f(D) = (-4; \infty)$

- b) $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $f(D) = (-1; \infty)$

- c) brak miejsc zerowych, $f(D) = (2; \infty)$

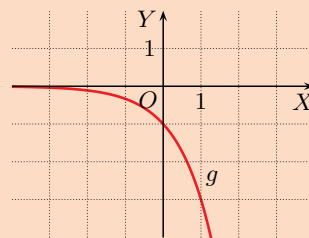
- d) $f(x) = 0$ dla $x = 1$, $f(D) = (-\infty; 3)$

- e) $f(x) = 0$ dla $x = 2$, $f(D) = (-1; \infty)$

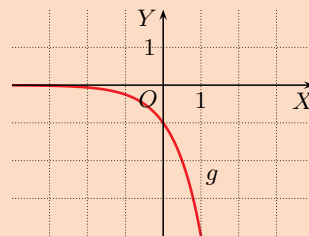
- f) $f(x) = 0$ dla $x = 3$, $f(D) = (-\infty; 1)$

Ćwiczenie 5

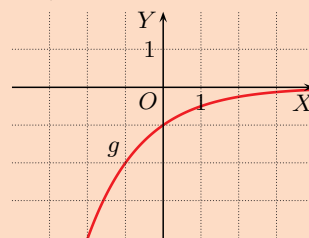
- a) malejąca



- b) malejąca



- c) rosnąca



Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y = 2$

- b), c) $f(D) = (-1; \infty)$,

- $f(x) = 0$ dla $x = 0$,

- asymptota: $y = -1$

- d) $f(D) = (1; \infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y = 1$

- e) $f(D) = (-4; \infty)$,

- $f(x) = 0$ dla $x = -1$,

- asymptota: $y = -4$

- f) $f(D) = (-3; \infty)$,

- $f(x) = 0$ dla $x = -1$,

- asymptota: $y = -3$

2. a) -3

3. a) $a = -4$ b) $a = 3$

- c) $a = -16$

4. a) $x \in \langle -2; \infty \rangle$

- b) $x \in \langle 3; \infty \rangle$

- c) $x \in (-\infty; -2)$

5. a) $x \in (-\infty; 2)$

- b) $x \in (-\infty; -1)$

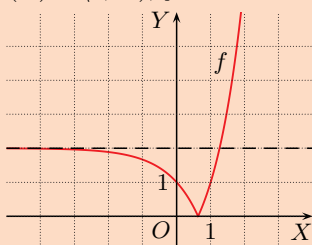
- c) $x \in \langle -3; \infty \rangle$

Uczeń:

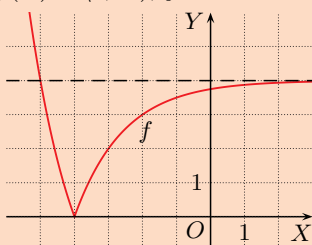
- szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$ i $y = f(|x|)$, gdy dany jest wykres funkcji wykładniczej f ,
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej otrzymany w wyniku złożenia kilku przekształceń,
- rozwiązuje graficznie równania i nierówności, korzystając z wykresów funkcji wykładniczych,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiory punktów opisane za pomocą krzywych.

Ćwiczenie 1

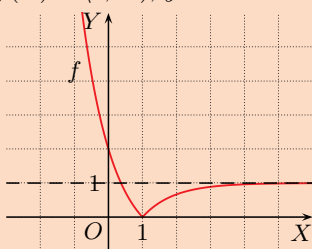
a) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$, $y = 2$



b) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$, $y = 4$



c) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$, $y = 1$

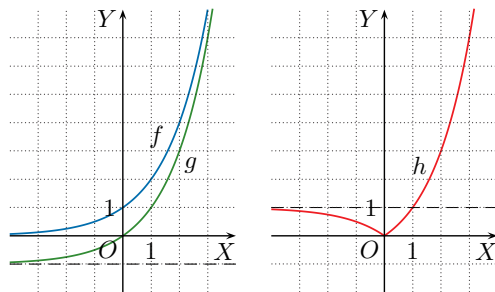


*6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (2)

Przykład 1

Na rysunkach obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x - 1$ i $h(x) = |2^x - 1|$.

Zbiorem wartości funkcji h jest przedział $(0; \infty)$, a asymptotą poziomą jej wykresu jest prosta $y = 1$.



Ćwiczenie 1

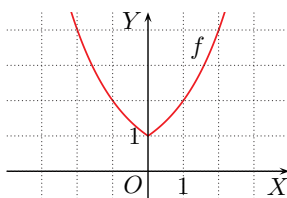
Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = |3^x - 2|$ b) $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x+2} - 4 \right|$ c) $f(x) = \left| -\left(\frac{1}{3} \right)^{x-1} + 1 \right|$

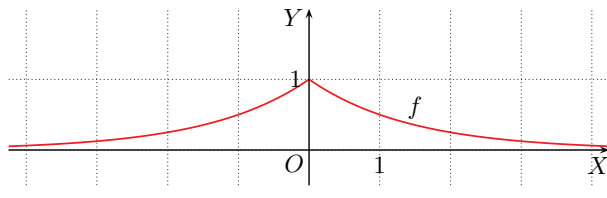
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji f oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = 2^{|x|}$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|}$



$f(D) = \langle 1; \infty \rangle$



$f(D) = (0; 1)$

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = -3^{|x|}$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{4} \right)^{|x|} - 1$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + 3$

Ćwiczenie 3

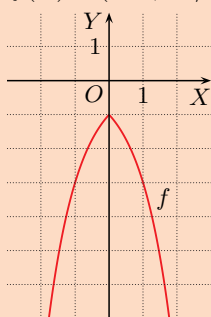
Naszkicuj wykresy funkcji f , g i h . Podaj zbiory wartości tych funkcji oraz ich przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = 3^{|x|}$, $g(x) = 3^{|x|} - 2$, $h(x) = 3^{|x-2|}$

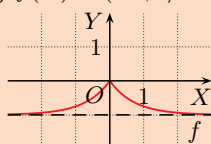
b) $f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{|x|}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{|x|} + 1$, $h(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{|x+1|}$

Ćwiczenie 2

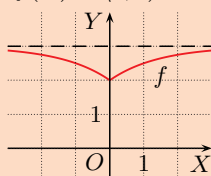
a) $f(D) = (-\infty; -1)$



b) $f(D) = (-1; 0)$



c) $f(D) = \langle 2; 3 \rangle$



Ćwiczenie 3

a) $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$,
 f maleje w $(-\infty; 0)$,
rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$; $g(D) = \langle -1; \infty \rangle$,
 g maleje w $(-\infty; 0)$, rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$;
 $h(D) = \langle 1; \infty \rangle$, h maleje w $(-\infty; 2)$,
rośnie w $\langle 2; \infty \rangle$

b) $f(D) = (0; 1)$, f rośnie w $(-\infty; 0)$,
maleje w $\langle 0; \infty \rangle$; $g(D) = \langle 1; 2 \rangle$,
 g rośnie w $(-\infty; 0)$,
maleje w $\langle 0; \infty \rangle$; $h(D) = (0; 1)$,
 h rośnie w $(-\infty; -1)$,
maleje w $\langle -1; \infty \rangle$

Multiteka

- Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.4

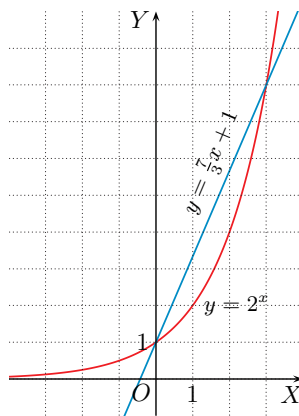
Generator
testów i sprawdzianów

Zadania

1. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = |2^x - 4|$ c) $f(x) = |1 - 2^{x-2}|$ e) $f(x) = \frac{1}{3^{|x|}} + 2$
 b) $f(x) = |3^{-x} - 1|$ d) $f(x) = 2^{|x|} - 1$ f) $f(x) = -2^{|x-1|}$

2. Podaj rozwiązania równania $2^x = \frac{7}{3}x + 1$ oraz równania $2^{|x|} = \frac{7}{3}x + 1$. Skorzystaj z rysunku obok.



3. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{|x|} = 2x$ d) $|2^x - 1| = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
 b) $3^x = 2|x| + 1$ e) $(\frac{1}{2})^{|x|} = |x| + 1$
 c) $2^x = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ f) $2^{x-1} = -x^2 + 4x - 2$

4. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \frac{2}{2^x} + 2$ c) $f(x) = 2^{x-2}$, $g(x) = 2^{-|x|}$
 b) $f(x) = -4^x$, $g(x) = 2^{x-1} - 5$ d) $f(x) = 3^{|x|} - 3$, $g(x) = 2^{-x} - 4$

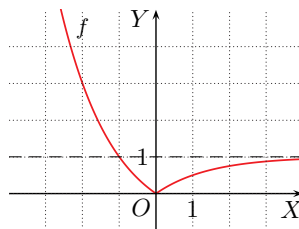
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right|$$

- a) Podaj liczbę rozwiązań równania:

$$f(x) = m$$

w zależności od parametru m .



- * b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{|f(x)-1|}{f(x)-1}$.

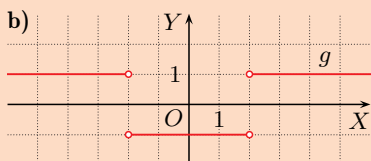
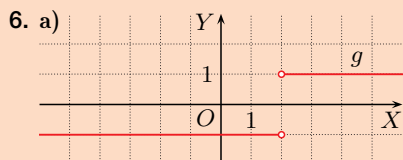
6. Dana jest funkcja $f(x) = 2^x - 4$. Naszkicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ * b) $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$

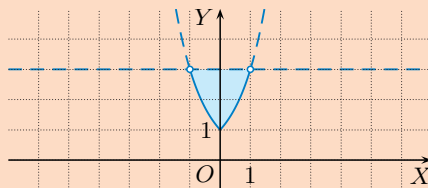
- D** 7. Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ wykresy funkcji $f(x) = a \cdot 2^x - a$ oraz $g(x) = -a \cdot 2^x + a$ mają dokładnie jeden punkt wspólny.

8. Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych. Podaj wszystkie punkty należące do zbioru A , których obie współrzędne są całkowite.

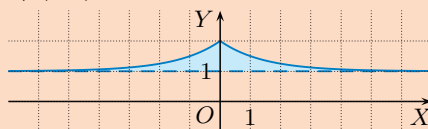
a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3^{|x|} \leq y < 3\}$
 b) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < y \leq 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} \right\}$



8. a) (0, 1), (0, 2)

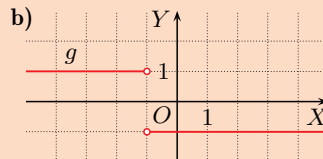


- b) (0, 2)



Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 2)$,
 rośnie w $(2; \infty)$
 b) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 0)$,
 rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$
 c) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 2)$,
 rośnie w $(2; \infty)$
 d) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 0)$,
 rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$
 e) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = (2; 3)$,
 maleje w $\langle 0; \infty \rangle$,
 rośnie w $(-\infty; 0)$
 f) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = (-\infty; -1)$,
 maleje w $\langle 1; \infty \rangle$,
 rośnie w $(-\infty; 1)$
2. dla obydwu równań: $x = 0$,
 $x = 3$
3. a) $x = 1$ lub $x = 2$
 b) $x = 0$ lub $x = 1$
 c) $x = -1$ lub $x = 1$
 d) $x = -1$ lub $x = 1$
 e) $x = 0$
 f) $x = 1$ lub $x = 2$
4. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$
 b) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 1)$
 c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$
 d) sprzeczne,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$
5. a) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
 1 dla $m \in \{0\} \cup \langle 1; \infty \rangle$,
 2 dla $m \in (0; 1)$



7. a) $a \cdot 2^x - a = -a \cdot 2^x + a$
 $2a \cdot 2^x = 2a$
 $2^x = 1$
 $x = 0$

Zatem funkcje mają tylko jeden punkt wspólny (0, 0).

Uczeń:

- rozwiązuje proste równania wykładnicze, korzystając z różnowartościowości funkcji wykładniczej,
- rozwiązuje proste nierówności wykładnicze, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiory punktów, których współrzędne są opisane za pomocą nierówności wykładniczych.

Ćwiczenie 1

- $2^{x-3} = 2^4, x = 7$
- $2^{x+5} = 2^{-1}, x = -6$
- $2^{3x-1} = 2^{10}, x = \frac{11}{3}$
- $5^{2x+5} = 5^3, x = -1$
- $4x^2 = 1, x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2, x = -2$ lub $x = 2$
- $x^3 - x = 0, x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$
- $x^3 + x - 2 = 0, (x-1)(x^2+x+2) = 0, x = 1$

Multiteka

- Czy podane wyrażenia są równoważne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.5

Generator
testów i sprawdzianów

*6.5. Własności funkcji wykładniczej

Zauważmy, że wykres funkcji wykładniczej ma tę własność, że dowolna prosta równoległa do osi OX przecina go co najwyżej raz. Oznacza to, że funkcja wykładnicza nie może przyjmować tej samej wartości dla dwóch różnych argumentów. Można to zapisać następująco: dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}$:

$$a^p = a^q \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p = q$$

O funkcji wykładniczej mówimy, że jest **różnowartościowa**.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $2^{x+1} = 8$.

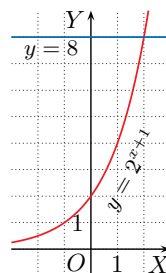
$$2^{x+1} = 2^3$$

$$x+1 = 3$$

$$x = 2$$

Liczbę 8 zapisujemy jako potęgę o podstawie 2.

Korzystamy z tego, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.



Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $2^{x-3} = 16$

c) $2^{3x-1} = 1024$

e) $7^{4x^2+1} = 49$

g) $2^{x^3-x} = 1$

b) $2^{x+5} = \frac{1}{2}$

d) $5^{2x+5} = 125$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x^2} = \frac{9}{4}$

h) $2^{x^3+x} = 4$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $3^{5x-2} = 9^{x+2}$.

$$3^{5x-2} = (3^2)^{x+2}$$

$$3^{5x-2} = 3^{2x+4}$$

$$5x-2 = 2x+4$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Prawą stronę równania zapisujemy jako potęgę o podstawie 3.

Korzystamy z tego, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $5^{3-x} = 25^{2x+3}$

c) $9^{2x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

e) $7^{x^2+x} = 49^{2x+2}$

b) $2^{x+1} = \sqrt{2}^{1-x}$

d) $0,125^{x+1} = 0,25^{2-x}$

f) $121^{0,5-x} = 11^{x-x^2}$

Ćwiczenie 2

a) $3-x = 4x+6, x = -\frac{3}{5}$

b) $x+1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, x = -\frac{1}{3}$

c) $4x+4 = -x-5, x = -\frac{9}{5}$

d) $3x+3 = 4-2x, x = \frac{1}{5}$

e) $x^2+x = 4x+4, x^2-3x-4 = 0, x = -1$ lub $x = 4$

f) $1-2x = x-x^2, x^2-3x+1 = 0, \Delta = 5, x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Rozwiązując nierówności wykładnicze, korzystamy z tego, że funkcja $y = a^x$ jest rosnąca dla $a \in (1; \infty)$, a dla $a \in (0; 1)$ – malejąca.

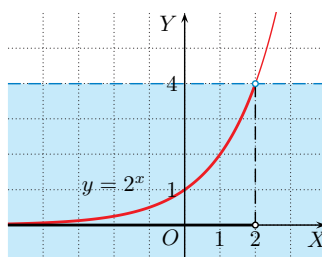
Przykład 3

Rozwiąż nierówność $2^x < 4$.

$$2^x < 2^2$$

Funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, więc ostatnia nierówność jest równoważna nierówności:

$$x < 2$$



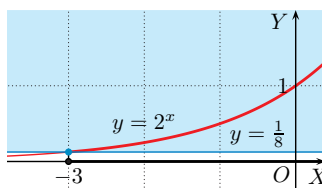
Przykład 4

Rozwiąż nierówność $2^x \geq 0,125$.

$$2^x \geq \frac{1}{8}$$

$$2^x \geq 2^{-3} \quad \text{Funkcja } y = 2^x \text{ jest rosnąca, co oznacza, że } 2^p \geq 2^q, \text{ gdy } p \geq q.$$

$$x \geq -3$$



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $3^x \leq \frac{1}{243}$

d) $3^{x+1} < 81$

g) $3^{x^2+4x} < \frac{1}{27}$

b) $2^x < \sqrt{8}$

e) $4^{2x+3} \geq 64$

h) $3^{1-x^2} \geq 3\sqrt{3}$

c) $7^x \geq 49\sqrt{7}$

f) $2^{x^2} \leq 16$

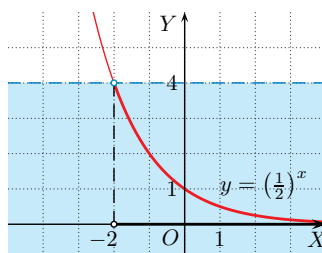
i) $0,5^x \cdot 2^{x^2+3x} > \frac{1}{2}$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \text{Funkcja } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ jest malejąca, co oznacza, że } \left(\frac{1}{2}\right)^p < \left(\frac{1}{2}\right)^q, \text{ gdy } p > q.$$

$$x > -2$$

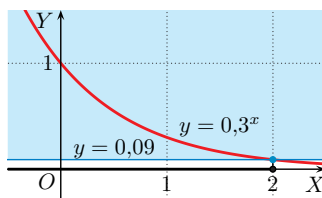


Przykład 6

Rozwiąż nierówność $0,3^x \geq 0,09$.

$$0,3^x \geq 0,3^2 \quad \text{Funkcja } y = 0,3^x \text{ jest malejąca, co oznacza, że } 0,3^p \geq 0,3^q, \text{ gdy } p \leq q.$$

$$x \leq 2$$



W przykładach 5. i 6. zwrot nierówności zmienił się na przeciwny, ponieważ podstawa potęgi $a \in (0; 1)$ i funkcja $y = a^x$ jest wówczas funkcją malejącą.

Ćwiczenie 3

a) $3^x \leq 3^{-5}$, funkcja $y = 3^x$ jest rosnąca, więc $x \leq -5$

b) $2^x < 2^{\frac{3}{2}}$, funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, więc $x < \frac{3}{2}$

c) $7^x \geq 7^{2,5}$, funkcja $y = 7^x$ jest rosnąca, więc $x \geq \frac{5}{2}$

d) $3^{x+1} < 3^4$, funkcja $y = 3^x$ jest rosnąca, więc $x < 3$

e) $4^{2x+3} \geq 4^3$, funkcja $y = 4^x$ jest rosnąca, więc $x \geq 0$

f) $2^{x^2} \leq 2^4$, funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, więc $x^2 \leq 4$, czyli $x \in (-2; 2)$

g) $3^{x^2+4x} < 3^{-3}$, funkcja $y = 3^x$ jest rosnąca, więc $x^2 + 4x < -3$, czyli $x \in (-3; -1)$

h) $3^{1-x^2} \geq 3^{1,5}$, funkcja $y = 3^x$ jest rosnąca, więc $1 - x^2 \geq 1,5$, czyli nierówność jest sprzeczna

i) $2^{-x+x^2+3x} > 2^{-1}$, funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, więc $x^2 + 2x + 1 > 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

Ćwiczenie 4

- a) $(\frac{2}{3})^x \leq (\frac{2}{3})^3$, funkcja $y = (\frac{2}{3})^x$ jest malejąca, więc $x \geq 3$
- b) $(\frac{3}{4})^x > (\frac{3}{4})^{-2}$, funkcja $y = (\frac{3}{4})^x$ jest malejąca, więc $x < -2$
- c) $(\frac{1}{4})^{2x+1} \geq (\frac{1}{4})^3$, funkcja $y = (\frac{1}{4})^x$ jest malejąca, więc $x \leq 1$
- d) $0,2^{x^2} > 0,2^4$, funkcja $y = 0,2^x$ jest malejąca, więc $x^2 < 4$, czyli $x \in (-2; 2)$
- e) $(\sqrt{2}-1)^{x^2+x} < (\sqrt{2}-1)^0$, funkcja $y = (\sqrt{2}-1)^x$ jest malejąca, więc $x^2 + x > 0$, czyli $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
- f) $(\frac{3,14}{\pi})^{x^2} \leq (\frac{3,14}{\pi})^0$, funkcja $y = (\frac{3,14}{\pi})^x$ jest malejąca, więc $x^2 \geq 0$, czyli $x \in \mathbf{R}$

Ćwiczenie 5

- a) $(\frac{1}{8})^x \leq (\frac{1}{8})^{-2}$, $x \geq -2$
- b) $4^{2x} \cdot 4^{-2x} \geq \frac{3}{4}$, $x \in \mathbf{R}$
- c) $3^{-x} \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 2^{-x} < 1$, sprzeczne

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -\frac{3}{2}$ b) $x = \frac{1}{2}$
 c) $x = -\frac{10}{3}$ d) $x \in \mathbf{R}$
 e) $x = -\frac{2}{5}$ f) $x = 3$
 g) $x = -\frac{1}{4}$ h) $x = \frac{1}{2}$
 i) sprzeczne
2. a), b) $x = -5$ lub $x = 5$
 c), d) $x = -3$ lub $x = 3$
 e) $x = 1$ lub $x = 3$
 f) $x = 2$
3. a) $x \in (-\infty; 6)$
 b) $x \in (2; \infty)$
 c) $x \in (\frac{17}{8}; \infty)$
4. a) $x \in (-1; 5)$
 b) $x \in (0; 1)$
 c) $x \in (-\frac{3}{2}; 0)$
5. $1 \leq 6^{x-x^2} \leq 6$
 $0 \leq x - x^2 \leq 1$
 $x \in (0; 1)$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $(\frac{2}{3})^x \leq \frac{8}{27}$ c) $0,25^{2x+1} \geq \frac{1}{64}$ e) $(\sqrt{2}-1)^{x^2+x} < 1$
 b) $0,75^x > \frac{16}{9}$ d) $0,2^{x^2} > 0,0016$ f) $(\frac{3,14}{\pi})^{x^2} \leq 1$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

- a) $(\frac{1}{2})^x \cdot 0,25^x \leq 64$ b) $16^x \cdot 0,25^{2x} \geq \frac{3}{4}$ c) $3^{-x} \cdot 6^x \cdot \frac{1}{2^x} < 1$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $(\frac{1}{2})^x = 2\sqrt{2}$ d) $(\frac{27}{64})^{x+1} = 0,75^{3x+3}$ g) $\sqrt{0,2} \cdot 5^x = 125^x$
 b) $(\frac{3}{4})^x = (\frac{4}{3})^{x-1}$ e) $2 \cdot (\sqrt{2})^x = \frac{1}{4^x}$ h) $27 \cdot (\frac{1}{9})^x = 81^x$
 c) $\frac{3^{x-3}}{27} = 9^{2x+2}$ f) $0,4^x = 2,5^{x-6}$ i) $(\frac{9}{25})^x \cdot (\frac{5}{3})^{2x+1} = \frac{125}{27}$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $2^{|x|} = 32$ c) $2^{|x|-7} = 4^{1-|x|}$ e) $|2^x - 5| = 3$
 b) $3^{1-|x|} = \frac{1}{81}$ d) $2^{|x|} + 2^{|x|+3} = 72$ f) $|2 - 3^x| = 7$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{5^x}{25} < 625$ b) $(\frac{2}{3})^{x+2} \leq \frac{16}{81}$ c) $4^{2x-1} \geq 64\sqrt{2}$

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{1}{27} < \frac{9}{3^x} < 27$ b) $1 < 2^{x^2} \leq 2^x$ c) $0,125 < (\frac{1}{2})^{2x+3} \leq 1$

5. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{3\sqrt{2}-1 \cdot 3\sqrt{2}+1}{3\sqrt{8}} \leq (\frac{1}{6})^{x^2-x} \leq 6^\pi \cdot 3^{1-\pi} \cdot (\frac{1}{2})^{\pi-1}$$

6. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory: A , B , $A \cap B$ oraz $B \setminus A$, jeżeli:

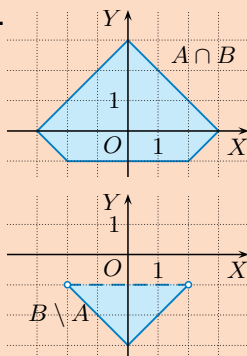
$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2^{|x|} \leq 16 \text{ i } 3^{|y-1|} \leq 9\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2^{|x|+|y|} \leq 8\}.$$

7. Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leq 2^y \leq 16 \text{ i } y \geq x^2\}$
 b) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leq 2^{|x|} \leq 4 \text{ i } 2^{|y|} \leq 8\}$

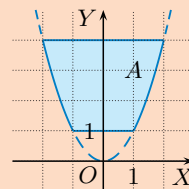
6.



7. a) Do zbioru:

$$A = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 4, y \geq x^2\}$$

należy 14 punktów o współrzędnych całkowitych.



b) Do zbioru:

$$A = \{(x, y) : x \in \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle, y \in \langle -3; 3 \rangle\}$$

należy 28 punktów o współrzędnych całkowitych.

6.6. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Przykład 1

$\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$,

$\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$,

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
↓
↑
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- | | | | |
|----------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| a) $\log_2 32$ | c) $\log_2 1$ | e) $\log_2 \frac{1}{64}$ | g) $\log_2 \sqrt{8}$ |
| b) $\log_2 2$ | d) $\log_2 \frac{1}{4}$ | f) $\log_2 \sqrt{2}$ | h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ |

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| a) $\log_3 81$ | d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ | g) $\log_7 7\sqrt{7}$ | j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ |
| b) $\log_3 \frac{1}{9}$ | e) $\log_9 3$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ | k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$ |
| c) $\log_3 \frac{1}{27}$ | f) $\log_9 \frac{1}{27}$ | i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ | l) $\log_6 216$ |

Zwróć uwagę na to, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają podane obok własności.

Dla $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

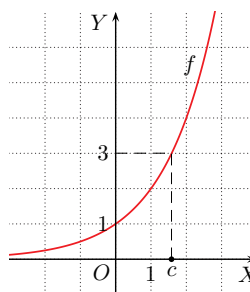
Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c , że $2^c = 3$.

Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1,5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.



Uczeń:

- oblicza logarytm danej liczby,
- stosuje do obliczeń równości wynikające z definicji logarytmu,
- wyznacza podstawę logarytmu lub liczbę logarytmowaną, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
- podaje przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych z wykorzystaniem tablic,
- udowadnia twierdzenie dotyczące niewymierności liczby, np. $\log_2 3$.

Ćwiczenie 1

- a) 5 b) 1 c) 0 d) -2
e) -6 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 2

- a) 4 b) -2 c) -3 d) $-\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) 3
i) $-\frac{1}{2}$ j) -4 k) $\frac{2}{3}$ l) 3

Ćwiczenie 3

Przyjmijmy, że podana liczba jest wymierna. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie, że:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \log_2 5 &= \frac{m}{n} \\ 5 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 5^n &= 2^m \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest podzielna przez 5, a prawa nie. Zatem $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

b) Dowód alogiczny jak w podpunkcie a).

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \log_2 6 &= \frac{m}{n} \\ 6 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 3^n \cdot 2^n &= 2^m \\ 3^n &= 2^{m-n} \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest podzielna przez 3, a prawa nie. Zatem $\log_2 6$ jest liczbą niewymierną.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \log_6 2 &= \frac{m}{n} \\ 2 &= 6^{\frac{m}{n}} \\ 2^n &= 3^m \cdot 2^m \\ 2^{n-m} &= 3^m \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest podzielna przez 3, a lewa nie. Zatem $\log_6 2$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 4

- a) 100 b) 15 c) 10 d) -3
e) 3 f) 7 g) 10 h) 1

Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$.

$$\text{Zatem } 3 = 2^{\frac{m}{n}}$$

$$3^n = 2^m \quad \text{Podnosimy obie strony równości do potęgi } n.$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzielną przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

- a) $\log_2 5$ b) $\log_3 5$ c) $\log_2 6$ d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają podane obok własności.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\log_2 2^{100}$ c) $\log_{1,1} 1,1^{10}$ e) $2^{\log_2 3}$ g) $0,4^{\log_{0,4} 10}$
b) $\log_6 6^{15}$ d) $\log_\pi \pi^{-3}$ f) $3^{\log_3 7}$ h) $5^{\log_5 1}$

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10.

Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$. Na przykład $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Poniżej zamieszczono fragment tablicy, w której znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279

Ćwiczenie 5

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

- a) $\log 1,5$, b) $\log 1,11$, c) $\log 1,62$, d) $\log 1,68$.

Ćwiczenie 5

- a) 0,1761 b) 0,0453 c) 0,2095 d) 0,2253

Zadania

1. Oblicz.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| a) $\log_2 64$ | e) $\log_2 0,125$ | i) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$ | m) $\log_3 \sqrt{27}$ |
| b) $\log_2 512$ | f) $\log_4 2$ | j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ | n) $\log_3 \frac{1}{81}$ |
| c) $\log_2 \frac{1}{32}$ | g) $\log_4 8$ | k) $\log_{\sqrt{2}} 32$ | o) $\log_5 625$ |
| d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ | h) $\log_4 \frac{1}{1024}$ | l) $\log_3 \sqrt{3}$ | p) $\log_5 0,04$ |

2. Oblicz.

- | | | | |
|---------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ | c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ | e) $\log_{0,2} 125$ | g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ |
| b) $\log_{0,1} 10^6$ | d) $\log_{0,25} 16$ | f) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{216}$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$ |

3. Oblicz.

- | | | | |
|--|--|----------------------|---------------------------|
| a) $2^{\log_2 9}$ | c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$ | e) $4^{\log_2 9}$ | g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$ |
| b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ | d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$ | f) $81^{\log_3 0,5}$ | h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$ |

4. Oblicz.

- | | | |
|----------------|------------------|-----------------------|
| a) $\log 1000$ | c) $\log 10^6$ | e) $\log \sqrt{10}$ |
| b) $\log 0,1$ | d) $\log 0,0001$ | f) $\log 10\sqrt{10}$ |

5. Oblicz.

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| a) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{8}$ | c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log \sqrt[3]{10}$ | e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1$ |
| b) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$ | d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ | f) $\log_{\frac{2}{3}} 1,5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$ |

6. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_a 25 = 2$ b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_a 0,25 = -1$ d) $\log_a 64 = -3$

7. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---|------------------|
| a) $\log_2 b = 5$ | c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ | e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ | g) $\log b = 6$ |
| b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ | d) $\log_7 b = 0$ | f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ | h) $\log b = -1$ |

8. Oblicz.

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| a) $\log_2(\log 100)$ | c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log_2 8)$ | e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$ |
| b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$ | d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$ | f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2))$ |

9. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\log_a a^3$ b) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$ c) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$ d) $\log_{a^2} a^{10}$ e) $\log_{\sqrt{a}} a^4$

8. a) $\log_2 2 = 1$

b) $\log_{0,1} 10 = -1$

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{1}{2}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 4$

e) $\log_9(\log_8 2) = \log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $\log_8 \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}\right) = \log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

9. a) $a > 0, a \neq 1, \log_a a^3 = 3$

b) $a > 0, a \neq 1, \log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}$

c) $a > 0, a \neq 1, \log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3} = -\frac{5}{2}$

d) $a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1, \log_{a^2} a^{10} = 5$

e) $a > 0, a \neq 1, \log_{\sqrt{a}} a^4 = 8$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 6 b) 9 c) -5

d) -10 e) -3 f) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{3}{2}$ h) -5 i) $-\frac{1}{4}$

j) 4 k) 10 l) $\frac{1}{2}$

m) $\frac{3}{2}$ n) -4 o) 4

p) -2

2. a) -1 b) -6 c) 7

d) -2 e) -3 f) 3

g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$

3. a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$

d) 3 e) 81 f) $\frac{1}{16}$

g) 3 h) 4

4. a) 3 b) -1 c) 6

d) -4 e) $\frac{1}{2}$ f) $1\frac{1}{2}$

5. a) $2 + \log_4 \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} =$

$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

b) $7 - (-3) = 10$

c) $-2 + \frac{1}{3} = -1\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

e) $2 - 0 = 2$

f) $-1 - (-3) = 2$

6. a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$

c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$

7. a) $b = 32$ b) $b = 2$

c) $b = 9$ d) $b = 1$

e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$

g) $b = 10^6$ h) $b = \frac{1}{10}$

Uczeń:

- stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- podaje założenia i zapisuje w prostszej postaci wyrażenia zawierające logarytmy,
- stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
- udowadnia twierdzenia o logarytmach.

Ćwiczenie 1

I sposób

Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$. Wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q}$$

$$\frac{x}{y} = a^{p-q}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

II sposób

Na mocy twierdzenia o logarytmie iloczynu mamy:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y =$$

$$= \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) = \log_a x$$

$$\text{Zatem } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

6.7. Własności logarytmów

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$, wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

$$\log_a (x \cdot y) = p + q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$.

$$\log_2 96 = \log_2 (32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3$$

b) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$.

$$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

d) $\log 0,07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

Oblicz.

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 2

a) $\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$, równość prawdziwa

b) $\log 500 = \log (100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$, równość prawdziwa

c) $\log_2 \frac{8}{3} = \log_2 8 - \log_2 3 = 3 - \log_2 3$, równość prawdziwa

d) $\log 0,07 = \log \frac{7}{100} = \log 7 - \log 100 = \log 7 - 2$, równość prawdziwa

Multiteka

- Czy podane wyrażenia są równoważne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_6 4 + \log_6 9$ d) $\log_5 15 - \log_5 75$ g) $\log_5 0,04 - \log_5 0,008$
b) $\log 8 + \log 125$ e) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$ h) $\log 6 - \log 2 - \log 3$
c) $\log_3 54 - \log_3 2$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$ i) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech $q = \log_a x$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$, zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$

$$x^p = a^{p \cdot q}$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Przykład 3

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0,3$$

Ćwiczenie 4

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:

- a) $\log x^6$, b) $\log \frac{1}{x^3}$, c) $\log \sqrt{x}$, d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$.

Przykład 4

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\begin{aligned} 3 + \log_2 7 &= \text{Zapisujemy 3 jako } \log_2 8. \\ &= \log_2 8 + \log_2 7 = \\ &= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

- a) $2 + \log_3 5$ b) $3 \log_2 10 - 1$ c) $2 \log_{\frac{1}{2}} 6 - 2$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } \log x^6 = 6 \log x = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$\text{b) } \log \frac{1}{x^3} = -3 \log x = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$\text{c) } \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{d) } \log \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{2} \log x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \log \frac{x^3}{\sqrt{x}} = \log x^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log x = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } \log_3 9 + \log_3 5 = \log_3 45$$

$$\text{b) } \log_2 1000 - \log_2 2 = \log_2 500$$

$$\text{c) } \log_{\frac{1}{2}} 36 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} (36 : \frac{1}{4}) = \log_{\frac{1}{2}} 144$$

$$\text{d) } \log_3 81 - \log_3 36 = \log_3 \frac{81}{36} = \log_3 \frac{9}{4}$$

Ćwiczenie 3

- a) 2 b) 3 c) 3
d) -1 e) 2 f) -2
g) 1 h) 0 i) -3

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2 b) -3 c) 1 d) 2

3. a) $x > 0$,

$$\log x^3 + \log x^2 = \log x^5$$

b) $x > 0$,

$$\log x^{\frac{1}{2}} + \log x^{-\frac{3}{2}} = \log x^{-1} = \log \frac{1}{x}$$

c) $x \neq 0$,

$$\log x^2 + \log 10 = \log(10x^2)$$

d) $x > 0$,

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} x^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2x^2}$$

e) $x > 0, y > 0$,

$$\log_3 x^2 + \log_3 y + \log_3 3 = \log_3(3x^2y)$$

f) $x > 0, y > 0$,

$$\log_5(2x) + \log_5 \frac{1}{xy^2} + \log_5 \sqrt{5} = \log_5 \frac{2\sqrt{5}}{y^2}$$

g) $x > 0, y > 0$,

$$\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{y} + \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{\sqrt{x}}{4y}$$

h) $x \neq 0$,

$$\log(2x^2) + \log(2x^2) + \log(2x^2) + \log \frac{1}{1000} = \log \frac{x^6}{125}$$

4. a) $(\log_8 2 + \log_8 32 +$

$$- \log_8 8)^{\log_3 5} =$$

$$= (\log_8 8)^{\log_3 5} = 1$$

b) $(-3 + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{9}{2})^4 =$

$$= (-3 + \log_3 3)^4 = (-2)^4 = 16$$

c) $6^{\log_6 3 + \log_6 4} = 6^{\log_6 12} = 12$

d) $9^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

5. a) $\log_3 9 + \log_3 x^8 =$

$$= 2 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

b) $\log_3 x^4 - \log_3 81 =$

$$= 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 4 = -5$$

c) $\frac{1}{4}(\log_3 3 + \log_3 x^6) =$

$$= \frac{1}{4}(1 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)) = -\frac{1}{8}$$

d) $\log_3 27 + \log_3 x^{-\frac{2}{3}} =$

$$= 3 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 3\frac{1}{6}$$

6. a) $a = \log(2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 =$

$$= p + 2$$

b) $a = \log \frac{2}{100} = \log 2 - \log 100 = p - 2$

c) $a = \log \frac{4}{100} = \log 2^2 - \log 100 =$

$$= 2 \log 2 - 2 = 2p - 2$$

d) $a = \log(2^4 \cdot 100) = 4 \log 2 + \log 100 =$

$$= 4p + 2$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$

c) $\log 0,12 - \log 0,3 + \log 25$

b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$

d) $\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15$

D 2. Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.

a) $\log x^2 y^2 = \log x + \log y + \log xy$

b) $\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$

c) $\log xyz = \log \frac{x}{y} + \log y^2 z$

d) $\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$

e) $2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z}\right)^{-1} - 5 \log z$

3. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw je w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $\log x^3 + 2 \log x$

e) $2 \log_3 x + \log_3 y + 1$

b) $\log \sqrt{x} - \frac{3}{2} \log x$

f) $\frac{1}{3} \log_5 8x^3 - 2 \log_5 y \sqrt{x} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} \log x^4 + 1$

g) $\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y - 2$

d) $1 - 2 \log_{\frac{1}{2}} x$

h) $\frac{1}{2} \log 4x^4 + \frac{1}{3} \log 8x^6 + \frac{1}{4} \log 16x^8 - 3$

4. Oblicz.

a) $(2 \log_8 \sqrt{2} + \log_8 32 - 1)^{\log_3 5}$

c) $6^{0,25 \log_6 81 - 2 \log_6 0,5}$

b) $(\log_2 \frac{1}{8} - \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 4,5)^{\log_{\sqrt{2}} 4}$

d) $9^{\log_{64} 4 + 0,5 \log_{27} 3}$

5. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:

a) $\log_3 9x^8$,

b) $\log_3 \frac{x^4}{81}$,

c) $\log_3 \sqrt[4]{3x^6}$,

d) $\log_3 \frac{27 \sqrt[3]{x}}{x}$.

6. Wyraż liczbę a za pomocą p , jeśli $p = \log 2$.

a) $a = \log 200$

b) $a = \log 0,02$

c) $a = \log 0,04$

d) $a = \log 1600$

7. Wyraż liczbę a za pomocą p i q , jeśli $p = \log_3 2$ oraz $q = \log_3 5$.

a) $a = \log_3 20$

c) $a = \log_3 \frac{2}{25}$

e) $a = \log_3 3\frac{1}{8}$

g) $a = \log_3 \sqrt{10}$

b) $a = \log_3 100$

d) $a = \log_3 0,4$

f) $a = \log_3 \frac{\sqrt{5}}{2}$

h) $a = \log_3 0,2\sqrt{2}$

8. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0,6$ oraz $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 80$,

c) $\log \frac{5}{4}$,

e) $\log 2,5$,

g) $\log 5\sqrt{2}$,

b) $\log 50$,

d) $\log 0,5$,

f) $\log 0,64$,

h) $\log 25\sqrt[3]{4}$.

7. a) $a = \log_3(2^2 \cdot 5) = 2 \log_3 2 + \log_3 5 = 2p + q$

b) $a = \log_3(2^2 \cdot 5^2) = 2 \log_3 2 + 2 \log_3 5 = 2p + 2q$

c) $a = \log_3 2 - \log_3 5^2 = p - 2q$

d) $a = \log_3 \left(\frac{2}{5}\right) = \log_3 2 - \log_3 5 = p - q$

e) $a = \log_3 \left(\frac{25}{8}\right) = \log_3 5^2 - \log_3 2^3 =$
 $= 2 \log_3 5 - 3 \log_3 2 = 2q - 3p$

f) $a = \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \log_3 2 = \frac{1}{2}q - p$

g) $a = \frac{1}{2} \log_3(2 \cdot 5) = \frac{1}{2} \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 5 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$

h) $a = \log_3 \left(\frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 5^{-1} + \frac{1}{2} \log_3 2 = \frac{1}{2}p - q$

8. a) 1,9

b) 1,7

c) 0,1

d) -0,3

e) 0,4

f) -0,2

g) 0,85

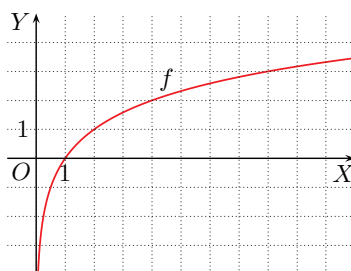
h) 1,6

6.8. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Definicja

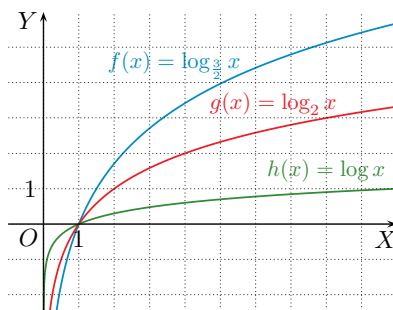
Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_3 x \text{ oraz } g(x) = \log_4 x$$

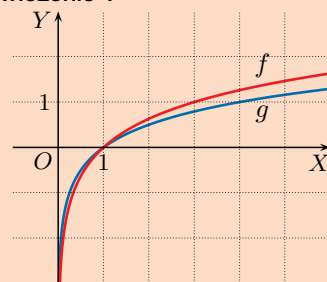
Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.



Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log x$. Do którego z tych wykresów należy punkt:

- a) $(100, 2)$, b) $(2\frac{1}{4}, 2)$, c) $(1024, 10)$?

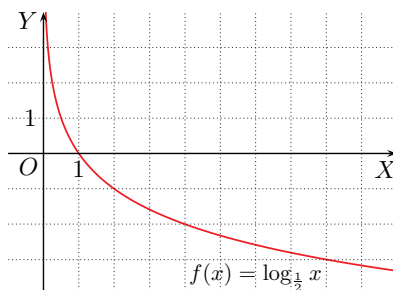


Punkt wspólny wykresów: $(1, 0)$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

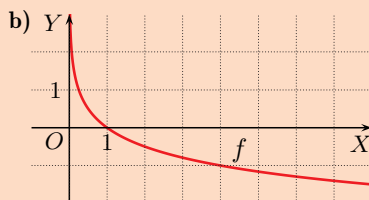
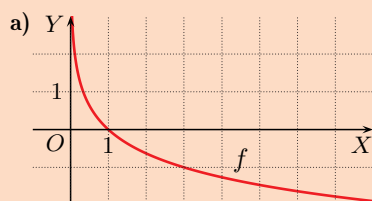
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji: a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

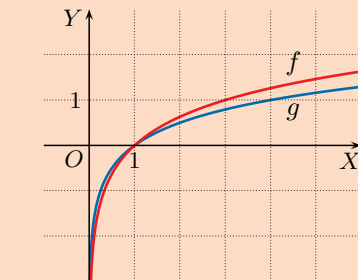
Ćwiczenie 3



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji logarytmicznej i określa jej własności,
- oblicza podstawę logarytmu we wzorze funkcji logarytmicznej, gdy dane są współrzędne punktu należącego do wykresu tej funkcji,
- wyznacza zbiór wartości funkcji logarytmicznej o podanej dziedzinie,
- rozwiązuje proste nierówności logarytmiczne, korzystając z wykresu funkcji logarytmicznej,
- wykorzystuje własności funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań różnego typu, w tym zadań z parametrem.

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2

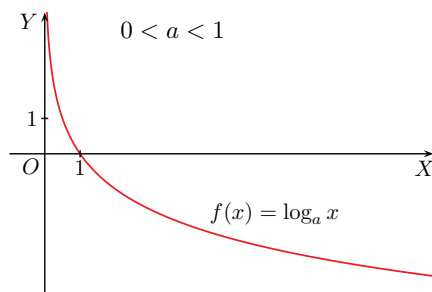
- a) $h(100) = \log 100 = 2$
 b) $f(2\frac{1}{4}) = \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2$
 c) $g(1024) = \log_2 1024 = 10$

Multiteka

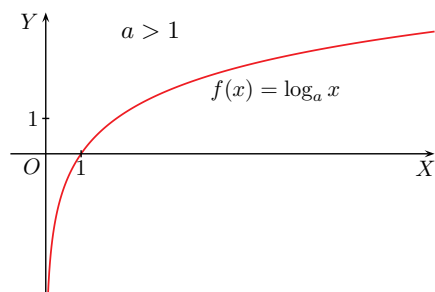
- Wykres funkcji logarytmicznej
- Liczba e

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.8

Generator
testów i sprawdzianów



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1, 0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX .

Ćwiczenie 4

a) Jeśli $a \in (1; \infty)$, to
 $f(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$
 oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$.

b) Jeśli $a \in (0; 1)$, to
 $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$
 oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne, jeśli wiadomo, że: a) $a \in (1; \infty)$, b) $a \in (0; 1)$?

Przykład 3

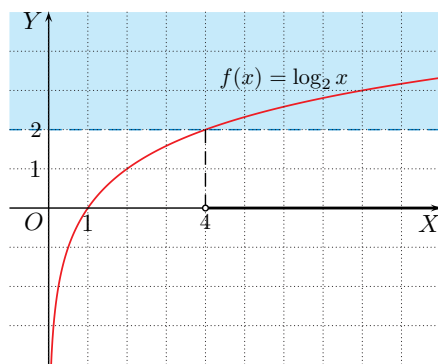
Rozwiąż nierówność $\log_2 x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_2 x > \log_2 4 \quad 2 = \log_2 4$$

$$x > 4, \text{ czyli } x \in (4; \infty)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest rosnąca.



Przykład 4

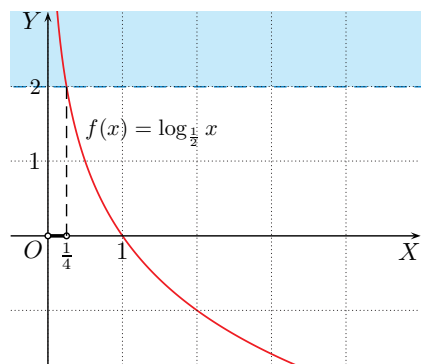
Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \quad 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4}, \text{ czyli } x \in (0; \frac{1}{4})$$

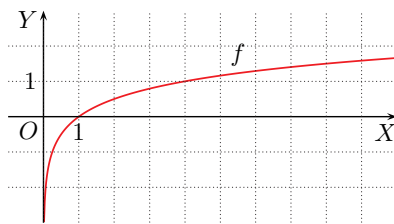
Zmieniamy zwrot nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.



Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_4 x \geq 1$ c) $\log_4 x > \frac{3}{2}$
b) $\log_4 x < 1$ d) $\log_4 x \leq \frac{3}{2}$



Ćwiczenie 6

Naszukuj odpowiedni wykres i podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_3 x > 1$ c) $\log_3 x \geq -2$ e) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1$ g) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$
b) $\log_3 x \leq 1$ d) $\log_3 x > 2$ f) $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$ h) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$

Ćwiczenie 7

Rozwiąż nierówność.

- a) $-2 \leq \log_2 x \leq 1$ c) $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$ e) $|\log_4 x| \leq 1$ g) $\log_{\frac{2}{2}} x \leq 4$
b) $-3 < \log_2 x < -1$ d) $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x < 1$ f) $|\log_4 x| > \frac{1}{2}$ h) $\log_2^2 x > 9$

Uwaga. Zamiast $(\log_a x)^2$ piszemy $\log_a^2 x$.

Zadania

1. Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?

- a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$

2. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f .

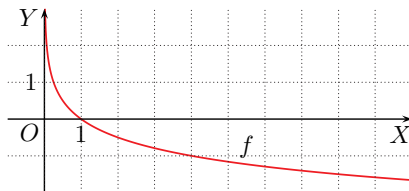
- a) $D_f = (0; 1)$ b) $D_f = \langle 2; \infty \rangle$ c) $D_f = \langle \frac{1}{2}; 8 \rangle$ d) $D_f = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1024 \rangle$

3. Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f .

- a) $f(x) = \log_3 x$, $D_f = \langle \frac{1}{3}; 1 \rangle$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $D_f = \langle \frac{1}{2}; 8 \rangle$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $D_f = \langle \frac{1}{9}; 27 \rangle$ d) $f(x) = \log_8 x$, $D_f = \langle \frac{1}{2}; \sqrt{2} \rangle$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 1$ c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq -1$
b) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq 8$ d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -\frac{1}{2}$



5. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

- a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{1-m} x$ c) $f(x) = \log_{m^2} x$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $a = 3$ b) $a = 5$ c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \sqrt{2}$
2. a) $f(D_f) = (-\infty; 0)$ b) $f(D_f) = \langle 1; \infty \rangle$
c) $f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$ d) $f(D_f) = \langle -\frac{1}{2}; 10 \rangle$
3. a) $f(D_f) = \langle -1; 0 \rangle$ b) $f(D_f) = \langle -3; 2 \rangle$
c) $f(D_f) = \langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \rangle$ d) $f(D_f) = \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \rangle$
4. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; \infty \rangle$ b) $x \in (0; \frac{1}{48})$
c) $x \in (0; 4)$ d) $x \in (2; \infty)$
5. a) $m > \frac{1}{2}$ b) $m < 0$
c) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

Ćwiczenie 5

- a) $x \in \langle 4; \infty \rangle$ b) $x \in (0; 4)$
c) $x \in (8; \infty)$ d) $x \in (0; 8)$

Ćwiczenie 6

- a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3)$
c) $x \in \langle \frac{1}{9}; \infty \rangle$ d) $x \in (9; \infty)$
e) $x \in (0; 3)$ f) $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
g) $x \in (\frac{1}{9}; \infty)$ h) $x \in (0; \frac{1}{9})$

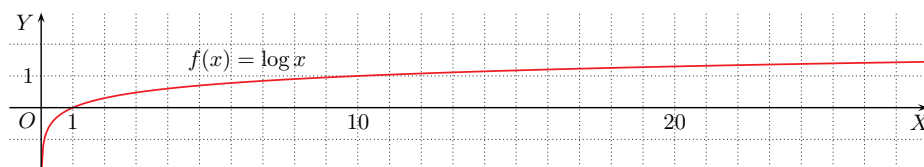
Ćwiczenie 7

Zakładamy, że $x > 0$.

- a) $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$
Funkcja $y = \log_2 x$ jest rosnąca.
 $x \in \langle \frac{1}{4}; 2 \rangle$
b) $\log_2 \frac{1}{8} \leq \log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{2}$
Funkcja $y = \log_2 x$ jest rosnąca.
 $x \in (\frac{1}{8}; \frac{1}{2})$
c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$
Funkcja $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.
 $x \in \langle \frac{1}{4}; 2 \rangle$
d) $\log_{\frac{1}{2}} 4 \leq \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
Funkcja $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.
 $x \in (\frac{1}{2}; 4)$
e) $-1 \leq \log_4 x \leq 1$
 $\log_4 \frac{1}{4} \leq \log_4 x \leq \log_4 4$
Funkcja $y = \log_4 x$ jest rosnąca.
 $x \in \langle \frac{1}{4}; 4 \rangle$
f) $\log_4 x < -\frac{1}{2}$ lub $\log_4 x > \frac{1}{2}$
 $\log_4 x < \log_4 \frac{1}{2}$
lub $\log_4 x > \log_4 2$
Funkcja $y = \log_4 x$ jest rosnąca.
 $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
g) $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$
 $\log_{\frac{1}{2}} 4 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$
Funkcja $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.
 $x \in \langle \frac{1}{4}; 4 \rangle$
h) $\log_2 x < -3$ lub $\log_2 x > 3$
 $\log_2 x < \log_2 \frac{1}{8}$ lub $\log_2 x > \log_2 8$
Funkcja $y = \log_2 x$ jest rosnąca.
 $x \in (0; \frac{1}{8}) \cup (8; \infty)$

6. a) $0 < m - 2 < 1$
 $m \in (2; 3)$
 b) $0 < 4m^2 < 1$
 $0 < m^2 < \frac{1}{4}$
 $m \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$
 c) $0 < 1 - m^2 < 1$
 $0 < m^2 < 1$
 $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
7. a) $x > 100$ b) $x > 1000$
 c) $x > 10^6$ d) $x > 10^{100}$
8. a) $>$ b) $<$
9. Zakładamy, że $x > 0$.
 a) $\log_4 4 \leq \log_4 x \leq \log_4 64$
 Funkcja $y = \log_4 x$ jest rosnąca, więc $x \in \langle 4; 64 \rangle$.
 b) $\log_{\frac{1}{3}} 1 < \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$
 Funkcja $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ jest malejąca, więc $x \in \langle \frac{1}{81}; 1 \rangle$.
 c) $\log_{\frac{1}{4}} 2 < \log_{\frac{1}{4}} x \leq \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$
 Funkcja $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ jest malejąca, więc $x \in \langle 1; 2 \rangle$.
 d) $\log_5 \frac{1}{25} \leq \log_5 x \leq \log_5 625$
 Funkcja $y = \log_5 x$ jest rosnąca, więc $x \in \langle \frac{1}{25}; 625 \rangle$.
 e) $\log_{0,1} 10^3 \leq \log_{0,1} x < \log_{0,1} 10^{-6}$
 Funkcja $y = \log_{0,1} x$ jest malejąca, więc $x \in (10^{-6}; 10^3)$.
 f) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} < \log_{\frac{2}{3}} x \leq \log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$
 Funkcja $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest malejąca, więc $x \in \langle \frac{8}{27}; \frac{3}{2} \rangle$.
 g) $-5 \leq \log_2 x \leq 5$
 $\log_2 \frac{1}{32} \leq \log_2 x \leq \log_2 32$
 Funkcja $y = \log_2 x$ jest rosnąca, więc $x \in \langle \frac{1}{32}; 32 \rangle$.
 h) $\log_4 x < -\frac{3}{2}$ lub $\log_4 x > \frac{3}{2}$
 $\log_4 x < \log_4 \frac{1}{8}$ lub $\log_4 x > \log_4 8$
 Funkcja $y = \log_4 x$ jest rosnąca, więc $x \in (0; \frac{1}{8}) \cup (8; \infty)$.
 i) $-4 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 4$
 $\log_{\frac{1}{3}} 81 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$
 Funkcja $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ jest malejąca, więc $x \in (\frac{1}{81}; 81)$.

6. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?
 a) $f(x) = \log_{m-2} x$ b) $f(x) = \log_{4m^2} x$ c) $f(x) = \log_{1-m^2} x$
7. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



Dla jakich argumentów x spełniona jest podana nierówność?

- a) $\log x > 2$ b) $\log x > 3$ c) $\log x > 6$ d) $\log x > 100$
8. Wstaw w miejsce [?] znak $<$ lub $>$, tak by powstało zdanie prawdziwe.
 a) Dla $a \in (0; 1)$ i dowolnych liczb dodatnich p, q :
 $p < q \Leftrightarrow \log_a p$ [?] $\log_a q$
 b) Dla $a \in (1; \infty)$ i dowolnych liczb dodatnich p, q :
 $p < q \Leftrightarrow \log_a p$ [?] $\log_a q$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

9. Rozwiąż nierówność.

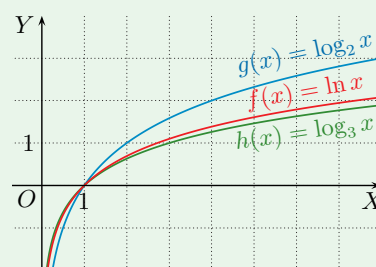
- a) $1 \leq \log_4 x \leq 3$ d) $-2 \leq \log_5 x \leq 4$ g) $|\log_2 x| \leq 5$
 b) $0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leq 4$ e) $-3 \leq \log_{0,1} x < 6$ h) $|\log_4 x| > \frac{3}{2}$
 c) $0 \geq \log_{\frac{1}{4}} x > -\frac{1}{2}$ f) $-1 < \log_{\frac{2}{3}} x \leq 3$ i) $\log_{\frac{2}{3}} x < 16$

- D** 10. Uzasadnij, że wykres funkcji $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, jest symetryczny względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji $g(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

W zastosowaniach, obok logarytmu dziesiętnego, często występuje logarytm przy podstawie e , gdzie $e = 2,718281828\dots$ (patrz str. 291).

Logarytm ten nazywamy **logarytmem naturalnym**. Zamiast pisać $\log_e x$, używamy oznaczenia $\ln x$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \ln x$. Dla porównania w tym samym układzie współrzędnych narysowano wykresy funkcji $g(x) = \log_2 x$ i $h(x) = \log_3 x$.



- 11.** Oblicz: a) $\ln e$, b) $\ln 1$, c) $\ln e^4$, d) $\ln \frac{1}{e}$.

10. Punkt (x, y) należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^y = x$, czyli punkt (y, x) należy do wykresu funkcji $g(x) = a^x$.
 Zatem oba wykresy są symetryczne względem prostej $y = x$.

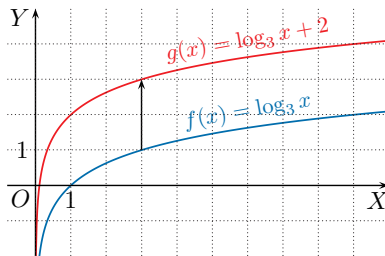
11. a) 1 b) 0 c) 4 d) -1

6.9. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_3 x + 2$.

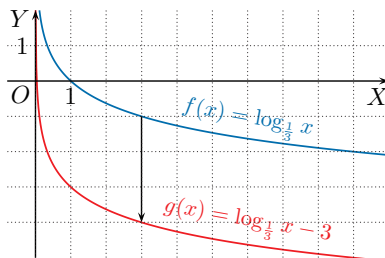
Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół, czyli o wektor $[0, -3]$. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 x + 1$, $h(x) = \log_2 x - 3$

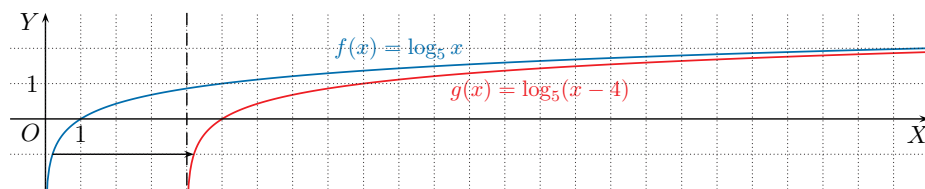
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_5(x - 4)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo, czyli o wektor $[4, 0]$.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 5.

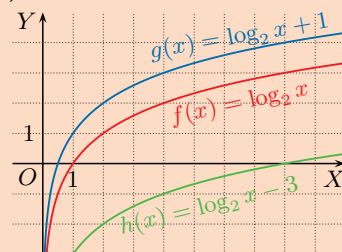


Uczeń:

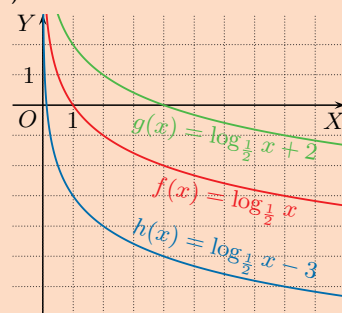
- szkicuje wykres funkcji logarytmicznej, stosując poznane przekształcenia, i określa jej własności,
- wyznacza dziedzinę funkcji logarytmicznej,
- rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące funkcji logarytmicznej,
- rozwiązuje nierówności logarytmiczne, korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji logarytmicznej,
- rozwiązuje graficznie równania, znajdując na rysunku punkty wspólne wykresu funkcji logarytmicznej i prostej,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiory punktów, których współrzędne są opisane za pomocą nierówności logarytmicznych.

Ćwiczenie 1

a)



b)



Multiteka

- Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznej (1)
- Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznej (2)
- Skala logarytmiczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.9

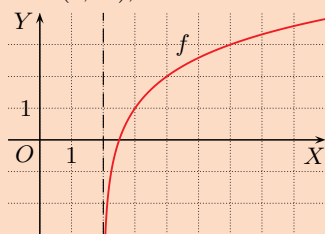
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

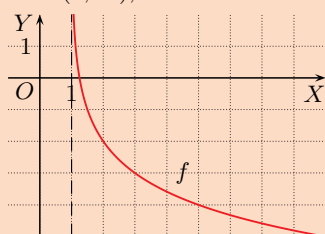
- a) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
asymptota: $x = 1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (3; \infty)$
- b) $D = (-2; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
asymptota: $x = -2$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (0; \infty)$
- c) $D = (-4; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -3$,
asymptota: $x = -4$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-4; -3\frac{1}{2})$

Ćwiczenie 3

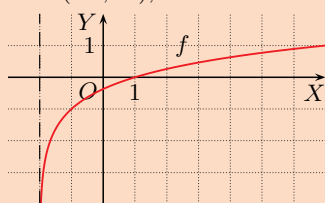
- a) $D = (2; \infty)$, $x = 2$



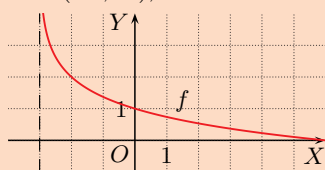
- b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$



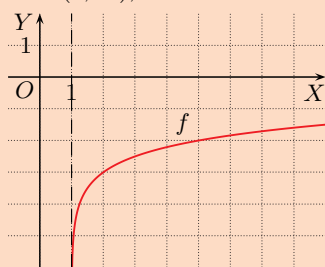
- c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$



- d) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$



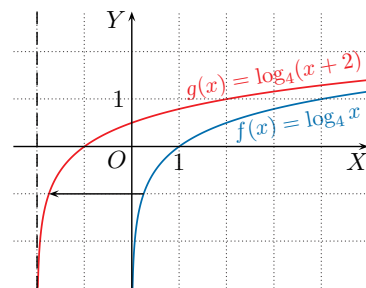
- e) $D = (1; \infty)$, $x = 1$



Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_4(x+2)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1 .



Ćwiczenie 2

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = \log_2(x-1)$ b) $f(x) = \log_2(x+2)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

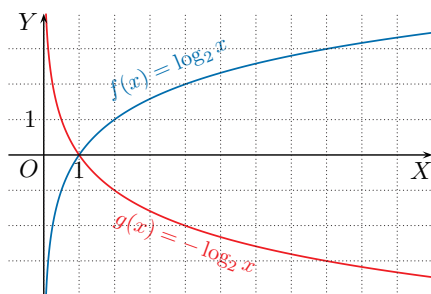
Ćwiczenie 3

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \log_2(x-2) + 1$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 2$ e) $f(x) = \log_4(x-1) - 3$
c) $f(x) = \log_3(x+2) - 1$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 2$

Przykład 5

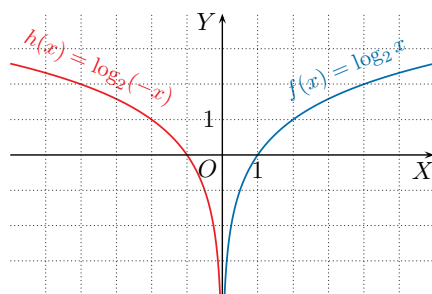
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ oraz: $g(x) = -\log_2 x$



$D_g = (0; \infty)$

Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OX . Zwróć uwagę, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

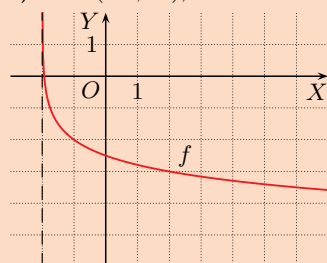
$h(x) = \log_2(-x)$



$D_h = (-\infty; 0)$

Wykres funkcji h jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OY .

- f) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$



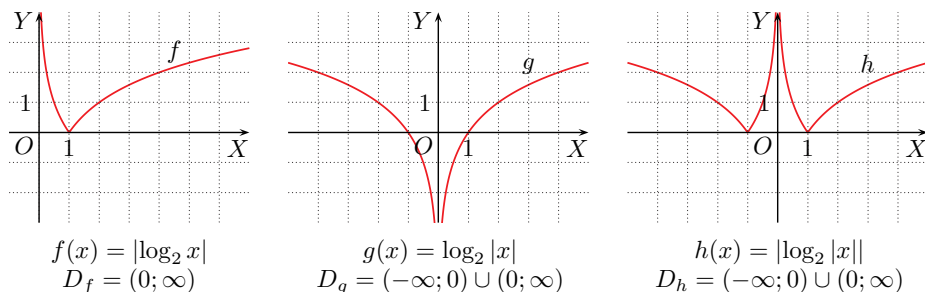
Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) + 2$

Przykład 6

Wykresy funkcji f , g i h otrzymano przez odpowiednie przekształcenie wykresu funkcji $y = \log_2 x$, gdzie $x > 0$.



Ćwiczenie 5

Naskicuj wykres funkcji g . W tym celu wykonaj odpowiednie przekształcenie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Podaj dziedzinę funkcji g .

- a) $g(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x|$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ c) $g(x) = |\log_{\frac{1}{2}} |x||$

Przykład 7

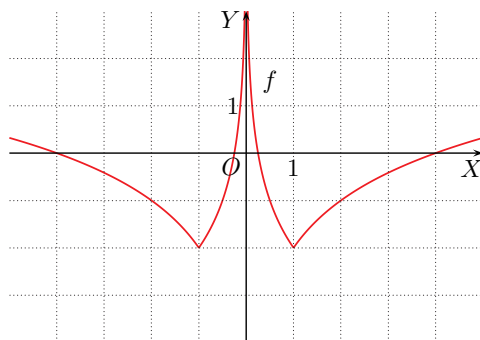
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |\log_2 |x|| - 2$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z wykresu możemy odczytać liczbę rozwiązań równania:

$$|\log_2 |x|| - 2 = m$$

w zależności od parametru m .

Równanie ma:

- 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$,
- 2 rozwiązania dla $m = -2$,
- 4 rozwiązania dla $m \in (-2; \infty)$.



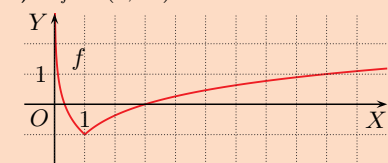
Ćwiczenie 6

Podaj dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m , a następnie naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = |\log_3 x| - 1$ b) $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x| \right|$ c) $f(x) = \log_2 (|x| + 4)$

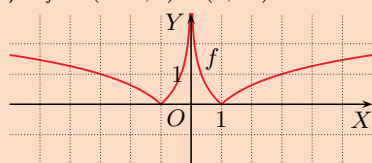
Ćwiczenie 6

- a) $D_f = (0; \infty)$



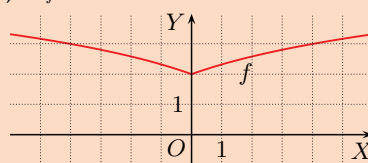
$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; -1) \\ 1 & \text{dla } m = -1 \\ 2 & \text{dla } m \in (-1; \infty) \end{cases}$$

- b) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$



$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 0) \\ 2 & \text{dla } m = 0 \\ 4 & \text{dla } m \in (0; \infty) \end{cases}$$

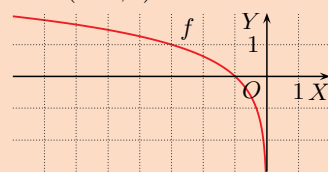
- c) $D_f = \mathbb{R}$



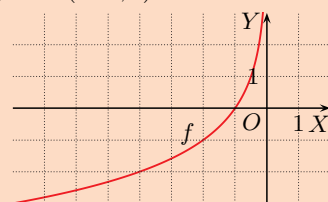
$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 2) \\ 1 & \text{dla } m = 2 \\ 2 & \text{dla } m \in (2; \infty) \end{cases}$$

Ćwiczenie 4

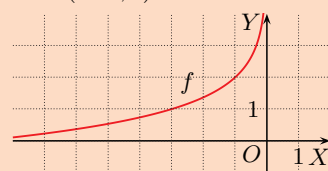
- a) $D = (-\infty; 0)$



- b) $D = (-\infty; 0)$

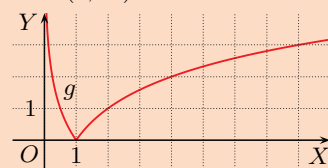


- c) $D = (-\infty; 0)$

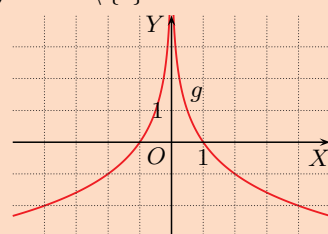


Ćwiczenie 5

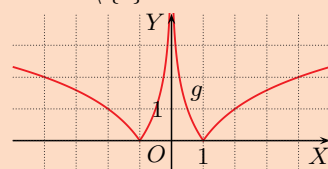
- a) $D = (0; \infty)$



- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Odpowiedzi do zadań

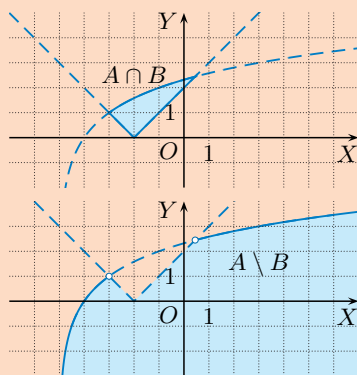
1. a) 4 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$
2. a) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$
3. a) $D = (-1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$
b) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
c) $D = (2; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (2; \frac{55}{27})$
d) $D = (-3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 0)$
e) $D = (-4; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; \infty)$
f) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (\frac{28}{27}; \infty)$
4. a), b) $D = (0; \infty)$
c), d) $D = (-\infty; 0)$
5. a) $D = (-\infty; 1)$
b) $D = (-\infty; -2)$
c) $D = (-\infty; -1)$
6. a) $D = (2; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 3$,
maleje w $(2; 3)$,
rośnie w $(3; \infty)$
b) $D = (-1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
maleje w $(-1; 0)$,
rośnie w $(0; \infty)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 1, x = 3$,
maleje w $(-\infty; 2)$,
rośnie w $(2; \infty)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2, x = 0$,
rośnie w $(-\infty; -1)$,
maleje w $(-1; \infty)$
e) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2, x = 2$,
maleje w $(-\infty; -1)$,
rośnie w $(1; \infty)$
f) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
rośnie w $(-\infty; 0)$,
maleje w $(0; \infty)$
7. a) 0 dla $m \in (-\infty; -4)$,
2 dla $m = -4$,
4 dla $m \in (-4; \infty)$
b) 0 dla $m \in (2; \infty)$,
2 dla $m = 2$,
4 dla $m \in (-\infty; 2)$
c) 0 dla $m \in (-2; 2)$,
2 dla $m \in \{-2, 2\}$,
4 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
8. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup (3; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
c) $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

Zadania

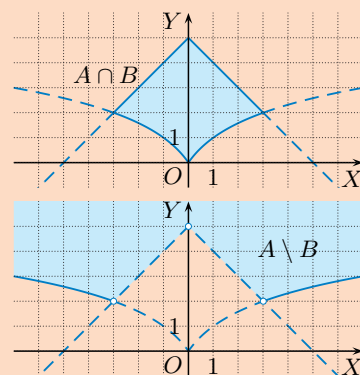
1. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej miejsce zerowe.
a) $f(x) = \log_2 x - 2$ b) $f(x) = \log_3 x + 1$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$
2. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.
a) $f(x) = \log_2(x + 3)$ b) $f(x) = \log_3(x - 1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$
3. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.
a) $f(x) = \log_2(x + 1) - 2$ d) $f(x) = \log_3(x + 3) - 1$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4) + 1$
c) $f(x) = \log_3(x - 2) + 3$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) - 3$
4. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.
a) $f(x) = 2 - \log_2 x$ c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$
b) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$
5. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.
a) $f(x) = \log_2(1 - x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-2 - x)$ c) $f(x) = \log_3(-1 - x)$
6. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji f .
a) $f(x) = |\log_3(x - 2)|$ c) $f(x) = \log_2|x - 2|$ e) $f(x) = \log_2(|x| - 1)$
b) $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}(x + 1)\right|$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x + 1|$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(|x| + 1)$
7. Podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m .
a) $\left|\log_{\frac{1}{3}}|x|\right| - 4 = m$ b) $-\log_4|x| + 2 = m$ c) $|\log x^2| + 4 = m^2$
8. Naskicuj wykres odpowiedniej funkcji i podaj zbiór rozwiązań nierówności.
a) $|\log_3|x|| \geq 1$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(|x| + 2) < -2$ c) $-\log_4(|x| - 1) \geq 0$
9. Rozwiąż graficznie równanie.
a) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = -\frac{2}{3}x$ b) $|\log_3 x| = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-\log_2(-x) + 1 = |x|$
10. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.
a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq \log_2(x + 5)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq |x + 2|\}$
b) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \log_2(|x| + 1)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 5 - |x|\}$

9. a) $x = 0, x = 3$ b) $x = 1, x = 3$ c) $x = -1$

10. a)



b)



Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności dla częstotliwości 1000 Hz),

L – poziom natężenia dźwięku.

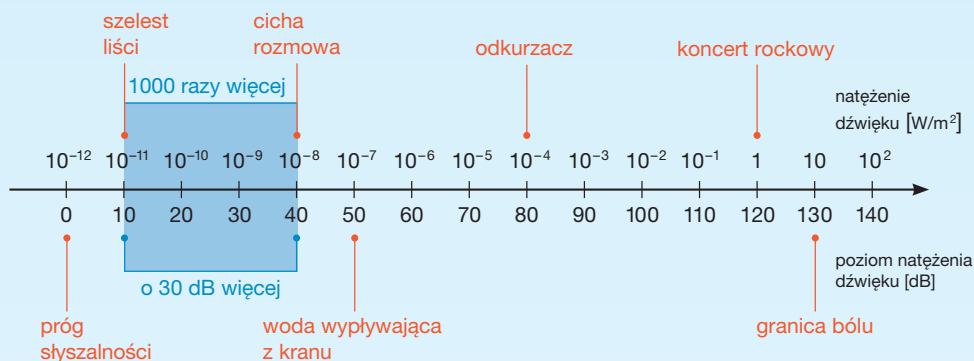
Poziom natężenia dźwięku podawany jest w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2 , to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$



Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

$$1. L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \frac{2I}{10^{-12}} - 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} = 10 \cdot \log \left(\frac{2I}{10^{-12}} : \frac{I}{10^{-12}} \right) = 10 \log 2 \approx 3 \text{ [dB]}$$

Uczeń:

- stosuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu przy przekształcaniu wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- wykorzystuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu w zadaniach na dowodzenie,
- udowadnia twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu.

*6.10. Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a , b i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Dowód

Niech a , b i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$. Niech $p = \log_b x$, $q = \log_a b$, wówczas:

$$x = b^p, \quad b = a^q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$x = (a^q)^p = a^{q \cdot p} \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$q \cdot p = \log_a x \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x / : \log_a b \quad \log_a b \neq 0, \text{ gdyż } b \neq 1.$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \frac{1}{9}$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c .

a) $\log_{0,1} 7$, $c = 10$

c) $\log_7 11$, $c = 49$

e) $\log_2 6$, $c = \frac{1}{2}$

b) $\log_8 3$, $c = 2$

d) $\log 625$, $c = 0,1$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 12$, $c = 3$

Wzór z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu czasem wygodnie jest zapisać w postaci iloczynu:

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$$

D Ćwiczenie 2

Udowodnij podaną równość.

a) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3$

b) $\log 0,1 \cdot \log_{0,1} 0,01 \cdot \log_{0,01} 0,001 \cdot \log_{0,001} 0,0001 = -4$

Ćwiczenie 1

a) $\frac{\log 7}{\log_{0,1} 7} = -\log 7 = \log \frac{1}{7}$

b) $\frac{\log_2 3}{\log_2 8} = \frac{\log_2 3}{3} = \frac{1}{3} \log_2 3 = \log_2 \sqrt[3]{3}$

c) $\frac{\log_{49} 11}{\log_{49} 7} = \frac{\log_{49} 11}{\frac{1}{2}} = 2 \log_{49} 11 = \log_{49} 121$

d) $\frac{\log_{0,1} 625}{\log_{0,1} 10} = \frac{\log_{0,1} 625}{-1} = -\log_{0,1} 625 = \log_{0,1} \frac{1}{625}$

e) $\frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log \frac{1}{2}}{-1} = -\log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{\frac{1}{2}} = \log 2$

f) $\frac{\log_3 12}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 12}{-1} = -\log_3 12 = \log_3 \frac{1}{12}$

Ćwiczenie 2

a) $L = \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 =$
 $= \log_2 6 \cdot \log_6 8 = \log_2 8 =$
 $= 3 = P$

b) $L = \log 0,01 \cdot \log_{0,01} 0,0001 =$
 $= \log 0,0001 = -4 = P$

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że jeśli liczby a i x są dodatnie oraz $a \neq 1$, to:

a) $\log_{\sqrt{a}} x = \log_a x^2$, b) $\log_{a^2} x = \log_a \sqrt{x}$.

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podany obok wzór.

Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

D Przykład 2

Wykaż, że jeśli $a > 1$ i $b > 1$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Podstawiamy $t = \log_a b$. Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, otrzymujemy:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

Przy podanych założeniach $t > 0$, zatem obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$\begin{aligned} t^2 + 1 &\geq 2t && \text{Zwróć uwagę, że kolejne} \\ t^2 - 2t + 1 &\geq 0 && \text{nierówności są równoważne.} \\ (t - 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbf{R}$.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij podaną własność.

- a) Jeśli $a \in (0; 1)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.
b) Jeśli $a \in (1; \infty)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \leq -2$.

Zadania

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

- a) $\log_{16} 3$ c) $\log_{\sqrt{2}} 11$ e) $\log_4 6 + \log_8 6$
b) $\log_{0,5} 7$ d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

D 2. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

- a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$ c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$
b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log_{\frac{1}{16}}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

3. Wyraż liczbę a za pomocą p , jeśli $p = \log_3 2$.

- a) $a = \log_9 2$ c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$ e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$ g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$
b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$ d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$ f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$ h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a) $L = \log_2 25 + \frac{\log_2 25}{\log_2 4} = \log_2 25 + \frac{\log_2 25}{2} = \log_2 25 + \frac{1}{2} \log_2 25 = \frac{3}{2} \log_2 25 =$
 $= \log_2 25^{\frac{3}{2}} = \log_2 125 = P$

b) $L = \frac{\log_4 4}{\log_{0,1} 4} + \frac{\log_4 16}{\log_{0,01} 4} = \frac{\log_4 4}{-1} + \frac{\log_4 16}{-2} = -\log_4 4 - \frac{1}{2} \log_4 16 = \log_4 4^{-1} + \log_4 16^{-\frac{1}{2}} =$
 $= \log_4 \frac{1}{4} + \log_4 \frac{1}{4} = \log_4 \frac{1}{16} = P$

c) $L = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{\log_{\frac{1}{3}} 3} + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{\log_{\frac{1}{3}} 9} = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{-1} + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{-2} = -\log_{\frac{1}{3}} 4 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 = -\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 =$
 $= \log_{\frac{1}{3}} 4^{-\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{3}} 0,125 = P$

d) $L = \frac{\log_2 9}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{-1} + \frac{\log_2 9}{2} = -\log_2 9 + \frac{1}{2} \log_2 9 = -\frac{1}{2} \log_2 9 =$
 $= \log_2 9^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \frac{1}{3} = P$

Ćwiczenie 3

a) $L = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{2}} =$
 $= 2 \log_a x = \log_a x^2 = P$

b) $L = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{\log_a x}{2} =$
 $= \frac{1}{2} \log_a x = \log_a \sqrt{x} = P$

Ćwiczenie 4

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Ćwiczenie 5

a) Podstawiamy $t = \log_a b$.

Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$,

otrzymujemy: $t + \frac{1}{t} \geq 2$.

Przy podanych założeniach $t > 0$.

Obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$t^2 + 1 \geq 2t$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$(t - 1)^2 \geq 0$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbf{R}$.

b) Podstawiamy $t = \log_a b$.

Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$,

otrzymujemy: $t + \frac{1}{t} \leq -2$.

Przy podanych założeniach $t < 0$.

Obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$t^2 + 1 \geq -2t$$

$$t^2 + 2t + 1 \geq 0$$

$$(t + 1)^2 \geq 0$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbf{R}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\log_2 \sqrt[4]{3}$ b) $\log_2 \frac{1}{7}$

c) $\log_2 121$ d) $\log_2 9^{-\frac{1}{3}}$

e) $\log_2 6^{\frac{5}{6}}$ f) $\log_2 3^{-\frac{11}{6}}$

3. a) $a = \frac{1}{2}p$ b) $a = -\frac{1}{3}p$

c) $a = 4p$ d) $a = \frac{1}{8}p$

e) $a = -2 - p$ f) $a = 3 + 3p$

g) $a = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}p$ h) $a = -\frac{1}{3}p$

4. a) $x = 5$ b) $x = 81$
 c) $x = 9$ d) $x = 10^6 \cdot \sqrt[3]{100}$
5. a) $L = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3}{2} = \frac{a}{2} = P$
 b) $L = \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 3}{\frac{1}{2}} = 2 \log_2 3 = 2a = P$
 c) $L = \frac{1}{\frac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 3}} = \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{1}{8}} = \frac{\log_2 3}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \log_2 3 = -\frac{2}{3}a = P$
 d) $L = \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 (3 \cdot 2)} = \frac{1}{\log_2 3 + \log_2 2} = \frac{1}{a+1} = P$
 e) $L = \log_2 \sqrt{3} + \log_2 9 = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 3^2 = \frac{1}{2} \log_2 3 + 2 \log_2 3 = 2,5 \log_2 3 = 2,5a = P$
 f) $L = \log_2 \sqrt{3} + \log_4 9 = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 3 = 1,5 \log_2 3 = 1,5a = P$
6. a) $\log_{a^2} x = \frac{\log_{\sqrt{a}} x}{\log_{\sqrt{a}} a^2} = \frac{t}{4}$
 b) $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \frac{\log_{a^{\frac{1}{3}}} x}{\log_{a^{\frac{1}{3}}} a} = \frac{\log_{a^{\frac{1}{3}}} x}{\frac{1}{3}} = 3 \log_{a^{\frac{1}{3}}} x = 9t$
7. a) $L = \log_{a^2} x^2 = \frac{\log_a x^2}{\log_a a^2} = \frac{2 \log_a x}{2} = \log_a x = P$
 b) $L = \log_{\sqrt[3]{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[3]{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{3}} = 3 \log_a x = \log_a x^3 = P$
 c) $L = \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = P$
 d) $L = \log_{a^n} x^n = \frac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \frac{n \log_a x}{n} = \log_a x = P$
 e) $L = \log_{\sqrt[n]{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[n]{a}} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{n}} = n \log_a x = \log_a x^n = P$
 f) $L = \log_{a^p} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^p} = \frac{\log_a x}{p} = \frac{1}{p} \log_a x = \log_a x^{\frac{1}{p}} = P$
8. a) $b, c, d \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$
 a) 2 b) -2

4. Oblicz x .

- a) $\log_4 x = \log_{64} 125$ c) $\log_4 x = \log_8 27$
 b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$ d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$

D 5. Wykaż, że jeżeli $\log_2 3 = a$, to:

- a) $\log_4 3 = \frac{a}{2}$, d) $\log_6 2 = \frac{1}{a+1}$,
 b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2a$, e) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 2} = 2,5a$,
 c) $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{8}} = -\frac{1}{3}a$, f) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 4} = 1,5a$.

D 6. Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Wykaż, że jeśli:

- a) $\log_{\sqrt{a}} x = t$, to $\log_{a^2} x = \frac{t}{4}$, b) $\log_{a^3} x = t$, to $\log_{\sqrt[3]{a}} x = 9t$.

D 7. Wykaż, że jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$, to prawdziwy jest podany wzór.

- a) $\log_{a^2} x^2 = \log_a x$ d) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$
 b) $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3$ e) $\log_{\sqrt[n]{a}} x = \log_a x^n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$
 c) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ f) $\log_{a^p} x = \log_a x^{\frac{1}{p}}$, gdzie $p \neq 0$

8. Wiadomo, że $\log_d a = \frac{1}{2}$. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d$ b) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} \cdot \log_b \frac{1}{c} \cdot \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{d}$

D 9. Wykaż, że jeśli $a \in (0; 1)$ i $b \in (1; \infty)$, to:

- a) $\log_a b - \log_a^2 b < 0$, c) $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \leq -2$,
 b) $\log_b^2 a + \log_{\frac{1}{a}} b > 0$, d) $\log_a^2 b + \log_{\sqrt{a}} b \geq -1$.

10. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \log_2 \sqrt{x} + \log_4 x$ c) $f(x) = \log_4 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2$
 b) $f(x) = \log_2 x^4 - \log_{\sqrt{2}} x$ d) $f(x) = \log_8 x^3 - \log_{\sqrt{2}} x^4$

D 11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,465$$

Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

- a) $\log_3 7$ b) $\log_6 3$ c) $\log_{0,5} 9$

9. Niech $t = \log_a b$. Przy podanych założeniach $t < 0$.

- a) $\log_a b - \log_a^2 b = t - t^2 < 0$
 b) Przy podanych założeniach $\log_b^2 a > 0$ oraz $\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{1}{\log_b \frac{1}{a}} = -\frac{1}{\log_b a} > 0$, zatem $\log_b^2 a + \log_{\frac{1}{a}} b > 0$.
 c) $\frac{1}{\log_a b} + \log_a b + 2 = \frac{1}{t} + t + 2 = \frac{t^2 + 2t + 1}{t} = \frac{(t+1)^2}{t} < 0$
 Zatem $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \leq -2$.
 d) $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} = 2 \log_a b$
 $\log_a^2 b + 2 \log_a b + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 \geq 0$
 Zatem $\log_a^2 b + \log_{\sqrt{a}} b \geq -1$.

10. a) $D = (0; \infty)$,
 $f(x) = \log_2 x$
 b) $D = (0; \infty)$,
 $f(x) = 2 \log_2 x$
 c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $f(x) = -\log_2 |x|$
 d) $D = (0; \infty)$,
 $f(x) = -7 \log_2 x$

11. a) 1,771
 b) 0,613
 c) -3,170

6.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

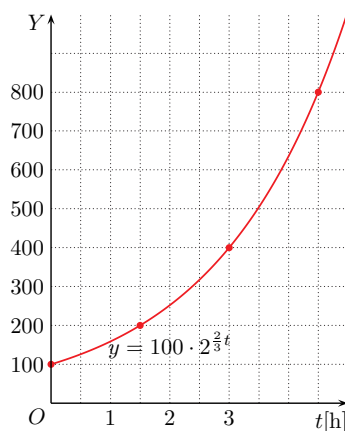
■ Wzrost wykładniczy

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Stwierdzono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu półtorej godziny. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Aby wyznaczyć stałą a , zauważmy, że dla $t = 1,5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1,5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,588$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

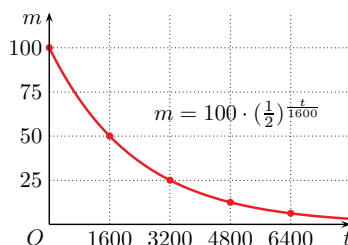
gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

■ Rozpad promieniotwórczy

Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T , po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Przykładowo okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to po upływie t lat masa dana jest za pomocą wzoru:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Uwaga. Czas t powinien być podany w tych samych jednostkach co okres połowicznego rozpadu T (w tym przypadku jest podany w latach).

Ćwiczenie 1

$$10800 = y_0 \cdot a^6 = y_0 \cdot a^2 \cdot a^4 = 1200 \cdot a^4$$

$$a^4 = 9$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$1200 = y_0 \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$\text{Zatem } y_0 = 400.$$

$$\text{Po 10 godzinach: } y = 400 \cdot (\sqrt{3})^{10} = 97200.$$

Uczeń:

- wykorzystuje funkcje wykładniczą i logarytmiczną do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym, dotyczących wzrostu wykładniczego i rozpadu promieniotwórczego.

Multiteka

- Wzrost wykładniczy w przyrodzie
- Datowanie radiowęglowe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.11

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} \text{a) } 12,5 &= 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} &= \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ \frac{t}{1600} &= 3 \\ t &= 4800 \text{ lat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,01 &= 10,24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} &= \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ \frac{t}{1600} &= 10 \\ t &= 16000 \text{ lat} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

$$m = 0,25m_0$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$$

$$\frac{t}{28} = 2$$

$$t = 56 \text{ lat}$$

$$m = 0,125m_0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{t}{28} = 3$$

$$t = 84 \text{ lata}$$

Masa próbki zmniejszy się o 75% po 56 latach, a o 87,5% po 84 latach.

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } 0,5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\frac{t}{5700} = 1$$

$$t = 5700 \text{ lat}$$

$$\text{b) } 0,25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\frac{t}{5700} = 2$$

$$t = 11400 \text{ lat}$$

Komentarz

Zauważmy, że w ćwiczeniu 4. nie są potrzebne powyższe rachunki. Zawartość izotopu zmniejszy się o 50% po 5700 latach, bo jest to okres jego połowicznego rozpadu. Połowa, która zostanie, rozpadnie się na pół po kolejnych 5700 latach, czyli zawartość izotopu zmniejszy się o 75% po 11400 latach.

Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226 o masie:

- a) 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,
b) 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.

Przykład 2

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$,
gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0,66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$0,66 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,66}{\log 0,5} \approx 3417$$

Znalezisko ma około 3417 lat.

Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.

Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1,875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Ćwiczenie 5

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1,875 \cdot 10^{-13}}{1,5 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{t}{5700} = 3$$

$$t = 17100 \text{ lat}$$



Zadania

- Oblicz okres połowicznego rozpadu jodu-131, jeśli wiadomo, że z próbki o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g.
 - Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.
- Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu, jeśli wiadomo, że po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%.
-  Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.
-  Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym stosunek ilości izotopu ^{14}C do ilości izotopu ^{12}C jest równy $1:10^{13}$.
-  Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:
 - egipskiej mumii mającej 3330 lat,
 - kości zwierzęcia mającej 17 000 lat.

Czy wiesz, że...

W niektórych modelach wzrostu liczby ludności zakłada się, że wzrost ten ma charakter wykładniczy. Przyjmijmy, że wzrost liczby ludności opisywany jest wzorem:

$$N = N_0 \cdot e^{kt}$$

(liczba e – patrz str. 291), gdzie N_0 jest początkową liczbą ludności, t – czasem mierzonym w latach, N – liczbą ludności po upływie czasu t oraz k – odpowiednio dobraną stałą.

Wyznamy stałą k dla USA w latach 1900–2000.

Z tabeli odczytujemy: $N_0 = 76$ mln, $N = 275$ mln, $t = 100$ lat. Otrzymujemy więc:

$$275 = 76 \cdot e^{100k}$$

Rok 1900	Rok 2000
76 mln	275 mln

Liczba ludności USA

Stąd $100k = \ln \frac{275}{76}$ (logarytm naturalny – patrz str. 308), zatem $k \approx 0,013$.

Aby obliczyć liczbę ludności USA w wybranym roku XX wieku, możemy skorzystać ze wzoru $N = 76 \cdot e^{0,013t}$, gdzie t oznacza liczbę lat, które upłynęły od 1900 roku. Obliczmy na przykład liczbę ludności w 1950 roku:

$$N_{1950} = 76 \cdot e^{0,013 \cdot 50} \approx 146 \text{ mln}$$

oraz w roku 1990:

$$N_{1990} = 76 \cdot e^{0,013 \cdot 90} \approx 245 \text{ mln}$$

$$4. \frac{m}{m_0} = \frac{10^{-13}}{1,5 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log \frac{1}{15} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log \frac{1}{15} = \frac{t}{5700} \log \frac{1}{2}$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log \frac{1}{15}}{\log \frac{1}{2}} \approx 22269 \text{ [lat]}$$

$$5. a) m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3330}{5700}}, \frac{m}{m_0} \approx 67\%$$

$$b) m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17000}{5700}}, \frac{m}{m_0} \approx 13\%$$

Odpowiedzi do zadań

$$1. a) 1,2 = 4,8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{16}{T} = 2$$

$$T = 8 \text{ dni}$$

$$b) 5 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{T}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{T}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{T} = 3$$

$$T = 2\frac{1}{3} \text{ dnia}$$

$$2. m = 0,25m_0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100000}{T}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{100000}{T} = 2$$

$$T = 50000 \text{ lat}$$

$$3. a) m = 0,8m_0$$

$$0,8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,8 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,8 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,8}{\log 0,5} \approx 1835 \text{ [lat]}$$

$$b) m = 0,2m_0$$

$$0,2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,2 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,2 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,2}{\log 0,5} \approx 13235 \text{ [lat]}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \log_{\frac{5}{6}} 6$
 b) $x = 3$
 c) $x = \log_{\frac{9}{7}} 63$
 d) $x = \log_{\frac{9}{8}} \frac{1}{4}$
 e) $x = \log_{15} \frac{3}{2}$
 f) $x = \log \frac{16}{25}$
2. a) $x = 2$
 b) $x = \log_3 18$
 c) $x = -1$
 d) $x = 0$
 e) $x = -1$
3. a) $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 16 = 0$
 $(2^x - 4)^2 = 0$
 $2^x = 4, x = 2$
 b) $5^{2x} + 5 \cdot 5^x - 6 = 0$
 $(5^x - 1)(5^x + 6) = 0$
 $5^x = 1, x = 0$
 c) $4 \cdot 4^{2x} - 4 \cdot 4^x + 1 = 0$
 $(2 \cdot 4^x - 1)^2 = 0$
 $4^x = \frac{1}{2}$
 $4^x = 4^{-\frac{1}{2}}, x = -\frac{1}{2}$
 d) $2^{2x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^x + 8 = 0$
 $(2^x - 2)(2^x - 4) = 0$
 $2^x = 2$ lub $2^x = 4$
 $x = 1$ lub $x = 2$
 e) $(\frac{1}{2})^{2x} - 3 \cdot (\frac{1}{2})^x + 2 = 0$
 $((\frac{1}{2})^x - 1)((\frac{1}{2})^x - 2) = 0$
 $(\frac{1}{2})^x = 1$ lub $(\frac{1}{2})^x = 2$
 $x = -1$ lub $x = 0$
 f) Obie strony równania
 mnożymy przez 7^x .
 $7^{2x} - 14 = 5 \cdot 7^x$
 $7^{2x} - 5 \cdot 7^x - 14 = 0$
 $(7^x + 2)(7^x - 7) = 0$
 $7^x = 7, x = 1$
4. a) $3^x + 3^{-x} = 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-x}$,
 gdzie $x \neq 0$
 $3 \cdot 3^{-x} = 3^x$
 $3^{1-x} = 3^x$
 $1 - x = x, x = \frac{1}{2}$
 b) Obie strony równania
 mnożymy przez iloczyn
 mianowników.
 $6 - 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x - 2 = 0$,
 gdzie $x \neq 0, x \neq 1$
 $2^x = 4, x = 2$
 c) Obie strony równania
 mnożymy przez mianownik.
 $1 - 4^x = 1 - 2^{2x}$, gdzie $x \neq 0$
 $1 - 2^{2x} = 1 - 2^{2x}$
 $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

6.12. Zagadnienia uzupełniające

Równania wykładnicze

1. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż równanie.

Rozwiąż równanie $7^x = 4^{x+2}$.

$$7^x = 4^2 \cdot 4^x$$

$$7^x = 16 \cdot 4^x$$

$$\frac{7^x}{4^x} = 16$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^x = 16$$

$$x = \log_{\frac{7}{4}} 16$$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład i sprawdź, czy równanie ma rozwiązanie będące liczbą całkowitą.

Rozwiąż równanie $2^{x+3} + 2^x = 54$.

$$2^x \cdot 2^3 + 2^x = 54$$

$$8 \cdot 2^x + 2^x = 54$$

$$9 \cdot 2^x = 54 / :9$$

$$2^x = 6$$

$$x = \log_2 6$$

3. Rozwiąż równanie.

$$a) 4^x - 8 \cdot 2^x + 16 = 0$$

$$c) 4 \cdot 16^x = 4^{x+1} - 1$$

$$e) \frac{1}{4^x} - \frac{3}{2^x} + 2 = 0$$

$$b) 5^{x+1} + 25^x = 6$$

$$d) 4^x + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}$$

$$f) 7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 5$$

4. Rozwiąż równanie.

$$a) \frac{3^{x+3-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$$

$$b) \frac{3}{2^x - 1} + \frac{2}{2 - 2^x} = 0$$

$$c) \frac{1 - 4^x}{1 - 2^x} = 2^x + 1$$

5. Rozwiąż równanie.

$$a) (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^{-x} = 2 \quad b) (3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 2$$

Wskazówka. W podpunkcie a) zauważ, że $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

6. Rozwiąż równanie.

$$a) 8^x - 4^{x+1} + 2^{x+2} = 0$$

$$d) 81^x - 9^x + 9^{1-x} - 9 = 0$$

$$b) 8^x - 4^{x+0.5} - 2^x + 2 = 0$$

$$e) 9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$$

$$c) 16^x - 5 \cdot 8^x + 4^{x+1} = 0$$

$$f) 2 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 = 0$$

5. a) $2(2 - \sqrt{3})^x = 2$

$$(2 - \sqrt{3})^x = 1$$

$$x = 0$$

$$b) \text{Zauważmy, że } 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Niech } t = (3 + 2\sqrt{2})^x > 0.$$

$$\frac{1}{t} + t = 2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$(3 + 2\sqrt{2})^x = 1, x = 0$$

6. a) $x = 1$

$$b) x = 0 \text{ lub } x = 1$$

$$c) x = 0 \text{ lub } x = 2$$

$$d) x = 0 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

$$e) x = 4$$

$$f) x = 4$$

Nierówności wykładnicze

7. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż nierówność.

- a) $5^{x-6} < 3$
b) $0,7^{x+5} \geq 4$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-6} < 0,1$

8. Rozwiąż nierówność.

- a) $3^{x+1} < 2^{x+2}$ b) $3^x \leq 5 \cdot 5^{x+3}$ c) $7^{x-1} \geq 3^{2x}$ d) $0,2^{2x+2} < \frac{1}{10^x}$

9. Rozwiąż nierówność.

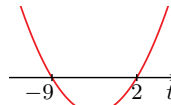
- a) $4^{x-2} \geq 5^{x+1}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ c) $2^{x^2} \cdot 0,5^{2x+0,5} > \frac{1}{\sqrt{8}}$ d) $4^{\frac{2}{x+3}} > 1$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż nierówność $9^x + 7 \cdot 3^x - 18 \leq 0$.

Podstawiamy $t = 3^x$ (zakładamy, że $t > 0$), wówczas $t^2 = 9^x$ i otrzymujemy nierówność:

$$\begin{aligned} t^2 + 7t - 18 &\leq 0 \\ \Delta &= 49 + 4 \cdot 18 = 121, \sqrt{\Delta} = 11 \\ t_1 &= \frac{-7-11}{2} = -9, \quad t_2 = \frac{-7+11}{2} = 2 \\ t &\in \langle -9; 2 \rangle \end{aligned}$$



Uwzględniamy założenie, że $t > 0$, i otrzymujemy $t \in (0; 2]$.

Wracamy do niewiadomej x : $3^x \in (0; 2]$, czyli:

$$\begin{aligned} 0 &< 3^x \leq 2 \\ x &\leq \log_3 2 \end{aligned}$$

Zatem $x \in (-\infty; \log_3 2]$.

Rozwiąż nierówność.

- a) $16^x - 4^x \leq 0$ c) $2^{2x} - 2^x - 2 > 0$ e) $\frac{1}{16^x} - \frac{3}{4^x} - 4 < 0$
b) $9^x - 3^{x-2} > 0$ d) $9^x \geq 10 \cdot 3^x - 9$ f) $4^x + 2^{x+1} \leq 15$

11. Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

- a) $\frac{1}{2^{x-1}} < \frac{1}{2^{x+1}}$ b) $2^x - 6 < 3 - \frac{8}{2^x}$ c) $\frac{1}{4^x} - \frac{10}{2^x} + 16 \leq 0$

11. a) Podstawiamy $t = 2^x > 0$, gdzie $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-1} &< \frac{1}{t+1} \\ \frac{t+1}{(t+1)(t-1)} - \frac{t-1}{(t+1)(t-1)} &< 0 \\ \frac{2}{(t+1)(t-1)} &< 0 \\ t &\in (-1; 1) \text{ oraz } t > 0, \\ \text{zatem } t &\in (0; 1) \\ 0 &< 2^x < 1 \end{aligned}$$

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest -1 .

b) Podstawiamy $t = 2^x > 0$.

$$\begin{aligned} t - 6 &< 3 - \frac{8}{t} \\ t^2 - 9t + 8 &< 0 \\ t &\in (1; 8) \\ 1 &< 2^x < 8 \end{aligned}$$

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest 2 .

c) Podstawiamy $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$.

$$\begin{aligned} t^2 - 10 \cdot t + 16 &\leq 0 \\ t &\in \langle 2; 8 \rangle \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ -1 &\geq x \text{ lub } x \geq -3 \end{aligned}$$

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest -1 .

7. a) $5^{x-6} < 5^{\log_5 3}$

$$x - 6 < \log_5 3$$

$$x < \log_5 3 + 6$$

b) $0,7^{x+5} \geq 0,7^{\log_{0,7} 4}$

$$x + 5 \leq \log_{0,7} 4$$

$$x \leq \log_{0,7} 4 - 5$$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-6} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0,1}$

$$3x - 6 > \log_{\frac{1}{2}} 0,1$$

$$x > 2 - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 10$$

8. a) $3 \cdot 3^x < 4 \cdot 2^x$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}}$$

$$x < \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$$

b) $3^x \leq 625 \cdot 5^x$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} 625}$$

$$x \geq \log_{\frac{3}{5}} 625$$

c) $\frac{1}{7} \cdot 7^x \geq 9^x$

$$\left(\frac{7}{9}\right)^x \geq 7$$

$$x \leq \log_{\frac{7}{9}} 7$$

d) $0,04 \cdot 0,04^x < 0,1^x$

$$(0,4)^x < 25$$

$$x > \log_{0,4} 25$$

9. a) $\frac{1}{16} \cdot 4^x \geq 5 \cdot 5^x$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq 80$$

$$x \leq \log_{\frac{4}{5}} 80$$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^x < 3^{-2}$

$$x < -2 \log_{\frac{3}{2}} 3$$

c) $2^{x^2-2x-0,5} > 2^{-1,5}$

$$x^2 - 2x - 0,5 > -1,5$$

$$(x-1)^2 > 0$$

$$x \neq 1$$

d) $\frac{2}{x+3} > 0$

$$x > -3$$

10. a) $x \in (-\infty; 0)$

$$b) x \in (-2; \infty)$$

$$c) x \in (1; \infty)$$

$$d) x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$$

$$e) x \in (-1; \infty)$$

$$f) x \in (-\infty; \log_2 3)$$

12. a) $x < -\sqrt{7}$ lub $x > \sqrt{7}$

$$x^2 - 7 = 9$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 4$$

b) $x < 0$ lub $x > 1$

$$x^2 - x = 2$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 2$$

c) $0 < x < 9$

$$9x - x^2 = 8$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 8$$

d) $x \neq 1$

$$|x^2 - 1| = 8$$

$$x^2 - 1 = 8 \text{ lub } x^2 - 1 = -8$$

$$x^2 = 9 \text{ lub}$$

$$x^2 = -7 \text{ (sprzeczność)}$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

13. a) $\log_2 x = \frac{1}{2}$

$$x = \sqrt{2}$$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

$$x = \frac{1}{8}$$

c) $\log_2(\log_4 |x|) = 1$

$$\log_4 |x| = 2$$

$$|x| = 16$$

$$x = -16 \text{ lub } x = 16$$

d) $\log_{\sqrt{2}}(\log_3 x^2) = 2$

$$\log_3 x^2 = 2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

14. a) $x = -2$ lub $x = 2$

b) $x = 27$

c) $x = -6$ lub $x = 6$

d) $x = 1$

15. a) $x = 4$ b) $x = \frac{3}{2}$

c) $x = \frac{2}{5}$ d) $x = 1$

e) $x = 3$ f) $x = 6$

17. a) $0 < x < 1$

$$1 - x = x, \quad x = \frac{1}{2}$$

b) $x > 0, x \neq 1$

$$|x - 1| = 1$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2, \text{ zatem } x = 2$$

c) $x > 1\frac{2}{3}, x \neq 2$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = 3, \text{ zatem } x = 3$$

18. a) $x = \frac{1}{27}$ lub $x = 1$

b) $x = 1$ lub $x = 16$

c) $x = \frac{1}{10}$ lub $x = 10$

d) $x = 16$

e) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 4$

f) $x = \frac{1}{4}$ lub $x = 2$

g) $x = \frac{1}{100}$ lub $x = 10000$

h) $x = 1$ lub $x = 100$

i) $x = 2$

j) $x = 2$

■ Równania logarytmiczne

12. Przeczytaj podany w ramce przykład. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3(x^2 - 7) = 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) = -1$

c) $\log_2(9x - x^2) = 3$

d) $\log_2|x^2 - 1| = 3$

Rozwiąż równanie $\log_3(2x - 4) = 2$.

Zakładamy, że $2x - 4 > 0$, czyli $x > 2$.

$$\log_3(2x - 4) = 2$$

$$2x - 4 = 3^2$$

Stąd $2x = 13$, czyli $x = 6,5$.

13. Rozwiąż równanie.

a) $\log_4(\log_2 x) = -\frac{1}{2}$

b) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) = 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(\log_4 |x|)) = 0$

d) $\log_4(\log_{\sqrt{2}}(\log_3 x^2)) = \frac{1}{2}$

14. Rozwiąż równanie.

a) $\log_{0,3}(\log_5(x^2 + 1)) = 0$

b) $\log_3(\log_3(\log_3 x)) = 0$

c) $\log_3(\log_3(\log_3(x^2 - 9))) = 0$

d) $\log(1 + \log(1 + \log x)) = 0$

15. Rozwiąż równanie. Podaj wykorzystane własności logarytmu.

a) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

d) $\log_2 x + \log_2(x + 3) = 2$

b) $\log(2x + 1) + \log(x + 1) = 1$

e) $\log_3 x = 1 - \log_3(x - 2)$

c) $\log_3(4 - x) - \log_3 x = 2$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(4x + 8) - \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) = -3$

16. Rozwiąż równanie.

a) $\log_4 x + \log_2 x = 9$

b) $\log x - \log_{0,1}(x + 3) = 1$

c) $\log_2 x - 2\log_4(x - 1) = 2$

d) $\log(\frac{1}{2}x + x^2) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}(x - x^2)$

17. Rozwiąż równanie.

a) $\log_x(1 - x) = 1$

b) $\log_x |x - 1| = 0$

c) $\log_{(x-1)}(3x - 5) = 2$

18. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3^2 x + 3\log_3 x = 0$

b) $\log_2^2 x - \log_2 x^4 = 0$

c) $\log x - \frac{1}{\log x} = 0$

d) $\log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x} = 8$

e) $2\log_4 x = 1 + \frac{1}{\log_4 x}$

f) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 = 0$

g) $\log^2 x - \log x^2 = 8$

h) $\frac{1}{\log x - 1} + \frac{3}{\log x + 1} = 2$

i) $\frac{\log(x+1)}{\log(2x-1)} = 1$

j) $\frac{\log(4x+1)}{\log(x+1)} = 2$

Wskazówka. W podpunkcie a) zastosuj podstawienie $t = \log_3 x$.

16. a) $\log_4 x + \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = 9, x > 0$

$$3\log_4 x = 9, \quad x = 64$$

b) $\log x - \frac{\log(x+3)}{\log 0,1} = 1,$

$$x > 0$$

$$\log x(x + 3) = 1$$

$$x(x + 3) = 10$$

$$x_1 = -5 < 0, \quad x_2 = 2,$$

$$x = 2$$

c) $\frac{\log_4 x}{\log_4 2} - 2\log_4(x - 1) = 2, x > 1$

$$\log_4 \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\frac{x}{x-1} = 4, \quad x = \frac{4}{3}$$

d) $\log(\frac{1}{2}x + x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(x-x^2)}{\log \sqrt{10}}, 0 < x < 1$

$$\frac{1}{2}x + x^2 = x - x^2$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{4},$$

$$x = \frac{1}{4}$$

■ Nierówności logarytmiczne

19. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_4(x-2) \leq 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) > 0$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$

d) $\log_7(x^2+3) \leq \log_7 4x$

20. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq -2$

d) $\log_{\frac{1}{6}}(x+3) + \log_{\frac{1}{6}}(x-2) < -1$

b) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

e) $2\log_4 x - \log_4(x+2) > 1$

c) $\log_6 x + \log_6(x-1) \leq 1$

f) $\log_4 x^2 - \log_4(6-x^2) \geq \frac{1}{2}$

21. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_2(\log_3 x) < 0$

b) $\log_5(\log_{0,5} x) \geq 0$

c) $\log_4(\log_2(x+2)) < 1$

22. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż nierówność $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 \geq 0$.

Zakładamy, że $x > 0$. Podstawiamy $t = \log_2 x$ i otrzymujemy:

$$t^2 - t - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1, t_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty)$$

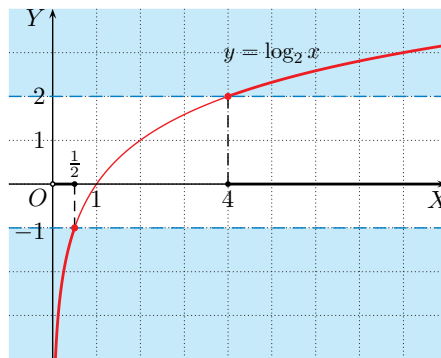
Wracamy do niewiadomej x :

$$\log_2 x \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty)$$

$$\log_2 x \leq -1 \text{ lub } \log_2 x \geq 2$$

$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ lub } x \geq 4$$

$$\text{Zatem: } x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \langle 4; \infty).$$



Rozwiąż nierówność.

a) $\log_3^2 x + \log_3 x < 2$

d) $2\log_4^2 x \geq 1 - \log_4 x$

b) $\log_{0,5}^2 x - 5\log_{0,5} x + 4 \leq 0$

e) $\log_2^3 x - 4\log_2 x \geq 0$

c) $\log_{0,1}^2 x - 5\log_{0,1} x - 6 \leq 0$

f) $\log^3 2x - \log^2 2x \geq 0$

23. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_x 4 < 1$

b) $\log_x 4 \geq 2$

*c) $\log_{x+1} 2x \geq 1$

21. a) $0 < \log_3 x < 1$

$$\log_3 1 < \log_3 x < \log_3 3$$

$$x \in (1; 3)$$

b) $\log_{0,5} x \geq 1, x > 0$

$$x \leq 0,5, x > 0$$

$$x \in (0; \frac{1}{2}]$$

c) $0 < \log_2(x+2) < 4, x+2 > 0$

$$1 < x+2 < 16$$

$$x \in (-1; 14)$$

22. a) $x \in (\frac{1}{9}; 3)$

b) $x \in (\frac{1}{16}; \frac{1}{2})$

c) $x \in \langle 10^{-6}; 10 \rangle$

d) $x \in (0; \frac{1}{4}) \cup \langle 2; \infty)$

e) $x \in (\frac{1}{4}; 1) \cup \langle 4; \infty)$

f) $x \in \{\frac{1}{2}\} \cup \langle 5; \infty)$

23. a) $x \in (0; 1) \cup \langle 4; \infty)$

b) $x \in (1; 2)$

c) $x \in \langle 1; \infty)$

19. a) $x \in (2; 66)$

b) $x \in (-2; -\frac{3}{2})$

c) $x \in (\frac{3}{2}; 7)$

d) $x \in \langle 1; 3 \rangle$

20. a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x-1} \leq \log_{\frac{1}{2}} 4,$
 $x > 1$

$$\frac{x}{x-1} \geq 4$$

$$x \geq 4x - 4$$

$$1 < x \leq \frac{4}{3}$$

$$x \in (1; \frac{4}{3})$$

b) $\log_2(x-1)(x+1) >$

$$> \log_2 8, x > 1$$

$$x^2 - 1 > 8$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$$

$$\text{i } x > 1$$

$$x \in (3; \infty)$$

c) $\log_6 x(x-1) \leq \log_6 6,$

$$x > 1$$

$$x(x-1) \leq 6$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$(x+2)(x-3) \leq 0$$

$$x \in \langle -2; 3 \rangle \text{ i } x > 1$$

$$x \in (1; 3)$$

d) $\log_{\frac{1}{6}}(x+3)(x-2) <$

$$< \log_{\frac{1}{6}} 6, x > 2$$

$$(x+3)(x-2) > 6$$

$$x^2 + x - 12 > 0$$

$$(x+4)(x-3) > 0$$

$$x \in (-\infty; -4) \cup (3; \infty)$$

$$\text{i } x > 2$$

$$x \in (3; \infty)$$

e) $\log_4 \frac{x^2}{x+2} > \log_4 4, x > 0$

$$\frac{x^2}{x+2} > 4$$

$$x^2 - 4x - 8 > 0$$

$$\Delta = 48, \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$$

$$x \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{3}) \cup$$

$$\cup (2 + \sqrt{3}; \infty) \text{ i } x > 0$$

$$x \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$$

f) $\log_4 \frac{x^2}{6-x^2} \geq \log_4 2,$

$$x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$$

$$\frac{x^2}{6-x^2} \geq 2$$

$$3x^2 - 12 \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$$

$$\text{i } x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$$

$$x \in (-\sqrt{6}; -2) \cup \langle 2; \sqrt{6})$$

Odpowiedzi do zadań

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{27}$ d) $\frac{1}{80}$
- a) 25 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3
- a) 1 b) 2 c) 20 d) $\frac{4}{121}$
- a) $3^{-\frac{1}{6}}$ b) $3^{\frac{3}{8}}$ c) $5^{\frac{7}{8}}$ d) $2^{\frac{53}{24}}$
- a) $5^{\sqrt{5}}$, $25\sqrt{5} = 5^{2,5}$,
 $125^{\frac{4}{5}} = 5^{2,4}$, $25^{1,1} = 5^{2,2}$
 $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} <$
 $< 25\sqrt{5} < 5^{2\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{8}} = 2^{-\frac{3}{2}}$,
 $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{4}}$, $0,5 = 2^{-1}$,
 $16^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$, $4^{-0,5\sqrt{3}} = 2^{-\sqrt{3}}$
 $4^{-0,5\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 <$
 $< (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
c) $9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$,
 $\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}}$, $(\sqrt[3]{3})^{-2} = 3^{-\frac{2}{3}}$
 $3^{-0,5\pi} < (\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} <$
 $< 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
d) $(4,5)^{-2} = \frac{8}{162}$,
 $\sqrt{0,4}^{\sqrt{12}} = (\frac{2}{5})^{\sqrt{3}}$,
 $(2,5)^{-2,4} = (\frac{2}{5})^{2,4}$,
 $0,064 = \frac{8}{125} = (\frac{2}{5})^3$
 $4,5^{-2} < 0,064 < 2,5^{-2,4} <$
 $< \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$
- a) $10^{1,1} = 10 \cdot 10^{0,1} \approx$
 $\approx 12,5893$
b) $10^{-0,9} = 10^{0,1} \cdot 10^{-1} \approx$
 $\approx 0,1259$
c) $10^{-1,9} = 10^{0,1} \cdot 10^{-2} \approx$
 $\approx 0,0126$
d) $10^{-2,9} = 10^{0,1} \cdot 10^{-3} \approx$
 $\approx 0,0013$
- a) $f(x) = 4^x$
b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz.
a) $\frac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$ b) $\frac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2}$ c) $\frac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}}$ d) $\frac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}}$
- Oblicz.
a) $25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ b) $64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}}$ c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}}$ d) $0,001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,09^{\frac{1}{2}}$
- Oblicz.
a) $5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$ c) $\sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ d) $\frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{44}} \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^3$
- Zapisz liczbę w postaci potęgi a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.
a) $3^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{27}}{9}$ b) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ d) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{8}}$
- Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.
a) $5^{\sqrt{5}}$; $25\sqrt{5}$; $125^{\frac{4}{5}}$; $25^{1,1}$; $5^{2\sqrt{2}}$ c) $9^{\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt[4]{27}$; $(\sqrt[3]{3})^{-2}$; $3^{-0,5\pi}$
b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$; $0,5$; $16^{-\frac{1}{3}}$; $4^{-0,5\sqrt{3}}$ d) $4,5^{-2}$; $\sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$; $2,5^{-2,4}$; $0,064$
- Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia: $\sqrt[10]{10} \approx 1,258925$.
a) $10^{1,1}$ b) $10^{-0,9}$ c) $10^{-1,9}$ d) $10^{-2,9}$
- Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, o którym wiadomo, że przechodzi przez punkt P .
a) $P(\frac{5}{2}, 32)$ b) $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ c) $P(-6, 729)$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe (jeśli istnieją).
a) $f(x) = 2^x - 4$ c) $f(x) = 2 + 2^{-x}$ e) $f(x) = 1 - 3^{-x}$
b) $f(x) = 3^{x-1} + 2$ d) $f(x) = 4 - 2^x$ f) $f(x) = 4 \cdot 2^{2x} - 4$
- Oblicz.
a) $\log_3 27$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$ j) $27^{\log_3 2}$
b) $\log_{27} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$ k) $\sqrt[4]{27}^{\log_3 2}$
c) $\log_3 \frac{1}{243}$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ i) $\log_{\sqrt{27}} 3$ l) $3^{1-\log_3 2}$
- a) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
b) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
c) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
d) $f(D) = (-\infty; 4)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
e) $f(D) = (-\infty; 1)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$
f) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$
- a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -5
d) $-\frac{1}{3}$ e) -3 f) $\frac{1}{6}$
g) 6 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{2}{3}$
j) 8 k) $2\sqrt{2}$ l) $\frac{3}{2}$

10. Oblicz $\sqrt{ab}$.

a) $a = \log_3 9, b = \log_2 256$

b) $\log_2 a = 5, \log_4 b = \frac{1}{2}$

11. Oblicz x .

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$

d) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$

12. Oblicz x .

a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$

c) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$

b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$

d) $\log x = \log 80 - 3 \log 2$

Zestaw II

1. Oblicz.

a) $49^{0,7} \cdot 7^{-1,4} \cdot 27^{\frac{4}{3}}$

b) $\sqrt[4]{32} \cdot 10^{0,75} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$

c) $6^{-0,5} \cdot 2^{2,5} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$

2. Oblicz.

a) $18^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$

b) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$

c) $(3^{-0,75})^{-4} : (9^{-1,5})^{\frac{1}{3}}$

3. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\left(\frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) : \left(\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{4}{3}}\right)$

c) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right)^{-2} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

b) $\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$

d) $(x^{1,5} \cdot y^{-0,25}) : (x^{0,5} \cdot y^{-1,25})$

4. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = (2^{-3})^{-2}, y = (2\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}$

b) $x = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{-0,5}, y = 9^{-0,75} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$

5. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej wzór i zbiór wartości, jeżeli:

a) $g(x) = -f(-x)$,

b) $g(x) = f(x-1) - 1$.

6. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = \log_2(x+1), g(x) = 1 + \log_{0,5} x$

b) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+3), g(x) = -1 + \log_3(x-3)$

7. Naszkicuj wykres funkcji f . Określ przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x) = 3^{|x-3|} + 1$

c) $f(x) = 2 - 2^{|x|}$

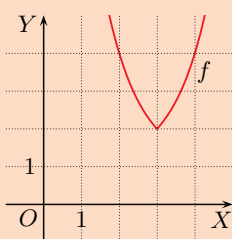
e) $f(x) = |\log_2(x-1)|$

b) $f(x) = |3^{|x|} - 3|$

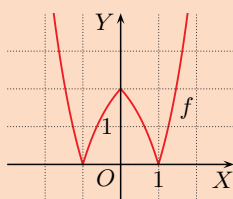
d) $f(x) = \log_2|x-1|$

f) $f(x) = |\log_2|x-1||$

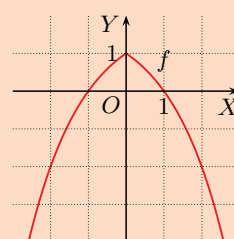
7. a) maleje w $(-\infty; 3)$,
rośnie w $\langle 3; \infty)$



b) maleje w $(-\infty; -1)$
i w $\langle 0; 1)$, rośnie
w $\langle -1; 0)$ i w $\langle 1; \infty)$



c) maleje w $\langle 0; \infty)$,
rośnie w $(-\infty; 0)$



d) maleje w $(-\infty; 1)$,
rośnie w $\langle 1; \infty)$

e) maleje w $\langle 1; 2)$,
rośnie w $\langle 2; \infty)$

f) rośnie w $\langle 0; 1)$ i w $\langle 2; \infty)$
maleje w $(-\infty; 0)$ i w $\langle 1; 2)$,

10. a) 4 b) 8

11. a) $x = 16$ b) $x = 8$

c) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x = -64$ lub $x = 64$

12. a) $x = 36$ b) $x = 9$

c) $x = 100$ d) $x = 10$

Zestaw II

1. a) 81 b) 20 c) 12

2. a) 15 b) -2 c) 81

3. a) $x > 0, y \neq 0, \frac{3}{xy}$

b) $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

c) $a \neq 0, b > 0, \frac{1}{ab}$

d) $x > 0, y > 0, xy$

4. a) $x = 2^6 = 64$,

$y = (4 \cdot 5 - 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

$x > y$

b) $x = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-0,5} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$,

$y = 9^{-\frac{3}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{6}{4}} = 9$

$y > x$

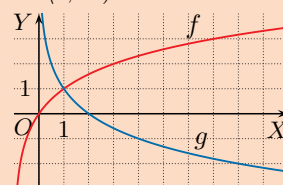
5. a) $g(x) = -2^x$,

$g(D) = (-\infty; 0)$

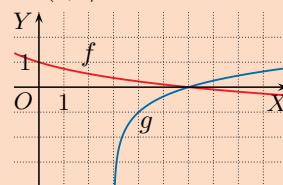
b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$,

$g(D) = (-1; \infty)$

6. a) $x \in \langle 1; \infty)$



b) $x \in (3; 6)$





8. a) $D = (-\infty; 1)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$
 b) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla
 $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$
 c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2$, $x = -1$
 d) $D = \mathbf{R}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $x = 0$
 e) $D = (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$,
 $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$
 f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -\sqrt{11}$,
 $x = \sqrt{11}$
9. a) $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$
 b) $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$
 c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$
10. a) $x \in (-\infty; -3)$
 b) $x \in (-\infty; 2)$
 c) $x \in (4; \infty)$
 d) $x \in (0; \frac{1}{2})$
 e) $x \in (-\infty; -1)$
 f) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
11. a) $2m > 1$
 $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$
 b) $0 < \log_2 m < 1$
 $\log_2 1 < \log_2 m < \log_2 2$
 $m \in (1; 2)$
 c) $\log_3 m > -1$
 $\log_3 m > \log_3 \frac{1}{3}$
 $m \in (\frac{1}{3}; \infty)$
12. a) $m \in (4; \infty)$
 b) $m \in (2; \infty)$
 c) nie ma takiego m
13. a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = -2$
14. a) $x \leq 2$ b) $x \geq 4$
 c) $x \leq -\frac{1}{4}$ d) $x > \frac{3}{2}$
 e) $x > -\frac{3}{2}$ f) $x < -1$
15. a) $f(-1) = 2$
 b) $f(8) = 1$
16. a) $x = 4$ b) $x = 1024$
 c) $x = 16$
17. a) $\log_3 2$ b) $\log_3 5$
 c) $\log_3 16$ d) $\log_3 \frac{1}{5}$

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \log_{0,5}(1 - x^3)$ d) $f(x) = \log_3(x^2 + x + 1)$
 b) $f(x) = \log_{0,1}(x^2 - 1)$ e) $f(x) = \log_2(x^2 - 5x + 4)$
 c) $f(x) = \log_{0,1}|2x + 3|$ f) $f(x) = -1 + \log|x^2 - 1|$

9. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \frac{\log x}{|\log x|}$ b) $f(x) = \frac{|\log_{0,5} x|}{\log_{0,5} x}$ c) $f(x) = \frac{|\log|x||}{\log|x|}$

10. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne?

- a) $f(x) = 2^{-x} - 8$ c) $f(x) = \log(2x - 7)$ e) $f(x) = \log(-x)$
 b) $f(x) = (\frac{3}{4})^{x-1} - \frac{3}{4}$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}$

11. Dla jakich wartości parametru m równanie ma pierwiastek dodatni?

- a) $6^x = 2m$ b) $(\frac{1}{2})^x = \log_2 m$ c) $x - 1 = \log_3 m$

12. Naskicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

- a) $f(x) = 2^{|x+2|}$ b) $f(x) = \log_2|x - 4|$ c) $f(x) = |\log_2(x-2) - 1|$

13. Rozwiąż równanie.

- a) $4^x + \frac{4^x}{5} = 19\frac{1}{5}$ b) $5^{x+2} - 5^{x+1} = 50^2$ c) $3^{-x} + (\frac{1}{3})^{x-2} = 90$

14. Rozwiąż nierówność.

- a) $6^{x+1} \leq 216$ c) $5^{-2x} \geq \sqrt{5}$ e) $\sqrt{3} \cdot 3^{-x} < 9$
 b) $(\frac{1}{2})^{x-1} \leq 0,125$ d) $0,04^x < 0,008$ f) $0,4^{3x+2} > 2,5$

15. Wyznacz największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = \log_3(x + 4) + \log_3(2 - x)$, $\langle -3; 1 \rangle$
 b) $f(x) = |\log_{\frac{1}{4}}(x - 6) + \log_{\frac{1}{4}}(10 - x)|$, $\langle 7; 9 \rangle$

16. Znajdź liczbę x spełniającą podany warunek.

- a) $\log(\log_4 x) = 0$ b) $\log_5(\log_4 x) = 1$ c) $\log_4(\log_4 x) = \frac{1}{2}$

17. Przedstaw liczbę w postaci logarytmu o podstawie 3.

- a) $\log_{27} 8$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 0,2$ c) $\log_{3\sqrt{3}} 64$ d) $\log_{\frac{1}{9}} 25$

18. Oblicz.

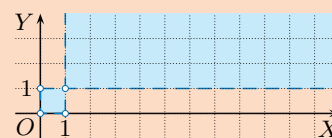
- a) $3^{\log_{3\sqrt{3}} 27}$ b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_{4\sqrt{2}} 32}$ *c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$

*19. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór A .

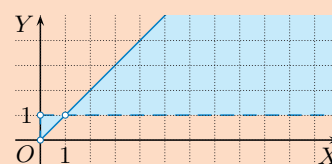
- a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \log_x y > 0\}$ b) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \log_y x \geq 1\}$

18. a) $3^{\log_{3\sqrt{3}} 27} = 3^2 = 9$
 b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_{4\sqrt{2}} 32} = (\sqrt[3]{4})^{\log_{\sqrt{32}} 32} =$
 $= (\sqrt[3]{4})^2 = 2\sqrt[3]{2}$
 c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5} =$
 $= 7^{\log_7 (5^{\log_3 7})} - 7^{\log_3 5} =$
 $= 7^{\log_3 7 \cdot \log_3 5} - 7^{\log_3 5} =$
 $= 7^{\log_3 5} - 7^{\log_3 5} = 0$

19. a)



b)





W takich zadaniach, jak przedstawione poniżej przykłady, rozwiązywanie rozpoczynamy od wyznaczenia dziedziny wskazanej funkcji.

Przykład 1

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2 - 2x + 8)$. Dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana?

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x , dla których spełniony jest warunek:

$$-x^2 - 2x + 8 > 0$$

Rozwiązujemy tę nierówność i otrzymujemy: $x \in (-4; 2)$ – sprawdź.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-4; 2)$.

Zauważmy, że funkcja logarytmiczna o podstawie $a \in (0; 1)$ jest funkcją malejącą. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla największej możliwej wartości wyrażenia $-x^2 - 2x + 8$ dla $x \in (-4; 2)$.

Wyznaczamy największą wartość trójkątnu kwadratowego:

$$y = -x^2 - 2x + 8$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \in (-4; 2)$$

$$y_w = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 9$$

Zatem najmniejsza wartość funkcji f jest równa: $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

Odpowiedź: Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą -2 dla $x = -1$.

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_{2x-3} \frac{1}{5}(1-x)(x-7)$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x , dla których spełnione są warunki:

$$2x - 3 > 0 \text{ i } 2x - 3 \neq 1 \quad (\text{I})$$

$$\frac{1}{5}(1-x)(x-7) > 0 \quad (\text{II})$$

Warunek (I) spełniony jest dla $x \in (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; \infty)$.

Warunek (II) spełniony jest dla $x \in (1; 7)$ – sprawdź.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; 7)$.

Liczba x jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $\frac{1}{5}(1-x)(x-7) = 1$.

$$\frac{1}{5}(1-x)(x-7) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 7 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

Rozwiązaniem ostatniego równania są liczby 2 i 6, ale $2 \notin D_f$.

Zatem jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 6.

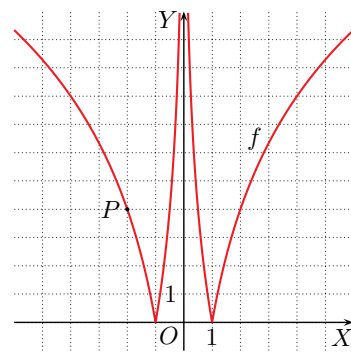
Odpowiedź: 6



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- $x = \left(5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 5^{-\frac{7}{6}}$
 $y = 5^{\frac{1}{6}} \cdot 5 = 5^{\frac{7}{6}}$
 $x \cdot y = 5^0 = 1$
- $x = -\left(3^{\frac{4}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} = -3$
 $f(-3) = 10^6$
- Funkcja f jest malejąca oraz $x_1 < x_2$.
 A. $f(x_1) > f(x_2)$
 B. $x_1^{-1} > x_2^{-1}$, więc $f(x_1^{-1}) < f(x_2^{-1})$
 C. $-x_1 > -x_2$, więc $f(-x_1) < f(-x_2)$
 D. $x_1^{-1} < -x_2^{-1}$, więc $f(-x_1^{-1}) > f(-x_2^{-1})$
- $\log_3 31,25 = \log_3 \frac{125}{4} = \log_3 5^3 - \log_3 2^2 = 3b - 2a$
- $\log_n(\sqrt{3}+1) - \log_n(\sqrt{3}-1) = \log_n \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \log_n(2+\sqrt{3}) > \log_n n$
 $n > 1$ i $2 + \sqrt{3} > n$
- A. $D = (-\infty; -1)$
 B. $D = (1; \infty)$
 C. $D = (-1; 1)$
 D. $D = (-1; 1)$
- $f(-2) = |\log_a 4| = 4$
 $f\left(\frac{1}{16}\right) = \left|\log_a \left(\frac{1}{16}\right)\right| = |\log_a 4^{-4}| = 4|\log_a 4| = 16$

- Iloczyn liczb $x = (\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{5})^{-1}$ i $y = \sqrt[6]{5} \cdot 625^{\frac{1}{4}}$ jest równy:
 A. $\frac{1}{5}$, B. 1, C. $\sqrt{5}$, D. 5.
- Wartość funkcji $f(x) = 10^{-2x}$ dla $x = -(\sqrt[6]{81})^{\frac{3}{2}}$ należy do przedziału:
 A. $(0; 1)$, B. $(1; 100)$, C. $(100; 1000)$, D. $(10\,000; \infty)$.
- Jeśli $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{3}$ oraz $f(x) = 3^{-x}$, to:
 A. $f(x_1) < f(x_2)$, B. $f(x_1^{-1}) > f(x_2^{-1})$, C. $f(-x_1) < f(-x_2)$, D. $f(-x_1^{-1}) < f(-x_2^{-1})$.
- Jeśli $a = \log_3 2$ i $b = \log_3 5$, to $\log_3 31,25$ jest równy:
 A. $3a - 2b$, B. $2a - 3b$, C. $3b - 2a$, D. $2b - 3a$.
- Dla jakiego n prawdziwa jest nierówność $\log_n(\sqrt{3}+1) - \log_n(\sqrt{3}-1) > 1$?
 A. $n = 6$, B. $n = 5$, C. $n = 4$, D. $n = 3$
- Przedział $(1; \infty)$ jest dziedziną funkcji:
 A. $f(x) = \log(x^2 - 1) - \log(1 - x)$,
 B. $f(x) = \log(x^2 - 1) - \log(1 + x)$,
 C. $f(x) = \log(1 - x^2) - \log(1 - x)$,
 D. $f(x) = \log(1 - x^2) - \log(1 + x)$.
- Do wykresu funkcji $f(x) = |\log_a x^2|$ należy punkt $P(-2, 4)$ (rysunek obok). Do wykresu funkcji f należy również punkt:
 A. $(\frac{1}{16}, 16)$, B. $(\frac{1}{16}, 8)$, C. $(\frac{1}{8}, 16)$, D. $(\frac{1}{8}, 8)$.



- Jeśli m_1 i m_2 są różnymi wartościami parametru m , dla których równanie $-2^{|x|} + 4 = m^2$ ma jedno rozwiązanie, to suma $m_1^2 + m_2^2$ jest równa:
 A. 10, B. 8, C. 6, D. 4.
- Liczba $\frac{1}{\log_4 3} + \frac{2}{\log_{2\sqrt{2}} 9}$ jest równa:
 A. $2,5 \cdot \log_3 2$, B. $3,5 \cdot \log_3 2$, C. $4,5 \cdot \log_3 2$, D. $6,5 \cdot \log_3 2$.

- Równanie $2^{|x|} = 4 - m^2$ ma jedno rozwiązanie, gdy jest postaci:
 $2^{|x|} = 2^0 = 1$
 czyli gdy $m^2 = 3$, czyli $m_1 = -\sqrt{3}$, $m_2 = \sqrt{3}$. Wówczas $m_1^2 + m_2^2 = 6$.
- $\frac{1}{\log_4 3} + \frac{2}{\log_{2\sqrt{2}} 9} = \log_3 4 + \frac{2}{2\log_{\sqrt{2}} 3} = 2\log_3 2 + \log_3 2^{\frac{3}{2}} = 3,5\log_3 2$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Ile naturalnych dzielników ma liczba n spełniająca równanie $8 = (\sqrt[4]{2})^n$?

Zadanie 3 (2 pkt)

Punkt $P(8, \frac{3}{2})$ należy do wykresu funkcji $y = \log_a x$. Wyznacz a .

D Zadanie 4 (2 pkt)

Udowodnij równość $4 \log_9 3 + 9 \log_3 9 = 5 \log_3 81$.

D Zadanie 5 (2 pkt)

Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

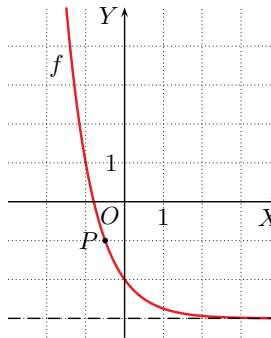
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Oblicz wartość tej funkcji dla $x = -5$, jeśli wiadomo, że punkt $P(-\frac{1}{2}, -1)$ należy do jej wykresu.

Zadanie 7 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P , a wykres funkcji g w punkcie Q . Ile jest równa długość odcinka PQ ?



Zadanie 8 (4 pkt)

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5}$ i $b = \log_3 3^{15} - \log_3 27$.

Zadanie 9 (5 pkt)

Liczba p jest rozwiązaniem równania $x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, a liczba q – rozwiązaniem równania $4^6 x - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$. Oblicz sumę odwrotności kwadratów tych liczb.

Zadanie 10 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

9. $p \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$$3p = 1$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$$4^6 q - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$$

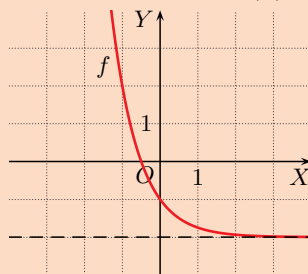
$$2^{12} q = 2^{10} + 2^{10}$$

$$2^{12} q = 2^{11}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 9 + 4 = 13$$

10. $a = \frac{1}{4}, b = -2, f(x) = (\frac{1}{4})^x - 2$



1. $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}} =$
 $= 2^{3+2\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} = 2^3 = 8$
 Zatem szukaną liczbą jest 10.

2. $8 = 2^3 = 2^{\frac{n}{4}}$

$$\frac{n}{4} = 3$$

$$n = 12$$

Liczba 12 ma 6 naturalnych dzielników.

3. $\log_a 8 = \frac{3}{2}$, więc $a^{\frac{3}{2}} = 8$
 $a = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 4$

4. $L = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 2 = 20$
 $P = 5 \cdot 4 = 20 = L$

5. $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3} =$
 $= \log_2 \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \log_2 4 = 2 \in \mathbb{Q}$

6. $-1 = a^{-\frac{1}{2}} - 3$

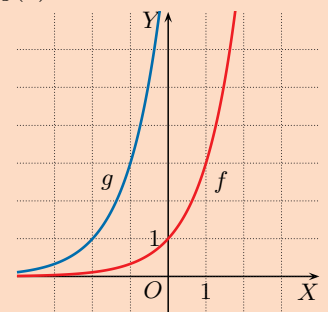
$$\sqrt{\frac{1}{a}} = 2$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = (\frac{1}{4})^x - 3$$

$$f(-5) = (\frac{1}{4})^{-5} - 3 = 1021$$

7. $f(x) = 3^x$,
 $g(x) = 9 \cdot 3^x = 3^{x+2}$



Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[-2, 0]$. Zatem $|PQ| = 2$.

8. $a = \log_{\frac{1}{3}} 2^{-5} = 5$

$$b = \log_3 3^{15} - \log_3 27 =$$

$$= 15 - 3 = 12$$

$$c = 13$$

$$Ob = 30$$



1. Zbiorem wartości funkcji $y = 3^{|x|}$ jest przedział $\langle 1; \infty \rangle$.
Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1 - |\log_a 3 + 1|; \infty \rangle$.

$$\log_a 3 + 1 = 1 \text{ lub} \\ \log_a 3 + 1 = -1, \text{ gdzie } a > 0 \\ \text{oraz } a \neq 1$$

$$\log_a 3 = 0 \text{ lub } \log_a 3 = -2$$

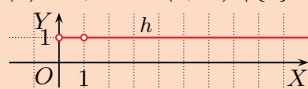
$$a^0 = 3 \text{ (sprzeczność)}$$

$$a^{-2} = 3$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\log_9 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \log_{3^2} \left(3^{-\frac{1}{2}} \right) = \\ = -\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$$

2. a) $D_f = (0; \infty)$,
 $D_g = (0; \infty) \setminus \{1\}$
 $h(x) = 1$, $D_h = (0; \infty) \setminus \{1\}$



b) $\log_2 x = \frac{1}{4 \log_2 x}$

$$\log_2^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \log_2 x = \frac{1}{2}$$

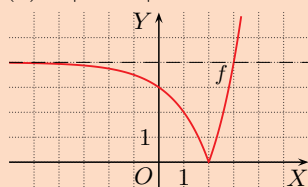
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = \sqrt{2}$$

3. $7^m + 7^{m-1} = 56$

$$\frac{8}{7} \cdot 7^m = 56$$

$$m = 2$$

$$f(x) = |2^x - 4|$$



4. $P(-1, -2)$
 $-2 = \log_p 4$, gdzie $p > 0$
oraz $p \neq 1$
 $p = \frac{1}{2}$

$$g(x) = |\log_{\frac{1}{2}}(-4x)|,$$

$$\text{miejsce zerowe: } x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Funkcja } g \text{ maleje w } (-\infty; -\frac{1}{4}), \\ \text{rośnie w } (-\frac{1}{4}; 0).$$

$$g(x) \leq 2 \text{ dla } x \in \langle -1; -\frac{1}{16} \rangle$$

D Zadanie 1 (4 pkt)

Dla jakiej wartości parametru a zbiorem wartości funkcji:

$$f(x) = 3^{|x|} - |\log_a 3 + 1|$$

jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$? Uzasadnij, że $\log_a a$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 2 (5 pkt)

Dane są funkcje $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \frac{1}{\log_2 x}$.

a) Naskicuj wykres funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

b) Rozwiąż równanie $f(x) = \frac{1}{4}g(x)$.

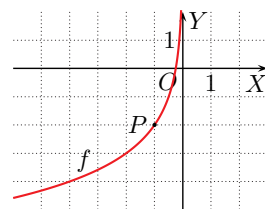
Zadanie 3 (5 pkt)

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |m^x - 4|$, jeśli m jest rozwiązaniem równania:

$$(\sqrt{7})^{2m} + \left(\frac{1}{7}\right)^{1-m} = 56$$

Zadanie 4 (6 pkt)

Do wykresu funkcji $f(x) = \log_p(-4x)$ należy punkt P (rysunek obok). Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $g(x) = |f(x)|$. Dla jakich argumentów x zachodzi nierówność $g(x) \leq 2$?



Zadanie 5 (5 pkt)

Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt o współrzędnych (p, q) , gdzie $p = \log_{\frac{1}{4}} 256$ oraz $q = \log_{2\sqrt{2}} 64$.

- D a) Uzasadnij, że liczba naturalna $n = f(-6) - f(-2)$ jest liczbą doskonałą (czyli jest sumą wszystkich swoich dzielników mniejszych od niej samej).

b) Naskicuj wykres funkcji $g(x) = f(-|x|)$.

D Zadanie 6 (4 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$. Wykaż, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ jeśli $x_1 + x_2 = 0$, to $f(x_1) + f(x_2) = 0$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = 2^{|x+2|}$. Na podstawie wykresu podaj wartości parametru m , dla których równanie $2^{|x+2|} = m$ ma dwa rozwiązania ujemne.

Zadanie 8 (4 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_{9-x^2}(x^2 + 4x - 5)$.

D Zadanie 9 (3 pkt)

Uzasadnij, że wyrażenie $\log_a b^2 \cdot \log_b \sqrt[3]{a}$ przyjmuje stałą wartość dla:

$$a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

5. $p = -4$ oraz $q = 4$

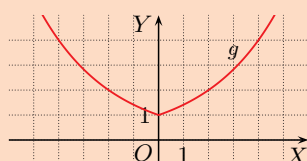
$$4 = a^{-4}, \text{ gdzie } a > 0$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$$

$$\text{a) } n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = 2^3 - 2 = 6$$

Dzielniki liczby 6 mniejsze od niej samej:
1, 2, 3. $1 + 2 + 3 = 6$, zatem jest to liczba doskonała.

b)



6. $x_2 = -x_1$

$$f(x_2) = \log_2 \frac{x_2+1}{x_2-1} = \log_2 \frac{-x_1+1}{-x_1-1} =$$

$$= \log_2 \frac{x_1-1}{x_1+1} = \log_2 \left(\frac{x_1+1}{x_1-1}\right)^{-1} =$$

$$= -\log_2 \frac{x_1+1}{x_1-1} = -f(x_1)$$

$$\text{Zatem } f(x_1) + f(x_2) = 0.$$

7. $m \in (1; 4)$

$$8. x = -2 + \sqrt{10}$$

$$9. \log_a b^2 \cdot \log_b \sqrt[3]{a} = 2 \log_a b \cdot \frac{\log_a a}{\log_a b} = \\ = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ dla } a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

Indeks

- algorytm Hornera 110
- asymptota 120
 - hiperboli 128, 131
 - pionowa 120, 128, 129
 - pozioma 120, 128, 129
- cosecans kąta 187
- cosinus kąta 185
- cotangens kąta 185
- czworokąt
 - bicentryczny 255
 - wypukły 248
- długość
 - łuku okręgu 224
 - okręgu 224
- dwumian 52
 - Newtona 68
- działania na potęgach 286
- dziedzina naturalna funkcji 152
- elipsa 42
- funkcja
 - homograficzna 127
 - logarytmiczna 305
 - wykładnicza 289
 - wymierna 153
- funkcje trygonometryczne
 - kąta ostrego 185
 - kąta wypukłego 200
- hiperbola 120, 127
 - równoosiowa 131
- hiperbole sprzężone 131
- hiperboloida 136
- iloczyn pierwiastków równania
 - kwadratowego 27
- iloczyn potęg
 - o tych samych podstawach 286
 - o tych samych wykładnikach 286
- iloraz potęg
 - o tych samych podstawach 286
 - o tych samych wykładnikach 286
- jednomian
 - stopnia n 52
 - zerowy 52
- jedynka trygonometryczna 194
- kąt
 - między styczną a cięciwą okręgu 237
 - środkowy w okręgu 224, 235
 - wpisany w okrąg 235, 236
- konstrukcja
 - dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg 274
 - pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg 274
 - stycznej do okręgu 234
 - sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg 274
 - wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie 234
- krzywa łańcuchowa 41
- kwadrat 248
- liczba
 - e 291, 308
 - π 224
 - logarytmowana 299
 - pierwiastków równania kwadratowego 10
- logarytm 299
 - dziesiętny 300
 - naturalny 308
- metoda bisekcji 109
- metody przybliżone rozwiązywania równań wielomianowych 108
- najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 35
- największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 35
- nierówność
 - logarytmiczna 306, 323
 - wykładnicza 297, 321
 - wymierna 148
- odcinek koła (kołowy) 228
- odcinki w trapezie 215
- odległość punktu od prostej 230
- okrąg 42
 - dopisany do trójkąta 273
- okręgi
 - przecinające się 225, 231
 - rozłączne 225, 231
 - rozłączne wewnętrznie 225
 - rozłączne zewnętrznie 225, 231
 - styczne 225, 231
 - styczne wewnętrznie 225, 231
 - styczne zewnętrznie 225, 231
- oś symetrii hiperboli 121
- parabola 42
- paraboloida obrotowa 63
- pierścień kołowy 227

pierwiastek
 dwukrotny wielomianu 93
 jednokrotny wielomianu 93
 k -krotny wielomianu 93
 równania kwadratowego 10
 wielomianu 74, 85, 88, 90
 podstawa logarytmu 299
 podstawowe twierdzenie algebry 69
 pole
 koła 227
 rombu 209
 równoległoboku 209
 trapezu 210
 trójkąta 205, 206, 208
 trójkąta opisanego na okręgu 245
 trójkąta równobocznego 205
 trójkąta wpisanego w okrąg 242
 wycinka koła (kołowego) 227
 postać
 iloczynowa funkcji kwadratowej 12
 kanoniczna funkcji homograficznej 128
 ogólna funkcji homograficznej 127
 potęga potęgi 286
 promień
 okręgu opisanego na trójkącie
 równobocznym 240
 okręgu wpisanego w trójkąt 246
 okręgu wpisanego w trójkąt
 równoboczny 244
 promień
 wewnętrzny pierścienia kołowego 227
 zewnątrzny pierścienia kołowego 227
 prostokąt 248
 punkt
 Fermata 217
 styczności 225, 230
 ramię
 końcowe kąta 199
 początkowe kąta 199
 romb 248
 rozpad promieniotwórczy 317
 rozwiązanie trójkąta 191
 równanie
 dwukwadratowe 17
 elipsy 42
 hiperboli 131
 logarytmiczne 322
 okręgu 42
 wielomianowe 74
 wykładnicze 296, 320
 równoległobok 248
 różnica
 n -tych potęg liczb rzeczywistych 66
 sześciątów 65
 schemat Hornera 110
 secans kąta 187
 siatka znaków 105
 sieczna
 okręgu 230
 paraboli 21
 sinus kąta 185
 skala logarytmiczna 313
 stopień
 iloczynu wielomianów 60
 jednomianu wielu zmiennych 59
 sumy wielomianów 55
 wielomianu 52
 wielomianu wielu zmiennych 59
 styczna do okręgu 230
 styczna do paraboli 21
 suma
 pierwiastków równania
 kwadratowego 27
 sześciątów 65
 szerokość pierścienia kołowego 227
 sześciąt
 różnicy 64
 sumy 64
 środek
 okręgu dopisanego do trójkąta 273
 okręgu opisanego na trójkącie 240
 okręgu wpisanego w trójkąt 244
 symetrii hiperboli 121
 tangens kąta 185
 tożsamość trygonometryczna 194, 196
 trapez 248
 równoramienny 248
 trójka pitagorejska 184
 trójkąt
 Herona 208
 Pascala 68
 trójmian 52
 twierdzenie
 Bézouta 85
 cosinusów 266
 o logarytmie iloczynu 302
 o logarytmie ilorazu 302
 o logarytmie potęgi 303
 o odcinkach stycznych 231
 o pierwiastkach całkowitych
 wielomianu 88
 o pierwiastkach wielomianu
 stopnia n 94
 o pierwiastkach wymiernych
 wielomianu 90
 o reszcie z dzielenia wielomianu
 przez dwumian 84
 o siecznych 275

twierdzenie
 o stycznej i siecznej 275
 o zmianie podstawy logarytmu 314
 odwrotne do twierdzenia
 Pitagorasa 181
 Pitagorasa 180
 Ptolemeusza 252
 sinusów 261

 układ równań drugiego stopnia 42

 wielokąt
 foremny 257
 wklęsły 248
 wypukły 248
 wielomian 52
 stopnia n 52
 wielu zmiennych 57
 zerowy 52

 współczynnik
 jednomianu 52
 kierunkowy prostej 204
 wielomianu 52
 wycinek koła (kołowy) 227
 wyraz wolny wielomianu 52
 wyrażenie
 wymierne 137
 wymierne dwóch zmiennych 169
 wzory Viète'a 27
 wzór
 Cardano 92
 dwumianowy Newtona 68
 Herona 208
 wzrost wykładniczy 317

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	—	45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	85°	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	86°	0,9976	0,0698	14,301	0,0699
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	87°	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	88°	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	89°	0,9998	0,0175	57,290	0,0175