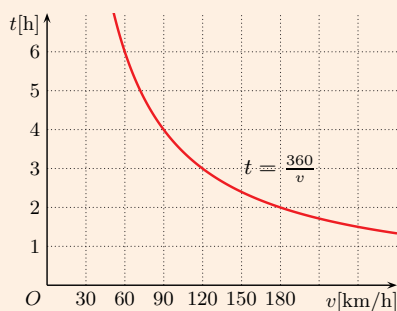




3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym mniejszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i podaje jej własności oraz wyznacza równania asymptot jej wykresu
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ w podanym zbiorze
- odczytuje z wykresu współrzędne punktów przecięcia prostej i hiperboli
- wyznacza współczynnik a tak, aby funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ spełniała podane warunki

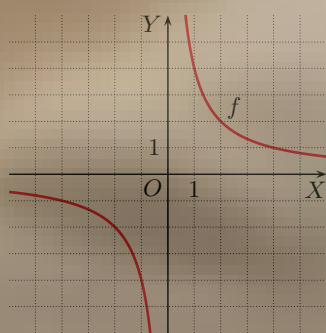
Ćwiczenie 1

- a) $A(\frac{1}{2}, 8)$, $B(1, 4)$, $C(2, 2)$, $D(4, 1)$, $E(8, \frac{1}{2})$

b)

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$



3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ – jest ona określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f , a następnie szkicujemy jej wykres.

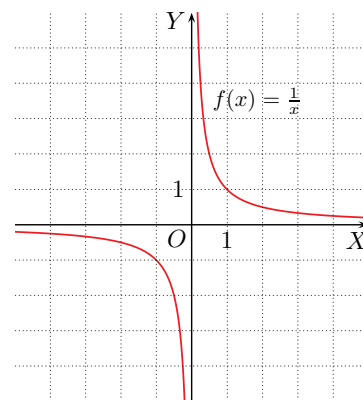
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie o pewien wektor nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- Dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie jest** malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się” do prostej poziomej $y = 0$ oraz „zbliża się” do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

Ćwiczenie 1

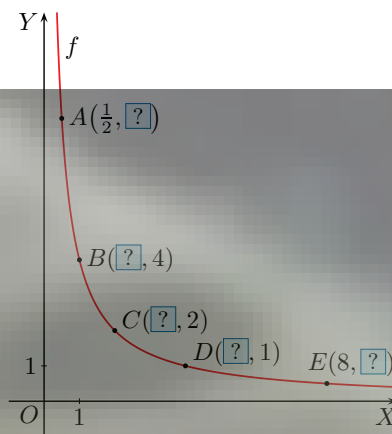
Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli $f(x) = \frac{4}{x}$.

- a) Podaj brakujące współrzędne punktów: A , B , C , D i E .
- b) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.

Ćwiczenie 2

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$



Ćwiczenie 2

a)

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

b)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	6	3	1	$\frac{1}{2}$

c)

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$f(x)$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

Multiteka

- Wykres proporcjonalności odwrotnej
- Przekształcenia wykresu proporcjonalności odwrotnej

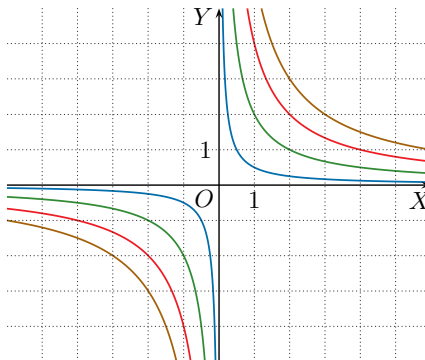
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$, $h(x) = \frac{4}{x}$ oraz $k(x) = \frac{6}{x}$.

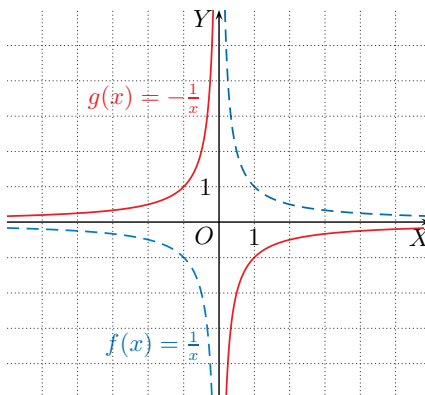
- Oblicz wartości każdej z tych funkcji dla $x = -2$.
- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Do których hiperbol należą punkty: $A(2, 3)$, $B(\frac{2}{3}, 3)$, $C(4, \frac{1}{8})$, $D(-4, -\frac{1}{2})$, $E(-\frac{2}{3}, -6)$?



Aby naszkicować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, można wykorzystać odpowiednią tabelę wartości funkcji lub odbić symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- Dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne.
- Funkcja g nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie.
- Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g .



Ćwiczenie 4

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

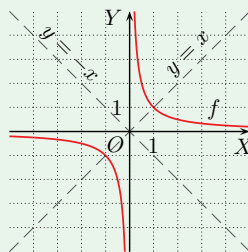
- $f(x) = -\frac{2}{x}$
- $f(x) = -\frac{3}{x}$
- $f(x) = -\frac{4}{x}$
- $f(x) = -\frac{0,5}{x}$

Czy wiesz, że...

■ Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ ma dwie **osie symetrii** – są to proste $y = x$ oraz $y = -x$.

■ Punkt $O(0, 0)$ jest **środkiem symetrii** wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ogólnie, proste $y = x$ i $y = -x$ są osiami symetrii, a punkt $O(0, 0)$ jest środkiem symetrii dowolnej hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$.

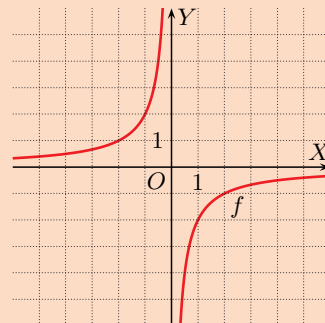


Ćwiczenie 3

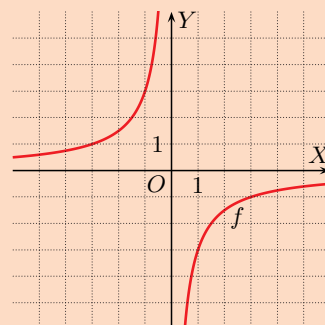
- $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $g(-2) = -1$, $h(-2) = -2$, $k(-2) = -3$
- niebieski – f , zielony – g , czerwony – h , brązowy – k
- $A - k$, $B - g$, $C - f$, $D - g$, $E - h$

Ćwiczenie 4

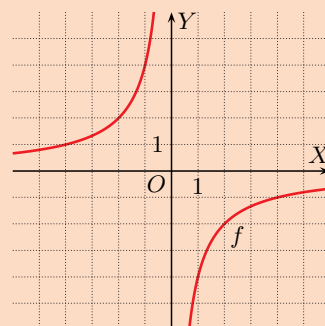
x	-4	-2	-1	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$



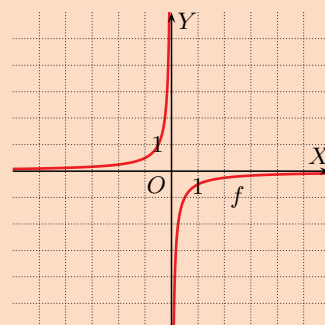
x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	1	3	6	-6	-3	-1



x	-4	-2	-1	1	2	4
$f(x)$	1	2	4	-4	-2	-1



x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$



Odpowiedzi do zadań

- a) najmniejsza: 3, największa: 6
 - b) najmniejsza: -4, największa: -2
 - c) najmniejsza: $\frac{1}{4}$, największa: $\frac{1}{2}$
 - d) najmniejsza: -5, największa: $-\frac{5}{2}$
- a) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$
 - b) $f(D) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
 - c) $f(D) = (-2; 0) \cup (0; 4)$
- a) $a = -8, f(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
 - b) $a = -16, f(-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
 - c) $a = -14, f(-2\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
 - d) $a = \frac{1}{4}, f(-2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$
- a) $a = -3, P(1, -3), f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
 - b) $a = -6, P(2, -3), f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
- a) $a = 2$, najmniejsza: -2, największa: 1
 - b) $a = -4$, najmniejsza: -2, największa: 4
 - c) $a = -6$, najmniejsza: -3, największa: 6
- Wyznaczamy punkty przecięcia prostej z hiperbolą.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$
 $A(1, 2), B(-1, -2)$
 Zatem $|AB| = 2\sqrt{5}$.

Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$.
 - a) $f(x) = \frac{6}{x}$
 - b) $f(x) = -\frac{4}{x}$
 - c) $f(x) = \frac{1}{2x}$
 - d) $f(x) = -\frac{5}{x}$
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, której dziedziną jest zbiór D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
 - a) $D = \langle 2; 8 \rangle$
 - b) $D = (-2; 0) \cup (0; 2)$
 - c) $D = (-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty \rangle$
- Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$? Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $x = -2\sqrt{2}$.
 - a) $P(-1, 8)$
 - b) $P(\frac{1}{2}, -32)$
 - c) $P(-4, 3\frac{1}{2})$
 - d) $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a . Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą $y = -3$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3.

a)

b)
- Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$? Naszkicuj wykres tej funkcji i podaj wartość największą i wartość najmniejszą, jakie przyjmuje ona dla argumentów ze zbioru $\langle -4; -1 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$.
 - a) $P(2\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} - 1)$
 - b) $P(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$
 - c) $P(\sqrt{6} - \sqrt{24}, \sqrt{6})$
- Oblicz odległość między punktami przecięcia prostej $y = 2x$ z hiperbolą $y = \frac{2}{x}$.
- Oblicz a , jeśli wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przecina prostą $y = x$ w punktach P_1 i P_2 , a odcinek P_1P_2 ma długość: a) $4\sqrt{2}$, b) 8.
- Wyznaczamy punkty przecięcia prostej z hiperbolą.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{a}{x} \end{cases}$$
 $P_1(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}), P_2(\sqrt{a}, \sqrt{a}), a > 0$ (lub $P_1(\sqrt{a}, \sqrt{a}), P_2(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$)
 Zatem odległość $|P_1P_2| = 2\sqrt{2a}$.
 - a) $2\sqrt{2a} = 4\sqrt{2}, a = 4$
 - b) $2\sqrt{2a} = 8, a = 8$

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji

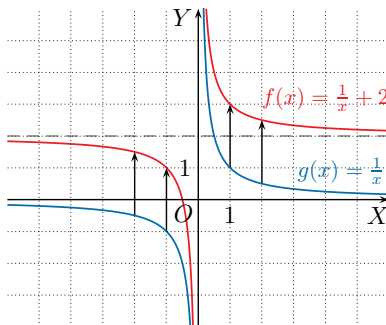
$f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f , a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

c) $f(x) = \frac{4}{x} - 3$

e) $f(x) = -\frac{3}{x} + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$

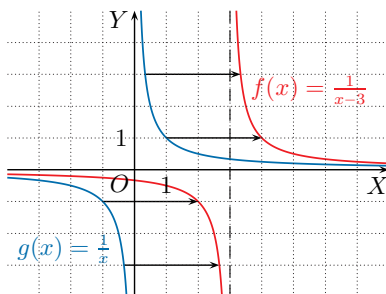
f) $f(x) = -\frac{1}{2x} - 4$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.

Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 0$ – asymptotą poziomą.



Wykres funkcji $y = f(x-a)$, gdzie $a > 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w prawo, czyli o wektor $[a, 0]$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i równania asymptot wykresu tej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$

c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Ćwiczenie 2

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

Funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty; 2)$ i $(2; \infty)$.

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, asymptoty: $x = 4$, $y = 0$

Funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty; 4)$ i $(4; \infty)$.

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, asymptoty: $x = 1$, $y = 0$

Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; 1)$ i $(1; \infty)$.

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; 2)$ i $(2; \infty)$.

Uczeń:

- przesuwając wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o dany wektor, podaje wzór i określa własności otrzymanej funkcji
- wyznacza dziedzinę i podaje równania asymptot wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$
- podaje współrzędne wektora, o jaki należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$; szkicuje wykres funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$
- wyznacza równanie hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku
- dobiera wzór funkcji do jej wykresu
- wyznacza wzór funkcji spełniającej podane warunki
- wyznacza równania osi symetrii oraz współrzędne środka symetrii hiperboli opisanej danym równaniem

Ćwiczenie 1

a) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$

asymptoty: $x = 0$, $y = 3$

b) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

asymptoty: $x = 0$, $y = -1$

c) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

asymptoty: $x = 0$, $y = -3$

d) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

asymptoty: $x = 0$, $y = 2$

e) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

asymptoty: $x = 0$, $y = 1$

f) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$

asymptoty: $x = 0$, $y = -4$

Multiteka

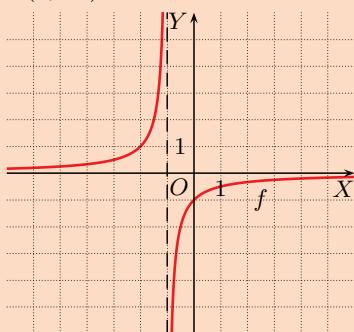
- Postać kanoniczna funkcji homograficznej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

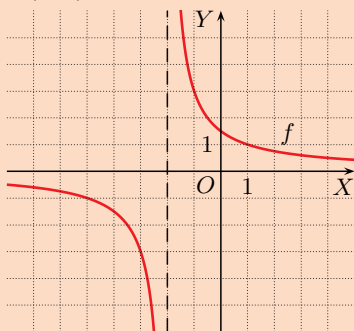
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

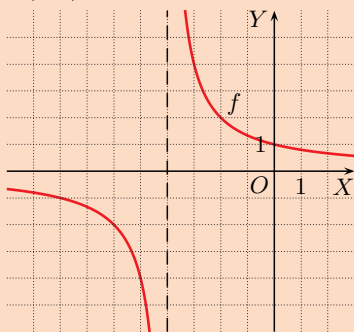
- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
 asymptoty: $x = -1$, $y = 0$,
 $P(0, -1)$



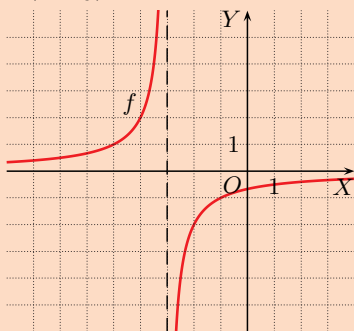
- b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 asymptoty: $x = -2$, $y = 0$,
 $P(0, \frac{3}{2})$



- c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
 asymptoty: $x = -4$, $y = 0$,
 $P(0, 1)$



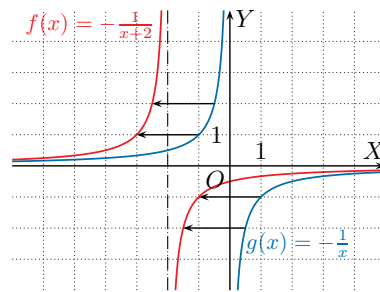
- d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
 asymptoty: $x = -3$, $y = 0$,
 $P(0, -\frac{2}{3})$



Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.



Wykres funkcji $y = f(x + a)$, gdzie $a > 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w lewo, czyli o wektor $[-a, 0]$.

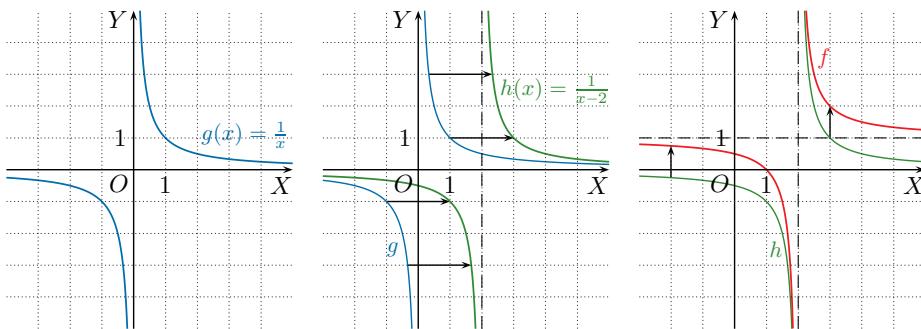
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę tej funkcji i równania asymptot jej wykresu. Wyznacz punkt przecięcia wykresu z osią OY .

- a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4}$ d) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$

Przykład 4

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $[2, 0]$, a następnie o wektor $[0, 1]$ (lub w odwrotnej kolejności). Można też od razu przesunąć wykres funkcji g o wektor $[2, 1]$.



Prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 1$ jest jego asymptotą poziomą.

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$ b) $f(x) = -\frac{1}{x-1} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$

Ćwiczenie 5

Podaj wektor, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x-4} - 6$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = -3 + \frac{1}{2x-4}$
b) $f(x) = -\frac{5}{x}$, $g(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{3x}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{9-3x}$

Ćwiczenie 6

O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać hiperbolę, której asymptotami są podane proste?

a) $f(x) = \frac{4}{x} + 2$, $x = 3$, $y = -6$ b) $f(x) = -\frac{2}{x+3} - \frac{5}{3}$, $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 7

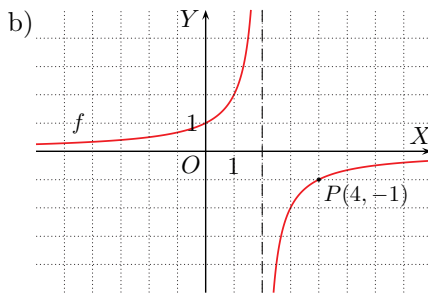
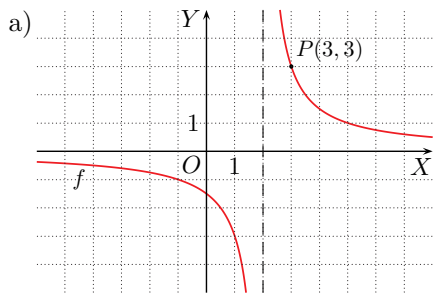
Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przesunięto o wektor $[p, q]$. Podaj wzór i równania asymptot otrzymanej hiperboli.

Zadania

1. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot, jeśli wiadomo, że wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w dół, c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę,
b) $f(x) = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo, d) $f(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w prawo.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$ dla pewnego a . Wyznacz wzór funkcji f . Oblicz $f(1\frac{3}{4})$ i $f(-4)$.



2. a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$, $f(1\frac{3}{4}) = -12$, $f(-4) = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$, $f(1\frac{3}{4}) = 8$, $f(-4) = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 4

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
asymptoty: $x = -2$, $y = -3$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
asymptoty: $x = 1$, $y = 2$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 3$

Ćwiczenie 5

a) $[4, -6]$ b) $[-2, 2]$
c) $[2, -3]$ d) $[3, 1]$

Ćwiczenie 6

a) asymptoty wykresu funkcji f : $x = 0$, $y = 2$,
asymptoty hiperboli:
 $x = 3$, $y = -6$, wektor $[3, -8]$
b) asymptoty wykresu funkcji f : $x = -3$, $y = -\frac{5}{3}$,
asymptoty hiperboli:
 $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$, wektor $[1, \frac{7}{6}]$

Ćwiczenie 7

$g(x) = \frac{a}{x-p} + q$,
asymptoty: $x = p$, $y = q$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $g(x) = \frac{1}{x} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = -3$
b) $g(x) = \frac{4}{x+3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
 $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$
c) $g(x) = -\frac{2}{x} + 2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = 2$
d) $g(x) = -\frac{1}{x-2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
 $g(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

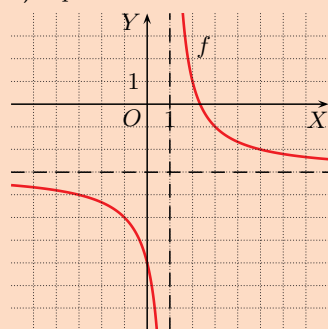
3. a) $g(x) = \frac{1}{x-1} + 4$,
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{4\}$,
 asymptoty: $x = 1$, $y = 4$

b) $g(x) = \frac{2}{x+2} - 1$,
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
 asymptoty: $x = -2$, $y = -1$

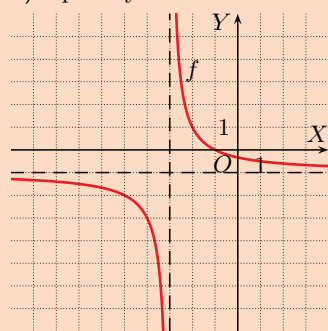
c) $g(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$,
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 asymptoty: $x = -1$, $y = 3$

d) $g(x) = -\frac{2}{x-2} - 4$,
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
 $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
 asymptoty: $x = 2$, $y = -4$

4. a) 6 punktów



b) 4 punkty



c) 2 punkty d) 4 punkty

5. a) $y = \frac{2}{x+1} + 2$

b) $y = \frac{3}{2(x-3)} - 1$

c) $y = -\frac{1}{3(x-2)} + 1$

d) $y = -\frac{4}{3(x+1)} - 2$

6. a) $g(x) = \frac{4}{x-2} - 9$

b) $g(x) = \frac{2}{3(x-\frac{1}{2})} + 5$

c) $g(x) = \frac{5}{4(x-3)} - \frac{3}{4}$

d) $g(x) = \frac{3\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - 6$

3. Przesuń wykres funkcji f o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej funkcji, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\vec{u} = [1, 4]$

c) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [-1, 3]$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-2, -1]$

d) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $\vec{u} = [2, -4]$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do jej wykresu.

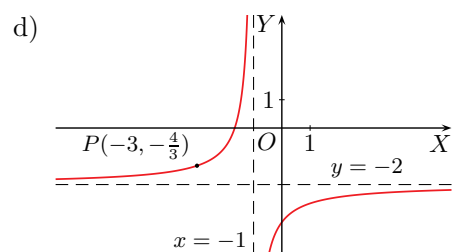
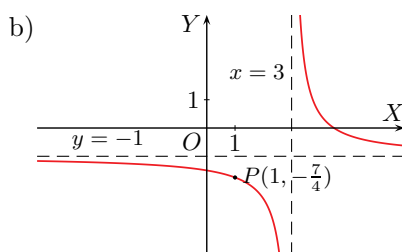
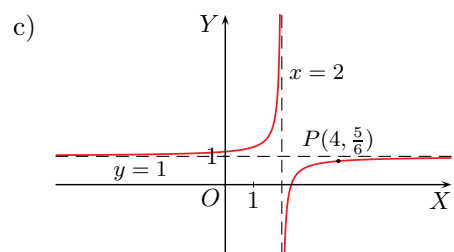
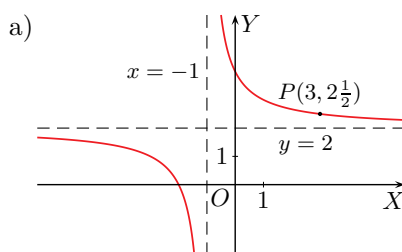
a) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

c) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$

b) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

d) $f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2$

5. Wyznacz równanie przedstawionej hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku.



6. Wykres funkcji g , do którego należy punkt P , otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $\vec{u}$. Wyznacz wzór funkcji g .

a) $\vec{u} = [2, -9]$, $P(6, -8)$

c) $\vec{u} = [3, -\frac{3}{4}]$, $P(-2, -1)$

b) $\vec{u} = [\frac{1}{2}, 5]$, $P(\frac{1}{3}, 1)$

d) $\vec{u} = [-\sqrt{2}, -6]$, $P(1, -3\sqrt{2})$

7. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii hiperboli o równaniu:

a) $y = \frac{3}{x} - 6$, b) $y = \frac{2}{x-4} + 1$, c) $y = \frac{5}{x+1} + 3$, d) $y = -\frac{1}{x-7} + 8$.

8. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przesunięto o wektor $[p, q]$. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii otrzymanej hiperboli.

7. a) wektor przesunięcia $[0, -6]$,
 osie symetrii: $y = x - 6$, $y = -x - 6$,
 środek symetrii: $S(0, -6)$

b) wektor przesunięcia $[4, 1]$,
 osie symetrii: $y = (x - 4) + 1 = x - 3$, $y = -(x - 4) + 1 = -x + 5$,
 środek symetrii: $S(4, 1)$

c) wektor przesunięcia $[-1, 3]$,
 osie symetrii: $y = (x + 1) + 3 = x + 4$, $y = -(x + 1) + 3 = -x + 2$,
 środek symetrii: $S(-1, 3)$

d) wektor przesunięcia $[7, 8]$,
 osie symetrii: $y = (x - 7) + 8 = x + 1$, $y = -(x - 7) + 8 = -x + 15$,
 środek symetrii: $S(7, 8)$

8. $y = x - p + q$, $y = -x + p + q$, $S(p, q)$

*3.3. Funkcja homograficzna

Funkcję postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, określoną dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, jeżeli nie jest ona funkcją stałą, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Podaną w definicji postać wzoru funkcji homograficznej nazywamy **postacią ogólną**.

Wykresem funkcji homograficznej jest **hiperbola** – możemy ją otrzymać przez przesunięcie o wektor hiperboli $y = \frac{r}{x}$, gdzie r jest pewną stałą.

Przykład 1

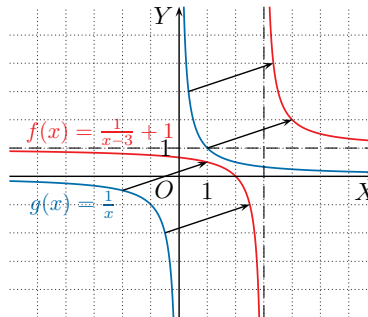
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $[3, 1]$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{-x+1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Przykład 2

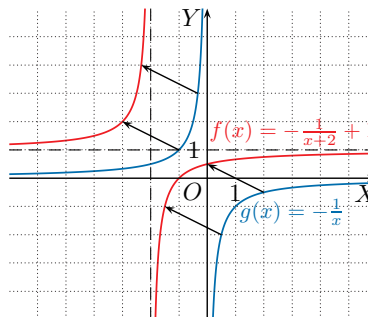
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 1$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$ o wektor $[-2, 1]$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$

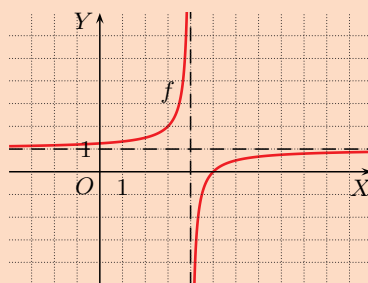
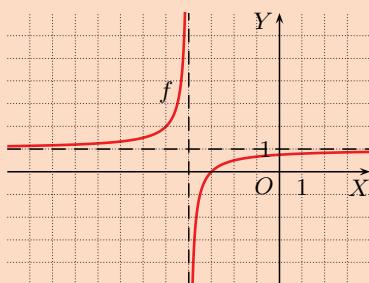
b) $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$

Ćwiczenie 2

a) $f(x) = -\frac{1}{x+4} + 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$

b) $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$



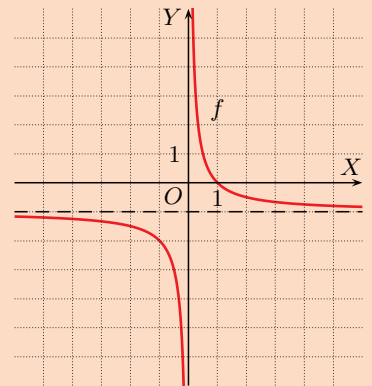
c) $f(x) = -\frac{2}{x+3} + 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

Uczeń:

- przekształca wzór ogólny funkcji homograficznej do postaci kanonicznej
- szkicuje wykres funkcji homograficznej i określa jej własności
- wyznacza równania asymptot wykresu funkcji homograficznej
- podaje przykładowy wzór funkcji homograficznej, znając jej dziedzinę i zbiór wartości
- rozwiązuje zadania tekstowe dotyczące funkcji homograficznej
- rozwiązuje zadania z parametrem na podstawie funkcji homograficznej

Ćwiczenie 1

a) $f(x) = \frac{1}{x} - 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$



b) $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$

c) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

Multiteka

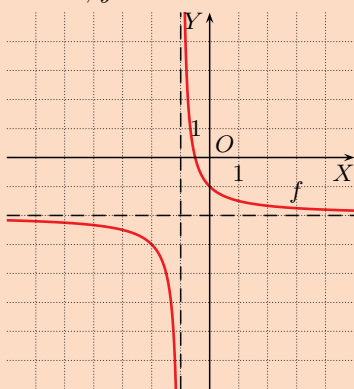
- Postać kanoniczna funkcji homograficznej
- Przekształcenia wykresu funkcji homograficznej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

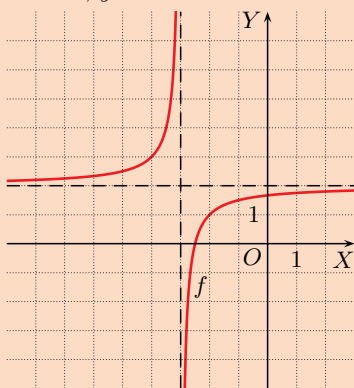
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

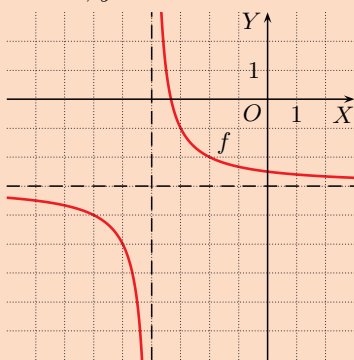
a) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$,
 $x = -1, y = -2$



b) $f(x) = \frac{-1}{x+3} + 2$,
 $x = -3, y = 2$



c) $f(x) = \frac{2}{x+4} - 3$,
 $x = -4, y = -3$



Postać $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji homograficznej.

Przykład 3

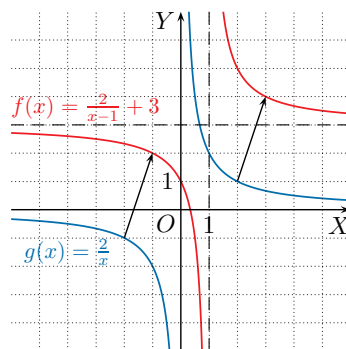
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$\frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$ o wektor $[1, 3]$.



Ćwiczenie 3

Wstaw w miejsce ? odpowiednią liczbę. Zapisz wyrażenie w postaci kanonicznej.

a) $\frac{3x+4}{x+1} = \frac{3(x+1)+\boxed{1}}{x+1}$ b) $\frac{-2x+5}{x-3} = \frac{-2(x-3)+\boxed{-1}}{x-3}$ c) $\frac{4x}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+\boxed{2}}{2x-1}$

Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, gdzie $r \neq 0$, są proste $x = p$ i $y = q$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj równania asymptot.

a) $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{-3x-10}{x+4}$

D Przykład 4

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej: $f(x) = \frac{x+3-4}{x+3} = \frac{-4}{x+3} + 1$.

Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$ oraz:
 $x_1 < x_2$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$,
 jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$,
 takich że $x_1 < x_2$, zachodzi nierówność
 $f(x_1) < f(x_2)$, czyli $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Badamy znak różnicy:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left(\frac{-4}{x_2+3} + 1 \right) - \left(\frac{-4}{x_1+3} + 1 \right) = \frac{-4}{x_2+3} + \frac{4}{x_1+3} = \\ &= \frac{-4(x_1+3)+4(x_2+3)}{(x_1+3)(x_2+3)} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0 \end{aligned}$$

gdyż $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 + 3 < 0$, $x_2 + 3 < 0$.

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że funkcja f jest monotoniczna w przedziale D .

- a) $f(x) = \frac{x-5}{x+2}$, $D = (-2; \infty)$ c) $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$, $D = (-\infty; -1)$
 b) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$, $D = (-\infty; 4)$ d) $f(x) = \frac{-3x-7}{x-5}$, $D = (-\infty; 5)$

Zadania

1. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Podaj równania asymptot wykresu funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{4x+6}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+2}{x+3}$
 b) $f(x) = \frac{-3x+10}{x-3}$ d) $f(x) = \frac{-2x+3}{x-4}$ f) $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$

2. Naszkicuj wykres funkcji f , podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

- a) $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{-4x-11}{x+2}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

- a) $f(x) = \frac{x-4}{x-5}$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ c) $f(x) = -\frac{2x}{x+1}$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = \frac{3x-11}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-2x-5}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{-3x+8}{-x+2}$
 b) $f(x) = \frac{-4x-5}{x+1}$ d) $f(x) = \frac{-4x+6}{x-2}$ f) $f(x) = \frac{-8x+6}{2x-1}$

5. Dla jakiej wartości parametru m punkt P należy do wykresu funkcji f ? Wyznacz równania asymptot wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \frac{4x+m}{-3x-1}$, $P(-3, 2)$ b) $f(x) = \frac{mx-3}{2x+4}$, $P(-4, 1)$

6. Podaj przykład takiej funkcji homograficznej f , której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{p\}$, a zbiorem wartości – zbiór $\mathbf{R} \setminus \{q\}$.

- a) $p = 0$, $q = 1$ c) $p = 1$, $q = 4$ e) $p = 7$, $q = -3$
 b) $p = 0$, $q = -5$ d) $p = -7$, $q = 0$ f) $p = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$

7. Podaj równania asymptot wykresu funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{-6x+9}{3x+6}$
 b) $f(x) = \frac{10x+1}{\frac{1}{2}x-4}$

Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ma asymptotę pionową $x = -\frac{d}{c}$ i asymptotę poziomą $y = \frac{a}{c}$.

4. a) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 3$,
maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$
 b) $f(x) = -\frac{1}{x+1} - 4$,
rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$
 c) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$,
rośnie w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$
 d) $f(x) = -\frac{2}{x-2} - 4$,
rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
 e) $f(x) = -\frac{2}{x-2} + 3$,
rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
 f) $f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - 4$,
maleje w $(-\infty; \frac{1}{2})$ i w $(\frac{1}{2}; \infty)$

5. a) $m = 28$, $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$
 b) $m = \frac{1}{4}$, $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$
 6. a) np. $f(x) = \frac{1}{x} + 1$
 b) np. $f(x) = \frac{1}{x} - 5$
 c) np. $f(x) = \frac{1}{x-1} + 4$
 d) np. $f(x) = \frac{1}{x+7}$
 e) np. $f(x) = \frac{1}{x-7} - 3$
 f) np. $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}} + \sqrt{2}$
 7. a) $x = -2$, $y = -2$
 b) $x = 8$, $y = 20$

Ćwiczenie 5

- c) $f(x) = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$
 Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &< x_2 + 1 \\ 3(x_1 + 1) &< 3(x_2 + 1) / : \\ &/ : (x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ \frac{3}{x_2 + 1} &< \frac{3}{x_1 + 1} \\ \frac{3}{x_2 + 1} + 2 &< \frac{3}{x_1 + 1} + 2 \end{aligned}$$

Zatem $f(x_2) < f(x_1)$, czyli funkcja jest monotoniczna (malejąca) w przedziale $(-\infty; -1)$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = \frac{2}{x+3} + 2$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 3$,
asymptoty: $x = 3$, $y = -3$
 c) $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 4$,
asymptoty: $x = -2$, $y = 4$
 d) $f(x) = \frac{-5}{x-4} - 2$,
asymptoty: $x = 4$, $y = -2$
 e) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{1}{2}$,
asymptoty: $x = -3$, $y = \frac{1}{2}$
 f) $f(x) = \frac{-1}{x+\frac{1}{2}} + 2$,
asymptoty: $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$
 2. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$,
 $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
 b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
 $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$
 c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$
 3. a) $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; 4) \cup (5; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (4; 5)$
 b) $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -2)$
 c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 0)$,
 $f(x) < 0$ dla
 $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

8. a) $(-2, 1), (2, -3), (4, 7), (8, 3)$
 b) $(-6, -2), (-4, -1), (-3, 1), (-1, -7), (0, -5), (2, -4)$
 c) $(-8, 1), (-2, 0), (0, -1), (1, -2), (2, -4), (3, -10), (5, 14), (6, 8), (7, 6), (8, 5), (10, 4), (16, 3)$

9. a) dla $c = -2$ stała,
 dla $c = 0$ liniowa, ale nie stała,
 dla $c \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$ homograficzna
 b) dla $c = 8$ stała,
 dla $c \neq 8$ homograficzna
 c) dla $c = 0$ liniowa, ale nie stała,
 dla $c \neq 0$ homograficzna

10. a) $f(x) = 3, D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 nie jest
 b) $f(x) = -4, D_f = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
 nie jest
 c) $f(x) = -\frac{1}{2}, D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
 nie jest

11. a) $f(x) = \frac{-3}{x+3} + 4$
 b) $f(x) = \frac{-6}{x+3} + \frac{1}{3}$
 c) $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{6}$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{7x-4}{x-1}$.

$$f(x) = \frac{7x-4}{x-1} = \frac{7(x-1)+7-4}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 7, \text{ gdzie } x \neq 1$$

Ponieważ 7 jest liczbą całkowitą, $f(x) \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbf{Z}$. Zatem $x-1$ musi być dzielnikiem całkowitym liczby 3. Oznacza to, że:

$$x-1 \in \{-3, -1, 1, 3\}, \text{ czyli } x \in \{-2, 0, 2, 4\}$$

Istnieją cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f . Są to punkty: $(-2, 6), (0, 4), (2, 10), (4, 8)$.

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-3x-10}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{2x+4}{x-4}$

9. Określ wartości c , dla których funkcja f jest odpowiednio: funkcją homograficzną, liniową (ale nie stałą), stałą.

a) $f(x) = \frac{4x-6}{cx+3}$ b) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-4}{x-c}$ c) $f(x) = \frac{6x}{cx-5}$

10. Czy funkcja f jest funkcją homograficzną? Naszkicuj wykres funkcji f (zwróć uwagę na jej dziedzinę).

a) $f(x) = \frac{3x-9}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-2x-8}{\frac{1}{2}x+2}$ c) $f(x) = \frac{x-2}{4-2x}$

11. Przeczytaj podaną w ramce informację.

Funkcję homograficzną można przedstawić w postaci kanonicznej, wykonując dzielenie, np.:

$$f(x) = \frac{3x-10}{x-4} = \frac{2}{x-4} + 3$$

bo $(3x-10) : (x-4) = 3$ reszta 2.

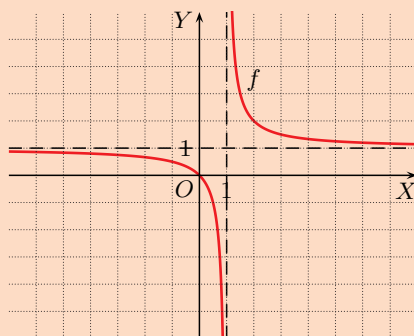
Wykonaj dzielenie i przedstaw funkcję f w postaci $f(x) = \frac{r}{x+a} + q$.

a) $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-5}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}{x+3}$

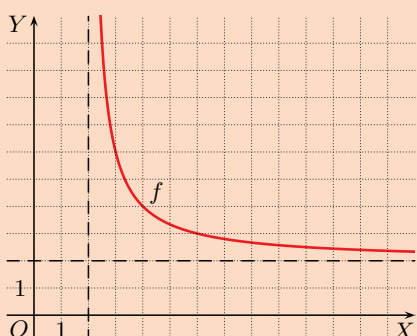
12. a) Suma dwóch liczb x i y jest równa ich iloczynowi. Podaj wzór funkcji opisującej zależność y od x i naszkicuj jej wykres.

b) Pole prostokąta o bokach długości x, y jest równe $2(x+y)$. Podaj wzór funkcji opisującej zależność długości y od x . Określ dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

12. a) $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1, D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

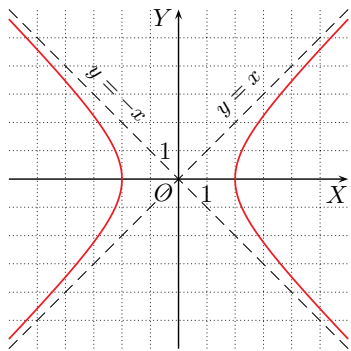


- b) $f(x) = \frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 2, D_f = (2; \infty)$

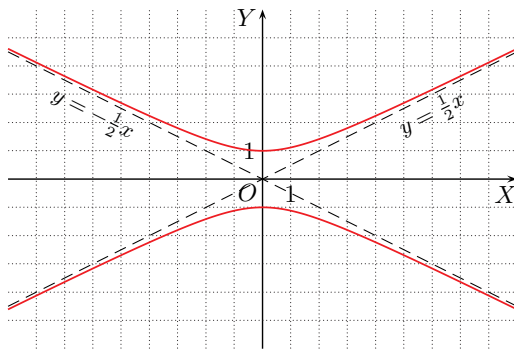


Hiperbola

Rozpatruje się też hiperbole określone równaniami $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lub $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$. Jeśli $a = b$, to asymptoty hiperboli są do siebie prostopadłe, a taką hiperbolę nazywamy **równoosiową** (rysunek po lewej).



Hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$



Hiperbola $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

W tabeli przedstawiono dane dotyczące punktów przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz jej asymptot.

Równanie hiperboli	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Punkty przecięcia z osią OX	$(a, 0)$ i $(-a, 0)$	brak
Punkty przecięcia z osią OY	brak	$(0, a)$ i $(0, -a)$
Równania asymptot	$y = \frac{b}{a} \cdot x$ i $y = -\frac{b}{a} \cdot x$	$y = \frac{a}{b} \cdot x$ i $y = -\frac{a}{b} \cdot x$

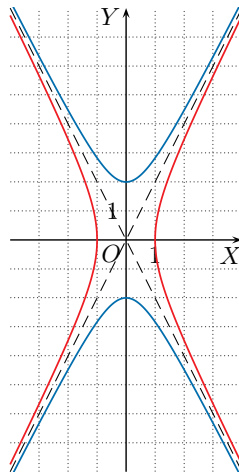
Na rysunku obok przedstawiono hiperbolę $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (kolor czerwony) oraz hiperbolę $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ (kolor niebieski).

Mają one wspólne asymptoty: $y = -2x$ i $y = 2x$.

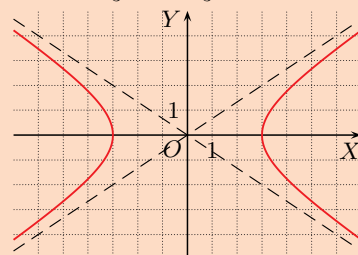
Hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ nazywamy **hiperbolami sprzężonymi**.

1. Wyznacz punkty przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz równania jej asymptot. Naszkicuj tę hiperbolę. Podaj równanie hiperboli sprzężonej.

- a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$
 b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ d) $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$



1. a) $(-3, 0), (3, 0)$,
 $y = -\frac{2}{3}x, y = \frac{2}{3}x$,

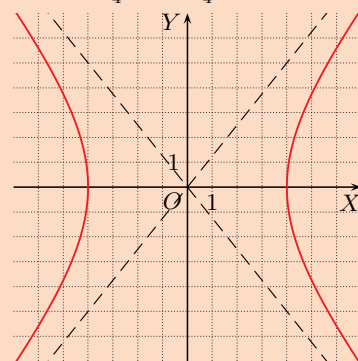


hiperbola sprzężona:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

- b) $(-4, 0), (4, 0)$,

$$y = -\frac{5}{4}x, y = \frac{5}{4}x,$$

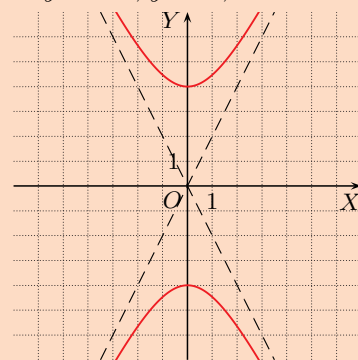


hiperbola sprzężona:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

- c) $(0, -4), (0, 4)$,

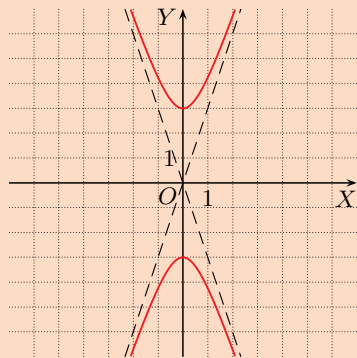
$$y = -2x, y = 2x,$$



hiperbola sprzężona:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

- d) $(0, -3), (0, 3), y = -3x, y = 3x$, hiperbola sprzężona: $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

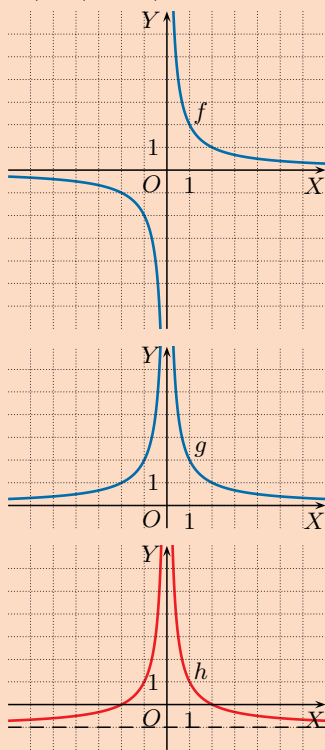


Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ oraz $y = |f(|x|)|$, gdzie f jest funkcją homograficzną, i opisuje jej własności
- wyznacza liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$, $f(|x|) = m$ i $|f(|x|)| = m$, gdzie f jest funkcją homograficzną, w zależności od parametru m

Ćwiczenie 1

- a) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D_g) = (0; \infty)$,
 $h(D_h) = (-1; \infty)$

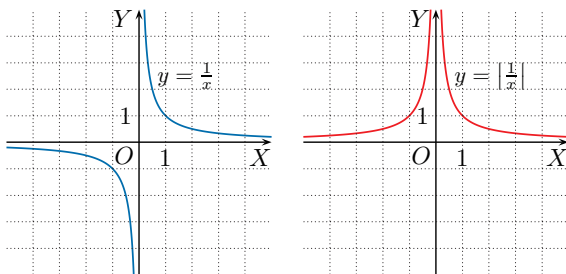


*3.4. Przekształcenia wykresu funkcji

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $y = \left|\frac{1}{x}\right|$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Szkicujemy najpierw wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, a następnie $y = \left|\frac{1}{x}\right|$.



Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX tej części wykresu funkcji f , która znajduje się pod osią OX . Pozostałą część wykresu nie zmieniamy.

Ćwiczenie 1

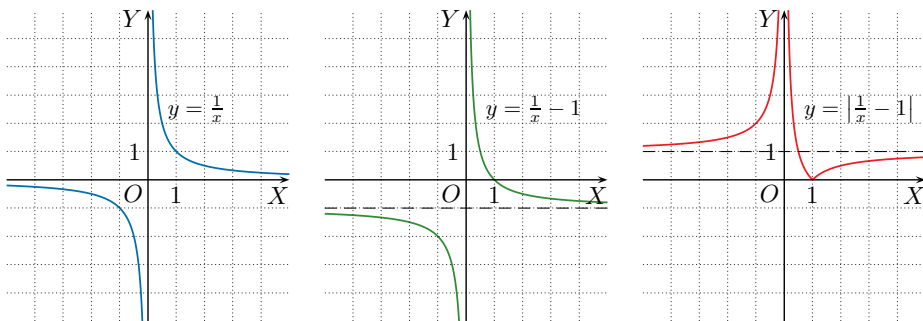
Naszkicuj wykresy funkcji: f , g i h . Określ ich dziedziny i zbiory wartości.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{|x|}$, $h(x) = \frac{2}{|x|} - 1$ **Zauważ, że $\frac{2}{|x|} = \left|\frac{2}{x}\right|$.**

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $g(x) = -\frac{1}{|x|}$, $h(x) = -\frac{1}{|x|} + 3$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{1}{x} - 1\right| = m$ w zależności od parametru m .

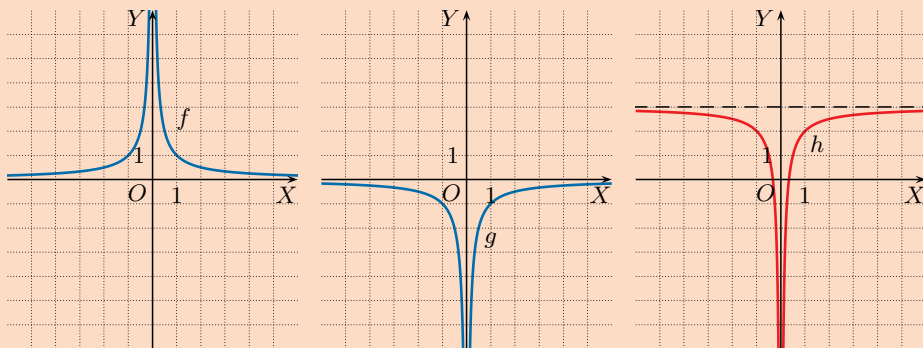


Na rysunkach przedstawiono kolejne etapy powstawania wykresu funkcji $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$.

Z wykresu funkcji $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$ odczytujemy, że równanie $\left|\frac{1}{x} - 1\right| = m$:

- nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
- ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{0, 1\}$,
- ma dwa rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup (1; \infty)$.

b) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = (0; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 0)$, $h(D_h) = (-\infty; 3)$



Multiteka

- Postać kanoniczna funkcji homograficznej
- Przekształcenia wykresu funkcji homograficznej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.4

Generator
testów i sprawdzianów

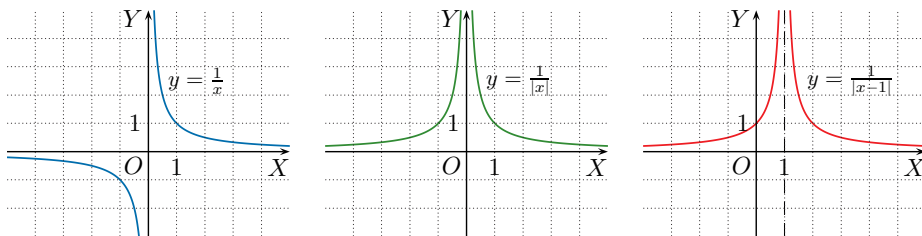
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

a) $f(x) = \left| \frac{1}{x} + 2 \right|$ b) $f(x) = \left| -\frac{1}{x} + 2 \right|$ c) $f(x) = -\left| \frac{1}{x} - 2 \right|$

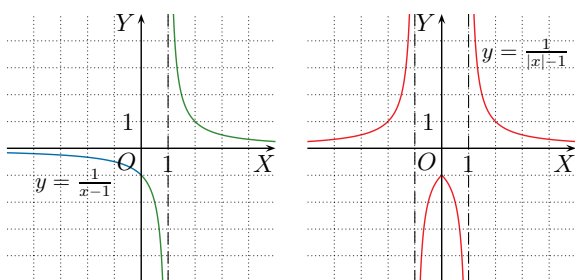
Przykład 3

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



Zauważ, że wykres funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{|x|}$ o wektor $[1, 0]$. Dziedziną funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$ jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, a zbiorem wartości jest przedział $(0; \infty)$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy w następujący sposób: szkicujemy część wykresu funkcji f dla $x \geq 0$ (gdzie $x \in D_f$), a następnie tę część odbijamy symetrycznie względem osi OY .

Dziedziną funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$ jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, a jej zbiorem wartości jest zbiór $(-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ b) $f(x) = -\frac{1}{|x-3|} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{|x+2|} - 1$

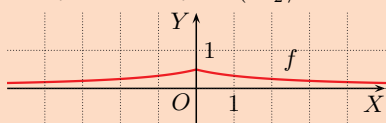
Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ b) $f(x) = -\frac{1}{|x|-3} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{|x|-2} - 1$

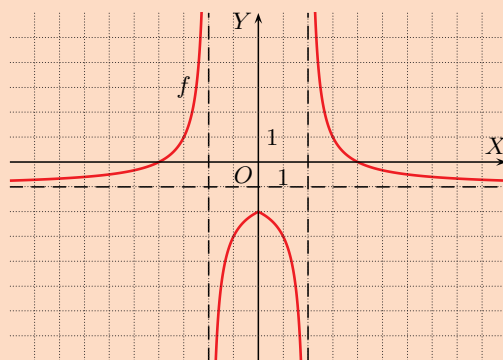
Ćwiczenie 4

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(D_f) = (0; \frac{1}{2}]$



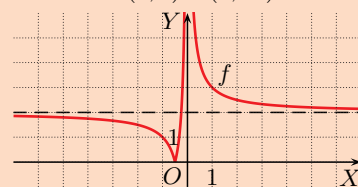
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$,
 $f(D_f) = (-\infty; 2) \cup (2\frac{1}{3}; \infty)$

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(D_f) = (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$

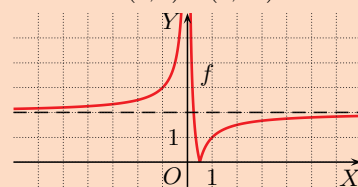


Ćwiczenie 2

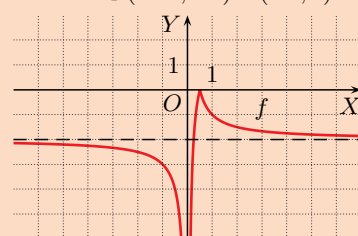
a) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 dla $m \in \{0, 2\}$,
2 dla $m \in (0; 2) \cup (2; \infty)$



b) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 dla $m \in \{0, 2\}$,
2 dla $m \in (0; 2) \cup (2; \infty)$

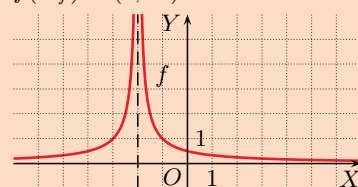


c) 0 dla $m \in (0; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2, 0\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$

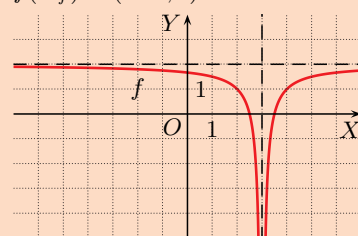


Ćwiczenie 3

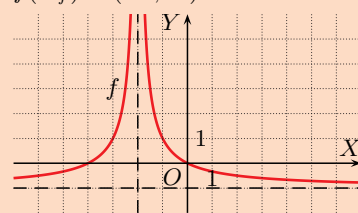
a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $f(D_f) = (0; \infty)$



b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 $f(D_f) = (-\infty; 2)$

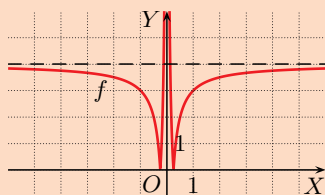


c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $f(D_f) = (-1; \infty)$

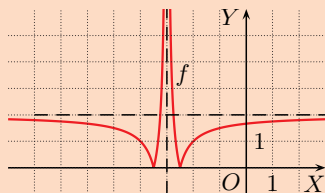


Ćwiczenie 5

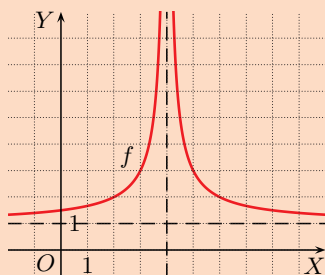
a)



b)

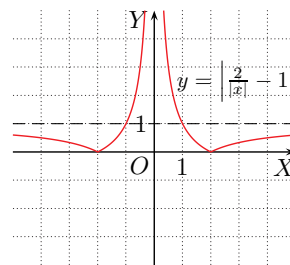
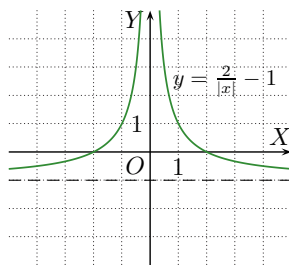
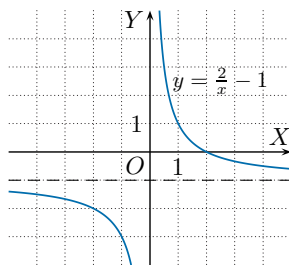


c)



Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $y = \left| \frac{2}{|x|} - 1 \right|$.



Na rysunkach przedstawiono kolejne etapy powstawania wykresu funkcji $y = \left| \frac{2}{|x|} - 1 \right|$.

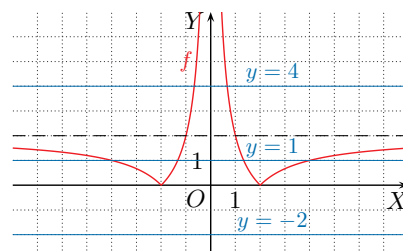
Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \left| \frac{1}{|x|} - 4 \right|$ b) $f(x) = \left| \frac{1}{|x+3|} - 2 \right|$ c) $f(x) = \left| \frac{2}{|x-4|} + 1 \right|$

Przykład 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{4}{|x|} - 2 \right|$. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m . Naszkicuj wykres funkcji g .

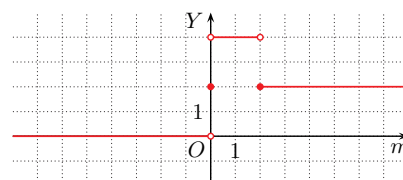


Z wykresu funkcji f odczytujemy, że równanie $f(x) = m$:

- nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
- ma dwa rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup \langle 2; \infty \rangle$,
- ma cztery rozwiązania dla $m \in (0; 2)$.

Zapisujemy wzór funkcji g :

$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 0) \\ 2 & \text{dla } m \in \{0\} \cup \langle 2; \infty \rangle \\ 4 & \text{dla } m \in (0; 2) \end{cases}$$



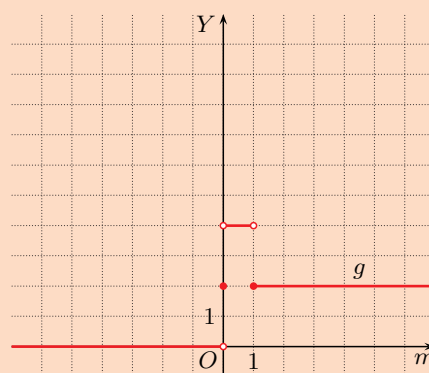
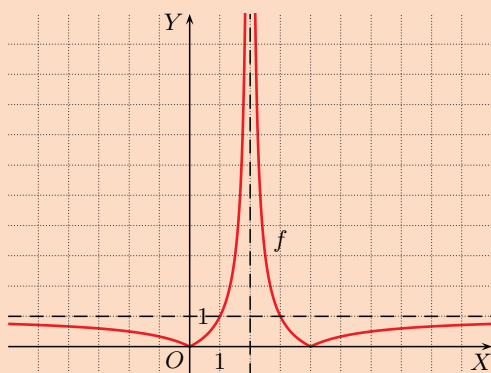
Wykres funkcji $y = g(m)$

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{2}{|x-2|} - 1 \right|$. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m . Naszkicuj wykres funkcji g .

Ćwiczenie 6

$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 0) \\ 2 & \text{dla } m \in \{0\} \cup \langle 1; \infty \rangle \\ 4 & \text{dla } m \in (0; 1) \end{cases}$$



Zadania

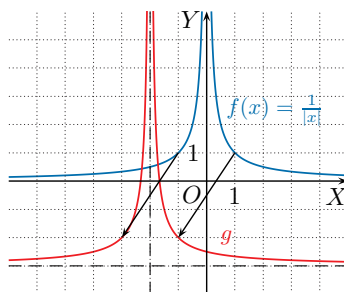
1. Podaj dziedzinę i naskicuj wykres funkcji f . Określ jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$ c) $f(x) = \left| -\frac{2}{x} + 3 \right|$ e) $f(x) = \frac{1}{|x|} - 3$
 b) $f(x) = \left| \frac{2}{x} - 4 \right|$ d) $f(x) = -\left| \frac{2}{x} + 4 \right|$ f) $f(x) = \frac{-3}{|x|} + 2$

2. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{|x+2|} - 4$ c) $f(x) = \left| \frac{x-1}{x+3} \right|$ e) $f(x) = \frac{-2}{|x-1|} + 3$
 b) $f(x) = \frac{-3}{|x-3|}$ d) $f(x) = \left| \frac{-1-x}{x-1} \right|$ f) $f(x) = \frac{1}{|3-x|} + 1$

3. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{|x|}$ (rysunek obok) przesunięto i otrzymano wykres funkcji g , którego asymptotami są: prosta pionowa $x = -2$ i prosta pozioma $y = -3$.



- a) Podaj wzór funkcji g . Określ jej dziedzinę i zbiór wartości.
 b) Naskicuj wykresy funkcji $h(x) = |g(x)|$ oraz $k(x) = g(|x|)$.

4. Naskicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania?

a) $f(x) = \frac{4}{|x|-4}$ b) $f(x) = \frac{4}{|x|+2}$ c) $f(x) = \frac{-2}{|x|-1}$

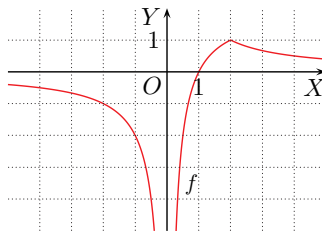
5. Naskicuj wykres funkcji f . Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m . Naskicuj wykres funkcji g .

a) $f(x) = \left| \frac{1}{|x|} - 2 \right|$ b) $f(x) = \left| \frac{2}{x} - 1 \right| - 2$ c) $f(x) = \left| \left| \frac{2}{x} \right| - 2 \right|$

- *6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = -\left| \frac{2}{x} - 1 \right| + 1$$

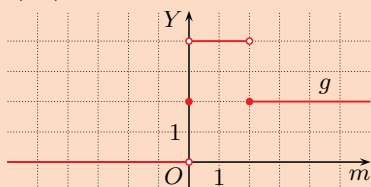
Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .



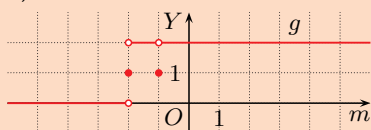
- *7. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m^2$ w zależności od parametru m .

a) $f(x) = \frac{6}{|x|+3}$ b) $f(x) = \frac{3}{|3-|x||} + 3$ c) $f(x) = \left| \frac{2}{|x|-2} \right| - 1$

5. a), c)



- b)



6. 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,

- 1 dla $m \in \{-1, 0, 1\}$,
 2 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

7. a) 0 dla $m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup (\sqrt{2}; \infty)$,

- 1 dla $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$,
 2 dla $m \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$

- b) 0 dla $m \in \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$,
 2 dla $m \in (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$,
 3 dla $m \in \{-2, 2\}$,

- 4 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

- c) 3 dla $m = 0$,
 4 dla $m \neq 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$f(D_f) = (0; \infty)$$

- b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$f(D_f) = (0; \infty)$$

- c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$f(D_f) = (0; \infty)$$

- d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$f(D_f) = (-\infty; 0)$$

- e) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$f(D_f) = (-3; \infty)$$

- f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$f(D_f) = (-\infty; 2)$$

2. a) rośnie w $(-\infty; -2)$,

$$\text{maleje w } (-2; \infty)$$

- b) rośnie w $(3; \infty)$,

$$\text{maleje w } (-\infty; 3)$$

- c) rośnie w $(-\infty; -3)$

$$\text{i w } (1; \infty),$$

$$\text{maleje w } (-3; 1)$$

- d) rośnie w $(-1; 1)$,

$$\text{maleje w } (-\infty; -1)$$

$$\text{i w } (1; \infty)$$

- e) rośnie w $(1; \infty)$,

$$\text{maleje w } (-\infty; 1)$$

- f) rośnie w $(-\infty; 3)$,

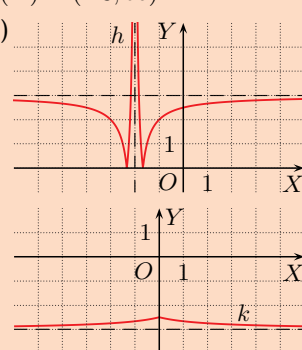
$$\text{maleje w } (3; \infty)$$

3. a) $g(x) = \frac{1}{|x+2|} - 3$,

$$D = \mathbf{R} \setminus \{-2\},$$

$$g(D) = (-3; \infty)$$

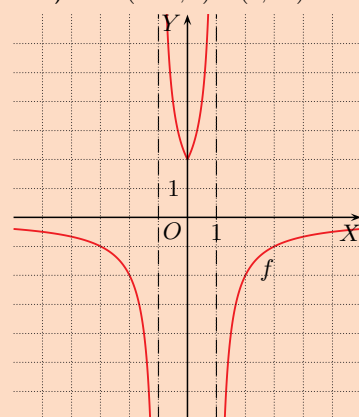
- b)



4. a) $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

- b) $m \in (0; 2)$

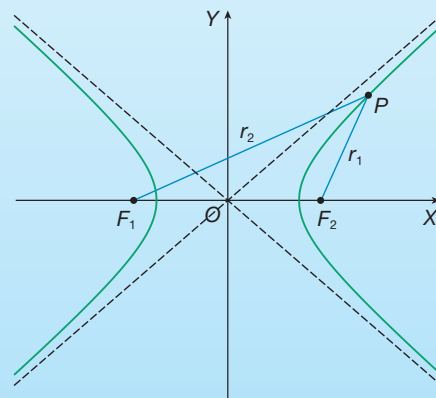
- c) $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$



Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów P na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów F_1 i F_2 , zwanych ogniskami, jest stała:

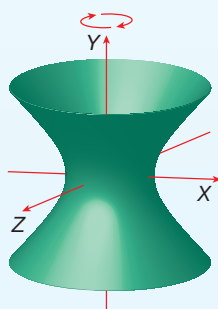
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



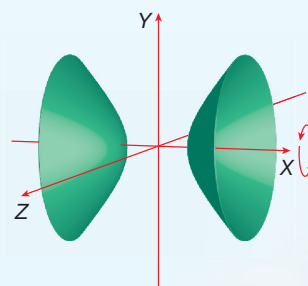
Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obrocie pokazanej wyżej hiperboli wokół osi OY powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obrocie tej hiperboli wokół osi OX otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.



Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszcza w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.



3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Wyrażenie wymierne to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych, w którym mogą występować tylko działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, np.: $\frac{6x+4}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+3}{x-4}$, $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{3x^2-7x}$.

$3x^2 - 7x = 3x(x - \frac{7}{3}) = 0$ dla $x = 0$ oraz dla $x = \frac{7}{3}$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{7}{3}\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartość dla $x = -1$.

- a) $\frac{3x^5+2x^3+x}{x^2-9}$ c) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$ e) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$ g) $\frac{14x^4+8x^2+4}{x^5+27x^2}$
b) $\frac{6x^2+3x-7}{4x^2-25}$ d) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$ f) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$ h) $\frac{5x^2-10x}{x^3-5x^2+4x-20}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2 \cancel{(x-2)}^1}{(x+2)\cancel{(x-2)}^1} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

- a) $\frac{x^2-9}{3-x}$ c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$ e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$ g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$
b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$ d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$ f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$ h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$

Komentarz

Pojęcia mnożenia i dzielenia oraz dodawania i odejmowania wyrażeń wymiernych warto wyjaśnić uczniom na przykładach i poprzez opis słowny. Podczas wykonywania działań uczniowie często zapominają o dziedzinie. Dlatego warto przypominać ich, aby zaczynali od wyznaczenia dziedziny. Przy dzieleniu wyrażeń wymiernych uczniowie często zapominają o założeniu, że licznik drugiego wyrażenia musi być różny od zera.

Uczeń:

- wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego i oblicza jego wartość dla danej wartości zmiennej
- upraszcza w prostych przypadkach wyrażenia wymierne
- wyznacza dziedziny iloczynu oraz ilorazu wyrażeń wymiernych
- mnoży i dzieli wyrażenia wymierne
- wykorzystuje mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych do rozwiązywania zadań
- mnoży wyrażenia wymierne dwóch zmiennych i podaje konieczne założenia

Ćwiczenie 1

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{3}{4}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$, $\frac{4}{21}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{5}{4}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$, -4
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}$, $-7,5$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$, $-\frac{1}{3}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, 1
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$, $-\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $-x-3$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $3x$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, $\frac{2x}{x-5}$
d) $D = \mathbf{R}$, x
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{x+1}{x^3}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $-\frac{x+2}{x}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x^2}{x-3}$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

Ćwiczenie 3

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, 4
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $-\frac{2}{x}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $-\frac{(2x-1)(x-5)}{x}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$, $-\frac{x+3}{6(x-2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x-2}{(x+2)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$, $-\frac{x+1}{2(x-1)}$

Ćwiczenie 4

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, 8
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $-\frac{3}{2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $\frac{4}{3}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, 4
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-7\}$, $-\frac{1}{25}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $\frac{10}{9}$

Przykład 3

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2 - 9 \neq 0$ i $2x - 1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{1(2x-1)(2x+1)(x-3)^1}{1(x-3)(x+3)(2x-1)^1} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$ c) $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$ e) $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$
b) $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$ d) $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x}$ f) $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x + 4 \neq 0$ i $3x + 12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{2}{x+4} \cdot \frac{3(x+4)^1}{10 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$ c) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$ e) $\frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7}$
b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$ d) $\frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3}$ f) $\frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6}$

Przykład 5

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ i $x^2 - x \neq 0$,
zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x+2)^1}{1(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)^1}{x+2} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla $b \neq 0$, $c \neq 0$,
 $d \neq 0$

Ćwiczenie 5

Wykonaj dzielenie.

- a) $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2}$ c) $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9}$ e) $\frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$
b) $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1}$ d) $\frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1}$ f) $\frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27}$

Ćwiczenie 5

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2} = \frac{2(x-3)}{x} \cdot \frac{4x^2}{x-3} = 8x$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$, $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} = (x-2)(x-1)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9} = \frac{2x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{(x-3)^2}{6x^2} = \frac{x-3}{3x(x+3)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 5\}$, $\frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1} = \frac{(5-x)(25+5x+x^2)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x-5} = -\frac{x^2+5x+25}{x+1}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \cdot \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = x^2 + 1$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$, $\frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27} = \frac{x+4}{x^2-3x+9} \cdot \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x(x+4)} = \frac{x+3}{x}$

Zadania

- Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?
 - $\frac{11x^2-5x-3}{x^2+4x+4}$
 - $\frac{17x^3-13x+2}{x^2-5x+6}$
 - $\frac{9x^4-2x^3+11x-6}{x^5-x^4-10x+4}$
- Które spośród liczb: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ nie należą do dziedziny wyrażenia?
 - $\frac{16x^2+x+5}{x^3-9x^2}$
 - $\frac{x^2+6x+9}{x^4-4x^3+4x^2}$
 - $\frac{x^5-3x^4+x}{x^2-x-6}$
 - $\frac{2x^4-16x^3+9}{x^3-x^2-2x}$
- Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $x = -1$, jeśli liczba -1 należy do jego dziedziny.
 - $\frac{x^6-7x^4}{x^3}$
 - $\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$
 - $\frac{x^4-3x^3}{x^4-9x^2}$
 - $\frac{-x^2+x^6}{x^4-2x^3+x^2}$
 - $\frac{2x^4+4x^3+2x^2}{x^3+x^2}$
 - $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$
 - $\frac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$
 - $\frac{2x^2+12x+18}{x^2+5x+6}$
- Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x = -1$ i $x = -2$.
 - $\frac{2x^2-6x-10}{x^2+3x}$
 - $\frac{x^3-3x+3}{\frac{1}{2}x^2-1}$
 - $\frac{4x^2+8x}{\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}}$
 - $\frac{4x^3+4x^2+x}{2x^2-7x-4}$
- Zapisz dziedzinę wyrażenia jako sumę przedziałów. Oblicz wartości wyrażenia dla: $x = -3, x = 1$ i $x = 3$.
 - $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$
 - $\frac{x^2+21}{x^2-3}$
 - $\frac{x+0,5}{4x^2-1}$
 - $\frac{3x^2-6x}{4x^2-9}$
- Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$.
 - $\frac{4x+2}{x^2-x-2}$
 - $\frac{x^2+4x}{x^3+8x^2+16x}$
 - $\frac{x^3+x-2}{x^3-8}$
 - $\frac{x^4-x}{x^3-2x^2+x}$
- Dane są wyrażenia A i B . Wyznacz dziedzinę wyrażen A, B oraz $A \cdot B$.
 - $A = \frac{x^2-2}{x^2-9x}, B = \frac{x^2+4x}{x^2+2x}$
 - $A = \frac{6x-5}{x^3-4x}, B = \frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$
 - $A = \frac{4x^2-1}{x^2-4}, B = \frac{9x-x^3}{4x-x^3}$
 - $A = \frac{5x^2-2x+4}{x^3-2x^2-x+2}, B = \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$
- Wykonaj mnożenie.
 - $\frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{3x}{2x-4}$
 - $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1}$
 - $\frac{4x^2-16}{6-3x} \cdot \frac{x^2}{4x+8}$
 - $\frac{3x+4,5}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+1,5}$
 - $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x-1}$
 - $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-1}$
 - $\frac{x^2}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x^4}$
 - $\frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x}$
 - $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-9}$

Odpowiedzi do zadań

- a) tak b), c) nie
- a) 0 b) 0, 2
c) $-2, 3$ d) $-1, 0, 2$
- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}, x^3 - 7x, 6$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}, 2(x+1), -1 \notin D$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}, \frac{x-1}{x+1}, -1 \notin D$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}, \frac{x+2}{x-2}, -\frac{1}{3}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x}{x+3}, -\frac{1}{2}$
f) $D = \mathbf{R}, \frac{x^2-1}{x^2+1}, 0$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{(x^2+1)(x+1)}{x-1}, 0$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}, \frac{2(x+3)}{x+2}, 4$
- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, wartości kolejno: $1, -5$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, wartości kolejno: $-10, 1$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$, wartości kolejno: $\frac{16}{3}, 0$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 4\}$, wartości kolejno: $-\frac{1}{5}, -1$
- a) $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, wartości kolejno: $\frac{3}{5}, -1, 3$
b) $D = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$, wartości kolejno: $5, -11, 5$
c) $D = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$, wartości kolejno: $-\frac{1}{14}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$
d) $D = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$, wartości kolejno: $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}$

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}, -\frac{3}{2}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, -\frac{2}{5}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0\}, \frac{1}{2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{4}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}, \frac{3}{4}$ f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}, -1$
- a) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{0, 9\}, D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}, D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$
b) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}, D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
c) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_B = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}, D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
d) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}, D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$
- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}, \frac{3}{2x}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}, -3$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{3}{x^2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}, \frac{x+1}{2(x-1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0\}, \frac{(x-2)(x-3)}{x}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}, -\frac{x^2}{3}$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, -\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
i) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}, x+3$

9. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$,

$$\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}$,
 $-x^2 + 5x - 4$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x+2}{x-1}$

10. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{9}{2}$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, $-\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}$, $\frac{2}{x}$

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}$, $-\frac{2}{x-1}$

e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$, $-\frac{x^2}{4}$

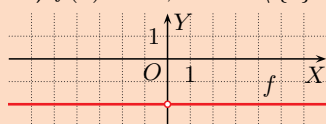
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$,
 $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

11. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$,
 $(x+1)(x+3)$

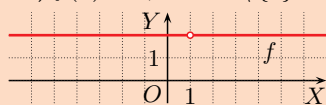
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\}$,
 $-\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$,
 $\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

12. a) $f(x) = -2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$



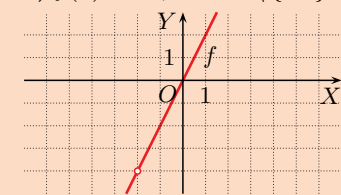
b) $f(x) = 2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$



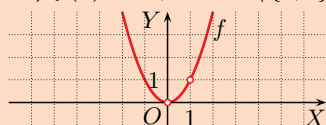
c) $f(x) = 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$



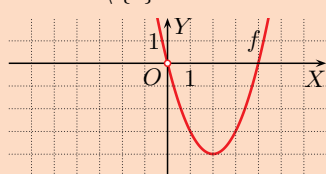
d) $f(x) = 2x$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$



e) $f(x) = x^2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$



f) $f(x) = (x-2)^2 - 4$,
 $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$



9. Wykonaj mnożenie.

a) $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x}$

b) $\frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4}$

c) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1}$

10. Wykonaj dzielenie.

a) $\frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x}$

c) $\frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x}$

e) $\frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x}$

b) $\frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2}$

d) $\frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1}$

f) $\frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

11. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}}$

b) $\frac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}}$

c) $\frac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}}$

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{-2}{\frac{x}{1}}$

c) $f(x) = \frac{\frac{3x-6}{x}}{\frac{x-2}{x}}$

e) $f(x) = \frac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = \frac{\frac{6}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$

d) $f(x) = \frac{\frac{4x}{x+2}}{\frac{2}{x+2}}$

f) $f(x) = \frac{\frac{2x-8}{x}}{\frac{2}{x^2}}$

13. Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = \frac{6}{x^2-4}$, a długość jednego z jego boków jest równa $\frac{2}{x-2}$, gdzie $x > 2$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

14. Dany jest prostokąt o bokach a , b oraz polu P . Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij. Podaj odpowiednie założenia.

a	b	P
$\frac{x+1}{x^2+1}$	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\frac{6}{x^2+4}$	$\frac{x+2}{2}$	$\frac{3x+6}{x^2+4}$
$\frac{4}{x-3}$	$\frac{x^2+2}{x+3}$	$\frac{4x^2+8}{x^2-9}$

15. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Uprość wyrażenie $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4}$.

Zakładamy, że $x \neq y$ i $x \neq -y$.

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2(x^2-y^2)}{1(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

Uprość wyrażenie.

a) $\frac{(x+y)^3(x-y)}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^3+xy^2}{x^4-y^4}$

b) $\frac{3x+y}{2x+y} \cdot \frac{8x^2+4xy}{9x^2-y^2}$

c) $\frac{6x+3y}{8x^3+y^3} \cdot \frac{4x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

13. $\frac{6}{x^2-4} : \frac{2}{x-2} = \frac{6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{2} = \frac{3}{x+2}$

14. kolejno w wierszach: $x > -1$, $x > -2$, $x > 3$

15. a) $x \neq -y$, $x \neq y$,

$$\frac{(x+y)^3(x-y)}{(x+y)^2} \cdot \frac{x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)} = x$$

b) $x \neq -\frac{1}{2}y$, $x \neq -\frac{1}{3}y$, $x \neq \frac{1}{3}y$,

$$\frac{3x+y}{2x+y} \cdot \frac{4x(2x+y)}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{4x}{3x-y}$$

c) $x \neq -\frac{1}{2}y$,

$$\frac{3(2x+y)}{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)} \cdot \frac{4x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{x^2+y^2}$$

3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Reguły dodawania wyrażeń wymiernych są analogiczne do reguł dodawania ułamków. Szczególną uwagę należy zwrócić na dziedziny dodawanych wyrażeń.

Przykład 1

Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\begin{aligned}\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} &= \frac{-4x}{(2x+1)x} + \frac{2(2x+1)}{(2x+1)x} = \frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x} = \frac{2}{(2x+1)x}.\end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(2x+1)x$.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9}$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \\&= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \\&= \frac{x+3-(1-x)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+2}{x^2-9}\end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+3)(x-3)$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj dodawanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll}\text{a)} \frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+3} & \text{c)} \frac{x+3}{x+4} + \frac{x-4}{x-1} & \text{e)} \frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-x} \\ \text{b)} \frac{x-5}{x} + \frac{x}{x+2} & \text{d)} \frac{x+6}{x^2-9} + \frac{x-2}{x+3} & \text{f)} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x+1}\end{array}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj odejmowanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll}\text{a)} \frac{2}{x} - \frac{2}{x+3} & \text{c)} \frac{x-1}{x+4} - \frac{x}{x+1} & \text{e)} \frac{8}{x^2-16} - \frac{x+4}{x-4} + 1 \\ \text{b)} \frac{6}{x-2} - 3 & \text{d)} \frac{-4x}{x-4} - \frac{2x}{x+2} & \text{f)} \frac{3x}{x+1} - \frac{x+2}{x} - 2\end{array}$$

Ćwiczenie 3

Czy funkcja f jest funkcją homograficzną?

$$\text{a)} f(x) = \frac{7x+7}{2x+4} + \frac{3x+5}{2x+4} - \frac{2x}{x+2} \quad \text{b)} f(x) = \frac{x}{6-3x} - \frac{3}{x-2} + \frac{4x}{3x-6}$$

Ćwiczenie 3

$$\text{a)} D = \mathbf{R} \setminus \{-2\},$$

$$f(x) = \frac{10x+12}{2x+4} - \frac{4x}{2x+4} = \frac{6x+12}{2x+4} = \frac{6(x+2)}{2(x+2)} = 3 - \text{nie jest to funkcja homograficzna}$$

$$\text{b)} D = \mathbf{R} \setminus \{2\},$$

$$f(x) = \frac{-x}{3x-6} - \frac{9}{3x-6} + \frac{4x}{3x-6} = \frac{3x-9}{3x-6} = \frac{x-3}{x-2} - \text{jest to funkcja homograficzna}$$

Uczeń:

- wyznacza dziedziny sumy i różnicy wyrażeń wymiernych
- dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne
- przekształca wzory, stosując działania na wyrażeniach wymiernych; wyznacza z danego wzoru wskazaną zmienną

Ćwiczenie 1

$$\begin{array}{l}\text{a)} D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{6x-6}{x^2-9} \\ \text{b)} D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}, \frac{2x^2-3x-10}{x(x+2)} \\ \text{c)} D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 1\}, \frac{2x^2+2x-19}{(x+4)(x-1)} \\ \text{d)} D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{x^2-4x+12}{x^2-9} \\ \text{e)} D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{4}{x^2-1} \\ \text{f)} D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}\end{array}$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{array}{l}\text{a)} D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}, \frac{6}{x(x+3)} \\ \text{b)} D = \mathbf{R} \setminus \{2\}, \frac{12-3x}{x-2} \\ \text{c)} D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}, \\ \quad -\frac{4x+1}{(x+4)(x+1)} \\ \text{d)} D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 4\}, \frac{-6x^2}{(x-4)(x+2)} \\ \text{e)} D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}, -\frac{8x+24}{(x-4)(x+4)} \\ \text{f)} D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}, -\frac{5x+2}{x(x+1)}\end{array}$$

Przykład 3

Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4}$.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} &= \frac{1}{x(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \\&= \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{x(x+2)(x-2)} = \\&= \frac{x-2-2x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{x(x-2)}\end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x(x+2)(x-2)$.

Ćwiczenie 4

- a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0, 4\}, -\frac{2(x^2+12)}{x(x^2-16)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{8x}{(x-1)^2(x+1)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{7}{x(x-3)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 0, 5\}, \frac{x-11}{x^2-25}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{2(x^2-x-1)}{x(x-1)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}, \frac{4x+3}{x(4x^2-1)}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}, \frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, 4\}, \frac{-x+10}{(x-1)(x-4)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{12x^2-13x-11}{2(x^2-1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}, \frac{5x^2-7x+4}{2x(x-2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, \frac{1}{3}\}, \frac{-14x+10}{(x+5)(3x-1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-6, 6\}, \frac{28x-12}{36-x^2}$
2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x^2-3x-12}{x^2-1}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{8}{x^2-4}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}, \frac{1-3x}{(x-1)^2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}, \frac{-2x^2-3x}{(x+2)^2}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{2}{x^2(x+1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)}$

Ćwiczenie 4

Wykonaj działania.

- a) $\frac{3-x}{x^2+4x} - \frac{3+x}{x^2-4x}$ d) $\frac{x+1}{x^2-25} - \frac{x+1}{x^2-5x} + \frac{x-1}{x^2+5x}$
b) $\frac{x+3}{x^2-2x+1} - \frac{x-3}{x^2-1}$ e) $\frac{2x-4}{x^2-2x+1} - \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x-1}$
c) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2-3x}$ f) $\frac{6x-1}{4x^2-1} + \frac{3-2x}{2x^2-x} - \frac{1}{2x+1}$

Zadania

1. Wykonaj działania.

- a) $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3}$ c) $\frac{3x-6}{x-1} + \frac{6x-1}{2x+2}$ e) $\frac{x}{x+5} + \frac{2-3x}{3x-1}$
b) $\frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-1}$ d) $\frac{3x-1}{x} - \frac{x-7}{2x-4}$ f) $\frac{2x+1}{6-x} - \frac{3-2x}{x+6}$

2. Wykonaj działania.

- a) $\frac{x-6}{x-1} + \frac{2x-6}{x^2-1}$ c) $\frac{3x}{x-1} + \frac{1-3x^2}{x^2-2x+1}$ e) $\frac{x+2}{x^2} - \frac{x+3}{x^2+x}$
b) $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{4}{2+x}$ d) $\frac{2-x}{x+2} - \frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+4}$ f) $\frac{x-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x^2-x}$

3. Wykonaj działania.

- a) $\frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{x^2+4}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2}{4x^2-9} + \frac{2-x}{2x-3} - \frac{6}{3-2x}$
b) $\frac{4}{x^2+6x} - \frac{1-x}{2x} + \frac{x-1}{x+6}$ d) $\frac{2x^2-7}{9x^2-6x+1} - \frac{2-3x^2}{3x-1} - x$

4. Uprość wyrażenie. Oblicz jego wartość dla $x = -3$.

- a) $\frac{x^2+x-3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{2x-6} - 1$ b) $\frac{-3x-3}{x^2-16} - \frac{x+1}{4-x} + \frac{5-x}{2x+8}$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{2x}{x^2-4}$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-6, 0\}, \frac{3x^2+3x+2}{2x(x+6)}$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}, \frac{-x^2+13x+24}{4x^2-9}$

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, \frac{5x^2-7x-5}{(3x-1)^2}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}, \frac{-x^2+15x-18}{2(x-3)^2}, -1$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}, \frac{x^2+13x-18}{2(x^2-16)}, \frac{24}{7}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

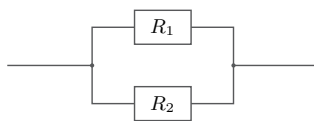
Wyznacz R_1 ze wzoru $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R_c}{R_c \cdot R_2}$$

$$\text{Zatem } R_1 = \frac{R_c \cdot R_2}{R_2 - R_c}.$$



R_c jest oporem zastępczym układu dwóch oporów R_1 i R_2 połączonych równolegle.

Wyznacz R_2 oraz R_c ze wzoru $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

6. Wyznacz ze wzoru wskazaną zmienną.

a) $P = \pi r^2 + \pi r l$, l

e) $F = mg - m\omega^2 R$, R

b) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, b

f) $F = mg - m\omega^2 R$, m

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, h

g) $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, m

d) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, r

h) $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, r

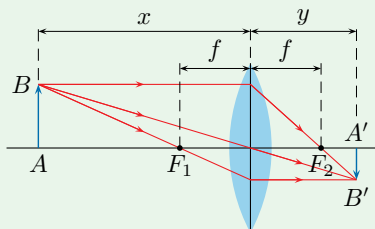
- D** 7. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach a i b . Wysokość tego prostopadłościanu jest równa h , jego pole powierzchni całkowitej wynosi P , a objętość – V . Uzasadnij, że:

$$\frac{P}{V} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h}\right)$$

Czy wiesz, że...

Jeśli x oznacza odległość przedmiotu AB od środka soczewki, y – odległość od środka soczewki do obrazu $A'B'$ tego przedmiotu, a f – ogniskową soczewki, to:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$



F_1, F_2 – ogniska soczewki

- D** 8. Chcemy sfotografować ropuchę oddaloną o 60 cm od soczewki aparatu, której ogniskowa jest równa 90 mm. Jak daleko musi być odsunięta soczewka obiektywu od powierzchni matrycy światłoczułej, jeśli chcemy otrzymać ostre zdjęcie?



8. $x = 60$ cm, $f = 90$ mm = 9 cm

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} = \frac{1}{9} - \frac{1}{60} = \frac{17}{180}$$

$$y = \frac{180}{17} = 10\frac{10}{17}$$

$$y \approx 10,59 \text{ cm}$$

$$5. R_2 = \frac{R_1 R_c}{R_1 - R_c}, R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

6. a) $l = \frac{P - \pi r^2}{\pi r}$

b) $b = \frac{2P}{h} - a$

c) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

d) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

e) $R = \frac{mg - F}{m\omega^2}$

f) $m = \frac{F}{g - \omega^2 R}$

g) $m = \frac{W r R}{GM(R - r)}$

h) $r = \frac{RGMm}{WR + GMm}$

7. $\frac{P}{V} = \frac{2ab + 2ah + 2bh}{abh} =$
 $= 2\left(\frac{ab}{abh} + \frac{ah}{abh} + \frac{bh}{abh}\right) =$
 $= 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$

Uczeń:

- rozwiązuje równania wymierne, podaje i uwzględnia odpowiednie założenia
- znajduje współrzędne punktów wspólnych hiperboli i prostej
- rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, w których występują wyrażenia wymierne

Komentarz

Kolejne etapy rozwiązywania równania wymiernego $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$ warto omówić bardziej szczegółowo i zaproponować uczniom, aby rozszerzyli ten plan własnymi słowami. To pozwoli im na powtórzenie i lepsze zapamiętanie materiału.

Ćwiczenie 1

- a) $x = 3$
- b) $x = -4$
- c) $x = -4$
- d) $x = -2$
- e) $x = 4$
- f) sprzeczne

Ćwiczenie 2

- a) $x = -3$
- b) sprzeczne
- c) $x = -1$
- d) $x = 4$
- e) $x = \frac{1}{2}$
- f) $x = -\frac{1}{2}$

3.7. Równania wymierne

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-2x}{x^2-4} = 0$.

Zakładamy, że $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ lub } x=2)$$

Odrzucamy $x = 2$ jako sprzeczne z założeniem, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Przyrównujemy do zera licznik wyrażenia.

Rozwiązywanie równania wymiernego $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$ składa się z etapów:

- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu w i przyjęcie założeń,
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu u ,
- uwzględnienie założeń i sformułowanie odpowiedzi.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{x(x-3)}{x(x+2)} = 0$
- c) $\frac{x^2+4x}{x(x-6)} = 0$
- e) $\frac{x^2-16}{2x^2+8x} = 0$
- b) $\frac{(x+\frac{1}{2})(x+4)}{(x-3)(2x+1)} = 0$
- d) $\frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9} = 0$
- f) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = 0$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-4x+1} = 0$
- c) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = 0$
- e) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2} = 0$
- b) $\frac{9x^2+12x+4}{3x^2-x-2} = 0$
- d) $\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2} = 0$
- f) $\frac{6x^2+x-1}{3x^2+5x-2} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{2x+2}{2x-1} = 3$.

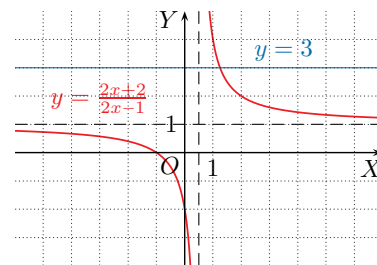
Zakładamy, że $2x - 1 \neq 0$, czyli $x \neq \frac{1}{2}$.

$$\frac{2x+2}{2x-1} = 3 \quad / \cdot (2x-1)$$

$$2x+2 = 6x-3$$

$$-4x = -5 \quad / : (-4)$$

$$x = \frac{5}{4}$$



Hiperbola $y = \frac{2x+2}{2x-1}$ i prosta $y = 3$ przecinają się dla $x = \frac{5}{4}$.

Liczba $\frac{5}{4}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+2}{x} = 5$ b) $\frac{3}{-2x+7} = 1$ c) $\frac{7x+6}{1-3x} = -4$ d) $\frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x^2+1}{x^2} = 3$ b) $\frac{6x}{x^2+9} = -1$ c) $\frac{x^2+8}{x^2-4} = 2$ d) $\frac{-3x^2+2x}{x^2+4} = -3$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{4x+7}{x+1} = x+3$.

Zakładamy, że $x \neq -1$.

$$\frac{4x+7}{x+1} = x+3 \quad / \cdot (x+1)$$

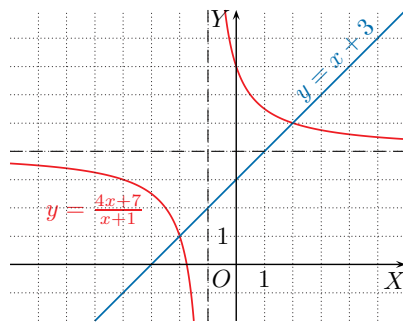
$$4x+7 = (x+3)(x+1)$$

$$4x+7 = x^2+4x+3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

Liczby -2 i 2 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola $y = \frac{4x+7}{x+1}$ i prosta $y = x+3$ przecinają się dla $x = -2$ oraz $x = 2$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $-\frac{1}{x} = x+2$ c) $\frac{6}{x} = x+5$ e) $\frac{2x+4}{2x-1} = x-1$ g) $\frac{2-3x}{x+2} = 2x+1$
b) $\frac{9}{6-x} = x$ d) $\frac{3}{x+2} = x$ f) $\frac{3x+3}{x+2} = 3-x$ h) $\frac{x}{2x+3} = \frac{1}{3}x+2$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x+1 \neq 0$ i $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2} \quad / \cdot (x+1)(x-2)$$

$$2(x-2) = 3(x+1)$$

$$2x-4 = 3x+3$$

$$x = -7$$

Liczba -7 spełnia założenia, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$ b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$ c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$ d) $\frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1}$

Ćwiczenie 3

a) $x = 1$
b) $x = 2$
c) $x = 2$
d) $x = -\frac{7}{5}$

Ćwiczenie 4

a) $x = -1$ lub $x = 1$
b) $x = -3$
c) $x = -4$ lub $x = 4$
d) $x = -6$

Ćwiczenie 5

a) $x = -1$
b) $x = 3$
c) $x = -6$ lub $x = 1$
d) $x = -3$ lub $x = 1$
e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 3$
f) $x = -3$ lub $x = 1$
g) $x = -4$ lub $x = 0$
h) $x = -3$

Ćwiczenie 6

a) $x = -8$
b) $x = -\frac{1}{4}$
c) $x = 4$
d) $x = -3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -8$
b) $x = 8$
c) $x = 2$
d) $x = 0$
e) $x = -1$
f) $x = 1$ lub $x = 2$
2. a) $x = -5$ lub $x = 3$
b) $x = 3$
c) $x = -3$
d) $x = 3$
e) $x = 1$
f) brak pierwiastków całkowitych
3. a) $x = -5,5$
b) $x = -6$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$
d) $x = -\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{-3+3\sqrt{2}}{2}$
e) $x = 2$ lub $x = 3$
f) $x = -8$
4. Równanie I nie ma rozwiązania, równania II, III, IV mają nieskończenie wiele rozwiązań.
5. a) 1
b) 0
c) nieskończenie wiele
d) 2
e) nieskończenie wiele
f) 1
6. a) $x = 0$ lub $x = 5$
b) $x = -2$ lub $x = 4$
c) $x = 3$
d) $x = -3$
e) $x = 0$
f) $x = -3$, $x = 0$
g) $x = -2$ lub $x = -1$
h) $x = 4$
i) $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{2+x}$	c) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}$	e) $\frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x+1}$
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 0$	d) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2}$	f) $\frac{x+1}{2x-1} - \frac{2}{x} = 0$
2. Znajdź pierwiastki całkowite równania.

a) $\frac{x}{-3} = \frac{-5}{x+2}$	c) $x + 1 = \frac{2-2x}{x-1}$	e) $\frac{6x-4}{2-3x} = -2x$
b) $x = \frac{5x+3}{2x}$	d) $1 - \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x+3}$	f) $6x + 1 = \frac{2}{x}$
3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2}{5x+10} = \frac{-3}{x^2-4}$	c) $\frac{1}{1-x} + \frac{x}{x-1} = 1$	e) $\frac{6}{x} - 1 = \frac{2}{x-1}$
b) $\frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$	d) $\frac{2x}{2x+3} - 1 = \frac{2x}{2x-3}$	f) $\frac{2x+1}{x^2-9} - \frac{3}{x-3} = 0$
4. Które z podanych równań nie mają rozwiązań, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?
I. $\frac{3x-3}{x-1} = 2$ II. $\frac{6x-2}{3x-1} = 2$ III. $\frac{1-4x}{8x-2} = -0,5$ IV. $\frac{3x+9}{10x+30} = 0,3$
5. Podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x + 1 = \frac{2-2x}{x-1}$	c) $\frac{6x-4}{2-3x} = -2$	e) $\frac{3-x}{2x-1} = \frac{2x-6}{2-4x}$
b) $\frac{2x-2}{x-2} = \frac{x}{x-1}$	d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{3x+1}$	f) $x + \frac{3x}{x-1} = \frac{6x-3}{x-1}$
6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x-5)(x+\frac{1}{3})}{(3x+1)(x+2)} = 0$	d) $\frac{(2x+1)(x+3)}{x(4x^2-1)} = 0$	g) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x} = 0$
b) $\frac{x(x+2)(x-4)}{x(x-2)(x+4)} = 0$	e) $\frac{x^3+2x^2+x}{(x+1)(x+2)} = 0$	h) $\frac{x^3-7x^2+12x}{2x^4-5x^3-3x^2} = 0$
c) $\frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x+2)(4-x)} = 0$	f) $\frac{x^3-9x}{x^2-6x+9} = 0$	i) $\frac{2x^4+4x^3+x^2}{x^4-2x^2+1} = 0$
7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x} = 2$	e) $\frac{2}{x+4} + \frac{3}{x-4} = \frac{14}{x^2-16}$
b) $\frac{3-x}{4x^2+4x+1} - \frac{5x}{2x+1} = 0$	f) $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} + \frac{1}{2x} = 0$
c) $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1-x}{x^2+2x+1}$	g) $\frac{x+5}{x-4} + \frac{3}{x} = \frac{36}{x^2-4x}$
d) $\frac{2x+1}{x^2+6x+9} + \frac{x-1}{9-x^2} = 0$	h) $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{4}{x^2-4}$
7. a) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$
b) $x = \frac{-3-\sqrt{39}}{10}$ lub $x = \frac{-3+\sqrt{39}}{10}$
c) sprzeczne
d) $x = 0$ lub $x = 7$
e) $x = 2$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $x = \frac{2}{7}$ lub $x = -2 \notin D$, zatem $x = \frac{2}{7}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$, $x = -12$ lub $x = 4 \notin D$, zatem $x = -12$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $x = -1$ lub $x = 2 \notin D$, zatem $x = -1$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji $y = \frac{x+1}{x-2}$ i prostej $y = x - 3$.

Zakładamy, że $x - 2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{x+1}{x-2} = x - 3$$

$$x + 1 = (x - 2)(x - 3)$$

$$x + 1 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

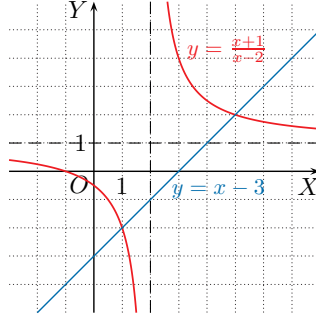
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

Obliczamy drugie współrzędne punktów wspólnych:

$$y_1 = 1 - 3 = -2, \quad y_2 = 5 - 3 = 2$$

Zatem punktami wspólnymi hiperboli i prostej są $(1, -2)$ i $(5, 2)$.



Wyznacz współrzędne punktów wspólnych hiperboli $y = \frac{2x+2}{x-1}$ i prostej:

a) $y = x + 1$,

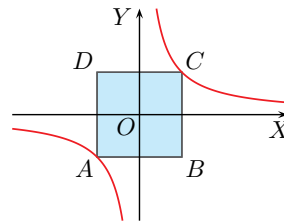
b) $y = 2x + 2$,

c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

9. Osie układu współrzędnych są osiami symetrii kwadratu $ABCD$ (rysunek obok). Wierzchołki A i C należą do hiperboli $y = \frac{a}{x}$. Podaj współrzędne wierzchołków kwadratu i oblicz jego pole dla:

a) $a = 4$,

b) $a = 3$.



10. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{-4}{x-2} \\ y = -x - 1 \end{cases}$

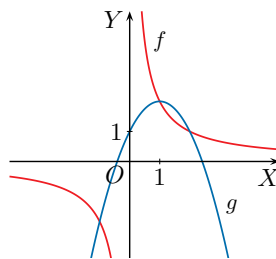
c) $\begin{cases} y = \frac{-x-1}{x+3} \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

11. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -x^2 + 2x + 1$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.

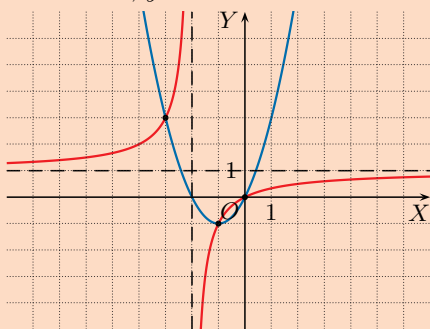
12. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{x}{x+2} \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$

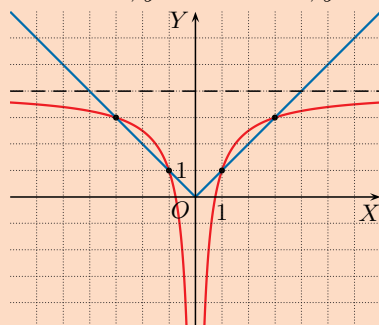
b) $\begin{cases} y = 4 - \frac{3}{|x|} \\ y = |x| \end{cases}$



12. a) $x = -3, y = 3$ lub $x = -1, y = -1$ lub $x = 0, y = 0$



b) $x = -3, y = 3$ lub $x = 3, y = 3$ lub $x = -1, y = 1$ lub $x = 1, y = 1$



8. a) $P_1(-1, 0), P_2(3, 4)$

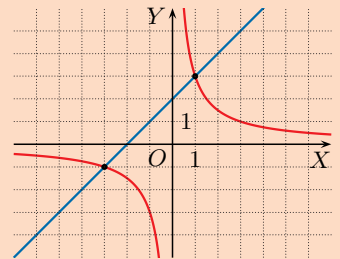
b) $P_1(-1, 0), P_2(2, 6)$

c) $P_1(-1, 0), P_2(5, 3)$

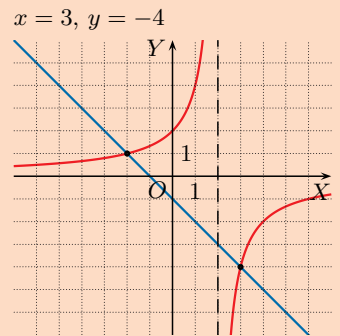
9. a) $A(-2, -2), B(2, -2), C(2, 2), D(-2, 2), P = 16$

b) $A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), B(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), C(\sqrt{3}, \sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), P = 12$

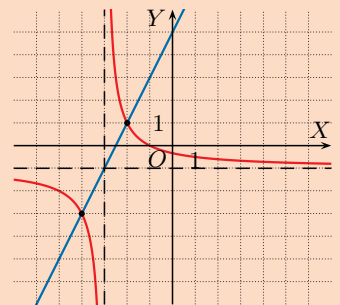
10. a) $x = -3, y = -1$ lub $x = 1, y = 3$



b) $x = -2, y = 1$ lub $x = 3, y = -4$



c) $x = -4, y = -3$ lub $x = -2, y = 1$



11. $P_1(-1, -2), P_2(1, 2), P_3(2, 1)$

Uczeń:

- odczytuje z danego wykresu zbiór rozwiązań nierówności wymiernej
- rozwiązuje nierówności wymierne i podaje odpowiednie założenia
- stosuje nierówności wymierne do porównywania wartości funkcji
- rozwiązuje graficznie nierówności wymierne
- rozwiązuje układy nierówności wymiernych

Ćwiczenie 1

- a) $x \neq 0$, $2x(x-2) < 0$,
 $x \in (0; 2)$
- b) $x \neq 0$, $x(x+2) \leq 0$,
 $x \in \langle -2; 0 \rangle$
- c) $x \neq 0$, $2x(4x+3) \leq 0$,
 $x \in \langle -\frac{3}{4}; 0 \rangle$
- d) $x \neq 0$, $4x(8x+3) > 0$,
 $x \in (-\infty; -\frac{3}{8}) \cup (0; \infty)$

3.8. Nierówności wymierne*Przykład 1**

Rozwiąż nierówność $\frac{3}{x} < -1$.

Zakładamy, że $x \neq 0$.

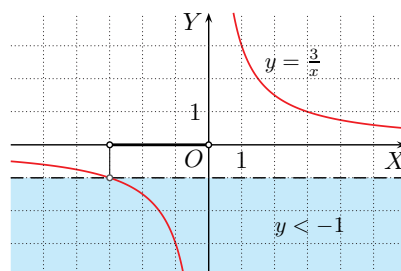
$$\frac{3}{x} < -1$$

$$\frac{3}{x} + 1 < 0$$

$$\frac{3+x}{x} < 0$$

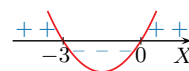
$$(3+x)x < 0$$

Iloraz dwóch liczb
 ma taki sam znak
 jak ich iloczyn.



Rozwiązanie nierówności $\frac{3}{x} < -1$ można również odczytać z wykresu.

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-3; 0)$.



Uwaga. Nierówność $\frac{3}{x} < -1$ można również rozwiązać, mnożąc obie strony przez kwadrat mianownika (kwadrat wyrażenia różnego od zera jest zawsze dodatni). Otrzymujemy wtedy nierówność $3x < -x^2$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{4}{x} > 2$ c) $-\frac{3}{2x} \geq 2$
- b) $\frac{2}{x} \leq -1$ d) $-\frac{3}{4x} < 2$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$,
 $b \neq 0$ znak ilorazu $\frac{a}{b}$ jest taki sam jak
 znak iloczynu $a \cdot b$.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$.

Zakładamy, że $x \neq 3$.

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leq 0$$

$$\frac{2x-5-3(x-3)}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{-x+4}{x-3} \leq 0$$

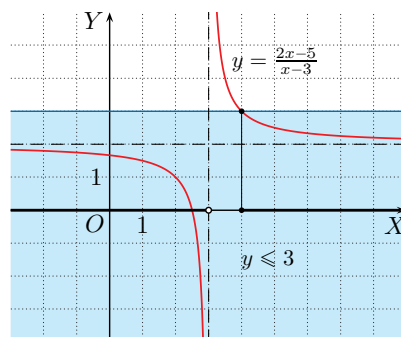
Iloraz dwóch liczb
 ma taki sam znak
 jak ich iloczyn.

$$-(x-4)(x-3) \leq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$(x-4)(x-3) \geq 0$$

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$x \in (-\infty; 3) \cup \langle 4; \infty \rangle$$

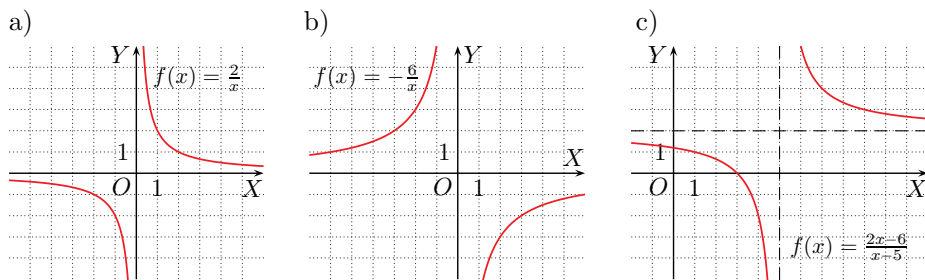


Rozwiązanie nierówności $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$ można również odczytać z wykresu.



Ćwiczenie 2

Odczytaj z wykresu funkcji f zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz $f(x) \geq -2$. Sprawdź odpowiedzi, rozwiązując odpowiednie nierówności.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{3}{x-2} \geq 1$ c) $\frac{2}{4-x} < 3$ e) $\frac{1-x}{x} \leq -4$ g) $\frac{2x+3}{x+3} < 5$
 b) $\frac{2x+7}{x-4} > 3$ d) $\frac{4x-7}{x-2} \leq 5$ f) $\frac{2x-2}{x+1} > 2$ h) $\frac{-7x+2}{x+\frac{1}{2}} \leq -6$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+2} \geq 2$.

Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 3$.

$$\begin{aligned} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)} + \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)} &\geq \frac{2(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} \\ \frac{x^2+2x}{(x+2)(x-3)} + \frac{x^2-3x}{(x+2)(x-3)} - \frac{2x^2-6x+4x-12}{(x+2)(x-3)} &\geq 0 \\ \frac{x+12}{(x+2)(x-3)} &\geq 0 \\ (x+12)(x+2)(x-3) &\geq 0 \end{aligned}$$

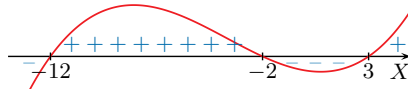
Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+2)(x-3)$.

Iloraz i iloczyn dwóch liczb mają ten sam znak.

Szkicujemy wykres wielomianu:

$$w(x) = (x+12)(x+2)(x-3)$$

Jego pierwiastkami są liczby: -12 , -2 i 3 .



Odczytujemy rozwiązanie nierówności (z uwzględnieniem założeń):

$$x \in \langle -12; -2 \rangle \cup (3; \infty)$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} \leq 1$ c) $\frac{x+3}{x-2} + 1 \leq \frac{7}{(x-2)^2}$ e) $\frac{3}{x+2} \geq \frac{6}{x} - \frac{7}{x+3}$
 b) $\frac{x-1}{x+2} > 4 - \frac{3x}{x+4}$ d) $1 - \frac{x}{x+1} \geq \frac{x-2}{x-1}$ f) $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

Ćwiczenie 4

- a) $x \neq 1$ i $x \neq 3$, $(7x-9)(x-3)(x-1) \leq 0$, $x \in (-\infty; 1) \cup \langle \frac{9}{7}; 3 \rangle$
 b) $x \neq -2$ i $x \neq -4$, $(-15x-36)(x+2)(x+4) > 0$,
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{12}{5}; -2)$
 c) $x \neq 2$, $(2x^2-3x-9)(x-2)^2 \leq 0$, $x \in \langle -\frac{3}{2}; 2 \rangle \cup (2; 3)$
 d) $x \neq -1$ i $x \neq 1$, $(-x^2+2x+1)(x+1)(x-1) \geq 0$,
 $x \in (-1; 1-\sqrt{2}) \cup (1; 1+\sqrt{2})$
 e) $x \neq -3$ i $x \neq -2$ i $x \neq 0$, $(4x^2-7x-36)(x+2)(x+3)x \geq 0$,
 $x \in (-3; -\frac{9}{4}) \cup (-2; 0) \cup \langle 4; \infty \rangle$
 f) $x \neq -1$ i $x \neq 0$ i $x \neq 1$, $(x^2+2x-1)(x-1)(x+1)x < 0$,
 $x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1; 0) \cup (-1+\sqrt{2}; 1)$

Ćwiczenie 2

- a) $f(x) > 2$ dla $x \in (0; 1)$,
 $f(x) \geq -2$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
 b) $f(x) > 2$ dla $x \in (-3; 0)$,
 $f(x) \geq -2$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$
 c) $f(x) > 2$ dla $x \in (5; \infty)$,
 $f(x) \geq -2$ dla $x \in (-\infty; 4) \cup (5; \infty)$

Ćwiczenie 3

- a) $x \neq 2$, $(5-x)(x-2) \geq 0$,
 $x \in (2; 5)$
 b) $x \neq 4$, $(x-4)(-x+19) > 0$,
 $x \in (4; 19)$
 c) $x \neq 4$, $(4-x)(3x-10) < 0$,
 $x \in (-\infty; \frac{10}{3}) \cup (4; \infty)$
 d) $x \neq 2$, $(3-x)(x-2) \leq 0$,
 $x \in (-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 e) $x \neq 0$, $x(3x+1) \leq 0$,
 $x \in \langle -\frac{1}{3}; 0 \rangle$
 f) $x \neq -1$, $x+1 < 0$,
 $x \in (-\infty; -1)$
 g) $x \neq -3$, $(-3x-12)(x+3) < 0$,
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; \infty)$
 h) $x \neq -\frac{1}{2}$, $(5-x)(x+\frac{1}{2}) \leq 0$,
 $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle 5; \infty \rangle$

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$
 b) $x \in (-7; 3)$
 c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-\frac{19}{3}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; \frac{9}{7}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
 g) $x \in (-\infty; 5) \cup (10; \infty)$
 h) $x \in (-\frac{5}{2}; -\frac{13}{9})$
2. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; \infty)$
 i $x > -2$, zatem $x \in (-\frac{3}{2}; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$
 i $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \infty)$,
 zatem $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$
 i $x > -1$, zatem $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
 i $x > -1$, zatem $x \in (0; \infty)$
 e) $x < -1$ i $x > -3$,
 zatem $x \in (-3; -1)$
 f) $x \in (-4; 2)$ i $x \in (3; 5)$,
 zatem układ sprzeczny
3. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$
 b) $x \in (0; 1) \cup (2; \infty)$
5. a) $x \in (-2; -1) \cup (0; 1)$
 b) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{-6x+1}{2x+2} < 4$ c) $\frac{x+5}{x+7} > -2$ e) $\frac{3x+2}{5x} \geq -1$ g) $\frac{-4x-5}{5-x} \leq 9$
 b) $\frac{8x+6}{3-x} > -5$ d) $\frac{3x+1}{5-2x} \leq 2$ f) $\frac{3x+6}{1-2x} > -4$ h) $\frac{-x+7}{2x+5} \geq 4$

2. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $0 \leq \frac{2}{x+2} \leq 4$ c) $-1 < \frac{3x+1}{x+1} < 3$ e) $\frac{x+2}{x+1} \leq 1 \leq \frac{x+6}{x+3}$
 b) $-2 \leq \frac{2}{2x+1} < 2$ d) $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ f) $\frac{x+4}{x-2} \leq 0 \leq \frac{3-x}{x-5}$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{2x+2}{x-1}$ i proste: $y = x - 2$, $y = 2x - 2$, $y = 4x - 2$. Z rysunku możemy odczytać, że nierówność:

$$\frac{2x+2}{x-1} \geq x - 2$$

jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 5)$.

Rozwiąż algebraicznie nierówność, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, korzystając z rysunku.

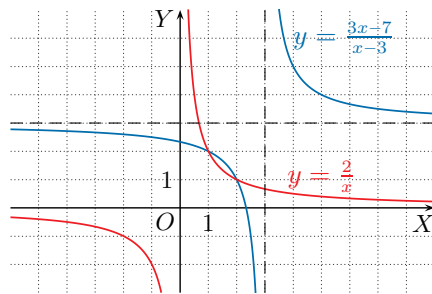
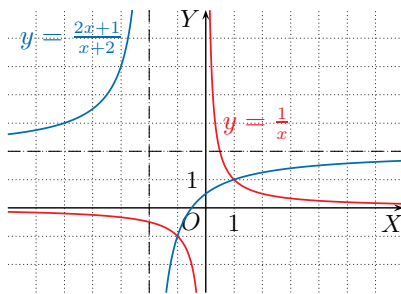
- a) $\frac{2x+2}{x-1} \geq 2x - 2$ b) $\frac{2x+2}{x-1} \leq 4x - 2$

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność.

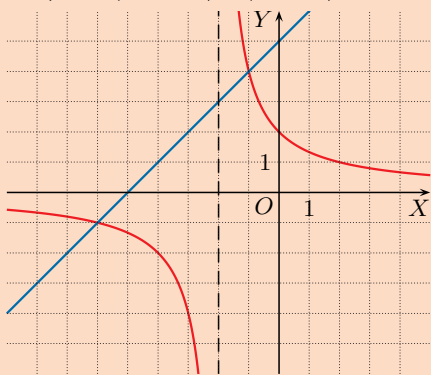
- a) $\frac{4}{x+2} \geq x + 5$ b) $\frac{x-1}{x+1} \leq x - 1$ c) $\frac{2x-5}{x-3} \geq x - 1$

5. Rozwiąż algebraicznie nierówność, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, korzystając z rysunku.

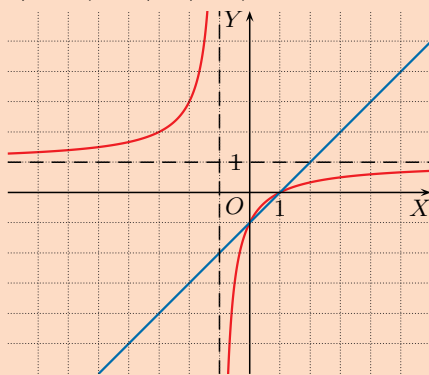
- a) $\frac{2x+1}{x+2} \leq \frac{1}{x}$ b) $\frac{3x-7}{x-3} > \frac{2}{x}$



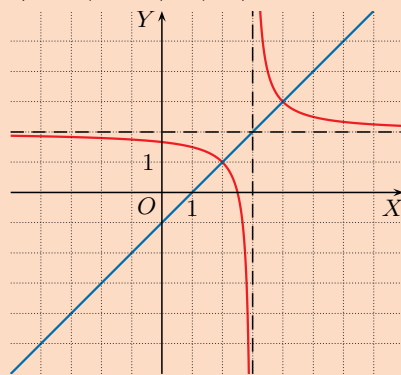
4. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (-2; -1)$



- b) $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$



- c) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4)$



6. Naskicuj wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$. Rozwiąż tę nierówność algebraicznie.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x-4} + 4$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $\frac{x-3}{x-4} \leq \frac{x-1}{x-3}$ c) $\frac{4-2x}{x+1} > \frac{1-x}{x}$ e) $\frac{4-x}{2x-2} \geq \frac{x-3}{1-2x}$
 b) $\frac{x+3}{x+2} \geq \frac{x+3}{2x+7}$ d) $\frac{x+3}{1-x} < \frac{5-x}{x+2}$ f) $\frac{4x+2}{2x-6} \leq \frac{2x+2}{2x+3}$

8. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{8}{x+2} > 2\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{4}{x+1} \geq -2\right\}$
 b) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x}{x-1} < 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x-1}{x-3} \geq \frac{x+1}{x-2}\right\}$
 c) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{2x+1}{x+1} \geq 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{4x-1}{4x+3} \leq \frac{2x+3}{2x-5}\right\}$

9. Rozwiąż nierówność.

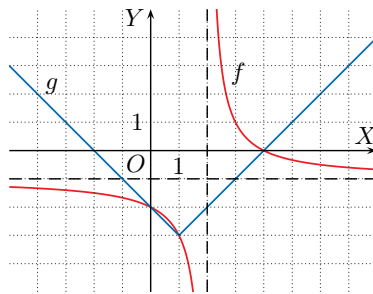
a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} > 0$ d) $\frac{2x-5}{x^2-16} \leq \frac{x}{x+4}$ g) $\frac{2x+1}{2x^2+7x} < \frac{2x+3}{2x^2+5x}$
 b) $\frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} \leq 0$ e) $\frac{x+3}{x^2-16} \geq \frac{2x}{x^2-4x}$ h) $\frac{2x}{x^2-1} \leq \frac{2x+3}{3x^2+3x}$
 c) $\frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12} \geq 0$ f) $\frac{x-1}{x^2+2x} > \frac{2-x}{x^2+x}$ i) $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{6x+2}{x^2-4}$

10. Rozwiąż nierówność.

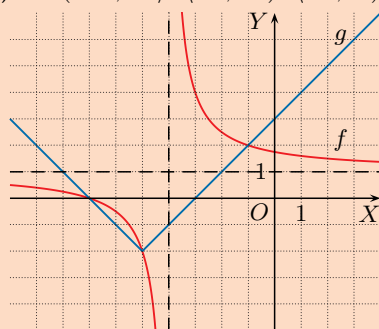
a) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} \geq 2$ e) $\frac{2}{9x^2-1} \leq \frac{3x+2}{3x-1} + 1$
 b) $\frac{1}{4-x} + \frac{3x}{x+2} < 3$ f) $\frac{2x^2-3}{(x-1)^3} \geq \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$
 c) $\frac{4}{x-3} - 1 \leq \frac{2x+3}{2x+1}$ g) $\frac{x+2}{x(x+1)} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{2x+2}{x(x+2)}$
 d) $\frac{3x}{x^2-4} > \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$ h) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} > \frac{2x+3}{x(x+1)}$

11. Rozwiąż nierówność $f(x) \leq g(x)$.

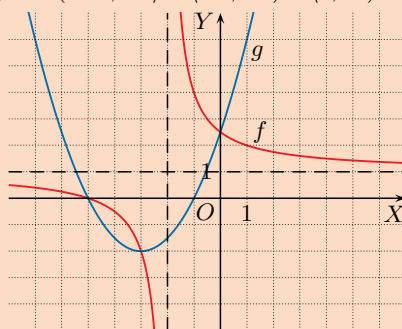
a) $f(x) = \frac{4-x}{x-2}$, $g(x) = |x-1| - 3$
 (rysunek obok)
 b) $f(x) = \frac{x+7}{x+4}$, $g(x) = |x+5| - 2$
 c) $f(x) = \frac{2x-8}{x-3}$, $g(x) = -x^2 + 4x$
 d) $f(x) = \frac{x+5}{x+2}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$



11. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (4; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; -4) \cup (-1; \infty)$



c) $x \in (1; 2) \cup (3; 4)$
 d) $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; -2) \cup (0; \infty)$



6. a) $x \neq 0$ i $2x(1-x) \geq 0$,
 zatem $x \in (0; 1)$
 b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$
 i $-4x(x-1)(x-3)(x-4) \geq 0$,
 zatem $x \in (0; 1) \cup (3; 4)$
7. a) $x \in (3; 4) \cup (5; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -5) \cup (-\frac{7}{2}; -3) \cup (-2; \infty)$
 c) $x \in (-1; 0) \cup (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$
 d) $x \in (-2; -\frac{11}{11}) \cup (1; \infty)$
 e) $x \in (-2; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$
 f) $x \in (-3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}) \cup (-3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; 3)$
8. a) $A \cup B = (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$,
 $A \cap B = (-1; 2)$,
 $A \setminus B = (-2; -1)$
 b) $A \cup B = (-\infty; 2) \cup (3; 5)$,
 $A \cap B = (-\infty; 1)$, $A \setminus B = \emptyset$
 c) $A \cup B = (-\infty; -1) \cup (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{10}) \cup (0; \infty)$,
 $A \cap B = (\frac{5}{2}; \infty)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -1) \cup (0; \frac{5}{2})$
9. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 b) $x \in (-\frac{1}{2}; 0)$
 c) $x \in \{0\} \cup (3; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -4) \cup (1; 4) \cup (5; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (0; 4)$
 f) $x \in (-2; -\frac{\sqrt{10}}{2}) \cup (-1; 0) \cup (\frac{\sqrt{10}}{2}; \infty)$
 g) $x \in (-\infty; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; -2) \cup (0; \infty)$
 h) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
 i) $x \in (-2; 0) \cup (2; 3)$
10. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{5}{2}; -2)$
 b) $x \in (-2; \frac{22}{7}) \cup (4; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 3) \cup (2 + 2\sqrt{2}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{12}) \cup (-\frac{1}{3}; \frac{-3+\sqrt{17}}{12}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$
 g) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; \infty)$
 h) $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$

Uczeń:

- wyznacza dziedzinę i miejsce zerowe funkcji, w której wzorze występują ułamki i pierwiastki
- wyznacza dziedzinę i miejsce zerowe funkcji wymiernej danej wzorem
- bada, czy dane funkcje są równe, i szkicuje ich wykresy
- wyznacza iloczyn i iloraz danych funkcji wymiernych, określa dziedziny iloczynu i ilorazu
- rozwiązuje zadania, korzystając z danego wykresu funkcji wymiernej, oraz zadania z parametrem dotyczące funkcji wymiernej

Ćwiczenie 1

- $\langle 8; \infty \rangle$
- $(-\infty; 3]$
- $(-\infty; 0)$
- $(0; \infty)$
- $(2; \infty)$
- $(-2; \infty)$
- $\{1; 6\}$
- $\langle -6; 0 \rangle \cup (0; 3)$
- $(-2; 2) \cup (2; 4)$

Ćwiczenie 2

- $D = (-2, 2) \cup (2; \infty)$, nie ma
- $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0)$, $f(0) = 0$
- $D = (-2; 1]$, $f(1) = 0$
- $D = (3; \infty)$, nie ma
- $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, nie ma
- $D = \{1\}$, $f(1) = 0$

3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

Gdy jest podany wzór funkcji $y = f(x)$, ale nie została określona jej dziedzina, przyjmuje się, że dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których wzór funkcji ma sens liczbowy (taką dziedzinę nazywa się też **dziedziną naturalną** funkcji).

Przykład 1

Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ ma sens liczbowy, gdy $x \geq 0$ (ze względu na wyrażenie pod pierwiastkiem) oraz $x \neq 2$ (ze względu na mianownik ułamka). Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle 0; 2 \rangle \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 1

Określ dziedzinę funkcji f .

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|--|
| a) $f(x) = \sqrt{x-8}$ | d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ | g) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}}$ |
| b) $f(x) = \sqrt{3-x}$ | e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$ | h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{x^2\sqrt{3-x}}$ |
| c) $f(x) = \sqrt{-x}$ | f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ | i) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x^2-4)\sqrt{x+2}}$ |

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$ ma sens liczbowy, gdy $x+1 > 0$, zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-1; \infty)$.

Równość $x^2-4 = 0$ jest spełniona dla $x = -2$ oraz $x = 2$. Zauważ, że $-2 \notin D_f$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2.

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę funkcji f . Czy funkcja f ma miejsce zerowe?

- | | | |
|--------------------------------------|---|---|
| a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$ | c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$ | e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ |
| b) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2-x^2}$ | d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$ | f) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{1-x}}$ |

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^2-16}{ x +4}$ | b) $f(x) = \frac{5- x }{x^2-25}$ | c) $f(x) = \frac{x(x-3)}{ x -3}$ |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

Ćwiczenie 3

- $D = \mathbf{R}$, $f(-4) = f(4) = 0$
- $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, brak miejsc zerowych
- $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $f(0) = 0$

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami ($w \neq 0$), nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których $w(x) \neq 0$.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji wymiernej $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$.

- a) $v(x) = 2x^6 - 1$, $w(x) = 3x^2 - 6$ d) $v(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $w(x) = x^4 + 1$
 b) $v(x) = x - 1$, $w(x) = x^4 - 16$ e) $v(x) = x^2 - 4$, $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$
 c) $v(x) = 2x^2 - x$, $w(x) = 4x^3 + x^2$ f) $v(x) = x^3 + x$, $w(x) = x^3 + 7x^2 - 6$

Przykład 3

Określ dziedziny funkcji: f , g i h , a następnie uprość ich wzory.

$$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}, \quad D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}, \quad D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } g(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}, \quad D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } h(x) = \frac{x}{x-1}$$

Zwróć uwagę, że funkcje: f , g , h nie są równe, gdyż mają różne dziedziny.

Definicja

Funkcje f i g o przeciwdziedzinie $\mathbf{R}$ są równe, jeśli mają tę samą dziedzinę D oraz dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x) = g(x)$.

Ćwiczenie 5

Zbadaj, czy funkcje f i g są równe. Naszkicuj ich wykresy.

- a) $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $g(x) = x$ c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, $g(x) = \frac{x+3}{(x+3)^2}$
 b) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$

Ćwiczenie 6

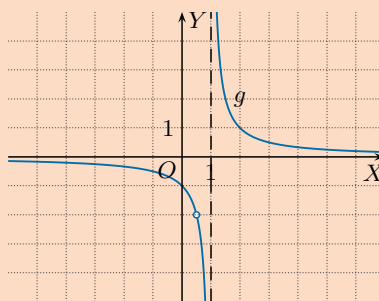
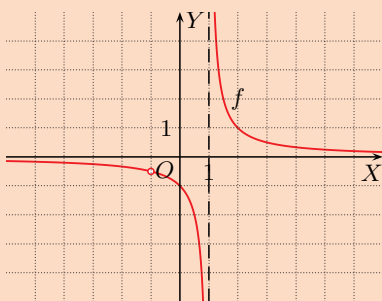
Wyznacz sumę funkcji wymiernych f i g oraz określ jej dziedzinę.

- a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{-2}{x-4}$
 b) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $g(x) = \frac{1-x}{2x+1}$

Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi.

Ćwiczenie 5

- d) nie, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$, czyli $D_f \neq D_g$

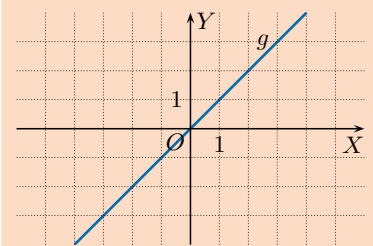
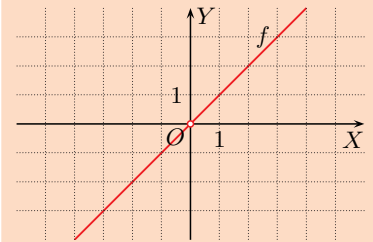


Ćwiczenie 4

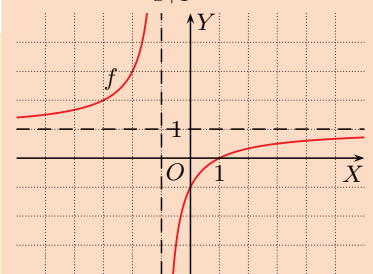
- a) $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ b) $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$
 c) $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, 0\}$ d) $\mathbf{R}$ e) $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$
 f) $\mathbf{R} \setminus \{-3 - \sqrt{15}, -1, -3 + \sqrt{15}\}$

Ćwiczenie 5

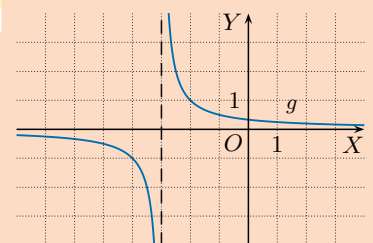
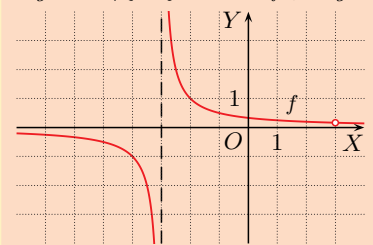
- a) nie, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbf{R}$,
 czyli $D_f \neq D_g$



- b) tak, $D_f = D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
 oraz $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = g(x)$



- c) nie, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$,
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, czyli $D_f \neq D_g$



Ćwiczenie 6

- a) $f(x) + g(x) = \frac{x-12}{x(x-4)}$,
 $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$
 b) $f(x) + g(x) = \frac{4x-1}{4x^2-1}$,
 $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

Ćwiczenie 7

a) $f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{2(x+1)}$,

$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2(x+2)^2}$,

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$

b) $f(x) \cdot g(x) = \frac{2(2x-1)^2}{(x-2)(x+2)^2}$,

$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{x-2}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$

c) $f(x) \cdot g(x) = (2x-1)(x-3)$,

$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}\}$;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x-1)(2x+1)^2}{(x-3)(x+3)^2}$,

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}, 3\}$

d) $f(x) \cdot g(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-4x+5)}{x^3(x+1)}$,

$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$;

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x(x^2-4x+5)}$,

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $x = 1$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$,
brak miejsc zerowych

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $x = -1$, $x = \frac{1}{4}$

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $x = 5$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$,
 $h(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-1; \frac{1}{2}) \cup$
 $\cup (2; \infty)$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 1\}$,
 $h(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{5}$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-\infty; -\frac{3}{5}) \cup$
 $\cup (-\frac{1}{3}; 1)$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}\}$,
brak miejsc zerowych,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup$
 $\cup (\frac{1}{2}; \infty)$

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,
 $h(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-2; 1) \cup$
 $\cup (2; \infty)$

Przykład 4

Wyznacz iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ i $g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$.

Aby funkcje f , g oraz ich iloraz były określone, muszą być spełnione warunki:
 $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $x^2 + 2x \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-1} : \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{\cancel{x}^1}{(x-1)\cancel{(x+1)}^1} \cdot \frac{\cancel{x+1}^1}{x(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz iloczyn $f \cdot g$ oraz iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji f i g . Określ dziedziny iloczynu i ilorazu.

a) $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x+3}$, $g(x) = \frac{x^2-9}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+x}$

Zadania

1. Określ dziedzinę i podaj miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

c) $f(x) = \frac{(4x-1)(x+1)(2x+1)}{4x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

d) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-x}$

2. Funkcja h dana jest za pomocą wzoru $h(x) = f(x) + g(x)$. Określ dziedzinę funkcji h , podaj jej miejsca zerowe i wyznacz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.

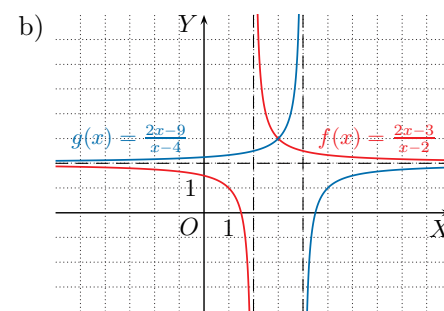
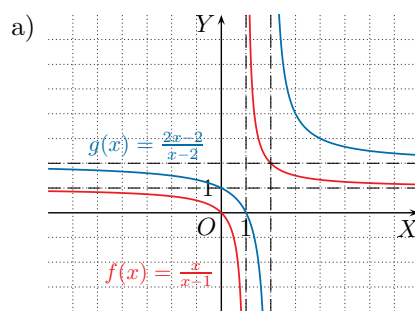
a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{3x+6}$

b) $f(x) = \frac{2}{3x+1}$, $g(x) = \frac{4}{1-x}$

d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$

3. Odczytaj z rysunku, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od wartości funkcji g . Rozwiąż nierówność $f(x) \cdot g(x) \leq 0$.



3. a) $f(x) > g(x)$ dla $x \in (1; 2)$,

$f(x) \cdot g(x) \leq 0$ dla $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$

b) $f(x) > g(x)$ dla $x \in (2; 3) \cup (4; \infty)$,

$f(x) \cdot g(x) \leq 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}; 2) \cup (4; \frac{9}{2})$

4. Podaj przykład funkcji wymiernej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 6)$ i której dziedziną jest zbiór D .

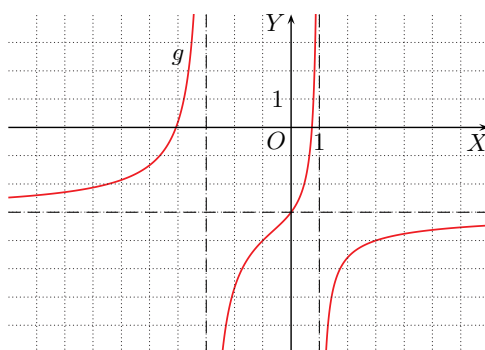
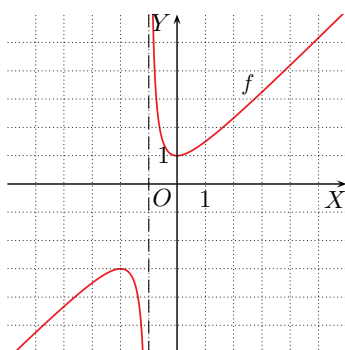
a) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$ c) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$

5. Dla jakich wartości parametru k dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+1}$ b) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+k}$ c) $f(x) = \frac{4x-1}{kx^2+kx+1}$

6. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{-3x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$$



- a) Określ dziedziny funkcji f i g . Dla każdej z tych funkcji podaj jej przedziały monotoniczności oraz argumenty, dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od -3 .

- b) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ oraz $g(x) = m$ w zależności od parametru m .

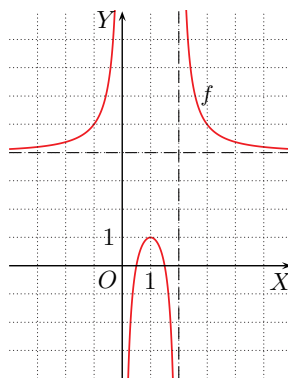
7. Niech $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^3-2x^2}$, $g(x) = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+x}$ i $h(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^3+3x}$.

- a) Określ dziedziny i uprość wzory tych funkcji.
b) Rozwiąż równanie $f(x) + g(x) - 2h(x) = 0$.
c) Rozwiąż nierówność $f(x) \cdot g(x) - h(x) \leq 0$.

8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{4x^2-8x+3}{x^2-2x}$$

- a) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .
b) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = |m|$ w zależności od parametru m .



4. a) np. $y = \frac{-18}{x-3}$
b) np. $y = \frac{-12}{(x+2)(x-1)}$
c) np. $y = \frac{-36}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5. a) $D_f = \mathbf{R}$, gdy $x^2 - kx + 1 \neq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, czyli $\Delta = k^2 - 4 < 0$, stąd $k \in (-2; 2)$.

- b) $D_f = \mathbf{R}$, gdy $x^2 - kx + k \neq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, czyli $\Delta = k^2 - 4k < 0$, stąd $k \in (0; 4)$.

- c) $D_f = \mathbf{R}$, gdy $kx^2 + kx + 1 \neq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.
Jeśli $k = 0$, to $kx^2 + kx + 1 = 1 \neq 0$.
Jeśli $k \neq 0$, to $kx^2 + kx + 1 \neq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdy $\Delta = k^2 - 4k < 0$, czyli $k \in (0; 4)$.
Zatem $k \in (0; 4)$.

6. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
 f rośnie w $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$,
 f maleje w $(-2; -1)$
i w $(-1; 0)$,
 $f(x) < -3$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$,
 $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$,
 g rośnie w: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$,
 $(1; \infty)$,
 $g(x) < -3$ dla
 $x \in (-3; 0) \cup (1; \infty)$

- b) Równanie $f(x) = m$ ma:
0 rozwiązań dla $m \in (-3; 1)$,
1 rozwiązanie dla $m \in \{-3, 1\}$,
2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.
Równanie $g(x) = m$ ma:
1 rozwiązanie dla $m = -3$,
2 rozwiązania dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$.

7. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{x}, \quad D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x}, \quad D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad h(x) = \frac{x+2}{x}$$

b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$

c) $x \in (-\infty; -2)$

8. a) 0 rozwiązań dla $m \in (1; 4)$,

1 rozwiązanie dla $m = 1$,

2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

b) 0 rozwiązań dla $m \in (-4; -1) \cup (1; 4)$,

1 rozwiązanie dla $m \in \{-1, 1\}$,

2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

Uczeń:

- rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną
- rozwiązuje równania i nierówności, w których występuje wartość bezwzględna tego samego wyrażenia

Ćwiczenie 1

- a) $x = \frac{1}{5}$ lub $x = 1$
 b) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{9}$
 c) $x = -15$ lub $x = 3$
 d) $x = \frac{25}{7}$ lub $x = 5$

Ćwiczenie 2

- a) $3|x - 3| = 9$, $x = 0$ lub $x = 6$
 b) $5|x - 2| = 5$, $x = 1$ lub $x = 3$
 c) $4|2x + 1| = 4$,
 $x = -1$ lub $x = 0$
 d) $4|3x + 2| = 8$,
 $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 0$

3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|3x - 4| = 2$.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 4 = 2 \\ 3x &= 2 \quad \text{lub} \quad 3x = 6 \\ x &= \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $|5x - 3| = 2$ b) $|9x + 5| = 4$ c) $|\frac{2}{3}x + 4| = 6$ d) $|6 - \frac{7}{5}x| = 1$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|2x - 4| + |3x - 6| = 20$.

$$\begin{aligned} 2|x - 2| + 3|x - 2| &= 20 \\ 5|x - 2| &= 20 \quad / : 5 \\ |x - 2| &= 4 \\ x - 2 &= -4 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 4 \\ x &= -2 \quad \text{lub} \quad x = 6 \end{aligned}$$

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ dla $b \neq 0$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 3| + |2x - 6| = 9$ c) $|4x + 2| - |2x + 1| + |6x + 3| = 4$
 b) $|4x - 8| + |2 - x| = 5$ d) $|6x + 4| - |3x + 2| + |9x + 6| = 8$

Twierdzenie

Jeśli $a > 0$, to $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $|2x + 3| < 5$.

$$\begin{aligned} -5 &< 2x + 3 < 5 \\ -8 &< 2x < 2 \quad / : 2 \\ -4 &< x < 1 \\ x &\in (-4; 1) \end{aligned}$$

Odejmujemy 3 od każdej ze stron nierówności, czyli od -5 , od $2x + 3$ i od 5 .

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|3x - 1| > 2$.

$$3x - 1 < -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 1 > 2$$

$$3x < -1 \quad \text{lub} \quad 3x > 3$$

$$x < -\frac{1}{3} \quad \text{lub} \quad x > 1$$

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$$

Jeśli $a > 0$, to $|x| > a$
wtedy i tylko wtedy, gdy
 $x < -a$ lub $x > a$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $|3x - 5| \leq 2$ c) $|2x + 4| < 8$ e) $|6 - 3x| \geq 9$ g) $|\frac{3}{2}x + 6| \leq 9$

b) $|4x - 2| > 8$ d) $|\frac{1}{3} + x| < \frac{1}{2}$ f) $|\frac{1}{3}x - 1| \leq 7$ h) $|\frac{2}{5}x - 2| > 3$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $|3x + 1| = 5$ c) $|\frac{3}{5}x + 1| = 2$ e) $|4x + 5| = 0$ g) $|x^2 - 1| = 3$

b) $|2x - 3| = 1$ d) $|2 - \frac{2}{3}x| = 3$ f) $|x - 6| = 4$ h) $|x^2 - 3| = 1$

2. Rozwiąż równanie.

a) $|3x - 6| = 7 + |x - 2|$ c) $|6 - x| + |\frac{1}{2}x - 3| + |2x - 12| = 7$

b) $|4x + 6| + |6x + 9| = 10$ d) $|x - 2| + |2x - 4| + |4x - 8| = 7$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $|5x + 2| < 7$ c) $|\frac{1}{3}x + 2| \leq 1$ e) $|\frac{2}{3}x - 3| \geq 5$ g) $|2x - 3| > 0$

b) $|3x - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ d) $|6x + 2| > 1$ f) $|3x - \frac{1}{4}| > \frac{1}{8}$ h) $|4x - 1| \leq 0$

4. Wyznacz zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podany warunek.

a) $3 \leq |2x + 1| \leq 5$ c) $-2 \leq 4 - 3|x| \leq 3$

b) $4 \leq |2 - 3x| \leq 7$ d) $3 \leq 5 - 2|x| \leq 6$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x - 6| + |3x - 9| < 15$ d) $|x + 1| + |3x + 3| \leq 6 - 2|x + 1|$

b) $|4x - 2| - |2x - 1| > 6$ e) $2|x - 4| + |3x - 12| \leq 4 + |8 - 2x|$

c) $|3x - 3| - |1 - x| \geq 8$ f) $|2x + 4| + 1 \leq |3x + 6| - |2 + x| + 2$

6. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + 2|x - 5| \leq 9$ c) $|2x + 8| + \sqrt{x^2 + 8x + 16} \geq 1$

b) $\sqrt{4x + x^2 + 4} + 3|x + 2| > 20$ d) $\sqrt{1 - 2x + x^2} - |2x - 2| + 5 < 0$

5. a) $x \in (0; 6)$

b) $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

d) $x \in (-2; 0)$

e) $x \in (\frac{8}{3}; \frac{16}{3})$

f) $x \in \mathbf{R}$

6. a) $|x - 5| + 2|x - 5| \leq 9$

$|x - 5| \leq 3$

$x \in (2; 8)$

b) $|x + 2| + 3|x + 2| > 20$

$|x + 2| > 5$

$x \in (-\infty; -7) \cup (3; \infty)$

c) $2|x + 4| + |x + 4| \geq 1$

$|x + 4| \geq \frac{1}{3}$

$x \in (-\infty; -\frac{13}{3}) \cup (-\frac{11}{3}; \infty)$

d) $|x - 1| - 2|x - 1| < -5$

$|x - 1| > 5$

$x \in (-\infty; -4) \cup (6; \infty)$

Ćwiczenie 3

a) $x \in \langle 1; \frac{7}{3} \rangle$

b) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

c) $x \in (-6; 2)$

d) $x \in (-\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$

e) $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$

f) $x \in \langle -18; 24 \rangle$

g) $x \in \langle -2; 10 \rangle$

h) $x \in (-\infty; -\frac{25}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -2$ lub $x = \frac{4}{3}$

b) $x = 1$ lub $x = 2$

c) $x = -5$ lub $x = \frac{5}{3}$

d) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{15}{2}$

e) $x = -\frac{5}{4}$

f) $x = 2$ lub $x = 10$

g) $x = -2$ lub $x = 2$

h) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

2. a) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{11}{2}$

b) $x = -\frac{5}{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$

c) $x = 4$ lub $x = 8$

d) $x = 1$ lub $x = 3$

3. a) $x \in (-\frac{9}{5}; 1)$

b) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

c) $x \in \langle -9; -3 \rangle$

d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{6}; \infty)$

e) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 12; \infty \rangle$

f) $x \in (-\infty; \frac{1}{24}) \cup (\frac{1}{8}; \infty)$

g) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$

h) $x = \frac{1}{4}$

4. a) $\begin{cases} |2x + 1| \geq 3 \\ |2x + 1| \leq 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty \rangle \\ x \in \langle -3; 2 \rangle \end{cases}$

$x \in \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$

b) $x \in \langle -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3} \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$

c) $x \in \langle -2; -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{1}{3}; 2 \rangle$

d) $x \in \langle -1; 1 \rangle$

Uczeń:

- rozwiązuje równania i nierówności typu
 $|x - a| + bx = c$,
 $|x - a| + bx < c$
- rozwiązuje równania i nierówności zapisane za pomocą sumy kilku wartości bezwzględnych
- rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując definicję oraz własności wartości bezwzględnej
- przekształca wzory funkcji, w których występują sumy (lub różnice) wyrażeń ze znakiem wartości bezwzględnej, szkicuje wykresy tych funkcji i podaje własności

Ćwiczenie 1

- a) Dla $x \in (-\infty; 1)$ mamy $x = -1$.
Dla $x \in \langle 1; \infty)$ mamy $x = -5$
– sprzeczność.
Ostatecznie $x = -1$.
- b) Dla $x \in (-\infty; 1)$ mamy $1 = 2$ – sprzeczność.
Dla $x \in \langle 1; \infty)$ mamy $x = 1,5$.
Ostatecznie $x = 1,5$.
- c) Dla $x \in (-\infty; -4)$ mamy $x = -1$ – sprzeczność.
Dla $x \in \langle -4; \infty)$ mamy $x = 5$.
Ostatecznie $x = 5$.
- d) Dla $x \in (-\infty; 3)$ mamy $x = 2$.
Dla $x \in \langle 3; \infty)$ mamy $-3 = -1$ – sprzeczność.
Ostatecznie $x = 2$.
- e) Dla $x \in (-\infty; -2)$ mamy $x = -2$ – sprzeczność.
Dla $x \in \langle -2; \infty)$ mamy $4 = 4$
– równanie tożsamościowe.
Ostatecznie $x \in \langle -2; \infty)$.
- f) Dla $x \in (-\infty; 4)$ mamy $x = 0$.
Dla $x \in \langle 4; \infty)$ mamy $x = 0$ – sprzeczność.
Ostatecznie $x = 0$.

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.11

*3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)

Przykład 1

Aby rozwiązać równanie $|x - 1| + 3x = 7$, rozpatrujemy następujące przypadki:

- 1° Jeśli $x - 1 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 1)$, 2° Jeśli $x - 1 \geq 0$, czyli $x \in \langle 1; \infty)$,
to równanie przybiera postać: to równanie przybiera postać:

$$-(x - 1) + 3x = 7$$

$$-x + 1 + 3x = 7$$

$$2x = 6$$

$$x = 3 \quad 3 \notin (-\infty; 1), \text{ sprzeczność}$$

$$(x - 1) + 3x = 7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2 \quad 2 \in \langle 1; \infty)$$

Zatem rozwiązaniem równania $|x - 1| + 3x = 7$ jest liczba 2.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| - 2x = 4$

c) $|x + 4| + 1 = 2x$

e) $|2x + 4| - 2x = 4$

b) $|x - 1| + x = 2$

d) $|3 - x| = x - 1$

f) $x|x - 4| = x^2 + 4x$

Przykład 2

Aby rozwiązać nierówność $2|x + 2| + x \leq 1$, rozpatrujemy następujące przypadki:

- 1° Jeśli $x + 2 < 0$, czyli $x \in (-\infty; -2)$, 2° Jeśli $x + 2 \geq 0$, czyli $x \in \langle -2; \infty)$,
to nierówność przybiera postać: to nierówność przybiera postać:

$$-2(x + 2) + x \leq 1$$

$$-2x - 4 + x \leq 1$$

$$-x \leq 5$$

$$x \geq -5$$

$$x \in \langle -5; -2)$$

$$2(x + 2) + x \leq 1$$

$$2x + 4 + x \leq 1$$

$$3x \leq -3$$

$$x \leq -1$$

$$x \in \langle -2; -1]$$

Uwzględniamy
założenie.

Zatem nierówność $2|x + 2| + x \leq 1$ zachodzi dla $x \in \langle -5; -1]$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 2| - 3x > 1$

c) $|x - 5| < x + 5$

e) $|3 - x| \leq x - |2x - 6|$

b) $|2x + 6| + x \leq 3$

d) $|6 + x| \geq 2x + 6$

f) $x|1 - x| \leq x + x^2$

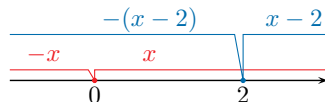
Ćwiczenie 2

- a) Dla $x \in (-\infty; 2)$ mamy $x < \frac{1}{4}$, czyli $x \in (-\infty; \frac{1}{4})$.
Dla $x \in \langle 2; \infty)$ mamy $x < -\frac{3}{2}$ – sprzeczność.
Ostatecznie $x \in (-\infty; \frac{1}{4})$.
- b) Dla $x \in (-\infty; -3)$ mamy $x \geq -9$, czyli $x \in \langle -9; -3)$.
Dla $x \in \langle -3; \infty)$ mamy $x \leq -1$, czyli $x \in \langle -3; -1]$.
Ostatecznie $x \in \langle -9; -1]$.

- c) Dla $x \in (-\infty; 5)$ mamy $x > 0$, czyli $x \in (0; 5)$.
Dla $x \in \langle 5; \infty)$ mamy $-5 < 5$, czyli $x \in \langle 5; \infty)$.
Ostatecznie $x \in (0; \infty)$.
- d) Dla $x \in (-\infty; -6)$ mamy $x \leq -4$, czyli $x \in (-\infty; -6)$.
Dla $x \in \langle -6; \infty)$ mamy $x \leq 0$, czyli $x \in \langle -6; 0]$.
Ostatecznie $x \in (-\infty; 0]$.
- e) Dla $x \in (-\infty; 3)$ mamy $x \geq \frac{9}{4}$, czyli $x \in \langle \frac{9}{4}; 3)$.
Dla $x \in \langle 3; \infty)$ mamy $x \leq 4\frac{1}{2}$, czyli $x \in \langle 3; 4\frac{1}{2}]$.
Ostatecznie $x \in \langle 2\frac{1}{4}; 4\frac{1}{2}]$.
- f) Dla $x \in (-\infty; 1)$ mamy $2x^2 \geq 0$, czyli $x \in (-\infty; 1)$.
Dla $x \in \langle 1; \infty)$ mamy $x \geq 0$, czyli $x \in \langle 1; \infty)$.
Ostatecznie $x \in \mathbf{R}$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $2|x| - |x - 2| = 1$.



1° Jeśli $x \in (-\infty; 0)$, to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} -2x - (-(x - 2)) &= 1 \\ -2x + x - 2 &= 1 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \quad -3 \in (-\infty; 0) \end{aligned}$$

2° Jeśli $x \in \langle 0; 2 \rangle$, to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} 2x - (-(x - 2)) &= 1 \\ 2x + x - 2 &= 1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \quad 1 \in \langle 0; 2 \rangle \end{aligned}$$

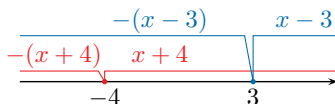
3° Jeśli $x \in \langle 2; \infty \rangle$, to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} 2x - (x - 2) &= 1 \\ 2x - x + 2 &= 1 \\ x &= -1 \quad -1 \notin \langle 2; \infty \rangle, \text{ sprzeczność} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniami równania $2|x| - |x - 2| = 1$ są liczby -3 i 1 .

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|x - 3| + |x + 4| < 9$.



1° Jeśli $x \in (-\infty; -4)$, to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} -(x - 3) - (x + 4) &< 9 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy, że $x \in (-5; -4)$.

2° Jeśli $x \in \langle -4; 3 \rangle$, to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} -(x - 3) + x + 4 &< 9 \\ 7 &< 9 \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest zawsze prawdziwa, zatem $x \in \langle -4; 3 \rangle$.

3° Jeśli $x \in \langle 3; \infty \rangle$, to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 4 &< 9 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy, że $x \in \langle 3; 4 \rangle$.

Zatem nierówność $|x - 3| + |x + 4| < 9$ zachodzi dla $x \in (-5; 4)$.

Ćwiczenie 3

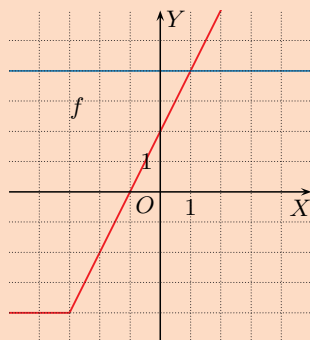
- a) $x = -1$ lub $x = 4$
 b) $x \in \langle 2; \infty \rangle$
 c) $x \in \langle 2; \infty \rangle$
 d) $x \in \langle 0; \infty \rangle$

Ćwiczenie 4

- a) $x \in (-1; 3)$
 b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup \langle \frac{7}{2}; \infty \rangle$
 c) $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 6; \infty \rangle$
 d) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; 7)$

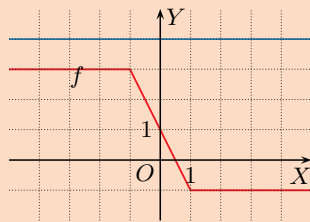
Ćwiczenie 5

- a) $\begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ 2x+2 & \text{dla } x \in \langle -3; \infty \rangle \end{cases}$



$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x \in (-\infty; 1]$$

- b) $\begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -2x+1 & \text{dla } x \in \langle -1; 1) \\ -1 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$



$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

- c) $\begin{cases} -x+5 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x+3 & \text{dla } x \in \langle 1; 2) \\ 5x-5 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$

$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x = 1$$

- d) $\begin{cases} -3x+1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x+3 & \text{dla } x \in \langle -1; 0) \\ x+3 & \text{dla } x \in \langle 0; 2) \\ 3x-1 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$

$$f(x) \leq 4 \text{ dla } x \in \langle -1; 1 \rangle$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $|x| + |x-3| = 5$
 b) $|x+4| - |2-x| = 6$
 c) $|x| + |x-2| = 2x-2$
 d) $|x| + |x+5| = 2x+5$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| + |x-2| < 4$
 b) $|x-1| + |3-x| \geq 3$
 c) $|x+2| - |3-x| \leq x-1$
 d) $|x| - |5-x| > x-2$

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = |x-1| + |x-3| - 6$$

Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq -2$.

1° Dla $x \in (-\infty; 1)$:

$$f(x) = -(x-1) - (x-3) - 6 = -2x-2$$

2° Dla $x \in \langle 1; 3)$:

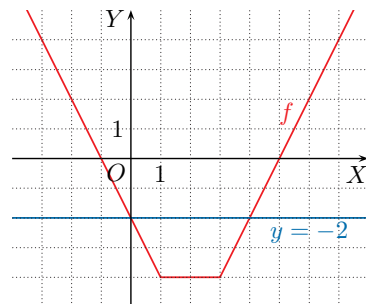
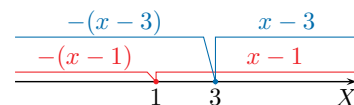
$$f(x) = (x-1) - (x-3) - 6 = -4$$

3° Dla $x \in \langle 3; \infty)$:

$$f(x) = (x-1) + (x-3) - 6 = 2x-10$$

Wzór funkcji f możemy więc zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -4 & \text{dla } x \in \langle 1; 3) \\ 2x-10 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty) \end{cases}$$



Nierówność $f(x) \geq -2$ jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0] \cup \langle 4; \infty)$.

Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 4$.

- a) $f(x) = |x+3| + x-1$
 b) $f(x) = |x-1| - |x+1| + 1$
 c) $f(x) = 2x + |1-x| + 2|x-2|$
 d) $f(x) = |x| + |x+1| + |x-2|$

Ćwiczenie 6

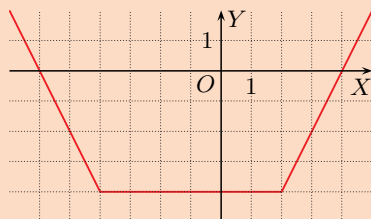
Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = |x+4| + |x-2| - 10$
 b) $f(x) = |x+2| - |x| - x$

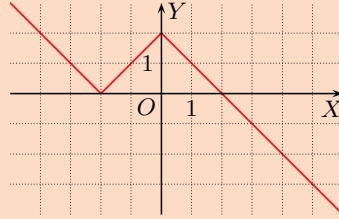
Ćwiczenie 6

- a) $\begin{cases} -2x-12 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ -4 & \text{dla } x \in \langle -4; 2) \\ 2x-8 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$

- b) $\begin{cases} -x-2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x+2 & \text{dla } x \in \langle -2; 0) \\ -x+2 & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$



$$P = \frac{(10+6) \cdot 4}{2} = 32$$



$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $|x+1| - |x| = 0$ c) $|x| - |x-4| = 2$ e) $|x-2| + |x+2| = 4$
 b) $|x| + |x+5| = 7$ d) $|x+3| + |x| = 3$ f) $|2x+4| - |x-1| = 3$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $\sqrt{x^2+6x+9} - |x-2| = x$ c) $|x-2| - |x-3| + |x| = 6$
 b) $\sqrt{4-4x+x^2} + \sqrt{x^2} = 6$ d) $|4-x| - |x| = |x+3|$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x-3| + |x| \leq 3$ d) $|3x-6| - |x+2| < 8$
 b) $|1-x| - |1+x| \geq 2$ e) $\sqrt{x^2+4x+4} + |x| \leq 5$
 c) $|x-5| + |x-1| \geq 4$ f) $\sqrt{9-6x+x^2} - 3 > \sqrt{x^2}$

4. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

- a) $f(x) = |x-2| + |x+1| - 5$ b) $f(x) = |1-x| - |x-3|$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $||x| - 3| = 5$.

Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$ lub $x = -a$.

$$|x| - 3 = 5 \quad \text{lub} \quad |x| - 3 = -5$$

$$|x| = 8 \quad \text{lub} \quad |x| = -2 \quad \text{sprzeczność}$$

$$x = 8 \quad \text{lub} \quad x = -8$$

Rozwiązaniem równania $||x| - 3| = 5$ są liczby -8 i 8 .

Rozwiąż równanie.

- a) $||x| - 1| = 1$ c) $||x+1| + 5| = 4$ e) $||2x+3| + 3| = 3$
 b) $||x| + 2| = 3$ d) $||x-3| - 6| = 2$ f) $|||x| - 1| - 1| = 1$

6. Rozwiąż nierówność.

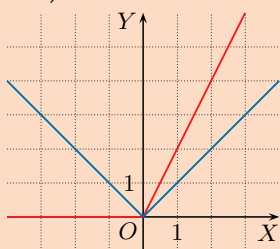
- a) $||x| - 3| < 2$ c) $||x+4| - 3| > 2$ e) $||2-x| + 5| \leq 6$
 b) $||x| + 4| > 5$ d) $||2x-1| + 2| \geq 3$ f) $|7 - |2x+1|| \geq 7$

7. Rozwiąż równanie.

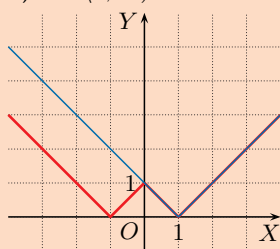
- a) $|x + |x|| = |x|$ b) $||x| - 1| = |x-1|$ c) $|x - |x-1|| = |x-1|$

Uwaga. Zadanie 7 można rozwiązać algebraicznie, tak jak zadanie 5, lub graficznie.

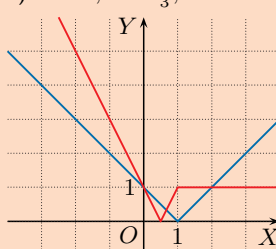
7. a) $x = 0$



b) $x \in (0; \infty)$



c) $x = 0, x = \frac{2}{3}, x = 2$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -\frac{1}{2}$

b) $x = -6$ lub $x = 1$

c) $x = 3$

d) $x \in \langle -3; 0 \rangle$

e) $x \in \langle -2; 2 \rangle$

f) $x = -8$ lub $x = 0$

2. a) $x = -5$ lub $x = -1$

lub $x = 5$

b) $x = -2$ lub $x = 4$

c) $x = -7$ lub $x = 5$

d) $x = -7$ lub $x = \frac{1}{3}$

3. a) $x \in \langle 0; 3 \rangle$

b) $x \in (-\infty; -1]$

c) $x \in \mathbf{R}$

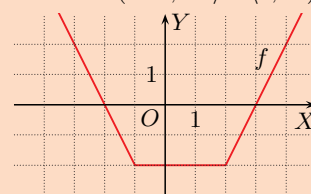
d) $x \in (-1; 8)$

e) $x \in \langle -\frac{7}{2}; \frac{3}{2} \rangle$

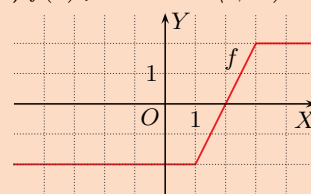
f) sprzeczna

4. a) $f(x) \geq 0$ dla

$$x \in (-\infty; -2] \cup \langle 3; \infty)$$



b) $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle 2; \infty$



5. a) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$

b) $x = -1$ lub $x = 1$

c) sprzeczne

d) $x = -5$ lub $x = -1$

lub $x = 7$ lub $x = 11$

e) $x = -\frac{3}{2}$

f) $x = -3$ lub $x = -1$

lub $x = 1$ lub $x = 3$

6. a) $x \in (-5; -1) \cup (1; 5)$

b) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -9) \cup (-5; -3) \cup (1; \infty)$

d) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty$

e) $x \in \langle 1; 3 \rangle$

f) $x \in (-\infty; -\frac{15}{2}) \cup \{-\frac{1}{2}\} \cup \langle \frac{13}{2}; \infty$

Uczeń:

- stosuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań i nierówności wymiernych
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających zadane warunki

Ćwiczenie 1

- a) $x = -5$ lub $x = 1$
 b) $x = \frac{3}{35}$ lub $x = \frac{1}{5}$
 c), d) sprzeczne

Ćwiczenie 2

- a) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{4}$
 b) $x = -1$ lub $x = 1$
 c) $x = -7$ lub $x = 1$
 d) $x = \frac{3}{5}$

*3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{2}{|x-1|} = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 1$.

Mnożymy obie strony równania przez $|x-1|$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |x-1| &= 2 \\ x-1 &= -2 \quad \text{lub} \quad x-1 = 2 \\ x &= -1 \quad \text{lub} \quad x = 3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{3}{|x+2|} = 1$ b) $\frac{2}{|7x-1|} = 5$ c) $\frac{-5}{|2x-1|} = 3$ d) $\frac{1}{|5x-2|} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\left| \frac{x+1}{x-2} \right| = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+1}{x-2} \right| &= 1 \quad / \cdot |x-2| \\ |x+1| &= |x-2| \\ x+1 &= x-2 \quad \text{lub} \quad x+1 = -(x-2) \\ 1 &= -2 \quad \text{lub} \quad 2x = 1 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{p}{q} \right| = \frac{|p|}{|q|}, \text{ gdy } q \neq 0$$

$$|p| = |q| \text{ oznacza, że: } p = q \text{ lub } p = -q$$

Pierwsze równanie jest sprzeczne, z drugiego otrzymujemy rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$.

Uwaga. Równanie z przykładu 2. możemy też rozwiązać, korzystając z tego, że:

$$\frac{x+1}{x-2} = -1 \quad \text{lub} \quad \frac{x+1}{x-2} = 1$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $\left| \frac{2x-1}{6x+3} \right| = 1$ b) $\left| \frac{2x+8}{-4x-1} \right| = 2$ c) $\left| \frac{5x-1}{x-2} \right| = 4$ d) $\left| \frac{5x-3}{3x-2} \right| = 0$

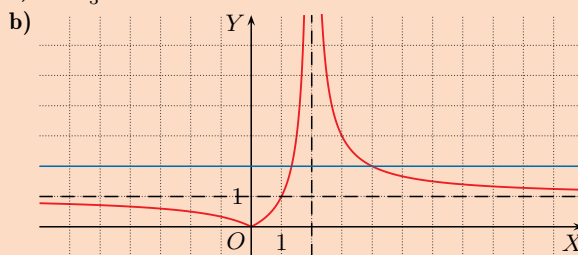
Ćwiczenie 3

a) Rozwiąż równanie $\left| \frac{x}{x-2} \right| = 2$.

b) Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x}{x-2} \right|$. Odczytaj z wykresu rozwiązania równania $f(x) = 2$.

Ćwiczenie 3

a) $x = \frac{4}{3}$ lub $x = 4$



Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\frac{5}{|3-x|} > 1$.

Zakładamy, że $x \neq 3$. Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez $|3-x|$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3-x| &< 5 \\ -5 &< 3-x < 5 \\ x &\in (-2; 8) \end{aligned}$$

Uwzględniamy założenie i otrzymujemy rozwiązanie: $x \in (-2; 3) \cup (3; 8)$.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\frac{1}{|x-2|} < 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$. Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez $|x-2|$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |x-2| &> 1 \\ x-2 &< -1 \quad \text{lub} \quad x-2 > 1 \\ x &< 1 \quad \text{lub} \quad x > 3 \end{aligned}$$

Zatem $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } \frac{2}{|x-1|} > 1 \quad \text{b) } \frac{7}{|x+2|} \leq 1 \quad \text{c) } \frac{6}{|3x+1|} - 2 \geq 1 \quad \text{d) } \left| 1 + \frac{4}{x} \right| \leq 3$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{7}{|x-1|} &= 2 & \text{c) } \frac{2}{|6-3x|} &= \frac{1}{2} & \text{e) } \left| \frac{x-3}{x+6} \right| &= 5 & \text{g) } \left| \frac{4x+1}{6x-1} \right| &= 0 \\ \text{b) } \frac{6}{|2x+1|} &= 3 & \text{d) } \frac{1}{|4x-1|} &= -2 & \text{f) } \left| \frac{2x-3}{5-x} \right| &= 2 & \text{h) } \left| \frac{x-3}{6-2x} \right| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{8}{|2x-6|} &> 1 & \text{d) } \frac{2}{|x+3|} &< 1 & \text{g) } \frac{-2}{|3x-2|} &\leq \frac{-3}{|3x-2|} + 1 \\ \text{b) } \frac{1}{|4x-8|} &> -3 & \text{e) } \frac{1}{|4-x|} &\leq 2 & \text{h) } \frac{-3}{|x-2|} &> \frac{1}{|2x-4|} - 7 \\ \text{c) } \frac{8}{|4-2x|} &\leq -2 & \text{f) } \frac{6}{|1-2x|} &\geq 1 & \text{i) } \frac{1}{|2x-1|} &\leq \frac{1}{|3-6x|} + 3 \end{aligned}$$

2. a) $x \in (-1; 3) \cup (3; 7)$

b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$

c) sprzeczna

d) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$

e) $x \in (-\infty; \frac{7}{2}) \cup (\frac{9}{2}; \infty)$

f) $x \in (-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$

g) $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$

h) $x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

i) $x \in (-\infty; \frac{7}{18}) \cup (\frac{11}{18}; \infty)$

Ćwiczenie 4

a) $|x-1| < 2$, $x \neq 1$,

$-1 < x < 3$,

$x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$

b) $|x+2| \geq 7$, $x \neq -2$,

$x \leq -9$ lub $x \geq 5$,

$x \in (-\infty; -9) \cup (5; \infty)$

c) $|3x+1| \leq 2$, $x \neq -\frac{1}{3}$,

$-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$,

$x \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

d) $-3 \leq 1 + \frac{4}{x} \leq 3$, $x \neq 0$,

$\frac{1+x}{x} \geq 0$ i $\frac{2-x}{x} \leq 0$ i $x \neq 0$,

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

i $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,

zatem $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -\frac{5}{2}$ lub $x = \frac{9}{2}$

b) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$

c) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = \frac{10}{3}$

d) sprzeczne

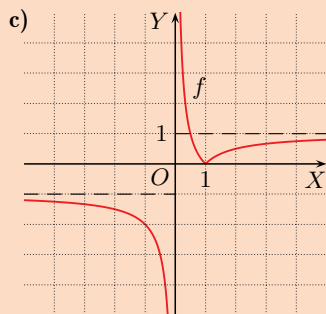
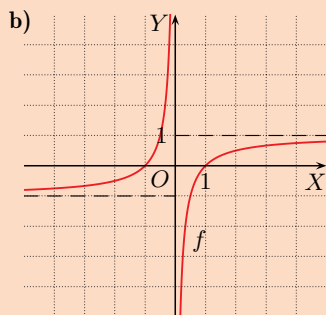
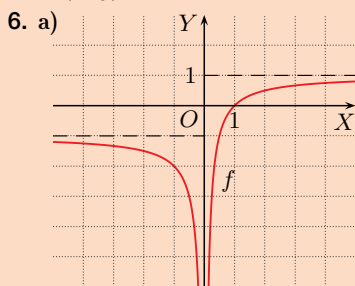
e) $x = -\frac{33}{4}$ lub $x = -\frac{9}{2}$

f) $x = \frac{13}{4}$

g) $x = -\frac{1}{4}$

h) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$

3. a) $x \in (-\infty; \frac{7}{4})$
 b) $x \in (-5; -1) \cup (-1; \frac{1}{3})$
 c) $x = 1$
 d) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$
 e) $x \in (-\infty; \frac{10}{9}) \cup (2; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; \infty)$
 g) $x \in (-1; 2) \cup (2; \infty)$
 h) $x \in (-\infty; -\frac{10}{11}) \cup (-\frac{2}{13}; 4) \cup (4; \infty)$
 i) $x \in (-\infty; -\frac{20}{3}) \cup (-\frac{12}{5}; 4) \cup (4; \infty)$
4. a) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 1$
 b) $x = -1$ lub $x = -1 + \sqrt{2}$
 c) $x = 6$
 5. a) $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
 b) $x \in (-2; -\frac{4}{3})$
 c) $x \in (-\infty; 0)$
 d) $x = -2$ lub $x = 2$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{3}; 0) \cup (0; \frac{4}{3}) \cup (4; \infty)$



3. Rozwiąż nierówność.

a) $\left| \frac{2x-3}{x-2} \right| \leq 2$ d) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 1$ g) $\frac{1}{|x+4|} \leq \frac{1}{|x-2|}$
 b) $\left| \frac{3-x}{x+1} \right| > 2$ e) $\left| \frac{x+2}{2x-3} \right| \leq 4$ h) $\frac{6}{|4-x|} > \frac{1}{|2x+1|}$
 c) $\left| \frac{x-1}{x+7} \right| \leq 0$ f) $\left| \frac{x+3}{x-1} \right| > 0$ i) $\frac{2}{|x-4|} \geq \frac{1}{|2x+8|}$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $\frac{3x}{|x-2|} = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$.

1° Dla $x > 2$ mamy $\frac{3x}{x-2} = 1$, czyli $3x = x - 2$.

Stąd $x = -1$ – sprzeczne z założeniem, że $x > 2$.

2° Dla $x < 2$ mamy $\frac{3x}{-x+2} = 1$, czyli $3x = -x + 2$.

Stąd $x = \frac{1}{2}$.

Zatem rozwiązaniem równania $\frac{3x}{|x-2|} = 1$ jest liczba $\frac{1}{2}$.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{|2x-1|} = 1$ b) $\frac{1}{|x|} = x + 2$ c) $\frac{2x}{|x-3|} = x - 2$

*5. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{|x-1|}{x} > 0$ c) $\frac{|1-x|}{x} < 0$ e) $\left| \frac{2}{|x|} - 1 \right| < 3$
 b) $\frac{|x|}{x+2} > 2$ d) $\left| \frac{2}{|x|} - 1 \right| \leq 0$ f) $\left| \frac{2}{|x|} - 1 \right| > \frac{1}{2}$

*6. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x-1}{|x|}$ b) $f(x) = \frac{|x|-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

*7. Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych.

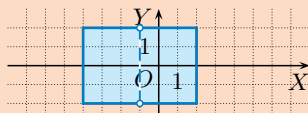
a) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{3}{|x+1|} \geq 1 \text{ i } |y| \leq 2 \right\}$
 b) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{|5-x|} < \frac{1}{|x+1|} \right\}$

*8. Na rysunku obok przedstawiono zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$|y| \leq \frac{a}{|x+1|} - 1$$

Oblicz współczynnik a .

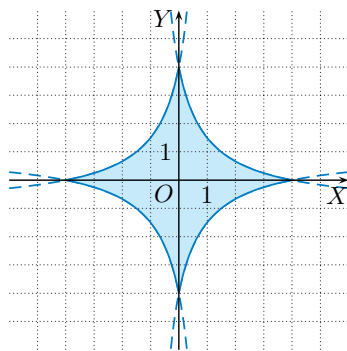
7. a) $x \in (-4; -1) \cup (-1; 2)$, $y \in (-2; 2)$



b) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$, $y \in \mathbf{R}$



8. Do figury należy punkt $(0, 4)$. Stąd mamy $4 = \frac{a}{|x+1|} - 1$. Zatem $a = 5$.



3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Przykład 1

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmienia. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci $\frac{6}{x}$, wówczas nowy ułamek będzie miał postać $\frac{6-2}{x-3}$, czyli $\frac{4}{x-3}$. Otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$6(x-3) = 4x$$

$$x = 9$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 1

a) Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmienia. Jaki to ułamek?

b) Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

Ćwiczenie 2

a) Ola kupiła cukierki A w cenie x zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B droższych o 4 zł/kg i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A, a ile – cukierków B?

b) Cena winogron to obecnie x zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

Zadania

1. a) Licznik pewnego ułamka jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 4, a mianownik o 7, to wartość ułamka się nie zmienia. Wyznacz ten ułamek.

b) Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{x-3}{x} = \frac{x-3+4}{x+7}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-7, 0\}$
 $x = 7$

Szukany ułamek: $\frac{4}{7}$.

b) $2 \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x-2+9}{x+5}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, 0\}$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 5$$

Nieskracalny ułamek: $\frac{3}{5}$.

Uczeń:

– wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań tekstowych

Ćwiczenie 1

a) $\frac{10+20}{x+30} = \frac{10}{x}$,

gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-30, 0\}$,

$$x = 15$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{10}{15}$.

b) Niech $x, x+3$

($x > 0$) – szukane liczby.

$$\frac{x}{x+3} = \frac{75}{100}, \text{ gdzie } x \neq -3,$$

$$x = 9$$

Zatem szukane liczby to 9 i 12.

Ćwiczenie 2

a) $\frac{30}{x+4} = \frac{24}{x}$, gdzie $x > 0$,

$$x = 16$$

Cukierki A kosztują 16 zł/kg.

Cukierki B kosztują 20 zł/kg.

b) $\frac{20}{x+4} = \frac{12}{x-1}$, gdzie $x > 1$,

$$x = 8,5$$

Winogrona kosztują 8,50 zł/kg.

2. a) Niech x – wiek mamy,
 $(x + 6)$ – wiek taty.

$$\frac{x}{x+6} = \frac{8}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 48$$

Mama ma 48 lat,
 a tata 54 lata.

- b) Niech x – szukana liczba lat.

$$\frac{25+x}{13+x} = \frac{3}{2}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 11 \text{ lat}$$

3. a) Różnica obwodów:

$$2(x + 3x) = 8x$$

I przypadek

$$\frac{32-x}{51-3x} = \frac{3}{4}, \text{ gdzie } x \in (0; 17)$$

$$x = 5$$

Obwód zmniejszył się o 40 cm.

II przypadek

$$\frac{32-x}{51-3x} = \frac{4}{3}, \text{ gdzie } x \in (0; 17)$$

$$x = 12$$

Obwód zmniejszył się o 96 cm.

- b) Różnica obwodów:

$$2(x + 2x) = 6x$$

I przypadek

$$\frac{30+x}{18+2x} = \frac{5}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 180$$

II przypadek

$$\frac{30+x}{18+2x} = \frac{9}{5}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = -\frac{12}{13} \text{ – sprzeczne}$$

III przypadek

$$\frac{30+2x}{18+x} = \frac{5}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

W tym przypadku sprzeczność można zauważyć bez obliczeń. Wiemy, że:

$$30 > 18 \text{ i } 2x > x, \text{ zatem}$$

$$30 + 2x > 18 + x, \text{ ale } 5 < 9.$$

IV przypadek

$$\frac{30+2x}{18+x} = \frac{9}{5}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 12$$

Zatem obwód zwiększył się o 72 cm lub o 1080 cm.

4. $\frac{w}{10}$ – praca wykonana przez Artura w ciągu godziny
 $\frac{w}{6}$ – praca wykonana przez Darka w ciągu godziny
 $\frac{w}{10} + \frac{w}{6} = \frac{4}{15}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny
 $w : \frac{4}{15}w = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ [h]}$
 Razem malowaliby 3 godziny i 45 minut.

2. a) Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile jego tata?

b) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?

3. a) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o x cm, a dłuższy bok – o $3x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3:4. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.

b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o x cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5:9. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Oznaczmy przez w pracę, którą należy wykonać. Wówczas:

$$\frac{w}{4} \text{ – praca wykonana przez Piotra w ciągu godziny,}$$

$$\frac{w}{8} \text{ – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,}$$

$$\frac{w}{4} + \frac{w}{8} = \frac{3}{8}w \text{ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.}$$

Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:

$$w : \frac{3}{8}w = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [h]}$$

czyli 2 godzin i 40 minut.

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

5. Dwie koparki, pracując razem, wykonują wykop w ciągu 8 dni. Gdyby w tym samym tempie pracowała tylko pierwsza z nich, wykop powstałby w ciągu 12 dni. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu drugiej koparce?
6. Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?
5. W ciągu jednego dnia pierwsza koparka wykonuje $\frac{1}{12}$ wykopu, a obie – $\frac{1}{8}$ wykopu. Druga koparka w ciągu jednego dnia wykonuje $\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$ wykopu. Zatem druga koparka potrzebuje 24 dni.
6. $\frac{\frac{1}{2}w}{6} = \frac{w}{12}$ – praca wykonana przez pierwszą koparkę w ciągu godziny
 $\frac{\frac{1}{2}w}{9} = \frac{w}{18}$ – praca wykonana przez drugą koparkę w ciągu godziny
 $\frac{w}{12} + \frac{w}{18} = \frac{5}{36}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny
 $w : \frac{5}{36}w = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5} \text{ [h]}$
 Obie koparki potrzebują 7 godzin i 12 minut.

3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi – 240 km od tego miasta. Średnia prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz średnie prędkości, z jakimi poruszały się te samochody.

Oznaczmy przez v_1 i v_2 średnie prędkości samochodów. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1 - 20} \quad \text{Korzystamy ze wzoru } t = \frac{s}{v}, \text{ gdzie } t \text{ oznacza czas, } s - \text{drogę.}$$

$$320(v_1 - 20) = 240v_1, \text{ stąd } v_1 = 80 \text{ oraz } v_2 = 80 - 20 = 60$$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

Ćwiczenie 1

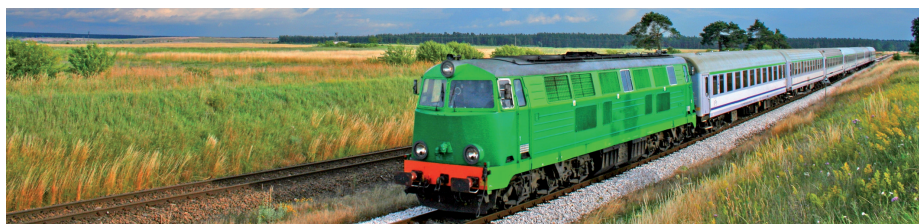
a) Samochód jadący ze średnią prędkością v pokonał odległość 195 km. Samochód jadący ze średnią prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

b) Droga między miastami A i B ma 350 km. Z tych miast wyruszyły równocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy z nich jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał $\frac{3}{5}$ trasy między miastami. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

Ćwiczenie 2

a) Pociąg ekspresowy jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i przebył trasę długości 360 km w czasie o godzinę krótszym. Oblicz średnie prędkości tych pociągów.

b) Trasa kolejowa z miasta A do miasta B ma 510 km. Z tych miast wyruszyły równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Średnia prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż średnia prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta A . Oblicz średnie prędkości, z jakimi się poruszały.



Ćwiczenie 2

a) Niech v – średnia prędkość pociągu osobowego, $(v + 30)$ – średnia prędkość pociągu ekspresowego.

$$\frac{360}{v} = \frac{360}{v+30} + 1, v > 0$$
$$v = 90$$

Średnie prędkości pociągów ekspresowego i osobowego wynosiły odpowiednio 120 km/h i 90 km/h.

b) Niech v – średnia prędkość drugiego pociągu, $(v + 10)$ – średnia prędkość pierwszego pociągu.

$$\frac{270}{v+10} = \frac{510-270}{v}$$
$$v = 80$$

Średnie prędkości pociągów wynosiły odpowiednio 90 km/h i 80 km/h.

Uczeń:

- wykorzystuje wielkości odwrotnie proporcjonalne do rozwiązywania zadań tekstowych dotyczących związku między drogą, prędkością i czasem

Ćwiczenie 1

a) $\frac{195}{v} = \frac{260}{v+20}$
 $v = 60$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 60 km/h i 80 km/h.

b) Niech v – średnia prędkość drugiego samochodu, $(v + 30)$ – średnia prędkość pierwszego samochodu.

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot 350}{v+30} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 350}{v}$$
$$v = 60$$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 90 km/h i 60 km/h.

Odpowiedzi do zadań

1. Niech v – średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem, s – odległość między miastami.

$$\frac{s}{v} = \frac{s-120}{v} + \frac{1}{2} + \frac{120}{v+20}, v > 0$$

$$\frac{120}{v} = \frac{v+20+240}{2(v+20)}$$

$$v^2 + 20v - 4800 = 0$$

$$v = 60$$

Średnia prędkość pociągu powinna wynosić 60 km/h.

2. Niech v , $v+6$ – średnie prędkości rowerzystów.

$$\frac{36}{v} = \frac{36}{v+6} + 1, v > 0$$

$$v = 12$$

Średnie prędkości rowerzystów wynoszą odpowiednio 12 km/h i 18 km/h.

3. Niech v – średnia prędkość na polnej drodze, $(v+20)$ – średnia prędkość na szosie.

$$\frac{32}{v+20} + \frac{20}{v} = 2\frac{2}{3}, v > 0$$

$$v = 12$$

Średnie prędkości jazdy po szosie i polnej drodze wynosiły odpowiednio 32 km/h i 12 km/h.

4. Niech v , $v+5$ – średnie prędkości rowerzystów.

$$\frac{3 \cdot 12}{v} = \frac{4 \cdot 12}{v+5}, v > 0$$

$$v = 15$$

Średnie prędkości rowerzystów wynoszą odpowiednio 15 km/h i 20 km/h.

5. a) Niech v – średnia prędkość samochodu.

$$\frac{120}{v} = \frac{120}{v+30} + \frac{54}{60}, v > 0$$

$$v = 50$$

Średnia prędkość samochodu wynosiła 50 km/h.

Zadania

- Pociąg miał pokonać trasę między dwoma miastami w czasie określonym w rozkładzie jazdy. Z powodu awarii został zatrzymany na pół godziny na stacji pośredniej. Pozostałe 120 km przejechał z prędkością większą o 20 km/h i dzięki temu nadrobił powstałe opóźnienie. Oblicz, jaka powinna być średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem jazdy.
- Dwaj rowerzyści wyjechali równocześnie na trasę długości 36 km. Średnia prędkość pierwszego rowerzysty była o 6 km/h większa niż średnia prędkość drugiego, więc pokonał on trasę w czasie o godzinę krótszym niż drugi. Oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.
- Tomek przejechał na rowerze 32 km szosą i 20 km polną drogą w czasie 2 godzin i 40 minut. Średnia prędkość jazdy po szosie była o 20 km/h większa od średniej prędkości jazdy po polnej drodze. Oblicz średnią prędkość na szosie i średnią prędkość na polnej drodze.
- Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążyło jezioro w tym samym kierunku. Średnia prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż średnia prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

- Samochód przejechał drogę długości 120 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą, to czas jazdy byłby krótszy o 54 minuty. Jaka była średnia prędkość samochodu?
 - Samochód przejechał drogę z miasta A do miasta B o długości 240 km ze średnią prędkością v . W drodze powrotnej przez godzinę jechał ze średnią prędkością v , a następnie zwiększył prędkość o połowę, w rezultacie drogę powrotną przejechał w czasie o godzinę krótszym. Wyznacz średnią prędkość v .

- *6. a) Samochód przejechał drogę z miasta A do miasta B ze średnią prędkością 40 km/h. Z jaką średnią prędkością powinien jechać w drodze powrotnej, aby jego średnia prędkość w czasie całej podróży wyniosła 60 km/h?



- b) Średnia prędkość jazdy samochodem z miasta A do miasta B wyniosła v_1 km/h, a podczas drogi powrotnej v_2 km/h. Uzasadnij, że średnia prędkość liczona dla całej podróży jest równa średniej harmonicznnej prędkości v_1 i v_2 .

Średnią harmoniczną liczb dodatnich a i b nazywamy liczbę:

$$\text{śr}_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

5. b) Zauważmy, że jeżeli jedziemy z prędkością v km/h, to przez 1 godzinę pokonamy drogę v km, stąd:

$$\frac{240}{v} = \frac{v}{v} + \frac{240-v}{1,5v} + 1, v > 0$$

$$v = 60 \text{ km/h}$$

6. Niech s – odległość między miastami A i B .

- a) Niech v – średnia prędkość samochodu w drodze powrotnej.

$$\frac{2s}{\frac{s}{40} + \frac{s}{v}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{v}} = 60, v > 0$$

$$v = 120 \text{ km/h}$$

$$\text{b) } v_r = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

3.15. Zagadnienia uzupełniające

■ Wyrażenia wymierne dwóch zmiennych

1. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = 2$ oraz $y = -4$.

a) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ b) $\frac{x^3-x^2y}{yx-y^2}$ c) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

2. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $a = -1$ i $b = 2$.

a) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ b) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab} \cdot \frac{a-b}{ab+b^2}$

3. Wykonaj działania.

a) $\frac{y+3}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y^2+6y+9}$ c) $\frac{x^2-4xy}{5x} : \frac{x-4y}{20xy}$ e) $\frac{x^3-y^3}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$
 b) $\frac{4y^2-9}{4x} \cdot \frac{6x^2}{3-2y}$ d) $\frac{x^2-y^2}{x+2y} : \frac{4y^2-4x^2}{x^2+4xy+4y^2}$ f) $\frac{(x+y)^3}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

4. Wykonaj działania.

a) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$ c) $\frac{y^2-1}{xy^3} - \frac{x^2-1}{x^3y}$ e) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$
 b) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$ d) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$ f) $\frac{3x}{2x-y} - \frac{3x}{2x+y} + \frac{4xy}{4x^2-y^2}$

5. Wykonaj działania.

a) $\frac{a^2+ab}{a^2b^2} \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} \right)$ b) $\left(a - \frac{a^2}{a-1} \right)^{-1} \left(\frac{a+1}{b} - \frac{1}{b-ab} \right)$

■ Zadania z parametrem

6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa rozwiązania o różnych znakach?

a) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ c) $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m = 0$
 b) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ d) $(m+1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa różne rozwiązania dodatnie?

a) $(k+2)x^2 - 4x - k + 2 = 0$ c) $(k+1)x^2 - 3(k-1)x + 2k - 3 = 0$
 b) $(k-1)x^2 - 2kx - k - 1 = 0$ d) $(k-2)x^2 - 3(k+2)x + 6k = 0$

8. Wyznacz te wartości parametru a , dla których największa wartość funkcji f jest liczbą ujemną.

a) $f(x) = (3a-2)x^2 + (4a+2)x + 3a-2$
 b) $f(x) = (3a-4)x^2 - (2a+1)x + 2a+1$

8. a) $\begin{cases} 3a-2 < 0 \\ \Delta = -20a^2 + 64a - 12 < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a < \frac{2}{3} \\ a \in (-\infty; \frac{1}{5}) \cup (3; \infty) \end{cases}$
 Zatem $a \in (-\infty; -\frac{1}{5})$.

b) $\begin{cases} 3a-4 < 0 \\ \Delta = -20a^2 + 24a + 17 < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a < \frac{4}{3} \\ a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{17}{10}; \infty) \end{cases}$
 Zatem $a \in (-\infty; -\frac{1}{2})$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{1}{x-y}$, $\frac{1}{6}$
 b) $x \neq y$ i $y \neq 0$, $\frac{x^2}{y}$, -1
 c) $x \neq y$, $\frac{x+y}{x-y}$, $-\frac{1}{3}$
 2. a) $a \neq b$ i $a \neq -b$, $a+b$, 1
 b) $a \neq b$, $a \neq -b$ i $b \neq 0$, $\frac{a^2+b^2}{b}$, $\frac{5}{2}$
 3. a) $x \neq 0$ i $y \neq -3$, $\frac{x}{y+3}$
 b) $x \neq 0$ i $y \neq \frac{3}{2}$, $\frac{-3x(2y+3)}{2}$
 c) $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $x \neq 4y$, $4xy$
 d) $x \neq y$, $x \neq -y$ i $x \neq -2y$, $-\frac{1}{4}(x+2y)$
 e) $x \neq -y$, $(x-y)^2$
 f) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{1}{x-y}$
 4. a) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{2x}{x^2-y^2}$
 b) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
 c) $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $\frac{y^2-x^2}{x^3y^3}$
 d) $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $\frac{xy+x^2+y^2}{x^2y^2}$
 e) $x \neq y$ i $x \neq -y$, 1
 f) $y \neq 2x$ i $y \neq -2x$, $\frac{10xy}{4x^2-y^2}$
 5. a) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$
 i $a \neq -b$, $\frac{2}{b(a-b)}$
 b) $a \neq 0$, $a \neq 1$ i $b \neq 0$, $-\frac{a}{b}$
 6. a) $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 4 > 0 \\ x_1x_2 = \frac{m-2}{m} < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \in \mathbf{R} \\ m \in (0; 2) \end{cases}$
 $m \in (0; 2)$
 b) $m \in (-3; 1)$
 c) $m \in (-1; 0)$
 d) nie ma takich m
 7. a) $\begin{cases} k+2 \neq 0 \\ \Delta = 4k^2 > 0 \\ x_1x_2 = \frac{2-k}{2+k} > 0 \\ x_1+x_2 = \frac{4}{2+k} > 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} k \neq -2 \\ k \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ k \in (-2; 2) \\ k > -2 \end{cases}$
 $k \in (-2; 0) \cup (0; 2)$
 b) $k \in (-1; -\frac{\sqrt{2}}{2})$
 c) $k \in (-\infty; -1) \cup (\frac{3}{2}; 7-2\sqrt{7}) \cup (7+2\sqrt{7}; \infty)$
 d) $k \in (2; 6)$

9. a) $|AB| = x_0$,
 $|AD| = y_0 = \frac{a}{x_0}$
 Zatem $P = |AB| \cdot |AD| =$
 $= x_0 \cdot y_0 = a$.

b) Niech d – długość przekątnej kwadratu.

Dla $a > 0$ $P = \frac{1}{2}d^2 = a$,

stąd $d = \sqrt{2a}$.

Dla $a < 0$ $P = \frac{1}{2}d^2 = -a$,

stąd $d = \sqrt{2(-a)}$.

Zatem $d = \sqrt{2|a|}$.

c) $a = 8$

10. a) Hiperbola i prosta mają jeden punkt wspólny, gdy równanie $\frac{2x+2}{x-1} = -x + m$ dla $m > 0$ ma jedno rozwiązanie.

$$x^2 + x(1-m) + 2+m = 0$$

$$\Delta = m^2 - 6m - 7 = 0$$

Zatem $m = 7$.

$B(7, 0)$, $C(3, 4)$, $D(0, 4)$

$P_{ABCD} = 20$

b) $E(-1, 0)$, $F(0, -2)$

(lub odwrotnie)

Niech $P(-1, -2)$,

$R(3, -2)$, $S(-1, 4)$

$P_{CEEF} = P_{PRCS} +$

$-(P_{PFE} + P_{FRC} + P_{CSE}) =$

$= 4 \cdot 6 - (1 + 9 + 8) = 6$

11. a) Prosta i hiperbola mają jeden punkt wspólny, gdy równanie $\frac{1}{x} = ax + b$ ma jedno rozwiązanie, czyli dla

$ax^2 + bx - 1 = 0$ mamy

$\Delta = b^2 + 4a = 0$.

Punkt $(1, 1)$ należy do wykresu prostej $y = ax + b$, zatem $1 = a + b$. Po podstawieniu otrzymujemy: $a = -1$, $b = 2$.

Zatem $y = -x + 2$ oraz

$B(2, 0)$, $C(0, 2)$ – punkty

wspólne prostej i osi układu współrzędnych. Stąd $P = 2$.

- D** 9. a) Uzasadnij, że jeśli punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ i $x > 0$, to prostokąt o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(x_0, 0)$, $C(x_0, y_0)$, $D(0, y_0)$ ma pole równe a .

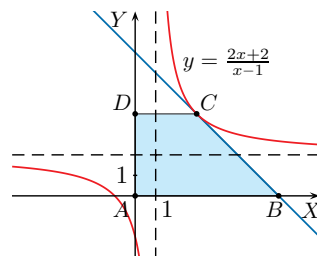
b) Wyznacz długość przekątnej kwadratu, którego trzy wierzchołki leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty należy do wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$.

c) Wierzchołki prostokąta o polu 24 są punktami przecięcia hiperboli $y = \frac{a}{x}$ z prostymi $y = \frac{1}{2}x$ i $y = 2x$. Wyznacz a .

10. Prosta $y = -x + m$ ma w I ćwiartce układu współrzędnych jeden punkt wspólny z hiperbolą $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (punkt C na rysunku obok).

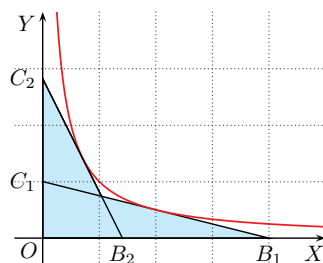
a) Oblicz m oraz pole trapezu $ABCD$.

b) Punkty E i F są punktami przecięcia hiperboli $y = \frac{2x+2}{x-1}$ z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta CEF .



11. a) Wyznacz równanie prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, której jedynym punktem wspólnym z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$ jest punkt $(1, 1)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i tą prostą.

- D** *b) Uzasadnij, że trójkąty ograniczone osiami układu współrzędnych i prostą $y = ax + b$, gdzie $a < 0$, mającą jeden punkt wspólny z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$, mają równe pola.

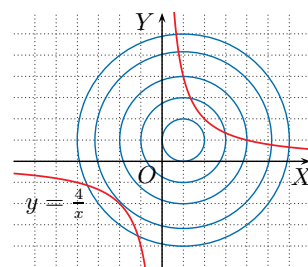


Pola trójkątów OB_1C_1 i OB_2C_2 są równe.

12. Podaj, ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i danym promieniu r z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$.

a) $r = 1$ b) $r = 1,5$ c) $r = \sqrt{2}$

13. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(1, 1)$ i promieniu r oraz hiperbola $y = \frac{4}{x}$. Na rysunku obok przedstawiono tę hiperbolę oraz kilka takich okręgów. Podaj, ile punktów wspólnych mają okrąg i hiperbola w zależności od r .



- *14. Hiperbola będąca wykresem funkcji $f(x) = \frac{6}{x-p} + p$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B . Oblicz p , jeśli pole trójkąta AOB (gdzie O jest początkiem układu współrzędnych) jest równe: a) $\frac{1}{2}$, b) $12\frac{1}{2}$.

11. b) Punkty przecięcia prostej $y = ax + b$ z osiami układu współrzędnych są postaci: $(0, b)$ i $(-\frac{b}{a}, 0)$, zatem pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu współrzędnych wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot \left| -\frac{b}{a} \right| = \left| \frac{b^2}{2a} \right|$$

$y = ax + b$ i $y = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ mają jeden punkt wspólny, czyli równanie $ax^2 + bx - 1 = 0$ ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = b^2 + 4a = 0$, stąd $a = -\frac{1}{4}b^2$.

$$P = \left| \frac{b^2}{2a} \right| = \left| \frac{b^2}{2(-\frac{1}{4}b^2)} \right| = 2$$

jest wartością stałą, czyli dla dowolnej prostej spełniającej warunki zadania pole trójkąta jest równe 2.

12. a) 0 b) 4 c) 2

13. 0 dla $r \in (0; \sqrt{2})$,

1 dla $r = \sqrt{2}$,

2 dla $r \in (\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$,

3 dla $r = 3\sqrt{2}$,

4 dla $r \in (3\sqrt{2}; \infty)$

14. $f(0) = p - \frac{6}{p} = \frac{p^2-6}{p}$

$f(x) = 0$, czyli

$0 = \frac{6}{x-p} + p$ dla $x = \frac{p^2-6}{p}$

Pole trójkąta: $\frac{1}{2} \left(\frac{p^2-6}{p} \right)^2$

a) $p \in \{-3, -2, 2, 3\}$

b) $p \in \{-6, -1, 1, 6\}$

Zestawy powtórzeniowe

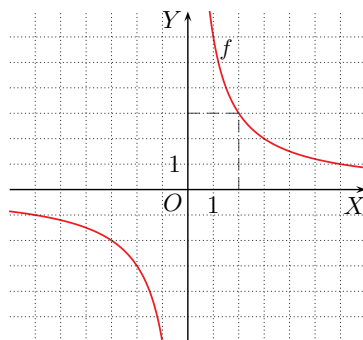
Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a .

a) Które spośród punktów: $P(-8, -\frac{3}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 12)$, $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ należą do wykresu funkcji f ?

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3 .

c) Rozwiąż nierówność $f(x) \leq 4$.



2. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj dziedzinę funkcji g i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x} + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{3}{x} - 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x+2}$

3. Naszkicuj wykresy funkcji: f , g i h . Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x+2}$, $h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

4. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji f ? Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1}{x+3} + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 1$

c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

5. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-2, 3]$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [2, -3]$

6. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a) $\frac{m}{a} = \frac{2}{b}$, b

c) $\frac{m}{a} - 2 - \frac{1}{a} = n$, a

e) $S = \frac{a_1}{1-q}$, q

b) $\frac{E}{e} = \frac{R+r}{r}$, r

d) $m\left(m - \frac{2}{a}\right) = 2$, a

f) $S = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$, a_1

6. a) $b = \frac{2a}{m}$

b) $r = \frac{eR}{E-e}$

c) $a = \frac{m-1}{n+2}$

d) $a = \frac{2m}{m^2-2}$

e) $q = 1 - \frac{a_1}{S}$

f) $a_1 = \frac{S(1-q)}{1-q^n}$

Odpowiedzi do zadań

1. $a = 6$

a) P, Q

b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$

c) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$

2. a) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = 1$

b) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
 $x = 0$, $y = -2$

c) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$, $y = 0$

d) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
 $x = -2$, $y = 0$

3. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,

$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$D_h = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,

$h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,

$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$D_h = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,

$h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$

4. a) $[-3, 3]$

b) $[4, 1]$

c) $[1, 1]$

5. a) $g(x) = \frac{2}{x+2} + 3$

b) $g(x) = -\frac{1}{x-2} - 3$



7. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}, x - 1$
 b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{x+3}{x-3}$
 c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}, \frac{1}{x+3}$
 d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5\}, \frac{1}{x^2-5x+25}$
8. a) $x = -6$
 b) $x = 2$
 c) $x = 0$
 d) $x = 0$
 e) sprzeczne
 f) $x = \frac{1}{2}$
 g) $x = -2$ lub $x = 4$
 h) $x = 3$
 i) $x = -\frac{1}{3}$
9. a) $x = 2$
 b) $x = 1$
 c) $x = 1$
 d) $x = -3$ lub $x = 0$
 e) $x = 2$ lub $x = 6$
 f) $x = 4$
 g) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
 h) $x = 0$
 i) $x = 0$
10. a) z prostą $y = 2$: $(\frac{2}{3}, 2)$;
 z prostą $y = x$:
 $(1, 1), (-2, -2)$
 b) z prostą $y = 2$: $(-\frac{1}{3}, 2)$;
 z prostą $y = x$ - brak
 c) z prostą $y = 2$: $(\frac{1}{3}, 2)$;
 z prostą $y = x$:
 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$,
 $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$
 d) z prostą $y = 2$: $(-\frac{2}{3}, 2)$;
 z prostą $y = x$ - brak
11. a) II - $f, x = 0$; I - $g, x = \frac{4}{3}$
 b) $g(x) = x$ dla $x = 1, x = 4$,
 $f(x) = -x$ dla $x = -3, x = 0$
12. a) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
 b) $x \in (-2; 0)$

7. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ b) $\frac{x^2+3x}{x^2-3x}$ c) $\frac{x+2}{x^2+5x+6}$ d) $\frac{x+5}{x^3+125}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2+6x}{x^2-6x} = 0$ d) $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4x+4} = 0$ g) $\frac{x^2-2x-8}{x^2-x-2} = 0$
 b) $\frac{x^2-4}{x^2+2x} = 0$ e) $\frac{4x^2-12x+9}{3x-2x^2} = 0$ h) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8} = 0$
 c) $\frac{x^2-3x}{2x^2-18} = 0$ f) $\frac{8x^2-2}{4x^2+4x+1} = 0$ i) $\frac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2} = 0$

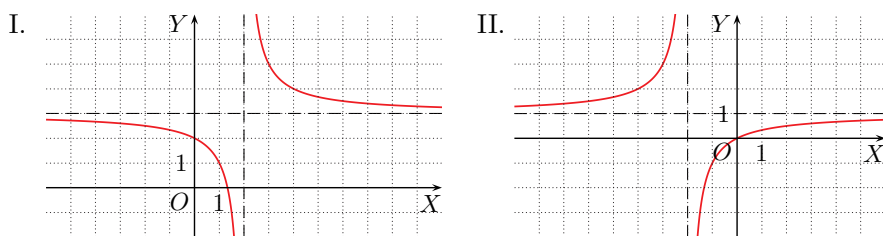
9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{x-1} = 2$ d) $-\frac{x}{x+2} = x$ g) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2-x}{x+1}$
 b) $\frac{x+1}{3-x} = 1$ e) $\frac{x}{x-4} = x-3$ h) $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x-4}{x+2} = 0$
 c) $\frac{2x-7}{x} = -5$ f) $\frac{2x+10}{x+5} = x-2$ i) $\frac{x-3}{1-x} + \frac{x+6}{x+2} = 0$

10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{a-x}{x}$. Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina prostą $y = 2$ oraz prostą $y = x$.

a) $a = 2$ b) $a = -1$ c) $a = 1$ d) $a = -2$

11. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2}$ i $g(x) = \frac{3x-4}{x-2}$.



- a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g .
 b) Rozwiąż równania: $g(x) = x$ oraz $f(x) = -x$.

12. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x) > 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{2}{x+2} & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

13. Naszkicuj wykres funkcji f . Rozwiąż równanie $f(x) = x$.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ e) $f(x) = 2 + \frac{x+1}{x+3}$
 b) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ f) $f(x) = -\frac{2-x}{1-x}$

13. a) sprzeczne

- b) $x = -1$ lub $x = 3$
 c) $x = 0$
 d) sprzeczne
 e) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$
 f) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

Zestaw II

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x-5}{x-3} \geq 0$

c) $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{1}{2}$

e) $x - \frac{1}{x} < 0$

b) $\frac{x+2}{x+6} < 0$

d) $\frac{x+2}{x-1} < -2$

f) $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(2x-1)^2}{2x-1} \leq 0$

c) $\frac{x+2}{x^2-4x} < 0$

e) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x} \geq 0$

b) $\frac{x^2-1}{x^2-5x+10} \geq 0$

d) $\frac{2x-1}{2x^2-8} > 0$

f) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \leq 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x-3} < \frac{1}{x+3}$

b) $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-3}{x-1} > 2$

c) $\frac{x+3}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2+2x} \geq 0$

4. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq \frac{4}{x}\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : \frac{x-7}{x-4} \leq 2\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : \frac{x^2+1}{x+1} < 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : \frac{(x-2)^2(x+1)}{x+2} \geq 0\}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $|x+3| - x = 7$

c) $|2x-1| + |x-5| = 6$

e) $4|x+1| + |x-1| = 2$

b) $|1-x| + 1 = x$

d) $|1-3x| - |x+6| = -3$

f) $|x-7| = 2 - |4-x|$

6. Wyznacz liczby naturalne x , które spełniają poniższy warunek.

a) $0 < \frac{3}{8-x} \leq \frac{1}{x}$

b) $\left| \frac{5}{x-4} \right| > 2$

c) $\left| \frac{x-10}{x} \right| \geq 1$

7. Naszkicuj wykres funkcji f . Z wykresu odczytaj, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania.

a) $f(x) = \left| \frac{1}{x} - 2 \right|$

b) $f(x) = \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$

c) $f(x) = \frac{1}{|x-1|} - 2$

8. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m^2$ w zależności od parametru m .

a) $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{|x-1|} - 1$

9. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ określającej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m . Naszkicuj wykres funkcji g .

a) $f(x) = \left| \frac{1}{|x|-1} \right|$

b) $f(x) = \left| \frac{1}{|x|-1} + 2 \right|$

c) $f(x) = \left| \left| \frac{2}{x} - 1 \right| - 1 \right|$

1. a) $x \in (-\infty; 3) \cup \langle 5; \infty \rangle$

b) $x \in (-6; -2)$

c) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 7; \infty \rangle$

d) $x \in (0; 1)$

e) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

f) $x \in (0; \infty)$

2. a) $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$

b) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$

c) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 4)$

d) $x \in (-2; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$

e) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

f) $x \in (-3; -2)$

3. a) $x \in (-3; 3)$

b) $x \in (-7; 1) \cup (5; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -\frac{1}{2}; 0 \rangle \cup (2; \infty)$

4. a) $A \cup B = (-\infty; 1) \cup \langle 2; \infty \rangle$,

$A \cap B = \langle -2; 0 \rangle \cup (4; \infty)$,

$A \setminus B = \langle 2; 4 \rangle$

b) $A \cup B = \mathbf{R}$,

$A \cap B = (-\infty; -2) \cup (0; 1)$,

$A \setminus B = \langle -2; -1 \rangle$

5. a) $x = -5$

b) $x \in \langle 1; \infty \rangle$

c) $x = 0$ lub $x = 2$

d) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2$

e) $x = -1$

f) sprzeczne

6. a) 1, 2

b) 2, 3, 5, 6

c) 1, 2, 3, 4, 5

7. a) $m \in (0; 2) \cup (2; \infty)$

b) $m \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

c) $m \in (-2; \infty)$

8. a) 0 dla $m = 0$,

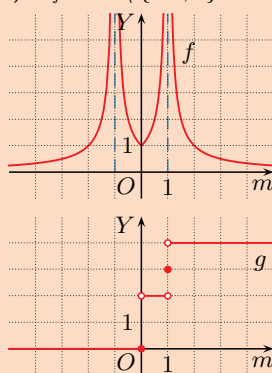
2 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

b) 0 dla $m \in \{-1, 1\}$,

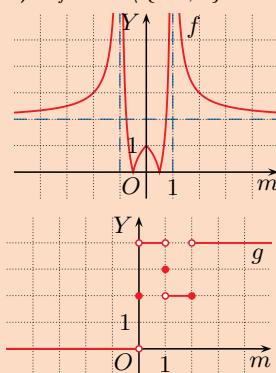
1 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$

c) 2 dla $m \in \mathbf{R}$

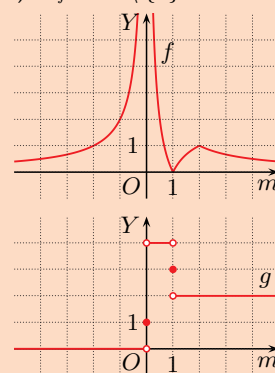
9. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$



b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$



c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$



10. $y = \frac{-1}{x+1} + 2$

a) $[-1, -3]$

b) $[2, -5]$

11. a) $f(x) = g(x)$ dla

$x = -1, x = 1;$

$f(x) \geq g(x)$ dla

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

b) $f(x) = g(x)$ dla

$x = -1, x = 1;$

$f(x) \geq g(x)$ dla

$x \in \langle -1; 0 \rangle \cup (0; 1)$

c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 2;$

$f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (1; 2)$

d) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1;$

$f(x) \geq g(x)$ dla

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

12. a) $x = -2$ lub $x = \frac{2}{5}$

b) $\left| \frac{4}{|x|-2} \right| = x - 2$

Prawa strona równania nie może być ujemna i $|x| \neq 2$, zatem $x > 2$, co oznacza, że $|x| = x$ oraz $|x - 2| = x - 2$, czyli równanie można zapisać w postaci: $\frac{4}{x-2} = x - 2$.

Dla $x > 2$ równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 4$.

13. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 3;$

$f(x) \geq g(x)$ dla

$x \in (-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty \rangle$

b) równanie sprzeczne;

$f(x) \geq g(x)$ dla

$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$

14. $m = -\frac{1}{2}$

15. $m = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$

16. a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) nie ma takich m

c) $m \in \langle 0; 1 \rangle$

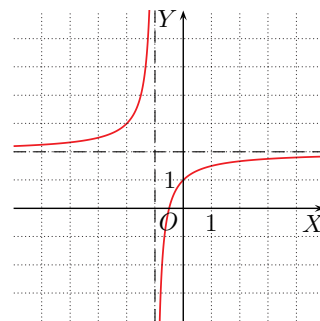
d) $m \in (-6; 2)$

10. Podaj wzór funkcji homograficznej, której wykres przedstawiono na rysunku obok.

a) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby otrzymać wykres funkcji g ?

$$g(x) = \frac{-x-3}{x+2}$$

b) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby osiami symetrii otrzymanej hiperboli były proste: $y = x - 4$ i $y = -x - 2$?



11. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ i nierówność $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x$

c) $f(x) = \frac{2}{x-1}, g(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}, g(x) = |x|$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - 1, g(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1}$

12. Rozwiąż graficznie i algebraicznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = \left| \frac{2}{x} - 2 \right|, g(x) = 3$

* b) $f(x) = \left| \frac{4}{|x|-2} \right|, g(x) = x - 2$

13. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ i nierówność $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}, g(x) = \frac{4}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+3}, g(x) = \frac{-6-x}{x+3}$

14. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Dla jakiej wartości parametru m przedział $(-8; 0)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{4}{x} < m$?

15. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \frac{x-m}{x}$ i $g(x) = mx$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

16. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych?

a) $f(x) = \frac{m}{x}, g(x) = -mx$

c) $f(x) = \frac{m}{x}, g(x) = (m-1)x$

b) $f(x) = \frac{m}{x}, g(x) = mx$

d) $f(x) = \frac{m-3}{x}, g(x) = x + m$

17. Dla jakich wartości parametru m dane proste są równoległe, a dla jakich prostopadłe?

a) $y = \frac{-m}{m-1}x + 3$ i $y = \frac{1-m}{m+2}x$

b) $y = \frac{1}{1-m^2}x - 5$ i $y = \frac{m+1}{m-1}x$

18. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $\frac{mx+2}{x^2+1} > 0$

b) $\frac{3x^2-2x+1}{-x^2+mx-1} < 0$

* c) $\frac{(m-3)x+3}{-x^2+x-2} > -2$

17. a) równoległe dla $m = \frac{1}{4}$, prostopadłe dla $m = -1$

b) nigdy nie są równoległe, prostopadłe dla $m = 0$ i dla $m = 2$

18. a) $x^2 + 1 > 0$ dla $m \in \mathbb{R}, mx + 2 > 0$ dla $m = 0$

b) $3x^2 - 2x + 1 > 0$ dla $m \in \mathbb{R}$, ponieważ $\Delta = -8 < 0$.

$-x^2 + mx - 1 < 0$ dla dowolnego x , gdy $\Delta < 0$, czyli $\Delta = m^2 - 4 < 0$ dla $m \in (-2; 2)$.

c) Nierówność można zapisać w postaci: $\frac{-2x^2+(m-1)x-1}{-x^2+x-2} > 0$.

$-x^2 + x - 2 < 0$ dla dowolnego x , ponieważ $\Delta = -7 < 0$.

Zatem dla dowolnego x musi być spełniony warunek: $-2x^2 + (m-1)x - 1 < 0$.

$\Delta = m^2 - 2m - 7 < 0$ dla $m \in (1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$

**Przykład**

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$, gdzie $x \neq 3$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Rozpatrujemy dwa przypadki ze względu na znak mianownika.

1° $x - 3 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 3)$ 2° $x - 3 > 0$, czyli $x \in (3; \infty)$

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

$$2x - 2 > x - 3$$

$$x > -1$$

Zatem $x \in (-1; 3)$.

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności.

$$2x - 2 < x - 3$$

$$x < -1$$

Sprzeczność z założeniem.

Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest spełniona dla $x \in (-1; 3)$.

II sposób

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika ułamka.

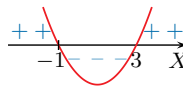
$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)^2 \quad (x-3)^2 > 0$$

$$(2x-2)(x-3) < (x-3)^2$$

$$(2x-2)(x-3) - (x-3)^2 < 0$$

$$(x-3)((2x-2) - (x-3)) < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$



Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest spełniona dla $x \in (-1; 3)$.

III sposób

Postępujemy następująco:

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - 1 < 0$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} < 0$$

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

Wykorzystujemy fakt, że iloraz i iloczyn mają ten sam znak i rozwiązujemy nierówność $(x-3)(x+1) < 0$, tak jak w II sposobie.

Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest spełniona dla $x \in (-1; 3)$.

Odpowiedź: $x \in (-1; 3)$



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Punkty $P(1, 2)$ i $Q(3, 4)$ należą do wykresu funkcji:

A. $f(x) = \frac{3x-6}{x-2}$,

C. $f(x) = \frac{x-7}{x-4}$,

B. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$,

D. $f(x) = \frac{2x+6}{x+3}$.

2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{-4}{x-p} + q$ dla:

A. $p = -3, q = 0$,

C. $p = 4, q = -3$,

B. $p = 2, q = -1$,

D. $p = 1, q = 2$.

3. Funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $(-2; \infty)$ jest funkcja:

A. $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{x+2}$,

C. $f(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{x+2}$,

B. $f(x) = \frac{6}{x+2}$,

D. $f(x) = \frac{1}{x+2} + 8$.

4. Liczby -5 i 1 są rozwiązaniami równania:

A. $\frac{8-8x}{x-1} = x-3$,

C. $\frac{6x+30}{x+5} = x+5$,

B. $\frac{2-6x}{x+1} = x-3$,

D. $\frac{x+5}{x+1} = x+5$.

5. A. $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

B. $f(D) = \{1\}$

C. $f(x) = \frac{2}{x-2} + 1$,

$f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

D. $f(x) = -\frac{3}{x+2} + 2$,

$f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

6. $x \in (-3; 2)$

5. Zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ jest zbiorem wartości funkcji:

A. $f(x) = \frac{1}{x-1}$,

B. $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$,

C. $f(x) = \frac{x}{x-2}$,

D. $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

6. Dla ilu liczb całkowitych prawdziwa jest nierówność $\frac{x+5}{x+4} + \frac{5}{x-2} < \frac{1}{x+4}$?

A. 4

B. 5

C. 6

D. 8

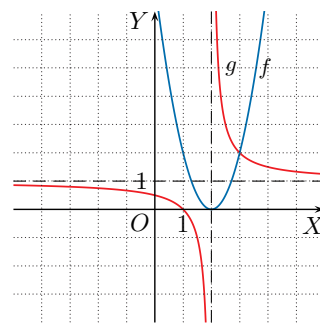
7. Na rysunku obok przedstawione są wykresy funkcji $f(x) = 2(x-2)^2$ i $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$ jest zbiór:

A. $(3; \infty)$,

C. $(0; 2) \cup \langle 3; \infty)$,

B. $\langle 3; \infty)$,

D. $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$.



8. Niech v – prędkość prądu rzeki.

$$\frac{24}{10+v} = \frac{24}{10-v} - 1$$

$$v = 2 \text{ km/h}$$

8. Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Płynąc z prądem rzeki, pokonuje trasę długości 24 km w czasie o godzinę krótszym, niż zrobiłby to, gdyby płynął pod prąd. Prąd rzeki ma prędkość:

A. 1 km/h,

B. 1,5 km/h,

C. 2 km/h,

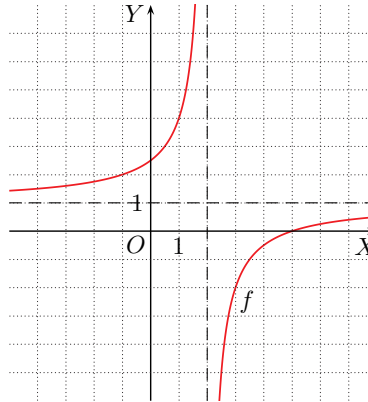
D. 2,5 km/h.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$. Powstał on w wyniku przesunięcia hiperboli $y = -\frac{3}{x}$. Oblicz współczynniki a i b .



Zadanie 2 (2 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a , jeśli wzór funkcji f można zapisać w postaci $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{x}$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $|6x - 3| - |1 - 2x| = 10$.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

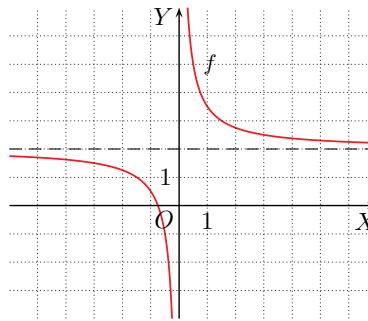
Zadanie 4 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2x} + b$.

a) Podaj wartość współczynnika b i oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle \frac{1}{2}; 6 \rangle$.

b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

$$g(x) = f(x) - \frac{3}{8}x$$



D Zadanie 5 (3 pkt)

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{9x^3 - x}{9x^3 + 6x^2 + x}$ ma tylko jedno miejsce zerowe.

Zadanie 6 (4 pkt)

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył ze średnią prędkością v , a drugą połowę – ze średnią prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem t , w jakim pociąg przebył całą trasę, a średnią prędkością v . Oblicz t dla $v = 120$ km/h.

Zadanie 7 (4 pkt)

Ze stacji A do stacji B, oddalonych od siebie o 100 km, wyjechał pociąg. Po przejechaniu 20 km zatrzymał się z powodu awarii i stał 10 minut. Aby nadrobić opóźnienie, pozostałą część trasy jechał ze średnią prędkością 1,2 raza większą niż przed awarią. Oblicz średnią prędkość, z jaką jechał pociąg na pierwszym odcinku trasy.

$$5. D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 0\}$$

$$f(x) = \frac{9x^3 - x}{9x^3 + 6x^2 + x} = \frac{x(9x^2 - 1)}{x(9x^2 + 6x + 1)} = \frac{x(3x-1)(3x+1)}{x(3x+1)^2} = \frac{3x-1}{3x+1}$$

$$f(x) = 0 \text{ dla } x = \frac{1}{3}$$

Zatem funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe.

$$6. t(v) = \frac{70}{v} + \frac{70}{\frac{v}{2}} = \frac{210}{v}, v > 0$$

$$t(120) = \frac{210}{120} = 1 \frac{45}{60}$$

$$t = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$$

7. Niech v – średnia prędkość pociągu przed awarią.

$$\frac{20}{v} + \frac{1}{6} + \frac{80}{1,2v} = \frac{100}{v}, v > 0$$

$$v = 80$$

Średnia prędkość pociągu na pierwszym odcinku trasy wynosiła 80 km/h.

Odpowiedzi do zadań

$$1. f(x) = -\frac{3}{x-2} + 1 = \frac{-3+x-2}{x-2} = \frac{x-5}{x-2} \\ a = 1, b = -5$$

$$2. f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-\frac{1}{3}}{x} \\ a = -\frac{1}{3}$$

$$3. 3|2x - 1| - |2x - 1| = 10 \\ |2x - 1| = 5 \\ 2x - 1 = -5 \text{ lub } 2x - 1 = 5 \\ x = -2 \text{ lub } x = 3$$

$$4. a) b = 2, f(6) = \frac{9}{4} \\ b) g(x) = \frac{3}{2x} + 2 - \frac{3x}{8} = 0 \\ -3x^2 + 16x + 12 = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \text{ lub } x = 6$$



Odpowiedzi do zadań

1. Niech $6x, 5x > 0$ będą długościami boków prostokąta P_1 .

$$\frac{6x-2\frac{2}{3}}{5x-2\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}, \quad 5x - 2\frac{2}{3} > 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$Ob = 2(6x + 5x) = 29\frac{1}{3} \approx 29,333$$

Należy zakodować: 293.

2. $x \neq \frac{1}{2}$ lub $x \neq \frac{2}{3}$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Należy zakodować: 618.

3. $x_0 = \frac{17}{6} \approx 2,833$

Należy zakodować: 283.

4. $x \neq -3$

$$(x-12)(x-2)(x+3) \leq 0$$

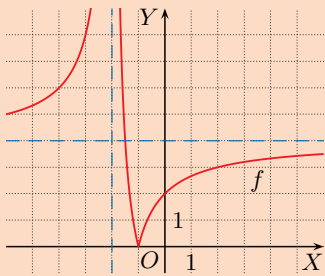
$$x \in (-\infty; -3) \cup \langle 2; 12 \rangle$$

$$\frac{2}{12} \approx 0,1667$$

Należy zakodować: 166.

5. $f(x) = \left| -\frac{4}{x+2} + 4 \right|$

Równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania różnych znaków dla $m \in (2; 4)$.



6. $A = \langle 0; 3 \rangle \cup (4; \infty)$

$$B = (-2; 2)$$

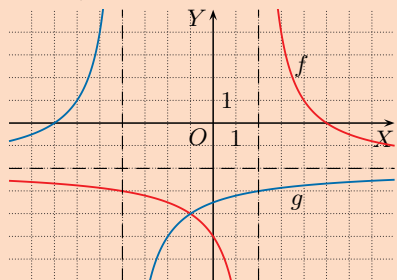
$$A \setminus B = \langle 2; 3 \rangle \cup (4; \infty)$$

7. $f(x) = \frac{3-m^2}{x-m} - m$

Funkcja f jest rosnąca w każdym z danych przedziałów, gdy $3 - m^2 < 0$, czyli dla $m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

8. $f(x) = \frac{6}{x-2} - 2$

Rozwiązanie graficzne:



$$f(x) \geq g(x) \text{ dla } x \in (-4; -1) \cup (2; \infty)$$

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Stosunek długości boków prostokąta P_1 jest równy $6:5$. Jeśli każdy bok tego prostokąta skrócimy o $2\frac{2}{3}$, to otrzymamy prostokąt P_2 , w którym stosunek boków jest równy $4:3$. Oblicz obwód prostokąta P_1 . Zakoduj cyfrę dziesiątek, jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Liczba x_1 jest dodatnim pierwiastkiem równania $\frac{x}{2x-1} = \frac{x-1}{3x-2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_1 .

Zadanie 3 (2 pkt)

Liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{14}{2x-1} - 3$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_0 .

Zadanie 4 (2 pkt)

Liczba a jest najmniejszą, a liczba b największą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

$$\frac{x^2 - 14x + 24}{x + 3} \leq 0$$

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ilorazu $\frac{a}{b}$.

Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{4x+4}{x+2} \right|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania różnych znaków?

Zadanie 6 (5 pkt)

Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 2x - 8} \geq 0$, a zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \leq 0$. Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

Zadanie 7 (3 pkt)

Dana jest funkcja homograficzna $f(x) = \frac{mx-3}{m-x}$. Dla jakich wartości parametru m funkcja ta jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; m)$ i $(m; \infty)$?

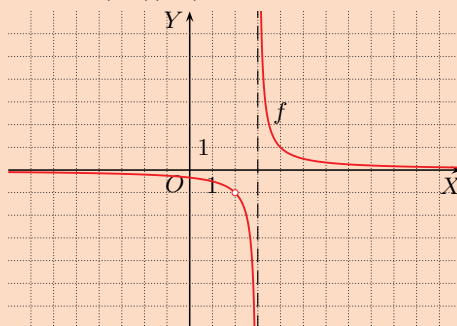
Zadanie 8 (5 pkt)

Wykres funkcji g jest symetryczny względem prostej $x = -1$ do wykresu funkcji $f(x) = \frac{10-2x}{x-2}$. Rozwiąż nierówność $f(x) - g(x) \geq 0$.

Zadanie 9 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ oraz $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$.

$$9. f(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}, \quad D_f = \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}$$



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } f(x) > 0 \\ -1 & \text{gdy } f(x) < 0 \end{cases}$$

