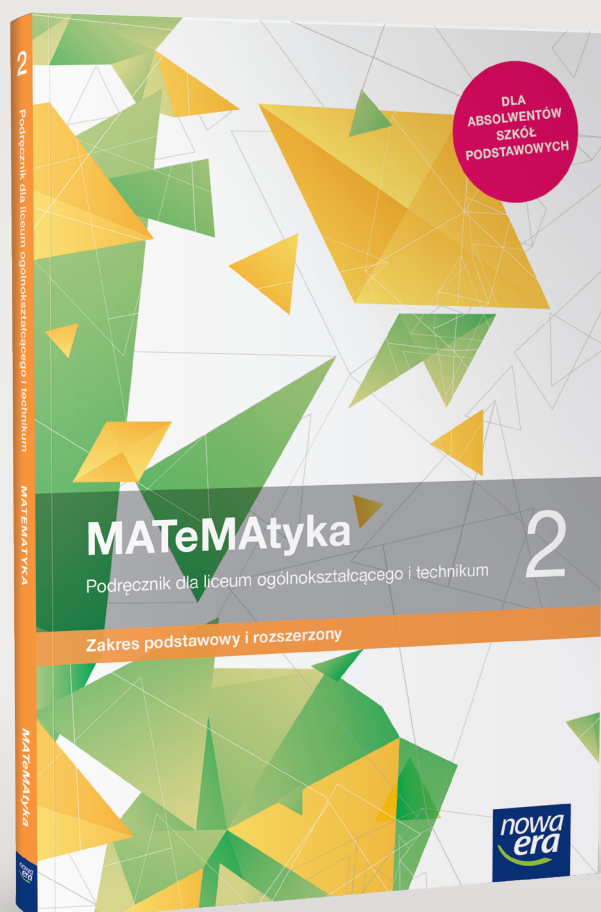


Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy i rozszerzony

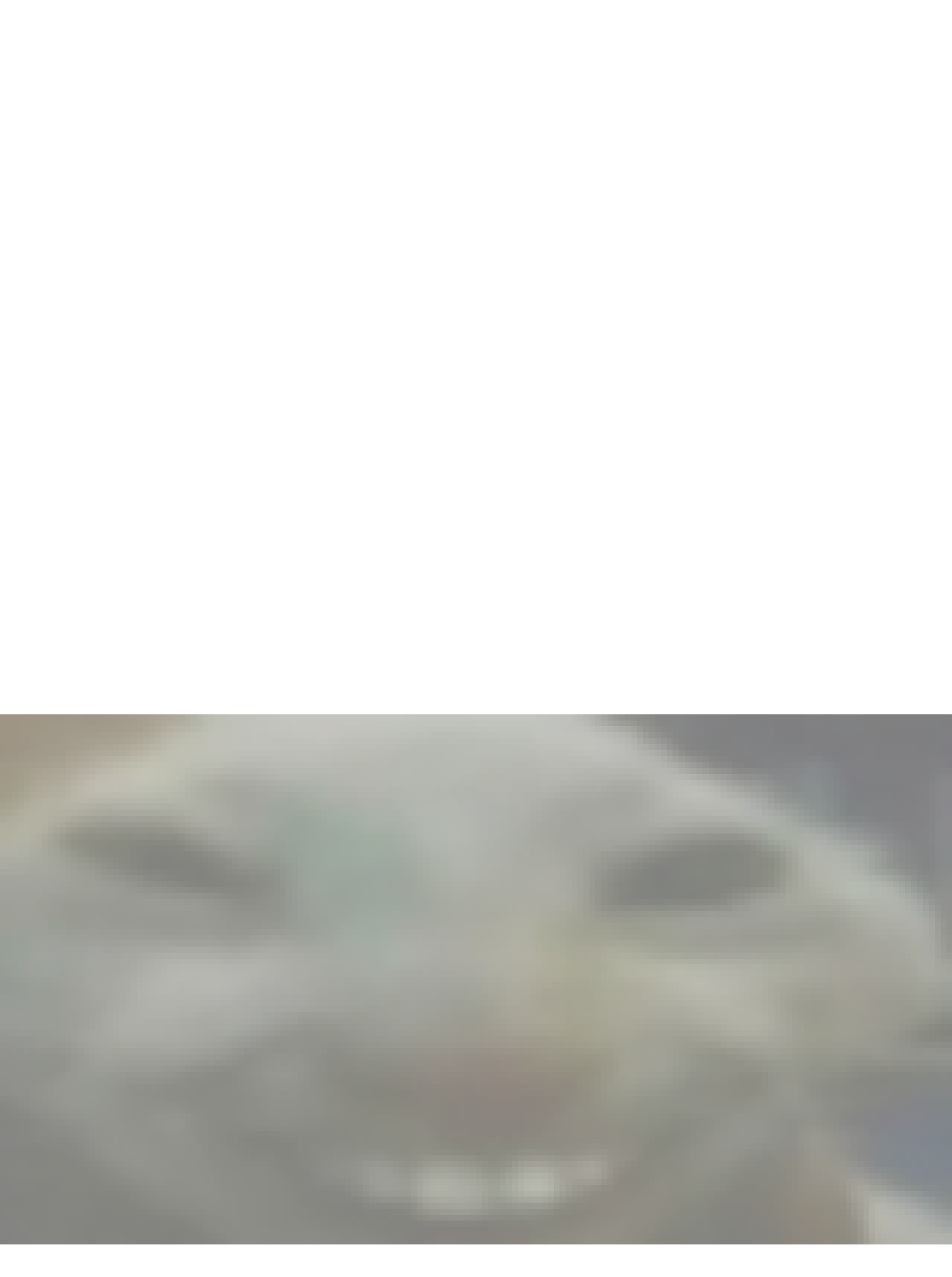


Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl



MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

2

MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela 2 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy, Doroty Ponczek i Jolanty Wesołowskiej *MATeMATyka 2* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (988/2/2020).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-4004-6

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *MATeMATyka* dla klasy 2 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak.

Redakcja merytoryczna: Beata Zająć.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Realizacja projektu okładki: Ultra.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/Omelchenko.

Zdjęcia: BE&W: Alamy Stock Photo – Historic Images s. 92 (Abel), Nerthuz s. 318, Science History Images s. 92 (Cardano); Getty Images: E+/4x6 s. 313 (gitarzysta), iStock/Getty Images Plus – Antonio_Diaz s. 313 (kobieta), Davel5957 s. 41 (Gateway Arch), Meinzahn s. 119, MediaNews Group/Bay Area News via Getty Images s. 9, Moment/shunli zhao s. 41 (wiszące łańcuchy), ulstein bild s. 28; Shutterstock: Baloncici s. 179, Daniel Prudek s. 136, Direk Yiamsaensuk s. 198, ID1974 s. 256, Jag_cz s. 63, Lynsey Allan s. 143, Nicku s. 70, remik44992 s. 167; Lech Chańko s. 51, 283; M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2020 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 223.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Grzegorz Janocha
Dorota Ponczek
Jolanta Wesołowska

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy i rozszerzony



Twoje mocne strony

MATeMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr. Tadeusza Marczewskiego, prof. dr hab. Anny Cegieli.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują.

Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020

ISBN 978-83-267-3900-2

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radzimińska

Współpraca redakcyjna: Jan Baranowski, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Marcin Minda, Agnieszka Trzpił-Gajek

Opracowanie odpowiedzi: Jan Baranowski, Ewa Kowalik, Agnieszka Trzpił-Gajek

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Korekta językowa: Anna Wesołowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMATyka kl. 1 ZPIR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek, MATeMATyka kl. 2 ZP i MATeMATyka kl. 2 ZR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy oraz MATeMATyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Spis treści

1. Zastosowania funkcji kwadratowej

1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie	10
1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie	14
1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych	17
Szkiecowanie wykresu funkcji kwadratowej – warto powtórzyć	20
1.4. Układy równań (1)	21
* 1.5. Układy równań (2)	24
Równania i nierówności z wartością bezwzględną – warto wiedzieć	26
* 1.6. Wzory Viète’a	27
* 1.7. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem	30
1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	35
1.9. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	38
1.10. Zagadnienia uzupełniające	42
Zestawy powtórzeniowe	44
Sposób na zadanie	47
Zadania testowe	48
Przed obowiązkową maturą z matematyki	49
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	50

2. Wielomiany

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu	52
2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	55
2.3. Mnożenie wielomianów	60
2.4. Wzory skróconego mnożenia	64
Trójkąt Pascala – warto wiedzieć	68
2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)	69
2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)	72
2.7. Równania wielomianowe	74
2.8. Dzielenie wielomianów	78
* 2.9. Równość wielomianów	82
2.10. Twierdzenie Bézouta	84
2.11. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu	88
Równania wielomianowe. Wzór Cardano – warto wiedzieć	92
* 2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu	93
* 2.13. Wykres wielomianu	96
* 2.14. Nierówności wielomianowe	101
2.15. Wielomiany – zastosowania	106

2.16. Zagadnienia uzupełniające	108
Zestawy powtórzeniowe	112
Sposób na zadanie	115
Zadania testowe	116
Przed obowiązkową maturą z matematyki	117
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	118

3. Funkcje wymierne

3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	120
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor	123
* 3.3. Funkcja homograficzna	127
Hiperbola – warto wiedzieć	131
* 3.4. Przekształcenia wykresu funkcji	132
3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	137
3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	141
3.7. Równania wymierne	144
* 3.8. Nierówności wymierne	148
3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne	152
3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)	156
* 3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)	158
* 3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)	162
3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	165
3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	167
3.15. Zagadnienia uzupełniające	169
Zestawy powtórzeniowe	171
Sposób na zadanie	175
Zadania testowe	176
Przed obowiązkową maturą z matematyki	177
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	178

4. Trygonometria

4.1. Trójkąty prostokątne	180
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	185
4.3. Trygonometria – zastosowania	188
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	191
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	194
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego	199
Współczynnik kierunkowy prostej – warto wiedzieć	204
4.7. Pole trójkąta	205
4.8. Pole czworokąta	209

4.9. Zagadnienia uzupełniające	213
Zestawy powtórzeniowe	216
Sposób na zadanie	219
Zadania testowe	220
Przed obowiązkową maturą z matematyki	221
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	222

5. Planimetria

5.1. Okrąg	224
5.2. Koło	227
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej	230
Konstrukcja stycznej do okręgu. Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie – warto wiedzieć	234
5.4. Kąty w okręgu	235
5.5. Okrąg opisany na trójkącie	240
5.6. Okrąg wpisany w trójkąt	244
Czworokąty wypukłe – warto powtórzyć	248
* 5.7. Okrąg opisany na czworokącie	249
Twierdzenie Ptolemeusza – warto wiedzieć	252
* 5.8. Okrąg wpisany w czworokąt	253
5.9. Wielokąty foremne	257
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18° , 36° , 54° , 72° – warto wiedzieć	260
5.10. Twierdzenie sinusów	261
5.11. Twierdzenie cosinusów (1)	266
5.12. Twierdzenie cosinusów (2)	269
5.13. Zagadnienia uzupełniające	273
Zestawy powtórzeniowe	276
Sposób na zadanie	279
Zadania testowe	280
Przed obowiązkową maturą z matematyki	281
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	282

6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku wymiernym – warto powtórzyć	284
6.1. Potęga o wykładniku rzeczywistym	285
6.2. Funkcja wykładnicza	288
6.3. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (1)	292
* 6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (2)	294
* 6.5. Własności funkcji wykładniczej	296

6.6. Logarytm	299
6.7. Własności logarytmów	302
6.8. Funkcja logarytmiczna	305
6.9. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej	309
* 6.10. Zmiana podstawy logarytmu	314
6.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania	317
6.12. Zagadnienia uzupełniające	320
Zestawy powtórzeniowe	324
Sposób na zadanie	327
Zadania testowe	328
Przed obowiązkową maturą z matematyki	329
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	330
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	331
Indeks	381
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	384

Odpowiedzi do pytań i poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.



Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

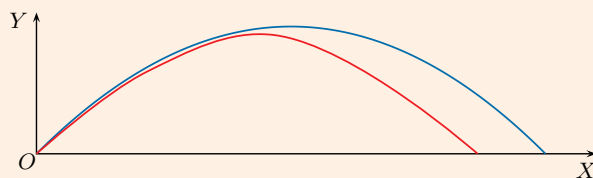


Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Zastosowania funkcji kwadratowej

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub wystrzelonego pod takim kątem pocisku jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak ze względu na opór powietrza tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym).



Uczeń:

- rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych metod i wzorów
- wyznacza argument, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje daną wartość
- przedstawia trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej i podaje jego pierwiastki

1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

Równanie kwadratowe może mieć dwa pierwiastki, jeden pierwiastek lub może nie mieć pierwiastków.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ oraz jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^2 - 9x + 9 = 0$.

Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 3}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 3}{4} = 3$$

b) Rozwiąż równanie $3x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 9 + 12 = 21 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}$$

c) Rozwiąż równanie $\frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 4 = 36 - 36 = 0$$

$\Delta = 0$, więc równanie ma jeden pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{3}$$

d) Rozwiąż równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8$$

$\Delta < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej
- Parabola – właściwości i zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1



Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 3x - 18 = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ g) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $x^2 + 3x - 2 = 0$ h) $3x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$
c) $5x^2 - 11x + 2 = 0$ f) $2x^2 + 4x - 1 = 0$ i) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

Aby rozwiązać równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, jego lewą stronę rozkładamy na czynniki.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $-3x^2 + 48x = 0$.

$$\begin{aligned} -3x(x - 16) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Iloczyn czynników jest równy zero, gdy któryś z nich jest równy zero.

Pierwiastkami równania są liczby 0 i 16.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $2x^2 - 6x = 0$ c) $3x + 4x^2 = 0$ e) $5x = 10x^2$
b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{12}x = 0$ d) $-\frac{2}{3}x - 6x^2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}x^2$

Niektóre równania kwadratowe możemy rozwiązać, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $16x^2 - 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\begin{aligned} (4x - 1)(4x + 1) &= 0 \\ 4x - 1 &= 0 \quad \text{lub} \quad 4x + 1 = 0 \\ 4x &= 1 \quad \text{lub} \quad 4x = -1 \end{aligned}$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki: $-\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$.

b) Rozwiąż równanie $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 &= 0 \\ 2x + 1 &= 0 \\ 2x &= -1 \end{aligned}$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 1

- a) $\Delta = 81$, $x_1 = -6$, $x_2 = 3$
b) $\Delta = 25$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0,5$
c) $\Delta = 81$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0,2$
d) $\Delta = 0$, $x_0 = 1,5$
e) $\Delta = 17$,
 $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$
f) $\Delta = 24$,
 $x_1 = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$
g) $\Delta = -7 < 0$, sprzeczne
h) $\Delta = 10$,
 $x_1 = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$, $x_2 = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$
i) $\Delta = 2$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $x = 0$ lub $x = 3$
b) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{9}$
c) $x = 0$ lub $x = -\frac{3}{4}$
d) $x = 0$ lub $x = -\frac{1}{9}$
e) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = 0$ lub $x = -1\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

- a) $x = -\frac{5}{2}$ lub $x = \frac{5}{2}$
b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -7$
d) $x = -\frac{1}{3}$
e) $x = 5$
f) $x = \frac{5}{2}$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $4x^2 - 25 = 0$ c) $x^2 + 14x + 49 = 0$ e) $25 + x^2 = 10x$
b) $1 - \frac{9}{4}x^2 = 0$ d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ f) $4x^2 + 15 = 20x - 10$

Przypomnijmy, że postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Wyrażenia $x - x_1$ i $x - x_2$ nazywamy **czynniki liniowymi**.

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można przedstawić w postaci iloczynowej (nie można go rozłożyć na czynniki liniowe).

Przykład 4

Przedstaw trójmian kwadratowy $y = 2x^2 - x - 3$ w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0$, więc trójmian ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{4} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}$$

Postać iloczynowa trójmianu: $y = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz pierwiastki trójmianu kwadratowego i przedstaw go (jeśli to możliwe) w postaci iloczynowej.

- a) $y = 6x^2 + x - 1$ d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$ g) $y = -9x^2 + 1$
b) $y = 2x^2 - 5x + 2$ e) $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4$ h) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x$
c) $y = -x^2 + \frac{10}{3}x - 1$ f) $y = -3x^2 + 2x + 2$ i) $y = 4x^2 - 4x + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $\Delta = 25, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, y = 6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$
b) $\Delta = 9, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, y = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$
c) $\Delta = \frac{64}{9}, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 3, y = -(x - \frac{1}{3})(x - 3)$
d) $\Delta = 16, x_1 = -1, x_2 = 7, y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 7)$
e) $\Delta = 18, x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}, y = (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
f) $\Delta = 28, x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}, y = -3(x - \frac{1 - \sqrt{7}}{3})(x - \frac{1 + \sqrt{7}}{3})$
g) $\Delta = 36, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, y = -9(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$
h) $\Delta = 9, x_1 = -12, x_2 = 0, y = -\frac{1}{4}x(x + 12)$
i) $\Delta = -16 < 0$. Trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków i nie można przedstawić go w postaci iloczynowej.

Zadania

1. Oblicz wyróżnik równania kwadratowego i określ liczbę jego pierwiastków.

- a) $x^2 - 3x + 4 = 0$ d) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ g) $8x^2 + 3x = 0$
 b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $6x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ h) $5x^2 - 9 = 0$
 c) $-3x^2 + 2x + 9 = 0$ f) $-\frac{2}{3}x^2 - 2x + 6 = 0$ i) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ g) $25x^2 + 5x - 6 = 0$
 b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$ e) $5x^2 + 2x + 1 = 0$ h) $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$
 c) $4x^2 + 5x + 1 = 0$ f) $-6x^2 + x + 1 = 0$ i) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 1 = 5 - 2x^2$ d) $(\frac{1}{2}x - 1)(\frac{1}{2}x + 1) = 2$ g) $(1 - x)^2 = \frac{1}{4}$
 b) $3(x^2 + 1) = 5$ e) $(x + 1)^2 = (1 - 2x)^2$ h) $(3x + 1)^2 = 9$
 c) $(x - 1)^2 = -2x$ f) $(3x - 2)^2 = (2x + 3)^2$ i) $(2x - 1)^2 = 4$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2-1}{3}$ c) $\frac{(x+2)^2}{2} - 2 = \frac{(x+3)^2}{3}$ e) $\frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(x+4)^2}{7} - 1$
 b) $\frac{x-2}{2} - \frac{x(x-2)}{6} = 0$ d) $\frac{(x+3)^2}{3} = x^2 + \frac{(x+4)^2}{3}$ f) $\frac{(1-3x)^2}{12} - \frac{x^2}{3} = \frac{3-x}{4}$

5. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f . Oblicz $|x_1 - x_2|$.

- a) $f(x) = (x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$ c) $f(x) = (x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$
 b) $f(x) = 4x(x - \sqrt{2})$ d) $f(x) = (x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

6. Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą p .

- a) $f(x) = x^2 + 4x - 13$, $p = 8$ c) $f(x) = -4x^2 + 24x$, $p = 9$
 b) $f(x) = 3x^2 + 11x - 6$, $p = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x$, $p = -3$

7. Wyznacz argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują równe wartości.

- a) $f(x) = x^2 + 12$, $g(x) = -x^2 + 11x$ c) $f(x) = (2x - 1)^2$, $g(x) = 3x - 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ d) $f(x) = (3x + 2)^2$, $g(x) = (x - 4)^2$

8. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a) $y = x^2 + 2x - 24$ d) $y = -x^2 + 14x - 49$ g) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
 b) $y = 2x^2 - 11x + 15$ e) $y = -4x^2 - 12x - 9$ h) $y = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3$
 c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ f) $y = -3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ i) $y = 3x^2 - 5x + 4$

7. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = \frac{3}{2}$ lub $x = 4$

b) $f(x) = g(x)$ dla $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = 0$

c) $f(x) = g(x)$ dla $x = \frac{3}{4}$ lub $x = 1$

d) I sposób

$$(3x + 2)^2 = (x - 4)^2$$

$$8x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

II sposób

$$|3x + 2| = |x - 4|$$

$$3x + 2 = x - 4 \text{ lub } 3x + 2 = -(x - 4)$$

$$x = -3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

8. a) $y = (x + 6)(x - 4)$

$$b) y = 2(x - 3)(x - \frac{5}{2})$$

$$c) y = \frac{1}{2}(x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})$$

$$d) y = -(x - 7)^2$$

$$e) y = -4(x + \frac{3}{2})^2$$

$$f) y = -3(x - \frac{2+\sqrt{7}}{6})(x - \frac{2-\sqrt{7}}{6})$$

$$g) y = \frac{1}{4}(x + 4)^2$$

$$h) y = \frac{4}{3}(x - \frac{3}{2})^2$$

i) brak postaci iloczynowej

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\Delta = -7$, 0 pierwiastków

b) $\Delta = 49$, 2 pierwiastki

c) $\Delta = 112$, 2 pierwiastki

d) $\Delta = 0$, 1 pierwiastek

e) $\Delta = \frac{1}{4}$, 2 pierwiastki

f) $\Delta = 20$, 2 pierwiastki

g) $\Delta = 9$, 2 pierwiastki

h) $\Delta = 180$, 2 pierwiastki

i) $\Delta = -\frac{3}{2}$, 0 pierwiastków

2. a) $x = 7$ lub $x = -1$

b) $x = -4$ lub $x = \frac{1}{2}$

c) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{4}$

d) $x = \frac{1}{4}$

e) sprzeczne

f) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$

g) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = \frac{2}{5}$

h) $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

i) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 2$

3. a) $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) sprzeczne

d) $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$

e) $x = 0$ lub $x = 2$

f) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = 5$

g) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$

h) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$

i) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$

4. a) $x = -1$ lub $x = 1$

b) $x = 2$ lub $x = 3$

c) $x = -3\sqrt{2}$ lub $x = 3\sqrt{2}$

d) sprzeczne

e) $x = \frac{5-\sqrt{105}}{4}$ lub $x = \frac{5+\sqrt{105}}{4}$

f) $x = -1$ lub $x = \frac{8}{5}$

5. a) $\frac{5}{6}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\sqrt{3}$

6. a) $f(x) = 8$ dla

$$x = 3 \text{ lub } x = -7$$

b) $f(x) = -2$ dla

$$x = \frac{1}{3} \text{ lub } x = -4$$

c) $f(x) = 9$ dla

$$x = \frac{6+3\sqrt{3}}{2} \text{ lub } x = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$$

d) $f(x) = -3$ dla

$$x = -6 - 3\sqrt{3} \text{ lub }$$

$$x = -6 + 3\sqrt{3}$$

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności kwadratowe
- zaznacza na osi liczbowej iloczyn i różnicę zbiorów rozwiązań dwóch nierówności kwadratowych
- stosuje nierówności kwadratowe do wyznaczania dziedziny funkcji, w której wzorze występują pierwiastki kwadratowe

Ćwiczenie 1

- a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geq 0$ dla $x \in \langle -2; 3 \rangle$
b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty \rangle$
c) $x^2 - 6x + 8 > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$
d) $x^2 - 6x + 8 < 0$ dla $x \in (2; 4)$

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

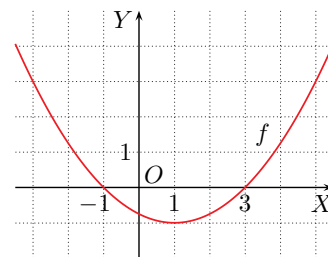
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3 .

Z wykresu możemy odczytać rozwiązania odpowiednich nierówności, np.:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \geq 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty),$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \leq 0 \text{ dla } x \in \langle -1; 3 \rangle.$$

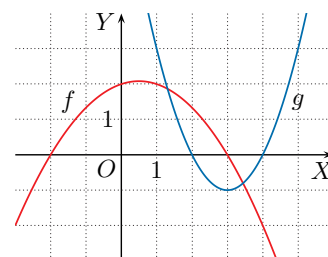


Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$ i $g(x) = x^2 - 6x + 8$.

Korzystając z tych wykresów, podaj rozwiązania nierówności.

- a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geq 0$ c) $x^2 - 6x + 8 > 0$
b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leq 0$ d) $x^2 - 6x + 8 < 0$



Przykład 2

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 4x - 15 < 0$.

Zaczynamy od rozwiązania równania $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

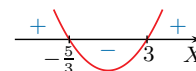
Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 14}{6} = 3$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez punkty $-\frac{5}{3}$ i 3 na osi OX .

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$3x^2 - 4x - 15 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{5}{3}; 3\right)$$



Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności.

Multiteka

• Nierówność kwadratowa

dla nauzyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 7x - 4 < 0$.

Rozwiązujemy równanie $-2x^2 + 7x - 4 = 0$.

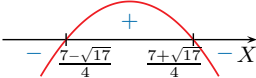
$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 49 - 32 = 17, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{7 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{17}}{-4} = \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez punkty $\frac{7 - \sqrt{17}}{4}$ i $\frac{7 + \sqrt{17}}{4}$ na osi OX .

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-2x^2 + 7x - 4 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{4}; \infty\right)$$


Zauważ, że zamiast nierówności $-2x^2 + 7x - 4 < 0$ możemy rozwiązać równoważną nierówność $2x^2 - 7x + 4 > 0$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + 5x < 0$

c) $2x^2 + 7x - 4 > 0$

e) $5x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $-4x^2 + x \leq 0$

d) $-3x^2 + 11x - 6 \geq 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 < 0$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

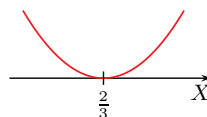
Rozwiązujemy równanie $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry.

Jedyny punkt wspólny paraboli z osią OX to $(\frac{2}{3}, 0)$.



Odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$9x^2 - 12x + 4 > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

b) $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 < 0$

Ćwiczenie 4

Czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna?

a) $4x^2 + 1 \geq 0$

b) $-x^2 - 2 < 0$

c) $9x^2 + 4 \leq 0$

Ćwiczenie 2

a) $x \in (-5; 0)$

b) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle \frac{1}{4}; \infty \rangle$

c) $x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

d) $x \in \langle \frac{2}{3}; 3 \rangle$

e) $x \in (-\infty; \frac{1 - \sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{1 + \sqrt{6}}{5}; \infty)$

f) $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{15}) \cup (-3 + \sqrt{15}; \infty)$

Ćwiczenie 3

a) $x \in \mathbf{R}$

b) $x = \frac{2}{3}$

c) sprzeczna

Ćwiczenie 4

a), b) $x \in \mathbf{R}$

c) sprzeczna

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in \langle -1; \frac{1}{3} \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$
 d) $x \in \langle 2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5} \rangle$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (2; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{10}) \cup (\frac{3+\sqrt{29}}{10}; \infty)$
 g) $x \in (\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+3\sqrt{5}}{2})$
 h) $x \in (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}; \infty)$
 i) $x \in (\frac{3-\sqrt{17}}{8}; \frac{3+\sqrt{17}}{8})$
2. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 b) $x \in \mathbb{R}$
 c) $x \in \mathbb{R}$
 d) $x = -\frac{3}{2}$
 e) $x \in \mathbb{R}$
 f) sprzeczna
3. a) $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty)$
 b), c) sprzeczna
 d) $x \in (\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{5+\sqrt{17}}{4})$
 e) $x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{4}; \frac{-3+\sqrt{33}}{4})$
 f) $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty)$
4. a) $x \in (0; \frac{2}{5})$
 b) $x \in \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$
 c) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{1}{3}; \infty \rangle$
 d) $x \in \mathbb{R}$
 e) $x \in \mathbb{R}$
 f) $x \in \langle -2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5} \rangle$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.
 - a) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \geq 0$ g) $x^2 + 5x - 5 < 0$
 - b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$ e) $-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 < 0$ h) $-x^2 + 2x + 7 \leq 0$
 - c) $-4x^2 + 5x - 1 < 0$ f) $5x^2 - 3x - 1 > 0$ i) $2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} < 0$
2. Rozwiąż nierówność.
 - a) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 > 0$ e) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 5 \geq 0$
 - b) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$ d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0$ f) $-\sqrt{2}x^2 + 3x - 3\sqrt{2} \geq 0$
3. Rozwiąż nierówność.
 - a) $x^2 + 2x \geq x + 1$ c) $3x^2 - 2x + 1 < x$ e) $3x - x^2 \leq 3 - 3x^2$
 - b) $5x^2 + 4 \leq 10x - 20x^2$ d) $-2x^2 + 5x > 1$ f) $-x(2 - x) > 1 - x^2$
4. Rozwiąż nierówność.
 - a) $(2x + 1)^2 + (x - 3)^2 < 10$ d) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$
 - b) $3x - (1 - x)^2 \geq (x - 2)(x + 2)$ e) $2 - x^2 \leq (2 - x)^2$
 - c) $(x - 3)^2 - 7 \leq (2x - 1)^2$ f) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{1}{2} - x)^2 \geq 3x$
5. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.
 - a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 3x - x^2 \geq 0\}$
 - b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 < 0\}$
 - c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 3 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x + 12 \geq 0\}$
6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)} + \sqrt{x}$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jej wzór ma sens. Wyrażenia pod pierwiastkami muszą być nieujemne, czyli muszą jednocześnie zachodzić nierówności:

$$x(x-4) \geq 0 \quad \text{ i } \quad x \geq 0$$

Pierwsza nierówność jest spełniona dla $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 4; \infty \rangle$.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{16 - x^2}$
- b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4} - \sqrt{1 - x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 6} - \sqrt{4x - x^2}$

5. a) $A = \langle 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3} \rangle$, $B = \langle 0; 3 \rangle$,
 $A \cap B = \langle 2 - \sqrt{3}; 3 \rangle$,
 $A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3})$
 b) $A = (-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \infty)$,
 $B = (1; 4)$, $A \cap B = (1; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1) \cup (4; \infty)$
 c) $A = (-\infty; 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}; \infty)$,
 $B = (-3; 4)$,
 $A \cap B = \langle -3; 2 - \sqrt{7} \rangle$,
 $A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (2 + \sqrt{7}; \infty)$
6. a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ i $x \geq 0$
 $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 3; \infty \rangle$ i $x \in \langle 0; \infty \rangle$,
 $D_f = \langle 3; \infty \rangle$
 b) $2x^2 + 7x - 4 \geq 0$ i $1 - x \geq 0$
 $x \in (-\infty; -4) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$ i $x \in (-\infty; 1)$,
 $D_f = (-\infty; -4) \cup \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$
 c) $x^2 - x - 6 \geq 0$ i $16 - x^2 \geq 0$
 $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty \rangle$ i $x \in \langle -4; 4 \rangle$,
 $D_f = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$
 d) $3x^2 + 7x - 6 \geq 0$ i $4x - x^2 \geq 0$
 $x \in (-\infty; -3) \cup \langle \frac{2}{3}; \infty \rangle$ i $x \in \langle 0; 4 \rangle$,
 $D_f = \langle \frac{2}{3}; 4 \rangle$

1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^2$ (gdzie $t \geq 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}t^2 - 10t + 9 &= 0 \\ \Delta &= 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8 \\ t_1 &= \frac{10-8}{2} = 1 \geq 0, \quad t_2 = \frac{10+8}{2} = 9 \geq 0\end{aligned}$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\begin{aligned}x^2 &= 1 \quad \text{lub} \quad x^2 = 9 \\ x &= -1 \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 3\end{aligned}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}t^2 + 8t - 9 &= 0 \\ \Delta &= 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10 \\ t_1 &= \frac{-8-10}{2} = -9 < 0, \quad t_2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \geq 0\end{aligned}$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x : $x^2 = 1$, czyli $x = -1$ lub $x = 1$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ | c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ | e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ |
| b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ | d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ | f) $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$ |

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę rozwiązań równania.

- | | | |
|---------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $x^4 - 9x^2 = 0$ | c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ | e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$ |
| b) $x^4 + 9x^2 = 0$ | d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ | f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ |

Ćwiczenie 2

- a) 3 rozwiązania: $x = -3$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
b) 1 rozwiązanie: $x = 0$
c) 2 rozwiązania: $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$
d) 4 rozwiązania: $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$
e) 0 rozwiązań
f) 2 rozwiązania: $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ lub $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Uczeń:

- rozpoznaje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych
- rozwiązuje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych

Ćwiczenie 1

- a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{3}$
b) sprzeczne
c) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
d) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$
e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -1$ lub $x = 1$

Uwaga do podpunktów a)–d) w ćwiczeniu 1

W tych przykładach nie jest konieczne podstawianie. Wielu uczniów na poziomie rozszerzonym potrafi zapisać te równania w postaci iloczynowej.

- a) $(x^2 - 3)(x^2 - 2) = 0$
 $x^2 - 3 = 0$ lub $x^2 - 2 = 0$
b) $(x^2 + 3)(x^2 + 2) = 0$
c) $(x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0$
d) $(x^2 - 2)^2 = 0$

Ćwiczenie 3

- a) $x = 4$
b) sprzeczne
c) $x = \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

- a) $(x-3) - 2\sqrt{x-3} = 0$,
 $x \geq 3$

Podstawiamy $t = \sqrt{x-3}$,
 $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

$$t = 0 \text{ lub } t = 2$$

$$\sqrt{x-3} = 0 \text{ lub } \sqrt{x-3} = 2$$

$$x = 3 \text{ lub } x = 7$$

- b) $(x-1) - 3\sqrt{x-1} = 0$,
 $x \geq 1$

Podstawiamy $t = \sqrt{x-1}$,
 $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 3t = 0$$

$$t(t-3) = 0$$

$$t = 0 \text{ lub } t = 3$$

$$\sqrt{x-1} = 0 \text{ lub } \sqrt{x-1} = 3$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 10$$

- c) $\sqrt{x+1} + 26 = 2(x+1) - 2$,
 $x \geq -1$

$$2(x+1) - \sqrt{x+1} - 28 = 0$$

Podstawiamy $t = \sqrt{x+1}$,
 $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$2t^2 - t - 28 = 0$$

$$\Delta = 225$$

$$\sqrt{\Delta} = 15$$

$$t = 4 \text{ lub } t = -3,5 < 0$$

$$\sqrt{x+1} = 4$$

$$x = 15$$

W poniższych przykładach przedstawiono inne równania, które przy odpowiednim podstawieniu można sprowadzić do równań kwadratowych.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

Zakładamy, że $x \geq 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \text{ zatem } t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \geq 0, t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \geq 0$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\sqrt{x} = 1 \text{ lub } \sqrt{x} = 2$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiązanie zgodne
z założeniem, że $x \geq 0$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ b) $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$ c) $6x - \sqrt{x} - 1 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $3x + 8\sqrt{x-2} - 9 = 0$.

Zakładamy, że $x - 2 \geq 0$, czyli $x \geq 2$. Równanie zapisujemy w postaci:

$$3(x-2) + 6 + 8\sqrt{x-2} - 9 = 0$$

$$3(x-2) + 8\sqrt{x-2} - 3 = 0$$

Podstawiamy $t = \sqrt{x-2}$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$3t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 + 36 = 100, \sqrt{\Delta} = 10$$

$$t_1 = \frac{-8-10}{6} = -3 < 0, t_2 = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3} \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy, gdyż t z założenia nie może być ujemne.

Wracamy do niewiadomej x :

$$\sqrt{x-2} = \frac{1}{3}$$

$$x - 2 = \frac{1}{9}$$

$$x = 2\frac{1}{9}$$

Rozwiązanie zgodne
z założeniem, że $x \geq 2$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- a) $x - 2\sqrt{x-3} = 3$ b) $x - 3\sqrt{x-1} = 1$ c) $\sqrt{x+1} + 26 = 2x$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ d) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ g) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
 b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$ e) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$ h) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$
 c) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$ f) $x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 = 0$ i) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbf{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

- a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$
 b) $x^6 - x^3 - 2 = 0$ d) $x^6 + 4x^3 - 32 = 0$ f) $x^8 - 4x^4 - 24 = 0$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Równanie $x^2 - 2|x| - 8 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = |x|$ (zakładamy, że $t \geq 0$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \qquad x^2 = |x|^2 = t^2$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36, \quad \sqrt{\Delta} = 6$$

$$t_1 = \frac{2-6}{2} = -2 < 0, \quad t_2 = \frac{2+6}{2} = 4 \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x :

$$|x| = 4, \text{ czyli } x = -4 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ b) $x^2 - 7|x| + 10 = 0$ c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$ b) $2x - 5\sqrt{x-2} = 2$ c) $6x + \sqrt{x+1} = -5$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} = 0$ b) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} = 3$ c) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 = 0$

4. a) $x = 9$

b) $2(x-2) - 5\sqrt{x-2} + 2 = 0, x \geq 2$

Podstawiamy $t = \sqrt{x-2}, t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ lub } t = 2$$

$$x = \frac{9}{4} \text{ lub } x = 6$$

c) $6(x+1) + \sqrt{x+1} - 1 = 0, x \geq -1$

Podstawiamy $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$6t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} < 0 \text{ lub } t = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{8}{9}$$

5. a) $x = 0$ lub $x = 27$

b) $x = -27$ lub $x = 1$

c) $x = 16$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

b), d), f) sprzeczne

c) $x = -\sqrt{6}$ lub $x = \sqrt{6}$

e) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = 2$

g) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{3}$

h) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$

i) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a) $x = 1$ lub $x = 2$

b) $x = -1$ lub $x = \sqrt[3]{2}$

c) $x = -1$ lub $x = 2$

d) $x = -2$ lub $x = \sqrt[3]{4}$

e) $x = -2$ lub $x = -2$

f) $x = -\sqrt[4]{2+2\sqrt{7}}$ lub $x = \sqrt[4]{2+2\sqrt{7}}$

3. a) Podstawiamy $t = |x|$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0$$

$$t = 2$$

$$|x| = 2$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

b) Podstawiamy $t = |x|$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t = 2 \text{ lub } t = 5$$

$$|x| = 2 \text{ lub } |x| = 5$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = -5 \text{ lub } x = 5$$

c) Podstawiamy $t = |x|$, $t \geq 0$, i otrzymujemy:

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$\Delta = 49, \sqrt{\Delta} = 7$$

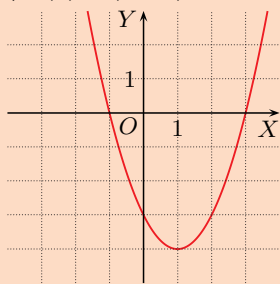
$$t = 6 \text{ lub } t = -1 < 0$$

$$|x| = 6$$

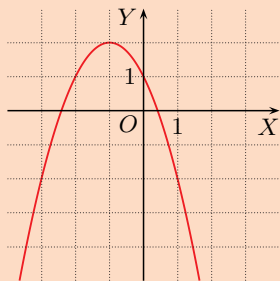
$$x = -6 \text{ lub } x = 6$$

Odpowiedzi do zadań

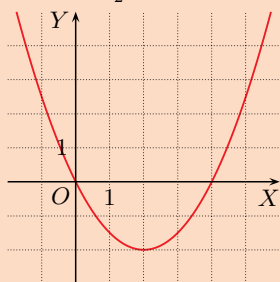
1. a) $f(x) = (x-1)^2 - 4$



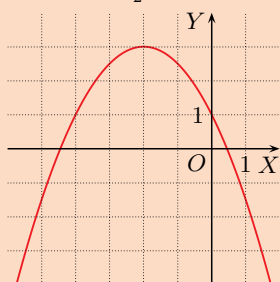
b) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$



c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$



d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$



e) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

f) $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

Przykład 1

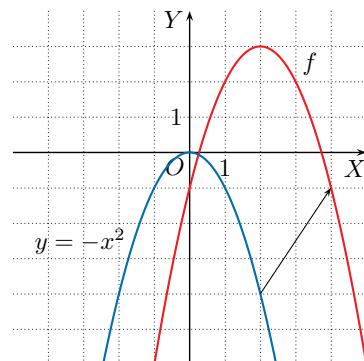
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f :

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$y_w = f(x_w) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 3$$

Korzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $y = a(x-x_w)^2 + y_w$, gdzie $a \neq 0$, i otrzymujemy wzór funkcji f w postaci:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = -x^2$ o wektor $[2, 3]$.

Przykład 2

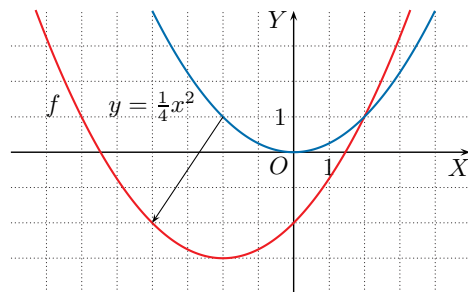
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f :

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y_w = f(x_w) = \frac{1}{4}(-2)^2 - 2 - 2 = -3$$

Funkcja f ma postać kanoniczną:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ o wektor $[-2, -3]$.1. Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji f , a następnie naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$

2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = 3x^2, g(x) = 3x^2 - 6x + 5$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2, g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 4x^2, g(x) = 4x^2 + 24x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2, g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

2. a) $g(x) = 3(x-1)^2 + 2, [1, 2]$

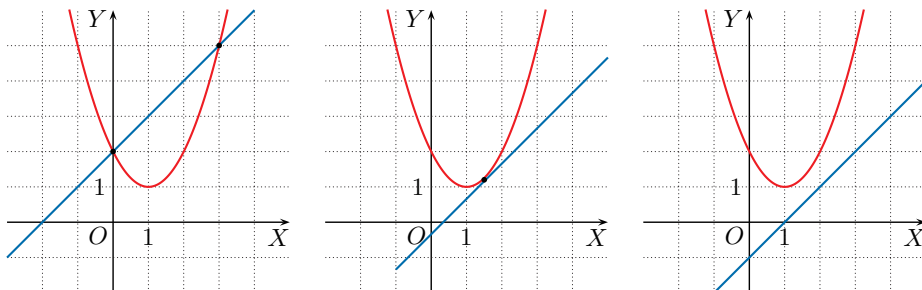
b) $g(x) = 4(x+3)^2 - 36, [-3, -36]$

c) $g(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1, [3, 1]$

d) $g(x) = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{16}, [-\frac{1}{2}, -\frac{17}{16}]$

1.4. Układy równań (1)

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 = 2x$, czyli:

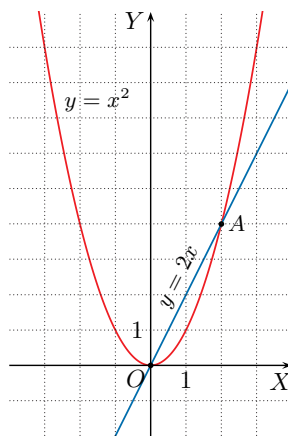
$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



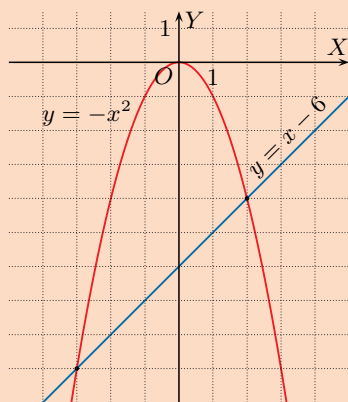
Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0, 0)$ i $A(2, 4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

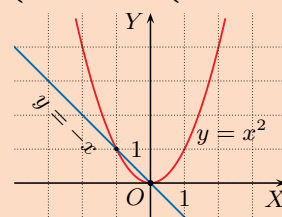


Uczeń:

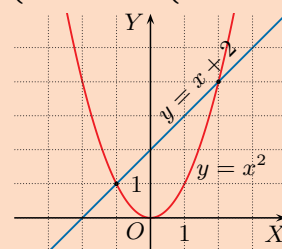
- rozwiązuje algebraicznie układ równań, z których jedno jest równaniem paraboli, a drugie – równaniem prostej, i podaje interpretację geometryczną rozwiązania
- podaje interpretację geometryczną rozwiązania układu równań, znajdując punkty wspólne prostej i paraboli
- zaznacza w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności

Ćwiczenie 1

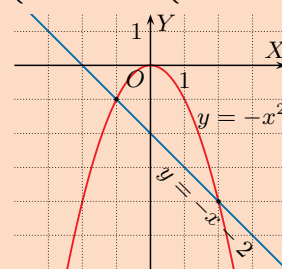
a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$



Multiteka

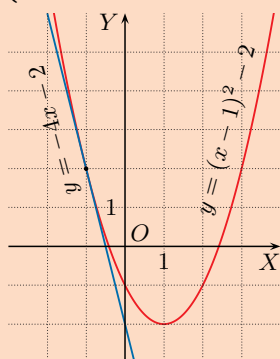
- Układy równań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

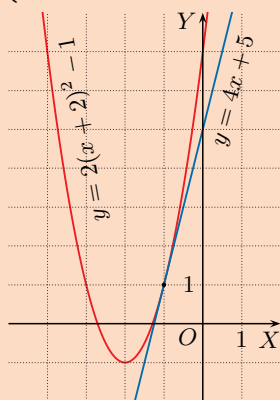
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

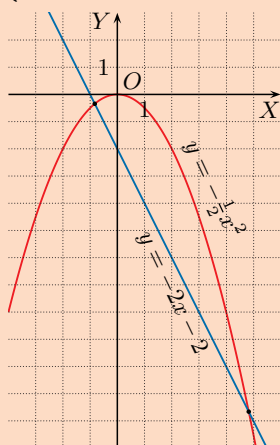


b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ y = 4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \\ y = -4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$



Przykład 2

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.

Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Prosta } y = 2x - 1 \text{ i parabola } y = x^2 \text{ mają jeden punkt wspólny.}$$

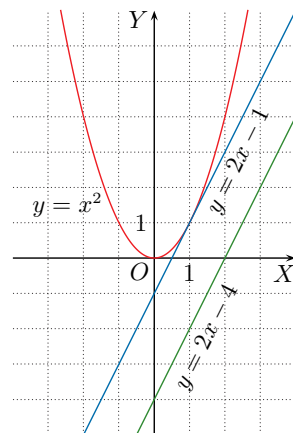
Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 4 &= 0 \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0 \end{aligned}$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = 2x - 4$ nie ma punktów wspólnych z parabola $y = x^2$.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4y = x^2 + 2x - 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$

$$x^2 + 2x + 3 = 3x + 1$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = -7 < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

b) $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$

$$-2x + 7 = -2x^2 + 4x + 2$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = -4 < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

$$-\frac{1}{4}x^2 - x - 2 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

$$\Delta = -3\frac{3}{4} < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

Zadania

1. Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?

a) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x$ c) $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -2x^2$
 b) $f(x) = x - 6$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x - 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$

3. Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = x^2$
 b) $f(x) = x + 1$, $g(x) = -2x^2 + 3$ d) $f(x) = -x - 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

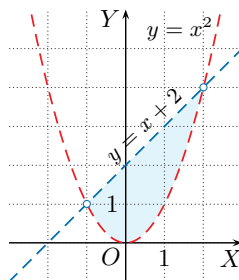
a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = |x| - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = |x - 2| \end{cases}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < x + 2 \end{cases}$$

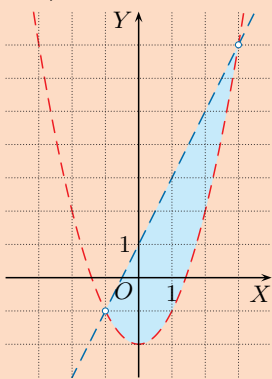
Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej prostej $y = x + 2$.



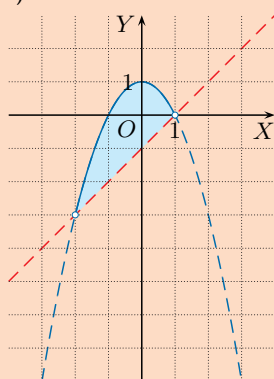
Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności.

a) $\begin{cases} y > x^2 - 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y > x - 1 \\ y \leq -x^2 + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y < -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y \geq 0,5x^2 - 2 \end{cases}$

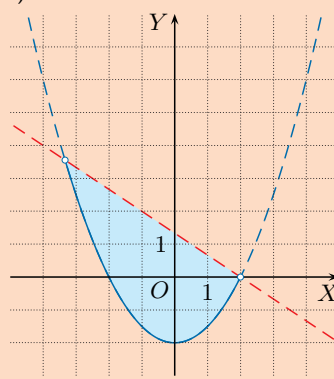
5. a)



b)



c)



Odpowiedzi do zadań

1. a) 2 b) 0 c) 2 d) 1

2. a) $x = 0$, $y = 4$ lub $x = 3$, $y = 1$

b) $x = -4$, $y = 6$ lub $x = 0$, $y = -2$

c) $x = -2$, $y = 6$ lub $x = 2$, $y = -2$

d) $x = -4$, $y = 0$ lub $x = 2$, $y = 3$

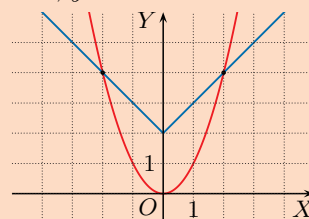
e) $x = -1$, $y = 3$

f) $x = -1 - \sqrt{3}$, $y = -5 - 4\sqrt{3}$ lub $x = -1 + \sqrt{3}$, $y = -5 + 4\sqrt{3}$

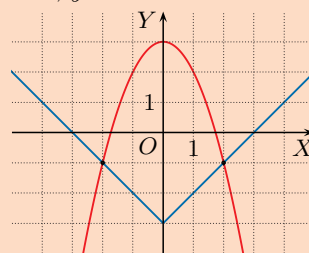
3. a) $[1, 1]$ b) $[\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}]$

c) $[4, -8]$ d) $[3, -3]$

4. a) $x = -2$, $y = 4$ lub $x = 2$, $y = 4$



b) $x = -2$, $y = -1$ lub $x = 2$, $y = -1$



c) $x = 1$, $y = 1$ lub

$x = 2$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 1$



Uczeń:

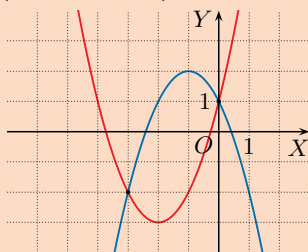
- rozwiązuje algebraicznie układ równań, z których obydwa są równaniami parabol, i podaje interpretację geometryczną rozwiązania
- stosuje metodę graficzną do rozwiązywania równań i nierówności drugiego stopnia z wartością bezwzględną

Ćwiczenie 1

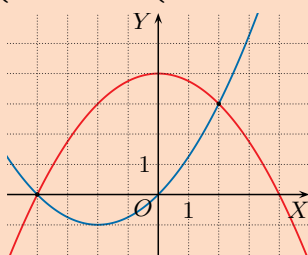
- a) 1 punkt wspólny
- b) 0 punktów wspólnych

Ćwiczenie 2

a) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

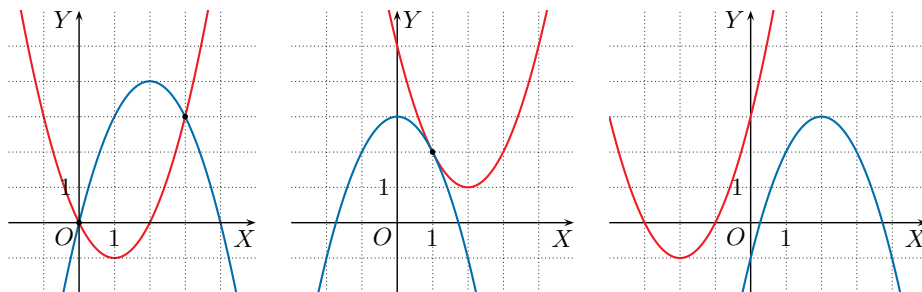


b) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



*1.5. Układy równań (2)

Dwie różne parabole mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub mogą nie mieć punktów wspólnych.



Ćwiczenie 1

Naszczekuj parabole będące wykresami funkcji f i g . Ile punktów wspólnych mają te wykresy?

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

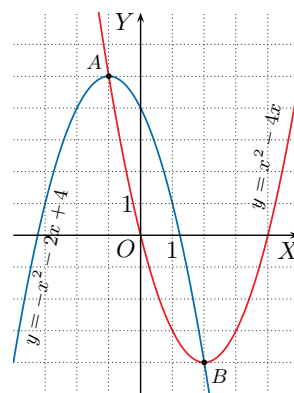
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 - 4x = -x^2 - 2x + 4$, czyli $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $(x + 1)(x - 2) = 0$, zatem: $x = -1$ lub $x = 2$.

Dla $x = -1$ mamy $y = 5$. Dla $x = 2$ mamy $y = -4$.

Układ równań spełniają więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Parabole $y = -x^2 - 2x + 4$ i $y = x^2 - 4x$ przecinają się w punktach $A(-1, 5)$ oraz $B(2, -4)$.

Ćwiczenie 2

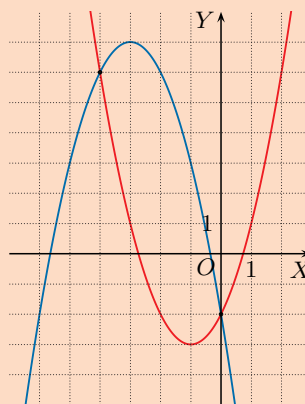
Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$



Multiteka

• Układy równań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

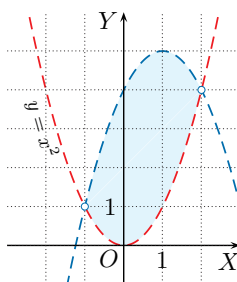
Zadania

- Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.
 - $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = x^2 - 4$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$
 - $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -2x^2 + 2$
- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
 - $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 + 4x + 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = -3x^2 - 12x - 10 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3 \end{cases}$
- Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g ?
 - $f(x) = 4x^2 - 6x - 5$, $g(x) = 2x^2 - 6x + 3$
 - $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$
 - $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$, $g(x) = 3x^2 + 4x - 3$
 - $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 2$
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < -(x-1)^2 + 5 \end{cases}$$

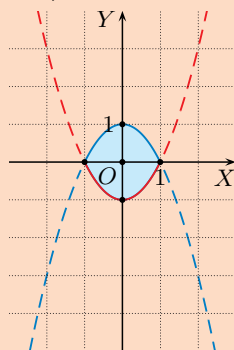
Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej paraboli $y = -(x-1)^2 + 5$.



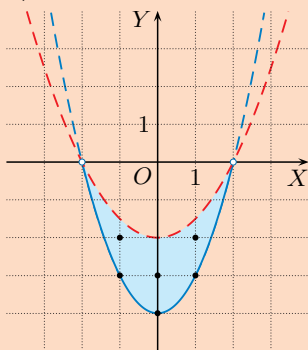
Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego obszaru?

- $\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq -x^2 + 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y < \frac{1}{2}x^2 - 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} y > x^2 + 2x - 2 \\ y \leq -x^2 - 4x - 2 \end{cases}$

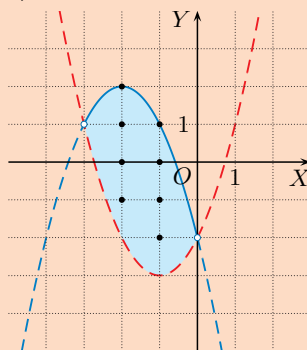
4. a) 5



b) 6



c) 8



Odpowiedzi do zadań

1. Punkty wspólne:

- $(0, 0)$
- $(-2\sqrt{2}, 4), (2\sqrt{2}, 4)$
- $(-2, 1), (2, 1)$
- $(-1, 0), (1, 0)$

2. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

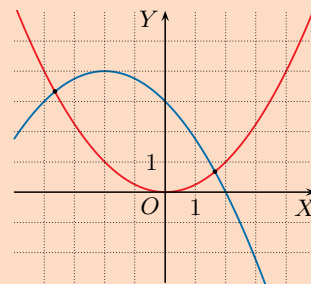
b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = -1 - \sqrt{7} \\ y = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{7} \\ y = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$



3. a) 2 b) 1 c) 0 d) 2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = -2$
lub $x = 1 + \sqrt{5}$
b) $f(x) = h(x)$ dla $x = -4$
lub $x = 2 + 2\sqrt{3}$
2. a) $x = -2$ lub $x = 2$
b) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 2$
c) $x = 0$ lub $x = 4$
d) $x = 0$ lub $x = 5$
e) $x = 1$ lub $x = 3$
f) $x = 2$ lub $x = 6$
3. a) 1° Jeśli $x \in (-\infty; -2)$,
to otrzymujemy:
$$x^2 - (-x - 2) \geq 0$$
$$x^2 + x + 2 \geq 0$$
 $\Delta < 0$, zatem brak rozwiązań,
czyli $x \in \mathbf{R}$, ale uwzględniamy
założenie i otrzymujemy:
 $x \in (-\infty; -2)$.
2° Jeśli $x \in \langle -2; \infty)$,
to otrzymujemy:
$$x^2 - (x + 2) \geq 0$$
$$x^2 - x - 2 \geq 0$$
 $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty)$
ale $x \in \langle -2; \infty)$, więc
 $x \in \langle -2; -1) \cup \langle 2; \infty)$.
Zatem ostatecznie:
 $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty)$.
b) 1° Jeśli $x \in (\infty; 4)$,
to otrzymujemy:
$$x^2 - 2(-x + 4) < 0$$
$$x^2 + 2x - 8 < 0$$
 $x \in (-4; 2) \subset (-\infty; 4)$.
2° Jeśli $x \in \langle 4; \infty)$,
to otrzymujemy:
$$x^2 - 2(x - 4) < 0$$
$$x^2 - 2x + 8 < 0$$
 $\Delta < 0$, czyli brak rozwiązań.
Ostatecznie: $x \in (-4; 2)$.

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Równanie $x^2 - 4x + 2 = |x - 2|$ możemy rozwiązać graficznie, rysując wykresy funkcji:

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \text{ i } g(x) = |x - 2|$$

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie równania:

$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

Równanie to możemy też rozwiązać algebraicznie. Rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli $x - 2 \geq 0$, czyli $x \in \langle 2; \infty)$, to otrzymujemy:

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 9, \text{ zatem } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 3}{2} = 1 - \text{sprzeczność, gdyż } x_1 \notin \langle 2; \infty)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

2° Jeśli $x - 2 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 2)$, to otrzymujemy:

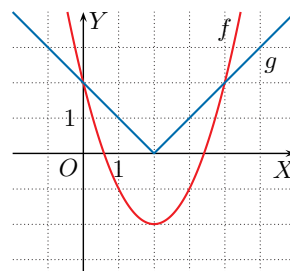
$$x^2 - 4x + 2 = -x + 2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

Zatem $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, ale $x_4 \notin (-\infty; 2)$, więc to rozwiązanie odrzucamy.

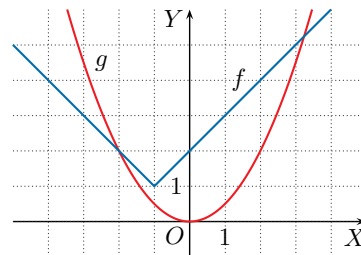
Po rozpatrzeniu obu przypadków stwierdzamy, że równanie $x^2 - 4x + 2 = |x - 2|$ jest spełnione dla $x = 0$ oraz dla $x = 4$.



1. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = |x + 1| + 1$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Dla jakich argumentów funkcje:

a) f i g przyjmują te same wartości,

b) f i $h(x) = \frac{1}{4}x^2$ przyjmują te same wartości?



2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2 = |x|$ c) $3 - \frac{1}{8}x^2 = |x - 3|$ e) $-x^2 + 4x - 1 = |2x - 4|$

b) $x^2 - 3|x - 1| = 1$ d) $x^2 - 4x + 2 = |x + 2|$ f) $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 = |x - 4|$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - |x + 2| \geq 0$ b) $x^2 - 2|x - 4| < 0$ c) $2x^2 - 5|x - 1| \geq 4x - 1$

3. c) 1° Jeśli $x \in (-\infty; 1)$, to otrzymujemy:

$$2x^2 - 5(-x + 1) \geq 4x - 1$$

$$2x^2 + x - 4 \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}\right) \cup \left\langle \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}; \infty\right\rangle, \text{ ale } x \in (-\infty; 1), \text{ więc } x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}\right).$$

2° Jeśli $x \in \langle 1; \infty)$, to otrzymujemy:

$$2x^2 - 5(x - 1) \geq 4x - 1$$

$$2x^2 - 9x + 6 \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{9 - \sqrt{33}}{4}\right) \cup \left\langle \frac{9 + \sqrt{33}}{4}; \infty\right\rangle, \text{ ale } x \in \langle 1; \infty), \text{ więc } x \in \left\langle \frac{9 + \sqrt{33}}{4}; \infty\right\rangle.$$

$$\text{Zatem ostatecznie: } x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}\right) \cup \left\langle \frac{9 + \sqrt{33}}{4}; \infty\right\rangle.$$

*1.6. Wzory Viète'a

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, można wyznaczyć ich sumę i iloczyn.

Twierdzenie (wzory Viète'a)

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Wzory Viète'a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, tzn. gdy $\Delta \geq 0$.

D Ćwiczenie 1

Przeczytaj dowód wzoru na iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

- a) Udowodnij wzór na sumę pierwiastków równania kwadratowego.
b) Udowodnij, że jeśli $\Delta = 0$, czyli trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny x_0 , to wzory Viète'a mają postać: $2x_0 = -\frac{b}{a}$ i $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

- a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.
 $\Delta = 400 - 120 = 280 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki: x_1, x_2 .
 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7,5$
b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$
 $\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

- a) $x^2 - 9x - 7 = 0$ c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$ e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$
b) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$ d) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

Uczeń:

- stosuje wzory Viète'a do wyznaczania sumy oraz iloczynu pierwiastków równania kwadratowego
- określa znaki pierwiastków równania kwadratowego, wykorzystując wzory Viète'a
- stosuje wzory Viète'a do obliczania wartości wyrażeń zawierających sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego
- układa równanie kwadratowe, którego pierwiastki spełniają określone warunki
- wyprowadza wzory Viète'a

Ćwiczenie 1

a) $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, czyli:
 $b^2 = 4ac$

Wówczas:

$$2x_0 = 2 \cdot \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_0^2 = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x_1 + x_2 = 9, x_1 \cdot x_2 = -7$
b) $x_1 + x_2 = 1\frac{1}{2}, x_1 \cdot x_2 = -3\frac{1}{2}$
c) $x_1 + x_2 = 2\frac{1}{2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$
d) brak pierwiastków
e) $x_1 + x_2 = -12, x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$
f) $x_1 + x_2 = -6, x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = 1 + 100 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = -25 < 0$

Pierwiastki mają różne znaki.

b) $\Delta = 36 - 24 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} > 0$

$x_1 + x_2 = -3 < 0$

Oba pierwiastki są ujemne.

c) $\Delta = 400 - 240 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{12} > 0$,

$x_1 + x_2 = \frac{20}{12} > 0$

Oba pierwiastki są dodatnie.

d) $\Delta = 25 - 48 < 0$

Równanie nie ma pierwiastków.

e) $\Delta = 225 - 24 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} > 0$,

$x_1 + x_2 = -\frac{15}{2} < 0$

Oba pierwiastki są ujemne.

f) $\Delta = 6 - 2\sqrt{2} = \sqrt{36} - \sqrt{8} > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$

$x_1 + x_2 = \sqrt{3} > 0$

Oba pierwiastki są dodatnie.

Przykład 2

Określ znaki pierwiastków równania $7x^2 - 9x + 1 = 0$.

$\Delta = 81 - 28 = 53 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2 .

Ze wzoru Viète'a obliczamy iloczyn pierwiastków:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{7}$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$, liczby x_1, x_2 mają ten sam znak (obie są ujemne lub obie są dodatnie). Ze wzoru Viète'a obliczamy sumę pierwiastków:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{7}$$

Oba pierwiastki mają ten sam znak oraz $x_1 + x_2 > 0$, zatem x_1, x_2 są liczbami dodatnimi.

Zwróć uwagę, że aby określić znaki pierwiastków równania kwadratowego, nie musimy ich wyznaczać. Możemy skorzystać z podanych obok warunków.

Liczby x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

Ćwiczenie 3

Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 25 = 0$

c) $12x^2 - 20x + 5 = 0$

e) $-2x^2 - 15x - 3 = 0$

b) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

d) $3x^2 + 5x + 4 = 0$

f) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + \frac{1}{2} = 0$

Czy wiesz, że...

François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III i Henryka IV. Dla tego drugiego w roku 1590 złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.



D Przykład 3

Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to suma ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków.

Przykład 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania $6x^2 - 9x + 2 = 0$.

Ponieważ $\Delta = 81 - 48 = 33 > 0$, równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2 .

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 1 = 0$ b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$ c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Zadania

1. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 + x - 1 = 0$ c) $13x^2 - 13x + 3 = 0$ e) $\sqrt{3}x^2 - 5x + 2 = 0$
b) $15x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $13x^2 + 13x + 4 = 0$ f) $-x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

D 2. Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki, to suma ich odwrotności jest równa $-\frac{b}{c}$.

3. Oblicz sumę odwrotności pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 - 8x - 3 = 0$ c) $4x^2 + 20x - 6 = 0$

4. Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 + 9x + 6 = 0$ b) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

5. Oblicz kwadrat różnicy pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 2 = 0$

D 6. Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 , to suma odwrotności ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Wskazówka. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

7. Oblicz sumę odwrotności kwadratów pierwiastków równania.

a) $-x^2 + 10x + 10 = 0$ b) $\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$ c) $-x^2 + 3x + 7 = 0$

8. Czy można ułożyć równanie kwadratowe tak, aby suma i iloczyn jego pierwiastków były odpowiednio równe: a) 7 i 3, b) 3 i 7?

9. Korzystając ze wzorów Viète'a, ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby dwa razy większe od pierwiastków równania:

a) $x^2 - 5x + 1 = 0$, b) $-x^2 + 6x - 2 = 0$, c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.

9. Pierwiastki danego równania: x_1, x_2 .

Pierwiastki szukanego równania: $x'_1 = 2x_1, x'_2 = 2x_2$.

a) $\Delta = 25 - 4 > 0, x_1 + x_2 = 5, x_1 \cdot x_2 = 1$

$x'_1 + x'_2 = 2(x_1 + x_2) = 10$

$x'_1 \cdot x'_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4$

Przykładowa odpowiedź: $x^2 - 10x + 4 = 0$.

b) $\Delta = 36 - 8 > 0, x_1 + x_2 = 6, x_1 \cdot x_2 = 2$

$x'_1 + x'_2 = 12$

$x'_1 \cdot x'_2 = 8$

Przykładowa odpowiedź: $x^2 - 12x + 8 = 0$.

c) $\Delta = 9 - 2 > 0$,

$x_1 + x_2 = 3, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$

$x'_1 + x'_2 = 6, x'_1 \cdot x'_2 = 2$

Przykładowa odpowiedź:

$x^2 - 6x + 2 = 0$.

Ćwiczenie 4

a) $\Delta = 1 + 4 > 0$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
 $= 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3$

b) $\Delta = 36 + 24 > 0$

$x_1^2 + x_2^2 = (-3)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 12$

c) $\Delta = 16 - 24 < 0$

Równanie nie ma pierwiastków.

Odpowiedzi do zadań

1. a) różne b) ujemne

c) dodatnie

d) brak pierwiastków

e) dodatnie f) różne

2. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$

3. a) -1 b) $-\frac{8}{3}$ c) $\frac{10}{3}$

4. a) 69 b) 12 c) 12

5. a) $\frac{13}{9}$ b) $\frac{57}{4}$ c) $\frac{65}{4}$

6. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} =$
 $= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \left(\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} =$
 $= \left(-\frac{b}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$

7. a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{23}{49}$

8. a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7$, czyli $b = -7a$.

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 3$, czyli $c = 3a$.

Wówczas:

$\Delta = b^2 - 4ac =$
 $= 49a^2 - 12a^2 = 37a^2 > 0$,

zatem można ułożyć takie równanie.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3$, czyli $b = -3a$.

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 7$, czyli $c = 7a$.

Wówczas:

$\Delta = b^2 - 4ac =$
 $= 9a^2 - 28a^2 = -19a^2 < 0$,

zatem nie można ułożyć takiego równania.

Uczeń:

- przeprowadza analizę zadania z parametrem
- zapisuje konieczne założenia tak, aby zachodziły warunki podane w treści zadania
- wyznacza te wartości parametru, dla których są spełnione warunki zadania
- rozwiązuje zadania z parametrem o znacznym stopniu trudności

Ćwiczenie 1

Z rysunku odczytujemy, że funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka jest mniejsza od -1 , czyli dla $m \in (-\infty; -1)$.

Ćwiczenie 2

a) $\Delta = 4 - 12m > 0$, zatem $m \in (-\infty; \frac{1}{3})$.

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 12m}}{-6} = \frac{1 + \sqrt{1 - 3m}}{3},$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 3m}}{3}$$

b) $\Delta = 4m^2 + 4m - 19 > 0$,

zatem $m \in (-\infty; \frac{-1 - 2\sqrt{5}}{2}) \cup$

$\cup (\frac{-1 + 2\sqrt{5}}{2}; \infty)$.

$$x_1 = \frac{-2m - 1 - \sqrt{4m^2 + 4m - 19}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-2m - 1 + \sqrt{4m^2 + 4m - 19}}{2}$$

c) $\Delta = m^2 + 4m > 0$,

zatem $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$.

$$x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4m}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2}$$

*1.7. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

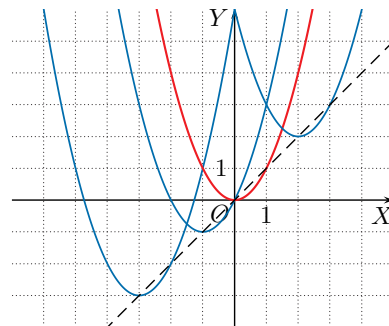
Przykład 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe?

Wykresem funkcji $y = (x - m)^2 + m$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne (m, m) , czyli leży na prostej $y = x$. Z rysunku odczytujemy, że funkcja:

$$y = (x - m)^2 + m$$

ma dwa miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 0)$.



Ćwiczenie 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi?

Przykład 2

Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2 - mx + 2 = 0$ w zależności od parametru m . Wyznacz te pierwiastki.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 - 16$$

• Równanie ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta = m^2 - 16 > 0$, czyli dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$.

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 16}}{4} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 16}}{4}$$

• Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek, gdy $\Delta = m^2 - 16 = 0$, czyli dla $m = -4$ ($x_0 = -1$) i dla $m = 4$ ($x_0 = 1$).

• Równanie nie ma pierwiastków, gdy $\Delta = m^2 - 16 < 0$, czyli dla $m \in (-4; 4)$.

Ćwiczenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki? Wyznacz te pierwiastki.

$$\text{a) } -3x^2 + 2x - m = 0 \quad \text{b) } x^2 + (2m + 1)x + 5 = 0 \quad \text{c) } x^2 + mx - m = 0$$

Ćwiczenie 3

Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m .

$$\text{a) } x^2 + (m - 1)x + 2m - 5 = 0 \quad \text{b) } -2x^2 + 2mx + 2x + m - \frac{1}{2} = 0$$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = m^2 - 10m + 21 = (m - 7)(m - 3)$,
czyli równanie ma:

0 pierwiastków dla $m \in (3; 7)$,

1 pierwiastek dla $m \in \{3, 7\}$,

2 pierwiastki dla $m \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$.

b) $\Delta = 4m^2 + 16m = 4m(m + 4)$,

czyli równanie ma:

0 pierwiastków dla $m \in (-4; 0)$,

1 pierwiastek dla $m \in \{-4, 0\}$,

2 pierwiastki dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$.

Multiteka

- Równanie kwadratowe z parametrem

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - kx + k - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach?

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$; pierwiastki te mają jednakowe znaki, gdy iloczyn tych liczb jest dodatni: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

$$\Delta = k^2 - 4(k - 1) = k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2, \quad \frac{c}{a} = k - 1$$

Otrzymujemy zatem układ nierówności:

$$(k - 2)^2 > 0 \quad \text{i} \quad k - 1 > 0 \\ k \neq 2 \quad \text{i} \quad k > 1$$

Równanie ma zatem dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru k równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

$$\text{a) } x^2 - (k + 2)x + k - 2 = 0 \qquad \text{b) } x^2 + (k - 1)x - k = 0$$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m + 1)x^2 - 4(m - 1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest liczbą ujemną?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2 .

1° Dla $2m + 1 = 0$, czyli dla $m = -\frac{1}{2}$, równanie jest liniowe – ma tylko jeden pierwiastek. Nie są więc spełnione warunki zadania.

2° Dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ równanie jest kwadratowe – ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-4(m - 1))^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2m + 1) = 16m^2 - 64m$$

$$\Delta > 0, \quad \text{gdy} \quad 16m^2 - 64m > 0$$

$$16m(m - 4) > 0$$

$$\text{(I)} \qquad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (4; \infty) \qquad m \neq -\frac{1}{2}$$

Sumę odwrotności pierwiastków wyznaczamy, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{4(m-1)}{4} = m - 1$$

Warunek $m - 1 < 0$ jest spełniony dla:

$$\text{(II)} \qquad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1) \qquad m \neq -\frac{1}{2}$$

Równanie ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest ujemna, gdy warunki (I) i (II) są jednocześnie spełnione, czyli dla:

$$m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$$

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } \begin{cases} \Delta = k^2 + 12 > 0 \\ x_1 x_2 = k - 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} k \in \mathbf{R} \\ k < 2 \end{cases}$$

Równanie ma pierwiastki o różnych znakach dla $k \in (-\infty; 2)$.

$$\text{b) } \begin{cases} \Delta = (k + 1)^2 > 0 \\ x_1 x_2 = -k < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} k \in \mathbf{R} \setminus \{-1\} \\ k > 0 \end{cases}$$

Równanie ma pierwiastki o różnych znakach dla $k \in (0; \infty)$.

Ćwiczenie 6

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

a) $\Delta = k^2 - 2k - 15 > 0$

dla $k \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

$$x_1^2 + x_2^2 = (k-1)^2 - 8 = 17$$

dla $k = -4$ i dla $k = 6$

b) $\Delta = -k^2 - 4k > 0$

dla $k \in (-4; 0)$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 - 4k = 17$$

dla $k = -\frac{15}{4}$

Ćwiczenie 7

a) $a = 1 > 0$, zatem nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = (k-3)^2 - 16k =$$

$$= k^2 - 22k + 9 \leq 0$$

dla $k \in (11 - 4\sqrt{7}; 11 + 4\sqrt{7})$.

b) 1° Dla $k = 1$ otrzymujemy nierówność liniową $-2x \leq 0$, która nie spełnia warunków zadania.

2° Dla $k \neq 1$ otrzymujemy nierówność kwadratową, która jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy jednocześnie zachodzą dwa warunki:

$$\begin{cases} k-1 < 0 \\ \Delta = 8k-4 \leq 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} k < 1 \\ k \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem $k \in (-\infty; \frac{1}{2})$.

Odpowiedzi do zadań

1. $\Delta = m^2 + 24 > 0$ dla dowolnego $m \in \mathbf{R}$, czyli równanie ma rozwiązanie dla $m \in \mathbf{R}$.

2. $\Delta = -3m^2 + 2m - 3$

$$\Delta_m = 4 - 36 < 0$$

oraz współczynnik przy m^2 jest ujemny, czyli:

$$\Delta = -3m^2 + 2m - 3 < 0$$

dla każdego $m \in \mathbf{R}$, zatem równanie nie ma rozwiązania dla żadnej wartości parametru m .

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest większa od -6 ?

a) $(m+3)x^2 + (m+2)x + 1 = 0$

b) $mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$

Ćwiczenie 6

Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 17?

a) $x^2 + (k-1)x + 4 = 0$

b) $x^2 - (k-2)x + \frac{1}{2}k^2 + 1 = 0$

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m+2)x^2 - 2mx + m \geq 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2 .

1° Dla $m = -2$ otrzymujemy nierówność liniową $4x - 2 \geq 0$. Nie spełnia ona warunków zadania.

2° Dla $m \neq -2$ otrzymujemy nierówność kwadratową.

Jest ona spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy jednocześnie zachodzą dwa warunki:

$$\begin{cases} m+2 > 0 & \text{(I)} \\ \Delta \leq 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Warunek (I): $m \in (-2; \infty)$

Warunek (II): $\Delta = (-2m)^2 - 4m(m+2) = 4m^2 - 4m^2 - 8m = -8m$
 $\Delta \leq 0$, gdy $m \in \langle 0; \infty \rangle$

Zatem nierówność $(m+2)x^2 - 2mx + m \geq 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in \langle 0; \infty \rangle$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^2 - (k-3)x + 4k \geq 0$

b) $(k-1)x^2 - 2kx + k - 1 \leq 0$

Zadania

D 1. Wykaż, że równanie $2x^2 + mx - 3 = 0$ ma rozwiązanie dla dowolnego $m \in \mathbf{R}$.

D 2. Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m , dla której równanie $x^2 + (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

Ćwiczenie 5

a) $\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 8 > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -m-2 > -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq -3 \\ m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty) \\ m < 4 \end{cases}$$

$$m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$$

b) $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 6m + 1 > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -m+1 > -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \in (-\infty; 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}; \infty) \\ m < 7 \end{cases}$$

$$m \in (-\infty; 0) \cup (0; 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}; 7)$$

3. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jeden pierwiastek?

a) $x^2 - 6x + 2m = 0$ c) $mx^2 - 4x + 1 = 0$
 b) $\frac{1}{2}x^2 - (m-2)x + m - 2 = 0$ d) $(1-m)x^2 - (4m-4)x - 3m + 5 = 0$

4. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 - 2x + k + 3 = 0$ c) $x^2 + (2k+1)x - 2k + 2 = 0$
 b) $x^2 - (k-4)x - k + 5 = 0$ d) $x^2 + (1-2k)x + 4 - 4k = 0$

5. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami dodatnimi?

a) $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$ c) $x^2 + (2m-5)x + 2m - 6 = 0$
 b) $x^2 + 4mx + m + 3 = 0$ d) $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - m - 6 = 0$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami ujemnymi?

a) $\frac{1}{4}x^2 + x + m^2 - 4m = 0$ b) $-x^2 + \frac{m}{2}x - m + 1 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^2 + 3x + k > 0$ d) $x^2 - kx + k + 1 \geq 0$
 b) $x^2 + kx + 9 \geq 0$ e) $(k+1)x^2 - 2x - 1 \leq 0$
 c) $x^2 - kx + k + 3 > 0$ f) $kx^2 + 2(k-1)x + k - 1 > 0$

8. Dla jakich wartości parametru k funkcja f określona jest dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + (k+2)x + 2k + 1}$ d) $f(x) = \sqrt{(k-4)x^2 + 2kx + 2k}$
 b) $f(x) = \sqrt{(5-k)x^2 + (k-2)x + 1}$ e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{kx^2 + 2kx + 2}}$
 c) $f(x) = \sqrt{(2-k)x^2 - 2x + 2 - k}$ f) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt{kx^2 + (2k-1)x + 2k-1}}$

9. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające podany warunek?

a) $x^2 - (a-4)x - 2a = 0, x_1 + x_2 > 2$
 b) $x^2 + (a+1)x + 4 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2)$
 c) $x^2 + ax + 2a - 3 = 0, x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 0$
 d) $-x^2 + (2a-1)x + a = 0, (x_1 - x_2)^2 = 5$

8. a) $k \in (0; 4)$ b) $k \in (-4; 4)$ c) $k \in (-\infty; 1)$
 d) Rozpatrujemy nierówność $(k-4)x^2 + 2kx + 2k \geq 0$.

Dla $k = 4$ otrzymujemy nierówność: $8x + 8 \geq 0$, która nie jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

Dla $k \neq 4$ nierówność zachodzi, gdy:

$$\begin{cases} k - 4 > 0 \\ \Delta = -4k^2 + 32k \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 4 \\ k \in (-\infty; 0) \cup (8; \infty) \end{cases}$$

Zatem $k \in (8; \infty)$.

e) $k \in (0; 2)$ f) $k \in (\frac{1}{2}; \infty)$

9. a) $a \in (6; \infty)$
 b) nie ma takiego a
 c) $a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; 2) \cup (6; \infty)$
 d) $a = -1$ lub $a = 1$

3. a) $m \in (-\infty; \frac{9}{2})$
 b) $m \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$
 c) $m \in (-\infty; 4)$
 d) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 4. a) $k \in (-\infty; -3)$
 b) $k \in (5; \infty)$
 c) $k \in (1; \infty)$
 d) $k \in (1; \infty)$
 5. a) $m \in (4; \infty)$
 b) $m \in (-3; -\frac{3}{4})$
 c) nie ma takiego m
 d) $m \in (2; \infty)$
 6. a) $m \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$
 b) nie ma takiego m
 7. a) $k \in (\frac{9}{4}; \infty)$
 b) $k \in (-6; 6)$
 c) $k \in (-2; 6)$
 d) $k \in (2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$
 e) Dla $k = -1$ otrzymujemy nierówność: $-2x - 1 \leq 0$, która nie jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

Dla $k \neq -1$ nierówność jest spełniona, gdy:

$$\begin{cases} k + 1 < 0 \\ \Delta = 4k + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < -1 \\ k \leq -2 \end{cases}$$

Zatem $k \in (-\infty; -2)$.

f) Dla $k = 0$ otrzymujemy nierówność: $-2x - 1 > 0$, która nie jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

Dla $k \neq 0$ nierówność zachodzi, gdy:

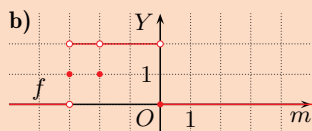
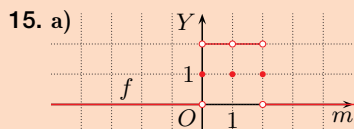
$$\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = -4k + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ k > 1 \end{cases}$$

Zatem $k \in (1; \infty)$.

10. a) $a = -8$
b) $a \in (-\infty; 3) \cup (\frac{28}{9}; \infty)$
11. a) $a = -\frac{\sqrt{22}}{2}, a = \frac{\sqrt{22}}{2}$
b) $a = 4 - \sqrt{17}$
12. $a = -3, a = 3$
13. $\Delta = 4(a^2 + a + 2) > 0$ dla $a \in \mathbf{R}$. Wyrażenie:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c} = -\frac{2}{a^2 + a + 1}$$
 przyjmuje wartość największą, gdy mianownik $a^2 + a + 1$ przyjmuje wartość najmniejszą, czyli dla $a = -\frac{1}{2}$.
14. a) $m \in \langle 2; 3)$
b) Rozwiązaniem równania jest -3 . Równanie to nie ma innych rozwiązań, gdy równanie:
 $x^2 + (m+3)x + m^2 = 0$
 1° ma tylko jedno rozwiązanie: $x = -3$, czyli dla $m = 3$;
 2° nie ma rozwiązań, czyli:
 $\Delta = -3m^2 + 6m + 9 < 0$
 skąd $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.
 Ostatecznie:
 $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.



16. $\Delta = -4m^2 - 16m > 0$, zatem $D_f = (-4; 0)$
 $f(m) = x_1 x_2 = m^2 + 4m + 1$
 Iloczyn $x_1 x_2$ jest najmniejszy, gdy funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość, czyli dla $m = -2$. Pierwiastki równania $x^2 - 2x - 3 = 0$:
 $x_1 = -1, x_2 = 3$
17. $x_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{16}, x_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{16}$

10. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 6?
 a) $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ b) $x^2 - 6(a-3)x + a - 3 = 0$
11. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 16?
 a) $x^2 - 2ax + 3 = 0$ b) $x^2 + (4-2a)x + a^2 + 1 = 0$
12. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + ax + 1 = 0$ jest równa 7?
13. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $-x^2 - 2x + a^2 + a + 1 = 0$ przyjmuje największą wartość?
14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie ma tylko jedno rozwiązanie.
 a) $x(x^2 - (2m-4)x + m-2) = 0$ b) $(x+3)(x^2 + (m+3)x + m^2) = 0$
15. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$, która każdemu argumentowi $m \in \mathbf{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania.
 a) $(m-1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ b) $(m^2 + 2m)x^2 + 2mx + 3 = 0$
16. Niech $y = f(m)$ będzie funkcją określającą wartość iloczynu dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x + m^2 + 4m + 1 = 0$ w zależności od parametru m . Podaj dziedzinę funkcji f oraz wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich iloczyn był najmniejszy.
17. Funkcja $y = f(m)$ opisuje sumę dwóch różnych pierwiastków równania:

$$\frac{1}{m}x^2 + (m+1)x + \frac{m}{64} = 0$$

 Wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich suma była największa.
18. Dla jakich wartości parametru m równanie ma cztery różne pierwiastki?
 a) $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ c) $x^4 + mx^2 - m - 6 = 0$
 b) $x^4 - x^2 + m = 0$ d) $x^4 + (m-2)x^2 + 4 - m = 0$
19. Wyznacz liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m .
 a) $x^4 + mx^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + m = 0$ *c) $|x^2 + 2x - 8| = m$
20. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające nierówność $|x_1| + |x_2| \leq 1$?
18. a) Aby równanie $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ miało cztery różne pierwiastki, równanie $t^2 + mt + 1 = 0$, gdzie $t = x^2 \geq 0$, musi mieć dwa różne pierwiastki dodatnie, zatem muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = -m > 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ m \in \mathbf{R} \\ m < 0 \end{cases}$$

 Ostatecznie $m \in (-\infty; -2)$.
- b) $m \in (0; \frac{1}{4})$
 c) $m \in (-\infty; -6)$
 d) $m \in (-\infty; -2\sqrt{3})$
19. a) 0 dla $m \in (-4; \infty)$,
 2 dla $m = -4$,
 4 dla $m \in (-\infty; -4)$
 b) 0 dla $m \in (0; \infty)$,
 1 dla $m = 0$,
 2 dla $m \in (-\infty; 0)$
 c) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
 2 dla $m \in \{0\} \cup (9; \infty)$,
 3 dla $m = 9$,
 4 dla $m \in (0; 9)$
20. $m \in (6; \infty)$

1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$$p + q = 12, \text{ zatem } q = 12 - p.$$

$$\text{Iloczyn tych liczb: } p \cdot q = p(12 - p) = -p^2 + 12p.$$

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p \quad \text{Wykresem funkcji } f \text{ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.}$$

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest zatem równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

a) 38, b) $\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q .

Przykład 2

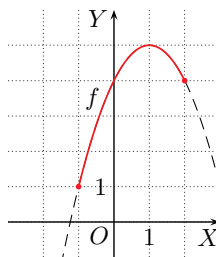
Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału:

$$f(-1) = 1 \text{ oraz } f(2) = 4.$$

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli: $x_w = 1$.

Ponieważ $x_w \in \langle -1; 2 \rangle$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale to: $y_w = f(1) = 5$. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2 \rangle$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $\langle p_1; p_2 \rangle$, to wyznaczamy również y_w , obliczając $f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych trzech wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Ćwiczenie 2

$$p + 2q = 36, \text{ zatem } p = 36 - 2q$$

$$p \cdot q = f(q) = (36 - 2q)q = -2q^2 + 36q$$

$$q_w = 9, \quad f(q_w) = 162$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 162.

Uczeń:

- stosuje pojęcia najmniejszej i największej wartości funkcji
- wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- stosuje własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych

Ćwiczenie 1

Liczby oznaczamy przez p i q , wtedy:

$$\text{a) } q = 38 - p$$

$$p \cdot q = f(p) = p(38 - p) =$$

$$= -p^2 + 38p$$

$$p_w = 19, \quad f(p_w) = 361$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 361.

$$\text{b) } q = \frac{1}{2} - p$$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \frac{1}{2}p$$

$$p_w = \frac{1}{4}, \quad f(p_w) = \frac{1}{16}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{16}$.

$$\text{c) } q = \sqrt{2} - p$$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \sqrt{2}p$$

$$p_w = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(p_w) = \frac{1}{2}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{2}$.

Multiteka

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $x_w = -2 \in \langle -3; 1 \rangle$,
 $y_w = f(x_w) = 4$ – wartość najmniejsza
 $f(-3) = 5$,
 $f(1) = 13$ – wartość największa
- b) $x_w = -1 \notin \langle 0; 4 \rangle$,
 $f(0) = -1$ – wartość najmniejsza,
 $f(4) = -49$ – wartość najmniejsza
- c) $x_w = 2 \in \langle -1; 3 \rangle$,
 $y_w = f(x_w) = -2$ – wartość największa,
 $f(-1) = -11$ – wartość najmniejsza,
 $f(3) = -3$
- d) $x_w = -\frac{1}{2} \in \langle -2; 1 \rangle$,
 $y_w = f(x_w) = -\frac{7}{2}$ – wartość najmniejsza,
 $f(-2) = 1$ – wartość największa,
 $f(1) = 1$ – wartość największa

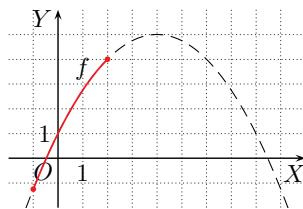
Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

$$\bullet x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin \langle -1; 2 \rangle$$

Zatem wartości najmniejszą i największą funkcji f są przyjmowane na końcach przedziału $\langle -1; 2 \rangle$.

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ – wartość najmniejsza
- $f(2) = 4$ – wartość największa



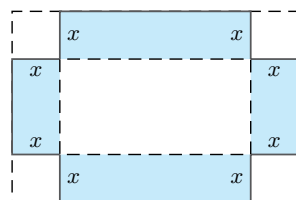
Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 8$, $\langle -3; 1 \rangle$ c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, $\langle -1; 3 \rangle$
 b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$, $\langle 0; 4 \rangle$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $\langle -2; 1 \rangle$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D = (0; 20)$.

$$x > 0, 2x < 40, 2x < 60$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12,5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

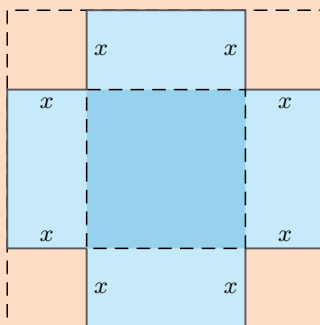
Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największą wartość funkcji P przyjmowana jest dla x_w .

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm².

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm² wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Ćwiczenie 4



Długość boku kwadratowego arkusza wynosi 40 cm. Pole powierzchni bocznej pudełka opisuje funkcja:

$$P(x) = 4(40 - 2x)x = -8x^2 + 160x, \quad x \in (0; 20)$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-160}{-16} = 10$$

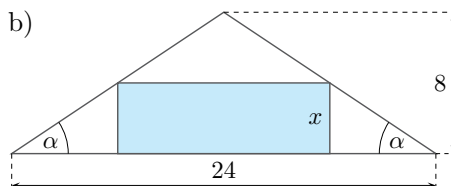
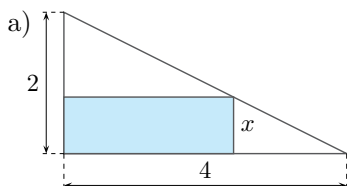
Wartość ta jest równa:

$$f(10) = -800 + 1600 = 800$$

Boki wycinanych kwadratów mają długość 10 cm, a pole powierzchni bocznej wynosi 800 cm².

Zadania

- Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale:
 - $\langle 0; 4 \rangle$,
 - $\langle -2; 0 \rangle$,
 - $\langle -4; 6 \rangle$.
- Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.
 - Wyznacz największe pole takiego trójkąta.
 - Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.
- Mamy 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ten ogródek, jeśli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 4 m?
- Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego powierzchnia była jak największa?
- Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Szkielet prostopadłościanu wykonano z 56 cm drutu. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jakie powinny być długości krawędzi tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Wyraż pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x . Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



8. Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}$, $\langle 1; 4 \rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2 - 10x + 4}}$, $\langle -2; 0 \rangle$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}$, $\langle 0; 4 \rangle$

d) $f(x) = (x^2 - 6x + 3)^2$, $\langle 1; 5 \rangle$

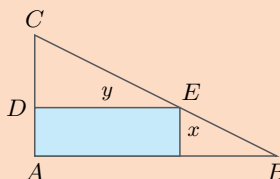
7. a) Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC : $\frac{y}{4} = \frac{2-x}{2}$, czyli $y = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$.

Zatem pole prostokąta opisuje funkcja:

$$P(x) = -2x^2 + 4x$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla $x_w = 1$. Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 1×2 .

b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 12×4



Odpowiedzi do zadań

- najmniejsze: $f(0) = f(4) = -1$, $g(0) = -3$,
największe: $f(2) = 3$,
 $g(4) = 9$
 - najmniejsze: $f(-2) = -13$,
 $g(-1) = -\frac{7}{2}$,
największe: $f(0) = -1$,
 $g(-2) = g(0) = -3$
 - najmniejsze: $f(-4) = -33$,
 $g(-1) = -\frac{7}{2}$,
największe: $f(2) = 3$,
 $g(6) = 21$
- a) 8 b) 32
- Oznaczmy boki ogródka przez x i y , wówczas:
 $2(x+y) = 84$, czyli $y = 42 - x$
Pole ogródka opisuje funkcja:
 $P(x) = x(42 - x)$,
 $D_P = (4; 42)$
Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x = 21$.
Wtedy $y = 42 - 21 = 21$.
Wymiary ogródka o największej powierzchni: $21 \text{ m} \times 21 \text{ m}$.

4. $7 \text{ m} \times 14 \text{ m}$

5. $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$

6. $3 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$

8. a) $D_f = \mathbb{R}$

Rozpatrzmy funkcję:

$$g(x) = x^2 - 4x + 8$$

w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$.

Jej wartością najmniejszą jest $g(2) = 4$, a wartością największą $-g(4) = 8$.

Wartością najmniejszą funkcji f jest:

$$f(4) = \frac{1}{g(4)} = \frac{1}{8}$$

a wartością największą:

$$f(2) = \frac{1}{g(2)} = \frac{1}{4}$$

b) najmniejsze:

$$f(0) = f(4) = 2,$$

$$\text{największa: } f(2) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{c) najmniejsza: } f(-1) = \frac{1}{3},$$

największe:

$$f(-2) = f(0) = \frac{1}{2}$$

d) najmniejsze:

$$f(1) = f(5) = 4,$$

$$\text{największa: } f(3) = 36$$

Uczeń:

- przeprowadza analizę zadania i zapisuje odpowiednie równanie, nierówność lub funkcję kwadratową opisującą daną zależność
- znajduje rozwiązanie, które spełnia ułożone przez niego warunki

Ćwiczenie 1

a) $\text{zysk} = \text{sprzedaż} \cdot (\text{cena za sztukę} - \text{koszt jednej sztuki})$

$$z(x) = (-40x + 3600)(x - 20) = -40x^2 + 4400x - 72000$$

b) Funkcja z przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-4400}{-80} = 55$$

Zatem cenę lalki należy ustalić na 55 zł. Wtedy wielkość sprzedaży to 1400 sztuk, a zysk 49000 zł.

Ćwiczenie 2

a) Niech x oznacza cenę za jednego misia. Wielkość sprzedaży opisuje funkcja:

$$s(x) = 1000 - 50(x - 15) = -50x + 1750,$$

gdzie $x \in \langle 15; 35 \rangle$.

zysk = sprzedaż $\cdot$ (cena za sztukę - koszt jednej sztuki)

$$z(x) = (-50x + 1750) \cdot (x - 10) = -50x^2 + 2250x - 17500,$$

gdzie $x \in \langle 10; 35 \rangle$.

b) Funkcja z przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-2250}{-100} = 22,5$$

Zatem cenę misia należy ustalić na 22,50 zł. Wtedy wielkość sprzedaży to 625 sztuk, a zysk 7812,50 zł.

1.9. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ćwiczenie 1

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny x zł za sztukę (tabela poniżej).

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Dane z tabeli spełniają równanie $s = -40x + 3600$.

D a) Uzasadnij, że jeśli koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł, to zysk firmy ze sprzedaży lalek w cenie x zł za sztukę wyraża się wzorem:

$$z(x) = -40x^2 + 4400x - 72000$$

b) Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 2

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Przy cenie 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny x zł za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że obniżenie ceny o każde 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy?

Ćwiczenie 4

Właściciel kina zauważył, że przy cenie biletu wynoszącej 16 zł na seans przychodzi średnio 100 osób, a każdorazowe podniesienie ceny biletu o złotówkę powoduje, że liczba widzów zmniejsza się o 5. Jaką cenę biletu należy ustalić, aby dochód kina był największy?

Ćwiczenie 3

Niech x oznacza, ile razy należy obniżyć cenę o 5 zł, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zysk opisuje funkcja:

$$z(x) = (16 + 4x)(40 - 5x) = -20(x + 4)(x - 8)$$

Funkcja z przyjmuje największą wartość dla:

$$x_w = \frac{-4+8}{2} = 2$$

zatem cenę należy obniżyć o 10 zł.

Ćwiczenie 4

Niech x oznacza, ile razy należy podnieść cenę o 1 zł, $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$.

Dochód kina opisuje funkcja:

$$d(x) = (16 + x)(100 - 5x) = -5(x - 20)(x + 16)$$

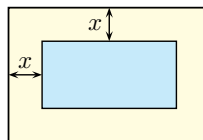
Funkcja d przyjmuje największą wartość dla $x_w = \frac{-16+20}{2} = 2$, zatem cena biletu powinna wynosić 18 zł.

Ćwiczenie 5

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika, jeśli różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Ćwiczenie 6

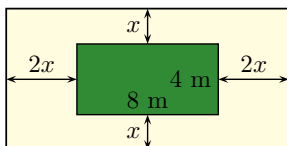
Wokół basenu o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ wyłożono kafełkami pas o szerokości x (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli ma on powierzchnię 45 m^2 ?



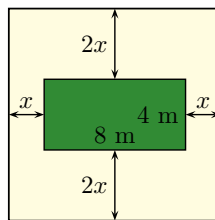
Zadania

- Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o $x \text{ m}$, a długość o $2x \text{ m}$. Oblicz x , jeśli powierzchnia placu wzrosła o 144 m^2 .
- Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy.
 - $P = 2400 \text{ cm}^2$, $x = 80 \text{ cm}$, $y = 60 \text{ cm}$
 - $P = 2700 \text{ cm}^2$, $x = 75 \text{ cm}$, $y = 55 \text{ cm}$
- Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ ma zostać wyłożona kostka. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji wyznacz x .

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2



- Dany jest prostokąt o wymiarach $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x \text{ cm}$. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm ?
- Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest nie mniejsza niż 6 m i nie większa niż 10 m?

3. Propozycja A: $(8 + 4x)(4 + 2x) = 32 + 66$

$x = 1,5 \text{ m}$

Propozycja B: $(8 + 2x)(4 + 4x) = 32 + 78$

$x = 1,5 \text{ m}$

4. $(3 + x)^2 + (10 + x)^2 > 13^2$

$x > 2$

5. Niech x oznacza szerokość pokoju, gdzie $x > 0$, wówczas:

$6^2 \leq x^2 + (x + 2)^2 \leq 10^2$, czyli

$(\sqrt{17} - 1) \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$.

Ćwiczenie 5

a) Wymiary trawnika:
 x , $x + 6$, gdzie $x > 0$.

$$x(x + 6) = 216$$

$$x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$\Delta = 36 + 864 = 900$$

$$x = \frac{-6+30}{2} = 12 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-6-30}{2} < 0$$

Zatem trawnik ma wymiary $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$.

b) Wymiary trawnika:

x , $x + 15$, gdzie $x > 0$.

$$x(x + 15) = 216$$

$$x^2 + 15x - 216 = 0$$

$$\Delta = 225 + 864 = 1089$$

$$\sqrt{\Delta} = 33$$

$$x = \frac{-15+33}{2} = 9 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-15-33}{2} < 0$$

Zatem trawnik ma wymiary $9 \text{ m} \times 24 \text{ m}$.

Ćwiczenie 6

$$(4 + 2x)(8 + 2x) - 4 \cdot 8 = 45$$

$$4x^2 + 24x - 45 = 0$$

$$\Delta = 576 + 720 = 1296$$

$$\sqrt{\Delta} = 36$$

$$x = \frac{-24+36}{8} = 1,5 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-24-36}{8} < 0$$

Szerokość pasa wynosi $1,5 \text{ m}$.

Odpowiedzi do zadań

1. $(12 + x)(18 + 2x) = 12 \cdot 18 + 144$
 $x = 3$

2. a – szerokość ramy

a) $(80 - 2a)(60 - 2a) = 2400$,
gdzie $a \in (0; 30)$

$a = 10 \text{ cm}$

b) $(75 - 2a)(55 - 2a) = 2700$,
gdzie $a \in (0; 27,5)$

$a = \frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6 \text{ [cm]}$

6. Niech $x - 7$, x , $x + 2$ będą długościami boków trójkąta. Wówczas:

$$(x-7)^2 + x^2 = (x+2)^2, x > 7$$

Zatem $x = 15$,
czyli $Ob = 40$ cm.

7. $P(x) = 8 \cdot 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}(8-x) \cdot (10-x) = 18x - x^2$,
 $x \in (0; 8)$
 $P(x) \geq 0,4 \cdot 8 \cdot 10$
 $x^2 - 18x + 32 \leq 0$
 $x \in \langle 2; 8 \rangle$

9. a) Miejscami zerowymi są liczby 0 i 12, zatem parabola ma równanie postaci:

$$y = ax(x - 12)$$

Po podstawieniu współrzędnych wierzchołka $(6, 4)$ do równania paraboli otrzymujemy $a = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

- b) Miejscami zerowymi są liczby -6 i 6 , zatem:

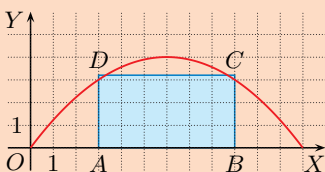
$$y = a(x-6)(x+6) = a(x^2 - 36).$$

Współrzędne wierzchołka:

$$(0, 4), \text{ czyli } a = -\frac{1}{9}.$$

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

10.



Prostokąt $ABCD$ na rysunku jest schematycznym przedstawieniem barki.

Punkt D ma współrzędne $(3, 3, 1)$.

Parabola przedstawiająca most jest wykresem funkcji:

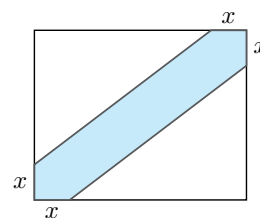
$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

Zauważmy, że:

$$f(3) = 3 < 3,1$$

czyli barka nie przeplynie pod mostem.

6. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC . Oblicz obwód tego trójkąta.



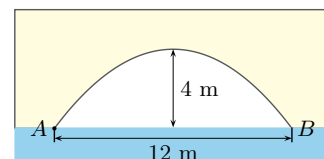
7. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

- D** 8. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

a) naturalnym,

b) parzystym.

9. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



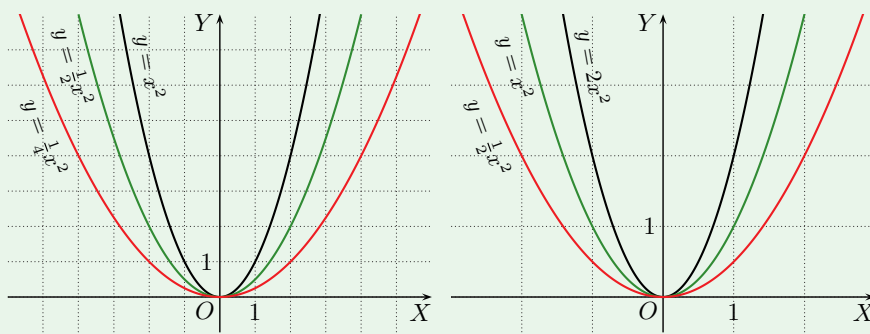
a) w punkcie A ,

b) w środku odcinka AB .

10. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 9. przeplynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Czy wiesz, że...

Wszystkie parabole są podobne. Aby się o tym przekonać, warto przyjrzeć się poniższym rysunkom (zauważ, że jednostki na osiach na rysunku po prawej są dwukrotnie większe niż na rysunku po lewej). Na przykład parabole narysowane kolorem zielonym (na rysunku po prawej parabola dana wzorem $y = x^2$, a na rysunku po lewej parabola $y = \frac{1}{2}x^2$) są identyczne.



8. a) Długości boków trójkąta: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$(n-3)(n+1) = 0$$

$$n = 3 \text{ lub } n = -1 \notin \mathbb{N}_+$$

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt.
Jego boki mają długości: 3, 4 i 5.

- b) Długości boków trójkąta: $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$4n^2 + (2n+2)^2 = (2n+4)^2$$

$$4n^2 + 4(n+1)^2 = 4(n+2)^2$$

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$$

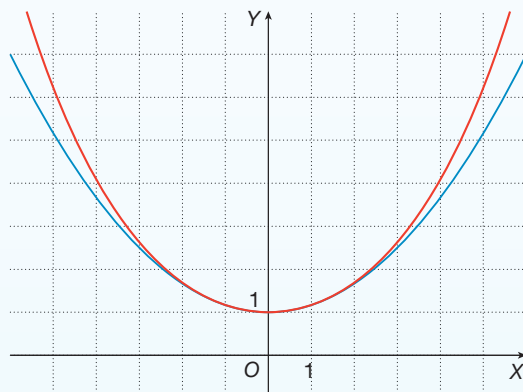
Z podpunktu a) mamy $n = 3$.

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt.
Jego boki mają długości: 6, 8 i 10.

Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* (od łacińskiego słowa *catena* oznaczającego łańcuch).

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych to monument, którego kształt jest inspirowany krzywą łańcuchową.

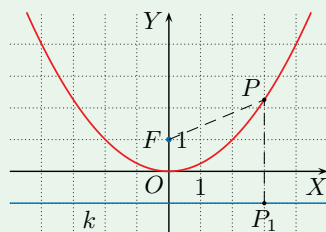


- 1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

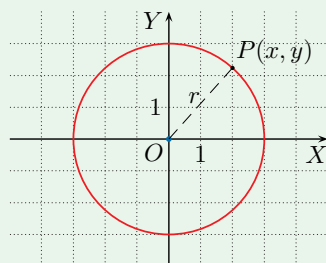
1.10. Zagadnienia uzupełniające

■ Równania i układy równań drugiego stopnia

Na rysunkach poniżej przedstawiono przykłady krzywych opisanych za pomocą równań drugiego stopnia.

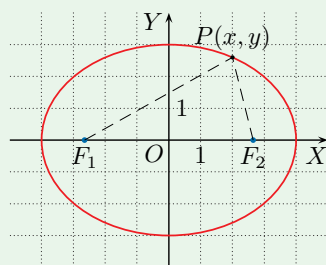


Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (kierownicy paraboli) i ustalonego punktu F (ogniska paraboli). Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = \frac{1}{4}x^2$. Jej kierownicą jest prosta $y = -1$, a ogniskiem – punkt $F(0, 1)$. Zachodzi równość $|FP| = |PP_1|$.



Okrąg jest zbiorem punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu O (środka okręgu) jest równa promieniowi okręgu. Do okręgu o promieniu r , którego środkiem jest początek układu współrzędnych, należą punkty, których współrzędne (x, y) spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$.

Na rysunku powyżej przedstawiono okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 9$ – jego środkiem jest punkt $O(0, 0)$, a promień jest równy 3. Dla dowolnego punktu P należącego do tego okręgu zachodzi równość $|OP| = 3$.



Elipsa jest zbiorem punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 (ognisk elipsy) jest stała. Jeśli osie symetrii elipsy przecinają się w początku układu współrzędnych, to jest ona dana równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$. W przypadku gdy $a = b$, otrzymujemy okrąg ($F_1 = F_2 = O$).

Na rysunku powyżej przedstawiono elipsę daną równaniem $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Przecina ona oś OX w punktach $(-4, 0)$ i $(4, 0)$, zaś oś OY w punktach $(0, -3)$ i $(0, 3)$. Jej ogniskami są punkty $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ i $F_2(\sqrt{7}, 0)$. Dla dowolnego punktu P należącego do elipsy zachodzi równość $|F_1P| + |F_2P| = 8$.

Przykład 1

Wyznacz punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 9$ i paraboli $y = x^2 - 3$.

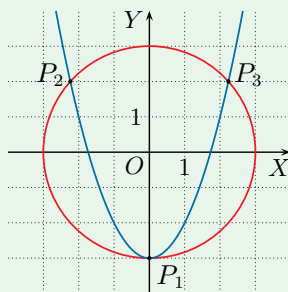
Aby wyznaczyć punkty wspólne okręgu i paraboli, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = -y^2 + 9 \\ y = -y^2 + 9 - 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Z pierwszego równania wyznaczamy } x^2 \\ \text{i podstawiamy do drugiego równania.} \end{array}$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 + y - 6 = 0$. Jego rozwiązaniami są liczby: $y_1 = -3$ i $y_2 = 2$.

Punkty wspólne okręgu i paraboli: $P_1(0, -3)$, $P_2(-\sqrt{5}, 2)$ i $P_3(\sqrt{5}, 2)$.



1. Narysuj okrąg, którego liczba punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$ jest równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 4.

2. Wyznacz punkty wspólne okręgu i paraboli.

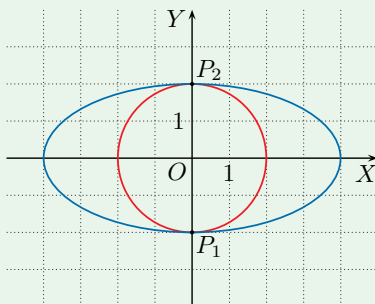
a) $x^2 + y^2 = 4$, $y = -x^2$ c) $x^2 + y^2 = 10$, $y = x^2 - 4$
b) $x^2 + y^2 = 16$, $y = x^2 + 4$ d) $x^2 + y^2 = 25$, $y = -x^2 + 5$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg $x^2 + y^2 = 4$ i elipsę $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Mają one dwa punkty wspólne. Współrzędne tych punktów możemy odczytać z rysunku. Można je też wyznaczyć, rozwiązując układ równań:

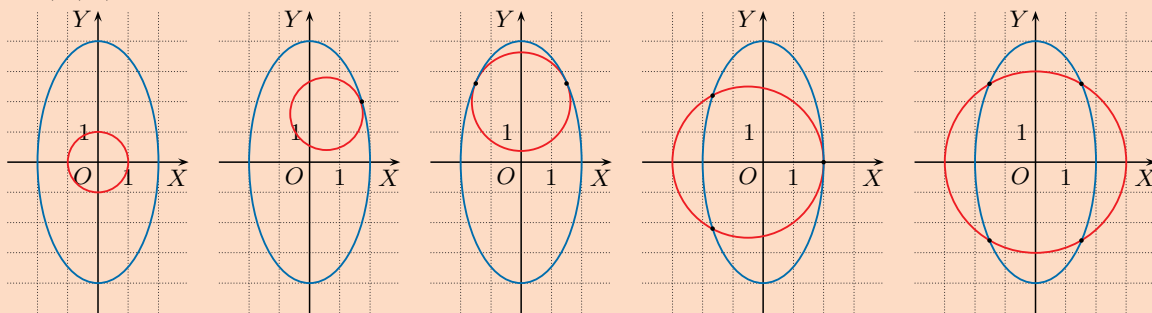
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

Punkty wspólne okręgu i elipsy: $P_1(0, -2)$ i $P_2(0, 2)$.



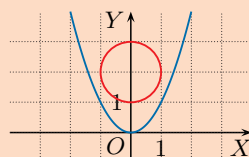
3. Ile punktów wspólnych mogą mieć okrąg i elipsa (wykonaj odpowiednie rysunki)?

3. 0, 1, 2, 3 lub 4

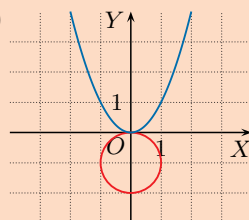


Odpowiedzi do zadań

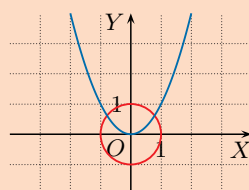
1. a)



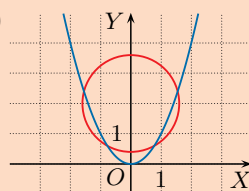
b)



c)



d)



2. a) $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

b) (0, 4)

c) $x^2 + (x^2 - 4)^2 = 10$

$$x^4 - 7x^2 + 6 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 6) = 0$$

$$(-\sqrt{6}, 2), (\sqrt{6}, 2), (-1, -3),$$

$$(1, -3)$$

d) $x^2 + (5 - x^2)^2 = 25$

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 9) = 0$$

$$(0, 5), (-3, -4), (3, -4)$$



Odpowiedzi do zadań

- $x = 0$ lub $x = \frac{5}{4}$
 - $x = 0$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$
 - $x = -\frac{4}{9}$ lub $x = \frac{4}{9}$
 - $x = -1$ f) $x = 6$
- $x = -1$ lub $x = 5$
 - $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$ lub $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$
 - $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 5$
 - $x = 6$
 - $x = -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$ lub $x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}$
 - $x = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ lub $x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$
 - $x = -3$ lub $x = 0$
 - $x = -4 - \sqrt{17}$ lub $x = -4 + \sqrt{17}$
 - $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = -1$
- $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
 - $x = -\frac{5}{2}$
 - sprzeczna
 - $x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
 - $x \in \mathbf{R}$
 - $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; \infty)$
- $A \cap B = \langle -1 - \sqrt{2}; -1 \rangle \cup \langle 0; -1 + \sqrt{2} \rangle$,
 $A \setminus B = (-1; 0)$
 - $A \cap B = (-2 + \sqrt{2}; 3)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 - $A \cap B = \langle 2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7} \rangle$,
 $A \setminus B = (-3; 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}; 6)$
- $x = -2$ lub $x = 2$
 - $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
 - $x = -1$ lub $x = 1$
 - $x = 0$
 - $x = -4$ lub $x = 0$ lub $x = 4$
 - sprzeczne

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Rozwiąż równanie.
 - $4x^2 - 5x = 0$
 - $x = \sqrt{2}x^2$
 - $25x^2 - 1 = 0$
 - $1 - \frac{81}{16}x^2 = 0$
 - $x(x+2) = -1$
 - $x(x-8) = 4(x-9)$
- Rozwiąż równanie.
 - $x^2 - 4x - 5 = 0$
 - $2x^2 + 5x + 1 = 0$
 - $3x^2 - 14x - 5 = 0$
 - $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$
 - $7x^2 + 2x = 1$
 - $-3x^2 + x + 1 = 0$
 - $x(x-5) = 2x(x-1)$
 - $2(1-5x) = (1-x)^2$
 - $\frac{1}{5}(x^2+4) = \frac{1}{2}(1-x)$
- Rozwiąż nierówność.
 - $x^2 + x - 1 \geq 0$
 - $4x^2 + 20x + 25 \leq 0$
 - $5x^2 - 5x + 2 < 0$
 - $-3x^2 + 6x > 2$
 - $4x - 3x^2 \leq 2 - x^2$
 - $-x(4-x) > 4 - x^2$
- Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.
 - $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x - 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x \geq 0\}$
 - $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 4x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x - 6 < 0\}$
 - $A = \{x \in \mathbf{R} : 3x + 18 > x^2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x \leq 3\}$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x^2 - 4)(x^2 + 9) = 0$
 - $(9x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$
 - $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
 - $x^4 + 16x^2 = 0$
 - $x^4 - 16x^2 = 0$
 - $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$
- Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.
 - $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
 - $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
 - $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$
 - $8x^4 - 3x^2 - 3 = 0$
 - $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$
 - $x^4 - 2x^2 - 5 = 0$
 - $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
 - $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$
 - $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$
- Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.
 - $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$
- Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
 - $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$
- $x = -2$ lub $x = 2$
 - $x = -2$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = 2$
 - sprzeczne
 - $x = -\frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$ lub $x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$
 - $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$
 - $x = -\sqrt{1+\sqrt{6}}$ lub $x = \sqrt{1+\sqrt{6}}$
 - $x = -2$ lub $x = 2$
 - $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
 - sprzeczne
- $x = -2, y = 1$ lub $x = 1, y = 4$
 - $x = 1, y = -2$ lub $x = 2, y = 1$
 - $x = 1, y = 0$ lub $x = 3, y = 4$
- $x = -1, y = 2$ lub $x = 1, y = 2$
 - $x = 1, y = 3$ lub $x = 3, y = 3$
 - $x = 0, y = 1$ lub $x = -4, y = 1$



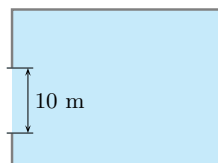
9. Naszkicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $\langle -2; 1 \rangle$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $\langle 0; 2 \rangle$
 b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $\langle 0; 4 \rangle$ d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $\langle -2; 2 \rangle$

10. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:

- a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

11. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek, jeżeli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 10 metrów?



12. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór tych punktów (x, y) , których współrzędne spełniają poniższe warunki.

- a) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ y^2 - 4 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \\ y^2 - 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ 2y^2 + 3y - 2 > 0 \end{cases}$

■ Zestaw II

1. Dla jakich wartości parametru c funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

- a) $f(x) = x^2 + 3x + c$ c) $f(x) = -x^2 + x + c + 1$
 b) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{5}x - c$ d) $f(x) = x^2 + cx + c$

2. Dla jakich wartości parametru b funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?

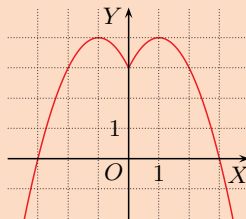
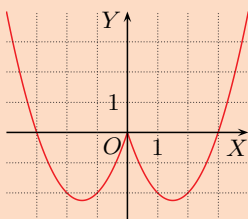
- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$ b) $f(x) = -x^2 + 2bx - 1$

3. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

- a) $f(x) = |x^2 + 2x|$ b) $f(x) = x^2 - 3|x|$ c) $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$

Zestaw II

1. a) $c = \frac{9}{4}$
 b) $c = -5$
 c) $c = -\frac{5}{4}$
 d) $c = 0$, $c = 4$
2. a) $b \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$
 b) $b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
3. a) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
 2 dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$,
 3 dla $m = 1$,
 4 dla $m \in (0; 1)$
3. b) 0 dla $m \in (-\infty; -\frac{9}{4})$,
 2 dla $m \in \{-\frac{9}{4}\} \cup (0; \infty)$,
 3 dla $m = 0$,
 4 dla $m \in (-\frac{9}{4}; 0)$
3. c) 0 dla $m \in (4; \infty)$,
 2 dla $m \in (-\infty; 3) \cup \{4\}$,
 3 dla $m = 3$,
 4 dla $m \in (3; 4)$



9. a) najmniejsza: $f(-1) = -2$,
 największa: $f(1) = 6$
 b) najmniejsza: $f(4) = -8$,
 największa: $f(1) = 1$
 c) najmniejsza: $f(0) = 1$,
 największa: $f(2) = 9$
 d) najmniejsza: $f(-2) = -12$,
 największa: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

10. a) $a = b = 2$

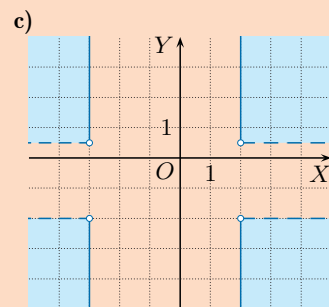
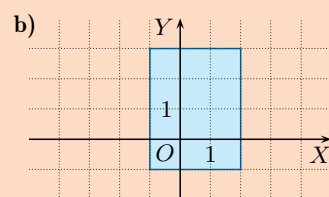
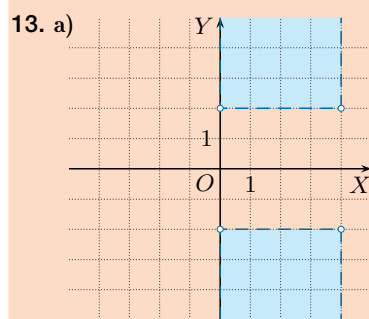
b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$

c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$

11. $62,5 \text{ m} \times 62,5 \text{ m}$

12. a) o 100 zł; zysk zwiększy się o 10000 zł

b) o 280 zł; zysk zwiększy się o 3920 zł



4. a) $x = 1$
 b) $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = -1$
 c) $x = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ lub $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$
 d) $x = -1 - \sqrt{3}$ lub $x = -1$ lub $x = -1 + \sqrt{3}$
5. a) $x = 148$
 b) $x = -6$ lub $x = -3$ lub $x = 3$ lub $x = 6$
6. a) $x = 3$ lub $x = 4$
 b) $x = -5$ lub $x = 0$ lub $x = 4$
7. a) $\Delta = 12^2 + 4 \cdot 15 \cdot 20 > 0$, zatem równanie ma dwa pierwiastki.

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 10x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 10 \frac{c}{a} = \frac{1048}{75} = 13 \frac{73}{75}$$

 b) $\Delta = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4(\sqrt{2} + 1)$, $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki.

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2 = 7 - 2\sqrt{2}$$
8. a) $f(x) = -3x^2 + 8x - 2$
 b) $f(x) = -2x^2 + 20x - 48$
9. a) $m \in (-\infty; 0)$
 b) nie ma takich m
 c) $m \in (-2; 0) \cup (0; 2)$
 d) $m \neq \frac{2}{3}$
10. a) $m \in (4 + 4\sqrt{2}; \infty)$
 b) $m \in (0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$
11. a) $m \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2})$
 b) $m \in \langle 3; \infty \rangle$
12. a) $m \in \{-2, -1\}$
 b) Dla $m = -1$

$$f(x) = 2 \notin \langle 1; \infty \rangle.$$

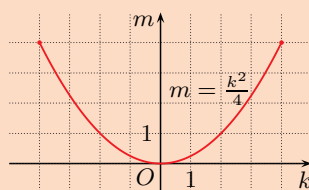
$$f(\mathbf{R}) = \langle 1; \infty \rangle, \text{ gdy } m + 1 > 0 \text{ i } y_w = 1.$$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(m+1)^2 - 4(m+1)(m+3)}{4(m+1)} = -\frac{m+1-4(m+3)}{4} = \frac{3m+11}{4} = 1$$

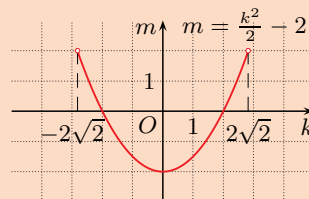
 dla $m = -\frac{7}{3}$, ale $m > -1$, zatem nie ma takich m .

4. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.
- a) $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$ c) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 2) = 24$
 b) $(x^2 + 4x)^2 + 7(x^2 + 4x) + 12 = 0$ d) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) = 2$
5. Rozwiąż równanie.
- a) $x - 9\sqrt{x-4} - 40 = 0$ b) $x^2 - 9|x| + 18 = 0$
6. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązania.
- a) $\sqrt{7x - x^2 - 12} \cdot (x^2 - 1) = 0$ b) $(x^2 + 2x - 15) \cdot \sqrt{x^2 - 4x} = 0$
- D** 7. Uzasadnij, że podane równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2 . Nie wyznaczając tych pierwiastków, oblicz wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$.
- a) $15x^2 - 12x - 20 = 0$ b) $(\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 1 = 0$
8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f , jeśli:
- a) do jej wykresu należy punkt $(0, -2)$, suma jej miejsc zerowych jest równa $\frac{8}{3}$, a suma ich odwrotności jest równa 4,
 b) iloczyn jej miejsc zerowych jest równy 24, a parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(5, 2)$.
9. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?
- a) $x^2 + (m - 3)x + m = 0$ c) $\frac{1}{4}mx^2 + (m^2 - 1)x + m^3 - 4m = 0$
 b) $\frac{1}{4}x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ d) $(3m - 2)x^2 + mx + 1 - \frac{3}{2}m = 0$
10. Dla jakich wartości parametru m równanie:
- a) $2x^2 - mx + m + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie,
 b) $-x^2 + (2m - 2)x + m^2 - 2m = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?
11. Dla jakich wartości parametru m nierówność spełniona jest przez dowolną liczbę rzeczywistą x ?
- a) $mx^2 + 4x + m - 1 \leq 0$ b) $(m - 3)x^2 + (3 - m)x + m > 0$
12. Wyznacz wartości parametru m , dla których zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1; \infty \rangle$.
- a) $f(x) = x^2 + (2m + 2)x - m$ b) $f(x) = (m + 1)x^2 + (m + 1)x + m + 3$
13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k, m) , dla których równanie $x^2 + kx + m = 0$:
- a) ma jedno rozwiązanie x_0 spełniające warunek $|x_0| \leq 2$,
 b) ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

13. a) $\Delta = k^2 - 4m = 0$ oraz $|x_0| = \left| -\frac{k}{2} \right| \leq 2$, skąd $m = \frac{k^2}{4}$ oraz $k \in \langle -4; 4 \rangle$.



- b) $\Delta = k^2 - 4m > 0$ oraz $x_1^2 + x_2^2 = k^2 - 2m = 4$, skąd $m < \frac{k^2}{4}$ oraz $m = \frac{k^2}{2} - 2$.
 Rozwiązujemy nierówność $\frac{k^2}{2} - 2 < \frac{k^2}{4}$ i otrzymujemy: $k \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.



**Przykład**

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases}$$

Liczby $x_1 - 2$ i $x_2 - 2$ są ujemne, gdy ich iloczyn jest dodatni, a suma ujemna.

$$\bullet \Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m - 1) = 4m^2 - 4m + 4$$

$$\Delta = 4m^2 - 4m + 4 > 0 \text{ dla } m \in \mathbf{R} \text{ (sprawdź).}$$

$$\bullet (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 4 = m - 1 - 4m + 4 = -3m + 3$$

$$\text{Zatem } (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -3m + 3 > 0.$$

Nierówność ta jest spełniona dla $m < 1$.

$$\bullet (x_1 - 2) + (x_2 - 2) = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{b}{a} - 4 = 2m - 4$$

$$\text{Zatem } (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0.$$

Nierówność ta jest spełniona dla $m < 2$.

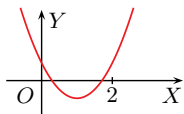
Po uwzględnieniu powyższych warunków otrzymujemy, że $m \in (-\infty; 1)$.

II sposób

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 - 2mx + m - 1$.

$a > 0$, więc warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



Dwa różne pierwiastki są mniejsze od 2, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w < 2$ oraz $f(2) > 0$ (dlaczego?).

$$\bullet \Delta > 0 \text{ dla } m \in \mathbf{R} \text{ (sprawdzone tak jak w sposobie wyżej)}$$

$$\bullet x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2} = m$$

$$\text{Zatem } x_w < 2 \text{ dla } m < 2.$$

$$\bullet f(2) = 2^2 - 2m \cdot 2 + m - 1 = -3m + 3$$

$$\text{Nierówność } -3m + 3 > 0 \text{ jest spełniona dla } m < 1.$$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione dla $m \in (-\infty; 1)$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

2. $16x^4 - 8x^2 + 1 = (4x^2 - 1)^2$
4. A. $\Delta = 16 - 20 < 0$
B. $\Delta = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0$
C. $x_1 = 2, x_2 = 3$
D. $x_1 = -6, x_2 = 1$
5. $x_0 = 2, y_0 = 4$
6. $\Delta = 9 - 8m < 0$ dla $m > \frac{9}{8} = 1,125$
7. 1° Dla $m = 1$ równanie $2x + 3 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
2° Dla $m > 1$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = -4m + 8 = 0$, czyli dla $m = 2$.
1. Liczba pierwiastków równania $8x^4 + 5x^2 - 12 = 0$ jest równa:
A. 0, B. 1, C. 2, D. 4.
2. Dla jakich liczb rzeczywistych x określone jest wyrażenie $\frac{16x^2-1}{16x^4-8x^2+1}$?
A. $x \in \mathbf{R}$ C. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$
B. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ D. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$
3. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$ jest liczbą dodatnią, gdy:
A. $f(x) = x^2 - 2x + 1$, C. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$,
B. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$, D. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$.
4. Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie:
A. $x^2 - 4x + 5 = 0$, C. $x^2 - 5x + 6 = 0$,
B. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$, D. $x^2 + 5x - 6 = 0$.
5. Punkt (x_0, y_0) jest punktem wspólnym parabol $y = -x^2 + 8x - 8$ i $y = x^2$. Wówczas $|x_0 - y_0|$ równa się:
A. 2, B. 4, C. 6, D. 8.
6. Równanie $2x^2 + 3x + m = 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $m > 1,125$, B. $m > -\frac{9}{2}$, C. $m < \frac{9}{8}$, D. $m < 2$.
7. Jeżeli równanie $(m - 1)x^2 + 2mx + (m + 2) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to liczba m należy do przedziału:
A. $(-\infty; -2)$, B. $\langle 2; \infty)$, C. $\langle -2; 0)$, D. $\langle 0; 2)$.
8. Nierówność $mx^2 + 4x + 4 < 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $m > 0$, B. $m < 0$, C. $m \geq 1$, D. $m \leq 1$.
9. Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m². Obwód tej działki jest równy:
A. 64 m, B. 68 m, C. 72 m, D. 76 m.
10. Boki prostokąta P_1 o wymiarach 4 cm i 8 cm wydłużono o x cm i otrzymano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm². Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą:
A. $3\sqrt{10}$ cm, B. $4\sqrt{10}$ cm, C. $3\sqrt{13}$ cm, D. $4\sqrt{13}$ cm.
8. 1° Dla $m = 0$ otrzymujemy nierówność liniową $4x + 4 < 0$, która ma rozwiązania.
2° Dla $m \neq 0$ mamy nierówność kwadratową, która nie ma rozwiązań, gdy $m > 0$ i $\Delta = 16 - 16m \leq 0$, czyli dla $m \geq 1$.
9. $x(x + 2) = 288, x > 0$
 $x^2 + 2x - 288 = 0$
 $(x + 18)(x - 16) = 0$
 $x = 16$
 $Ob = 68$ [m]
10. $(4 + x)(8 + x) = 96, x > 0$
 $x^2 + 12x - 64 = 0$
 $(x + 16)(x - 4) = 0$
 $x = 4$
Długość przekątnej prostokąta P_2 :
 $\sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$ [cm]



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma liczby a i potrojonej liczby b wynosi 12. Oblicz największą wartość iloczynu liczb a i b .

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (5 pkt)

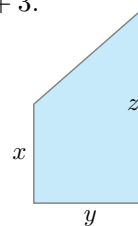
Wskaż te rozwiązania równania $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$, które spełniają warunek $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

Zadanie 5 (4 pkt)

Dane są proste $k: y = 2x + 2$ oraz $l: y = -2x - 5$. Sprawdź, która z tych prostych ma więcej punktów wspólnych z parabolą $y = x^2 + 4x + 3$.

D Zadanie 6 (5 pkt)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest nie mniejszy od 27.

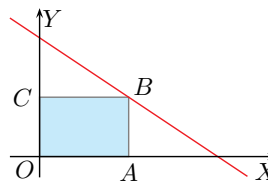


Zadanie 7 (5 pkt)

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 48 cm. Oblicz największe pole powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu.

Zadanie 8 (5 pkt)

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



- Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A .
- Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

- Niech a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość prostopadłościanu.

$$8a + 4h = 48, \text{ czyli } h = 12 - 2a$$

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$P(a) = 2a^2 + 4ah = -6a^2 + 48a, \text{ gdzie } a \in (0; 6)$$

Największa wartość funkcji P jest osiągnięta dla $a_w = \frac{-48}{-12} = 4$ i wynosi $P(4) = 96 \text{ [cm}^2\text{]}$.

- a) Długości boków prostokąta: x_0 i $y_0 = -\frac{2}{3}x_0 + 4$

Pole prostokąta:

$$P(x_0) = x_0 \cdot y_0 = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0, \text{ gdzie } x_0 \in (0; 6)$$

- Największa wartość funkcji P jest osiągnięta dla $x_0 = 3$, stąd $y_0 = 2$.

Współrzędne wierzchołków:

$$A(3, 0), B(3, 2), C(0, 2), O(0, 0)$$

$$1. (x^2 - 7)(x^2 + 4) = 0 \\ x = -\sqrt{7} \text{ lub } x = \sqrt{7}$$

$$2. \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$3. a + 3b = 12, \text{ czyli } a = 12 - 3b \\ a \cdot b = (12 - 3b)b = -3(b - 4)b \\ \text{Największa wartość dla } b_w = \frac{4+0}{2} = 2 \text{ wynosi } 12.$$

$$4. (x^2 - 9)(x^2 - 5) = 0 \\ x = -3 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -\sqrt{5} \text{ lub } x = \sqrt{5} \\ 2x^2 - 3x - 5 > 0 \\ x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{2}; \infty) \\ \text{Zatem } x = -3 \text{ lub } x = -\sqrt{5} \text{ lub } x = 3.$$

$$5. x^2 + 4x + 3 = 2x + 2 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ (x + 1)^2 = 0 \\ x = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = -2x - 5 \\ x^2 + 6x + 8 = 0 \\ (x + 4)(x + 2) = 0 \\ x = -4 \text{ lub } x = -2$$

Z parabolą więcej punktów wspólnych ma prosta l .

$$6. z = 2x \\ \text{ i } y = 18 - x - z = 18 - 3x$$

Pole trapezu:

$$P(x) = \frac{1}{2}(x + z)y = \frac{9}{2}x(6 - x), \text{ gdzie } x \in (0; 6)$$

Największą wartość funkcja P osiąga dla $x_w = \frac{6+0}{2} = 3$, stąd $y = 9, z = 6$.

Długość czwartego boku trapezu: $u \geq y = 9$, więc obwód trapezu:

$$x + y + z + u = 18 + u \geq 18 + 9 = 27$$



Odpowiedzi do zadań

$$1. 36x^4 - 43x^2 + 12 = (x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3} = 1,5326 \dots$$

Należy zakodować: 153.

$$2. \text{Współrzędne punktu wspólnego: } (1 + \sqrt{5}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

$$(1 + \sqrt{5}) \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} =$$

$$= 4 + 2\sqrt{5} \approx 8,472$$

Należy zakodować: 847.

$$3. m \neq 1 \text{ i } \Delta = 13 - 4m > 0,$$

czyli $m < 3,25$ i $m \neq 1$, stąd $m_0 = 3$.

$$\sqrt{3}m_0 = 3\sqrt{3} \approx 5,196$$

Należy zakodować: 519.

4. Niech P będzie funkcją opisującą pole zacieniowanego obszaru. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$4x + 4y = 8$$

czyli $y = 2 - x, x \in (0; 2)$.

$$P(x) = (\pi x^2 + \pi y^2 + 2x \cdot 2y) - \pi R^2 =$$

$$= \pi(x^2 + y^2) + 4xy - \pi R^2 =$$

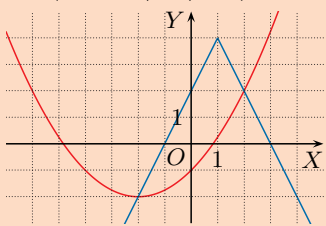
$$= \pi R^2 + 4xy - \pi R^2 =$$

$$= 4x(2 - x)$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla $x_w = 1$.

Wartością tą jest $f(1) = 4$, czyli pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2 .

$$5. x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$



W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz sumę dodatnich pierwiastków równania $36x^4 - 43x^2 + 12 = 0$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

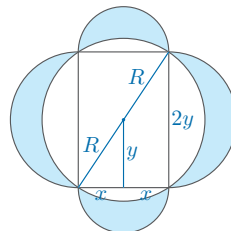
Punkt (x_1, y_1) leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i jest punktem wspólnym paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ i prostej $y = \frac{1}{2}x + 1$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $x_1 \cdot y_1$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Niech m_0 będzie największą całkowitą wartością parametru m , dla której równanie $(m-1)x^2 - 3x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt{3}m_0$.

D Zadanie 4 (5 pkt)

Każdy księżyc zbudowany na boku prostokąta jest ograniczony okręgiem opisanym na tym prostokącie oraz okręgiem, którego środkiem jest środek danego boku. Wykaż, że jeśli obwód prostokąta jest równy 8 cm , to pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2 .



Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$ i $g(x) = 4 - 2|x - 1|$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq g(x)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji f , która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 = 0$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

Zadanie 8 (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (3m - \frac{1}{2})x + 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 12$?

Zadanie 9 (4 pkt)

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k, m) , dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + kx + \frac{1}{2}m = 0$ jest równa 2.

6. 1° Dla $m-1 = 0$, czyli dla $m = 1$ otrzymujemy $2 = 0$ sprzeczność, czyli $f(1) = 0$.

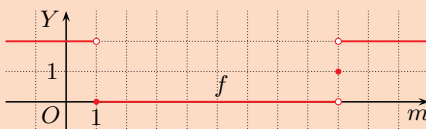
2° Dla $m \neq 1$ równanie jest kwadratowe.

$$\Delta = (m-1)(m-9)$$

$$f(m) = 0 \text{ dla } m \in (1; 9),$$

$$f(m) = 1 \text{ dla } m = 9,$$

$$f(m) = 2 \text{ dla } m \in (-\infty; 1) \cup (9; \infty).$$



$$7. m \in (-4; -3) \cup (5; \infty)$$

$$8. m = \frac{1-4\sqrt{42}}{6}, m = \frac{1+4\sqrt{42}}{6}$$

9.

