



5

Planimetria

Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w praktyce, np. przy układaniu kafelków lub bruku.

Bardzo ciekawe przykłady sposobu podziału płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. eszera] (1898–1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.

Multiteka

- Recytowanie cyfr liczby π
- Grecy i dowodzenie
- Problem mostów królewieckich
- Okręgi i katedra w Chartres
- Tadź Mahal – piękno symetrii
- Geometria euklidesowa

Uczeń:

- rozpoznaje kąty środkowe w okręgu,
- oblicza długość okręgu i długość łuku okręgu,
- określa liczbę punktów wspólnych dwóch okręgów,
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów, mając dane promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami,
- wykorzystuje styczność okręgów do rozwiązywania zadań.

5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .

Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π . Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

William Jonesa [czyt. liliama džonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3,14$.

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.

Przykład 1

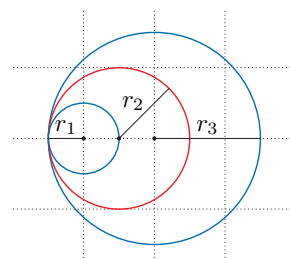
Oblicz długości okręgów o promieniach: $r_1 = 0,5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1,5$ cm (rysunek obok).

Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$l_1 = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ [cm]}$$

$$l_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]}$$

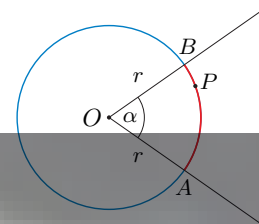
$$l_3 = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi \text{ [cm]}$$



Dowolne dwa punkty A, B należące do okręgu dzielą ten okrąg na dwa **łuki**. Jeśli nie są one półokręgami, to mówiąc „łuk AB ”, będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba, że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\widehat{AB}$. Czasami, by uniknąć niejednoznaczności, stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku poniżej to łuk $\widehat{APB}$.

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym**.

Na rysunku obok ramiona kąta α przecinają okrąg w punktach A i B – kąt ten wyznacza łuk $\widehat{AB}$.



Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Ćwiczenie 1

$$3\pi = \frac{\sphericalangle AOB}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12$$

$$\sphericalangle AOB = 45^\circ$$

Ćwiczenie 1

Jaką miarę ma kąt AOB , jeśli punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm?

Multiteka

- Długość okręgu
- Wzajemne położenie okręgów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

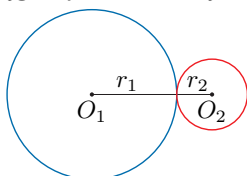
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miar kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi 1:3:5:7. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez leżące na okręgu końce tych promieni.

Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

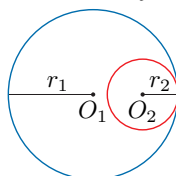
Okręgi styczne zewnętrznie



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie

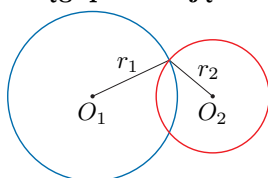


$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

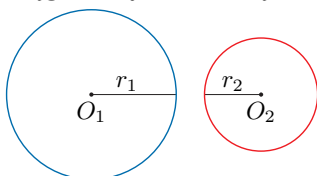
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



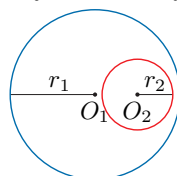
$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

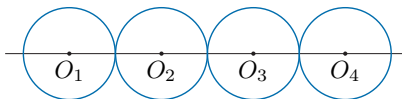
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej. Oblicz średnicę tych okręgów, jeśli $|O_1O_4| = 48$.



Ćwiczenie 2

Długość okręgu: $l = 24\pi$ cm

Długości łuków:

$$\frac{1}{16}l = \frac{3}{2}\pi \text{ cm}$$

$$\frac{3}{16}l = \frac{9}{2}\pi \text{ cm}$$

$$\frac{5}{16}l = \frac{15}{2}\pi \text{ cm}$$

$$\frac{7}{16}l = \frac{21}{2}\pi \text{ cm}$$

Ćwiczenie 3

$6r = 48$, czyli $r = 8$

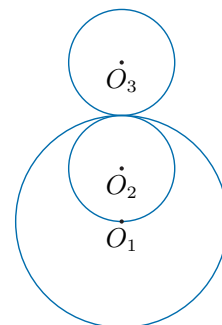
Zatem średnica: $2r = 16$

Odpowiedzi do zadań

- Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 5 cm, czyli $\alpha = 60^\circ$.
 $L = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{5}{3}\pi$ [cm]
- a) $L = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 12\pi = \frac{5}{2}\pi$ [cm]
b) $\frac{5}{4}\pi$ cm c) $\frac{55}{12}\pi$ cm
- $2\pi = \frac{20^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$,
czyli $2r = 36$ cm
- $4\pi = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 18\pi$, czyli $\alpha = 80^\circ$
- a) $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -3$ lub $x = 1$
- a) $|O_1O_2| = 1$; 0
b) $|O_1O_2| = 5$; 1
c) $|O_1O_2| = 3$; 1
- Niech r – promień okręgów O_2 i O_3 , $2r$ – promień okręgu O_1 .
 $3r = 18$, czyli $r = 6$
 $2r = 12$
Średnice okręgów: 12, 12, 24
- a) $6\pi = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, czyli $r = 27$
b) $\pi = \frac{7,5^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, czyli $r = 24$
- $5 - 3 < n < 5 + 3$, $n \in \mathbf{N}$
 $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Zadania

- Punkty A, B leżą na okręgu o średnicy 10 cm oraz $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość łuku $\widehat{AB}$.
- Oblicz długość łuku okręgu o średnicy d wyznaczonego przez kąt środkowy α .
a) $d = 12$ cm, $\alpha = 75^\circ$ b) $d = 30$ cm, $\alpha = 15^\circ$ c) $d = 5$ cm, $\alpha = 330^\circ$
- Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 20° ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.
- Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego na okręgu o średnicy 18 cm łuk o długości 4π cm.
- Wyznacz wartości x , dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrźnie, b) wewnętrźnie.
- Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?
a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$
b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$
c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$
- Punkty O_1, O_2 i O_3 , będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów, jeśli $|O_1O_3| = 18$.



Powtórzenie

- Oblicz promień okręgu, w którym kąt środkowy α wyznacza łuk długości L , jeśli: a) $\alpha = 40^\circ$, $L = 6\pi$, b) $\alpha = 7^\circ 30'$, $L = \pi$.
- Odległość między środkami okręgów o promieniach 3 i 5 jest równa n , gdzie $n \in \mathbf{N}$. Podaj możliwe wartości n , jeśli okręgi te mają dwa punkty wspólne.
- Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrźnie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku 1:3. Oblicz długości tych okręgów.
- Długość przekątnej prostokąta: $d = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ [cm]
Długości promieni okręgów: $\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm
Długości okręgów: $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm

5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesesa.

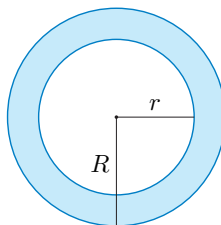
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

Ćwiczenie 1

- Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm^2 .
- Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2,25\pi \text{ cm}^2$.

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



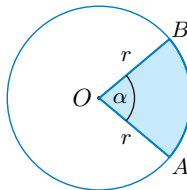
Ćwiczenie 2

- Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm . Podaj promień koła, którego pole jest równe polu pierścienia.
- Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi $17\pi \text{ cm}^2$. Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\widehat{AB}$ i promieniami OA i OB nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α .

- $r = 12$, $\alpha = 75^\circ$
- $r = 2$, $\alpha = 22^\circ 30'$
- $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 315^\circ$

Ćwiczenie 3

a) $P = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 30\pi$

b) $P = \frac{22,5^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{4}$

c) $P = \frac{315^\circ}{360^\circ} \cdot \pi (\sqrt{3})^2 = \frac{21}{8}\pi$

Uczeń:

- podaje wzory na pole koła i pole wycinka koła,
- stosuje poznane wzory do obliczania pól figur,
- oblicza pole figury, stosując wzór na pole koła i pole wycinka koła.

Ćwiczenie 1

- Bok kwadratu: $a = 6 \text{ cm}$
Promień koła: $r = 3 \text{ cm}$
Pole koła: $P = 9\pi \text{ cm}^2$
- Promień koła: $r = 1,5 \text{ cm}$
Długość okręgu: $l = 3\pi \text{ cm}$

Ćwiczenie 2

- Pole pierścienia:
 $P = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 24^2 = 49\pi \text{ [cm}^2\text{]}$
Promień koła: $r = 7 \text{ cm}$
- Niech r – promień wewnętrzny pierścienia kołowego.
 $\pi(r+1)^2 - \pi r^2 = 17\pi$
 $r = 8 \text{ cm}$
Promień wewnętrzny: 8 cm
Promień zewnętrzny: 9 cm

Multiteka

- Pole koła
- Pole wycinka koła – zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 6^2 = 2\pi, \text{ skąd } \alpha = 20^\circ$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } P_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 36\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 90^\circ = 72$$

$$P = 36(\pi - 2)$$

$$\text{b) } P_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 24\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 60^\circ = 36\sqrt{3}$$

$$P = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\text{c) } P_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 12\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 30^\circ = 36$$

$$P = 12(\pi - 3)$$

Odpowiedzi do zadań

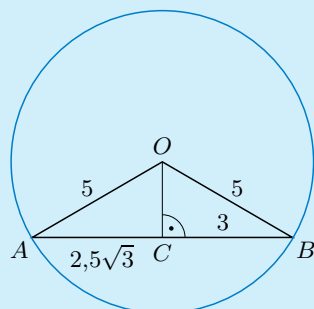
1. Promień koła: $r = \frac{3}{2}$

Pole zacieniowanego obszaru jest różnicą pola kwadratu i czterech pól kół:

$$P_Z = 6^2 - 4 \cdot \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 36 - 9\pi$$

Wiemy, że $\pi > 3$, zatem:
 $P_Z < 36 - 9 \cdot 3 = 9$.

2.



$$\sin \angle AOC = \frac{2.5\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle AOC = 60^\circ, \angle AOB = 120^\circ$$

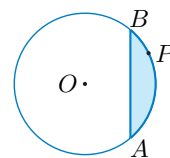
$$\text{Zatem } L_1 = \frac{10}{3}\pi, L_2 = \frac{20}{3}\pi,$$

$$P_1 = \frac{25}{3}\pi, P_2 = \frac{50}{3}\pi$$

Ćwiczenie 4

Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π . Oblicz miarę kąta α .

Część koła (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\widehat{APB}$ i cięciwą AB nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.



Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze 45° (rysunek obok).

Obliczamy pole wycinka koła AOB :

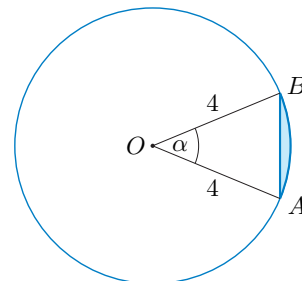
$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła:

$$P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$$



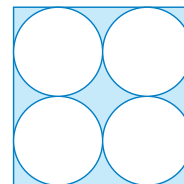
Ćwiczenie 5

Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają kąt AOB . Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt, jeśli:

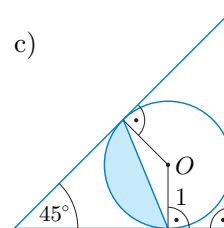
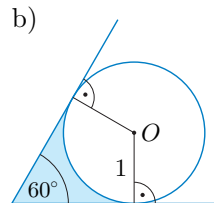
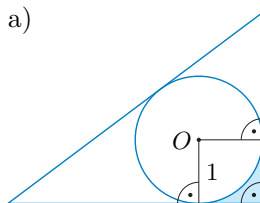
- a) $\angle AOB = 90^\circ$, b) $\angle AOB = 60^\circ$, c) $\angle AOB = 30^\circ$.

Zadania

- D** 1. Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).



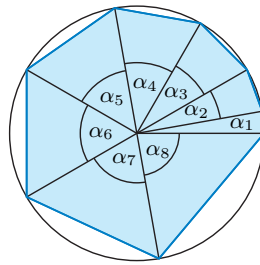
2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.
3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB . Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła koło, jeśli pole $\triangle AOB$ jest równe $4\sqrt{2}$.
4. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



3. $P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$

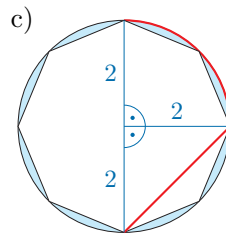
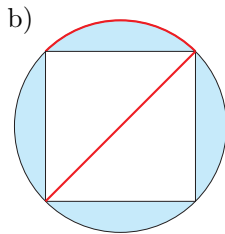
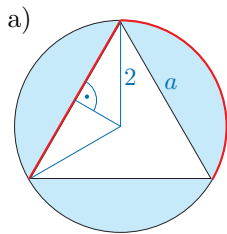
4. a) $1 - \frac{\pi}{4}$ b) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ c) $\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}$

5. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych: $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.



- a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8 .
b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6 .

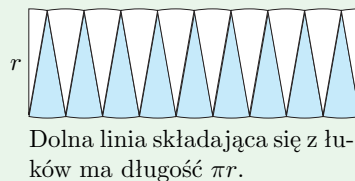
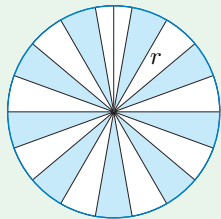
6. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki leżą na okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.



- D** 7. Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Czy wiesz, że...

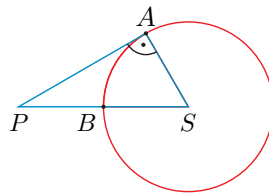
Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.



Powtórzenie

8. Oblicz promień koła, którego wycinek wyznaczony przez kąt α ma pole P .
a) $\alpha = 45^\circ$, $P = 0,75\pi$ b) $\alpha = 140^\circ$, $P = 7\pi$ c) $\alpha = 300^\circ$, $P = 18\pi$

9. Punkt A leży na okręgu o środku w punkcie S (rysunek obok). Odległość od punktu P do środka okręgu jest równa 2 cm, a do punktu A jest równa $\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole:



- a) trójkąta PSA , b) wycinka koła BSA .

9. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \angle ASP$, czyli $\angle ASP = 60^\circ$ oraz $|AS| = 1$ cm

a) $P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{cm}^2]$

b) $P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6} [\text{cm}^2]$

5. $\alpha_1 + (\alpha_1 + 10^\circ) + \dots + (\alpha_1 + 70^\circ) = 360^\circ$

$\alpha_1 = 10^\circ$

a) $\alpha_8 = 80^\circ$

$P_8 = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3^2 = 2\pi$

b) $\alpha_3 = 30^\circ$, $\alpha_6 = 60^\circ$

Suma pól wycinków koła:

$P_W = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 9\pi = \frac{9}{4}\pi$

Suma pól trójkątów:

$P_T = \frac{1}{2} \cdot 9 \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 9 \sin 60^\circ = \frac{9}{4}(1 + \sqrt{3})$

Suma pól odcinków koła:

$P = P_W - P_T = \frac{9}{4}(\pi - 1 - \sqrt{3})$

6. a) $\frac{a}{2} = \sqrt{3}$, czyli $a = 2\sqrt{3}$

$l = 2\sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

$P = \pi \cdot 2^2 - \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 4\pi - 3\sqrt{3}$

b) $l = 4 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 4 + \pi$

$P = \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 4(\pi - 2)$

c) $l = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\sqrt{2} + \pi$

$P = \pi \cdot 2^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 45^\circ = 4(\pi - 2\sqrt{2})$

7. $P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$

8. a) $\frac{3}{4}\pi = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2$,
czyli $r = \sqrt{6}$

b) $3\sqrt{2}$ c) $\frac{6}{5}\sqrt{15}$

Uczeń:

- określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu,
- stosuje własności stycznej do okręgu do rozwiązywania zadań,
- określa liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu.

Ćwiczenie 1

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Rozważmy odcinki PQ , PA , PB oraz trójkąty prostokątne PQA i PQB . Najkrótszym z wymienionych odcinków jest odcinek PQ , bo w trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest zawsze krótsza od przeciwprostokątnej.

Komentarz

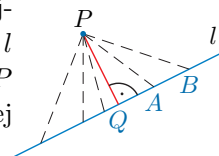
W uzasadnieniu do ćwiczenia 1 korzystamy z faktu (bez konieczności jego dowodzenia), że w dowolnym trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dłuższa od każdej z jego przyprostokątnych. Po omówieniu twierdzenia i dowodu na str. 240 można powrócić do omawianego ćwiczenia i przeprowadzić dowód powyższego faktu.

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że najkrótszy odcinek łączący dany punkt P z punktem leżącym na prostej l , gdzie $P \notin l$, jest do tej prostej prostopadły.

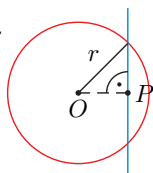
Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

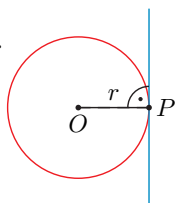
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$$|OP| < r$$



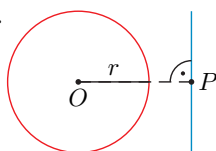
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$$|OP| = r$$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$$|OP| > r$$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Ćwiczenie 2

- Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P . Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.
- Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O . Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB . Oblicz promień okręgu, jeśli $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm.

Ćwiczenie 2

- $|AO| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ [cm]
- $|OP| = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ [cm]

Multiteka

• Prosta i okrąg

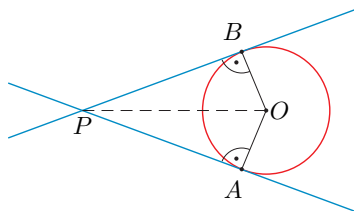
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator
testów i sprawdzianów

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| = |PB|$$

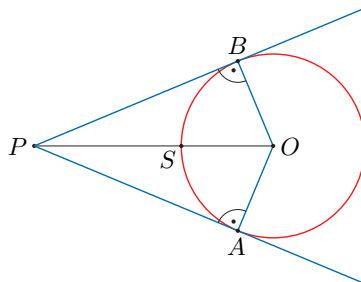


Dowód powyższego twierdzenia wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO .

Ćwiczenie 3

a) Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B . Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.

b) Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm. Oblicz promień okręgu, jeśli odcinek PS ma długość 8 cm.



Ćwiczenie 3

a) $|PA| = |PB| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ [cm]}$

$Ob = 28 \text{ cm}$

b) Niech r – promień okręgu.

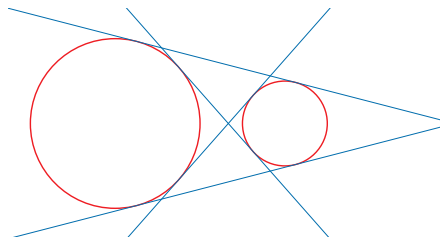
$|PA| = |PB| = 17 - r$

$(17 - r)^2 + r^2 = (8 + r)^2$

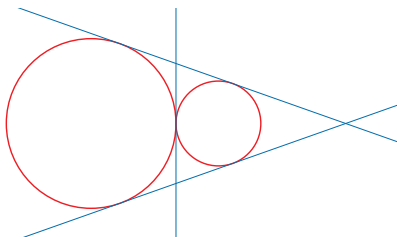
$r = 5 \text{ cm}$

Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

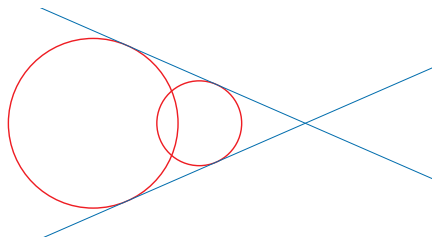
Okręgi rozłączne zewnętrznie
cztery wspólne styczne



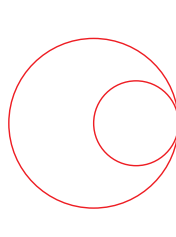
Okręgi styczne zewnętrznie
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

- a) Okręgi przecinające się – 2 wspólne styczne
- b) Okręgi styczne zewnętrznie – 3 wspólne styczne
- c) Okręgi styczne wewnętrznie – 1 wspólna styczna
- d) Okręgi rozłączne zewnętrznie – 4 wspólne styczne

Ćwiczenie 5

- 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$,
- 1 dla $m \in \{-2, 6\}$,
- 2 dla $m \in (-2; 6)$

Ćwiczenie 6

Niech $|OP|$ – odległość środka okręgu od prostej, A, B – punkty przecięcia okręgu z prostą.

a) $|OP| = 3$
 $|AB| = 2|AP| = 2\sqrt{4^2 - 3^2} = 2\sqrt{7}$

b) $|OP| = 4, |AP| = 3$
 $r = |OA| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Ćwiczenie 4

Dany jest okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

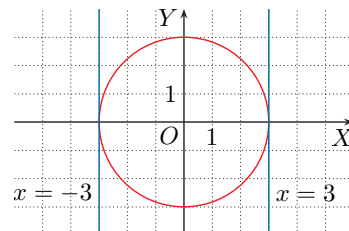
- a) $r_1 = 3\frac{1}{2}, r_2 = 4\frac{1}{2}, |O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$
- c) $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{2}, |O_1O_2| = \frac{1}{6}$
- b) $r_1 = 11, r_2 = 13, |O_1O_2| = 24$
- d) $r_1 = \sqrt{2}, r_2 = \sqrt{3}, |O_1O_2| = 4$

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku $O(0, 0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m ?

Prosta $x = m$ z danym okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3; 3)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.



Ćwiczenie 5

Dany jest okrąg o środku $S(0, 2)$ i promieniu 4. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $y = m$ w zależności od parametru m ?

Przykład 2

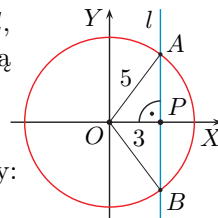
Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej $l: x = 3$ i okręgu o środku $O(0, 0)$ i promieniu 5.

Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$



Ćwiczenie 6

a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ i okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu 4.

b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ i okręgu o środku w punkcie $(-3, 2)$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadania

1. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 10 w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

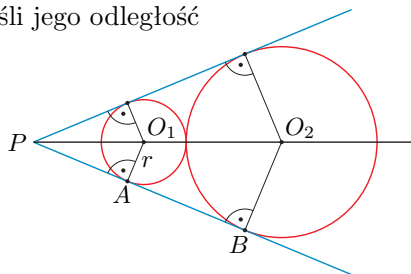
- a) $|AB| = 12,$
- b) $|AB| = 10\sqrt{2},$
- c) $|AB| = 10,$
- d) $|AB| = 20.$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) $x = -8$ lub $x = 8$
- b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
- c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$
- d) $x = 0$

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do tej cięciwy, jeśli jego odległość od środka okręgu jest równa 5.

3. Z punktu P poprowadzono wspólne styczne okręgów o środkach w punktach O_1 i O_2 (rysunek obok). Oblicz promień r okręgu o środku w punkcie O_1 , jeśli $|O_2B| = 5$ i $|O_2P| = 13$.



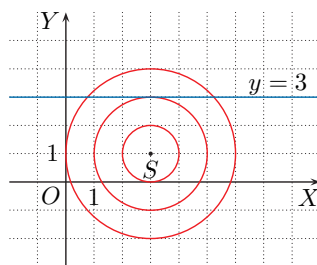
4. Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P . Oblicz pole trójkąta APB .

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3, 1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Prosta $y = 3$ z okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2; \infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0; 2)$.



Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

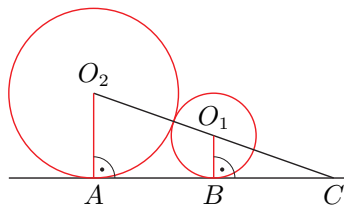
- a) $k: y = 3, S(3, -1)$ b) $k: x = -1, S(-\frac{3}{2}, 4)$ c) $k: x = \sqrt{2}, S(-1, 1)$

Powtórzenie

6. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i promieniu r . Oblicz pole trójkąta AOB , jeśli:

- a) $|AB| = 4$ cm, $r = 2\sqrt{10}$ cm, b) $|AB| = 14$ cm, $r = 25$ cm.

7. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach odpowiednio 1 i 2 są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta AB jest ich wspólną styczną. Oblicz długość odcinka CO_1 oraz pole trapezu ABO_1O_2 .



7. $\triangle CBO_1 \sim \triangle CAO_2$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{|CO_1|}{|CO_2|} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } |CO_1| = 3$$

$$|AB| = |BC| = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Pole trapezu: } P = \frac{1}{2}(1 + 2) \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

2. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$
lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$

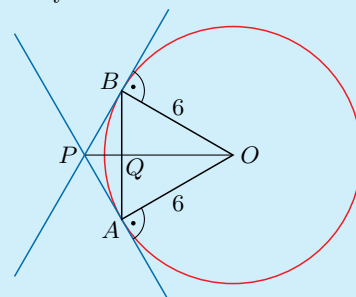
3. Zauważmy, że $\triangle PAO_1 \sim \triangle PBO_2$, stąd:

$$\frac{|O_1P|}{r} = \frac{|O_2P|}{|O_2B|}$$

$$\frac{13-5-r}{r} = \frac{13}{5}$$

$$r = \frac{20}{9}$$

4. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt ABO jest równoboczny, czyli $\angle AOB = 60^\circ$ i $\angle AOP = \angle POB = 30^\circ$.
Zatem $|PO| = 4\sqrt{3}$ cm.

$$|PQ| = |PO| - |QO| = 4\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$P_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

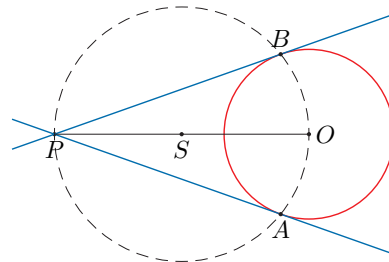
5. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{1}{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{1}{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = 1 + \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$

6. a) 12 cm^2 b) 168 cm^2

Konstrukcja stycznej do okręgu

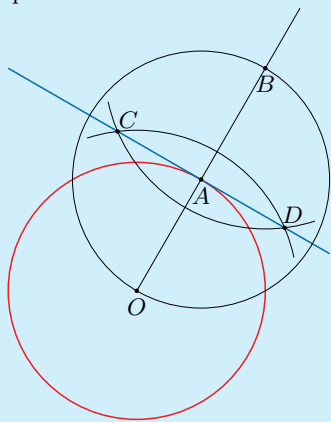
Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O , przechodzącą przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu, postępujemy w następujący sposób.

- Wyznaczamy środek odcinka OP – punkt S na rysunku poniżej.
- Rysujemy okrąg, którego promieniem jest odcinek SO – okrąg ten przecina dany okrąg w punktach A i B .
- Prosta PA jest styczna do danego okręgu. Zauważ, że $PA \perp OA$ (aby to uzasadnić, można rozpatrzeć kąty trójkątów równoramiennych PSA i OSA). Drugą styczną jest prosta PB .



Odpowiedzi do zadań

1. Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O , przechodzącą przez punkt A leżący na okręgu, postępujemy w następujący sposób.
 - Rysujemy półprostą OA .
 - Rysujemy okrąg o środku A i promieniu $|OA|$ – okrąg ten przecina półprostą OA w punktach O i B .
 - Z punktów O i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o tym samym promieniu (dłuższym niż promień $|OA|$). Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez C i D .
 - Rysujemy prostą CD – jest ona styczna do danego okręgu i przechodzi przez punkt A .

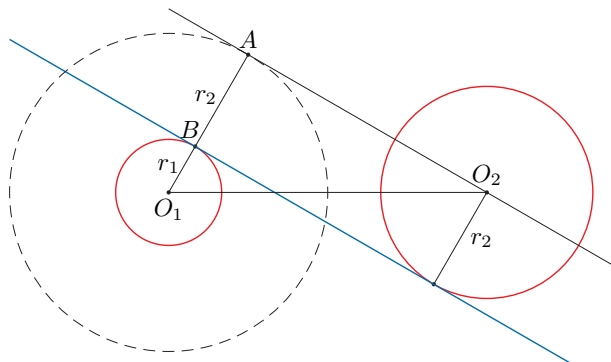


1. Opisz konstrukcję stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt należący do tego okręgu.

Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie

Rozpatrzmy okrąg L_1 o środku O_1 i promieniu r_1 oraz rozłączny z nim zewnętrznie okrąg L_2 o środku O_2 i promieniu r_2 (rysunek poniżej).

- Rysujemy okrąg L_3 o środku w punkcie O_1 i promieniu równym $r_1 + r_2$.



- Rysujemy prostą O_2A – styczną do okręgu L_3 przechodzącą przez punkt O_2 .
- Wyznaczamy punkt B – punkt przecięcia odcinka O_1A z okręgiem L_1 .
- Rysujemy styczną do okręgu L_1 przechodzącą przez punkt B . Jest ona również styczna do okręgu L_2 (uzasadnij).

- *2. Opisz, jak skonstruować pozostałe wspólne styczne dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie.

2. Analogicznie konstruujemy drugą styczną, która przechodzi przez punkt D . Aby skonstruować pozostałe styczne do danych okręgów, rysujemy najpierw okrąg L_3 o środku w punkcie O_2 i promieniu równym $r_2 - r_1$.
 - Rysujemy proste O_1E i O_1G – styczne do okręgu L_3 przechodzące przez punkt O_1 .
 - Wyznaczamy punkty F i H – punkty przecięcia prostych O_2E i O_2G z okręgiem L_2 .
 - Rysujemy styczną do okręgu L_2 przechodzącą przez punkt F oraz styczną do okręgu L_2 przechodzącą przez punkt H . Proste te są również styczne do okręgu L_1 .

5.4. Kąty w okręgu

Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez zaznaczony kolorem czerwonym łuk $\widehat{AB}$.

Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\widehat{AB}$ lub na cięciwie AB .

Ćwiczenie 1

Punkty: $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

- a) $\widehat{P_1P_2P_3}$, b) $\widehat{P_4P_7P_{12}}$, c) $\widehat{P_6P_1P_7}$.

Definicja

Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.

Twierdzenie

Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz ćwiczenie 4. na następnej stronie.

Ćwiczenie 2

- a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).
b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^\circ$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α . Podaj miarę tych kątów.

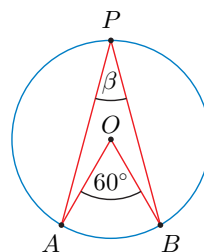
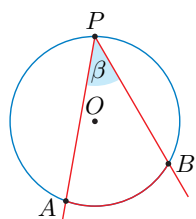
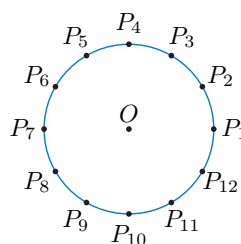
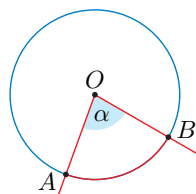
Ćwiczenie 3

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α . Wyznacz miarę kąta $\alpha + \beta$, jeśli:

- a) $\alpha = 110^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\beta = 17^\circ$, d) $\beta = 105^\circ$.

Ćwiczenie 3

- a) $\alpha + \beta = 110^\circ + 55^\circ = 165^\circ$
b) $\alpha + \beta = 45^\circ + 22,5^\circ = 67,5^\circ$
c) $\alpha + \beta = 34^\circ + 17^\circ = 51^\circ$
d) $\alpha + \beta = 210^\circ + 105^\circ = 315^\circ$



Uczeń:

- rozpoznaje kąty wpisane w okrąg oraz wskazuje łuki, na których są one oparte,
- stosuje twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia,
- stosuje twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu do rozwiązywania zadań,
- formułuje twierdzenie dotyczące kątów środkowego i wpisanego w okrąg oraz dowodzi jego prawdziwości,
- stosuje twierdzenie o cięciwach do wyznaczania długości odcinków w okręgach,
- przeprowadza dowód twierdzenia o cięciwach.

Ćwiczenie 1

- $\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$
a) $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$
b) $8 \cdot 30^\circ = 240^\circ$
c) $11 \cdot 30^\circ = 330^\circ$

Ćwiczenie 2

- a) 30°
b) 60°

Multiteka

- Kąty w okręgu

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

Dowód przypadku II

Trójkąt BOP jest równoramienny, zatem:

$$\begin{aligned}\angle BOP &= 180^\circ - 2\beta \\ \alpha &= 180^\circ - \angle BOP = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta\end{aligned}$$

Dowód przypadku III

Na podstawie II mamy:

$$\alpha_1 = 2\beta_1$$

oraz

$$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$$

Zatem:

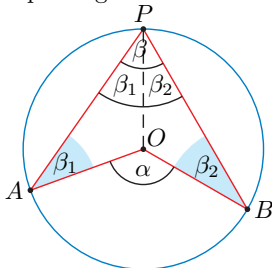
$$\begin{aligned}\alpha &= 2\beta + 2\beta_1 - \alpha_1 = \\ &= 2\beta + 2\beta_1 - 2\beta_1 = 2\beta\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 4

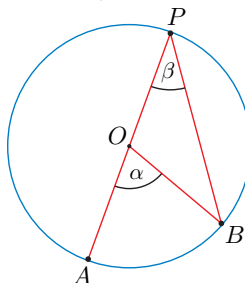
Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu jest dwukrotnie większy od kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

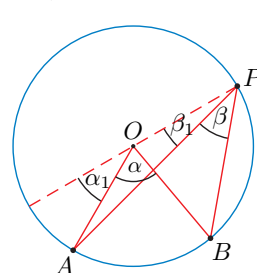
I. Środek okręgu O leży wewnątrz kąta wpisanego.



II. Środek okręgu O leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek okręgu O leży poza kątem wpisanym.



Dowód przypadku I

Z punktu P prowadzimy promień PO . Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

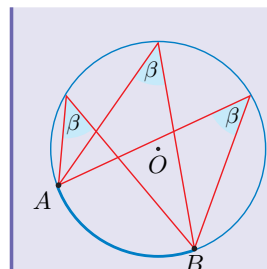
Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

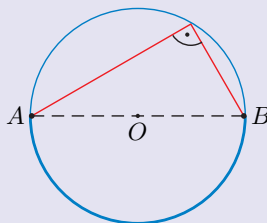
Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

Poniższe wnioski wynikają z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym.

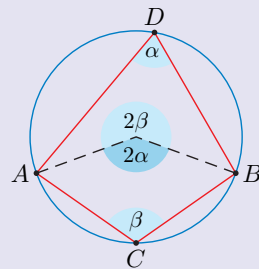
Twierdzenie



Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku powyżej, jest równa 180° .

D Ćwiczenie 5

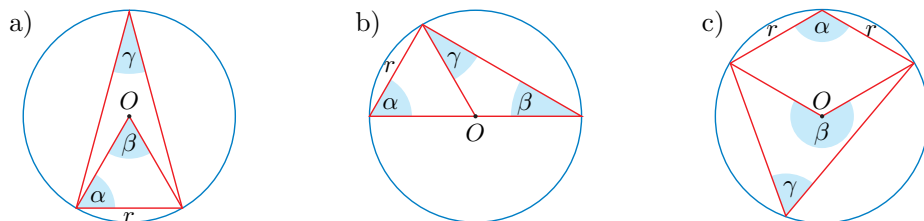
Uzasadnij każdy ze sformułowanych powyżej wniosków.

Ćwiczenie 5

- 1) Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku odpowiadają temu samemu kątowi środkowemu opartemu na tym łuku, zatem wszystkie są równe.
- 2) Kąt środkowy oparty na półokręgu jest kątem półpełnym, czyli równym 180° , zatem kąt wpisany w okrąg i oparty na półokręgu jest o połowę mniejszy, czyli równy 90° .
- 3) $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, zatem $\alpha + \beta = 180^\circ$

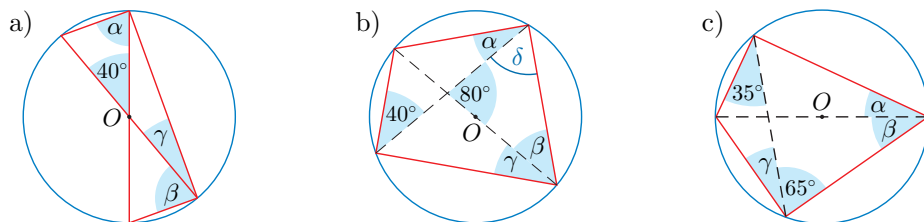
Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r . Wyznacz miary kątów: α , β i γ .



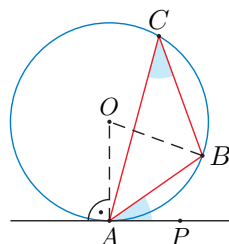
Ćwiczenie 7

Wyznacz miary kątów: α , β i γ .



■ Kąt między styczną a cięciwą okręgu

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (zwany kątem dopisanym do okręgu) jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.



D Ćwiczenie 8

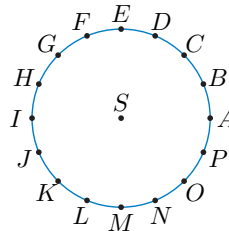
Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Zadania

- Punkty: $A, B, C, \dots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąta środkowego β . Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?

- $\beta = 45^\circ$
- $\beta = 112,5^\circ$
- $\beta = 225^\circ$
- $\beta = 315^\circ$

- Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miarę kąta wpisanego opartego na łuku tego okręgu, jeśli łuk ten ma długość: a) 2π , b) 3π , c) $\frac{15}{2}\pi$, d) $\frac{\pi}{4}$.



Odpowiedzi do zadań

- C lub O
 - F lub L
 - G lub K
 - C lub O
- 30°
 - 45°
 - $112,5^\circ$
 - $3,75^\circ$

Ćwiczenie 6

a) $\alpha = \beta = 60^\circ$ (kąty w trójkącie równobocznym)

$\gamma = \frac{1}{2}\beta = 30^\circ$ (kąty wpisane i środkowy oparte na tym samym łuku)

b) $\alpha = 60^\circ$ (kąt w trójkącie równobocznym)

$\beta = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ (kąty wpisane i środkowy oparte na tym samym łuku)

$\gamma = \beta = 30^\circ$ (kąty w trójkącie równoramiennym)

c) $\alpha = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$
 $\beta = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$ (kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku)

$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ (kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku)

Ćwiczenie 7

a) $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$

$\beta = \alpha = 70^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ$ (kąty wpisane i środkowy oparte na tym samym łuku)

b) $\beta = 40^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

$\delta = 180^\circ - (80^\circ + \beta) = 60^\circ$

$\alpha + \delta = 90^\circ$ (kąt wpisany oparty na półokręgu)

$\alpha = 30^\circ$

$\gamma = \alpha = 30^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

c) $\beta = 35^\circ$

$\gamma = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

$\alpha = \gamma = 25^\circ$

Ćwiczenie 8

$\sphericalangle BAP = 90^\circ - \sphericalangle OAB =$
 $= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOB) =$
 $= \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$

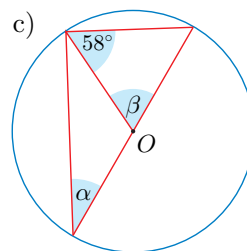
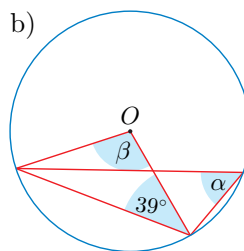
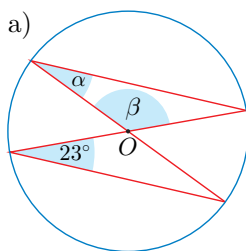
3. a) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 134^\circ$
 b) $\alpha = 51^\circ$, $\beta = 102^\circ$
 c) $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 64^\circ$

4. a) $\alpha = 74^\circ$, $\beta = 37^\circ$
 b) $\alpha = 113^\circ$, $\beta = 56^\circ 30'$
 c) $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$

5. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 35^\circ$
 b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$
 c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 40^\circ$

6. a) $\alpha = 32^\circ$
 b) $\alpha = 42^\circ$
 c) $\alpha = 36^\circ$

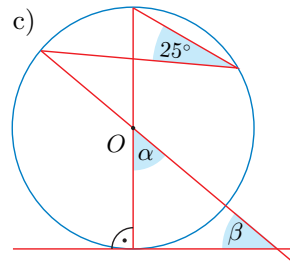
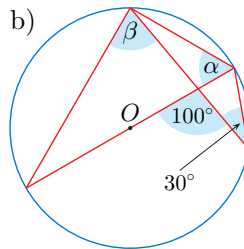
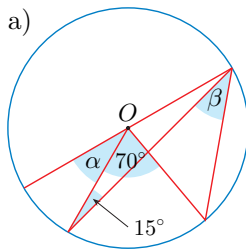
3. Wyznacz miary kątów α i β .



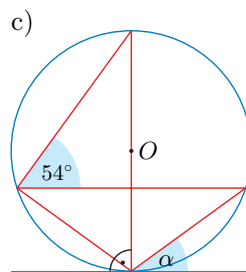
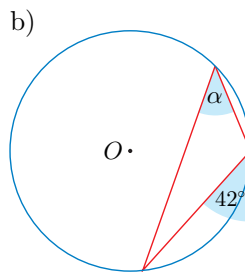
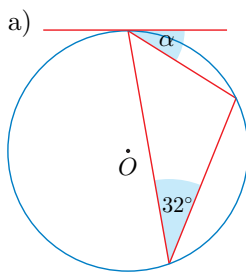
4. Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α . Wyznacz miary kątów α i β .

- a) $\alpha + \beta = 111^\circ$ b) $\alpha = \beta + 56^\circ 30'$ c) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48^\circ$

5. Wyznacz miary kątów α i β .



6. Wyznacz miarę kąta α .



7. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB . Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę 96° . Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A .

- b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB . Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B .

7. a) Niech α – szukany kąt.

$$\alpha = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 96^\circ = 48^\circ$$

- b) Niech α – szukany kąt.

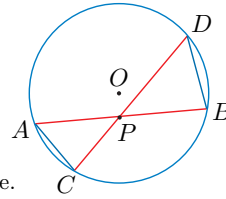
$$\angle AOB = \frac{\pi}{2\pi \cdot 6} \cdot 360^\circ = 30^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$$

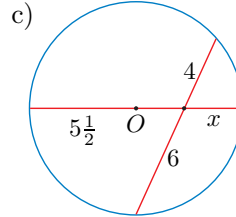
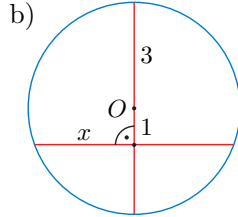
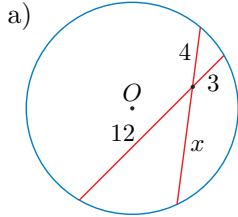
8. Udowodnij twierdzenie o cięciwach.

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Wskazówka. Uzasadnij najpierw, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

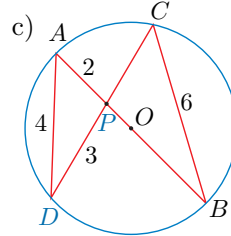
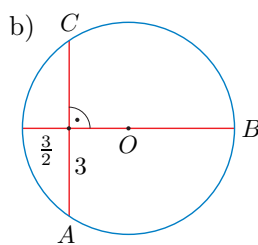
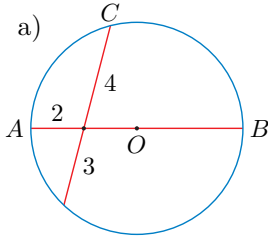


9. Oblicz x .



10. Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P , odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.

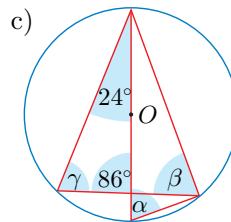
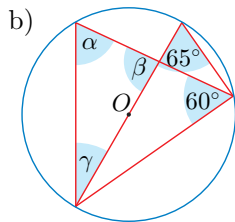
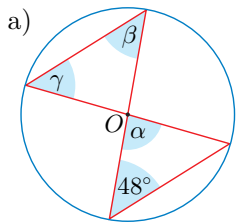
11. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC .



Powtórzenie

12. Wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB leżą na okręgu. Kąt między boki BC a prostą styczną do okręgu w punkcie B ma miarę 40° . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

13. Wyznacz miary kątów: α , β i γ .



12. 40° , 40° , 100°

13. a) $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$

$\beta = \gamma = 48^\circ$

b) $\alpha = 65^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

$\gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

$\beta = 180^\circ - (65^\circ + 30^\circ) = 85^\circ$

c) $\gamma = 180^\circ - (24^\circ + 86^\circ) = 70^\circ$

$\alpha = \gamma = 70^\circ$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)

$\beta = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$

8. Zauważmy, że:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$$

oraz

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB$$

(kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

Zatem z cechy KKK trójkąty APC i DPB są podobne.

Stąd:

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

czyli:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

9. a) $x = 9$

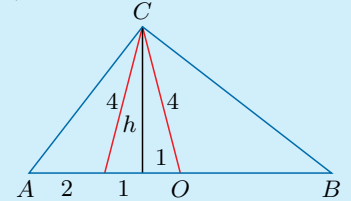
b) $x = 2\sqrt{2}$

c) $x = 3$

10. 8 cm, 12 cm

11. a) $2(2r - 2) = 12$

$r = 4$



$$h^2 + 1^2 = 4^2$$

$$h = \sqrt{15}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{15} = 4\sqrt{15}$$

b) $\frac{3}{2} \cdot (2r - \frac{3}{2}) = 9$

$$r = \frac{15}{4}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (2 \cdot \frac{15}{4} - \frac{3}{2}) = 18$$

c) Zauważmy, że:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$$

oraz

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$$

(kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

Na podstawie cechy KKK trójkąty APD i CPB są podobne. Stąd:

$$\frac{2}{|PC|} = \frac{4}{6}$$

czyli $|PC| = 3$.

Z twierdzenia o cięciwach:

$$2(2r - 2) = 9, \text{ czyli } r = \frac{13}{4}.$$

$\sphericalangle ACB = 90^\circ$, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC| = \sqrt{(6\frac{1}{2})^2 - 6^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 6 = \frac{15}{2}.$$

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie równobocznym lub prostokątnym,
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na dowolnym trójkącie,
- stosuje wzór $P = \frac{abc}{4R}$,
- wyprowadza wzór $P = \frac{abc}{4R}$.

Ćwiczenie 1

Niech O będzie punktem przecięcia symetralnych boków AB i AC trójkąta ABC . Wówczas $|AO| = |BO|$ oraz $|AO| = |CO|$. Stąd $|BO| = |CO|$, czyli punkt O leży na symetralnej boku BC . Zatem symetralne boków trójkąta ABC przecinają się w punkcie O .

Ćwiczenie 2

Niech D będzie spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C , wówczas:

$$|CD| = R + |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli}$$

$$|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ćwiczenie 3

a) Bok trójkąta: $a = 16$ cm

Promień koła: $R = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm

Pole koła: $P = \frac{256}{3}\pi$ cm²

b) Bok trójkąta: $a = 6\sqrt{3}$ cm

Wysokość trójkąta: $h = 9$ cm

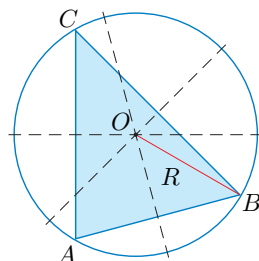
Pole trójkąta: $P = 27\sqrt{3}$ cm²

5.5. Okrąg opisany na trójkącie

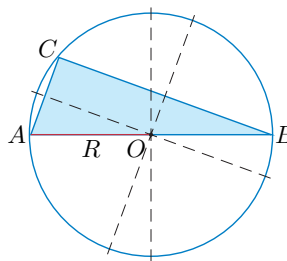
Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

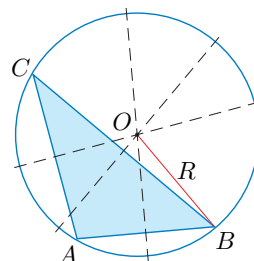
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta od jego wierzchołków.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

D Ćwiczenie 2

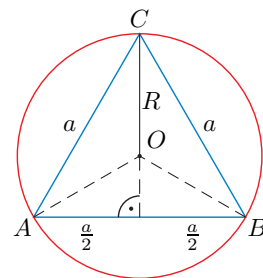
Udowodnij powyższe twierdzenie.

Mówimy, że koło jest opisanie na trójkącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3}$ cm².

b) Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.



Multiteka

• Okrąg opisany na trójkącie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.5

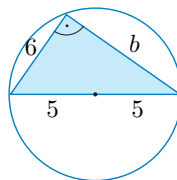
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), zatem przeciwprostokątna ma długość $c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, skąd $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.



Ćwiczenie 4

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.
- Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2 . Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.
- Pole trójkąta prostokątnego jest równe $24\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1 : 2. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Przykład 2

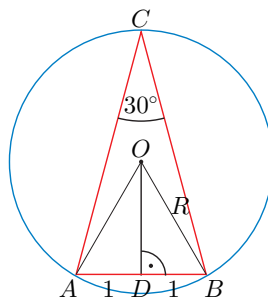
W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 30° , a podstawa ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB , zatem:

$\angle AOB = 2 \angle ACB = 60^\circ$, czyli trójkąt AOB jest równoboczny, więc $R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$.

Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego:

$$|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



Ćwiczenie 5

- W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 45° , a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
- W okrąg o promieniu 5 cm wpisany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 4

a) $(2R)^2 = 7^2 + 12^2$

$R = \frac{\sqrt{193}}{2} \text{ cm}$

b) $P = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 4 = 18$

$R = 4,5 \text{ cm}$

$l = 9\pi \text{ cm}$

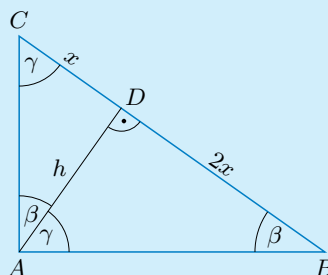
c) $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$ (cecha KKK),

stąd $\frac{x}{h} = \frac{h}{2x}$, czyli $h = x\sqrt{2}$.

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot h = \frac{3}{2} \sqrt{2} x^2 = 24\sqrt{2}$, czyli $x = 4 \text{ cm}$

$R = \frac{3}{2} x = 6 \text{ cm}$

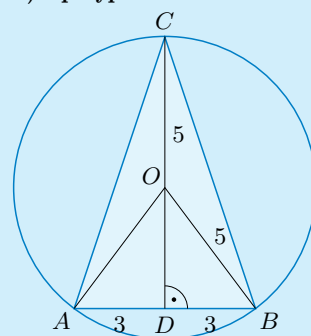
$P_k = 36\pi \text{ cm}^2$



Ćwiczenie 5

a) Trójkąt AOB jest prostokątny, zatem $R = 2\sqrt{2}$.

b) I przypadek

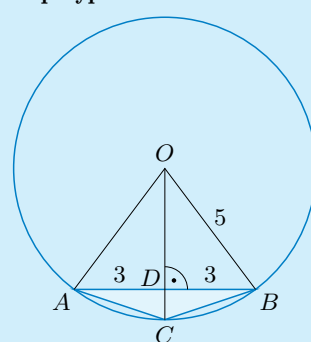


$|OD| = 4 \text{ cm}$

$|DC| = 9 \text{ cm}$

$|AC| = |BC| = 3\sqrt{10} \text{ cm}$

II przypadek



$|OD| = 4 \text{ cm}$

$|DC| = 1 \text{ cm}$

$|AC| = |BC| = \sqrt{10} \text{ cm}$

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a , b , c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

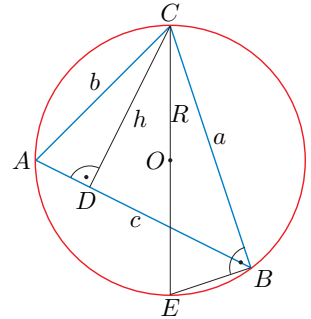
$$P = \frac{abc}{4R}$$

Dowód

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości a , b , c (rysunek obok), wpisany w okrąg o środku O i promieniu R . Odcinek CD jest wysokością trójkąta, a odcinek CE – średnicą okręgu. Kąty CAB i CEB są równe (dlaczego?). Zatem trójkąty ACD i ECB są podobne, czyli:

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}, \text{ stąd } h = \frac{ab}{2R}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{ab}{2R} = \frac{abc}{4R}$$



Ćwiczenie 6

- a) 24 cm^2
b) $8,125 \text{ cm}$

Ćwiczenie 6

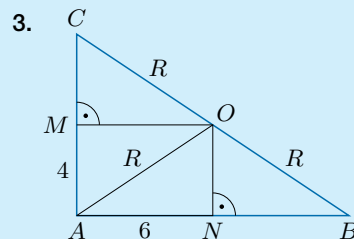
- a) Oblicz pole trójkąta o bokach 4 cm , 13 cm i 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8} \text{ cm}$.
b) Dany jest trójkąt o bokach 13 cm , 14 cm i 15 cm i polu równym 84 cm^2 . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadania

Odpowiedzi do zadań

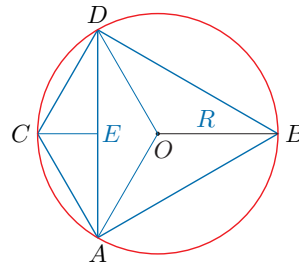
1. a) 4 cm b) 5 cm
c) $3(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$
2. a) Przyprostokątne trójkąta:
 $5\sqrt{2}$
 $Ob = 10(1 + \sqrt{2})$
b) Przyprostokątne trójkąta:
 x , $3x$
 $x^2 + (3x)^2 = 10^2$
 $x = \sqrt{10}$
 $Ob = 2(5 + 2\sqrt{10})$

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeśli:
a) jego pole wynosi 8 cm^2 , a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm ,
b) krótsza przyprostokątna ma długość 5 cm , a jeden z kątów ostrych trójkąta jest dwa razy większy od drugiego,
c) jest on równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm .
2. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5 , jeśli:
a) jest to trójkąt równoramienny,
b) jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej.
3. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, jeśli odległości środka okręgu opisanego na tym trójkącie od jego przyprostokątnych są równe 4 i 6 .



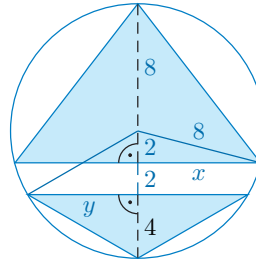
Zauważmy, że $|CM| = 4$ i $|NB| = 6$.
Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$

4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABD i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

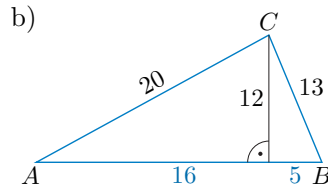
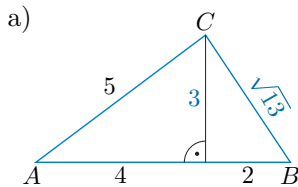


5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm, jeśli:
a) jego ramię ma długość $4\sqrt{5}$ cm,
b) sinus kąta przy tej podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.
6. Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h . Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm.
a) $h = 20$ cm b) $h = 6$ cm

7. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie między ramionami równym 120° , jeśli trójkąt ten jest wpisany w okrąg o promieniu 4.
8. Oblicz stosunek pól przedstawionych na rysunku obok trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 8.



9. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.



Powtórzenie

10. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, jeśli wiadomo, że pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe 25π , a stosunek długości przyprostokątnych wynosi $1:7$.
11. Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o polu równym 45, jeśli wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku $1:4$.
12. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli wysokość opuszczona na podstawę ma długość: a) 10 cm, b) 3 cm.

8. $x = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$, $y = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$
Stosunek pól: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{15} \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

9. a) $P = 9$

$$9 = \frac{6 \cdot 5 \cdot \sqrt{13}}{4R}$$

$$R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$$

b) $P = 126$

$$126 = \frac{21 \cdot 20 \cdot 13}{4R}$$

$$R = \frac{65}{6}$$

10. 7

11. 15π

12. a) 5,8 cm b) $\frac{25}{6}$ cm

4. $R = 4\sqrt{3}$

$\triangle AOE$ i $\triangle DOE$ są trójkątami o kątach 30° , 60° , 90° , stąd:

$$|DE| = |EA| = 6$$

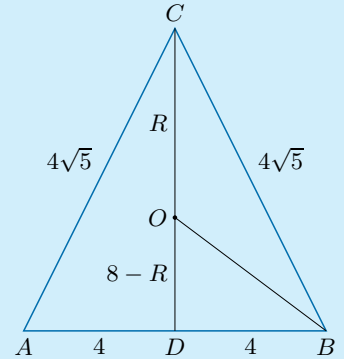
$$|EO| = 2\sqrt{3} = |EC|$$

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{ACD} = 48\sqrt{3}$$

5. a) I sposób



Wysokość trójkąta:

$|CD| = 8$ cm, wówczas:

$$(8 - R)^2 + 4^2 = R^2$$

$$R = 5$$
 cm

II sposób

Wysokość trójkąta: 8 cm

Pole trójkąta: 32 cm²

$$32 = \frac{8 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4R}$$

$$R = 5$$
 cm

b) Wysokość trójkąta: 3 cm

Ramię trójkąta: 5 cm

Pole trójkąta: 12 cm²

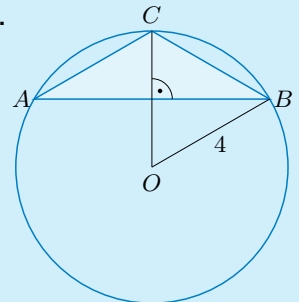
$$12 = \frac{8 \cdot 5 \cdot 5}{4R}$$

$$R = \frac{25}{6}$$
 cm

6. a) $4\sqrt{10}(\sqrt{3} + \sqrt{13})$ cm

b) $4\sqrt{3}(\sqrt{13} + \sqrt{10})$ cm

- 7.



Trójkąt BOC jest równoboczny, czyli $|CB| = 4$

i $\angle ACB = 120^\circ$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$$

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny lub prostokątny,
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w dowolny trójkąt,
- stosuje wzór $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$,
- wyprowadza wzór:
$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Ćwiczenie 1

Niech O będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAB i ABC trójkąta ABC . Punkt O jest równo oddalony od boków AC i AB oraz od boków AB i BC . W związku z tym jest równo oddalony od boków AC i BC , czyli leży na dwusiecznej kąta ACB . Zatem dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają się w punkcie O .

Ćwiczenie 2

- a) $r = 3\sqrt{3}$
 $l = 6\sqrt{3}\pi$
- b) $r = 5$
 $5 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, czyli $a = 10\sqrt{3}$
 $Ob = 30\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

- $a = 12$ cm
 $r = 2\sqrt{3}$ cm
 $R = 4\sqrt{3}$ cm
 $2\pi r + 2\pi R = 12\sqrt{3}\pi$ cm

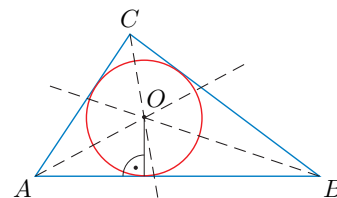
5.6. Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Ćwiczenie 1

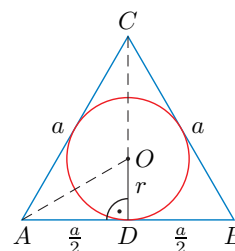
Udowodnij, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia dwusiecznych dwóch kątów wewnętrznych trójkąta od jego boków.

Twierdzenie

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



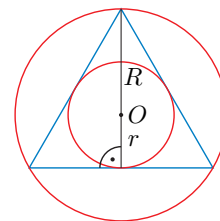
Dowód

Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC , czyli $\sphericalangle OAD = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \sphericalangle OAD = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ćwiczenie 2

- a) Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.
- b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π .

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie – mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość trójkąta równobocznego w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka.



Ćwiczenie 3

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Multiteka

- Okrąg wpisany w trójkąt
- Okrąg i trójkąt

dla^{nauczyciela}.pl | Kartkówka 5.6

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

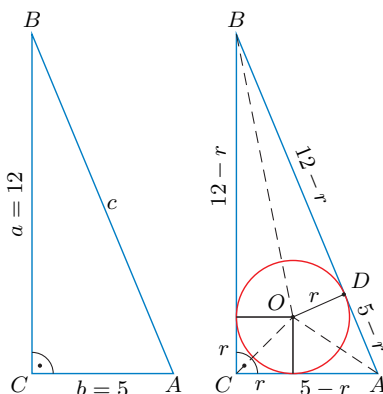
$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \text{ i } |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.

Stąd otrzymujemy $r = 2$.



Ćwiczenie 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 5

a) Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

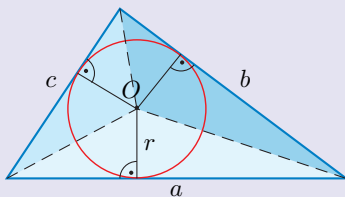
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

D Ćwiczenie 6

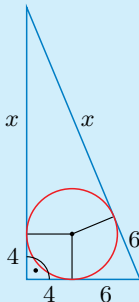
Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π .

Ćwiczenie 5

a)

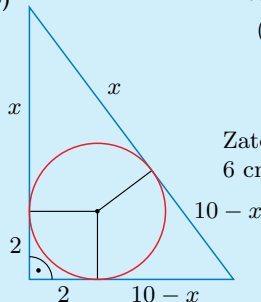


Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(x+4)^2 + 10^2 = (x+6)^2$$

Stąd $x = 20$. Zatem pozostałe boki mają długości 24 cm i 26 cm.

b)



Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(x+2)^2 + (2+10-x)^2 = 10^2$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = 6$$

Zatem pozostałe boki mają długości 6 cm i 8 cm.

Ćwiczenie 4

a) $c = 5$

$$3 - r + 4 - r = 5$$

$$r = 1$$

b) $c = 25$

$$7 - r + 24 - r = 25$$

$$r = 3$$

Ćwiczenie 6

$$P = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc =$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Ćwiczenie 7

$$r = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{5+5+6}{2} \cdot \frac{3}{2} = 12$$

Ćwiczenie 8

c – przeciwprostokątna,

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

a) $c = 20$, $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16}{12+16+20} = 4$

b) $c = \sqrt{2}$,

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}{1+1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

c) $c = 26$, $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24}{10+24+26} = 4$

d) $c = 3$,

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+3} = \frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Ćwiczenie 9

a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BCD$
oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC =$
 $= \sphericalangle CDB = 90^\circ$

Zatem trójkąty ABC , ACD ,
 CBD są podobne (cecha KKK).

b) $\frac{|CA|}{9} = \frac{25}{|CA|}$, czyli $|CA| = 15$

$\frac{|CB|}{16} = \frac{25}{|CB|}$, czyli $|CB| = 20$

$r = 5$, $P = 25\pi$

c) Z twierdzenia Pitagorasa dla
trójkąta ACD otrzymujemy:
 $|CD| = 12$

Zatem dla trójkąta ACD :

$r_1 = 3$, $P_1 = 9\pi$

oraz dla trójkąta CBD :

$r_2 = 4$, $P_2 = 16\pi$

Przykład 2

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$,
a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy
wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r
jest promieniem okręgu wpisanego w ten trój-

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

Promień r okręgu wpisanego
w trójkąt o bokach a , b , c
oraz polu P wyraża się wzor-
em:

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

Ćwiczenie 8

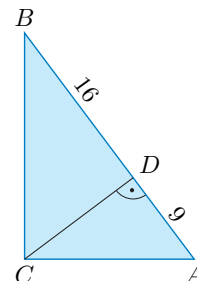
Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 9

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16.

- ☒ a) Uzasadnij, że trójkąty ABC , ACD i CBD są podobne.
b) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC .
c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD
oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD .



Zadania

- ☒ 1. a) Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
2. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30° . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) W trójkącie prostokątnym krótsza przyprostokątna ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60° . Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $P = \frac{a+a+a}{2} \cdot r = \frac{3}{2}ar$

b) $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 2^2 = 4$

2. a) $2(\sqrt{3} - 1)$

b) $6\pi(\sqrt{3} - 1)$

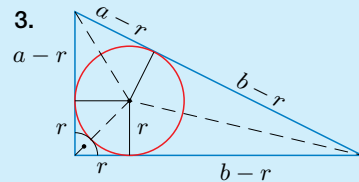
- D** 3. Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

4. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x , a jego ramię – długość y . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- a) $x = 12$, $y = 10$ b) $x = 10$, $y = 13$
5. a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° . Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.
6. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.
7. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.
8. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Powtórzenie

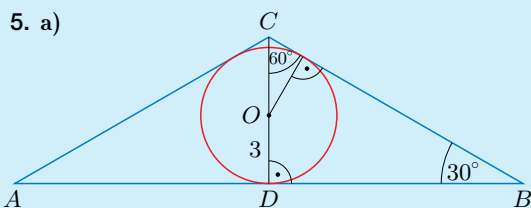
9. Pierścień kołowy ograniczony okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym i okręgiem w niego wpisanym ma pole równe 16π . Oblicz obwód tego trójkąta.
10. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, jeśli:
- a) jego przyprostokątne mają długości 7 cm i 1 cm,
b) miara jednego z kątów ostrych wynosi 30° , a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta jest równa 8 cm,
c) środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 5 cm, a stosunek długości przyprostokątnych wynosi 1 : 2.
11. W trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość 12 cm, a pole jest równe 24 cm^2 , wpisano okrąg. Oblicz obwód trójkąta i długość okręgu.
12. W trójkąt równoramienny, którego obwód jest równy $(12 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$, a kąt przy podstawie ma miarę 30° , wpisano okrąg. Oblicz długość tego okręgu.



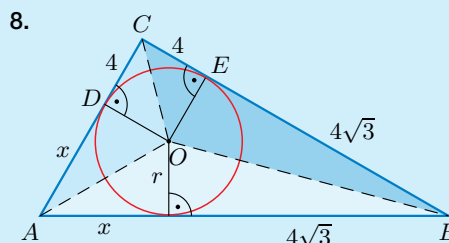
3. $c = a - r + b - r$
 $2r = a + b - c$
 $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$
4. Niech h – wysokość trójkąta.
- a) $h = \sqrt{10^2 - (\frac{1}{2} \cdot 12)^2} = 8$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$
 $r = \frac{2 \cdot 48}{12 + 10 + 10} = 3$
- b) $h = \sqrt{13^2 - (\frac{1}{2} \cdot 10)^2} = 12$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$
 $r = \frac{2 \cdot 60}{10 + 13 + 13} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$
6. Promienie kół: $r_1 = \frac{3}{2} \text{ cm}$,
 $r_2 = \frac{4}{3} \text{ cm}$
Różnica pól: $\frac{17}{36}\pi \text{ cm}^2$
7. $r = \sqrt{2} \text{ cm}$
 $|OA| = |OB| = \sqrt{6} \text{ cm}$
 $|OC| = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

9. $\pi R^2 - \pi r^2 = 16\pi$
 $R^2 - r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$
 $\frac{a^2}{4} = 16$, czyli $a = 8$
 $Ob = 24$
10. a) $\left(4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \text{ cm}$
b) $4(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$
c) $(3\sqrt{5} - 5) \text{ cm}$

11. $Ob = 4(3 + \sqrt{13}) \text{ cm}$
 $d = 6(\sqrt{13} - 3)\pi \text{ cm}$
12. $6(2\sqrt{3} - 3)\pi \text{ cm}$



$$\begin{aligned} |OC| &= 2\sqrt{3} \\ |AC| &= |BC| = 2(3 + 2\sqrt{3}) \\ |DB| &= (3 + 2\sqrt{3})\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} + 2), \\ \text{czyli } |AB| &= 6(\sqrt{3} + 2) \\ \text{b) } P &= \frac{28}{3}\sqrt{3} + 16 \end{aligned}$$



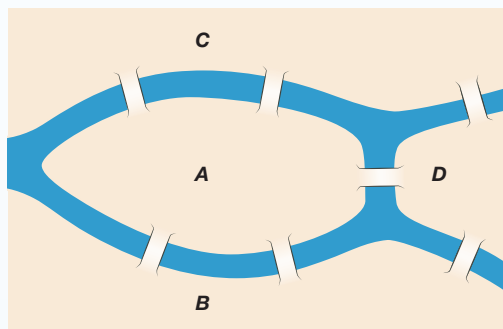
Czworokąt $CDEO$ jest rombem, który ma kąt prosty, więc jest kwadratem, czyli $\angle ACB = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} (4 + 4\sqrt{3})^2 + (4 + x)^2 &= (x + 4\sqrt{3})^2 \\ x &= 4(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

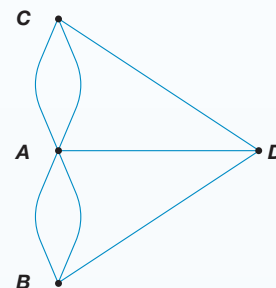
Pozostałe boki trójkąta: $4 + x = 4(\sqrt{3} + 3)$, $4\sqrt{3} + x = 8(\sqrt{3} + 1)$

Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregołą, było aż siedem mostów. Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło? Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone A i D), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litery B i C).



Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako A, B, C i D są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. W powyższym grafie stopień wierzchołka A jest równy 5, a stopnie wierzchołków B, C i D są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami wiedzie droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer” po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie”.

- 1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.
- 2 Znajdź informacje o grafie półeulerowskim [czyt. półojlerowskim].

Kaliningrad,
niegdyś Królewiec

5.7. Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

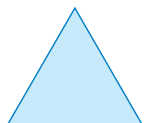
Ćwiczenie 1

Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają równe wszystkie: a) boki, b) kąty.

Ćwiczenie 2

Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

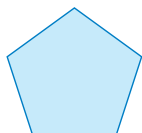
a) trójkąt



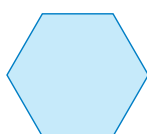
b) kwadrat



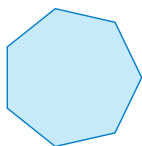
c) pięciokąt



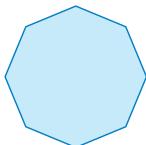
d) sześciokąt



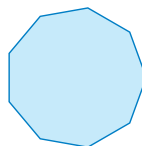
e) siedmiokąt



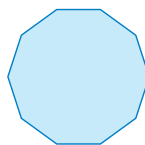
f) ośmiokąt



g) dziewięciokąt



h) dziesięciokąt



Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetrycznych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

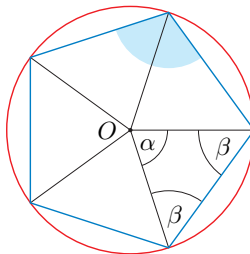
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.

Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Zatem:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

czyli kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.



Uczeń:

- rozpoznaje wielokąty foremne i podaje ich własności,
- oblicza miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego,
- wyznacza liczbę boków wielokąta foremnego, gdy dana jest suma miar jego kątów wewnętrznych,
- uzasadnia i stosuje zależność między długością boku a promieniem okręgu opisanego na wielokącie foremnym lub wpisanego w wielokąt foremny.

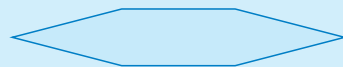
Ćwiczenie 1

Czworokąt niebędący wielokątem foremnym, który ma:

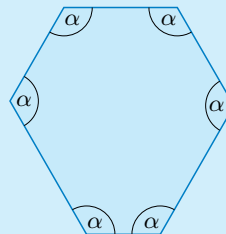
- a) równe boki, to romb,
b) równe kąty, to prostokąt.

Sześciokąt niebędący wielokątem foremnym, który ma:

- a) równe boki:



- b) równe kąty (czyli $\alpha = 120^\circ$):



Ćwiczenie 2

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6
e) 7 f) 8 g) 9 h) 10

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n -kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Ćwiczenie 3

Warto polecić uczniom wykonanie odpowiedniego rysunku.

I sposób

Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Zatem w n -kącie foremnym kąt wewnętrzny ma miarę:

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

II sposób

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Multiteka

- Własności wielokątów foremnych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } P_{\Delta} = \frac{150\sqrt{3}}{6} = 25\sqrt{3}$$

$$R = a = 10$$

$$l = 20\pi$$

$$\text{b) } a = R = 4\sqrt{2}$$

$$P = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } a = 9 \text{ cm}$$

$$r = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$P = \frac{243}{4}\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } r = 6 \text{ cm}$$

$$a = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

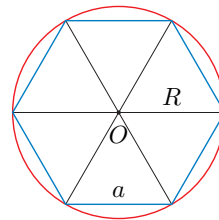
$$2a = 8\sqrt{3} \text{ cm}, a\sqrt{3} = 12 \text{ cm}$$

Ćwiczenie 6

n -kąt foremny składa się z n trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości r , zatem:

$$P = n \cdot \frac{1}{2}ar = \frac{1}{2}nar$$

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a . Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta: $R = a$.

**Ćwiczenie 4**

$$\text{a) } \text{Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu } 150\sqrt{3}.$$

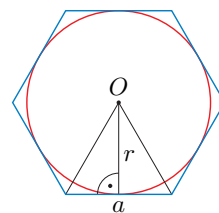
$$\text{b) } \text{Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu } 32\pi.$$

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a . Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Ćwiczenie 5**

$$\text{a) } \text{Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie } 54 \text{ cm.}$$

$$\text{b) } \text{Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości } 12\pi \text{ cm.}$$

D Ćwiczenie 6

Dany jest n -kąt foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r . Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Zadania

1. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

$$\text{a) ośmiokąta foremnego,}$$

$$\text{b) dziesięciokąta foremnego.}$$

2. Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) 720° , b) 900° , c) 1260° , d) 1440° , e) 1620° ?

3. Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na danym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.

$$\text{a) kwadrat o boku } a$$

$$\text{b) sześciokąt foremny o boku } a$$

Odpowiedzi do zadań

$$1. \text{ a) } 135^\circ$$

$$\text{b) } 144^\circ$$

$$2. \text{ a) } 6 \text{ b) } 7 \text{ c) } 9 \text{ d) } 10 \text{ e) } 11$$

$$3. \text{ a) } \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}\pi$$

$$\text{b) } \pi a^2 - \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}\pi$$

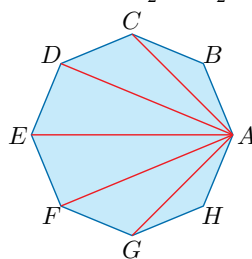
4. Dany jest sześciokąt foremny o boku a i polu P . Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R , a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	4 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$24\sqrt{3}$ cm ²
6 cm	6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$54\sqrt{3}$ cm ²
$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{108}$ cm	16 cm ²
$8\sqrt{3}$ cm	$8\sqrt{3}$ cm	12 cm	$288\sqrt{3}$ cm ²

5. a) Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.

D b) Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n -kąta jest równa $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

6. Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



D 7. Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.

D 8. Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym o boku a jest równy $\frac{1}{2}a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

D 9. Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny o boku a jest równy $\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$.

D 10. Dany jest n -kąt foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa π cm², niezależnie od liczby boków wielokąta.

Powtórzenie

11. a) Pole sześciokąta foremnego jest równe $12\sqrt{3}$ cm². Oblicz różnicę długości okręgu opisanego na tym sześciokącie i okręgu wpisanego w ten sześciokąt.
b) Promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny jest równy 1 cm. Oblicz obwód i pole tego sześciokąta.

12. Punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami n -kąta foremnego. Styczna do okręgu opisanego na tym n -kącie poprowadzona w punkcie A tworzy z bokiem AB kąt α . Wyznacz ten kąt, jeśli: a) $n = 8$, b) $n = 10$, c) $n = 12$.

10. Niech r – promień okręgu wpisanego w n -kąt foremny, R – promień okręgu opisanego na n -kącie foremnym. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2$$

$$R^2 - r^2 = 1$$

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot 1 = \pi$$

11. a) Niech a – długość boku sześciokąta, r – promień okręgu wpisanego, R – promień okręgu opisanego.
 $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$, czyli $a = 2\sqrt{2}$ cm

$$2\pi R - 2\pi r = 2\pi a - 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2(2\sqrt{2} - \sqrt{6})\pi \text{ [cm]}$$

- b) Niech a – długość boku sześciokąta.
 $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 1$, czyli $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm
 $Ob = 4\sqrt{3}$ cm, $P = 2\sqrt{3}$ cm²

12. a) 22,5° b) 18° c) 15°

5. a) 9

b) Z każdego wierzchołka n -kąta wychodzą $n - 3$ przekątne. Zatem liczba przekątnych jest równa:

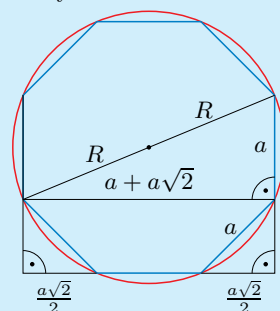
$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: 22,5°, 135°, 22,5°
 $\triangle ACD$ i $\triangle AGF$: 22,5°, 112,5°, 45°
 $\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: 22,5°, 90°, 67,5°

7. Ośmiokąt foremny wpisany w okrąg składa się z ośmiu trójkątów równoramiennych o ramieniu długości r i kącie między ramionami 45°. Zatem:

$$P = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$$

8. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



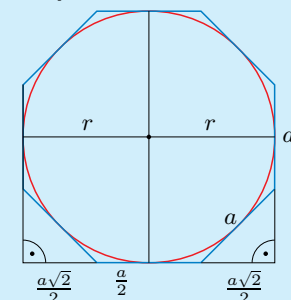
$$(2R)^2 = a^2 + (a + a\sqrt{2})^2$$

$$4R^2 = a^2(4 + 2\sqrt{2})$$

$$R^2 = \frac{1}{4}a^2(4 + 2\sqrt{2})$$

$$R = \frac{1}{2}a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

9. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$r = \frac{1}{2}a + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$$

Komentarz

Po wykonaniu konstrukcji warto przeprowadzić dowód poprawności konstrukcji, aby wykazać, że uzyskana konstrukcja spełnia warunki zadania.

1. ■ Konstruujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD . Punkty A, B, C i D są wierzchołkami kwadratu. ■ Konstruujemy dwusieczne kątów wyznaczonych przez średnice. Przecinają one okrąg w czterech punktach, które razem z wierzchołkami A, B, C, D tworzą ośmiokąt foremny.

2. I sposób

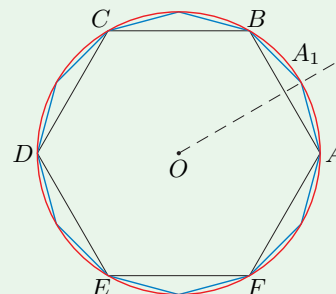
- Korzystamy z konstrukcji pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg w celu otrzymania kąta 108° .
- Na prostej odkładamy odcinek AB – dany bok pięciokąta.
- Konstruujemy (przenosimy) kąt o mierze 108° taki, którego wierzchołkiem jest punkt B , a jego ramię zawiera odcinek AB . Następnie podobnie konstruujemy kąt o wierzchołku w punkcie A .
- Na otrzymanych ramionach kątów odkładamy odcinki długości $|AB|$ i otrzymujemy wierzchołki C i E .
- Rysujemy okrąg o promieniu $|AB|$ i środku w punkcie C oraz okrąg o promieniu $|AB|$ i środku w punkcie E . Wierzchołek D jest jednym z punktów przecięcia tych okręgów.

Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych

Nie wszystkie n -kąty foremne można skonstruować, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Carl F. Gauss udowodnił twierdzenie mówiące, dla jakich liczb n jest to możliwe. Na przykład dla $n < 20$ są to: $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17\}$.

Konstrukcja sześciokąta i dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Na okręgu wybieramy dowolny punkt A i zaczynając od tego punktu, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu. Wyznaczone w ten sposób punkty A, B, C, D, E i F są wierzchołkami sześciokąta foremnego.



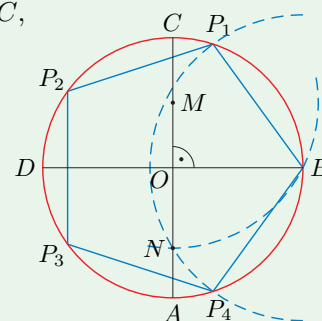
- Konstruujemy symetralną odcinka AB . Przecina ona okrąg w punkcie A_1 . Odcinek AA_1 jest bokiem dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.

- Następnie, zaczynając od punktu A_1 , odmierzamy łuki okręgów o promieniu $|AA_1|$. Punkty przecięcia tych łuków z okręgiem są pozostałymi wierzchołkami dwunastokąta.

1. Skonstruuj kwadrat i ośmiokąt foremny wpisane w dany okrąg.

Konstrukcja pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Rysujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD .
- Wyznaczamy punkt M – środek odcinka OC , gdzie O jest środkiem okręgu.
- Rysujemy łuk okręgu o środku M i promieniu $|BM|$. Łuk ten przecina średnicę AC w punkcie N .
- Odcinek BN ma długość boku szukanego pięciokąta – odkładamy go kolejno na okręgu i otrzymujemy pozostałe wierzchołki pięciokąta: P_1, P_2, P_3 i P_4 .



2. Powyżej opisano konstrukcję pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować pięciokąt foremny, gdy dany jest bok tego pięciokąta.

2. II sposób

Niech a – długość danego boku pięciokąta.

- Rysujemy okrąg o dowolnym promieniu r_1 .
- Zgodnie z konstrukcją opisaną w podręczniku konstruujemy pięciokąt wpisany w okrąg o dowolnym promieniu r_1 . Długość boku otrzymanego pięciokąta oznaczamy przez a_1 .
- Niech r będzie promieniem okręgu, w który można wpisać pięciokąt o boku a . Wówczas $\frac{a}{r} = \frac{a_1}{r_1}$. Na podstawie twierdzenia Talesa konstruujemy odcinek o długości r .
- Rysujemy okrąg o promieniu r i odkładamy na nim odcinek a – w ten sposób otrzymujemy szukany pięciokąt.

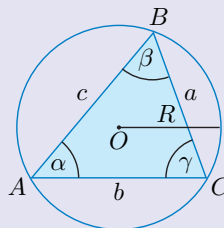
5.8. Twierdzenie sinusów

Przypomnijmy, że **rozwiązaniem trójkąta** nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i miar jego trzech kątów. Jednym z twierdzeń wykorzystywanych do rozwiązywania trójkątów jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

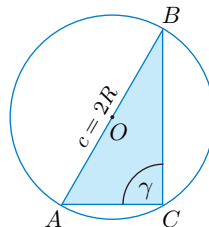
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Dowód. Udowodnimy, że $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$. (Równości $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ oraz $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ .

1° Kąt γ jest kątem prostym (rysunek po prawej).

Mamy $c = 2R$ oraz $\sin \gamma = 1$, stąd $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.



2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek po lewej).

Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD . Kąt ABD jest kątem prostym, zatem $\frac{c}{2R} = \sin \varphi$.

Kąty γ i φ są oparte na tym samym łuku, czyli są równe, więc $\frac{c}{2R} = \sin \gamma$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

3° Kąt γ jest kątem rozwartym (rysunek poniżej).

Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD .

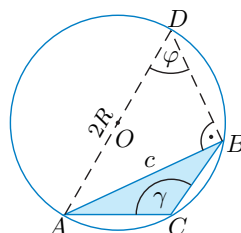
Kąt ABD jest kątem prostym, zatem:

$$\frac{c}{\sin \varphi} = 2R$$

Suma kątów γ i φ jest równa 180° , stąd:

$$\sin \gamma = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

Zatem zachodzi równość $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.



Uwaga. Jeżeli nie zostanie powiedziane, że jest inaczej, będziemy przyjmować, że boki trójkąta: a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów: α, β, γ .

Uczeń:

- stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania trójkątów,
- stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym,
- przeprowadza dowód twierdzenia sinusów.

Multiteka

• Twierdzenie sinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.8

Generator
testów i sprawdzianów

Jeśli dane są dwa kąty i bok trójkąta, to do jego rozwiązania możemy skorzystać z twierdzenia sinusów. Tam, gdzie jest to potrzebne, odpowiednie wartości można odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295).

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są kąty $\alpha = 50^\circ$ i $\beta = 67^\circ$ oraz bok $c = 4$.

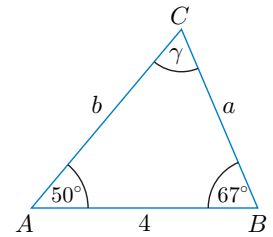
Obliczamy miarę kąta γ :

$$\gamma = 180^\circ - (50^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

Długości boków a i b obliczamy, korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ zatem } a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{4 \sin 50^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 3,44,$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ zatem } b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{4 \sin 67^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 4,13.$$



Ćwiczenie 1

- a) $\gamma = 75^\circ$, $a \approx 4,39$, $b \approx 5,38$
- b) $\gamma = 45^\circ$, $a = 4\sqrt{2}$, $b \approx 10,93$
- c) $\beta = 90^\circ$, $a \approx 6,43$, $c \approx 7,66$
- d) $\alpha = 76^\circ$, $b \approx 4,81$, $c \approx 2,96$

Ćwiczenie 1

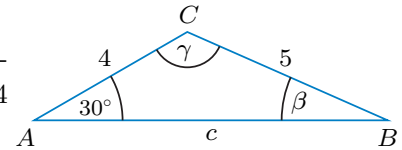
Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.

- a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 6$
- b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $c = 8$
- c) $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $b = 10$
- d) $\beta = 69^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, $a = 5$

Twierdzenie sinusów pozwala również rozwiązać trójkąt, gdy dane są dwa boki i kąt leżący naprzeciw jednego z tych boków.

Przykład 2

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są długości boków $a = 5$ i $b = 4$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$.



Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{4 \sin 30^\circ}{5} = 0,4$$

Z tablic odczytujemy, że $\beta \approx 24^\circ$,
zatem $\gamma \approx 180^\circ - (30^\circ + 24^\circ) = 126^\circ$.

$\sin \beta = 0,4$ również dla $\beta \approx 156^\circ$, ale tę możliwość odrzucamy, gdyż $156^\circ + 30^\circ > 180^\circ$.

Z równości $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ obliczamy długość boku c :

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \approx \frac{5 \sin 126^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,81}{0,5} = 8,1 \quad \sin 126^\circ = \sin(180^\circ - 54^\circ) = \sin 54^\circ \approx 0,81$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

- a) $a = 7, b = 6, \alpha = 80^\circ$ c) $b = 9, c = 10, \gamma = 45^\circ$
 b) $a = 3, b = 6, \alpha = 30^\circ$ d) $b = 5, c = 4, \beta = 60^\circ$

Przykład 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach $a = 3, b = 9$ i kącie $\alpha = 30^\circ$.

Założmy, że taki trójkąt istnieje. Wówczas na podstawie twierdzenia sinusów prawdziwa jest równość:

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin \beta = 9 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{3}{2} > 1$$

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że taki trójkąt nie istnieje.

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt spełniający podane warunki.

- a) $a = 3, b = 2, \beta = 60^\circ$ b) $a = 2, b = 4, \alpha = 45^\circ$

Przykład 4

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 5$ i $b = 8$ oraz kącie $\alpha = 30^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

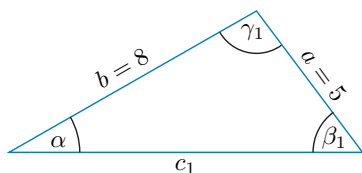
Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = 0,8$$

Z tablic odczytujemy, że $\sin \beta = 0,8$ dla kąta ostrego $\beta_1 \approx 53^\circ$. Zauważmy, że $\sin \beta = 0,8$ również dla kąta $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 127^\circ$. Kąt β_2 spełnia warunki zadania, gdyż $127^\circ + 30^\circ < 180^\circ$.

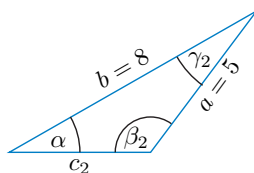
Zatem warunki zadania spełniają dwa trójkąty:

- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ, \beta_1 \approx 53^\circ, \gamma_1 \approx 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ) = 97^\circ$
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ, \beta_2 \approx 127^\circ, \gamma_2 \approx 180^\circ - (30^\circ + 127^\circ) = 23^\circ$



Z równania $\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 9,9$$



Z równania $\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx 3,9$$

Ćwiczenie 3

- a) $\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin 60^\circ}$, czyli $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{\frac{27}{16}} > 1$, zatem taki trójkąt nie istnieje.

- b) $\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin \beta}$, czyli $\sin \beta = \sqrt{2} > 1$, zatem taki trójkąt nie istnieje.

Ćwiczenie 2

- a) $\beta \approx 57,5^\circ, \gamma \approx 42,5^\circ, c \approx 4,8$
 b) $\beta = 90^\circ, \gamma = 60^\circ, c = 3\sqrt{3}$
 c) $\beta \approx 39,5^\circ, \alpha \approx 95,5^\circ, a \approx 14,08$
 d) $\gamma \approx 44^\circ, \alpha \approx 76^\circ, a \approx 5,6$

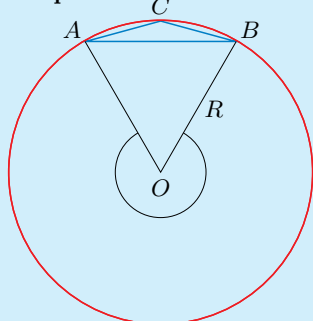
Ćwiczenie 4

- a) $\beta_1 \approx 56,5^\circ$, $\beta_2 \approx 123,5^\circ$,
 $\gamma_1 \approx 93,5^\circ$, $\gamma_2 \approx 26,5^\circ$,
 $c_1 \approx 6$, $c_2 \approx 2,7$
- b) $\beta_1 \approx 62^\circ$, $\beta_2 \approx 118^\circ$, $\gamma_1 \approx 73^\circ$,
 $\gamma_2 \approx 17^\circ$, $c_1 \approx 10,8$, $c_2 \approx 3,3$
- c) $\beta_1 \approx 74^\circ$, $\beta_2 \approx 106^\circ$, $\gamma_1 \approx 46^\circ$,
 $\gamma_2 \approx 14^\circ$, $c_1 \approx 7,5$, $c_2 \approx 2,5$
- d) $\alpha \approx 21^\circ$, $\gamma \approx 114^\circ$, $c \approx 2,6$

Odpowiedzi do zadań

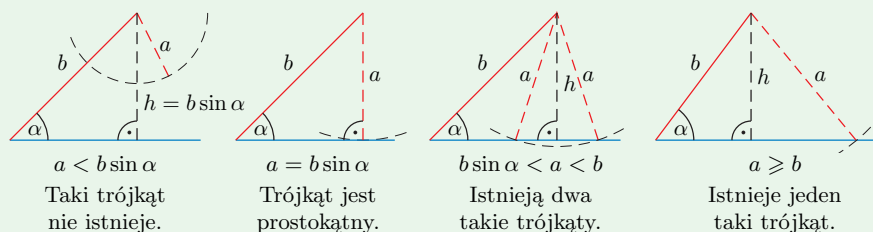
1. a) $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
 b) $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 15^\circ$
2. a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ b) $6\sqrt{2}$
 c) I sposób
 $\alpha = \beta = 15^\circ$,
 $\gamma = 180^\circ - 2\alpha = 150^\circ$
 $R = \frac{c}{2\sin \gamma} = \frac{c}{2\sin 150^\circ} =$
 $= \frac{c}{2\sin 30^\circ} = c$

II sposób



Kąt rozwarty AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany $ACB = 150^\circ$, czyli kąt rozwarty $AOB = 300^\circ$, stąd kąt ostry $AOB = 60^\circ$, czyli trójkąt AOB jest równoboczny, zatem $|AB| = R$.

Rozpatrzmy dwa odcinki a i b oraz kąt ostry α , z których chcemy zbudować taki trójkąt, że kąt α będzie leżał naprzeciwko boku a . Może wówczas zachodzić jedna z poniższych sytuacji:



Ćwiczenie 4

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

- a) $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$ c) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 60^\circ$
 b) $a = 8$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$ d) $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 45^\circ$

Zadania

- Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .
 a) $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$
 b) $|AC| = 3\sqrt{6}$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$
- a) Bok trójkąta położony naprzeciw kąta o mierze 120° ma długość 10. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
 b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę 135° . Oblicz długość boku trójkąta położonego naprzeciw tego kąta.
 c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 15° . Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy długości podstawy trójkąta.



3. Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

- a) $a = 4$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$ c) $b = 11$, $c = 12$, $\beta = 60^\circ$
 b) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$ d) $a = 10$, $c = 20$, $\gamma = 150^\circ$

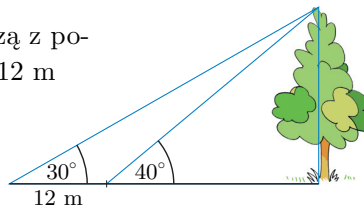
4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , jeśli:

- a) $a = 4$, $\alpha = 135^\circ$, d) $a = 7$, $\alpha = 120^\circ$,
 b) $a = 7$, $\beta = 107^\circ$, $\gamma = 43^\circ$, e) $a = 3$, $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 4\gamma$,
 c) $b = 10$, $\beta = 135^\circ$, f) $c = 11$, $\alpha = \beta = 45^\circ$.

3. a) $c \approx 7,85$, $\beta \approx 48,5^\circ$, $\gamma \approx 101,5^\circ$
 lub $c \approx 2,48$, $\beta \approx 131,5^\circ$, $\gamma \approx 18,5^\circ$
 b) $c \approx 12,63$, $\beta \approx 52^\circ$, $\gamma \approx 83^\circ$
 lub $c \approx 1,55$, $\beta \approx 128^\circ$, $\gamma \approx 7^\circ$
 c) $a \approx 9,59$, $\alpha \approx 49^\circ$, $\gamma \approx 71^\circ$
 lub $a \approx 2,42$, $\alpha \approx 11^\circ$, $\gamma \approx 109^\circ$
 d) $b \approx 10,7$, $\alpha \approx 14,5^\circ$, $\beta \approx 15,5^\circ$
4. a) $2\sqrt{2}$ b) 7 c) $5\sqrt{2}$
 d) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ e) $\sqrt{3}$ f) 5,5



5. W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30° , cień drzewa jest o 12 m dłuższy niż wtedy, gdy tworzą one kąt 40° . Oblicz wysokość drzewa.



6. Rozwiąż trójkąt ABC , jeśli:

- a) $b = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$,
 b) $b = 6$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$,
 c) $a = 12$, $b = 16$, $\alpha = 30^\circ$,
 d) $b = 6$, $c = 5$, $\beta = 20^\circ$,
 e) $a = 5$, $c = 7$, $\gamma = 110^\circ$,
 f) $a = 6$, $c = 3$, $\gamma = 40^\circ$.



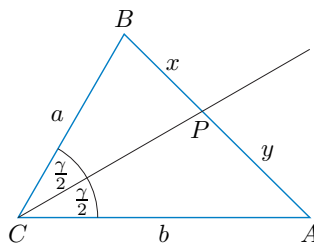
7. Dane są kąty α i β trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm. Oblicz obwód trójkąta, jeśli:

- a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$,
 b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 135^\circ$.



8. Półprosta CP jest dwusieczną kąta γ w trójkącie ABC (rysunek obok). Korzystając z twierdzenia sinusów, udowodnij równość:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$



9. Dany jest trójkąt o bokach a , b , c oraz kątach α , β , γ . Wyprowadź wzór:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

korzystając z tego, że pole dowolnego trójkąta wyraża każda z równości:

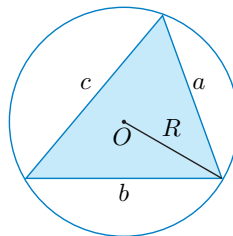
$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, \quad P = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \quad P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$



10. Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że pole dowolnego trójkąta o bokach a , b , c wyraża się za pomocą wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Powtórzenie



11. Rozwiąż trójkąt ABC , jeśli:

- a) $\beta = 120^\circ$, $b = 6$, $c = 2\sqrt{3}$,
 b) $\beta = 120^\circ$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 4\sqrt{2}$,
 c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 12$,
 d) $\alpha = 30^\circ$, $a = 5\sqrt{3}$, $b = 7$.

12. Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie ABC , jeśli:

- a) $\beta = 150^\circ$, $b = 4$,
 b) $\alpha = \beta = 75^\circ$, $c = 6$.

11. a) $a = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \gamma = 30^\circ$
 b) $a \approx 2,07$, $\alpha = 15^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
 c) $b = 12\sqrt{3}$, $c = 24$, $\gamma = 90^\circ$
 d) $c \approx 14$, $\beta \approx 24^\circ$, $\gamma \approx 126^\circ$

12. a) 8π b) 12π

5. około 22,2 m

6. a) $a \approx 5,18$, $c = 10$, $\gamma = 75^\circ$
 b) $a \approx 4,9$, $c \approx 6,7$, $\beta = 60^\circ$
 c) $c \approx 22,83$, $\beta \approx 42^\circ$,
 $\gamma \approx 108^\circ$ lub $c \approx 4,99$,
 $\beta \approx 138^\circ$, $\gamma \approx 12^\circ$
 d) $a \approx 10,35$, $\alpha \approx 143,5^\circ$,
 $\gamma \approx 16,5^\circ$
 e) $b \approx 3,5$, $\alpha \approx 42^\circ$, $\beta \approx 28^\circ$
 f) Taki trójkąt nie istnieje.

7. Informacja do zadania:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{a) } 3(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx 30,47 \text{ [cm]}$$

$$\text{b) } 3(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 17,59 \text{ [cm]}$$

8. Niech $\angle BPC = \alpha$,
 $\angle APC = 180^\circ - \alpha$.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ czyli } \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{b}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{y}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ czyli}$$

$$\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha} = \frac{y}{b}$$

$$\text{Zatem } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

9. $\frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta$

$$b \sin \gamma = c \sin \beta,$$

$$\text{czyli } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

$$\text{czyli } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\text{Zatem } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

10. $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

$$\sin \gamma = \frac{c}{2R}$$

$$P = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Uczeń:

- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów,
- przeprowadza dowód twierdzenia cosinusów.

5.9. Twierdzenie cosinusów (1)

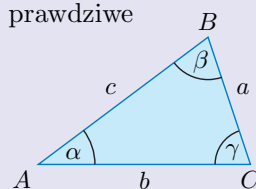
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. (Pozostałe dwie zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ . Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.

Wówczas $\cos \gamma = 0$ i równość przybiera postać $c^2 = a^2 + b^2$ – jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej).

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\sphericalangle BAC$ jest ostry.

Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h . Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a \cos \gamma, \quad |AD| = b - a \cos \gamma$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

$$h^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2$$

oraz:

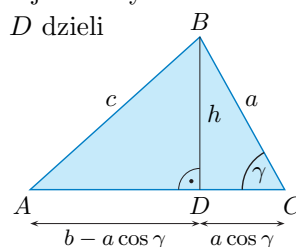
$$h^2 = c^2 - (b - a \cos \gamma)^2$$

Zatem:

$$c^2 - (b - a \cos \gamma)^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2$$

$$c^2 - b^2 + 2ab \cos \gamma - a^2 \cos^2 \gamma = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma$$

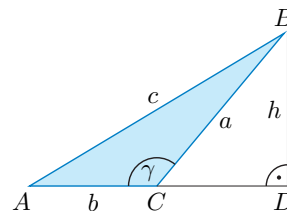
i ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



Ćwiczenie 1

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ w przypadku, gdy $\gamma > 90^\circ$ (rysunek obok).

Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a \cos(180^\circ - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2 , korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD .



Ćwiczenie 1

$$|CD| = a \cos(180^\circ - \gamma) = -a \cos \gamma$$

$$h^2 = a^2 - |CD|^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = h^2 + (b + |CD|)^2$$

$$c^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma + (b - a \cos \gamma)^2$$

$$c^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Multiteka

• Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.9

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że z twierdzenia cosinusów wynika twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$ i $b = 6$ oraz kącie $\gamma = 30^\circ$.

Aby obliczyć długość boku c , korzystamy z twierdzenia cosinusów:

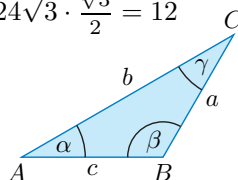
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Zatem jest to trójkąt równoramienny o kątach:

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 30^\circ.$$



Ćwiczenie 3

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC , jeśli:

a) $a = 5, b = 7, \gamma = 60^\circ$,

c) $a = 3, c = 2\sqrt{2}, \beta = 45^\circ$,

b) $a = 5, b = 7, \gamma = 150^\circ$,

d) $b = 3, c = 2\sqrt{2}, \alpha = 135^\circ$.

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach: $a = 6, b = 3\sqrt{2}, c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

Stąd:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 18 - 90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

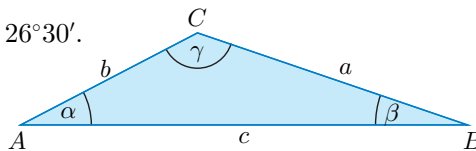
Stąd:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 + 90 - 36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,8944$$

Z tablic (str. 295) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$$



Ćwiczenie 2

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa: Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Założmy, że w trójkącie zachodzi następująca zależność:

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ gdzie } c \text{ jest najdłuższym bokiem.}$$

Z twierdzenia cosinusów mamy: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, stąd $2ab \cos \gamma = 0$, zatem $\cos \gamma = 0$, czyli $\gamma = 90^\circ$, co oznacza, że trójkąt jest prostokątny.

Ćwiczenie 3

a) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 60^\circ =$
 $= 39$

$c = \sqrt{39}$

b) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 150^\circ$
 $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 = 74 + 35\sqrt{3}$
 $c = \sqrt{74 + 35\sqrt{3}}$

c) $b^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 +$
 $-2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 5$
 $b = \sqrt{5}$

d) $a^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 +$
 $-2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cos 135^\circ$
 $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) =$
 $= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2 = 29$

$a = \sqrt{29}$

Odpowiedzi do zadań

- $\sqrt{7}$
 - $\sqrt{13}$
 - , d) $2\sqrt{13}$
- $d_1 = 2\sqrt{7}, d_2 = 2\sqrt{19}$
 - $d_1 = 2\sqrt{2}, d_2 = 2\sqrt{10}$
 - $d_1 = \sqrt{19}, d_2 = 7$
 - $d_1 = 2\sqrt{13}, d_2 = 2\sqrt{37}$
- $\alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 60^\circ$
 - $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 105^\circ$
- $\cos \alpha = \frac{7}{8}, \cos \beta = \frac{11}{16}$
 $\alpha \approx 29^\circ, \beta \approx 46,5^\circ,$
 $\gamma \approx 104,5^\circ$
 - $\cos \alpha = \frac{13}{14}, \cos \beta = \frac{11}{14}$
 $\alpha \approx 22^\circ, \beta \approx 38^\circ,$
 $\gamma \approx 120^\circ$
- Niech $x, 3x$ – długości boków trójkąta.
 $7^2 = x^2 + (3x)^2 +$
 $-2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ$
 $x = \sqrt{7}, 3x = 3\sqrt{7}$
 - Niech $x, 4x$ – długości boków trójkąta.
 $21^2 = x^2 + (4x)^2 +$
 $-2 \cdot x \cdot 4x \cdot \cos 120^\circ$
 $x = \sqrt{21}, 4x = 4\sqrt{21}$
- $\cos \gamma = \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}, P = \frac{3}{2}$
 - $\cos \gamma = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \sin \gamma = \frac{\sqrt{55}}{10},$
 $P = \frac{\sqrt{11}}{2}$
- a) 60° b) 135°
- $\cos \gamma = \frac{3}{5}$
 $c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5}$
 $c = 8$
 - $\cos \gamma = -\frac{3}{5}$
 $c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (-\frac{3}{5})$
 $c = 4\sqrt{13}$

Ćwiczenie 4

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

- a) $a = 1, b = 1, c = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) $a = \sqrt{2}, b = 2, c = 1 + \sqrt{3}$

Zadania

- Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .
 - $a = 4, b = \sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$ c) $a = 2, b = 6, \gamma = 120^\circ$
 - $b = 5, c = 3\sqrt{2}, \alpha = 45^\circ$ d) $a = 2\sqrt{3}, c = 4, \beta = 150^\circ$
- Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ zawarty między tymi bokami. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
 - $a = 2, b = 4\sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$ c) $a = 5, b = 3, \gamma = 60^\circ$
 - $a = 4, b = 2\sqrt{2}, \gamma = 45^\circ$ d) $a = 6, b = 8, \gamma = 120^\circ$
- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 4\sqrt{3}, c = 6$ b) $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3} + 3$
-  Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2, b = 3, c = 4$ b) $a = 3, b = 5, c = 7$
- Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 60° . Oblicz długości tych boków, jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 7.
 - Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 120° . Oblicz długości tych boków, jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 21.
- Oblicz $\cos \gamma, \sin \gamma$ i pole trójkąta ABC .
 - $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ b) $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{3}$

Powtórzenie

- Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC .
 - $a = 5, b = \sqrt{19}, c = 3$ b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{10}, c = 2$
- W trójkącie ABC dane są długości dwóch jego boków $a = 6$ i $b = 10$. Oblicz długość boku c , jeśli wiadomo, że $\sin \gamma = \frac{4}{5}$ oraz kąt γ jest:
 - ostry,
 - rozwarty.

Ćwiczenie 4

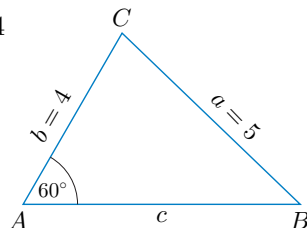
- a) $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1 + 1 - 2 - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \gamma = 150^\circ, \alpha = \beta = 15^\circ$
- b) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2}{2 \cdot 2(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 105^\circ$

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)

Aby rozwiązać trójkąt, gdy mamy dane długości jego dwóch boków i miarę kąta położonego naprzeciwko jednego z nich, możemy skorzystać z twierdzenia sinusów lub postąpić tak, jak w przykładzie poniżej.

Przykład 1

W trójkącie ABC (rysunek obok) dane są $|AC| = 4$ i $|BC| = 5$ oraz $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Oblicz długość boku AB .



Korzystamy ze wzoru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$:

$$25 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 60^\circ$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$c^2 - 4c - 9 = 0$$

$$\Delta = 16 + 36 = 52, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

Stąd:

$$c = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} < 0 \quad (\text{sprzeczność})$$

lub

$$c = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

Zatem bok AB ma długość równą $2 + \sqrt{13}$.

Zauważ, że równanie $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, gdzie nieznaną jest bok c , może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie mieć rozwiązań.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC , jeśli:

- $|AC| = 8$, $|BC| = 7$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$,
- $|AC| = 5$, $|AB| = 8$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AC| = 2\sqrt{6}$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$ oraz miara kąta BAC równa 30° . Rozwiąż ten trójkąt.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż trójkąt ABC , jeśli:

- $b = 6$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,
- $a = 4$, $b = 2 + 2\sqrt{3}$, $\gamma = 30^\circ$,
- $a = 3 + \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\beta = 60^\circ$,
- $a = 2\sqrt{7}$, $c = 2$, $\alpha = 120^\circ$.

Ćwiczenie 3

$$c) (3\sqrt{2})^2 = (3 + \sqrt{3})^2 + c^2 - 2(3 + \sqrt{3}) \cdot c \cdot \cos 60^\circ$$

$$c^2 - (3 + \sqrt{3})c + 6(\sqrt{3} - 1) = 0$$

$$\Delta = 9(4 - 2\sqrt{3})$$

$$c_1 = 3 - \sqrt{3}, \quad c_2 = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha_1 = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha_1 = 105^\circ, \quad \alpha_2 = 75^\circ, \quad \gamma_1 = 15^\circ, \quad \gamma_2 = 45^\circ$$

$$d) (2\sqrt{7})^2 = b^2 + 2^2 - 2b \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$$

$$b^2 + 2b - 24 = 0, \quad \text{czyli } b = 4$$

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\beta = 41^\circ, \quad \gamma = 19^\circ$$

Uczeń:

- wskazuje najmniejszy (największy) kąt w trójkącie, gdy dane są długości boków trójkąta,
- bada, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny,
- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Ćwiczenie 1

$$a) 7^2 = 8^2 + |AB|^2 +$$

$$- 2 \cdot 8 \cdot |AB| \cdot \cos 60^\circ$$

$$|AB|^2 - 8|AB| + 15 = 0$$

$$|AB| = 3 \text{ lub } |AB| = 5$$

$$b) 5^2 = 8^2 + |BC|^2 +$$

$$- 2 \cdot 8 \cdot |BC| \cdot \cos 45^\circ$$

$$|BC|^2 - 8\sqrt{2}|BC| + 39 = 0$$

$$\Delta < 0$$

Taki trójkąt nie istnieje.

Ćwiczenie 2

$$c = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}, \quad \beta = 135^\circ, \quad \gamma = 15^\circ$$

$$\text{lub } c = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}, \quad \beta = 45^\circ,$$

$$\gamma = 105^\circ$$

Ćwiczenie 3

$$a) 6^2 = a^2 + (6\sqrt{2})^2 +$$

$$- 2a \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$a = 6, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \gamma = 90^\circ$$

$$b) c^2 = 4^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2 +$$

$$- 2 \cdot 4 \cdot (2 + 2\sqrt{3}) \cos 30^\circ = 8$$

$$c = 2\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad \text{czyli}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{(4 + 8\sqrt{3} + 12) + 8 - 16}{4\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Zatem } \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 105^\circ.$$

Multiteka

- Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.10



Generator
testów i sprawdzianów

Twierdzenie

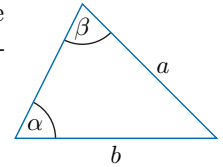
W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Dowód

Niech α będzie kątem ostrym. Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt β .

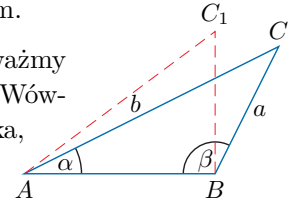
- 1° Kąt β jest kątem ostrym (rysunek obok). Załóżmy, że $\alpha < \beta$, wówczas $\sin \alpha < \sin \beta$, czyli $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < 1$. Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ zatem } a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < b$$



- 2° Kąt β jest kątem prostym. Wówczas β jest największym kątem trójkąta, a przeciwprostokątna jest jego najdłuższym bokiem.

- 3° Kąt β jest kątem rozwartym (rysunek obok). Rozważmy trójkąt prostokątny ABC_1 taki, że $|BC_1| = |BC|$. Wówczas $a < |AC_1|$ oraz z twierdzenia cosinusów wynika, że $|AC_1| < b$ (gdyż $\cos \beta < 0$). Zatem $a < b$.



Ćwiczenie 4

- a) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150° .
- b) Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa 135° , a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3 + \sqrt{3})$ cm. Oblicz długość trzeciego, najkrótszego boku tego trójkąta.

Przykład 2

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt β – największym. Wykaż, że dla kątów tego trójkąta zachodzą zależności: $\sin \beta = 2 \sin \alpha$ oraz $\cos \beta = -\frac{2}{7} \cos \alpha$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt β – naprzeciwko najdłuższego. Na podstawie twierdzenia sinusów:

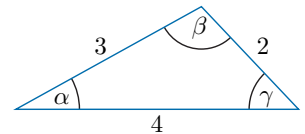
$$\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \beta}$$

zatem $\sin \beta = 2 \sin \alpha$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$
$$\cos \beta = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Zatem $\cos \beta = -\frac{2}{7} \cos \alpha$.



Ćwiczenie 4

a) $c^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cos 150^\circ = 28$

$c = 2\sqrt{7}$ cm

b) $\alpha + \beta = 135^\circ$, α, β – kąty ostre, więc $\alpha > 45^\circ$ i $\beta > 45^\circ$

$c^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot (3\sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{3}) \cos 45^\circ = 12$

$c = 2\sqrt{3}$ cm

D Ćwiczenie 5

Dany jest trójkąt o bokach 4, 5 i 6. Wykaż, że $\sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, gdzie α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a β – największym.

D Przykład 3

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos \gamma < 0$, więc $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos \alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 6

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o bokach a , b , c . Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$

c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$

b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$

d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Zadania

1. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o bokach a , b , c . Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?

a) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$

c) $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$

b) $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$

d) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

2. Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:

a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najdłuższego boku,

b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6,

c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedzi do zadań

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży wewnątrz trójkąta, gdy trójkąt ten jest ostrokątny, czyli gdy cosinus największego kąta jest dodatni.

a) $\cos \gamma = \frac{1}{4}$, tak

b) $\cos \alpha = -\frac{29}{48}$, nie

c) $\cos \beta = -\frac{3}{4}$, nie

d) $\cos \alpha = 0$, nie

2. a) $\frac{1}{5}$ b) $2\sqrt{7}$ c) $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Ćwiczenie 5

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin \beta}$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

Zatem $\sin \beta = \frac{3}{2} \sin \alpha =$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha.$$

Ćwiczenie 6

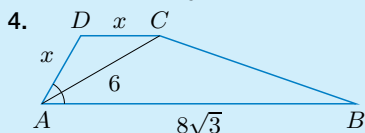
a) $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, ostrokątny

b) $\cos \alpha = 0$, prostokątny

c) $\cos \beta = -\frac{1}{16}$, rozwartokątny

d) $\cos \gamma = -\frac{1}{48}$, rozwartokątny

3. a) $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, $c = 2\sqrt{13}$
lub $\cos \gamma = -\frac{4}{5}$, $c = 6\sqrt{5}$
b) $\cos \gamma = \frac{1}{3}$, $c = \sqrt{41}$
lub $\cos \gamma = -\frac{1}{3}$, $c = 9$



$\angle DAC = \angle CAB = 30^\circ$
 $\angle ACD = \angle CAB$
(kąty naprzemianległe)

Zatem trójkąt ACD jest równoramienny, czyli

$|AD| = |DC| = x$ oraz
 $\angle ADC = 120^\circ$.

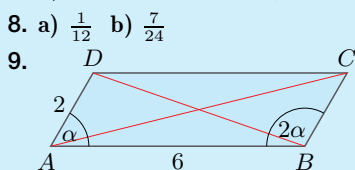
Z twierdzenia cosinusów:
 $6^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cos 120^\circ$
 $x = 2\sqrt{3}$

$$|CB|^2 = 6^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{3} \cos 30^\circ = 36 + 192 - 144 = 84$$

$$|CB| = 2\sqrt{21}$$

$$Ob = 8\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{21} = 2\sqrt{3}(6 + \sqrt{7})$$

7. a) $b = 2$, $\beta \approx 14^\circ$, $\gamma \approx 106^\circ$
lub $b = 6$, $\beta \approx 46^\circ$, $\gamma \approx 74^\circ$
b) $a = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 120^\circ$
lub $a = 2$, $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
c) $a = 1$, $\alpha \approx 18^\circ 30'$,
 $\gamma = 116^\circ 30'$ lub $a = 3$,
 $\alpha \approx 71^\circ 30'$, $\gamma = 63^\circ 30'$
d) $b = 4\sqrt{7}$, $\beta \approx 41^\circ$, $\gamma \approx 19^\circ$



$$\alpha + 2\alpha = 180^\circ,$$

czyli $\alpha = 60^\circ$

$$|BD|^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$|BD| = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$|AC|^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ$$

$$|AC| = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

3. Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P . Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c .

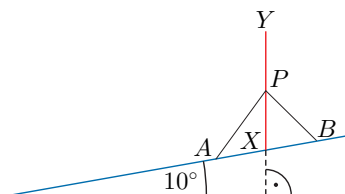
a) $a = 4$, $b = 10$, $P = 12$

b) $a = 5$, $b = 6$, $P = 10\sqrt{2}$

4. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60° . Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD . Oblicz obwód tego trapezu.



5. Na stoku o kącie nachylenia 10° ustawiono słup XY wysokości 14 m. Jakiej długości są odcinki poprowadzone z punktu P , położonego w środku wysokości słupa, do punktów A i B znajdujących się 6 m od podstawy słupa (rysunek obok)?



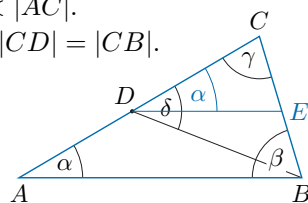
6. Przeczytaj podany w ramce szkic dowodu twierdzenia mówiącego, że kąt leżący naprzeciwko dłuższego boku trójkąta jest większy od kąta leżącego naprzeciwko krótszego boku.

Rozpatrzmy trójkąt ABC , w którym $|BC| < |AC|$.

Na boku AC wyznaczamy punkt D taki, że $|CD| = |CB|$.

1. Zauważamy, że $\alpha < \delta$.

2. $\angle CBD < \beta$ oraz $\delta = \angle CBD$
(trójkąt BCD jest równoramienny),
więc $\alpha < \beta$.



Uzasadnij spostrzeżenie, że w powyższym szkicu dowodu $\alpha < \delta$.

Powtórzenie



7. Rozwiąż trójkąt ABC , jeśli:

a) $a = 2\sqrt{13}$, $c = 8$, $\alpha = 60^\circ$,

c) $b = \sqrt{5}$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

b) $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$,

d) $a = 14$, $c = 2\sqrt{7}$, $\alpha = 120^\circ$.

8. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o bokach:

a) $a = 3$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$,

b) $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$, $c = 4$.

9. Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku, jeżeli jego obwód jest równy 16 cm.

5. $\angle AXP = 90^\circ + 10^\circ = 100^\circ$

$\angle BXP = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$

$|PX| = 7 \text{ m}$

$|PA|^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 100^\circ$

$|PA| \approx 9,98 \text{ m}$

$|PB|^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 80^\circ$

$|PB| \approx 8,39 \text{ m}$

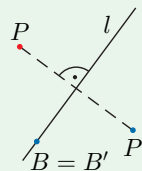
6. Niech bok DE będzie równoległy do boku AB .

Wówczas $\angle CDE = \alpha$ (kąty odpowiadające) i $\angle CDE < \angle CDB$, zatem $\alpha < \sigma$.

5.11. Zagadnienia uzupełniające

Symetria osiowa

Niech punkt P nie należy do prostej l . Punkt P' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu P **względem prostej l** , jeżeli punkty P i P' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka PP' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka PP'). Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).



Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l . Prosta l nazywamy **osią symetrii**.

- Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

a) l_1 , b) l_2 , c) l_3 .

- Dany jest kwadrat K_1 o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$ i $D(0,4)$.

a) K_2 jest obrazem kwadratu K_1 w symetrii względem prostej $y = x + 2$. Oblicz pole części wspólnej $K_1 \cap K_2$.

b) K_3 jest obrazem kwadratu K_1 w symetrii względem prostej $y = x - 3$. Oblicz pole części wspólnej $K_1 \cap K_3$.

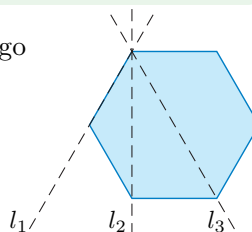


Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli istnieje taka prosta l , że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tej prostej. Prosta l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.



Figura osiowosymetryczna, ma jedną oś symetrii.



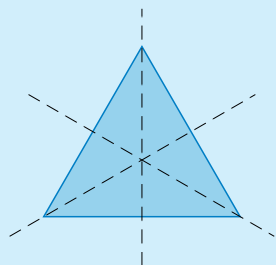
Figura nie ma osi symetrii.



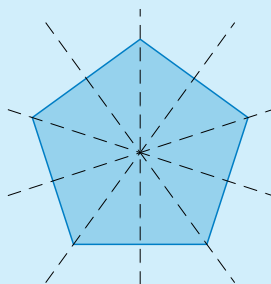
Figura osiowosymetryczna, ma dwie osie symetrii.

- Ile osi symetrii ma odcinek, prosta, półprosta?
- Podaj przykład figury, która ma: a) trzy osie symetrii, b) pięć osi symetrii.

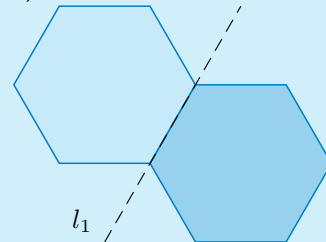
- a) trójkąt równoboczny



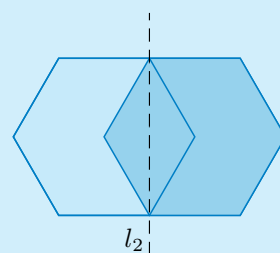
- b) pięciokąt foremny



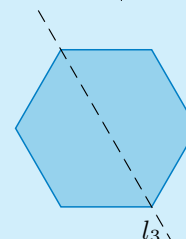
- a)



- b)



- c)

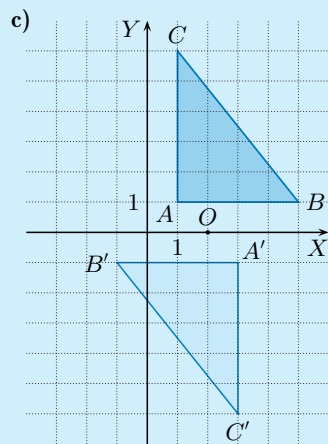
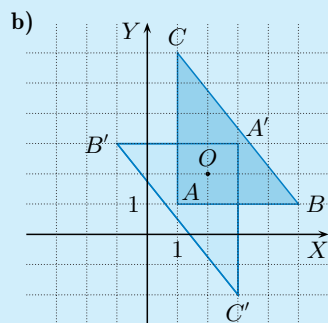
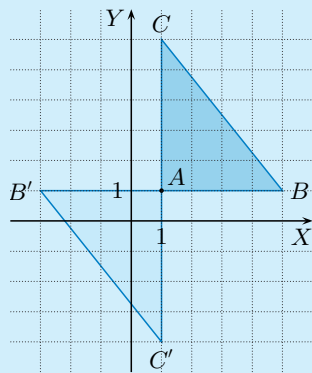


- a) 4 b) 1

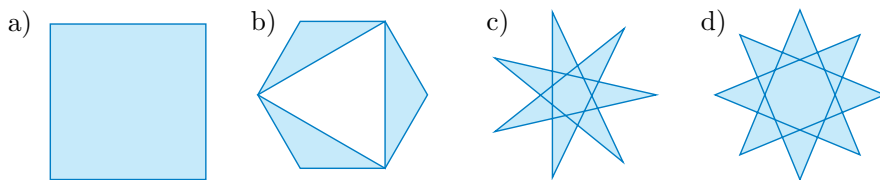
- Odcinek ma 2 osie symetrii – prostą zawierającą ten odcinek i jego symetralną. Prosta ma nieskończenie wiele osi symetrii – daną prostą i każdą prostą do niej prostopadłą. Półprosta ma 1 oś symetrii – prostą zawierającą tę półprostą.

5. a) 4 b) 3 c) 7 d) 8

6. a) $O = A$



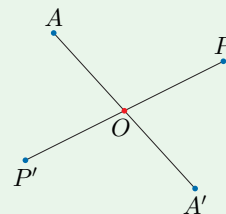
5. Podaj, ile osi symetrii ma poniższa figura.



Symetria środkowa

Punkt P' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu P **względem punktu O** , jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty P i P' . Punktem symetrycznym do O jest on sam.

Pary punktów symetrycznych względem punktu O na rysunku obok to P i P' oraz A i A' .

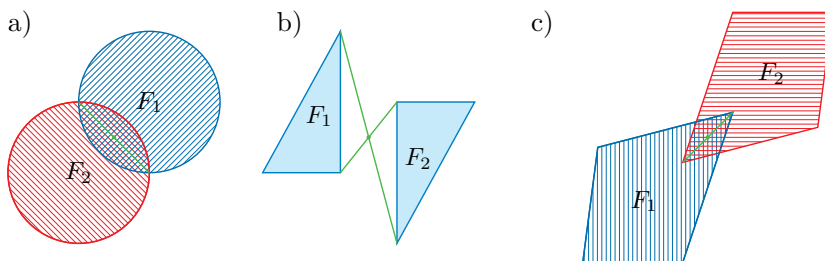


Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.

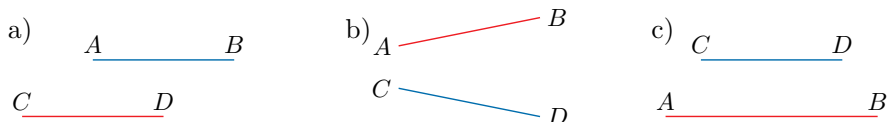
6. Dany jest trójkąt ABC , gdzie $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(1,6)$. Narysuj obraz tego trójkąta w symetrii względem punktu O .

a) $O(1,1)$ b) $O(2,2)$ c) $O(2,0)$

7. Figura F_2 jest obrazem figury F_1 w pewnej symetrii środkowej. W jaki sposób można wyznaczyć środek tej symetrii?

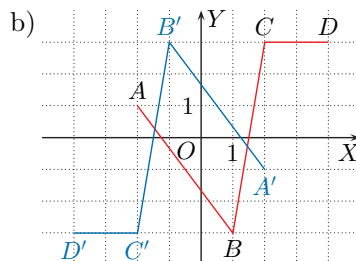
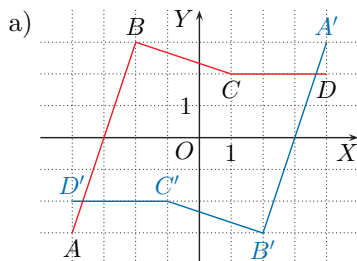


8. Czy odcinek DC jest obrazem odcinka AB w pewnej symetrii środkowej?



7. a) Środkiem symetrii jest środek wspólnej cięciwy obu okręgów.
 b) Środkiem symetrii jest punkt przecięcia narysowanych odcinków.
 c) Środkiem symetrii jest środek narysowanego odcinka.
8. a) tak b) nie c) nie

9. Narysuj w zeszyście obraz łamanej $ABCD$ w symetrii względem początku układu współrzędnych.



10. Narysuj okrąg o środku w punkcie $(3, 3)$ i promieniu 2 oraz obraz tego okręgu w symetrii względem punktu: a) $O(0, 0)$, b) $A(3, 0)$, c) $B(2, 2)$.
11. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(0, 2)$, $B(4, -2)$, $C(2, 2)$, $D(4, 6)$. Narysuj obraz tego czworokąta w symetrii względem punktu:
- a) $O(0, 0)$, b) $A(0, 2)$, c) $B(4, 2)$.

Figura jest **środkowosymetryczna**, jeśli istnieje taki punkt O , że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

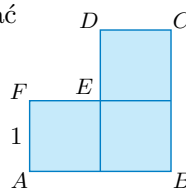
12. Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?
13. Czy przedstawiony obok rysunek karty król karo jest osiowosymetryczny czy środkowosymetryczny?
14. Która z poniższych figur przedstawiających litery jest środkowosymetryczna, a która jest osiowosymetryczna?



A B C D E F G H I J K L M
N O P R S T U V W X Y Z

15. W jaki sposób należy do sześciokąta $ABCDEF$ dorysować kwadrat o boku 1, aby otrzymać figurę:

- a) mającą oś symetrii i środek symetrii,
b) mającą oś symetrii, ale niemającą środka symetrii,
c) mającą środek symetrii, ale niemającą osi symetrii?



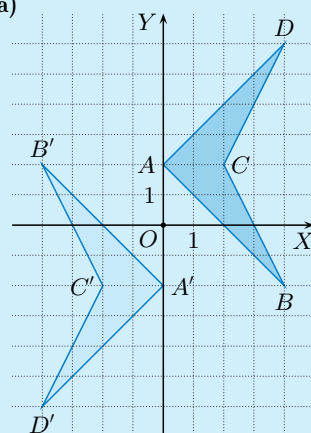
12. Równoległobok (punkt przecięcia przekątnych),
prosta (każdy punkt tej prostej),
kwadrat (punkt przecięcia przekątnych),
odcinek (środek tego odcinka).

13. środkowosymetryczny

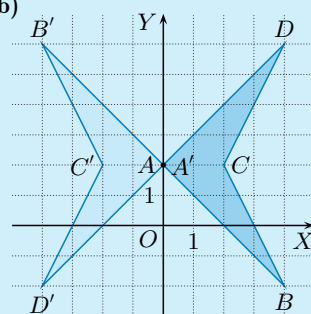
14. Litery środkowosymetryczne: H, I, N, O, S, X, Z

Litery osiowosymetryczne: A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y

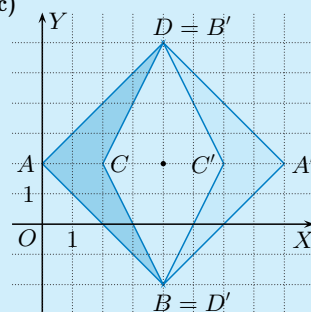
11. a)



- b)



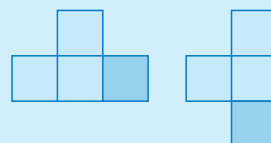
- c)



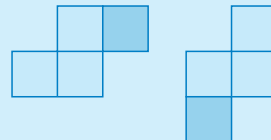
15. a)



- b)



- c)



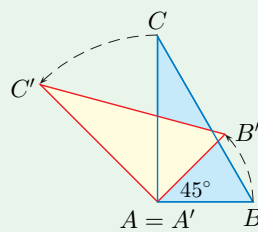
Obrót

Obrotem dookoła punktu O o kąt α (obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny (różnemu od punktu O) przyporządkowuje punkt P' taki, że:

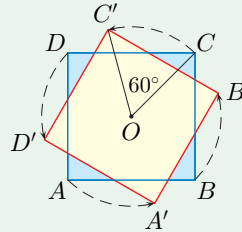
1. kąt POP' ma miarę α ,
2. $|OP| = |OP'|$.

Punkt O nazywamy **środkiem obrotu**. Obrazem punktu O jest punkt O .

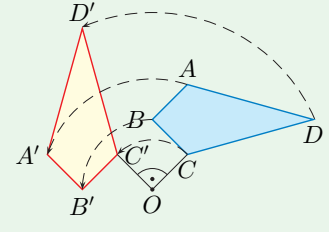
Aby narysować obraz dowolnego wielokąta w obrocie o kąt α dookoła danego punktu, wystarczy znaleźć obrazy wszystkich wierzchołków danego wielokąta, a następnie połączyć je odpowiednimi odcinkami.



Obrót trójkąta ABC dookoła punktu A o kąt 45° .



Obrót kwadratu $ABCD$ dookoła punktu O o kąt 60° .



Obrót deltoidu $ABCD$ dookoła punktu O o kąt 90° .

16. a) $S(3, 2)$

b) 1° Obrazem punktu A jest punkt C , a punktu B – punkt D . Środkiem obrotu jest punkt wspólny symetralnych odcinków AC i BD .

Symetralna AC : $x = 2$

Symetralna BD :

$$2x - y - 4 = 0$$

Środek obrotu: $S(2, 0)$

2° Obrazem punktu A jest

punkt D , a punktu B –

punkt C . Środkiem obrotu

jest punkt wspólny symetralnych odcinków AD i BC .

Symetralna AD : $y = x$

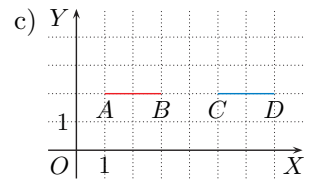
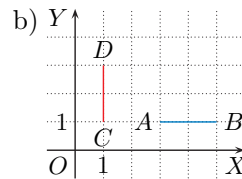
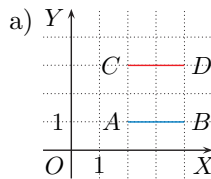
Symetralna BC : $x = 3$

Środek obrotu: $S(3, 3)$

c) $S(4, 2)$

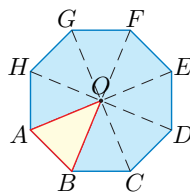
$$18. \frac{5}{8} \cdot 360^\circ = 225^\circ$$

16. Wyznacz współrzędne środka obrotu, jeśli odcinek CD jest obrazem odcinka AB w tym obrocie. W przykładzie b) podaj dwie możliwości.

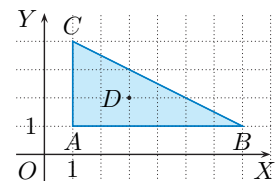


17. Na rysunku obok przedstawiono trójkąt ABC . Przerysuj ten trójkąt do zeszytu, a następnie narysuj jego obraz w obrocie dookoła punktu:

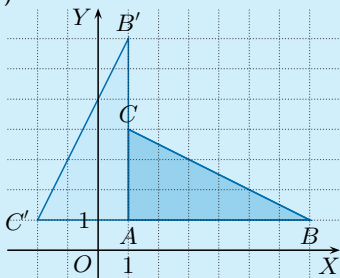
- a) A o 90° , b) O o 90° , c) D o 180° .



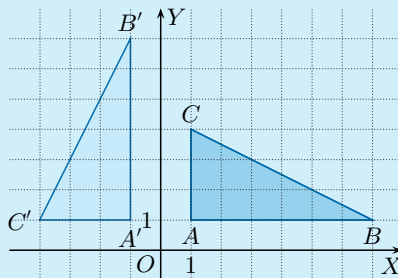
18. Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$ (rysunek obok). O jaki kąt należy obrócić trójkąt ABO dookoła punktu O , aby otrzymać trójkąt FGO ?



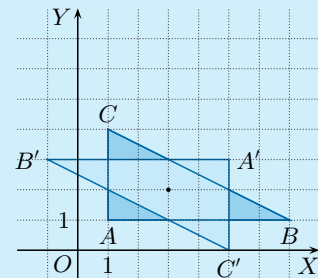
17. a)



b)



c)

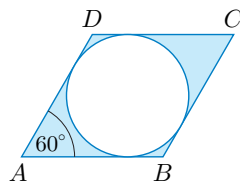
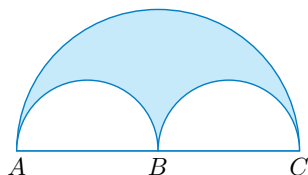


Zestawy powtórzeniowe

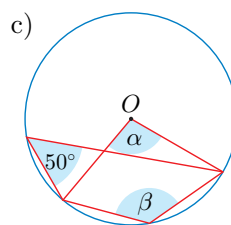
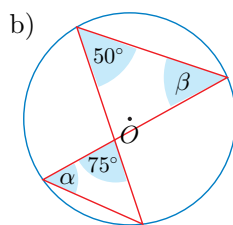
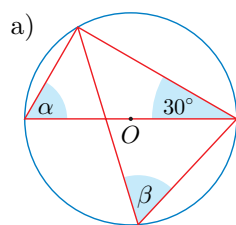
Zestaw I

1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru, jeśli $|AB| = 2$ oraz:

a) $|AB| = |BC|$ i łuki są półokręgami, b) figura $ABCD$ jest rombem.



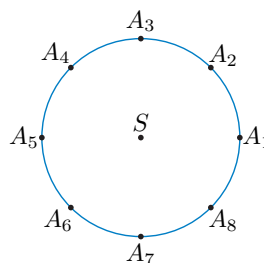
2. Wyznacz miary kątów α i β .



3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B oraz miarę kąta między cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C .

4. Punkty: $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta między cięciwą:

a) A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1 ,
b) A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8 .



5. Oblicz promień okręgu opisanego na równoramiennym trójkącie prostokątnym, którego obwód jest równy:

a) $4 + 2\sqrt{2}$, b) 4, c) 1.

6. a) Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe 27π . Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

b) Suma pól koła wpisanego w trójkąt równoboczny i koła na nim opisanego jest równa 60π . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

6. Niech a – długość boku trójkąta.

a) $R = 3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, czyli $a = 9$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{27}{4}\pi$$

b) $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \pi + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \pi = 60\pi$

$$a = 12$$

$$P = 36\sqrt{3}, Ob = 36$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) π b) $2\sqrt{3} - \frac{3}{4}\pi$

2. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$
b) $\alpha = 50^\circ, \beta = 55^\circ$
c) $\alpha = 100^\circ, \beta = 130^\circ$

3. $60^\circ, 30^\circ$

4. a) $22,5^\circ$ b) $67,5^\circ$

5. Niech a – długość przyprostokątnej.

$$Ob = 2a + a\sqrt{2}, R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{a) } 2a + a\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$a = 2, R = \sqrt{2}$$

$$\text{b) } 2a + a\sqrt{2} = 4$$

$$a = 2(2 + \sqrt{2}), R = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{c) } 2a + a\sqrt{2} = 1$$

$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, R = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

7. Niech a – długość boku większego trójkąta, b – długość boku mniejszego trójkąta.

$$2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} + 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = 12\pi$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 2$$

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } b = 2\sqrt{3}$$

$$Ob = 3a + 3b = 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

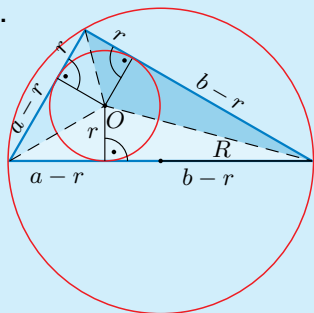
8. a) $3,75 \text{ cm}^2$ b) $6,25 \text{ cm}^2$

9. a) 6π , 4π b) $16(\pi - 2)$

- c) $8(\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} + 2})$

Zestaw II

1.

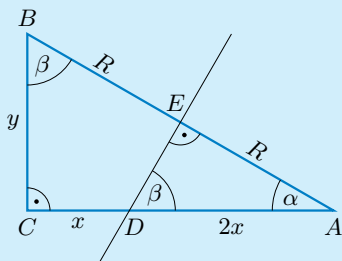


Zauważmy, że:

$$a - r + b - r = 2R$$

$$\text{Zatem } a + b = 2R + 2r.$$

2. Niech R – promień koła opisanego na trójkącie.



$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{2x}{R} = \frac{2R}{3x}, \text{ czyli } R = x\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

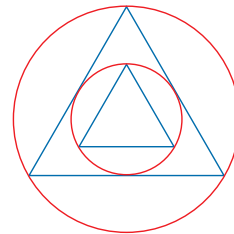
$$y^2 = (2R)^2 - (3x)^2 = 12x^2 - 9x^2 = 3x^2$$

$$\text{czyli } y = x\sqrt{3}.$$

Stosunek pól:

$$\frac{\frac{\pi(x\sqrt{3})^2}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

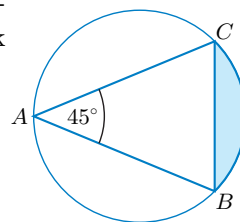
7. Oblicz sumę obwodów trójkątów równobocznych przedstawionych na rysunku obok, jeśli suma długości okręgów jest równa 12π .



8. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli:

- a) stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,
b) jest on równoramienny.

9. Równoramienny trójkąt ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok).



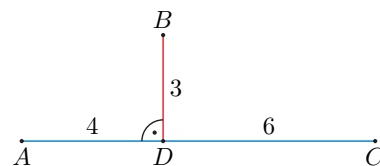
- a) Oblicz długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$.
b) Oblicz pole zacieniowanego odcinka koła.
c) Oblicz obwód trójkąta ABC .

Zestaw II

1. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu na nim opisanego.

2. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie prostokątnym do pola tego trójkąta, jeśli symetralna przeciwprostokątnej dzieli jedną z przyprostokątnych w stosunku 1 : 2.

3. Oblicz promień okręgu przechodzącego przez punkty: A , B , D oraz promień okręgu przechodzącego przez punkty: A , B , C (rysunek obok). Oblicz odległość między środkami tych okręgów.



4. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.

5. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym:

- a) o ramieniu b i kącie α przy podstawie,
b) o wysokości h opuszczonej na podstawę i kącie 2α między ramionami.

3. Promień okręgu przechodzącego przez punkty A , B , D : $2,5$
Promień okręgu przechodzącego przez punkty A , B , C : $\frac{5\sqrt{5}}{2}$
Odległość między środkami okręgów: 5

4. $P = 54$, $r = 3$

5. a) Z twierdzenia sinusów: $R = \frac{b}{2\sin \alpha}$

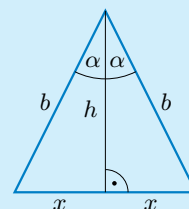
- b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$$\frac{h}{b} = \cos \alpha, \text{ czyli } b = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$\frac{x}{h} = \tan \alpha, \text{ czyli } x = h \tan \alpha$$

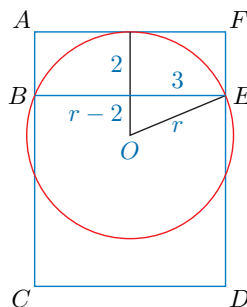
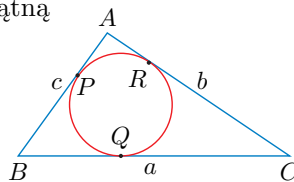
$$P = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = h^2 \tan \alpha$$

$$R = \frac{2xb^2}{4P} = \frac{2h \tan \alpha \cdot \frac{h^2}{\cos^2 \alpha}}{4h^2 \tan \alpha} = \frac{h}{2\cos^2 \alpha}$$





6. Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.
7. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość 3.
8. W trójkąt o bokach: $a = 16$, $b = 13$ i $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków: AP , BQ i CR .
9. Dany jest równoległobok o bokach a i $2a$ oraz kącie ostrym 30° . Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.



10. Bok kwadratu $BCDE$ ma długość 6 (rysunek obok), a przekątna prostokąta $ACDF$ ma długość 10. Oblicz promień okręgu, którego łukiem jest $\widehat{BE}$.
11. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt, jeśli:

- a) dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm, a miara kąta między nimi wynosi 60° ,
b) boki trójkąta mają długości 3 cm, 5 cm i 6 cm.

12. W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg o środku O . Punkty D i E są punktami styczności okręgu oraz odpowiednio podstawy AB i ramienia BC . Uzasadnij, że trójkąty BCD i OCE są podobne. Oblicz promień okręgu, jeśli:

- a) $|AB| = 4$, $|BC| = 2\sqrt{10}$,
b) $|CD| = 3$, $|BE| : |EC| = 1 : 2$.

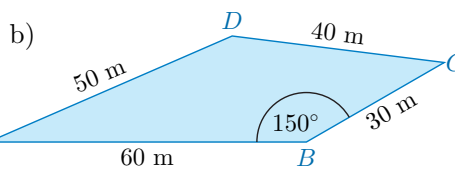
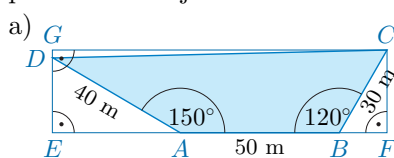
13. Oblicz pole ośmiokąta foremnego:

- a) opisanego na kole o polu równym $4\pi \text{ cm}^2$,
b) którego najkrótsza przekątna ma długość 2 cm.

14. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC , jeśli:

- a) $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$,
b) $b = 4$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

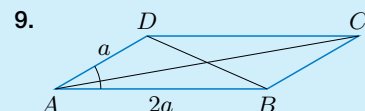
15. Działka budowlana ma kształt nieregularnego czworokąta. Wyniki pomiarów wykonanych przez geodetę są przedstawione na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej działki.



15. a) $|ED| = 20 \text{ m}$, $|EA| = 20\sqrt{3} \text{ m}$, $|BF| = 15 \text{ m}$, $|FC| = 15\sqrt{3} \text{ m}$,
 $|GD| = (15\sqrt{3} - 20) \text{ m}$, $|GC| = (65 + 20\sqrt{3}) \text{ m}$
 $P_{AED} = 200\sqrt{3} \text{ m}^2$, $P_{BFC} = \frac{225}{2}\sqrt{3} \text{ m}^2$, $P_{DGC} = (\frac{575}{2}\sqrt{3} - 200) \text{ m}^2$,
 $P_{EFCG} = (975\sqrt{3} + 900) \text{ m}^2$, $P_{ABCD} = (375\sqrt{3} + 1100) \text{ m}^2$, $P_{ABCD} \approx 1750 \text{ m}^2$
b) $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin 150^\circ = 450 \text{ m}^2$. Z twierdzenia cosinusów:
 $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos 150^\circ = 3600 + 900 - 2 \cdot 1800 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 900(5 + 2\sqrt{3})$, $|AC| = 30\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$
 $\cos \angle ADC = \frac{|AD|^2 + |DC|^2 - |AC|^2}{2|AD| \cdot |DC|} = \frac{2500 + 1600 - 900(5 + 2\sqrt{3})}{4000} = -\frac{2 + 9\sqrt{3}}{20}$
 $\sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \frac{\sqrt{153 - 36\sqrt{3}}}{20}$
 $P_{ADC} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |DC| \cdot \sin \angle ADC = 50\sqrt{153 - 36\sqrt{3}} \text{ m}^2$
 $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} \approx 926 \text{ m}^2$

6. $3\frac{1}{3} \text{ cm}$
7. $6\pi(\sqrt{2} - 1)$
8. Wprowadźmy następujące oznaczenia:
 $|AP| = |AR| = x$,
 $|BP| = |BQ| = y$,
 $|CR| = |CQ| = z$.
Wówczas:
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + z = 13 \\ y + z = 16 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$$

Zatem $|AP| = 3$, $|BQ| = 6$,
 $|CR| = 10$.



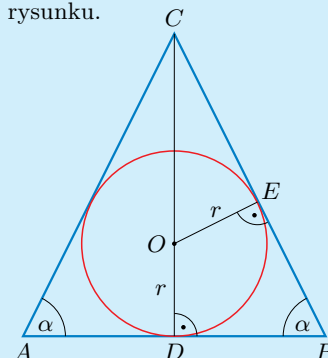
$$\begin{aligned} |DB|^2 &= a^2 + (2a)^2 + \\ &\quad - 2 \cdot a \cdot 2a \cos 30^\circ = \\ &= 5a^2 - 2\sqrt{3}a^2 \\ |DB| &= a\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \\ \angle ADC &= 150^\circ, \\ \cos 150^\circ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ |AC| &= a\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

10. Niech r – promień okręgu. Zauważmy, że $|AC| = 8$, $|AB| = 2$.

Z twierdzenia Pitagorasa:
 $(r - 2)^2 + 3^2 = r^2$
Stąd $r = 3,25$.

11. a) $2(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$ b) $\frac{2\sqrt{14}}{7} \text{ cm}$

12. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$\angle BCD = \angle OCE$ (ten sam kąt), $\angle OEC = \angle BDC = 90^\circ$
Zatem $\triangle BCD \sim \triangle OCE$ (cecha KKK).

- a) $\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$ b) $\frac{3}{4}$

13. a) $32(\sqrt{2}-1) \text{ cm}^2$ b) $4\sqrt{2} \text{ cm}^2$

14. a) $Ob = 2(9 + \sqrt{21})$
 $P = 20\sqrt{3}$
b) $Ob = 2(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})$
 $P = 4(1 + \sqrt{3})$

**Komentarz**

Po przeanalizowaniu sposobów rozwiązania tego zadania warto zaproponować uczniom, aby ułożyli plan postępowania.

Przykład

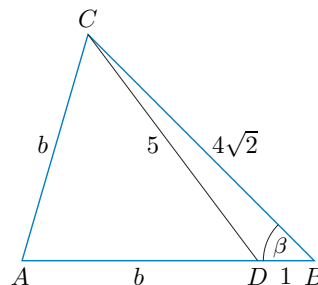
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC .

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Aby obliczyć $\cos \beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$\begin{aligned}5^2 &= (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \beta \\25 &= 33 - 8\sqrt{2} \cos \beta \\8\sqrt{2} \cos \beta &= 8 \\\cos \beta &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



Obliczamy b , korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

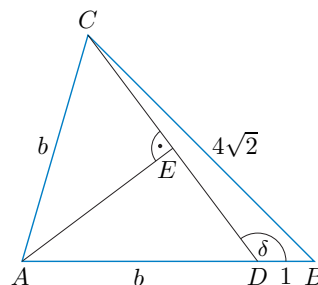
$$\begin{aligned}b^2 &= (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (b+1) \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \beta \\b^2 &= b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8 \\6b &= 25 \\b &= 4\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób

Aby obliczyć $\cos \delta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$\begin{aligned}(4\sqrt{2})^2 &= 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos \delta \\32 &= 26 - 10 \cos \delta \\10 \cos \delta &= -6 \\\cos \delta &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$



Zatem:

$$\cos \sphericalangle ADC = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta = \frac{3}{5}$$

Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD . Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos \sphericalangle ADC = \cos \sphericalangle ADE = \frac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{b}, \text{ czyli } b = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe:
A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, B. $6a^2$, C. $3\sqrt{3}a^2$, D. $6\sqrt{3}a^2$.
- Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe:
A. $0,6\pi$, B. $1,2\pi$, C. $1,8\pi$, D. $2,4\pi$.
- Kąty trójkąta równoramiennego mają miary: α , α i 4α , a jego ramię ma długość 2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:
A. $2\sqrt{3} - 3$, B. $2\sqrt{3} - 2$, C. $3\sqrt{2} - 3$, D. $3\sqrt{2} - 2$.
- Dane są trzy okręgi o środkach A , B , C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi:
A. $-\frac{1}{6}$, B. $-\frac{1}{16}$, C. $-\frac{1}{39}$, D. 0.
- W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° wpisano okrąg o średnicy 12. Podstawa tego trójkąta ma długość:
A. $6 + 4\sqrt{3}$, B. $12\sqrt{3}$, C. $24 + 12\sqrt{3}$, D. $36 + 24\sqrt{3}$.
- Sinus kąta przy podstawie trójkąta równoramiennego jest równy 0,6, a jego ramię ma długość 30 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:
A. 25 cm, B. 28 cm, C. 30 cm, D. 32 cm.
- W trójkącie ABC są dane: $\angle BAC = 120^\circ$, $|AB| = \sqrt{2} - 1$ i $|AC| = \sqrt{2} + 1$. Wskaż długość boku BC tego trójkąta.
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$
- Dany jest trójkąt o bokach: 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. Suma miar dwóch największych kątów tego trójkąta jest równa:
A. 135° , B. 150° , C. 155° , D. 165° .
- Boki równoległoboku mają długości 4 i $2 + 2\sqrt{3}$, a jego kąt rozwarty ma miarę 150° . Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość:
A. $2 + \sqrt{2}$, B. $2 + \sqrt{3}$, C. $2\sqrt{2}$, D. $2\sqrt{3}$.

- Najmniejszy kąt znajduje się naprzeciwko boku o długości 2.

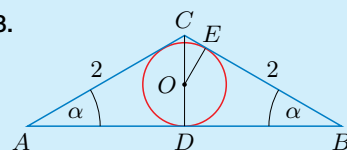
Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 30^\circ$$

Suma miar dwóch największych kątów: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

- $x^2 = 4^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot (2 + 2\sqrt{3}) \cos 30^\circ = 8$
 $x = 2\sqrt{2}$

3.



Niech r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zauważmy, że $\alpha = 30^\circ$,
 $|DB| = \sqrt{3}$, $|CD| = 1$, zatem
 $|OC| = 1 - r$.

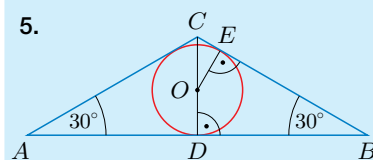
Trójkąty CDB i CEO są podobne (cecha KKK), zatem

$$\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|DB|}{|BC|}, \text{ czyli } \frac{r}{1-r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd $r = 2\sqrt{3} - 3$.

- $|AB| = 9$, $|BC| = 16$,
 $|AC| = 13$
 $16^2 = 9^2 + 13^2 - 2 \cdot 9 \cdot 13 \cos \alpha$
 $\cos \alpha = -\frac{1}{39}$

5.



$$\angle OCE = 60^\circ$$

$$|OD| = |OE| = 6$$

$$\frac{6}{|OC|} = \sin 60^\circ, \text{ czyli}$$

$$|OC| = 4\sqrt{3}, \text{ stąd}$$

$$|DC| = 6 + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{|DB|}{6 + 4\sqrt{3}} = \tan 60^\circ, \text{ czyli}$$

$$|DB| = 6\sqrt{3} + 12$$

$$\text{Zatem } |AB| = 12\sqrt{3} + 24.$$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

1. Z warunków zadania mamy:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = P$$

$$\frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot \pi (2r)^2 = 8 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = 8P$$

$$2. \pi \left(\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4} \pi = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \pi$$

3. Zauważmy, że
- $\triangle ABC$
- jest trójkątem o kątach
- 30°
- ,
- 60°
- ,
- 90°
- , gdzie
- $\angle BAC = 30^\circ$
- .
-
- Stąd
- $\angle BDC = 30^\circ$
- .

$$\angle CED = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ = 40^\circ$$

4. Z twierdzenia sinusów mamy:

$$2R = \frac{4}{\sin 150^\circ} = 8$$

Zatem $l = 8\pi$.

- 5.
- $\angle O_1PA = \angle O_2PB$

Trójkąt PBO_2 jest prostokątny, więc:

$$|PO_2|^2 = |PB|^2 + |BO_2|^2,$$

czyli $|PO_2| = 13$.

$$\text{Zatem } \sin \angle O_1PA = \frac{5}{13}.$$

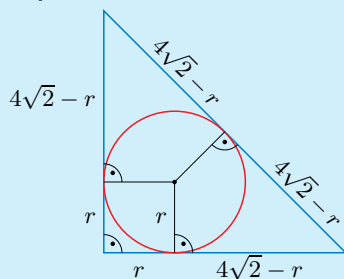
$$|PO_1| = |PO_2| - R - r =$$

$$= 8 - r$$

$$\sin \angle O_1PA = \frac{r}{8-r} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Zatem } r = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$$

6. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$4\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 8, \text{ czyli}$$

$$r = 4(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$$

Pole koła:

$$P = 16\pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$

Zadanie 1 (2 pkt)

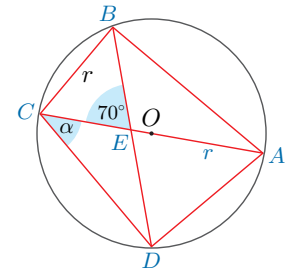
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt $\alpha < 180^\circ$ jest równe P . Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α ?

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2} + 1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r . Wyznacz kąt α .



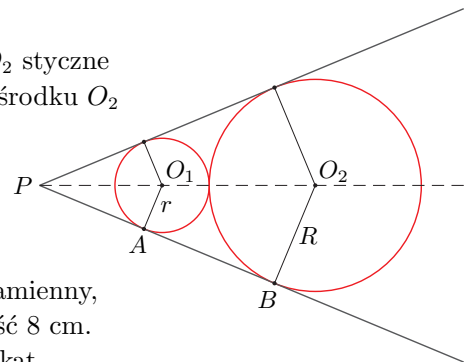
Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie ABC , jeśli $\angle ABC = 150^\circ$ oraz $|AC| = 4$.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (5 pkt)

Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta $\angle O_1PA$ oraz promień r okręgu o środku O_1 .



Zadanie 6 (4 pkt)

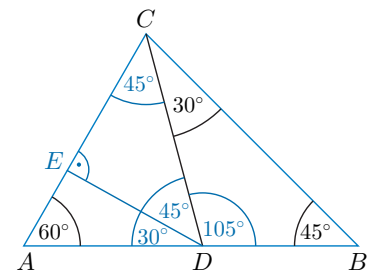
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 7 (4 pkt)

Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

Zadanie 8 (5 pkt)

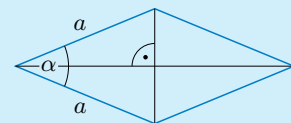
Odcinek DC na rysunku obok ma długość $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC .



$$7. (a\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ,$$

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$



$$8. |EC|\sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}, \text{ czyli } |EC| = \sqrt{3} + 1 = |ED|$$

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } |AE| = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} + 1) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ czyli } |AD| = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Obwód trójkąta } ADC: Ob = 4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

Indeks

- algorytm Hornera 99
- asymptota 109
 - pionowa 109
 - pozioma 109
- cosinus kąta 161
- cotangens kąta 161
- czworokąt wypukły 188
- długość
 - łuku okręgu 202
 - okręgu 202
- dwumian 56
 - Newtona 72
- dziedzina naturalna funkcji 120
- figura
 - osiowosymetryczna 243
 - środkowosymetryczna 245
- funkcja
 - homograficzna 117
 - wymierna 119
- funkcje trygonometryczne
 - kąta ostrego 161
 - kąta wypukłego 177
- hiperbola 109, 117
- hiperboloida 135
- iloczyn pierwiastków równania kwadratowego 48
- jednomian
 - stopnia n 56
 - zerowy 56
- jedynka trygonometryczna 171
- kąt
 - między styczną a cięciwą okręgu 215
 - środkowy w okręgu 202, 213
 - wpisany w okrąg 213, 214
- konstrukcja
 - dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg 230
 - pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg 230
 - stycznej do okręgu 212
 - sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg 230
 - wspólnej stycznej dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie 212
- krzywa łańcuchowa 29
- kwadrat 188
- liczba
 - π 202
 - pierwiastków równania kwadratowego 20
- najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 41
- największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 41
- nierówność
 - kwadratowa 30
 - wymierna 147
- obrót dookoła punktu 246
- odcinek koła (kołowy) 206
- odległość punktu od prostej 208
- okręgi
 - przecinające się 203, 209
 - rozłączne 203, 209
 - rozłączne wewnętrznie 203
 - rozłączne zewnętrznie 203, 209
 - styczne 203, 209
 - styczne wewnętrznie 203, 209
 - styczne zewnętrznie 203, 209
- oś
 - symetrii 243
 - symetrii paraboli 15
- parabola 11, 13, 23
- paraboloida obrotowa 67
- pierścień kołowy 205
- pierwiastek podwójny równania kwadratowego 20
- pierwiastki
 - równania kwadratowego 16, 20
 - wielomianu 78, 91, 94
- pierwotna trójka pitagorejska 160
- podstawowe twierdzenie algebry 73
- pole
 - koła 205
 - rombu 189
 - równoległoboku 189
 - trapezu 190
 - trójkąta 184, 185, 187
 - trójkąta opisanego na okręgu 223
 - trójkąta równobocznego 184
 - trójkąta wpisanego w okrąg 220
 - wycinka koła 205
- postać
 - iloczynowa funkcji kwadratowej 24
 - kanoniczna funkcji homograficznej 117
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 13
 - ogólna funkcji homograficznej 117
 - ogólna funkcji kwadratowej 13
- promień
 - okręgu opisanego na trójkącie równobocznym 218
 - okręgu wpisanego w trójkąt 224
 - okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny 222
 - wewnętrzny pierścienia kołowego 205
 - zewnętrzny pierścienia kołowego 205
- proporcjonalność odwrotna 108
- prostokąt 188
- punkt styczności 203, 208

- ramię
 - końcowe kąta 176
 - początkowe kąta 176
- romb 188, 189
- rozkład na czynniki liniowe funkcji kwadratowej 24
- rozwiązania równania kwadratowego 16, 20
- rozwiązanie trójkąta 168
- równanie
 - dwukwadratowe 34
 - wielomianowe 78
- równoległobok 188, 189
- różnica
 - n -tych potęg liczb rzeczywistych 70
 - sześcianów 69
- schemat Hornera 99
- sieczna
 - okręgu 208
 - paraboli 37
- sinus kąta 161
- stopień
 - iloczynu wielomianów 64
 - sumy wielomianów 59
 - wielomianu 56
- styczna
 - do okręgu 208, 209
 - do paraboli 37
- suma
 - pierwiastków równania kwadratowego 48
 - sześcianów 69
- symetria
 - osiowa 243
 - środkowa 244
- szerokość pierścienia kołowego 205
- sześcian
 - różnicy 68
 - sumy 68
- środek
 - obrotu 246
 - okręgu opisanego na trójkącie 218
 - okręgu wpisanego w trójkąt 222
 - symetrii 244, 245
- tangens kąta 161
- tożsamość trygonometryczna 171, 173
- trapez 188, 190
- trapez równoramienny 188
- trójka pitagorejska 160
- trójkąt
 - Herona 187
 - Pascala 72
- trójmian 56
- twierdzenie
 - Bézouta 88
 - cosinusów 236
 - o odcinkach stycznych do okręgu 209
 - o pierwiastkach całkowitych wielomianu 91
 - o pierwiastkach wymiernych wielomianu 94
- twierdzenie
 - o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian 87
 - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 157
 - Pitagorasa 156
 - sinusów 231
- układ równań kwadratowych 40
- wartość bezwzględna liczby 136
- wielkości odwrotnie
 - proporcjonalne 108
- wielokąt
 - foremny 227
 - wklęsły 188
 - wypukły 188
- wielomian 56
 - stopnia n 56
 - wielu zmiennych 61
 - zerowy 56
- współczynnik
 - jednomianu 56
 - kierunkowy prostej 183
 - proporcjonalności odwrotnej 108
 - wielomianu 56
- współrzędne wierzchołka paraboli 13
- wycinek koła (kołowy) 205
- wykres wielomianu 97
- wyraz wolny wielomianu 56
- wyrażenie
 - wymierne 118
 - wymierne dwóch zmiennych 148
- wyróżnik trójmianu kwadratowego 13
- wzory Viète'a 48
- wzór dwumianowy Newtona 72
- wzór Herona 187