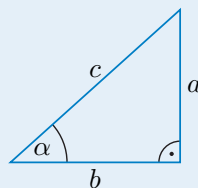




4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin \alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c \sin \alpha$.

Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65° , wykonujemy mnożenie $40 \cdot \sin 65^\circ$. Ponieważ $\sin 65^\circ \approx 0,9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.



Multiteka

- Jak duża jest Ziemia
- Geometria hiperboliczna
- Tunel na wyspie Samos
- Zjawisko paralaksy

Uczeń:

- podaje twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego,
- stosuje twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości odcinków w trójkątach prostokątnych,
- korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego,
- przeprowadza dowód twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Komentarz

Warto polecić uczniom, aby zapisali równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o przyprostokątnych k i l oraz przeciwprostokątnej m – dzięki temu uczniowie oswoją się z innymi oznaczeniami.

Ćwiczenie 1

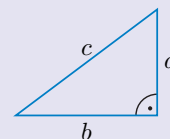
- 50
- 3
- $3\sqrt{2}$
- 4
- 4
- $\frac{\sqrt{17}}{2}$

4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia (patrz str. 193–194), tu korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

Dowód

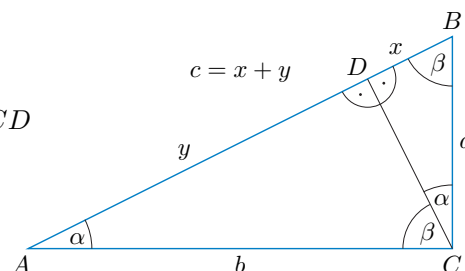
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy KKK trójkąty: CBD , ACD i ABC są podobne.

Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$
$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$
$$b^2 = cy$$



Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

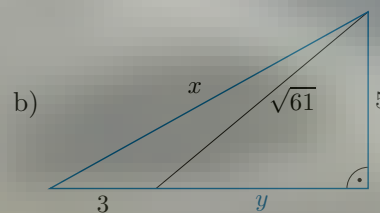
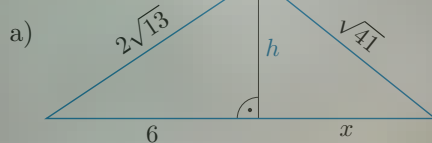
Ćwiczenie 1

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

- | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|
| a) $a = 30, b = 40$ | c) $a = 2\sqrt{2} - 1, b = 2\sqrt{2} + 1$ | e) $a = b = 2\sqrt{2}$ |
| b) $a = \sqrt{5}, b = 2$ | d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}, b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ | f) $a = \frac{1}{b} = 2$ |

Ćwiczenie 2

Oblicz x .



Ćwiczenie 2

a) $h^2 = (2\sqrt{13})^2 - 6^2$
 $h^2 = (\sqrt{41})^2 - x^2$
 $52 - 36 = 41 - x^2$
 $x = 5$

b) $y^2 = (\sqrt{61})^2 - 5^2 = 36$
 $y = 6$
 $x^2 = (3 + y)^2 + 5^2 = 106$
 $x = \sqrt{106}$

Multiteka

- Dowody twierdzenia Pitagorasa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator
testów i sprawdzianów

Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a , b , c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.

Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

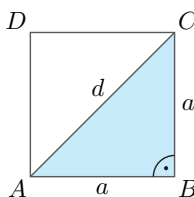
Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt o danych bokach jest trójkątem prostokątnym.

- a) 3, 4, 5 b) 5, 9, 11 c) 9, 40, 41 d) $\frac{9}{10}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$

Szczególne znaczenie mają dwa trójkąty prostokątne. Jeden z nich to trójkąt będący połową kwadratu, czyli o kątach 45° , 45° , 90° .

Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

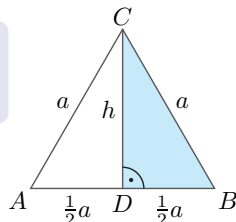


Ćwiczenie 4

- D** a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.
b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2 .

Drugi ważny trójkąt prostokątny to trójkąt będący połową trójkąta równobocznego, czyli o kątach 30° , 60° , 90° .

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ćwiczenie 5

- D** a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.
b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm.

Ćwiczenie 5

- a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

zatem $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- b) Wysokość trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6$, zatem:

$$a = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$Ob = 3a = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

Komentarz

Podczas wspólnej analizy dowodu warto polecić uczniom wykonanie odpowiednich rysunków pomocniczych.

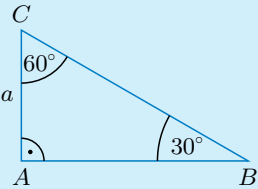
Ćwiczenie 3

- a), c), d) jest
b) nie jest

Ćwiczenie 4

- a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa: $d^2 = a^2 + a^2$, zatem $d = a\sqrt{2}$.
b) $12(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$

Odpowiedzi do zadań

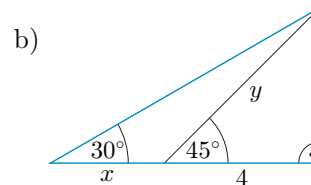
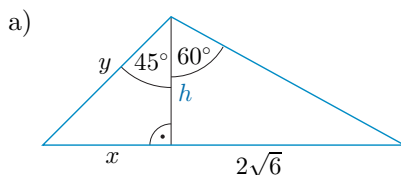
- Długości boków trójkąta:
 $a, a, a\sqrt{2}$
 $2a + a\sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{2})$
 $a = 3\sqrt{2}$
 Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = 9$
 - Niech a będzie długością przyprostokątnej, wówczas:
 $a\sqrt{2} = a + 1 + \sqrt{2}$
 $a = 3 + 2\sqrt{2}$
 Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = \frac{17}{2} + 6\sqrt{2}$
- $h\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, czyli $h = 2\sqrt{2}$
 $x = h = 2\sqrt{2}$
 $y = x\sqrt{2} = 4$
 - $y = 4\sqrt{2}$
 $x + 4 = 4\sqrt{3}$
 $x = 4(\sqrt{3} - 1)$
- Jest to trójkąt o kątach ostrych 30° i 60° .


Jeżeli $|AC| = a$, to
 $|CB| = 2a$, $|AB| = a\sqrt{3}$.
 Z warunków zadania:
 $a\sqrt{3} + 2a = 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$
 $a = 2(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$
 $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = 24(2\sqrt{3} - 3)$
- $|BD| = |CD|\sqrt{3}$
 $3\sqrt{3} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |CD| = \frac{|BD|^2}{2\sqrt{3}}$
 $|BD| = 3\sqrt{2}$
 $Ob = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 3(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$
- $|AC|^2 = x^2 + 16$
 $|BC|^2 = (10 - x)^2 + 16$
 $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$
 $x^2 - 10x + 16 = 0, 0 < x < 5$
 $x = 2$
 $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 10 = 2(5 + 3\sqrt{5})$
 - $16 + (x + 3)^2 = 52, x > 0$
 $(x + 3)^2 = 36$
 $x = 3$
 $|AC| = 5$
 $Ob = 8 + 2\sqrt{13} = 2(4 + \sqrt{13})$
- $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm
 - $3\sqrt{13}$ cm, $3\sqrt{7}$ cm

Zadania

- Oblicz pole równoramiennego trójkąta prostokątnego, którego:
 - obwód jest równy $6(1 + \sqrt{2})$,
 - przeciwprostokątna jest o $1 + \sqrt{2}$ dłuższa od przyprostokątnej.

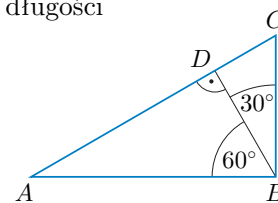
- Oblicz x i y .



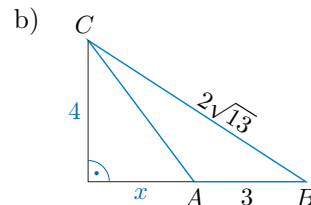
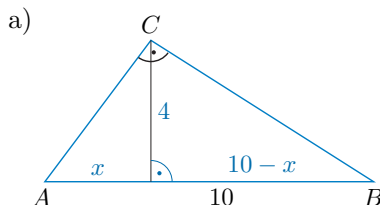
- Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość 15 cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120° . Oblicz obwód tego trójkąta.
 - Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45° , a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

- Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest dwukrotnie większy od drugiego kąta, a suma długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$.

- Oblicz obwód trójkąta ABD (rysunek obok), jeśli pole trójkąta BCD jest równe $3\sqrt{3}$.

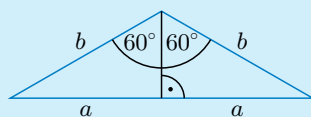


- Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość 4. Oblicz obwód tego trójkąta.



- Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.
 - Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

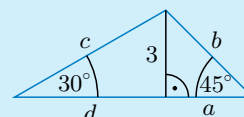


$$2a = 15 \text{ cm oraz } a = b\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ zatem:}$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}a = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$Ob = 2a + 2b = 5(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$$

- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$a = 3 \text{ cm}, b = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm},$$

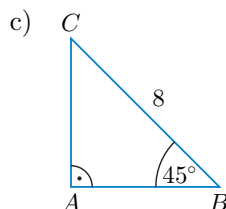
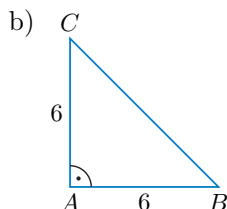
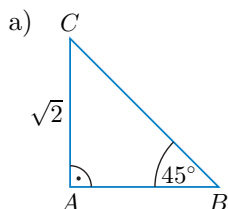
$$c = 2 \cdot 3 = 6 \text{ [cm]}, d = c\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$Ob = 3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

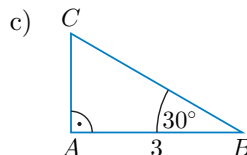
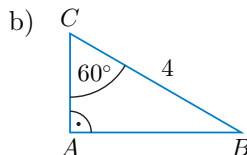
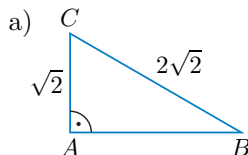
8. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
 b) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.
9. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

Powtórzenie

10. Oblicz obwód trójkąta ABC .



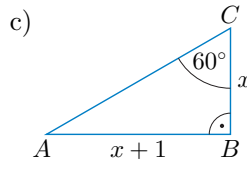
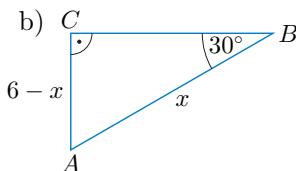
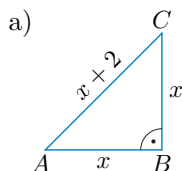
11. Oblicz obwód trójkąta ABC .



12. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

- a) jego obwód jest równy $6 + 2\sqrt{3}$,
 b) różnica długości jego przyprostokątnych jest równa $12 - 4\sqrt{3}$.

13. Oblicz obwód trójkąta ABC .



14. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 60° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

14. Długość krótszej przyprostokątnej: $6\sqrt{3}$

Niech $x, y > 0$ będą długościami środkowych.

Wówczas:

$$(6\sqrt{3})^2 + 9^2 = x^2$$

$$x = 3\sqrt{21}$$

$$(3\sqrt{3})^2 + 18^2 = y^2$$

$$y = 3\sqrt{39}$$

8. Niech $x, y > 0$ będą przyprostokątnymi trójkąta.

a) $x + y + 13 = 30$,

czyli $y = 17 - x$

$$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$$

$$x = 5 \text{ lub } x = 12$$

Przyprostokątne trójkąta:

5 cm, 12 cm

b) $y = \frac{x+2}{2}$

$$x^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = 4$$

$$x = 1,2$$

$$y = 1,6$$

$$Ob = 4,8 \text{ cm}$$

9. $x, x+2$ – długości przekątnych rombu

Długość boku rombu: $\sqrt{41}$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = 41$$

$$x = 8$$

Długości przekątnych:

8 cm, 10 cm

10. a) $2(\sqrt{2} + 1)$

b) $6(\sqrt{2} + 2)$

c) $8(\sqrt{2} + 1)$

11. a) $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

b) $2(\sqrt{3} + 3)$

c) $3(\sqrt{3} + 1)$

12. Jest to trójkąt o kątach ostrych 30° i 60° , stąd:

a) $x + x\sqrt{3} + 2x = 6 + 2\sqrt{3}$,
 czyli $x = 2$

Zatem $P = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

b) $x\sqrt{3} - x = 12 - 4\sqrt{3}$,

czyli $x = 4\sqrt{3}$

Zatem $P = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

13. a) $x + 2 = x\sqrt{2}$

$$x = 2\sqrt{2} + 2$$

$$Ob = 2(3\sqrt{2} + 4)$$

b) $x = 2(6 - x)$

$$x = 4$$

$$Ob = 2(\sqrt{3} + 3)$$

c) $x + 1 = x\sqrt{3}$

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$Ob = 2\sqrt{3} + 3$$

Trójki pitagorejskie

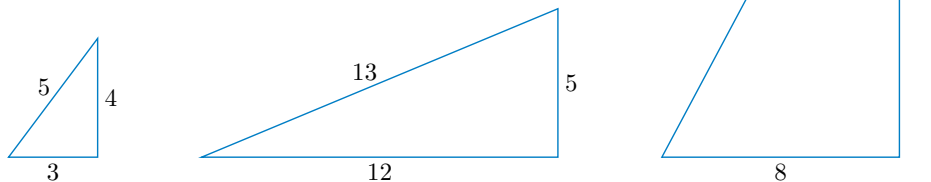
Liczby naturalne: a, b, c , wyrażające długości boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**.

Taką trójkę tworzą na przykład liczby: 3, 4, 5, gdyż $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Zauważ, że trójką pitagorejską jest też dowolna trójka liczb postaci: $3k, 4k, 5k$, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, np.:

- dla $k = 2$ otrzymujemy: 6, 8, 10,
- dla $k = 3$ otrzymujemy: 9, 12, 15.

Trójkę pitagorejską a, b, c nazywamy **pierwotną**, gdy liczby a, b, c nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.



Jest 16 pierwotnych trójek pitagorejskich, w których największa liczba jest mniejsza od 100:

3, 4, 5	20, 21, 29	11, 60, 61	13, 84, 85
5, 12, 13	12, 35, 37	16, 63, 65	36, 77, 85
8, 15, 17	9, 40, 41	33, 56, 65	39, 80, 89
7, 24, 25	28, 45, 53	48, 55, 73	65, 72, 97

Twierdzenie

Jeśli x i y są dodatnimi liczbami naturalnymi oraz $x > y$, to liczby:

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2$$

tworzą trójkę pitagorejską.

Dowód

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Trójek pitagorejskich jest nieskończenie wiele. Każdą trójkę pitagorejską można otrzymać, korzystając ze wzorów podanych w powyższym twierdzeniu lub jest ona wielokrotnością liczb tej postaci.

- Korzystając z podanych w twierdzeniu wzorów, wyznacz trójki pitagorejskie dla:

a) $x = 4, y = 3$, b) $x = 5, y = 2$, c) $x = 6, y = 1$, d) $x = 3, y = 2$.

Odpowiedzi do zadań

- 7, 24, 25
 - 20, 21, 29
 - 12, 35, 37
 - 5, 12, 13

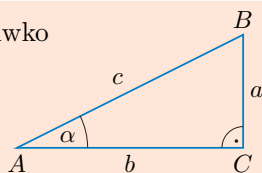
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

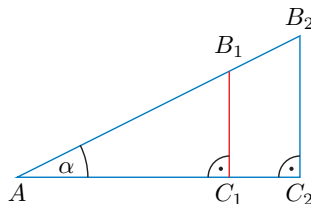
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α .

Rozpatruje się też stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta. Jest to **cotangens** kąta: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Zwróć uwagę, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α . Z podobieństwa trójkątów: AB_1C_1 , AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

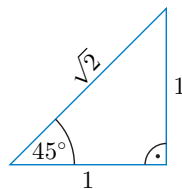
$$\sin \alpha < 1 \text{ i } \cos \alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° (rysunek obok).

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



Uczeń:

- podaje definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym,
- podaje wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60° ,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w bardziej złożonych sytuacjach,
- dowodzi zależności między wartościami funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.

Komentarz

Warto polecić uczniom, aby zapisali definicje funkcji trygonometrycznych dla trójkąta o przyprostokątnych k i l oraz przeciwprostokątnej m – dzięki temu uczniowie oswoją się z innymi oznaczeniami.

Ćwiczenie 1

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ oraz

$a < c$ i $b < c$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} < \frac{c}{c} = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} < \frac{c}{c} = 1$$

Multiteka

- Jednostki miar kątów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Komentarz

Po tym ćwiczeniu warto zaproponować uczniom konkurs na odgadywanie miary kąta α . Nauczyciel podaje wartości funkcji trygonometrycznych, a uczniowie podają miary kątów. Wygrywa uczeń, który poda miarę kąta z największą dokładnością.

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}, \\ \cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{8}{17},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{15}{17},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \operatorname{tg} \beta = \frac{15}{8}$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{3},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 4

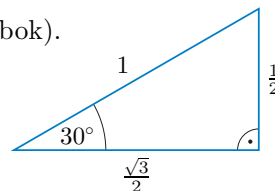
Zauważmy, że $\cos \alpha = |OB_1|$,
 $\cos \beta = |OB_2|$ oraz
 $|OB_1| > |OB_2|$,
zatem $\cos \alpha > \cos \beta$.

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° (rysunek obok).

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ćwiczenie 2

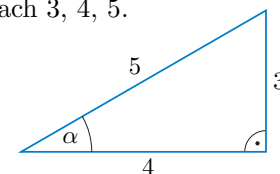
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° .

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5.

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$



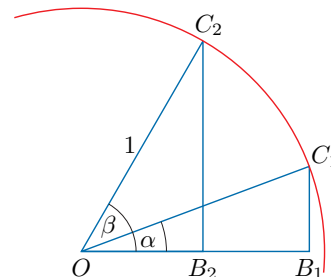
Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a , b , c .

$$\text{a) } a = 5, b = 12, c = 13 \quad \text{b) } a = 8, b = 15, c = 17 \quad \text{c) } a = \frac{1}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{3}{2}$$

Dla kątów ostrych α i β z nierówności $\alpha < \beta$ wynika nierówność $\sin \alpha < \sin \beta$. Aby to uzasadnić, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 i OB_2C_2 (rysunek obok). Punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1.

Zauważ, że $\sin \alpha = |B_1C_1|$, $\sin \beta = |B_2C_2|$ oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin \alpha < \sin \beta$.



D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos \alpha > \cos \beta$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach długości:

$$\text{a) } 6, 8, 10,$$

$$\text{c) } 1, 4, \sqrt{17},$$

$$\text{e) } \sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 5,$$

$$\text{b) } 7, 24, 25,$$

$$\text{d) } 1, 4, \sqrt{15},$$

$$\text{f) } \sqrt{2}, \sqrt{6}, 2.$$

Odpowiedzi do zadań

$$1. \text{ a) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{7}{25},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{24}{25},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}, \operatorname{tg} \beta = \frac{24}{7}$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{17}}{17},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4\sqrt{17}}{17},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}, \operatorname{tg} \beta = 4$$

$$\text{d) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{4},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{15}$$

$$\text{e) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = 2$$

$$\text{f) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}$$

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

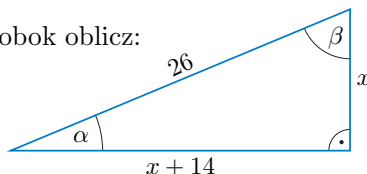
Czy wiesz, że...

Skrót *sin* pochodzi od łacińskiego słowa *sinus* – zagięcie, zatoka;

cos to skrót od *complementi sinus*, czyli sinus dopełnienia;

tg – skrót słowa *tangens* oznaczającego styczną.

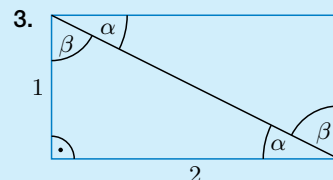
3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 dm i 2 dm dzieli prostokąt na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.
4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:
a) długości przyprostokątnych,
b) wartości: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ oraz $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$.
5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.
6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 10 cm i 9 cm. Jedna z przekątnych dzieli równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.
7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego:
a) przekątną, b) ramieniem.



Powtórzenie

8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .
a) $a = 2$, $b = 6$ b) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ c) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$
9. Dany jest prostokąt $ABCD$ o obwodzie równym 10 cm i krótszym boku BC długości 2 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC .

8. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = 3$
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$
9. $\sin \sphericalangle BAC = \cos \sphericalangle BCA = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \sphericalangle BAC = \sin \sphericalangle BCA = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle BCA = \frac{3}{2}$



Przekątna prostokąta ma długość $\sqrt{5}$ dm.

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = 2$$

4. a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$(x + 14)^2 + x^2 = 26^2$$

$$x^2 + 14x - 240 = 0$$

$$\Delta = 1156, \sqrt{\Delta} = 34$$

$$x = \frac{-14 - 34}{2} < 0 \text{ lub}$$

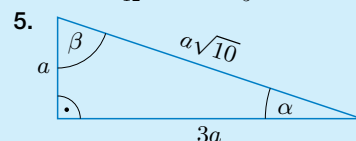
$$x = \frac{-14 + 34}{2} = 10$$

Zatem długości przyprostokątnych wynoszą: 10, 24.

$$\text{b) } \sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \beta = 3$$

6. $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{9}{10}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$

7. a) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$,
 $\cos \alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8}$
b) $\sin \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$,
 $\cos \beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2}$

Uczeń:

- odczytuje z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego lub miarę kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznych,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania zadań praktycznych.

Komentarz

Rozwiązując trójkąty prostokątne, korzystamy w tym podręczniku z tablic wartości funkcji trygonometrycznych umieszczonych na końcu. Jeżeli jest taka potrzeba, długości boków zaokrąglamy do dwóch miejsc po przecinku. Należy pamiętać, że wyniki mogą się różnić w zależności od tego, czy korzystamy w obliczeniach z funkcji trygonometrycznych, czy z twierdzenia Pitagorasa.

Ćwiczenie 1

h – wysokość budynku

a) $\frac{h}{5} = \operatorname{tg} 58^\circ \approx 1,6003$,

czyli $h \approx 8$ m

b) $\frac{h}{12} = \operatorname{tg} 39^\circ \approx 0,8098$,

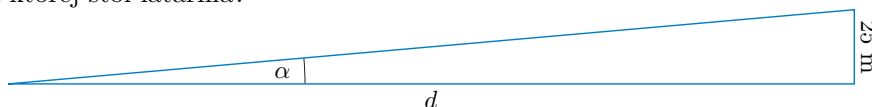
czyli $h \approx 9,72$ m

4.3. Trygonometria – zastosowania

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 295. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

Przykład 1

Wierchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0,0875$.

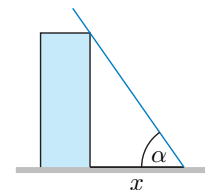
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{25}{0,0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α .

a) $x = 5$ m, $\alpha = 58^\circ$

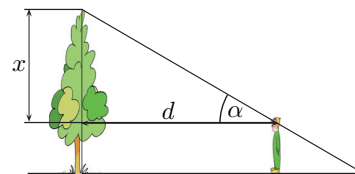
b) $x = 12$ m, $\alpha = 39^\circ$



Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jak wysokie jest drzewo?

$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$



Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0,5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0,5543 \approx 36$ [m].

Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1,5 = 37,5$ [m].

Ćwiczenie 2

Przyjmij, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią i oblicz wysokość drzewa, jeśli:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m,

b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Ćwiczenie 2

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w przykładzie 2.

a) $\frac{x}{22} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0,8391$, czyli $x \approx 18,46$ m

Wysokość drzewa: $h \approx 18,46 + 1,5 = 19,96$ [m]

b) $\frac{x}{100} = \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0,2493$, czyli $x \approx 24,93$ m

Wysokość drzewa: $h \approx 24,93 + 1,5 = 26,43$ [m]

Multiteka

- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie wysokości obiektów
- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie położenia statku

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.3

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Przekątna prostokątnej działki budowlanej ma długość 30 m i tworzy z krótszym bokiem działki kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,6$. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na jej ogrodzenie, jeżeli na bramę wjazdową należy zostawić 3 m?

Obliczamy długość jednego boku działki:

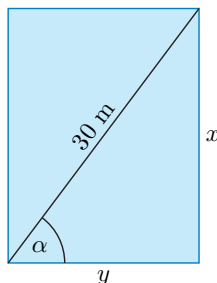
$$\frac{y}{30} = \cos \alpha = 0,6, \text{ czyli } y = 30 \cdot 0,6 = 18 \text{ [m]}.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 30^2 - y^2 = 900 - 324 = 576$$

$$x = \sqrt{576} = 24 \text{ [m]}$$

Zatem obwód działki: $2x + 2y = 48 + 36 = 84 \text{ [m]}$,
czyli potrzeba $84 - 3 = 81 \text{ [m]}$ siatki.



Ćwiczenie 3

Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α .

a) $d = 15$, $\cos \alpha = \frac{1}{5}$

b) $d = 8$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Ćwiczenie 4

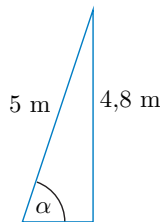
Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), podaj przybliżoną miarę kąta α , dla którego:

a) $\sin \alpha = 0,4067$, b) $\sin \alpha = 0,4226$, c) $\tan \alpha = 0,5735$, d) $\cos \alpha = 0,9200$.

Przykład 4

Drabinę długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?

$$\sin \alpha = \frac{4,8}{5} = 0,96. \text{ Z tablic odczytujemy: } \alpha \approx 74^\circ.$$



Ćwiczenie 5

Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

b) 4,5 m, jeżeli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Ćwiczenie 3

a) $12\sqrt{6} + 6$

b) $4\sqrt{15} + 4$

Ćwiczenie 4

a) $\alpha \approx 24^\circ$

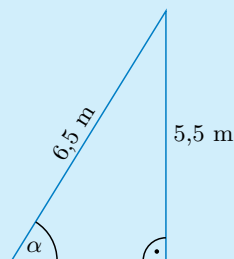
b) $\alpha \approx 25^\circ$

c) $\alpha \approx 30^\circ$

d) $\alpha \approx 23^\circ$

Ćwiczenie 5

a)



$$\sin \alpha = \frac{5,5}{6,5} \approx 0,8462$$
$$\alpha \approx 58^\circ$$

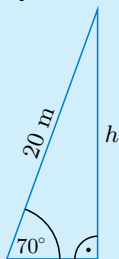
b)



$$\cos \alpha = \frac{1}{4,5} \approx 0,2222$$
$$\alpha \approx 77^\circ$$

Odpowiedzi do zadań

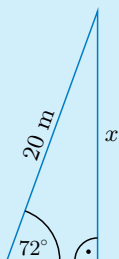
- około 27,13 m
- około 29,79 m
- drzewo: około 37,3 m,
cień: około 13,58 m
- Oznaczmy wysokość, na jakiej znajduje się latawiec, przez h .



$$\frac{h}{20} = \sin 70^\circ$$

$$h \approx 20 \cdot 0,9397 \approx 18,79 \text{ [m]}$$

- około 6°
 - około 17°
 - około $26,5^\circ$
 - 45°
- około 5,2%, spełnia
 - około 7%, spełnia
 - około 8,8%, nie spełnia
-



Oznaczmy wysokość, na jaką sięgnie drabina, przez h .

$$\frac{x}{20} = \sin 72^\circ \approx 0,9511$$

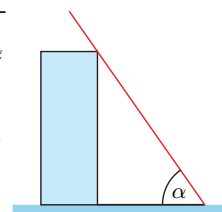
czyli $x \approx 19,02$ m.

$$\text{Zatem } h \approx 19,02 + 2,4 = 21,42 \text{ [m].}$$

- około $41,5^\circ$, $41,5^\circ$, 97°

Zadania

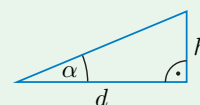
- Budynek (rysunek obok) rzuca cień długości 19 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt $\alpha = 55^\circ$. Oblicz wysokość tego budynku.
- Oblicz długość cienia rzucanego przez budynek o wysokości 25 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 40° .
- Czubek drzewa widać z odległości 80 m pod kątem 25° (z poziomu ziemi). Jaka jest wysokość drzewa? Jaka jest długość cienia rzucanego przez drzewo, jeśli promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 70° ?
- Naciągnięty sznurek długości 20 m, na którego końcu zamocowany jest latawiec, tworzy z poziomem kąt 70° . Jak wysoko nad ziemią znajduje się latawiec?



Nachylenie drogi jest zwykle podawane w procentach:

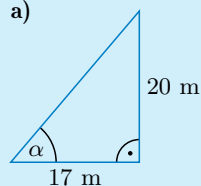
$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$

Zauważ, że $\frac{h}{d} = \operatorname{tg} \alpha$.



- Wyznacz kąt α (rysunek powyżej), jeśli nachylenie drogi jest równe:
 - 10%,
 - 30%,
 - 50%,
 - 100%.
- Podjazd dla wózków jest nachylony do poziomu pod kątem α . Wyraż w procentach nachylenie tego podjazdu. Czy spełnia on wymóg, że nachylenie podjazdu ma być mniejsze od 8%?
 - $\alpha = 3^\circ$
 - $\alpha = 4^\circ$
 - $\alpha = 5^\circ$
- Drabina wozu strażackiego może być rozsunęta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72° . Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?
- Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m?
 - Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt 54° . Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?
- Przekrój poprzeczny strychu jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 9 m i ramionach długości 6 m. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

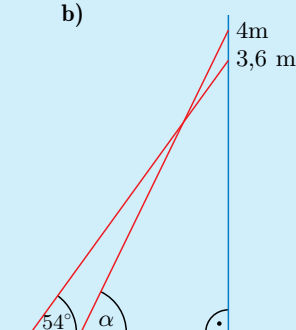
8. a)



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{17} \approx 1,1765$$

$$\alpha \approx 50^\circ$$

b)



Niech d oznacza długość drabiny.

$$\frac{3,6}{d} = \sin 54^\circ$$

czyli:

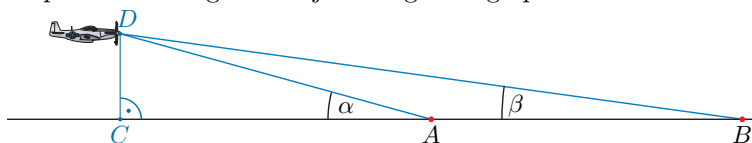
$$d = \frac{3,6}{\sin 54^\circ}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{d} = \frac{4 \sin 54^\circ}{3,6} \approx$$

$$\approx \frac{10}{9} \cdot 0,8090 \approx 0,8989$$

$$\alpha \approx 64^\circ$$

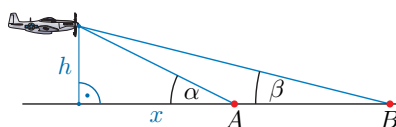
10. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10^\circ$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



11. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4° . Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

12. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaka wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

13. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 8^\circ$. Na jakiej wysokości leci samolot?

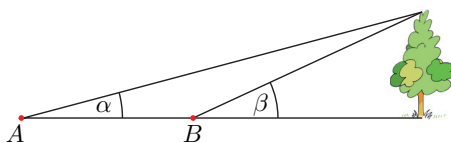


14. Wierchołek komina widać z punktu A pod kątem 26° , a z punktu B pod kątem 40° . Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Komin ma wysokość 20 m. Jaka jest odległość między punktami A i B? Rozpatrz dwa przypadki (pomiń grubość komina).

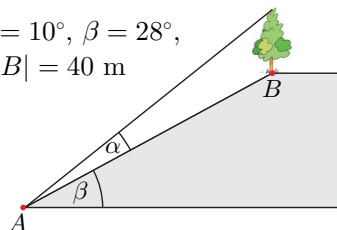
Powtórzenie

15. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli budynek o wysokości 30 m rzuca cień długości: a) 20 m, b) 30 m, c) 60 m?
16. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53° ?
17. Oblicz wysokość drzewa.

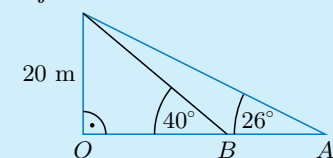
a) $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 25^\circ$,
 $|AB| = 20$ m



b) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 28^\circ$,
 $|AB| = 40$ m



14. Podstawę komina oznaczmy przez O.
 1° Punkty A i B znajdują się po tej samej stronie komina.



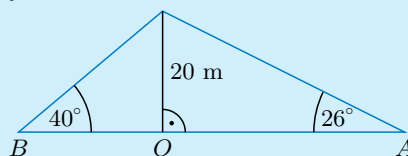
$$\frac{20}{|OB|} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0,8391$$

$$\text{zatem } |OB| \approx 23,84 \text{ m}$$

$$\frac{20}{|OB| + |AB|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0,4877$$

$$\text{czyli } |AB| \approx 17,17 \text{ m}$$

- 2° Punkty A i B znajdują się po przeciwnych stronach komina.



$$\text{Jak w przypadku 1° mamy } |OB| \approx 23,84 \text{ m.}$$

$$\frac{20}{|OA|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0,4877, \text{ czyli } |OA| \approx 41 \text{ m}$$

$$\text{Stąd } |AB| = |OA| + |OB| \approx 64,84 \text{ m.}$$

10. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{50}{|CA|}$$

zatem:

$$|CA| \approx \frac{50}{0,5774} \approx 86,6$$

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{50}{|AB| + |CA|}$$

zatem:

$$|AB| + |CA| \approx \frac{50}{0,1763} \approx$$

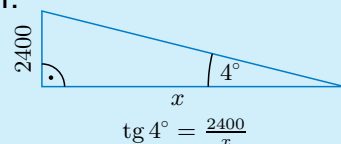
$$\approx 283,6$$

$$|AB| \approx 283,6 - 86,6 =$$

$$= 197$$

Długość pasa startowego wynosi około 197 m.

- 11.



$$\operatorname{tg} 4^\circ = \frac{2400}{x}$$

zatem:

$$x \approx \frac{2400}{0,0699} \approx 34334,8$$

Powinien rozpocząć ten manewr około 34,33 km od początku pasa startowego.

- 12.



Obliczamy drogę, jaką pokona samolot: $v = \frac{s}{t}$, czyli $s = 80 \cdot 120 = 9600$

Obliczamy wysokość, jaką osiągnie samolot:

$$\frac{h}{s} = \sin 15^\circ \approx 0,2588, \text{ czyli}$$

$$h \approx 2484,48 \text{ m}$$

13. około 91,53 m

15. a) około 56°

- b) 45°

- c) około $26,5^\circ$

16. $6 \sin 73^\circ - 6 \sin 53^\circ \approx 0,95$ [m]

17. a) około 12,59 m

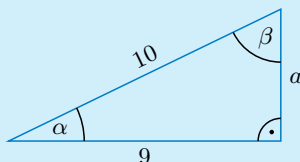
- b) około 8,81 m

Uczeń:

- rozwiązuje trójkąty prostokątne,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w trójkątach i czworokątach.

Ćwiczenie 1

a)

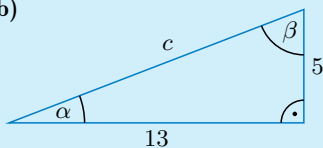


$$a = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19} \text{ [cm]}$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{10}, \text{ czyli}$$

$$\alpha \approx 26^\circ, \beta \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$$

b)

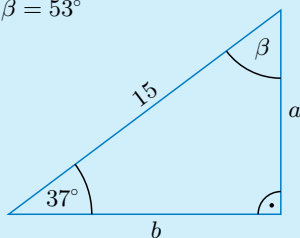


$$c = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194} \text{ [cm]}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{13} \approx 0,3846, \text{ czyli}$$

$$\alpha \approx 21^\circ, \beta \approx 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$$

$$\text{c) } \beta = 53^\circ$$



$$a = 15 \sin 37^\circ \approx 9,03 \text{ [cm]},$$

$$b = 15 \sin 53^\circ \approx 11,98 \text{ [cm]},$$

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i wyznaczenie miar jego trzech kątów.

Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

- długości dowolnych dwóch boków
- lub
- długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

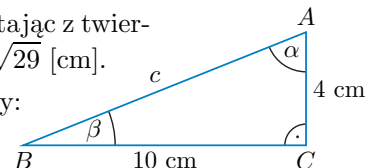
Przykład 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane długości jego przyprostokątnych: 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$.

$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{10} = 0,4$. Z tablic (str. 295) odczytujemy:

$\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.



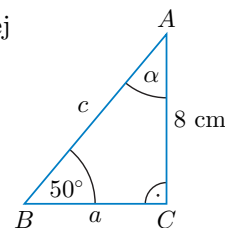
Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 50° jest równa 8 cm.

$$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0,766, \text{ stąd } c \approx 10,44 \text{ cm.}$$

$$\frac{8}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1,1918, \text{ stąd } a \approx 6,71 \text{ cm.}$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli:

- dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
- długości przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
- przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37° ,
- długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

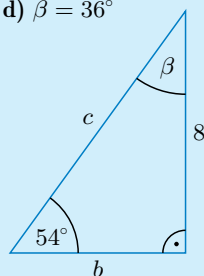
1 **minuta** (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.

1 **sekunda** (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.

Na przykład $24,5^\circ = 24^\circ 30'$.

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 60' \\ 1' &= 60'' \\ 1^\circ &= 3600'' \end{aligned}$$

d) $\beta = 36^\circ$



$$c = \frac{8}{\sin 54^\circ} \approx 9,89 \text{ [cm]},$$

$$b \approx \sqrt{(9,9)^2 - 8^2} = \sqrt{34,01} \approx 5,81 \text{ [cm]}$$

Przykład 3

Wyraż w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta 45° .

$$\frac{45^\circ}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

Ćwiczenie 2

Wyraż w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

- a) 360° , b) 4° , c) 15° , d) 12° , e) 42° .

Przykład 4

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC .

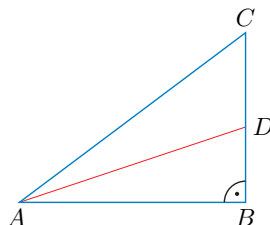
Oblicz miary kątów trójkąta ADC , jeśli $|AB| = 8$, $|BC| = 6$.

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \frac{6}{8} = 0,75, \text{ czyli } \sphericalangle BAC \approx 37^\circ$$

$$\text{Zatem: } \sphericalangle CAD \approx \frac{1}{2} \cdot 37^\circ = 18^\circ 30'$$

$$\sphericalangle ACD \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

$$\sphericalangle ADC \approx 180^\circ - 18^\circ 30' - 53^\circ = 108^\circ 30'$$



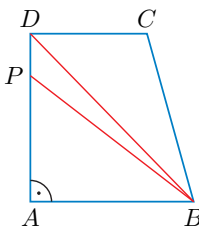
Ćwiczenie 3

W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku A kąt BCA ma miarę 55° , a $|CB| = 10$. Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD , jeśli punkt D należy do boku AB oraz odcinek CD jest:

- a) zawarty w dwusiecznej kąta BCA , b) środkową trójkąta ABC .

Zadania

- W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43^\circ 46' 25''$, a kąt ABC – miarę $73^\circ 42' 10''$.
 - Wyznacz miary kątów trójkąta BCD .
 - Wyznacz miary kątów trójkąta ABP , jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC .
- Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.
 - 4 cm, 6 cm b) 1 cm, 7 cm c) 8 cm, 10 cm
- Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Rozwiąż ten trójkąt, jeśli wiadomo, że:
 - $\sphericalangle CAB = 34^\circ$, $|CB| = 6$, b) $\sphericalangle CBA = 66^\circ$, $|AB| = 10$.



Odpowiedzi do zadań

- $\sphericalangle BCD = 106^\circ 17' 50''$, $\sphericalangle DBC = 27^\circ 28' 35''$, $\sphericalangle BDC = 46^\circ 13' 35''$
 - $\sphericalangle PAB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABP = 36^\circ 51' 5''$, $\sphericalangle BPA = 53^\circ 8' 55''$
- $2\sqrt{13}$ cm, około 34° , około 56°
 - $5\sqrt{2}$ cm, około 8° , około 82°
 - $2\sqrt{41}$ cm, około 39° , około 51°
- $\sphericalangle ABC = 56^\circ$
 $|AC| = \frac{6}{\operatorname{tg} 34^\circ} \approx 8,9$
 $|AB| = \frac{6}{\sin 34^\circ} \approx 10,73$
 - $\sphericalangle BAC = 24^\circ$
 $|AC| = 10 \sin 66^\circ \approx 9,14$
 $|BC| = 10 \cos 66^\circ \approx 4,07$

Ćwiczenie 2

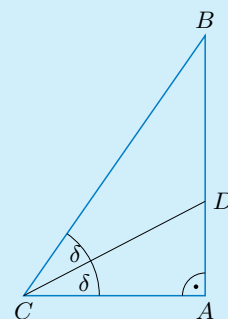
- a) $3^\circ 36'$ b) $2' 24''$ c) $9'$
d) $7' 12''$ e) $25' 12''$

Ćwiczenie 3

$$\frac{|AB|}{10} = \sin 55^\circ \approx 0,8192, \text{ czyli } |AB| \approx 8,192$$

$$\frac{|AC|}{10} = \cos 55^\circ \approx 0,5736, \text{ czyli } |AC| \approx 5,736$$

a)



$$\delta = 27,5^\circ, \frac{|AC|}{|CD|} = \cos 27,5^\circ$$

$$|CD| \approx \frac{5,736}{0,887} = 6,47$$

Kąty: $27^\circ 30'$, 35° , $117^\circ 30'$

b)



$$|CD| = \sqrt{|AC|^2 + \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} \approx 7,05$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ADC = \frac{|AC|}{\frac{1}{2}|AB|} \approx 1,4$$

$$\sphericalangle ADC \approx 54^\circ,$$

$$\text{czyli } \sphericalangle BDC \approx 126^\circ$$

Kąty: 35° , około: 126° , 19°

4. a) Długość podstawy:
 $a = 2 \cdot 4 \cos 37^\circ \approx 6,3888$

Wysokość:

$$h = 4 \sin 37^\circ \approx 2,4072$$

$$Ob \approx 14,39, P \approx 7,69$$

- b) Długość ramienia:

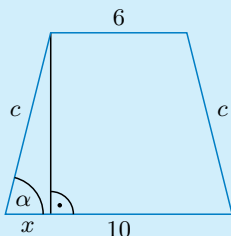
$$b = \frac{5}{\sin 35^\circ} \approx 8,7169$$

Wysokość:

$$h = \frac{5}{\tan 35^\circ} \approx 7,1408$$

$$Ob \approx 27,43, P \approx 35,7$$

5. a)



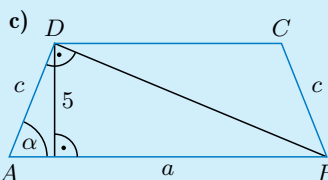
Obliczamy długość ramienia c : $6 + 10 + 2c = 32$, zatem $c = 8$ dm.

$$\cos \alpha = \frac{x}{c} = \frac{2}{8} = 0,25,$$

zatem $\alpha \approx 75^\circ 30'$.

Drugi kąt trapezu ma miarę około: $180^\circ - 75^\circ 30' = 104^\circ 30'$.

$$b) \tan \alpha = \frac{8}{6} \approx 1,333, \alpha \approx 53^\circ$$



$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5a = \frac{1}{2} \cdot 13c$$

$$\text{czyli } \frac{c}{a} = \frac{5}{13} = \cos \alpha,$$

zatem $\alpha \approx 67^\circ$.

Drugi kąt trapezu ma miarę około: $180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

6. $|AB| \approx 20,88, |AD| \approx 8,09, \angle DCA \approx 28^\circ$
 7. 90° , około 53° , około $108^\circ 30'$, około $108^\circ 30'$
 8. około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$ lub około 41° , około 139°

4. Oblicz obwód i pole trójkąta równoramiennego:

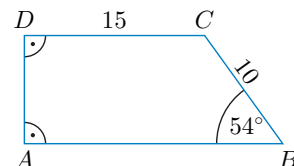
- a) o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie 37° ,
 b) o podstawie długości 10 i kącie między ramionami 70° .

5. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

- b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.

- c) W trapezie równoramiennym przekątna o długości 13 cm tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów trapezu, jeśli jego wysokość jest równa 5 cm.

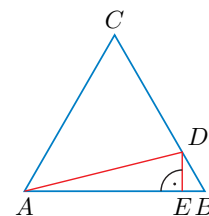
6. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).



7. Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.

8. Wyznacz kąty rombu, jeśli wysokość poprowadzona do jego boku podzieliła go w stosunku 1 : 3.

9. W trójkącie równobocznym o boku 12 na boku CB obrano taki punkt D , że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED . Rozwiąż trójkąt ABD .



Powtórzenie

10. Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości:

- a) 5, 12, b) 8, 15, c) 12, 16.

11. Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość jego:

- a) przeciwprostokątnej jest równa 12 cm, a przyprostokątnej – 10 cm,
 b) przeciwprostokątnej jest równa 7 cm, a jeden z kątów ma miarę 43° ,
 c) przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 26° jest równa 12,5 cm,
 d) przyprostokątnej leżącej przy kącie 69° jest równa 15 cm.

12. W równoległoboku o bokach długości 10 cm i 30 cm krótsza przekątna tworzy z jednym bokiem kąt 90° . Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

9. Niech $\alpha = \angle DAE$. $|BD| = 3$.

$$\sin \angle DBE = \frac{|ED|}{|BD|}, \text{ czyli } |ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$|EB| = 3 \sin 30^\circ = \frac{3}{2}, \text{ czyli } |AE| = 10\frac{1}{2}.$$

Wówczas:

$$|AD|^2 = (10\frac{1}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 = (3\sqrt{13})^2$$

$$|AD| = 3\sqrt{13}$$

Boki trójkąta ABD mają długości: 12, 3, $3\sqrt{13}$.

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{10\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0,2474, \text{ czyli } \alpha \approx 14^\circ.$$

Zatem kąty trójkąta ABD mają miary: 60° , około 14° , około 106° .

10. a) 13, około $22^\circ 30'$, około $67^\circ 30'$

- b) 17, około 28° , około 62°

- c) 20, około 37° , około 53°

11. a) $2\sqrt{11}$ cm, około $56^\circ 30'$, około $33^\circ 30'$

- b) 47° , około 4,77 cm, około 5,12 cm

- c) 64° , około 25,63 cm, około 28,51 cm

- d) 21° , około 39,08 cm, około 41,85 cm

12. około $70^\circ 30'$, około $109^\circ 30'$

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są poniższe zależności.

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad 2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Uwaga. Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza $(\sin \alpha)^2$, analogicznie $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$.

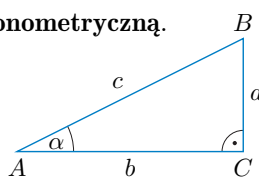
Tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich, jak na rysunku obok:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{ i } \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{ oraz } \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z podanych wyżej tożsamości – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Oblicz $\cos \alpha$, jeśli $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ oraz α jest kątem ostrym.

Wartość $\cos \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Ćwiczenie 2

Oblicz $\sin \alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ oraz α jest kątem ostrym.

Uczeń:

- podaje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta oraz między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i $90^\circ - \alpha$,
- wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich,
- sprawdza, czy istnieje kąt ostry spełniający podane zależności,
- stosuje poznane związki do upraszczania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne,
- uzasadnia związki między funkcjami trygonometrycznymi,
- przeprowadza dowody podstawowych tożsamości trygonometrycznych.

Ćwiczenie 1

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

Ćwiczenie 2

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

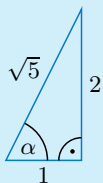
$$\sin \alpha = \frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 3

- a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$

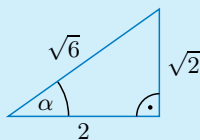
Ćwiczenie 4

a)



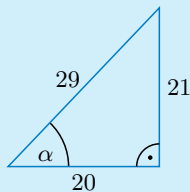
$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b)



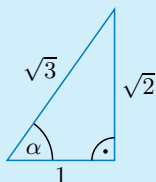
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

c)



$$\sin \alpha = \frac{21}{29}, \cos \alpha = \frac{20}{29}$$

d)



$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Przykład 2

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Wartość $\sin \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.}$$

Obliczamy wartość $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 3

- a) Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\sin \alpha = 0,8$ oraz α jest kątem ostrym.
b) Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ oraz α jest kątem ostrym.
c) Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ oraz α jest kątem ostrym.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

Przykład 3

Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$ oraz α jest kątem ostrym.

Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych

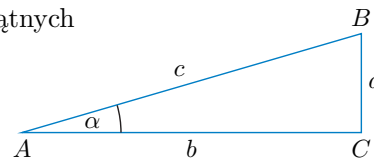
$a = 7$ i $b = 24$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia

Pitagorasa:

$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos \alpha = \frac{24}{25}$$



Ćwiczenie 4

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{20}$, d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 5

Narysuj odpowiedni trójkąt prostokątny i oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, d) $\cos \alpha = \frac{5}{6}$.

Ćwiczenie 5

a) Trójkąt o bokach długości: 2, $\sqrt{5}$, 3

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, 3

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

c) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = 2$$

d) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{11}$, 5, 6

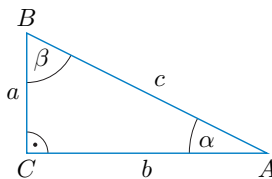
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.



Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Ćwiczenie 6

Uzasadnij podane wyżej tożsamości trygonometryczne 2. i 3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$.

Zadania

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

a) $\cos \alpha = 0,8$, c) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$, g) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{5}$,

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, d) $\sin \alpha = 0,4$, f) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, h) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$.

2. a) Oblicz sinus kąta ostrego α , jeśli jest on trzy razy większy od cosinusa tego kąta.

b) Oblicz cosinus kąta ostrego α , jeśli jest on dwa razy większy od sinusa tego kąta.

3. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli α jest jednym z kątów ostrych tego trójkąta oraz:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 10 cm,

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 39 cm.

Ćwiczenie 6

Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznych:

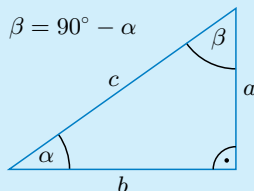
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin \alpha$

3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

a) $\cos \alpha = \frac{3}{10}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$, $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin \alpha = 0,6$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$

b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$

d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

e) $\sin \alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$

f) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

g) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

h) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$

2. a) $\cos \alpha = \frac{1}{3} \sin \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3} \sin \alpha\right)^2 = 1$$

$$\frac{10}{9} \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

b) $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$

$$\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3. a) tak

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

b) nie

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{6} \neq \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

c) nie

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3} \neq \frac{4}{5}$$

d) tak

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

4. a) $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm

b) $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm

5. a) $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{13}$, czyli
 $|BC| = \frac{5}{13} \cdot |AB|$
 $|AB|^2 = 12^2 + \left(\frac{5}{13} \cdot |AB|\right)^2$
 $|AB| = 13, |BC| = 5$
Zatem $Ob = 30$.
- b) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, czyli
 $|AB| = 4\sqrt{5}$
 $|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = 8$
Zatem $Ob = 4(\sqrt{5} + 3)$.
- c) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, czyli
 $|AC| = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot |AB|$
 $|AB|^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot |AB|\right)^2$
 $|AB| = 3, |AC| = \sqrt{6}$
Zatem $Ob = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.
- d) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, czyli
 $|AC| = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot |AB|$
 $|AB|^2 = 6^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot |AB|\right)^2$
 $|AB| = 3\sqrt{13}, |AC| = 9$
Zatem $Ob = 3(\sqrt{13} + 5)$.
6. a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
c) $\sin \alpha = \frac{1}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$
f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$
7. a) $\cos^2 \alpha$ b) $\sin^2 \alpha$ c) $\sin \alpha$
d) $\cos \alpha$ e) $\cos \alpha$ f) 1
8. a) $\cos \alpha \approx 0,41, \operatorname{tg} \alpha \approx 2,25$
b) $\sin \alpha \approx 0,41, \operatorname{tg} \alpha \approx 0,45$
c) $\sin \alpha \approx 0,48, \cos \alpha \approx 0,87$
d) $\sin \alpha \approx 0,97, \cos \alpha \approx 0,24$

5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Oblicz obwód tego trójkąta.
- a) $|AC| = 12, \sin \angle BAC = \frac{5}{13}$ c) $|BC| = \sqrt{3}, \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{3}$
b) $|AC| = 4, \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $|BC| = 6, \cos \angle BAC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$
6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:
- a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$, e) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$,
b) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{5}{13}$, d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, f) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 2$.
7. Przedstaw w prostszej postaci.
- a) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$ c) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ e) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$
b) $(1 + \sin(90^\circ - \alpha))(1 - \cos \alpha)$ d) $\sin \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ f) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$
8. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), wyznacz przybliżone wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .
- a) $\sin \alpha = 0,91$ b) $\cos \alpha = 0,91$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,55$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 4$

Czy wiesz, że...

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

A α alfa	H η eta	N ν ni	T τ tau
B β beta	Θ θ teta	Ξ ξ ksi	Υ υ ypsilon
Γ γ gamma	I ι jota	O o omikron	Φ ϕ fi
Δ δ delta	K κ kappa	Π π pi	X χ chi
E ε epsilon	Λ λ lambda	P ρ ro	Ψ ψ psi
Z ζ dzeta	M μ mi	Σ σ sigma	Ω ω omega

Powtórzenie

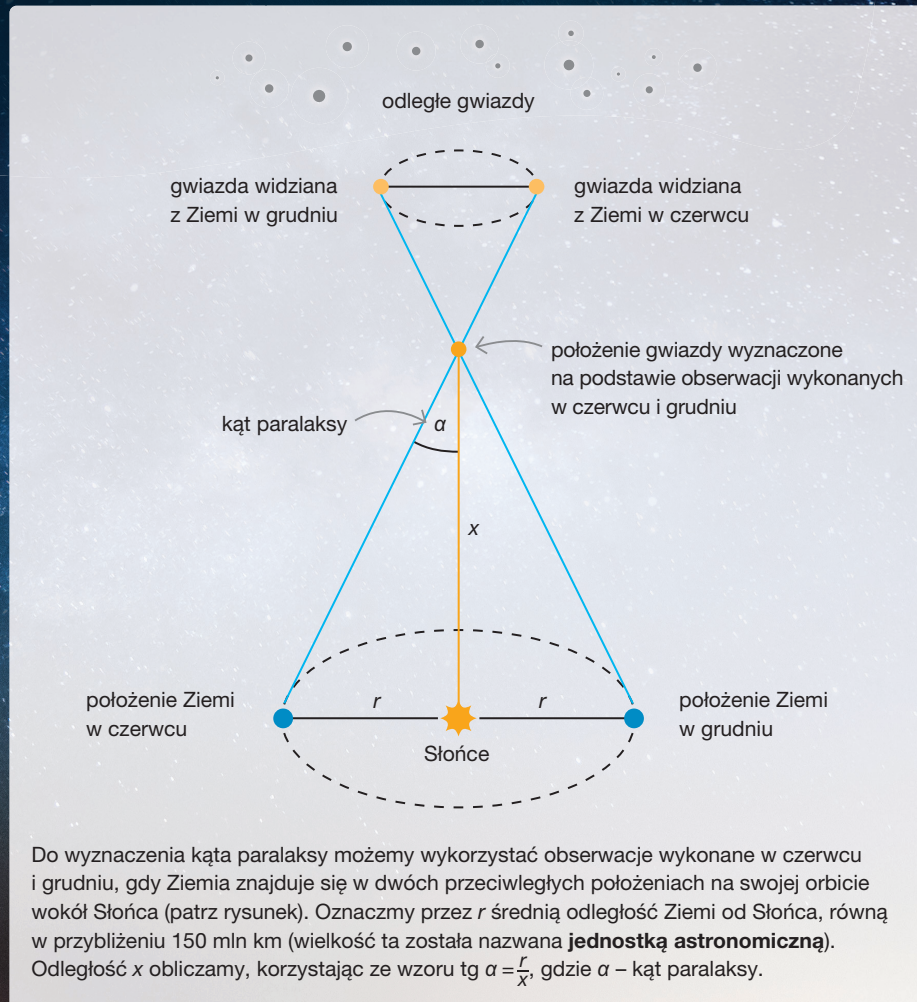
9. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?
- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ d) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
10. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.
- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, c = 15$ cm b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}, c = 39$ cm

9. a) nie b) tak c) tak d) nie e) tak f) tak

10. a) 9 cm i 12 cm b) 15 cm i 36 cm

Trygonometria i astronomia

Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.



Do wyznaczenia kąta paralaksy możemy wykorzystać obserwacje wykonane w czerwcu i grudniu, gdy Ziemia znajduje się w dwóch przeciwległych położeniach na swojej orbicie wokół Słońca (patrz rysunek). Oznaczmy przez r średnią odległość Ziemi od Słońca, równą w przybliżeniu 150 mln km (wielkość ta została nazwana **jednostką astronomiczną**). Odległość x obliczamy, korzystając ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{x}$, gdzie α – kąt paralaksy.

- 1** Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proximy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0,77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0,77'' \approx 0,00000373$.

1. $x = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{150\,000\,000}{0,00000373} \approx 40\,214\,477\,211\,796 \text{ [km]}$

Uczeń:

- określa znak funkcji trygonometrycznej kąta rozwartego,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu; przedstawia ten kąt na rysunku,
- stosuje zależności między funkcjami trygonometrycznymi kąta wypukłego,
- znając wartość tangensa kąta wypukłego, rysuje ten kąt w układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 1

- 45° , np. $(1, 1)$
- 90° , np. $(0, 1)$
- 135° , np. $(-1, 1)$

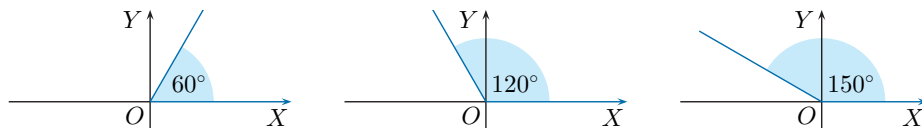
Ćwiczenie 2

- $|OP| = 5$,
 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
- $|OP| = 10$,
 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
- $|OP| = 2$,
 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

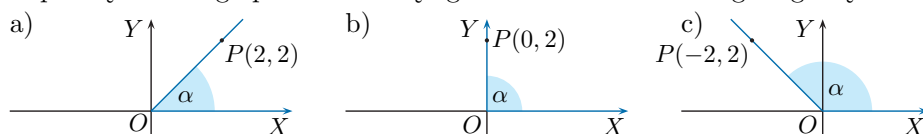
W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX . Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Figurę nazwamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$.



Ćwiczenie 1

Jaka jest miara kąta, do którego ramienia końcowego należy punkt P ? Podaj współrzędne innego punktu należącego do ramienia końcowego tego kąta.



Przykład 1

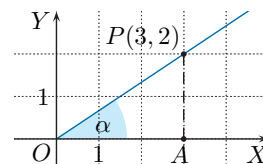
Dany jest trójkąt POA , gdzie $P(3, 2)$ i $A(3, 0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

Rysujemy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok). Oznaczmy miarę kąta POA przez α .

Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.



Ćwiczenie 2

Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

- $P(3, 4)$, $A(3, 0)$
- $P(6, 8)$, $A(6, 0)$
- $P(\sqrt{3}, 1)$, $A(\sqrt{3}, 0)$

Multiteka

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)

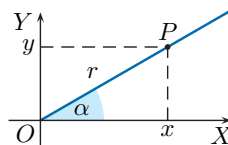
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.6

Generator
testów i sprawdzianów

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



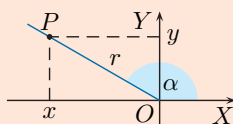
Podane powyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$.

Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, \text{ czyli } \alpha \neq 90^\circ).$$



Zauważ, że każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P leżącego na tym ramieniu.

Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$.

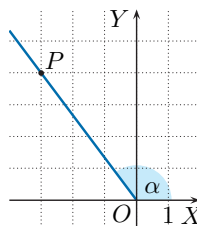
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Punkt P ma współrzędne $(-3, 4)$, zatem $x = -3$, $y = 4$,

czyli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$



Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q . Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

a) $P(-4, 3), Q(-8, 6)$

b) $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), Q(-2, 6)$

Ćwiczenie 4

Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α , które są dla niego określone.

a) $\alpha = 0^\circ$

b) $\alpha = 90^\circ$

c) $\alpha = 180^\circ$

Ćwiczenie 4

a) $\sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1, \operatorname{tg} 0^\circ = 0$

b) $\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0,$

c) $\sin 180^\circ = 0, \cos 180^\circ = -1, \operatorname{tg} 180^\circ = 0$

Ćwiczenie 3

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5},$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

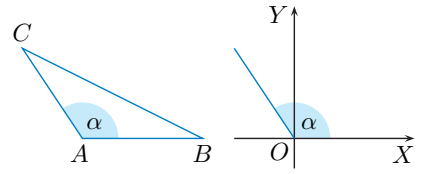
b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10},$

$\operatorname{tg} \alpha = -3$

Komentarz

Należy polecić uczniom, aby wykonali ćwiczenie 4.

Jako wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie ABC przyjmujemy wartości funkcji trygonometrycznych przystającego do niego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych.



Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Ćwiczenie 5

a) $\cos 110^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 115^\circ < 0$
Liczba a jest ujemna.

b) $\cos 130^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 140^\circ < 0$
Liczba a jest dodatnia.

c) $\sin 160^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 170^\circ < 0$
Liczba a jest ujemna.

Ćwiczenie 6

$$r = \sqrt{10}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{a) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$$

$$\text{b) } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{-\frac{3\sqrt{10}}{10}} = -\frac{1}{3} = \operatorname{tg} \alpha$$

Ćwiczenie 5

Określ, czy liczba a jest dodatnia, czy ujemna.

$$\text{a) } a = \cos 110^\circ + \operatorname{tg} 115^\circ \quad \text{b) } a = \cos 130^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ \quad \text{c) } a = \sin 160^\circ \cdot \operatorname{tg} 170^\circ$$

Ćwiczenie 6

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 1)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sprawdź, czy dla obliczonych wartości zachodzi równość:

$$\text{a) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{b) } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Poznane wcześniej tożsamości trygonometryczne zachodzą dla dowolnych kątów wypukłych.

D Ćwiczenie 7

a) Uzasadnij podane obok twierdzenie.

b) Uzasadnij, że dla dowolnego kąta wypukłego α zachodzą nierówności:

$$\sin \alpha \leq 1 \quad \text{ i } \quad \cos \alpha \leq 1$$

Dla kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ prawdziwe są zależności:

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 90^\circ$$

Przykład 3

Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos^2 \alpha = \frac{15}{16}, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ lub } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Dla $\alpha \in \langle 90^\circ; 180^\circ \rangle$ cosinus jest ujemny, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\text{Obliczamy wartość } \operatorname{tg} \alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Ćwiczenie 8

Oblicz $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{2}{3},$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ćwiczenie 7

a) Niech punkt $P(x, y)$ leży na ramieniu końcowym kąta α oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$2. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

b) Zauważmy, że $x \leq r$ i $y \leq r$. Zatem $\sin \alpha = \frac{y}{r} \leq \frac{r}{r} = 1$ oraz $\cos \alpha = \frac{x}{r} \leq \frac{r}{r} = 1$.

Ćwiczenie 8

$$\text{a) } \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{c) } \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 9

Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

- a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

- a) $\angle AOP$ b) $\angle AOQ$ c) $\angle AOR$

2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\sin \alpha - \sin \beta$.

- a) $P(-2, 4)$, $Q(4, 2)$ b) $P(-9, 3)$, $Q(2, 6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\cos \alpha + \cos \beta$.

- a) $P(3, 1)$, $Q(-1, \frac{1}{2})$ b) $P(-2, 4)$, $Q(-4, 2)$ c) $P(-2, \sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

4. Oblicz: $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli α jest kątem rozwartym oraz:

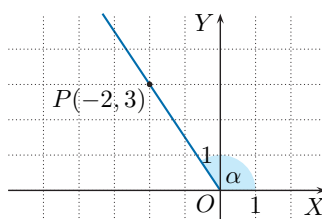
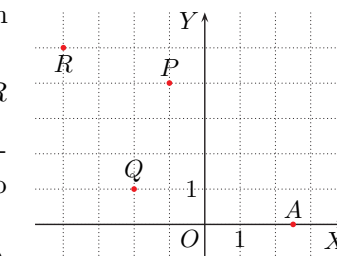
- a) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

W układzie współrzędnych narysowano kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$, taki że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$.
Oblicz $\sin \alpha$.

$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, stąd:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$



W układzie współrzędnych narysuj odpowiedni kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ oraz oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli: a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$.

Powtórzenie

6. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

- a) $P(5, 12)$ c) $P(-5, 12)$ e) $P(\sqrt{5}, 2)$ g) $P(-\sqrt{3}, 1)$
b) $P(1, \frac{4}{3})$ d) $P(-5, 10)$ f) $P(\sqrt{2}, 1)$ h) $P(-\sqrt{3}, \sqrt{6})$

2. a) $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10} + (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = \frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$

b) $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} + (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

4. a) $\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$

b) $\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$

6. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$

d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$

e) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

Ćwiczenie 9

a) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$

c) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{10}$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin \angle AOP = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,

$\cos \angle AOP = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,

$\operatorname{tg} \angle AOP = -4$

b) $\sin \angle AOQ = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos \angle AOQ = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{tg} \angle AOQ = -\frac{1}{2}$

c) $\sin \angle AOR = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,

$\cos \angle AOR = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$,

$\operatorname{tg} \angle AOR = -\frac{5}{4}$

5. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$

b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$,

$\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$,

$\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

Uczeń:

- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych szczególnych kątów, np.: 90° , 120° , 135° ,
- korzysta z tablic i przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych do wyznaczenia miary kąta rozwartego.

4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

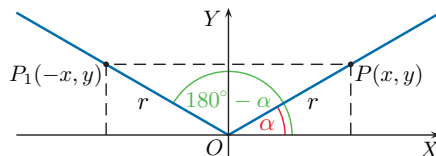
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej).

Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

**Przykład 1**

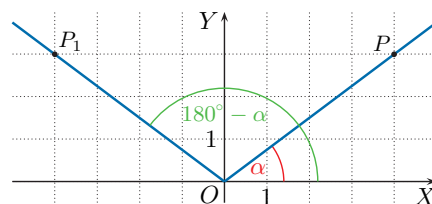
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$, jeżeli punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$.

$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

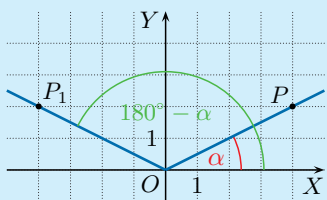
$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}$$

**Ćwiczenie 1**

$P(4, 2)$, $P_1(-4, 2)$



$$r = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych kąt α , do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

Dla kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ prawdziwe są wzory:

$$1. \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$2. \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$3. \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 90^\circ$$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120° .

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) $\alpha = 135^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$.

Ćwiczenie 2

$$\text{a) } \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$$

$$\text{b) } \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Multiteka

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.7



Zadania

1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. Oblicz.

a) $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ c) $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$ e) $4 \cos 150^\circ - 3 \operatorname{tg} 135^\circ$
 b) $\cos 150^\circ - \cos 30^\circ$ d) $\cos 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$ f) $8 \operatorname{tg} 120^\circ + 6 \operatorname{tg} 150^\circ$

3. Oblicz.

a) $\frac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3 \operatorname{tg} 150^\circ}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 120^\circ}$ e) $\frac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ}$
 b) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ}$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.

$$\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0,8192$$

$$\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0,9781$$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

5. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, sprawdź, czy prawdziwa jest podana nierówność.

a) $\sin 160^\circ + \cos 130^\circ < 0$ b) $\sin 105^\circ + \cos 145^\circ > 0$

6. Korzystając z podanych obok informacji, oblicz:

a) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \beta)$,

b) $2 \sin(180^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{5}{6}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3}$$

7. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wyznacz przybliżoną miarę kąta rozwartego β .

a) $\sin \beta = 0,9397$ c) $\cos \beta = -0,9613$ e) $\operatorname{tg} \beta = -0,7265$

b) $\sin \beta = 0,4695$ d) $\cos \beta = -0,4226$ f) $\operatorname{tg} \beta = -2,9042$

3. a) $\frac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{-3 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = -1$

b) $\frac{-\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -3$

c) $\frac{-\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$

d) $\frac{-\operatorname{tg} 45^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ (-\cos 45^\circ)} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = 2 - \sqrt{2}$

e) $\frac{-\cos 45^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

f) $\frac{-\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ}{-\cos 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$

4. a) $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ \approx 0,9659$

b) $\sin 165^\circ = \sin 15^\circ \approx 0,2588$

c) $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ \approx -0,6428$

d) $\cos 175^\circ = -\cos 5^\circ \approx -0,9962$

e) $\operatorname{tg} 142^\circ = -\operatorname{tg} 38^\circ \approx -0,7813$

f) $\operatorname{tg} 163^\circ = -\operatorname{tg} 17^\circ \approx -0,3057$

5. a) prawdziwa,

$$\sin 20^\circ - \cos 50^\circ \approx 0,3420 - 0,6428 < 0$$

- b) prawdziwa,

$$\sin 75^\circ - \cos 35^\circ \approx 0,9659 - 0,8192 > 0$$

Odpowiedzi do zadań

2. a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 e) $3 - 2\sqrt{3}$ f) $-10\sqrt{3}$

6. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

7. a) $\beta \approx 110^\circ$ b) $\beta \approx 152^\circ$

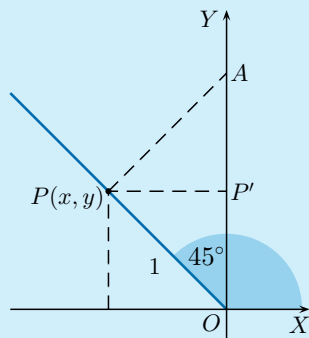
c) $\beta \approx 164^\circ$ d) $\beta \approx 115^\circ$

e) $\beta \approx 144^\circ$ f) $\beta \approx 109^\circ$

8. Zauważmy, że:

$$135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$$

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny równoramienny POA o bokach długości: 1, 1, $\sqrt{2}$.



$$|OP'| = \frac{\sqrt{2}}{2}, |PP'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 135° ma współrzędne:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

a stąd:

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -1$$

D 8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150° .

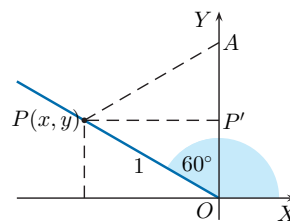
Zauważmy, że $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$.

Rozpatrzmy trójkąt równoboczny POA (rysunek obok) o boku długości 1, wówczas:

$$|OP'| = \frac{1}{2}, |PP'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 150° ma współrzędne $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a stąd:

$$\sin 150^\circ = \frac{y}{|OP|} = \frac{1}{2}, \cos 150^\circ = \frac{x}{|OP|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



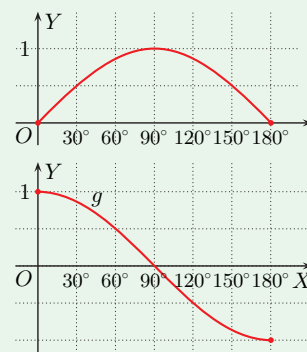
Uzasadnij, że punkt $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ należy do ramienia końcowego kąta 135° i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Na rysunku obok przedstawiono przyporządkowanie kątowi z przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ wartości sinusa tego kąta. Zauważ, że dla dowolnego $x \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzi równość:

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x$$

Na rysunku obok przedstawiono przyporządkowanie kątowi z przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ wartości cosinusa tego kąta. Zauważ, że dla dowolnego $x \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzi równość:

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$



Powtórzenie

9. Jakie miary kąta można wpisać w miejsce $?$, aby, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), można było podać przybliżoną wartość funkcji? Podaj tę wartość.

a) $\sin 111^\circ = \sin(180^\circ - ?)$

c) $\cos 123^\circ = -\cos(180^\circ - ?)$

b) $\sin 132^\circ = \sin(180^\circ - ?)$

d) $\cos 107^\circ = -\cos(180^\circ - ?)$

10. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 160^\circ$, b) $\sin 95^\circ$, c) $\cos 100^\circ$, d) $\cos 147^\circ$, e) $\operatorname{tg} 102^\circ$.

9. a) $\sin 69^\circ \approx 0,9336$

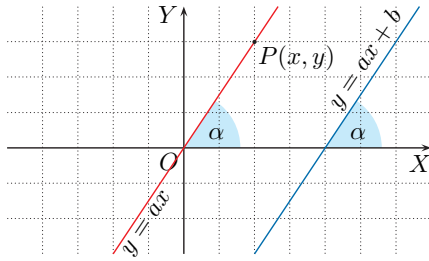
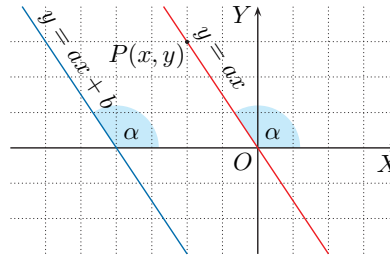
b) $\sin 48^\circ \approx 0,7431$

c) $\cos 123^\circ = -\cos(180^\circ - 123^\circ) = -\cos 57^\circ \approx -0,5446$

d) $\cos 107^\circ = -\cos(180^\circ - 107^\circ) = -\cos 73^\circ \approx -0,2924$

10. a) 0,3420 b) 0,9962 c) -0,1736 d) -0,8387 e) -4,7046

Współczynnik kierunkowy prostej

 $a > 0$  $a < 0$ 

Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ czyli } y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

Zauważ też, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest równy tangensowi kąta α , jaki ta prosta tworzy z osią OX :

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX .

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

b) $y = \sqrt{3}x$

c) $y + x = 0$

1. a) 30°

b) 60°

c) 135°

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz miarę kąta między prostymi:

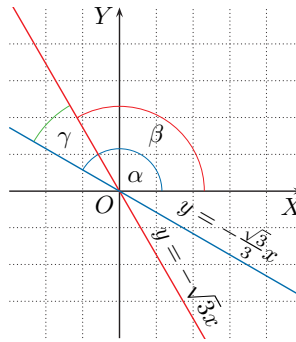
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ i } y = -\sqrt{3}x$$

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150^\circ$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120^\circ$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\gamma = \alpha - \beta = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



Wyznacz miarę kąta między prostymi:

a) $y = -\sqrt{3}x$ i $y = x$,

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = -x + 2$.

2. a) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, czyli $\alpha = 120^\circ$

$\operatorname{tg} \beta = 1$, czyli $\beta = 45^\circ$

$\gamma = \alpha - \beta = 75^\circ$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 30^\circ$

$\operatorname{tg} \beta = -1$, czyli $\beta = 135^\circ$

$\gamma = \beta - \alpha = 105^\circ$

Uczeń:

- podaje różne wzory na pole trójkąta,
- oblicza pole trójkąta, dobierając odpowiedni wzór,
- wykorzystuje umiejętność wyznaczania pól trójkątów do obliczania pól innych wielokątów,
- dowodzi prawdziwości wzoru $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Ćwiczenie 1

Niech a oznacza długość podstawy, b – długość ramienia trójkąta. Wówczas $a + 2b = 28$.

a) $a = b + 4$

$a = 12, b = 8$

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}$ [cm]

$P = 12\sqrt{7}$ cm²

b) $\frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{2}{5}$

$a = 8, b = 10$

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}$ [cm]

$P = 8\sqrt{21}$ cm²

Ćwiczenie 2

a), b) $P = 120$ cm²

c) $P = \frac{169}{2}\sqrt{3}$ cm²

Ćwiczenie 3

Niech a oznacza długość ramienia trójkąta. Wówczas:

a) $P = \frac{1}{2} \cdot a^2 = 4,5$ cm²,

czyli $a = 3$ cm

$Ob = 2a + a\sqrt{2} = 3(2 + \sqrt{2})$ cm

b) $Ob = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2}) = 15(2 + \sqrt{2})$ cm

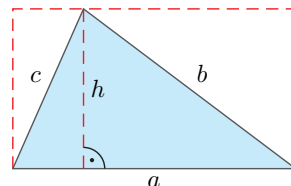
$a = 15$ cm

$P = \frac{1}{2} \cdot a^2 = 112,5$ cm²

4.8. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



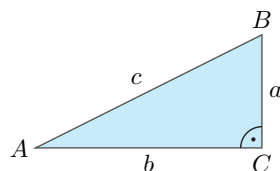
Ćwiczenie 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 28 cm, jeśli:

- jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,
- cosinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

$$P = \frac{1}{2}ab$$



Ćwiczenie 2

Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 26 cm, jeśli:

- sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,
- tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,
- jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu 4,5 cm².

b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2})$ cm.

Ćwiczenie 4

D a) Wyprowadź podany obok wzór.

b) Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3}$ cm.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 5

a) Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3}$ cm².

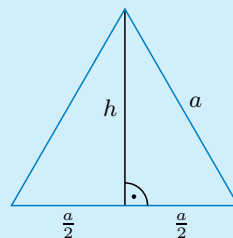
Ćwiczenie 4

a) Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2, \text{ czyli } h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\text{Zatem pole: } P = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

b) Bok trójkąta jest równy $10\sqrt{3}$ cm, czyli pole: $P = 75\sqrt{3}$ cm².



Ćwiczenie 5

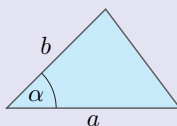
a) $P = \frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm²

b) $Ob = 36\sqrt{3}$ cm

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$



Dowód

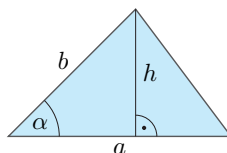
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a .

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin \alpha$, więc $h = b \sin \alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



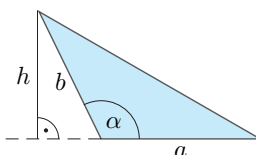
2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a .

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin(180^\circ - \alpha)$.

Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ i otrzymujemy $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC , gdy:

- a) $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$,
- b) $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $\sphericalangle CAB = 120^\circ$,
- c) $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $\sphericalangle ABC = 35^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 100^\circ$,
- d) $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $\sphericalangle ABC = 15^\circ$.

Ćwiczenie 8

W trójkącie ABC o polu 12 cm^2 bok AB ma długość 4 cm . Oblicz długość boku AC , jeśli kąt CAB ma miarę:

- a) 30° , b) 45° , c) 120° .

Ćwiczenie 8

- a) 12 cm
- b) $6\sqrt{2} \text{ cm}$
- c) $4\sqrt{3} \text{ cm}$

Ćwiczenie 6

Dla $\alpha = 90^\circ$ mamy $\sin \alpha = 1$, czyli $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2}ab$.

Ćwiczenie 7

- a) $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 15$
- b) $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$
- c) $\sphericalangle BAC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$
- d) $\sphericalangle BAC = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$
 $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \sin 30^\circ = 4,5$

Odpowiedzi do zadań

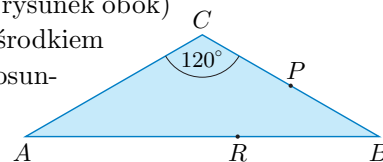
1. a) $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(180^\circ + 120^\circ) = \frac{35}{2} \sin 60^\circ = \frac{35\sqrt{3}}{4}$
 b) Kąt między ramionami ma miarę:
 $180^\circ - 2 \cdot 22^\circ 30' = 135^\circ$
 Zatem pole:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \sin(180^\circ - 135^\circ) = 32 \sin 45^\circ = 16\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$
3. a) $6(2\sqrt{2} + \sqrt{10}) \text{ cm}$
 b) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$,
 $Ob = 4(2\sqrt{3} + 3) \text{ cm}$
4. $P = 24 \text{ cm}^2$,
 $Ob = 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \text{ cm}$
5. a) $6\sqrt{2}$
 b) $P_1 = 36(\sqrt{3} - 1)$,
 $P_2 = 36(3 - \sqrt{3})$
6. Niech a oznacza długość podstawy, b – długość ramienia trójkąta. Wówczas:
 $\frac{b}{a+2b} = \frac{3}{10}$, czyli $b = \frac{3}{4}a$
 $h = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$
 $P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = 8\sqrt{5}$,
 czyli $a = 8$, $b = 6$
7. $|BD| = |BC| = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2} = 5$
 Trójkąt ABC jest trójkątem o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, gdzie $\angle BAC = 30^\circ$ i $\angle ABC = 60^\circ$.
 Stąd:
 $\angle CBD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 oraz $\angle BCD = \angle BDC = 30^\circ$.
 Zauważmy, że
 $\angle BDC = \angle BAC = 30^\circ$, czyli trójkąt ADC jest równoramienny, zatem $|CD| = 5\sqrt{3}$.
 Obwód trójkąta BCD :
 $Ob = 5(2 + \sqrt{3})$
 Pole trójkąta BCD :
 $P = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \sin 120^\circ = \frac{25}{4}\sqrt{3}$
8. $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$
 Największa wartość $\sin \alpha = 1$ jest osiągnięta dla kąta $\alpha = 90^\circ$.

Zadania

1. a) W trójkącie ABC : $|AB| = 7$, $|AC| = 5$ i $\angle CAB = 120^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.
 b) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm, a kąt przy podstawie ma miarę $22^\circ 30'$.

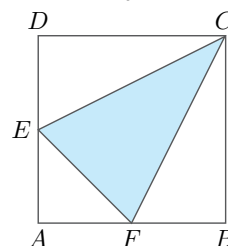
2. Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}$. Punkt P jest środkiem boku BC , a punkt R dzieli bok AB w stosunku 3:2. Oblicz pole trójkąta:

a) APC , b) ARC , c) PRB .



3. a) Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe 36 cm^2 .
 b) W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.

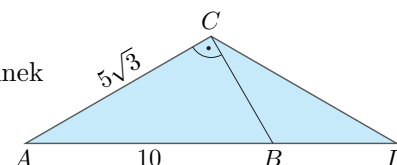
4. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



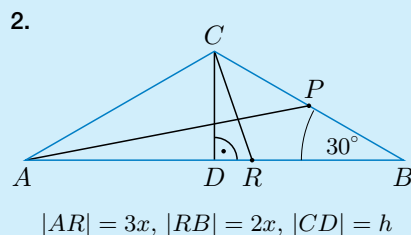
5. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45° .
 a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną do podstawy.
 b) Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku 2:1. Oblicz pola powstałych trójkątów.

6. Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi 0,3. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że $|BC| = |BD|$.



8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b . Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?



Wyznaczamy potrzebne długości:

$|DB| = 2,5x = h\sqrt{3}$, czyli $|AB| = 2\sqrt{3}h$
 oraz $|AC| = |BC| = 2h$, zatem:

$$2\sqrt{3}h + 4h = 12 + 8\sqrt{3}$$

$$h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$|AC| = |BC| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $|AB| = 12 \text{ cm}$,
 $|AR| = \frac{36}{5} \text{ cm}$, $|RB| = \frac{24}{5} \text{ cm}$

- a) $P_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \sin(180^\circ - 120^\circ) = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$
 b) $P_{\triangle ARC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{36}{5} \sin 30^\circ = \frac{36}{5}\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$
 c) $P_{\triangle PRB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot 2\sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{12}{5}\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$

- D** 9. Dany jest trójkąt, w którym kąt między bokami o długościach x i $2x$ ma miarę 120° . Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości x .

Czy wiesz, że...

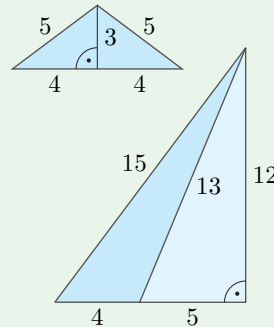
Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona (Heron z Aleksandrii, I wiek n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Trójkątami Herona nazywamy trójkąty, których długości boków oraz pole wyrażają się liczbami naturalnymi.

Przykładem trójkąta Herona jest trójkąt o bokach 5, 5, 8 (który powstał przez złączenie dwóch trójkątów prostokątnych o bokach 3, 4, 5) oraz trójkąt o bokach 4, 13, 15 (który powstał przez odcięcie z trójkąta prostokątnego o bokach 9, 12, 15 trójkąta prostokątnego o bokach 5, 12, 13).



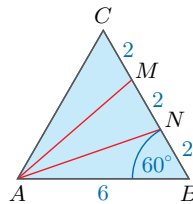
10. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona. Czy trójkąt ten jest trójkątem Herona?
- | | | |
|------------|------------|--------------|
| a) 3, 4, 5 | c) 5, 5, 6 | e) 9, 10, 17 |
| b) 4, 5, 7 | d) 4, 6, 8 | f) 7, 15, 20 |

$$9. \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \sin 120^\circ = x^2 \sin 60^\circ = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$$

10. a) 6, tak
b) $4\sqrt{6}$, nie
c) 12, tak
d) $3\sqrt{15}$, nie
e) 36, tak
f) 42, tak

Powtórzenie

11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle ABC = 105^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli $|AC| = 6$, $|AB| = 6 + 6\sqrt{3}$.
12. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 6 punkty M i N dzielą bok BC na trzy równe części. Oblicz pola trójkątów BAM i NAM .
13. a) Boki trójkąta równobocznego wydłużono o 50%. O ile procent wzrosło pole tego trójkąta?
b) O ile procent należy wydłużyć boki trójkąta równobocznego, by jego pole wzrosło o 69%?



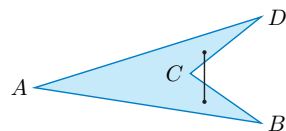
$$11. P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 + 6\sqrt{3}) \cdot \sin 30^\circ = 9(\sqrt{3} + 1)$$

12. $P_{BAM} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$
 $P_{NAM} = P_{BAM} - P_{BAN} = 6\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$
 Warto zauważyć, że zadanie można rozwiązać też innym sposobem.
 $P_{ABC} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$
 $P_{ABN} = P_{ANM} = P_{AMC} = \frac{1}{3} P_{ABC}$
 Zatem $P_{BAM} = 6\sqrt{3}$, $P_{NAM} = 3\sqrt{3}$.

13. Pole trójkąta równobocznego: $P_R = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
 a) Powiększone pole: $P = \frac{(1,5a)^2 \sqrt{3}}{4} = 2,25 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = P_R + 1,25P_R$
 Pole trójkąta wzrosło o 125%.
 b) Powiększone pole: $P = 1,69 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(1,3a)^2 \sqrt{3}}{4}$
 Boki należy wydłużyć o 30%.

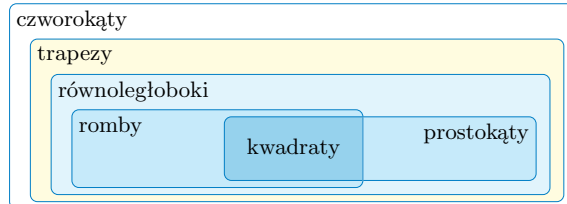
Czworokąty wypukłe

Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa jego punkty jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.



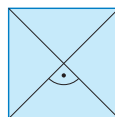
Czworokąt $ABCD$ nie jest wypukły.

Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoboki i trapezy.



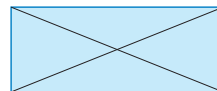
Kwadrat

- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

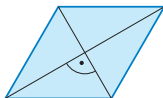


Prostokąt

- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

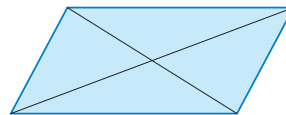


Romb



- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Równoległobok



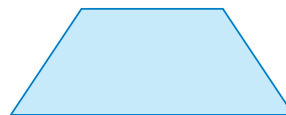
- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez



- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180° .

Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

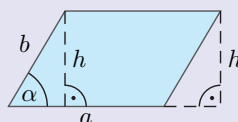
4.9. Pole czworokąta

Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a kąt ostry ma miarę 60° . Oblicz wysokości tego równoległoboku i jego pole.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij podany obok wzór.

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie ostrym α wyraża się wzorem $P = ab \sin \alpha$.

Ćwiczenie 3

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45° , b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 4

D a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30° .

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

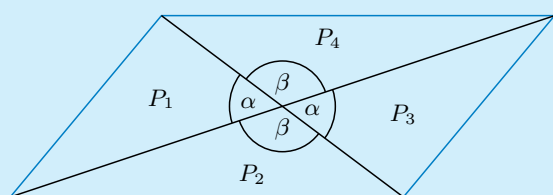
D Ćwiczenie 5

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1, d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Ćwiczenie 4

a) Oznaczmy przekątne równoległoboku przez c i d .



$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin \alpha = P_3$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin(180^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin \alpha = P_4$$

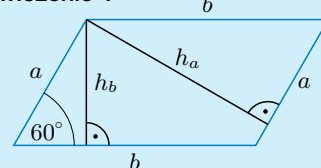
$$\text{Zatem } P_1 = P_2 = P_3 = P_4.$$

$$\text{b) } P = 4\left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 5 \sin 30^\circ\right) = 12,5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Uczeń:

- rozróżnia czworokąty oraz zna ich własności,
- podaje wzory na pola: równoległoboku, rombu, trapezu,
- oblicza pola czworokątów,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach,
- uzasadnia związki miarowe w czworokątach.

Ćwiczenie 1



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$h_a = b \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$h_b = a \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Pole } P = ah_a = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 2

$\frac{h}{b} = \sin \alpha$, zatem $h = b \sin \alpha$, czyli pole $P = ah = ab \sin \alpha$.

Ćwiczenie 3

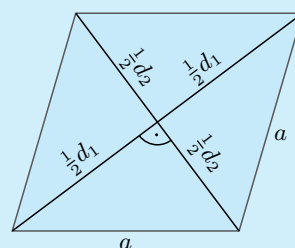
$$\text{a) } P = 8 \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ = 48\sqrt{2}$$

b) Kąt ostry α spełnia warunek $180^\circ - \alpha = 5\alpha$, czyli $\alpha = 30^\circ$.

$$P = 8 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 48$$

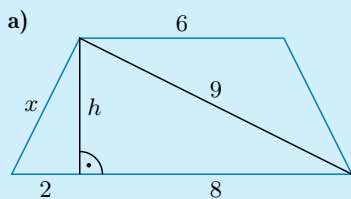
Ćwiczenie 5

Korzystamy z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.



$$P = 4\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}d_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}d_2\right)\right) = \frac{d_1d_2}{2}$$

Ćwiczenie 7

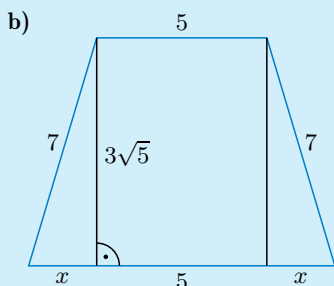


$$h = \sqrt{9^2 - 8^2} = \sqrt{17}$$

$$P = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot \sqrt{17} = 8\sqrt{17}$$

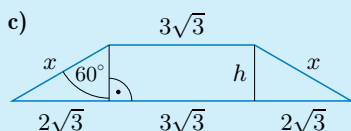
$$x = \sqrt{2^2 + (\sqrt{17})^2} = \sqrt{21}$$

$$Ob = 2(8 + \sqrt{21})$$



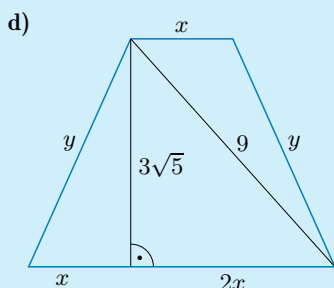
$$x = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2} = 2$$

$$P = 21\sqrt{5}, Ob = 28$$



$$h = 2, x = 4$$

$$P = 10\sqrt{3}, Ob = 2(5\sqrt{3} + 4)$$



$$2x = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{5})^2} = 6,$$

czyli $x = 3$

$$y = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{6}$$

$$P = 18\sqrt{5}, Ob = 6(\sqrt{6} + 2)$$

Przykład 1

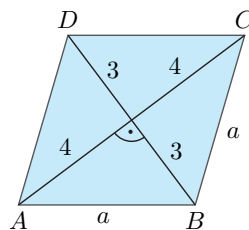
Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?

Długość boku rombu obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5$ cm.

Pole rombu: $P = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ [cm²].

Ale jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ [cm]}$$



Ćwiczenie 6

Oblicz pole i wysokość rombu o boku:

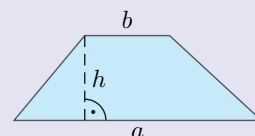
a) 13 cm i dłuższej przekątnej równej 24 cm,

b) 6 cm i kącie ostrym α takim, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu o podstawach długości a, b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

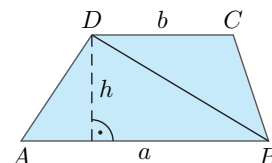


Uzasadnienie wzoru na pole trapezu

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD . Trójkąty te mają taką samą wysokość h , a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$.



Ćwiczenie 7

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, jeśli:

a) jego podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,

b) jego ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$,

c) jego krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150° ,

d) jedna z jego podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 6

a) Krótsza przekątna ma długość 10 cm.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$h = \frac{P}{a} = \frac{120}{13} \text{ cm}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$P = 6 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 24\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$h = a \sin \alpha = 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Zadania

- Oblicz pole równoległoboku, w którym kąt rozwarty ma miarę 150° , a boki mają długości 4 cm i 9 cm.
 - Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2 , a jego obwód 24 cm. Oblicz wysokości tego równoległoboku, jeśli sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25.

- D** 2. a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α , to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} pq \sin \alpha$$

- Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33° . Oblicz pole tego równoległoboku.
- Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$ przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej.

- D** a) Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych.

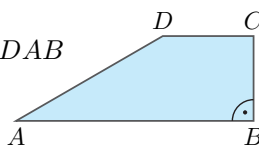
b) Oblicz obwód tego równoległoboku.

- Przekątne rombu mają długości 12 cm i 16 cm, a jego kąt ostry ma miarę α . Oblicz $\sin \alpha$.
 - Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm^2 . Oblicz wysokość tego rombu.

- W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

- W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.

- W trapezie prostokątnym (rysunek obok) sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.



- Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego kąt ostry ma miarę 30° , a podstawy mają długości 4 cm i 10 cm.

b) Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2 . Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.

- W ćwiczeniu 4a) uzasadniliśmy, że:

$$P_{\triangle AOD} = P_{\triangle BOC} = P_{\triangle DOC} = P_{\triangle AOB}$$

zatem:

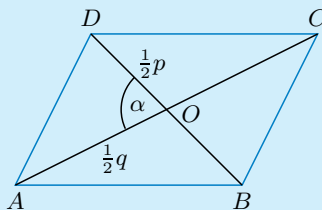
$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2} q \sin \alpha = \frac{1}{2} pq \sin \alpha$$

- Kąt ostry między przekątnymi ma miarę:

$$12^\circ + 33^\circ = 45^\circ$$

zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \sin 45^\circ = 15\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

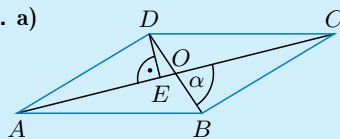


Odpowiedzi do zadań

- a) 18 cm^2

- 1 cm, 2 cm

- a)



Z założeń zadania:

$$|DB| = x, |AC| = 3x$$

gdzie $x > 0$, zatem:

$$P = \frac{1}{2} x \cdot 3x \cdot \sin \alpha =$$

$$= x^2 \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

czyli $x = 4 \text{ cm}$. Wówczas:

$$\frac{|DE|}{2} = \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{zatem: } |DE| = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

$$|EO| = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3} \text{ [cm]}$$

$$\text{czyli } |AE| = 5\frac{1}{3} \text{ cm.}$$

Obliczamy bok równoległoboku:

$$|AD|^2 = \left(5\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2.$$

$$\text{Stąd } |AD| = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Zauważmy, że:

$$|AD|^2 + |DO|^2 =$$

$$= (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 36 = |AO|^2$$

zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ADO jest prostokątny, czyli:

$$\angle ADB = 90^\circ \text{ oraz}$$

$$\angle DBC = 90^\circ \text{ (jako kąt naprzemianległy z kątem } \angle ADB\text{).}$$

$$\text{b) } 8(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

- a) 0,96 b) 9 cm

$$5. \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6. 6(6 + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

$$7. \frac{320}{9} \sqrt{5} \text{ cm}^2$$

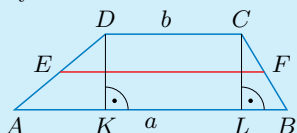
$$8. \text{ a) } 7\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ b) } 0,8$$

$$9. a) P = P_{\triangle ACD} + P_{\triangle ACB} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_2 \cdot d_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_2 \cdot d_1 = \\ = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

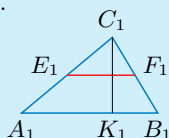
b) 21

$$10. 161 \text{ m siatki, } P_1 = 188 \text{ m}^2, \\ P_2 = 512 \text{ m}^2$$

12. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Po „usunięciu” prostokąta $KLCD$ otrzymujemy trójkąt, którego bok A_1B_1 ma długość $a - b$.



Trójkąt $E_1F_1C_1$ jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ (cecha BKB) w skali 1:2, zatem:

$$|E_1F_1| = \frac{1}{2}|A_1B_1| = \frac{1}{2}(a - b)$$

Stąd:

$$|EF| = \frac{1}{2}(a - b) + b = \frac{a+b}{2}$$

$$13. a = 12,5 \text{ cm, } P = 24 \text{ cm}^2$$

$$14. a) P = 12, Ob = 4(3 + \sqrt{2})$$

$$b) P = 16\sqrt{3}, Ob = 24$$

$$c) P = 32, Ob = 26$$

$$15. a) P = 10\sqrt{3}, Ob = 2(7 + \sqrt{3})$$

$$b) P = 14\sqrt{3}, Ob = 22$$

$$c) P = 2(4\sqrt{3} + 3), \\ Ob = 7 + 4\sqrt{3} + \sqrt{73 - 24\sqrt{3}}$$

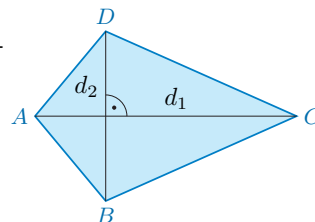
$$16. a) Ob = 48 \text{ cm,}$$

$$P = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$b) 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

D 9. a) Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2 . Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

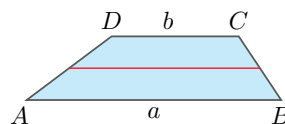
b) Krótsza przekątna deltoidu o bokach $3\sqrt{2}$ i 5 ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.



10. Działkę budowlaną w kształcie trapezu o bokach długości: 50 m, 25 m, 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody każdej z nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości 1,5 m? Oblicz pola tych działek.

D 11. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E . Wykaż, że trójkąty AED i BEC mają równe pola.

D 12. Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.



13. Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm, krótsza podstawa ma długość 7,5 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.

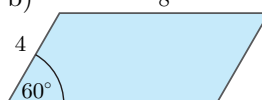
Powtórzenie

14. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

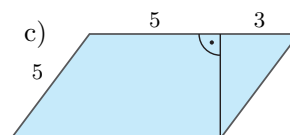
a)



b)

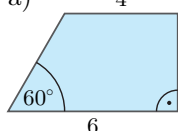


c)



15. Oblicz pole i obwód trapezu.

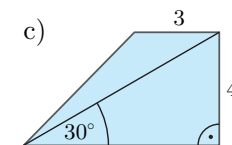
a)



b)



c)



16. a) W prostokącie o przekątnej długości 24 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano romb o kącie ostrym 60° . Oblicz obwód i pole tego rombu.

b) W rombie o boku długości 4 cm i kącie ostrym 60° połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano prostokąt. Oblicz jego pole.

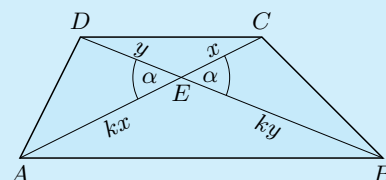
11. Zauważmy, że $\angle EAB = \angle ECD$ i $\angle EBA = \angle EDC$ (kąty naprzemianległe) oraz $\angle AEB = \angle DEC$ (kąty wierzchołkowe). Na mocy cechy KKK $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, ich skalę podobieństwa oznaczmy przez k .

$\angle AED = \angle BEC = \alpha$ (kąty wierzchołkowe)

Wówczas $P_{AED} = \frac{1}{2}kx \cdot y \cdot \sin \alpha$

oraz $P_{BCE} = \frac{1}{2}ky \cdot x \cdot \sin \alpha$.

Zatem $P_{AED} = P_{BCE}$.



4.10. Zagadnienia uzupełniające

■ Dowody twierdzenia Pitagorasa

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa. Autorem pierwszego z przedstawionych poniżej dowodów jest 20. prezydent Stanów Zjednoczonych James Abram Garfield [czyt. dżejms abram garfild] (1831–1881).

Dowód 1

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a + b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC , CDE i ACE :

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

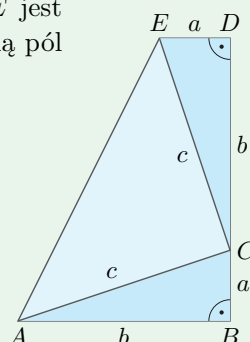
Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a + b)(a + b)$$

i otrzymujemy równość:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



Dowód 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy kwadrat o boku $a + b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek poniżej).

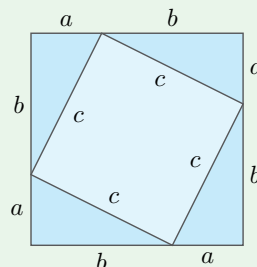
Duży kwadrat ma bok równy $a + b$, więc jego pole:

$$P = (a + b)^2$$

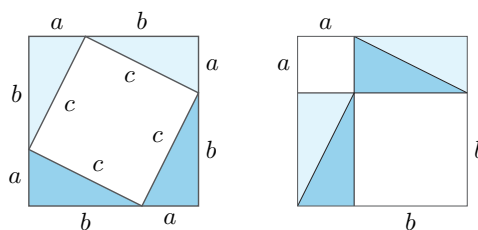
Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b$$

Zatem $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.



- D** 1. Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, korzystając z przedstawionych obok rysunków.



Odpowiedzi do zadań

1. Oba rysunki przedstawiają kwadrat o boku długości $a + b$.
 Obliczamy pole tego kwadratu:
 z pierwszego rysunku: $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$,
 z drugiego rysunku: $a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$.
 Zatem $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$, czyli $c^2 = a^2 + b^2$.

Uzasadnienie

Na mocy cechy BBB

$\triangle ABC \equiv \triangle CDE$, stąd

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCE = \alpha$ oraz

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CED = \beta$, ponadto

$\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\sphericalangle ACE =$

$= 180^\circ - \sphericalangle DCE - \sphericalangle ACB =$

$= 180^\circ - \alpha - \beta =$

$= 180^\circ - (\alpha + \beta) =$

$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

2. a) Niech P_T , P_K – pola odpowiednio trójkąta i małego kwadratu.

Pole dużego kwadratu:

$$\begin{aligned} P &= c^2 \\ P &= 4P_T + P_K = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = \\ &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

b) Z założeń zadania:

$c = 8$, czyli $c^2 = a^2 + b^2 = 64$.

Ponadto $a - b = 2$.

$$\begin{cases} (2+b)^2 + b^2 = 64 \\ a = 2+b \end{cases}$$

$$b^2 + 2b - 30 = 0$$

$$\Delta = 124, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{31}$$

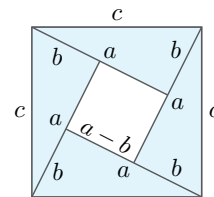
$$b = \frac{-2-2\sqrt{31}}{2} < 0$$

$$\text{lub } b = \frac{-2+2\sqrt{31}}{2} = \sqrt{31} - 1$$

Zatem:

$$a = \sqrt{31} + 1, b = \sqrt{31} - 1.$$

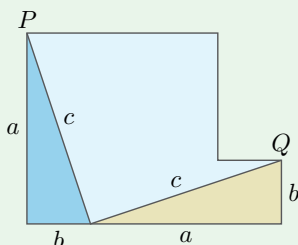
- D** 2. a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, wyznaczając pole dużego kwadratu przedstawionego na rysunku obok.
b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b .



Dowód 3

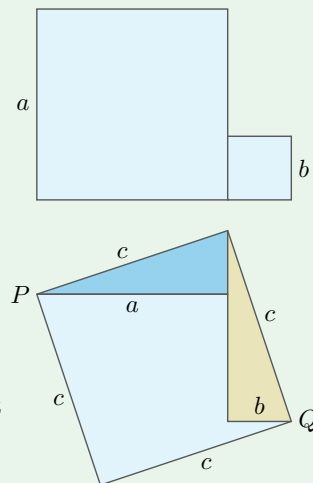
Rozpatrzmy dwa kwadraty o bokach a i b położone jak na rysunku obok. Suma ich pól jest równa $a^2 + b^2$.

Trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c są przystające (rysunek poniżej).



Trójkąt niebieski obracamy wokół punktu P , a żółty – wokół punktu Q , aż otrzymamy kwadrat o boku c .

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



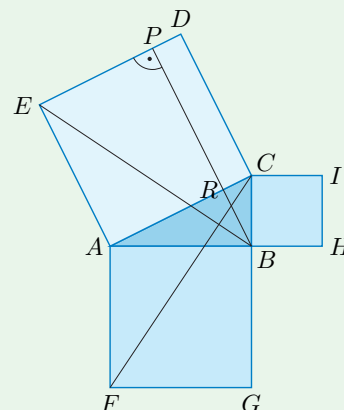
Twierdzenie Pitagorasa można sformułować następująco:

Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych.

Szkic dowodu 4

- Trójkąty FAC i BAE są przystające.
- Pole trójkąta FAC jest równe połowie pola kwadratu $AFGB$.
- Pole trójkąta BAE jest równe połowie pola prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $AFGB$ jest równe polu prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $CBHI$ jest równe polu prostokąta $DCRP$.

Przedstawione powyżej rozumowanie pochodzi z I księgi „Elementów” Euklidesa.



- D** 3. Podaj uzasadnienia kolejnych etapów szkicu dowodu 4.

3. ■ $|FA| = |BA|$ (boki kwadratu $FABG$), $|AC| = |AE|$ (boki kwadratu $AEDC$),
 $\sphericalangle FAC = 90^\circ + \sphericalangle CAB = \sphericalangle BAE$

Zatem na mocy cechy BKB: $\triangle FAC \equiv \triangle BAE$.

- Wysokość trójkąta FAC opuszczona z wierzchołka C jest równa długości boku AB .

$$P_{FAC} = \frac{1}{2}|FA| \cdot |AB| = \frac{1}{2}P_{AFGB}$$

- Wysokość trójkąta BAE opuszczona z wierzchołka B jest równa długości boku EP .

$$P_{BAE} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |EP| = \frac{1}{2}P_{AEPR}$$

- $\triangle FAC \equiv \triangle BAE$, czyli $P_{FAC} = P_{BAE}$, zatem $P_{AFGB} = P_{AEPR}$.

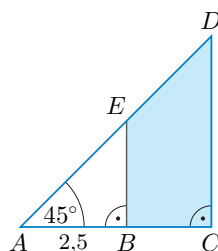
- Analogicznie $\triangle ICA \equiv \triangle BCD$, $P_{ICA} = \frac{1}{2}P_{CBHI}$ oraz $P_{BCD} = \frac{1}{2}P_{DCRP}$, czyli $P_{CBHI} = P_{DCRP}$.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

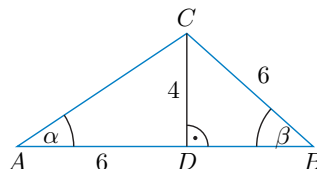
1. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm. Punkt P jest środkiem odcinka AB . Oblicz wysokości trójkąta APC .

2. Oblicz obwód trójkąta ACD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że krótsza przekątna trapezu $BCDE$ ma długość równą $\frac{1}{2}\sqrt{41}$.



3. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole prostokąta.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β w trójkącie ABC (rysunek obok).



5. a) W trójkącie prostokątnym, którego obwód jest równy 60, tangens jednego z kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) W trójkącie prostokątnym o polu równym $4\sqrt{2}$ sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
c) W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej 16 i kątach ostrych α i β zachodzi równość $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC .

- a) $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 2)$ c) $A(-6, 1)$, $B(6, -4)$, $C(6, 1)$
b) $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 4)$ d) $A(-1, -5)$, $B(4, 5)$, $C(-4, 1)$

7. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli wiadomo, że:

- a) $\sin \alpha = 0,1$, c) $\cos \alpha = \frac{1}{6}$, e) $\tan \alpha = \frac{8}{15}$, g) $\tan \alpha = \frac{1}{4}$,
b) $\cos \alpha = 0,9$, d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, f) $\tan \alpha = \sqrt{5}$, h) $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$.

8. Rozwiąż trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB , jeśli:

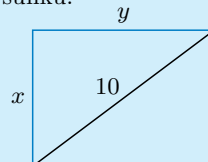
- a) $\angle ACB = 40^\circ$, a wysokość CD trójkąta ma 6 cm,
b) jego obwód jest równy 34 cm, a wysokość CD ma 13 cm,
c) jego pole jest równe 12 cm^2 , a $\angle CAB = 40^\circ$.

7. a) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\tan \alpha = \sqrt{35}$
d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$
f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$
g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$
h) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$

8. a) $\alpha = \beta = 70^\circ$,
 $a = b \approx 6,39$ cm, $c \approx 4,37$ cm
b) $a = b = \frac{229}{17}$ cm, $c = \frac{120}{17}$ cm,
 $\alpha = \beta \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 30^\circ$
c) $a = b \approx 4,94$ cm, $c \approx 7,56$ cm,
 $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 100^\circ$

Odpowiedzi do zadań

1. $\sqrt{3}$ cm, 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm
2. $|BC| = \sqrt{|EC|^2 - |BE|^2} = 2$
 $Ob = 4,5(2 + \sqrt{2})$
3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



I sposób

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

czyli $x = 6$, $y = 8$.
Zatem pole $P = 48$.

II sposób

$$P = xy = \frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$P = \frac{1}{2}(14^2 - 10^2) = 48$$

4. $|AC| = 2\sqrt{13}$, $|BD| = 2\sqrt{5}$
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \beta = \frac{2}{3}$,
 $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
5. a) 10, 24, 26
b) $4(\sqrt{2} + 2)$
c) $16\sqrt{7}$
6. a) $\sin \beta = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \beta = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\tan \beta = \frac{2}{3}$, $\tan \gamma = \frac{3}{2}$
b) $\sin \alpha = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \alpha = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, $\tan \gamma = \frac{3}{2}$
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$, $\tan \beta = \frac{12}{5}$
d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5}$,
 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$

9. a) około 329,26 m

b) około 70°

10. a) $x = 500 \sin 5^\circ \approx 43,6$ [m]

b) $\frac{0,13}{s} = \sin 5^\circ$

$s \approx 1,49$ [km]

$t = \frac{s}{v} \approx \frac{1,49}{4,5} \approx 0,33$ [h],

czyli około 20 minut

11. $\frac{|SC|}{|BC|} = \operatorname{tg} 50^\circ$,

stąd $|BC| = \frac{|SC|}{\operatorname{tg} 50^\circ}$

$\frac{|SC|}{800 + |BC|} = \operatorname{tg} 29^\circ$,

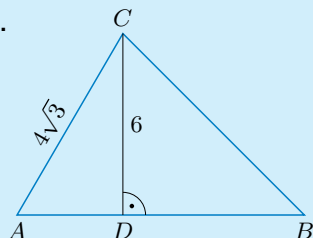
stąd $|SC| =$

$$= 800 \operatorname{tg} 29^\circ + \frac{|SC| \operatorname{tg} 29^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ}$$

$$|SC| = \frac{800 \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 29^\circ} \approx 829 \text{ [m]}$$

Zestaw II

1.



$$|AD| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 2\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$\triangle ADC$ jest trójkątem 30° , 60° , 90° o kącie 30° w wierzchołku C , co oznacza, że $\triangle BDC$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Stąd $|DB| = 6$ cm.

Zatem:

$$P = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 6) \cdot 6 = 6(\sqrt{3} + 3) \text{ [cm}^2\text{]}$$

2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

4. $\sin \sphericalangle BAP = \frac{\sqrt{21}}{14}$,
 $\sin \sphericalangle ABP = \frac{1}{2}$

5. $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 4\sqrt{13}$ cm,
 $P = 24\sqrt{3}$ cm²

6. 8 cm²

9. a) Obserwator widzi wierzchołek 70-metrowej wieży stojącej na płaskim terenie pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? Pomiń wzrost obserwatora.

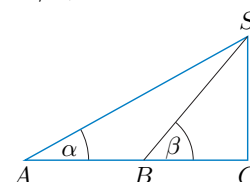
b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.

10. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5° .

a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

11. Z punktów A i B oddalonych od siebie o 800 m widać szczyt góry S pod kątami $\alpha = 29^\circ$ i $\beta = 50^\circ$. Oblicz wysokość SC tej góry.



Zestaw II

1. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75° , bok AC ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

3. a) Obwód rombu jest równy 52 cm, a jedna z jego przekątnych ma długość 10 cm. Oblicz pole tego rombu oraz sinus kąta ostrego.
b) Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm². Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu.

4. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Kąt BAD ma miarę 60° , a przekątna BD ma długość $6\sqrt{3}$ i jest prostopadła do boku AD . Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta ABP .

5. W równoległoboku o obwodzie 32 cm jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego, a kąt rozwarty ma miarę 120° . Oblicz długości przekątnych i pole tego równoległoboku.

6. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 6 cm, a kąt między przekątną a tą podstawą ma miarę α . Oblicz pole tego trapezu, jeśli jego wysokość jest równa 2 cm, a $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. a) Niech $d_1 = 10$ cm i d_2 będą przekątnymi rombu, wówczas:

$$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = 13^2$$
$$d_2 = 24 \text{ cm}$$

Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$120 = 13^2 \cdot \sin \alpha, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{120}{169}$$

b) $a = 12$ cm, $P = 108$ cm²

$P = a^2 \sin \alpha$, czyli:

$$144 \sin \alpha = 108$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.



7. Dany jest trapez prostokątny o kącie ostrym α , dłuższej podstawie a , krótszej podstawie b i wysokości h . Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu, jeśli:
- a) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm, b) $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ cm, $h = 4$ cm.
8. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P . Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD .
9. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz pole tego trapezu.
10. Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 30° i podstawach długości 16 i 12. Oblicz obwód i pole tego trapezu.
11. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α , do którego ramienia końcowego należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.
- a) $P(1, 4)$ b) $P(-1, 4)$ c) $P(-3, 2)$ d) $P(-2, 3)$

D 12. Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ spełniający podane równanie.

a) $\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos \alpha$ b) $\sqrt{5} \sin \alpha = 5 - \sqrt{5}$ c) $3 \cos \alpha + \sqrt{3} = 6$

13. Oblicz.

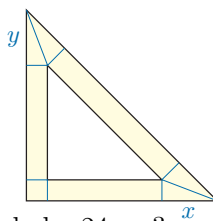
a) $\sin 30^\circ (\cos 0^\circ - 2 \cos 135^\circ)$ e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$
 b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$ f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$
 c) $\frac{\sin 150^\circ - 2 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$ g) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$
 d) $\frac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$ h) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

D 14. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.

a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$ c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$
 b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$ d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

- *15. Ekierki mające kształt połowy kwadratu o boku 20 cm są produkowane z drewnianych listew o szerokości 2 cm i grubości 2 mm. Jaka jest objętość drewna zużytego do wyprodukowania 1000 takich ekierek? Pomijamy objętość odpadów. Jaka byłaby objętość drewna zużytego do wyprodukowania z takich samych listew 1000 ekierek mających kształt połowy trójkąta równobocznego o boku 24 cm?



7. a) $Ob = 2(11 + 3\sqrt{3})$ cm, $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
 b) $Ob = 4(8 + \sqrt{3})$ cm, $d_1 = 2\sqrt{29}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ cm
 8. $\sin \angle PAD = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \angle PAD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \angle PAD = \frac{1}{3}$
 9. $21(3 - \sqrt{3})$
 10. $Ob = 28 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $P = \frac{28\sqrt{3}}{3}$
 11. a) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = 4$
 b) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -4$
 c) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$
 d) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$
 12. a) $\frac{1}{6} \cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = \frac{3}{2} \geq 1$ – sprzeczność
 b) $\sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{5} = \sqrt{5} - 1 \geq 1$ – sprzeczność
 c) $\cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \geq 1$ – sprzeczność
 13. a) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ b) 0 c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) 1
 g) $3 - \sqrt{3}$ h) $-\frac{8}{3}$

14. a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2(90^\circ - 37^\circ) = \sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ = 1$
 b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2(90^\circ - 18^\circ) = \sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1$
 c) $\sin 20^\circ \cdot \cos(90^\circ - 20^\circ) + \cos^2 20^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$
 d) $\sin^2 26^\circ + \sin(90^\circ - 26^\circ) \cdot \cos 26^\circ = \sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ = 1$

15. 1° Pole podstawy ekierki:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 20^2 - \frac{1}{2}(20 - 2 - 2 - 2\sqrt{2})^2 = 68 + 32\sqrt{2} \approx 113,255 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Objętość 1000 ekierek: } V = 1000 \cdot P \cdot 0,2 \approx 22\,651 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$2^\circ x = 2\sqrt{3}, y = \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ}$$

Pole podstawy ekierki:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} - \frac{1}{2}(12 - 2 - 2\sqrt{3})(12\sqrt{3} - 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ}) \approx 87,717 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Objętość 1000 ekierek: } V = 1000 \cdot P \cdot 0,2 \approx 17\,543 \text{ [cm}^3\text{]}$$

**Przykład**

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB i CDB (cecha KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm], zatem:

$$|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB :

$$\cos \beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Zatem } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP , więc:

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \sin \beta, \text{ stąd } |AP| = |AB| \cdot \sin \beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}.$$

III sposób

Obliczamy wysokość CD trójkąta ABC : $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Pole trójkąta ABC obliczamy na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP| \text{ [cm}^2\text{]}$$

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

IV sposób

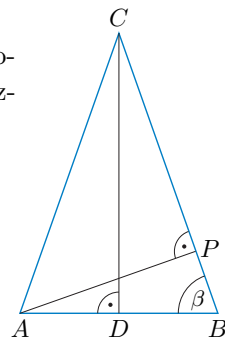
Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} |AP|^2 = 4^2 - x^2 \\ |AP|^2 = 6^2 - (6 - x)^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie $4^2 - x^2 = 6^2 - (6 - x)^2$ i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm oraz

$$|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Odpowiedź: } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$





Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c , może mieć pole równe:

A. $\frac{1}{4}c^2$, B. $\frac{1}{3}c^2$, C. $\frac{1}{2}c^2$, D. c^2 .

2. Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem:

A. 90° , B. 60° , C. 45° , D. 30° .

3. Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, to $\cos \alpha$ jest równy:

A. $\frac{4}{5}$, B. $\frac{\sqrt{6}}{5}$, C. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, D. $\frac{1}{4}$.

4. Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału:

A. $(0^\circ; 30^\circ)$, B. $(30^\circ; 45^\circ)$, C. $(45^\circ; 60^\circ)$, D. $(60^\circ; 90^\circ)$.

5. Jeżeli w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 50 cm, a sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{24}{25}$, to:

A. pole tego trójkąta jest równe 300 cm^2 ,

B. obwód tego trójkąta jest równy 112 cm,

C. cosinus jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{1}{25}$,

D. tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{25}{24}$.

6. Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} = \tan 30^\circ$,

C. $\cos \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$,

B. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$,

D. $2 \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

7. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$

C. $2 \sin^2 30^\circ - 2 \cos^2 30^\circ$

B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$

D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4} \tan 45^\circ$

8. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$

C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$

B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$

D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

9. Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \tan 135^\circ) \cdot \frac{\tan 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby:

A. -1,

B. 1,

C. $\sqrt{3}$,

D. $-\sqrt{3}$.

7. A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ = \sin 40^\circ - \sin 40^\circ = 0 \neq 1$

B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ = \sin 29^\circ + \sin 29^\circ = 2 \sin 29^\circ \neq 2 \sin 30^\circ = 1$

C. $2 \sin^2 30^\circ - 2 \cos^2 30^\circ = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = -1 \neq 1$

D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4} \tan 45^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1$

8. A. $\sin(90^\circ - 29^\circ) + \cos(180^\circ - 29^\circ) = \cos 29^\circ - \cos 29^\circ = 0 \neq 1$

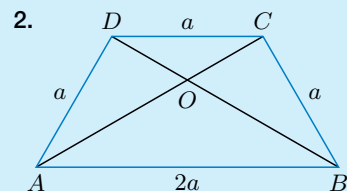
B. $\sin(180^\circ - 29^\circ) - \cos(90^\circ - 29^\circ) = \sin 29^\circ - \sin 29^\circ = 0 \neq 1$

C. $\sin(180^\circ - 29^\circ) \cdot \cos(90^\circ - 29^\circ) = \sin^2 29^\circ \neq 1$

D. $\sin(180^\circ - 29^\circ) : \cos(90^\circ - 29^\circ) = \frac{\sin 29^\circ}{\sin 29^\circ} = 1$

9. $(\sin(180^\circ - 30^\circ) + \tan(180^\circ - 45^\circ)) \cdot \frac{\tan(180^\circ - 60^\circ)}{\cos(180^\circ - 30^\circ)} = (\sin 30^\circ - \tan 45^\circ) \cdot \frac{-\tan 60^\circ}{-\cos 30^\circ} = -1$

1. Trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości $\frac{c\sqrt{2}}{2}$.



Zauważmy, że:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA = 60^\circ$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 120^\circ$$

Trójkąt DCB jest równoramienny, czyli:

$$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = 30^\circ$$

Zatem $\sphericalangle DBA = 30^\circ$

i analogicznie $\sphericalangle CAB = 30^\circ$,

czyli $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ oraz

$$\sphericalangle COB = 60^\circ.$$

6. A. $\sqrt{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq \tan 30^\circ$

$$\text{B. } \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\text{C. } \cos \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{D. } 2 \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \neq \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$



Odpowiedzi do zadań

1. Długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{10}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$$

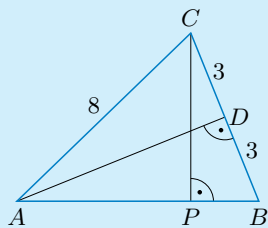
- 2.
- $\sin \alpha = \frac{|OD|}{|AO|}$
- , czyli:

$$|OD| = 0,8 \cdot 6 = 4,8$$

$$|AD| = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6$$

$$|AB| = 2|AD| = 7,2$$

3.



$$|AD| = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{55} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |PC|,$$

$$\text{czyli } |PC| = \frac{3\sqrt{55}}{4}$$

$$|BP| = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3\sqrt{55}}{4}\right)^2} = 2,25$$

$$|AP| = 5,75$$

- 4.
- $\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 = 5$
- , czyli
- $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{i } \alpha \in (90^\circ; 180^\circ),$$

$$\text{stad } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 5.
- $(2x + 0,5)^2 = (x - 2,5)^2 +$

$$+ (2x)^2 \text{ i } x > 2,5$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \text{ i } x > 2,5,$$

$$\text{czyli } x = 6$$

$$Ob = 5x - 2 = 28,$$

$$\sin \alpha = \frac{3,5}{12,5} = \frac{7}{25},$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{12,5} = \frac{24}{25},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3,5}{12} = \frac{7}{24}$$

6. Długości boków:
- $2n, 2n + 2,$

$$2n + 4, \text{ gdzie } n > 0.$$

$$(2n)^2 + (2n + 2)^2 =$$

$$= (2n + 4)^2, \text{ gdzie } n > 0$$

$$\text{Stąd } n = 3 \text{ oraz długości}$$

$$\text{boków trójkąta: } 6, 8, 10$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

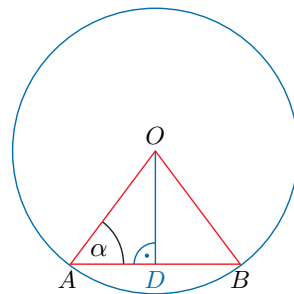
Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β . Oblicz $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Oblicz długość cięciwy AB , jeśli $\sin \alpha = 0,8$.



Zadanie 3 (2 pkt)

Punkt P jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C . Oblicz długości odcinków AP i BP , jeśli $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$.

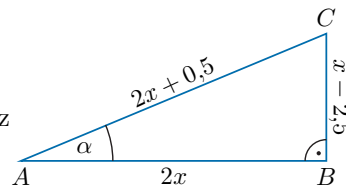
Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz cosinus kąta rozwartego, jeśli kwadrat odwrotności sinusa tego kąta jest równy 5.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Oblicz obwód trójkąta ABC (rysunek obok) oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .



Zadanie 6 (4 pkt)

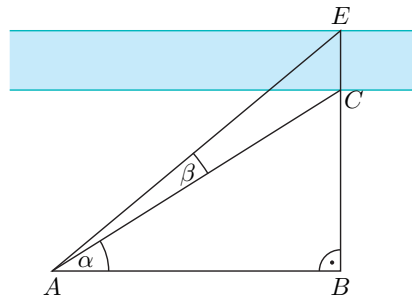
Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \sin \beta)^2$.

Zadanie 7 (4 pkt)

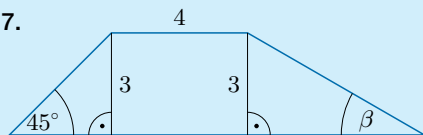
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości 3 cm. Jego kąty ostre przylegają do dłuższej podstawy, a jeden z nich ma miarę równą 45° . Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 8 (4 pkt)

Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), dokonano pomiarów w terenie: $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 8^\circ$, $|AC| = 120$ m. Oblicz szerokość rzeki.



7.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ zatem } \beta = 30^\circ$$

$$\cos(180^\circ - 45^\circ) \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$= -\cos 45^\circ \cdot (-\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

8. $\frac{|BC|}{120} = \sin 32^\circ$, czyli $|BC| = 120 \cdot \sin 32^\circ$

$$\frac{|AB|}{120} = \cos 32^\circ, \text{ czyli } |AB| = 120 \cdot \cos 32^\circ$$

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \operatorname{tg} 40^\circ,$$

$$\text{czyli } |BE| = 120 \cdot \cos 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$|CE| = |BE| - |BC| =$$

$$= 120 \cdot (\cos 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ - \sin 32^\circ) \approx$$

$$\approx 120 \cdot (0,848 \cdot 0,8391 - 0,5299) \approx 21,8 \text{ [m]}$$