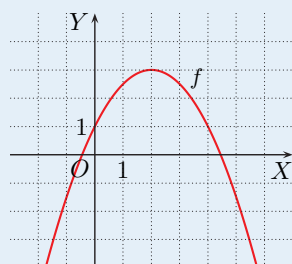


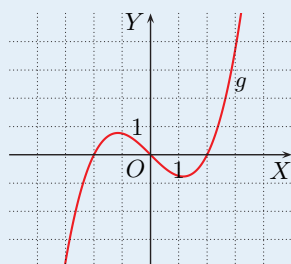


2 Wielomiany

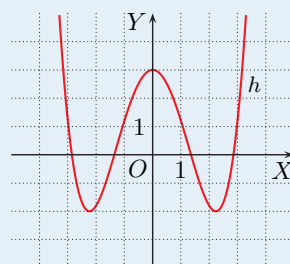
Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Na przykład za pomocą wielomianu można opisać zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$



$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$$



$$h(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^2 + 3$$

Uczeń:

- rozróżnia wielomian, podaje przykład wielomianu, określa jego stopień i podaje wartości jego współczynników
- zapisuje wielomian określonego stopnia o danych współczynnikach
- zapisuje wielomian w sposób uporządkowany
- oblicza wartość wielomianu dla danego argumentu
- wyznacza brakujące współrzędne punktu należącego do wykresu danego wielomianu
- sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu danego wielomianu
- wyznacza współczynniki wielomianu spełniającego dane warunki

Ćwiczenie 1

- a) tak, stopnia 7
- b) tak, stopnia 1
- c), d) nie
- e) tak, stopnia 3

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}_+$.

Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.

Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

- a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$$y = x^3 + 2x$$

dwumian trzeciego stopnia

$$y = 5x^4 + 1$$

dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)

$$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$$

trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$$

wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy **wielomianem stopnia n** .

Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.

Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.

Liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynniki** wielomianu.

Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\text{st}(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$ c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$
b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$ d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

$$a_4 = 5, a_3 = 0, a_2 = -2, a_1 = \frac{1}{3}, a_0 = 1, \text{ stopień wielomianu: } \text{st}(w) = 4$$

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

- a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3, a_3 = a_1 = 0,$ b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4.$

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2, x = -2$ i $x = 0$.

$$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$$

$$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$$

$$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w .

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0, x = 2$ i $x = -2$.

- a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

- a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

- a) $w(0) = -4, w(2) = 10, w(-2) = -26$
b) $w(0) = 1, w(2) = 21, w(-2) = 13$
c) $w(0) = -2, w(2) = 32, w(-2) = -44$
d) $w(0) = 3, w(2) = -47, w(-2) = -75$

Ćwiczenie 6

- a) $w(-\frac{1}{2}) = 6, w(\frac{3}{2}) = -24$
b) $w(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}, w(\frac{3}{2}) = \frac{265}{2} = 132\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1,$
 $\text{st}(w) = 5$
b) $w(x) = 2x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 +$
 $-x^3 - x, \text{st}(w) = 6$
c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 +$
 $+6x - 2, \text{st}(w) = 8$
d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 +$
 $-\frac{1}{2}x + 5, \text{st}(w) = 10$

Ćwiczenie 3

- a) $a_5 = -2, a_4 = a_3 = a_2 = 0,$
 $a_1 = 1, a_0 = 0, \text{st}(w) = 5$
b) $a_6 = 1, a_5 = -\frac{1}{2}, a_4 = 1,$
 $a_3 = 0, a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 1,$
 $\text{st}(w) = 6$
c) $a_0 = 2^{10}, \text{st}(w) = 0$

Ćwiczenie 4

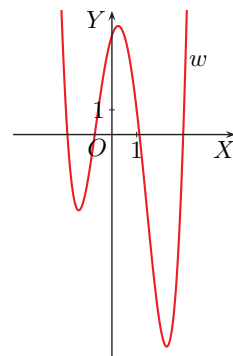
- a) $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Odpowiedzi do zadań

- $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$,
 $a_3 = 1, a_2 = -6, a_1 = 0, a_0 = 4$
 - $w(x) = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - 1$,
 $a_5 = -\frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_2 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_0 = -1$,
 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -\frac{3}{4}$
- $w(0) = -3, w(\frac{1}{2}) = -\frac{27}{8}, w(-2) = -19, w(-3) = -69$
 - $w(0) = 2, w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}, w(-2) = 32, w(-3) = 80$
 - $w(0) = -4, w(\frac{1}{2}) = -\frac{27}{8}, w(-2) = -34, w(-3) = -76$
 - $w(0) = -10, w(\frac{1}{2}) = -\frac{183}{16}, w(-2) = -58, w(-3) = -214$
- $a = 1, b = -2, c = -8, d = 4$
- punkt Q ,
 $u(-2) = -17 \neq 7, u(2) = -5$
 - punkt P ,
 $u(\frac{1}{2}) = 2, u(-\frac{1}{2}) = -2 \neq -1$
- $w(1) = a + 1 + 1 = 3, a = 1$
 - $w(3) = 81 - 9 + a = 0, a = -72$
 - $w(-4) = -64 + 16a + 3 = 3, a = 4$
 - $w(2) = 16a + 10 = -6, a = -1$
- $\begin{cases} 3 + a - b + 2 = 4 \\ -24 + 4a + 2b + 2 = 20 \end{cases}$
 $a = 6\frac{2}{3}, b = 7\frac{2}{3}$
 - $\begin{cases} 81 - 27a + 9b + 2 = 11 \\ 1 + a + b + 2 = 7 \end{cases}$
 $a = 3, b = 1$
- a) B, C b) A
- a) $a = 3$ b) $a = 3$

Zadania

- Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0,1x^4, v(x) = -6x^2 + 4 + x^3, w(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:
 - stopnia trzeciego, uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3, a_2, a_1 i a_0 ,
 - stopnia piątego, uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę.
- Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$.
- Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -2$ i $x = -3$.
 - $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$
 - $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$
 - $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$
 - $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$
- Punkty: $P(1, a), Q(-1, b), R(2, c), S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne: a, b, c i d .
- Które z punktów: P, Q należą do wykresu wielomianu u ?
 - $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1, P(-2, 7), Q(2, -5)$
 - $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}, P(\frac{1}{2}, 2), Q(-\frac{1}{2}, -1)$
- Oblicz współczynnik a wielomianu w , jeśli:
 - $w(x) = ax^2 + x + 1, w(1) = 3,$
 - $w(x) = 3x^3 - x^2 + a, w(3) = 0,$
 - $w(x) = x^3 + ax^2 + 3, w(-4) = 3,$
 - $w(x) = ax^4 + 4x + 2, w(2) = -6.$
- Oblicz współczynniki a i b wielomianu w , jeśli:
 - $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2, w(-1) = 4, w(2) = 20,$
 - $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2, w(-3) = 11, w(1) = 7.$



Powtórzenie

- Które spośród punktów: $A(1, 1), B(\frac{1}{3}, 5), C(-1, -3)$ należą do wykresu wielomianu w ?
 - $w(x) = -3x^3 - 8x^2 + 3x + 5$
 - $w(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3$
- Oblicz współczynnik a wielomianu w , jeśli:
 - $w(x) = x^2 - ax + 3, w(2) = 1,$
 - $w(x) = 2ax^4 - ax^3 - 5, w(-1) = 4.$

- Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} w(1) &= a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = \\ &= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

co należało uzasadnić.

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{ i } \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= \underline{2x^4} + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x} - \underline{5} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w . Podaj stopień wielomianu u , wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\text{st}(u) = 4$, $\text{st}(w) = 4$ oraz:

a) $\text{st}(u + w) = 4$, c) $\text{st}(u + w) = 2$, e) $\text{st}(u + w) = 0$.

b) $\text{st}(u + w) = 3$, d) $\text{st}(u + w) = 1$,

Twierdzenie

Jeśli wielomiany: u , w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$, to:

$$\text{st}(u + w) \leq \text{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w , jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Ćwiczenie 3

Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u , tzn.:

$$w(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$$

Uczeń:

- wyznacza sumę i różnicę wielomianów
- określa stopień sumy i różnicy wielomianów
- szkicuje wykres wielomianu będącego sumą jednomianów stopnia pierwszego i drugiego
- odczytuje informacje z danego wykresu wielomianu
- wyznacza sumę i różnicę wielomianów wielu zmiennych
- stosuje wielomian do opisania np. pola powierzchni prostopadłościanu i określa dziedzinę tego wielomianu
- oblicza wartość wielomianu dwóch (trzech) zmiennych dla danych argumentów

Komentarz

Warto sprawdzić, czy wszyscy uczniowie rozumieją pojęcia sumy i różnicy wielomianów.

Ćwiczenie 1

a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 + -3x^2 + 2x$, $\text{st}(u) = 4$,
 $\text{st}(w) = 3$, $\text{st}(u + w) = 4$

b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 + -2x^2 + 5$, $\text{st}(u) = 7$,
 $\text{st}(w) = 7$, $\text{st}(u + w) = 4$

Ćwiczenie 2

a) np. $u(x) = x^4 + 1$, $w(x) = x^4$

b) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + x^3$

c) np. $u(x) = -x^4 - x + 1$,
 $w(x) = x^4 + x^2$

d) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + x + 1$

e) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + 1$

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= \underline{6x^4} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{3} - \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{5x} = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w .

Ćwiczenie 4

- a) $u(x) - w(x) = 5x^9 + 4x^8 + 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $\text{st}(u) = 9$, $\text{st}(w) = 8$, $\text{st}(u - w) = 9$
- b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 + -\frac{1}{2}x^2 + 1$, $\text{st}(u) = 6$, $\text{st}(w) = 6$, $\text{st}(u - w) = 4$

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów: u , w i $u - w$.

- a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
- b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0,75x^6 - 0,2x^4 + 0,125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x) = \\ &= \underline{9x^4} - \underline{6x^3} - \underline{x^2} + \underline{3} - \underline{10x^4} - \underline{2x^3} + \underline{4x^2} - \underline{3x} = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2 .

Ćwiczenie 5

- a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7$, $h(-1) = 5$
- b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4$, $h(-1) = -25$

Ćwiczenie 5

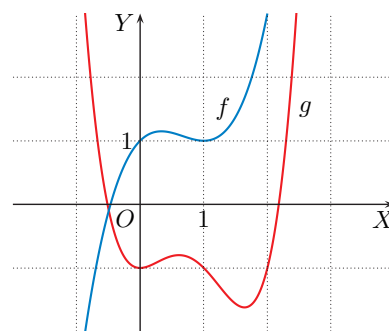
Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

- a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$
- b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1,5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

- a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?
- b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w ?



Ćwiczenie 6

- a) $f(1) = 1$, $g(1) = -1$, $u(1) = 2f(1) + 4g(1) = -2$; należy
- b) $f(0) = 1$, $g(0) = -1$, $a = w(0) = 2f(0) - 3g(0) = 5$

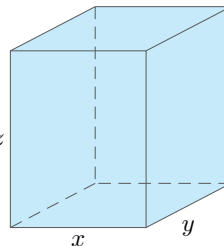
Oprócz wielomianów jednej zmiennej (patrz str. 56) rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x, y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x, y, z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

Podaj wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej oraz wielomian opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x, y, z (rysunek obok).



$P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x, y, z) = xyz$.

Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę wielomianów u i w .

$$u(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \quad w(x, y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + w(x, y) &= \underline{3x^2y} + 6xy^2 - \underline{4xy} + 5xy^3 + \underline{4x^2y} + \underline{xy} + 2 = \\ &= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2 \end{aligned}$$

b) Wyznacz różnicę wielomianów u i w .

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \quad w(x, y, z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2 \\ u(x, y, z) - w(x, y, z) &= 5x^2y^2z^2 - \underline{4xyz^2} - 5x^2y^2z + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 = \\ &= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w .

a) $u(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2, \quad w(x, y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + 3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + 1, \quad w(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^2 - x + 4$

Ćwiczenie 8

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w .

a) $u(x, y, z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3, \quad w(x, y, z) = xy^2z^3 + 6x^2yz^2 + 2xyz^3$

b) $u(x, y, z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2, \quad w(x, y, z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Ćwiczenie 7

a) $u(x, y) + w(x, y) = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - 9x^2y^2 - 4xy - 1$

$$u(x, y) - w(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^3 + 3x^2y^2 + 8xy + 5$$

b) $u(x, y) + w(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + \frac{10}{3}x^3y - \frac{1}{6}xy^2 - x + 5$

$$u(x, y) - w(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + \frac{8}{3}x^3y - \frac{5}{6}xy^2 + x - 3$$

Ćwiczenie 8

a) $u(x, y, z) + w(x, y, z) = -6x^2y^2z + 6x^2yz^2 + 5xy^2z^3 + xyz^3$

$$u(x, y, z) - w(x, y, z) = -6x^2y^2z - 6x^2yz^2 + 3xy^2z^3 - 3xyz^3$$

b) $u(x, y, z) + w(x, y, z) = 8x^2y + 14xz^2 - 4yz^2 + z^3$

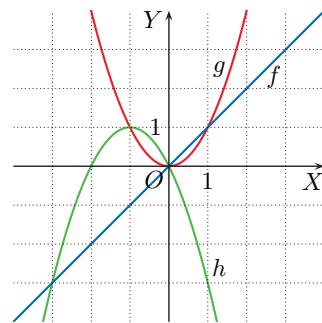
$$u(x, y, z) - w(x, y, z) = 8x^2y - 2xz^2 - 8y^2z + 2yz^2 - z^3$$

Odpowiedzi do zadań

- $f(x) + g(x) = x^6 + x^3 + x^2 - 2x + 6,$
 $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^6 - 4x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
 - $f(x) + g(x) = -3x^5 + x^2 + -x + 2,$
 $f(x) - g(x) = -2x^6 + 3x^5 - 5x^2 + 9x + 2$
 - $f(x) + g(x) = x^5 + 3x^4 + x - 3,$
 $f(x) - g(x) = 4x^7 - x^5 + 3x^4 + 7x - 7$
- $w(x) = 2x^5 + 6x^4,$
 $\text{st}(w) = 5, S_w = 8,$
 $u(x) = -\frac{1}{3}x^5 - x^4, \text{st}(u) = 5,$
 $S_u = -\frac{4}{3}$
 - $w(x) = 12x^2 - 18x,$
 $\text{st}(w) = 2, S_w = -6,$
 $u(x) = -2x^2 + 3x, \text{st}(u) = 2,$
 $S_u = 1$
- $f(5) = 3, g(5) = 20$
 - $u(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{7},$
 $w(-\frac{1}{2}) = -\frac{31}{7}$
- $\text{st}(p+q) = 5$
 - $\text{st}(p+q) \leq 5$ lub $p+q \equiv 0$
 - Jeśli $m \neq n$, to
 $\text{st}(p+q) = \max(m, n).$
 Jeśli $m = n$, to $\text{st}(p+q) \leq n$
 lub $p+q \equiv 0$.
- $\text{st}(u+w) = 6$ dla $a \neq 0,$
 $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a = 0$
 - $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \neq -6,$
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -6$
 - $\text{st}(u+w) = 4$ dla
 $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},$
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $a = 1,$
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -1$

Zadania

- Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g .
 - $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 + 4, \quad g(x) = \frac{1}{4}x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$
 - $f(x) = -2x^2 + 4x - x^6 + 2, \quad g(x) = -5x + 3x^2 + x^6 - 3x^5$
 - $f(x) = 3x^4 + 2x^7 - 5 + 4x, \quad g(x) = -3x + x^5 - 2x^7 + 2$
- Wyznacz wielomiany $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$ oraz $u(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.
 - $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3, \quad g(x) = -2x^4 + \frac{x^2}{3} + 2$
 - $f(x) = 3x^5 + 6x^3 - 9x, \quad g(x) = 2x^5 + 4x^3 - 4x^2$
- Wiadomo, że $f(x) = u(x) + 2w(x), g(x) = 2u(x) - 3w(x)$, gdzie u i w są pewnymi wielomianami. Oblicz:
 - $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5) = 7$ i $w(5) = -2$,
 - $u(-\frac{1}{2})$ i $w(-\frac{1}{2})$, gdy $f(-\frac{1}{2}) = -9$ i $g(-\frac{1}{2}) = 13$.
- Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q , jeśli:
 - $\text{st}(p) = 5, \text{st}(q) = 4,$
 - $\text{st}(p) = 5, \text{st}(q) = 5,$
 - $\text{st}(p) = m, \text{st}(q) = n?$
- Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametru a .
 - $u(x) = 2x^4 - 3x + 6, \quad w(x) = ax^6 + 5x^2 + 4$
 - $u(x) = 3x^6 - ax^5 + 2x^2 - x, \quad w(x) = -3x^6 - 6x^5 - 2x^2 + 9$
 - $u(x) = (a+1)x^3 - x^2 + 4x, \quad w(x) = (a^2-1)x^4 + x^2 + 3$
- Określ stopień wielomianu $u + w$, jeśli $a \in \{0, 1\}$ i $b \in \{0, 3\}$.
 - $u(x) = ax^3 + x^2 - 6, \quad w(x) = bx^5 - x^3 + x + 2$
 - $u(x) = ax^7 + 3x^2 + 4, \quad w(x) = -x^7 - bx^2 - 5x + 6$
 - $u(x) = (a-1)x^4 - bx^3 + 2x^2 + 1,$
 $w(x) = (3-b)x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 9x$
- Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x, g(x) = x^2$ oraz $h(x) = -2f(x) - g(x)$. Naszkiej wykres wielomianu v .
 - $v(x) = 2h(x) + 4g(x)$
 - $v(x) = 2f(x) - g(x) - h(x)$

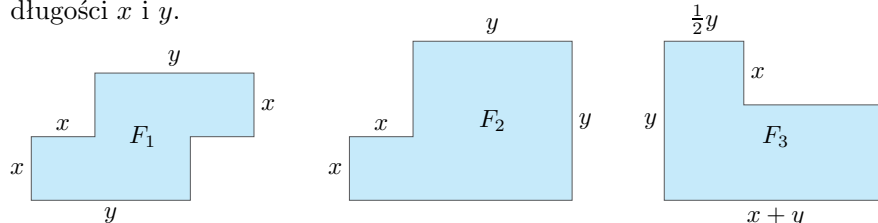


- $\text{st}(u+w) = 2$ dla $a = 1$ i $b = 0,$
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $a = 0$ i $b = 0,$
 $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \in \{0, 1\}$ i $b = 3$
 - $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = 1$ i $b = 3,$
 $\text{st}(u+w) = 2$ dla $a = 1$ i $b = 0,$
 $\text{st}(u+w) = 7$ dla $a = 0$ i $b \in \{0, 3\}$
 - $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = 1$ i $b = 3,$
 $\text{st}(u+w) = 4$ w pozostałych przypadkach
- $v(x) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$
 - $v(x) = 4x$

8. Wyznacz sumę $u+w$ oraz różnicę $u-w$ wielomianów u i w . Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $u(x, y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y$, $w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$
 b) $u(x, y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y$, $w(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$

9. Zapisz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1 , F_2 i F_3 w zależności od długości x i y .



10. Dla której trójki liczb, P czy Q , wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x, y, z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$
 b) $w(x, y, z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$
 c) $w(x, y, z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

11. Wyznacz wielomian $v(x, y, z) = 2u(x, y, z) - 3w(x, y, z)$.

a) $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2$, $w(x, y, z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$
 b) $u(x, y, z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz$, $w(x, y, z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$

12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x , y , z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x+1$, $y+2$, $z+3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

Powtórzenie

13. Dane są wielomiany: $u(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1$, $w(x) = 2x^3 - x^2 + 1,5$. Wyznacz wielomian v .

a) $v(x) = u(x) + 3w(x)$ b) $v(x) = 2u(x) - w(x)$

14. Wyznacz wielomian $v(x) = u(x) - 2w(x)$. Oblicz $v(1)$, $v(-1)$ i $v(-2)$.

a) $u(x) = -3x^4 + 2x^2$, $w(x) = x^4 - 1,5x^2 + 3x$
 b) $u(x) = 8x^3 - 2x^2 + x$, $w(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x$

15. Oblicz wartość wielomianu w dla podanych wartości x i y .

a) $w(x, y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y$, $x = -2$, $y = 3$
 b) $w(x, y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{16}xy^4$, $x = 2$, $y = -4$

11. a) $v(x, y, z) = -x^2yz^2 + 6x^2yz - 2xyz^2 - 3xyz$

b) $v(x, y, z) = 4x^3y^2z - 2xy^2z^2 - 9xyz^2 + 5xyz + 6yz^2$

12. $P(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) + 2(x+1)(y+2) + 2(x+1)(z+3) + 2(y+2)(z+3) =$
 $= 4xy + 4xz + 4yz + 10x + 8y + 6z + 22$

8. a) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= \frac{3}{2}x^3y - \frac{2}{3}x^2y - 2xy^2,$
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= \frac{1}{2}x^3y + \frac{4}{3}x^2y - 4xy^2,$
 $(u+w)(-2, 3) = -8,$
 $(u-w)(-2, 3) = 76$

b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= -\frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{5}{12}xy^3,$
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= \frac{4}{3}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{12}xy^3,$
 $(u+w)(-2, 3) = -52,5,$
 $(u-w)(-2, 3) = 25,5$

9. $P(x, y) = 2xy + (x^2 + y^2) +$
 $+(x+y)(y-x) + \frac{1}{2}xy =$
 $= \frac{5}{2}xy + 2y^2$

10. a) dla P : $w(x, y, z) = 1$,
 dla Q : $w(x, y, z) = 3$,
 czyli dla Q

b) dla P : $w(x, y, z) = 3$,
 dla Q : $w(x, y, z) = -1$,
 czyli dla P

c) dla P : $w(x, y, z) = 2$,
 dla Q : $w(x, y, z) = \frac{1}{3}$,
 czyli dla P

13. a) $v(x) = 10x^3 - x^2 + 3,5$
 b) $v(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3,5$

14. a) $v(x) = -5x^4 + 5x^2 - 6x$,
 $v(1) = -6$, $v(-1) = 6$,
 $v(-2) = -48$

b) $v(x) = \frac{1}{2}x$,
 $v(1) = \frac{1}{2}$, $v(-1) = -\frac{1}{2}$,
 $v(-2) = -1$

15. a) $w(-2, 3) = 66$

b) $w(2, -4) = 60$

Uczeń:

- określa stopień iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia
- wyznacza iloczyn danych wielomianów
- podaje współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia wielomianów
- wyznacza iloczyn wielomianów wielu zmiennych

Ćwiczenie 1

- a) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
- b) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
- c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 3$
- d) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) &= (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\ &= 2x^3 - \underline{4x^2} + \underline{4x} - \underline{3x^2} + \underline{6x} - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\text{st}(w \cdot v) = \text{st}(w) + \text{st}(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w . Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

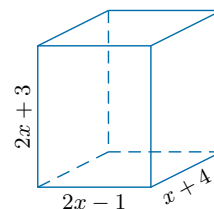
- a) $u(x) = x^3, w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ c) $u(x) = x - 1, w(x) = x^2 + x + 1$
b) $u(x) = x^2 - 1, w(x) = x^5 - x + 1$ d) $u(x) = 5 - 3x + x^2, w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \frac{1}{2}$$



Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \end{aligned}$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach: a , b , c .

- a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$ c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$
b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$ d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot w(x, y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 3x^2y - 4x^2y - 2y^3 + 6y^2 = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$
b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$
c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$
b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$
c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny otrzymanego wielomianu.

- a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$ d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$
b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$ e) $(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1)(x^2 - x - \frac{1}{4})$
c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$ f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

Ćwiczenie 4

- a) $2x^3y^2z + 2x^3yz^2 - x^2y^2z - x^2yz^2 + 2xy^2z^2 - y^2z^2$
b) $3x^3y^2z - 4x^3yz^2 - 2x^2y^3z + 4x^2y^2z^2 - xy^4z + 6xyz^2 - 8xz^3 + 2y^2z^2$
c) $x^3y^2z^2 + 2x^3yz^2 - x^3yz + 2xy^4z^2 + 4xy^3z^2 - 2xy^3z + 3xy^2z^4 + 6xyz^4 - 3xyz^3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 7x$, $a_4 = 2$, $a_0 = 0$
b) $4x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 8$, $a_4 = 4$, $a_0 = 8$
c) $2x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2 - x$, $a_6 = 2$, $a_0 = 0$
d) $-2x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 24x + 6$, $a_6 = -2$, $a_0 = 6$
e) $2x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$, $a_5 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{4}$
f) $-4x^6 - x^5 - 5\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$, $a_6 = -4$, $a_0 = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $V(x) = x^3 - x$, $x > 1$
b) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $x > -1$
c) $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, $x > \frac{1}{2}$
d) $V(x) = x^4 + 6x^3 - 54x - 81$, $x > 3$

Ćwiczenie 3

- a) $-4x^4 + 2x^3y - 2x^3 + 6x^2y^2 + x^2y - 3xy^3$
b) $3x^3y^3 - 2x^3y + 6x^2y^3 - 3x^2y + -3xy^3 + 4xy - y$
c) $4x^4y^3 - 12x^4y^2 + 3x^3y^4 + -11x^3y^3 + 10x^3y^2 + 3x^2y^3 + -2x^2y^2$

2. a) $\text{st}(w) = 3, a_3 = 1, a_0 = -1$
b) $\text{st}(w) = 3, a_3 = 6, a_0 = -6$
c) $\text{st}(w) = 5, a_5 = -4, a_0 = 1$
d) $\text{st}(w) = 3, a_3 = 1, a_0 = -6$
e) $\text{st}(w) = 4, a_4 = -6, a_0 = 2$
f) $\text{st}(w) = 5, a_5 = 12, a_0 = 6$
3. a) $v(x) = x^6 - 8x^5 + 16x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 9, \text{st}(v) = 6$
b) $v(x) = 2x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 7x^2 + -4\sqrt{2}x + 8, \text{st}(v) = 4$
4. a) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 21x^4 + 2x^2, g(x) = 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$
b) $f(x) = -6x^7 + 2x^6 + 6x^5 + -3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 1, g(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 + 6x^3 + -4x^2 + 2$
c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 + -x + 1, g(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 4x$
5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20, x > 2$
b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4, x \in (-2; -1) \cup (1; \infty)$
6. a) $v(x, y) = 4x^4 - 12x^3y^2 + -4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
b) $v(x, y) = -4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$
7. a) $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 + -12xy^2$
b) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + xy^3 - 2xy^2 - 2y^4$
c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
d) $2\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{3}y^3$
8. a) $8x^7 - 12x^4; -20, 0, -4$
b) $-6x^5 + \frac{3}{2}x^4; \frac{15}{2}, 0, -\frac{9}{2}$
c) $x^3 + 3x^2 - 4x; 6, 0, 0$
d) $2x^6 - 6x^4 - x^3 + 3x; -6, 0, -2$
e) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2; -15, -2, 1$
f) $6x^4 + x^3 - 12x^2 - 20x - 3; 10, -3, -28$
2. Podaj stopień, współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny wielomianu w bez wykonywania mnożenia wielomianów.
a) $w(x) = (x-1)(1-x+x^2)$ d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
b) $w(x) = (3x-2)(2x^2-x+3)$ e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1-x^2+4x^3)$ f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$
3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.
a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ b) $w(x) = \sqrt{2}x^2 + x - 2\sqrt{2}$
4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.
a) $u(x) = x^2 + 3x - 1, w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1, w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1, w(x) = 3x^2 - 2x + 1$
5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c .
a) $a = x + 1, b = x + 2, c = 2x - 4$ b) $a = x^2 + 4, b = x + 2, c = x^2 - 1$
6. Wyznacz wielomian $v(x, y) = [u(x, y)]^2 - 2w(x, y)$.
a) $u(x, y) = 2x^2 - xy, w(x, y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $u(x, y) = 3x^2y + 2xy^2, w(x, y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$
7. Wyznacz iloczyn.
a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$ c) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$
b) $(x + y)(x - 2y)(x - xy + y^2)$ d) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)(2x^2 + \sqrt{6}xy + 3y^2)$

Powtórzenie

8. Wyznacz iloczyn. Oblicz jego wartości dla $x \in \{-1, 0, 1\}$.
a) $4x^2(2x^5 - 3x^2)$ c) $(x + 4)(x^2 - x)$ e) $(x - 2)(x^2 - 3x + 1)$
b) $-9x^3(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x)$ d) $(x^2 - 3)(2x^4 - x)$ f) $(3x + \frac{1}{2})(2x^3 - 4x - 6)$
9. Wykonaj działania. Uporządkuj otrzymany wielomian.
a) $x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 2)(x + 1)$ c) $(x^2 + 4)(2 - x)^2 - x^2(x^2 + 2x + 3)$
b) $(2x + 2)(x^2 - 3) - (x^2 + 1)x$ d) $x(x - 3)(x - 2)^2 - x(x + 4)(x - 5)$
10. Wyznacz iloczyn.
a) $(x - 2y)(y - 2z)(z - 2x)$ c) $(2x - y)(3y + 2z)(2x + y)(3y - 2z)$
b) $(x + y + z)(x - y - z)$ d) $(x + xy + xyz)(1 + x - yz)$
9. a) $5x^3 + 4x^2 - 9x - 8$
b) $x^3 + 2x^2 - 7x - 6$
c) $-6x^3 + 5x^2 - 16x + 16$
d) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 8x$
10. a) $-2x^2y + 4xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z + 4yz^2 + 4x^2z - 7xyz$
b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
d) $x^2 + x^2y + x^2yz + x + xy - xy^2z - xy^2z^2$

Powierzchnie

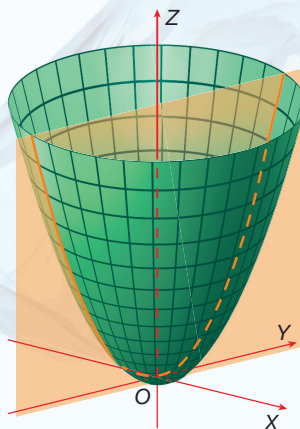
Funkcja f dwóch zmiennych to funkcja, której argumentami są pary liczb rzeczywistych (x, y) , a wartościami – liczby rzeczywiste z . Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest powierzchnią w trójwymiarowym układzie współrzędnych.

Wielomiany

Funkcja dwóch zmiennych może być wielomianem. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej równaniem:

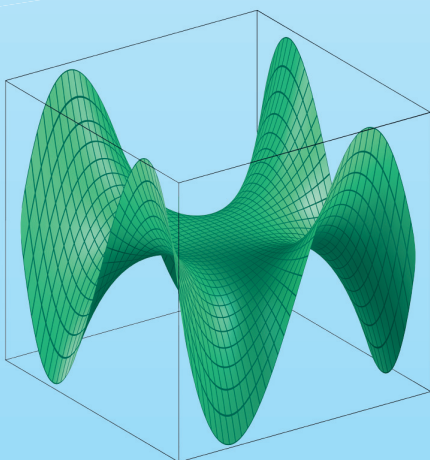
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wykresem tej funkcji jest powierzchnia nosząca nazwę **paraboloidy obrotowej**. Zwróć uwagę na to, że część wspólna tej paraboloidy i płaszczyzny OYZ jest parabolą o równaniu $z = y^2$, a część wspólna paraboloidy i płaszczyzny OXZ – parabolą o równaniu $z = x^2$.

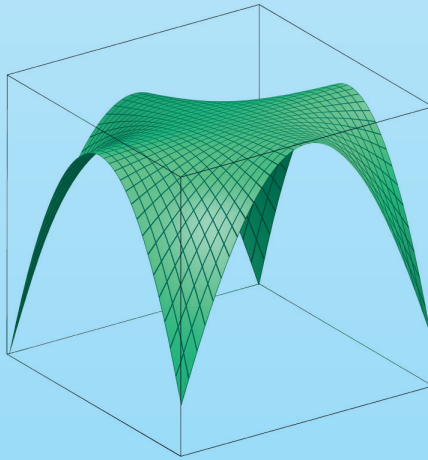


Poniżej przedstawiono inne przykłady powierzchni, które są wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

$$f(x, y) = xy^3 - x^3y$$



$$f(x, y) = x^4y^2 - 10x^2y^2 - y^2$$



- 1 Za pomocą odpowiedniego programu komputerowego znajdź przykłady innych powierzchni będących wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

Uczeń:

- stosuje wzory na sześcian sumy lub różnicy oraz wzory na sumę lub różnicę sześciąt
- przekształca wyrażenie algebraiczne, stosując wzory skróconego mnożenia
- stosuje wzory skróconego mnożenia do obliczania objętości sześcianu
- wyprowadza wzory skróconego mnożenia
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń
- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia do rozwiązywania zadań o różnym stopniu trudności

Ćwiczenie 2

- $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
- $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
- $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
- $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
- $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
- $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

Ćwiczenie 3

- $2(10 + 7\sqrt{2})$
- $8(\sqrt{5} - 2)$
- $6(9 - 5\sqrt{3})$
- $2(25\sqrt{2} - 44)$
- $46\sqrt{5} + 61$
- $3(26\sqrt{3} - 45)$
- $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$
- $3(7\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$

Multiteka

- Sześcian sumy i sześcian różnicy dwóch wyrazów
- Trójkąt Pascala
- Trójkąt Pascala – zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

Generator
testów i sprawdzianów

2.4. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{sześcian sumy}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{sześcian różnicy}$$

Dowód wzoru na sześcian sumy

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

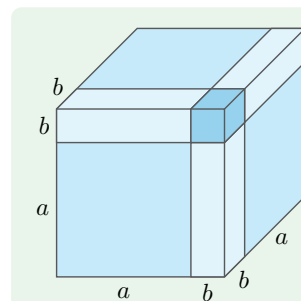
Wyprowadź wzór na sześcian różnicy, korzystając z tego, że:

- $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$,
- $(a - b)^3 = (a + (-b))^3$.

Przykład 1

Zapisz $(x + 2)^3$ w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}(\boxed{x} + \boxed{2})^3 &= \\ &= \boxed{x}^3 + 3 \cdot \boxed{x}^2 \cdot \boxed{2} + 3 \cdot \boxed{x} \cdot \boxed{2}^2 + \boxed{2}^3 = \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8\end{aligned}$$



Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru na sześcian sumy.

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- | | | | |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| a) $(x + 1)^3$ | c) $(x + 3)^3$ | e) $(2x + 3)^3$ | g) $(3x + 1)^3$ |
| b) $(x - 1)^3$ | d) $(x - 4)^3$ | f) $(2x - 1)^3$ | h) $(1 - 3x)^3$ |

Przykład 2

Oblicz $(2 - \sqrt{3})^3$.

$$(2 - \sqrt{3})^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------|
| a) $(2 + \sqrt{2})^3$ | c) $(3 - \sqrt{3})^3$ | e) $(1 + 2\sqrt{5})^3$ | g) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$ |
| b) $(\sqrt{5} - 1)^3$ | d) $(\sqrt{2} - 4)^3$ | f) $(2\sqrt{3} - 3)^3$ | h) $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^3$ |

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}\text{a) } (a - b)^3 &= (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = \\ &= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ \text{b) } (a - b)^3 &= (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{suma sześciąt}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{różnica sześciąt}$$

Ćwiczenie 4

Wyprowadź wzory na sumę sześciąt i różnicę sześciąt.

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

d) $(x^2 - 6x + 36)(x + 6)$

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

e) $(x - 8)(x^2 + 8x + 64)$

c) $(x^2 - x + 1)(1 + x)$

f) $(2x^2 - 1)(4x^4 + 2x^2 + 1)$

Przykład 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 16) =$

$$= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) =$$

$$= (x^2)^3 - 4^3 = x^6 - 64$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześciąt.

b) $(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1) =$

$$= (3x^2 - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1) =$$

$$= (3x^2)^3 - 1 = 27x^6 - 1$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześciąt.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

c) $((x + 2)^2 - 4x)(x^4 - 4x^2 + 16)$

b) $(3 + x)(3 - x)(x^4 + 9x^2 + 81)$

d) $(2x + 5)^2(4x^2 - 20x + 25)$

Ćwiczenie 7

Wykaż prawdziwość podanego obok wzoru dla $n = 5$.

Dla dowolnych $a \in \mathbf{R}$ i $n \geq 2$:

$$(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1) = a^n - 1$$

Ćwiczenie 8

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$

c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)(x^5 + 1)$

b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$

d) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 1)(x - 1)$

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = \\ &= (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = \\ &= (a - b)((a - b)^2 + 3ab) = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

$$(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a - a^4 - a^3 - a^2 - a - 1 = a^5 - 1$$

Ćwiczenie 8

a) $x^4 - 1$ b) $x^6 - 1$ c) $(x^5 - 1)(x^5 + 1) = x^{10} - 1$

d) $(x^4 - 1)(x^2 - 1) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$

Ćwiczenie 5

a) $x^3 + 8$

b) $x^3 - 1$

c) $x^3 + 1$

d) $x^3 + 216$

e) $x^3 - 512$

f) $8x^6 - 1$

Ćwiczenie 6

a) $x^6 - 1$

b) $-x^6 + 729$

c) $x^6 + 64$

d) $16x^4 - 200x^2 + 625$

Zarówno wzór $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$, jak i wzór na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ są szczególnymi przypadkami poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla $n \geq 2$ różnica n -tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

D Ćwiczenie 9

Uzasadnij prawdziwość podanego wyżej wzoru dla: a) $n = 4$, b) $n = 5$.

Ćwiczenie 10

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$ b) $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Zadania

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x + 4)^3$ c) $(x - 2)^3$ e) $(2x + 1)^3$ g) $(x - \sqrt{2})^3$
b) $(x + 5)^3$ d) $(x - 3)^3$ f) $(5x - 1)^3$ h) $(x + \sqrt{3})^3$

2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi a .

a) $a = \sqrt{2} - 1$ b) $a = 3 + \sqrt{2}$ c) $a = 2\sqrt{5} - 1$ d) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

3. Oblicz.

a) $(1 + \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{2})^3$ c) $(2\sqrt{3} - 1)^3 - (2\sqrt{3} + 1)^3$
b) $(4 + \sqrt{2})^3 - (4 - \sqrt{2})^3$ d) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 + (\sqrt{5} + \sqrt{2})^3$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2x + y)^3$ c) $(3x + 2y)^3$ e) $(x + \frac{1}{3}y)^3$ g) $(\sqrt{3}x + y)^3$
b) $(x - 2y)^3$ d) $(2x - 3y)^3$ f) $(x - \frac{2}{3}y)^3$ h) $(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y)^3$

5. a) Oblicz sumę objętości sześcianu o krawędzi długości $2x + 2y$ i sześcianu o krawędzi długości $2x + 3y$.

b) Oblicz różnicę objętości sześcianu o krawędzi długości $3x + y$ i sześcianu o krawędzi długości $x + 3y$.

Ćwiczenie 9

a) I sposób

$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4 = a^4 - b^4$$

II sposób

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

b) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$
 $= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 = a^5 - b^5$

Ćwiczenie 10

a) $x^4 - 81$

b) $x^5 - 32$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
e) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
f) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$
g) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$
h) $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$
2. a) $5\sqrt{2} - 7$
b) $45 + 29\sqrt{2}$
c) $46\sqrt{5} - 61$
d) $4(3\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$
3. a) 14
b) $100\sqrt{2}$
c) -74
d) $22\sqrt{5}$
4. a) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
c) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
d) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
e) $x^3 + x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{27}y^3$
f) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
g) $3\sqrt{3}x^3 + 9x^2y + 3\sqrt{3}xy^2 + y^3$
h) $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 - x^2y + \sqrt{3}xy^2 - y^3$
5. a) $(2x + 2y)^3 + (2x + 3y)^3 = 16x^3 + 60x^2y + 78xy^2 + 35y^3$
b) $(3x + y)^3 - (x + 3y)^3 = 26x^3 + 18x^2y - 18xy^2 - 26y^3$

6. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
- a) $(x+5)^2(x^2-5x+25)$ c) $(3x-1)^2(9x^2+3x+1)$
 b) $(x^2+5x+25)(x-5)^2$ d) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)$ dla $x=\sqrt[3]{9}$,
 b) $(9x^2-6x+4)(3x+2)$ dla $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$,
 c) $(x-\sqrt{5})^3-2x(x+5)(x-5)+(x+\sqrt{5})^3$ dla $x=\frac{1}{40}$,
 d) $(x+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5}x+5)-(\sqrt{5}-x)(x^2+\sqrt{5}x+5)$ dla $x=\sqrt[3]{4}$.

8. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+x$ c) $(4x^2+2x+1)(2x-1)=26$
 b) $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3+8x$ d) $(\frac{1}{4}x^2-x+4)(\frac{1}{2}x+2)=-9$

9. Skróć ułamek.

- a) $\frac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^2+1}$ b) $\frac{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}{a^5-1}, a \neq 1$

D 10. Uzasadnij prawdziwość wzoru.

- a) $a^8-b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
 b) $a^9-b^9=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

Powtórzenie

11. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x-5)^3+(x+3)^3$ c) $(x+\frac{1}{2})^3+(x-\frac{1}{2})^3$
 b) $(3x-1)^3-(2x+1)^3$ d) $(2x+3)^3-(2x-3)^3$

12. Uprość wyrażenie.

- a) $(x^2+4)^3+(x^2-4)^3$ c) $(2x^2+3)^3+(2x^2-3)^3$
 b) $(x^2+\frac{1}{3})^3-(x^2-\frac{1}{3})^3$ d) $(x^2+x)^3-(x^2-x)^3$

13. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(5+x^2)(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$ b) $(x^2-x+1)(x+1)(1-x^3)$

14. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+1)^3-(x-1)^3=6x^2-x$ c) $(2x-1)(1+2x+4x^2)=8x^3-x$
 b) $(x+2)^3-(x+1)^3=3x^2+x$ d) $(x^2-3x+9)(x+3)=x^3+9x$

10. a) $a^8-b^8=(a^4-b^4)(a^4+b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=$
 $=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

b) $a^9-b^9=(a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)=$
 $=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

6. a) $x^4+5x^3+125x+625$
 b) $x^4-5x^3-125x+625$
 c) $81x^4-27x^3-3x+1$
 d) x^6-1

7. a) $x^6-8; 73$
 b) $27x^3+8; -1$
 c) $80x; 2$
 d) $2x^3; 8$

8. a) $x=27$
 b) $x=-8$
 c) $x=\frac{3}{2}$
 d) $x=-2\sqrt[3]{17}$

9. a) a^2-1
 b) $a+1$

11. a) $2x^3-6x^2+102x-98$
 b) $19x^3-39x^2+3x-2$
 c) $2x^3+\frac{3}{2}x$
 d) $72x^2+54$

12. a) $2x^6+96x^2$
 b) $2x^4+\frac{2}{27}$
 c) $16x^6+108x^2$
 d) $6x^5+2x^3$

13. a) $25-x^4$
 b) $1-x^6$

14. a) $x=-2$
 b) $-\frac{7}{8}$
 c) $x=1$
 d) $x=3$

Trójkąt Pascala

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

są szczególnymi przypadkami **wzoru dwumianowego Newtona** (zwanego też **dwumianem Newtona**) pozwalającego wyznaczyć $(a+b)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach **trójkąta Pascala**.

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. dla $n = 8$ mamy: $8 = 1 + 7$, $28 = 7 + 21$, $56 = 21 + 35$, $70 = 35 + 35$).

Odpowiednie wzory skróconego mnożenia:

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1. Podaj wzory na:

a) $(a + b)^7$, b) $(a - b)^7$, c) $(a + b)^8$, d) $(a - b)^8$.

2. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n = 9$ i $n = 10$ oraz podaj wzory na $(a + b)^9$ i $(a + b)^{10}$.

3. Korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia, oblicz:

a) $(\sqrt{2} + 1)^4$, b) $(\sqrt{3} - 1)^4$, c) $(\sqrt{2} + 1)^6$, d) $(\sqrt{3} - 1)^6$.

1. a) $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

b) $a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

c) $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

d) $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

2. $(a + b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$,

$(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$

3. a) $12\sqrt{2} + 17$

b) $4(7 - 4\sqrt{3})$

c) $70\sqrt{2} + 99$

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów nazywamy **rozkładem wielomianu na czynniki**.

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki.

$$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2) \quad \text{Wylączamy } 4x^4 \text{ przed nawias.}$$

Zauważ, że wielomian w został już rozłożony na czynniki liniowe (stopnia pierwszego), ponieważ można go zapisać jako $w(x) = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3x - 2)$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\begin{aligned} \text{a) } w(x) &= x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) = && \text{Wylączamy } x^4 \text{ przed nawias.} \\ &= x^4(x - 3)^2 && \text{Korzystamy ze wzoru } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } w(x) &= x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = && \text{Wylączamy } x \text{ przed nawias.} \\ &= x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = && \text{Dwukrotnie korzystamy ze wzoru} \\ &= x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) && a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \end{aligned}$$

Zauważ, że czynnika $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

$$\text{c) } w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1) \quad \text{Wylączamy } x^3 \text{ przed nawias.}$$

Czynnik $6x^2 - x + 1$ jest trójkianem kwadratowym, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż $\Delta = -23 < 0$.

Podstawowe twierdzenie algebry

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego zawsze istnieje, natomiast nie zawsze potrafimy go wyznaczyć – czasem jest to zbyt skomplikowane obliczeniowo, a czasem niemożliwe (w przypadku niektórych wielomianów stopnia większego od 4).

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\text{a) } w(x) = x^4 - 7x^3$$

$$\text{b) } w(x) = 18x^3 + 30x^2$$

$$\text{c) } w(x) = -2x^5 - 8x^4$$

$$\text{d) } w(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x$$

$$\text{e) } w(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2$$

$$\text{f) } w(x) = -27x^6 + 18x^5 - 3x^4$$

Uczeń:

- wylacza wspólny czynnik przed nawias
- stosuje wzory na kwadrat sumy i różnicy oraz wzór na różnicę kwadratów do rozkładu wielomianu na czynniki
- wykorzystuje rozkład trójkianu kwadratowego na czynniki do rozkładu wielomianu na czynniki
- zapisuje wielomian w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia
- rozkłada wielomian na czynniki w zadaniach różnych typów

Ćwiczenie 1

$$\text{a) } w(x) = x^3(x - 7)$$

$$\text{b) } w(x) = 6x^2(3x + 5)$$

$$\text{c) } w(x) = -2x^4(x + 4)$$

$$\text{d) } w(x) = 6x(x + 1)^2$$

$$\text{e) } w(x) = -3x^2(x - 2)^2$$

$$\text{f) } w(x) = -3x^4(3x - 1)^2$$

Ćwiczenie 2

- a) $w(x) = 3x(x^2 + 4)$,
 $x^2 + 4 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
b) $w(x) = \frac{1}{4}x^4(x^2 + 3)$,
 $x^2 + 3 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
c) $w(x) = -6x^3(x^2 + 7)$,
 $x^2 + 7 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
d) $w(x) = -\sqrt{2}x^5(x^2 + \sqrt{3})$,
 $x^2 + \sqrt{3} > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
e) $w(x) = x^9(7x^2 - 5x + 1)$,
 $\Delta = -3 < 0$
f) $w(x) = x^4(\frac{1}{4}x^2 + x + 2)$,
 $\Delta = -1 < 0$
g) $w(x) = -x^3(4x^2 - 3x + 7)$,
 $\Delta = -103 < 0$
h) $w(x) = x^3(3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{6})$, $\Delta = 12 - 24\sqrt{3} < 0$

D Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian w na czynniki. Jeżeli w rozkładzie pojawi się czynnik stopnia drugiego, uzasadnij, że nie da się go rozłożyć na czynniki liniowe.

- a) $w(x) = 3x^3 + 12x$ e) $w(x) = 7x^{11} - 5x^{10} + x^9$
b) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^4$ f) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + x^5 + 2x^4$
c) $w(x) = -6x^5 - 42x^3$ g) $w(x) = -4x^5 + 3x^4 - 7x^3$
d) $w(x) = -\sqrt{2}x^7 - \sqrt{6}x^5$ h) $w(x) = 3\sqrt{2}x^5 - 2\sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3$

Przykład 3

Rozłóż wielomian $w(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^3$ na czynniki.

$$w(x) = x^3(4x^2 + 3x - 1) \quad \text{Wyłączamy } x^3 \text{ przed nawias.}$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + 3x - 1$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{1}{4}$$

Zatem trójmian ten możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$4x^2 + 3x - 1 = 4(x + 1)(x - \frac{1}{4})$$

czyli wielomian w można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = 4x^3(x + 1)(x - \frac{1}{4})$$

Ćwiczenie 3

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ e) $w(x) = -2x^3 + 20x^2 - 10x$
b) $w(x) = 2x^5 - x^4 - x^3$ f) $w(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{5}{4}x^2$
c) $w(x) = -2x^3 - x^2 + 6x$ g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3$
d) $w(x) = 20x^5 + 14x^4 + 2x^3$ h) $w(x) = 4x^6 - 12x^5 + x^4$

Czy wiesz, że...

W 1799 r. Carl Friedrich Gauss [czyt. karł fridriś gals] (1777–1855) podał dowód podstawowego twierdzenia algebry. Ze względu na swe wybitne osiągnięcia Gauss zyskał przydomek „princeps mathematicorum” [czyt. princeps matematikorum] (książę matematyków). Jako dziewiętnastoletni student, Gauss wykazał możliwość konstrukcji (za pomocą cyrkla i linijki) siedemnastokąta foremego. Życzył sobie, by został on wyryty na jego nagrobku, ale jego życzenie nie zostało spełnione.



Ćwiczenie 3

- a) $w(x) = x^2(x - 3)(x + 1)$
b) $w(x) = 2x^3(x + \frac{1}{2})(x - 1)$
c) $w(x) = -2x(x - \frac{3}{2})(x + 2)$
d) $w(x) = 20x^3(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{5})$
e) $w(x) = -2x(x - 5 + 2\sqrt{5})(x - 5 - 2\sqrt{5})$
f) $w(x) = x^2(x - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$
g) $w(x) = 2x^3(x - \frac{2 - \sqrt{2}}{2})(x - \frac{2 + \sqrt{2}}{2})$
h) $w(x) = 4x^4(x - \frac{3}{2} + \sqrt{2})(x - \frac{3}{2} - \sqrt{2})$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}$ b) $w(x) = 16x^5 - 4x^3$ c) $w(x) = 2x^4 - 6x^2$

2. Wyłącz przed nawias wskazany czynnik. Sprawdź, czy otrzymany w nawiasie trójmian kwadratowy można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, to podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

a) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3$, x^3 d) $w(x) = 6x^4 + 3x^3 - 3x^2$, $6x^2$

b) $w(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$, x^2 e) $w(x) = 6x^3 - 15x^2 + 9x$, $6x$

c) $w(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4$, $2x^4$ f) $w(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$, $\frac{3}{4}x^3$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$ f) $w(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x$ g) $w(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 + 5x + 4)$

c) $w(x) = -6x^5 + 5x^4 - x^3$ h) $w(x) = (2x^2 - 5x - 3)(2x^2 - 7x + 3)$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2$ i) $w(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 15x)$

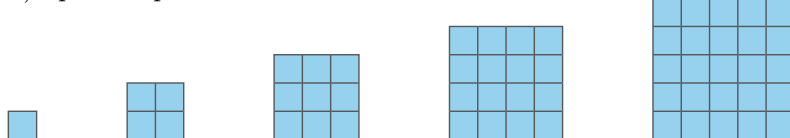
e) $w(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + x$ j) $w(x) = (x^4 + x^3 - 6x^2)(x^5 + 2x^4 + 3x^3)$

4. Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ na czynniki.

b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 4$ i $n = 5$.



Powtórzenie

5. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 18x^5 - 3x^4 + 6x^3$

d) $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - x^2$

b) $w(x) = 4x^5 - 4x^4 - 24x^3$

e) $w(x) = -2x^7 + x^6 - x^5$

c) $w(x) = 4x^5 + 7x^4 - 2x^3$

f) $w(x) = x^5 - 2x^4 + \sqrt{2}x^3$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 9x)$

c) $w(x) = (x^4 - 4x^2)(x^3 + 4x^2 + 4x)$

b) $w(x) = (x^3 - 4x^2)(x^4 - 16x^2)$

d) $w(x) = (x^4 - 1)(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$

5. a) $w(x) = 18x^3(x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3})$

b) $w(x) = 4x^3(x - 3)(x + 2)$

c) $w(x) = 4x^3(x - \frac{1}{4})(x + 2)$

d) $w(x) = x^2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$

e) $w(x) = -2x^5(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$

f) $w(x) = x^3(x^2 - 2x + \sqrt{2})$

6. a) $w(x) = x(x - 3)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$

b) $w(x) = x^4(x - 4)^2(x + 4)$

c) $w(x) = x^3(x - 2)(x + 2)^3$

d) $w(x) = x^2(x - 2)(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = 4x(x - \frac{1}{6})(x + \frac{1}{6})$

b) $w(x) = 16x^3(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$

c) $w(x) = 2x^2(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$

2. a) $w(x) = x^3(x^2 - 2x + 5)$

b) $w(x) = x^2(x - 3)(x + 2)$

c) $w(x) = 2x^4(x - 1)^2$

d) $w(x) = 6x^2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$

e) $w(x) = 6x(x - \frac{3}{2})(x - 1)$

f) $w(x) = \frac{3}{4}x^3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$

3. a) $w(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$

b) $w(x) = 2x(x + \frac{1}{2})(x - 5)$

c) $w(x) = -6x^3(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$

d) $w(x) = x^2(x^2 + 3x + 4)$

e) $w(x) = x(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

f) $w(x) = (x - 3)(x - 2) \cdot (x - 1)(x + 1)$

g) $w(x) = (x - 4)(x + 1)^2 \cdot (x + 4)$

h) $w(x) = 4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) \cdot (x - 3)^2$

i) $w(x) = x^2(x - 3)(x - 1) \cdot (x + 2)(x + 5)$

j) $w(x) = x^5(x - 2) \cdot (x + 3)(x^2 + 2x + 3)$

4. a) $S(n) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

b) Dla $n = 4$ mamy:

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$P = S(4) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 30$$

$$L = P, \text{ zatem dla } n = 4 \text{ wzór}$$

jest prawdziwy.

Dla $n = 5$ mamy:

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$P = S(5) = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 = 55$$

$$L = P, \text{ zatem dla } n = 5 \text{ wzór}$$

jest prawdziwy.

Uczeń:

- stosuje metodę grupowania wyrazów i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do rozkładu wielomianu na czynniki
- stosuje wzory na sumę i różnicę sześcianów do rozkładu wielomianu na czynniki

Ćwiczenie 1

- a) $w(x) = 2x^2(x^3 + 1) = 2x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$
b) $w(x) = -x^3(x^3 + 8) = -x^3(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
c) $w(x) = x(8x^3 - 1) = x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
d) $w(x) = x^2(1 - 0,001x^3) = x^2(1 - 0,1x)(1 + 0,1x + 0,01x^2)$
e) $w(x) = x^3(8x^3 - 27) = x^3(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
f) $w(x) = 2x(0,027x^3 + 1) = 2x(0,3x + 1)(0,09x^2 - 0,3x + 1)$

2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = x^7 + 8x^4$ na czynniki.

$$\begin{aligned}w(x) &= x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) = \\&= x^4(x + 2)(x^2 - 2x + 4)\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów:
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny, gdyż $\Delta = 4 - 16 < 0$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian $w(x) = 27x^7 - x^4$ na czynniki.

$$\begin{aligned}w(x) &= 27x^7 - x^4 = x^4(27x^3 - 1) = \\&= x^4(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów:
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Czynnik $9x^2 + 3x + 1$ jest nierozkładalny, gdyż $\Delta = 9 - 36 < 0$.

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 2x^5 + 2x^2$ c) $w(x) = 8x^4 - x$ e) $w(x) = 8x^6 - 27x^3$
b) $w(x) = -x^6 - 8x^3$ d) $w(x) = x^2 - 0,001x^5$ f) $w(x) = 0,054x^4 + 2x$

W pewnych przypadkach wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy.

Przykład 3

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $u(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$
$$u(x) = \underline{x^3 - 4x^2} + \underline{x - 4} =$$

Z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów można wyłączyć ten sam czynnik: $x - 4$.

$$= x^2(x - 4) + (x - 4) = (x^2 + 1)(x - 4)$$

b) $u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$
$$u(x) = \underline{7x^3 + 2x^2} - \underline{14x - 4} = x^2(7x + 2) - 2(7x + 2) = (x^2 - 2)(7x + 2) =$$
$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(7x + 2)$$

c) $u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$
$$u(x) = \underline{4x^5 - 2x^4} - \underline{16x^3 + 8x^2} = 2x^4(2x - 1) - 8x^2(2x - 1) =$$
$$= (2x^4 - 8x^2)(2x - 1) = 2x^2(x^2 - 4)(2x - 1) = 2x^2(x - 2)(x + 2)(2x - 1)$$

Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $u(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$ e) $u(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$
b) $u(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ f) $u(x) = \sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1$
c) $u(x) = 4x^3 + x^2 - 16x - 4$ g) $u(x) = 8x^5 + 16x^3 - x^2 - 2$
d) $u(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x$ h) $u(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x^2$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 + 27x$ c) $w(x) = -x^4 - 64x$ e) $w(x) = 27x^6 + 8x^3$
b) $w(x) = x^5 - 8x^2$ d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 64x^2$ f) $w(x) = 125x^8 - x^5$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16$ d) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 3x + 1$
b) $w(x) = 14x^3 - 7x^2 + 4x - 2$ e) $w(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 6x + 27$
c) $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15$ f) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 2$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
b) $w(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2$
c) $w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = (20x^3 - 28x^2 + 8x)(x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12x)$
b) $w(x) = (-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2)(x^3 - 7x^2 - 4x + 28)$
c) $w(x) = (7x^4 + 14x^3 - 21x^2)(x^5 - 4x^3 - x^2 + 4)$
d) $w(x) = (3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2)(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6)$

Powtórzenie

5. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 6x^5 - 6x^2$ b) $w(x) = 2x^6 - 16x^3$ c) $w(x) = x^7 - 64x^4$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ d) $w(x) = 5x^3 + 15x^2 - x - 3$
b) $w(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$ e) $w(x) = x^5 + 2x^4 - 27x^2 - 54x$
c) $w(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$ f) $w(x) = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 4$

4. a) $w(x) = 20x^2(x - \frac{2}{5})(x - 1)(x + 6)(x^2 + 2)$

b) $w(x) = -\frac{1}{4}x^2(x - 7)(x - 2)(x + 2)(x + 4)^2$

c) $w(x) = 7x^2(x - 2)(x - 1)^2(x + 2)(x + 3)(x^2 + x + 1)$

d) $w(x) = 6x^2(x - \frac{1}{3})^2(x - \frac{3}{2})(x^2 + 2)$

5. a) $w(x) = 6x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $w(x) = 2x^3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

c) $w(x) = x^4(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

6. a) $w(x) = (x + 3)(x^2 + 6)$

b) $w(x) = (x - 2)(3x^2 + 4)$

c) $w(x) = 9(x - 1)(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3})$

d) $w(x) = 5(x + 3)(x - \frac{\sqrt{5}}{5})(x + \frac{\sqrt{5}}{5})$

e) $w(x) = x(x + 2)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

f) $w(x) = \frac{1}{8}(x + 2)(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)$

Ćwiczenie 2

- a) $u(x) = (x^2 + 1)(x + 5)$
b) $u(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$
c) $u(x) = (x - 2)(x + 2)(4x + 1)$
d) $u(x) = x(x^2 + 1)(x + 3)$
e) $u(x) = (x - 5)(x + 5)(x + 4)$
f) $u(x) = (x - 1)(x + 1)(\sqrt{5}x - 1)$
g) $u(x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2)$
h) $u(x) = x^2(x^2 + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
b) $w(x) = x^2(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$
c) $w(x) = -x(x + 4) \cdot (x^2 - 4x + 16)$
d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^2(x - 8) \cdot (x^2 + 8x + 64)$
e) $w(x) = 27x^3(x + \frac{2}{3}) \cdot (x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9})$
f) $w(x) = 125x^5(x - \frac{1}{5}) \cdot (x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{25})$
2. a) $w(x) = (x + 2)(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$
b) $w(x) = (2x - 1)(7x^2 + 2)$
c) $w(x) = (x - 3)(2x^2 + 5)$
d) $w(x) = \frac{1}{6}(3x - 1) \cdot (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$
e) $w(x) = \frac{1}{3}(2x - 9)(x - 3) \cdot (x + 3)$
f) $w(x) = (x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$
3. a) $w(x) = (x + 1)^3(x - 1)^2$
b) $w(x) = 4(x - 2)(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \cdot (x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$
c) $w(x) = 3(x + \frac{2}{3}) \cdot (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1)$

Uczeń:

- rozwiązuje równanie wielomianowe
- wyznacza punkty przecięcia wykresu wielomianu i prostej oraz dwóch wielomianów
- podaje przykład wielomianu, gdy dane są jego stopień i pierwiastki

Ćwiczenie 1

- a) $2x^3(3x+1)=0$,
 $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=0$
- b) $-x^3(x+2)(x-2)=0$,
 $x=-2$ lub $x=0$ lub $x=2$
- c) $x^4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$,
 $x=-\sqrt{2}$ lub $x=0$
lub $x=\sqrt{2}$
- d) $-x^4(2x-3)=0$,
 $x=0$ lub $x=\frac{3}{2}$
- e) $\frac{1}{6}x(x+6)^2=0$,
 $x=-6$ lub $x=0$
- f) $-x^2(2x-1)^2=0$,
 $x=0$ lub $x=\frac{1}{2}$

2.7. Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x)=0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym**.

Rozkład wielomianu w na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego **pierwiastków**, tj. takich argumentów x , dla których spełnione jest równanie $w(x)=0$.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^3-x^2 &= 0 \\ \frac{1}{4}x^2(x-4) &= 0 \\ x^2=0 \text{ lub } x-4=0 \\ x=0 \text{ lub } x=4\end{aligned}$$

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^3-6x^2+9x=0$.

$$\begin{aligned}x(x^2-6x+9) &= 0 \\ x(x-3)^2 &= 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ x=0 \text{ lub } x=3\end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $6x^4+2x^3=0$ c) $x^6+x=x+2x^4$ e) $\frac{1}{6}x^3+2x^2+6x=0$
- b) $-x^5+4x^3=0$ d) $\frac{x^4-4x^3}{2}=\frac{x^5-6x^3}{3}$ f) $-4x^4+4x^3-x^2=0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^5-2x^4-15x^3=0$.

$$\begin{aligned}x^3(x^2-2x-15) &= 0 \\ x=0 \text{ lub } x^2-2x-15 &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $x^2-2x-15=0$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4+60=64, \quad \sqrt{\Delta}=8 \\ x &= \frac{2-8}{2}=-3 \text{ lub } x = \frac{2+8}{2}=5\end{aligned}$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: 0, -3 i 5.

Multiteka

• Wykres wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 4

Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$ e) $2x^2 - 3x = x - x^3$

b) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$ d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$ f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$

Przykład 5

Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ i osi OX .

Aby wyznaczyć pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu wielomianu w oraz osi OX , rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

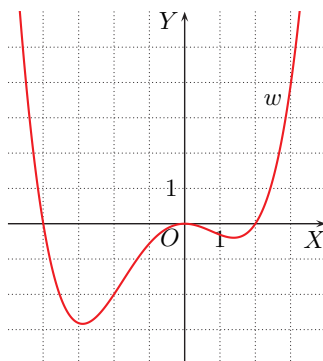
$$\frac{1}{16}x^2(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Szukane punkty: $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(2, 0)$.



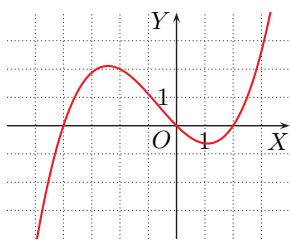
$$w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Pierwiastki równania $w(x) = 0$ to miejsca zerowe wielomianu w .

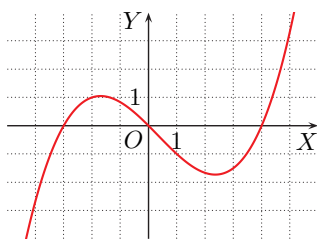
Ćwiczenie 3

Dane są wielomiany: $u(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$, $v(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - x$ oraz $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$. Rozwiąż odpowiednie równania i podaj pierwiastki tych wielomianów. Do każdego z nich dopasuj jeden z poniższych wykresów.

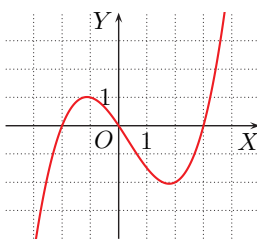
A.



B.



C.



Ćwiczenie 3

$$u(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - x - 6),$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 3, \text{ wykres C;}$$

$$v(x) = \frac{1}{12}x(x^2 - x - 12),$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 4, \text{ wykres B;}$$

$$w(x) = \frac{1}{8}x(x^2 + 2x - 8),$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 2, \text{ wykres A}$$

Ćwiczenie 2

a) $x(x^2 - 7x + 12) = 0$, $\Delta = 1$,
 $x = 0$ lub $x = 3$ lub $x = 4$

b) $-x^2(2x^2 - 9x - 5) = 0$,
 $\Delta = 121$, $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = 5$

c) $x(3x^2 + 4x + 1) = 0$, $\Delta = 4$,
 $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 0$

d) $x^3(4x^2 - 3x + 2) = 0$,
 $\Delta = -23 < 0$, $x = 0$

e) $x(x^2 + 2x - 4) = 0$, $\Delta = 20$,
 $x = -1 - \sqrt{5}$ lub $x = 0$
lub $x = -1 + \sqrt{5}$

f) $x^4(2x^2 - 2x - 1) = 0$,
 $\Delta = 12$, $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Ćwiczenie 4

- a) $(x^2 + 2)(x - 9) = 0$, $x = 9$
b) $(x - 2)(x + 2)(2x + 1) = 0$,
 $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2$
c) $x^2(x^2 + 1)(x + 5) = 0$,
 $x = -5$ lub $x = 0$
d) $x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (3x - 5) = 0$, $x = -\sqrt{2}$ lub
 $x = 0$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = \frac{5}{3}$
e) $(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4) \cdot$
 $\cdot (x + 2) = 0$, $x = -2$ lub $x = 2$
f) $(x^2 + \sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) = 0$,
 $x = 3\sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = 2$
b) $x = -3$ lub $x = 0$
lub $x = 3$
c) $x = -27$ lub $x = 0$
d) $x = 0$ lub $x = 2$
e) $x = -2$ lub $x = 0$
lub $x = 2$
f) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = 0$,
 $x = \sqrt{5}$
2. a) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$
b) $x = -2$ lub $x = -1$
lub $x = 0$
c) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 5$
d) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
e) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
f) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{2}{5}$
g) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 0$
h) $x = -6$ lub $x = 0$ lub $x = 2$
i) $x = -4$ lub $x = -1$
lub $x = 0$
j) $x = 0$ lub $x = 1$
k) $x = -6$ lub $x = 0$ lub $x = 3$
l) $x = 0$

Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$\begin{aligned} w(x) &= x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1) = (x^2 - 9)(x - 1) = \\ &= (x - 3)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu, rozwiązujemy równanie:

$$(x - 3)(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ lub } x + 3 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby: -3 , 1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$ d) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$
b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$ e) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = 0$
c) $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$ f) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 6 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^3 = 4x^2$ c) $x^4 = -27x^3$ e) $x^5 - 16x = 0$
b) $x^5 = 9x^3$ d) $x^5 = 8x^2$ f) $x^6 - 25x^2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$ e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$ i) $x^3 + 4x = -5x^2$
b) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$ j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$
c) $x^4 = 4x^3 + 5x^2$ g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$ k) $3x^5 = \frac{x^7 + 3x^6}{6}$
d) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$ h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$ l) $\frac{20x^7 + x^3}{8} = \frac{x^7 - 2x^5}{2}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 3x^2 = 12 - 4x$ d) $1 - x^3 = x^2 - x$ g) $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
b) $2x^3 + 3 = x^2 + 6x$ e) $x^4 - 8x = 8 - x^3$ h) $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 = 3 + 2x$
c) $x^4 + 9x^3 = x + 9$ f) $x^4 + 4x^3 = x + 4$ i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 5x - 4 = 0$ b) $x^3 - 3x + 2 = 0$ c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$

Wskazówka. W podpunkcie a) zapisz $-5x$ jako $-x - 4x$.

3. a) $x = 3$

b) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{3}$

c) $x = -9$ lub $x = 1$

d) $x = -1$ lub $x = 1$

e) $x = -1$ lub $x = 2$

f) $x = -4$ lub $x = 1$

g) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

h) $x = -2$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = 2$

i) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $x^3 - x - 4x - 4 = 0$

$$x(x^2 - 1) - 4(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - x - 4) = 0, x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{lub } x = -1 \text{ lub } x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

b) $x^3 - x - 2x + 2 = 0$

$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 1$$

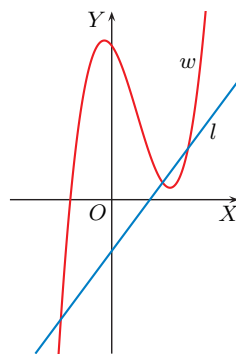
c) $x(x^3 - x - 6x + 6) = 0$

$$x[x(x^2 - 1) - 6(x - 1)] = 0$$

$$x(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 2$$

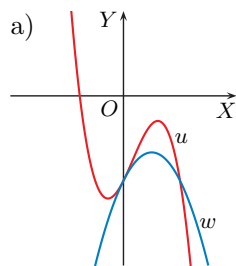
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ i prostą $l: y = 2x - 3$. Wyznacz punkty, w których prosta l przecina wykres wielomianu w .



6. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l .

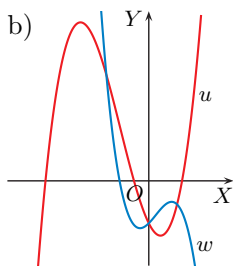
- a) $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$, $l: y = 4x + 2$
 b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 3$, $l: y = 3x + 1$
 c) $w(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2$, $l: y = 4x - 3$

7. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w .



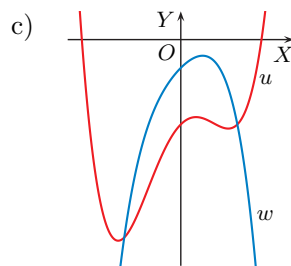
$$u(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$$

$$w(x) = -x^2 + 2x - 3$$



$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3$$

$$w(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$$



$$u(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + x - 3$$

$$w(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: a) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, b) 1, 2, 3.

9. Podaj przykład wielomianu stopnia n , którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 i 3 , wyraz wolny jest równy 1 oraz: a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 6$.

Powtórzenie

10. Rozwiąż równanie.

- a) $4x^5 - x = 0$ c) $\sqrt{2}x^6 = -\sqrt{5}x^5$ e) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$
 b) $8x^5 + x^2 = 0$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}x^3 - \sqrt{2}x = 0$ f) $9x^5 + 6x^4 + x^3 = 0$

11. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 + 6x^3 + 5x^2 = 0$ c) $3x^4 + 6x^3 = 3x^2$ e) $x^5 + x^4 + 2x^3 = 0$
 b) $2x^3 + 5x^2 + 2x = 0$ d) $x^5 + \frac{1}{4}x^3 = x^4$ f) $\frac{x^4}{2} + x^2 = \sqrt{2}x^3$

12. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 + 3x^2 - 9x = 27$ b) $2x^3 + 8x = 5x^2 + 20$ c) $x^5 + x^2 = 8x^3 + 8$

11. a) $x = -5$ lub $x = -1$ lub $x = 0$

b) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$

c) $x = -1 - \sqrt{2}$ lub $x = 0$ lub $x = -1 + \sqrt{2}$

d) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$

e) $x = 0$

f) $x = 0$ lub $x = \sqrt{2}$

12. a) $x = -3$ lub $x = 3$

b) $x = \frac{5}{2}$

c) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = -1$ lub $x = 2\sqrt{2}$

5. $(-2, -7)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$

6. a) $(-3, -10)$, $(0, 2)$, $(3, 14)$

b) $(-\sqrt{2}, 1 - 3\sqrt{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$,
 $(\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2})$

c) $(-1, -7)$, $(1, 1)$, $(3, 9)$

7. a) $(0, -3)$, $(2, -3)$

b) $(-3, \frac{15}{2})$, $(0, -3)$, $(2, -\frac{5}{3})$

c) $(-2, -7)$, $(2, -3)$

8. Przykładowa odpowiedź:

a) $w(x) = (x + \sqrt{2})^2 \cdot$

$$\cdot (x - \sqrt{2})^2 = (x^2 - 2)^2 =$$

$$= x^4 - 4x^2 + 4$$

b) $w(x) =$

$$= (x - 1)^2 \cdot (x - 2)(x - 3) =$$

$$= x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

9. Przykładowa odpowiedź:

a) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$

$$\cdot (x - 3) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$$

b) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$

$$\cdot (x - 3)(x^2 + 1) = -\frac{1}{6}x^4 +$$

$$+ \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$$

c) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$

$$\cdot (x - 3)(x^4 + 1) = -\frac{1}{6}x^6 +$$

$$+ \frac{1}{6}x^5 + x^4 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$$

10. a) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = 0$ lub

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$

c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = 0$

d) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$

e) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$

f) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 0$

Uczeń:

- dzieli wielomian przez dwumian $x - a$
- stosuje schemat Hornera
- zapisuje wielomian w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$
- sprawdza poprawność wykonanego dzielenia
- przeprowadza dowód twierdzenia o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x - a$ (algorytm Hornera) w szczególnym przypadku

Komentarz

Po omówieniu tego tematu warto zapoznać uczniów ze schematem Hornera (str. 99), który pozwala na szybkie wykonanie dzielenia wielomianu przez dwumian postaci $x - a$.

2.8. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że jeśli n i m są liczbami całkowitymi (gdzie $m \neq 0$), to mówimy, że n jest podzielne przez m , jeśli istnieje taka liczba całkowita k , że $n = k \cdot m$.

Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez niezerowy wielomian q ($q \neq 0$), jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1

$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ \underline{-3x^2 - 3x} \\ -4x - 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 3171 : 7 = 453 \\ \underline{-28} \\ 37 \\ \underline{-35} \\ 21 \\ \underline{-21} \\ 0 \end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki podczas wykonywania tego dzielenia.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\ \underline{-3x^2 - 3x} \\ -4x - 4 \end{array}$$

Dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy $3x$ przez dzielnik $x + 1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ \underline{-3x^2 - 3x} \\ -4x - 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy -4 przez dzielnik $x + 1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy. Otrzymaliśmy resztę równą 0.

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$

Ćwiczenie 1

- a) $2x - 1$
- b) $4x - 1$
- c) $x - 2$
- d) $9x + 12$

Ćwiczenie 1

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

- a) $(2x^2 + x - 1) : (x + 1)$
- b) $(4x^2 + 7x - 2) : (x + 2)$
- c) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$
- d) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$

Multiteka

• Dzielenie wielomianów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8

Generator
testów i sprawdzianów

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak dla wielomianów w i q ($q \neq 0$) nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. Wykonujemy wówczas dzielenie z resztą.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\ -5x^2 - 10x \\ \hline 3x + 11 \\ -3x - 6 \\ \hline 5 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 752 : 9 = 83 \\ -72 \\ \hline 32 \\ -27 \\ \hline 5 \\ 752 = 83 \cdot 9 + 5 \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy wielomian $p(x) = 5x + 3$ oraz resztę 5 (która jest wielomianem stopnia 0), zatem $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.
Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

- a) $(x^2 - 4x - 18) : (x + 3)$ c) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$
b) $(2x^2 - x - 1) : (x - 2)$ d) $(4x^2 + 6x + 7) : (x + \frac{1}{2})$

Ćwiczenie 2

- a) $x - 7$, reszta 3
b) $2x + 3$, reszta 5
c) $x - 3$, reszta 4
d) $4x + 4$, reszta 5

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (x - \frac{3}{2})$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (x - \frac{3}{2}) = 2x^2 + 2x + 1 \\ -2x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^2 - 2x - 5 \\ -2x^2 + 3x \\ \hline x - 5 \\ -x + \frac{3}{2} \\ \hline -3\frac{1}{2} \end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} (2x^2 + 2x + 1) \cdot (x - \frac{3}{2}) - 3\frac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - \frac{3}{2} - 3\frac{1}{2} = \\ &= 2x^3 - x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

- a) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$ c) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$
b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$ d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : (x - \frac{1}{3})$

Ćwiczenie 3

- a) $x^2 + 3x - 5$, reszta 4
b) $x^2 - x + 1$, reszta 1
c) $2x^3 + x^2 - x$
d) $3x^3 + 3x^2 - 6x - 6$, reszta -2

Zwróćmy uwagę, że w wyniku dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r , która jest funkcją stałą.

Przykład 5

Wykonaj dzielenie wielomianu $w(x) = 2x^3 + x^2 + 6$ przez dwumian $q(x) = x + 2$. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .

$$\begin{array}{r} (2x^3 + x^2 + 0x + 6) : (x + 2) = 2x^2 - 3x + 6 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} \\ -3x^2 + 0x + 6 \\ \underline{3x^2 + 6x} \\ 6x + 6 \\ \underline{-6x - 12} \\ -6 \end{array}$$

Zauważ, że wielomian w został zapisany ze składnikiem $0x$.

Otrzymaliśmy resztę równą -6 .

Zatem $w(x) = (2x^2 - 3x + 6)(x + 2) - 6$.

Ćwiczenie 4

- a) $w(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 2$
- b) $w(x) = (-2x^2 + 9x - 27) \cdot (x + 3) + 85$
- c) $w(x) = (x^3 + 2x^2 - x)(x - 1)$
- d) $w(x) = (3x^3 - 6x^2 + 11x - 13)(x + 2) + 25$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x, \quad q(x) = x - 2$
- b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4, \quad q(x) = x + 3$
- c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x, \quad q(x) = x - 1$
- d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1, \quad q(x) = x + 2$

$$\begin{array}{ccc} \text{dzielna} & & \text{dzielnik} \\ \downarrow & & \downarrow \\ w(x) & = & p(x)q(x) + r(x) \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{iloraz} & \text{reszta} \end{array}$$

Wielomian w jest podzielny przez dwumian q , jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zero (jest wielomianem zerowym).

Zadania

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?
 - a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12, \quad q(x) = x - 4$
 - b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4, \quad q(x) = x + 2$
 - c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6, \quad q(x) = x - 3$
 - d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9, \quad q(x) = x + 3$
 - e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4, \quad q(x) = x - 1$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = q(x)(2x + 3)$, podzielny
- b) $w(x) = q(x)(x^2 - 4x + 11) - 26$, niepodzielny
- c) $w(x) = q(x)(-2x^3 - 6x^2 - 15x - 45) - 129$, niepodzielny
- d) $w(x) = q(x)(4x^2 - 4x + 16) - 57$, niepodzielny
- e) $w(x) = q(x)(2x^2 + x + 4)$, podzielny

2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

- a) $w(x) = x^3 + 3x + 7$, $q(x) = x + 3$
 b) $w(x) = 3x^4 - x^2$, $q(x) = x - 1$
 c) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4$, $q(x) = x + 6$
 d) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2$, $q(x) = x + \frac{1}{2}$

3. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.

- a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$
 b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$
 c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + x^2 - 7x + 5) : (2x + 3)$.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + x^2 - 7x + 5) : (2x + 3) = x^2 - x - 2 \\ -2x^3 - 3x^2 \\ \hline -2x^2 - 7x + 5 \\ 2x^2 + 3x \\ \hline -4x + 5 \\ 4x + 6 \\ \hline 11 \end{array}$$

Otrzymałmy resztę 11.

Zatem $(2x^3 + x^2 - 7x + 5) = (2x + 3)(x^2 - x - 2) + 11$.

Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q .

- a) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9$, $q(x) = 2x + 1$
 b) $w(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 1$, $q(x) = 3x + 4$
 c) $w(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 2$, $q(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Powtórzenie

5. Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

- a) $(x^3 - 3x^2 - x + 8) : (x - 2)$ b) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 7) : (x + 3)$

6. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

- a) $w(x) = x^3 + 3x^2 - x + 5$, $q(x) = x - 2$
 b) $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - 2$, $q(x) = x + 3$

3. a) $(-2x^2 - 3x + 3) \cdot (x - 3) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$, tak

b) $(-3x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 3) = -3x^3 + 7x^2 + 8x - 6$, nie

c) $(3x^3 - 2x^2 + 1) \cdot (x - 2) = 3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 2$, nie

4. a) $w(x) = (2x^2 + 3x + \frac{1}{2})(2x + 1) - 9\frac{1}{2}$

b) $w(x) = (2x^2 - x)(3x + 4) - 1$

c) $w(x) = (2x^2 - 4x + 2)(\frac{1}{2}x + 3) - 4$

5. a) $x^2 - x - 3$, reszta 2

b) $x^3 - x^2 + 2x - 1$, reszta -4

6. a) $w(x) = (x^2 + 5x + 9)(x - 2) + 23$

b) $w(x) = (2x^2 - 2x + 7)(x + 3) - 23$

2. a) $w(x) = (x^2 - 3x + 12) \cdot$

$\cdot (x + 3) - 29$

b) $w(x) = (3x^3 + 3x^2 + 2x +$
 $+ 2)(x - 1) + 2$

c) $w(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot$
 $\cdot (x + 6) + 2$

d) $w(x) = (2x^2 + 6x)(x + \frac{1}{2}) - 2$

Dzielenie wielomianu przez trójmian kwadratowy

Niech q będzie wielomianem drugiego stopnia, a w dowolnym wielomianem. Wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie p jest pewnym wielomianem, a $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q .

Przykład 1

Wykonaj dzielenie $(x^4 + x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 - x)$.

$$\begin{array}{r}
 (x^4 + x^3 + 3x^2 + 0x - 1) : (x^2 - x) = x^2 + 2x + 5 \\
 \underline{-x^4 + x^3} \\
 2x^3 + 3x^2 + 0x - 1 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 5x^2 + 0x - 1 \\
 \underline{-5x^2 + 5x} \\
 5x - 1
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $p(x) = x^2 + 2x + 5$ oraz resztę $r(x) = 5x - 1$. Wielomian w można przedstawić w postaci:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 - 1 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - x) + 5x - 1$$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\
 \underline{-2x^3 - 2x^2 - 6x} \\
 -2x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{2x^2 + 2x + 6} \\
 4x + 5
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $p(x) = 2x - 2$ oraz resztę $r(x) = 4x + 5$. Wielomian w można przedstawić w postaci:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + 4x + 5$$

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x^2 - 4$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2$, $q(x) = x^2 + x$

c) $w(x) = x^3 + 6$, $q(x) = x^2 + x + 1$

d) $w(x) = 4x^4 - 2x + 3$, $q(x) = x^2 - 1$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = (-3x - 1)(x^2 - 4) - 9x - 8$

b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) - 10x + 2$

c) $w(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 7$

d) $w(x) = (4x^2 + 4)(x^2 - 1) - 2x + 7$

2.9. Twierdzenie Bézouta

Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy iloraz p oraz resztę r : $w(x) = p(x)(x - a) + r(x)$. Reszta w tym przypadku jest wielomianem stopnia 0 (dalej będziemy pisać krótko: reszta r).

Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wówczas możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x - 5$ przez dwumian $x - 4$.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x) = p(x)(x - 4) + r$. Dla $x = 4$:

$$w(4) = p(4)(4 - 4) + r = 0 + r = r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x - 4$:

$$r = w(4) = \frac{1}{8} \cdot 4^3 + 4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = 8 + 16 - 12 - 5 = 7$$

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)(x - a) + r$.

Przykład 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ przez dwumian $x + 2$, nie wykonując dzielenia.

$$r = w(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5 = -16 + 12 + 2 + 5 = 3$$

Ćwiczenie 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x - 3$

b) $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

c) $w(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, $q(x) = x + 1$

d) $w(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x + 6$, $q(x) = x + 2$

Uczeń:

- sprawdza podzielność wielomianu przez dwumian $x - a$ bez wykonywania dzielenia
- wyznacza resztę z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$
- sprawdza, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu, i wyznacza pozostałe pierwiastki
- wyznacza wartość parametru tak, aby wielomian był podzielny przez dany dwumian
- sprawdza podzielność wielomianu przez wielomian $(x-p)(x-q)$ bez wykonywania dzielenia
- przeprowadza dowód twierdzenia Bézouta

Ćwiczenie 1

$$w(x) = p(x)(x - a) + r,$$

zatem

$$\begin{aligned} w(a) &= p(a)(a - a) + r = \\ &= p(a) \cdot 0 + r = r \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

a) $r = w(3) = 0$

b) $r = w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

c) $r = w(-1) = -1$

d) $r = w(-2) = 0$

Multiteka

- Czy wielomian jest podzielny przez dwumian

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Rozważmy przypadek, gdy reszta r z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ jest równa zeru ($r \equiv 0$), czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy” w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:

Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Dowód

Założmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , czyli $w(a) = 0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r :

$$w(x) = p(x)(x - a) + r$$

Podstawiamy $x = a$:

$$w(a) = p(a)(a - a) + r = r$$

Ale $w(a) = 0$, więc $r = 0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x - a$.

Założmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, czyli istnieje taki wielomian p , że $w(x) = p(x)(x - a)$. Wówczas $w(a) = p(a)(a - a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Przykład 3

Który z wielomianów: $w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ czy $u(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

$w(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

$u(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 4 - 6 = -14 \neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Ćwiczenie 3

- a) $w(1) = 0$, jest
- b) $w(-1) = 0$, jest
- c) $w(3) = -16 \neq 0$, nie jest
- d) $w(-2) = 60 \neq 0$, nie jest

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x - 1$
- b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 9$, $q(x) = x + 1$
- c) $w(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 11$, $q(x) = x - 3$
- d) $w(x) = x^4 + 8x^2 + 2x + 16$, $q(x) = x + 2$

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w , więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Aby wyznaczyć wielomian p , wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline -2x^2 + x + 6 \\ 2x^2 - 4x \\ \hline -3x + 6 \\ 3x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki i rozłóż wielomian w na czynniki.

- $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$
- $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$
- $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$
- $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w , to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:

- Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
- Otrzymujemy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (jeżeli istnieją) są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w . Wyznaczamy te pierwiastki.

Zadania

- Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

- $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$
- $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$
- $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4

- $w(x) = (x + 4)(x^2 + x - 2) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$
- $w(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 1) = (x - 1)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
- $w(x) = (x + 2)(x^2 - 3x - 4) = (x + 2)(x + 1)(x - 4)$
- $w(x) = (x - 3)(x^2 - x - 6) = (x + 2)(x - 3)^2$

Odpowiedzi do zadań

- $r = w(-1) = 0$
 - $r = w(2) = 2$
 - $r = w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

2. a) $w(x) = (x-7)(x-1)(x+2)$
 b) $w(x) = 2(x+2)(x+\frac{3}{2}) \cdot (x+1)$
 c) $w(x) = (x+5)(x^2-3x+4)$
 d) $w(x) = 2(x+1) \cdot (x-2)(x-\frac{1}{2})$
 e) $w(x) = (x-4) \cdot (x+\sqrt{5}+2)(x-\sqrt{5}+2)$
3. a) $w(x) = (x-2)(x^2+x-3)$,
 $2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$
 b) $w(x) = (x+1) \cdot (2x^2+5x-3)$, $-1, -3, \frac{1}{2}$
 c) $w(x) = (x-1) \cdot (2x^2+x-4)$,
 $1, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$
 d) $w(x) = -(x-2) \cdot (x^2+\frac{3}{2}x-1)$, $2, -2, \frac{1}{2}$
4. a) $m = 7$
 b) $m = -\sqrt{5}, m = \sqrt{5}$
 c) $m = -2, m = 3$
5. a) podzielny
 b) $u(x) = (x-\frac{1}{2})(x+1)$,
 $w(-1) = -15 \neq 0$,
 niepodzielny
 c) podzielny
6. a) 10
 b) 6
 c) 148
 d) -2
2. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.
 a) $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$, $a = 1$
 b) $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$, $a = -2$
 c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$, $a = -5$
 d) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $a = \frac{1}{2}$
 e) $w(x) = x^3 - 17x + 4$, $a = 4$
3. Sprawdź, która z liczb: $-1, 1$ czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
 a) $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$ c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$
 b) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ d) $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$
4. Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q ?
 a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3$, $q(x) = x + 3$
 b) $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6$, $q(x) = x - 2$
 c) $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7$, $q(x) = x + 1$
5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u .
 a) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $u(x) = (x-1)(x+3)$
 b) $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $u(x) = 2x^2 + x - 1$
 c) $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12$, $u(x) = (x+1)(x+2)(x-2)$

Powtórzenie

6. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 8x^4 - 4x^3 + 6x$ przez dwumian q .
 a) $q(x) = x - 1$ b) $q(x) = x + 1$ c) $q(x) = x + 2$ d) $q(x) = x + \frac{1}{2}$
7. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.
 a) $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 9x - 4$, $a = -4$
 b) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $a = \frac{1}{2}$
 c) $w(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6$, $a = 3$
 d) $w(x) = 4x^3 + 16x^2 + 9x - 9$, $a = -3$
 e) $w(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7x - 2$, $a = -\frac{1}{4}$
7. a) $w(x) = 2(x+4)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
 b) $w(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + x + 1)$
 c) $w(x) = 6(x-3)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})$
 d) $w(x) = 4(x+3)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})$
 e) $w(x) = 4(x+2)(x-1)(x + \frac{1}{4})$

2.10. Pierwiastki całkowite wielomianu

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód

Założmy, że $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$, $a_0 \neq 0$ oraz liczba całkowita x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wówczas:

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$a_0 = -a_n x_1^n - a_{n-1} x_1^{n-1} - \dots - a_1 x_1 = x_1 (-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1)$$

Liczba $-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1$ jest całkowita, więc x_1 jest dzielnikiem a_0 .

Przykład 1

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Zgodnie z twierdzeniem, pierwiastków całkowitych wielomianu w szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = 3$, czyli wśród liczb: 1, -1, 3 i -3.

$$w(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w .

$$w(-1) = -2 + 3 + 8 + 3 \neq 0$$

Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu w .

$$w(3) = 54 + 27 - 24 + 3 \neq 0$$

Liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu w .

$$w(-3) = -54 + 27 + 24 + 3 = 0$$

Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu w .

Zatem jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu w są liczby 1 i -3.

Uwaga. Wielomian w z przykładu 1. ma jeszcze jeden pierwiastek, ale nie jest on całkowity – jest nim liczba $\frac{1}{2}$. Sprawdzenie:

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 4 + 3 = 0$$

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $w(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 4$

d) $w(x) = x^4 - 7x^2 + 10$

Ćwiczenie 1

a) dzielniki: -1, 1, -3, 3; pierwiastek całkowity: 1

b) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -4, 4; pierwiastki całkowite: -4, 1

c) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6; pierwiastki całkowite: -2, 1, 3

d) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10; brak pierwiastków całkowitych

Uczeń:

- wskazuje liczby, które mogą być pierwiastkami całkowitymi wielomianu o współczynnikach całkowitych
- rozwiązuje równanie wielomianowe z wykorzystaniem twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu
- stosuje twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu do rozkładu wielomianu na czynniki
- przeprowadza dowód twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu

Multiteka

• Pierwiastki całkowite wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.10



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

a) dzielniki wyrazu wolnego:

$$\begin{aligned} &-1, 1, -2, 2, -4, 4, \\ &w(-1) = -20 \neq 0, w(1) = 0, \\ &w(-2) < 0, w(2) = -2 \neq 0, \\ &w(-4) < 0, w(4) = 0, \\ &w(x) = (x-4)(x-1)^2, \\ &x = 1 \text{ lub } x = 4 \end{aligned}$$

b) dzielniki wyrazu wolnego:

$$\begin{aligned} &-1, 1, -2, 2, \\ &w(-1) = 7 \neq 0, \\ &w(1) = 3 \neq 0, w(-2) = 0, \\ &w(2) = 28 \neq 0, \\ &w(x) = (x+2)(3x^2 - 3x + 1), \\ &x = -2 \end{aligned}$$

c) dzielniki wyrazu wolnego:

$$\begin{aligned} &-1, 1, -3, 3, \\ &w(-1) = -2 \neq 0, w(1) > 0, \\ &w(-3) = 0, w(3) > 0, \\ &w(x) = (x+3)(x^2 + 3x + 1), \\ &x = -3 \text{ lub } x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \text{ lub } \\ &x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

d) dzielniki wyrazu wolnego:

$$\begin{aligned} &-1, 1, -3, 3, \\ &w(-1) = 2 \neq 0, w(1) > 0, \\ &w(-3) = 0, w(3) > 0, \\ &w(x) = (x+3)(4x^2 + 4x + 1), \\ &x = -3 \text{ lub } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 2$ są liczby: 1, -1, 2, -2. Obliczamy wartości wielomianu $w(x) = 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ dla tych liczb:

$$w(1) = -6 \neq 0, w(-1) = -6 \neq 0, w(2) = 0, w(-2) = -60 \neq 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem całkowitym równania.

Wykonujemy dzielenie:

$$(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$$

i wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 + 2x - 1$:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{6}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$$

które są pozostałymi pierwiastkami równania.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie. Zaczniij od znalezienia pierwiastka całkowitego.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 & \text{c)} x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0 \\ \text{b)} 3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0 & \text{d)} 4x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0 \end{array}$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$.

Wyraz wolny $a_0 = 9$ ma następujące dzielniki: 1, -1, 3, -3, 9, -9. Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem całkowitym tego równania. Zatem wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ jest podzielny przez $x - 1$:

$$(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

Otrzymany wielomian rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 9 &= x^2(x + 3) - 3(x + 3) = (x^2 - 3)(x + 3) = \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3) \end{aligned}$$

Stąd:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

a zatem rozwiązaniami równania są liczby: -3, $-\sqrt{3}$, 1 i $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 = 0 & \text{d)} x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0 \\ \text{b)} x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0 & \text{e)} x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0 \\ \text{c)} 2x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0 & \text{f)} x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = 0 \end{array}$$

Ćwiczenie 3

$$\text{a)} w(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x - 15) = (x-1)(x^2 + 5)(x-3), x = 1 \text{ lub } x = 3$$

$$\text{b)} w(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = (x-1)(x-3)(x+3)(x+2), \\ x = -3 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 3$$

$$\text{c)} w(x) = (x+1)(2x^3 - 10x^2 + x - 5) = (x+1)(2x^2 + 1)(x-5), x = -1 \text{ lub } x = 5$$

$$\text{d)} w(x) = (x-1)(x^3 - 7x + 6) = (x-1)(x^3 - x - 6x + 6) = (x-1)^2(x+3)(x-2), \\ x = -3 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 2$$

$$\text{e)} w(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x-1)(x-1)^3 = (x-1)^4, x = 1$$

$$\text{f)} w(x) = (x-2)(x+2)(x^2 + 3x - 1), x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ \text{lub } x = 2$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ e) $3x^3 + 11x^2 - 3x + 4 = 0$
b) $x^3 - 7x - 6 = 0$ f) $5x^2 - 2x = 1 - 6x^3$
c) $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$ g) $x^3 - 6 = 4x^2 - 5x$
d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$ h) $-3x^3 + 15x^2 - 20x + 6 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$ d) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$
b) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$ e) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$
c) $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$ f) $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$

3. Wyznacz pierwiastki wielomianu w i rozłóż go na czynniki.

- a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ c) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
b) $w(x) = x^3 + 3x^2 - x - 6$ d) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0$ d) $0,4x^3 - x^2 + 0,2x + 0,4 = 0$
b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{1}{3} = 0$ e) $0,5x^3 - 2,5x^2 + 3,5x - 1 = 0$
c) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ f) $0,5x^3 - 2,75x^2 + 2,5x + 2 = 0$

5. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości $x + 1$, $x + 2$ i $3x - 4$, jeśli jego objętość jest równa 24.

Powtórzenie

6. Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w oraz sprawdź, które z nich są pierwiastkami tego wielomianu.

- a) $w(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ c) $w(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$
b) $w(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ d) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8$

7. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^3 + x^2 - 3 = 0$ c) $x^3 + 6x^2 = -6x - 5$
b) $x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$ d) $3x^3 - x = 12 - 10x^2$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$ c) $x^4 + x^3 - 4x^2 = 3 - 5x$
b) $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$ d) $x^4 + x + 6 = x^3 + 7x^2$

5. $V(x) = (x + 1)(x + 2)(3x - 4) = 24$, $x > \frac{4}{3}$
 $x = 2$

$$P(x) = 2(x + 1)(x + 2) + 2(x + 1)(3x - 4) + 2(x + 2)(3x - 4)$$
$$P(2) = 52$$

6. pierwiastki: a) -2, 1, 2 b) 1, 2, 3 c) 1 d) -2, 1

7. a) $x = 1$

b) $x = -2 - \sqrt{2}$ lub $x = -1$ lub $x = -2 + \sqrt{2}$

c) $x = -5$ d) $x = -3$ lub $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 1$

8. a) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 1$

b) $x = -1$ lub $x = 2$

c) $x = -3$ lub $x = 1$

d) $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -5$ lub $x = 1$

b) $x = -2$ lub $x = -1$
lub $x = 3$

c) $x = -3$ lub $x = -1$
lub $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ lub $x = 1$
lub $x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$

e) $x = -4$

f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{3}$
lub $x = \frac{1}{2}$

g) $x = 3$

h) $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
lub $x = 3$

2. a) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = 1$ lub $x = 3$

b) $x = 1$

c) $x = 1$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = -\frac{2}{3}$
lub $x = 1$

e) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = -2$
lub $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ lub $x = 3$

f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{2}$

3. a) $w(x) = 2(x - 1) \cdot$

$\cdot \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$

b) $w(x) = (x + 2) \cdot$

$\cdot \left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

c) $w(x) = (x - 3)(x + 5) \cdot$
 $\cdot (x^2 + x + 1)$

d) $w(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot$
 $\cdot \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

4. a) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$ lub $x = 3$

b) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 3$

c) $x = 2$

d) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 1$ lub $x = 2$

e) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

f) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = 4$

Pierwiastki wymierne wielomianu

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $x = \frac{p}{q}$ oraz p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Przykład

Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x^2 + 7x + 3 = 0$.

Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego: 1, -1, 3, -3. Żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 3$ (sprawdź), zatem nie ma on pierwiastków całkowitych. Zgodnie z twierdzeniem pierwiastkami wymiernymi wielomianu w mogą być jedynie liczby: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$.

Zauważmy, że $w(\frac{1}{2}) > 0$, obliczamy więc wartość dla $-\frac{1}{2}$:

$$w(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^3 + 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 7 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{7}{2} + 3 = 0$$

Zatem $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu w . Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 3x^2 + 7x + 3) : (x + \frac{1}{2}) = 2x^2 + 2x + 6 \\ \underline{-2x^3 - x^2} \\ 2x^2 + 7x + 3 \\ \underline{-2x^2 - x} \\ 6x + 3 \\ \underline{-6x - 3} \\ 0 \end{array}$$

Równanie $2x^3 + 3x^2 + 7x + 3 = 0$ jest równoważne równaniu:

$$(x + \frac{1}{2})(2x^2 + 2x + 6) = 0$$

Trójmian $2x^2 + 2x + 6$ nie ma pierwiastków ($\Delta < 0$), więc jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $-\frac{1}{2}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) -4, -2, 0, 2, 4
b) -2, $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$, 2

2. a) $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$,
 $x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
d) $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$

1. Współczynniki wielomianu w są liczbami całkowitymi. Które z podanych liczb nie mogą być pierwiastkami wielomianu w ?

a) -4, -2, -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4; $w(x) = -4x^6 + \dots - 1$

b) -3, -2, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, 3; $w(x) = 2x^5 + \dots + 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

c) $2x^3 + 9x^2 + x - 3 = 0$

b) $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

d) $9x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 9x + 2 = 0$

2.11. Wielomiany – zastosowania

Ćwiczenie 1

Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 5 cm, 6 cm i 8 cm. Każdą jego krawędź zwiększono o x cm. Wyznacz x , jeśli wiadomo, że objętość prostopadłościanu wzrosła o 320 cm^3 .

Ćwiczenie 2

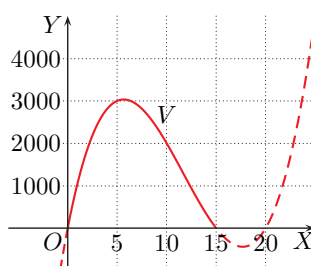
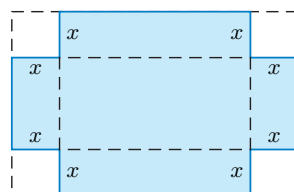
Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30 cm na 40 cm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości x cm, a następnie pozostałą część sklejkono i otrzymano otwarte pudełko.

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V . Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.

c) Sprawdź, czy spełniona jest nierówność:

$$V(10) > V(2,5)$$



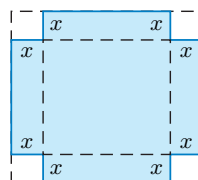
Ćwiczenie 3

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie pozostałą część sklejkono i otrzymano otwarte pudełko.

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

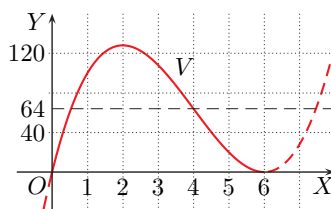
b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	128	108	64	20



c) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V . Odczytaj z wykresu przybliżone rozwiązanie nierówności $V(x) \leq 64$ dla $x \in (0; 6)$.

d) Rozwiąż równanie $V(x) = 64$ dla $x \in (0; 6)$.



Ćwiczenie 3

a) $V(x) = (12 - 2x)^2 x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, $D = (0; 6)$

c) $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (4; 6)$

d) $4x^3 - 48x^2 + 144x = 64$ i $x \in (0; 6)$

$$x^3 - 12x^2 + 36x - 16 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 - 8x + 4) = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = 4 - 2\sqrt{3} \text{ lub } x = 4 + 2\sqrt{3} \notin (0; 6)$$

Uczeń:

- opisuje wielomianem zależności dane w zadaniu i wyznacza dziedzinę tego wielomianu
- rozwiązuje zadania tekstowe, wykorzystując działania na wielomianach i równania wielomianowe

Ćwiczenie 1

$$(5 + x)(6 + x)(8 + x) =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 8 + 320$$

$$x^3 + 19x^2 + 118x - 320 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 21x + 160) = 0$$

$$x = 2$$

Ćwiczenie 2

$$\text{a) } V(x) = (40 - 2x)(30 - 2x)x =$$

$$= 4x^3 - 140x^2 + 1200x,$$

$$D = (0; 15)$$

$$\text{b) } x \approx 5 \text{ cm, } V(5) \approx 3000 \text{ cm}^3$$

Wymiary:

$$5 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$$

$$\text{c) } V(10) = 2000,$$

$$V(2,5) = 2187,5$$

czyli $V(10) < V(2,5)$; nie jest

Multiteka

• Wykres wielomianu

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.11

Generator
testów i sprawdzianów

Odpowiedzi do zadań

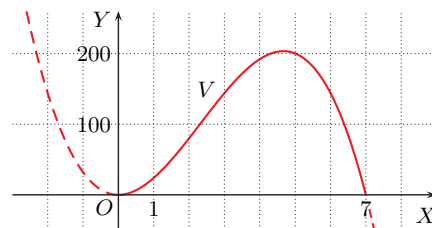
- $V(x) = 4x^2(7-x) = -4x^3 + 28x^2$,
 $D = (0; 7)$
 $0,2 \text{ dm}^3 = 200 \text{ cm}^3$
 $4x^2(7-x) = 200$ dla $x = 5$
lub $x = 1 + \sqrt{11}$
 $P_c(x) = 2 \cdot 2x \cdot 2x + 4 \cdot 2x \cdot (7-x) = 56x$
 $P_c(5) = 280 \text{ cm}^2$
 $P_c(1 + \sqrt{11}) = 56(1 + \sqrt{11}) \text{ cm}^2$
- Oznaczmy wysokość dachu przez h . Wówczas:
 $h = 5 - x$
Pole podstawy graniastoslupa:
 $P_p = 2x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (5-x) = x(x+5)$
 $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$,
 $D = (0; 5)$
 - $2x(8-x)(x+5) = 240$
 $-2x^3 + 6x^2 + 80x - 240 = 0$
 $(x-3)(x^2-40) = 0$
 $x = 3$ lub $x = -2\sqrt{10}$ lub $x = 2\sqrt{10}$, ale $x \in (0; 5)$
Zatem $x = 3$.
- $x^2(2x-1) = 162$
 $x = 4,5 \text{ [cm]}$
Średnica koła d jest równa przekątnej prostokąta o bokach: x i $5x-2$.
 $d = \sqrt{x^2 + (5x-2)^2} = \sqrt{4,5^2 + 20,5^2} = \sqrt{440,5}$
Zatem pole koła
 $P = \pi \left(\frac{\sqrt{440,5}}{2} \right)^2 = 110,125\pi \text{ [cm}^2\text{]}.$

Zadania

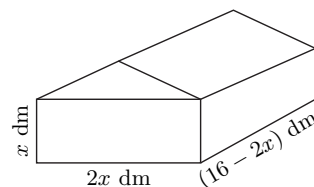
- Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość prostopadłościennego klocka o wymiarach $2x \text{ cm} \times 2x \text{ cm} \times (7-x) \text{ cm}$. Określ dziedzinę tej funkcji. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$V(x)$	$6\frac{1}{2}$	24	$49\frac{1}{2}$	80	$112\frac{1}{2}$

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego klocka, jeśli wiadomo, że jego objętość jest równa $0,2 \text{ dm}^3$.

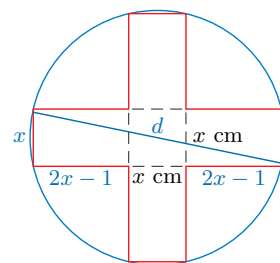


- Dom dla lalek jest graniastoslupem prostym (rysunek obok). Wysokość domku w najwyższym punkcie jest równa 5 dm.



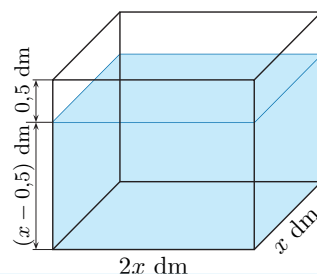
- Wyraż objętość domku V jako funkcję zmiennej x . Określ dziedzinę tej funkcji.
- Dla jakiej wartości x objętość domku jest równa 240 dm^3 ?

- Z tekturowego koła wycięto figurę w kształcie takim, jak pokazano na rysunku obok, i sklejono z niej otwarte prostopadłościenne pudełko. Podstawa pudełka jest kwadratem o boku $x \text{ cm}$, a wysokość pudełka jest równa $(2x-1) \text{ cm}$. Oblicz pole koła, jeśli objętość pudełka jest równa 162 cm^3 .



Powtórzenie

- W prostopadłościanie, którego podstawą jest kwadrat o boku $x \text{ dm}$, suma długości wszystkich krawędzi jest równa 40 dm .



- Dla jakich wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 36 dm^3 ?
- Do akwariów (rysunek obok) wlewo wodę do wysokości $(x-0,5) \text{ dm}$. Podaj wymiary akwariów (pomiń grubość szkła), jeśli wiadomo, że wlewo do niego 112 l wody.

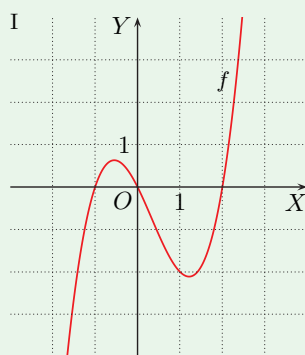
- Wysokość prostopadłościanu: $10 - 2x$
 $V(x) = x^2(10 - 2x) = -2x^3 + 10x^2$, $D = (0; 5)$
 - $-2x^3 + 10x^2 = 36$
 $x^3 - 5x^2 + 18 = 0$
 $x = 3$, $x = 1 - \sqrt{7}$, $x = 1 + \sqrt{7}$, ale $x \in (0; 5)$
Zatem $x = 3$ lub $x = 1 + \sqrt{7}$.
- $2x^2(x-0,5) = 112$ dla $x = 4$
Wymiary akwariów: $4 \text{ dm} \times 8 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$

2.12. Zagadnienia uzupełniające

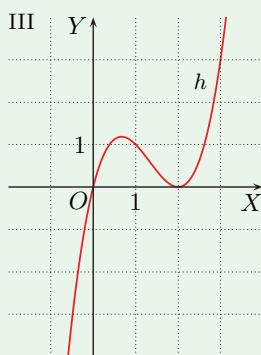
■ Wykres wielomianu

Wykresem wielomianu stopnia pierwszego jest prosta, a wykresem wielomianu stopnia drugiego jest parabola. Dokładne narysowanie wykresu wielomianu wyższego stopnia, bez korzystania z kalkulatora graficznego lub komputera, zazwyczaj bywa bardzo pracochłonne.

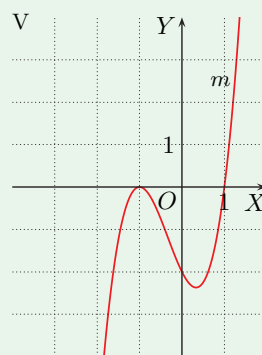
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów trzeciego stopnia.



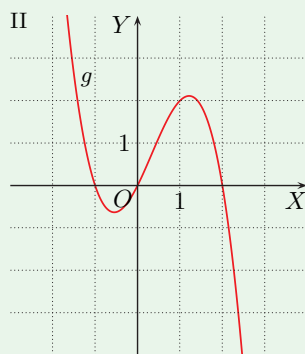
$$f(x) = x(x+1)(x-2)$$



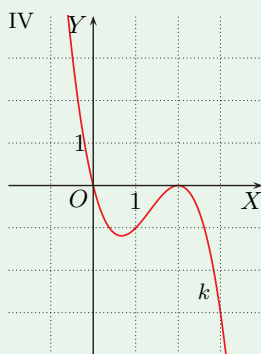
$$h(x) = x(x-2)^2$$



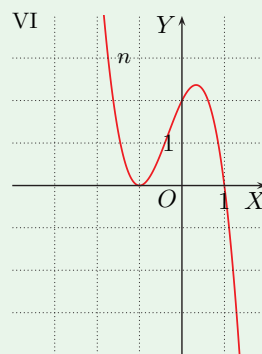
$$m(x) = 2(x+1)^2(x-1)$$



$$g(x) = -x(x+1)(x-2)$$



$$k(x) = -x(x-2)^2$$



$$n(x) = -2(x+1)^2(x-1)$$

1. Dla każdego z przedstawionych powyżej wielomianów podaj:
 - a) jego miejsca zerowe,
 - b) zbiór argumentów, dla których przyjmuje on wartości dodatnie,
 - c) zbiór argumentów, dla których przyjmuje on wartości nieujemne.

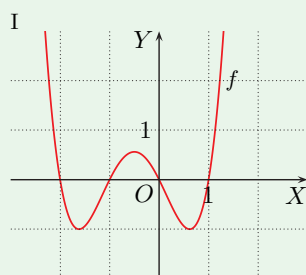
Odpowiedzi do zadań

1. I. a) $-1, 0, 2$
 b) $(-1; 0) \cup (2; \infty)$
 c) $\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
 II. a) $-1, 0, 2$
 b) $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$
 c) $(-\infty; -1) \cup \langle 0; 2 \rangle$
 III. a) $0, 2$
 b) $(0; 2) \cup (2; \infty)$
 c) $\langle 0; \infty \rangle$
 IV. a) $0, 2$
 b) $(-\infty; 0)$
 c) $(-\infty; 0) \cup \{2\}$
 V. a) $-1, 1$
 b) $(1; \infty)$
 c) $\{-1\} \cup (1; \infty)$
 VI. a) $-1, 1$
 b) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1)$
 c) $(-\infty; 1)$

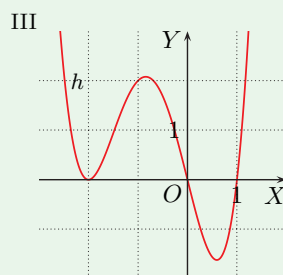
Multiteka

- Schemat Hornera
- Wykres wielomianu

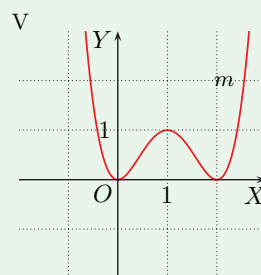
Poniżej przedstawiono kilka wykresów wielomianów czwartego stopnia.



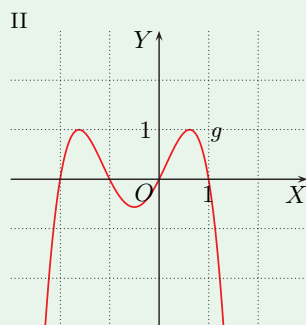
$$f(x) = x(x+2)(x+1)(x-1)$$



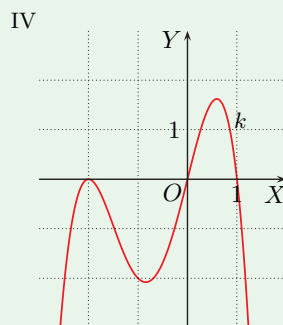
$$h(x) = x(x-1)(x+2)^2$$



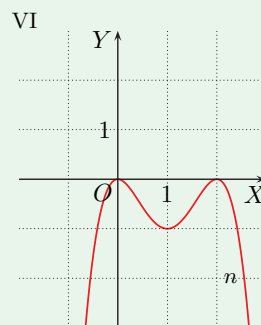
$$m(x) = x^2(x-2)^2$$



$$g(x) = -x(x+2)(x+1)(x-1)$$



$$k(x) = -x(x-1)(x+2)^2$$

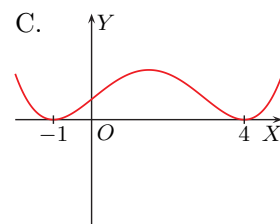
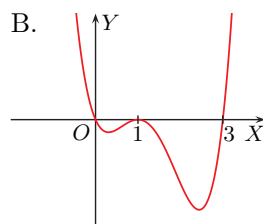
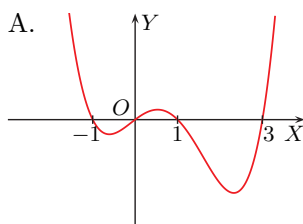


$$n(x) = -x^2(x-2)^2$$

2. I. $f(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup$
 $\cup (-1; 0) \cup (1; \infty)$
 - II. $g(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $x = -1$, $x = 0$,
 $x = 1$, $g(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
 - III. $h(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $x = 0$, $x = 1$,
 $h(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
 - IV. $k(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $x = 0$, $x = 1$,
 $k(x) \geq 0$ dla $x \in \{-2\} \cup (0; 1)$
 - V. $m(x) = 0$ dla $x = 0$, $x = 2$,
 $m(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
 - VI. $n(x) = 0$ dla $x = 0$, $x = 2$,
 $n(x) \geq 0$ dla $x \in \{0, 2\}$
3. A – h, B – f, C – g

2. Podaj dla każdego z przedstawionych powyżej wielomianów miejsca zerowe oraz zbiór argumentów, dla których wielomian ten przyjmuje wartości nieujemne.

3. Poniżej przedstawiono szkice wykresów wielomianów: f , g i h .



Dobierz szkic wykresu do każdego z podanych niżej wielomianów.

$$f(x) = x(x-1)^2(x-3),$$

$$g(x) = (x+1)^2(x-4)^2,$$

$$h(x) = x(x+1)(x-1)(x-3)$$

■ Schemat (algorytm) Hornera

Schemat Hornera (William Horner – angielski matematyk, żył w latach 1786–1837) pozwala na zmniejszenie liczby wykonywanych operacji mnożenia podczas obliczania wartości wielomianu dla danego argumentu.

Rozpatrzmy wielomian:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= a_3 \cdot x \cdot x \cdot x + a_2 \cdot x \cdot x + a_1 \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Aby obliczyć wartość tego wielomianu dla danego argumentu, należy wykonać sześć działań mnożenia i trzy dodawania.

Zauważmy, że:

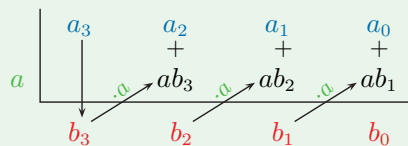
$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= (a_3x^2 + a_2x + a_1) \cdot x + a_0 = \\ &= ((a_3 \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Korzystając z otrzymanej postaci wielomianu w , możemy obliczyć jego wartość dla argumentu $x = a$, wykonując trzy działania mnożenia i trzy dodawania.

Jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} w(a) &= ((a_3 \cdot a + a_2) \cdot a + a_1) \cdot a + a_0 \\ &\quad \begin{array}{l} b_3 = a_3 \\ b_2 = ab_3 + a_2 \\ b_1 = ab_2 + a_1 \\ b_0 = ab_1 + a_0 = w(a) \end{array} \end{aligned}$$

to obliczenia możemy przedstawić w postaci schematu:



Przykład 1

Dany jest wielomian $w(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 20$. Korzystając ze schematu Hornera, oblicz $w(2)$.

$$b_3 = 4$$

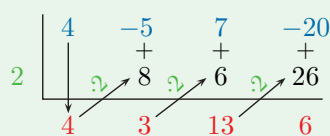
$$b_2 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$b_1 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$$

$$b_0 = 2 \cdot 13 - 20 = 6$$

Zatem $w(2) = 6$.

Zapis w postaci schematu:



4. a)

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & -4 & 7 \\ & & 6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

$$w(3) = 4$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 5 & -6 & -3 & 1 & -1 \\ & & 10 & 8 & 10 & 22 \\ \hline & 5 & 4 & 5 & 11 & 21 \end{array}$$

$$w(2) = 21$$

Komentarz

Schemat Hornera możemy również wykorzystać do szybszego szukania pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych. Oczywiście wykorzystujemy wtedy dzielniki wyrażu wolnego. Jeśli dla danego dzielnika reszta będzie równa zero, to dzielnik ten jest pierwiastkiem, a algorytm stosujemy dalej dla otrzymanego ilorazu. Jeśli dla kolejnego dzielnika reszta będzie różna od zera, to przekreślamy cały wiersz, żeby się nie mylić, i schemat stosujemy dla następnego dzielnika.

6. a) $6x^2 + 15x + 35$, reszta 114
 b) $2x^2 - 10$, reszta 11
 c) $x^3 - 4x^2 - 2x - 4$, reszta -16
 d) $x^3 - 2x^2 - x + 1$, reszta -4

4. Oblicz wartość wielomianu w dla argumentu a . Skorzystaj ze schematu Hornera.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7$, $a = 3$

b) $w(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x - 1$, $a = 2$

Schemat Hornera możemy również wykorzystać do wyznaczenia ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$.

Rozpatrzmy wielomian $w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zgodnie z przyjętymi poprzednio oznaczeniami mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= b_3x^3 + (b_2 - ab_3)x^2 + (b_1 - ab_2)x + b_0 - ab_1 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)a + b_0 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - a) + b_0 \end{aligned}$$

Zatem $b_3x^2 + b_2x + b_1$ jest ilorazem, a b_0 resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

Przykład 2

Wyznacz iloraz p i resztę r z dzielenia wielomianu $w(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$ przez dwumian $x - 2$. Wielomian w zapisz w postaci $w(x) = p(x)(x - 2) + r$.

Sporządzamy schemat:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & -7 & 3 & -3 \\ & & 10 & 6 & 18 \\ \hline & 5 & 3 & 9 & 15 \end{array}$$

Ze schematu odczytujemy iloraz $p(x) = 5x^2 + 3x + 9$ i resztę $r = 15$. Zatem $w(x) = (5x^2 + 3x + 9)(x - 2) + 15$.

5. Wykonaj w sposób tradycyjny dzielenie $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4)$. Porównaj zapis tego dzielenia z podanym niżej zapisem dzielenia wykorzystującym schemat Hornera.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 3 & -10 & 0 & -29 & 2 \\ & & 12 & 8 & 32 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 8 & 3 & 14 \end{array}$$

Zwróć uwagę na współczynnik 0 przy x^2 .

6. Wykonaj dzielenie wielomianów, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3)$

c) $(x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 8) : (x - 2)$

b) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) : (x + 2)$

d) $(x^4 - 5x^2 - x - 2) : (x + 2)$

5. $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4) = 3x^3 + 2x^2 + 8x + 3$
 $-x^4 + 12x^3$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 29x + 2 \\ -2x^3 + 8x^2 \\ \hline 8x^2 - 29x + 2 \\ -8x^2 + 32x \\ \hline 3x + 2 \\ -3x + 12 \\ \hline 14 \end{array}$$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ i $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.
 - $u(x) = 2w(x) + (1-x)p(x)$
 - $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$
- Wykonaj działania, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.
 - $(x+2)^3 + (x+2)^2$
 - $(x+\frac{2}{3})^3 - (x-\frac{2}{3})^2$
 - $(3x+2)^3 + (3x-2)^3$
 - $(x^2-2x)^3 - (x^2+2x)^3$
- Podaj sumę współczynników wielomianu u .
 - $u(x) = (2x^2-1)^2 - (2x-1)^2$
 - $u(x) = (x^2+8)(\sqrt{8}-x)(x+2\sqrt{2})$
 - $u(x) = (x-2)^3 - (x-2)^2$
 - $u(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$
- Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = 3x^4 - 3x^2$
 - $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$
 - $w(x) = x^6 + 7x^5 + 6x^4$
 - $w(x) = 5x^5 - 10x^3 + 5x$
 - $w(x) = -3x^5 + 30x^3 - 75x$
 - $w(x) = 32x^6 - 16x^4 + 2x^2$
- Dany jest wielomian w , dla którego $w(-1) = 4$ i $w(0) = 3$. Oblicz a i b .
 - $w(x) = x^3 + (a-b)x^2 - 4x + \frac{b}{2}$
 - $w(x) = -ax^3 + 3x^2 + a - 6b$
- Rozwiąż równanie.
 - $5x^2 + 2x^4 + x^3 = 0$
 - $-2x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
 - $x^5 - 7x^4 + 12x^3 = 0$
 - $20x^6 + x^5 = x^4$
 - $4x^5 + x^3 = 4x^4$
 - $x^4 = 2x^6 + x^5$
- Zbiór A jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu u , zbiór B – zbiorem miejsc zerowych wielomianu v , zbiór C – zbiorem miejsc zerowych wielomianu w . Wyznacz zbiór $(A \cup B) \setminus C$.
 - $u(x) = x^3 - x^2$, $v(x) = x^3 + 2x^2$, $w(x) = x^3 - 4x$
 - $u(x) = x^4 - 3x^2$, $v(x) = x^4 + 9x^2$, $w(x) = \frac{1}{3}x^4 + 9x^3$
- Rozłóż wielomian w na czynniki i podaj jego pierwiastki.
 - $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
 - $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$
 - $w(x) = 5x^3 + x^2 - 15x - 3$
 - $w(x) = 125x^3 - 27$
 - $w(x) = 27x^4 + \frac{1}{8}x$
 - $w(x) = -14x^3 + 7x$
- $w(x) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)$,
pierwiastki: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$
 - $w(x) = x(x+2)(x+1)(x-2)$,
pierwiastki: $-2, -1, 0, 2$
 - $w(x) = 5(x+\sqrt{3})(x+\frac{1}{5})(x-\sqrt{3})$,
pierwiastki: $-\sqrt{3}, -\frac{1}{5}, \sqrt{3}$
 - $w(x) = 5(x-\frac{3}{5})(25x^2+15x+9)$,
pierwiastek: $\frac{3}{5}$
 - $w(x) = 27x(x+\frac{1}{6})(x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{36})$,
pierwiastki: $-\frac{1}{6}, 0$
 - $w(x) = -14x(x+\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$,
pierwiastki: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedzi do zadań

- $u(x) = -2x^2 + 3x - 1$,
 $\text{st}(u) = 2$
 - $u(x) = -2x^5 - \frac{1}{2}x^4 + -2x^3 + 1$, $\text{st}(u) = 5$
- $x^3 + 7x^2 + 16x + 12$
 - $x^3 + x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{27}$
 - $54x^3 + 72x$
 - $-12x^5 - 16x^3$
- $u(1) = 0$
 - $u(1) = 63$
 - $u(1) = -2$
 - $u(1) = 3$
- $w(x) = 3x^2(x-1)(x+1)$
 - $w(x) = 2x(x+1)^2$
 - $w(x) = x^4(x+1)(x+6)$
 - $w(x) = 5x(x-1)^2(x+1)^2$
 - $w(x) = -3x(x-\sqrt{5})^2 \cdot (x+\sqrt{5})^2$
 - $w(x) = 32x^2(x-\frac{1}{2})^2 \cdot (x+\frac{1}{2})^2$
- $w(-1) = a - \frac{b}{2} + 3 = 4$,
 $w(0) = \frac{b}{2} = 3$, więc
 $a = 4, b = 6$
 - $w(-1) = 2a - 6b + 3 = 4$,
 $w(0) = a - 6b = 3$, więc
 $a = -2, b = -\frac{5}{6}$
- $x = 0$
 - $x = -4$ lub $x = 0$ lub $x = 1$
 - $x = 0$ lub $x = 3$ lub $x = 4$
 - $x = -\frac{1}{4}$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{1}{5}$
 - $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$
 - $x = -1$ lub $x = 0$
lub $x = \frac{1}{2}$
- $A = \{0, 1\}, B = \{-2, 0\}$,
 $C = \{-2, 0, 2\}$
 $A \cup B \setminus C = \{1\}$
 - $A = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$,
 $B = \{0\}, C = \{-27, 0\}$
 $A \cup B \setminus C = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

9. a) $x = 2$; 0

b) $x = -5$ lub $x = -1$ lub $x = 1$; 1

c) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2$; 0

d) $x = -3$ lub $x = 1$ lub $x = 3$; 1

e) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{9}$ lub $x = \frac{1}{3}$; 3

f) $x = -1$ lub $x = 2$; 0

g) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{8}$; 1

h) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$; 2

10. a) $w(2) = 8m + 5 = 0$ dla $m = -\frac{5}{8}$

b) $w(3) = 6m - 22 = 0$ dla $m = \frac{11}{3}$

c) $w(-2) = -2m^2 + 4m + 6 = 0$ dla $m = -1$, $m = 3$

11. a) $u(x) = (x-3)(x^2+4)$,
 $v(x) = (x-3)(x-2)(x+2)$,
 3 pierwiastki
 b) $u(x) = (x-2)(x-3)(x+3)$,
 $v(x) = (x+1)(x-3)(x+3)$,
 4 pierwiastki
 c) $u(x) = (x+2)(x-1)(x+1)$,
 $v(x) = 2(x-\frac{1}{2})(x-2)(x+2)$,
 5 pierwiastków

Zestaw II

1. a) $x^2 + 3x + 10$, reszta 31

b) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{8}$,
 reszta $\frac{21}{16}$

2. a) $w(x) = (x+2)(x^2-2x+6) - 7$

b) $w(x) = (x+2)(x^2+1) - 1$

c) $w(x) = (x+2)(4x^3-x)$

d) $w(x) = (x+2)(x^2+x-11) + 20$

9. Rozwiąż równanie. Ile pierwiastków tego równania należy do przedziału $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$?

a) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

e) $81x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

f) $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$

c) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

g) $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

h) $4x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

10. Dla jakich wartości m liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w ?

a) $w(x) = x^3 + (2m-1)x^2 - 3x + 7$, $a = 2$

b) $w(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 5$, $a = 3$

c) $w(x) = x^3 + 3x^2 + (m^2 - 2m)x + 2$, $a = -2$

11. Rozłóż wielomiany u i v na czynniki, grupując wyrazy. Ile różnych pierwiastków ma wielomian $u \cdot v$?

a) $u(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, $v(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) $u(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, $v(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

c) $u(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $v(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

Zestaw II

1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

a) $w(x) = x^3 + x + 1$, $a = 3$

b) $w(x) = x^4 + x^2 + 1$, $a = -\frac{1}{2}$

2. Przedstaw wielomian w w postaci $w(x) = (x+2)p(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 + 2x + 5$

c) $w(x) = 4x^4 + 8x^3 - x^2 - 2x$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

3. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, $a = -2$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 4$, $a = 4$

c) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $a = \frac{1}{2}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 - 5x - 14 = 0$

f) $15x^3 + 8x^2 - 9x - 2 = 0$

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 = 0$

g) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$

h) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0$

3. a) $x = 3$, $x = 4$, $w(x) = (x+2)(x-3)(x-4)$

b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$,

$w(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x-4)$

c) nie ma więcej pierwiastków, $w(x) = 2(x-\frac{1}{2})(x^2+x+1)$

4. a) $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

b) $x = 7$

c) $x = -3$

d) $x = 3$

e) $x = 5$

f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{2}{3}$

g) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = 1$ lub $x = \sqrt{2}$

h) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = \sqrt{5}$



5. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 5x = 6x^2 - 6$

d) $x^4 + 2x^3 - x^2 = 6 - 4x$

b) $3x^3 - 3 = 7x^2 - 7x$

e) $x^4 + x^3 + x^2 = x + 2$

c) $(x^2 - 1)(x + 3) = x - 1$

f) $-5x(x^2 - x - 1) = 6 - x^4$

6. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

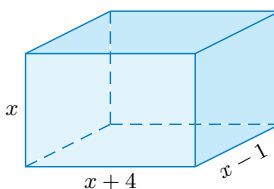
a) $w(x) = (a + 1)x^3 - x + a^3$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = x^3 - 6x - 3a$, $q(x) = x - a$

7. Wyznacz wartość parametru a , dla której reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + ax - 3$ przez dwumian:

a) $x - 1$ jest równa 4, b) $x + 2$ jest równa 5.

8. Podaj wzór funkcji opisującej objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Dla jakiej wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 12?



D 9. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x cm, $(x - 3)$ cm, $(x + 5)$ cm i objętości 30 cm^3 . Uzasadnij, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest mniejsza od 56 cm.

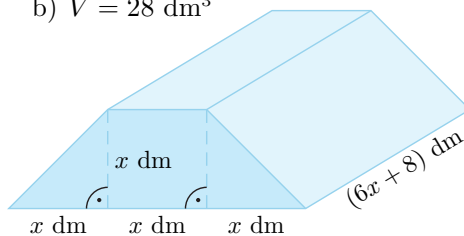
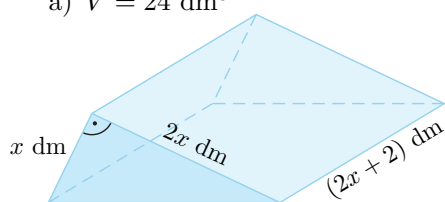
10. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x m, $(x + 1)$ m, $(4x - 3)$ m i objętości $0,75 \text{ m}^3$. Która ściana tego prostopadłościanu ma najmniejsze pole? Oblicz to pole.

11. Krawędź podstawy graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $(2x - 3)$ dm, a jego wysokość jest równa $(x - \frac{1}{2})$ dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa, jeśli ma on objętość $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^3$.

12. Drewniana belka ma kształt graniastoslupa (rysunek poniżej), którego objętość jest równa V . Oblicz długość najdłuższej krawędzi tej belki.

a) $V = 24 \text{ dm}^3$

b) $V = 28 \text{ dm}^3$



10. $x(x + 1)(4x - 3) = 0,75$ i $x > \frac{3}{4}$, zatem $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Długości krawędzi prostopadłościanu: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m, $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ m, $(2\sqrt{3} - 3)$ m, czyli ściana o krawędziach $(2\sqrt{3} - 3)$ m, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m ma najmniejsze pole:
 $P = \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ m}^2 \approx 0,4 \text{ m}^2$.

11. $V(x) = 6 \cdot \frac{(2x-3)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(4x^3 - 14x^2 + 15x - 4,5)$, $x > \frac{3}{2}$

$V(x) = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^3$ dla $x = 2$ dm

Wtedy krawędź podstawy: 1 dm,

wysokość graniastoslupa: $\frac{3}{2}$ dm,

pole powierzchni całkowitej: $6 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 6 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = (9 + 3\sqrt{3}) \text{ dm}^2$.

5. a) $x = 2 - \sqrt{7}$ lub $x = 2$ lub $x = 2 + \sqrt{7}$

b) $x = 1$

c) $x = -2 - \sqrt{2}$ lub $x = -2 + \sqrt{2}$ lub $x = 1$

d) $x = -3$ lub $x = 1$

e) $x = -1$ lub $x = 1$

f) $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

6. a) $w(1) = a + a^3 = 0$,
gdz $a = 0$.

b) $w(a) = a^3 - 9a = 0$, gdy
 $a = -3$ lub $a = 0$ lub $a = 3$.

7. a) $w(1) = a - 2 = 4$ dla $a = 6$

b) $w(-2) = -11 - 2a = 5$ dla
 $a = -8$

8. $V(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$,
 $D = (1; \infty)$,
 $V(x) = 12$ dla $x = 2$

9. $x(x - 3)(x + 5) = 30$ i $x > 3$,
zatem $x = \sqrt{15}$.

Suma długości krawędzi:

$S(x) = 12x + 8$,

$S(\sqrt{15}) = 12\sqrt{15} + 8 <$

$< 12\sqrt{16} + 8 = 56$

12. a) $V(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2x(2x+2) = 24$

$x = 2$ dm, czyli najdłuższa krawędź ma długość 6 dm.

b) $V(x) = \frac{(x+3x)x}{2} \cdot (6x+8) = 28$

$x = 1$ dm, czyli najdłuższa krawędź ma długość 14 dm.

**Komentarz**

Po omówieniu przykładu warto zaproponować uczniom, aby samodzielnie zapisali plan rozwiązywania zadania. Następnie warto przeanalizować ten plan wspólnie z uczniami, aby lepiej przyswoili sobie taki sposób postępowania. Przykładowy plan rozwiązywania zadania:

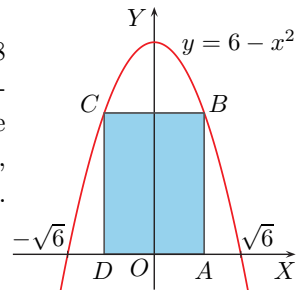
Cel: obliczenie obwodu prostokąta w zadaniu ze zmienną t .

1. Zapisanie długości boków prostokąta przy pomocy zmiennej t .
2. Zapisanie pola jako funkcji zmiennej t .
3. Zapisanie równania – przyrównanie pola do wartości danej w treści zadania.
4. Rozwiązanie równania.
5. Wyznaczenie długości boków i obliczenie pola.

Uwaga. W omawianym zadaniu podana jest dziedzina funkcji zmiennej t . Warto przypomnieć uczniom, że jeżeli dziedzina nie jest podana, to należy ją wyznaczyć.

Przykład

Dwa wierzchołki prostokąta $ABCD$ o polu równym 8 leżą na osi OX , a dwa pozostałe – nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 6 - x^2$. Wierzchołki te mają współrzędne: $A(t, 0)$, $B(t, 6 - t^2)$, $C(-t, 6 - t^2)$, $D(-t, 0)$ dla pewnego $t \in (0; \sqrt{6})$ (rysunek obok). Oblicz obwód tego prostokąta.



Zauważmy, że $|AD| = 2t$ oraz $|AB| = 6 - t^2$.

Zatem pole prostokąta:

$$P = |AD| \cdot |AB| = 2t(6 - t^2) = 12t - 2t^3$$

Pole prostokąta jest równe 8, więc rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned} -2t^3 + 12t &= 8 \\ -2t^3 + 12t - 8 &= 0 \quad / : (-2) \\ t^3 - 6t + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Pierwiastków całkowitych tego równania szukamy wśród całkowitych dzielników liczby 4. Takim pierwiastkiem jest liczba 2, gdyż:

$$2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Wielomian $w(t) = t^3 - 6t + 4$ dzielimy przez dwumian $t - 2$:

$$\begin{array}{r} (t^3 + 0t^2 - 6t + 4) : (t - 2) = t^2 + 2t - 2 \\ \underline{-t^3 + 2t^2} \\ 2t^2 - 6t + 4 \\ \underline{-2t^2 + 4t} \\ -2t + 4 \\ \underline{2t - 4} \\ 0 \end{array}$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $t^2 + 2t - 2$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 12, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \notin (0; \sqrt{6})$$

$$t_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \in (0; \sqrt{6})$$

Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 8, gdy $t = 2$ lub $t = \sqrt{3} - 1$.

Jeśli $t = 2$, to $|AD| = 4$ oraz $|AB| = 6 - 2^2 = 2$. Obwód prostokąta jest wówczas równy 12.

Jeśli $t = \sqrt{3} - 1$, to $|AD| = 2\sqrt{3} - 2$ oraz $|AB| = 6 - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2 + 2\sqrt{3}$. Obwód prostokąta jest wówczas równy $8\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Obwód prostokąta jest równy 12 lub $8\sqrt{3}$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x - 4$ spełnia warunek $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$. Wynika stąd, że:
 - A. $a = 6$, B. $a = 4$, C. $a = 2$, D. $a = -2$.
 2. Dany jest wielomian $w(x) = (2 - x)^3 \cdot (\sqrt{2}x - 1)^3$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy:
 - A. $-8\sqrt{2}$, B. $-2\sqrt{2}$, C. $2\sqrt{2}$, D. $8\sqrt{2}$.
 3. Jeśli $w(x) = 2x^2 - 6$ i $u(x) = -x^3 + 4x + 2$, to $f(2) = 4$ dla:
 - A. $f(x) = w(x) + 2u(x)$, C. $f(x) = w(x) \cdot u(x)$,
 B. $f(x) = 2w(x) - u(x)$, D. $f(x) = w(x) \cdot (u(x) + 2)$.
 4. Która para punktów należy do wykresu wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?
 - A. $A_1(-1, 4)$, $A_2(1, 4)$ C. $C_1(-\frac{1}{2}, 5\frac{5}{8})$, $C_2(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8})$
 B. $B_1(2, 8)$, $B_2(-2, 6)$ D. $D_1(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8})$, $D_2(\frac{3}{2}, 7\frac{1}{8})$
 5. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: $x - 4$, $x + 4$, $x^2 - 4$, gdzie $x > 4$. Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wzorem:
 - A. $V(x) = x^4 - 16$, C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$,
 B. $V(x) = x^4 - 64$, D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$.
 6. Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 - 18x^2 - 3x + 32$ przez dwumian $x + \sqrt{2}$ jest równa:
 - A. -2 , B. $\sqrt{2}$, C. 2 , D. $3\sqrt{2}$.
 7. Pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - (4 + 2\sqrt{3})x$ jest liczba:
 - A. $-\sqrt{3}$, B. $\sqrt{3}$, C. $1 - \sqrt{3}$, D. $1 + \sqrt{3}$.
 8. Liczby -3 , 1 są jedynymi pierwiastkami równania:
 - A. $x^3 + 2x^2 = 3x$, C. $(x - 1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$,
 B. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$, D. $(x^2 - 1)(x + 3)^2 = 0$.
 9. Ile rozwiązań ma równanie $x^7 - x^3 = x^4 - 1$?
 - A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
 10. Iloczyn niezerowych pierwiastków równania $8x^7 + \frac{1}{2}x^3 = 4x^5$ jest równy:
 - A. $-\frac{1}{4}$, B. $-\frac{1}{2}$, C. 2, D. 4.
1. $w(\sqrt{2}) = -12 + 2\sqrt{2} + 2a$
 $-w(-\sqrt{2}) = 12 + 2\sqrt{2} - 2a$
 $a = 6$
 2. Współczynnik przy najwyższej potędze pierwszego czynnika jest równy -1 , a drugiego $2\sqrt{2}$, zatem:
 $-1 \cdot 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$
 3. $w(2) = 2$, $u(2) = 2$
 5. $V(x) = (x-4)(x+4)(x^2-4) =$
 $= (x^2 - 16)(x^2 - 4) =$
 $= x^4 - 20x^2 + 64$
 6. $w(-\sqrt{2}) = 4 - 18 \cdot 2 + 3\sqrt{2} +$
 $+ 32 = 3\sqrt{2}$
 7. $w(x) = x(x^2 - (4 + 2\sqrt{3}))$
 A. $(-\sqrt{3})^2 = 9 \neq 4 + 2\sqrt{3}$
 B. $(\sqrt{3})^2 = 9 \neq 4 + 2\sqrt{3}$
 C. $(1 - \sqrt{3})^2 = 12 - 4\sqrt{3} \neq$
 $\neq 4 + 2\sqrt{3}$
 D. $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$
 8. A. $x(x^2 + 2x - 3) = 0$
 B. $(x + 1)(x - 1)(x + 3) = 0$
 C. $(x - 1)^2(x + 3)^2 = 0$
 D. $(x + 1)(x - 1)(x + 3)^2 = 0$
9. $x^7 - x^4 = x^3 - 1$
 $x^4(x^3 - 1) - (x^3 - 1) = 0$
 $(x^4 - 1)(x^3 - 1) = 0$
 $x = -1$ lub $x = 1$
 10. $8x^7 - 4x^5 + \frac{1}{2}x^3 = 0$
 $\frac{1}{2}x^3(16x^4 - 8x^2 + 1) = 0$
 $\frac{1}{2}x^3(4x^2 - 1)^2 = 0$
 $x = 0$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

$$1. w(x) = (x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9) = (x^2)^3 - 3^3$$

$$w(\sqrt[3]{9}) = 9^2 - 27 = 54$$

$$2. (\sqrt{6} - \sqrt{3})^3 = 15\sqrt{6} - 21\sqrt{3}$$

$$a = 15, b = -21$$

$$3. (x^2 + 8)(x + 1) = 0$$

$$x = -1$$

$$4. w(x) = x^2(x + 2) - 16(x + 2) = (x^2 - 16)(x + 2) = (x + 2)(x + 4)(x - 4)$$

$$x \in \mathbf{Z} \text{ i } |x| < 4$$

$$x = -2$$

$$5. V(x) = x(x + 4)(2x - 4) = 2x^3 + 4x^2 - 16x,$$

$$D = (2; \infty)$$

$$V(x) = 32, \text{ gdy}$$

$$(x^2 - 8)(x + 2) = 0, \text{ czyli}$$

$$x = -2\sqrt{2} \text{ lub } x = 2\sqrt{2} \text{ lub}$$

$$x = -2, \text{ ale } D = (2; \infty).$$

$$\text{Zatem } V(x) = 32 \text{ dla}$$

$$x = 2\sqrt{2}.$$

$$6. w(x) = (x - 3)(3x^2 + 6x + 2)$$

$$3x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$\Delta = 12$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{nie są liczbami wymiernymi.}$$

$$7. f(x) = g(x), \text{ gdy}$$

$$\frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x = x, \text{ czyli:}$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\text{Punkty wspólne wykresów}$$

$$f \text{ i } g: (0, 0), (-3, -3), (3, 3).$$

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz wartość wielomianu $w(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^4 + 3x^2 + 9)$ dla $x = \sqrt[3]{9}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Objętość sześcianu jest równa $a\sqrt{6} + b\sqrt{3}$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{Z}$. Wyznacz a i b , jeśli długość krawędzi tego sześcianu jest równa $\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + 8x + 8 = 0$.

Zadanie 4 (2 pkt)

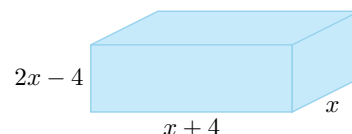
Które z liczb całkowitych o wartości bezwzględnej mniejszej od 4 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$?

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Podaj wzór wielomianu opisującego objętość pudełka w zależności od x (rysunek obok).

Jaka jest dziedzina tej funkcji? Dla jakiej wartości x objętość pudełka jest równa 32?



D Zadanie 6 (3 pkt)

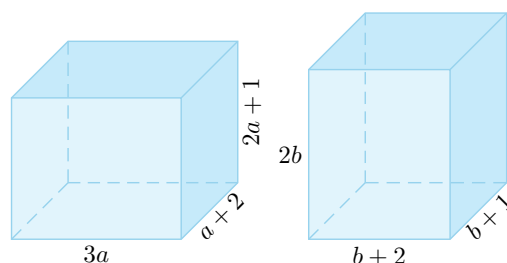
Uzasadnij, że trójmian kwadratowy, który otrzymamy w wyniku podzielenia wielomianu $w(x) = 3x^3 - 3x^2 - 16x - 6$ przez dwumian $x - 3$, nie ma pierwiastków wymiernych.

Zadanie 7 (3 pkt)

Wyznacz punkty wspólne wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x$ i $g(x) = x$.

D Zadanie 8 (5 pkt)

Każdy z przedstawionych obok prostopadłościanów ma objętość równą 120. Uzasadnij, że prostopadłościany te mają równe pola powierzchni całkowitych.



Zadanie 9 (5 pkt)

Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , dwa pozostałe należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, jeżeli jego pole jest równe 39.

$$8. V_1(a) = 3a(a + 2)(2a + 1) = 6a^3 + 15a^2 + 6a = 120, \text{ czyli } a = 2.$$

Długości krawędzi: 4, 5 i 6.

$$V_2(b) = 2b(b + 2)(b + 1) = 2b^3 + 6b^2 + 4b = 120, \text{ czyli } b = 3.$$

Długości krawędzi: 4, 5 i 6.

Oba prostopadłościany mają krawędzie tej samej długości, zatem ich pola powierzchni całkowitych są równe.

$$9. \text{Długości boków prostokąta: } 2t, \frac{1}{2}t^2 + 2.$$

$$\text{Pole prostokąta: } 2t \left(\frac{1}{2}t^2 + 2 \right) = 39, t > 0.$$

$$t = 3$$

$$\text{Współrzędne wierzchołków: } (-3, 0), (3, 0), \left(3, \frac{13}{2}\right), \left(-3, \frac{13}{2}\right).$$