

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy

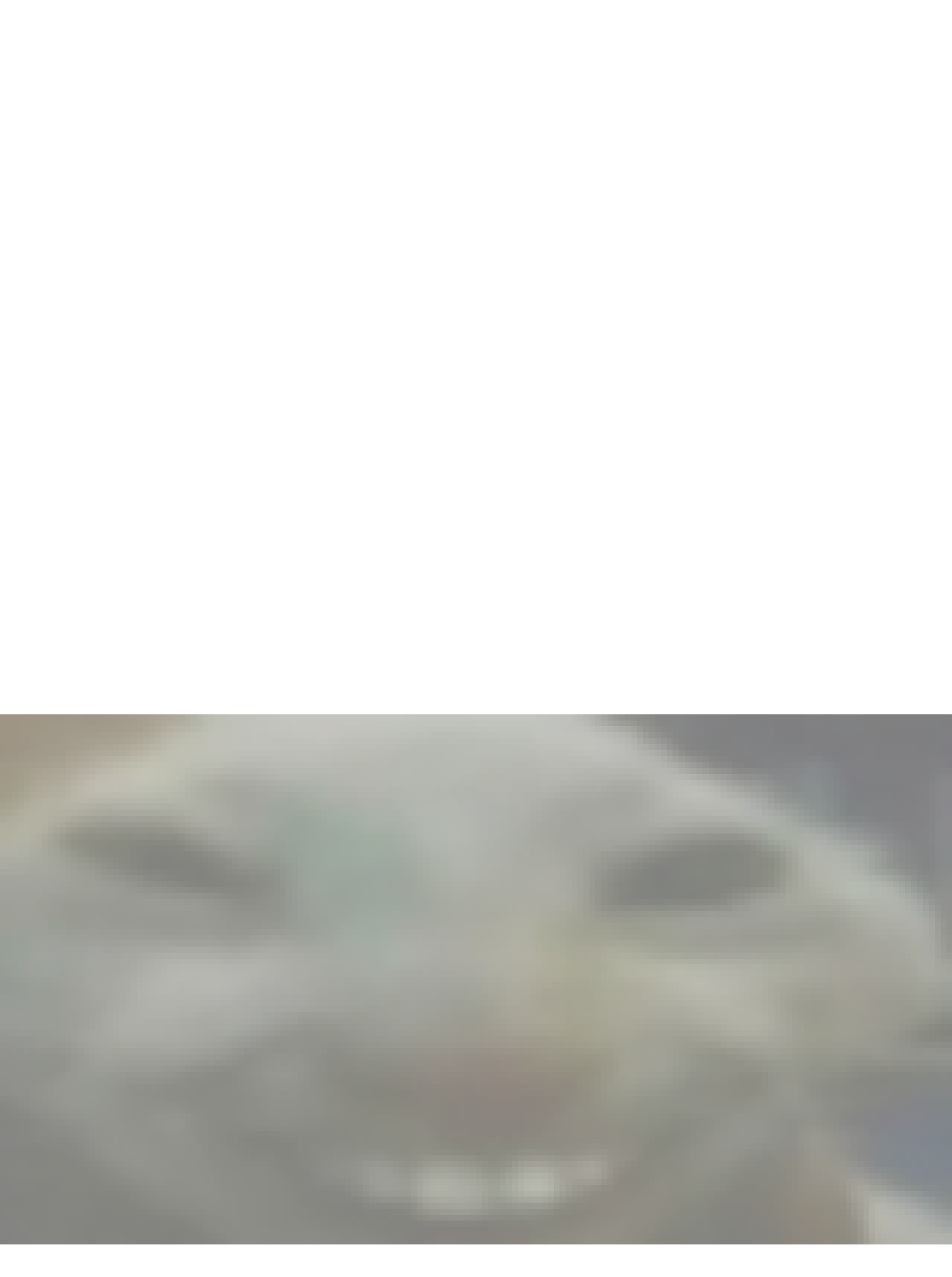


Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl



MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

2

MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela 2 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babiańskiego i Lecha Chańko *MATeMATyka 2* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (971/2/2020).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-4005-3

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *MATeMATyka* dla klasy 2 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak.

Redakcja merytoryczna: Beata Zając.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Realizacja projektu okładki: Ultra.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/Omelchenko.

Zdjęcia: Getty Images: iStock/Getty Images Plus - Davel5957 s. 29 (Gateway Arch), Meinzahn s. 107, MediaNews Group/Bay Area News via Getty Images s. 9, Moment/shunil zhao s. 29 (wiszące łańcuchy), ullstein bild s. 48; Shutterstock: Balonci s. 155, Daniel Prudek s. 135, Direk Yiamsaensuk s. 175, ID1974 s. 226, Jag_cz s. 67, Nicku s. 74, remik44992 s. 145, Vakilav s. 47; Lech Chańko s. 55, 245; M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2020 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 201.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Wojciech Babiański
Lech Chańko

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy



Twoje mocne strony

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują.

Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym,

ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści

i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020

ISBN 978-83-267-3899-9

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radzimińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda, Agnieszka Trzpił-Gajek

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Korekta językowa: Anna Wesołowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMATyka kl. 1 ZP i MATeMATyka kl. 1 ZPIR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek oraz MATeMATyka kl. 2 ZP i MATeMATyka kl. 2 ZR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Spis treści

1. Funkcja kwadratowa

1.1. Wykres funkcji kwadratowej – powtórzenie	10
1.2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej – powtórzenie	13
Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego – warto powtórzyć	15
1.3. Równania kwadratowe (1)	16
1.4. Równania kwadratowe (2)	19
Szkicowanie paraboli – warto wiedzieć	23
1.5. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)	24
1.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)	27
1.7. Nierówności kwadratowe	30
1.8. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych	34
1.9. Układy równań	37
Układy równań kwadratowych – warto wiedzieć	40
1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	41
1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	44
1.12. Zagadnienia uzupełniające	47
Zestawy powtórzeniowe	49
Sposób na zadanie	52
Zadania testowe	53
Przed obowiązkową maturą z matematyki	54

2. Wielomiany

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu	56
2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	59
2.3. Mnożenie wielomianów	64
2.4. Wzory skróconego mnożenia	68
Trójkąt Pascala – warto wiedzieć	72
2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)	73
2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)	76
2.7. Równania wielomianowe	78
2.8. Dzielenie wielomianów	82
Dzielenie wielomianu przez trójmian kwadratowy – warto wiedzieć	86
2.9. Twierdzenie Bézouta	87
2.10. Pierwiastki całkowite wielomianu	91
Pierwiastki wymierne wielomianu – warto wiedzieć	94
2.11. Wielomiany – zastosowania	95

2.12. Zagadnienia uzupełniające	97
Zestawy powtórzeniowe	101
Sposób na zadanie	104
Zadania testowe	105
Przed obowiązkową maturą z matematyki	106

3. Funkcje wymierne

Proporcjonalność odwrotna – warto powtórzyć	108
3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	109
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY	112
3.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OX	114
Funkcja homograficzna – warto wiedzieć	117
3.4. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne	118
Działania na liczbach wymiernych – warto powtórzyć	122
3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	123
3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	126
3.7. Równania wymierne (1)	129
3.8. Równania wymierne (2)	131
3.9. Równania z wartością bezwzględną	136
3.10. Nierówności z wartością bezwzględną	139
3.11. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	142
3.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	145
3.13. Zagadnienia uzupełniające	147
Zestawy powtórzeniowe	149
Sposób na zadanie	152
Zadania testowe	153
Przed obowiązkową maturą z matematyki	154

4. Trygonometria

4.1. Trójkąty prostokątne	156
Trójki pitagorejskie – warto wiedzieć	160
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	161
4.3. Trygonometria – zastosowania	164
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	168
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	171
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)	176
4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)	180
Współczynnik kierunkowy prostej – warto wiedzieć	183
4.8. Pole trójkąta	184
Czworokąty wypukłe – warto powtórzyć	188

4.9. Pole czworokąta	189
4.10. Zagadnienia uzupełniające	193
Zestawy powtórzeniowe	195
Sposób na zadanie	198
Zadania testowe	199
Przed obowiązkową maturą z matematyki	200

5. Planimetria

5.1. Okrąg	202
5.2. Koło	205
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej	208
Konstrukcja stycznej do okręgu. Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie – warto wiedzieć	212
5.4. Kąty w okręgu	213
5.5. Okrąg opisany na trójkącie	218
5.6. Okrąg wpisany w trójkąt	222
5.7. Wielokąty foremne	227
Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych – warto wiedzieć	230
5.8. Twierdzenie sinusów	231
5.9. Twierdzenie cosinusów (1)	236
5.10. Twierdzenie cosinusów (2)	239
5.11. Zagadnienia uzupełniające	243
Zestawy powtórzeniowe	247
Sposób na zadanie	250
Zadania testowe	251
Przed obowiązkową maturą z matematyki	252
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	253
Indeks	292
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	295

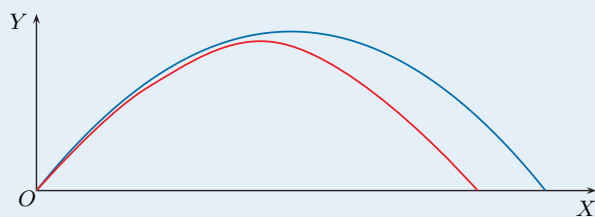
Odpowiedzi do pytań i poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

-  Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.
-  Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Funkcja kwadratowa

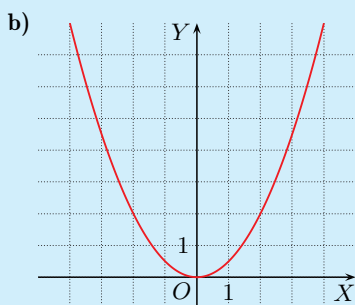
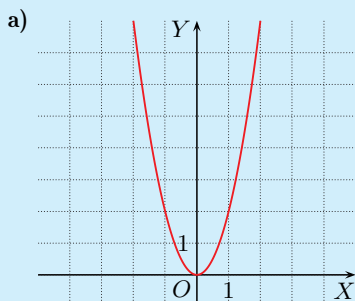
Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu rzuconej piłki lub wystrzelonego pocisku jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak ze względu na opór powietrza tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym).



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$ i odczytuje z wykresu jej własności
- szkicuje wykres funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ i odczytuje z wykresu jej własności

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2

a) 8 b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

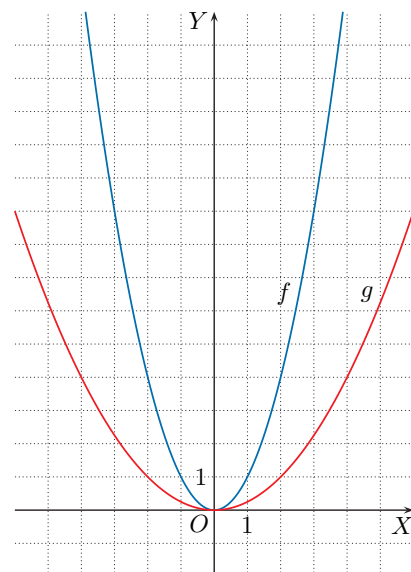
Ćwiczenie 4

A, B

1.1. Wykres funkcji kwadratowej – powtórzenie

Wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a > 0$, jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Jej wierzchołkiem jest punkt $O(0,0)$. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = x^2 \text{ i } g(x) = \frac{1}{4}x^2$$



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 2x^2$, b) $y = \frac{1}{2}x^2$.

Ćwiczenie 2

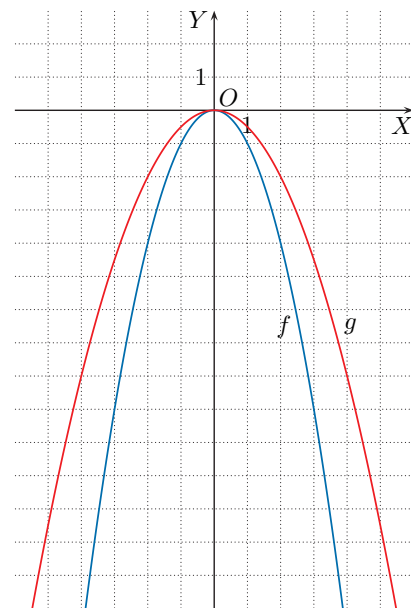
Punkt P należy do paraboli $y = ax^2$. Podaj wartość współczynnika a .

a) $P(\frac{1}{2}, 2)$ c) $P(\sqrt{3}, 1)$
b) $P(-2, 12)$ d) $P(-2\sqrt{2}, \frac{4}{3})$

Uwaga. Mówimy „parabola o równaniu $y = ax^2$ ” lub krótko „parabola $y = ax^2$ ”.

Wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a < 0$, jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Jej wierzchołkiem jest punkt $O(0,0)$. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = -x^2 \text{ i } g(x) = -\frac{1}{2}x^2$$



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = -2x^2$, b) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Ćwiczenie 4

Które z punktów:

$$A(\frac{1}{2}, -2), B(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -1), C(\frac{1}{4}, 2),$$

$$D(-\frac{3}{4}, -18), E(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{4}{5})$$

należą do paraboli $y = -8x^2$?

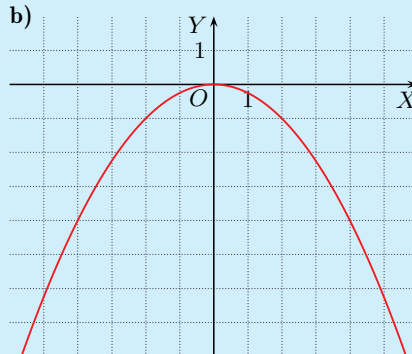
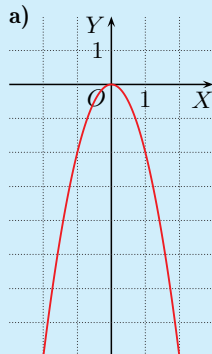
Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej
- Parabola – właściwości i zastosowanie
- Krzywa łańcuchowa i krzywa balistyczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

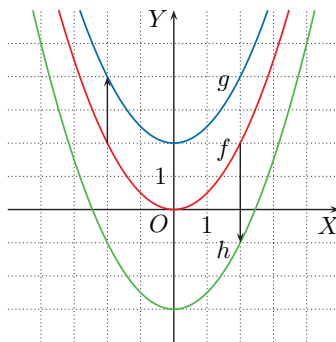
Ćwiczenie 3



Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz:

- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w górę (punkt $(0, 2)$ jest wierzchołkiem paraboli),
- $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 3 jednostki w dół (punkt $(0, -3)$ jest wierzchołkiem paraboli).



Ćwiczenie 5

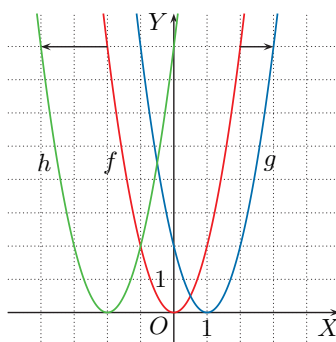
Naszczuj parabolę będącą wykresem funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka tej paraboli oraz zbiór wartości funkcji f .

- a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = 2x^2 - 2$ c) $f(x) = -x^2 + 4$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2x^2$ oraz:

- $g(x) = 2(x - 1)^2$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 1 jednostkę w prawo (punkt $(1, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli),
- $h(x) = 2(x + 2)^2$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo (punkt $(-2, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli).



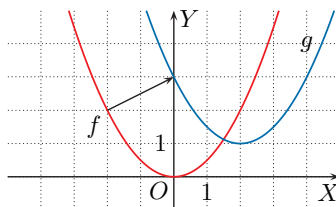
Ćwiczenie 6

Naszczuj parabolę będącą wykresem funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka tej paraboli oraz przedziały monotoniczności funkcji f .

- a) $f(x) = (x - 3)^2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2$ c) $f(x) = -(x + 2)^2$

Przykład 3

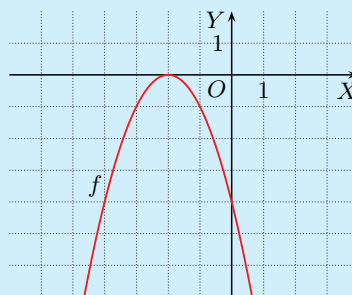
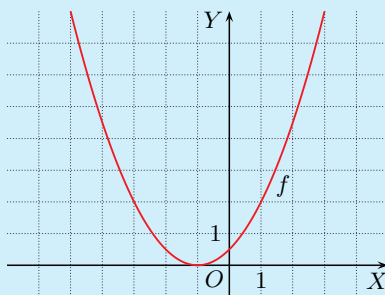
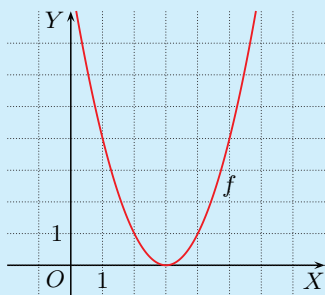
Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie $(2, 1)$.



Wykresem funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) .

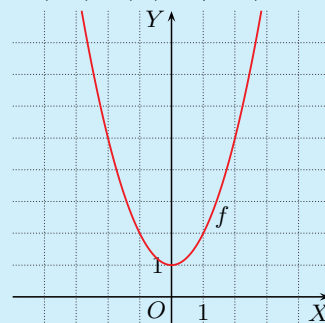
Ćwiczenie 6

- a) $W(3, 0)$, maleje w $(-\infty; 3)$, rośnie w $\langle 3; \infty)$ b) $W(-1, 0)$, maleje w $(-\infty; -1)$, rośnie w $\langle -1; \infty)$ c) $W(-2, 0)$, maleje w $\langle -2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -2)$

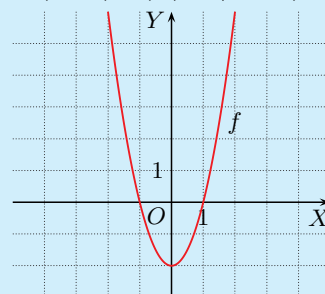


Ćwiczenie 5

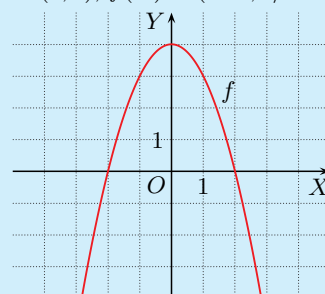
- a) $W(0, 1)$, $f(D) = \langle 1; \infty)$



- b) $W(0, -2)$, $f(D) = \langle -2; \infty)$



- c) $W(0, 4)$, $f(D) = (-\infty; 4)$



Odpowiedzi do zadań

- a) o 3 jednostki w dół
 - b) o 8 jednostek w górę
 - c) o 7 jednostek w lewo
 - d) o 5 jednostek w prawo
- a) $W(0, 2)$, maleje w $(-\infty; 0)$, rośnie w $\langle 0; \infty)$
 - b) $W(0, -6)$, maleje w $\langle 0; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 0)$
 - c) $W(-5, 0)$, maleje w $(-\infty; -5)$, rośnie w $\langle -5; \infty)$
 - d) $W(6, 0)$, maleje w $\langle 6; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 6)$
 - e) $W(\frac{1}{2}, -4)$, maleje w $(-\infty; \frac{1}{2})$, rośnie w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$
 - f) $W(-\frac{5}{2}, \frac{1}{6})$, maleje w $\langle -\frac{5}{2}; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -\frac{5}{2})$
- a) $f(D) = \langle -1; \infty)$, $W(-2, -1)$
 - b) $f(D) = \langle -2; \infty)$, $W(-1, -2)$
 - c) $f(D) = (-\infty; 2)$, $W(2, 2)$
 - d) $f(D) = (-\infty; 2)$, $W(1, 2)$
- a) $f(D) = \langle 2; \infty)$, f maleje w $(-\infty; 3)$, rośnie w $\langle 3; \infty)$, $g(D) = \langle -2; \infty)$, g maleje w $(-\infty; -2)$, rośnie w $\langle -2; \infty)$
 - b) $f(x) = (x-3)^2 + 2$, $g(x) = (x+2)^2 - 2$
- a) $f(D) = \langle 3; \infty)$, $g(D) = \langle 0; \infty)$
 - b) $f(D) = (-\infty; -1)$, $g(D) = (-\infty; 0)$
 - c) $f(D) = (-\infty; 3)$, $g(D) = (-\infty; 0)$
- a) maleje w $(-\infty; 4)$, rośnie w $\langle 4; \infty)$
 - b) maleje w $\langle -2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -2)$
 - c) maleje w $(-\infty; -1)$, rośnie w $\langle -1; \infty)$
 - d) maleje w $\langle 2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 2)$

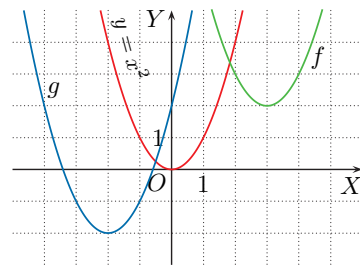
Ćwiczenie 7

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

- $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x-2)^2$, $h(x) = -(x-2)^2 + 3$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$

Zadania

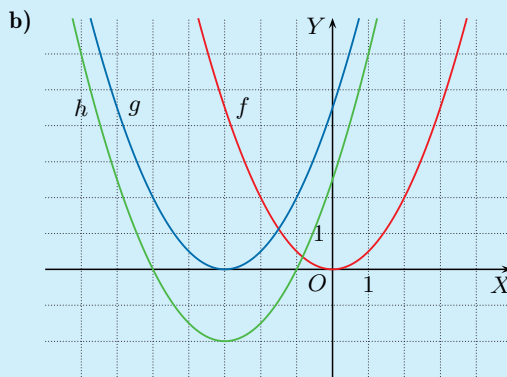
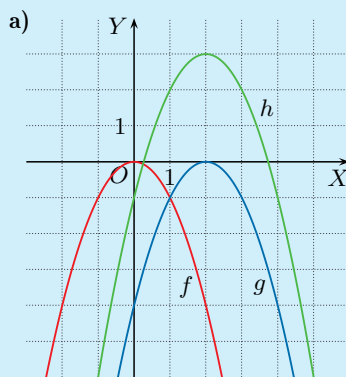
- Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?
 - $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 5x^2 - 3$
 - $f(x) = 6x^2$, $g(x) = 6x^2 + 8$
 - $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3(x+7)^2$
 - $f(x) = -8x^2$, $g(x) = -8(x-5)^2$
- Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f i wyznacz przedziały monotoniczności tej funkcji.
 - $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2$
 - $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 - 6$
 - $f(x) = 9(x+5)^2$
 - $f(x) = -7(x-6)^2$
 - $f(x) = \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})^2 - 4$
 - $f(x) = -\frac{7}{6}(x+\frac{5}{2})^2 + \frac{1}{6}$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.
 - $f(x) = (x+2)^2 - 1$
 - $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$
 - $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 2$
 - $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$
- Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = x^2$ oraz wykresy funkcji f i g , które powstały przez jej przesunięcie.
 - Dla każdej funkcji podaj jej zbiór wartości i przedziały monotoniczności.
 - Podaj wzory funkcji f i g .



Powtórzenie

- Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Dla każdej z nich podaj zbiór wartości.
 - $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = (x+3)^2$
 - $f(x) = -x^2 - 1$, $g(x) = -(x-1)^2$
 - $f(x) = -2x^2 + 3$, $g(x) = -2(x+3)^2$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej przedziały monotoniczności.
 - $f(x) = (x-4)^2 + 2$
 - $f(x) = -(x+2)^2 + 1$
 - $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4$
 - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

Ćwiczenie 7



1.2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej – powtórzenie

Przypominamy, że postać $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej (trójmianu kwadratowego), natomiast postać $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną**.

Przykład 1

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(4, -2)$. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej, jeśli punkt $(5, 1)$ należy do tej paraboli.

Punkt (p, q) jest wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$. Zatem wzór funkcji f ma postać: $f(x) = a(x - 4)^2 - 2$.

Podstawiamy współrzędne punktu $(5, 1)$ do równania paraboli:

$$1 = a(5 - 4)^2 - 2$$

Stąd $a = 3$. Zatem wzór funkcji f ma postać kanoniczną: $f(x) = 3(x - 4)^2 - 2$. Przekształcamy ten wzór do postaci ogólnej:

$$f(x) = 3(x - 4)^2 - 2 = 3(x^2 - 8x + 16) - 2 = 3x^2 - 24x + 46$$

Ćwiczenie 1

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku W . Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej, jeśli punkt P należy do tej paraboli.

a) $W(3, 2)$, $P(4, 6)$ b) $W(-2, 5)$, $P(-4, -7)$ c) $W(-3, -6)$, $P(-9, 6)$

Jeśli chcemy przejść od postaci ogólnej do postaci kanonicznej funkcji kwadratowej, możemy skorzystać z poniższych wzorów.

Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Ćwiczenie 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = -3x^2 + 2x + 1$ c) $y = -4x^2 + 5x - 2$ e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$
b) $y = 2x^2 + 3x + 7$ d) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ f) $y = \frac{3}{4}x^2 - \sqrt{2}x + 1$

Ćwiczenie 1

a) $f(x) = 4(x - 3)^2 + 2 = 4x^2 - 24x + 38$
b) $f(x) = -3(x + 2)^2 + 5 = -3x^2 - 12x - 7$
c) $f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - 6 = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$

Ćwiczenie 2

a) 16 b) -47 c) -7 d) 0 e) 6 f) -1

Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli); szkicuje wykres danej funkcji
- przekształca postać kanoniczną funkcji kwadratowej do postaci ogólnej
- wyznacza wzór ogólny funkcji kwadratowej, gdy dane są współrzędne wierzchołka i innego punktu jej wykresu
- wyznacza równanie osi symetrii paraboli

Multiteka

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $W(1, 2)$, $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
b) $W(2, -2)$,
 $f(x) = -(x - 2)^2 - 2$
c) $W(2, -5)$, $f(x) = 3(x - 2)^2 - 5$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$,
maleje w $(-\infty; 1)$,
rośnie w $\langle 1; \infty)$
b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4 = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$,
rośnie w $(-\infty; -2)$,
maleje w $\langle -2; \infty)$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$,
maleje w $(-\infty; -3)$,
rośnie w $\langle -3; \infty)$
2. a) $f(x) = (x - 2)^2 - 3$,
 $f(D) = \langle -3; \infty)$
b) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$,
 $f(D) = \langle -4; \infty)$
c) $f(x) = -(x + 3)^2 + 3$,
 $f(D) = (-\infty; 3]$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4$,
 $f(D) = (-\infty; 4]$
e) $f(x) = \frac{3}{4}(x - 2)^2 - 3$,
 $f(D) = \langle -3; \infty)$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$,
 $f(D) = (-\infty; \frac{1}{2}]$
3. a) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 19$,
 $b = -12$, $c = 19$
b) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 4 = 2x^2 + 8x + 4$,
 $b = 8$, $c = 4$
c) $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3 = 2x^2 + 4x + 5$,
 $b = 4$, $c = 5$

Przykład 2

Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 1 = 4 + 2 = 6, \text{ stąd } y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6}{4 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Wierzchołek paraboli: $(-2, 3)$, postać kanoniczna: $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$.

Ćwiczenie 3

Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

- a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$ c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

Zadania

- Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku W . Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej, jeśli punkt P należy do tej paraboli. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f .
a) $W(1, -2)$, $P(3, 6)$ b) $W(-2, 4)$, $P(2, 0)$ c) $W(-3, -4)$, $P(-1, -2)$
- Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ c) $f(x) = -x^2 - 6x - 6$ e) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$
- Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$, jeśli punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.
a) $W(3, 1)$ b) $W(-2, -4)$ c) $W(-1, 3)$
- Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj jej wykres oraz podaj jej przedziały monotoniczności.
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ c) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$ e) $f(x) = 3x^2 + 6x$
b) $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x$

Powtórzenie

- Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f oraz naszkicuj ten wykres, przesuwając odpowiednio wykres funkcji $g(x) = x^2$.
a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ b) $f(x) = x^2 + 4x$ c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
- a) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$,
maleje w $(-\infty; 2)$, rośnie w $\langle 2; \infty)$
b) $f(x) = -(x - 3)^2 + 6$,
maleje w $\langle 3; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 3]$
c) $f(x) = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2}$,
maleje w $(-\infty; -\frac{1}{2})$, rośnie w $\langle -\frac{1}{2}; \infty)$
d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2$,
maleje w $\langle -2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -2]$
e) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 3$,
maleje w $(-\infty; -1)$, rośnie w $\langle -1; \infty)$
f) $f(x) = -\frac{2}{3}(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{8}$,
maleje w $\langle \frac{3}{4}; \infty)$, rośnie w $(-\infty; \frac{3}{4}]$
- a) $W(2, 3)$
b) $W(-2, -4)$
c) $W(-\frac{1}{4}, 0)$

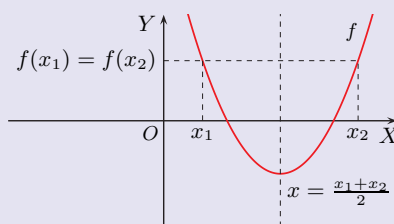
Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$ i dla $x = -3$.
 a) $x^2 - 3x - 6$ b) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-3x^2 + 2x - 1$
- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$ i dla $x = \frac{1}{4}$.
 a) $4x^2 - 2x + 3$ b) $-8x^2 + 4x - 1$ c) $-2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$
- Oblicz wartości funkcji f , g , h dla argumentu $x = -2$ i uporządkuj je w kolejności rosnącej.
 a) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 10x - 5$, $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 4$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 8$, $h(x) = -\frac{17}{8}x^2 - x - 4$
- Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + c$. Oblicz współczynnik c , jeśli:
 a) $f(-2) = 9$, b) $f(4) = -2$, c) $f(-2\sqrt{2}) = -6$.
- Sprawdź, które spośród punktów:
 $A(-1, 2 - 3\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, 10 - 2\sqrt{2})$, $C(-2, 8)$,
 $D(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$, $E(\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2})$
 nie należą do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$.

Twierdzenie

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1 , x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



- Sprawdź, czy $f(-3) = f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.
 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$
- Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
 a) $f(x) = x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$
 b) $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$ d) $f(x) = -6x^2 - 6x + 8$

- a) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, -\frac{3}{2})$.
 b) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, 4)$.
- a) $f(-2) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{1}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$.
 b) $f(-2) = 18$, $f(-1) = 6$, $f(1) = -6$, $f(2) = -6$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$.
 c) $f(-2) = -24$, $f(-1) = -12$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
 d) $f(-2) = -4$, $f(-1) = 8$, $f(1) = -4$, $f(2) = -28$, zatem oś symetrii: $x = -\frac{1}{2}$, a wierzchołek: $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$.

Odpowiedzi do zadań

- a) 4, 12
 b) $4\frac{1}{2}$, 13
 c) -17, -34
- a) 5, $2\frac{3}{4}$
 b) -5, $-\frac{1}{2}$
 c) 3, $-1\frac{1}{8}$
- a) $g(-2) = -17$,
 $f(-2) = -15$, $h(-2) = -7$
 b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$,
 $h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$
- a) $c = 7$
 b) $c = 20$
 c) $c = -5\sqrt{2}$
- A: $f(-1) = 2 - \sqrt{2} \neq 2 - 3\sqrt{2}$
 B: $f(-\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} \neq 10 - 2\sqrt{2}$
 C: $f(-2) = 8$
 D: $f(1 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$
 E: $f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} \neq 8 - 2\sqrt{2}$
 Zatem nie należą punkty:
 A, B, E.

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia oraz metodę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do przedstawienia wyrażenia w postaci iloczynu
- rozwiązuje równanie kwadratowe za pomocą rozkładu na czynniki
- interpretuje geometrycznie rozwiązanie równania kwadratowego
- wyznacza algebraicznie współrzędne punktów przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych

Ćwiczenie 1

Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

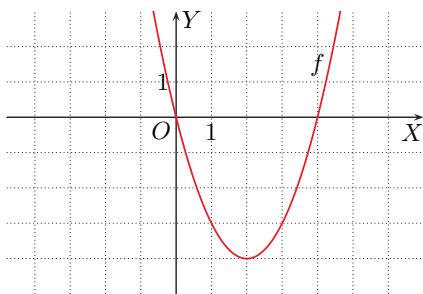
1.3. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 4x$

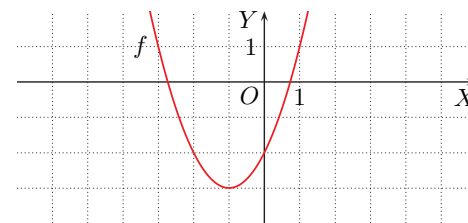
Po przekształceniu do postaci kanonicznej: $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: 0 i 4.

b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej: $f(x) = (x + 1)^2 - 3$.

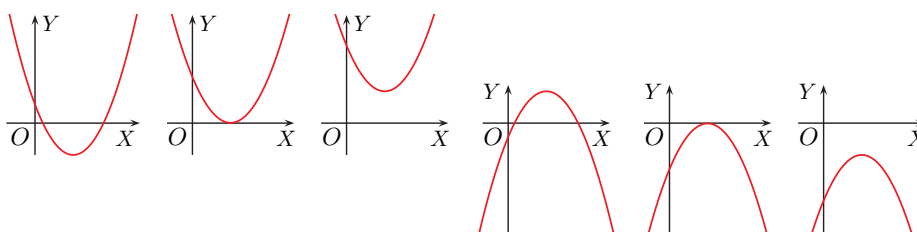


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX . Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Uwaga. Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x , które spełniają to równanie. Zbiór tych x nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Multiteka

• Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x - 2) = 0$$

czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{0, 2\}$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$:

$$a \cdot b = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = 0 \text{ lub } b = 0.$$

Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$

b) $7x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 = 5x$

d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ lub } 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$

b) $4 - 100x^2 = 0$

c) $4x^2 - 121 = 0$

d) $\frac{9}{49}x^2 - 81 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

$$(x - 2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

f) $3x^2 + 9 = x^2 - 6\sqrt{2}x$

Ćwiczenie 4

a) $(x + 4)^2 = 0, x = -4$

e) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 / \cdot 4$

f) $2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

b) $(x - \frac{1}{2})^2 = 0, x = \frac{1}{2}$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(\sqrt{2}x + 3)^2 = 0$

c) $(2x + 1)^2 = 0, x = -\frac{1}{2}$

$(x - 2)^2 = 0$

$x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

d) $(2x - 3)^2 = 0, x = \frac{3}{2}$

$x = 2$

Ćwiczenie 2

a) $\{-2, 0\}$

b) $\{0, \frac{7}{3}\}$

c) $\{0, \frac{5}{2}\}$

d) $\{0, 16\}$

Ćwiczenie 3

a) $x = -\frac{5}{4}$ lub $x = \frac{5}{4}$

b) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$

c) $x = -\frac{11}{2}$ lub $x = \frac{11}{2}$

d) $x = -21$ lub $x = 21$

Ćwiczenie 5

- a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
b) sprzeczne
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
d) sprzeczne

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = 6$
b) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$
c) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{6}$
d) $x = -\frac{1}{9}$ lub $x = 0$
e) $x = 0$ lub $x = 2$
f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 0$
2. a) $x = -\frac{9}{10}$ lub $x = \frac{9}{10}$
b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -5$ d) $x = 8$
e) $x = 12$ f) $x = -\frac{1}{3}$
g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $x = 2$ i) $x = 6$
3. a) $(0, 0)$, $(4, 0)$
b) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -12)$
c) $(0, 12)$, nie przecina osi OX
d) $(0, 0)$, $(-\frac{1}{225}, 0)$
e) $(0, 4)$, nie przecina osi OX
f) $(-\frac{1}{15}, 0)$, $(\frac{1}{15}, 0)$, $(0, -4)$
4. a) 2 b) -4 c) 3
5. a) $x = 0$ lub $x = 1$
b) $x = -3$ lub $x = 0$
c) $x = \frac{1}{3}$
d) $x = 6$
e) $x = 4$
f) $x = 2$
6. a) $54x^2 - 6x = 0$
 $6x(9x - 1) = 0$
2 rozwiązania
b) $54x^2 + 6 = 0$
0 rozwiązań
c) $54x^2 - 6 = 0$
 $x^2 = \frac{1}{9}$
2 rozwiązania

Przykład 5

- a) Rozwiąż równanie $\frac{11}{3}x^2 - 7 = 0$.

$$\frac{11}{3}x^2 = 7 \quad / \cdot \frac{3}{11}$$
$$x^2 = \frac{21}{11}$$
$$x = -\sqrt{\frac{21}{11}} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{\frac{21}{11}}$$

Rozwiązania równania: $-\sqrt{\frac{21}{11}}$ i $\sqrt{\frac{21}{11}}$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.
- a) $-7x^2 + 42x = 0$ c) $36x^2 = 6x$ e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ d) $2x + 18x^2 = 0$ f) $\sqrt{3}x = -3x^2$
2. Rozwiąż równanie.
- a) $100x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 + 64 = 16x$ g) $x^2 = (1-x)(1+x)$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ e) $24x - x^2 = 144$ h) $\frac{1}{2}x(6-x) = 2+x$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$ f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$ i) $(x-3)(x-2) = 7x-30$
3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.
- a) $y = 3x^2 - 12x$ c) $y = 3x^2 + 12$ e) $y = 900x^2 + 4$
b) $y = 3x^2 - 12$ d) $y = 900x^2 + 4x$ f) $y = 900x^2 - 4$
4. Wyznacz wspólne miejsce zerowe funkcji f i g .
- a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

Powtórzenie

5. Rozwiąż równanie.
- a) $1 - x^2 = 1 - x$ c) $1 - 6x = -9x^2$ e) $x(x+1) = 9x - 16$
b) $4 - x = \frac{1}{3}x^2 + 4$ d) $x^2 = 12x - 36$ f) $(2-x)x = 4 - 2x$
6. Ile rozwiązań ma równanie?
- a) $54x^2 - 6x = 0$ b) $54x^2 + 6 = 0$ c) $54x^2 - 6 = 0$

1.4. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(2x - 5)^2 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $\frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...

Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

Zauważmy, że $4x^2 - 20x = (2x - 5)^2 - 25$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 27 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = -2$$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x - 5)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 23 = 0$$

Zauważmy, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

$$(2x - 5)^2 = 2$$

$$2x - 5 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x - 5 = \sqrt{2}$$

$$2x = 5 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Równanie ma dwa pierwiastki: $\frac{5-\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Ćwiczenie 3

a) $(x - 1)^2 = 4$

$$x - 1 = -2 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 2$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

b) $(x + 3)^2 = 1$

$$x + 3 = -1 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 1$$

$$x = -4 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

c) $(x + 3)^2 = 2$

$$x + 3 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 = \sqrt{2}$$

$$x = -3 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = -3 + \sqrt{2}$$

Uczeń:

- określa liczbę pierwiastków równania kwadratowego w zależności od znaku wyróżnika
- rozwiązuje równanie kwadratowe, stosując wzory na pierwiastki
- interpretuje geometrycznie rozwiązanie równania kwadratowego w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ
- wykorzystuje poznane wzory do szkicowania wykresu funkcji kwadratowej

Ćwiczenie 1

a) $(3x - 2)^2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

b) $(5x + 4)^2 = 0$

$$x = -\frac{4}{5}$$

c) $(2x - 7)^2 = 0$

$$x = \frac{7}{2}$$

Ćwiczenie 2

a) $(x - 1)^2 = -1$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

b) $(x + 3)^2 = -3$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x + 3)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

c) $(2x + 1)^2 = -4$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x + 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

Multiteka

- Wykres funkcji kwadratowej

dla.nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4



Generator
testów i sprawdzianów

Postępując tak jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

• Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.

• Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

Ćwiczenie 4

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

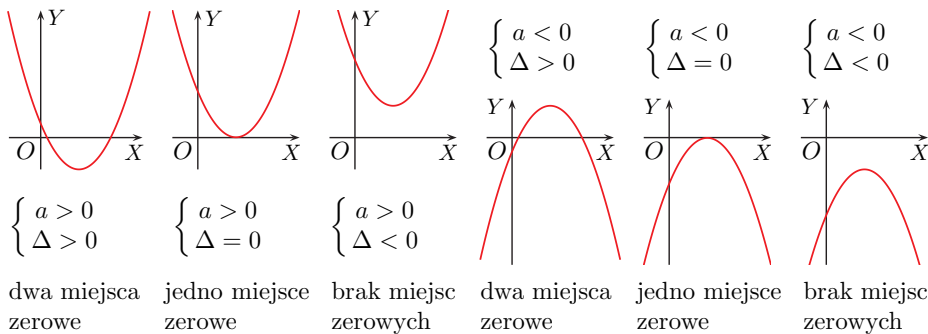
- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ | g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$ |
| b) $x^2 - 4x + 6 = 0$ | e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$ | h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |
| c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$ | f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ | i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$ |

Ćwiczenie 4

- $\Delta = 4 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = -8 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = 35 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 49 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 0$, 1 rozwiązanie
- $\Delta = -12 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = -2 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 9 > 0$, 2 rozwiązania

■ Interpretacja geometryczna

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .



W przypadku gdy funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, możemy je wyznaczyć, korzystając z podanych poprzednio wzorów.

Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$ g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $4x^2 - x - 5 = 0$ e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$ h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$ i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Ćwiczenie 5

a) $\Delta = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $\Delta = 81$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$

c) $\Delta = 49$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$

d) $\Delta = 0$, $x_0 = \frac{1}{14}$

e) $\Delta = 40$, $x_1 = 3 - \sqrt{10}$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$

f) $\Delta = 6$, $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$

g) $\Delta = -32$, brak rozwiązań

h) $\Delta = 28$, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$

i) $\Delta = -1,75$, brak rozwiązań

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 7$
 b) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 3$
 c) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$
 d) sprzeczne
 e) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$
 f) $x_0 = -\frac{3}{2}$
 g) sprzeczne
 h) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$
 i) $x_0 = \frac{2}{3}$
2. a) $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$
 c) $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
 d) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}$
 e) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
 f), g) sprzeczne
 h) $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
 i) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$
3. a) $(0, -1), (-1, 0), (\frac{1}{3}, 0)$
 b) $(0, 3), (-\frac{\sqrt{3}+3}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}-3}{2}, 0)$
 c) $(0, 3), (1, 0), (-\frac{3}{4}, 0)$
 d) $(0, 12), (-6, 0)$ e) $(0, 5)$
 f) $(0, 1), (\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$
4. a) $2x^2 + 3x - 2 = 0,$
 $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$
 b) $15x^2 + 7x - 2 = 0,$
 $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$
 c) $x^2 - 10x + 12 = 0,$
 $x_1 = 5 - \sqrt{13}, x_2 = 5 + \sqrt{13}$
 d) $x^2 - 18x + 72 = 0,$
 $x_1 = 6, x_2 = 12$
 e) $x^2 - 7x + 3 = 0,$
 $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$
 f) $x^2 + 2x + 18 = 0,$ sprzeczne
5. a) $\Delta = 12 - 8\sqrt{2} = \sqrt{144} - \sqrt{128} > 0,$
 2 rozwiązania
 b) $\Delta = \frac{13}{2} - 4\sqrt{3} = 4(\frac{13}{8} - \sqrt{3}) = 4(1,625 - \sqrt{3}) < 0,$
 brak rozwiązań

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$	d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$	g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$	e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$	h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$	f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$	i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$	d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$	g) $11(x^2 + 5) = x$
b) $x + 10 = 3x^2$	e) $5x^2 = 2 - 2x$	h) $x^2 + x = 4x + 7$
c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$	f) $5x^2 = 8x - 5$	i) $3x^2 + 1 = 7x$
3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$	d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$
b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$	e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$	f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$
4. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$	d) $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$
b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$	e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$	f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$
5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$	b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$
-------------------------------------	---

Powtórzenie

6. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$	c) $-4x^2 + 6x - 1 = 0$	e) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 8 = 0$
b) $x^2 - 4x + 7 = 0$	d) $-4x^2 + 6x - 3 = 0$	f) $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 8 = 0$
7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$	b) $f(x) = 3 + 5x - 2x^2$
---------------------------	---------------------------
8. Rozwiąż równanie.

a) $x(x - 5) = 2x(x - 1)$	c) $\frac{x^2 - 5x + 4}{5} = \frac{1 - 3x}{2}$
b) $2(1 - 5x) = (1 - x)^2$	d) $\frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(x+4)^2}{7} - 1$
6. a) $x_0 = 2$
 b) sprzeczne
 c) $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$
 d) sprzeczne
 e) $x_1 = -8, x_2 = -4$
 f) $x_1 = -6 - 2\sqrt{17},$
 $x_2 = -6 + 2\sqrt{17}$
7. a) $x = -5$ lub $x = 3$
 b) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 3$
8. a) $x^2 + 3x = 0, x_1 = -3, x_2 = 0$
 b) $x^2 + 8x - 1 = 0, x_1 = -4 - \sqrt{17},$
 $x_2 = -4 + \sqrt{17}$
 c) $2x^2 + 5x + 3 = 0, x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -1$
 d) $2x^2 - 5x - 10 = 0, x_1 = \frac{5-\sqrt{105}}{4}, x_2 = \frac{5+\sqrt{105}}{4}$

Szkicowanie paraboli

Aby naszkicować parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, można wykorzystać postać kanoniczną funkcji f lub postąpić zgodnie z następującą instrukcją.

- Podaj punkt, w którym parabola przecina oś OY . Jest to punkt $(0, c)$.
- Wyznacz (jeśli istnieją) punkty, w których parabola przecina oś OX . Są to punkty $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, gdzie $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wyznacz wierzchołek paraboli $W(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.
- Aby uzyskać dokładniejszy szkic, wyznacz kilka dodatkowych punktów należących do paraboli (można wykorzystać fakt, że prosta $x = -\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii paraboli).
- Połącz otrzymane punkty krzywą.

Przykład

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.

- Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\Delta = 16, \text{ stąd } x_1 = \frac{2-4}{2} = -1, x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Parabola przecina oś OX w punktach $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

- Wyznaczamy wierzchołek paraboli.

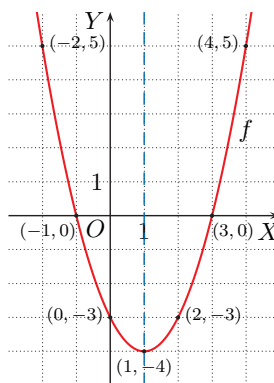
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_w = f(-\frac{b}{2a}) = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, -4)$.

- Wyznaczamy inne punkty należące do paraboli. $f(-2) = 5$, czyli do paraboli należy punkt $(-2, 5)$. Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli, więc należą do niej także punkty $(4, 5)$ i $(2, -3)$.

- Szkicujemy parabolę.



1. Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f .

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

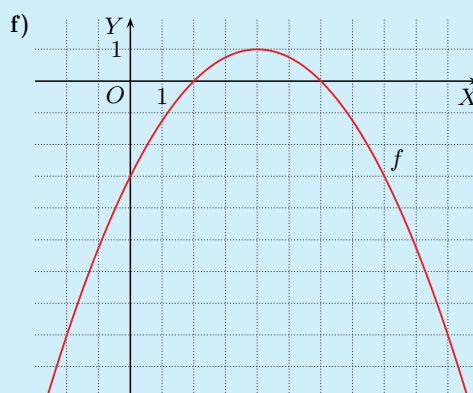
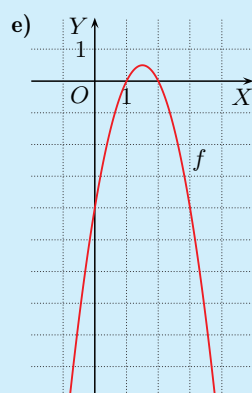
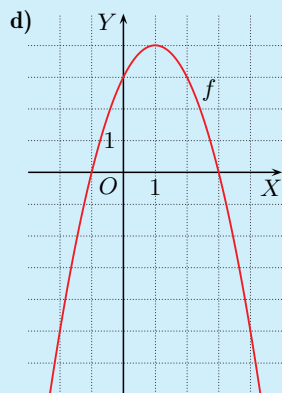
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

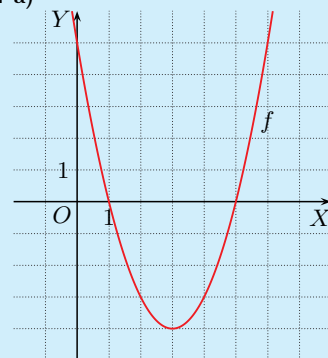
e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$

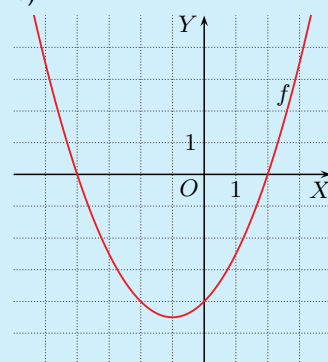


Odpowiedzi do zadań

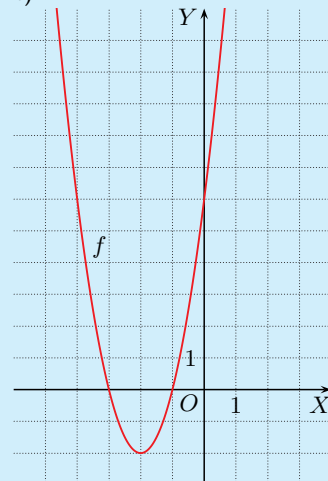
1. a)



b)



c)



Uczeń:

- definiuje postać iloczynową funkcji kwadratowej i warunek jej istnienia
- sprawdza, czy funkcję kwadratową można zapisać w postaci iloczynowej
- zapisuje funkcję kwadratową w postaci iloczynowej
- odczytuje miejsca zerowe funkcji kwadratowej i jej postaci iloczynowej
- przekształca postać iloczynową funkcji kwadratowej do postaci ogólnej

Ćwiczenie 1

- a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9$
b) $y = 4x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$
c) $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x$

1.5. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$$\begin{aligned}y &= (3x + 2)(x - 7) = && \text{Czynniki liniowe: } 3x + 2 \text{ i } x - 7. \\&= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 7) && \text{Czynniki liniowe: } x + \frac{2}{3} \text{ i } x - 7.\end{aligned}$$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie. Na przykład dla trójmianu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$ b) $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ c) $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x_0 = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = 4(x - 3)(x - 5)$ c) $y = -(x + 4)(x + 8)$ e) $y = -3(x - 2)^2$
b) $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$ d) $y = 8x(x - 9)$ f) $y = 13(x + 7)^2$

Ćwiczenie 2

- a) czynniki liniowe: $x - 3$, $x - 5$;
pierwiastki: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$
b) czynniki liniowe: $x - 2$, $x + 6$;
pierwiastki: $x_1 = -6$, $x_2 = 2$
c) czynniki liniowe: $x + 4$, $x + 8$;
pierwiastki: $x_1 = -8$, $x_2 = -4$
d) czynniki liniowe: x , $x - 9$;
pierwiastki: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$
e) czynniki liniowe: $x - 2$ (podwójny);
pierwiastki: $x_0 = 2$ (podwójny)
f) czynniki liniowe: $x + 7$ (podwójny);
pierwiastki: $x_0 = -7$ (podwójny)

Ćwiczenie 3

Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$ b) $y = (x - 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{2})$

Ćwiczenie 4

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 5x^2 - 3x$ b) $y = 16x^2 - 1$ c) $y = 9x^2 - 8$

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 5

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 - 8x + 15$ d) $y = 12x^2 + 11x + 2$ g) $y = 2x^2 - 3x + 4$

b) $y = x^2 + 3x - 28$ e) $y = -2x^2 - 2x + 24$ h) $y = x^2 - 2x - 2$

c) $y = 3x^2 - 7x + 2$ f) $y = -4x^2 + 3x + 1$ i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Ćwiczenie 3

a) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$

b) $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

a) $y = 5x(x - \frac{3}{5})$

b) $y = 16(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$

c) $y = 9(x - \frac{2\sqrt{2}}{3})(x + \frac{2\sqrt{2}}{3})$

Ćwiczenie 5

a) $\Delta = 4$, $y = (x - 3)(x - 5)$

b) $\Delta = 121$, $y = (x + 7)(x - 4)$

c) $\Delta = 25$, $y = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2)$

d) $\Delta = 25$, $y = 12(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4})$

e) $\Delta = 196$, $y = -2(x - 3)(x + 4)$

f) $\Delta = 25$, $y = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$

g) $\Delta = -23 < 0$, zatem trójmian nie ma pierwiastków i nie można zapisać go w postaci iloczynowej.

h) $\Delta = 12$,
 $y = (x + \sqrt{3} - 1)(x - \sqrt{3} - 1)$

i) $\Delta = 12$,
 $y = 2(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = -10, x_2 = 20,$
 $y = x^2 - 10x - 200$
 b) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2},$
 $y = 6x^2 - 5x + 1$
 c) $x_1 = -3, x_2 = \frac{4}{3},$
 $y = 6x^2 + 10x - 24$
 d) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2,$
 $y = 4x^2 - 10x + 4$
 e) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3},$
 $y = 6x^2 + 5x + 1$
 f) $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{3}{4},$
 $y = 20x^2 - 23x + 6$
 g) $x = -3, x = 0,$
 $y = -x^2 - 3x$
 h) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, y = x^2 - \frac{1}{2}x$
 i) $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{3},$
 $y = -3x^2 + 7x$
2. a) $y = (x-3)(x+2)$
 b) $y = -(x-3)(x+2)$
 c) $y = 2(x+\frac{1}{2})(x-2)$
 d) $y = -2(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (x-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$
 e) $y = 3(x-1)(x-\frac{4}{3})$
 f) $y = -4(x-\frac{1+\sqrt{5}}{4}) \cdot (x-\frac{1-\sqrt{5}}{4})$
 g) $y = 3(x-4)(x+\frac{2}{3})$
 h) $y = (x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (x-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$
 i) $y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-14)$
3. a) $f(x) = 4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}),$
 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$
 b) $f(x) = 9(x+\frac{4}{3})(x-\frac{4}{3}),$
 $x_1 = -\frac{4}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$
 c) $f(x) = \frac{1}{3}x(x+\frac{1}{2}),$
 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0$
 d) $f(x) = -9x(x-\frac{2}{3}),$
 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$
 e) $f(x) = 9(x+\frac{1}{3})^2,$
 $x_0 = -\frac{1}{3}$
 f) $f(x) = 4(x-\frac{3}{2})^2, x_0 = \frac{3}{2}$
4. a) $\Delta = (3-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} =$
 $= 11 - 7\sqrt{2} =$
 $= \sqrt{121} - \sqrt{98} > 0,$ zatem
 trójkąt ma dwa pierwiastki,
 czyli można przedstawić go
 w postaci iloczynowej.
 b) $\Delta = (3-\sqrt{3})^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} =$
 $= 12 - 8\sqrt{3} =$
 $= 4(\sqrt{9} - \sqrt{12}) < 0,$ zatem
 trójkąt nie ma pierwiast-
 ków, czyli nie można przed-
 stawić go w postaci iloczyno-
 wej.

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójkątnu kwadratowego i zapisz go w postaci ogólnej.
 - a) $y = (x+10)(x-20)$ d) $y = (2x-4)(2x-1)$ g) $y = -x(x+3)$
 - b) $y = 6(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$ e) $y = (2x+1)(3x+1)$ h) $y = \frac{1}{2}x(2x-1)$
 - c) $y = 2(x+3)(3x-4)$ f) $y = (5x-2)(4x-3)$ i) $y = (7-3x)x$
2. Przedstaw trójkąt kwadratowy w postaci iloczynowej.
 - a) $y = x^2 - x - 6$ d) $y = -2x^2 + 4x - 1$ g) $y = 3x^2 - 10x - 8$
 - b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = 3x^2 - 7x + 4$ h) $y = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
 - c) $y = 2x^2 - 3x - 2$ f) $y = -4x^2 + 2x + 1$ i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 7$
3. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej. Podaj jej miejsca zerowe.
 - a) $f(x) = 4x^2 - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$ e) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$
 - b) $f(x) = 9x^2 - 16$ d) $f(x) = 6x - 9x^2$ f) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
4. a) Uzasadnij, że trójkąt kwadratowy $y = \sqrt{2}x^2 + (3 - \sqrt{2})x + \frac{1}{4}$ można przedstawić w postaci iloczynowej.
 b) Uzasadnij, że trójkątnu kwadratowego $y = \sqrt{3}x^2 + (3 - \sqrt{3})x + \frac{1}{2}$ nie można przedstawić w postaci iloczynowej.
5. Przedstaw funkcję f w postaciach iloczynowej i kanonicznej. Naskicuj parabolę, która jest wykresem tej funkcji.
 - a) $f(x) = -x^2 - 4x$ c) $f(x) = 2x^2 + 2x$ e) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$
 - b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$

Powtórzenie

6. Oblicz pierwiastki trójkątnu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.
 - a) $y = x^2 - 5x - 6$ c) $y = -6x^2 - 7x + 3$ e) $y = (x-2)^2 - 4$
 - b) $y = 2x^2 - 8x + 6$ d) $y = -x^2 + 4x - 4$ f) $y = -2(x-2)^2 + 2$
7. Przedstaw trójkąt kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.
 - a) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ b) $y = \sqrt{3}x^2 + 6x$ c) $y = \sqrt{3}x^2 + 9$
8. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.
 - a) $y = x(x+6)$ c) $y = (x+2)(x-4)$ e) $y = -(2x+4)(6x-3)$
 - b) $y = -\frac{1}{2}x(x-3)$ d) $y = (x-6)(x+\frac{1}{2})$ f) $y = (2x-3)(4x+5)$
5. a) $f(x) = -x(x+4) = -(x+2)^2 + 4$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+5) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$
 c) $f(x) = 2x(x+1) = 2(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$
 d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
 e) $f(x) = -(x+1)(x+3) = -(x+2)^2 + 1$
 f) $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x-4) = \frac{1}{4}(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{25}{16}$
6. a) $x_1 = -1, x_2 = 6, y = (x-6)(x+1)$
 b) $x_1 = 1, x_2 = 3, y = 2(x-1)(x-3)$
 c) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, y = -6(x+\frac{3}{2})(x-\frac{1}{3})$
 d) $x_0 = 2, y = -(x-2)^2$
 e) $x_1 = 0, x_2 = 4, y = x(x-4)$
 f) $x_1 = 1, x_2 = 3, y = -2(x-1)(x-3)$
7. a) $y = (x+2\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
 b) $y = \sqrt{3}x(x+2\sqrt{3})$
 c) nie ma postaci iloczynowej
 8. a) $(-6, 0), (0, 0)$
 b) $(0, 0), (3, 0)$
 c) $(-2, 0), (4, 0), (0, -8)$
 d) $(-\frac{1}{2}, 0), (6, 0), (0, -3)$
 e) $(-2, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 12)$
 f) $(-\frac{5}{4}, 0), (\frac{3}{2}, 0), (0, -15)$

1.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Oblicz współczynniki b i c trójkątnu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby -4 i 2 .

Trójkątnu zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy ją do postaci ogólnej:

$$y = (x + 4)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

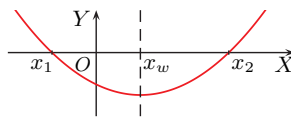
czyli $b = 2$ i $c = -8$.

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynniki b i c trójkątnu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby:

- a) 3 i 5, b) 4 i -3 , c) -5 i -2 , d) -2 i $\frac{1}{2}$, e) $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$.

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

- a) $y = x(x - 6)$ c) $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 2)$ e) $y = (2x + 1)(2x - 3)$
b) $y = -x(x - 10)$ d) $y = -2(x + 3)(x - 4)$ f) $y = (4x - 1)(5 - 4x)$

Przykład 2

Wyznacz trójkątnu kwadratowy, którego pierwiastkami są liczby 2 i 4, a zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; \infty \rangle$.

Trójkątnu zapisujemy w postaci iloczynowej $y = a(x - 2)(x - 4)$.

Współrzedne wierzchołka: $x_w = \frac{2+4}{2} = 3$, zbiorem wartości jest przedział: $\langle -2; \infty \rangle$, zatem $y_w = -2$.

Podstawiamy $x = 3$ i $y = -2$ do wzoru $y = a(x - 2)(x - 4)$ i otrzymujemy $-2 = a(3 - 2)(3 - 4)$, więc $a = 2$. Zatem trójkątnu ma postać $y = 2(x - 2)(x - 4)$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz trójkątnu kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y .

- a) $x_1 = -1, x_2 = 3, Y = \langle -4; \infty \rangle$ c) $x_1 = -8, x_2 = 2, Y = (-\infty; 10]$
b) $x_1 = -4, x_2 = 0, Y = (-\infty; 2]$ d) $x_1 = 0, x_2 = 6, Y = \langle -6; \infty \rangle$

Ćwiczenie 3

- b) $y = ax(x + 4)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-4+0}{2} = -2, y_w = 2$$

Zatem $a(-2)(-2 + 4) = 2$,
czyli $a = -\frac{1}{2}$.

Postać iloczynowa: $y = -\frac{1}{2}x(x + 4)$

Postać ogólna: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

Postać kanoniczna:

$$y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y &= -\frac{2}{5}(x + 8)(x - 2) = \\ &= -\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{32}{5} = \\ &= -\frac{2}{5}(x + 3)^2 + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y &= \frac{2}{3}x(x - 6) = \\ &= \frac{2}{3}x^2 - 4x = \\ &= \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 6 \end{aligned}$$

Uczeń:

- wykorzystuje postać iloczynową funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań o różnym stopniu trudności
- zapisuje w każdej z trzech możliwych postaci wzór funkcji kwadratowej przedstawionej za pomocą wykresu

Ćwiczenie 1

- a) $y = (x - 3)(x - 5) =$
 $= x^2 - 8x + 15,$
 $b = -8, c = 15$
b) $y = (x - 4)(x + 3) =$
 $= x^2 - x - 12,$
 $b = -1, c = -12$
c) $y = (x + 5)(x + 2) =$
 $= x^2 + 7x + 10,$
 $b = 7, c = 10$
d) $y = (x + 2)(x - \frac{1}{2}) =$
 $= x^2 + \frac{3}{2}x - 1,$
 $b = \frac{3}{2}, c = -1$
e) $y = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) =$
 $= x^2 - 3,$
 $b = 0, c = -3$

Ćwiczenie 2

- a) $x = 3, W(3, -9)$
b) $x = 5, W(5, 25)$
c) $x = -2, W(-2, -8)$
d) $x = \frac{1}{2}, W(\frac{1}{2}, 24\frac{1}{2})$
e) $x = \frac{1}{2}, W(\frac{1}{2}, -4)$
f) $x = \frac{3}{4}, W(\frac{3}{4}, 4)$

Ćwiczenie 3

- a) $y = a(x + 1)(x - 3)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-1+3}{2} = 1, y_w = -4$$

Zatem $a(1 + 1)(1 - 3) = -4$,
czyli $a = 1$.

Postać iloczynowa:

$$y = (x + 1)(x - 3)$$

Postać ogólna: $y = x^2 - 2x - 3$

Postać kanoniczna:

$$y = (x - 1)^2 - 4$$

Multiteka

- Krzywa łańcuchowa i krzywa balistyczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Generator
testów i sprawdzianów

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

c) $f(x) = -x(x+4) = -x^2 - 4x$

2. a) $y = 2(x-1)(x-4) = 2x^2 - 10x + 8$

b) $y = \frac{1}{2}(x+6)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

c) $y = -(x-2)(x+5) = -x^2 - 3x + 10$

d) $y = -3(x-1)(x-3) = -3x^2 + 12x - 9$

3. a) $x = 1,$

$f(x) = (x-1)(x-5),$

$f(x) = (x-3)^2 - 4$

b) $x = 0, f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4),$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

c) $x = 5,$

$f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-5),$

$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$

4. a) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6 = 2(x+2)^2 - 2$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 42 = 2(x-5)^2 - 8$

5. a) $(0, 0), (-6, 0), W(-3, 9)$

b) $(1, 0), (5, 0), (0, 5), W(3, -4)$

c) $(-3, 0), (1, 0), (0, \frac{3}{2}), W(-1, 2)$

6. a) $y = a(x+2)(x-4)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-2+4}{2} = 1, y_w = -6$$

Zatem $a(1+2)(1-4) = -6$, czyli $a = \frac{2}{3}$.

Postać ogólna:

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$$

Postać iloczynowa:

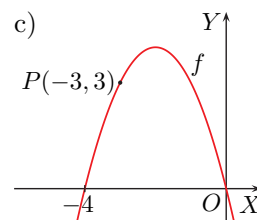
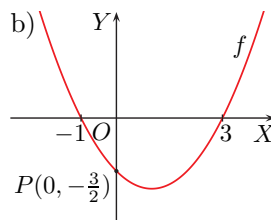
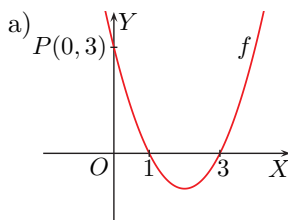
$$y = \frac{2}{3}(x+2)(x-4)$$

Postać kanoniczna:

$$y = \frac{2}{3}(x-1)^2 - 6$$

Zadania

1. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



2. Wyznacz w postaciach iloczynowej i ogólnej równanie paraboli przechodzącej przez punkty: A , B i C .

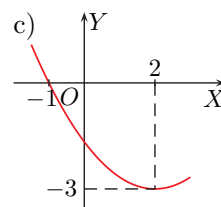
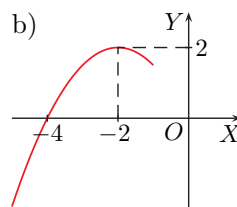
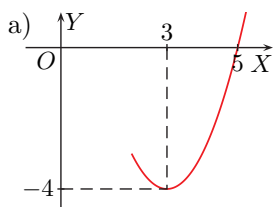
a) $A(1, 0), B(4, 0), C(3, -4)$

c) $A(-5, 0), B(-3, 10), C(2, 0)$

b) $A(-6, 0), B(2, 0), C(0, -6)$

d) $A(0, -9), B(1, 0), C(3, 0)$

3. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.



4. Wykres funkcji f można otrzymać przez przesunięcie paraboli $y = 2x^2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach ogólnej i kanonicznej, jeśli wiadomo, że jej miejscami zerowymi są liczby: a) -3 i -1 , b) 0 i 2 , c) 3 i 7 .

Powtórzenie

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y = -x(x+6)$

b) $y = (x-1)(x-5)$

c) $y = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$

6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y . Odpowiedź podaj w każdej z wymienionych poniżej postaci.

a) $x_1 = -2, x_2 = 4, Y = \langle -6; \infty \rangle$

b) $x_1 = -6, x_2 = 0, Y = \langle -\infty; 8 \rangle$

c) $x_1 = 1, x_2 = 7, Y = \langle -\infty; 2 \rangle$

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$

Postać kanoniczna: $y = a(x-p)^2 + q$

Postać iloczynowa: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

b) $y = a(x+6)x$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-6+0}{2} = -3, y_w = 8$$

Zatem $a(-3+6)(-3) = 8$,

czyli $a = -\frac{8}{9}$.

Postać ogólna: $y = -\frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{3}x$

Postać iloczynowa: $y = -\frac{8}{9}(x+6)x$

Postać kanoniczna:

$$y = -\frac{8}{9}(x+3)^2 + 8$$

c) $y = a(x-1)(x-7)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{1+7}{2} = 4, y_w = 2$$

Zatem $a(4-1)(4-7) = 2$, czyli $a = -\frac{2}{9}$.

Postać ogólna: $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{16}{9}x - \frac{14}{9}$

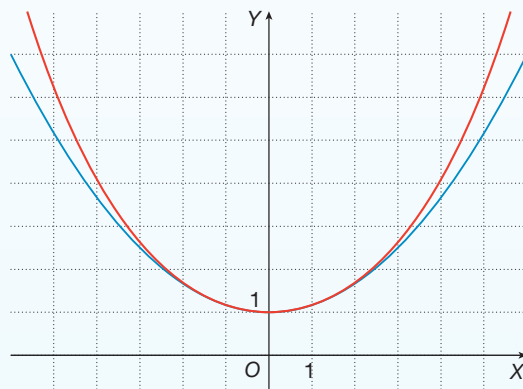
Postać iloczynowa: $y = -\frac{2}{9}(x-1)(x-7)$

Postać kanoniczna: $y = -\frac{2}{9}(x-4)^2 + 2$

Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* (od łacińskiego słowa *catena* oznaczającego łańcuch).

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych to monument, którego kształt jest inspirowany krzywą łańcuchową.



- 1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

Uczeń:

- wyjaśnia związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniego trójmianu kwadratowego
- rozwiązuje nierówność kwadratową
- wykorzystuje nierówności kwadratowe do rozwiązywania zadań o różnym stopniu trudności, w szczególności wyznacza dziedzinę funkcji, w której wzorze występuje pierwiastek kwadratowy
- zaznacza na osi liczbowej iloczyn, sumę i różnicę zbiorów rozwiązań dwóch nierówności kwadratowych

Komentarz

Po omówieniu przykładów 1 i 2 warto zaproponować uczniom, aby przeanalizowali je ponownie i ułożyli plan rozwiązywania nierówności kwadratowych. Przykładowy algorytm:

1. Obliczenie pierwiastków równania.
2. Zaznaczenie miejsc zerowych na osi.
3. Naszkicowanie wykresu.
4. Odczytanie z wykresu rozwiązania nierówności.

Komentarz

Dużym ułatwieniem przy odczytywaniu zbiorów rozwiązań nierówności jest zaznaczenie na szkicu wykresu znaków „+” i „-” (jak na rysunkach w przykładzie 2).

1.7. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

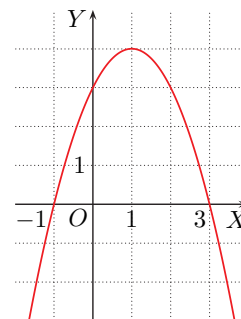
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane w górę czy w dół.



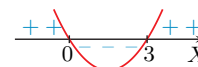
Przykład 2

a) Rozwiąż nierówność $2x^2 - 6x > 0$.

Najpierw znajdujemy pierwiastki równania $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Są to liczby: 0 oraz 3.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$



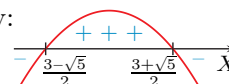
b) Rozwiąż nierówność $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem: } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $2x^2 + x - 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

Ćwiczenie 1

a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$

b) $x \in (-1; \frac{1}{2})$

c) $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$

Multiteka

• Nierówność kwadratowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Generator
testów i sprawdzianów

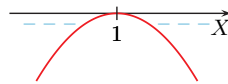
Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x - 1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 2x - 1 \geq 0 \text{ dla } x = 1.$$



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$

b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$

c) $-x^2 + 2x - 1 > 0$

Ćwiczenie 2

a) $x \in \mathbf{R}$

b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$

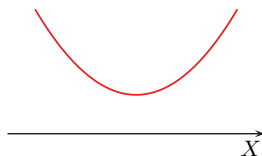
c) sprzeczna

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

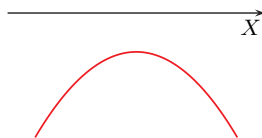
Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że każda liczba spełnia daną nierówność, czyli $x \in \mathbf{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 + 2x + 1 > 0$

b) $x^2 + x + 3 < 0$

c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = -12 < 0$, $a = 4 > 0$, zatem $x \in \mathbf{R}$

b) $\Delta = -11 < 0$, $a = 1 > 0$, zatem nierówność jest sprzeczna

c) $\Delta = -6 < 0$, $a = -2 < 0$, zatem $x \in \mathbf{R}$

Przykład 5

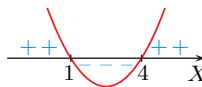
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Wykonujemy mnożenie.
Przenosimy wszystkie wyrazy
na lewą stronę nierówności.

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność zachodzi dla $x \in (1; 4)$.



Ćwiczenie 4

- a) $2x^2 + x - 3 \leq 0$, $x \in \langle -\frac{3}{2}; 1 \rangle$
b) $2x^2 - 2x - 1 > 0$,
 $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$
c) $x^2 - 4x + 25 > 0$, $x \in \mathbf{R}$
d) $x^2 - 2x + 1 > 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$
e) $5x^2 - 2x < 0$, $x \in (0; \frac{2}{5})$
f) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$, $x \in \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$
b) $x \in \langle -4; 4 \rangle$
c) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$
d) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty \rangle$
e) $x \in \langle -1; 4 \rangle$
f) $x \in (-1; 5)$
g) $x \in \langle -\frac{1}{2}; 5 \rangle$
h) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
i) sprzeczna
j) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$
k) $x \in \langle -2; 8 \rangle$
l) sprzeczna
2. a) $x \in \langle -6; 6 \rangle$, trzynaście
b) $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$, nieskończenie wiele
c) $x \in \langle -2; 2\frac{1}{2} \rangle$, pięć
d) $x \in (-2; 1)$, dwie
3. a) $x \in \langle 3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6} \rangle$; 1, 2, 3, 4, 5
b) $x \in \langle \frac{3-2\sqrt{6}}{3}; \frac{3+2\sqrt{6}}{3} \rangle$; 0, 1, 2
c) $x \in \langle \frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2} \rangle$; -3, -2, -1, 0, 1, 2
4. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$
b) $x \in \mathbf{R}$
c) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle \frac{1}{3}; \infty \rangle$
d) $x \in \mathbf{R}$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$
f) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
g) sprzeczna
h) $x = \frac{3}{2}$
i) sprzeczna

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $x - x^2 \leq 3 - 3x^2$ c) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ e) $(2x+1)^2 + (x-3)^2 < 10$
b) $-x(2-x) > 1 - x^2$ d) $2 - x^2 < (2-x)^2$ f) $3x - (1-x)^2 \geq x^2 - 4$

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności,
- zapisanie odpowiedzi.

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.
a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geq 6$ g) $9x + 5 \geq 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$
b) $x^2 \leq 16$ e) $x^2 - 4 \leq 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geq \frac{1}{2}x^2$
c) $4x^2 \geq 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leq x$
2. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność?
a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leq x$ d) $2 - x > x^2$
3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające daną nierówność.
a) $x^2 - 6x + 3 \leq 0$ b) $-3x^2 + 6x + 5 > 0$ c) $2x^2 + 2x - 15 < 0$
4. Rozwiąż nierówność.
a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ d) $x^2 + 2x + 2 > 0$ g) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$ e) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ h) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$
c) $3x^2 + 14x - 5 \geq 0$ f) $-2x^2 - 7x + 4 \leq 0$ i) $x^2 + x + 1 < 0$
5. a) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 5$ przyjmuje wartości większe od 5, a dla jakich mniejsze od -3?
b) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 8x + 15$ przyjmuje wartości należące do przedziału $(3; 8)$?
6. Rozwiąż nierówność.
a) $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$ d) $(2x - 2)^2 \geq (3x - 2)(x - 3)$
b) $(3x - 1)(x + 2) \geq (x - 3)(2x - 1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geq -(x - 1)^2 - 6$
c) $(4x - 1)(4 - x) \leq (2 - 3x)(x + 1)$ f) $(2x + 3)^2 - 9 < 8 - (3 - x)^2$
5. a) $f(x) > 5$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$, $f(x) < -3$ dla $x \in (2; 4)$
b) $x \in (1; 2) \cup (6; 7)$
6. a) $x^2 - x - 6 < 0$, $x \in (-2; 3)$
b) $x^2 + 12x - 5 \geq 0$,
 $x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}) \cup \langle -6 + \sqrt{41}; \infty \rangle$
c) $x^2 - 18x + 6 \geq 0$,
 $x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}) \cup \langle 9 + 5\sqrt{3}; \infty \rangle$
d) $x^2 + 3x - 2 \geq 0$,
 $x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \infty\right)$
e) $3x^2 - 5x + 11 \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$
f) $5x^2 + 6x + 1 < 0$, $x \in (-1; -\frac{1}{5})$

7. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.
- a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$
8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)}$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens. We wzorze funkcji f występuje pierwiastek, zatem wyrażenie pod nim musi być nieujemne:

$$x(x-4) \geq 0$$

Nierówność ta zachodzi dla $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 4; \infty)$.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 0) \cup \langle 4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
 b) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x - 5}$
 c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x - 24}$

9. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.
- a) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 1 \leq 0$,
 B – zbiór rozwiązań nierówności $3x - x^2 \geq 0$.
- b) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 6 > 0$,
 B – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 4 < 0$.
10. Jedno miejsce zerowe funkcji kwadratowej jest o dwa większe od drugiego. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(-2, 4)$. Rozwiąż nierówność $f(x) \leq 0$.

Powtórzenie

11. Rozwiąż nierówność.
- a) $x^2 \leq 8$ d) $2 > -x^2$ g) $x^2 + 4x - 21 \geq 0$
 b) $x^2 > 9$ e) $x^2 \leq 4x - 4$ h) $-x^2 + 2x + 15 > 0$
 c) $x^2 \geq x$ f) $6x > -x^2 - 9$ i) $6x^2 - x - 1 < 0$
12. Które dzielniki całkowite liczby 12 spełniają nierówność?
- a) $x^2 - 2x + 4 \leq 0$ c) $-2x^2 + 3x + 1 > 0$ e) $2x^2 - 1 > 1 - 3x$
 b) $x^2 - 4x + 9 > 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \leq 0$ f) $1 - x \leq x^2$
12. a) żaden
 b) wszystkie
 c) 1
 d) $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 6, 12$
 e) $-12, -6, -4, -3, 1, 2, 3, 4, 6, 12$
 f) $-12, -6, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 6, 12$

7. $f(x) > g(x)$
- a) $x^2 + x - 2 > 0$,
 $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
 b) $2x^2 + x - 3 > 0$,
 $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$
 c) $x^2 + 8x + 6 < 0$,
 $(-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$
8. a) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
 b) $\langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \rangle$
 c) $\mathbf{R}$
 d) $(-\infty; -1) \cup \langle 4; \infty)$
 e) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{5}{3}; \infty)$
 f) $(-\infty; -4\sqrt{3}) \cup \langle 2\sqrt{3}; \infty)$
9. a) $A = \langle 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3} \rangle$,
 $B = \langle 0; 3 \rangle$,
 $A \cup B = \langle 0; 2 + \sqrt{3} \rangle$,
 $A \cap B = \langle 2 - \sqrt{3}; 3 \rangle$,
 $A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3})$
 b) $A = (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
 $B = (1; 4)$,
 $A \cup B = \mathbf{R}$,
 $A \cap B = (1; 2) \cup (3; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 1) \cup \langle 4; \infty)$
10. Niech x_1 i $x_2 = x_1 + 2$ będą miejscami zerowymi. Wówczas:
- $$x_w = \frac{x_1 + (x_1 + 2)}{2} = -2,$$
- czyli $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$
- $$f(x) = a(x + 3)(x + 1)$$
- $$4 = a(-2 + 3)(-2 + 1),$$
- czyli $a = -4$
- $$f(x) = -4(x + 3)(x + 1),$$
- $$f(x) \leq 0 \text{ dla}$$
- $$x \in (-\infty; -3) \cup \langle -1; \infty)$$
11. a) $x \in \langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty)$
 d) $x \in \mathbf{R}$
 e) $x = 2$
 f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$
 g) $x \in (-\infty; -7) \cup \langle 3; \infty)$
 h) $x \in (-3; 5)$
 i) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$

Uczeń:

- rozpoznaje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych
- wprowadza niewiadomą pomocniczą, podaje odpowiednie założenia i rozwiązuje równanie kwadratowe z niewiadomą pomocniczą

1.8. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^2$ (gdzie $t \geq 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Równanie dwukwadratowe
 $ax^4 + bx^2 + c = 0$

podstawienie
 $t = x^2, t \geq 0$

Pomocnicze równanie kwadratowe
 $at^2 + bt + c = 0$

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 - 10t + 9 = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$t_1 = \frac{10-8}{2} = 1 \geq 0, \quad t_2 = \frac{10+8}{2} = 9 \geq 0$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^2 = 1 \quad \text{lub} \quad x^2 = 9$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

Ćwiczenie 1

- a) $t_1 = 1, t_2 = 4$,
 $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 1$
lub $x = 2$
- b) $t_1 = 1, t_2 = 6$,
 $x = -\sqrt{6}$ lub $x = -1$ lub $x = 1$
lub $x = \sqrt{6}$
- c) $t_1 = 2, t_2 = 3$,
 $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub
 $x = \sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$ c) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 + 8t - 9 = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\Delta = 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10$$

$$t_1 = \frac{-8-10}{2} = -9 < 0, \quad t_2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x : $x^2 = 1$, czyli $x = -1$ lub $x = 1$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
b) $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$ d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ f) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 - 16x^2 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 - 16t = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$t(t - 16) = 0 \quad \text{Wyłączmy czynnik } t \text{ przed nawias.}$$
$$t = 0 \quad \text{lub} \quad t = 16$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^2 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 = 16$$
$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -4 \quad \text{lub} \quad x = 4$$

Równanie $x^4 - 16x^2 = 0$ można również rozwiązać, zaczynając od wyłączenia x^2 przed nawias: $x^2(x^2 - 16) = 0$.

Zatem rozwiązaniami równania są liczby: $-4, 0, 4$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 36x^2 = 0$ b) $x^4 + 36x^2 = 0$ c) $4x^2 - 9x^4 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 + 7t + 12 = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\Delta = 49 - 48 = 1, \quad \sqrt{\Delta} = 1$$
$$t_1 = \frac{-7-1}{2} = -4 < 0, \quad t_2 = \frac{-7+1}{2} = -3 < 0$$

Rozwiązania t_1 i t_2 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Zatem równanie $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$ jest sprzeczne.

Ćwiczenie 4

Podaj liczbę rozwiązań równania.

- a) $x^4 - 9x^2 = 0$ c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
b) $x^4 + 9x^2 = 0$ d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

Poza równaniami dwukwadratowymi są również inne równania, które przy odpowiednim podstawieniu można sprowadzić do równań kwadratowych.

Ćwiczenie 2

- a) $t_1 = -1, t_2 = 9,$
 $x = -3$ lub $x = 3$
b) $t_1 = 2, t_2 = -8,$
 $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$
c) $t_1 = -4, t_2 = 3,$
 $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
d) $t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = 4,$
 $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$
lub $x = 2$
e) $t_1 = -2, t_2 = \frac{1}{4},$
 $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $t_1 = 5, t_2 = 9,$
 $x = -3$ lub $x = -\sqrt{5}$
lub $x = \sqrt{5}$ lub $x = 3$

Ćwiczenie 3

- a) $x = -6$ lub $x = 0$ lub $x = 6$
b) $x = 0$
c) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = 0$ lub $x = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 4

- a) 3
b) 1
c) 2
d) 4
e) 0
f) 2

Ćwiczenie 5

- a) $x = 1$ lub $x = 2$
b) $x = -1$ lub $x = 2$
c) $x = -1$ lub $x = \sqrt[3]{2}$

Komentarz

Warto zaproponować uczniom, aby zapisali w zeszytach kolejne etapy wyznaczania dziedziny funkcji.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = 3$
b), c) sprzeczne
d) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = 2$
e) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{3}$
f) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$
2. a) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$
b) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$
c) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) sprzeczne
e) $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
f) $x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$
3. a) $f(x) = x^4 - 4x^2 = 0$
dla $x = -2, x = 0, x = 2$
 $g(x) = x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
dla $x = -\sqrt{5}, x = -1, x = 1, x = \sqrt{5}$
Zatem funkcje f i g nie mają wspólnych miejsc zerowych.
b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ dla $x = -2, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 2$
 $g(x) = x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ dla $x = -\sqrt{5}, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = \sqrt{5}$
Zatem funkcje f i g mają 2 wspólne miejsca zerowe.
4. Podstawiamy $t = |x|, t \geq 0$, i otrzymujemy:
a) $t^2 - 2t - 8 = 0$
 $\Delta = 36, \sqrt{\Delta} = 6$
 $t = -2$ lub $t = 4$
 $|x| = 4$
 $x = -4$ lub $x = 4$
b) $t^2 - 4t + 4 = 0$
 $t = 2$
 $|x| = 2$
 $x = -2$ lub $x = 2$
c) $t^2 - 5t - 6 = 0$
 $\Delta = 49, \sqrt{\Delta} = 7$
 $t = 6$ lub $t = -1 < 0$
 $|x| = 6$
 $x = -6$ lub $x = 6$

Ćwiczenie 5

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe $t^2 - 3t + 2 = 0$.

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do niewiadomej x : $x^3 = 1$ lub $x^3 = 2$

$$x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

- a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ c) $x^6 - x^3 - 2 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ e) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$ d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$ f) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ c) $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ e) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$
b) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ d) $9x^4 + 6x^2 + 1 = 0$ f) $9x^4 - 30x^2 + 25 = 0$

D 3. a) Uzasadnij, że funkcje $f(x) = x^4 - 4x^2$ oraz $g(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ nie mają wspólnych miejsc zerowych.

b) Ile wspólnych miejsc zerowych mają funkcje $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ oraz $g(x) = x^4 - 7x^2 + 10$?

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$ b) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

Wskazówka: Podstaw $t = |x|$ i zauważ, że $x^2 = |x|^2 = t^2$.

Powtórzenie

5. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ c) $x^4 - 9x^2 - 10 = 0$ e) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$
b) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ d) $4x^4 + 2 = 9x^2$ f) $12x^4 - 6x^2 = x^2 - 1$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 + 9 = 6x^2$ c) $16x^4 - 1 = 8x^2$ e) $x^4 - 24x^2 = 25$
b) $x^2 - 1 = x^4 - x^2$ d) $12x^2 + 6 = 2 - 9x^4$ f) $x^4 + 2x^2 = \frac{2}{3}x^4 - x^2$

5. a) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = \sqrt{5}$

b) $x = -4$ lub $x = 4$

c) $x = -\sqrt{10}$ lub $x = \sqrt{10}$

d) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \sqrt{2}$

e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$

f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$

b) $x = -1$ lub $x = 1$

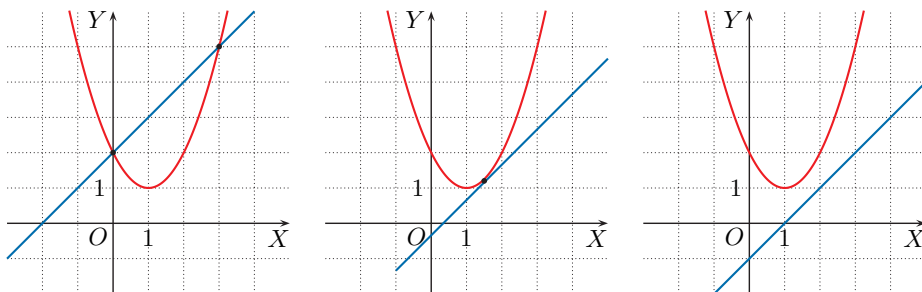
c) $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$

d) sprzeczne

e) $x = -5$ lub $x = 5$ f) $x = 0$

1.9. Układy równań

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 = 2x$, czyli:

$$x^2 - 2x = 0$$

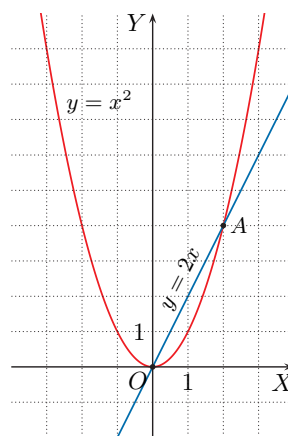
$$x(x - 2) = 0$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



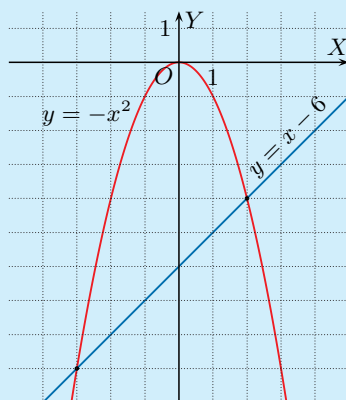
Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0, 0)$ i $A(2, 4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

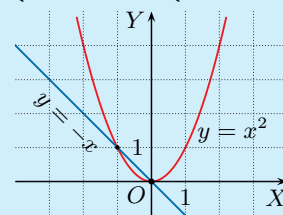


Uczeń:

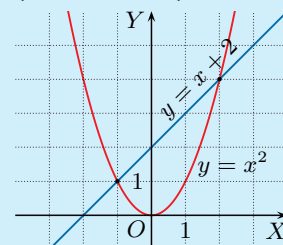
- rozwiązuje algebraicznie układ równań, z których jedno jest równaniem paraboli, a drugie – równaniem prostej
- podaje interpretację geometryczną rozwiązania układu równań, znajdując punkty wspólne prostej i paraboli

Ćwiczenie 1

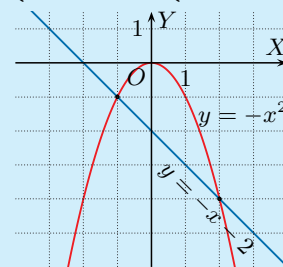
a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$



Multiteka

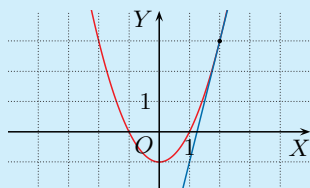
- Układy równań

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

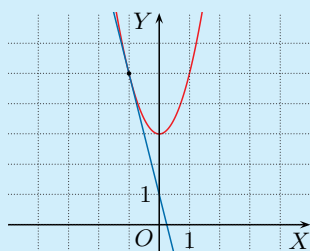
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

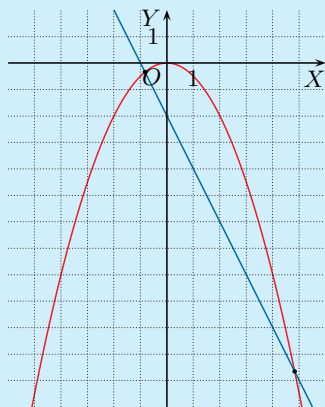
a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ y = 4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \\ y = -4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$



D Przykład 2

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.

Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Prosta i parabola mają jeden punkt wspólny.

Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 4 &= 0 \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0 \end{aligned}$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4y = x^2 + 4x + 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$

$$x^2 + 2x + 3 = 3x + 1$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = -7 < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

b) $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$

$$-2x + 7 = -2x^2 + 4x + 2$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = -4 < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

$$-\frac{1}{4}x^2 - x - 2 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

$$\Delta = -3\frac{3}{4} < 0$$

Zatem układ równań jest sprzeczny.

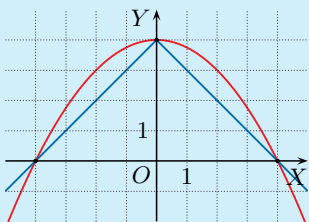
Zadania

- Wyznacz współrzędne punktów wspólnych paraboli $y = -x^2 + 4$ i prostej:
 - $y - x - 2 = 0$,
 - $y + 2x - 5 = 0$,
 - $y - 2x - 1 = 0$.
- Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?
 - $f(x) = x + 3$, $g(x) = 3 - x^2$
 - $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x$
 - $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -2x^2$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$
- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
 - $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 4 \\ y = 4x + 4 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = -2x^2 - 8x + 4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$
- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
 - $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x - 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$
- Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
 - $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| + 2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = |x| - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = 4 - |x| \end{cases}$

Powtórzenie

- Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Oblicz $|y_1 - y_2|$.
 - $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$
 - $f(x) = x + 1$, $g(x) = -2x^2 + 3$
 - $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = x^2$
 - $f(x) = -x - 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$
- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.
 - $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases}$

5. c) $x = -4$, $y = 0$ lub $x = 0$, $y = 4$ lub $x = 4$, $y = 0$



6. a) $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 2)$, $|y_1 - y_2| = 1$

b) $P_1\left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$,
 $P_2\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$,
 $|y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{17}}{2}$

c) $P_1(-3, 9)$, $P_2(1, 1)$, $|y_1 - y_2| = 8$

d) $P_1(-3, 1)$, $P_2(0, -2)$, $|y_1 - y_2| = 3$

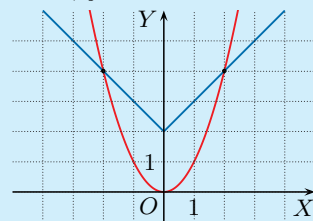
7. a) $x = 6 - 2\sqrt{6}$, $y = -2\sqrt{6}$ lub
 $x = 6 + 2\sqrt{6}$, $y = 2\sqrt{6}$

b) $x = -1$, $y = 2$

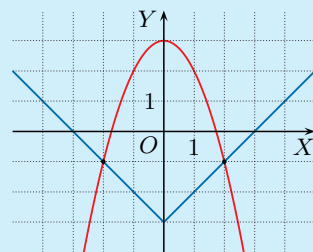
c) $x = -1$, $y = 1$

Odpowiedzi do zadań

- a) $(-2, 0)$, $(1, 3)$
 b) $(1, 3)$
 c) $(-3, -5)$, $(1, 3)$
- a) $(-1, 2)$, $(0, 3)$;
 2 punkty wspólne
 b) $(-1, 3)$, $(2, 0)$;
 2 punkty wspólne
 c) $(-2, -8)$, $(1, -2)$;
 2 punkty wspólne
 d) $(-1, \frac{1}{2})$, $(2, 2)$;
 1 punkt wspólny
- a) $x = 2$, $y = -1$ lub
 $x = 4$, $y = 1$
 b) $x = -2$, $y = -7$ lub
 $x = 2$, $y = 1$
 c) $x = -2$, $y = -4$ lub
 $x = 0$, $y = 4$
 d) $x = -4$, $y = 4$ lub
 $x = 1$, $y = -6$
- a) $x = 0$, $y = 4$ lub
 $x = 3$, $y = 1$
 b) $x = -4$, $y = 6$ lub
 $x = 0$, $y = -2$
 c) $x = -2$, $y = 6$ lub
 $x = 2$, $y = -2$
 d) $x = -4$, $y = 0$ lub
 $x = 2$, $y = 3$
 e) $x = -1$, $y = 3$
 f) $x = -1 - \sqrt{3}$, $y = -5 - 4\sqrt{3}$
 lub $x = -1 + \sqrt{3}$,
 $y = -5 + 4\sqrt{3}$
- a) $x = -2$, $y = 4$ lub
 $x = 2$, $y = 4$

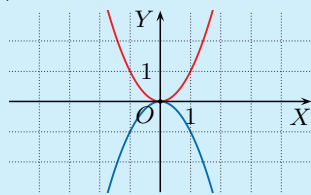


- b) $x = -2$, $y = -1$ lub
 $x = 2$, $y = -1$

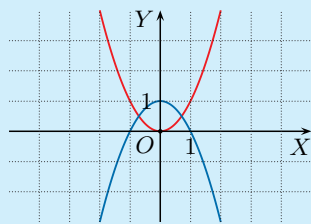


Odpowiedzi do zadań

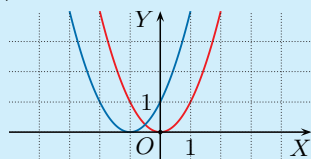
1. a) 1 punkt wspólny



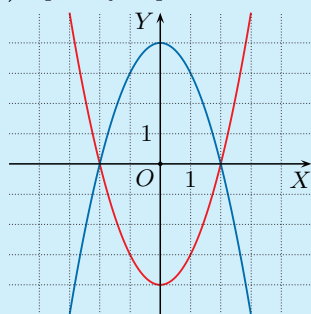
b) 2 punkty wspólne



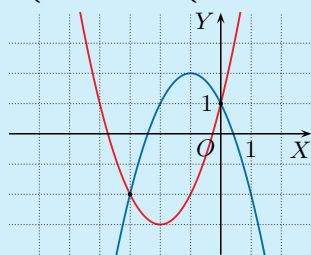
c) 1 punkt wspólny



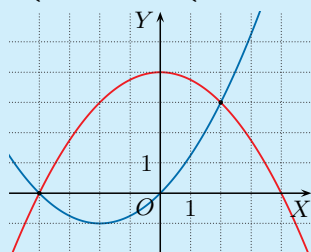
d) 2 punkty wspólne



2. a) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

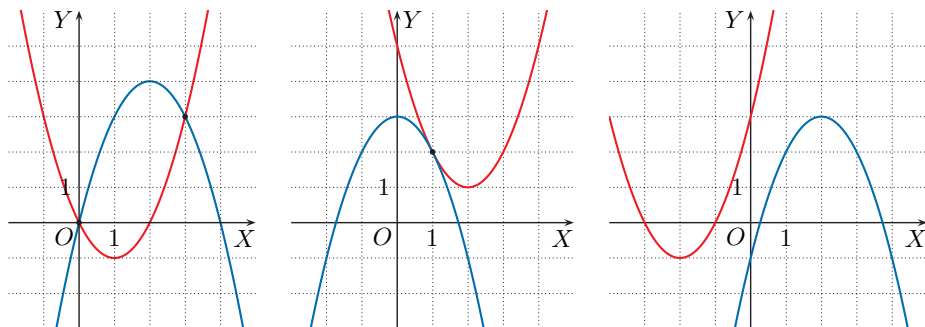


b) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



Układy równań kwadratowych

Dwie różne parabole mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub mogą nie mieć punktów wspólnych.



1. Naskicuj parabole będące wykresami funkcji f i g . Ile punktów wspólnych mają te wykresy?

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+1)^2$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = -x^2 + 4$

Przykład

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

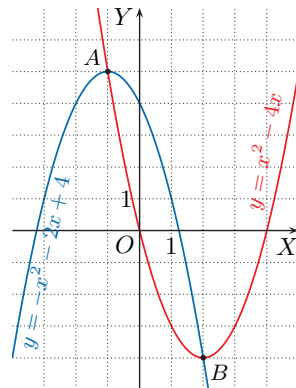
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 - 4x = -x^2 - 2x + 4$, czyli $2x^2 - 2x - 4 = 0$, zatem: $x = -1$, $x = 2$ (sprawdź).

Dla $x = -1$ mamy $y = 5$. Dla $x = 2$ mamy $y = -4$.

Układ równań spełniają więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Parabole $y = -x^2 - 2x + 4$ i $y = x^2 - 4x$ przecinają się w punktach $A(-1, 5)$ oraz $B(2, -4)$.

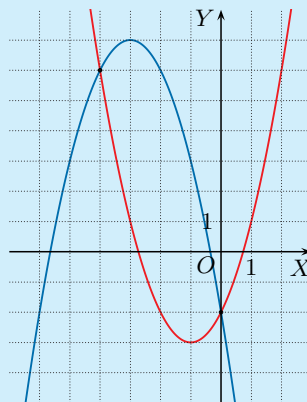
2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$



1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$$p + q = 12, \text{ zatem } q = 12 - p.$$

$$\text{Iloczyn tych liczb: } p \cdot q = p(12 - p) = -p^2 + 12p.$$

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p \quad \text{Wykresem funkcji } f \text{ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.}$$

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

a) 38,

b) $\frac{1}{2}$,

c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

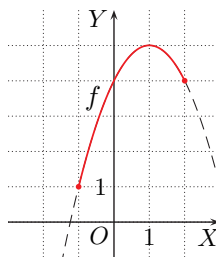
Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q .

Przykład 2

Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału:
 $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.

Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$,
 $y_w = f(1) = 5$. Ponieważ $x_w \in \langle -1; 2 \rangle$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2 \rangle$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $\langle p_1; p_2 \rangle$, to wyznaczamy również y_w , obliczając $f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych trzech wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Ćwiczenie 2

$$p + 2q = 36, \text{ zatem } p = 36 - 2q$$

$$p \cdot q = f(q) = (36 - 2q)q = -2q^2 + 36q$$

$$q_w = 9, \quad f(q_w) = 162$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 162.

Uczeń:

- stosuje pojęcia najmniejszej i największej wartości funkcji
- wyznacza wartości najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- stosuje własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych

Ćwiczenie 1

Liczby oznaczamy przez p i q , wtedy:

a) $q = 38 - p$

$$p \cdot q = f(p) = p(38 - p) = -p^2 + 38p$$

$$p_w = 19, \quad f(p_w) = 361$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 361.

b) $q = \frac{1}{2} - p$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \frac{1}{2}p$$

$$p_w = \frac{1}{4}, \quad f(p_w) = \frac{1}{16}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{16}$.

c) $q = \sqrt{2} - p$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \sqrt{2}p$$

$$p_w = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(p_w) = \frac{1}{2}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{2}$.

Multiteka

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $x_w = -2 \in \langle -3; 1 \rangle$,
 $y_w = f(x_w) = 4$ – wartość najmniejsza,
 $f(-3) = 5$,
 $f(1) = 13$ – wartość największa
- b) $x_w = -1 \notin \langle 0; 4 \rangle$,
 $f(0) = -1$ – wartość największa,
 $f(4) = -49$ – wartość najmniejsza
- c) $x_w = 2 \in \langle -1; 3 \rangle$,
 $y_w = f(x_w) = -2$ – wartość największa,
 $f(-1) = -11$ – wartość najmniejsza,
 $f(3) = -3$
- d) $x_w = -\frac{1}{2} \in \langle -2; 1 \rangle$,
 $y_w = f(x_w) = -\frac{7}{2}$ – wartość najmniejsza,
 $f(-2) = 1$ – wartość największa,
 $f(1) = 1$ – wartość największa

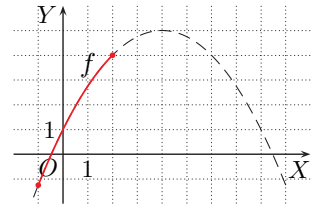
Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

$$\bullet x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin \langle -1; 2 \rangle$$

Zatem najmniejsza i największa wartość funkcji f przyjmowana jest na końcach przedziału $\langle -1; 2 \rangle$.

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ – wartość najmniejsza
- $f(2) = 4$ – wartość największa



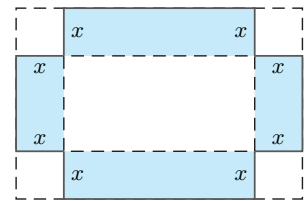
Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 8$, $\langle -3; 1 \rangle$ c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, $\langle -1; 3 \rangle$
 b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$, $\langle 0; 4 \rangle$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $\langle -2; 1 \rangle$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D = (0; 20)$.

$$x > 0, 2x < 40, 2x < 60$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12,5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

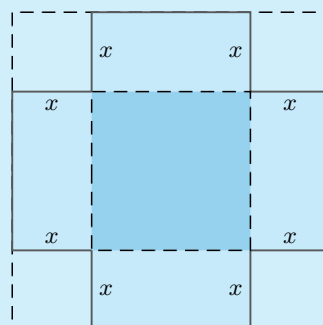
Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P przyjmowana jest dla x_w .

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm².

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm² wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Ćwiczenie 4



Długość boku kwadratowego arkusza wynosi 40 cm. Pole powierzchni bocznej pudełka opisuje funkcja:

$$P(x) = 4(40 - 2x)x = -8x^2 + 160x, \quad x \in (0; 20)$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-160}{-16} = 10$$

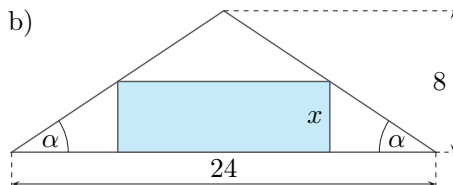
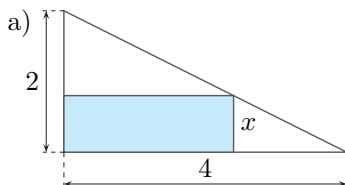
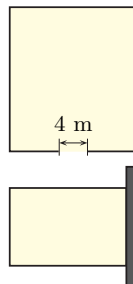
Wartość ta jest równa:

$$f(10) = -800 + 1600 = 800$$

Boki wycinanych kwadratów mają długość 10 cm, a pole powierzchni bocznej wynosi 800 cm².

Zadania

- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale:
a) $\langle 0; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 0 \rangle$, c) $\langle -4; 6 \rangle$.
- Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.
a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.
b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.
- Mamy 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ten ogródek, jeśli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 4 m?
- Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego powierzchnia była jak największa?
- Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Wyraż pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x . Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



Powtórzenie

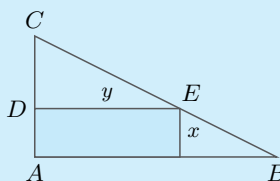
- Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.
a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $\langle 0; 3 \rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$, $\langle -6; 3 \rangle$
- Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien on mieć?

- a) Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC : $\frac{y}{4} = \frac{2-x}{2}$, czyli $y = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$.

Zatem pole prostokąta opisuje funkcja:

$$P(x) = -2x^2 + 4x$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla $x_w = 1$. Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 1×2 .



- b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 12×4

- a) najmniejsza: 1, największa: 9
b) najmniejsza: -2, największa: 10

- 60 m $\times$ 60 m

Odpowiedzi do zadań

- a) najmniejsze: $f(0) = f(4) = -1$, $g(0) = -3$,
największe: $f(2) = 3$,
 $g(4) = 9$
b) najmniejsze: $f(-2) = -13$,
 $g(-1) = -\frac{7}{2}$,
największe: $f(0) = -1$,
 $g(-2) = g(0) = -3$
c) najmniejsze: $f(-4) = -33$,
 $g(-1) = -\frac{7}{2}$,
największe: $f(2) = 3$,
 $g(6) = 21$
- a) 8 b) 32
- Oznaczmy boki ogródka przez x i y , wówczas:
 $2(x + y) = 84$, czyli $y = 42 - x$
Pole ogródka opisuje funkcja:
 $P(x) = x(42 - x)$,
 $D_P = (4; 42)$
Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x = 21$.
Wtedy $y = 42 - 21 = 21$.
Wymiary ogródka o największej powierzchni: 21 m $\times$ 21 m.
- 7 m $\times$ 14 m
- 3 cm $\times$ 3 cm

Uczeń:

- przeprowadza analizę zadania i zapisuje odpowiednie równanie, nierówność lub funkcję kwadratową opisującą daną zależność
- znajduje rozwiązanie, które spełnia ułożone przez niego warunki

Ćwiczenie 1

a) $\text{zysk} = \text{sprzedaż} \cdot (\text{cena za sztukę} - \text{koszt jednej sztuki})$

$$z(x) = (-40x + 3600)(x - 20) = -40x^2 + 4400x - 72000$$

b) Funkcja z przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-4400}{-80} = 55$$

Zatem cenę lalki należy ustalić na 55 zł. Wtedy wielkość sprzedaży to 1400 sztuk, a zysk 49000 zł.

Ćwiczenie 2

a) Niech x oznacza cenę za jednego misia. Wielkość sprzedaży opisuje funkcja:

$$s(x) = 1000 - 50(x - 15) = -50x + 1750,$$

gdzie $x \in \langle 15; 35 \rangle$.

$\text{zysk} = \text{sprzedaż} \cdot (\text{cena za sztukę} - \text{koszt jednej sztuki})$

$$z(x) = (-50x + 1750) \cdot (x - 10) = -50x^2 + 2250x - 17500,$$

gdzie $x \in \langle 10; 35 \rangle$.

b) Funkcja z przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-2250}{-100} = 22,5$$

Zatem cenę misia należy ustalić na 22,50 zł. Wtedy wielkość sprzedaży to 625 sztuk, a zysk 7812,50 zł.

1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ćwiczenie 1

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny x zł za sztukę (tabela poniżej).

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Dane z tabeli spełniają równanie $s = -40x + 3600$.

D a) Uzasadnij, że jeśli koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł, to zysk firmy ze sprzedaży lalek w cenie x zł za sztukę wyraża się wzorem:

$$z(x) = -40x^2 + 4400x - 72000$$

b) Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 2

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Przy cenie 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny x zł za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że obniżenie ceny o każde 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy?

Ćwiczenie 4

Właściciel kina zauważył, że przy cenie biletu wynoszącej 16 zł na seans przychodzi średnio 100 osób, a każdorazowe podniesienie ceny biletu o złotówkę powoduje, że liczba widzów zmniejsza się o 5. Jaką cenę biletu należy ustalić, aby dochód kina był największy?

Ćwiczenie 3

Niech x oznacza, ile razy należy obniżyć cenę o 5 zł, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zysk opisuje funkcja:

$$z(x) = (16 + 4x)(40 - 5x) = -20(x + 4)(x - 8)$$

Funkcja z przyjmuje największą wartość dla:

$$x_w = \frac{-4+8}{2} = 2$$

zatem cenę należy obniżyć o 10 zł.

Ćwiczenie 4

Niech x oznacza, ile razy należy podnieść cenę o 1 zł, $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$.

Dochód kina opisuje funkcja:

$$d(x) = (16 + x)(100 - 5x) = -5(x - 20)(x + 16)$$

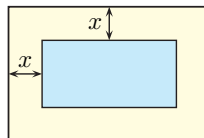
Funkcja d przyjmuje największą wartość dla $x_w = \frac{-16+20}{2} = 2$, zatem cena biletu powinna wynosić 18 zł.

Ćwiczenie 5

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika, jeśli różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Ćwiczenie 6

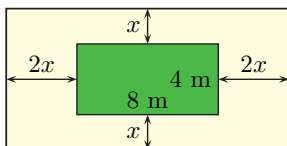
Wokół basenu o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ wyłożono kafełkami pas o szerokości x (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli ma on powierzchnię 45 m^2 ?



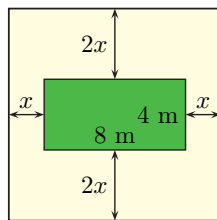
Zadania

- Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o $x \text{ m}$, a długość o $2x \text{ m}$. Oblicz x , jeśli powierzchnia placu wzrosła o 144 m^2 .
- Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy.
 - $P = 2400 \text{ cm}^2$, $x = 80 \text{ cm}$, $y = 60 \text{ cm}$
 - $P = 2700 \text{ cm}^2$, $x = 75 \text{ cm}$, $y = 55 \text{ cm}$
- Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ ma zostać wyłożona kostka. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji wyznacz x .

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2



- Dany jest prostokąt o wymiarach $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x \text{ cm}$. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm ?
- Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest nie mniejsza niż 6 m i nie większa niż 10 m?
- Propozycja A: $(8 + 4x)(4 + 2x) = 32 + 66$
 $x = 1,5 \text{ m}$
Propozycja B: $(8 + 2x)(4 + 4x) = 32 + 78$
 $x = 1,5 \text{ m}$
- $(3 + x)^2 + (10 + x)^2 > 13^2$
 $x > 2$
- Niech x oznacza szerokość pokoju, gdzie $x > 0$, wówczas:
 $6^2 \leq x^2 + (x + 2)^2 \leq 10^2$, czyli
 $(\sqrt{17} - 1) \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$.

Ćwiczenie 5

a) Wymiary trawnika:
 x , $x + 6$, gdzie $x > 0$.

$$x(x + 6) = 216$$

$$x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$\Delta = 36 + 864 = 900$$

$$x = \frac{-6+30}{2} = 12 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-6-30}{2} < 0$$

Zatem trawnik ma wymiary $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$.

b) Wymiary trawnika:
 x , $x + 15$, gdzie $x > 0$.

$$x(x + 15) = 216$$

$$x^2 + 15x - 216 = 0$$

$$\Delta = 225 + 864 = 1089$$

$$\sqrt{\Delta} = 33$$

$$x = \frac{-15+33}{2} = 9 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-15-33}{2} < 0$$

Zatem trawnik ma wymiary $9 \text{ m} \times 24 \text{ m}$.

Ćwiczenie 6

$$(4 + 2x)(8 + 2x) - 4 \cdot 8 = 45$$

$$4x^2 + 24x - 45 = 0$$

$$\Delta = 576 + 720 = 1296$$

$$\sqrt{\Delta} = 36$$

$$x = \frac{-24+36}{8} = 1,5 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-24-36}{8} < 0$$

Szerokość pasa wynosi $1,5 \text{ m}$.

Odpowiedzi do zadań

- $(12+x)(18+2x) = 12 \cdot 18 + 144$
 $x = 3$
- a – szerokość ramy
 - $(80 - 2a)(60 - 2a) = 2400$,
gdzie $a \in (0; 30)$
 $a = 10 \text{ cm}$
 - $(75 - 2a)(55 - 2a) = 2700$,
gdzie $a \in (0; 27,5)$
 $a = \frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6 \text{ [cm]}$

6. Niech $x - 7$, x , $x + 2$ będą długościami boków trójkąta. Wówczas:

$$(x-7)^2 + x^2 = (x+2)^2, x > 7$$

Zatem $x = 15$,
czyli $Ob = 40$ cm.

7. $P(x) = 8 \cdot 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}(8-x) \cdot (10-x) = 18x - x^2$,
 $x \in (0; 8)$
 $P(x) \geq 0,4 \cdot 8 \cdot 10$
 $x^2 - 18x + 32 \leq 0$
 $x \in \langle 2; 8 \rangle$

8. $400 \cdot \frac{100-p}{100} \cdot \frac{100-p}{100} = 289$,
 $p \leq 100$
 $p = 15$

10. a) Miejscami zerowymi są liczby 0 i 12, zatem parabola ma równanie postaci:

$$y = ax(x-12)$$

Po podstawieniu współrzędnych wierzchołka $(6, 4)$ do równania paraboli otrzymujemy $a = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

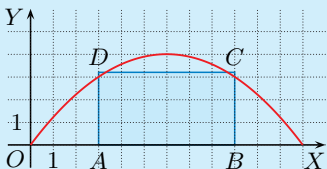
- b) Miejscami zerowymi są liczby -6 i 6 , zatem:

$$y = a(x-6)(x+6) = a(x^2-36).$$

Współrzędne wierzchołka: $(0, 4)$, czyli $a = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + 4.$$

11.



Prostokąt $ABCD$ na rysunku jest schematycznym przedstawieniem barki.

Punkt D ma współrzędne $(3, 3,1)$.

Parabola przedstawiająca most jest wykresem funkcji:

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

Zauważmy, że:

$$f(3) = 3 < 3,1$$

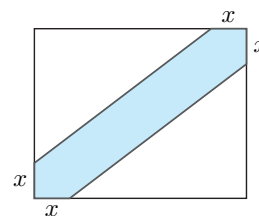
czyli barka nie przeplynie pod mostem.

12. Niech x oznacza szerokość ramki. Wówczas:

$$(6+2x)(9+2x) - 6 \cdot 9 = 6 \cdot 9, \\ x > 0 \\ x = 1,5 \text{ [cm]}$$

6. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC . Oblicz obwód tego trójkąta.

7. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

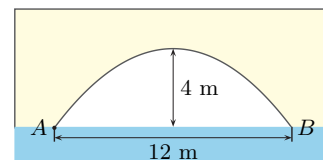


8. Powierzchnia stawu wynosiła 400 m². Przez dwa kolejne lata, na skutek suszy, powierzchnia stawu się zmniejszała – w każdym roku o $p\%$. Oblicz p , jeśli wiadomo, że po upływie dwóch lat staw miał powierzchnię 289 m².

- D** 9. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

- a) naturalnym, b) parzystym.

10. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



- a) w punkcie A , b) w środku odcinka AB .

11. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 10. przeplynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Powtórzenie

12. Zdjęcie o wymiarach 6 cm $\times$ 9 cm oprawiono w prostokątną ramkę o stałej szerokości. Powierzchnia obramowania jest równa powierzchni zdjęcia. Oblicz szerokość obramowania.

13. Trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego. Oblicz obwód i pole tego trawnika, jeśli długości jego boków wyrażone w metrach są równe:

- a) x , $x+7$, $x+8$, b) x , $x+1$, $x-17$.

14. Ogrodnik ma dwie kwadratowe działki, z których jedna ma pole powierzchni 2,25 razy większe niż druga. Do ogrodzenia większej działki potrzebuje on o 40 m więcej siatki niż do ogrodzenia mniejszej. Ile metrów siatki potrzebuje do ogrodzenia obu działek?

9. a) Długości boków trójkąta: n , $n+1$, $n+2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$(n-3)(n+1) = 0$$

$$n = 3 \text{ lub } n = -1 \notin \mathbb{N}_+$$

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt. Jego boki mają długości: 3, 4 i 5.

13. a) $x = 5$, $Ob = 30$ m, $P = 30$ m²
b) $x = 24$, $Ob = 56$ m, $P = 84$ m²

14. 200 m

- b) Długości boków trójkąta: $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$4n^2 + (2n+2)^2 = (2n+4)^2$$

$$4n^2 + 4(n+1)^2 = 4(n+2)^2$$

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$$

Z podpunktu a) mamy $n = 3$.

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt. Jego boki mają długości: 6, 8 i 10.

1.12. Zagadnienia uzupełniające

■ Spadek swobodny i ruch pionowy w górę

Jeśli pominiemy opór powietrza, to drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało możemy opisać za pomocą wzoru $s = \frac{gt^2}{2}$, gdzie t jest czasem, a g – przyspieszeniem ziemskim. Dla $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ mamy $s \approx 4,9t^2$.

Galileusz w *Rozmowach i dowodzeniach matematycznych...* z 1638 roku analizował funkcję opisującą ruch spadającego ciała. Znane jest jego doświadczenie, podczas którego z wieży w Pizie, z wysokości 49 metrów, zrzucił metalowe kule.

1. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość h od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 49 m, w zależności od czasu t , można opisać za pomocą wzoru $h(t) = -4,9t^2 + 49$.

a) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i uzupełnij ją. Znajdź miejsca zerowe i określ dziedzinę tej funkcji.

$t[\text{s}]$	0	1	2	3
$h[\text{m}]$	49	44,1	29,4	4,9

b) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji h będący fragmentem paraboli. Ile metrów przebyła kula w ostatniej sekundzie?

c) Naszkicuj wykres funkcji $k(t) = -4,9t^2 + 80$ opisującej odległość k od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 80 m.

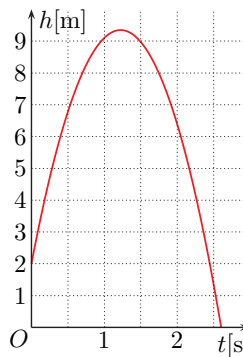
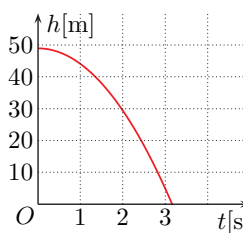
2. Wysokość nad ziemią piłki wyrzuconej pionowo w górę z prędkością 12 m/s (ręka osoby rzucającej piłkę była wzniesiona w momencie rzutu 2 m nad ziemię) dana jest wzorem $h(t) = -4,9t^2 + 12t + 2$. Wykres funkcji h przedstawiono na rysunku.

a) Odczytaj z wykresu przybliżoną wysokość, jaką osiągnęła piłka. Jaka jest długość drogi, którą przebyła piłka?

b) Jak sądzisz, kiedy piłka poruszała się z większą prędkością – w chwili $t = 1 \text{ s}$ czy $t = 2 \text{ s}$?

2. a) $h \approx 9,3 \text{ m}$, około 16,6 m

b) Prędkość piłki od momentu rzucenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości malała aż do wartości 0, po czym zaczęła rosnąć. Na danej wysokości prędkości w czasie wznoszenia i w czasie opadania były równe co do wartości (ale przeciwnie skierowane). Dlatego dla $t = 2 \text{ s}$ piłka poruszała się z większą prędkością.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $-4,9t^2 + 49 \geq 0, t \geq 0$

$$4,9t^2 \leq 49$$

$$t^2 \leq 10$$

$$t \in \langle -\sqrt{10}; \sqrt{10} \rangle, t \geq 0$$

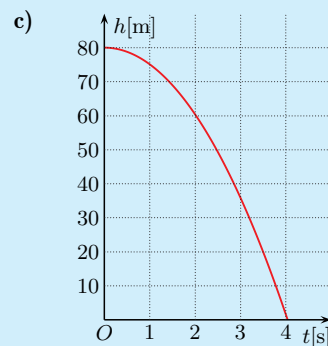
Dziedziną funkcji h jest zbiór $\langle 0; \sqrt{10} \rangle$.

$$h(t) = 0 \text{ dla } t = \sqrt{10}$$

b) 1 sekundę przed końcem spadania kula była na wysokości:

$$\begin{aligned} h(\sqrt{10} - 1) &= \\ &= -4,9(\sqrt{10} - 1)^2 + 49 = \\ &= -4,9(11 - 2\sqrt{10}) + 49 = \\ &= 9,8\sqrt{10} - 4,9 \approx 26 \end{aligned}$$

W ostatniej sekundzie kula przebyła około 26 m.



■ Suma i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego

Twierdzenie (wzory Viète'a)

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dowód

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Uwaga. Wzory Viète'a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, tzn. gdy $\Delta \geq 0$.

François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III i Henryka IV. Dla tego drugiego w roku 1590 złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.



Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.

$\Delta = 400 - 120 = 280 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki: x_1, x_2 .

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7,5$$

b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

3. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $x^2 - 9x - 7 = 0$ c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$ e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$

b) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$ d) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

3. a) $\Delta = 109 > 0, x_1 + x_2 = 9, x_1 x_2 = -7$

b) $\Delta = 65 > 0, x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1 x_2 = -\frac{7}{2}$

c) $\Delta = 177 > 0, x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, x_1 x_2 = \frac{1}{3}$

d) $\Delta = -8 < 0$, zatem równanie nie ma pierwiastków.

e) $\Delta = \frac{200}{3} > 0, x_1 + x_2 = -12, x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$

f) $\Delta = 9\frac{1}{2} > 0, x_1 + x_2 = -6, x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.
a) $f(x) = x^2 + 4$ c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
b) $f(x) = -x^2 - 2x$ d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ f) $f(x) = -x^2 - 6x - 1$
- Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby x_1 i x_2 , a do jej wykresu należy punkt P . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.
a) $x_1 = 1, x_2 = 3, P(0, -4)$ b) $x_1 = -2, x_2 = 4, P(2, 4)$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 - 49 = 0$ c) $9x^2 - 1 = 0$ e) $4x^2 - 81 = 0$
b) $x^2 - 144 = 0$ d) $36x^2 - 1 = 0$ f) $25x^2 - 36 = 0$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 - 50 = 0$ c) $3x^2 - 24 = 0$ e) $27x^2 - 18 = 0$
b) $2x^2 - 7 = 0$ d) $28x^2 - 14 = 0$ f) $9x^2 + 4 = 0$
- Znajdź miejsca zerowe funkcji f . Wyznacz równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.
a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 2x^2 - 3x$ e) $f(x) = x^2 + 14x + 49$
b) $f(x) = x^2 + 6x$ d) $f(x) = 2x + 6x^2$ f) $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ d) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ g) $2x^2 - 3x - 1 = 0$
b) $6 - x - x^2 = 0$ e) $-6x^2 - 7x + 5 = 0$ h) $3x^2 + 5x + 1 = 0$
c) $x - x^2 + 12 = 0$ f) $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$ i) $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$
- Rozwiąż równanie.
a) $(x - 3)^2 = (2x - 1)(x - 3)$ c) $9x^2 - (2x - 1)^2 = 0$
b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 4)$ d) $4x^2 = (1 - x)^2$
- Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.
a) $y = x^2 + 4x$ c) $y = 2x^2 - 8x$ e) $y = -x^2 + 2x + 8$
b) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ f) $y = x^2 + 6x + 8$
- a) $x = -2$ lub $x = 3$
b) $x = -2$ lub $x = 3$
c) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{5}$
d) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$
- a) $(0, 0), (-4, 0), W(-2, -4)$
b) $(0, 0), (2, 0), W(1, 1)$
c) $(0, 0), (4, 0), W(2, -8)$
d) $(-2, 0), (2, 0), (0, 1), W(0, 1)$
e) $(0, 8), (-2, 0), (4, 0), W(1, 9)$
f) $(0, 8), (-4, 0), (-2, 0), W(-3, -1)$

Odpowiedzi do zadań

- a) $f(x) = x^2 + 4$
b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 1$
c) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$
d) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$
e) $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$
f) $f(x) = -(x + 3)^2 + 8$
- a) $f(x) = -\frac{4}{3}(x - 2)^2 + \frac{4}{3}$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{9}{2}$
- a) $x = -7$ lub $x = 7$
b) $x = -12$ lub $x = 12$
c) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$
d) $x = -\frac{1}{6}$ lub $x = \frac{1}{6}$
e) $x = -\frac{9}{2}$ lub $x = \frac{9}{2}$
f) $x = -\frac{6}{5}$ lub $x = \frac{6}{5}$
- a) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{14}$ lub $x = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
c) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$
d) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
e) $x = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$ lub $x = \frac{1}{3}\sqrt{6}$
f) sprzeczne
- a) $x = 0, x = 8$,
oś symetrii: $x = 4$
b) $x = -6, x = 0$,
oś symetrii: $x = -3$
c) $x = 0, x = \frac{3}{2}$,
oś symetrii: $x = \frac{3}{4}$
d) $x = -\frac{1}{3}, x = 0$,
oś symetrii: $x = -\frac{1}{6}$
e) $x = -7$,
oś symetrii: $x = -7$
f) $x = -\frac{1}{4}$,
oś symetrii: $x = -\frac{1}{4}$
- a) $x = -7$ lub $x = 3$
b) $x = -3$ lub $x = 2$
c) $x = -3$ lub $x = 4$
d) $x = -3$ lub $x = \frac{1}{2}$
e) $x = -\frac{5}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = \frac{8}{3}$
g) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
h) $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ lub
 $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$
i) sprzeczne

9. a) $f(D) = \langle -16; \infty \rangle$,
rosnąca w $\langle 4; \infty \rangle$,
malejąca w $(-\infty; 4)$
b) $f(D) = (-\infty; 9)$,
rosnąca w $(-\infty; 3)$,
malejąca w $\langle 3; \infty \rangle$
c) $f(D) = \langle -5; \infty \rangle$,
rosnąca w $\langle -1; \infty \rangle$,
malejąca w $(-\infty; -1)$
d) $f(D) = (-\infty; 3)$,
rosnąca w $(-\infty; \frac{1}{2})$,
malejąca w $\langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
e) $f(D) = (-\infty; 19)$,
rosnąca w $(-\infty; -3)$,
malejąca w $\langle -3; \infty \rangle$
f) $f(D) = \langle -8; \infty \rangle$,
rosnąca w $\langle -6; \infty \rangle$,
malejąca w $(-\infty; -6)$

10. a) $x = 2 - 2\sqrt{2}$, $x = 2 + 2\sqrt{2}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$
c) $x = 0$, $x = 4$
d) $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$

Zestaw II

1. a) $f(x) = 2x(x - 3)$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x(x + 6)$
c) $f(x) = -(x + 5)(x - 3)$
d) $f(x) = 2(x + 2)(x - 1)$
e) $f(x) = 3(x - \frac{1}{3})(x - 3)$
f) $f(x) = -2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
2. a) $x = 7$, $f(x) = -(x - 5)^2 + 4$
b) $x = -9$,
 $f(x) = \frac{1}{6}(x + 3)^2 - 6$
c) $x = -2$,
 $f(x) = -\frac{8}{25}(x - \frac{1}{2})^2 + 2$
d) $x = -\frac{1}{2}$,
 $f(x) = -\frac{96}{49}(x - \frac{5}{4})^2 + 6$
3. a) $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup \langle \frac{\sqrt{3}}{3}; \infty \rangle$
b) $x \in (-2; 2)$
c) $x \in (-3; 4)$
d) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle 1; \infty \rangle$
e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
f) $x \in \langle -3\frac{1}{2}; 2 \rangle$
4. a) $x \in \langle -1; 5 \rangle$
b) $x \in (-\infty; -\frac{5+\sqrt{17}}{4}) \cup$
 $\cup \langle \frac{-5+\sqrt{17}}{4}; \infty \rangle$
c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup \langle 5; \infty \rangle$
d) $x = 6$
e) $x \in (-\frac{1+2\sqrt{2}}{7}; \frac{-1+2\sqrt{2}}{7})$
f) $x \in \langle \frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \rangle$
g) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
h) $x \in (-4 - \sqrt{17}; -4 + \sqrt{17})$
i) $x \in \langle -\frac{3}{2}; -1 \rangle$

9. Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ e) $f(x) = -2x^2 - 12x + 1$
b) $f(x) = 6x - x^2$ d) $f(x) = -4x^2 + 4x + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2x - 2$

10. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f , jeśli do jej wykresu należy punkt P .
Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = a(x - 2)^2 - 4$, $P(4, -2)$ c) $f(x) = a(x - 2)^2 - 2$, $P(6, 6)$
b) $f(x) = a(x + 1)^2 + 2$, $P(-3, -2)$ d) $f(x) = a(x - 3)^2 + 6$, $P(1, -2)$

Zestaw II

1. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = 2x^2 - 6x$ c) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$ e) $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ f) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej f . Wyznacz jej drugie miejsce zerowe, jeśli punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji. Zapisz jej wzór w postaci kanonicznej.

a) $P(5, 4)$ b) $P(-3, -6)$ c) $P(\frac{1}{2}, 2)$ d) $P(\frac{5}{4}, 6)$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 1 \geq 0$ c) $x^2 < x + 12$ e) $4x^2 + 4x > 3$
b) $4 - x^2 > 0$ d) $x^2 \geq 5 - 4x$ f) $3x \leq 14 - 2x^2$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \leq 0$ g) $x(x - 5) < 2x(x - 1)$
b) $2x^2 + 5x + 1 > 0$ e) $7x^2 + 2x < 1$ h) $2(1 - 5x) > (1 - x)^2$
c) $3x^2 - 14x - 5 \geq 0$ f) $-3x^2 + x + 1 \geq 0$ i) $\frac{1}{5}(x^2 + 4) \leq \frac{1}{2}(1 - x)$

5. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność.

a) $x^2 + 120 \leq 22x$ c) $10x - 23 > x^2$ e) $x^2 - 12x + 33 \leq 0$
b) $\frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{2}{3} \leq 0$ d) $-3x^2 + 6x > 2$ f) $x^2 - 6x < -3 - x^2$

6. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność?

a) $(2x + 3)^2 \leq (x - 3)^2$ b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 > (\frac{3}{2}x - 5)^2$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiory: $X \cup Y$, $X \cap Y$ i $X \setminus Y$, jeśli:

X jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - x - 6 \leq 0$,

Y jest zbiorem rozwiązań nierówności $-x^2 \leq 4x + 2$.

5. a) 10, $x \in \langle 10; 12 \rangle$

b) 1, $x \in (6 - 4\sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2})$

c) 4, $x \in (5 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{2})$

d) 1, $x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{3}; \frac{3+\sqrt{3}}{3})$

e) 5, $x \in (6 - \sqrt{3}; 6 + \sqrt{3})$

f) 1, $x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{2})$

7. $X = \langle -2; 3 \rangle$,

$Y = (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup \langle -2 + \sqrt{2}; \infty \rangle$,

$X \cup Y = (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup \langle -2; \infty \rangle$,

$X \cap Y = \langle -2 + \sqrt{2}; 3 \rangle$,

$X \setminus Y = \langle -2; -2 + \sqrt{2} \rangle$

6. a) $x \in \langle -6; 0 \rangle$, siedem liczb całkowitych spełnia tę nierówność.

b) $x \in (3; 4)$, żadna liczba całkowita nie spełnia tej nierówności.



8. Rozwiąż równanie.

- a) $(x^2 - 4)(x^2 + 9) = 0$ c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ e) $x^4 - 16x^2 = 0$
b) $(9x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$ d) $x^4 + 16x^2 = 0$ f) $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

9. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.

- a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ d) $8x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ g) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ e) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$ h) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$
c) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$ f) $x^4 - 2x^2 - 5 = 0$ i) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

10. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

- a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = -x^2 - 4x + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x - 4 \end{cases}$

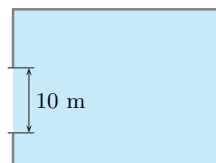
11. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $\langle -2; 1 \rangle$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $\langle 0; 2 \rangle$
b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $\langle 0; 4 \rangle$ d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $\langle -2; 2 \rangle$

12. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:

- a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

13. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek, jeżeli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 10 metrów?



14. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

- a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?
b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

13. Oznaczmy boki ogródka przez x , y .

Wówczas: $2(x + y) - 10 = 240$, czyli $y = 125 - x$.

Pole ogródka opisuje funkcja $P(x) = x(125 - x)$, $x \in (0; 125)$.

Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x = 62,5$. Wtedy $y = 125 - 62,5 = 62,5$.

Wymiary ogródka o największej powierzchni: $62,5 \text{ m} \times 62,5 \text{ m}$.

14. a) Zysk opisuje funkcja $z(x) = (240 - x)(40 + x)$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 240\}$.

Funkcja z przyjmuje największą wartość dla $x_w = \frac{240 - 40}{2} = 100$, zatem cenę należy obniżyć o 100 zł.

Wzrost zysku: $z(100) - z(0) = 19600 - 9600 = 10000$ [zł].

b) $z(x) = (240 + 20x)(40 - x)$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 40\}$

$x_w = \frac{40 - 12}{2} = 14$, zatem cenę należy podnieść o $20 \cdot 14 = 280$ [zł].

Wzrost zysku: $z(14) - z(0) = 13520 - 9600 = 3920$ [zł].

8. a) $x = -2$ lub $x = 2$

b) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$ lub $x = \sqrt{3}$

c) $x = -1$ lub $x = 1$

d) $x = 0$

e) $x = -4$ lub $x = 0$ lub $x = 4$

f) sprzeczne

9. a) $x = -2$ lub $x = 2$

b) $x = -2$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = 2$

c) sprzeczne

d) $x = -\frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$ lub $x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$

e) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$

f) $x = -\sqrt{1+\sqrt{6}}$ lub $x = \sqrt{1+\sqrt{6}}$

g) $x = -2$ lub $x = 2$

h) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$

i) sprzeczne

10. a) $x = -2$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 4$

b) $x = 1$, $y = -2$ lub $x = 2$, $y = 1$

c) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 4$

d) $x = -2$, $y = 5$ lub $x = 1$, $y = -4$

e) $x = -1$, $y = -3$ lub $x = 3$, $y = 5$

f) $x = -4$, $y = -4$ lub $x = 2$, $y = -1$

11. a) najmniejsza: $f(-1) = -2$, największa: $f(1) = 6$

b) najmniejsza: $f(4) = -8$, największa: $f(1) = 1$

c) najmniejsza: $f(0) = 1$, największa: $f(2) = 9$

d) najmniejsza: $f(-2) = -12$, największa: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

12. a) $a = b = 2$

b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$

c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$

**Przykład 1**

Dany jest kwadrat o obwodzie nie większym niż $8\sqrt{2}$ i przekątnej długości x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego kwadratu w zależności od długości jego przekątnej. Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

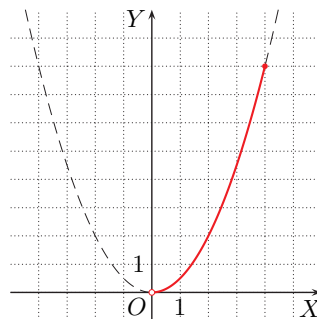
Bok kwadratu o przekątnej x ma długość $\frac{x}{\sqrt{2}}$, zatem pole kwadratu można opisać funkcją:

$$P(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

przy czym muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{Długość przekątnej jest dodatnia.} \\ 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 8\sqrt{2} & \text{Warunek na obwód kwadratu.} \end{cases}$$

Stąd $x \in (0; 4)$, czyli dziedziną funkcji P jest $D = (0; 4)$. Wykresem funkcji P jest zaznaczony kolorem czerwonym fragment paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.

**Przykład 2**

Dany jest prostokąt o bokach długości x i $x - 4$ oraz obwodzie mniejszym od 12. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x . Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres. Jakie są długości boków tego prostokąta, jeśli jego pole jest równe 2?

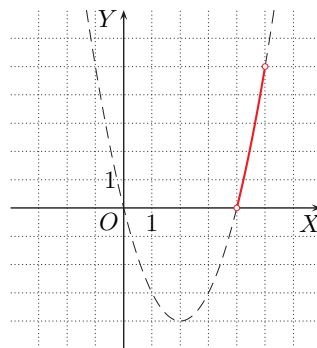
Pole prostokąta można opisać funkcją:

$$P(x) = x(x - 4) = x^2 - 4x$$

przy czym muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{Długości boków wyrażone są} \\ x - 4 > 0 & \text{liczbami dodatnimi.} \\ 2x + 2(x - 4) < 12 & \text{Warunek na obwód prostokąta.} \end{cases}$$

Stąd $x \in (4; 5)$, czyli dziedziną funkcji P jest $D = (4; 5)$. Wykresem funkcji P jest fragment paraboli $y = x^2 - 4x$ zaznaczony kolorem czerwonym.



Wyznaczamy długości boków prostokąta, którego pole jest równe 2:

$$x^2 - 4x = 2$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 24, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$$

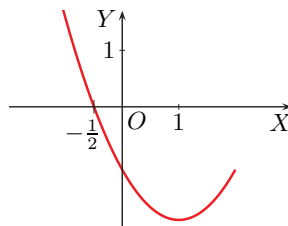
$$x_1 = \frac{4-2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6} \notin (4; 5), \quad x_2 = \frac{4+2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6} \in (4; 5)$$

Odpowiedź: Pole równe 2 ma prostokąt o bokach $\sqrt{6} + 2$ i $\sqrt{6} - 2$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Przedział $(-\infty; -2)$ jest zbiorem wartości funkcji:
A. $y = x^2 + 2$, **B.** $y = x^2 - 2$, **C.** $y = -x^2 + 2$, **D.** $y = -x^2 - 2$.
- Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = x^2 + 4x$ jest punkt:
A. $W(-2, -4)$, **B.** $W(2, -4)$, **C.** $W(-4, 0)$, **D.** $W(4, 0)$.
- Pierwiastkami równania $2x^2 + bx + c = 0$ są liczby -3 i 4 , zatem:
A. $b = -1$ i $c = -12$, **C.** $b = 2$ i $c = -24$,
B. $b = -2$ i $c = -24$, **D.** $b = 1$ i $c = -12$.
- Jeśli punkt $W(-1, -9)$ jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 + bx + c$, to nierówność $x^2 + bx + c \leq 0$ zachodzi dla:
A. $x \in \langle 3; 6 \rangle$, **B.** $x \in \langle -4; 2 \rangle$, **C.** $x \in \langle -3; 3 \rangle$, **D.** $x \in \langle -9; -1 \rangle$.
- Największa wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ jest równa:
A. 16, **B.** 4, **C.** 3, **D.** 0.
- Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie:
A. $x^2 - 4x + 5 = 0$, **C.** $x^2 - 5x + 6 = 0$,
B. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$, **D.** $x^2 + 5x - 6 = 0$.
- Liczba pierwiastków równania $8x^4 + 5x^2 - 12 = 0$ jest równa:
A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.
- Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, -2)$. Drugim miejscem zerowym funkcji, której wykres jest tą parabolą, jest liczba:
A. $1\frac{1}{2}$, **B.** 2, **C.** $2\frac{1}{2}$, **D.** 3.
- Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2 . Obwód tej działki jest równy:
A. 64 m, **B.** 68 m, **C.** 72 m, **D.** 76 m.
- Boki prostokąta P_1 o wymiarach 4 cm i 8 cm wydłużono o x cm i uzyskano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2 . Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą:
A. $3\sqrt{10}$ cm, **B.** $4\sqrt{10}$ cm, **C.** $3\sqrt{13}$ cm, **D.** $4\sqrt{13}$ cm.



- $y = x^2 + 4x =$
 $= (x^2 + 4x + 4) - 4 =$
 $= (x + 2)^2 - 4$
 więc wierzchołkiem paraboli jest $W(-2, -4)$.
- $2(x + 3)(x - 4) =$
 $= 2(x^2 - x - 12) =$
 $= 2x^2 - 2x - 24$
 zatem $b = -2$, $c = -24$
- $y = (x + 1)^2 - 9 = x^2 + 2x - 8$
 $(x + 4)(x - 2) \leq 0$
- $x_w = -1 \notin \langle 1; 2 \rangle$,
 $f(1) = 6$, $f(2) = 16$
- A.** $\Delta < 0$
B. $\Delta = 0$
C. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
D. $x_1 = -6$, $x_2 = 1$
- $x^2 = t > 0$
 $8t^2 + 5t - 12 = 0$
 $t_1 = \frac{-5 - \sqrt{409}}{16} < 0$
 $t_2 = \frac{-5 + \sqrt{409}}{16} > 0$
- $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_w = 1$,
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_w$,
 zatem $x_2 = 2\frac{1}{2}$
- Niech x oznacza krótszy bok działki. Wówczas:
 $x(x + 2) = 288$, $x > 0$
 $x^2 + 2x - 288 = 0$
 $(x + 18)(x - 16) = 0$
 $x = 16$
 $Ob = 68 \text{ [m]}$

10. $(4 + x)(8 + x) = 96$ i $x > 0$

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$(x + 16)(x - 4) = 0$$

$$x = 4$$

Długość przekątnej prostokąta P_2 :

$$\sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13} \text{ [cm]}$$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

1. $(x^2 - 7)(x^2 + 4) = 0$
 $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$

2. $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$

3. $a + 3b = 12$, czyli $a = 12 - 3b$
 $a \cdot b = (12 - 3b)b = -3(b - 4)b$
 Największa wartość dla
 $b_w = \frac{4+0}{2} = 2$ wynosi 12.

4. $(x^2 - 9)(x^2 - 5) = 0$
 $x = -3$ lub $x = 3$ lub
 $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$
 $2x^2 - 3x - 5 > 0$
 $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
 Zatem $x = -3$ lub $x = -\sqrt{5}$
 lub $x = 3$.

5. $x^2 + 4x + 3 = 2x + 2$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $(x + 1)^2 = 0$
 $x = -1$

$x^2 + 4x + 3 = -2x - 5$
 $x^2 + 6x + 8 = 0$
 $(x + 4)(x + 2) = 0$
 $x = -4$ lub $x = -2$

Z parabolą więcej punktów wspólnych ma prosta l .

6. $z = 2x$
 i $y = 18 - x - z = 18 - 3x$
 Pole trapezu:
 $P(x) = \frac{1}{2}(x + z)y = \frac{9}{2}x(6 - x)$,
 gdzie $x \in (0; 6)$
 Największą wartość funkcja P
 osiąga dla $x_w = \frac{6+0}{2} = 3$, stąd
 $y = 9$, $z = 6$.
 Długość czwartego boku tra-
 pezu: $u \geq y = 9$, więc
 obwód trapezu:
 $x + y + z + u =$
 $= 18 + u \geq 18 + 9 = 27$

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma liczby a i potrojonej liczby b wynosi 12. Oblicz największą wartość iloczynu liczb a i b .

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (5 pkt)

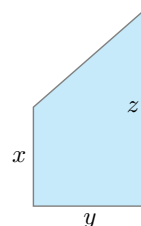
Wskaż te rozwiązania równania $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$, które spełniają warunek $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

Zadanie 5 (4 pkt)

Dane są proste $k: y = 2x + 2$ i $l: y = -2x - 5$. Sprawdź, która z tych prostych ma więcej punktów wspólnych z parabolą $y = x^2 + 4x + 3$.

D Zadanie 6 (5 pkt)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest nie mniejszy od 27.

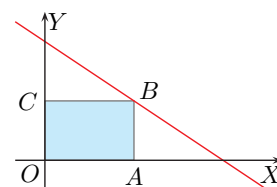


Zadanie 7 (5 pkt)

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 48 cm. Oblicz największe pole powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu.

Zadanie 8 (5 pkt)

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



- a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A .
 b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

7. Niech a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość prostopadłościanu.

$$8a + 4h = 48, \text{ czyli } h = 12 - 2a$$

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$P(a) = 2a^2 + 4ah = -6a^2 + 48a,$$

gdzie $a \in (0; 6)$

Największą wartość funkcji P jest osiągnięta dla $a_w = \frac{-48}{-12} = 4$ i wynosi
 $P(4) = 96 \text{ [cm}^2\text{]}.$

8. a) Długości boków prostokąta:
 x_0 i $y_0 = -\frac{2}{3}x_0 + 4$

Pole prostokąta:

$$P(x_0) = x_0 \cdot y_0 = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0,$$

gdzie $x_0 \in (0; 6)$

b) Największą wartość funkcji P jest osiągnięta dla $x_0 = 3$, stąd $y_0 = 2$.

Współrzędne wierzchołków:

$$O(0, 0), A(3, 0), B(3, 2) \text{ i } C(0, 2)$$