

5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest bardzo ważny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę podczas ustalania stopnia trudności trasy narciarskiej.

Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei. Przy badaniu kąta nachylenia terenu wykorzystuje się pojęcie kąta nachylenia prostej.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a .

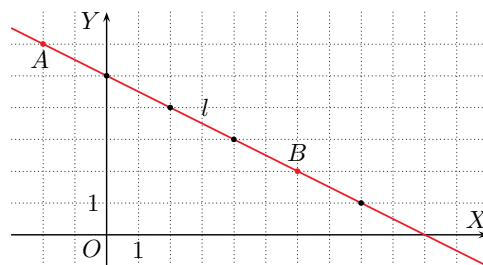


Punkty kratowe należące do prostej

Punkty kratowe to punkty, których obie współrzędne są całkowite.

Punkty $A(-2, 6)$ i $B(6, 2)$ należą do prostej l . Do odcinka AB należą również następujące punkty kratowe: $(0, 5)$, $(2, 4)$ i $(4, 3)$.

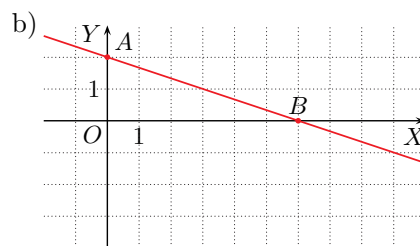
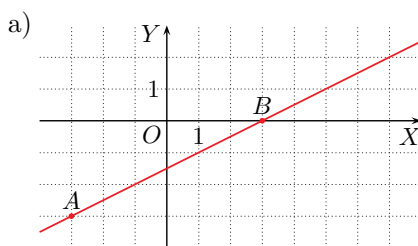
Punkt $(8, 1)$ jest punktem kratowym, który należy do prostej l , ale nie należy do odcinka AB .



Odpowiedzi do zadań

1. a) punkty należące do odcinka AB : $(-3, -3)$, $(-1, -2)$, $(1, -1)$, $(3, 0)$, punkty należące do prostej l , ale nienależące do odcinka AB : $(-5, -4)$, $(5, 1)$, $(7, 2)$
- b) punkty należące do odcinka AB : $(0, 2)$, $(3, 1)$, $(6, 0)$, punkty należące do prostej l , ale nienależące do odcinka AB : $(9, -1)$, $(12, -2)$, $(15, -3)$

1. Podaj współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do odcinka AB oraz dowolnych trzech punktów kratowych należących do prostej l , ale nienależących do odcinka AB .



Przykład 1

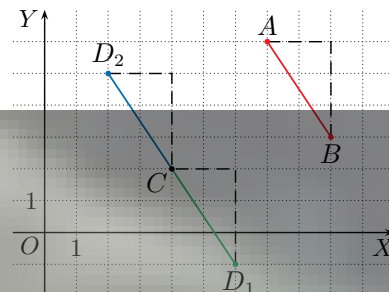
Dane są punkty $A(7, 6)$, $B(9, 3)$ i $C(4, 2)$. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby odcinki AB i CD były równoległe oraz miały równe długości.

W układzie współrzędnych rysujemy odcinek AB i zaznaczamy punkt C .

Zauważmy, że aby przenieść się z punktu A do punktu B , przesuwamy się o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół.

Zatem warunki zadania są spełnione przez dwa punkty:

$$D_1(6, -1) \text{ i } D_2(2, 5)$$



2. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby odcinki AB i CD były równoległe oraz miały równe długości.

a) $A(-2, 2)$, $B(2, 4)$, $C(3, 1)$ b) $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$, $C(4, 2)$

2. a) $A(-2, 2)$, $B(2, 4) = (-2 + 4, 2 + 2)$, $C(3, 1)$, zatem $D(3 + 4, 1 + 2) = (7, 3)$ lub $D(3 - 4, 1 - 2) = (-1, -1)$.
- b) $A(-1, 4)$, $B(2, 1) = (-1 + 3, 4 - 3)$, $C(4, 2)$, zatem $D(4 + 3, 2 - 3) = (7, -1)$ lub $D(4 - 3, 2 + 3) = (1, 5)$.

5.1. Wykres funkcji liniowej

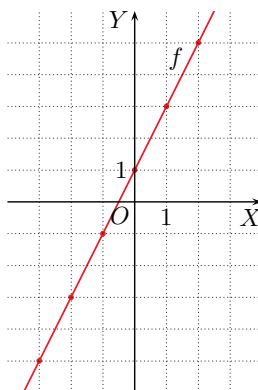
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5

Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f .



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

Definicja

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$. Powiemy też krótko: prosta $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

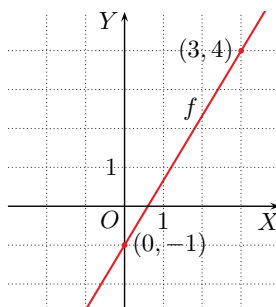
Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

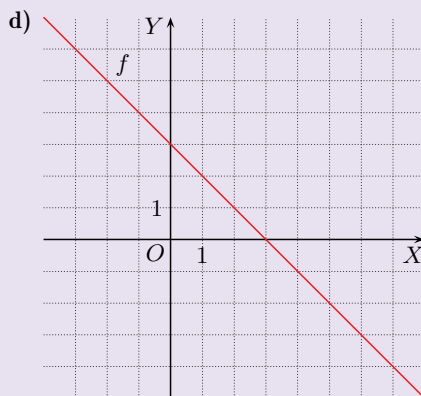
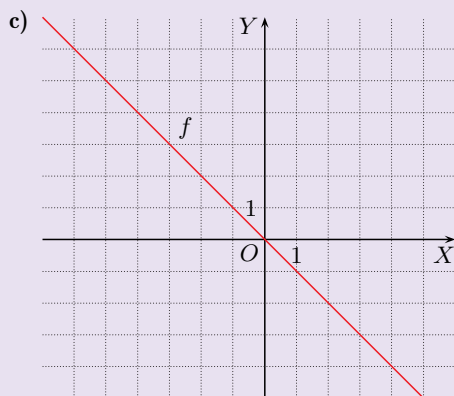
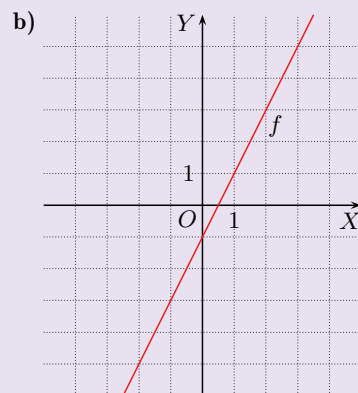
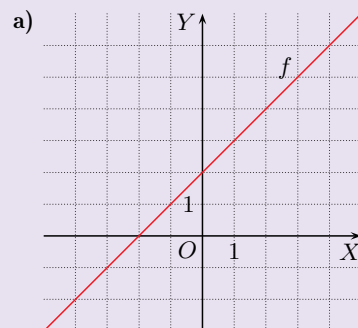
Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f .



Uczeń:

- rozpoznaje funkcję liniową, mając dany jej wzór, oraz szkicuje jej wykres,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji liniowej,
- wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia podane warunki, np. jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez dany punkt,
- stosuje własności funkcji liniowej do obliczania pól wielokątów.

Ćwiczenie 1



Multibook

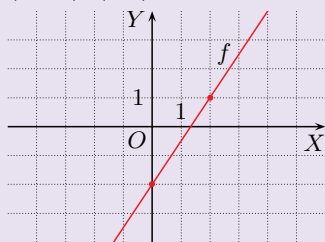
- Wykresy funkcji liniowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

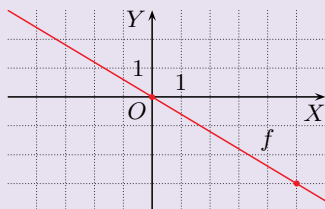
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

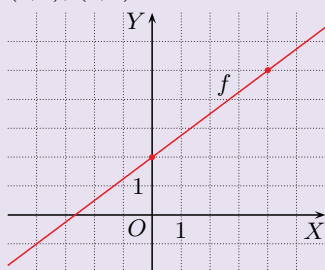
a) $(0, -2), (2, 1)$



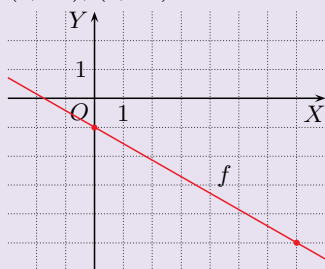
b) $(0, 0), (5, -3)$



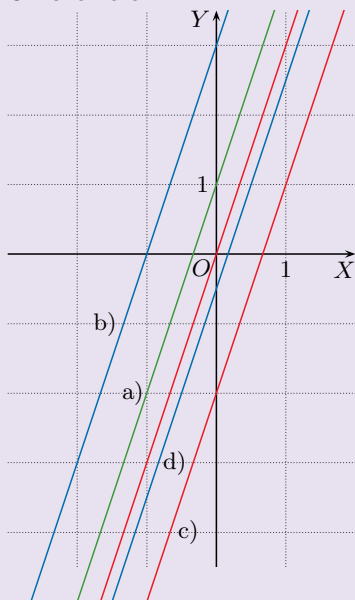
c) $(0, 2), (4, 5)$



d) $(0, -1), (7, -5)$



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty kratowe należące do wykresu funkcji f . Naskicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$

b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$

d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

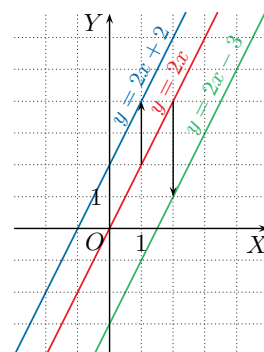
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a liczbę b – **wyrazem wolnym**.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY .

Po przesunięciu prostej $y = 2x$:

- o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$,
- o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.



Ćwiczenie 3

Naskicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f .

a) $f(x) = 3x + 1$

c) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = 3x + 3$

d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Zauważmy, że wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi. Proste, które są wykresami funkcji liniowych o różnych współczynnikach kierunkowych, nie są równoległe.

Twierdzenie

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$

$l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$

$l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$

$l_7: y = 1 - 2x$

$l_2: y = 2x - 3$

$l_4: y = 4 + 2x$

$l_6: y = 2x - \sqrt{3}$

$l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 4

$l_2 \parallel l_4 \parallel l_6, l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$

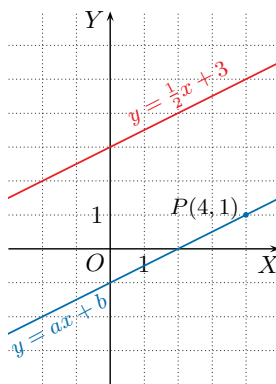
Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4, 1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Szukana funkcja liniowa ma wzór postaci $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$.

Aby obliczyć współczynnik b , podstawiamy współrzędne punktu $P(4, 1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Ćwiczenie 5

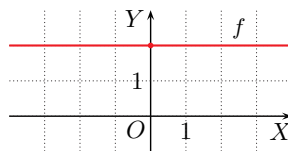
Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P .

- a) $l: y = 2x - 4$, $P(3, 7)$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 3$, $P(3, -4)$
b) $l: y = -3x + 5$, $P(-\frac{1}{3}, 2)$ d) $l: y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$, $P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 5

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbb{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$ o współczynnikach:

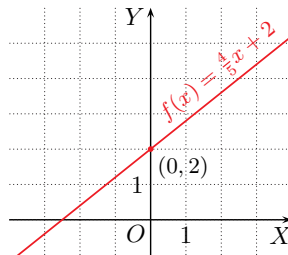
- a) $a = 0$, $b = 1$, b) $a = 0$, $b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0$, $b = 0$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY .

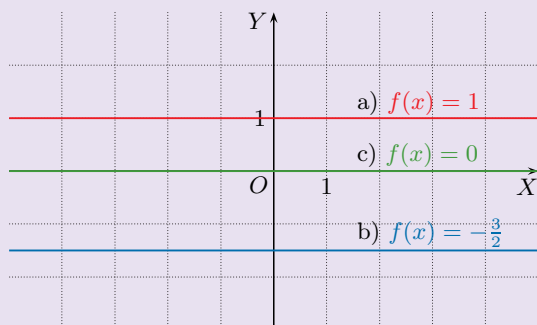
Przykład 6

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY . Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 5

- a) $y = 2x + 1$
b) $y = -3x + 1$
c) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
d) $y = -\frac{3}{5}x + 1$

Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Ćwiczenie 7

a) $y = 3x + 6$

b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 8

a) $f_1(1) = 4$,

$f_2(1) = 3$,

$f_3(1) = 2\frac{1}{2}$,

$f_4(1) = 6$

b) $f_1 - l_1$, $f_2 - l_2$,

$f_3 - l_3$, $f_4 - l_4$

Ćwiczenie 7

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P .

a) $l: y = 3x - 4$, $P(0, 6)$

b) $l: y = -\frac{3}{4}x + 1$, $P(0, -\frac{3}{2})$

Ćwiczenie 8

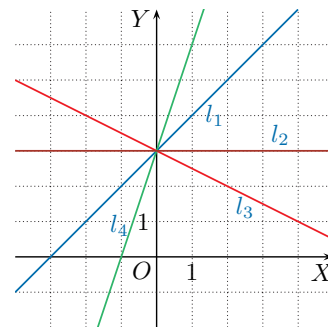
Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$f_1(x) = x + 3$, $f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3$,

$f_2(x) = 3$, $f_4(x) = 3x + 3$.

a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



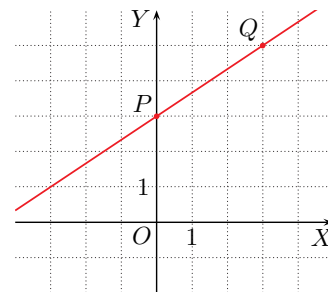
Czy wiesz, że...

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

Przykład 7

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.

Szukana funkcja ma wzór postaci $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a , podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i dostajemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji to: $y = \frac{2}{3}x + 3$.



Ćwiczenie 9

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q . Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$

b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Ćwiczenie 9

a) $2 = 4a + 5$, czyli $a = -\frac{3}{4}$.

$y = -\frac{3}{4}x + 5$

$-\frac{3}{4} \cdot 8 + 5 = -1$

Punkt R należy do wykresu funkcji.

b) $-9 = -3a - 4$, czyli $a = \frac{5}{3}$.

$y = \frac{5}{3}x - 4$

$\frac{5}{3} \cdot 6 - 4 = 6 \neq 5$

Punkt R nie należy do wykresu funkcji.

Zadania

1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \dots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0, 2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0, -1)$.

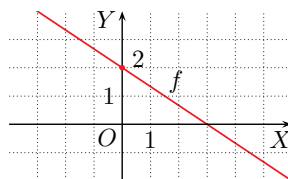
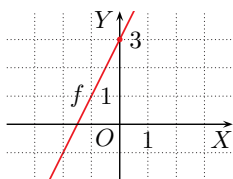
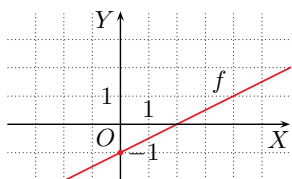
$$\begin{array}{llll} l_1: y = 3x + 2 & l_3: y = -1 & l_5: y = -2x + 2 & l_7: y = \frac{1}{2}x - 1 \\ l_2: y = 3x - 1 & l_4: y = 2 & l_6: y = -2x - 1 & l_8: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

2. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym równaniu i przechodząca przez punkt P .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 4x - 2, P(0, 5) & \text{c) } y = -\frac{4}{3}x + 6, P(-6, 5) \\ \text{b) } y = -3x + 4, P(1, 8) & \text{d) } y = \sqrt{3}x - 3, P(2\sqrt{3}, 6) \end{array}$$

3. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f , jeśli należy do niego punkt P .

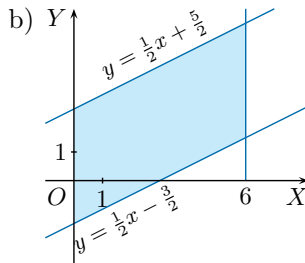
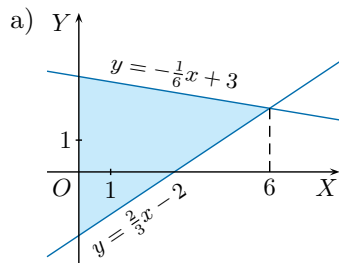
$$\text{a) } P(8, 3), Q(16, 9) \quad \text{b) } P(-6, -9), Q(7, 19) \quad \text{c) } P(9, -4), Q(8, -3\frac{1}{3})$$



4. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0, 4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

$$\text{a) } P(2, 6) \quad \text{b) } P(-6, 1) \quad \text{c) } P(5, -11) \quad \text{d) } P(\frac{3}{4}, -2)$$

5. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz pole zacieniowanej figury.



- D 6. Wykaż, że punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem o obu współrzędnych wymiernych należącym do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x$.

- D 7. Wykaż, że do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ nie należy żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

Wskazówka. Przeprowadź dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

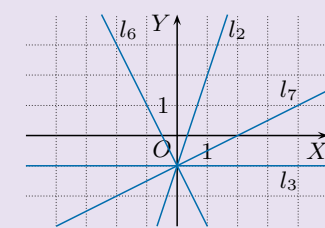
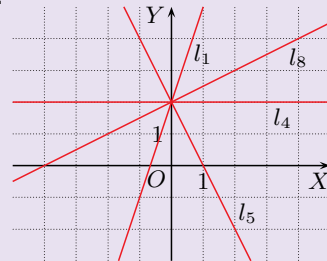
7. Załóżmy przeciwnie, że istnieją liczby wymierne w_1 i w_2 takie, że punkt (w_1, w_2) należy do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt{2}w_1 - \sqrt{3} \quad /^2 \\ w_2^2 &= 2w_1^2 - 2\sqrt{6}w_1 + 3 \\ 2\sqrt{6}w_1 &= 2w_1^2 - w_2^2 + 3 \\ \sqrt{6} &= \frac{2w_1^2 - w_2^2 + 3}{2w_1} \end{aligned}$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą niewymierną, a prawa wymierną. Otrzymana sprzeczność oznacza, że założenie było fałszywe, czyli do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ nie należy żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

Odpowiedzi do zadań

1.



2. a) $y = 4x + 5$
 b) $y = -3x + 11$
 c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$
 d) $y = \sqrt{3}x$
3. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, Q nie należy
 b) $f(x) = 2x + 3$, Q nie należy
 c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$, Q należy
4. a) $y = x + 4$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 4$
 c) $y = -3x + 4$
 d) $y = -8x + 4$
5. a) $P = \frac{1}{2}(2 + 3) \cdot 6 = 15$
 b) $P = 6(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = 24$

6. Jeżeli $x \in \mathbb{Q}$ i $x \neq 0$, to:

$$\sqrt{2}x \notin \mathbb{Q}$$

Jeżeli $x = 0$, to $\sqrt{2}x = 0$.

Zatem $(0, 0)$ jest jedynym punktem o obu współrzędnych wymiernych należącym do wykresu tej funkcji.

Uczeń:

- wyznacza miejsce zerowe i określa monotoniczność funkcji liniowej danej wzorem,
- wyznacza współrzędne punktów, w których wykres funkcji liniowej przecina osie układu współrzędnych, oraz określa, w których ćwiartkach układu znajduje się wykres,
- określa monotoniczność funkcji liniowej w zależności od parametru,
- rozpoznaje wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}y &= ax + b \\ 0 &= ax + b \\ ax &= -b \quad : a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x = \frac{3}{2}$
- b) $x = -\frac{4}{3}$
- c) $x = -6$
- d) $x = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) $a = 0$ i $b \neq 0$
- b) $a = b = 0$

5.2. Własności funkcji liniowej

Miejsce zerowe funkcji liniowej

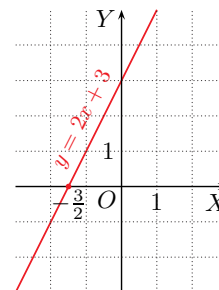
Przykład 1

Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej $y = 2x + 3$ (wykres obok).

Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji, rozwiążemy równanie:

$$\begin{aligned}2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Zatem miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$.



D Ćwiczenie 1

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

- a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a , b funkcja $f(x) = ax + b$:

- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 2

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).

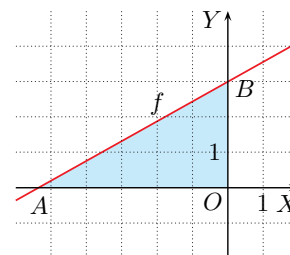
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f :

$$\frac{9}{16}x + 3 = 0 \text{ dla } x = -\frac{16}{3}. \text{ Zatem } |OA| = \frac{16}{3}.$$

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Symbolem $|OA|$ oznaczamy długość odcinka OA .

Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji f .

- a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$ d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

Ćwiczenie 4

Punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych oraz pole trójkąta:

- a) $(0, 4)$, $(-2, 0)$; $P = 4$
- b) $(0, 2)$, $(6, 0)$; $P = 6$
- c) $(0, -4)$, $(-8, 0)$; $P = 16$
- d) $(0, -5)$, $(3, 0)$; $P = 7,5$

Multibook

- Monotoniczność funkcji liniowej
- Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas mamy:

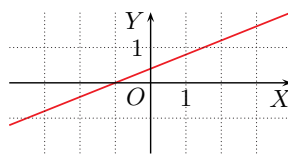
$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ax_1 &< ax_2 \\ax_1 + b &< ax_2 + b\end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę $a > 0$, zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

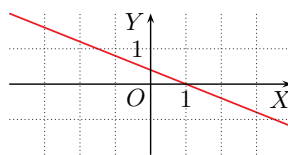
Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

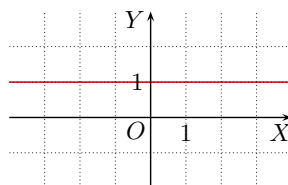
Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stale tę samą wartość.

Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.

Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX .

Ćwiczenie 5

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a < 0 \\ax_1 &> ax_2 \\ax_1 + b &> ax_2 + b\end{aligned}$$

Oznacza to, że $f(x_1) > f(x_2)$, czyli f jest funkcją malejącą.

Ćwiczenie 6

- a) rosnąca
- b) malejąca
- c) rosnąca
- d) stała

Ćwiczenie 7

- a) $a < 0$ i $b > 0$
- b) $a > 0$ i $b < 0$
- c) $a < 0$ i $b < 0$

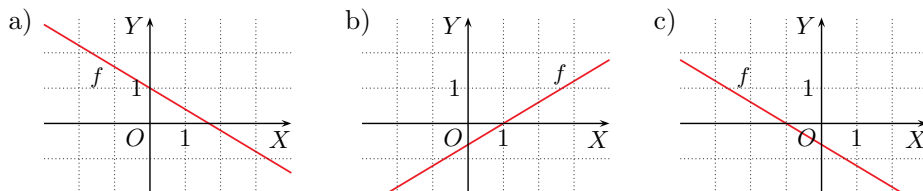
Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$
- b) $f(x) = 8 - 3x$
- c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$
- d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .

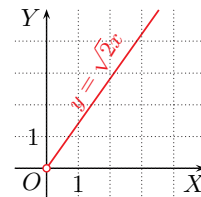


■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności** prostej.

Przykład 3

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



Ćwiczenie 8

- a) wprost proporcjonalne, $a = \frac{1}{3}Ob$
- b) odwrotnie proporcjonalne, $a = \frac{2P}{b}$
- c) wprost proporcjonalne, $Ob = 2\pi r$
- d) odwrotnie proporcjonalne, $d_1 = \frac{2P}{d_2}$

Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód.
- b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P .
- c) Obwód i promień okręgu.
- d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie uzupełnij poniższą tabelę. Naskicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	3	6

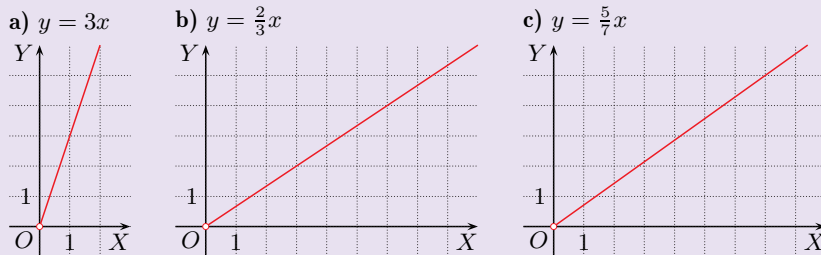
b)

x	1	1,8	3
y	$\frac{2}{3}$	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	7	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	10

Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 10

a) Samochód jedzie autostradą ze stałą prędkością. W półtorej godziny pokonał 165 km. Oblicz odległość, jaką ten samochód pokona w dwie i pół godziny.

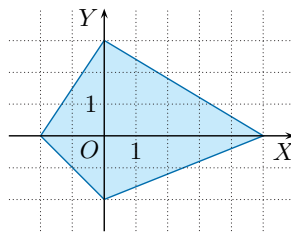
b) Samochód jadący ze stałą prędkością znalazł się 60 km od punktu początkowego o godzinie 13.00. O godzinie 15.24 był już od tego punktu oddalony o 252 km. Jak daleko od punktu początkowego był ten samochód o 16.00?

Dla ruchu ze stałą prędkością v przebyta droga s jest wprost proporcjonalna do czasu t :

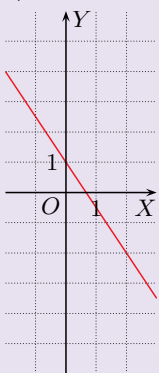
$$s = v \cdot t$$

Zadania

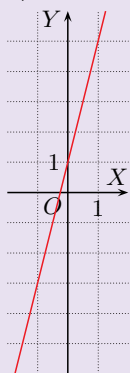
- Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta będąca wykresem funkcji f ?
 - $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$
 - $f(x) = 4x + 1$
 - $f(x) = -8x - 3$
 - $f(x) = 12x - 1$
 - $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 3$
 - $f(x) = -5$
- Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$ dla:
 - $m = \sqrt{3} - 2$,
 - $m = 5 - 2\sqrt{5}$,
 - $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
 - $f(x) = (5 - m)x$
 - $f(x) = (1 + 5m)x$
 - $f(x) = (|m| - 1)x$
- Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez podane punkty.
 - $(-8, 6)$ i $(4, 12)$
 - $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$
 - $(6, \sqrt{5})$ i $(10, \sqrt{5})$
 - $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$
 - $(-1, \frac{2}{3})$ i $(2, \frac{7}{12})$
 - $(\frac{2}{3}, -8)$ i $(\frac{3}{5}, -7)$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt:
 - $(0, 4)$ i która przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x < -6$,
 - $(0, -\frac{1}{2})$ i która przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x > 2$,
 - $(0, -2)$ i która przyjmuje wartości nieujemne tylko dla $x \leq -4$.
- Wyznacz wzory funkcji liniowych, w których wykresach zawierają się:
 - boki przedstawionego obok czworokąta,
 - boki czworokąta o wierzchołkach:
 $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.



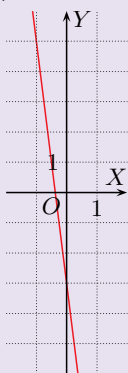
1. a) I, II, IV



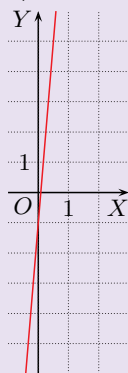
b) I, II, III



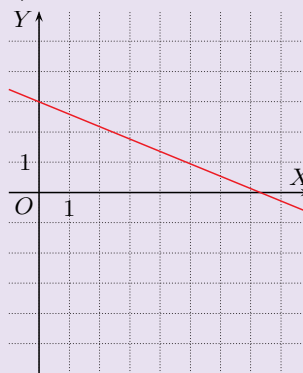
c) II, III, IV



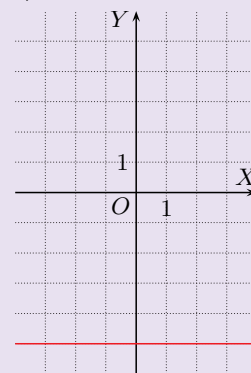
d) I, III, IV



e) I, II, IV



f) III, IV



Ćwiczenie 10

a) $v = \frac{165}{1,5} = 110$ [km/h]

Dla $t = 2,5$ h otrzymujemy
 $s = 2,5 \cdot 110 = 275$ [km].

b) $v = \frac{252 - 60}{15 \cdot \frac{24}{60} - 13} = \frac{192}{2\frac{2}{5}} = 80$ [km/h]

Od godziny 13.00 do 16.00 samochód przejechał:

$$3 \cdot 80 = 240 \text{ [km]}$$

czyli o godzinie 16.00 był oddalony od punktu początkowego o $60 + 240 = 300$ [km].

Odpowiedzi do zadań

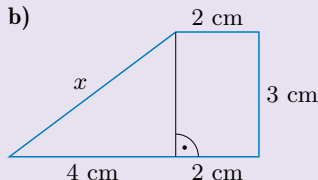
- malejąca
 - b), c) rosnąca
- rosnąca dla $m < 5$, stała dla $m = 5$, malejąca dla $m > 5$
 - rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$, stała dla $m = -\frac{1}{5}$, malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
 - rosnąca dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, stała dla $m \in \{-1, 1\}$, malejąca dla $m \in (-1; 1)$
- a), d) rosnąca
 - b), e), f) malejąca
 - c) stała
- $y = \frac{2}{3}x + 4$
 - $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
 - $y = -\frac{1}{2}x - 2$
- $y = \frac{2}{5}x - 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 3$, $y = \frac{3}{2}x + 3$, $y = -x - 2$
 - $y = -\frac{3}{2}x - 72$, $y = 2x - 72$, $y = -4x + 144$, $y = 3x + 144$

7. a) $y = -x + 3$
 b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$
 8. a) $y = 6x$
 b) $y = \frac{2}{3}x$
 c) $y = \frac{4}{5}x$

10. a) y – długość dłuższego boku działki

$$\frac{y}{6} = \frac{15}{2,5}, \text{ stąd } y = 36 \text{ [m]}$$

$$Ob = 2(15 + 36) = 102 \text{ [m]}$$



b) Ob_1 – obwód działki na planie,
 Ob_2 – obwód działki w rzeczywistości

$$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ [cm]}$$

$$Ob_1 = 6 + 3 + 2 + 5 = 16 \text{ [cm]}$$

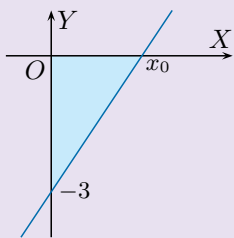
$Ob_2 = \frac{16}{2,5} \cdot 15 = 96 \text{ [m]}$, więc potrzeba 94 m bieżących siatki, czyli na ogrodzenie działki wystarczy 95 m bieżących siatki.

11. $\frac{x}{2000} = \frac{x+2}{3000}$, stąd:
 $3000x = 2000(x+2)$
 $x = 4$

Zatem:

$$k = \frac{4}{2000} = \frac{1}{500} = 1 : 500$$

12. Miejscem zerowym funkcji $y = ax - 3$ jest liczba $x_0 = \frac{3}{a}$, zatem pole trójkąta $P = \frac{9}{2|a|}$.



a) $6 = \frac{9}{2|a|}$, stąd $a = -\frac{3}{4}$
 lub $a = \frac{3}{4}$, czyli szukana prosta ma równanie:

$$y = -\frac{3}{4}x - 3 \text{ lub } y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$b) y = -\frac{3}{7}x - 3 \text{ lub } y = \frac{3}{7}x - 3$$

$$c) y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - 3 \text{ lub }$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$$

7. Wykres pewnej funkcji liniowej i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt równoramienny. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że:

- a) przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x > 3$,
 b) do jej wykresu należy punkt $(0, -4)$.

8. Podaj wzór proporcjonalności prostej, do której wykresu należy punkt:

- a) $(2\frac{1}{2}, 15)$, b) $(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})$, c) $(3\frac{1}{2}, 2\frac{4}{5})$.

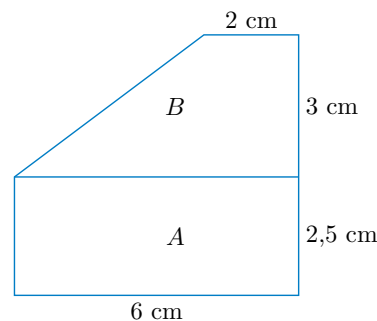
- D** 9. a) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi,

b) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego pole nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi (mimo że wraz ze wzrostem długości boku kwadratu rośnie jego pole).

10. Przykładem wielkości wprost proporcjonalnych są odległość na mapie (planie) i odpowiadająca jej odległość w terenie. Na rysunku poniżej przedstawiono plan sąsiadujących ze sobą działek budowlanych A i B.

a) Działka A ma kształt prostokąta, którego krótszy bok ma długość 15 m. Oblicz obwód tej działki.

b) Działka B ma kształt trapezu prostokątnego. Czy na jej ogrodzenie wystarczy 95 m bieżących siatki, jeśli brama ma mieć szerokość 2 m?



11. Prostokątną działkę budowlaną o wymiarach $20 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ przedstawiono na planie w postaci prostokąta o wymiarach $x \text{ cm} \times (x+2) \text{ cm}$. Wyznacz skalę tego planu.

Skala mapy (planu) to stosunek odległości na mapie do odpowiadających im odległości rzeczywistych.

12. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres, przecinający oś OY w punkcie $(0, -3)$, i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt o polu równym:

- a) 6, b) $10\frac{1}{2}$, c) $9\sqrt{2}$.

13. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres, przecinający oś OX w punkcie $(\frac{3}{2}, 0)$, i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt o polu równym:

- a) 6, b) $4\frac{1}{2}$, c) $3\sqrt{2}$.

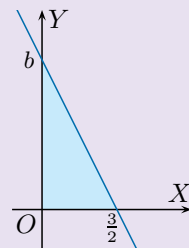
13. Pole trójkąta jest równe: $P = \frac{3}{4}|b|$, gdzie $(0, b)$ jest punktem przecięcia wykresu funkcji z osią OY .

a) $\frac{3}{4}|b| = 6$, stąd $b = -8$ lub $b = 8$.

Po podstawieniu współrzędnych punktu $(\frac{3}{2}, 0)$ do wzorów funkcji: $y = ax - 8$ i $y = ax + 8$ otrzymujemy: $y = \frac{16}{3}x - 8$ lub $y = -\frac{16}{3}x + 8$.

b) $y = -4x + 6$ lub $y = 4x - 6$

c) $y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + 4\sqrt{2}$ lub $y = \frac{8\sqrt{2}}{3}x - 4\sqrt{2}$



5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch różnych punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1

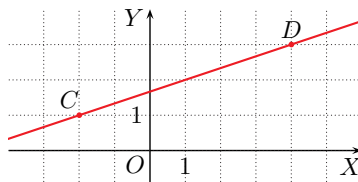
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów } C \text{ i } D \\ \text{do równania } y = ax + b. \end{array}$$

Powyższy układ spełniony jest przez parę liczb $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.



Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

- a) $C(-1, -5)$, $D(3, 3)$ b) $C(-2, 4)$, $D(8, -1)$ c) $C(-3, -3)$, $D(6, 3)$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy punkty A , B , C są współliniowe.

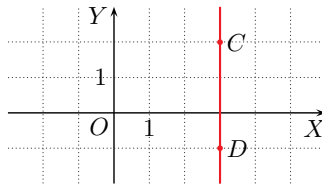
- a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$ c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$ d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.

Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.



Ćwiczenie 2

- a) Prosta AB : $y = \frac{1}{6}x + 1$

Podstawiamy współrzędne punktu C do równania prostej AB :

$\frac{1}{6} \cdot 12 + 1 = 3$, czyli punkty A , B i C są współliniowe.

- b) Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x + 7$

$-\frac{1}{2} \cdot (-2) + 7 = 8$, czyli punkty A , B i C są współliniowe.

- c) Prosta AB : $y = -2x + 2$

$-2 \cdot 5 + 2 = -8 \neq -7$, czyli punkty A , B i C nie są współliniowe.

- d) Prosta AB : $y = 5$

$5 \neq 2\sqrt{6}$, czyli punkty A , B i C nie są współliniowe.

Uczeń:

- podaje równanie kierunkowe i ogólne prostej,
- zamienia równanie ogólne prostej, która nie jest równoległa do osi OY , na równanie w postaci kierunkowej (i odwrotnie),
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
- rysuje prostą opisaną równaniem ogólnym,
- wyznacza wartości parametrów, dla których prosta spełnia określone warunki,
- wyznacza wartości parametrów, dla których proste dane równaniem w postaci ogólnej są równoległe.

Ćwiczenie 1

- a) $y = 2x - 3$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$

Komentarz

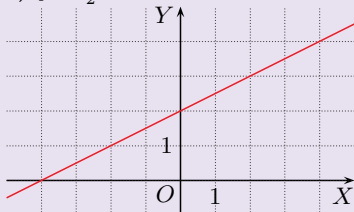
Warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 2 i powrócić do definicji funkcji, aby ułatwić im odpowiedź na pytanie: „Dlaczego prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji?”.

Ćwiczenie 3

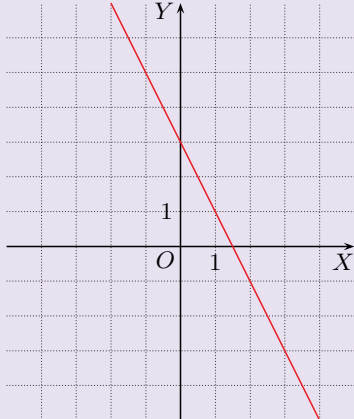
- a) $x = -3$, nie jest
- b) $y = -3$, jest
- c) $x = 8$, nie jest

Ćwiczenie 4

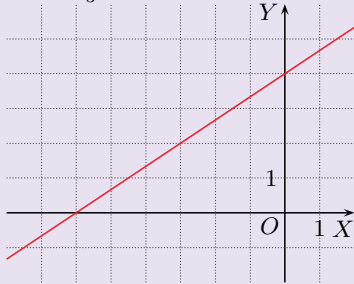
a) $y = \frac{1}{2}x + 2$



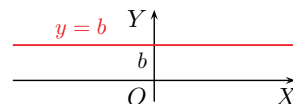
b) $y = -2x + 3$



c) $y = \frac{2}{3}x + 4$



Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 3

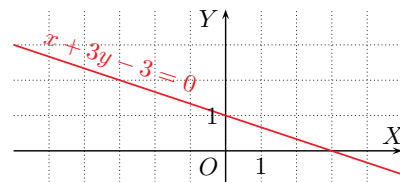
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a) $C(-3, 4)$, $D(-3, 6)$
- b) $C(-5, -3)$, $D(7, -3)$
- c) $C(8, -2)$, $D(8, 6)$

Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

- a) $-x + 2y - 4 = 0$
- b) $6x + 3y - 9 = 0$
- c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

- I. $2x + y - 4 = 0$
- II. $4x + 2y - 8 = 0$
- III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

Ćwiczenie 5

Które równania opisują tę samą prostą?

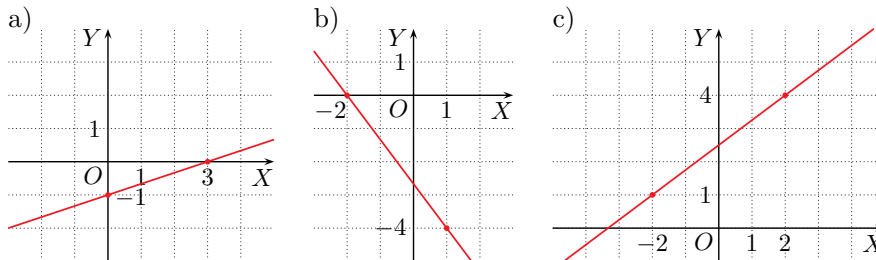
- $l: -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$
- $n: 9x - 12y + 12 = 0$
- $p: 3x - 4y + 4 = 0$
- $m: -3x + 4y + 4 = 0$
- $o: 6x - 8y + 12 = 0$
- $r: -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

Ćwiczenie 5

Równania: l, n, p, r opisują prostą $y = \frac{3}{4}x + 1$.

Zadania

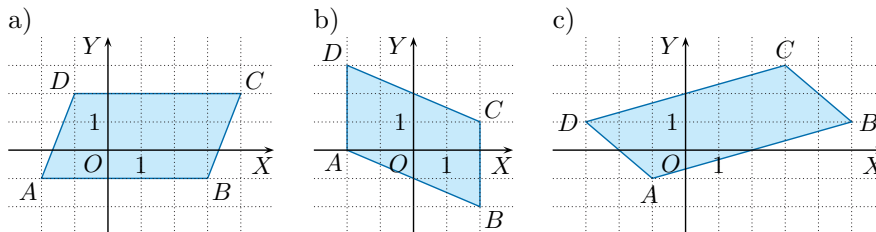
1. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B(-3, \frac{8}{3})$ należy do tej prostej?



2. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $2x - y + 2 = 0$ c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$ e) $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$
 b) $10x + 5y - 5 = 0$ d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$ f) $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

3. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.



4. Dla jakiej wartości parametru m prosta o podanym równaniu jest równoległa do prostej $4x + 3y + 7 = 0$?

a) $mx + 6y - 1 = 0$ c) $(m - \frac{1}{2})x - \frac{1}{2}y = 0$ e) $x + my + 9 = 0$
 b) $(2m + 1)x - y = 0$ d) $\frac{m}{6}x - \frac{3}{4}y + 3 = 0$ f) $\frac{1}{3}x - 2my = 0$

5. Uzasadnij podane poniżej twierdzenie.

Jeśli równania ogólne $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ opisują tę samą prostą oraz A_2 , B_2 i C_2 są różne od zera, to $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

3. a) $AB: y + 1 = 0$, $DC: y - 2 = 0$, $AD: 3x - y + 5 = 0$, $BC: 3x - y - 10 = 0$
 b) $AB: x + 2y + 2 = 0$, $BC: x - 2 = 0$, $CD: x + 2y - 4 = 0$, $AD: x + 2 = 0$
 c) $AB: x - 3y - 2 = 0$, $BC: x + y - 6 = 0$, $CD: x - 3y + 6 = 0$, $AD: x + y + 2 = 0$

5. Przekształcamy równania ogólne do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \text{ oraz } y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

Równania opisują tę samą prostą, zatem:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \text{ oraz } -\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ oraz } \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Ostatecznie otrzymujemy $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x - 3y - 3 = 0$,
nie należą

b) $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $4x + 3y + 8 = 0$,

nie należą

c) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$,
 $3x - 4y + 10 = 0$,

A należy, B nie należy

2. a) $(0, 2)$, $(-1, 0)$

b) $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

c) $(0, 4)$, $(-\frac{4}{3}, 0)$

d) $(0, -3)$, $(\frac{9}{2}, 0)$

e) $(0, -4)$, $(16, 0)$

f) $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

4. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

a) $m = 8$

b) $m = -\frac{7}{6}$

c) $m = -\frac{1}{6}$

d) $m = -6$

e) $m = \frac{3}{4}$

f) $m = -\frac{1}{8}$

6. a) $m = -\frac{3}{5}$

b) $m = -3$ lub $m = 3$

7. a) Równanie prostej AB :

$$y = -2x - 4$$

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej AB z prostą $y = 2x + m$:

$$2x + m = -2x - 4$$

$$x = -\frac{1}{4}m - 1$$

Musi zachodzić warunek:

$$x \in [-2; 0]$$

czyli:

$$-2 \leq -\frac{1}{4}m - 1 \leq 0$$

Zatem $m \in [-4; 4]$.

b) Równanie prostej AB :

$$y = 2$$

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej AB z prostą $y = 2x + m$:

$$2x + m = 2$$

$$x = 1 - \frac{1}{2}m$$

Musi zachodzić warunek:

$$x \in [0; 6]$$

czyli:

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2}m \leq 6$$

Zatem $m \in [-10; 2]$.

9. Zauważmy, że $ax = \frac{x}{\frac{1}{a}}$, czyli:

$$y = \frac{x}{\frac{1}{a}} + b$$

Przekształcamy powyższe równanie:

$$-\frac{x}{\frac{1}{a}} + y = b / : b$$

$$-\frac{x}{\frac{1}{a}} + \frac{y}{b} = 1$$

10. a) $(8, 0)$, $(0, 6)$, $y = -\frac{3}{4}x + 6$

b) $(5, 0)$, $(0, -3)$, $y = \frac{3}{5}x - 3$

c) $(-1, 0)$, $(0, 4)$, $y = 4x + 4$

11. a) $y = -3x + 9$, malejąca

b) $y = \frac{1}{2}x + 2$, rosnąca

c) $y = \frac{1}{4}x - 2$, rosnąca

12. a) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$

b) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

6. Podstawy trapezu są zawarte w prostych l_1 i l_2 . Korzystając z podanego obok twierdzenia, wyznacz wartości parametru m .

a) $l_1: -6x + 4y + 3 = 0$,

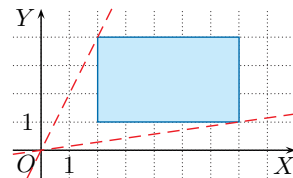
$$l_2: mx + (m+1)y - 4 = 0$$

b) $l_1: 9x + 8y + 1 = 0$, $l_2: -m^2x + (1 - m^2)y + 4 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru m prosta $2x - y + m = 0$ ma punkt wspólny z odcinkiem AB ?

a) $A(-2, 0)$, $B(0, -4)$ b) $A(0, 2)$, $B(6, 2)$

8. Ile punktów wspólnych, w zależności od parametru m , ma prosta $mx - y = 0$ z bokami narysowanego obok prostokąta?



D 9. Uzasadnij, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to równanie prostej $y = ax + b$ można zapisać w postaci:

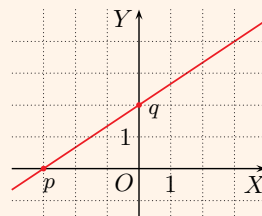
$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$$

Czy wiesz, że...

Równanie prostej przecinającej oś OX w punkcie $(p, 0)$, gdzie $p \neq 0$, i oś OY w punkcie $(0, q)$, gdzie $q \neq 0$, można zapisać w postaci:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Jest to **równanie odcinkowe prostej**.



10. Wyznacz punkty, w których prosta o podanym równaniu odcinkowym przecina osie układu współrzędnych. Narysuj tę prostą w układzie współrzędnych i wyznacz jej równanie kierunkowe.

a) $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$

c) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$

11. Dane jest równanie prostej w postaci odcinkowej. Zapisz to równanie w postaci kierunkowej i określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest ta prosta.

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$

b) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$

c) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} = 1$

12. Wyznacz równanie odcinkowe prostej o podanym równaniu kierunkowym.

a) $y = 2x + 6$

b) $y = \frac{2}{3}x - 4$

c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

8. Prosta $y = mx$ przechodzi przez punkt $(2, 4)$ dla $m = 2$ ($y = 2x$), a przez punkt $(7, 1)$ dla $m = \frac{1}{7}$ ($y = \frac{1}{7}x$). Zatem ta prosta ma:

– 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty; \frac{1}{7}) \cup (2; \infty)$,

– 1 punkt wspólny dla $m \in \{\frac{1}{7}, 2\}$,

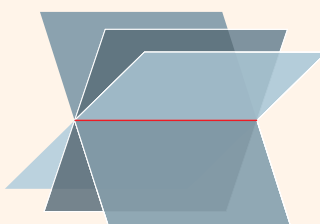
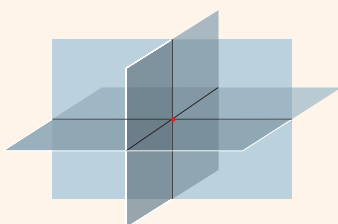
– 2 punkty wspólne dla $m \in (\frac{1}{7}; 2)$.

Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych

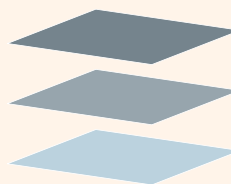
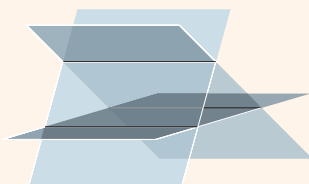
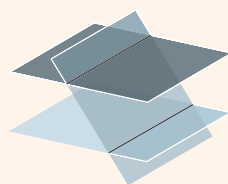
Równanie $Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$ lub $C \neq 0$, opisuje płaszczyznę w przestrzeni z trójwymiarowym układem współrzędnych.

Rozwiązując układ trzech takich równań, szukamy punktów wspólnych trzech płaszczyzn.

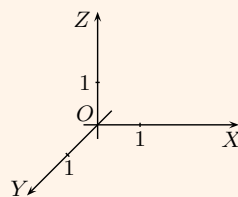
Na pierwszym rysunku poniżej przedstawiono przypadek, gdy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, na drugim – gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a płaszczyzny się nie pokrywają.



Na poniższych rysunkach przedstawiono przykładowe sytuacje, gdy układ równań jest sprzeczny.



- Wyznacz współrzędne punktu wspólnego płaszczyzn P_1 , P_2 i P_3 .
 - $P_1: 2x - y + z - 4 = 0$, $P_2: 4x + y - z - 2 = 0$, $P_3: 3x - 3y + z - 1 = 0$
 - $P_1: x + 2y + z - 7 = 0$, $P_2: 2x + y - z - 2 = 0$, $P_3: x + 2y - z - 9 = 0$
- Podaj równanie płaszczyzny zawierającej osie układu współrzędnych:
 - OX i OY ,
 - OX i OZ ,
 - OY i OZ .
- Wyznacz równanie płaszczyzny, do której należą punkty A , B i C .
 - $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, $C(1, 0, 1)$
 - $A(2, 0, 2)$, $B(1, 3, 5)$, $C(3, 2, 9)$
- Podaj równania płaszczyzn, w których są zawarte ściany prostopadłościanu o wierzchołkach:
 $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 0, 3)$, $(1, 2, 3)$



Komentarz

Równanie płaszczyzny w trójwymiarowym układzie współrzędnych możemy zapisać w postaci ogólnej:

$$Ax + By + Cz = 1$$

- $(1, 2, 4)$
 - $(-2, 5, -1)$
- $z = 0$
 - $y = 0$
 - $x = 0$
- Równanie płaszczyzny zapisujemy w postaci ogólnej
 $ax + by + cz = 1$
 Podstawiamy współrzędne punktów i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b - 2c = 1 \\ a + c = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:
 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$.

Równanie płaszczyzny:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 1$$

$$2x + y + z = 3$$

$$\begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ a + 3b + 5c = 1 \\ 3a + 2b + 9c = 1 \end{cases}$$

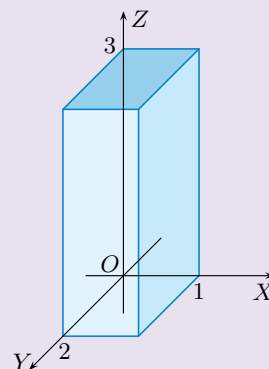
Rozwiązujemy układ równań:
 $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{4}$

Równanie płaszczyzny:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z = 1$$

$$3x + 2y - z = 4$$

4.



Równania płaszczyzn: $x = 0$,
 $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$,
 $z = 3$

Uczeń:

- oblicza współczynnik kierunkowy prostej, mając dane współrzędne dwóch punktów należących do tej prostej,
- szkicuje prostą, wykorzystując interpretację współczynnika kierunkowego,
- odczytuje wartość współczynnika kierunkowego, mając dany wykres; w przypadku wykresu zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnym podaje wartość prędkości,
- wyprowadza równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym przechodzącej przez dany punkt.

Ćwiczenie 1

- a) $a = \frac{12-7}{9-3} = \frac{5}{6}$
b) $a = \frac{-5-5}{-7-3} = 1$
c) $a = \frac{8+2}{6-12} = -\frac{5}{3}$

Ćwiczenie 2

- $a_{PQ} = \frac{3}{2}$
a) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest
b) $a_{RS} = 1$, nie jest
c) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest

5.4. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

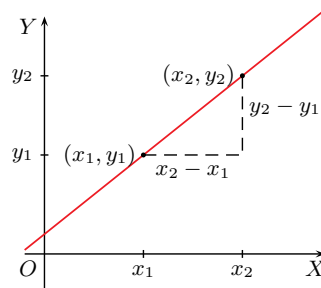
$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{Uwaga: } x_1 \neq x_2$$



Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B .

- a) $A(3, 7)$, $B(9, 12)$ b) $A(3, 5)$, $B(-7, -5)$ c) $A(12, -2)$, $B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S ?

- a) $R(0, 6)$, $S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4)$, $S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2})$, $S(8, 2)$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

Ćwiczenie 3

$$a_{AB} = \frac{1}{3} = a_{CD}, \quad a_{BC} = -2 = a_{DA}$$

Proste AB , CD oraz BC , DA są parami równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Multibook

- Wyznaczanie współczynnika kierunkowego prostej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

Generator
testów i sprawdzianów

Interpretacja geometryczna współczynnika kierunkowego

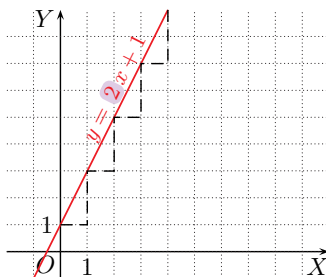
Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”.

Przykład 2

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = 2x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = x + 2$

b) $y = 3x + 2$

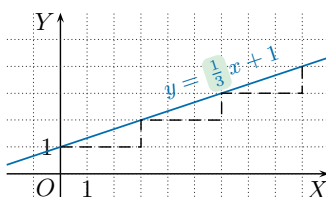
c) $y = 4x + 2$

Przykład 3

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o $\frac{1}{3}$ jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 1 jednostkę).



Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$

b) $y = \frac{1}{4}x + 2$

c) $y = \frac{1}{7}x + 2$

Przykład 4

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

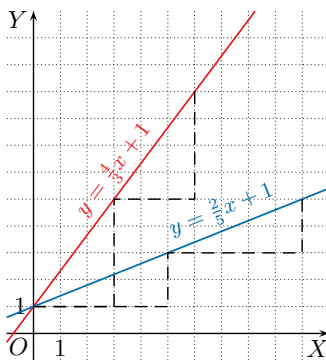
$$y = \frac{4}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o $\frac{4}{3}$ jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 4 jednostki).

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{2}{5}x + 1$$

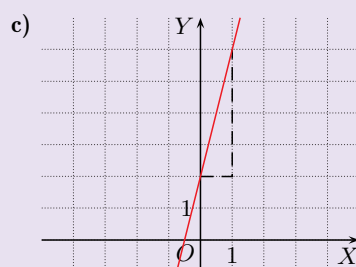
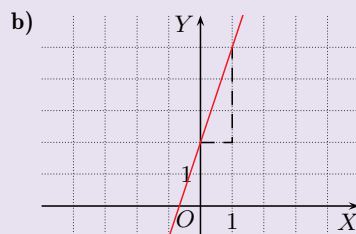
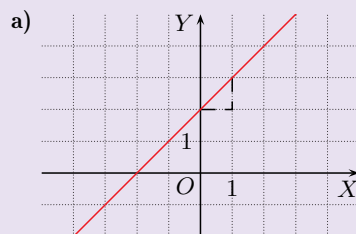
wzrostowi argumentu o 5 jednostek odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



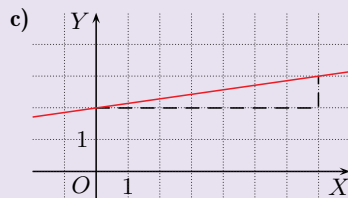
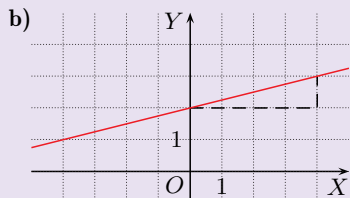
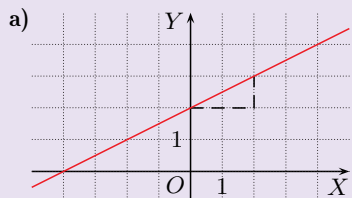
Komentarz

Warto uświadomić uczniom, że wykres funkcji liniowej łatwiej jest narysować, kiedy rozumie się, co oznacza współczynnik kierunkowy. Wystarczy wtedy znać współrzędne jednego punktu należącego do wykresu (np. punktu przecięcia z osią OY).

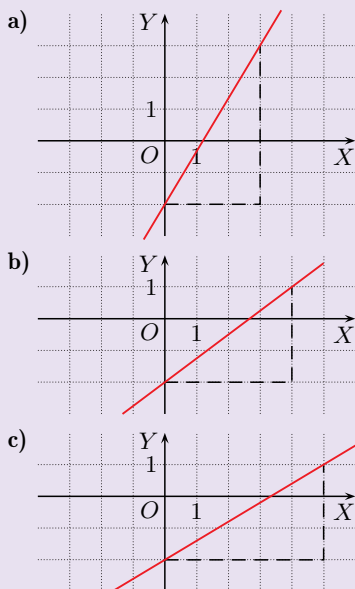
Ćwiczenie 4



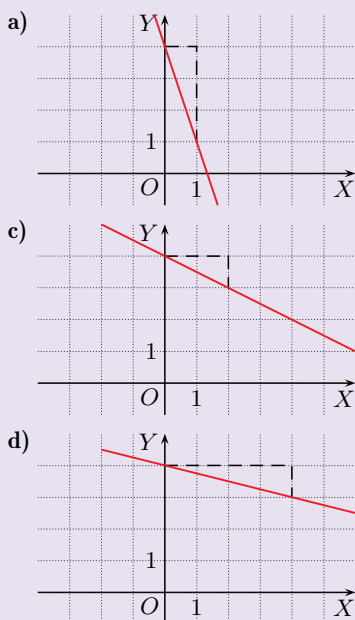
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



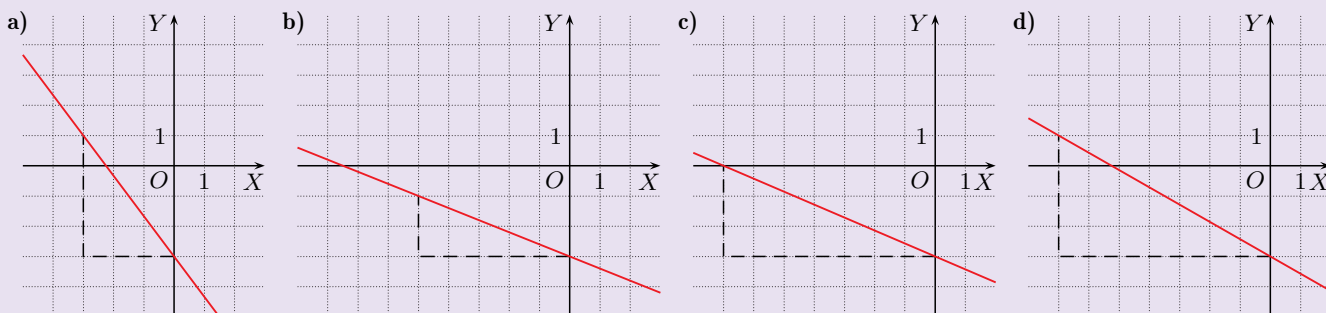
Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 9

- a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = -3x - 1$
c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

Ćwiczenie 8



Ćwiczenie 6

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{5}{3}x - 2$

b) $y = \frac{3}{4}x - 2$

c) $y = \frac{3}{5}x - 2$

Jeśli prosta będąca wykresem funkcji liniowej ma ujemny współczynnik kierunkowy, to ze wzrostem argumentu funkcji maleje jej wartość.

Przykład 5

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

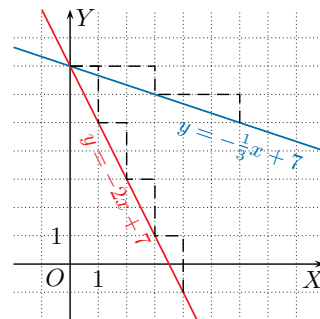
$$y = -2x + 7$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada spadek wartości funkcji o 2 jednostki.

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada spadek wartości funkcji o 1 jednostkę.



Ćwiczenie 7

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = -3x + 4$

b) $y = -4x + 4$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

d) $y = -\frac{1}{4}x + 4$

Ćwiczenie 8

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = -\frac{4}{3}x - 3$

b) $y = -\frac{2}{5}x - 3$

c) $y = -\frac{3}{7}x - 3$

d) $y = -\frac{4}{7}x - 3$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej PQ o równaniu $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów P lub Q . Dla $P(3, -7)$ otrzymujemy: $-7 = -2 \cdot 3 + b$, stąd $b = -1$. Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

Ćwiczenie 9

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

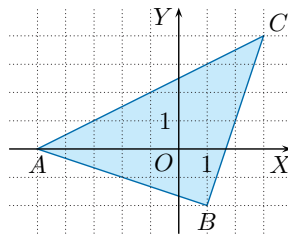
a) $P(4, 5)$, $Q(-4, 9)$

b) $P(4, -13)$, $Q(2, -7)$

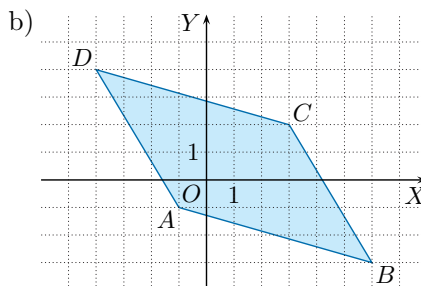
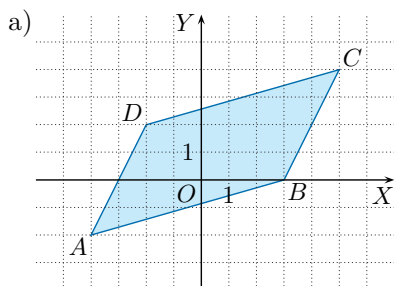
c) $P(3, 3)$, $Q(1, \frac{7}{3})$

Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających jego boki.
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie $A(-4, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$, $D(-5, 4)$.
- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .
 - $P(3, 4)$, $Q(7, 6)$
 - $P(-2, 7)$, $Q(2, -1)$
 - $P(\frac{1}{3}, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, -1)$
 - $P(3, \frac{7}{3})$, $Q(2, \frac{1}{3})$
 - $P(-2, -6)$, $Q(8, -6)$
 - $P(\sqrt{3}, 4)$, $Q(3\sqrt{3}, 10)$



- D** 4. Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że jest on równoległobokiem.



- D** 5. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem i nie jest równoległobokiem.
- $P(0, -5)$, $Q(9, 1)$, $R(6, 11)$, $S(-6, 3)$
 - $P(-8, 5)$, $Q(-6, -2)$, $R(4, -6)$, $S(7, -1)$
- Dane są punkty A , B , C i D . Wyznacz wartość parametru m , dla której proste AB i CD są równoległe.
 - $A(-1, -3)$, $B(9, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, m)$
 - $A(9, m)$, $B(4, -m)$, $C(9, 2)$, $D(3, 6)$
 - Dane są punkty $K(-4, 5)$, $L(4, -1)$, $M(0, 8)$, $N(m, \frac{1}{4}m)$. Wyznacz wartość parametru m , dla której proste KL i MN są równoległe.

Odpowiedzi do zadań

- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: -\frac{1}{3}$, $BC: 3$, $AC: \frac{1}{2}$
- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: \frac{1}{2}$, $BC: -1$, $CD: -\frac{1}{5}$, $AD: -6$
- $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
 - $y = -2x + 3$
 - $y = -12x + 5$
 - $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
 - $y = -6$
 - $y = \sqrt{3}x + 1$
- $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$,
 $AD: y = 2x + 6$,
 $BC: y = 2x - 6$,
 $CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
 zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
 - $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$,
 $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7$,
 $CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
 zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
- PQ i $RS: \frac{2}{3}$, $QR: -\frac{10}{3}$,
 $PS: -\frac{4}{3}$
 $PQ \parallel RS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
 - $PQ: -\frac{7}{2}$, $RS: \frac{5}{3}$,
 QR i $PS: -\frac{2}{5}$
 $QR \parallel PS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
- $a_{AB} = \frac{1}{2} = \frac{m-4}{-4} = a_{CD}$
 $m = 2$
 - $a_{AB} = \frac{2m}{5} = \frac{2}{-3} = a_{CD}$
 $m = -\frac{5}{3}$
- $a_{KL} = \frac{-3}{4} = \frac{\frac{1}{4}m - 8}{m} = a_{MN}$
 $m = 8$

$$8. a_{AC} = \frac{-3-m^2}{6}, a_{BD} = 2$$

$$\frac{-3-m^2}{6} = -2$$

$$m = -3 \text{ lub } m = 3$$

9. Punkt (x_1, y_1) należy do prostej $y = ax + b$, zatem:

$$y_1 = ax_1 + b$$

czyli:

$$b = y_1 - ax_1$$

Podstawiamy b do równania prostej i otrzymujemy:

$$y = ax + y_1 - ax_1$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

10. a) $y - 1 = 2(x - 2)$
 b) $y + 5 = 7(x + 3)$
 c) $y + 9 = -\frac{7}{3}(x - 2)$
 d) $y - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$

8. Dany jest czworokąt o wierzchołkach $A(-2, 4)$, $B(-3, -2)$, $C(4, 1 - m^2)$ i $D(0, 4)$. Współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się przekątne czworokąta $ABCD$, są liczbami przeciwnymi. Wyznacz wartość parametru m .

- D** 9. Udowodnij poniższe twierdzenie.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) można zapisać w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$.

10. Zapisz w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$ równanie prostej równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

a) $l: y = 2x + 8, P(2, 1)$ c) $l: y = -\frac{7}{3}x + 8, P(2, -9)$

b) $l: y = 7x - \frac{1}{4}, P(-3, -5)$ d) $l: y = \sqrt{2}x - 7, P(-1, \sqrt{2})$

- D** 11. Uzasadnij, że jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY , to jej równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

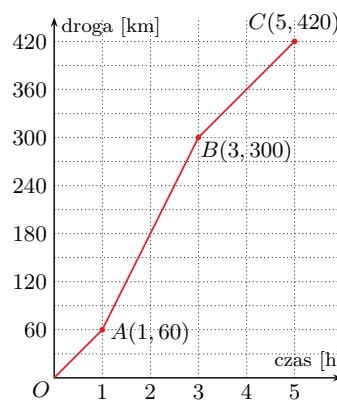
gdzie (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są różnymi punktami należącymi do tej prostej.

12. Przeczytaj podaną w ramce informację.

Na wykresie przedstawiono, jak zmieniła się droga podczas pięciogodzinnej jazdy samochodem. Punkty A i B wykresu odpowiadają początkowi i końcowi jazdy autostradą. Aby obliczyć, z jaką prędkością jechał wtedy samochód, korzystamy ze wzoru $v = \frac{s}{t}$:

$$v = \frac{300 - 60}{3 - 1} = 120 \text{ [km/h]}$$

Zwróć uwagę na to, że prędkość v jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej AB .



- a) Oblicz współczynniki kierunkowe prostych OA i BC . Z jaką średnią prędkością jechał samochód w ciągu pierwszej godziny jazdy, a z jaką w ciągu dwóch ostatnich godzin?

- b) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej OC i podaj jego interpretację.

11. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa różne punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) wyraża się wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Na podstawie twierdzenia z zadania 9. prostą możemy zapisać w postaci:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

czyli $a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ dla $x \neq x_1$.

Zatem $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (przy czym punkt (x_1, y_1) nie spełnia tego równania).

12. a) $a_{OA} = \frac{60 - 0}{1 - 0} = 60 \text{ [km/h]}$

$$a_{BC} = \frac{420 - 300}{5 - 3} = 60 \text{ [km/h]}$$

b) $a_{OC} = \frac{420}{5} = 84 \text{ [km/h]}$

Średnia prędkość samochodu podczas całej trasy wynosiła 84 km/h.

Nachylenie trasy

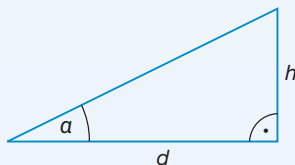
Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej nachyleniu, o tym, jak bardzo ta prosta jest „stroma”.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach.

Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45°, a nachylenie 10% – kątowi około 6°.

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38°.

- 1 Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.

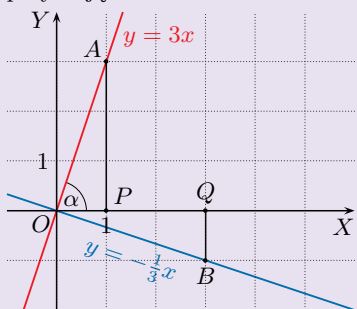


Uczeń:

- podaje warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- wyznacza równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt,
- uzasadnia warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań,
- bada, czy proste dane równaniem w postaci ogólnej są prostopadłe, wyznacza wartości parametrów, dla których takie proste są prostopadłe.

Ćwiczenie 1

a) Punkt $A(1, 3)$ należy do prostej $y = 3x$, a punkt $B(3, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{3}x$. Niech $P(1, 0)$ i $Q(3, 0)$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.



Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$|\sphericalangle OBQ| = \alpha$$

$$|\sphericalangle BOQ| = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ są prostopadłe.

Multibook

- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.5

Generator
testów i sprawdzianów

5.5. Warunek prostopadłości prostych

D Przykład 1

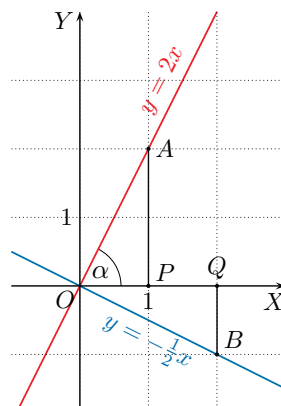
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO mamy: $|\sphericalangle OBQ| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle BOQ| = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AOB| &= |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ \end{aligned}$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Symbolem $|\sphericalangle AOB|$ oznaczamy miarę kąta AOB .

D Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie 1., że podane proste są prostopadłe.

a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \text{ (czyli } a_1 \cdot a_2 = -1\text{)}$$

Przykład 2

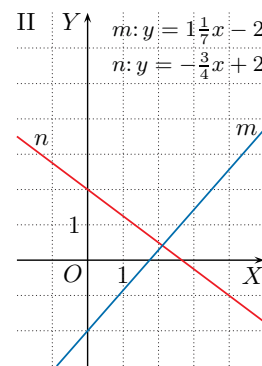
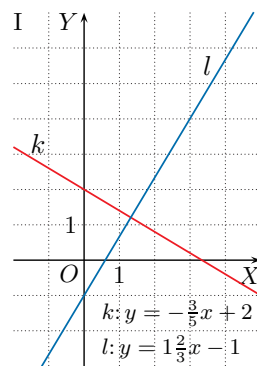
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.



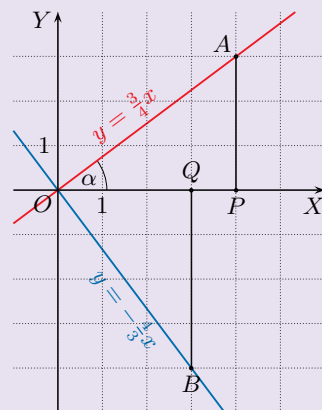
b) Punkt $A(4, 3)$ należy do prostej $y = \frac{3}{4}x$, a punkt $B(3, -4)$ do prostej $y = -\frac{4}{3}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$|\sphericalangle OBQ| = \alpha \text{ oraz } |\sphericalangle BOQ| = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

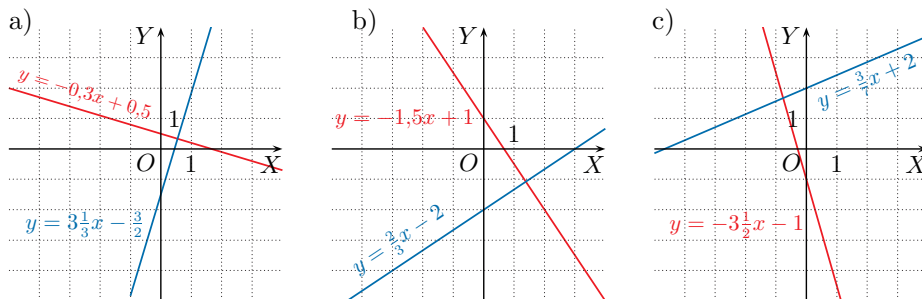
$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



Przykład 3

Prosta k jest prostopadła do prostej $y = \frac{3}{8}x - 4$. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k .

Oznaczmy przez a współczynnik kierunkowy prostej k . Wówczas:

$$a = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

D Ćwiczenie 4

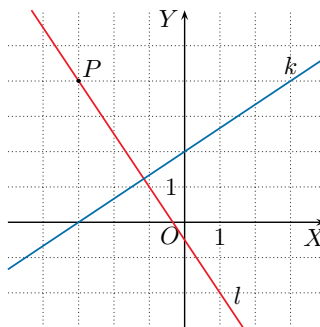
Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych liczb b_1, b_2 prostopadłe są też proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2, P(0, -1)$ b) $y = -0,1x, P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9, P(3, 2)$

Ćwiczenie 1

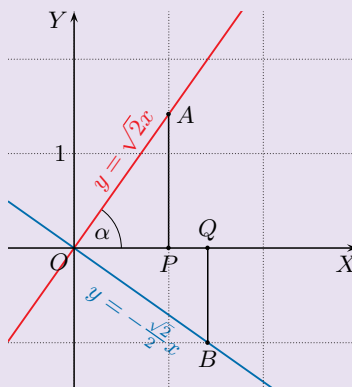
c) Punkt $A(1, \sqrt{2})$ należy do prostej $y = \sqrt{2}x$, a punkt $B(\sqrt{2}, -1)$ do prostej $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $|\angle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$|\angle OBQ| = \alpha \text{ oraz } |\angle BOQ| = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$|\angle AOB| = |\angle AOP| + |\angle BOQ| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

- a) $a_1 = -\frac{3}{10}, a_2 = \frac{10}{3},$
 $a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3} = -1$ – proste są prostopadłe
 b) $a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = \frac{2}{3},$
 $a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$ – proste są prostopadłe
 c) $a_1 = \frac{3}{7}, a_2 = -\frac{7}{2},$
 $a_1 \cdot a_2 = \frac{3}{7} \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{3}{2} \neq -1$ – proste nie są prostopadłe

Ćwiczenie 3

- a) -5
 b) $-\frac{1}{9}$
 c) $\frac{3}{7}$
 d) $-3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Prostopadłość prostych uzależniona jest od współczynników kierunkowych. Z prostopadłości prostych $y = a_1x$ i $y = a_2x$ wynika, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, zatem dla dowolnych współczynników b_1, b_2 proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe.

Ćwiczenie 5

- a) $y = \frac{1}{3}x - 1$
 b) $y = 10x - 1$
 c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$

Przykład 5

Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l .

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

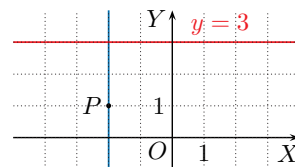
Ćwiczenie 6

- a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
 b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
 c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.

**Ćwiczenie 7**

- a) $x = 6$
 b) $y = -5$
 c) $y = -5$

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = -3$ b) $x = -3$ c) $x = -2\sqrt{3}$

Zadania**Odpowiedzi do zadań**

1. a) $y = \frac{1}{3}x - 3$
 b) $y = -\frac{3}{2}x + 7$
 c) $y = \frac{3}{4}x + 1$
 d) $y = -\frac{2}{7}x$

1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

- a) $l: y = -3x + 1, P(3, -2)$ c) $l: y = -\frac{4}{3}x + 11, P(-4, -2)$
 b) $l: y = \frac{2}{3}x - 3, P(4, 1)$ d) $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3, P(14, -4)$

2. Wyznacz równania prostych AB , AC i BC . Czy trójkąt ABC jest prostokątny?

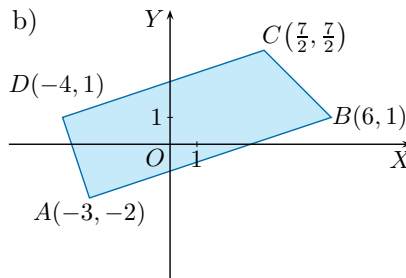
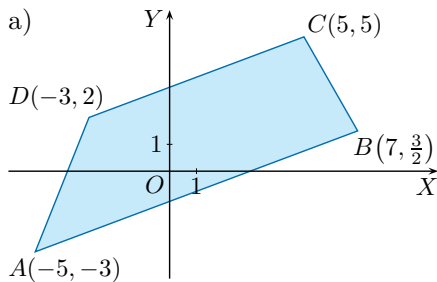
- a) $A(1, 5), B(4, 2), C(7, 5)$ c) $A(-7, -2), B(8, -2), C(-2, 3)$
 b) $A(-2, -1), B(0, -3), C(4, 5)$ d) $A(4\frac{1}{2}, 6), B(-2, -\frac{1}{2}), C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

3. Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.

- a) $A(-2, -6), B(5, -3), C(8, 4)$ b) $A(-1, -2), B(6, -1), D(-6, 3)$

2. a) $AB: y = -x + 6, BC: y = x - 2, AC: y = 5$, jest
 b) $AB: y = -x - 3, BC: y = 2x - 3, AC: y = x + 1$, jest
 c) $AB: y = -2, BC: y = -\frac{1}{2}x + 2, AC: y = x + 5$, nie jest
 d) $AB: y = x + \frac{3}{2}, BC: y = -\frac{1}{2}, AC: x = 4\frac{1}{2}$, jest
 3. a) $AC: y = x - 4, BD: y = -x + 2$
 b) $AC: y = 3x + 1, BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$

- D** 4. Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?



- D** 5. Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- a) $P(-5, 0)$, $Q(-1, -6)$, $R(8, 0)$, $S(4, 6)$
 b) $P(-8, -2)$, $Q(6, -8)$, $R(9, -1)$, $S(-5, 5)$

- D** 6. Punkty $A(0, 0)$ i $C(2, 8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.

7. a) Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek o końcach $B(-5, -5)$, $C(3, -1)$ jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A .
 b) Punkty $A(-5, 4)$ i $C(4, -3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a jego bok AB jest równoległy do osi OY . Prosta $y = -3x - 11$ zawiera jedną z wysokości tego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołka B .

8. Proste prostopadłe l_1 i l_2 przecinają się w punkcie $(2, 4)$, a jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6, 0)$. Wyznacz równania prostych l_1 i l_2 . O ile procent jest większe pole trójkąta ograniczonego prostymi l_1 , l_2 i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi oraz osią OY ?

9. Korzystając z podanej obok informacji, sprawdź, czy proste k i l są prostopadłe.

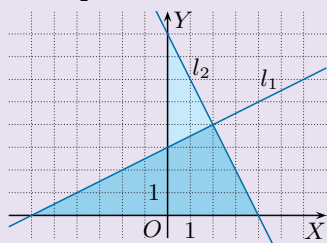
- a) $k: 3x - 4y + 9 = 0$, $l: \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0$
 b) $k: 4x + 6y - 3 = 0$, $l: \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = 0$

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

- 10.** Dla jakich wartości parametru m proste l_1 , l_2 są prostopadłe?

- a) $l_1: x + my - 9 = 0$, $l_2: 0,1x - 0,02y + 3 = 0$
 b) $l_1: 4x - 9y - 7 = 0$, $l_2: (4m^2 - 4)x - m^2y + 17 = 0$

8. $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$, $l_2: y = -2x + 8$



$$P_{OX} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

$$P_{OY} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$

$P_{OX} = 4P_{OY}$, czyli P_{OX} jest większe od P_{OY} o 300%.

9. a) $3 \cdot \frac{2}{3} + (-4) \cdot \frac{1}{2} = 0$, czyli $k \perp l$.

b) $4 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot (-\frac{2}{3}) = -1$, czyli proste nie są prostopadłe.

- 10.** Korzystamy z twierdzenia podanego przy zadaniu 9.

a) $0,1 - 0,02m = 0 \quad / \cdot 50$
 $5 - m = 0$
 $m = 5$

b) $4(4m^2 - 4) + 9m^2 = 0$
 $25m^2 = 16$
 $m = -\frac{4}{5}$ lub $m = \frac{4}{5}$

4. a) $a_{AB} = \frac{4,5}{12} = \frac{3}{8} = a_{DC}$, czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 $a_{BC} = \frac{-3,5}{2} = -\frac{7}{4} \neq -\frac{8}{3}$, czyli trapez nie jest prostokątny.

- b) $a_{AB} = \frac{1}{3} = \frac{2,5}{7,5} = a_{DC}$, czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 $a_{AD} = \frac{3}{-1} = -3$, czyli trapez jest prostokątny.

5. a) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{2}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.

$a_{QR} = a_{SP} = \frac{2}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.
 $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.

Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- b) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{7}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.

$a_{QR} = a_{SP} = \frac{7}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.
 $-\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.

Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

6. Przekątna $AC: y = 4x$ jest prostopadła do przekątnej BD , zatem prostokąt $ABCD$ jest kwadratem. Niech a będzie długością jego boku.

$$|AC| = 2\sqrt{17} = a\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{34}$$

$$Ob = 4\sqrt{34}, P = 34$$

7. a) Punkt B leży na prostej $y = 3x + 10$.

$a_{BC} = \frac{1}{2}$, czyli prosta AC ma postać $y = -2x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu C i wyznaczamy $b: b = 5$.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x + 10 \end{cases}$$

Współrzędne wierzchołka $A: (-1, 7)$.

b) Prosta $AB: x = -5$. Prosta BC jest prostopadła do podanej wysokości, czyli ma postać $y = \frac{1}{3}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu C i wyznaczamy $b: b = -4\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{1}{3}x - 4\frac{1}{3} \end{cases}$$

Współrzędne wierzchołka $A: (-5, -6)$

Uczeń:

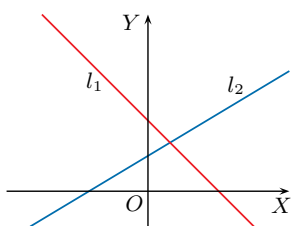
- interpretuje geometrycznie układ równań,
- rozwiązuje układ równań metodą algebraiczną i graficzną,
- wyjaśnia związek między liczbą rozwiązań układu równań a położeniem prostych,
- rozwiązuje układ równań z parametrem oraz określa jego typ w zależności od wartości parametru.

5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

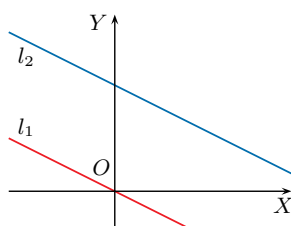
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

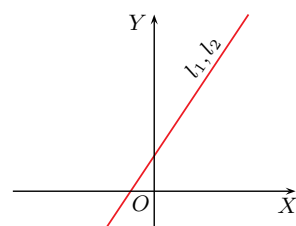
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ spreczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste się pokrywają.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań:

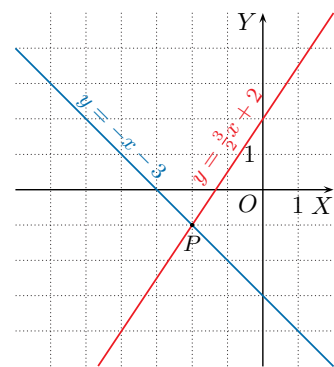
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Przekształcamy równania układu do postaci kierunkowej:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.

Rozwiązaniem układu jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).



Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

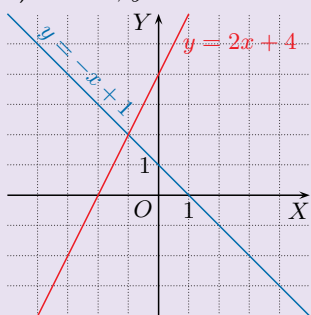
a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$

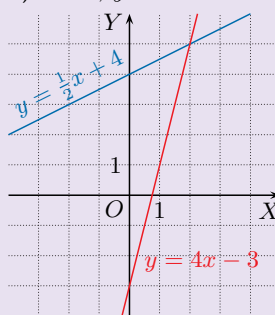
c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 1

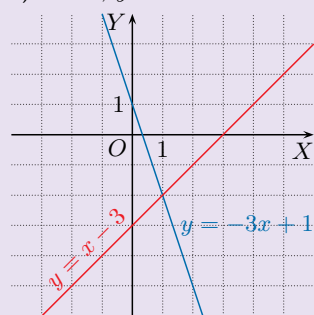
a) $x = -1$, $y = 2$



b) $x = 2$, $y = 5$



c) $x = 1$, $y = -2$



Multibook

- Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.6

Generator
testów i sprawdzianów

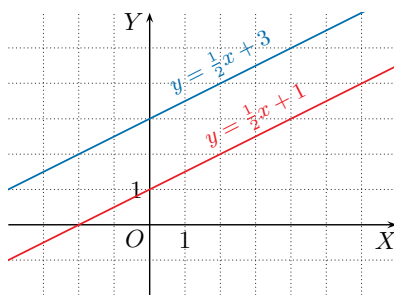
Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.



Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań:

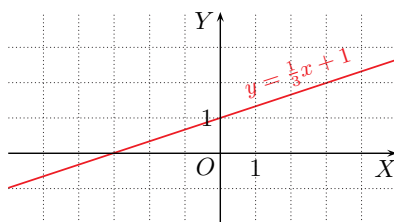
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $(x, \frac{1}{3}x + 1)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, bez rozwiązywania układu równań, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$

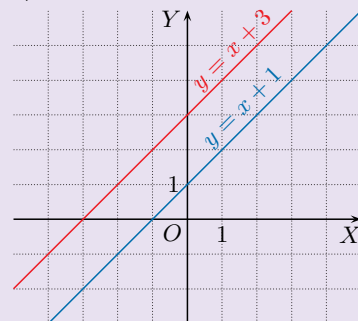
c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

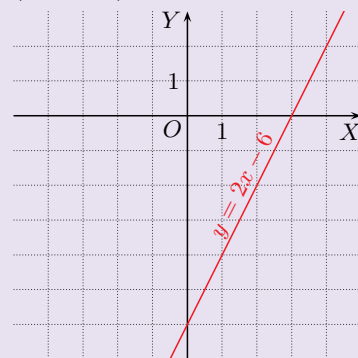
- a) sprzeczny
- b) nieoznaczony
- c) oznaczony

Ćwiczenie 2

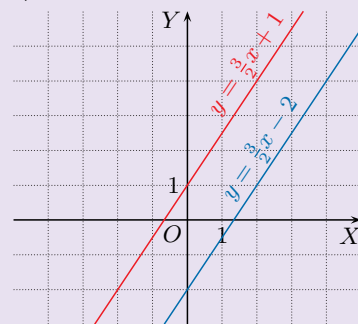
a) Układ sprzeczny



b) Układ nieoznaczony – rozwiązaniami są pary liczb postaci: $(x, 2x - 6)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.



c) Układ sprzeczny



Odpowiedzi do zadań

1. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}$
 $x = 3, y = 4$
- b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\frac{3}{4}x - 3 \end{cases}$
 $x = 4, y = -6$
- c) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 2 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$
 $x = 2, y = 1$
- d) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$
 $x = 1, y = 6$
- e) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$
 Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbb{R}, y = \frac{2}{3}x - 2$
- f) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 3 \\ y = -\frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$
 Układ sprzeczny
2. a) $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$
 $x = 3, y = 0$
- b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$
 $x = 3, y = 4$
- c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$
 $x = 2, y = 0$
- d) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$
 $x = 1, y = 4$
- e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ y = 6x + 3 \end{cases}$
 Układ sprzeczny
- f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$
 Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Zadania

1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases}$

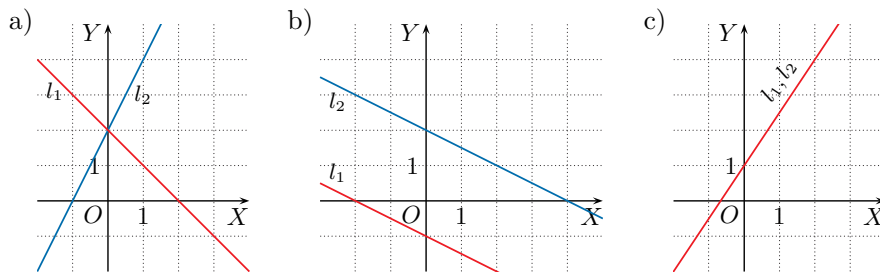
b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases}$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki a_1, a_2, b_1, b_2 , aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Dla jakich wartości parametru k układ równań jest oznaczony, dla jakich nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ kx + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + ky = 4k \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y = -1 \\ x - k^2y = \frac{k}{2} \end{cases}$

3. a) np. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$

4. a) $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$
 b) $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$
 c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne

5. a) oznaczony dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, sprzeczny dla $k = -2$
 b) oznaczony dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, nieoznaczony dla $k = \frac{1}{2}$
 c) oznaczony dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, nieoznaczony dla $k = -\frac{1}{2}$, sprzeczny dla $k = \frac{1}{2}$

6. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

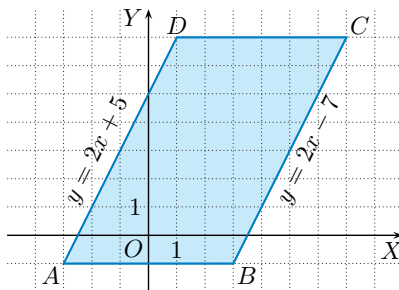
- a) $y = x - 2$, $y = x - 6$, $y + 3 = 0$, $y - 2 = 0$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = -2x - 7$, $y = -2x + 8$
 c) $3x - y = -2$, $3x - y = 4$, $x - 2y = 6$, $x - 2y = -14$

7. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

8. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).

a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP .

b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.



9. Wierzchołki B i C trójkąta prostokątnego ABC są punktami przecięcia prostej $y = -\frac{3}{4}x + 3$ z osiami układu współrzędnych, a przeciwprostokątna AB jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x - 2$. Narysuj ten trójkąt i odczytaj współrzędne wierzchołka A .

- D** 10. Prosta AC dana jest równaniem $y = \frac{3}{4}x - 1$, a wierzchołek B kwadratu $ABCD$ ma współrzędne $(-1, -8)$. Naskicuj proste zawierające przekątne kwadratu i odczytaj współrzędne ich punktu przecięcia. Uzasadnij, że dwa wierzchołki tego kwadratu należą do osi układu współrzędnych.

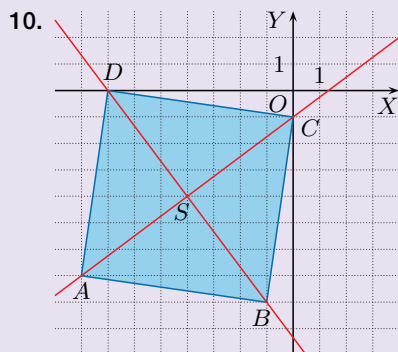
Czy wiesz, że...

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

11. Narysuj trójkąt, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta. Oblicz jego pole, korzystając z podanego powyżej wzoru.

- a) $y = x + 4$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = -2x + 10$
 b) $y = \frac{2}{3}x + 5$, $y = 3x - 2$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$



Punkt przecięcia przekątnych kwadratu: $S(-4, -4)$.

Przekątne kwadratu dzielą się na połowy, zatem:

$$|SA| = |SC| = |SD| = |SB| = 5$$

Punkty A i C mają współrzędne postaci $(x, \frac{3}{4}x - 1)$, czyli:

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(x + 4)^2 + (\frac{3}{4}x - 1 + 4)^2} = 5$$

Stąd otrzymujemy: $A(-8, -7)$ i $C(0, -1)$.

Prosta BD ma równanie $y = -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3}$, zatem $D(x, -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3})$, czyli:

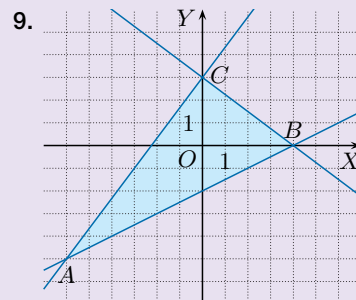
$$|SD| = |SB| = \sqrt{(x + 4)^2 + (-1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3} + 4)^2} = 5$$

Stąd otrzymujemy: $D(-7, 0)$ i $B(-1, -8)$.

6. a) $A(-1, -3)$, $B(3, -3)$, $C(8, 2)$, $D(4, 2)$
 b) $A(-2, -3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(-4, 1)$
 c) $A(-2, -4)$, $B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5})$, $C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5})$, $D(2, 8)$

7. $A(-3, -3)$, $B(6, 0)$, $C(5, 3)$, $D(-1, 1)$

8. a) $P(-1, 3)$,
 $P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$
 b) $Q(3\frac{1}{2}, 0)$,
 $P_{ABQD} = P_{ABCD} - P_{CDQ} =$
 $= 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 27$



Prosta AC jest prostopadła do prostej $y = -\frac{3}{4}x + 3$ i przechodzi przez punkt $C(0, 3)$, ma więc równanie $y = \frac{4}{3}x + 3$.

Współrzędne punktu A spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

Zatem $A(-6, -5)$.

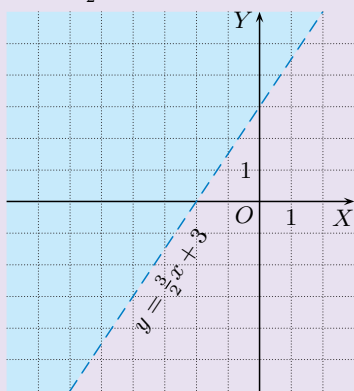
11. a) Wierzchołki: $(-2, 2)$, $(2, 6)$, $(6, -2)$, pole: $P = 24$
 b) Wierzchołki: $(-6, 1)$, $(0, -2)$, $(3, 7)$, pole: $P = 31,5$

**Uczeń:****R**

- interpretuje geometrycznie nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi oraz pojęcie półpłaszczyzny otwartej i domkniętej,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi,
- zapisuje układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawionych w układzie współrzędnych,
- rozwiązuje graficznie układ kilku nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi,
- wyznacza w układzie współrzędnych iloczyn, sumę i różnicę zbiorów punktów opisanych nierównościami liniowymi z dwiema niewiadomymi.

Ćwiczenie 1

a) $y > \frac{3}{2}x + 3$



5.7. Układy nierówności liniowych

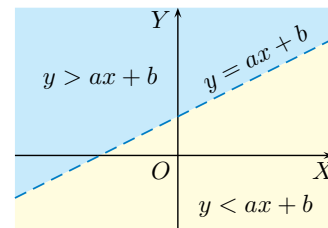
Każdą z dwóch części płaszczyzny, na które dzieli ją dowolna prosta, nazywamy **półpłaszczyzną**, a tę prostą – **krawędzią** obu półpłaszczyzn.

Półpłaszczyznę zawierającą krawędź nazywamy **półpłaszczyzną domkniętą**.

Półpłaszczyznę, do której nie należy żaden punkt jej krawędzi, nazywamy **półpłaszczyzną otwartą**.

Prosta $l: y = ax + b$ wyznacza dwie półpłaszczyzny otwarte:

- zbiór $\{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ i } y < ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą poniżej prostej l ,
- zbiór $\{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ i } y > ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą powyżej prostej.

**Przykład 1**

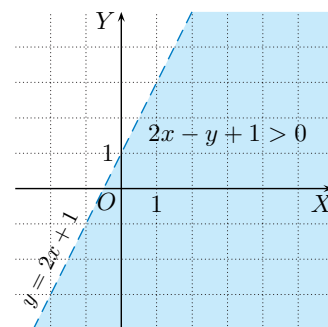
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $2x - y + 1 > 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y < 2x + 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną otwartą leżącą poniżej prostej $y = 2x + 1$.

Współrzędne punktów tej prostej nie spełniają nierówności $y < 2x + 1$, więc tę prostą rysujemy linią przerywaną.

**Przykład 2**

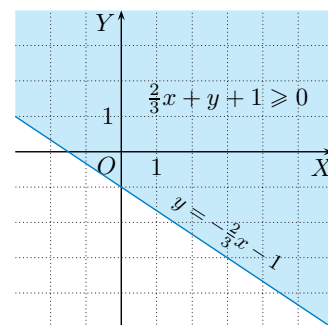
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $\frac{2}{3}x + y + 1 \geq 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y \geq -\frac{2}{3}x - 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną domkniętą ograniczoną przez prostą $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

Współrzędne punktów tej prostej spełniają nierówność $y \geq -\frac{2}{3}x - 1$, więc tę prostą rysujemy linią ciągłą.

**Ćwiczenie 1**

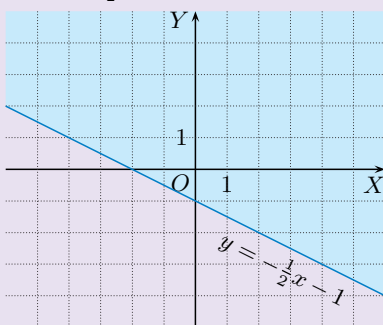
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających podaną nierówność.

a) $-3x + 2y - 6 > 0$

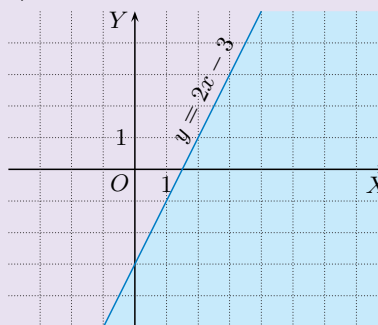
b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$

c) $y - 2x \leq -3$

b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$



c) $y \leq 2x - 3$

**Multibook**

- Nierówność liniowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.7
Generator
 testów i sprawdzianów



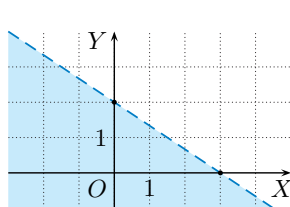
Przykład 3

Wyznacz nierówność opisującą półpłaszczyznę zaznaczoną na rysunku obok.

Krawędź półpłaszczyzny jest prostą przechodzącą przez punkty $(0, 2)$ i $(3, 0)$ – wyznaczamy jej równanie:

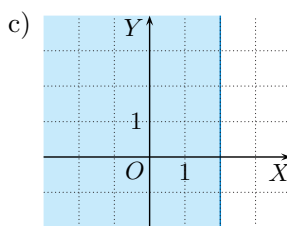
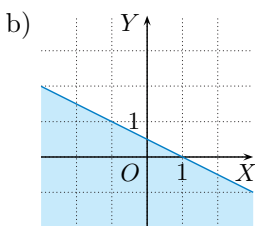
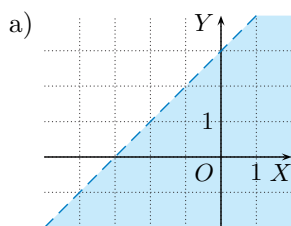
$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Półpłaszczyzna jest otwarta, a jej punkty leżą poniżej prostej $y = -\frac{2}{3}x + 2$, zatem szukaną nierównością jest $y < -\frac{2}{3}x + 2$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz nierówność opisującą półpłaszczyznę zaznaczoną na rysunku.

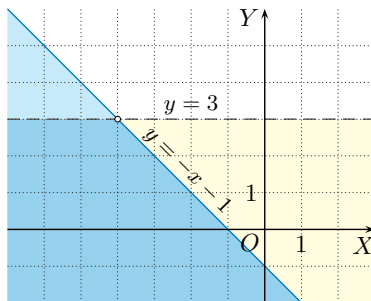


Przykład 4

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności:

$$\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ y < 3 \end{cases}$$

Zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta $y = -x - 1$. Dla drugiej nierówności zaznaczamy półpłaszczyznę otwartą ograniczoną z góry prostą $y = 3$. Część wspólna obu półpłaszczyzn jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności.



Zauważ, że punkt $(-4, 3)$ nie należy do części wspólnej obu półpłaszczyzn.

Ćwiczenie 3

Przedstaw ilustrację graficzną podanego układu nierówności.

a)
$$\begin{cases} -2x + y - 3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y - 2 < 0 \\ -6x + 2y < 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$$

Ćwiczenie 2

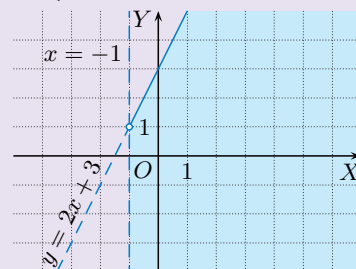
a) $y < x + 3$

b) $y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

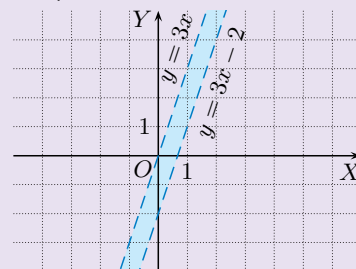
c) $x \leq 2$

Ćwiczenie 3

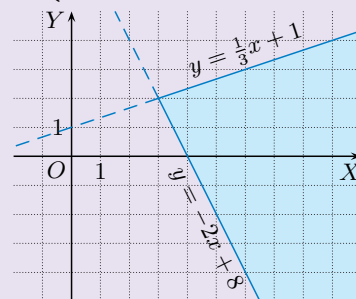
a)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 3 \\ x > -1 \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y < 3x \end{cases}$$



c)
$$\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq -2x + 8 \end{cases}$$





Odpowiedzi do zadań

1. a) P, R b) żaden c) R

2. a) $\begin{cases} y \leq -x + 4 \\ y \geq -4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y < -x + 2 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y > -x + 3 \\ x < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ y > x + 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

4. a) $(-1, -1), (-1, 7), (3, 3)$

b) $(-4, -3), (5, -3), (2, 6)$

c) $(1, -4), (5, 4), (-3, 0)$

5. a) $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ y \leq -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} \\ y \geq -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 2 \\ y \geq -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leq \frac{3}{5}x + \frac{6}{5} \\ y \geq \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \\ y \geq 3x - 6 \\ y \leq 3x + 6 \end{cases}$

Zadania

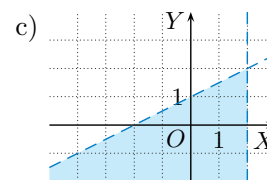
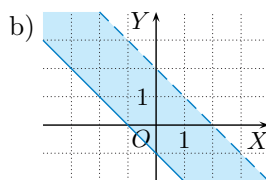
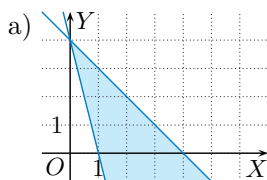
1. Przedstaw ilustrację graficzną podanego układu nierówności. Które spośród punktów $P(6, 1)$, $Q(-3, 5)$, $R(8, -3)$ należą do otrzymanego zbioru?

a) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x - y - 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 7 < 0 \end{cases}$

2. Wyznacz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na rysunku.



3. Wyznacz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz trójkąta ABC : a) $A(1, 2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$, b) $A(-6, 7)$, $B(0, 1)$, $C(2, 3)$.

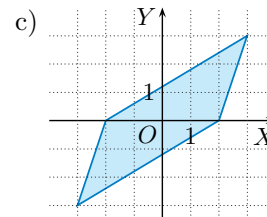
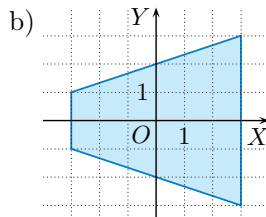
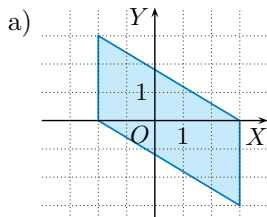
4. Pewien trójkąt został opisany przez podany układ nierówności. Naskicuj ten trójkąt i wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

a) $\begin{cases} y - x \geq 0 \\ y + x \leq 6 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - 12 \leq 0 \\ 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3 \geq 0 \\ 2x - y - 6 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$

5. Wyznacz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na rysunku.



6. Dane są zbiory: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 2\}$,
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y > 6\}$,
 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -x + y - 2 < 0\}$.

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór:

a) $A \cap B \cap C$,

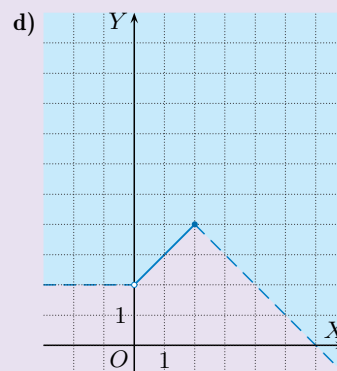
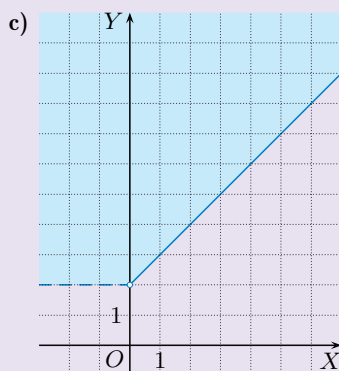
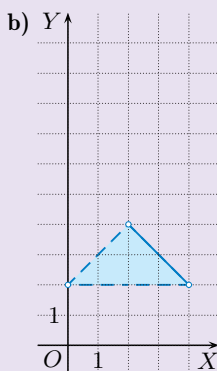
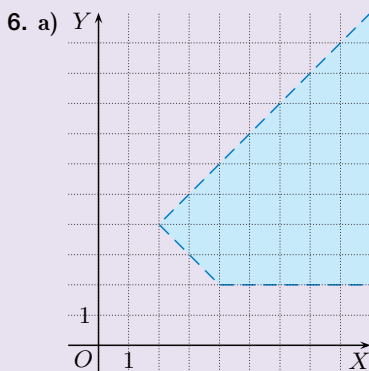
c) $(A \cup B) \setminus C$,

b) $(A \cap C) \setminus B$,

d) $(A \setminus C) \cup B$.

Symbol $\mathbb{R}^2$ oznacza zbiór wszystkich punktów płaszczyzny kartezjańskiej, czyli płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ i } y \in \mathbb{R}\}$$

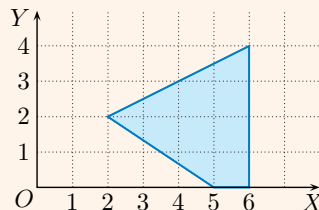


Programowanie liniowe

Przykład

Wyznacz największą i najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla punktów (x, y) należących do wielokąta opisanego za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$



Wielokąt ten przedstawiono na rysunku obok.

Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że wartość największa oraz wartość najmniejsza sumy $x + y$ są osiągane w którychś z wierzchołków (lub na całym boku) danego wielokąta.

Wierzchołkami wielokąta są punkty:

$$(5, 0), (6, 0), (6, 4) \text{ i } (2, 2)$$

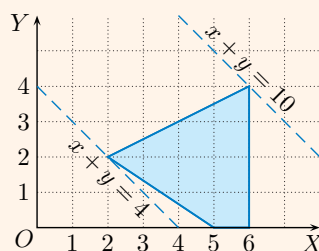
Obliczamy dla nich wartości sumy $x + y$:

$$(5, 0): x + y = 5 + 0 = 5$$

$$(6, 0): x + y = 6 + 0 = 6$$

$$(6, 4): x + y = 6 + 4 = 10$$

$$(2, 2): x + y = 2 + 2 = 4$$



Zatem największą wartością sumy $x + y$ jest 10, a najmniejszą 4.

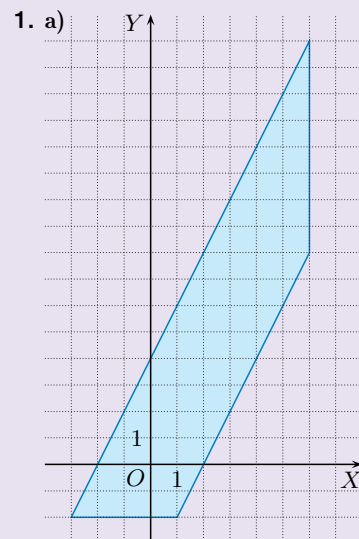
W powyższym przykładzie przedstawiono proste zagadnienie z działy matematyki zwanego **programowaniem liniowym**. Dział ten zajmuje się zagadnieniami optymalizacyjnymi, czyli szukaniem najlepszego rozwiązania wśród wszystkich możliwych (np. maksymalizacji zysków lub minimalizacji kosztów). Programowanie liniowe było intensywnie rozwijane podczas II wojny światowej, kiedy wykorzystywano je w logistyce.

1. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą sumy $x + y$ dla wielokąta opisanego układem nierówności.

a)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 4 \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq -2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 9 \\ y \geq 2x - 6 \\ y \geq -x - 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 7 \leq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$$



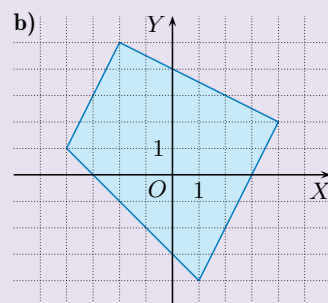
$$(-3, -2): x + y = -5$$

$$(1, -2): x + y = -1$$

$$(6, 8): x + y = 14$$

$$(6, 16): x + y = 22$$

Największą wartością sumy jest 22, a najmniejszą -5.



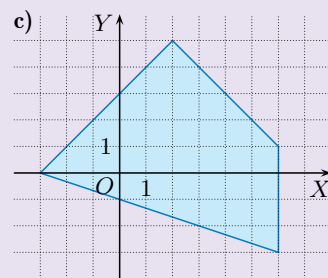
$$(-4, 1): x + y = -3$$

$$(1, -4): x + y = -3$$

$$(4, 2): x + y = 6$$

$$(-2, 5): x + y = 3$$

Największą wartością sumy jest 6, a najmniejszą -3.



$$(-3, 0): x + y = -3$$

$$(6, -3): x + y = 3$$

$$(6, 1): x + y = 7$$

$$(2, 5): x + y = 7$$

Największą wartością sumy jest 7, a najmniejszą -3.

Uczeń:

- wyznacza współczynniki we wzorze funkcji liniowej tak, aby spełniała podane warunki,
- przeprowadza analizę liczby rozwiązań równania liniowego w zależności od wartości danego parametru.

R

5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami

Przykład 1

Rozwiąż równanie $a^2x - 3 = a - x$ z niewiadomą x w zależności od parametru a . Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = -1$ i $a = 3$.

$$a^2x - 3 = a - x$$

$$a^2x + x = a + 3$$

$$(a^2 + 1)x = a + 3 \quad / : (a^2 + 1)$$

$$x = \frac{a+3}{a^2+1}$$

Zauważ, że $a^2 + 1 \neq 0$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Otrzymane rozwiązanie równania zależy od parametru a .

Równanie ma jedno rozwiązanie dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Dla $a = -1$ otrzymujemy $x = 1$, natomiast dla $a = 3$ otrzymujemy $x = \frac{3}{5}$.

W przypadku równań z parametrami zazwyczaj przyjmujemy, że x jest niewiadomą, chyba że wyraźnie zaznaczono inaczej.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $a^2x - 3 = a + 9x$ w zależności od parametru a .

$$a^2x - 3 = a + 9x$$

$$a^2x - 9x = a + 3$$

$$(a^2 - 9)x = a + 3$$

Zauważ, że wyrażenie $a^2 - 9$ może przyjmować wartość 0.

- Dla $a = -3$ otrzymujemy równanie **tożsamościowe** (spełnione przez dowolną liczbę): $0x = 0$.
- Dla $a = 3$ otrzymujemy równanie **sprzeczne**: $0x = 6$.
- Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ mamy $a^2 - 9 \neq 0$. Równanie **ma jedno rozwiązanie** postaci: $x = \frac{a+3}{a^2-9} = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż podane równanie w zależności od parametru a .

$$\text{a) } \frac{1}{2}ax - 4a = x + a \quad \text{b) } (a-1)x + 4 = 3x + a \quad \text{c) } 4a^2x + \frac{1}{2} = a + x$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax + b = 0$ jest tożsamościowe, dla jakich jest sprzeczne, a dla jakich ma jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 1

- a) sprzeczne dla $a = 2$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 2$: $x = \frac{10a}{a-2}$
- b) tożsamościowe dla $a = 4$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 4$: $x = 1$
- c) tożsamościowe dla $a = \frac{1}{2}$, sprzeczne dla $a = -\frac{1}{2}$, jedno rozwiązanie dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$: $x = \frac{1}{4a+2}$

Ćwiczenie 2

Równanie jest tożsamościowe dla $a = b = 0$, sprzeczne dla $a = 0$ i $b \neq 0$, ma jedno rozwiązanie dla $a \neq 0$.

Przykład 3

Sprawdź, dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax + 4 = 2a + 2bx$ jest tożsamościowe, dla jakich jest sprzeczne, a dla jakich ma jedno rozwiązanie – znajdź to rozwiązanie. Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = 5$ i $b = 1$.

$$ax + 4 = 2a + 2bx$$

$$ax - 2bx = 2a - 4$$

$$(a - 2b)x = 2a - 4$$

- Dla $a - 2b = 0$ i $2a - 4 = 0$ (czyli $a = 2$ i $b = 1$) równanie jest tożsamościowe.
- Dla $a - 2b = 0$ i $2a - 4 \neq 0$ (czyli $a \neq 2$ i $b = \frac{1}{2}a$) równanie jest sprzeczne.
- Dla $a - 2b \neq 0$ (czyli $b \neq \frac{1}{2}a$) równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{2a-4}{a-2b}$.

Po podstawieniu $a = 5$ i $b = 1$ otrzymujemy $x = 2$.

Ćwiczenie 3

Przeprowadź analizę liczby rozwiązań równania ze względu na wartości parametrów a i b . Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = 2$ i $b = -1$.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $2ax - 1 = a^2 + bx$ | d) $ax - b = 2 - bx$ |
| b) $a^2x + 2 = b - b^2x$ | e) $3ax - 9 = 2bx + 3b$ |
| c) $6ax + 3a = 2bx + b$ | f) $ax + a = 3bx + b$ |

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m miejsce zerowe funkcji $f(x) = (m + 1)x + 2$ jest liczbą dodatnią?

- Zauważmy, że dla $m = -1$ funkcja f nie ma miejsca zerowego – jest funkcją stałą $f(x) = 2$.
- Dla $m \neq -1$ wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f .

$$(m + 1)x + 2 = 0$$

$$(m + 1)x = -2$$

$$x = \frac{-2}{m+1}$$

Nierówność $\frac{-2}{m+1} > 0$ jest spełniona, gdy $m + 1 < 0$, czyli dla $m < -1$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru m miejsce zerowe funkcji f jest liczbą ujemną?

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = (m - 2)x - 4$ | c) $f(x) = (m^2 + 1)x + m$ |
| b) $f(x) = (2m + 3)x + 1$ | d) $f(x) = -m^2x + 3 - m$ |

Ćwiczenie 4

- a) $m < 2$
- b) $m > -\frac{3}{2}$
- c) $m > 0$
- d) $m > 3$

Ćwiczenie 3

a) sprzeczne dla $a = \frac{1}{2}b$, jedno rozwiązanie dla $a \neq \frac{1}{2}b$:

$$x = \frac{a^2+1}{2a-b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = 1$

b) sprzeczne dla $a = b = 0$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 0$ lub $b \neq 0$:

$$x = \frac{b-2}{a^2+b^2},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{3}{5}$

c) tożsamościowe dla $b = 3a$, jedno rozwiązanie dla $b \neq 3a$:

$$x = -\frac{1}{2}$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{1}{2}$

d) tożsamościowe dla $a = 2$

i $b = -2$,

sprzeczne dla $a = -b$ i $b \neq -2$,

jedno rozwiązanie dla $a \neq -b$:

$$x = \frac{b+2}{a+b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = 1$

e) tożsamościowe dla $a = -2$

i $b = -3$,

sprzeczne dla $a = \frac{2}{3}b$ i $b \neq -3$,

jedno rozwiązanie dla $a \neq \frac{2}{3}b$:

$$x = \frac{3b+9}{3a-2b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = \frac{3}{4}$

f) tożsamościowe dla $a = b = 0$,

sprzeczne dla $a = 3b$ i $a \neq 0$,

jedno rozwiązanie dla $a \neq 3b$:

$$x = \frac{b-a}{a-3b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{3}{5}$

Ćwiczenie 5

- a) $k - 3 > 0$ i $\frac{-2}{k-3} = -2$,
czyli $k = 4$.
b) $k + 1 < 0$ i $\frac{-6}{k+1} = 3$,
czyli $k = -3$.
c) $k - 4 > 0$ i $\frac{-3}{k-4} = 1$,
czyli nie ma takiego k .
d) $2 - k < 0$ i $\frac{2}{2-k} = -4$,
czyli $k = \frac{5}{2}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \frac{5}{2}m + 6 > 0$, gdy
 $m > -\frac{12}{5}$.
b) $x = \frac{1}{2}m > 0$, gdy $m > 0$.
c) $x = \frac{3}{m-2} > 0$, gdy
 $m - 2 > 0$, czyli $m > 2$.
2. a) 0 dla $m = 2$, 1 dla $m \neq 2$
b) 0 dla $m = -3$, 1 dla
 $m \neq -3$
c) 1 dla $m \neq -1$, nieskończenie
wiele dla $m = -1$
d) 1 dla $m \neq \frac{1}{2}$, nieskończenie
wiele dla $m = \frac{1}{2}$
e) 0 dla $m = 1$,
1 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, nie-
skończenie wiele dla $m = -1$
f) 0 dla $m = 0$,
1 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, nie-
skończenie wiele dla $m = -2$

Przykład 5

Dla jakiej wartości parametru k zbiorem rozwiązań nierówności $(k+1)x - 2 \leq 0$ jest przedział $(-\infty; 1]$?

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = (k+1)x - 2$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$ jest przedział $(-\infty; 1]$, gdy jest to funkcja rosnąca, której miejscem zerowym jest 1.

- Funkcja f jest rosnąca, gdy $k+1 > 0$, czyli dla $k > -1$.
 - Miejsce zerowe funkcji f jest równe 1, gdy $\frac{2}{k+1} = 1$, czyli dla $k = 1$.
- Zatem warunki zadania są spełnione dla $k = 1$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz wartość parametru k , dla której zbiorem rozwiązań nierówności jest podany przedział.

- a) $(k-3)x + 2 \leq 0$, $(-\infty; -2]$ c) $kx + 3 \geq 4x$, $[1; \infty)$
b) $(k+1)x + 6 > 0$, $(-\infty; 3)$ d) $2x < kx + 2$, $(-4; \infty)$

Zadania

- Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma jedno rozwiązanie będące liczbą dodatnią?
a) $\frac{x-m}{3} = \frac{m+4}{2}$ b) $\frac{mx-m}{2} = \frac{1-2m}{4}$ c) $\frac{mx-1}{2} = 1 + x$
- Określ liczbę rozwiązań równania ze względu na parametr m .
a) $2x - 2 = 4 + mx$ d) $(1 - 2m)x = m^2 - \frac{1}{4}$
b) $mx + 2 = m - 3x$ e) $(m^2 - 1)x = m^2 + m$
c) $(m+1)x = m^2 - 1$ f) $(m^2 + 2m)x = m^2 - 4$
- Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametrów p i q .
a) $2px - qx = p - 4$ d) $p^2x + q = p + q^2x$
b) $px + 2 = 3x + q$ e) $(x-p)(x-q) = x^2 + pq$
c) $px + q^2 = p^2 - qx$ f) $(x-p)^2 = x^2 - qx$
- Rozwiąż równanie $ax - 2x = 4a - 1$:
a) z niewiadomą x i parametrem a , b) z niewiadomą a i parametrem x .
- Dla jakich wartości parametru k miejsce zerowe funkcji f należy do przedziału $[-2; 2]$?
a) $f(x) = -3x + 1 - 6k$ b) $f(x) = (x-k)^2 - (x+k)^2 + k^2$, $k \neq 0$
- a) 0 dla $2p = q$ i $p \neq 4$, 1 dla $2p \neq q$, nieskończenie wiele dla $p = 4$ i $q = 8$
b) 0 dla $p = 3$ i $q \neq 2$, 1 dla $p \neq 3$, nieskończenie wiele dla $p = 3$ i $q = 2$
c) 1 dla $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = -q$
d) 0 dla $p = -q \neq 0$, 1 dla $p \neq q$ i $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = q$
e) 1 dla $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = -q$
f) 0 dla $p \neq 0$ i $p = \frac{1}{2}q$, 1 dla $p \neq \frac{1}{2}q$, nieskończenie wiele dla $p = q = 0$
- a) dla $a = 2$ sprzeczne, dla $a \neq 2$: $x = \frac{4a-1}{a-2}$
b) dla $x = 4$ sprzeczne, dla $x \neq 4$: $a = \frac{2x-1}{x-4}$
- a) $-2 \leq \frac{1-6k}{3} \leq 2$, czyli $k \in [-\frac{5}{6}; \frac{7}{6}]$
b) $f(x) = -4kx + k^2$, $-2 \leq \frac{k}{4} \leq 2$, czyli $k \in [-8; 0) \cup (0; 8]$

5.9. Funkcja liniowa – zastosowania

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 1500 + 12x$, gdzie $D_f = \mathbb{N}$, opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat, produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

a) Naskicuj wykres funkcji f .

b) Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?

Dochód ze sprzedaży:

$$1800 \cdot 37 = 66\,600 \text{ [zł]}$$

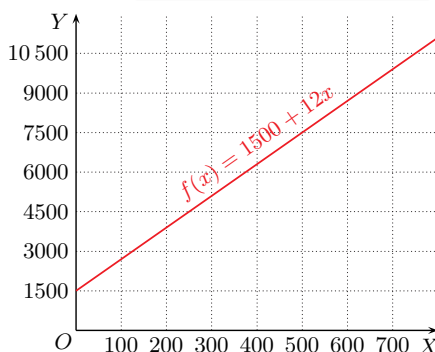
Koszty po 6 miesiącach:

$$6 \cdot 1500 + 12 \cdot 1800 = 30\,600 \text{ [zł]}$$

Półroczny zysk:

$$66\,600 - 30\,600 = 36\,000 \text{ [zł]}$$

zysk = dochód – koszty



Ćwiczenie 1

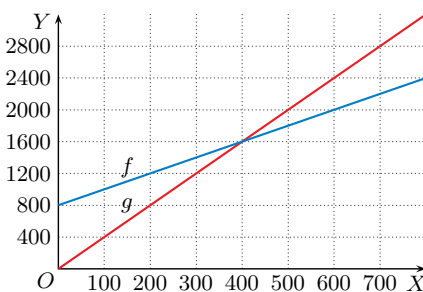
W firmie opisanej w przykładzie 1. podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, przy czym koszt wyprodukowania takiego krasnala wyniósł 20 zł (koszty stałe pozostały bez zmian). Naskicuj wykres funkcji g opisującej obecne miesięczne koszty tej firmy.

Ćwiczenie 2

Funkcja $f(x) = 2x + 800$, gdzie $D_f = \mathbb{N}$, opisuje dzienne koszty, jakie ponosi firma produkująca pokarm dla kotów: 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje funkcja $g(x) = 4x$, gdzie $D_g = \mathbb{N}$, x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki.

Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

- zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),
- dzienny zysk w wysokości 400 zł,
- dzienny zysk w wysokości 1400 zł.

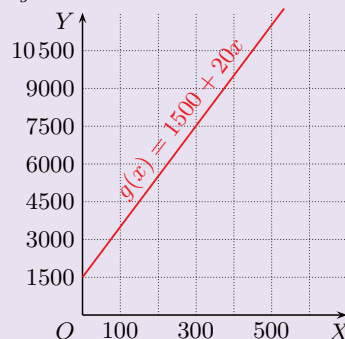


Uczeń:

- analizuje zadanie z treścią, a następnie zapisuje odpowiednie równanie, nierówność liniową lub wzór funkcji liniowej,
- rozwiązuje ułożone przez siebie równanie bądź nierówność lub analizuje własności funkcji liniowej,
- analizuje wynik i podaje odpowiedź.

Ćwiczenie 1

$D_g = \mathbb{N}$



Ćwiczenie 2

Niech x będzie liczbą wyprodukowanych puszek.

zysk = dochód – koszt, zatem dzienny zysk jest opisany wzorem:

$$4x - (2x + 800) = 2x - 800$$

a) $2x + 800 = 4x$

$$x = 400$$

Zerowy wynik ekonomiczny firma osiąga, gdy dzienna produkcja wynosi 400 puszek.

b) 600

c) 1100

Multibook

- Wykorzystanie funkcji liniowej – rozwiązanie zadania

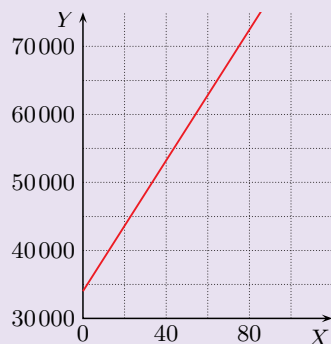
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.9



Generator
testów i sprawdzianów

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = 34000 + 480x$, gdzie x – liczba przejechanych tysięcy kilometrów, 480 – koszt (w zł) benzyny potrzebnej do przejechania 1000 km.



- b) Niech x będzie liczbą przejechanych tysięcy kilometrów.

Łączne koszty:

– dla samochodu A:

$$y = 34000 + 480x$$

– dla samochodu B:

$$y = 40000 + 360x$$

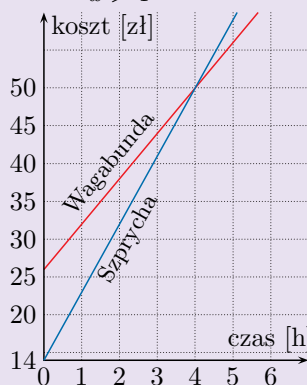
$$40000 + 360x \leq 34000 + 480x$$

$$x \geq 50$$

Różnica w cenie zwróci się po przejechaniu 50000 km.

2. b) Korzystniej z wypożyczalni Wagabunda dla liczby godzin większej od 4.

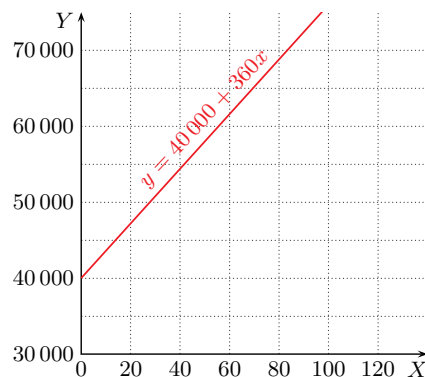
c) $26 + 6x < 14 + 9x$
 $x > 4$



Dla liczby godzin większej od 4.

Zadania

1. Samochód A kosztuje 34 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód B kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Cena benzyny wynosi średnio 6 zł za liter. Niech x oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, y – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu B.



- a) Naskicuj analogiczny wykres dla samochodu A.

- b) Jeżeli zakupiono samochód B, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?

2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (x oznacza liczbę godzin).

WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA

- Rower górski 10 zł + 2x zł
- Rower dziecięcy 6 zł + 2x zł

WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA

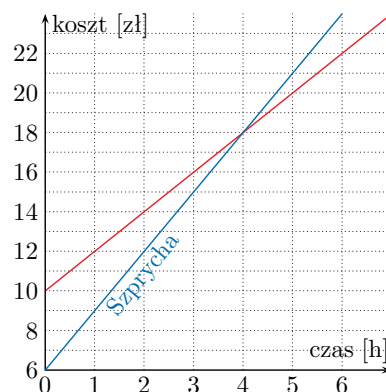
- Rower górski 6 zł + 3x zł
- Rower dziecięcy 2 zł + 3x zł

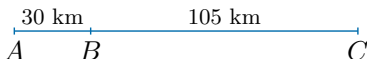
Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.

- a) Naskicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.

- b) Odczytaj z wykresów, na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a na ile z wypożyczalni Szprycha.

- c) Trzyosobowa rodzina chce wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda?



3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie.  Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h, a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą prędkością 22,5 km/h.

a) Naskicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.

b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?

c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C ?

4. Z miasta A o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Dwie godziny później z miasta A w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby kilometrów przejechanych przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:

a) o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,

b) jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,

c) o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km.

5. Z Kartuz do odległych o 15 km Ostrzyc wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Ostrzyc do Kartuz wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Kartuzach kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Ostrzyc po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Oblicz, ile czasu zajęła turystę droga z Kartuz do Ostrzyc. Przyjmij, że turysta szedł całą drogę w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z taką samą stałą prędkością.

6. Z miejscowości A do oddalonej o 40 km miejscowości B wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h. Jednocześnie z miejscowości B do miejscowości A wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.

a) Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości A w zależności od czasu.

b) Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km?

5. Niech x oznacza odległość w km, jaką przeszedł turysta po 1 h 15 min, czyli do momentu pierwszego spotkania z kierowcą, a y – odległość w km, jaką przeszedł turysta przez kolejne 50 min, czyli między pierwszym i drugim spotkaniem z kierowcą. Korzystamy ze wzoru na prędkość: $v = \frac{s}{t}$.

Turysta szedł w stałym tempie, czyli $\frac{x}{\frac{3}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{2}}$. Stąd $x = 1,5y$.

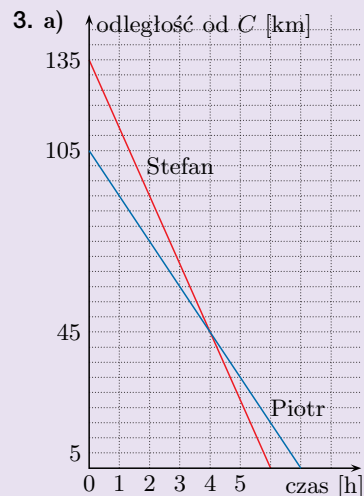
Kierowca jechał ze stałą prędkością, czyli $\frac{15-x}{\frac{1}{4}} = \frac{2x+y}{\frac{1}{3}}$. Stąd $10x + 3y = 60$.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x = 1,5y \\ 10x + 3y = 60 \end{cases}$$

i otrzymujemy $x = 5$, $y = \frac{10}{3}$.

Turysta przeszedł 5 km w ciągu $\frac{5}{4}$ h, zatem 15 km pokonał w czasie 3 h 45 min.



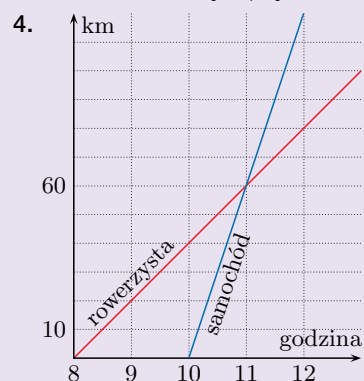
b) Stefan dogoni Piotra po 4 godzinach.

c) Niech x będzie wielkością, o jaką Piotr musi zwiększyć średnią prędkość [km/h].

Wzór na prędkość przekształcamy do postaci $t = \frac{s}{v}$. Wówczas:

$$\frac{105}{15+x} = \frac{135}{22,5}$$

$$x = 2,5 \text{ [km/h]}$$



a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00

6. t – czas [h]

a) $d_1(t) = 16t$, $t \in [0; 2,5]$;

$d_2(t) = 40 - 16t$, $t \in [0; 2,5]$

b) $d(t) = |32t - 40|$,

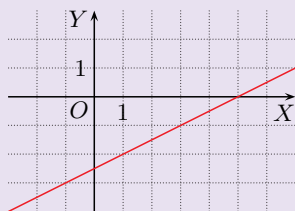
$D_d = [0; 2,5]$

Odległość między rowerzystami wyniosła 8 km po 1 h oraz po 1,5 h.

Odpowiedzi do zadań

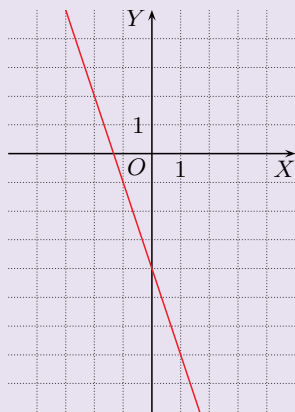
1. a) Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $(-1, -3)$, a dla $t = 1$ – punkt $(1, -2)$, zatem prosta ma równanie:

$$y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$



- b) Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $(-2, 2)$, a dla $t = 1$ – punkt $(-1, -1)$, zatem prosta ma równanie:

$$y = -3x - 4$$



2. I. $y = 3x + 1$

II. $2t = x + 1$, po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy:

$$y = -2 + 3(x + 1) = 3x + 1$$

III. $t = 1 - x$, po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy:

$$y = 4 - 3(1 - x) = 3x + 1$$

Wszystkie układy równań przedstawiają tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = 3x + 1$.

Dowiedz się więcej

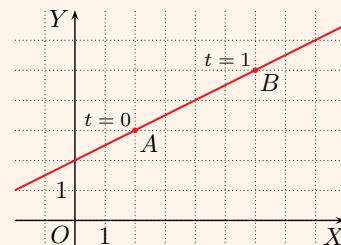
Postać parametryczna równania prostej

W tym rozdziale przedstawiono dwa sposoby opisu prostej w układzie współrzędnych – postaci kierunkową i ogólną. Istnieje jednak wiele innych sposobów – jednym z nich jest **postać parametryczna**.

Na przykład układ równań z parametrem t :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

jest parametrycznym przedstawieniem prostej AB (rysunek obok). Opisuje on ruch punktu po prostej AB . Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $A(2, 3)$, a dla $t = 1$ – punkt $B(6, 5)$.



1. Naskicuj prostą opisaną parametrycznie.

a) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$

Przykład 1

Wyznacz równanie kierunkowe prostej przedstawionej parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy parametr: $t = 2x - 2$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$y = 3 - 2t = 3 - 2(2x - 2)$$

skąd otrzymujemy $y = -4x + 7$.

- D** 2. Uzasadnij, że dla $t \in \mathbb{R}$ podane układy równań opisują tę samą prostą.

I. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

II. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$

III. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

3. Prosta l dana jest w postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Podaj wartość parametru t , dla którego punkt A należy do prostej l .

a) $A(-10, 12)$

b) $A(11, -2)$

c) $A(\frac{3}{2}, \frac{13}{3})$

Czy punkty $P(-1, 2)$ i $Q(8, 4)$ leżą na prostej l ?

3. a) $t = 4$

b) $t = -3$

c) $t = \frac{1}{6}$

Punkty P i Q nie leżą na prostej l .



4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ruch kuli K_1 toczącej się po prostej k opisują równania parametryczne:

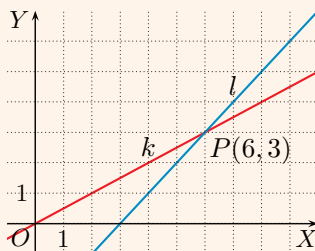
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Ruch kuli K_2 toczącej się po prostej l opisują równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Czy kule K_1 i K_2 się zderzą?

Wyznamy równania kierunkowe prostych k : $y = \frac{1}{2}x$ i l : $y = x - 3$. Proste k i l przecinają się w punkcie $P(6, 3)$. Zderzenie jednak nie nastąpi, gdyż kula K_1 będzie w punkcie P dla $t = 3$, natomiast kula K_2 dopiero dla $t = 6$.



Przemieszczanie się ślimaków S_1 i S_2 opisują podane równania parametryczne ($t \geq 0$). Czy te ślimaki się spotkają?

$$\text{a) } S_1: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{b) } S_1: \begin{cases} x = 6t \\ y = 8 - 2t \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$$

Równanie prostej w trójwymiarowym układzie współrzędnych możemy przedstawić w postaci parametrycznej. Na przykład prosta opisana równaniami:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

przechodzi przez punkty $A(3, 2, 4)$ dla $t = 0$ oraz $B(4, 1, 6)$ dla $t = 1$.

5. Które spośród punktów $P(3, 1, 2)$, $Q(9, 0, 6)$, $R(-3, 7, 2)$ należą do prostej przedstawionej w postaci parametrycznej?

$$\text{a) } \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \\ z = 4 - t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

5. a) Q dla $t = -2$

b) R dla $t = 3$

4. a) I sposób

Wyznamy równania kierunkowe prostych:

– dla S_1 : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$, $x \geq 3$,

– dla S_2 : $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x \geq 0$.

Te proste przecinają się w punkcie $(9, 2)$.

Ślimak S_1 będzie w tym punkcie dla:

$$t = \frac{1}{2}(9 - 3) = 3$$

a ślimak S_2 dla:

$$t = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

zatem ślimaki się spotkają.

II sposób

$$3 + 2t = 3t \text{ dla } t = 3.$$

Wtedy:

$$5 - t = 2$$

oraz:

$$-1 + t = 2$$

zatem ślimaki spotkają się dla $t = 3$.

b) I sposób

Wyznamy równania kierunkowe prostych:

– dla S_1 : $y = -\frac{1}{3}x + 8$, $x \geq 0$,

– dla S_2 : $y = \frac{2}{3}x - 4$, $x \geq 0$.

Te proste przecinają się w punkcie $(12, 4)$.

Ślimak S_1 będzie w tym punkcie dla:

$$t = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

a ślimak S_2 dla:

$$t = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

zatem ślimaki się nie spotkają.

II sposób

$$6t = 3t \text{ dla } t = 0. \text{ Wtedy:}$$

$$8 - 2t = 8$$

oraz:

$$-4 + 2t = -4$$

zatem ślimaki się nie spotkają.



Powtórzenie

Zestaw I

- a) Wszystkie punkty należą do prostej l .
b) Punkty P i R należą do prostej l .
- a) ujemne dla $x < -6$,
większe od 2 dla $x > -3$
b) ujemne dla $x > \frac{5}{3}$,
większe od 2 dla $x < 1$
c) ujemne dla $x > -\frac{6}{5}$,
większe od 2 dla $x < -2$
- a) $(9, 0)$, $(0, 3)$, $P = 13,5$
b) $(14, 0)$, $(0, -8)$, $P = 56$
c) $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -\frac{15}{2})$,
 $P = 9,375$
- a) rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$,
malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$,
stała dla $m = -\frac{1}{2}$
b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9)$,
malejąca dla $m \in (9; \infty)$,
stała dla $m = 9$
- a) nie należą
b) należą, $y = \frac{1}{2}x - 1$
- a) 15 b) 12 c) 16
- a) $y = -\frac{1}{3}x + 7$, malejąca
b) $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$, rosnąca
- a) $y = -2x - 7$
b) $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$
c) $x = -3$
d) $y = -1$
e) $y = -\frac{5}{3}x - 6$
f) $x = -3$
- a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
c) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$
d) $f(x) = \sqrt{2}x$
- Naszkicuj prostą l . Podaj, które z punktów P, Q, R należą do tej prostej.
a) $l: y = 2x - 4$, $P(5, 6)$, $Q(-3, -10)$, $R(-\frac{7}{2}, -11)$
b) $l: y = \frac{1}{2}x + 2$, $P(-8, -2)$, $Q(9, \frac{11}{2})$, $R(17, 10\frac{1}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich większe od 2?
a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ b) $f(x) = -3x + 5$ c) $f(x) = -2,5x - 3$
- Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .
a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$ c) $f(x) = -3x - 7,5$
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$
- Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.
a) $A(2, -7)$, $B(3, -10)$, $C(-2, 5)$ b) $A(-4, -3)$, $B(-2, -2)$, $C(12, 5)$
- Punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$. Oblicz k .
a) $P(\frac{2}{3}, 2)$, $Q(5, k)$ b) $P(k, 6)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ c) $P(1, 8, 2, 4)$, $Q(12, k)$
- Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P . Czy ta funkcja jest malejąca?
a) $l: y = -\frac{1}{3}x + 7$, $P(6, 5)$ b) $l: y = \frac{1}{4}x - 11$, $P(-6, 1)$
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do prostej l .
a) $l: y = \frac{1}{2}x - 7$ c) $l: y = -6$ e) $l: 3x - 5y - 1 = 0$
b) $l: y = -4,5x - 5$ d) $l: x = 11$ f) $l: x - y = y + x$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.
a) $f(-2) = -4$ i $f(4) = -1$ c) $f(-8) = 6$ i $f(-3) = 4$
b) $f(-3) = 2$ i $f(3) = 6$ d) $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{2}) = 2$
- Rozwiąż równanie z niewiadomą x w zależności od parametru m .
a) $m(x - 6) = 2x - 12$ b) $m(mx - 1) = 9x + 3$
- a) dla $m = 2$ nieskończenie wiele rozwiązań, dla $m \neq 2$ jedno rozwiązanie: $x = 6$
b) dla $m = 3$ sprzeczne, dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ jedno rozwiązanie: $x = \frac{1}{m-3}$,
dla $m = -3$ nieskończenie wiele rozwiązań

Komentarz do zadania 7, str. 265

Warto przypomnieć uczniom, czym jest spodek wysokości.

Zestaw II

1. Wykresem funkcji f jest prosta l . Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

a) $l: y = 6x + 18$ b) $l: y = -\frac{5}{2}x - 10$ c) $l: \sqrt{2}x + y - 4 = 0$

2. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach A, B, C . Czy jest to trójkąt prostokątny?

a) $A(0, 0), B(8, 6), C(-6, 8)$ b) $A(-6, 0), B(1, 1), C(-3, 4)$

- D 3. Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$

5. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są zawarte w prostych l_1, l_2 i l_3 . Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.

a) $l_1: y = x + 2, l_2: y = -x + 2, l_3: y = -3x + 6$
 b) $l_1: 2x - y + 6 = 0, l_2: 3x - 4y + 4 = 0, l_3: y - 4 = 0$
 c) $l_1: x - 2y - 4 = 0, l_2: 3x + 4y - 28 = 0, l_3: x + 2 = 0$

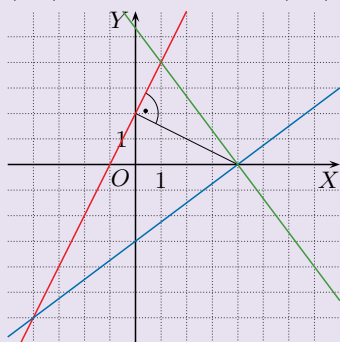
6. Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y = 10$ i $4x - 3y = 5$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.

7. Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k, l, m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.

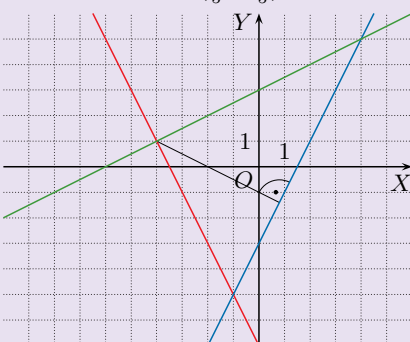
a) $k: y = 2x + 2, l: y = \frac{3}{4}x - 3, m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$
 b) $k: y = -2x - 7, l: y = 2x - 3, m: y = \frac{1}{2}x + 3$

8. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = -\frac{2}{3}x + 6$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-1, 2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.

7. a) wierzchołki: $(-4, -6), (4, 0), (1, 4)$, spodek wysokości: $(0, 2)$



- b) wierzchołki: $(-4, 1), (4, 5), (-1, -5)$, spodek wysokości: $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$



1. a) $(-\infty; -3]$

b) $[-4; \infty)$

c) $[2\sqrt{2}; \infty)$

2. a) $AB: y = \frac{3}{4}x,$

$AC: y = -\frac{4}{3}x,$

$BC: y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7},$

$AB \perp AC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

b) $AB: y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7},$

$AC: y = \frac{4}{3}x + 8,$

$BC: y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$

$AC \perp BC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

3. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2,$

$BC: y = -2x + 8,$

$CD: y = \frac{1}{2}x + 3,$

$AD: y = -2x - 7$

Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, gdyż: $AB \parallel CD,$
 $AD \parallel BC$ oraz $AB \perp AD$.

4. a) $x = -3, y = 2$

b) $x = 3, y = 6$

c) sprzeczny

d) $x = -5, y = -1$

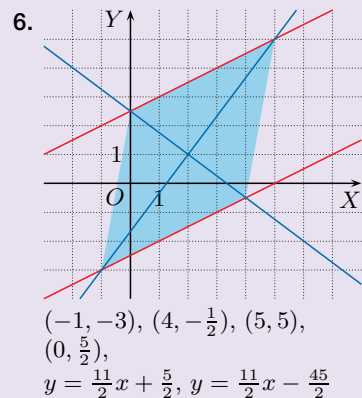
e) $x = 8, y = 5$

f) $x = -8, y = -7$

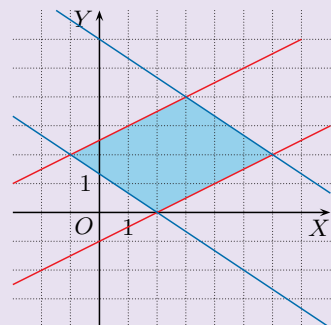
5. a) $(0, 2), (1, 3), (2, 0), P = 2$

b) $(-4, -2), (4, 4), (-1, 4), P = 15$

c) $(-2, -3), (-2, \frac{17}{2}), (\frac{36}{5}, \frac{8}{5}), P = 52,9$



8. $(2, 0), (6, 2), (3, 4)$





Odpowiedzi do zadań

1. Początkowo w basenie było 9000 l wody. Obliczamy czas, po jakim zostało w nim 3600 l:

$$\begin{aligned} 9000 - 60x &= 3600 \\ 60x &= 5400 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

W basenie zostało 40% wody po 90 minutach

2. a) x – liczba dostaw w każdej pizzerii

W pizzerii Milano student zarobił $7 \cdot 48 + 3x$, a w pizzerii Torino $7 \cdot 60 + 2,4x$. Zatem:

$$7 \cdot 48 + 3x = 7 \cdot 60 + 2,4x$$

Stąd $x = 140$.

b) $7(48 + 3 \cdot 20) = 756$ [zł]

4. $f(x) = ax + b$ – funkcja opisująca koszt chodnika o długości x m

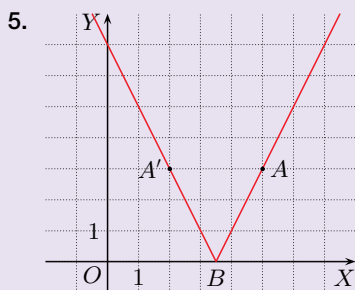
$$\begin{cases} a \cdot 240 + b = 104000 \\ a \cdot 160 + b = 70000 \end{cases}$$

$$\hline 80a = 34000$$

Stąd $a = 425$ oraz $b = 2000$.

Zatem:

$$\begin{aligned} f(180) &= 425 \cdot 180 + 2000 = \\ &= 78500 \text{ [zł]} \end{aligned}$$



Prosta AB : $y = 2x - 7$,

prosta $A'B$: $y = -2x + 7$

Zadania z kontekstem realistycznym

1. Aby opróżnić wypełniony wodą basen, otworzono odpływ, przez który woda wypływała jednostajnym strumieniem w tempie 60 litrów na minutę. Ilość wody y (w litrach), która po upływie x minut pozostawała jeszcze w basenie, można opisać funkcją $y = 9000 - 60x$. Oblicz, po jakim czasie w basenie zostało 40% początkowej ilości wody.

2. Student dorabiał, rozwijając pizzę. Przez 7 dni pracował w pizzerii Milano, w której obowiązywała stawka dzienna 48 zł i dodatkowo 3 zł za każdą dostawę. Następnie przeniósł się do pizzerii Torino, w której stawka dzienna wynosiła 60 zł i dodatkowo 2,40 zł za każdą dostawę. Po 7 dniach pracy w Torino stwierdził, że zrealizował tyle samo dostaw i zarobił tyle samo co w Milano.

a) Oblicz, ile dostaw zrealizował student w każdej pizzerii.

b) Oblicz, ile zarobił student w każdej pizzerii.

3. Wypożyczalnia limuzyn oferuje dwa warianty usług.

	Oплата stała	Limit kilometrów w cenie opłaty stałej	Cena za 1 km powyżej limitu
Wariant I	800 zł	200	1 zł
Wariant II	600 zł	300	1,80 zł

a) Dla obu wariantów oblicz koszt wynajęcia limuzyny dla trasy 350 km.

b) Dla obu wariantów zapisz wzór funkcji opisującej koszt wynajęcia limuzyny w zależności od liczby przejechanych kilometrów.

c) Jaką co najmniej długość trasy zaplanował klient, jeżeli korzystniejszy dla niego okazał się wariant I?

4. Koszt chodnika o szerokości 2 m, uwzględniający jego ułożenie i materiały, można opisać za pomocą pewnej funkcji liniowej. Wiadomo, że dla takiego chodnika o długości 160 m koszt wynosi 70 000 zł, a dla chodnika o długości 240 m to 104 000 zł. Oblicz koszt chodnika o długości 180 m.

5. W pewnym eksperymencie puszczano promień świetlny w płaszczyźnie opisanej układem współrzędnych. Promień ten przeszedł przez punkt $A(5, 3)$ i odbił się w punkcie $B(\frac{7}{2}, 0)$ od przeszkody ustawionej wzdłuż osi OX . Wyznacz równanie prostej, wzdłuż której biegł ten promień przed odbiciem, i równanie prostej zawierającej promień odbity.

Wskazówka. Kąt odbicia jest równy kątowi padania.

3. a) wariant I: 950 zł, wariant II: 690 zł

b) $f_I(x) = \begin{cases} 800 & \text{dla } 0 \leq x \leq 200 \\ x + 600 & \text{dla } x > 200 \end{cases}$

$f_{II}(x) = \begin{cases} 600 & \text{dla } 0 \leq x \leq 300 \\ 1,8x + 60 & \text{dla } x > 300 \end{cases}$

c) więcej niż 675 km

**Przykład 1**

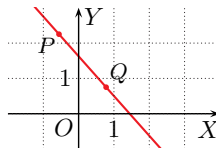
Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Dla której pary punktów P, Q współczynnik kierunkowy a jest ujemny?

- A. $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}), Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$ C. $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}), Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$
B. $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}), Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$ D. $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}), Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Zauważmy, że tylko w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

→ Zadanie 6, str. 268

Przykład 2

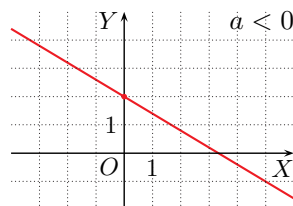
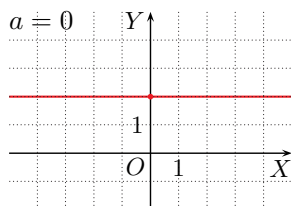
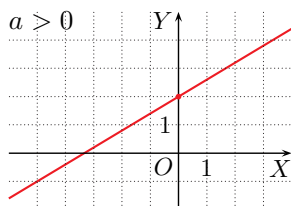
Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

- A. $(-8, -5), (8, 9)$ C. $(-8, -6), (4, -2)$
B. $(-9, 6), (9, -2)$ D. $(-10, 4), (5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano tylko w przypadku C.

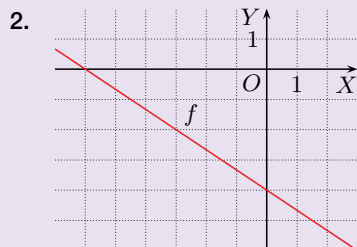


Odpowiedź: C

→ Zadanie 7, str. 268



Odpowiedzi do zadań



3. $\sqrt{2}x + 4 = 0$
 $x = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

4. $y = ax + b$

$$\begin{cases} 6 = -a + b \\ 0 = a + b \end{cases}$$

$$b = 3$$

5. $7 = 2 \cdot 2k + 1$

$$4k = 6, \text{ czyli } k = \frac{3}{2}$$

6. Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest dodatni, gdy funkcja $f(x) = ax + b$ jest rosnąca. Jeśli prosta ta przechodzi przez punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ takie, że $x_1 < x_2$, to zachodzi nierówność $y_1 < y_2$.

A. $-\frac{5}{2} < \frac{11}{2}$, ale $-\frac{3}{2} > -\frac{19}{2}$

B. $\frac{9}{2} < \frac{11}{2}$, ale $-\frac{11}{2} > -\frac{19}{2}$

C. $\frac{9}{2} < \frac{19}{2}$ oraz $-\frac{11}{2} < -\frac{7}{2}$

8. Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$.

$$a_1 = 3, a_2 = 2m + 1$$

$$3 \cdot (2m + 1) = -1$$

$$6m + 3 = -1$$

$$6m = -4$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

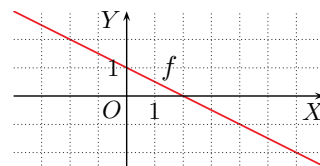
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze

A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$



Zadanie 2 (0–1)

Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

A. I

B. II

C. III

D. IV

Zadanie 3 (0–1)

Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe

A. $-2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 4 (0–1)

Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie o rzędnej

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. -3

D. -6

Zadanie 5 (0–1)

Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla

A. $k = \frac{2}{3}$

B. $k = \frac{3}{2}$

C. $k = \frac{1}{2}$

D. $k = 7$

Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 267

Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Dla której pary punktów P, Q współczynnik kierunkowy a jest dodatni?

A. $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2})$

C. $P(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$

B. $P(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2}), Q(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2})$

D. $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$

Zadanie 7 (0–1) → Przykład 2, str. 267

Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x - 2)$ dla żadnej wartości parametru a ?

A. $(4, 1), (-4, -3)$

C. $(-3, -2), (-1, 3)$

B. $(-3, -10), (1, -2)$

D. $(1, 3), (3, -3)$

Zadanie 8 (0–1)

Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe wtedy, gdy

A. $m = 0$

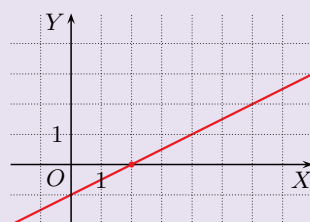
B. $m = -1$

C. $m = -\frac{1}{3}$

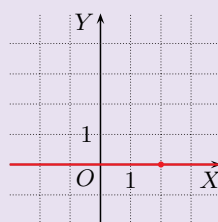
D. $m = -\frac{2}{3}$

7. Prosta $y = a(x - 2)$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do II i III ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.

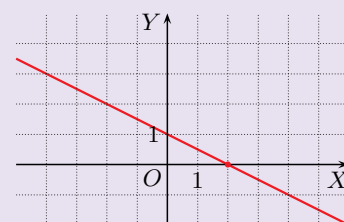
$a > 0$



$a = 0$



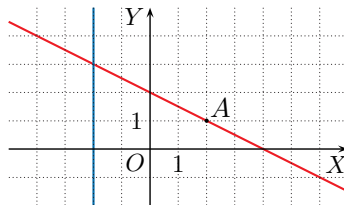
$a < 0$



**Zadanie 9 (0-1)**

Dwa boki trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku A są zawarte w prostych przedstawionych na rysunku obok. Pole tego trójkąta jest równe

- A. 20 B. 24 C. 28 D. 40

**Zadanie 10 (0-1)**

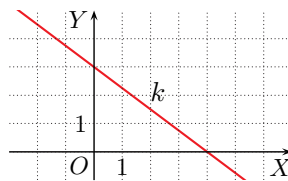
Dany jest czworokąt o kolejnych wierzchołkach $P(0, -5)$, $Q(3, -4)$, $R(4, -1)$ i $S(1, -2)$. W której prostej jest zawarta jedna z przekątnych tego czworokąta?

- A. $y = x + 5$ B. $y = -x + 5$ C. $y = x - 1$ D. $y = -x - 1$

Zadanie 11 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono prostą k .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



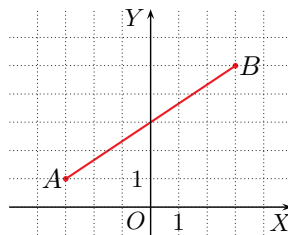
Prosta $y = -\frac{3}{4}x + 8$ jest równoległa do prostej k .	P	F
Prosta $y = \frac{3}{4}x + 3$ jest prostopadła do prostej k .	P	F

Zadanie 12

Na rysunku obok dany jest odcinek AB będący jednym z boków trójkąta ABC .

Zadanie 12.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym $-\frac{2}{3}$.	P	F
Jeśli wierzchołek C ma współrzędne $(9, -4)$, to trójkąt ABC jest prostokątny.	P	F

Zadanie 12.2 (0-2)

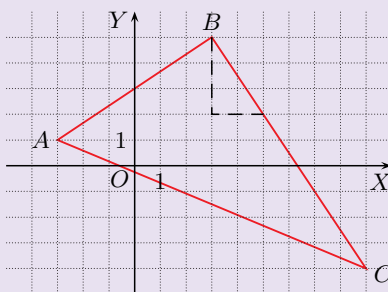
Wierzchołek C ma współrzędne $(1, -1)$. Wyznacz równania prostych zawierających boki AC i BC tego trójkąta.

12.1. Z rysunku odczytujemy współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = \frac{2}{3}$.

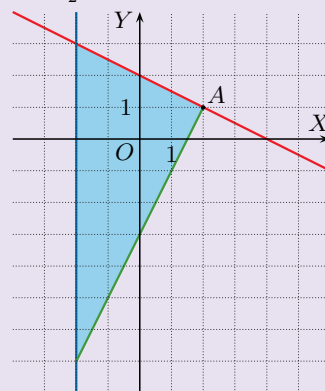
Współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C jest równy $-\frac{1}{a_{AB}} = -\frac{3}{2}$.

Jeśli $C(9, -4)$ (rysunek obok), to prosta BC ma współczynnik kierunkowy $-\frac{3}{2}$.

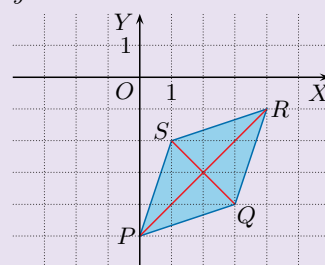
Zatem $AB \perp BC$, czyli jest prostokątny.



$$9. P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$



10. Z rysunku odczytujemy – prosta PR : $y = x - 5$, prosta SQ : $y = -x - 1$.



11. Prosta k ma współczynnik kierunkowy $-\frac{3}{4}$. Prosta do niej równoległa ma współczynnik kierunkowy $-\frac{3}{4}$, a prosta prostopadła – współczynnik kierunkowy $\frac{4}{3}$.

12.2. Prosta AC : $y = ax + b$

$$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

stąd $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, czyli AC : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

Prosta BC : $y = cx + d$

$$\begin{cases} 3c + d = 5 \\ c + d = -1 \end{cases}$$

stąd $c = 3$, $d = -4$, zatem BC : $y = 3x - 4$

13. Prosta k : $y = x + 3$.

Najpierw sprawdzamy, czy pierwsza współrzędna punktu przecięcia prostych jest całkowita.

$$\text{A. } x + 3 = -\frac{1}{3}x - 6 \\ \frac{4}{3}x = -9, \text{ czyli } x = -\frac{27}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{B. } x + 3 = -x - 6$$

$$2x = -9, \text{ czyli } x = -\frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{C. } x + 3 = -2x - 6$$

$$3x = -9, \text{ czyli } x = -3 \in \mathbb{Z}.$$

Wyznaczamy drugą współrzędną: $y = -3 + 3 = 0 \in \mathbb{Z}$.

Proste przecinają się w punkcie $(-3, 0)$.

$$\text{D. } x + 3 = -3x - 6$$

$$4x = -9, \text{ czyli } x = -\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{E. } x + 3 = \frac{1}{3}x + 2$$

$$\frac{2}{3}x = -1, \text{ czyli } x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{F. } x + 3 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{1}{2}x = -1, \text{ czyli } x = -2 \in \mathbb{Z}.$$

Wyznaczamy drugą współrzędną: $y = -2 + 3 = 1 \in \mathbb{Z}$.

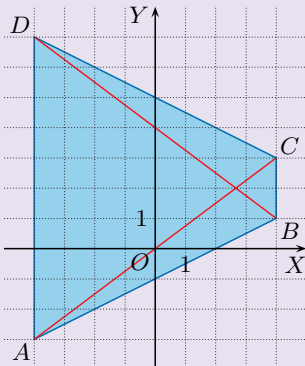
Proste przecinają się w punkcie $(-2, 1)$.

$$14. a_{KM} = \frac{1+5}{8+4} = \frac{1}{2}$$

Przekątne rombu są prostopadłe, więc:

$$a_{LN} = -\frac{1}{a_{KM}} = -2$$

15.1.



Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AC :

$$\begin{cases} -3 = a \cdot (-4) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

$$\text{stąd } a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BD :

$$\begin{cases} 1 = a_1 \cdot 4 + b_1 \\ 7 = a_1 \cdot (-4) + b_1 \end{cases}$$

$$\text{stąd } a_1 = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

$a \cdot a_1 \neq -1$, więc przekątne AC i BD nie są prostopadłe.

Zadanie 13 (0-2)

Na rysunku obok przedstawiono prostą k .

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Prosta, która przecina prostą k w punkcie o obu współrzędnych całkowitych, dana jest równaniem

$$\text{A. } y = -\frac{1}{3}x - 6$$

$$\text{B. } y = -x - 6$$

$$\text{C. } y = -2x - 6$$

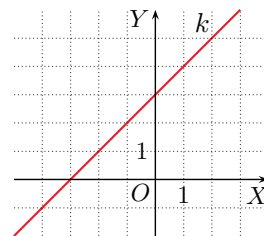
$$\text{D. } y = -3x - 6$$

$$\text{E. } y = \frac{1}{3}x + 2$$

$$\text{F. } y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\text{G. } y = x + 2$$

$$\text{H. } y = 3x + 2$$



Zadanie 14 (0-1)

Punkty $K(-4, -5)$ i $M(8, 1)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $KLMN$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Przekątna LN tego rombu jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym

A.	-2,	ponieważ przekątne rombu	1.	mają równe długości.
			2.	dzielią się na połowy.
B.	$-\frac{1}{2}$,		3.	są prostopadłe.

Zadanie 15

Dany jest trapez o kolejnych wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$ oraz $D(-4, 7)$.

D Zadanie 15.1 (0-2)

Uzasadnij, że przekątne tego trapezu nie są prostopadłe.

Zadanie 15.2 (0-3)

Wyznacz punkt, w którym przecinają się proste zawierające ramiona tego trapezu.

Zadanie 16 (0-2)

Dla jakiej liczby c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

D Zadanie 17 (0-2)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0,4x - (x - 1)$ są prostopadłe.

15.2. Z rysunku można odczytać równania prostych zawierających ramiona trapezu.

Prosta AB : $y = \frac{1}{2}x - 1$, Prosta DC : $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Wyznaczmy punkt wspólny tych prostych: $\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 5$, skąd $x = 6$ oraz $y = \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 2$.

Proste przecinają się w punkcie $(6, 2)$.

16. -4

17. Proste w postaci kierunkowej: $y = \frac{5}{3}x - 1$ i $y = -\frac{3}{5}x + 1$.

Ponieważ $a_1 \cdot a_2 = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -1$, więc proste są prostopadłe.

**Zadanie 18 (0-2)**

Prosta k jest prostopadła do prostej $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l . Wyznacz równanie prostej k .

Zadanie 19 (0-2)

Znajdź największą liczbę całkowitą m , dla której prosta $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

Zadanie 20 (0-4)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią OX oraz prostymi $2x - y - 2 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$.

D Zadanie 21 (0-4)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Wykaż, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 22

Punkty $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

D Zadanie 22.1 (0-2)

Uzasadnij, że równoległobok $ABCD$ nie jest prostokątem.

Zadanie 22.2 (0-4)

Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD .

Zadanie 23 (0-4)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 24 (0-4)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B , a prosta $y = 1,5x - 6$ – w punktach C i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 25 (0-4)

Punkty $P(-3, 0)$ i $S(-1, 4)$ są wierzchołkami prostokąta $PQRS$ oraz wierzchołek R leży na osi OX . Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego prostokąta.

Zadanie 26 (0-4)

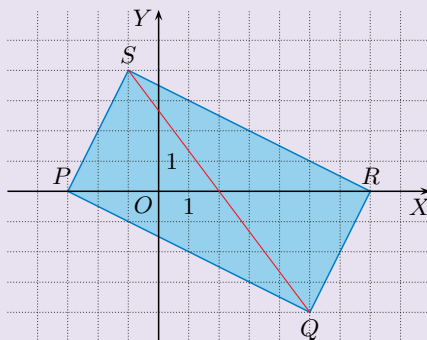
Punkty $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$ i $C(4, 0)$ są wierzchołkami trapezu prostokątnego $ABCD$ o podstawach AD i BC . Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

25. Współczynnik kierunkowy prostej PS jest równy 2. Równanie prostej SR , prostopadłej do prostej PS i przechodzącej przez punkt S :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

Zatem $R(7, 0)$. Przekątne prostokąta dzielą się w połowie, więc punkt przecięcia przekątnych ma współrzędne $(2, 0)$.

26. $D(\frac{14}{5}, \frac{12}{5})$



18. Punkt przecięcia z osią OX : $(-4, 0)$. Równanie prostej k : $y = -2x - 8$.

19. $\frac{3}{2}m + 9 < 0$, stąd $m < -6$
Największa liczba całkowita spełniająca nierówność:
 $m = -7$.

20. Punkty przecięcia prostych z osią OX : $A(-5, 0)$ i $B(1, 0)$, czyli podstawa trójkąta $|AB| = 6$. Punkt przecięcia prostych: $C(3, 4)$, czyli wysokość trójkąta $h = 4$.
Pole trójkąta:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

21. Równanie prostej PQ :
 $y = -\frac{3}{2}x - 1$

Współczynniki kierunkowe prostych PQ i $y = \frac{2}{3}x - 6$ spełniają warunek prostopadłości: $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$. Zatem trójkąt jest prostokątny.

- 22.1. $a_{AB} = \frac{-3+5}{4-0} = \frac{1}{4}$,

$$a_{BC} = \frac{5+3}{4-8} = -2,$$

$a_{AB} \cdot a_{BC} = -\frac{1}{2}$, więc proste AB i BC nie są prostopadłe, co oznacza, że czworokąt $ABCD$ nie jest prostokątem.

- 22.2. $a_{AB} = \frac{1}{4}$, $a_{BC} = -2$
Równanie prostej AD , równoległej do prostej BC i przechodzącej przez punkt A :

$$y = -2x - 5$$

Równanie prostej CD , równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C :

$$y = \frac{1}{4}x + 4$$

23. Niech $A(-3, -5)$, $B(3, 4)$.
 $a_{AB} = \frac{3}{2}$

Równanie drugiej przyprostokątnej wychodzącej z wierzchołka B : $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

Punkt C ma współrzędne $(-3, 8)$. Pole trójkąta:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

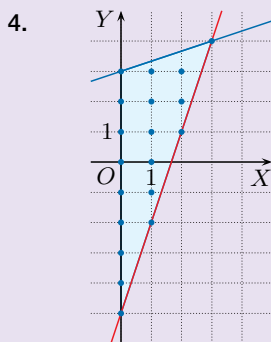
24. Współrzędne wierzchołków czworokąta: $A(0, 5)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -6)$, $D(4, 0)$.
Pole czworokąta jest równe sumie pól trójkątów ABC i CDA :
 $P = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 38,5$



1. Współczynnik kierunkowy prostej AB : $a = 3$
 Prosta CD : $y = 3x - 14$
 $x_0 = \frac{14}{3}$

2.
$$\begin{cases} x = m - 240 \\ y = m - 310 \end{cases}$$

 $m - 240 > 0$ i $m - 310 > 0$,
 czyli $m > 310$
 Zatem $m = 311$.



$$n = 19$$

5. Przekształcamy układ równań

$$\begin{cases} y = m^2x + 2x \\ y = -n^2x - x - 2 \end{cases}$$

do postaci

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{m^2 + n^2 + 3} \\ y = \frac{-2(m^2 + 2)}{m^2 + n^2 + 3} \end{cases}$$

$m^2 + n^2 + 3 > 0$ dla dowolnych wartości parametrów m i n .

Stąd $x < 0$, $y < 0$.

Zatem punkt przecięcia prostych należy do III ćwiartki dla dowolnych wartości parametrów m i n .

6. Dla $x = 0$ mamy $y = -1$.
 Załóżmy, że punkt (p, q) , gdzie $p, q \in \mathbb{Q}$ oraz $p \neq 0$, należy do wykresu funkcji $y = \sqrt{6}x - 1$.
 Wówczas:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{6}p - 1 \\ q^2 &= 6p^2 - 2\sqrt{6}p + 1 \\ \sqrt{6} &= \frac{6p^2 - q^2 + 1}{2p} \end{aligned}$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą niewymierną, a prawa wymierną. Otrzymana sprzeczność oznacza, że założenie jest fałszywe.

Zadanie 1 (0-2)

Punkty $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(4, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Bok CD tego równoległoboku zawiera się w prostej przecinającej oś OX w punkcie $(x_0, 0)$. Wyznacz x_0 .

Zadanie 2 (0-2)

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $m \neq 0$, dla której rozwiązaniem poniższego układu równań jest para liczb dodatnich.

$$\begin{cases} 2x - y = m - 170 \\ mx + my = 2m^2 - 550m \end{cases}$$

Zadanie 3

Dany jest czworokąt o wierzchołkach $A(0, -4)$, $B(6, -4)$, $C(8, 0)$ oraz $D(3, 2)$.

D Zadanie 3.1 (0-3)

Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ nie jest trapezem prostokątnym.

D Zadanie 3.2 (0-3)

Udowodnij, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe $\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$.

Zadanie 4 (0-2)

Wyznacz liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do trójkąta, którego boki są zawarte w prostych:

$$x = 0, \quad x - 3y + 9 = 0, \quad 3x - y - 5 = 0$$

D Zadanie 5 (0-4)

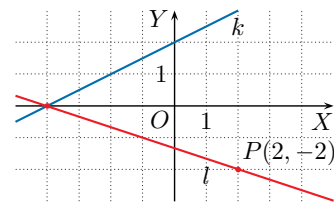
Udowodnij, że proste $y = m^2x + 2x$ i $y = -n^2x - x - 2$ przecinają się w punkcie należącym do III ćwiartki układu współrzędnych dla dowolnych wartości parametrów m i n .

D Zadanie 6 (0-4)

Udowodnij, że do prostej $y = \sqrt{6}x - 1$ należy tylko jeden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

D Zadanie 7 (0-5)

Dwa boki trójkąta prostokątnego są zawarte w prostych k i l , a trzeci bok jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt P (rysunek obok). Udowodnij, że pole tego trójkąta jest równe 10 lub 20.



7. Trójkąt będzie prostokątny w dwóch przypadkach:

I przypadek – trzeci bok jest prostopadły do prostej k .

Równanie prostej k : $y = \frac{1}{2}x + 2$, czyli trzeci bok zawarty jest w prostej $y = -2x + 2$.

Wówczas pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10$.

II przypadek – trzeci bok jest prostopadły do prostej l .

Równanie prostej l : $y = -\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$, czyli trzeci bok zawarty jest w prostej $y = 3x - 8$. Punkt przecięcia trzeciego boku z prostą k : $(4, 4)$. Wówczas pole trójkąta jest równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 20.$$

