

3 Układy równań

Samolot lecący pod wiatr przebywa trasę 1200 km w ciągu 2,4 h. Tę samą trasę z wiatrem pokonuje w 2 h. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru (przyjmujemy, że prędkości te są stałe)?

Jeśli oznaczmy przez x prędkość samolotu, a przez y prędkość wiatru, to do opisu sytuacji potrzebujemy dwóch równań z niewiadomymi x i y . Poszukiwanym rozwiązaniem są wielkości spełniające jednocześnie oba te równania: $x = 550$ km/h i $y = 50$ km/h.

Rozdział ten poświęcony jest metodom rozwiązywania układów równań oraz wykorzystaniu ich do rozwiązywania zadań tekstowych.



Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań

Przykład 1

W skarbonce znajduje się 12 monet – są to monety 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 36 zł. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce.

Oznaczmy przez x liczbę 2-złotówek, wówczas liczba 5-złotówek jest równa $12 - x$. Zapisujemy równanie uwzględniające informacje zawarte w zadaniu:

$$2x + 5(12 - x) = 36$$

$$2x + 60 - 5x = 36$$

$$-3x = -24$$

$$x = 8$$

$$\text{Sprawdzenie: } 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 36$$

Zatem w skarbonce znajduje się 8 monet 2-złotowych i 4 monety 5-złotowe.

Odpowiedzi do zadań

1. x – liczba monet 2-złotowych,
 $13 - x$ – liczba monet 5-złotowych,

$$2x + 5(13 - x) = 44$$

$$-3x = -21$$

$$x = 7$$

Zatem jest $13 - 7 = 6$ monet 5-złotowych.

2. x – liczba monet 20-groszowych,
 x – liczba monet 50-groszowych,
 $20 - 2x$ – liczba monet 10-groszowych,

$$20x + 50x + 10(20 - 2x) = 600$$

$$50x = 400$$

$$x = 8$$

$$20 - 2 \cdot 8 = 4$$

Są 4 monety 10-groszowe.

1. W portmonetce znajduje się 19 monet: 6 monet 1-złotowych oraz monety 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 50 zł. Oblicz, ile monet 5-złotowych znajduje się w portmonetce.

2. Otrzymaliśmy 6 zł reszty w monetach 10-, 20- i 50-groszowych. Monet 20- i 50-groszowych było tyle samo, a wszystkich monet było 20. Oblicz, ile otrzymaliśmy monet 10-groszowych.

Przykład 2

Z dwóch miast odległych o 390 km wyjechały o tej samej godzinie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy samochód jechał z prędkością 60 km/h, a drugi z prędkością o 10 km/h większą. Po jakim czasie samochody się spotkają?

Oznaczmy przez t czas w godzinach, jaki minął od wyjazdu do momentu spotkania. Pierwszy samochód przejechał w tym czasie $60t$ km, a drugi – $70t$ km. Otrzymujemy równanie:

$$60t + 70t = 390$$

$$130t = 390$$

$$t = 3$$

Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zatem samochody spotkają się po 3 godzinach.

3. Samochód pokonał trasę o długości 525 km. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 90 km/h. Przejechanie drugiego odcinka z prędkością 60 km/h zajęło mu dwa razy więcej czasu niż przejechanie pierwszego odcinka. Ile czasu trwała cała podróż?

3. x – długość pierwszego odcinka trasy,
 $525 - x$ – długość drugiego odcinka trasy,
 $\frac{x}{90}$ – czas przejazdu pierwszego odcinka trasy,
 $\frac{525 - x}{60}$ – czas przejazdu drugiego odcinka trasy.

$$2 \cdot \frac{x}{90} = \frac{525 - x}{60}$$

$$x = 225$$

Zatem czas przejazdu pierwszego odcinka trasy jest równy $\frac{225}{90} = 2,5$ [h], a czas przejazdu całej trasy wynosi $3 \cdot 2,5 = 7,5$ [h].

$$s = v \cdot t$$

gdzie:

s – droga,

v – prędkość,

t – czas

3.1. Co to jest układ równań

Przykład 1

Podaj trzy pary liczb x, y spełniające równanie $2x + 4y = 20$.

Przykładowe pary:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 4,75 \end{cases}$$

Po wybraniu jako x dowolnej liczby wyznaczamy y , rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie $2x + 4y = 20$ to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety 2- i 5-złotowe. Wiadomo, że w skarbonce jest 26 zł. Ile monet 2-, a ile 5-złotowych wrzucono do skarbonki?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

x – liczba monet 2-złotowych,

y – liczba monet 5-złotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań: $x + y = 7$ (do skarbonki wrzucono 7 monet) i $2x + 5y = 26$ (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet x i y mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie $x + y = 7$ spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia drugie równanie $2x + 5y = 26$.

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$, czyli do skarbonki wrzucono 3 monety 2-złotowe i 4 monety 5-złotowe.

Ćwiczenie 1

Kasjerka wydała resztę 2 zł 10 gr w 9 monetach, wśród których były tylko 10- i 50-groszówki. Ile było 10-groszówek, a ile 50-groszówek?

Ćwiczenie 1

x – liczba 10-groszówek,

y – liczba 50-groszówek.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 50y = 210 \end{cases}$$

Zauważmy, że mogły być co najwyżej cztery 50-groszówki.

Dla $y = 4$ byłoby tylko 5 monet ($4 \cdot 50 + 10$).

Dla $y = 3$ byłoby 9 monet ($3 \cdot 50 + 6 \cdot 10$). Zatem:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Było sześć 10-groszówek i trzy 50-groszówki.

Uczeń:

- podaje pary liczb spełniające równanie liniowe z dwiema niewiadomymi,
- sprawdza, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań,
- dopisuje drugie równanie tak, aby dana para liczb spełniała dany układ równań,
- zapisuje podane informacje w postaci układu równań.

Komentarz

Przedstawione tu rozwiązanie jest niealgebraiczne. Jest ono dobrym wprowadzeniem do rozwiązywania układów równań.

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa jednocześnie rozpatrywane równania opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań
$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$$

A. Podstawiamy do równań układu $x = 1$ i $y = 2$.

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -1 + 2 \cdot 2 = 3 \neq 14 & \text{Drugie równanie nie jest spełnione.} \end{cases}$$

Zatem para $x = 1, y = 2$ nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu $x = -2$ i $y = 6$.

$$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -8 + 18 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-2) + 2 \cdot 6 = 2 + 12 = 14 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem para $x = -2, y = 6$ spełnia podany układ równań.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ -\frac{1}{2}x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1,5 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -5 \\ y = 1,5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a), c), f) tak
b), d), e) nie

1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ spełnia podany układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 7x - y = 17 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{4}x = 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases} \end{array}$$

Ćwiczenie 2

$$\text{A. } \begin{cases} 3 \cdot (-6) - 2 \cdot 0 = -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-6) + 3 \cdot 0 = 3 \neq 7 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} 3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-1,5) = -12 \neq -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-5) + 3 \cdot (-1,5) = -2 \neq 7 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 1,5 = -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-5) + 3 \cdot 1,5 = 7 \end{cases}$$

Para liczb $x = -5, y = 1,5$ spełnia podany układ równań.

$$\text{D. } \begin{cases} 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 11 \neq 7 \end{cases}$$

2. Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

a) $3x + 2y = 17$ b) $3x + 4y = 17$ c) $2x + 4y = 17$

4. Do podanego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez wskazaną parę liczb.

a) $4x + 3y = 14$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$ c) $4x - 9y = -1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $3x - 7y = 6$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$ d) $12x + \frac{1}{2}y = -10$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases}$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Suma liczb x i y wynosi 5. Różnica tych liczb wynosi 2.

b) Liczba x jest o 8 większa od liczby y . Liczba y jest pięciokrotnie mniejsza od liczby x .

c) Liczba x jest trzykrotnie większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 10.

d) Liczba x jest o 3 mniejsza od liczby y . Różnica liczb x i y jest dwa razy większa od liczby y .

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba a stanowi 40% liczby b . Gdy do 20% liczby a dodamy 60% liczby b , to otrzymamy 4.

b) Suma liczb a i b jest równa 14. Gdy do 120% liczby a dodamy 70% liczby b , to otrzymamy sumę a i b .

c) Liczba o 10% mniejsza od liczby a jest o 10% większa od liczby b . Różnica liczby o 15% większej od a i liczby o 15% mniejszej od b wynosi 1.

7. Dla jakich wartości parametrów m i n rozwiązaniem układu równań jest podana para liczb?

a) $\begin{cases} mx + 2y = 39 \\ -8x + ny = -34 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - my = 5 \\ nx - 10y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

2. C

3. a) $(1, 7)$, $(3, 4)$, $(5, 1)$

b) $(3, 2)$

c) Nie ma takich liczb.

4. a) np. $x + y = 3$

b) np. $y - x = 2$

c) np. $4x + 3y = 3$

d) np. $2x + y = -9$

5. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + 8 = x \\ 5y = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3y \\ \frac{x+y}{2} = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3 = y \\ x - y = 2y \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} a = 0,4b \\ 0,2a + 0,6b = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b = 14 \\ 1,2a + 0,7b = a + b \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0,9a = 1,1b \\ 1,15a - 0,85b = 1 \end{cases}$

7. a) $m = 7$, $n = 3$

b) $m = 4$, $n = 6$

Uczeń:

- rozwiązuje układ równań metodą podstawiania,
- określa typ układu równań (czy dany układ równań jest układem oznaczonym, nieoznaczonym, czy sprzecznym),
- dopisuje drugie równanie tak, aby układ równań był układem oznaczonym, nieoznaczonym lub sprzecznym.

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Wyznaczamy niewiadomą } x \text{ z pierwszego równania.} \\ \text{Drugie równanie przepisujemy bez zmian.} \end{array}$$

W miejsce x w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie $3y + 5$, dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian.} \\ \text{Podstawiamy wyrażenie } 3y + 5 \\ \text{w miejsce } x \text{ w drugim równaniu.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 \end{cases} \quad \text{Rozwiązujemy drugie równanie z niewiadomą } y.$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 / : 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy wyznaczoną wartość } y \text{ do pierwszego} \\ \text{równania i obliczamy niewiadomą } x. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Otrzymana para liczb jest jedynym} \\ \text{rozwiązaniem układu równań.} \end{array}$$

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż podany układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} -3x + y = -20 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ -5x + y = 11 \end{cases}$$

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Wyznaczamy niewiadomą } y \text{ z drugiego równania.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy wyrażenie } x + 2 \text{ w miejsce } y \text{ w pierwszym równaniu.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą } x.$$

$$\begin{cases} 7x = 0 \text{ } / : 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases} \quad \text{Wyznaczoną wartość niewiadomej } x \text{ podstawiamy do drugiego równania.}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Para liczb $x = 0$, $y = 2$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

Ćwiczenie 1

$$\text{a)} \begin{cases} x = 12 - 2y \\ 12 - 2y - 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} y = 3x - 20 \\ 2x - (3x - 20) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 19 \\ y = 37 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x = 3 - 3y \\ 3 - 3y - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x - 3(20 - 2x) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 5x + 3(2x - 7) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} y = 5x + 11 \\ -7x + 2(5x + 11) = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Ćwiczenie 2

$$\text{a) } \begin{cases} x - 5y = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x - (3 - 2x) = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y = -6 \\ x - 2y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ x - 2(2x + 6) = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2x - 4y \\ x + y = 7 - y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x = x - y + 3 \\ 2 = y - x \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2(x + 2) = y - 2 \\ 2x - y = x + y - 15 \end{cases}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3 = 2(x + 1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 / : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 7 \end{cases} \quad \text{Na dowolnym etapie rozwiązywania możemy zamienić równania miejscami.}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: $x = 2$, $y = -3$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5 \\ \frac{x-y}{3} = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{3x+y}{2} \\ x = 2(x+y+1) \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = 2 + \frac{y+1}{3} \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Nie każdy układ równań ma rozwiązanie. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb (jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 12 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - 2y = 9x + 3y \\ x + 2y = -2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - y - y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x + 2(-x) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x - 4 \\ 3x + 2(-x - 4) = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 \end{cases}$$

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3 + 2y) + 4y = 7 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania.
Podstawiamy wyrażenie $3 + 2y$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -6 - 4y + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 0y = 13 \end{cases}$$

Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną wartość niewiadomej y .

Zatem **żadna para liczb nie spełnia podanego układu równań**.

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Na przykład układ:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb x, y , których suma jest równa 2.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ -3x + y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci.
Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} 3x - (3x - 6) = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Podstawiamy wyrażenie $3x - 6$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$$\begin{cases} 3x - 3x + 6 = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Równanie $0x = 0$ (możemy je również zapisać $0 = 0$) jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość wstawimy w miejsce niewiadomej x .
Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.

Równanie $y = 3x - 6$ jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**,

np. spełniają go pary liczb: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = -4,5 \end{cases}$

Ćwiczenie 4

a) $\begin{cases} x = 12 - 2y \\ 0y = 0 \end{cases}$

Układ nieoznaczony

b) $\begin{cases} x = 3 - 3y \\ 3 - 3y - 3y = -3 \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$

Układ oznaczony

c) $\begin{cases} x = 7 - 3y \\ 2(7 - 3y) + 6y = 4 \\ \begin{cases} x = 7 - 3y \\ 0y = -10 \end{cases} \end{cases}$

Układ sprzeczny

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 2,2, y = 1,6$
b) $x = \frac{1}{7}, y = -\frac{2}{7}$
c) $x = 1, y = 0$
d) $x = 1,7, y = 0,9$
e) $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \\ \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 2x - 2(-2x - 1) = 1 \end{cases} \end{cases}$
 $\begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$
f) $\begin{cases} 4x - 3y = -20 \\ 16x + 15y = 460 \\ \begin{cases} x = \frac{3}{4}y - 5 \\ 16(\frac{3}{4}y - 5) + 15y = 460 \end{cases} \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x = 3y - 2 \\ y - 6x = -6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 1 - x - y \\ 0,2x + 0,1y = -0,1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = 0,7 \\ x + 4y = 5,3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0,4x - 0,3y = -2 \\ 1,6x + 1,5y = 46 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3(x - y) - 4(x - y) = -5 \\ 6 - x = 2(x - 3y) - 18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3 - 2(y - 4x) = 4(1 - x) - 19 \\ -3(2x - y + 1) = -2y + 26 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 6x - (2y - 3x) = 7y - 9 \\ -3x + 8 = -2(x - 2y - 9) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4(3x - 0,5) - 5(y + 0,5) = 9 \\ -2x - 5(y - 2,5) = -9y + 5,5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x - 2(3 - 2(x - y)) = 23 \\ 6 + 5(1 - 3(y - x)) = 20x + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x - 1) - 2(y - 0,5) = 7 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1,5) = 13,5 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 4y = 29 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 12x - 5y = 13,5 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = -1,5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x - y = -9 \\ 6x - 5y = -29 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 27 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = -2,8 \\ y = -1,8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

a) $\begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2+x}{4} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2} = \frac{x+2y}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-6}{5} + 6y = 3 \\ x - 6y - 1 = 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{y-1}{4} = 2 \end{cases}$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x-3y) + 3(x-2y) = 1 \\ \frac{5}{2}x - 2y = 4(y+1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 7(y-1) = -2(\frac{5}{2} + x) \\ -2(1-2x-y) = 1-x-5y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x-2y) - 2(y-x+1,5) = 5 \\ \frac{2-x}{5} - 0,3y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(1-x) - 5(2-y) = 5 \\ 0,2(2-3x) + y = 0,8 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (x+2)^2 + 2y = x + 15 + (x-2)(x+2) \\ x + (y-1)^2 = 1 - (\sqrt{3}-y)(y+\sqrt{3}) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(1-2x) - y(1-y) = (y-\sqrt{2}x)(y+\sqrt{2}x) + 3 \\ 2x - (2y - \frac{1}{4})^2 + 16\frac{1}{16} = (2y+3)(3-2y) \end{cases}$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3(y-2) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{2}y = 2(x-1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y - x = 8 \\ x + 4 = 2(y-2) \end{cases}$

7. Dane jest równanie $3x - 4y = 2$. Dopisz do niego drugie równanie, tak aby otrzymany układ równań był:

a) sprzeczny,

b) nieoznaczony,

c) oznaczony.

8. Dla których wartości parametru $m \in \{-2, 0, 2\}$ układ jest oznaczony, dla których nieoznaczony, a dla których sprzeczny?

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + my = 3m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ mx + 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + 2y = 2 \\ 2x + my = -2 \end{cases}$

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

nie jest układem równań liniowych. Ma cztery rozwiązania, które są parami liczb całkowitych. Podaj te rozwiązania.

9. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$ gdy:

$x - y = 0$ lub $x + y = 0$. Zatem $x = y$ lub $x = -y$.

Dla $x = y$ (i $x = -y$) mamy: $x^2 + y^2 = 2y^2 = 8$, czyli $y = 2$ lub $y = -2$.

Rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

3. a) tak

b), c), d) nie

4. a) 0

b) 1

c) 1

d) 0

5. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases}$

6. a), c) nieoznaczony
b) sprzeczny

7. a) np. $6x - 1 = 8y$

b) np. $6x - 4 = 8y$

c) np. $3x - 8y = 2$

8. a) oznaczony dla $m = -2$
lub $m = 0$,
nieoznaczony dla $m = 2$

b) oznaczony dla $m = -2$
lub $m = 0$,
sprzeczny dla $m = 2$

c) nieoznaczony dla $m = -2$,
oznaczony dla $m = 0$,
sprzeczny dla $m = 2$

Uczeń:

- rozwiązuje układ równań metodą przeciwnych współczynników,
- zapisuje rozwiązanie układu równań w przypadku, gdy jest to układ nieoznaczony.

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej x są liczbami przeciwnymi (1 i -1), zatem po dodaniu obu równań stronami, otrzymamy równanie z jedną niewiadomą y .

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases} & + & \\
 \hline
 x - x + 3y + 6y = -4 + 13 & \text{Dodajemy równania stronami.} & \\
 9y = 9 & \text{Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą.} & \\
 y = 1 & &
 \end{array}$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej y podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania $x + 3y = -4$. Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 1 w miejsce y w równaniu $x + 3y = -4$ i obliczamy niewiadomą x .

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7 + 3 \cdot 1 = -7 + 3 = -4 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-7) + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases}
 \end{array}$$

Ćwiczenie 1

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases} \\
 \hline
 6x = 3 & 4y = 4 & -2y = 10 \\
 \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} & \begin{cases} x = -\frac{14}{5} \\ y = -5 \end{cases}
 \end{array}$$

Czasami zanim dodamy równania stronami, najpierw musimy pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej y .

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{Mnożymy obie strony drugiego równania przez } -4. \\ &\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases} \quad \text{Dodajemy równania stronami.} \\ &\hline &5x - 8x = 6 - 12 \quad \text{Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą.} \end{aligned}$$

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x :

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, np. do równania $2x + y = 3$, i otrzymujemy nowy, równoważny układ równań:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy liczbę 2 w miejsce } x \text{ w równaniu } 2x + y = 3. \\ &\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Otrzymana para liczb $x = 2, y = -1$ jest rozwiązaniem podanego układu.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -5x - 7y = 8 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x + y = -13 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x + 3y = -3,5 \\ 3x - 2y = 4,5 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \begin{cases} 25x - 10y = 80 \\ 6x + 10y = -18 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -10x - 14y = 16 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 4x + 6y = -7 \\ 9x - 6y = 13,5 \end{cases} \\ \hline & & \\ 31x = 62 & 7y = 7 & 13x = 6,5 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} & \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} -3x + 6y = -9 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \hline & 11y = -11 \\ & y = -1 \\ \text{b)} \begin{cases} -9x - 3y = 39 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} & \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \\ \hline & -7x = 35 \\ & x = -5 \\ \text{c)} \begin{cases} 8x - 14y = 6 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{7} \end{cases} \\ \hline & 11x = 11 \end{array}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \quad / \cdot 5 \\ 5x + 7y = 4 \quad / \cdot (-2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5,} \\ \text{a drugiego przez } -2. \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \end{cases} \quad \text{Dodajemy równania stronami.}$$

$$y = 2$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{Otrzymujemy nowy układ równań, równoważny do danego.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy liczbę 2 w miejsce } y \text{ w drugim równaniu.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = -4 \quad / : 2 \\ x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $x = -2$, $y = 2$.

Ćwiczenie 3

$$\text{a) } + \begin{cases} 9x - 6y = 30 \\ 4x + 6y = -4 \end{cases}$$

$$13x = 26$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } + \begin{cases} -12x - 21y = -21 \\ 12x + 24y = 12 \end{cases}$$

$$3y = -9$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } + \begin{cases} 12x + 4y = 26 \\ -12x + 21y = -6 \end{cases}$$

$$25y = 20$$

$$\begin{cases} x = 1,9 \\ y = 0,8 \end{cases}$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 6x + 2y = 13 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4

Podaj liczby, przez które można pomnożyć obie strony równań układu, aby móc skorzystać z metody przeciwnych współczynników. Nie rozwiązuj układu.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 17y = 4 \\ \frac{1}{3}x - 13y = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{2}{5}x - 6y = 1 \\ 3x - 5y = 9 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4

- a) np. 5 i 3
- b) np. 2 i 3
- c) np. -5 i 6

Przykład 4

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} 5(x - y) + 5 = 2(2x + y) \\ 2(x - 1) = y + 1 \end{cases}$$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x - 5y + 5 = 4x + 2y \\ 2x - 2 = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 7y = -5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Redukujemy wyrazy podobne. Niewiadome} \\ \text{zapisujemy po lewej stronie każdego równania.} \end{array}$$

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

Metoda podstawiania

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 2(-5 + 7y) - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ -10 + 14y - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 13y = 13 \quad / : 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Metoda przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} x - 7y = -5 \quad / \cdot (-2) \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x + 14y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \\ + \\ \hline 13y = 13 \quad / : 13 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:

- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \quad / \cdot 3 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.

$$+ \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\hline 0x + 0y = 7$$

Otrzymaliśmy równanie spreczne.

Równania $0x + 0y = 7$ (można je zapisać w postaci $0 = 7$) nie spełnia żadna para liczb x i y , zatem układ równań jest spreczny.

Przykład 6

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \quad / \cdot 3 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \quad / \cdot 4 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.

$$+ \begin{cases} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\hline 0x + 0y = 0$$

Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Równanie $0x + 0y = 0$ (można je zapisać w postaci $0 = 0$) spełnia dowolna para liczb x i y . Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, dla których prawdziwe jest drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy układ równań jest nieoznaczony czy sprzeczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + 0,4y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 1,5x - 2y = 6 \\ x - 1\frac{1}{3}y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}y = 5 \end{cases} \end{array}$$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 5y = 3,5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 0,2(x + 2y) - 0,3(2x - y) = 3,5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x - y = 4x - 3y + 5 \\ x + y = 3x + 5y - 2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 0,01x - 0,01(y - 1) = -0,06 \\ 0,03x - 0,02(y - 2) = -0,12 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 0,01(4x - y) = 0,01y + 0,02 \\ 0,6(y - x) = 0,1(y + 2x + 1) \end{cases} \end{array}$$

3. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y + 2,5}{5} = x + 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{5y - x}{3} - \frac{7y - 3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y - 2}{6} = 2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases} \end{array}$$

4. Dla których wartości parametrów $m \in \{1, 3\}$ i $n \in \{1, 3\}$ układ jest nieoznaczony, a dla których – sprzeczny?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 18y = n \\ mx - 6y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 2mx - 1 \\ mx + y = -x + n \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{3. a)} \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 5x - y = -2,5 \\ \begin{cases} x = -\frac{10}{9} \\ y = -\frac{55}{18} \end{cases} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x - y = 8 \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x - 3y = -8 \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = -1 \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 14x + 13y = -12 \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x + 5y = 6 \\ x + 5y = 6 \\ \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

Ćwiczenie 5

a), c) Układ sprzeczny
b) Układ nieoznaczony

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 5, y = 3$
b) $x = 1, y = -3$
c) $x = 24,5, y = 18$
d) $x = 2, y = 0,5$
e) nieoznaczony:
 $y = -\frac{2}{3}x + 5, x \in \mathbb{R}$
f) sprzeczny

2. a) $x = -8, y = 4$
b) $x = -1, y = 1$
c) $x = -25, y = -5$
d) $x = 0, y = 5$
e) $x = -2, y = 5$
f) $x = 3, y = 5$

4. a) Układ nieoznaczony dla
 $m = 1$ i $n = 3$,
sprzeczny dla $m = 1$ i $n = 1$
b) Układ nieoznaczony dla
 $m = 3$ i $n = 1$,
sprzeczny dla $m = 3$ i $n = 3$

Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

Niektóre zagadnienia wymagają wprowadzenia trzech lub więcej niewiadomych. Tworzy się wtedy i rozwiązuje układ tylu równań, ile niewiadomych zostało wprowadzonych. Pokażemy, jak postępować w przypadku trzech równań z trzema niewiadomymi.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 20, y = -5, z = -5$
 b) $x = 2, y = 1, z = -1$
 c) $x = \frac{1}{11}, y = -\frac{3}{22}, z = \frac{2}{11}$

2. a) $x = 2, y = -1, z = 4$; tak
 b) $x = -1, y = 2, z = 4$; tak
 c) $x = 2, y = 1\frac{2}{5}, z = -3\frac{1}{5}$; nie
 d) $x = 2, y = -1, z = 4$; tak

1. Przeczytaj zamieszczony obok opis metody rozwiązywania układu trzech równań z trzema niewiadomymi, a następnie rozwiąż podany układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + y - z = 20 \\ x - y - z = 30 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 5x - 3y - z = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = -1 \end{cases}$$

■ Z jednego z równań wyznaczamy wybraną niewiadomą i podstawiamy otrzymane wyrażenie do obu pozostałych równań. Powstają w ten sposób dwa równania z dwiema niewiadomymi.

■ Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi dowolną metodą.

■ Obliczone wartości dwóch niewiadomych podstawiamy do dowolnego równania początkowego układu i obliczamy wartość trzeciej niewiadomej.

2. Czy podany układ równań spełnia trójka liczb całkowitych?

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 2y + z = 2 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 2y - z = 10 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y - z = -9 \\ 2y + 3z = 16 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

3. a) Suma trzech liczb jest równa 36. Suma pierwszej i drugiej liczby jest dwukrotnie większa od trzeciej liczby, a suma drugiej i trzeciej jest o 10 większa od pierwszej liczby. Jakie to liczby?
 b) Suma liczb a, b, c jest równa 27. Liczba c jest o 3 większa od średniej arytmetycznej liczb a i b , a liczba b jest o 3 mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a i c . Wyznacz liczby a, b i c .

$$\text{3. a) } \begin{cases} x + y + z = 36 \\ x + y = 2z \\ y + z = x + 10 \\ x = 13 \\ y = 11 \\ z = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} a + b + c = 27 \\ \frac{a+b}{2} = c - 3 \\ \frac{a+c}{2} = b + 3 \\ a = 9 \\ b = 7 \\ c = 11 \end{cases}$$

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

Przykład 1

Dwie ciężarówki przewożące piasek wykonały łącznie 13 kursów. Jedna z nich przewoziła za każdym razem 15 ton, a druga – 8 ton piasku. Łącznie przewiozły one 132 tony piasku. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek? Ułóż odpowiedni układ równań i go rozwiąż.

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,

y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

Zapisujemy układ równań odpowiadający treści zadania.

$$\begin{cases} x + y = 13 & \text{Łączna liczba kursów dwóch ciężarówek.} \\ 15x + 8y = 132 & \text{Łączna masa przewiezonego piasku.} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y = 13 \quad / \cdot (-8) \\ 15x + 8y = 132 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Układ równań rozwiązujemy metodą} \\ \text{przeciwnych współczynników.} \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \begin{cases} -8x - 8y = -104 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases} \\ + \\ \hline 7x = 28 \end{array}$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu równań $x = 4$ i $y = 9$.

Pierwsza ciężarówka wykonała 4 kursy, a druga 9.

Ćwiczenie 1

Dwie ciężarówki, jedna o ładowności 6 ton, a druga – 10 ton, przewiozły łącznie 460 ton piasku podczas 50 kursów (za każdym razem były maksymalnie obciążone). Ile kursów wykonała jedna ciężarówka, a ile druga?

Ćwiczenie 2

a) Śliwki na targowisku kosztowały 6,50 zł/kg, a wiśnie – 8,50 zł/kg. Gospodyni kupiła łącznie 4 kg tych owoców i zapłaciła za nie 31 zł. Ile kupiła śliwek, a ile wiśni?

b) Warzywa znajdujące się na stoisku kosztują: marchew – 4 zł/kg, buraki – 6 zł/kg, rzepa – 7,50 zł/kg. Kierownik stołówki kupił 8 kg tych warzyw, w tym 2 kg rzepy. Za wszystko zapłacił 49 zł. Ile kupił marchwi, a ile buraków?

Ćwiczenie 2

a) x – ilość kupionych śliwek [kg],
 y – ilość kupionych wiśni [kg].

$$\begin{cases} 6,5x + 8,5y = 31 \\ x + y = 4 \\ x = 1,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Gospodyni kupiła 1,5 kg śliwek i 2,5 kg wiśni.

b) x – ilość kupionej marchwi [kg],
 y – ilość kupionych buraków [kg].

$$\begin{cases} 4x + 6y + 7,5 \cdot 2 = 49 \\ x + y + 2 = 8 \\ x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kierownik stołówki kupił 1 kg marchwi i 5 kg buraków.

Uczeń:

– układa i rozwiązuje układ równań do zadania z treścią.

Ćwiczenie 1

x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,
 y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

$$\begin{cases} 6x + 10y = 460 \\ x + y = 50 \\ x = 10 \\ y = 40 \end{cases}$$

Pierwsza ciężarówka wykonała 10 kursów, a druga 40.

Multibook

• Układ równań – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.4

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

x – obecny wiek Tomka,
 y – obecny wiek siostry Tomka.

$$\begin{cases} x - 4 = y \\ x + 2 + y + 2 = 30 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 11 \end{cases}$$

Obecnie Tomek ma 15 lat, a jego siostra ma 11 lat.

Przykład 2

Piotr i Dorota mają razem 30 lat. Dorota jest o cztery lata młodsza od Piotra. Oblicz wiek Doroty i wiek Piotra.

Oznaczamy niewiadome:

d – wiek Doroty w latach, p – wiek Piotra w latach.

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + p = 30 \\ d = p - 4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} p = 17 \\ d = 13 \end{cases}$$

Dorota ma 13 lat, a Piotr – 17 lat.

Ćwiczenie 3

Tomek jest o cztery lata starszy od swojej siostry. Za dwa lata będą mieli w sumie 30 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Przykład 3

Sześć lat temu mama Basi była trzy razy starsza od swojej córki, a za cztery lata będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat ma obecnie Basia, a ile jej mama?

Oznaczamy niewiadome:

b – wiek Basi w latach, m – wiek mamy Basi w latach.

Informacje z zadania wygodnie jest przedstawić w formie tabeli.

	Sześć lat temu	Obecnie	Za cztery lata
Wiek Basi	$b - 6$	b	$b + 4$
Wiek mamy Basi	$m - 6$	m	$m + 4$

Zapisujemy układ równań, w którym pierwsze równanie opisuje sytuację sprzed sześciu lat, a drugie – sytuację, która nastąpi za cztery lata.

$$\begin{cases} m - 6 = 3(b - 6) \\ m + 4 = 2(b + 4) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} b = 16 \\ m = 36 \end{cases}$$

Basia ma obecnie 16 lat, a jej mama – 36 lat.

Ćwiczenie 4

- a) Pięć lat temu Daria miała dwa razy mniej lat niż Maria. Daria jest młodsza od Marii o 5 lat. Ile lat ma obecnie Daria, a ile Maria?
- b) Za trzy lata Olek będzie o połowę starszy od Alka, a dziewięć lat temu Olek miał o dwa lata więcej niż wynosił podwojony wiek Alka. Ile lat ma obecnie Olek, a ile Alek?

Zadania

- Dziewięć lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Za dziewięć lat obaj będą mieli razem 85 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?
- Dwa lata temu Ania, jej siostra bliźniaczka i ich starszy brat mieli razem 45 lat. Za trzy lata suma wieku bliźniaczek będzie o 12 większa od wieku ich brata. Ile lat ma obecnie każde z nich?
- Moneta 2-złotowa waży 5,21 g, a 5-złotowa – 6,54 g. Skarbnik klasowy zebrał 30 monet o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Wszystkie monety ważyły łącznie 169,6 g. Ile monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych zebrał skarbnik?
- Wydano 48 złotych w 20 monetach: było wśród nich 8 monet 2-złotowych oraz monety 1- i 5-złotowe. Ile było monet 1-, a ile 5-złotowych?
- Kwotę 100 złotych wydano w monetach 1-, 2- i 5-złotowych – łącznie w 32 monetach, przy czym liczba monet 5-złotowych była o dwa większa od podwojonej liczby monet 1-złotowych. Ile monet każdego rodzaju wydano?
- Jednego dolara rozmieniono na monety 5-, 10- i 25-centowe. Okazało się, że po rozmienieniu było łącznie 12 monet, w tym jedna moneta 25-centowa. Ile było monet 5-, a ile 10-centowych?

1 dolar = 100 centów



Moneta 5-centowa



Moneta 10-centowa



Moneta 25-centowa



7. W skarbonce znajdowały się 4 dolary w monetach 5-, 10- i 25-centowych. Wszystkich monet było 29, a 10-centówek było trzy razy więcej niż 5-centówek. Ile było monet każdego nominału?

6. x – liczba monet 5-centowych,
 y – liczba monet 10-centowych.

$$\begin{cases} x + y + 1 = 12 \\ 5x + 10y + 25 = 100 \\ x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

7. x – liczba monet 5-centowych,
 y – liczba monet 10-centowych,
 z – liczba monet 25-centowych.

$$\begin{cases} x + y + z = 29 \\ 5x + 10y + 25z = 400 \\ y = 3x \\ x = 5 \\ y = 15 \\ z = 9 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4

- a) x – obecny wiek Darii,
 y – obecny wiek Marii.

$$\begin{cases} 2(x - 5) = y - 5 \\ x + 5 = y \\ x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

Obecnie Daria ma 10 lat,
a Maria ma 15 lat.

- b) x – obecny wiek Olka,
 y – obecny wiek Alka.

$$\begin{cases} x + 3 = 1,5(y + 3) \\ x - 9 = 2(y - 9) + 2 \\ x = 27 \\ y = 17 \end{cases}$$

Obecnie Olek ma 27 lat,
a Alek ma 17 lat.

Odpowiedzi do zadań

1. x – obecny wiek ojca,
 y – obecny wiek syna.

$$\begin{cases} x - 9 = 6(y - 9) \\ x + 9 + y + 9 = 85 \\ x = 51 \\ y = 16 \end{cases}$$

2. x – obecny wiek Ani i siostry,
 y – obecny wiek brata Ani.

$$\begin{cases} 2(x - 2) + y - 2 = 45 \\ 2(x + 3) = y + 3 + 12 \\ x = 15 \\ y = 21 \end{cases}$$

3. x – liczba monet 2-złotowych,
 y – liczba monet 5-złotowych.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5,21x + 6,54y = 169,6 \\ x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

4. x – liczba monet 1-złotowych,
 y – liczba monet 5-złotowych.

$$\begin{cases} 8 + x + y = 20 \\ 2 \cdot 8 + x + 5y = 48 \\ x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

5. x – liczba monet 1-złotowych,
 y – liczba monet 2-złotowych,
 z – liczba monet 5-złotowych.

$$\begin{cases} x + y + z = 32 \\ x + 2y + 5z = 100 \\ z = 2 + 2x \\ x = 6 \\ y = 12 \\ z = 14 \end{cases}$$

8. x, y – długości boków prostokąta [cm].

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 2x + 2y = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 5 \end{cases}$$

Pole prostokąta:

$$P = 5 \cdot 13 = 65 \text{ [cm}^2\text{]}$$

9. x, y – długości boków wyjściowego prostokąta [cm].

I przypadek

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ \frac{x+2}{y+6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 21 \end{cases}$$

II przypadek

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ \frac{x+6}{y+2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 25 \end{cases}$$

10. x – liczba biletów ulgowych,
 y – liczba biletów normalnych.

$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{4} \cdot 280 \\ 30x + 35y = 7000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 70 \\ y = 140 \end{cases}$$

11. x – cena bilet normalnego [zł],
 y – cena biletu ulgowego [zł].

$$\begin{cases} 50x + 22y = 654 \\ 70x + 42y = 994 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$$

12. x – cyfra dziesiątek wyjściowej liczby, y – cyfra jedności wyjściowej liczby.

$$\begin{cases} 10x + y - (10y + x) = 36 \\ 10x + y + 10y + x = 110 \end{cases}$$

Szukane liczby to: 73 i 37.

13. $\begin{cases} A + B = 121 \\ A = 2B + 7 \end{cases}$
 $A = 83, B = 38$

14. $\begin{cases} A - B = 320 \\ A + B = 388 \end{cases}$
 $A = 354, B = 34$

8. Długość jednego boku prostokąta jest o 3 cm większa od podwojonej długości drugiego boku. Obwód tego prostokąta jest równy 36 cm. Oblicz jego pole.

9. Obwód prostokąta jest równy 56 cm. Gdyby zwiększyć długość jednego jego boku o 2 cm, a drugiego o 6 cm, to stosunek długości boków otrzymanego prostokąta wynosiłby 1:3. Oblicz długości boków wyjściowego prostokąta (rozpatrz dwa przypadki).

10. Na widowni teatru muzycznego znajduje się 280 miejsc. Na spektakl sprzedano $\frac{3}{4}$ wszystkich miejsc i uzyskano przychód wysokości 7000 zł. Cena biletu ulgowego wynosi 30 zł, a normalnego 35 zł. Ile sprzedano biletów ulgowych, a ile normalnych?

11. W sobotę wystawę fotografii odwiedziły 72 osoby: 50 osób kupiło bilety normalne, pozostali kupili bilety ulgowe. Dochód ze sprzedaży biletów w tym dniu wyniósł 654 zł. W niedzielę wystawę obejrzało 112 osób, w tym 42 osoby, które kupiły bilety ulgowe. Tego dnia dochód ze sprzedaży biletów wyniósł 994 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile ulgowy?

12. Różnica między pewną liczbą dwucyfrową a liczbą otrzymaną w wyniku przestawienia cyfr tej liczby wynosi 36. Suma tych liczb wynosi 110. Jakie to liczby?

13. Dana jest dwucyfrowa liczba A oraz liczba B uzyskana z przestawienia cyfr liczby A . Suma liczb A i B wynosi 121, a liczba A jest o 7 większa od podwojonej liczby B . Wyznacz te liczby.

14. Dana jest trzycyfrowa liczba A o cyfrze dziesiątek równej 5. Po usunięciu tej cyfry otrzymujemy dwucyfrową liczbę B . Różnica liczb A i B wynosi 320, a suma liczb A i B jest równa 388. Jakie to liczby?

15. Liczba x powstaje z trzycyfrowej liczby y , mającej dwie cyfry takie same, przez zapisanie jej cyfr w odwrotnej kolejności. Różnica między liczbą x a liczbą y jest równa 396, a suma cyfr każdej z nich jest równa 16. Wyznacz te liczby.

16. W pewnym spotkaniu brało udział 180 osób. Ustawiono dla nich łącznie 60 krzeseł i pewną liczbę trzyosobowych kanap. Niestety, nie dla wszystkich starczyło miejsc siedzących. Stosunek liczby osób stojących do siedzących był równy 1:4. Oblicz, ile kanap ustawiono.

15. Liczby x i y mogą przyjąć jedną z 3 postaci:

$$x = 100a + 10a + b, \text{ wówczas } y = 100b + 10a + a$$

$$x = 100a + 10b + a, \text{ wówczas } y = 100a + 10b + a$$

$$x = 100b + 10a + a, \text{ wówczas } y = 100a + 10a + b$$

Drugi przypadek odrzucamy, ponieważ $x = y$, czyli różnica $x - y \neq 396$.

Rozpatrujemy dwa układy równań:

$$\begin{cases} 2a + b = 16 \\ 110a + b - (100b + 11a) = 396 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} 2a + b = 16 \\ 100b + 11a - (110a + b) = 396 \end{cases}$$

Tylko w drugim układzie rozwiązaniem są liczby całkowite: $a = 4$ i $b = 8$.

Zatem szukane liczby to: $x = 844$ i $y = 448$.

16. Ustawiono 28 kanap.

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Układy równań są często wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadań dotyczących wielkości podanych w procentach oraz zadań dotyczących prędkości.

Przykład 1

Ile kilogramów solanki o stężeniu 6% należy mieszać z solanką o stężeniu 2%, aby otrzymać 100 kg solanki o stężeniu 5%?

Oznaczamy niewiadome:

x – masa w kg solanki 6-procentowej,

y – masa w kg solanki 2-procentowej.

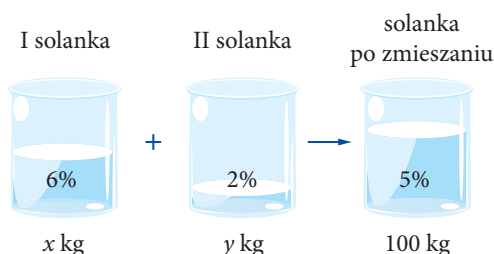
Układamy równania opisujące warunki zawarte w treści zadania:

$$x + y = 100$$

$$0,06 \cdot x + 0,02 \cdot y = 0,05 \cdot 100$$

Zapisujemy układ równań i go rozwiązujemy:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ 0,06x + 0,02y = 5 \end{array} \right. / \cdot (-50) \\ + \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ -3x - y = -250 \end{array} \right. \\ \hline -2x = -150 \quad / : (-2) \\ x = 75 \end{array}$$



Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu: $x = 75$ i $y = 25$. Sprawdzamy otrzymane rozwiązanie: $25 + 75 = 100$ oraz $0,06 \cdot 75 + 0,02 \cdot 25 = 5$.

Aby otrzymać 100 kg solanki 5-procentowej, należy mieszać 75 kg solanki 6-procentowej i 25 kg solanki 2-procentowej.

Ćwiczenie 1

a) Ile kilogramów solanki o stężeniu 13% należy mieszać z solanką o stężeniu 6%, aby otrzymać 35 kg solanki o stężeniu 9%?

b) Do 5-procentowego roztworu soli dosypano taką jej ilość, że otrzymano 95 g roztworu o stężeniu 6%. Ile soli dosypano?

Ćwiczenie 1

a) x – masa solanki 13-procentowej [kg],
 y – masa solanki 6-procentowej [kg].

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 0,13x + 0,06y = 0,09 \cdot 35 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$$

Aby otrzymać 35 kg solanki 9-procentowej, należy mieszać 15 kg solanki 13-procentowej i 20 kg solanki 6-procentowej.

b) x – masa solanki 5-procentowej [g],
 y – masa dosypanej soli [g].

$$\begin{cases} x + y = 95 \\ 0,05x + y = 0,06 \cdot 95 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 94 \\ y = 1 \end{cases}$$

Dosypano 1 gram soli.

Uczeń:

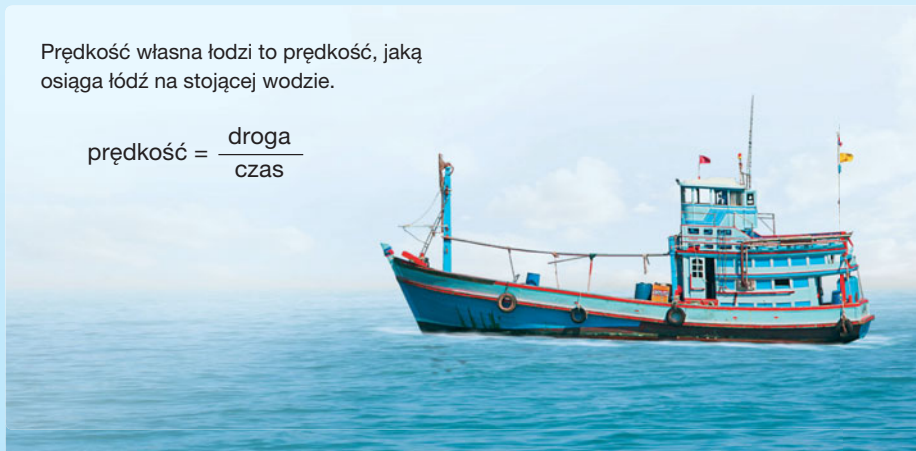
- rozwiązuje zadania tekstowe dotyczące sytuacji praktycznych, w tym zadania dotyczące prędkości oraz wielkości podanych za pomocą procentów: stężeń roztworów i oprocentowania lokat bankowych.

Łódź płynąca z prądem i pod prąd

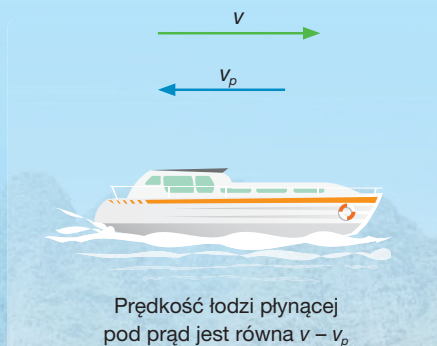
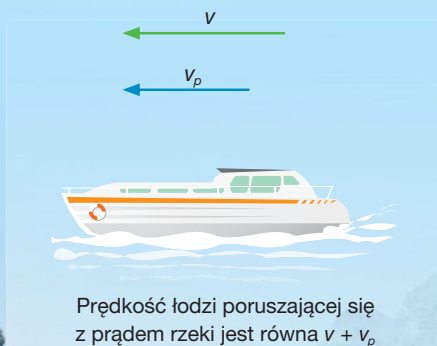
Gdy rozpatrujemy ruch łodzi na rzece, ważnym pojęciem jest prędkość własna łodzi.

Prędkość własna łodzi to prędkość, jaką osiąga łódź na stojącej wodzie.

$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$



Na prędkość, z jaką po rzece porusza się łódź, wpływa prędkość prądu rzeki. Oznaczmy przez v prędkość własną łodzi, a przez v_p prędkość prądu rzeki.



Przykład 2

Łódź motorowa płynąca z prądem rzeki przebyła trasę pomiędzy przystaniami odległymi o 36 kilometrów w 2 godziny, drogę powrotną natomiast w 3 godziny. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

W tego typu zadaniach zakładamy, że wszystkie prędkości są stałe.

Oznaczamy przez v – prędkość własną łodzi, a przez v_p – prędkość prądu rzeki. Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w tabeli.

	Odległość	Prędkość	Czas
Płynięcie z prądem	36 km	$v + v_p$	2 h
Płynięcie pod prąd	36 km	$v - v_p$	3 h

Prędkość łodzi płynącej z prądem jest równa $\frac{36 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 18 \text{ km/h}$, a prędkość łodzi płynącej pod prąd $\frac{36 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 12 \text{ km/h}$.

Otrzymujemy układ równań i rozwiązujemy go metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases} \\ & \hline & 2v = 30 \\ & v = 15 \\ & \begin{cases} v = 15 \\ v + v_p = 18 \end{cases} \\ & \begin{cases} v = 15 \\ v_p = 3 \end{cases} \end{aligned}$$



Sprawdzenie: $2(15 + 3) = 36$, $3(15 - 3) = 36$.

Prędkość własna łodzi była równa 15 km/h, a prędkość prądu rzeki 3 km/h.

Ćwiczenie 2

Płynąc w dół rzeki, łódź pokonała 24 kilometry w 2 godziny. Droga powrotna łodzi trwała trzy razy dłużej. Oblicz prędkość własną łodzi oraz prędkość prądu rzeki.

Ćwiczenie 3

Pierwszego dnia łódź motorowa płynąca 2 godziny z prądem rzeki, a następnie 3 godziny pod prąd przebyła trasę długości 58 km. Drugiego dnia, płynąc 3 godziny z prądem oraz 4 godziny pod prąd, przeplłynęła trasę długości 82 km. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Ćwiczenie 3

v – prędkość własna łodzi [km/h],
 v_p – prędkość prądu rzeki [km/h].

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 58 = (v + v_p) \cdot 2 + (v - v_p) \cdot 3 \\ 82 = (v + v_p) \cdot 3 + (v - v_p) \cdot 4 \end{cases} \\ & \begin{cases} v = 12 \\ v_p = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Prędkość własna łodzi była równa 12 km/h,
a prędkość prądu rzeki była równa 2 km/h.

Ćwiczenie 2

v – prędkość własna łodzi [km/h],
 v_p – prędkość prądu rzeki [km/h].

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v + v_p = \frac{24}{2} \\ v - v_p = \frac{24}{6} \end{cases} \\ & \begin{cases} v = 8 \\ v_p = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Prędkość własna łodzi była równa 8 km/h, a prędkość prądu rzeki była równa 4 km/h.

Odpowiedzi do zadań

1. x – liczba dziewcząt,
 y – liczba chłopców.

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,6x + 1,6y = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$$

W liceum uczy się 300 dziewcząt i 200 chłopców.

2. x – wypłata Bartka,
 y – wypłata Pawła.

$$\begin{cases} y = 1,1x + 280 \\ x = 0,6y + 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1200 \\ y = 1600 \end{cases}$$

Bartek zarobił 1200 zł,
a Paweł 1600 zł.

3. 6000 zł do banku A i 4000 zł do banku B

4. x – kwota wpłacona do banku X ,
 y – kwota wpłacona do banku Y .

$$\begin{cases} x + y = 20000 \\ 1,035x + 1,045y = 20840 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6000 \\ y = 14000 \end{cases}$$

Wpłacono 6000 zł do banku X i 14 000 zł do banku Y .

5. x – masa stopu 40% [kg],
 y – masa stopu 80% [kg].

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0,4x + 0,8y = 0,5 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y = 0,5 \end{cases}$$

Należy użyć 1,5 kg stopu 40% i 0,5 kg stopu 80%.

Zadania

1. W pewnym liceum uczy się 500 osób. Jeżeli liczba dziewcząt zmniejszyłaby się o 40%, a liczba chłopców zwiększyłaby się o 60%, to liczba osób uczęszczających do tej szkoły by się nie zmieniła. Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczy się w tym liceum?

2. Paweł i Bartek pracowali w wakacje przy zbiorze owoców. Paweł zarobił 110% tego co Bartek i jeszcze 280 zł, natomiast Bartek dostał 60% tego co Paweł i jeszcze 240 zł. Ile zarobił każdy z nich?

3. Kwotę 10 000 zł podzielono na dwie części. Jedną z nich wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku, drugą do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po roku z lokat otrzymano łączne 10 340 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku A , a jaką do banku B ? Przeanalizuj przedstawiony obok początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:

x – kwota w zł wpłacona do banku A ,

y – kwota w zł wpłacona do banku B .

$$\begin{cases} x + y = 10\,000 \\ 1,03x + 1,04y = 10\,340 \end{cases}$$

4. Kwotę 20 000 zł zainwestowano w dwie różne lokaty roczne oferowane przez bank X i bank Y . Lokata w banku X oprocentowana była 3,5% w skali roku. Oprocentowanie lokaty w banku Y było o 1 punkt procentowy wyższe. Po roku wypłacono z lokat 20 840 zł. Jaką kwotę złożono na lokacie w banku X , a jaką w banku Y ?

Czy wiesz, że...

Mosiądz to stop miedzi, w którym głównym dodatkiem jest cynk. Z mosiądzu wykonuje się na przykład dzwony okrętowe.



5. Zawartość miedzi w dwóch różnych stopach wynosi 40% i 80%. Ile każdego z tych stopów należy użyć, aby otrzymać 2 kg stopu zawierającego 50% miedzi?

6. Mamy do dyspozycji dwa stopy miedzi o różnej jej zawartości. Jeśli użyjemy 2 kg pierwszego i 6 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 55% miedzi. Jeśli natomiast użyjemy 3 kg pierwszego i 5 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 52,5% miedzi. Jaka jest zawartość miedzi w każdym z tych stopów?

6. x – zawartość miedzi w pierwszym stopie,
 y – zawartość miedzi w drugim stopie.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \cdot 0,55 \\ 3x + 5y = 8 \cdot 0,525 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,4 \\ y = 0,6 \end{cases}$$

Pierwszy stop zawiera 40% miedzi, a drugi 60%.

7. Roman przygotowuje się do zawodów rowerowych. Na sobotnim treningu przejechał 90 kilometrów w ciągu 5 godzin. Część trasy wiodła po drogach asfaltowych, część po gruntowych. Na drogach asfaltowych średnia prędkość jazdy wynosiła 20 km/h, a na drogach gruntowych 15 km/h. Ile czasu Roman jechał po drogach asfaltowych? Jaka odległość w tym czasie pokonał?

8. Z miast A i B wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie ze stałymi prędkościami dwa pociągi. Jeden z nich jedzie z prędkością dwukrotnie większą niż drugi. Spotykają się po godzinie i 20 minutach. Gdyby wolniejszy pociąg jechał z prędkością o 10 km/h większą, spotkanie nastąpiłoby po godzinie i 12 minutach. Jaka jest odległość między miastami A i B ?



9. Pociąg pokonał 120 km w ciągu godziny i 45 minut. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 80 km/h, a drugi – ze względu na roboty torowe – z prędkością 40 km/h. Jaka była długość drugiego odcinka?

10. Na pewne przedstawienie w teatrze sprzedano łącznie 500 biletów. Były to bilety normalne po 50 zł, ulgowe po 40 zł i wejściówki po 30 zł. Biletów normalnych było o 40 więcej niż ulgowych i wejściówek razem. Wszystkie bilety kosztowały łącznie 22 300 zł. Ile biletów poszczególnych rodzajów sprzedano? Przeanalizuj przedstawiony poniżej początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:

x – liczba sprzedanych biletów normalnych,

y – liczba sprzedanych biletów ulgowych,

z – liczba sprzedanych wejściówek.

Możemy zatem ułożyć układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x = y + z + 40 \\ 50x + 40y + 30z = 22\,300 \end{cases}$$

11. Jedna ściana prostopadłościanu ma obwód równy 26 cm, druga – 28 cm, a trzecia – 34 cm. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

11. a , b , c – długości krawędzi prostopadłościanu [cm].

$$\begin{cases} 2a + 2b = 26 \\ 2a + 2c = 28 \\ 2b + 2c = 34 \\ a = 5 \\ b = 8 \\ c = 9 \end{cases}$$

Prostopadłościan ma krawędzie o długościach: 5 cm, 8 cm i 9 cm.

7. t_1 – czas jazdy po drogach asfaltowych [h],
 t_2 – czas jazdy po drogach gruntowych [h].

$$\begin{cases} 90 = 20 \cdot t_1 + 15 \cdot t_2 \\ t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Roman jechał po drogach asfaltowych przez 3 h, w tym czasie pokonał 60 km.

8. s – odległość między miastami A i B [km],
 v – prędkość wolniejszego pociągu [km/h],
 $2v$ – prędkość szybszego pociągu [km/h].

$$\begin{cases} s = \frac{4}{3}v + \frac{4}{3} \cdot 2v \\ s = \frac{6}{5}(v + 10) + \frac{6}{5} \cdot 2v \\ s = 120 \text{ km} \end{cases}$$

9. s_1 – długość pierwszego odcinka [km],
 s_2 – długość drugiego odcinka [km].

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = 120 \\ \frac{s_1}{80} + \frac{s_2}{40} = 1\frac{3}{4} \\ s_1 = 100 \\ s_2 = 20 \end{cases}$$

Długość drugiego odcinka wynosiła 20 km.

10. 270 biletów normalnych,
 190 biletów ulgowych,
 40 wejściówek

Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie $|a_1| + |b_1| \neq 0$ i $|a_2| + |b_2| \neq 0$, można rozwiązać **metodą wyznacznikową**.

Liczbę:

■ $W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ nazywamy **wyznacznikiem głównym**,

■ $W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej x** ,

■ $W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej y** .

1. Jeśli $W \neq 0$, to układ równań ma jedno rozwiązanie wyznaczone za pomocą tzw. **wzorów Cramera**: $x = \frac{W_x}{W}$ i $y = \frac{W_y}{W}$.
2. Jeśli $W = 0$ i $W_x = 0$, i $W_y = 0$, to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).
3. Jeśli $W = 0$ i ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$), to układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 = -14$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 13 & -4 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-4) - 13 \cdot 2 = -70$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 13 - 5 \cdot 11 = -42$$

$W \neq 0$, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y) , gdzie:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{-70}{-14} = 5 \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{-42}{-14} = 3 \end{cases}$$



1. Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Jeśli układ jest oznaczony, to korzystając ze wzorów Cramera, wyznacz jego rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + y = -7 \\ x + 3y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - y = 8 \\ -x + \frac{1}{4}y = -2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + 6y = 12 \\ \frac{1}{6}x + 2y = -4 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 7x + 4y = -2 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 8 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -4 \end{cases} \end{array}$$

Przykład 2

Określ liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru k .

$$\begin{cases} kx - y = 2 \\ -4x + ky = 4 \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - (-4) \cdot (-1) = k^2 - 4$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2 \cdot k - 4 \cdot (-1) = 2k + 4$$

$$W_y = \begin{vmatrix} k & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot k - (-4) \cdot 2 = 4k + 8$$

- Dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ wyznacznik $W \neq 0$. Zatem układ równań ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony).
- Dla $k = 2$ wyznacznik $W = 0$, ale $W_x \neq 0$ i $W_y \neq 0$. Zatem układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).
- Dla $k = -2$ zachodzą równości $W = 0$, $W_x = 0$ i $W_y = 0$. Zatem układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).

2. Dany jest układ równań z niewiadomymi x, y i parametrem k . Dla jakich wartości parametru k układ jest oznaczony, dla jakich nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ kx - 10y = -5k \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + y = -3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} k^2x - 2y = -4 \\ -2x + y = 2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + 2ky = 4 \\ 2x + 8y = k \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2kx + y = 1 \\ -4x - ky = 2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} (k+1)x + ky = 2 \\ x + ky = 4 \end{cases} \end{array}$$

2. b) $W = 8 - 4k$, $W_x = 32 - 2k^2$,
 $W_y = k - 8$, zatem układ jest:

- oznaczony dla $k \neq 2$,
- sprzeczny dla $k = 2$.

c) $W = 1 - k^2$, $W_x = 3 + 3k$,
 $W_y = -3 - 3k$

- $W \neq 0$ dla $k \neq -1$ i $k \neq 1$,
 $W = W_x = W_y = 0$ dla $k = -1$
 $W_x \neq 0$ dla $k = 1$, zatem układ jest:

- oznaczony dla $k \neq -1$ i $k \neq 1$,
- nieoznaczony dla $k = -1$,
- sprzeczny dla $k = 1$.

d) $W = -2k^2 + 4$, $W_x = -k - 2$,
 $W_y = 4k + 4$, zatem układ jest:

- oznaczony dla $k \neq -\sqrt{2}$ i $k \neq \sqrt{2}$,
- sprzeczny dla $k \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

e) $W = k^2 - 4$, $W_x = 0$,
 $W_y = 2k^2 - 8$, zatem układ jest:

- oznaczony dla $k \neq -2$ i $k \neq 2$,
- nieoznaczony dla $k \in \{-2, 2\}$.

f) $W = k^2$, $W_x = -2k$,
 $W_y = 4k + 2$, zatem układ jest:

- oznaczony dla $k \neq 0$,
- sprzeczny dla $k = 0$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $W = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$$W_x = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -25$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

Zatem $x = -5$, $y = 3$.

b) $W = -29$, $W_x = -116$,
 $W_y = 29$

Zatem $x = 4$, $y = -1$.

c) $W = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0$

$$W_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$W = W_x = W_y = 0$, zatem układ jest nieoznaczony.

d) $W = 41$, $W_x = -82$,
 $W_y = 123$

Zatem $x = -2$, $y = 3$.

e) $W = 0$, $W_x = 48$,
 $W_y = -4$

Zatem układ jest sprzeczny.

f) $W = -1$, $W_x = -4$,
 $W_y = -8$

Zatem $x = 4$, $y = 8$.

2. a) $W = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ k & -10 \end{vmatrix} =$
 $= 10 - 2k$

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5k & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -50 + 10k$$

$$W_y = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ k & -5k \end{vmatrix} =$$

$$= 5k - 5k = 0$$

$W \neq 0$ dla $k \neq 5$,

$W = W_x = W_y = 0$ dla $k = 5$,
zatem układ jest:

- oznaczony dla $k \neq 5$,
- nieoznaczony dla $k = 5$.

Metoda eliminacji Gaussa

Czasami przy rozwiązywaniu układu równań pomija się w zapisie niewiadome, a współczynniki występujące w równaniach przedstawia się w postaci tablicy zwanej **macierzą** (poniżej macierze zapisano kolorem niebieskim).

Przykład 1

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ -2x + 7y - 6z = 13 \\ 2x - 9y + 3z = -9 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -6 & 13 \\ 2 & -9 & 3 & -9 \end{array} \right]$$

Najpierw eliminujemy niewiadomą x z drugiego i trzeciego równania. W tym celu do drugiego równania dodajemy stronami pierwsze równanie pomnożone przez 2, a do trzeciego dodajemy stronami pierwsze pomnożone przez -2 . Otrzymujemy układ równań (zwróć uwagę, że operacjom na równaniach odpowiadają odpowiednie operacje na wierszach macierzy):

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x - 3y + z = -5 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Do 2. wiersza macierzy} \\ \text{dodano 1. wiersz pomnożony} \\ \text{przez 2, do 3. wiersza dodano} \\ \text{1. wiersz pomnożony przez } -2. \end{array}$$

Następnie eliminujemy niewiadomą y z trzeciego równania. W tym celu do trzeciego równania dodajemy stronami drugie równanie pomnożone przez 3. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x + 0y - 11z = 22 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Do 3. wiersza macierzy} \\ \text{dodano 2. wiersz} \\ \text{pomnożony przez 3.} \end{array}$$

Z trzeciego równania dostajemy $z = -2$. Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy $y = 1$. Następnie podstawiamy uzyskane wartości y i z do pierwszego równania i otrzymujemy $x = 3$.

Zatem układ spełniony jest przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Przedstawiona powyżej metoda rozwiązywania układu równań nosi nazwę **metody eliminacji Gaussa**.



Przykład 2

Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 5y + 6z = -4 \end{cases}$$

Zapisujemy współczynniki występujące w równaniach układu w postaci macierzy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \end{array} \right]$$

Kolejne wiersze macierzy odpowiadają kolejnym równaniom układu.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & -5 \end{array} \right]$$

Od 2. i 3. wiersza macierzy odjęto 1. wiersz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Od 3. wiersza macierzy odjęto 2. wiersz pomnożony przez 4.

Z trzeciego równania (reprezentowanego przez trzeci wiersz macierzy) otrzymujemy $z = -1$. Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy $y = 1$. Otrzymane wartości y i z podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy $x = -3$. Zatem układ równań jest spełniony przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

1. Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ x - 4y + 4z = -1 \\ -2x + y - 5z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2y - z = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ -x + 4y - 6z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = 11 \\ 3x - y - 5z = -19 \end{cases}$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & -1 & -5 & -19 \end{array} \right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -8 & -25 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -22 & -88 \end{array} \right]$$

$$-22z = -88, \text{ czyli } z = 4$$

$$-y + 2 \cdot 4 = 9, \text{ czyli } y = -1$$

$$x - 2 + 4 = 2, \text{ czyli } x = 0$$

1. a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & -3 & 11 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & 36 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -18z &= 36, \text{ czyli } z = -2 \\ -y + 3 \cdot (-2) &= -5, \text{ czyli } y = -1 \\ x - 3 \cdot (-1) - 2 &= 4, \text{ czyli } x = 3 \end{aligned}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -6 & 7 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & -7 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -31z &= -31, \text{ czyli } z = 1 \\ y + 4 &= 6, \text{ czyli } y = 2 \\ x + 2 \cdot 2 - 1 &= -2, \text{ czyli } x = -5 \end{aligned}$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 12 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & -6 & -7 & -10 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 23 & 92 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} 23z &= 92, \text{ czyli } z = 4 \\ -y - 5 \cdot 4 &= -17, \text{ czyli } y = -3 \\ x + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 &= 11, \text{ czyli } x = 5 \end{aligned}$$



Powtórzenie

Zestaw I

Odpowiedzi do zadań

- $x = 6, y = 4$
 - nieoznaczony: $x \in \mathbb{R}, y = 0,4x - 1,9$
 - $x = 1, y = 1$
 - $x = -3, y = -2$
- nie; $x = y = 1$
 - tak; $x = \frac{26}{9}, y = -\frac{1}{3}$
 - nie; $x = -1,1, y = -0,7$
 - nie; $x = 0, y = 1$
- a), d) nieskończenie wiele
 - 1 c) 0
- x – cyfra dziesiątek,
 y – cyfra jedności.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 10y + x - (10x + y) = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$$

Szukaną liczbą jest 49.
 - x – licznik ułamka,
 y – mianownik ułamka.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{y+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 17 \end{cases}$$

Szukanym ułamkiem jest $\frac{7}{17}$.

1. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0,95 \\ \frac{2x-2}{5} + \frac{3-2y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{4y-7}{3} = 2 \\ \frac{3y-6}{4} - \frac{5-x}{6} = -1\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{2x-y}{5} - \frac{y+2x}{4} = 1,2 \\ \frac{2x+3y}{12} - \frac{4x-y}{8} = 0,25 \end{cases}$$

2. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb o różnych znakach?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x = 3(1-y) + 2y \\ 3(y-x) = y-1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{-2+x}{2} + 5 = x + \frac{y+8}{3} \\ \frac{2+3x}{4} = \frac{2y+6}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x+1) = -(y+1) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{x+y}{6} \\ \frac{x+y-1}{3} - x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$$

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(2y+1) = 6(4-x) \\ 3x+2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 0,2y = \frac{6x+y}{5} + 1 \\ x-1 = \frac{y-5}{6} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x+2y = y-2 \\ 2(y-3x) = 6-y \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = \frac{2-x}{4} \\ x - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{2x-3y}{2} \end{cases}$$

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 13. Gdybyśmy zamienili miejscami cyfry tej liczby, wtedy otrzymalibyśmy liczbę o 45 większą od szukanej. Co to za liczba?

b) Jeśli do licznika pewnego ułamka dodamy 1, a od jego mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 1, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. Co to za ułamek?

5. a) Roztwór soli o stężeniu 5% zmieszano z roztworem soli o stężeniu 40% i otrzymano 1,4 kg roztworu soli o stężeniu 30%. Ile gramów każdego z tych roztworów użyto?

b) Laborant potrzebuje 10 g roztworu azotanu potasu o stężeniu 9%. Ma do dyspozycji roztwory tego związku o stężeniach 6% i 10%. Ile gramów jednego roztworu i ile drugiego powinien zmieszać?

5. a) x – masa roztworu 5% [g], y – masa roztworu 40% [g].

$$\begin{cases} x + y = 1400 \\ 0,05x + 0,4y = 0,3 \cdot 1400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 400 \\ y = 1000 \end{cases}$$

Zmieszano 400 g roztworu 5% i 1000 g roztworu 40%.

b) x – masa roztworu 6% [g], y – masa roztworu 10% [g].

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0,06x + 0,1y = 0,09 \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2,5 \\ y = 7,5 \end{cases}$$

Powinien zmieszać 2,5 g roztworu 6% i 7,5 g roztworu 10%.

Zestaw II

1. Podaj, ile rozwiązań ma układ równań dla $m = 1$, a ile – dla $m = -2$.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - my = 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 4 - 2m \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - |m|y = m^2 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$$

2. Dla jakich wartości parametrów m i k para liczb: $x = 3$, $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań?

$$\text{a) } \begin{cases} mx + ky = 5 \\ (k - 1)x - 2my = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (1 - m)x + 4ky = 10 \\ (m - 2k)x - (4k + m)y = -8 \end{cases}$$

3. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ (x - 1)^2 = (2 - x)^2 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ (3x - 1)(1 + 3x) + y = (1 - 3x)^2 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} (y + 2)^2 = y^2 + x \\ (2x - 1)^2 = 4x^2 - y \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} (x - y)(x + y) = x^2 - (y - 1)^2 \\ (x + y)(x + 2) - xy = x^2 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} (3x - 1)^2 = 9x^2 + y \\ 2x + 4y^2 = (1 - 2y)^2 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} (x - 8)^2 = (x + 8)(x + 8) + y \\ x(y - 1) = y(x - 2) \end{cases} \end{array}$$

4. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb ujemnych?

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 1 - m \\ x - 2y = m - 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = 2m - 6 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 3 - m \end{cases}$$

5. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb o przeciwnych znakach?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = m \\ 5x - 3y = 2m + 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = m - 3 \\ 3x - y = 2 - m \end{cases}$$

- 6.* Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru $m \in \{-1, 1, 2\}$.

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 3y = 4 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -8x + 6y = m \\ mx - \frac{3}{2}y = -6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + my = 1 \\ x + 2y = m \end{cases}$$

- 7.* Dla jakiej wartości parametru m układ jest nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

$$\text{a) } \begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -4x + 5y = 8 \\ 2x - 2,5y = m \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -2x + y = 7 \\ 4x + my = -14 \end{cases}$$

6. a) nieskończenie wiele dla $m = -1$,
1 dla $m \in \{1, 2\}$
b) 0 dla $m = 2$, 1 dla $m \in \{-1, 1\}$
c) 0 dla $m = 1$, 1 dla $m \in \{-1, 2\}$

7. a) nieoznaczony dla $m = 5$,
sprzeczny dla $m \neq 5$
b) nieoznaczony dla $m = -4$,
sprzeczny dla $m \neq -4$
c) nieoznaczony dla $m = -2$,
sprzeczny dla $m \neq -2$

1. a) $m = 1$: jedno rozwiązanie,
 $m = -2$: nie ma rozwiązań
b) $m = 1$: nieskończenie wiele rozwiązań,
 $m = -2$: jedno rozwiązanie
c) $m = 1$: jedno rozwiązanie,
 $m = -2$: nieskończenie wiele rozwiązań

2. a) $m = \frac{11}{17}$, $k = \frac{26}{17}$
b) $m = -1$, $k = \frac{1}{2}$

3. a) $x = \frac{3}{2}$, $y = 6$
b) $x = 0$, $y = -1$
c) $x = \frac{3}{22}$, $y = \frac{2}{11}$
d) $x = 1$, $y = -4$
e) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
f) $x = 0$, $y = 0$

4. a) $\begin{cases} x = -3m + 5 \\ y = -2m + 4 \end{cases}$
 $-3m + 5 < 0$ i $-2m + 4 < 0$,
czyli dla $m > 2$.
b) $\begin{cases} x = 3 - m \\ y = 4 - \frac{4}{3}m \end{cases}$
 $3 - m < 0$ i $4 - \frac{4}{3}m < 0$,
czyli dla $m > 3$.

5. a) $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = m - 2 \end{cases}$

Rozpatrujemy dwa przypadki, w których zmienne x i y mają różne znaki:

- 1) $m - 1 > 0$ i $m - 2 < 0$,
wówczas $m \in (1; 2)$
2) $m - 1 < 0$ i $m - 2 > 0$,
wówczas $m \in \emptyset$

Zatem $m \in (1; 2)$.

$$\text{b) } \begin{cases} x = \frac{m-5}{9} \\ y = \frac{4m-11}{3} \end{cases}$$

Rozpatrujemy dwa przypadki, w których zmienne x i y mają różne znaki:

- 1) $\frac{m-5}{9} > 0$ i $\frac{4m-11}{3} < 0$,
wówczas $m \in \emptyset$
2) $\frac{m-5}{9} < 0$ i $\frac{4m-11}{3} > 0$,
wówczas $m \in (\frac{11}{4}; 5)$

Zatem $m \in (\frac{11}{4}; 5)$.



Odpowiedzi do zadań

1. x – liczba jabłek kupionych przez Krysę,
 y – liczba bananów kupionych przez Krysę.

$$\begin{cases} 1,2x + 1,8y = 7,2 / \cdot \frac{5}{3} \\ 1,8x + 1,2y = 7,2 / \cdot \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Krysia kupiła 3 jabłka i 2 banany.

2. x – liczba jabłek w pierwszej skrzynce,
 y – liczba jabłek w drugiej skrzynce.

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x + 0,5y = 4 \cdot 0,5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 1,5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 36 \\ y = 24 \end{cases}$$

3. x – liczba większych pudełek,
 y – liczba mniejszych pudełek.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 1,6x + 1,2y = 30 / \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 8x + 6y = 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$15 \cdot 5,20 + 5 \cdot 3,20 = 78 + 16 = 94 < 100$$

4. x – liczba kartek zadrukowanych jednostronnie,
 y – liczba kartek zadrukowanych dwustronnie.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0,2x + 0,3y = 7,4 / \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 3y = 74 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 14 \end{cases}$$

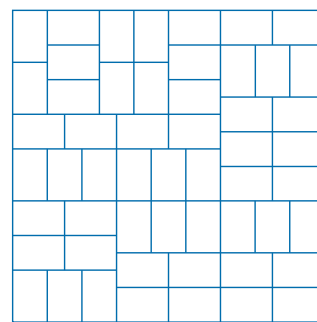
Gdyby każdą stronę kserowano na osobnej kartce, to odbitki kosztowałyby:

$$(16 + 28) \cdot 0,2 = 8,80 \text{ [zł]}.$$

Zadania z kontekstem realistycznym

- Na straganie można kupić banany i jabłka. Jedno jabłko kosztuje 1,20 zł, a jeden banan 1,80 zł. Krysia kupiła kilka owoców i zapłaciła 7,20 zł. Piotr kupił tyle bananów, ile Krysia jabłek, i tyle jabłek, ile Krysia bananów. Za zakupy zapłacił 7,80 zł. Ile jabłek i ile bananów kupiła Krysia?
- W dwóch skrzynkach znajdowało się 60 jabłek. Po przełożeniu połowy jabłek z drugiej skrzynki do pierwszej w pierwszej skrzynce było cztery razy więcej jabłek, niż zostało w drugiej. Ile jabłek było w każdej skrzynce na początku?
- W hurtowni wafle są pakowane w większe pudełka, a cukierki – w mniejsze. Pudełko z waflami waży 5,20 kg, a z cukierkami 3,20 kg. Do sklejenia większego pudełka zużywa się 1,60 m taśmy, a do mniejszego 1,20 m. Na zamówienie jednego ze sklepów przygotowano transport 20 pudełek z tymi słodyczami i zużyto do tego 30 m taśmy. Czy całą dostawę można przewieźć wózkiem, którego dozwolona ładowność jest równa 100 kg?
- Student ma do skserowania 30 kartek, z których część jest zapisana jednostronnie, a pozostałe – dwustronnie. W punkcie usługowym kserowanie jednostronne kosztuje 20 gr, a dwustronne 30 gr. Student skserował swoje kartki tak, że otrzymał taką samą kopię jak oryginał (30 kartek) i zapłacił 7,40 zł. Ile kosztowałyby jego odbitki, gdyby każdą zapisaną stronę kserował na osobnej kartce?
- Na trasie między Opolem a Warszawą, o długości 320 km, kursują busy i autokary. Bus wyjechał z Opola o godzinie 15.00 i poruszał się ze średnią prędkością 60 km/h. Autokar wyruszył z Warszawy o godzinę później, a jego średnia prędkość wynosiła 70 km/h. O której godzinie i w jakiej odległości od Opola pojazdy się minęły?

6. Z jednakowych prostokątnych płytek ułożono kwadrat o polu równym 324 dm^2 (rysunek obok). Oblicz obwód pojedynczej płytki.



7. Samochód przejechał pierwszą część trasy ze średnią prędkością 70 km/h. Drugą część trasy, dłuższą o 60 km, pokonał ze średnią prędkością 90 km/h. Jego średnia prędkość na całej trasie była równa 80 km/h. Oblicz długość całej trasy.

5. x – droga z Opola do spotkania pojazdów,
 y – droga z Warszawy do spotkania pojazdów.

$$\begin{cases} x + y = 320 \\ \frac{x}{60} = \frac{y}{70} + 1 / \cdot 420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 320 \\ 7x - 6y = 420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 180 \\ y = 140 \end{cases}$$

Pojazdy minęły się 180 km od Opola. Bus do spotkania jechał 3 godziny, więc pojazd minął się o godzinie 18.00.

6. 10 dm



Rozwiązując zadania tekstowe, spotkamy się także z takimi, w których mamy trzy niewiadome. Jednak możemy jedną z nich opisać za pomocą pozostałych i otrzymać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1

Dany jest trójkąt o kątach α , β , γ , przy czym suma miar kątów α i β jest równa 105° oraz spełniona jest równość $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ$. Wyznacz te kąty.

Zauważmy, że $\alpha = 105^\circ - \beta$.

Możemy więc napisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (105^\circ - \beta) + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ \\ (105^\circ - \beta) + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 295^\circ \\ \gamma = 75^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 70^\circ \\ \gamma = 75^\circ \end{cases}$$

Pamiętaj, że po rozwiązaniu układu równań warto sprawdzić, czy otrzymane rozwiązanie spełnia warunki zadania.

Zatem $\alpha = 105^\circ - \beta = 35^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

→ Zadanie 17, str. 161

Przykład 2

W skarbonce znajduje się 18 monet – są to monety 1-, 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 48 zł. Monet 5-złotowych jest o dwie mniej niż monet 1-złotowych. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce.

Zauważmy, że w tym zadaniu również mamy trzy niewiadome:

x – liczba monet 1-złotowych,

y – liczba monet 2-złotowych,

z – liczba monet 5-złotowych.

Z treści zadania wynika, że $z = x - 2$.

Otrzymujemy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + (x - 2) = 18 \\ x + 2y + 5(x - 2) = 48 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb: $x = 9$ oraz $y = 2$ (sprawdź).

Zatem $z = x - 2 = 7$.

Odpowiedź: W skarbonce znajduje się 9 monet 1-złotowych, 2 monety 2-złotowe oraz 7 monet 5-złotowych.

→ Zadanie 19, str. 161

7. x – długość pierwszej części trasy,
 $x + 60$ – długość drugiej części trasy,
 $y = 2x + 60$ – długość całej trasy,
 t – czas jazdy na całej trasie.

$$\begin{cases} \frac{2x+60}{t} = 80 \\ t = \frac{x}{70} + \frac{x+60}{90} \end{cases}$$

Stąd $x = 210$, czyli $y = 2x + 60 = 480$ [km].

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 105^\circ \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ z = x - 2 \\ x + 2y + 5z = 48 \end{cases}$$



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Kuba jest o 5 lat starszy od Magdy. Wiek Magdy stanowi $\frac{2}{3}$ wieku Kuby. Który z poniższych układów równań opisuje tę sytuację?

Przyjęto oznaczenia: k – wiek Kuby, m – wiek Magdy.

- A. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ B. $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$ C. $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ D. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$

Odpowiedzi do zadań

2. Do 1. równania podstawiamy $\alpha = \beta + 18^\circ$ i otrzymujemy:

$$2\beta + 36^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$3\beta = 144^\circ$$

Do 2. równania podstawiamy $\beta = 48^\circ$ i otrzymujemy:

$$2\alpha + 48^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 132^\circ$$

Zadanie 2 (0–1)

W trójkącie równoramiennym miara kąta między ramionami jest o 18° mniejsza od miary kąta przy podstawie.

Przyjęto oznaczenia: α – miara kąta przy podstawie, β – miara kąta między ramionami, a następnie ułożono układ równań opisujący sytuację z zadania:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha = \beta + 18^\circ \end{cases}$$

Wskaż układ równań równoważny temu układowi.

- A. $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \beta = \alpha + 18^\circ \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2\alpha = 144^\circ \\ \alpha = \beta + 18^\circ \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2\alpha = 108^\circ \\ 3\beta = 144^\circ \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2\alpha = 132^\circ \\ 3\beta = 144^\circ \end{cases}$

Zadanie 3 (0–1)

Wskaż parę liczb, która nie spełnia układu równań $\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

- A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

Zadanie 4 (0–1)

Układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -6x + 4y = m \end{cases}$ nie jest sprzeczny dla

- A. $m = 12$ B. $m = 3$ C. $m = -3$ D. $m = -12$

Zadanie 5 (0–1)

Układ równań $\begin{cases} 2m^2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym dla

- A. $m = -\frac{1}{2}$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = \frac{1}{2}$

5. $\begin{cases} 4m^2x - 6y = 10 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$

Układ jest nieoznaczony, gdy $4m^2 = 4$ i $10 = -10m$, czyli dla $m = -1$.

4. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 / \cdot (-2) \\ -6x + 4y = m \\ -6x + 4y = -12 \\ -6x + 4y = m \end{cases}$

Układ nie jest sprzeczny tylko dla $m = -12$.

**Zadanie 6 (0-1)**

Wskaż równanie, które należy dopisać do równania $3x - 4y = 6$, aby otrzymać nieoznaczony układ równań.

A. $3x - 4y = -6$

B. $-3x + 4y = 6$

C. $\frac{3}{2}x - 2y = -3$

D. $-\frac{3}{2}x + 2y = -3$

Zadanie 7 (0-1)

Wskaż rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Zadanie 8 (0-1)

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ mx - y = m - 1 \end{cases}$ jest para liczb ujemnych dla

A. $m = -\frac{5}{2}$

B. $m = -\frac{1}{2}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = \frac{3}{2}$

Zadanie 9 (0-1)

Proste k i l na rysunku obok są równoległe.

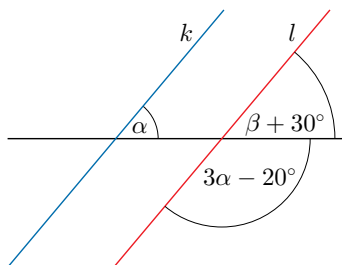
Wynika stąd, że

A. $\begin{cases} \alpha = 60^\circ \\ \beta = 30^\circ \end{cases}$

C. $\begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 15^\circ \end{cases}$

B. $\begin{cases} \alpha = 50^\circ \\ \beta = 20^\circ \end{cases}$

D. $\begin{cases} \alpha = 55^\circ \\ \beta = 15^\circ \end{cases}$

**Zadanie 10 (0-1)**

Dana jest dwucyfrowa liczba M . Suma cyfry jedności i cyfry dziesiątek tej liczby jest równa 8. Różnica między liczbą powstałą przez przestawienie cyfr liczby M oraz liczbą M jest równa 54.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Różnica między cyfrą jedności a cyfrą dziesiątek liczby M jest równa 6.	P	F
Suma liczby M i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest równa 88.	P	F

10. x – cyfra dziesiątek liczby M ,
 y – cyfra jedności liczby M ,
 $M = 10x + y$,
 $10y + x$ – liczba powstała z przestawienia cyfr liczby M
- $$\begin{cases} x + y = 8 \\ (10y + x) - (10x + y) = 54 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$$
- Zatem $7 - 1 = 6$ oraz $17 + 71 = 88$.

6. $-\frac{3}{2}x + 2y = -3 \quad / \cdot -2$
 $3x - 4y = 6$

7. $5 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 25 + 2 = 27$
 oraz $5 + 3 \cdot (-1) = 5 - 3 = 2$

8. $\begin{cases} x = \frac{m-5}{m+2} \\ y = \frac{2-6m}{m+2} \end{cases}$

9. $\alpha = \beta + 30^\circ$ – kąty naprzemianległe,
 $(\beta + 30^\circ) + (3\alpha - 20^\circ) = 180^\circ$ – kąty przyległe
 $\begin{cases} \alpha = \beta + 30^\circ \\ (\beta + 30^\circ) + 3\alpha = 200^\circ \\ \alpha = \beta + 30^\circ \\ 4\alpha = 200^\circ \\ \alpha = 50^\circ \\ \beta = 20^\circ \end{cases}$



11. x – wiek Adama,
 y – wiek Tomka

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ (x - 3) + (y - 3) = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 14 \end{cases}$$

Adam i Tomek mają w sumie 30 lat. Za 4 lata Tomek będzie miał 18 lat.

12.1. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$$

12.2. $\begin{cases} -3x + y = 10 \\ x + 2y = -8 \end{cases} / \cdot 3$

$$\begin{cases} -3x + y = 10 \\ 3x + 6y = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 10 / \cdot (-1) \\ 7y = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = -10 \\ y = -2 \end{cases}$$

13. $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} / \cdot \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 2 \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$$

Zatem układ jest nieoznaczony, a więc spełnia go nieskończenie wiele par liczb rzeczywistych.

Zadanie 11 (0-1)

Adam jest o dwa lata starszy od Tomka. Trzy lata temu mieli w sumie 24 lata. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Adam i Tomek mają w sumie 30 lat.	P	F
Za cztery lata Tomek skończy 18 lat.	P	F

Zadanie 12 (0-2)

Dane są dwa układy równań:

$$\text{I. } \begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} -3x + y = 10 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

Każdemu z tych układów przyporządkuj równoważny mu układ równań. Wpisz obok numerów układów równań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Numer zadania	Układ równań	Równoważny układ równań
12.1	I	C
12.2	II	E

A. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -x = 22 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$ E. $\begin{cases} y = -2 \\ 3x - y = -10 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10y = 12 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10y = 12 \end{cases}$ F. $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x = -2y - 8 \end{cases}$

Zadanie 13 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Układ równań $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$ jest

A.	oznaczony,	ponieważ jest spełniony przez	1.	wszystkie pary liczb rzeczywistych.
			2.	nieskończenie wiele par liczb rzeczywistych.
B.	nieoznaczony,		3.	tylko jedną parę liczb rzeczywistych.

**Zadanie 14 (0-2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Jednym z rozwiązań układu równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ jest para liczb

A. $x = \frac{7}{2}, y = -\frac{5}{2}$

E. $x = -\frac{2}{9}, y = 6\frac{1}{3}$

B. $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2}$

F. $x = -\frac{4}{9}, y = 6\frac{2}{3}$

C. $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$

G. $x = -\frac{7}{9}, y = 7\frac{1}{3}$

D. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

H. $x = -\frac{8}{9}, y = 8\frac{2}{3}$

Zadanie 15 (0-2)

Para liczb $x = 2, y = 3$ jest rozwiązaniem układu równań utworzonego przez dwa spośród poniższych równań. Wskaż te równania.

I. $x - 2y = -4$

II. $2x + 3y = 15$

III. $2x - 3y = -5$

IV. $3x - y = 2$

Zadanie 16 (0-2)

Bankomat wypłacił kwotę 940 zł w banknotach o nominałach 10 zł, 20 zł i 50 zł. Banknotów 10-złotowych było tyle samo co banknotów 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 7 więcej niż 50-złotowych. Ile było banknotów każdego rodzaju?

Zadanie 17 (0-2) → Przykład 1, str. 157

Różnica miar kątów α i β pewnego trójkąta wynosi 30° . Kąt γ tego trójkąta ma miarę o 20° większą od sumy miar kątów α i β . Wyznacz kąty tego trójkąta.

Zadanie 18 (0-3)

Cztery lata temu Kasia i jej dwaj bracia bliźniacy mieli razem 22 lata. Za dwa lata Kasia będzie miała tyle lat, ile obaj jej bracia razem. Oblicz, ile lat będzie mieć Kasia, gdy jej bracia będą mieli po 18 lat.

Zadanie 19 (0-3) → Przykład 2, str. 157

Tomek ma w skarbonce trzydzieści jeden monet, w tym: trzy monety 5-złotowe, monety 1- i 2-złotowe oraz monety 10- i 50-groszowe. Liczba monet 10-groszowych jest taka sama jak liczba monet 50-groszowych, a monet 1-złotowych jest dwukrotnie więcej niż monet 2-złotowych. Łączna kwota w skarbonce wynosi 42 zł. Oblicz, ile jest monet każdego rodzaju.

Zadanie 20 (0-3)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4(x+y)^2 - 4y(2x+y) = (2x)^2 + x + y \\ (x-1)(y+1) = (x+2)(y-2) \end{cases}$

19. x – liczba monet 10-groszowych,
 y – liczba monet 2 złotowych, stąd:

x – liczba monet 50-groszowych,

$2y$ – liczba monet 1 złotowych.

$$\begin{cases} 5 \cdot 3 + 2 \cdot y + 1 \cdot 2y + 0,1 \cdot x + 0,5 \cdot x = 42 \\ 3 + y + 2y + x + x = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

Jest po 5 monet 10- i 50-groszowych,

12 monet 1-złotowych i 6 monet 2-złotowych.

$$20. \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

14. Dany układ jest nieoznaczony. Spełniają go pary (x, y) takie, że $y = 6 - 3x, x \in \mathbb{R}$.

A. $6 - 3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{9}{2} \neq -\frac{5}{2}$

B. $6 - 3 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

C. $6 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq -\frac{1}{2}$

D. $6 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \neq \frac{1}{2}$

E. $6 + 3 \cdot \frac{2}{9} = 6\frac{2}{3} \neq 6\frac{1}{3}$

F. $6 + 3 \cdot \frac{4}{9} = 7\frac{1}{3} \neq 6\frac{2}{3}$

G. $6 + 3 \cdot \frac{7}{9} = 8\frac{1}{3} \neq 7\frac{1}{3}$

H. $6 + 3 \cdot \frac{8}{9} = 8\frac{2}{3}$

16. x – liczba banknotów 10-złotowych,
 y – liczba banknotów 20-złotowych.

$$\begin{cases} 10x + 50x + 20y = 940 \\ y = x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 17 \end{cases}$$

Było 10 banknotów 10-złotowych, 17 banknotów 20-złotowych i 10 banknotów 50-złotowych.

17. Zauważmy, że $\alpha = \beta + 30^\circ$, wówczas:

$$\begin{cases} (\beta + 30^\circ) + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma - 20^\circ = (\beta + 30^\circ) + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 25^\circ \\ \gamma = 100^\circ \end{cases}$$

$$\alpha = 55^\circ, \beta = 25^\circ, \gamma = 100^\circ$$

18. x – obecny wiek Kasi,
 y – obecny wiek brata Kasia.

$$\begin{cases} x - 4 + 2(y - 4) = 22 \\ x + 2 = 2(y + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ y = 8 \end{cases}$$

Bracia Kasi będą pełnoletni za 10 lat, wówczas Kasia będzie miała 28 lat.

**Odpowiedzi do zadań**

1. Niech s oznacza drogę,
a v prędkość wolniejszego
rowerzysty, wówczas:

$$\begin{cases} s = v \cdot 4 \\ s = (v + 5) \cdot 3 \end{cases}$$

$$v = 15 \text{ km/h}$$

Prędkości: 15 km/h i 20 km/h

2.
$$\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{22}{7} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$x + y = \frac{10 + 2\sqrt{2}}{3}$$

4. v – prędkość własna
kajaka [km/h],
 v_p – prędkość prądu
rzeki [km/h].

Wzór na prędkość przekształ-
camy do postaci:

$$\text{droga} = \text{czas} \cdot \text{prędkość}$$

$$\begin{cases} 24 = 3(v + v_p) + 3(v - v_p) \\ 21 = 2(v + v_p) + 4(v - v_p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 4 \\ v_p = 1,5 \end{cases}$$

Prędkość prądu rzeki wynosi-
ła 1,5 km/h.

5. Punkt $P(x, y)$ należy do pro-
stokąta $ABCD$, jeżeli
 $x \in (1; 3)$ i $y \in (1; 6)$.

Przekształcamy układ
równań do postaci:

$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x = 2 \in (1; 3) \\ y = 4 \in (1; 6) \end{cases}$$

Zatem punkt $P(x, y)$ należy
do prostokąta $ABCD$.

Zadanie 1 (0-2)

Dwaj rowerzyści wyruszyli w tę samą trasę: pierwszy o 10.00, drugi godzinę później, przy czym drugi jechał ze średnią prędkością o 5 km/h większą niż pierwszy. O godzinie 14.00 drugi rowerzysta dogonił pierwszego. Oblicz prędkości obu rowerzystów.

Zadanie 2 (0-2)

Wyznacz liczby x i y spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y - x(2x + 1) = -2(x - 1)^2 + 3 \\ (y + 1)^2 + 2x = y(y + 1) + 5 \end{cases}$$

Zadanie 3 (0-2)

Oblicz sumę liczb x i y , które tworzą parę będącą rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 4\sqrt{2} \\ x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$$

Zadanie 4 (0-4)

Michał uczestniczył w dwudniowym zgrupowaniu zawodników klubu kajakarskiego. Pierwszego dnia płynął kajakiem 3 godziny z prądem rzeki oraz tyle samo czasu pod prąd i pokonał łącznie 24 km. Drugiego dnia płynął kajakiem 2 godziny z prądem rzeki i 4 godziny pod prąd i pokonał łącznie 21 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.

D Zadanie 5 (0-3)

Uzasadnij, że punkt $P(x, y)$, którego współrzędne spełniają podany układ równań, należy do prostokąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 6)$, $D(1, 6)$.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - x)(y + x) = y(y - 1) \\ x + y - \frac{x - y}{2} = \frac{x + 2y}{2} + 2 \end{cases}$$

Zadanie 6

Dany jest układ równań z parametrem m :

$$\begin{cases} 2x - y = 2m + 1 \\ 3x - 2y = 2m - 3 \end{cases}$$

D Zadanie 6.1 (0-2)

Uzasadnij, że dla $m = -\frac{7}{2}$ rozwiązaniem układu równań jest para liczb przeciwnych.

D Zadanie 6.2 (0-3)

Wykaż, że $m = -5$ jest największą liczbą całkowitą, dla której układ równań jest spełniony przez parę liczb ujemnych.

6.1. Dla $m = -\frac{7}{2}$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x - y = -6 \quad / \cdot (-2) \\ 3x - 2y = -10 \end{cases} \\ &+ \begin{cases} -4x + 2y = 12 \\ 3x - 2y = -10 \end{cases} \\ &\quad \quad \quad \underline{-x = 2} \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } x = -2 \text{ oraz } y = 2x + 6 = 2.$$

6.2. Wyznaczamy zmienne x i y w zależności od parametru m :

$$\begin{cases} x = 2m + 5 \\ y = 2m + 9 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych, jeżeli: $2m + 5 < 0$ i $2m + 9 < 0$, czyli $m < -4,5$.

Zatem $m = -5$ jest największą liczbą całkowitą, dla której układ równań jest spełniony przez parę liczb ujemnych.