

2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższą budowlą na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m), wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Multibook

- Jak wprowadzano symbole w matematyce
- Historia złotej proporcji
- Mona Lisa i złota proporcja
- Gauss i liczby trójkątne
- Diagramy Venna
- Czy nieskończoność jest tylko jedna

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony,
- wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące,
- opisuje słownie i symbolicznie dany zbiór,
- określa relację zawierania zbiorów,
- wypisuje podzbiory danego zbioru.

Komentarz 1

W matematyce zbiór jest pojęciem pierwotnym, tzn. takim, którego nie definiujemy. Intuicyjnie opisujemy zbiór jako grupę nieuporządkowanych obiektów.

Inne pojęcia pierwotne to na przykład: punkt i prosta.

Komentarz 2

Zbiór pusty jest zbiorem skończonym.

Ćwiczenie 1

- jest
- nie jest
- jest
- nie jest
- nie jest
- jest

Ćwiczenie 2

- są równe,
 $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- nie są równe,
 $B = \{0, 1, 2, 3\}$

2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

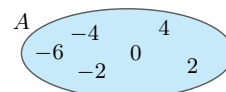
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbb{N}$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono zbiór A . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- $2 \in A$
- $1 \in A$
- $\sqrt{16} \in A$
- $\sqrt{9} \in A$
- $-6 \notin A$
- $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisanie zbioru jest podanie warunku, jaki muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 16\}$ oznacza, że $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ćwiczenie 2

Czy zbiory A i B są równe?

- $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 27\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 30\}$
- $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 9\}$

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Uwaga. Zdanie: „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ” oznacza, że prawdziwe są dwa zdania: „jeżeli p , to q ” oraz „jeżeli q , to p ”

Definicja

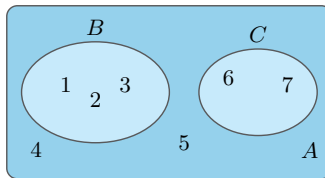
Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Mówimy też, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B . Zapisujemy to: $A \subset B$.

Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B .

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zależności: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$. Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

Przykład 1

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{6, 7\}$.
Między tymi zbiorami zachodzą zależności:
 $B \subset A$ i $C \subset A$



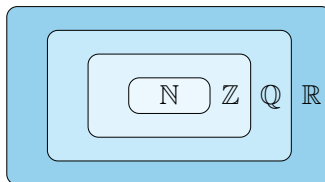
Ćwiczenie 3

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 \leq 16\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 12\}$, $B = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych zachodzą zależności:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że: a) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, b) $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

Zadania

- Zapisz zbiory A i B , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
 - $A = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 36\}$
 - $A = \{x \in \mathbb{Z}: -4 \leq x \leq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: 4 \leq x^2 \leq 16\}$
 - $A = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 49\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 = 49\}$
- Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów?
 - A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15
 - A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48
 - * A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 2 lub 5, B – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 3 lub 4
- Liczba podzbiorów zbioru dwuelementowego $\{1, 2\}$ jest równa 2^2 . Podzbiórmi tymi są: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$. Wypisz wszystkie podzbiory:
 - zbioru trzelementowego $\{1, 2, 3\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^3 ,
 - zbioru czteroelementowego $\{1, 2, 3, 4\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^4 .
- Który ze zbiorów A , B ma więcej podzbiorów?
 - $A = \{n \in \mathbb{N}: 2 < n^3 < 125\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}: n|125\}$
 - $A = \{k \in \mathbb{Z}: 2 < k^2 < 15\}$, $B = \{k \in \mathbb{Z}: 1 < k^4 < 75\}$
- $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ – $8 = 2^3$ podzbiorów
 - $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ – $16 = 2^4$ podzbiorów
- $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 25, 125\}$, zatem zbiór B ma więcej podzbiorów.
 - $A = \{-3, -2, 2, 3\}$, $B = \{-2, 2\}$, zatem zbiór A ma więcej podzbiorów.

Ćwiczenie 3

- $B \subset A$
- $A \subset B$
- $A \subset B$ i $B \subset A$,
czyli $A = B$

Ćwiczenie 4

- Ujemne liczby całkowite nie należą do zbioru liczb naturalnych.
- Nie wszystkie liczby rzeczywiste należą do zbioru liczb wymiernych, np. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Odpowiedzi do zadań

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $A \subset B$
 - $A = \{-4, -3, -2\}$,
 $B = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$,
 $A \subset B$
 - $A = \{-7, 7\}$, $B = \{7\}$,
 $B \subset A$
- Odpowiedź na pytanie nie zależy od tego, czy rozpatrujemy dzielniki naturalne, czy całkowite.
W obu podpunktach wypiszemy dzielniki naturalne.
 - tak, $A = \{1, 2, 3, 6\}$,
 $B = \{1, 3, 5, 15\}$,
4 elementy
 - nie, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, 9 elementów;
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$, 10 elementów
 - nie
Liczb naturalnych mniejszych od 100 i podzielnych przez 2 jest 50, podzielnych przez 5 jest 20. Dwa razy policzyliśmy liczby podzielne przez 10, których jest 10. Zatem zbiór A ma $50 + 20 - 10 = 60$ elementów.
Liczb naturalnych mniejszych od 100 i podzielnych przez 3 jest 34, podzielnych przez 4 jest 25. Dwa razy policzyliśmy liczby podzielne przez 12, których jest 9. Zatem zbiór B ma $34 + 25 - 9 = 50$ elementów.

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: iloczyn, suma oraz różnica zbiorów,
- wyznacza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów,
- przedstawia na diagramie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach,
- wyznacza dopełnienie zbioru,
- formułuje i uzasadnia hipotezy dotyczące praw działań na zbiorach.

Komentarz

Iloczyn zbiorów jest nazywany również przekrojem zbiorów.

Ćwiczenie 1

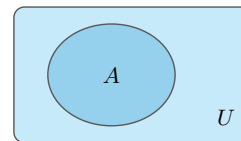
- a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cap B = \{1, 3\}$
- b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$,
 $A \cap B = \{c, d, e\}$

Ćwiczenie 2

- a) $A \cap B = \{0, 6, 12, 18\}$
- b) $A \cap B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$
- c) $A \cap B = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

2.2. Działania na zbiorach

Na zamieszczonym obok diagramie U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

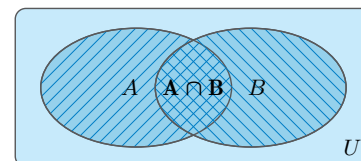


Definicja

Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie iloczyn zbiorów A i B jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany.



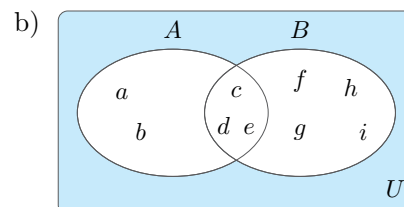
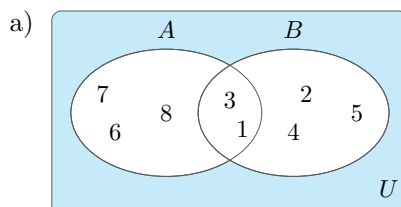
Przykład 1

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów A , B oraz $A \cap B$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .

- a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- b) $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$
- c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{\log 1, \log 10, \log 100, \log 10\,000, \log 100\,000\}$

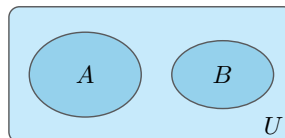
Multibook

- Różnica zbiorów
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)
- Działania na zbiorach – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na zamieszczonym obok diagramie przedstawiono rozłączne zbiory A i B .



Ćwiczenie 3

Czy zbiory X i Y są rozłączne?

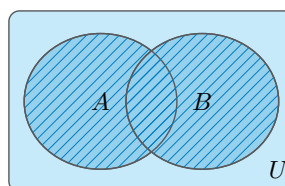
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie suma zbiorów A i B jest przedstawiona jako obszar zakresowany.

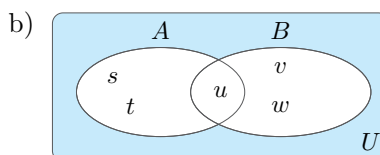
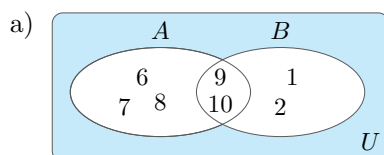


Przykład 2

Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$, to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B .



Ćwiczenie 5

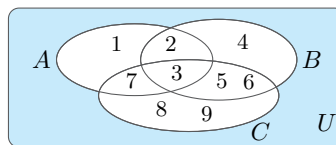
Wyznacz sumę zbiorów A i B .

- $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8
- A – zbiór liczb parzystych, B – zbiór liczb nieparzystych

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,
- $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.



Ćwiczenie 5

- $A \cup B = \{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
- $A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$, $B = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$,
 $A \cup B = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8\}$
- $A \cup B = \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 6

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cap C = \{3, 7\}$,
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{3\}$

Ćwiczenie 3

- Zbiory X i Y są rozłączne.
- Zbiory X i Y nie są rozłączne.

Ćwiczenie 4

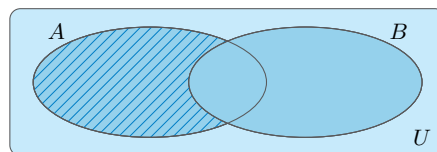
- $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $A \cup B = \{s, t, u, v, w\}$

Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$.

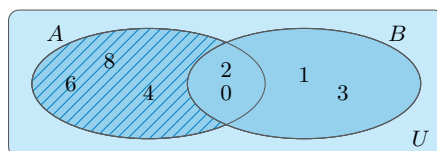
$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie różnica $A \setminus B$ jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

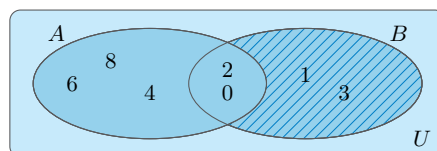


Przykład 3

Dane są zbiór $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i zbiór $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Wyznacz zbiory $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.



$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 7

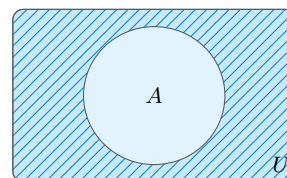
Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

- a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $A = \{n \in \mathbb{N}: 8|n \text{ i } n \leq 50\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}: 6|n \text{ i } n \leq 50\}$

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru** oznaczane przez A' i definiowane jako różnica całej przestrzeni i zbioru A :

$$A' = U \setminus A = \{x \in U: x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A' .



D Ćwiczenie 8

Rozpatrzmy zbiór $U = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ oraz jego podzbiory A i B , przy czym do zbioru A należą liczby parzyste, a do B liczby podzielne przez 3. Uzasadnij, że zachodzi równość:

a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$, b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Podane obok równości zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B . Nazywane są prawami De Morgana.

Prawa De Morgana

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Ćwiczenie 7

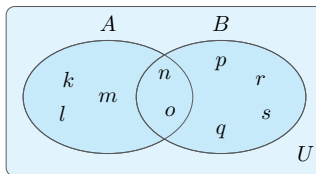
- a) $A \setminus B = \{7, 9, 11\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4, 6\}$
b) $A = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$, $B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$,
 $A \setminus B = \{8, 16, 32, 40\}$, $B \setminus A = \{6, 12, 18, 30, 36, 42\}$

Ćwiczenie 8

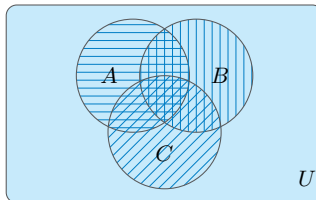
- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$
 $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
a) $A \cap B = \{0, 6\}$, $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} = A' \cup B'$
b) $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $(A \cup B)' = \{1, 5, 7\} = A' \cap B'$

Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



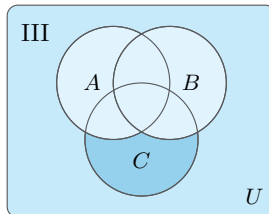
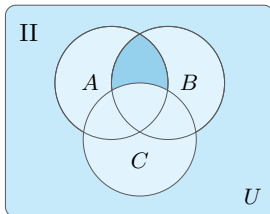
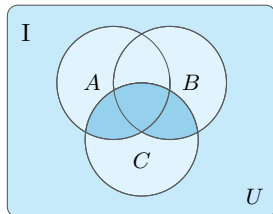
2. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
 a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$
 b) $A = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{4}\}$
 c) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$



3. Na diagramie obok obszar potrójnie zakreskowany odpowiada zbiorowi $A \cap B \cap C$. Wyznacz ten zbiór dla $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.
4. Dane są zbiory: A – zbiór spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiór spółgłosek w słowie *geometria* oraz C – zbiór spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

- a) $A \cap B$, c) $B \setminus A$, e) $B \setminus C$, g) $A \cap B \cap C$,
 b) $A \setminus B$, d) $B \cap C$, f) $C \setminus B$, h) $A \cup B \cup C$.

5. Na którym z poniższych diagramów ciemnoniebieski obszar odpowiada podanemu zbiorowi?



- a) $(A \cap B) \setminus C$ b) $C \setminus (A \cup B)$ c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

6. Przyjmij, że żadne dwa spośród zbiorów A , B , C nie są rozłączne, i na oddzielnych diagramach przedstaw zbiory:

- a) $A \cup (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 b) $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 c) $A \cap (B \setminus C)$ i $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
 d) $B \setminus (A \cup C)$ i $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

Porównaj otrzymane wyniki.

Czy wiesz, że...

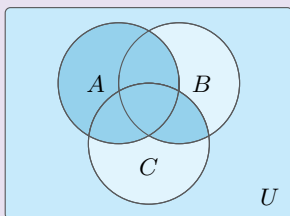
Diagramy ilustrujące zależności między zbiorami – takie jak użyte w tym temacie – noszą nazwę **diagramów Venna**, na cześć angielskiego matematyka i filozofa Johna Venna (1834–1923).

Odpowiedzi do zadań

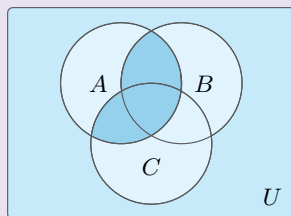
1. $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$,
 $A \cap B = \{n, o\}$,
 $A \setminus B = \{k, l, m\}$,
 $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
2. a) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $A \cap B = \{-1, 1\}$,
 $A \setminus B = \{-2, 0, 2\}$,
 $B \setminus A = \{-3, 3\}$
 b) $A \cup B = \{0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$,
 $A \cap B = \{1, 2\}$,
 $A \setminus B = \{\frac{1}{2}, 4\}$,
 $B \setminus A = \{0, \sqrt{2}\}$
 c) $A \cup B = \mathbb{Z}$,
 $A \cap B = \mathbb{N}$,
 $A \setminus B = \emptyset$,
 $B \setminus A = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
3. $A \cap B \cap C = \{5, 7\}$
4. $A = \{k, m, r, t\}$,
 $B = \{g, m, r, t\}$,
 $C = \{b, g, l, r\}$
 a) $A \cap B = \{m, r, t\}$
 b) $A \setminus B = \{k\}$
 c) $B \setminus A = \{g\}$
 d) $B \cap C = \{g, r\}$
 e) $B \setminus C = \{m, t\}$
 f) $C \setminus B = \{b, l\}$
 g) $A \cap B \cap C = \{r\}$
 h) $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$
5. a) II
 b) III
 c) I

6. Między zbiorami w poszczególnych podpunktach zachodzi równość.

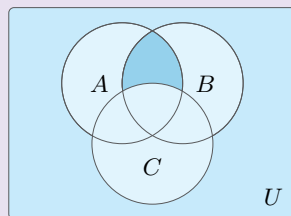
a) prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia



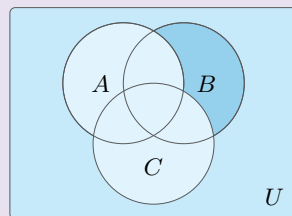
b) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania



c) prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania

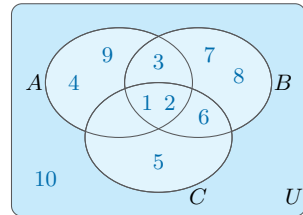


d) prawo rozdzielności odejmowania względem mnożenia



7. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$,
 $A \setminus C = \{3, 4, 9\}$,
 $B \setminus C = \{3, 7, 8\}$
b) $A \setminus (B \cap C) = \{3, 4, 9\}$,
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
c) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$,
 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 6\}$
d) $A' \cap B' = \{5, 10\}$,
 $A' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 $A' \cup B' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
8. a) 60 b) 170 c) 60

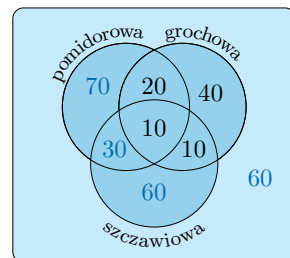
7. Dany jest zbiór $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Przerysuj przedstawiony obok diagram do zeszytu i umieść na nim liczby ze zbioru U , korzystając z podanych niżej informacji.
 $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$,
 $B \cap C = \{1, 2, 6\}$, $A \cap C = \{1, 2\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$.



Następnie wyznacz zbiory:

- a) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$,
b) $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cap C$,
c) $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$,
d) $A' \cap B'$, $A' \cup C'$, $A' \cup B' \cup C'$.
8. W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiowa i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprowadzono ankietę, której wyniki podano poniżej.

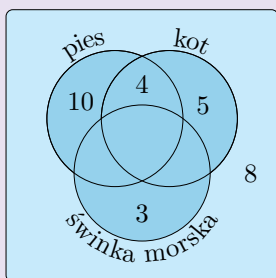
130 uczniów lubi zupę pomidorową,
110 uczniów lubi zupę szczawiową,
80 uczniów lubi zupę grochową,
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram. Podaj, ilu uczniów:

- a) nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,
b) lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę,
c) lubi dokładnie dwie zupy oferowane przez stołówkę.

9. Czterech uczniów ma psa i kota.



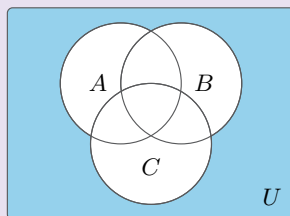
9. W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morskie, a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świnki morskie nie mają innych zwierząt. Podaj, ilu uczniów ma jednocześnie psa i kota.

10. Naszkicuj diagramy dla zbiorów:

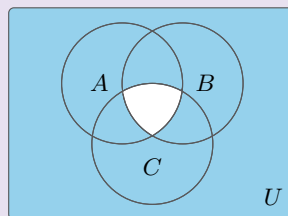
$$(A \cup B \cup C)', (A \cap B \cap C)', A' \cup B' \cup C', A' \cap B' \cap C'$$

Na ich podstawie sformułuj odpowiednie prawa rachunku zbiorów.

10. $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$



- $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$



Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy dwa elementy a, b , wśród których a jest wyróżniony jako pierwszy element tej pary. Pary uporządkowane (a, b) i (c, d) są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$.

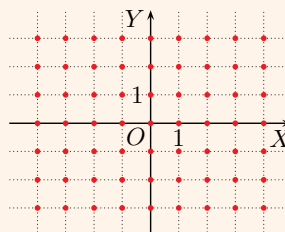
Definicja

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b) takich, że $a \in A$ i $b \in B$. Zbiór ten oznaczamy $A \times B$.

Nazwa „iloczyn kartezjański” upamiętnia francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes’a (1596–1650), zwanego w Polsce Kartezjuszem, autora sentencji „Myślę, więc jestem”. Wprowadził on do geometrii metodę współrzędnych. Obecnie stosujemy w matematyce wiele oznaczeń Kartezjusza, np. zmienne: $x, y, z, \dots$, współczynniki literowe: $a, b, c, \dots$, zapisywanie potęg w postaci: $a^7, x^2, x^4, \dots$



Zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ to zbiór wszystkich par (x, y) takich, że x i y są liczbami całkowitymi (rysunek obok). Nazywamy go zbiorem **punktów kratowych**.



Przykład 1

Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, wówczas $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Twierdzenie Picka

Pole wielokąta, którego wierzchołkami są punkty kratowe, można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P = \omega + \frac{b}{2} - 1$$

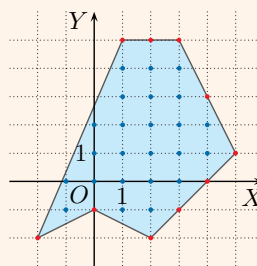
gdzie ω jest liczbą punktów kratowych należących do wnętrza wielokąta, b – liczbą punktów kratowych należących do brzegu wielokąta.

Przykład 2

Dla wielokąta przedstawionego na rysunku obok mamy: $\omega = 24$, $b = 10$, czyli pole $P = 24 + \frac{10}{2} - 1 = 28$.

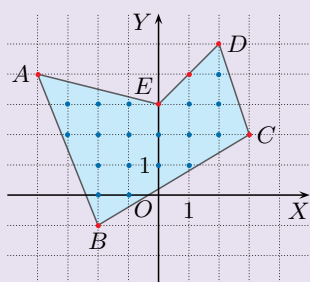
1. Korzystając z twierdzenia Picka, oblicz pole wielokąta $ABCDE$.

- $A(-4, 4)$, $B(-2, -1)$, $C(3, 2)$, $D(2, 5)$, $E(0, 3)$
- $A(-4, 1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, 2)$, $D(7, 1)$, $E(-1, 5)$

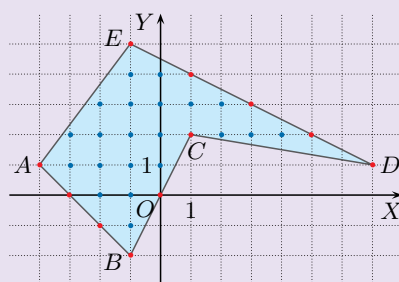


Odpowiedzi do zadań

1. a) $\omega = 18$, $b = 6$, $P = 20$



b) $\omega = 21$, $b = 11$, $P = 25,5$

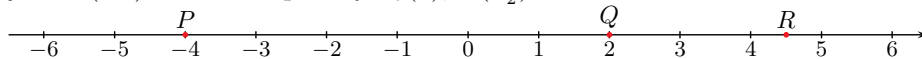


Oś liczbowa

Oś liczbowa to prosta, na której wyróżniono punkt zerowy (początek osi), zwrot oraz przynajmniej jeden punkt wskazujący na jednostkę.

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt na osi liczbowej. Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba zwana **współrzedną** tego punktu.

Na poniższej osi liczbowej punkt P odpowiada liczbie -4 , co możemy zapisać jako $P(-4)$. Pozostałe punkty: $Q(2)$, $R(4\frac{1}{2})$.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $A(-\frac{2}{3})$, $B(\frac{1}{3})$, $C(1\frac{2}{3})$

b) $A(-1\frac{1}{4})$, $B(\frac{3}{4})$, $C(1\frac{1}{2})$

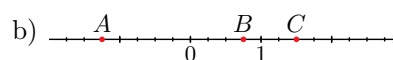
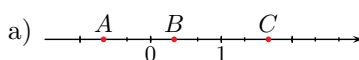
2. a) $A(-5)$, $B(15)$, $C(25)$

b) $A(-200)$, $B(400)$, $C(500)$

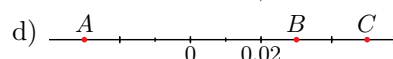
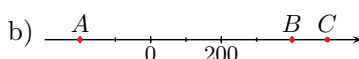
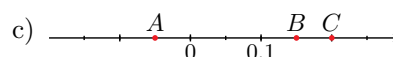
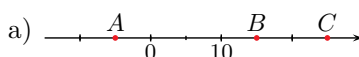
c) $A(-0,05)$, $B(0,15)$, $C(0,2)$

d) $A(-0,03)$, $B(0,03)$, $C(0,05)$

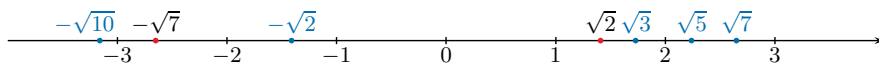
1. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



2. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



3. Na osi liczbowej zaznaczono przybliżone położenia punktów odpowiadających liczbom $-\sqrt{7}$ oraz $\sqrt{2}$. Przerysuj tę oś do zeszytu i zaznacz na niej przybliżone położenia punktów odpowiadających liczbom $-\sqrt{10}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.



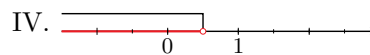
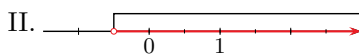
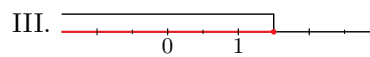
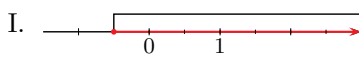
4. a) IV

b) III

c) II

d) I

4. Na którym z poniższych rysunków zaznaczono zbiór tych liczb x , które spełniają podany warunek?



a) $x < \frac{1}{2}$

b) $x \leq \frac{3}{2}$

c) $x > -\frac{1}{2}$

d) $x \geq -\frac{1}{2}$

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają warunek:

a) $x < 4\frac{1}{3}$,

b) $x \leq -2\frac{3}{4}$,

c) $x > -3\frac{1}{5}$,

d) $x \geq 8,3$.

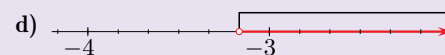
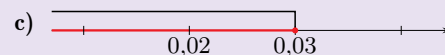
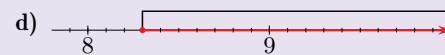
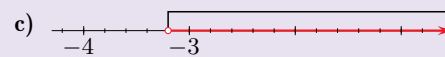
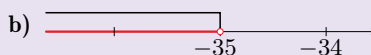
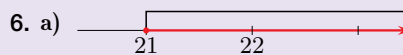
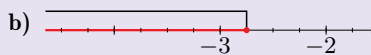
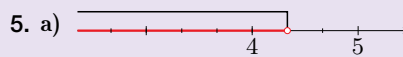
6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają warunek:

a) $x \geq 21$,

b) $x < -35$,

c) $x \leq 0,03$,

d) $x > -3\frac{1}{6}$.



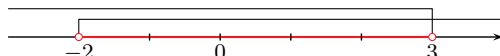
2.3. Przedziały

■ Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają jednocześnie dwa warunki (dwie nierówności): $x > -2$ i $x < 3$.

Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3 , co możemy też zapisać symbolicznie za pomocą podwójnej nierówności: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:



Liczby -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3 , co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczby -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



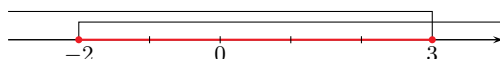
Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

- a) $(-3; 2)$ b) $(0; 4)$ c) $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $-2 \leq x \leq 3$.



Liczby -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $[-2; 3]$.

Uczeń:

- rozróżnia pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, ograniczony, nieograniczony,
- zapisuje przedział i zaznacza go na osi liczbowej,
- odczytuje i zapisuje symbolem przedział zaznaczony na osi liczbowej,
- wyznacza przedział opisany podanymi nierównościami,
- wymienia liczby należące do przedziału, spełniające podane warunki.

Komentarz 1

Przedział liczbowy jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Komentarz 2

Warto uświadomić uczniom różnicę między zbiorem skończonym i ograniczonym. Przedziały liczbowe są zbiorami nieskończonymi.

Ćwiczenie 1

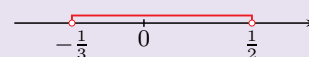
- a) $-3 < x < 2$



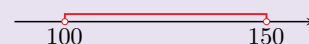
- b) $0 < x < 4$



- c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$



- d) $100 < x < 150$



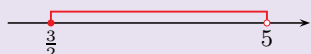
Ćwiczenie 2

a) $-1 \leq x \leq 4$



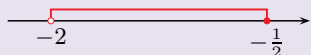
6 liczb całkowitych

b) $\frac{3}{2} \leq x < 5$



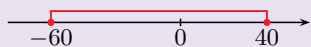
3 liczby całkowite

c) $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$



1 liczba całkowita

d) $-60 \leq x \leq 40$



101 liczb całkowitych

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to taki przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, a jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – to **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
przedział lewostronnie domknięty	$[a; b)$	$a \leq x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b]$	$a < x \leq b$	

Długością każdego z przedziałów $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$, $[a; b]$ nazywamy liczbę: $b - a$.

Ćwiczenie 2

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

- a) $[-1; 4]$ b) $[\frac{3}{2}; 5)$ c) $(-2; -\frac{1}{2}]$ d) $[-60; 40]$

■ Przedziały nieograniczone

Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.

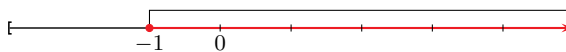


b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.



Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $[-1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leq 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3]$.



Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

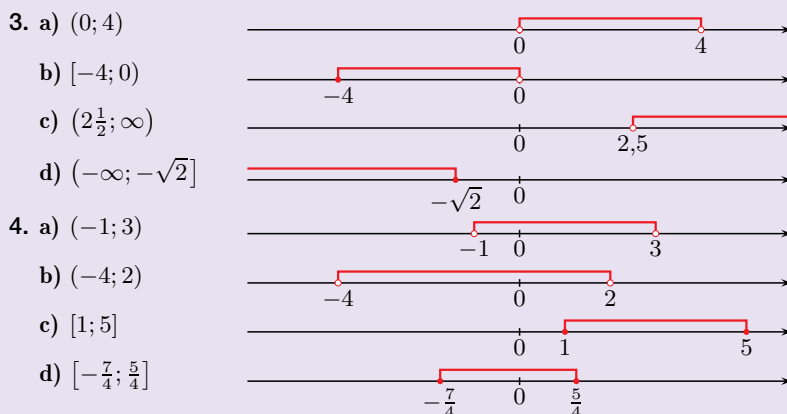
Ćwiczenie 3

Przeczytaj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; \infty)$	$x > a$	
przedział lewostronnie domknięty	$[a; \infty)$	$x \geq a$	
przedział prawostronnie domknięty	$(-\infty; b]$	$x \leq b$	
przedział otwarty	$(-\infty; b)$	$x < b$	

Zadania

- Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.
 - $-7 \leq x \leq 0$
 - $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$
 - $x \geq 2\frac{1}{4}$
 - $x < -\frac{1}{3}$
- Zapisz symbolicznie przedział zaznaczony na osi liczbowej i podaj warunek, jaki muszą spełniać liczby należące do tego przedziału.
 -
 -
 -
 -
 -
 -
 -
 -
- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:
 - liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
 - liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
 - liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
 - liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.
- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego należą liczby odległe:
 - od liczby 1 o mniej niż 2,
 - od liczby -1 o mniej niż 3,
 - od liczby 3 o nie więcej niż 2,
 - od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.
- Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do podanego przedziału.
 - $[-1; 4)$
 - $(0; 6)$
 - $[-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}]$
 - $[-\frac{25}{4}; -2]$



Odpowiedzi do zadań

- $[-7; 0]$
 - $[\frac{1}{4}; \sqrt{2})$
 - $[2\frac{1}{4}; \infty)$
 - $(-\infty; -\frac{1}{3})$
- $(-7; 2], -7 < x \leq 2$
 - $[-50; 20], -50 \leq x \leq 20$
 - $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}), \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
 - $[3,14; \pi), 3,14 \leq x < \pi$
 - $(-\infty; 10), x < 10$
 - $(\sqrt{2}; \infty), x > \sqrt{2}$
 - $[-\frac{1}{4}; \infty), x \geq -\frac{1}{4}$
 - $(-\infty; 2\pi), x < 2\pi$
- liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
 - liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
 - liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
 - liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.
- od liczby 1 o mniej niż 2,
 - od liczby -1 o mniej niż 3,
 - od liczby 3 o nie więcej niż 2,
 - od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.
- $-1, 0, 1, 2, 3$
 - $1, 2, 3, 4, 5$
 - $0, 1, 2$
 - $-6, -5, -4, -3, -2$

6. a) z
b) y

8. a) $A \subset B$
b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.
c) $B \subset A$
d) $A \subset B$

9. a) $[-2; 5]$
b) $[-3; 5]$
c) $[-3; 2]$
d) $[-1; 1]$

10. a) $\frac{-3+1}{2} = -1$
b) $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{1\frac{1}{4}+2\frac{3}{4}}{2} = 2$

11. $p+1 = 2p$ lub $2p+1 = p$,
czyli $p = -1$ lub $p = 1$

12. a) $x \in [1; 2]$ i $y \in [1; 5]$
b) $x \in [-5; -1]$ i $y \in [0; 4]$

13. a) II
b) III
c) I

6. Które spośród liczb x, y, z należą do podanego przedziału?

- a) $(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}]$, $x = -\frac{8}{3}$, $y = -2\frac{3}{4}$, $z = 3\frac{2}{5}$
b) $[-1; 2)$, $x = -1,01$, $y = -0,9$, $z = 1,9$

7. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?

- a) $\sqrt{x} \in [1; 2]$ b) $\sqrt{x} \in [2; 3]$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in [-2; 0)$

8. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.

- a) $A = (-1; 2]$, $B = [-1; 3)$ c) $A = (-\frac{7}{8}; \frac{15}{8})$, $B = [-\frac{6}{7}; \frac{13}{7}]$
b) $A = (-\infty; 7)$, $B = (2; 7]$ d) $A = (\frac{22}{7}; 7)$, $B = (\pi; \sqrt{50})$

9. Określ najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w podanym przedziale.

- a) $(-2\frac{1}{2}; 5]$ b) $(-\pi; 6)$ c) $[-3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4})$ d) $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

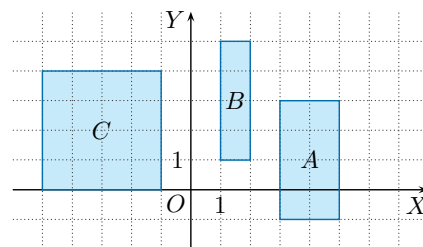
10. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:

- a) $[-3; 1]$, b) $[-2; 3]$, c) $[\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$, d) $[1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}]$.

11. Dla jakich wartości parametru p przedziały $[p; p+1]$ oraz $[2p; 2p+1]$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

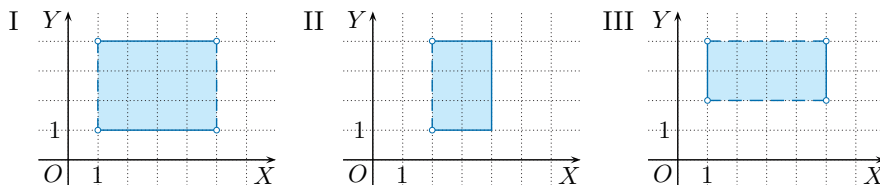
12. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in [3; 5]$ i $y \in [-1; 3]$. Zapisz warunki, jakie spełniają punkty należące do:

- a) prostokąta B ,
b) kwadratu C .



13. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono zbiór punktów (x, y) , których współrzędne spełniają podane warunki?

- a) $x \in (2; 4]$, $y \in [1; 4]$ b) $x \in [1; 5]$, $y \in (2; 4)$ c) $x \in (1; 5)$, $y \in [1; 4]$



Uwaga. Linia przerywana na rysunku oznacza, że leżące na niej punkty nie należą do zbioru.

7. a) $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$, czyli $1 \leq x \leq 4$, zatem warunek spełniają 4 liczby całkowite.

- b) $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$, czyli $4 \leq x \leq 9$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.

- c) $1 < \sqrt[3]{x} < 2$, czyli $1 < x < 8$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.

- d) $-2 \leq \sqrt[3]{x} < 0$, czyli $-8 \leq x < 0$, zatem warunek spełnia 8 liczb całkowitych.

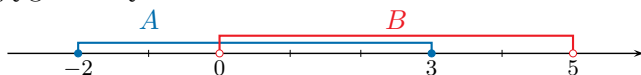
2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Można wykonywać na nich działania: $\cup, \cap, \setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla $A = [-2; 3]$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



$A \cup B = [-2; 5)$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3]$	Iloczynowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = [-2; 0]$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

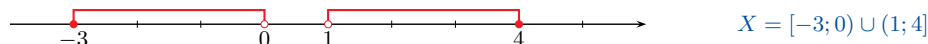
Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

- a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$ c) $A = [1; 3]$, $B = [-5; 3]$
 b) $A = [-4; 1]$, $B = [1; 3]$ d) $A = (-3; 2]$, $B = (-1; 2]$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $[-3; 0)$ i $(1; 4]$.

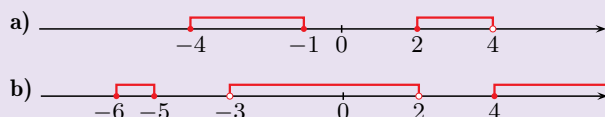


Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór X .

- a) $X = [-4; -1] \cup [2; 4)$ b) $X = [-6; -5] \cup (-3; 2) \cup [4; \infty)$

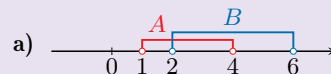
Ćwiczenie 2



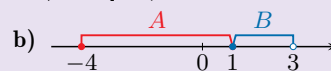
Uczeń:

- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej,
- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę różnych zbiorów liczbowych oraz zapisuje je symbolicznie.

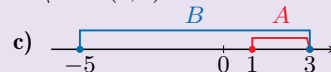
Ćwiczenie 1



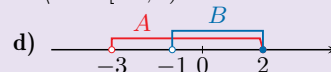
$$\begin{aligned} A \cup B &= (1; 6), \\ A \cap B &= (2; 4), \\ A \setminus B &= (1; 2], \\ B \setminus A &= [4; 6) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= [-4; 3], \\ A \cap B &= \{1\}, \\ A \setminus B &= [-4; 1), \\ B \setminus A &= (1; 3] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= [-5; 3], \\ A \cap B &= [1; 3], \\ A \setminus B &= \emptyset, \\ B \setminus A &= [-5; 1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= (-3; 2], \\ A \cap B &= (-1; 2], \\ A \setminus B &= (-3; -1], \\ B \setminus A &= \emptyset \end{aligned}$$

Multibook

- Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

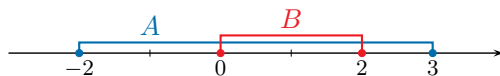
- a) $A \setminus B = [-5; -3] \cup [-1; 4]$
b) $A \setminus B = [-3; 2) \cup [\frac{5}{2}; 5]$
c) $A \setminus B = [-3; -1) \cup [2; \infty)$
d) $A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A \cup B = (-3; 4)$,
 $A \cap B = [-1; 0)$,
 $A \setminus B = (-3; -1)$,
 $B \setminus A = [0; 4)$
b) $A \cup B = (-4; 3)$,
 $A \cap B = [-\frac{1}{2}; 2]$,
 $A \setminus B = (-4; -\frac{1}{2})$,
 $B \setminus A = (2; 3)$
c) $A \cup B = (-\infty; 2]$,
 $A \cap B = [0; 2)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$,
 $B \setminus A = \emptyset$
d) $A \cup B = [-1; \infty)$,
 $A \cap B = \{2\}$,
 $A \setminus B = [-1; 2)$,
 $B \setminus A = (2; \infty)$
2. a) 7
b) 5
c) 4
3. a) $A \cup B = (-7; 4)$
10 liczb całkowitych
b) $A \cap B = (-5; 3)$
7 liczb całkowitych
c) $A \setminus B = \emptyset$
d) $B \setminus A = (-7; -5] \cup [3; 4)$
3 liczby całkowite

Przykład 3

Dane są zbiory $A = [-2; 3]$ i $B = [0; 2]$. Wyznacz zbiór $A \setminus B$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = [-2; 0) \cup (2; 3]$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

- a) $A = [-5; 4]$, $B = (-3; -1)$ c) $A = [-3; \infty)$, $B = [-1; 2)$
b) $A = [-3; 5)$, $B = [2; \frac{5}{2})$ d) $A = \mathbb{R}$, $B = [-3; 1]$

Zadania

1. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
a) $A = (-3; 0)$, $B = [-1; 4)$ c) $A = (-\infty; 2]$, $B = [0; 2)$
b) $A = (-4; 2]$, $B = [-\frac{1}{2}; 3)$ d) $A = [-1; 2]$, $B = [2; \infty)$
2. Ile elementów należy do zbioru X ? Wykonaj odpowiednią ilustrację graficzną.
a) $X = [-5; 6] \cap \mathbb{N}$ b) $X = (-3; 3) \cap \mathbb{Z}$ c) $X = (-\pi; \pi) \cap \mathbb{N}$
3. Niech $A = (-5; 3)$, $B = (-7; 4)$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:
a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \setminus B$, d) $B \setminus A$?
4. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.
a) $X = [-2; 0] \cup [1; 2] \cup [4; 6]$ c) $X = (-\infty; -4] \cup [-2; 1) \cup \{3\}$
b) $X = (-3; -1) \cup (0; 2] \cup [3; \infty)$ d) $X = (-\infty; -2) \cup \{0, 1\} \cup [4; \infty)$
5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
a) $A = (-3; 1) \cup (3; 6)$, $B = (0; 4)$ d) $A = (-2; 0]$, $B = \{0\} \cup [3; 5]$
b) $A = [-2; 1] \cup [4; 5]$, $B = (0; \infty)$ e) $A = [0; 7]$, $B = (1; 3) \cup [8; 9]$
c) $A = (-\infty; 0] \cup [2; 5]$, $B = (-1; 6)$ f) $A = [1; 9]$, $B = (1; 2) \cup (6; 9)$
6. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
a) $A = [-5; 2]$, $B = \{1, 2\}$ c) $A = (-\infty; 4]$, $B = \{0\} \cup [4; \infty)$
b) $A = [3; \infty)$, $B = \{2, 3, 4\}$ d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\} \cup (2; \infty)$
5. a) $A \cup B = (-3; 6)$, $A \cap B = (0; 1) \cup (3; 4)$, $A \setminus B = (-3; 0] \cup [4; 6)$, $B \setminus A = [1; 3]$
b) $A \cup B = [-2; \infty)$, $A \cap B = (0; 1] \cup [4; 5]$, $A \setminus B = [-2; 0]$, $B \setminus A = (1; 4) \cup (5; \infty)$
c) $A \cup B = (-\infty; 6)$, $A \cap B = (-1; 0] \cup [2; 5]$, $A \setminus B = (-\infty; -1]$, $B \setminus A = (0; 2) \cup (5; 6)$
d) $A \cup B = (-2; 0] \cup [3; 5]$, $A \cap B = \{0\}$, $A \setminus B = (-2; 0)$, $B \setminus A = [3; 5]$
e) $A \cup B = [0; 7] \cup [8; 9]$, $A \cap B = (1; 3)$, $A \setminus B = [0; 1] \cup [3; 7]$, $B \setminus A = [8; 9]$
f) $A \cup B = [1; 9]$, $A \cap B = (1; 2) \cup (6; 9)$, $A \setminus B = \{1\} \cup [2; 6] \cup \{9\}$, $B \setminus A = \emptyset$
6. a) $A \setminus B = [-5; 1) \cup (1; 2)$, $B \setminus A = \emptyset$
b) $A \setminus B = (3; 4) \cup (4; \infty)$, $B \setminus A = \{2\}$
c) $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup (0; 4)$, $B \setminus A = (4; \infty)$
d) $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = (2; 3) \cup (3; \infty)$

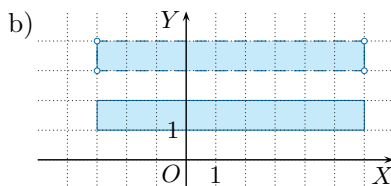
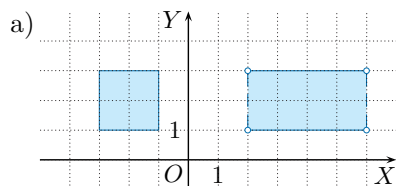
7. Zapisz w postaci przedziałów zbiory $A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -4 \text{ i } x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x > -1 \text{ i } x \leq 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$, a następnie wyznacz:
a) $(A \cup B) \setminus C$, b) $(A \cup C) \setminus B$, c) $(A \cap B) \setminus C$.

8. Wyznacz zbiory A' , B' i $A' \cap B'$, gdy $A, B \subset \mathbb{R}$.

$$A' = \mathbb{R} \setminus A$$

- a) $A = (-3; 0)$, $B = [\frac{1}{2}; 3]$ c) $A = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$, $B = [-4; 4]$
b) $A = [-4; 4]$, $B = (0; 2)$ d) $A = (-\infty; 0) \cup (1; 5)$, $B = (-5; -1)$

9. Podaj za pomocą przedziałów, jakie warunki spełniają współrzędne punktów (x, y) należących do przedstawionego zbioru.

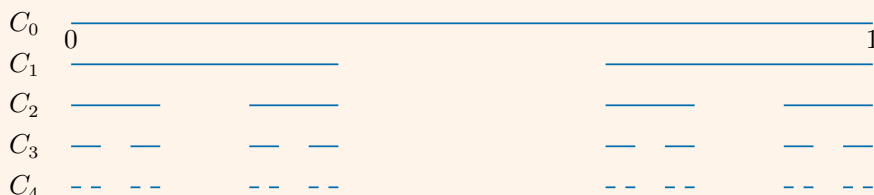


10. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) , których współrzędne spełniają warunki $x \in [-3; -1] \cup (1; 2)$ oraz:

- a) $y \in [-2; 3]$, b) $y \in [-3; -1] \cup (1; 3]$, c) $y \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$.

Czy wiesz, że...

Na rysunku przedstawiono początkowe etapy zaproponowanej przez niemieckiego matematyka Georga Cantora (1845–1918) konstrukcji pewnego zbioru – **zbioru Cantora**. Zaczynamy od przedziału $C_0 = [0; 1]$, który dzielimy na trzy części równej długości i usuwamy środkową część będącą przedziałem $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. W ten sposób otrzymujemy zbiór $C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$. Następnie z każdej części zbioru C_1 usuwamy jej środkową trzecią część itd.



11. a) Zapisz zbiór C_2 w postaci sumy przedziałów. Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_2 do sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_1 ?
b) Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_4 do długości zbioru C_0 ?

11. a) $C_2 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$
Stosunek sumy długości przedziałów: $\frac{2}{3}$
b) Stosunek sumy długości przedziałów: $\frac{16}{81}$

7. $A = [-4; 0)$, $B = (-1; 3]$,
 $C = [2; \infty)$

- a) $[-4; 2)$
b) $[-4; -1] \cup (3; \infty)$
c) $(-1; 0)$

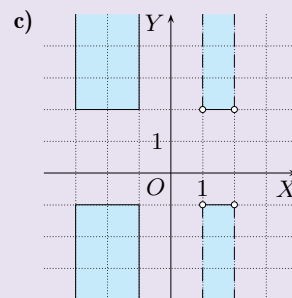
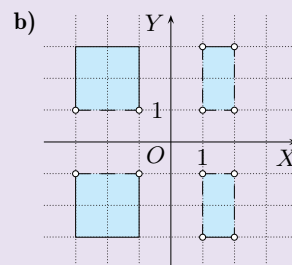
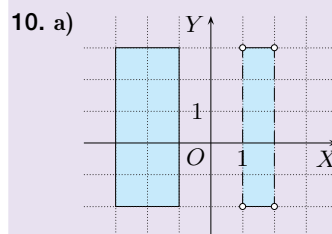
8. a) $A' = (-\infty; -3] \cup [0; \infty)$,
 $B' = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty)$,
 $A' \cap B' = (-\infty; -3] \cup [0; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty)$

- b) $A' = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$,
 $B' = (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$,
 $A' \cap B' = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

- c) $A' = [1; 3]$,
 $B' = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$,
 $A' \cap B' = \emptyset$

- d) $A' = [0; 1] \cup [5; \infty)$,
 $B' = (-\infty; -5] \cup [-1; \infty)$,
 $A' \cap B' = [0; 1] \cup [5; \infty)$

9. a) $x \in [-3; -1] \cup (2; 6)$,
 $y \in [1; 3]$
b) $x \in [-3; 6]$,
 $y \in [1; 2] \cup (3; 4)$

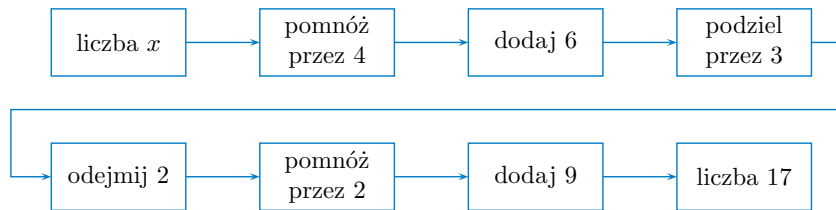


Odpowiedzi do zadań

- $20 - 5 \cdot (-2) =$
 $= 4 - 13 \cdot (-2)$
 $20 + 10 = 4 + 26$
 $30 = 30$
 Zatem $p = -2$ spełnia podane równanie.
 - $3 \cdot (-5) - (1 + 5 \cdot (-5)) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot (-5) + 14$
 $-15 - (-24) = -2,5 + 14$
 $9 \neq 11,5$
 Zatem $p = -5$ nie spełnia podanego równania.
- $x = \frac{5}{2}$
 - $x = -\frac{1}{3}$
 - $x = -6$
 - $x = -1$
- $x = 4$
 - $x = -\frac{2}{3}$
 - $x = -1$
 - $x = \frac{9}{4}$
- $x = \frac{1}{3}; -x + \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3}$
 - $x = -\frac{1}{4}; -x + \frac{1}{x} = -3\frac{3}{4}$
 - $x = -3; -x + \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3}$
 - $x = \frac{1}{2}; -x + \frac{1}{x} = 1\frac{1}{2}$
- $x = 2$
 - $x = -2$
 - $x = \frac{17}{28}$
 - $x = -4$
 - $x = \frac{7}{2}$
 - $x = 2$
- $((4x + 6) : 3 - 2) \cdot 2 + 9 = 17$
 $x = 3$

Rozwiązywanie równań

- Sprawdź, czy liczba p spełnia podane równanie.
 - $20 - 5x = 4 - 13x, p = -2$
 - $3x - (1 + 5x) = \frac{1}{2}x + 14, p = -5$
- Rozwiąż równanie.
 - $2x + 4 = 9$
 - $4x + 3 = 2x - 9$
 - $-3x + 6 = 7$
 - $x - 6 = 5x - 2$
- Rozwiąż równanie.
 - $\frac{4x-1}{3} = 5$
 - $\frac{6x+1}{5} = x$
 - $\frac{2-3x}{4} = 1$
 - $3 - x = \frac{2x-3}{2}$
- Liczba x jest rozwiązaniem podanego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do x .
 - $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{3x+5}{6}$
 - $\frac{x+4}{2} - \frac{-2x-5}{6} = \frac{0,5x+2,5}{3}$
 - $\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$
 - $\frac{5-4x}{4} - \frac{6x-1}{3} = \frac{4x-1}{12}$
- Rozwiąż równanie.
 - $3(2x - 7) - (7x - 13) = -10$
 - $3x = x - (1 - (x - 3))$
 - $-2(-27 - 3x) = -3(2x - 10)$
 - $5x - (2x + (3 - x)) = 11$
 - $6 - 2(2x - \frac{1}{2}) = 4x - 2(\frac{3}{4} - 3x)$
 - $1 - (x - (x - (x - 1))) = 0$
- Sprawdź, czy równanie jest **tożsamościowe** (spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą), czy **sprzeczne** (niespełnione przez żadną liczbę rzeczywistą).
 - $3x - 6 = 1 - (7 - 3x)$
 - $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6)$
 - $4 - (3 + 2x) = 5 - (2x + 6)$
 - $\frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}x) = 4 - \frac{1}{4}x$
- Począwszy od liczby x , wykonano kolejno ciąg operacji. Wyznacz liczbę x .



- $3x - 6 = 1 - 7 + 3x$
 $3x - 3x = -6 + 3$
 $0 = 0$
 Zatem jest to równanie tożsamościowe.
 - $4 - 3 - 2x = 5 - 2x - 6$
 $-2x + 2x = -1 - 1$
 $0 = -2$
 Zatem jest to równanie sprzeczne.
 - $6x - 9 = 6x - 4$
 $6x - 6x = -4 + 9$
 $0 = 5$
 Zatem jest to równanie sprzeczne.
 - $4 - \frac{1}{4}x = 4 - \frac{1}{4}x$
 $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x = 4 - 4$
 $0 = 0$
 Zatem jest to równanie tożsamościowe.

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - 3 &= 9 \\ 2x - 3 &= 9 / + 3 \\ 2x &= 12 / : 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest liczba 6.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x+6}{2} &= 5 \\ \frac{x+6}{2} &= 5 / \cdot 2 \\ x + 6 &= 10 / - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest liczba 4.

2.5. Rozwiązywanie nierówności

Warunek $ax + b > c$, gdzie x jest niewiadomą, nazywamy **nierównością**.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej na miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Na przykład liczba 7 spełnia nierówność $x + 1 > 5$, bo $7 + 1 > 5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

Przykład 1

a) Rozwiąż nierówność $x + 3 > 7$.

$$x + 3 > 7$$

$$x + 3 - 3 > 7 - 3$$

$$x > 4 \quad \text{Nierówność jest prawdziwa dla } x \in (4; \infty).$$

Nierówności, w których występuje znak $>$ lub $<$, nazywamy **nierównościami ostrymi**.

b) Rozwiąż nierówność $x - 4 \leq 5$.

$$x - 4 \leq 5$$

$$x - 4 + 4 \leq 5 + 4$$

$$x \leq 9 \quad \text{Nierówność jest prawdziwa dla } x \in (-\infty; 9].$$

Nierówności, w których występuje znak $\geq$ lub $\leq$, nazywamy **nierównościami nieostrymi**.

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron odpowiada czynności przeniesienia tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

- a) $x + 309 < 273$ b) $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$ c) $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$ d) $2x - 3 > x + 17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one ten sam zbiór rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

- a) $x - 13 < 56$, $x + 26 > 95$ b) $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$, $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

a) Dla pierwszej nierówności mamy $x < 69$, a dla drugiej $x > 69$, czyli nierówności nie są równoważne.

b) Dla obydwu nierówności otrzymujemy $x \geq \frac{5}{12}$, czyli są równoważne.

Uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem nierówności,
- rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym nierówności spreczne i tożsamościowe,
- zapisuje zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału,
- stosuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym,
- uzasadnia niektóre własności nierówności.

Ćwiczenie 1

- a) spełnia
b) spełnia
c) nie spełnia
d) nie spełnia

Ćwiczenie 2

- a) $x < -36$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
b) $x \geq 2\frac{5}{6}$, liczba 3
c) $x \leq -5\frac{1}{4}$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
d) $x > 20$, liczba 21

Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$$6x + 5 < 17$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$$6x < 12 \quad / : 6$$

Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$$x < 2$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leq 34$ b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$ c) $0,1x + 1 < -\frac{1}{2}$ d) $5x - 7 \geq 3x + 5$

Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$$-\frac{1}{3}x > 5 \quad / \cdot (-3)$$

Obie strony nierówności mnożymy przez -3 .

$$x < -15$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leq -13$.

$$-6x - 4 \leq -13$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$$-6x \leq -9 \quad / : (-6)$$

Obie strony nierówności dzielimy przez -6 .

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań tej nierówności.

a) $-3x - 7 < 2$

c) $3(x - 1) \geq x + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leq 5$

d) $2(x + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}x + 4$

f) $\frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2}$

Ćwiczenie 5

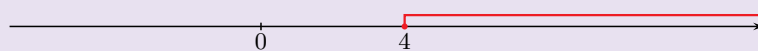
a) $x > -3$



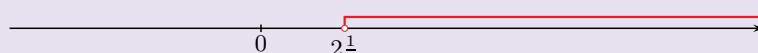
b) $x \geq -6$



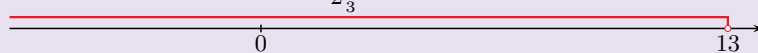
c) $x \geq 4$



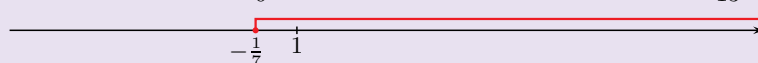
d) $x > 2\frac{1}{3}$



e) $x < 13$



f) $x \geq -\frac{1}{7}$



Ćwiczenie 4

a) $x \leq 9$

b) $x > \frac{16}{9}$

c) $x < -15$

d) $x \geq 6$

Definicja

Nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } \frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x$$

$$\frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x \quad / \cdot 6$$

$$1-3x < -3x$$

$$1 < 0 \quad \text{sprzeczność}$$

Nierówność jest sprzeczna.

$$\text{b) } \frac{5x-2}{5} \geq x-2$$

$$\frac{5x-2}{5} \geq x-2 \quad / \cdot 5$$

$$5x-2 \geq 5x-10$$

$$-2 \geq -10 \quad \text{tożsamość}$$

Nierówność jest tożsamościowa.

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy podana nierówność jest tożsamościowa, czy sprzeczna.

$$\text{a) } 3(2 - \frac{1}{6}x) \geq -0,5x + 1$$

$$\text{d) } \frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5$$

$$\text{b) } -\frac{2}{3}(3x-2) > \frac{1}{2}(3-4x)$$

$$\text{e) } \frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$$

$$\text{c) } \frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$$

$$\text{f) } \frac{x+3}{2} - \frac{x-3}{4} \geq \frac{1}{4}x - 3$$

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

$$\text{a) } \begin{cases} x+9 \geq 13 \\ 2x-6 < 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x+6 > -9 \\ 1-x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x+3 \leq 4 \\ 5-4x \geq 1 \end{cases}$$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie podane nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

$$\text{a) } 2x+20 > 8 \text{ i } 5 < 1-x$$

$$\text{c) } 2x+3 < 7 \text{ i } 3-4x \leq 19$$

$$\text{b) } 2x+3 > 2 \text{ i } 4x < 3$$

$$\text{d) } 3x+9 > -7 \text{ i } -3x > 4x+21$$

3. Które spośród liczb $a = 1-\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}-1$, $c = \pi+2$ spełniają nierówność:

$$\text{a) } \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2},$$

$$\text{c) } \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3},$$

$$\text{e) } \frac{3x+2}{-5} < 3-x,$$

$$\text{b) } \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6},$$

$$\text{d) } \frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2},$$

$$\text{f) } -3(x+3) > \frac{x-5}{-2}?$$

Ćwiczenie 6

a), e), f) tożsamościowa

b), c), d) sprzeczna

Odpowiedzi do zadań

1. a) $[4; 5)$

$$\text{b) } (-5; -2]$$

$$\text{c) } [-\frac{1}{2}; 1]$$

2. a) $(-6; -4)$, -5

$$\text{b) } (-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}), 0$$

$$\text{c) } [-4; 2), -4, 1$$

$$\text{d) } (-\frac{16}{3}; -3), -5, -4$$

3. a) $x < -4\frac{2}{3}$, żadna liczba

$$\text{b) } x \geq 4, \text{ liczba } c$$

$$\text{c) } x \geq 2\frac{3}{4}, \text{ liczba } c$$

$$\text{d) } x > \frac{4}{7}, \text{ liczby } b \text{ i } c$$

$$\text{e) } x < 8\frac{1}{2}, \text{ liczby } a, b \text{ i } c$$

$$\text{f) } x < -4\frac{3}{5}, \text{ żadna liczba}$$

4. a) $x > \frac{15}{8}$
 b) $x \geq 2$
 c) $x \leq \frac{25}{4}$
 d) $x > \frac{28}{33}$
 e) $x \geq \frac{11}{8}$
 f) $x < \frac{19}{3}$
5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$
 b) $x > 6\sqrt{2}$
 c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$
6. a) $0 \leq 3(2n - 11) < 21$
 $5,5 \leq n < 9$
 $n \in \{6, 7, 8\}$
 Warto zwrócić uczniom uwagę na założenie, że otrzymana liczba ma być liczbą naturalną.
- b) $4(3k + 7) > 2$
 $k > -2\frac{1}{6}$
 $k \in \{-2, -1\}$
- c) $\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}(m - 2) < 3$
 $m < 14$
 $m \in \{0, 1, 2, \dots, 13\}$
7. a) $38 < 8 \cdot 3 + 4k < 46$
 $k \in \mathbb{N}_+$
 $3,5 < k < 5,5$
 $k \in \{4, 5\}$
- b) $40 < 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3k < 68$
 $k \in \mathbb{N}_+$
 $1\frac{5}{6} < k < 4\frac{1}{6}$
 $k \in \{2, 3, 4\}$
8. Niech x – liczba uczestników, $x \in \mathbb{N}$, wówczas:
 $2230 < 1550 + 8x$
 $x > 85$
 Musi być co najmniej 86 uczestników.
9. a) $-c > 0$, więc $-ac > -bc$
 b) $c^2 > 0$, więc $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$
 c) $c^3 < 0$, więc $\frac{a}{c^3} < \frac{b}{c^3}$

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$
 b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$
 c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$
 d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$
 e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$
 f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n .

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k .

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m .

7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k , a jego podstawą jest kwadrat o boku 3. Jakie wartości całkowite może przyjmować k przy założeniu, że:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 i mniejsza od 46,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 i mniejsze od 68?

8. Właściciel klubu chce zaprosić na koncert jeden z dwóch zespołów rockowych. Zespół Gamma zażądał za występ 2230 zł, a zespół Kappa – 1550 zł plus 8 zł od każdego uczestnika koncertu. Dla jakiej liczby uczestników tańsze będzie zaproszenie zespołu Gamma?

9. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki: $c < 0$ oraz $a > b$. Który symbol, $<$ czy $>$, należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać nierówność prawdziwą?

- a) $-ac \begin{matrix} \boxed{>} \\ \boxed{<} \end{matrix} -bc$ b) $\frac{a}{c^2} \begin{matrix} \boxed{>} \\ \boxed{<} \end{matrix} \frac{b}{c^2}$ c) $\frac{a}{c^3} \begin{matrix} \boxed{>} \\ \boxed{<} \end{matrix} \frac{b}{c^3}$

D10. Udowodnij poniższe stwierdzenie.

a) Jeśli $p < q$ i $r < s$, to $p(r - s) > q(r - s)$.

b)* Jeśli $p, q, r, s > 0$ i $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, to $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$ oraz $\frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$.

10. a) Mnożymy obie strony nierówności $p < q$ przez $(r - s)$. Z założenia $r < s$, czyli $r - s < 0$, zatem nierówność zmienia zwrot:

$$p(r - s) > q(r - s)$$

Co było do udowodnienia.

b) Z założenia $p, q, r, s > 0$ oraz $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, zatem:

$$\begin{array}{ll} \frac{p}{q} < \frac{r}{s} & / \cdot qs \\ ps < qr & / + pq \\ pq + ps < pq + qr & \\ p(q + s) < q(p + r) & / : q(q + s) \\ \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{p}{q} < \frac{r}{s} & / \cdot qs \\ ps < qr & / + rs \\ ps + rs < qr + rs & \\ s(p + r) < r(q + s) & / : s(q + s) \\ \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s} & \end{array}$$

Co było do udowodnienia.

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$\begin{aligned}(x^2 + 3x - 2) \cdot x &= \\&= x^2 \cdot x + 3x \cdot x - 2 \cdot x = \\&= x^3 + 3x^2 - 2x\end{aligned}$$

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(3x^2 + 2x - 4)x^2$

b) $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$

c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$

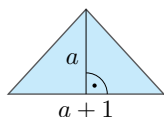
d) $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$

e) $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$

f) $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

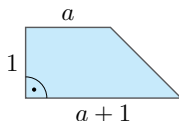
2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A.



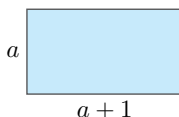
I. $2a^2 + a$

B.



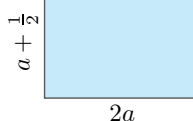
II. $a^2 + a$

C.



III. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

D.



IV. $a + \frac{1}{2}$

3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$

b) $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2}x^2 - 4x)$

c) $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$

d) $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$

e) $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$

f) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

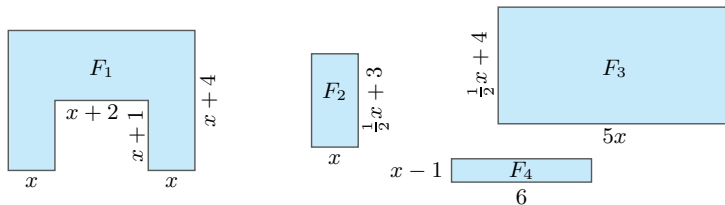
Wyrazy sumy algebraicznej są podobne, gdy składają się z tych samych zmiennych oraz zmienne te występują w tych samych potęgach, np.: $4x^2y$ i $7x^2y$. Wyrazy podobne różnią się co najwyżej czynnikiem liczbowym. Wyrazami podobnymi są też liczby.

D 4. Wykaż, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

a) $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$

b) $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

D 5. Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4 .



4. a) $4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 4x^4 + 6x^3 - 3x - 4x^2 + 3x + 32 = 32$

b) $2\sqrt{45}x^3 - 6\sqrt{75}x^2 - \sqrt{150}x - 6\sqrt{5}x^3 + 6\sqrt{75}x^2 + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} =$
 $= 2\sqrt{9 \cdot 5}x^3 - 6\sqrt{5 \cdot 3}x^2 - \sqrt{25 \cdot 6}x - 6\sqrt{5}x^3 + 6\sqrt{5 \cdot 3}x^2 + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = 6\sqrt{5}x^3 - 6\sqrt{5}x^3 - 5\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = -\sqrt{6}$

5. $P_1 = x(x+4) + x(x+4) + (x+2)(x+4-x-1) = 2x^2 + 11x + 6$

$P_2 = x(\frac{1}{2}x + 3) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$P_3 = 5x(\frac{1}{2}x + 4) = \frac{5}{2}x^2 + 20x$

$P_4 = 6(x-1) = 6x - 6$

$P_1 + P_2 = 2x^2 + 11x + 6 + \frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$

$P_3 - P_4 = \frac{5}{2}x^2 + 20x - 6x + 6 = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$

Zatem $P_1 + P_2 = P_3 - P_4$, co należało udowodnić.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$

b) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$

c) $-2x^4y + x^3y^2$

d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$

e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$

f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$

2. A - III,

B - IV,

C - II,

D - I

3. a) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$

b) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$

c) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$

d) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$

e) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$

f) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

Komentarz

Można zapytać uczniów o to, jakie warunki musi spełniać x , aby istniały wielokąty o podanych długościach boków.

Uczeń:

- wyłącza wskazany jednomian przed nawias,
- zapisuje wyrażenia algebraiczne w postaci iloczynu,
- stosuje metodę wyłączania jednomianu przed nawias do dowodzenia podzielności liczb.

Ćwiczenie 1

- a) $2 \cdot (183 + 17) = 400$
- b) $9 \cdot (27 + 23) = 450$
- c) $3 \cdot (251 + 249) = 1500$
- d) $6 \cdot (378 + 222) = 3600$
- e) $12 \cdot (228 + 172) = 4800$
- f) $19 \cdot (116 + 84) = 3800$

2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias

Jeżeli wśród poszczególnych wyrazów sumy występują jednakowe czynniki, można wyłączyć je przed nawias – czasami ułatwia to obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wyłączamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań:
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
zwanej rozdzielną mnożenia
względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$ | c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$ | e) $228 \cdot 12 + 172 \cdot 12$ |
| b) $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$ | d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$ | f) $19 \cdot 116 + 84 \cdot 19$ |

Zauważmy, że wspólny czynnik można wyłączyć przed nawias również w sumach algebraicznych.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wyłącz przed nawias wspólny czynnik.

- Wyłączamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wyłączamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wyłączamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wyłączamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2(\frac{1}{2}x + 1)$

To, jaki czynnik wyłączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- | | | | |
|--------------|--------------------|---------------------|-------------------|
| a) $5x + 5y$ | c) $9x - 27y^2$ | e) $39y^2 - 26z$ | g) $-48p + 36q^2$ |
| b) $4b - 8a$ | d) $-6x^2 + 18y^2$ | f) $-11a^3 + 22b^2$ | h) $75xy^3 - 125$ |

Ćwiczenie 2

- | | | | |
|----------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| a) $5(x + y)$ | c) $9(x - 3y^2)$ | e) $13(3y^2 - 2z)$ | g) $-12(4p - 3q^2)$ |
| b) $4(b - 2a)$ | d) $-6(x^2 - 3y^2)$ | f) $-11(a^3 - 2b^2)$ | h) $25(3xy^3 - 5)$ |

Ćwiczenie 3

Wyłącz wskazany jednomian przed nawias.

- a) $4x^2 + xy$, x c) $3xy - xyz$, xy e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$, a^2b
b) $2x^3 - 12xy$, $2x$ d) $6pq + 18p^2q$, $6pq$ f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$, x^2y^2

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynniki liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a) $8x^3 - 36x^2$ d) $20ax - 15ay$ g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
b) $7y^2 - 14y^4$ e) $8ab + 12bc$ h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
c) $5x^3 + 10x^2y$ f) $4xy + 6x^2y$ i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$ c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$ e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$ d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$ f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.

- a) $a^2b + ab^3$, ab c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2$, $3a^2$ e) $3a^3b^2 - 6a^2b$, $3a^2b$
b) $x^3y^2 - xy^3$, xy^2 d) $4x^4y^4 + 8y^3z$, $4y^3$ f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3$, $2x^2y^3$

3. Zapisz podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias wskazany jednomian.

- a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$, xyz c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$
b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$, xyz^2 d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$, $3x^3y^2$

4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

- a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

5. Wiadomo, że $a + b = 15$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- a) $-3a - 3b$ b) $2(a + b) - 4a - 4b$ c) $a(a + b) + b(a + b)$

4. a) $9y^2(3y^2 + 4y - 6)$

b) $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$

c) $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$

5. a) $-3(a + b) = -45$

b) $2(a + b) - 4(a + b) = -2(a + b) = -30$

c) $(a + b)(a + b) = 225$

Ćwiczenie 3

- a) $x(4x + y)$
b) $2x(x^2 - 6y)$
c) $xy(3 - z)$
d) $6pq(1 + 3p)$
e) $a^2b(1 + 3b - a)$
f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$

Ćwiczenie 4

- a) $4x^2(2x - 9)$
b) $7y^2(1 - 2y^2)$
c) $5x^2(x + 2y)$
d) $5a(4x - 3y)$
e) $4b(2a + 3c)$
f) $2xy(2 + 3x)$
g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 400
b) 4000
c) 5000
d) 3700
e) 1000
f) 300
2. a) $ab(a + b^2)$
b) $xy^2(x^2 - y)$
c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$
d) $4y^3(x^4y + 2z)$
e) $3a^2b(ab - 2)$
f) $2x^2y^3(3y + 4x)$
3. a) $xyz(x + y + z)$
b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$

6. a) $10(6x + 9y) = 120$

b) $2(6x + 9y) = 24$

c) $\frac{1}{3}(6x + 9y) = 4$

d) $\frac{1}{6}(6x + 9y) = 2$

7. a) $x(x + 2y) =$
 $= 17,5(17,5 + 2 \cdot 6,25) =$
 $= 17,5(17,5 + 12,5) =$
 $= 17,5 \cdot 30 = 525$

b) $x(2x - 3y) =$
 $= 14(2 \cdot 14 - 3 \cdot 6) =$
 $= 14(28 - 18) = 14 \cdot 10 = 140$

8. I – C,
 II – A,
 III – B

9. Suma kulek we wszystkich pudełkach:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) = 7x + 21 = 7(x + 3)$$

11. Rozważmy dwie liczby podzielne przez 3: $3x$ i $3y$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Suma S kwadratów tych liczb:
 $S = (3x)^2 + (3y)^2 =$
 $= 9x^2 + 9y^2 = 9(x^2 + y^2)$

Suma S jest iloczynem liczby 9 i liczby całkowitej $x^2 + y^2$.

12. Niech x i y będą kolejno liczbą jednościami i dziesiątkami dowolnej liczby dwucyfrowej.

Wówczas liczba ta ma postać: $10y + x$, a liczba powstała z przestawienia jej cyfr:

$$10x + y$$

Suma tych liczb:

$$(10y + x) + (10x + y) =$$

$$= 11y + 11x = 11(x + y)$$

czyli jest to liczba podzielna przez 11.

6. Wiadomo, że $6x + 9y = 12$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

a) $60x + 90y$ b) $12x + 18y$ c) $2x + 3y$ d) $x + \frac{3}{2}y$

7. Aby obliczyć wartość wyrażenia $a^2 - 2ab$ dla $a = 18,5$ i $b = 4,25$, można postąpić tak, jak podano poniżej.

Obliczenia będą prostsze, gdy zauważymy, że $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$.

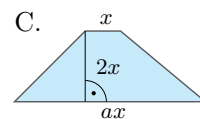
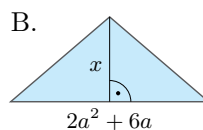
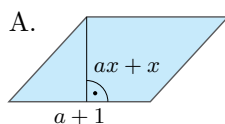
Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$a(a - 2b) = 18,5(18,5 - 2 \cdot 4,25) = 18,5(18,5 - 8,5) = 18,5 \cdot 10 = 185$$

Korzystając z podanej metody, oblicz wartość wyrażenia:

a) $x^2 + 2xy$ dla $x = 17,5$ i $y = 6,25$, b) $2x^2 - 3xy$ dla $x = 14$ i $y = 6$.

8. Dopasuj do figury wyrażenie opisujące jej pole.



I. $ax(a + 3)$

II. $x^2(a + 1)$

III. $x(a + 1)^2$

- D 9. W pudełkach ponumerowanych od 1 do 7 znajdowały się kulki. W pierwszym z nich było x kulek, a w każdym następnym o jedną kulkę więcej niż w poprzednim. Uzasadnij, że we wszystkich pudełkach było $7(x + 3)$ kulek.

- D 10. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

- a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,
 b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,
 c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech n , $n + 1$ i $n + 2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:

$$n + (n + 1) + (n + 2) =$$

$$= 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n + 1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

- D 11. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby naturalne są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

- D 12. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przestawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

10. a) Niech n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ i $n + 4$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi.

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 5 i liczby naturalnej $n + 2$. Zatem S jest podzielna przez 5.

- b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$, $x \in \mathbb{Z}$.

$$S = 2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 6x + 6 = 6(x + 1)$$

Suma S jest iloczynem liczby 6 i liczby całkowitej $x + 1$. Zatem S jest podzielna przez 6.

- c) Rozważmy trzy kolejne liczby nieparzyste: $2x + 1$, $2x + 3$, $2x + 5$, $x \in \mathbb{Z}$.

$$S = (2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 6x + 9 = 3(2x + 3)$$

Suma S jest iloczynem liczby 3 i liczby całkowitej $2x + 3$. Zatem S jest podzielna przez 3.

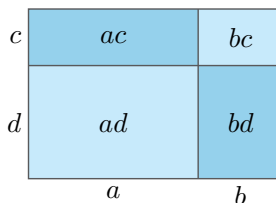
2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a + b$ i $c + d$, zatem jego pole jest równe $(a + b) \cdot (c + d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i zapisać sumę otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x + 3)(x + 5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a + 4b)(a - b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| a) $(x + 4)(x + 3)$ | c) $(p + q)(q - 2p)$ | e) $(a + 3b)(3a - 2b)$ |
| b) $(p + 6)(p - q)$ | d) $(3x + 1)(2x + 6)$ | f) $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$ |

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x - 3)(x^2 + x - 2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Uczeń:

- mnoży sumy algebraiczne,
- przekształca wyrażenia algebraiczne, uwzględniając kolejność wykonywania działań,
- wykonuje działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wykorzystuje wyrażenia algebraiczne do opisu zależności,
- dowodzi podzielności liczb,
- rozwiązuje równania i nierówności, stosując działania na wyrażeniach algebraicznych.

Ćwiczenie 1

- a) $x^2 + 7x + 12$
 b) $p^2 - pq + 6p - 6q$
 c) $-2p^2 - pq + q^2$
 d) $6x^2 + 20x + 6$
 e) $3a^2 + 7ab - 6b^2$
 f) $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$

Multibook

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $x^3 - 3x + 2$
b) $2x^3 + 5x^2 + 9$
c) $x^2 - 4x + 4y - y^2$
d) $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$
e) $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$
f) $x^4 + x^2 + 1$

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że prostopadłościan o podanych wymiarach istnieje dla $x > 1$.

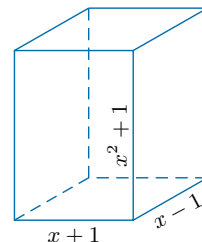
Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a) $(x-1)(x^2+x-2)$ c) $(x+y-4)(x-y)$ e) $(x-y+2)(x+y-3)$
b) $(x+3)(2x^2-x+3)$ d) $(2x-y+6)(x+3y)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Przykład 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.



Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości sąsiednich krawędzi jego podstawy i wysokość:

$$V = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{aligned} & ((x+1)(x-1))(x^2+1) = \\ & = (x^2-x+x-1)(x^2+1) = \\ & = (x^2-1)(x^2+1) = \\ & = x^4+x^2-x^2-1 = x^4-1 \end{aligned}$$

Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzymanym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.

Mnożymy dwie sumy i ponownie redukujemy wyrazy podobne.

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = x^4 - 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $x+2$, $x-2$, x^2+2 b) $x-2$, x^2-1 , x^2+1

Przykład 4

- a) Oblicz $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

- b) Oblicz $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\ &= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$
b) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$ d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Ćwiczenie 3

- a) $V = (x+2)(x-2)(x^2+2) = x^4 - 2x^2 - 8$
b) $V = (x-2)(x^2-1)(x^2+1) = x^5 - 2x^4 - x + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $2\sqrt{2}-1$ c) $7-3\sqrt{6}$ e) $5+2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$
b) $11-5\sqrt{5}$ d) $16+7\sqrt{10}$ f) $-5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

D Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S :

$$\begin{aligned} S &= (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = && \text{Mnożymy sumy algebraiczne.} \\ &= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= 5n^2 - 15n + 10 = && \text{Wyłączamy liczbę 5 przed nawias.} \\ &= 5(n^2 - 3n + 2) \end{aligned}$$

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

- a) $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,
- b) $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,
- c) $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x - 1)(x + 3) = x^2$.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 3) &= x^2 && \text{Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy } x^2 \\ x^2 + 3x - x - 3 &= x^2 && \text{na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.} \\ 2x - 3 &= 0 && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ 2x &= 3 && \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Rozwiąż nierówność $(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)(2x + 5) + x &\leq (4x - 1)(x + 3) \\ 4x^2 + 10x + 2x + 5 + x &\leq 4x^2 + 12x - x - 3 \\ 4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x &\leq -3 - 5 && \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem} \\ 2x &\leq -8 && \text{wyrażenia zawierające niewiadomą} \\ 2x &\leq -8 && \text{na lewą stronę nierówności,} \\ x &\leq -4 && \text{a liczby na prawą stronę.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie lub nierówność.

- a) $(x + 2)(x - 5) = x^2$
- b) $(x + 3)(1 - 2x) + 2x^2 = 0$
- c) $3x^2 - (x + 1)(3x + 2) = 0$
- d) $(x + 4)(x - 1) < x(x + 2) + 2x - 1$
- e) $(2x + 3)(3x - 1) + 4 > (6x - 2)(x + 1)$
- f) $(1 - x)(2x + 3) \leq -2(x + 1)(x - 2) - 2$

Ćwiczenie 5

- a) $2n^2 + 8n - 3n - 12 + n^2 + 2n - 3n - 6 - n = 3n^2 + 3n - 18 = 3(n^2 + n - 6)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 3.
- b) $6n^2 - 15n - 8n + 20 - 10n + 4n^2 + 5 - 2n = 10n^2 - 35n + 25 = 5(2n^2 - 7n + 5)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 5.
- c) $6n^2 + 24n - 3n - 12 - 6n^2 + 3n + 4n - 2 = 28n - 14 = 7(4n - 2)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 7.

Ćwiczenie 6

- a) $x^2 - 3x - 10 = x^2$,
 $x = -\frac{10}{3}$
- b) $x - 2x^2 + 3 - 6x + 2x^2 = 0$,
 $x = \frac{3}{5}$
- c) $3x^2 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$,
 $x = -\frac{2}{5}$
- d) $x^2 + 3x - 4 < x^2 + 4x - 1$,
 $x > -3$
- e) $6x^2 + 7x - 3 + 4 > 6x^2 + 4x - 2$,
 $x > -1$
- f) $3 - 2x^2 - x \leq -2x^2 + 2x + 2$,
 $x \geq \frac{1}{3}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2a^2 - 2a + ab - b$
 b) $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$
 c) $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$
 d) $-4a - 8ab - 6b - 3$
 e) $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$
 f) $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$
2. a) $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$
 b) $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$
 c) $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$
 d) $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$
 e) $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$
 f) $-16x^3 + 4xy^2$
3. a) $2a^2 - 24$
 b) $12ab + b^2$
 c) $4y^2 - 4x^2 - 3xy$
 d) $2x^2 + 15x$
4. a) $x^2 - 4x - 12, -9,75$
 b) $x^3 - x^2 - 6, -6,375$
5. a) Pole prostokąta:
 $P = a(a + 2) = a^2 + 2a$
 b) Pole kwadratu:
 $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$
 Różnica pól:
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a = 1$
7. a) -20 b) -6 c) -4 d) 10
8. a) Wyrażenie można zredukować do liczby 30, zatem dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.
 b) Wyrażenie można zredukować do postaci x^2 . Kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną.

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.
 a) $(2a + b)(a - 1)$ c) $(-2a + b)(6a - 2)$ e) $(2a + b^2)(a - 2b)$
 b) $(3a - 2b)(2b + 3)$ d) $(3 + 4a)(-2b - 1)$ f) $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$
2. Wykonaj mnożenie.
 a) $(x + 2y + 3)(x - 2)$ c) $(x^2 + y)(x + y + 2)$ e) $2x(x - 2y)(3 + y)$
 b) $(2x - y + 1)(2x - 3)$ d) $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$ f) $-4x(2x - y)(2x + y)$
3. Uprość wyrażenie.
 a) $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$ c) $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$
 b) $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$ d) $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$
4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = -0,5$.
 a) $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$ b) $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$
5. Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a + 2$.
 a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
 b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.
6. a) Dany jest kwadrat o boku długości $x + 3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?
 b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a + 3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a + 4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy tę wysokość zwiększymy o 2?
 c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x + 4$ i $2x + 3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.
7. Oblicz.
 a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$
 b) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$
- D** 8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ wartość wyrażenia jest nieujemna.
 a) $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$
 b) $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$
6. a) Pole kwadratu: $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$
 Pole prostokąta: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$
 Różnica pól: $3x + 7$
 b) Pole trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 4) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{7}{2}a + 6$
 Pole nowego trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 6) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{9}{2}a + 9$
 Różnica pól: $a + 3$
 c) Pole prostokąta: $(x + 4)(2x + 3) = 2x^2 + 11x + 12$
I przypadek:
 Pole nowego prostokąta: $(x + 6)(2x + 4) = 2x^2 + 16x + 24$, różnica pól: $5x + 12$.
II przypadek:
 Pole nowego prostokąta: $(x + 5)(2x + 5) = 2x^2 + 15x + 25$, różnica pól: $4x + 13$.
 Pole zwiększy się o $5x + 12$ lub $4x + 13$.

9. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+2)(x-3) = x^2 + 4$ d) $(x-2)(x-5) = (x+3)(x+6)$
 b) $(x-4)(x+6) = x(x-4)$ e) $(2x+1)(x+3) = (x-4)(2x-3)$
 c) $(2-x^2)(x^2-3) = x+5x^2-x^4$ f) $(2x^2+x-3)(x-4) = x^2(2x-7)$

10. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - (x+3)(x-3) \leq 6x$ c) $(2x-1)(3x-1) - (3x-2)(2x-3) \geq 0$
 b) $(4-x)(2x+3) + 2x^2 < 6$ d) $(4-6x)(2x+1) + (4x-5)(3x-1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

- a) $(3x+1)(2-x) + x(3x-5) \geq x$
 b) $2x^2 - (2x+1)(x-3) > 6x-7$
 c) $(3x+3)(2x-1) + 4x < 6(x+2)(x-1) + 9$
 d) $(x+1\frac{1}{2})(2x+1) \geq (2x+\frac{1}{2})(x-1) + 6x$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x+30)$ cm $\times$ $(x+20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x+10)$ cm $\times$ $(x+10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm². Oblicz obwody tych prostokątów.

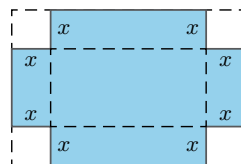
b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6-x)$ cm $\times$ $(2x-5)$ cm oraz $(x+5)$ cm $\times$ $(2x-1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm². Oblicz różnicę między polami większego i mniejszego prostokąta.

c) Dane są dwa czworokąty: kwadrat o boku $(2x+7)$ cm oraz prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm² większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

13. Wykonaj mnożenie.

- a) $(x+1)(x-1)(x^2-1)(x^4-1)$ c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$
 b) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ d) $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)$

- D** 14. a) Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 30 cm i 20 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Uzasadnij, że pojemność tego pudełka wyraża się wzorem $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.



b) Z kwadratowego arkusza tektury o boku równym 40 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór opisujący pojemność tego pudełka.

12. b) Pola prostokątów:

$$P_1 = (6-x)(2x-5) = -2x^2 + 17x - 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (x+5)(2x-1) = 2x^2 + 9x - 5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Suma pól:

$$P_1 + P_2 = 26x - 35 = 69, \text{ czyli } x = 4 \text{ cm, stąd } P_1 = 6 \text{ cm}^2 \text{ oraz } P_2 = 63 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Różnica pól: } P_2 - P_1 = 63 - 6 = 57 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{c) Pole kwadratu: } P_k = (2x+7)(2x+7) = 4x^2 + 28x + 49 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Pole prostokąta: } P_p = (4x+1)(x+3) = 4x^2 + 13x + 3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_k - P_p = 15x + 46 = 91, \text{ czyli } x = 3 \text{ cm, stąd } Ob_k = 52 \text{ cm oraz } Ob_p = 38 \text{ cm.}$$

$$\text{Różnica obwodów: } Ob_k - Ob_p = 52 - 38 = 14 \text{ [cm]}$$

9. a) $x = -10$

b) $x = 4$

c) $x = -6$

d) $x = -\frac{1}{2}$

e) $x = \frac{1}{3}$

f) $x = \frac{12}{7}$

10. a) $x \geq \frac{3}{2}$

b) $x < -\frac{6}{5}$

c) $x \geq \frac{5}{8}$

d) $x < \frac{1}{2}$

11. a) 3

b) 10

c) 0

d) 5

12. a) Pola prostokątów:

$$P_1 = (2x+30)(x+20) = 2x^2 + 70x + 600 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (2x+10)(x+10) = 2x^2 + 30x + 100 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_1 - P_2 = 40x + 500 = 900, \text{ czyli } x = 10 \text{ cm.}$$

Obwody prostokątów:

$$Ob_1 = 160 \text{ cm}$$

$$Ob_2 = 100 \text{ cm}$$

13. a) $x^8 - 2x^6 + 2x^2 - 1$

b) $1 - x^8$

c) $a^6 - b^6$

d) $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$

14. a) $V = (30-2x)(20-2x) \cdot x = (4x^2 - 100x + 600) \cdot x = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

b) $V = (40-2x)(40-2x) \cdot x = (4x^2 - 160x + 1600) \cdot x = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$

Uczeń:

- stosuje odpowiedni wzór skróconego mnożenia do wyznaczania kwadratu sumy lub różnicy oraz różnicy kwadratów,
- przekształca wyrażenie algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wyprowadza wzory skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia własności liczb.

Komentarz

Uczniowie czasami popełniają błąd, zapominając o podwojonym iloczynie we wzorze na kwadrat sumy lub różnicy. Należy zwrócić uwagę na to, że $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ jedynie wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- $x^2 + 2x + 1$
- $x^2 + 4x + 4$
- $x^2 - 6x + 9$
- $x^2 - 10x + 25$
- $4x^2 + 4x + 1$
- $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
- $16x^2 - 8x + 1$
- $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

Multibook

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8



2.8. Wzory skróconego mnożenia

■ Kwadrat sumy i kwadrat różnicy

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Przykład 1

- $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$
- $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- | | | | |
|--------------|--------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $(x+1)^2$ | c) $(x-3)^2$ | e) $(2x+1)^2$ | g) $(4x-1)^2$ |
| b) $(x+2)^2$ | d) $(x-5)^2$ | f) $(\frac{1}{2}x+2)^2$ | h) $(2x-\frac{1}{2})^2$ |

Przykład 2

- $(x+4y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4y + (4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$
- $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- | | | | |
|---------------|----------------|--------------------------|------------------------------------|
| a) $(x+2y)^2$ | c) $(3x+2y)^2$ | e) $(x-\frac{1}{2}y)^2$ | g) $(2x-\frac{1}{4}y)^2$ |
| b) $(2x-y)^2$ | d) $(3x-4y)^2$ | f) $(3x+\frac{1}{2}y)^2$ | h) $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^2$ |

Ćwiczenie 3

- $x^2 + 4xy + 4y^2$
- $4x^2 - 4xy + y^2$
- $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- $9x^2 - 24xy + 16y^2$
- $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$
- $9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2$
- $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$
- $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

Przykład 3

- a) $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$
 b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$
 c) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = 9 - 6\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{7} + 1)^2$ c) $(6 - \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ g) $(\sqrt{6} + \sqrt{15})^2$
 b) $(\sqrt{5} - 3)^2$ d) $(4 + \sqrt{5})^2$ f) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$ h) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}\right)^2$

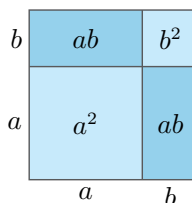
Ćwiczenie 5

a) Wyjaśnij, dlaczego rysunek przedstawiony obok jest interpretacją geometryczną wzoru:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Różnica kwadratów

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{różnica kwadratów}$$

Ćwiczenie 6

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 4

- a) $(\textcircled{x} - \textcircled{6})(\textcircled{x} + \textcircled{6}) = \textcircled{x}^2 - \textcircled{6}^2 = x^2 - 36$
 b) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
 c) $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$
 d) $(y + 2x)(2x - y) = (2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

Ćwiczenie 7

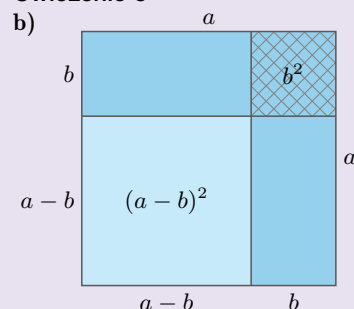
Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x - 3)(x + 3)$ c) $(2x - 4)(2x + 4)$ e) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
 b) $(x + 7)(x - 7)$ d) $(6 + 5x)(5x - 6)$ f) $\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)\left(3y - \frac{1}{2}x\right)$

Ćwiczenie 4

- a) $8 + 2\sqrt{7}$
 b) $14 - 6\sqrt{5}$
 c) $39 - 12\sqrt{3}$
 d) $21 + 8\sqrt{5}$
 e) $5 + 2\sqrt{6}$
 f) $12 - 2\sqrt{35}$
 g) $21 + 6\sqrt{10}$
 h) $6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

$$(a - b)(a + b) =$$

$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Komentarz

Należy zwrócić uczniom uwagę na to, że:

$$(x + y)(y - x) \neq x^2 - y^2$$

Ćwiczenie 7

- a) $x^2 - 9$
 b) $x^2 - 49$
 c) $4x^2 - 16$
 d) $25x^2 - 36$
 e) $9x^2 - 16y^2$
 f) $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$

Komentarz

Można poprosić uczniów o skomentowanie tego rozwiązania.

Ćwiczenie 8

- a) 18
- b) 33
- c) -4
- d) $-1\frac{7}{18}$
- e) $11\frac{3}{4}$
- f) -1
- g) -1
- h) 4
- i) 4,5

Ćwiczenie 9

- a) $-8\sqrt{5} - 20$
- b) $9 - 3\sqrt{2}$
- c) $4\sqrt{6} - 10$
- d) $48\sqrt{3} + 10$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) -5
 - b) -2
 - c) $8x^2 + 24y^2$
 - d) $13x^2 - 5y^2$
-
- 2. a) $x^2 + 4$; 7
 - b) $3x^2 + 1$; 16
 - c) $-4x^2 - 8x + 1$; $-7 - 8\sqrt{2}$

Przykład 5

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$\begin{aligned}(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) &\approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = \\ &= 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46\end{aligned}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz.

- a) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$
- d) $\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
- g) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
- b) $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$
- e) $(2\sqrt{3} + \frac{1}{2})(2\sqrt{3} - \frac{1}{2})$
- h) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
- c) $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$
- f) $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$
- i) $\left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Przykład 6

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{5}$.

$$(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2 - 1 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x$$

Wartość tego wyrażenia dla $x = \sqrt{5}$ jest równa $2(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x + 2)(x - 2) - (x + 4)^2$ dla $x = \sqrt{5}$,
- b) $(3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)^2$ dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- c) $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2$ dla $x = -\sqrt{6}$,
- d) $(1 - 4x)(4x + 1) + (4x - 3)^2$ dla $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

1. Uprość podane wyrażenie.

- a) $(x - 3)(x + 3) + (2 + x)(2 - x)$
- b) $\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- c) $(y + 3x)(3x - y) - (x - 5y)(x + 5y)$
- d) $(2x - y)(2x + y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$ dla $x = \sqrt{3}$,
- b) $(1 - 2x)(1 + 2x) + (1 - 3x)(1 + 3x) - (1 - 4x)(4x + 1)$ dla $x = \sqrt{5}$,
- c) $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(1 + 2x) - (2x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{2}$.

3. Oblicz.

- a) $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ e) $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5})$
 b) $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$
 c) $(2\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2 - (2\sqrt{3} + \frac{3}{2})^2$ g) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 - (2\sqrt{5} + 1)(1 - 2\sqrt{5})$
 d) $(\frac{1}{3} + 3\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})^2$ h) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2} - 1)(1 + 5\sqrt{2})$

4. Oblicz.

- a) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ c) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$
 b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ d) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a .

- a) $a = 3 + \sqrt{2}$ b) $a = 2\sqrt{3} - 1$ c) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

- a) $a = 4 - \sqrt{2}$, $b = 4 + \sqrt{2}$ b) $a = 8 + \sqrt{2}$, $b = 4 - 2\sqrt{2}$

7. Oblicz.

- a) $(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}})^2$ c) $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2$
 b) $(\sqrt{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{5} - 2})^2$ d) $(\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}})^2$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2$ dla $x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}$, $y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}$,
 b) $(\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2$ dla $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$,
 c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y)$ dla $x = \sqrt{5} - 4$, $y = \sqrt{6}$,
 d) $(x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2$ dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

D 9. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

- a) $(n + 1)^2 - n^2$ jest nieparzysta, c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2$ jest parzysta,
 b) $(2n + 1)^2$ jest nieparzysta, d) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

D 10. Wyprowadź wzór:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Wskazówka. Odpowiednio pogrupuj wyrazy i skorzystaj ze wzoru na kwadrat sumy.

D 11. Wykaż, że:

- a) jeśli $c \neq 0$ i $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$, to $a = -b$,
 b) jeśli $b \neq 0$ i $(a - b + c)^2 = a^2 + c^2 - 2ab + 2ac$, to $b = 2c$.

$$\begin{aligned} 10. (a + b + c)^2 &= ((a + b) + c)^2 = \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. a) (a + b - c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \\ -2ac - 2bc &= 0 \quad / : -2c \neq 0 \\ a + b &= 0 \\ a &= -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (a - b + c)^2 &= a^2 + c^2 - 2ab + 2ac \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc &= a^2 + c^2 - 2ab + 2ac \\ b^2 - 2bc &= 0 \quad / : b \neq 0 \\ b - 2c &= 0 \\ b &= 2c \end{aligned}$$

3. a) 6

- b) $-3 + 2\sqrt{3}$
 c) $-12\sqrt{3}$
 d) $4\sqrt{2}$
 e) 10
 f) $12 - 2\sqrt{30}$
 g) $49 - 20\sqrt{2}$
 h) $-31 - 12\sqrt{2}$

4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2

5. a) $66 + 36\sqrt{2}$
 b) $78 - 24\sqrt{3}$
 c) $48 + 24\sqrt{3}$

6. a) 14

- b) $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$

7. a) 14 b) $2\sqrt{5} - 2$

- c) 12 d) $2\sqrt{7} - 4$

8. a) $-18y^2 + 12xy$;
 $-18\sqrt{10} - 42$

- b) $2(x + y)(x - y)$; $16\sqrt{3}$
 c) $96 - 12\sqrt{5}$ d) 0

9. Niech $n \in \mathbb{N}$.

a) $(n + 1)^2 - n^2 =$
 $= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
 - liczba tej postaci jest nieparzysta.

b) Iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2 =$
 $= n^2 + n + \frac{1}{4} - n^2 + n - \frac{1}{4} =$
 $= 2n$ - liczba tej postaci jest parzysta.

d) $n^3 - n = n(n^2 - 1) =$
 $= n(n - 1)(n + 1) =$
 $= (n - 1)n(n + 1)$

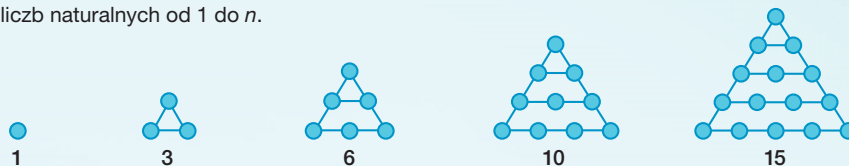
Otrzymaliśmy iloczyn kolejnych trzech liczb naturalnych, zatem dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. To z kolei oznacza, że cały iloczyn jest podzielny przez 6.

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

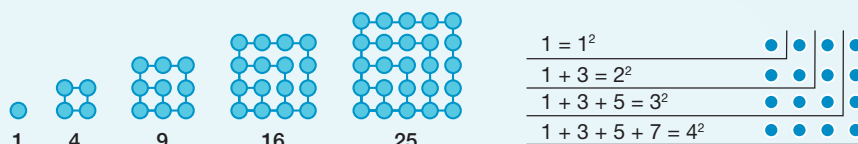
Liczby trójkątne

Liczby 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n .



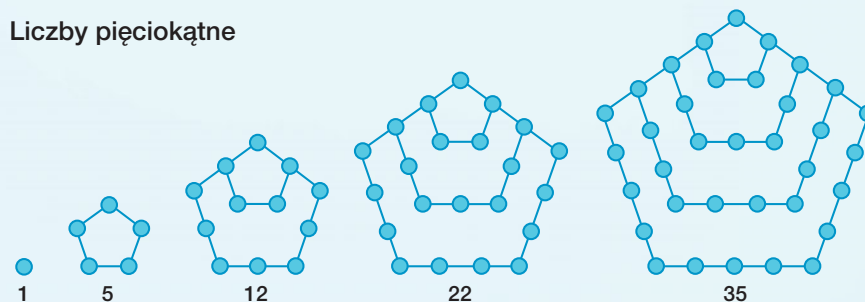
Wzór na n -tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

Liczby kwadratowe



- 1 Zauważ, że n -ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?
- 2 Wykaż, że dla $n > 1$ n -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne



- 3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.
- 4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

n -ta liczba r -kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2 - \text{jest to liczba kwadratowa}$$

Twierdzenie Diofantosa

Jeżeli liczbę trójkątną pomnożymy przez osiem i powiększymy o jeden, to otrzymamy liczbę kwadratową.

Dowód

Niech $n \in \mathbb{N}$.

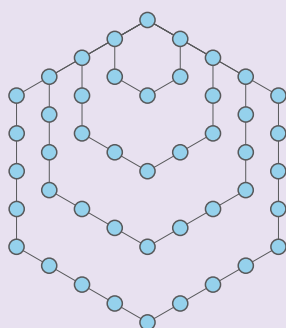
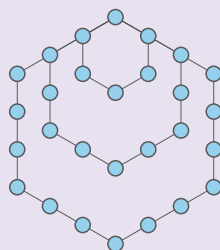
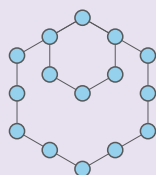
$$\frac{1}{2}n(n+1) \cdot 8 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

– jest to liczba kwadratowa

1. 400

3. 51

4. 1, 6, 15, 28, 45



2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$a) \frac{5}{\sqrt{2}-1} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2}+5$$

$$b) \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \frac{6}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 3-\sqrt{3}$$

$$c) \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

$$a) \frac{1}{6+\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$$

$$c) \frac{2}{4-3\sqrt{2}}$$

$$d) \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$$

$$e) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy do rozwiązywania równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład.
Rozwiąż równanie.

$$a) x^2 - (2-x)^2 = 8$$

$$b) (3x+1)^2 - 9x^2 = 7$$

$$c) (x+1)^2 - (x+1)(x-1) = 12$$

Rozwiąż równanie.

$$(x-4)(x+4) - (x-3)^2 = 17$$

$$x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) = 17$$

$$x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 = 17$$

$$6x - 25 = 17$$

$$6x = 42$$

$$x = 7$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

$$a) 4x^2 - (2x+1)^2 < 3$$

$$c) (2x+1)(2x-1) > 4x^2 - 9x$$

$$b) (3-x)^2 \geq x^2 + 12$$

$$d) 2 - (2x-1)^2 \leq (3-2x)(2x+3)$$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie $x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartość równą 0?

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2, \text{ więc:}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Symbol $\Leftrightarrow$ zastępuje zwrot:
„wtedy i tylko wtedy, gdy”.

Uczeń:

- stosuje przekształcenia algebraiczne do przekształcania równoważnego równań oraz nierówności,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 1

$$a) \frac{6-\sqrt{2}}{34}$$

$$b) \frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$$

$$c) -4 - 3\sqrt{2}$$

$$d) \frac{7-3\sqrt{3}}{4}$$

$$e) \frac{\sqrt{15}-3}{2}$$

Ćwiczenie 2

$$a) x = 3$$

$$b) x = 1$$

$$c) x = 5$$

Ćwiczenie 3

$$a) x > -1$$

$$b) x \leq -\frac{1}{2}$$

$$c) x > \frac{1}{9}$$

$$d) x \leq 2$$

Multibook

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

- a) $(x+4)^2 = 0$ dla $x = -4$
b) $(x-3)^2 = 0$ dla $x = 3$
c) $(x+5)^2 = 0$ dla $x = -5$
d) $(2x-1)^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$
e) $(5x+1)^2 = 0$ dla $x = -\frac{1}{5}$
f) $(4x+1)^2 = 0$ dla $x = -\frac{1}{4}$
g) $(2x+3)^2 = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$
h) $(3x+2)^2 = 0$ dla $x = -\frac{2}{3}$
i) $(3x - \frac{1}{2})^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{6}$

Ćwiczenie 5

a) $36 - 12x + x^2 - 4 +$
 $+ 4x - x^2 = -8x$
 $32 = 0$

Równanie jest sprzeczne.

b) $(3x+1+1-3x) \cdot$
 $\cdot (3x+1-1+3x) = 2 \cdot 6x$
 $12x = 12x$
 $0 = 0$

Równanie jest tożsamościowe.

c) $x^2 - 8x + 16 + 4x =$
 $= x^2 - 4x + 4 + 12$
 $0 = 0$

Równanie jest tożsamościowe.

d) $x^2 - 6x + 9 + 14x =$
 $= 2x^2 - x^2 + 8x - 16$
 $9 = -16$

Równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

- a) $x^2 + 8x + 16$ d) $4x^2 - 4x + 1$ g) $4x^2 + 12x + 9$
b) $x^2 - 6x + 9$ e) $25x^2 + 10x + 1$ h) $9x^2 + 12x + 4$
c) $x^2 + 10x + 25$ f) $16x^2 + 8x + 1$ i) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x+3)^2 = 6x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 6x \\x^2 &= -9\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej
nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$.

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\1 &< 0\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\12x &= 12x\end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x-2)(x+2) + 5 > 0$.

$$\begin{aligned}x^2 - 4 + 5 &> 0 \\x^2 &> -1\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej
zawsze jest większy od liczby
ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

- a) $(6-x)^2 - (2-x)^2 = -8x$ c) $(x-4)^2 + 4x = (x-2)^2 + 12$
b) $(3x+1)^2 - (1-3x)^2 = 12x$ d) $(x-3)^2 + 14x = 2x^2 - (x-4)^2$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

- a) $(x+1)^2 - 2 \leq (x-1)(1+x) + 2x$ c) $6x - (3x-1)^2 \geq (2x+3)^2$
b) $(2-x)^2 - (4-x)^2 \geq 4x - 8$ d) $(2x+3)^2 - 30 < 8x^2 - (2x-3)^2$

Ćwiczenie 6

a) $x^2 + 2x + 1 - 2 \leq x^2 - 1 + 2x$
 $0 \leq 0$

Nierówność jest tożsamościowa.

b) $4 - 4x + x^2 - 16 + 8x - x^2 \geq 4x - 8$
 $4x - 12 \geq 4x - 8$
 $-12 \geq -8$

Nierówność jest sprzeczna.

c) $6x - 9x^2 + 6x - 1 \geq 4x^2 + 12x + 9$
 $-13x^2 \geq 10$
 $x^2 \leq -\frac{10}{13}$

Nierówność jest sprzeczna.

d) $4x^2 + 12x + 9 - 30 < 8x^2 - 4x^2 + 12x - 9$
 $-21 < -9$

Nierówność jest tożsamościowa.

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0; 4)$?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \text{d)} \frac{2}{1-2\sqrt{2}} & \text{g)} \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} & \text{j)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ \text{b)} \frac{1}{3-\sqrt{2}} & \text{e)} \frac{6}{3+2\sqrt{3}} & \text{h)} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} & \text{k)} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \\ \text{c)} \frac{3}{2+\sqrt{5}} & \text{f)} \frac{8}{3\sqrt{2}-4} & \text{i)} \frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} & \text{l)} \frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \end{array}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x-5)(x+5) = x^2 - 100x & \text{d)} 4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10 \\ \text{b)} (3-x)^2 - (x+\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9} & \text{e)} (6+\frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x+6) + (\frac{1}{3}x-4)^2 = 4 \\ \text{c)} 4(\frac{1}{2}x-3)^2 = (6-x)^2 & \text{f)} (-4x-3)(4x-3) + 8(1-\sqrt{2}x)^2 = 1 \end{array}$$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geq 2 & \text{d)} -9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leq 11 \\ \text{b)} 9(\frac{2}{3}x-1)^2 > (1-2x)^2 - 8x & \text{e)} (\frac{1}{4}x+2)^2 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}x)(1+\frac{1}{2}x) \geq 0 \\ \text{c)} 2(x+2)^2 - (\sqrt{2}x-2)^2 \geq 0 & \text{f)} (\frac{\sqrt{2}}{2}x+1)(\frac{\sqrt{2}}{2}x-1) < \frac{(x-1)^2}{2} \end{array}$$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leq (5-2x)^2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geq x-6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases} \end{array}$$

5. Oblicz.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

$$\text{a)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1} \quad \text{b)} \frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad \text{c)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

D 7. Udowodnij równość $(\sqrt{1+x^2} + x)^{-1} = \sqrt{1+x^2} - x$.

D 8. Wykaż, że jeśli $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ to złota liczba (patrz str. 63).

$$\begin{aligned} 5. & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \\ & = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} = \\ & = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{98} + \sqrt{99} - \sqrt{99} + 10 = 9 \end{aligned}$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2-x^2} = \sqrt{1+x^2} - x$$

$$\begin{aligned} 8. \frac{x+y}{x} &= 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = 1 + \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \\ &= \frac{2+\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak
 b) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
 c) $3\sqrt{5}-6$, tak
 d) $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$, nie
 e) $4\sqrt{3}-6$, tak
 f) $12\sqrt{2}+16$, nie
 g) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, nie
 h) $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$, tak
 i) $2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$, nie
 j) $\sqrt{6}-2$, tak
 k) $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$, nie
 l) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak
 2. a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = 1,3$ c) $x \in \mathbb{R}$
 d) równanie sprzeczne
 e) $x = 18$ f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 3. a) $x \leq \frac{9}{4}$ b) $x \in \mathbb{R}$
 c) $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ d) $x \leq \frac{4}{3}$
 e) $x \geq -\frac{17}{4}$ f) $x < \frac{3}{2}$
 4. a) $(0; \frac{3}{2})$ b) $(-5; 2]$
 c) $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$ d) $(\frac{3}{2}; 5]$

$$\begin{aligned} 6. \text{ a)} \frac{1}{\sqrt{2}+(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}-(\sqrt{3}-1)} &= \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{2-(\sqrt{3}-1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2} = \\ &= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-4}{8} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \frac{2}{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}} &= \\ &= \frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} &= \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. \text{ a) } 19^{16} - 9^{16} &= \\
 &= (19^8 - 9^8)(19^8 + 9^8) = \\
 &= (19^4 - 9^4)(19^4 + 9^4) \cdot \\
 &\quad \cdot (19^8 + 9^8) = \\
 &= (19^2 - 9^2)(19^2 + 9^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (19^4 + 9^4)(19^8 + 9^8) = \\
 &= (361 - 81)(19^2 + 9^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (19^4 + 9^4)(19^8 + 9^8) = \\
 &= 280(19^2 + 9^2)(19^4 + 9^4) \cdot \\
 &\quad \cdot (19^8 + 9^8)
 \end{aligned}$$

Zatem liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 11^{32} - 7^{32} &= \\
 &= (11^{16} - 7^{16})(11^{16} + 7^{16}) = \\
 &= (11^8 - 7^8)(11^8 + 7^8) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
 &= (11^4 - 7^4)(11^4 + 7^4) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^8 + 7^8)(11^{16} + 7^{16}) = \\
 &= (11^2 - 7^2)(11^2 + 7^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^4 + 7^4)(11^8 + 7^8) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
 &= (121 - 49)(11^2 + 7^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^4 + 7^4)(11^8 + 7^8) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
 &= 72(11^2 + 7^2)(11^4 + 7^4) \cdot \\
 &\quad \cdot (11^8 + 7^8)(11^{16} + 7^{16})
 \end{aligned}$$

Zatem liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \\
 \frac{2ab}{a+b} &\leq \frac{a+b}{2} / \cdot 2(a+b) > 0 \\
 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\
 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
 0 &\leq (a-b)^2
 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{2ab}{a+b} \\
 \frac{2ab}{a+b} &\leq \sqrt{ab} \\
 2\sqrt{ab} &\leq a+b
 \end{aligned}$$

Obie strony nierówności podnosimy do kwadratu:

$$\begin{aligned}
 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\
 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
 0 &\leq (a-b)^2
 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb $a, b > 0$, zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach

Przykład 1

Uzasadnij, że liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

$$\begin{aligned}
 13^8 - 7^8 &= (13^4 - 7^4)(13^4 + 7^4) = \\
 &= (13^2 - 7^2)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\
 &= (169 - 49)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\
 &= 120(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4)
 \end{aligned}$$

Zatem liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

- D** 1. a) Uzasadnij, że liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.
b) Uzasadnij, że liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

Przykład 2

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a i b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Jeśli $a + b < 0$, to nierówność jest prawdziwa (dlaczego?).

Zakładamy teraz, że $a + b \geq 0$. Obie strony nierówności są wówczas nieujemne, możemy więc podnieść je do kwadratu bez zmiany zwrotu nierówności. Nierówność przekształcamy równoważnie:

$$\begin{aligned}
 \frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} / \cdot 4 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.} \\
 a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\
 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\
 0 &\leq (a-b)^2
 \end{aligned}$$

Nierówność $0 \leq (a-b)^2$ zachodzi dla dowolnych liczb a i b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

- D** 2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi podana nierówność.
a) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$ b) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$

Przykład 3

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 \geq 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 &= x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = (x-y)^2 + (x-1)^2. \\
 (x-y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-1)^2 \geq 0, \text{ więc wyjściowa nierówność jest prawdziwa.}
 \end{aligned}$$

- D** 3.* Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:
a) $y^2 + 2x^2 - 2xy - 6x + 9 \geq 0$, b) $5x^2 + y^2 + 4 \geq 4xy + 4x$.

3. a) Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
 y^2 - 2xy + x^2 + x^2 - 6x + 9 &= (y-x)^2 + (x-3)^2 \\
 (y-x)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-3)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
 \end{aligned}$$

b) Przekształcamy nierówność do postaci:

$$5x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 &= (2x-y)^2 + (x-2)^2 \\
 (2x-y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-2)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
 \end{aligned}$$

2.10. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ określoną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass [czyt. wajersztras] w 1841 r.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

Przykład 1

a) $|3,5| = 3,5$ b) $|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$ c) $|0| = 0$ d) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Przykład 2

a) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, gdyż $\sqrt{5} - 2 > 0$.
b) $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, gdyż $1 - \sqrt{2} < 0$.

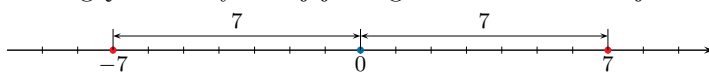
Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

a) 5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

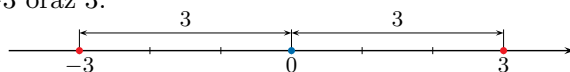
Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3 .



Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie:

a) $|x| = 2$, b) $|x| = 10$, c) $|x| = 0$, d) $|x| = -3$.

Ćwiczenie 2

a) $x = -2$ lub $x = 2$
b) $x = -10$ lub $x = 10$
c) $x = 0$
d) brak rozwiązań

Uczeń:

- oblicza wartość bezwzględną danej liczby,
- upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną,
- rozwiązuje elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają warunki zapisane za pomocą wartości bezwzględnej.

Ćwiczenie 1

a) 5
b) 5
c) $\sqrt{3} - 1$
d) $3 - \sqrt{3}$
e) $3\sqrt{2} - 4$
f) $5 - 2\sqrt{5}$

Ćwiczenie 3

- a) x
- b) y
- c) x

Ćwiczenie 4

- a) $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$
- b) $|4 - 2\sqrt{3}| = 4 - 2\sqrt{3}$
- c) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5

- a) $x \in (-8; 8)$
- b) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
- c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
- d) $x \in (-\infty; -\pi] \cup [\pi; \infty)$

Ćwiczenie 3

Która z liczb x, y ma większą wartość bezwzględną?

- a) $x = 7, y = -6$
- b) $x = -10, y = -12$
- c) $x = -8, y = 0$

Przypomnijmy, że:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$
- b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$
- c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 4

- a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

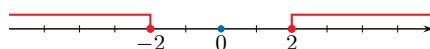
Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona przez $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

- b) Rozwiąż nierówność $|x| \geq 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona przez $x \leq -2$ oraz przez $x \geq 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a) $|x| < 8$
- b) $|x| \leq \sqrt{2}$
- c) $|x| > 3$
- d) $|x| \geq \pi$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| \geq 0$
- b) $|x| \leq 0$
- c) $|x| > 0$
- d) $|x| < 0$

Ćwiczenie 6

- a) $x \in \mathbb{R}$
- b) $x = 0$
- c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- d) sprzeczna

Zadania

- Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.
a) $x = -3$ b) $x = 4 - 2\sqrt{6}$ c) $x = 6\sqrt{2} - 8$ d) $x = \pi - 2\sqrt{3}$
- Wyznacz liczby spełniające równanie.
a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$
b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$
- Która nierówność jest tożsamościowa, a która sprzeczna?
a) $|x| > -7$, $|x| < -7$ b) $|x| \geq -3$, $|x| \leq -3$
- Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów. Ile liczb całkowitych należy do tego zbioru?
a) $1 < |x| < 4$ c) $2 \leq |x| \leq 5$ e) $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$ g) $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$
b) $0 < |x| < 6$ d) $3 \leq |x| \leq \pi$ f) $\sqrt{3} < |x| \leq 6$ h) $\sqrt{2} < |x| < 5$

5. Oblicz.

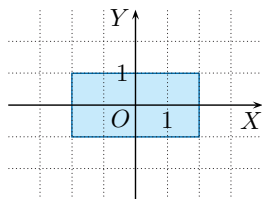
a) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(7 - 3\sqrt{5})^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$

D 6. Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = |\sqrt{2} - 2|$, c) $\sqrt{24 - 8\sqrt{5}} = |2 - 2\sqrt{5}|$,
b) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 2|$, d) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = |3 - 2\sqrt{3}|$.

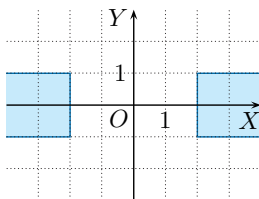
7. Na rysunkach przedstawiono zbiory punktów płaszczyzny. Do każdego z nich dopasuj warunki spełnione przez współrzędne (x, y) tych punktów.

A.



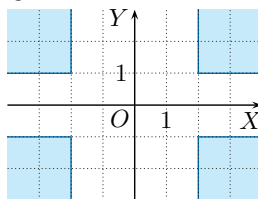
I. $|x| \geq 2$ i $|y| \leq 1$

B.



II. $|x| \geq 2$ i $|y| \geq 1$

C.



III. $|x| \leq 2$ i $|y| \leq 1$

8. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

a) $|x| \leq 5$ i $|y| \leq 1$ b) $|x| \leq 3$ i $|y| \geq 2$ c) $1 \leq |x| \leq 3$ i $|y| \leq 4$

- a) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = |\sqrt{3} + 2|$
b) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 - 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2|$
c) $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{9 + 12\sqrt{2} + 8} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^2} = |3 + 2\sqrt{2}|$
d) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = \sqrt{9 - 12\sqrt{3} + 12} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} = |3 - 2\sqrt{3}|$

7. I - B, II - C, III - A

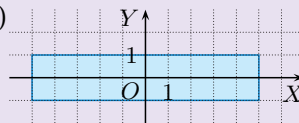
Odpowiedzi do zadań

- a) $x + |x| = 0$, $x - 2|x| = -9$
b) $x + |x| = 0$,
 $x - 2|x| = 12 - 6\sqrt{6}$
c) $x + |x| = 12\sqrt{2} - 16$,
 $x - 2|x| = -6\sqrt{2} + 8$
d) $x + |x| = 0$,
 $x - 2|x| = 3\pi - 6\sqrt{3}$
- a) $x = -4$, $x = 4$
b) $x = -14$, $x = 14$
c) $x = -6$, $x = 6$
d) $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$
e) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$
f) $x = -8$, $x = 8$
g) $x = -1$, $x = 1$
h) $x = -4$, $x = 4$
- a) $|x| > -7$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| < -7$ dla $x \in \emptyset$
b) $|x| \geq -3$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| \leq -3$ dla $x \in \emptyset$
- a) $(-4; -1) \cup (1; 4)$, 4
b) $(-6; 0) \cup (0; 6)$, 10
c) $[-5; -2] \cup [2; 5]$, 8
d) $[-\pi; -3] \cup [3; \pi]$, 2
e) $(-3; -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}; 3)$, 4
f) $[-6; -\sqrt{3}] \cup (\sqrt{3}; 6]$, 10
g) $[-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{5}{2}; \frac{9}{2}]$, 4
h) $(-5; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 5)$, 6

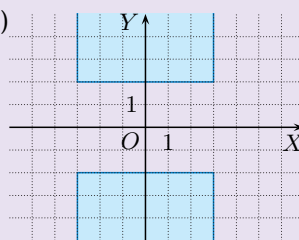
5. a) $5 - 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2} - 1$

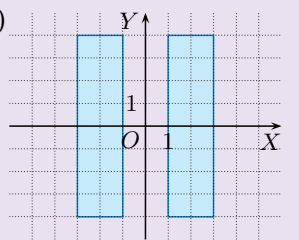
8. a)



b)



c)



Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach

D Przykład 1

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} = |2 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbb{Z}$.

D Przykład 2

Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ chcemy zapisać w postaci kwadratu różnicy. Możemy do tego zastosować metodę prób i błędów:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(1 - 3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3,$$

czyli dana liczba jest całkowita.

D Przykład 3

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby wykazać, że liczba a jest wymierna, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy kwadrat liczby a :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ (sprawdź), czyli:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2, \\ &\text{co oznacza, że } a \text{ jest liczbą wymierną.} \end{aligned}$$

D 1. Wykaż, że:

$$\text{a) } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 5, \quad \text{b) } 3\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} = 10.$$

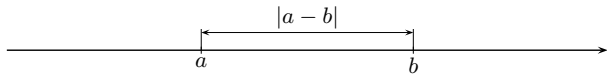
$$\begin{aligned} \text{1. a) } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} = \\ &= |\sqrt{3} + 2| + |\sqrt{3} - 3| = \sqrt{3} + 2 + 3 - \sqrt{3} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3\sqrt{9 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{18 - 6\sqrt{2}} &= 3\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3\sqrt{2} - 1)^2} = \\ &= 3|3 + \sqrt{2}| - |3\sqrt{2} - 1| = 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = 10 \end{aligned}$$

2.11. Własności wartości bezwzględnej

Interpretacją geometryczną wartości bezwzględnej liczby a jest jej odległość na osi liczbowej od 0.

Zauważmy, że odległość na osi liczbowej między liczbami a i b jest równa $|a - b|$.



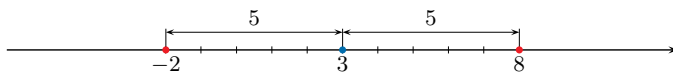
$$|a - b| = |b - a|$$

Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami b i a .

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|x - 3| = 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 3 wynosi 5.



Zatem $x = -2$ lub $x = 8$.

Sprawdzenie:

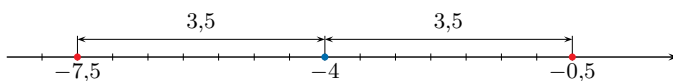
$$\text{dla } x = -2: |-2 - 3| = |-5| = 5,$$

$$\text{dla } x = 8: |8 - 3| = |5| = 5.$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x + 4| = 3,5$.

Równanie zapisujemy w postaci $|x - (-4)| = 3,5$ i szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od -4 wynosi $3,5$.



Zatem $x = -7,5$ lub $x = -0,5$.

Sprawdzenie:

$$\text{dla } x = -7,5: |-7,5 + 4| = |-3,5| = 3,5,$$

$$\text{dla } x = -0,5: |-0,5 + 4| = |3,5| = 3,5.$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x - 4| = -2$.

Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemna, zatem równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 1

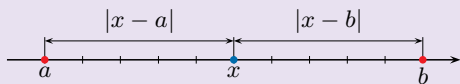
Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 2| = 3$ c) $|x + 6| = 2$ e) $|2 + x| = \sqrt{3}$ g) $|x + \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$
 b) $|x - 4| = 3,5$ d) $|6 - x| = 1$ f) $|x + 1| = -1$ h) $|x + 9| = 0$

Ćwiczenie 2

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że liczba $\frac{a+b}{2}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $|x - a| = |x - b|$.

Ćwiczenie 2



$|x - a|$ – odległość x od a

$|x - b|$ – odległość x od b

Jeżeli $a \neq b$, to jedynym punktem równo oddalonym od a i b jest $\frac{a+b}{2}$.

Jeżeli $a = b$, to równanie jest tożsamościowe.

Uczeń:

- stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej,
- korzystając z własności wartości bezwzględnej, rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną,
- korzystając z własności wartości bezwzględnej, upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną.

Ćwiczenie 1

- a) $x = -1$ lub $x = 5$
 b) $x = 0,5$ lub $x = 7,5$
 c) $x = -8$ lub $x = -4$
 d) $x = 5$ lub $x = 7$
 e) $x = -2 - \sqrt{3}$
 lub $x = -2 + \sqrt{3}$
 f) sprzeczne
 g) $x = -\frac{3}{4}$ lub $x = \frac{1}{4}$
 h) $x = -9$

Ćwiczenie 3

- a) $x \in (4; 10)$
 b) $x \in (-4; 10)$
 c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -8] \cup [0; \infty)$
 e) $x \in [2; 16]$
 f) $x \in (-\infty; -13) \cup (3; \infty)$
 g) $x \in (-\frac{3}{10}; -\frac{1}{10})$
 h) $x \in (-\infty; 0] \cup [2\sqrt{7}; \infty)$

Ćwiczenie 4

- a) $x \in [4\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}]$
 b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3\frac{1}{2}; \infty)$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|x - 2| < 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 2 jest mniejsza od 5.



Zatem $-3 < x < 7$, czyli $x \in (-3; 7)$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x - 7| < 3$ c) $|x + 6| > 1$ e) $|9 - x| \leq 7$ g) $|x + \frac{1}{5}| < 0,1$
 b) $|x - 3| < 7$ d) $|x + 4| \geq 4$ f) $|5 + x| > 8$ h) $|x - \sqrt{7}| \geq \sqrt{7}$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x - 3| \geq 10$.

$$\sqrt{(x - 3)^2} + |x - 3| \geq 10 \quad \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.}$$

$$|x - 3| + |x - 3| \geq 10 \quad \text{Korzystamy ze wzoru } \sqrt{a^2} = |a|.$$

$$2|x - 3| \geq 10$$

$$|x - 3| \geq 5$$

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 3 jest większa od 5 lub równa 5.



Zatem $x \leq -2$ lub $x \geq 8$, czyli $x \in (-\infty; -2] \cup [8; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $\sqrt{(x - 7)^2} + |x - 7| \leq 5$ b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x - 2| > 3$

Przykład 6

Rozwiąż nierówność $|3x - 6| < 9$.

$$|3x - 6| = |3(x - 2)| = |3| \cdot |x - 2| = 3|x - 2|,$$

zatem:

$$3|x - 2| < 9$$

$$|x - 2| < 3$$

$$x \in (-1; 5)$$



$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |2x - 8| = 4 & \text{c)} |\frac{1}{2}x - 1| = 3 & \text{e)} |10 - x| = 4 \\ \text{b)} |4x + 2| = 6 & \text{d)} |\frac{2}{3}x + 4| = 2 & \text{f)} |1 - 3x| = 6 \end{array}$$

2. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |2x + 4| \leq 8 & \text{d)} |2 - \frac{1}{3}x| < 1 & \text{g)} |2x - 4| \leq 0 \\ \text{b)} |3x - 9| \geq 6 & \text{e)} |\frac{5}{2}x + 10| \geq 5 & \text{h)} |x + 11| > 0 \\ \text{c)} |2x + \frac{1}{2}| > 2 & \text{f)} |0,75 + \frac{5}{4}x| < \frac{1}{4} & \text{i)} |x - 3| \geq -1 \end{array}$$

3. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{(x+5)^2} = 5 & \text{c)} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 & \text{e)} \sqrt{\frac{1}{4} + x + x^2} = 4 \\ \text{b)} \sqrt{(3-x)^2} = 2 & \text{d)} \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 3 & \text{f)} \sqrt{9x^2 - 12x + 4} = 6 \end{array}$$

4. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{l} \text{a)} |x| \leq \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2} \\ \text{b)} |x + 1| \geq \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 2)^2} \end{array}$$

5. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} |x - 3| = x - 3 & \text{c)} |x + \sqrt{2}| = -x - \sqrt{2} \\ \text{b)} |3x - 6| = 6 - 3x & \text{d)} \sqrt{(x - 2)^2} = x - 2 \end{array}$$

$$|x - 8| = 8 - x, \text{ gdy } x - 8 \leq 0, \text{ czyli } x \leq 8.$$

6. Uprość wyrażenie dla $x < 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{x^2} + x & \text{b)} \sqrt{(x - 3)^2} - \sqrt{x^2} & \text{c)} \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x \end{array}$$

D 7. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że jeśli $a < b$, to zbiorem rozwiązań nierówności $|x - a| < |x - b|$ jest przedział $(-\infty; \frac{a+b}{2})$.

D 8. Wykaż, że wyrażenie przyjmuje stałe tę samą wartość dla podanych wartości x .

$$\begin{array}{l} \text{a)} |-x| + |2 - x| - |3 - 2x| \text{ dla } x \geq 2 \\ \text{b)} \sqrt{x^2 + 6x + 9} + |-x| - |-2x - 6| \text{ dla } x \leq -3 \end{array}$$

D 9. Wykaż, że jeśli $0 \leq a \leq b$, to $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} - \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{a}$.

8. a) Jeżeli $x \geq 2$, to $-x < 0$ oraz $2 - x \leq 0$, $3 - 2x < 0$, zatem:

$$|-x| + |2 - x| - |3 - 2x| = -(-x) - (2 - x) + (3 - 2x) = x - 2 + x + 3 - 2x = 1$$

$$\text{b)} \sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = |x + 3|$$

Jeżeli $x \leq -3$, to $x + 3 \leq 0$, $-x > 0$, $-2x - 6 \geq 0$, zatem:

$$|x + 3| + |-x| - |-2x - 6| = -(x + 3) + (-x) - (-2x - 6) = -x - 3 - x + 2x + 6 = 3$$

$$\begin{aligned} 9. \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} - \sqrt{a - 2\sqrt{ab} + b} &= \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \\ &= |\sqrt{a} + \sqrt{b}| - |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b} + (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 2, x = 6$

b) $x = -2, x = 1$

c) $x = -4, x = 8$

d) $x = -9, x = -3$

e) $x = 6, x = 14$

f) $x = -\frac{5}{3}, x = \frac{7}{3}$

2. a) $x \in [-6; 2]$

b) $x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$

d) $x \in (3; 9)$

e) $x \in (-\infty; -6] \cup [-2; \infty)$

f) $x \in (-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5})$

g) $x = 2$

h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$

i) $x \in \mathbb{R}$

3. a) $x = -10, x = 0$

b) $x = 1, x = 5$

c) $x = 0, x = 2$

d) $x = -2, x = 1$

e) $x = -\frac{9}{2}, x = \frac{7}{2}$

f) $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{8}{3}$

4. a) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

b) $x \in \mathbb{R}$

5. a) $x \geq 3$

b) $x \leq 2$

c) $x \leq -\sqrt{2}$

d) $x \geq 2$

6. a) 0 b) 3 c) 2

7. $|x - a| < |x - b|$, gdy odległość x od a jest mniejsza od odległości x od b , czyli x leży na lewo od środka przedziału o końcach a i b , co oznacza, że $x < \frac{a+b}{2}$.

Logika matematyczna

Sposoby budowania zdań w języku, którym porozumiewamy się na co dzień, są określone przez reguły gramatyki. W matematyce podobną rolę odgrywają reguły **logiki matematycznej**. Odnoszą się one do zdań, którym można w jednoznaczny sposób przypisać wartość logiczną: **prawdy** lub **fałszu**. Stosowane są oznaczenia: 1 (prawda), 0 (fałsz).

Przykład 1

Przypisz wartość logiczną podanemu zdaniu.

- a) $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. fałsz 0
 b) Każdy prostokąt jest równoległobokiem. prawda 1
 c) Każdy równoległobok jest prostokątem. fałsz 0

Uwaga. Reguły logiki można stosować również do zdań o treści niematematycznej.

Ze **zdań składowych** (będziemy je oznaczać literami $p, q, r, \dots$) możemy tworzyć **zдания złożone** przy użyciu spójników logicznych: „nieprawda, że”, „lub”, „i”, „jeżeli..., to...”, „wtedy i tylko wtedy, gdy...”.

Negacja zdania

Rozpatrzmy dwa zdania: zdanie p i jego zaprzeczenie – zdanie *Nieprawda, że p* , co zapisujemy $\sim p$ i nazywamy **negacją** zdania p . Na przykład:

- p : 7 jest liczbą ujemną. 0
 $\sim p$: Nieprawda, że 7 jest liczbą ujemną. 1

Zdanie p jest fałszywe, zdanie $\sim p$ jest prawdziwe.

Zwróć uwagę na to, że z dwóch zdań, p i $\sim p$, zawsze jedno jest prawdziwe, a jedno fałszywe.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Jeśli zdanie p jest prawdziwe, to zdanie $\sim p$ jest fałszywe.

Jeśli zdanie p jest fałszywe, to zdanie $\sim p$ jest prawdziwe.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Zdanie $\sim p$: $2\sqrt{3} \leq 3\frac{1}{2}$.
 Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 0 i 1.
 b) Zdanie $\sim p$: $\sqrt{625} = 25$.
 Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 0 i 1.
 c) Zdanie p :
 100 jest liczbą parzystą.
 Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 1 i 0.

1. Sformułuj zdanie:

- a) $\sim p$ dla danego zdania p : $2\sqrt{3} > 3\frac{1}{2}$,
 b) $\sim p$ dla danego zdania p : $\sqrt{625} \neq 25$,
 c) p dla danego zdania $\sim p$: 100 jest liczbą nieparzystą.

Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.

Jeżeli zdanie p ma postać $\sqrt{8} < 3$, to zdanie $\sim p$ ma postać $\sqrt{8} \geq 3$. Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 1 i 0.



Koniunkcja zdań

Niech p oznacza zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 2*, a q – zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 3*. Zdanie $p \wedge q$ (czytamy: p i q), zwane **koniunkcją** zdań, będzie brzmiało: *Liczba 12 jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3*.

Przyjmujemy, że zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe jedynie wtedy, gdy oba zdania p, q są prawdziwe.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Interpretacją fizyczną koniunkcji zdań $p \wedge q$ jest układ dwóch wyłączników połączonych szeregowo. Każdy z wyłączników może być włączony (stan 1) lub wyłączony (stan 0). Przepływ prądu nastąpi tylko wtedy, gdy oba wyłączniki będą w stanie 1.



Oba wyłączniki w stanie 0



Oba wyłączniki w stanie 1

2. Zapisz zdanie $p \wedge q$. Określ prawdziwość zdań p, q oraz koniunkcji $p \wedge q$.

a) $p: 2|20, q: 5|20$

c) $p: -2 < (-2)^3, q: 2 < 2^3$

b) $p: 3|39, q: 9|39$

d) $p: \sqrt{221} \in \mathbb{Q}, q: \sqrt{212} \in \mathbb{Q}$

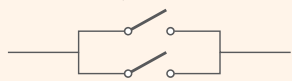
Alternatywa zdań

Niech p oznacza zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 4*, a q – zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 3*. Zdanie $p \vee q$ (czytamy: p lub q), zwane **alternatywą** zdań, będzie brzmiało: *Liczba 92 jest podzielna przez 4 lub jest podzielna przez 3*.

Przyjmujemy, że zdanie $p \vee q$ jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe co najmniej jedno ze zdań p, q .

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Interpretacją fizyczną alternatywy zdań $p \vee q$ jest układ dwóch wyłączników połączonych równolegle. Na rysunku z lewej oba wyłączniki są w stanie 0. Przepływ prądu nastąpi wtedy, gdy którykolwiek z wyłączników zostanie włączony (będzie w stanie 1) – rysunek z prawej.



Oba wyłączniki w stanie 0



Jeden wyłącznik w stanie 1

3. Określ wartość logiczną podanego zdania.

a) $(-6)^2 = 36 \vee 6^2 = 36$

d) $-\sqrt{2} < -2 \vee \sqrt{2} > 2$

b) $19^2 = 361 \vee 19^2 = 381$

e) $|-a| = |a| \vee |-a| = -a$

c) $-2 > -1 \vee (-2)^2 > (-1)^2$

f) $|-a| = a \vee |-a| = -|a|$

3. a) Zdanie prawdziwe (oba zdania składowe są prawdziwe).

b) Zdanie prawdziwe – prawdziwe jest zdanie $19^2 = 361$.

c) Zdanie prawdziwe – prawdziwe jest zdanie $(-2)^2 > (-1)^2$.

d) Zdanie fałszywe (oba zdania składowe są fałszywe).

e) Zdanie prawdziwe – prawdziwe jest zdanie $|-a| = |a|$.

f) Zdanie fałszywe (oba zdania składowe są fałszywe).



4. a) Poprzednik fałszywy, następnik prawdziwy, implikacja prawdziwa.
 b) Poprzednik fałszywy, następnik fałszywy, implikacja prawdziwa.
 c) Poprzednik i następnik prawdziwe, implikacja prawdziwa.
 d) Poprzednik prawdziwy, następnik fałszywy, implikacja fałszywa.

■ Implikacja zdań

Niech p oznacza zdanie: *1035 jest liczbą podzielną przez 9*, a q – zdanie: *1035 jest liczbą podzielną przez 3*. Zdanie $p \Rightarrow q$ (czytamy: jeżeli p , to q), zwane **implikacją** zdań, będzie brzmiało: *Jeżeli 1035 jest liczbą podzielną przez 9, to jest liczbą podzielną przez 3*.

Zdanie p nazywamy **poprzednikiem**, a zdanie q – **następnikiem** implikacji.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Przyjmujemy, że implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy prawdziwy jest jej poprzednik i fałszywy jej następnik – z prawdy nie może wynikać fałsz.

Implikacja pojawia się bardzo często we wnioskowaniu matematycznym. Zwróć uwagę na dwa ostatnie wiersze tabeli: wnioskowanie rozpoczynające się od fałszywego poprzednika jest zawsze prawdziwe.

4. Podaj wartość logiczną poprzednika, następnika i implikacji.

- a) $0 > 1 \Rightarrow 5 = 5$ c) $4|12 \Rightarrow 2|12$
 b) $2 + 2 = 5 \Rightarrow 2 + 2 = 50$ d) $5|25 \Rightarrow 10|25$

■ Równoważność zdań

Równoważność zdań p i q jest to zdanie postaci: *p wtedy i tylko wtedy, gdy q* , co zapisujemy $p \Leftrightarrow q$. Przyjmujemy, że zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwe, gdy oba zdania p, q mają tę samą wartość logiczną. Na przykład:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- $-3 < 2 \Leftrightarrow 2 < 3$ – równoważność jest prawdziwa,
 zdanie zdanie
 prawdziwe prawdziwe
 ■ $-3 > 2 \Leftrightarrow 2 > 3$ – równoważność jest prawdziwa,
 zdanie zdanie
 fałszywe fałszywe
 ■ $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^3 = 3^3$ – równoważność jest fałszywa.
 zdanie zdanie
 prawdziwe fałszywe

5. Podaj wartość logiczną każdego ze zdań składowych i zdania złożonego.

- a) $2 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 < 0$ c) $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^4 = 3^4$
 b) $\sqrt{5^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-5)^2} = -5$ d) $(-2)^3 = 2^3 \Leftrightarrow (-2)^6 = 2^6$

5. a) Obydwa zdania fałszywe, równoważność prawdziwa.
 b) Pierwsze zdanie prawdziwe, drugie fałszywe, równoważność fałszywa.
 c) Obydwa zdania prawdziwe, równoważność prawdziwa.
 d) Pierwsze zdanie fałszywe, drugie prawdziwe, równoważność fałszywa.



■ Prawa rachunku zdań

Spośród zdań złożonych, które możemy zapisać za pomocą spójników $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, szczególną rolę odgrywają zdania, których wartość logiczna zawsze jest równa 1 (są zawsze prawdziwe). Takie zdania nazywamy **prawami rachunku zdań**.

D Przykład 2

Wykaż, że zdanie: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ – *zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeceń* – jest prawem rachunku zdań.

Sporządzamy tabelę, w której uwzględnimy wszystkie możliwe wartości logiczne zdań p , q .

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W ostatniej kolumnie, bez względu na wartość logiczną zdań p i q , zawsze otrzymujemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem jest ono prawem rachunku zdań. Zdanie to jest znane jako jedno z **praw De Morgana**.

D 6. Wykaż, że podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \quad \text{drugie z praw De Morgana}$$

D 7. Wykaż, że podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

- a) $(\sim p) \vee p$ prawo wyłączzonego środka
- b) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia
- c) $\sim(p \wedge \sim p)$ prawo sprzeczności
- d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ prawo odrywania
- e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo transpozycji
- f) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia implikacji

8. Sprawdź, czy podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

- a) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
- b) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
- c) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
- d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- e) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- f) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

6.

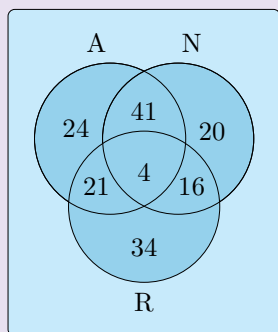
p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

8. Dla trzech zdań: p , q i r wszystkie możliwości sprawdzamy w tabeli, której pierwsze trzy kolumny wyglądają w następujący sposób:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

a) i e) nie są prawami rachunku zdań.

1.



Nie zna żadnego z tych języków:

$$180 - (24 + 20 + 34 + 41 + 16 + 21 + 4) = 180 - 160 = 20 \text{ studentów.}$$

2. a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
 b) $\{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$
 c) $\{3\}$ d) $\{1, 4, 8, 10, 14\}$
 e) $\{1, 5, 13\}$
 f) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$
3. a) $A \cap B = (2; 4]$,
 $A \cup B = [-1; 5]$,
 $A \setminus B = [-1; 2]$, $B \setminus A = (4; 5]$
 b) $A \cap B = (3; 5]$,
 $A \cup B = [2; 7]$,
 $A \setminus B = [2; 3] \cup (5; 7)$,
 $B \setminus A = \emptyset$
 c) $A \cap B = \{2\}$,
 $A \cup B = [-4; 9]$,
 $A \setminus B = [-4; 2]$,
 $B \setminus A = (2; 9)$
 d) $A \cap B = \{0\} \cup (1; 2)$,
 $A \cup B = (-\infty; 4]$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0]$,
 $B \setminus A = (0; 1] \cup [2; 4]$
 e) $A \cap B = (-2; -1) \cup [3; 4]$,
 $A \cup B = (-\infty; 5]$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2] \cup [4; 5]$,
 $B \setminus A = [-1; 3]$
 f) $A \cap B = [0; 2]$,
 $A \cup B = (-1; 5) \cup (5; \infty)$,
 $A \setminus B = (-1; 0) \cup (5; \infty)$,
 $B \setminus A = (2; 5]$

Powtórzenie

Zestaw I

1. Wśród 180 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą znajomości języków obcych. Otrzymano następujące wyniki: 90 studentów zna język angielski, 81 – niemiecki, 75 – rosyjski, 45 – angielski i niemiecki, 25 – angielski i rosyjski, 20 – niemiecki i rosyjski, a 4 – wszystkie trzy języki. Ilu spośród ankietowanych studentów nie zna żadnego z tych języków?
2. Dane są zbiory: A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 15, B – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, D – zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypisz wszystkie elementy zbioru:
- a) $A \cap B$, c) $A \cap B \cap C$, e) $A \cap (D \setminus B)$,
 b) $A \setminus C$, d) $A \setminus (B \cup C)$, f) $A \setminus (B \setminus D)$.
3. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
- a) $A = [-1; 4]$, $B = (2; 5)$ d) $A = (-\infty; 0] \cup (1; 2)$, $B = [0; 4]$
 b) $A = [2; 7]$, $B = (3; 5]$ e) $A = (-\infty; -1) \cup [3; 5]$, $B = (-2; 4)$
 c) $A = [-4; 2]$, $B = [2; 9)$ f) $A = (-1; 2] \cup (5; \infty)$, $B = [0; 5]$
4. Wykonaj mnożenie.
- a) $(a + 2b + 3)(a - 2)$ d) $-4(x^2 - 2y)(2x^2 - y)$
 b) $(2a - b + c)(2a - 3b)$ e) $2x(3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$
 c) $(a + 2b - 3c)(2a - 3b)$ f) $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$
5. Wskaż liczbę całkowitą k , dla której $x \in [k; k + 1)$.
- a) $x = \sqrt[3]{17}$ b) $x = \sqrt[3]{-25}$ c) $x = (3 - 2\sqrt{2})^2$ d) $x = \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$
6. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?
- a) $\frac{2x+1}{2} - 2 < x - \frac{x-3}{3}$ c) $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} \geq \frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{5}$
 b) $\frac{1}{2}x - \frac{6x-3}{4} \geq -2 - \frac{2x-1}{3}$ d) $\frac{2-x}{2} - \frac{1}{3}x > \frac{1-4x}{5} - \frac{3-x}{2}$
7. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.
- a) $|x| > 1$ i $|x| \leq 9$ b) $|x| \geq 2$ i $|x - 2| < 4$ c) $|x| < 4$ i $|x + 1| \geq 2$
8. Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \geq 3\}$ i $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 3\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:
- a) $A \cap B$, b) $A \setminus B$, c) $B \setminus A$, d) $(A \cup C) \setminus B$, e) $(A \setminus B) \cup C$.

4. a) $a^2 + 2ab + a - 4b - 6$
 b) $4a^2 - 8ab + 3b^2 + 2ac - 3bc$
 c) $2a^2 + ab - 6b^2 - 6ac + 9bc$
 d) $-8x^4 + 20x^2y - 8y^2$
 e) $-18x^5 + 24x^3y - 8xy^2$
 f) $x^4 - y^4$
5. a) 2 b) $-3\frac{1}{2}$ c) 0 d) 3
6. a) $x < 7\frac{1}{2}$; 8 liczb naturalnych
 b) $x \leq 7\frac{1}{4}$; 8 liczb naturalnych
 c) $x \leq 2\frac{3}{17}$; 3 liczby naturalne
 d) $x < 4\frac{5}{16}$; 5 liczb naturalnych

7. a) $[-9; -1) \cup (1; 9]$
 b) $[2; 6)$
 c) $(-4; -3] \cup [1; 4)$
8. $A = (-1; 7)$,
 $B = (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$,
 $C = (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$
- a) $A \cap B = [1; 7)$
 b) $A \setminus B = (-1; 1)$
 c) $B \setminus A = (-\infty; -5] \cup [7; \infty)$
 d) $(A \cup C) \setminus B = (-5; -3] \cup (-1; 1)$
 e) $(A \setminus B) \cup C = (-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup [3; \infty)$

Zestaw II

1. Wśród zbiorów X, Y, T wskaż parę zbiorów równych.
 - a) $X = (-4; 2] \cap \mathbb{Z}, Y = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 \leq 4\}, T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
 - b) $X = (2; 7) \cup \{7\}, Y = [2; 7] \setminus \{2\}, T = (2; 4) \cup (4; 7]$
 - c) $X = \{x \in \mathbb{N}: |x| \leq 6\}, Y = (-7; 7) \cap \mathbb{N}, T = \mathbb{N} \setminus \{5; 8\}$
2. Sprawdź, czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B, B \subset A$.
 - a) $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < |x| < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R}: |x - 5| \geq 1\}$
 - b) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x + 1| \geq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R}: |2x - 6| > 16\}$
 - c) $A = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq |x| \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2 - 10x + 25} < 8\}$
3. Oblicz.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$	e) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
b) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - \sqrt{2})$	f) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$
c) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 6\sqrt{3})$	g) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
d) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{10})(-3\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$	h) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$
4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - x \\ (x - \frac{1}{2})^2 + 0,75x \geq x^2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2 - x^2 - (x - 2)^2 \leq 6 - 2(x + 4)^2 \\ (4 - x)^2 - (6 - x)^2 \geq \frac{11}{4} - \frac{0,5 - \frac{1}{2}x}{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2 - x)^2 \leq (x + 1)^2 \end{cases}$	e) $\begin{cases} -4(4 - x)^2 < 8 - (4 - 2x)^2 \\ \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x+4)}{2} > 0,25 \end{cases}$
c) $\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 \geq x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$	f) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}+1} + 4x(1-x) > \sqrt{2}x - (1-2x)^2 \\ \frac{1-x^4}{x^2+1} - 2x \geq 2x - (3-x)^2 \end{cases}$
5. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?

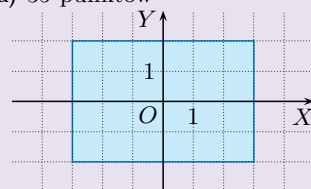
a) $ x \leq 3$ i $ y \leq 2$	c) $1 \leq x \leq 2$ i $1 \leq y \leq 3$
b) $1 \leq x \leq 4$ i $ y < 1$	d) $0 < x < 3$ i $1 < y < 2$

- D 6. a) Liczby p i q przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio 1 i 3. Wykaż, że reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 4 są równe.
- b) Liczby p i q przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio k i l , gdzie $k < l$, a reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 5 są równe. Wyznacz k i l .

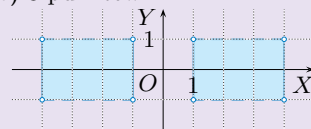
6. a) Niech $p = 4x + 1$
 i $q = 4y + 3$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.
 Stąd $p^2 = 16x^2 + 8x + 1 =$
 $= 4(4x^2 + 2x) + 1,$
 $q^2 = 16y^2 + 24y + 9 =$
 $= 4(4y^2 + 6y + 2) + 1$
 Zatem reszty z dzielenia liczb
 p^2 i q^2 przez 4 są równe 1.

b) Niech $p = 5x + k$ i $q = 5y + l$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $k < l$.
 Stąd $p^2 = 25x^2 + 10kx + k^2 = 5(5x^2 + 2kx) + k^2$ i analogicznie $q^2 = 5(5y^2 + 2ly) + l^2$.
 Przy dzieleniu przez 5 możemy otrzymać jedną z reszt: 0, 1, 2, 3, 4.
 Z założenia $k < l$, czyli $k \in \{1, 2, 3\}$ oraz $l \in \{2, 3, 4\}$. Resztę 0 wykluczaliśmy z rozważań, ponieważ oznaczałoby to, że liczby p^2 i q^2 są podzielne przez 5, a co za tym idzie p i q również byłyby podzielne przez 5, a to jest sprzeczne z założeniem $k < l$.
 $k = 1: p^2 = 5(5x^2 + 2x) + 1, \quad k = 2: p^2 = 5(5x^2 + 4x) + 4$
 $k = 3: p^2 = 5(5x^2 + 6x) + 9 = 5(5x^2 + 6x + 1) + 4$
 $l = 2: q^2 = 5(5y^2 + 4y) + 4, \quad l = 3: q^2 = 5(5y^2 + 6y + 1) + 4$
 $l = 4: q^2 = 5(5y^2 + 8y) + 16 = 5(5y^2 + 8y + 3) + 1$
 Zatem $k = 1$ i $l = 4$ lub $k = 2$ i $l = 3$.

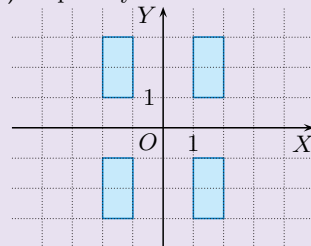
1. a) $X = T$ b), c) $X = Y$
2. a) $A = (-2; 0) \cup (0; 2),$
 $B = (-\infty; 4] \cup [6; \infty),$
 zatem $A \subset B$.
 b) $A = (-\infty; -4] \cup [2; \infty),$
 $B = (-\infty; -5) \cup (11; \infty),$
 zatem $B \subset A$.
 c) $A = [-3; -1] \cup [1; 3],$
 $B = (-3; 13),$
 zatem $A \not\subset B$ i $B \not\subset A$.
3. a) $-2 + 2\sqrt{3}$ b) $8 + 7\sqrt{6}$
 c) $-24 + 6\sqrt{2}$ d) $-22\sqrt{5} + 40$
 e) 28 f) $24\sqrt{2}$
 g) $4 + 4\sqrt{3}$ h) $48 - 16\sqrt{5}$
4. a) $(\frac{2}{7}; 1]$ b) $[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$ c) $(-\infty; \frac{3}{4}]$
 d) $\emptyset$ e) $(-\infty; \frac{7}{2})$ f) $(-\infty; 1)$
5. a) 35 punktów



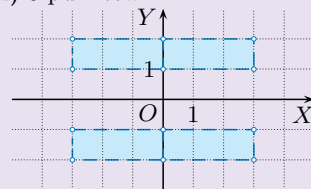
b) 8 punktów



c) 24 punkty



d) 0 punktów

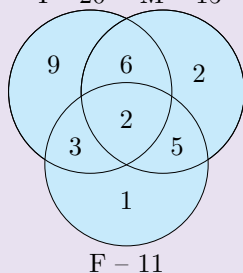




Zadania z kontekstem realistycznym

Odpowiedzi do zadań

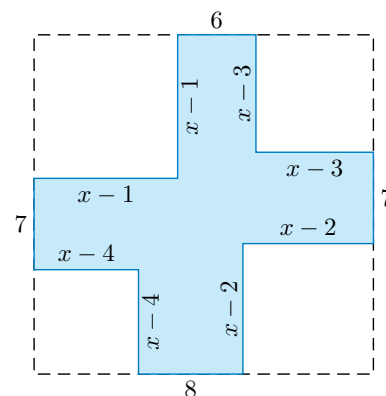
1. I – 20 M – 15



F – 11

- a) 2
 b) $9 + 6 + 2 + 3 + 2 + 5 + 1 = 28$
 c) $1 + 5 = 6$
2. x – liczba uczniów, którzy poprawnie rozwiązyli zadania 1. i 2.
 Wówczas $10 - x$ jest liczbą uczniów, którzy poprawnie rozwiązyli zadania 2. i 3.
 Zadanie 1. i 3. rozwiązało poprawnie $23 - x = 21 - (10 - x)$ uczniów. Stąd $x = 6$, czyli było $6 + 4 + 17 = 27$ uczniów.
3. x – liczba godzin parkowania
 $A(x)$, $B(x)$ – opłaty na odpowiednich parkingach
 $A(x) = 5 + 3(x - 1) = 3x + 2$
 $B(x) = 3,9 + 3,2(x - 1) = 3,2x + 0,7$
 $B(x) > A(x)$, gdy:
 $3,2x + 0,7 > 3x + 2$
 stąd $x > 6,5$
 Zatem samochód parkował co najmniej 7 godzin.

1. W ubiegłym roku szkolnym 20 uczniów reprezentowało szkołę w konkursie informatycznym, 15 uczniów – w konkursie matematycznym, 5 uczniów – w konkursach informatycznym i fizycznym, 7 uczniów – w konkursach matematycznym i fizycznym, 8 uczniów – w konkursach informatycznym i matematycznym, a 2 uczniów – we wszystkich trzech konkursach. 12 uczniów brało udział tylko w jednym konkursie.
- a) Ilu uczniów uczestniczyło tylko w konkursie matematycznym?
 b) Ilu uczniów brało udział w konkursach?
 c) Ilu uczniów reprezentowało szkołę w konkursie fizycznym, ale nie brało udziału w konkursie informatycznym?
2. Na kartkówce każdy uczeń rozwiązał poprawnie dwa spośród trzech zadań. Zadanie 1. poprawnie rozwiązało 23 uczniów, zadanie 2. – 10 uczniów, a zadanie 3. – 21 uczniów. Ilu uczniów pisało tę kartkówkę?
3. Na parkingu A pobiera się opłatę 5 zł za pierwszą godzinę parkowania i 3 zł za każdą następną godzinę. Na parkingu B płaci się 3,90 zł za pierwszą godzinę i 3,20 zł za każdą następną. Ile co najmniej godzin parkował samochód na parkingu A, jeżeli wiadomo, że za tę samą liczbę godzin na parkingu B zapłaciłby więcej?
4. Należność za przejazd taksówką pewnej firmy nalicza się następująco: jeśli przebyta droga wyrażona w kilometrach należy do przedziału $[k; k + 1)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to kwota opłaty wyrażona w złotych jest wartością wyrażenia $8 + 2,4k$. Oblicz, ile kosztuje przejazd tą taksówką trasy długości:
- a) 4,5 km, b) 12,9 km, c) 12,1 km, d) 6 km.
5. Na kwadratowym placu zaprojektowano nieregularną rabatę kwiatową – jej plan przedstawiono na rysunku obok (wymiary są podane w metrach).
- a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego pole tej rabaty, a następnie sprowadź to wyrażenie do najprostszej postaci (przyjmujemy, że $x > 4$).
 b) Oblicz pole tej rabaty dla $x = 11$.



4. x – droga w km,
 $f(x)$ – należność za przejazd w zł
 $f(x) = 8 + 2,4k$ dla $x \in [k; k + 1)$
 a) $f(4,5) = 8 + 2,4 \cdot 4 = 17,60$ [zł]
 b) $f(12,9) = 8 + 2,4 \cdot 12 = 36,80$ [zł]
 c) $f(12,1) = 8 + 2,4 \cdot 12 = 36,80$ [zł]
 d) $f(6) = 8 + 2,4 \cdot 6 = 22,40$ [zł]
5. a – długość boku kwadratu, P – pole figury
 $a = 8 + (x - 4) + (x - 2) = 2x + 2$
 a) $P = a^2 - ((x - 1)^2 + (x - 3)^2 + (x - 2)^2 + (x - 4)^2) =$
 $= (2x + 2)^2 - (x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16) =$
 $= 4x^2 + 8x + 4 - (4x^2 - 20x + 30) = 28x - 26$
 b) $P(11) = 28 \cdot 11 - 26 = 282$ [m²]

**D Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, przedstawiliśmy tę liczbę w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb naturalnych, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 121

D Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S .

$$\begin{aligned} S &= (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb nieparzystych, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 121



1. $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \dots\}$

$$B = \{1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots\}$$

$$B \setminus A = \{8, 27, 125, 216, \dots\}$$

Do zbioru $B \setminus A$ należą trzy liczby mniejsze od 200.

2. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

4. $3x + 12 < 2x$

$$x < -12$$

$$x \in (-\infty; -12)$$

5. $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$

$$-x \geq 1 \text{ i } 2x > -10$$

$$x \leq -1 \text{ i } x > -5$$

$$x \in (-5; -1]$$

W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześciątów.

Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?

A. 5

B. 4

C. 3

D. 0

Zadanie 2 (0–1)

$$A = (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cap \mathbb{Z} \text{ jest zbiorem}$$

A. siedmioelementowym.

C. czteroelementowym.

B. sześćelementowym.

D. pustym.

Zadanie 3 (0–1)

Zbiór $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$ można zapisać w postaci

A. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

C. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$

B. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

D. $\{-1, 1\}$

Zadanie 4 (0–1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3}$ jest przedział

A. $(-\infty; 12)$

B. $(-\infty; -12)$

C. $(-12; \infty)$

D. $(12; \infty)$

Zadanie 5 (0–1)

Zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie dwie nierówności $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$ można zapisać w postaci przedziału

A. $(-5; -1]$

B. $(-5; -1)$

C. $[-5; -1]$

D. $(-\infty; -5)$

Zadanie 6 (0–1)

Dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość

A. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4b^2$

C. $(a - 2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$

B. $(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2$

D. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

Zadanie 7 (0–1)

Dla dowolnej liczby x wyrażenie $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$ jest równe

A. $(-\frac{x}{3} + 1)^2$

B. $(-\frac{x}{3} - 1)^2$

C. $(-\frac{x}{3} - 3)^2$

D. $(\frac{2}{3}x - 1)^2$

Zadanie 8 (0–1)

Ułamek $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest równy

A. $1 + \sqrt{2}$

B. $-1 - \sqrt{2}$

C. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{1+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}$

Zadanie 9 (0–1)

Liczba $|\sqrt{3} - 4|$ należy do przedziału

A. $(-\infty; 0)$

B. $[0; 2,3)$

C. $[2,3; 4)$

D. $[4; \infty)$

8. $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$

9. $|\sqrt{3} - 4| \approx 2,27$

**Zadanie 10**

Dane są liczby $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ i $b = (\sqrt{3} + 1)^2$.

Zadanie 10.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obie podane liczby są niewymierne.	P	F
Liczba b jest większa od liczby a .	P	F

Zadanie 10.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie.

Największą liczbą całkowitą mniejszą od b jest liczba ?.

Zadanie 11 (0-1)

Dana jest nierówność $(x - 3)^2 - (x - 1)^2 \geq -2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podaną nierówność spełnia nieskończenie wiele liczb naturalnych.	P	F
Liczba $x = 2\sqrt{3}$ spełnia tę nierówność.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Dane jest wyrażenie $(x - \frac{1}{2}y)^2 - (x + \frac{1}{2}y)^2$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y podane wyrażenie jest równe

A.	$-\frac{1}{2}xy$,	ponieważ	1.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$.
B.	$-xy$,		2.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$.
C.	$-2xy$,		3.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2$.

Zadanie 13 (0-2)

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$ dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

10.2. 7

$$\begin{aligned}
 11. \quad (x - 3)^2 - (x - 1)^2 &= \\
 &= (x - 3 - x + 1)(x - 3 + x - 1) = \\
 &= -2(2x - 4) \\
 -2(2x - 4) &\geq -2 \\
 2x - 4 &\leq 1 \\
 x &\leq 2\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Nierówność spełniają tylko trzy liczby naturalne: 0, 1, 2.
 $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{9} = 3 > 2\frac{1}{2}$
 Liczba $2\sqrt{3}$ nie spełnia tej nierówności.

- 10.1. $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2$ – liczba wymierna
 $b = (\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$ – liczba niewymierna większa od liczby a
12. $(x - \frac{1}{2}y)^2 - (x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - (x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 = -2xy$
13. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy:
 $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2 = -16xy$
 $-16xy = -16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$



14. $(2\sqrt{6}a - \sqrt{2})^2 =$
 $= 24a^2 - 8\sqrt{3}a + 2$
 A. $24 \cdot 6 - 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + 2 =$
 $= 24 \cdot 6 + 2 - 24\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
 B. $24 \cdot \frac{6}{4} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 =$
 $= 36 + 2 - 12\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
 C. $24 \cdot \frac{27}{4} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 =$
 $= 6 \cdot 27 - 36 + 2 \in \mathbb{Z}$
 D. $24 \cdot \frac{8}{9} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 =$
 $= 24 \cdot \frac{8}{9} + 2 - \frac{16}{3}\sqrt{6} \notin \mathbb{Z}$
 E. $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8 =$
 $= 6 - 2\sqrt{12} + 2 - 8 =$
 $= -2\sqrt{12} = -4\sqrt{3}$
 $24 \cdot 48 - 8\sqrt{3} \cdot (-4\sqrt{3}) + 2 =$
 $= 24 \cdot 48 + 32 \cdot 3 + 2 \in \mathbb{Z}$

15. Dla $p = -1$ oraz $q = 0$ zachodzi nierówność $p < q$ oraz nie zachodzi nierówność $p^2 < q^2$.
 Dla $p = 1$ oraz $q = 2$ zachodzi nierówność $p < q$ oraz nie zachodzi nierówność $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$.

16. $3 - 2\sqrt{3} = \sqrt{9} - \sqrt{12} < 0$, więc
 $|3 - 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 3$
 $4\sqrt{3} - 7 = \sqrt{48} - \sqrt{49} < 0$,
 więc $|4\sqrt{3} - 7| = 7 - 4\sqrt{3}$
 Zatem $|3 - 2\sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7| =$
 $= 2\sqrt{3} - 3 + 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$.

Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $(2\sqrt{6}a - \sqrt{2})^2$ jest całkowita dla

- A. $a = \sqrt{6}$ C. $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ E. $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8$
 B. $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ F. $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{3}$

Zadanie 15 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla dowolnych liczb p, q , jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.	P	F
Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q , jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$.	P	F

Zadanie 16 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma $|3 - 2\sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7|$ jest równa

A.	$4 - 2\sqrt{3}$,	ponieważ	1.	$3 - 2\sqrt{3} > 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0$.
B.	$6\sqrt{3} - 10$,		2.	$3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 < 0$.
			3.	$3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0$.

Zadanie 17 (0-2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ i $b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Iloczyn ab jest równy

- A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{6}$ D. 5

2. Iloczyn $(b + a)(b - a)$ jest równy

- E. $4\sqrt{6}$ F. $10 - 4\sqrt{6}$ G. $10 + 4\sqrt{6}$ H. $-4\sqrt{6}$

Zadanie 18 (0-2)

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

Zadanie 19 (0-2)

Podaj liczby naturalne spełniające nierówność $(4x + 3)^2 - (4x - 3)^2 \leq 100$.

$$17. ab = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} =$$

$$= \sqrt{25 - 24} = 1$$

$$(b + a)(b - a) = b^2 - a^2 = (\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2 - (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2 = 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$18. (3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq (2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq 4x^2 - 3$$

$$-12x \leq -12$$

$$x \geq 1$$

Zbiór rozwiązań nierówności: $[1; \infty)$.

19. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$(4x + 3 - 4x + 3)(4x + 3 + 4x - 3) \leq 100$$

$$6 \cdot 8x \leq 100$$

$$x \leq 2\frac{1}{12}$$

Liczby naturalne spełniające tę nierówność: 0, 1, 2.

**D Zadanie 20 (0-3)**

Uzasadnij, że nierówność $\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} < 6 - x$ spełniają cztery liczby naturalne dodatnie.

Zadanie 21 (0-2)

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność:

$$n^2 \geq |10 - 10\sqrt{10}|$$

Zadanie 22 (0-2)

Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \leq |x| < 9$?

D Zadanie 23 (0-2)

Uzasadnij, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ liczba $(3k-1)^2 + (3k+1)^2 + (3k+2)^2 - 3k^2$ jest podzielna przez 6.

D Zadanie 24 (0-2)

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D Zadanie 25 (0-4) → Przykład 1 i 2, str. 117

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

Zadanie 26 (0-4)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 3 - \sqrt{2}$.

D Zadanie 27 (0-3)

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $(\frac{7}{2}; \infty)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

Zadanie 28 (0-4)

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

Zadanie 29 (0-4)

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 23. & (3k-1)^2 + (3k+1)^2 + (3k+2)^2 - 3k^2 = \\ & = 9k^2 - 6k + 1 + 9k^2 + 6k + 1 + 9k^2 + 12k + 4 - 3k^2 = \\ & = 24k^2 + 12k + 6 = 6(4k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 6.

25. Cztery kolejne liczby nieparzyste: $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} S &= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 + (2n+7)^2 = \\ &= 16n^2 + 64n + 84 = 8(2n^2 + 8n + 10) + 4 \end{aligned}$$

Ponieważ $2n^2 + 8n + 10$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 8 jest równa 4.

$$\begin{aligned} 26. & \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{ab} = \frac{a-b}{(a-b)ab} = \frac{1}{ab} \\ & \frac{1}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. & \sqrt{2}x - 3\sqrt{2} < 6 - x \\ & x(\sqrt{2}+1) < 6 + 3\sqrt{2} \\ & x < \frac{6+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \\ & = \frac{3(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \\ & = \frac{3(2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2})}{2-1} = 3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

wiec $x < 3\sqrt{2}$. Ponieważ:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$$

wiec $3\sqrt{2} < 5$.

Ponadto $3\sqrt{2} > 4$.

Zatem daną nierówność spełniają cztery liczby naturalne dodatnie: 1, 2, 3, 4.

$$\begin{aligned} 21. & |10 - 10\sqrt{10}| = 10(\sqrt{10} - 1) \\ & \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{\frac{100}{9}} \\ & 3 < \sqrt{10} < \frac{10}{3} \\ & 2 < \sqrt{10} - 1 < \frac{7}{3} \\ & 20 < 10(\sqrt{10} - 1) < \frac{70}{3} \\ & 20 < 10(\sqrt{10} - 1) < 23\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Zatem $n = 5$.

$$\begin{aligned} 22. & \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,7 \\ & x \in (-9; -2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; 9) \end{aligned}$$

Warunek ten spełnia 10 liczb całkowitych.

24. Rozważmy dwie kolejne liczby nieparzyste: $2n+1$ i $2n+3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas różnica:
 $(2n+3)^2 - (2n+1)^2 =$
 $= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 =$
 $= 8n + 8 = 8(n+1)$
jest podzielna przez 8.

$$\begin{aligned} 27. & (2 - \sqrt{2})x \geq 2 \\ & x \geq \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \\ & = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = 2 + \sqrt{2} \\ & x \in [2 + \sqrt{2}; \infty) \\ & 2 + \sqrt{2} < 2 + 1,5 = \frac{7}{2} \\ & (\frac{7}{2}; \infty) \subset [2 + \sqrt{2}; \infty) \end{aligned}$$

Zatem każda liczba $x \in (\frac{7}{2}; \infty)$ spełnia tę nierówność.

$$28. x \in (-3; 2]$$

29. $x \in [\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}]$
Obie nierówności spełniają cztery liczby całkowite: 1, 2, 3, 4.



1. $x > 100(1 + \sqrt{2}) \approx 241,42$
Najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność jest 242.

2.1. $(A \cap B) \setminus C =$
 $= [-100; -8] \cup (4; 36]$
124 liczby

2.2. $p = -32, q = 68$

3. $x \in (-119; 122)$,
czyli $-119 < \sqrt{2}k < 122$,
stad $\frac{-119\sqrt{2}}{2} < k < 61\sqrt{2}$
 $\frac{-119\sqrt{2}}{2} \approx -84,15$;
 $61\sqrt{2} \approx 86,27$
Zatem $A = \{-84, -83, \dots, 84, 85, 86\}$
Szukana różnica:
 $86 - (-84) = 170$

4. $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in [-27; 33]$
i $y \in [-62; 58]$, zatem jest
 $61 \cdot 121 = 7381$ punktów.

5. Z założenia $n = 3k + 1$ lub
 $n = 3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
Wówczas $n^2 = (3k + 1)^2 =$
 $= 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
lub $n^2 = (3k + 2)^2 =$
 $= 9k^2 + 12k + 4 =$
 $= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$
Zatem reszta z dzielenia n^2
przez 3 jest równa 1.

6. Przekształcamy nierówność
do postaci:
 $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 - 2xy + y^2 \geq 0$
Przekształcamy równoważnie
wyrażenie po lewej stronie
nierówności:
 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 + x^2 - 2xy +$
 $+ y^2 = (\sqrt{2}x - 1)^2 + (x - y)^2$
 $(\sqrt{2}x - 1)^2 \geq 0$
i $(x - y)^2 \geq 0$,
więc nierówność jest prawdziwa.

Zadanie 1 (0-2)

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność:

$$-0,01x < \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

Zadanie 2

Dane są zbiory $A = (-\infty; -6) \cup [4; \infty)$, $B = [-100; 36]$ i $C = [-8; 4]$.

Zadanie 2.1 (0-2)

Ile liczb całkowitych należy do zbioru $(A \cap B) \setminus C$?

Zadanie 2.2 (0-3)

Wyznacz p i q , tak aby zbiorem rozwiązań nierówności $|x - p| > q$ był zbiór $A \setminus B$.

Zadanie 3 (0-2)

A jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych k takich, że liczba $\sqrt{2}k$ spełnia nierówność $|2x - 3| < 241$. Oblicz różnicę między największym a najmniejszym elementem zbioru A .

Zadanie 4 (0-2)

Wyznacz liczbę punktów (x, y) o obu współrzędnych całkowitych spełniających warunki: $|x - 3| \leq 30$ i $|y + 2| \leq 60$.

D Zadanie 5 (0-3)

Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

D Zadanie 6 (0-3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb x i y zachodzi nierówność:

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 2xy - y^2$$

D Zadanie 7 (0-4)

Uzasadnij, że liczba $137^8 - 119^8$ jest podzielna przez 2^{11} .

Zadanie 8 (0-4)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność:

$$\sqrt{12 - 4\sqrt{3}x + x^2} < \frac{3}{2\sqrt{3}-3}$$

Zadanie 9 (0-5)

Dane są zbiory:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}: x \leq \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} \right\}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R}: |2x + 12| \geq 2 \}$$

Wyznacz zbiór $B \setminus A$.

$$7. 137^8 - 119^8 = (137^4 - 119^4)(137^4 + 119^4) = (137^2 - 119^2)(137^2 + 119^2)(137^4 + 119^4) =$$

$$= (137 - 119)(137 + 119)(137^2 + 119^2)(137^4 + 119^4) = 9 \cdot 2^9 (137^2 + 119^2)(137^4 + 119^4)$$

Kwadrat i czwarta potęga liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą. Suma liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, czyli sumy $137^2 + 119^2$ oraz $137^4 + 119^4$ są podzielne przez 2. Zatem liczba $137^8 - 119^8$ jest podzielna przez $2^9 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11}$.

$$8. \sqrt{(x - 2\sqrt{3})^2} < \frac{3}{2\sqrt{3}-3} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3}$$

$$|x - 2\sqrt{3}| < 2\sqrt{3} + 3, -3 < x < 4\sqrt{3} + 3 \approx 9,93$$

Liczby całkowite spełniające nierówność: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

$$9. x \leq \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)^2} = |2\sqrt{3} - 1| - |2\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 2,$$

czyli $A = (-\infty; 2]$, $B = (-\infty; -7] \cup [-5; \infty)$, $B \setminus A = (2; \infty)$