

5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest bardzo ważny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę podczas ustalania stopnia trudności trasy narciarskiej.

Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei. Przy badaniu kąta nachylenia terenu wykorzystuje się pojęcie kąta nachylenia prostej.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a .

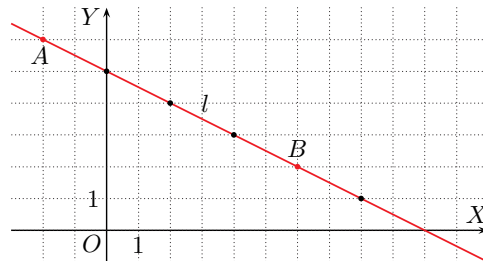


Punkty kratowe należące do prostej

Punkty kratowe to punkty, których obie współrzędne są całkowite.

Punkty $A(-2, 6)$ i $B(6, 2)$ należą do prostej l . Do odcinka AB należą również następujące punkty kratowe: $(0, 5)$, $(2, 4)$ i $(4, 3)$.

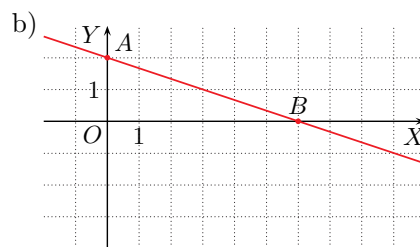
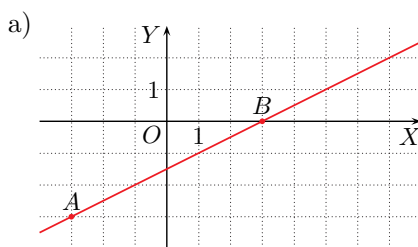
Punkt $(8, 1)$ jest punktem kratowym, który należy do prostej l , ale nie należy do odcinka AB .



Odpowiedzi do zadań

1. a) punkty należące do odcinka AB : $(-3, -3)$, $(-1, -2)$, $(1, -1)$, $(3, 0)$, punkty należące do prostej l , ale nienależące do odcinka AB : $(-5, -4)$, $(5, 1)$, $(7, 2)$
b) punkty należące do odcinka AB : $(0, 2)$, $(3, 1)$, $(6, 0)$, punkty należące do prostej l , ale nienależące do odcinka AB : $(9, -1)$, $(12, -2)$, $(15, -3)$

1. Podaj współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do odcinka AB oraz dowolnych trzech punktów kratowych należących do prostej l , ale nienależących do odcinka AB .



Przykład 1

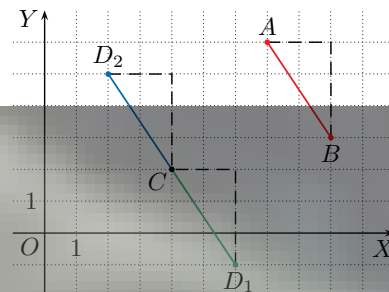
Dane są punkty $A(7, 6)$, $B(9, 3)$ i $C(4, 2)$. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby odcinki AB i CD były równoległe oraz miały równe długości.

W układzie współrzędnych rysujemy odcinek AB i zaznaczamy punkt C .

Zauważmy, że aby przenieść się z punktu A do punktu B , przesuwamy się o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół.

Zatem warunki zadania są spełnione przez dwa punkty:

$$D_1(6, -1) \text{ i } D_2(2, 5)$$



2. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby odcinki AB i CD były równoległe oraz miały równe długości.

a) $A(-2, 2)$, $B(2, 4)$, $C(3, 1)$ b) $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$, $C(4, 2)$

2. a) $A(-2, 2)$, $B(2, 4) = (-2 + 4, 2 + 2)$, $C(3, 1)$, zatem $D(3 + 4, 1 + 2) = (7, 3)$ lub $D(3 - 4, 1 - 2) = (-1, -1)$.
b) $A(-1, 4)$, $B(2, 1) = (-1 + 3, 4 - 3)$, $C(4, 2)$, zatem $D(4 + 3, 2 - 3) = (7, -1)$ lub $D(4 - 3, 2 + 3) = (1, 5)$.

5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

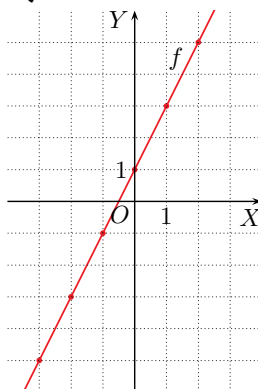
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5

Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f .



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

Definicja

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$. Powiemy też krótko: prosta $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

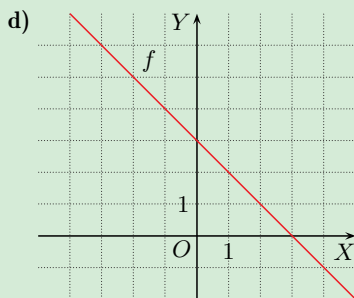
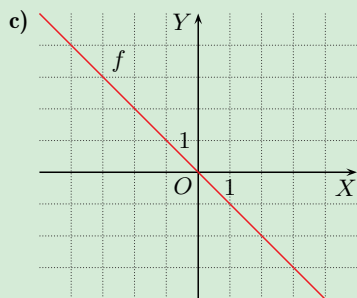
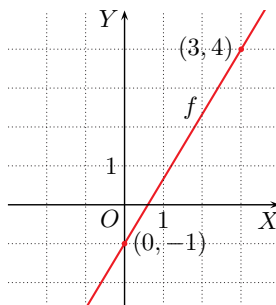
Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

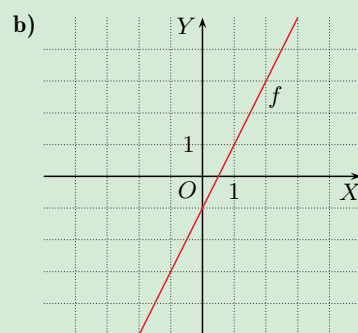
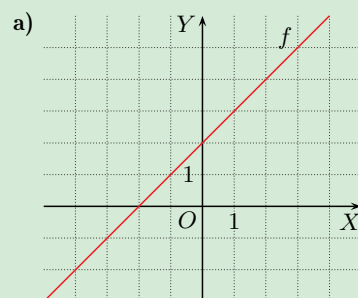
Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f .



Uczeń:

- rozpoznaje funkcję liniową, mając dany jej wzór, oraz szkicuje jej wykres,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji liniowej,
- wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia podane warunki, np. jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez dany punkt.

Ćwiczenie 1



Multibook

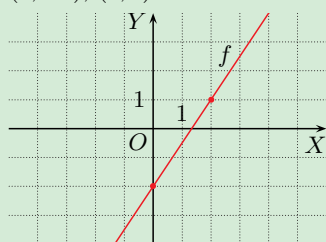
- Wykresy funkcji liniowych
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

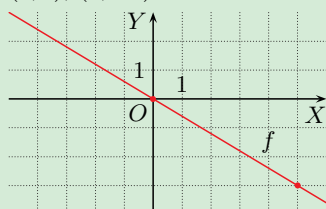
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

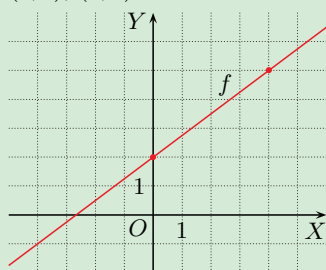
a) $(0, -2), (2, 1)$



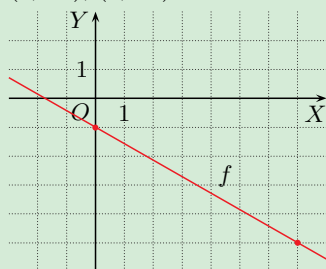
b) $(0, 0), (5, -3)$



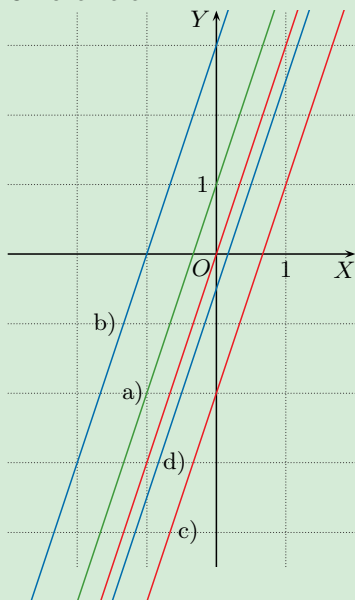
c) $(0, 2), (4, 5)$



d) $(0, -1), (7, -5)$



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty kratowe należące do wykresu funkcji f . Naskicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

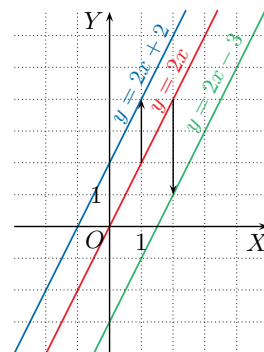
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a liczbę b – **wyrazem wolnym**.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY .

Po przesunięciu prostej $y = 2x$:

- o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$,
- o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.



Ćwiczenie 3

Naskicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f .

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Zauważmy, że wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi. Proste, które są wykresami funkcji liniowych o różnych współczynnikach kierunkowych, nie są równoległe.

Twierdzenie

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Uwaga. Zdanie: „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ” oznacza, że prawdziwe są dwa zdania: „jeżeli p , to q ” oraz „jeżeli q , to p ”

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$ $l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$ $l_7: y = 1 - 2x$
 $l_2: y = 2x - 3$ $l_4: y = 4 + 2x$ $l_6: y = 2x - \sqrt{3}$ $l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 4

$l_2 \parallel l_4 \parallel l_6, l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$

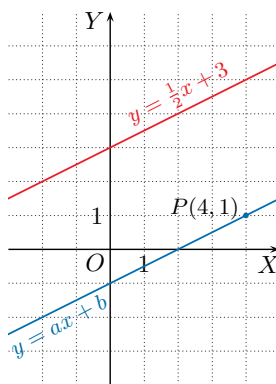
Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4, 1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Szukana funkcja liniowa ma wzór postaci $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$.

Aby obliczyć współczynnik b , podstawiamy współrzędne punktu $P(4, 1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P .

- a) $l: y = 2x - 4$, $P(3, 7)$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 3$, $P(3, -4)$
 b) $l: y = -3x + 5$, $P(-\frac{1}{3}, 2)$ d) $l: y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$, $P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji. Które z punktów $P(4, 3)$, $Q(2, 5)$, $R(-2, -3)$ należą do jej wykresu?

- a) $y = x + 3$ c) $y = 2x - 5$ e) $y = -x + 7$ g) $y = -3x + 6$
 b) $y = x - 1$ d) $y = 3x - 1$ f) $y = -2x - 7$ h) $y = -4x - 3$

2. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj trzy punkty kratowe należące do tego wykresu.

- a) $y = \frac{1}{2}x - 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e) $y = \frac{2}{3}x - 1$ g) $y = -\frac{3}{4}x + 4$
 b) $y = \frac{1}{3}x + 4$ d) $y = -\frac{1}{4}x - 2$ f) $y = \frac{5}{2}x + 2$ h) $y = -\frac{5}{3}x - 2$

3. Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

- $l_1: y = 5x - \frac{1}{2}$ $l_3: y = \frac{1}{5}x - \sqrt{3}$ $l_5: y = -\frac{1}{5}x + 3$ $l_7: y = 4 - \frac{1}{5}x$
 $l_2: y = -\frac{1}{5}x$ $l_4: y = 5x - \frac{1}{5}$ $l_6: y = \frac{1}{5} + 5x$ $l_8: y = 5x - \sqrt{5}$

4. Czy czworokąt, którego boki są zawarte w prostych k, l, m, n , jest trapezem? Czy czworokąt ten jest równoległobokiem? Odpowiedź uzasadnij.

- a) $k: y = -\frac{3}{4}x + 3$, $l: y = 0,3x - 2$, $m: y = \frac{1}{3}x + 4$, $n: y = 6 - 0,75x$
 b) $k: y = 2\sqrt{2}x - 4$, $l: y = 4 - 2,5x$, $m: y = 1 + \sqrt{8}x$, $n: y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

3. $l_1 \parallel l_4 \parallel l_6 \parallel l_8$, $l_2 \parallel l_5 \parallel l_7$

4. a) $a_k = a_n = -\frac{3}{4}$

Czworokąt ma jedną parę boków równoległych, czyli jest trapezem.

- b) $a_k = a_m = 2\sqrt{2}$, $a_l = a_n = -\frac{5}{2}$

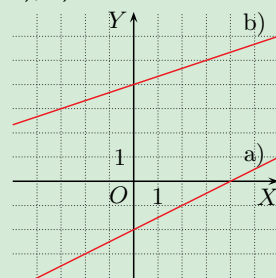
Czworokąt ma dwie pary boków równoległych, czyli jest równoległobokiem.

Ćwiczenie 5

- a) $y = 2x + 1$
 b) $y = -3x + 1$
 c) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
 d) $y = -\frac{3}{5}x + 1$

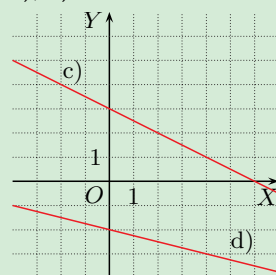
Odpowiedzi do zadań

1. a) Q b) P, R c) P d) Q
 e) P, Q f) R g), h) żaden
 2. a), b)



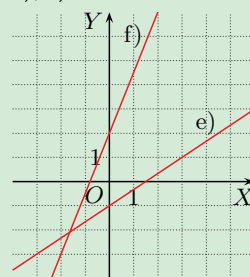
- a) np. $(0, -2)$, $(2, -1)$, $(4, 0)$
 b) np. $(-3, 3)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$

- c), d)



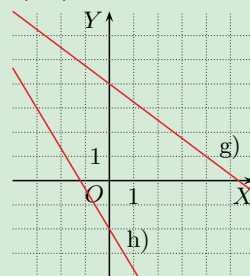
- c) np. $(-2, 4)$, $(0, 3)$, $(2, 2)$
 d) np. $(-8, 0)$, $(0, -2)$, $(4, -3)$

- e), f)



- e) np. $(-3, -3)$, $(0, -1)$, $(3, 1)$
 f) np. $(-2, -3)$, $(0, 2)$, $(2, 7)$

- g), h)



- g) np. $(-4, 7)$, $(0, 4)$, $(4, 1)$
 h) np. $(-3, 3)$, $(0, -2)$, $(3, -7)$

5. a) $y = 4x + 5$
 b) $y = -3x + 11$
 c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$
 d) $y = \frac{5}{12}x + 1$

6. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 3x - 11$

7. Prosta $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ przechodzi przez wierzchołki B i C . Równanie prostej zawierającej drugą podstawę trapezu: $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

8. a) $l_1: y = \sqrt{3}x$,
 $l_2: y = \sqrt{3}x - 1$
 b) $l_1: y = (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 1$,
 $l_2: y = (\sqrt{2} - 1)x + 3$

9. a) 1 b) 2
 c) -2 d) -5
 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$
 g) $-\frac{5}{2}$ h) $\frac{4}{3}$

10. $l_1: y = \frac{3}{4}x + 4$,
 $l_2: y = \frac{3}{4}x + 1$,
 $l_3: y = \frac{3}{4}x - 2$

5. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym równaniu i przechodząca przez punkt P .

- a) $y = 4x - 2$, $P(0, 5)$ c) $y = -\frac{4}{3}x + 6$, $P(-6, 5)$
 b) $y = -3x + 4$, $P(1, 8)$ d) $y = \frac{5}{12}x - 3$, $P(-\frac{4}{5}, \frac{2}{3})$

6. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki równoległoboku.

7. Jedna z podstaw trapezu o wierzchołkach $A(0, -3)$, $B(4, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, -1)$ jest zawarta w prostej $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej drugą podstawę trapezu.

8. Proste l_1 i l_2 są równoległe do prostej k . Do prostej l_1 należy punkt A , a do prostej l_2 punkt B . Wyznacz równania tych prostych.

- a) $k: y = \sqrt{3}x - 3$, $A(2\sqrt{3}, 6)$, $B(1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 4)$
 b) $k: y = (\sqrt{2} - 1)x + 6$, $A(\sqrt{8}, 3 - \sqrt{2})$, $B(1 + \sqrt{2}, 4)$

Sprawdź się

9. Odczytaj współczynnik kierunkowy podanej prostej, a następnie ją naszkicuj.

- a) $y = x - 3$ c) $y = 3 - 2x$ e) $y = \frac{1}{2}x + 2$ g) $y = \frac{1}{2}(6 - 5x)$
 b) $y = 2x + 4$ d) $y = 2 - 5x$ f) $y = \frac{x+6}{3}$ h) $y = \frac{1}{3}(4x - 6)$

10. Proste przedstawione na rysunku obok są równoległe do prostej $k: y = \frac{3}{4}x$. Podaj ich równania.

11. Wśród trzech podanych prostych wskaż dwie proste równoległe.

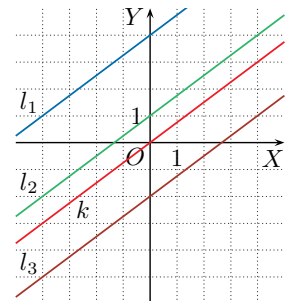
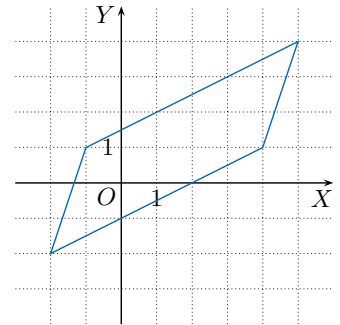
- a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$, $y = 2x - \frac{1}{3}$, $y = \frac{6-x}{3}$
 b) $y = 2(x - 4)$, $y = 4(1 - \frac{x}{2})$, $y = -2(x + 1)$
 c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, $y = \sqrt{3}x - 3$, $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$

12. Wyznacz wzór funkcji f , której wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = -6x + 5$ i przechodząca przez punkt P .

- a) $P(1, -4)$ b) $P(\frac{2}{3}, 2)$ c) $P(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ d) $P(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{2} + 2)$

11. a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$ i $y = \frac{6-x}{3}$
 b) $y = 4(1 - \frac{x}{2})$ i $y = -2(x + 1)$
 c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$

12. a) $f(x) = -6x + 2$
 b) $f(x) = -6x + 6$
 c) $f(x) = -6x + 1$
 d) $f(x) = -6x + 8$

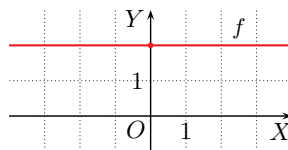


5.2. Wykres funkcji liniowej (2)

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbb{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$ o współczynnikach:

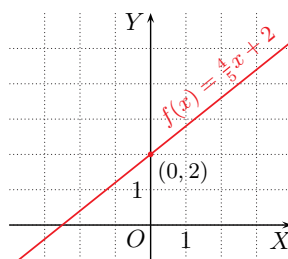
- a) $a = 0, b = 1$, b) $a = 0, b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0, b = 0$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY .

Przykład 2

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY . Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.



Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Przykład 3

Wyznacz wzór funkcji, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$ oraz jest prostą równoległą do prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - 6$.

Szukany wzór funkcji ma postać $f(x) = ax + b$.

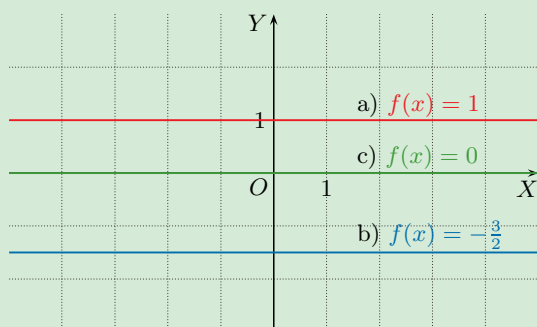
Z warunków zadania: $a = \frac{3}{4}$, $b = 3$, zatem $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P .

- a) $l: y = 3x - 4$, $P(0, 6)$ b) $l: y = -\frac{3}{4}x + 1$, $P(0, -\frac{3}{2})$

Ćwiczenie 1



Uczeń:

- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji liniowej,
- wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia podane warunki, np. jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez dany punkt,
- stosuje własności funkcji liniowej do obliczania pól wielokątów.

Uwaga. Odcięta punktu to jego pierwsza współrzędna, rzędna – to druga współrzędna.

Ćwiczenie 2

- a) $y = 3x + 6$
b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

Multibook

- Wykresy funkcji liniowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $f_1(1) = 4$, $f_2(1) = 3$,
 $f_3(1) = 2\frac{1}{2}$, $f_4(1) = 6$
 b) $f_1 - l_1$, $f_2 - l_2$,
 $f_3 - l_3$, $f_4 - l_4$

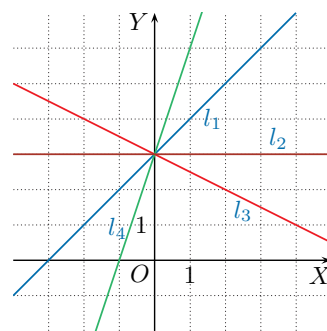
Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$$f_1(x) = x + 3, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$f_2(x) = 3, \quad f_4(x) = 3x + 3.$$

- a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.
 b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



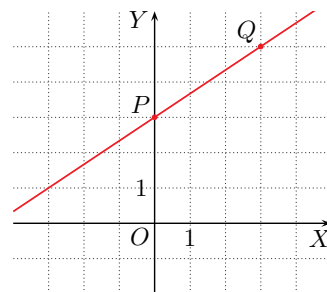
Czy wiesz, że...

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.

Szukana funkcja ma wzór postaci $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a , podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i dostajemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji to: $y = \frac{2}{3}x + 3$.



Ćwiczenie 4

- a) Dla prostej PQ : $b = 5$.
 $2 = 4a + 5$, czyli $a = -\frac{3}{4}$.
 $y = -\frac{3}{4}x + 5$
 $-\frac{3}{4} \cdot 8 + 5 = -1$

Punkt R należy do wykresu funkcji.

- b) Dla prostej PQ : $b = -4$.
 $-9 = -3a - 4$, czyli $a = \frac{5}{3}$.
 $y = \frac{5}{3}x - 4$
 $\frac{5}{3} \cdot 6 - 4 = 6 \neq 5$

Punkt R nie należy do wykresu funkcji.

Ćwiczenie 4

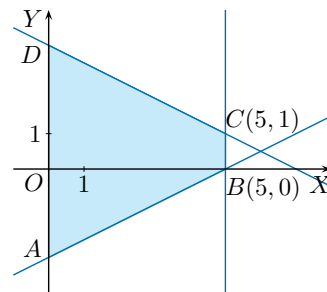
Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q . Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

- a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$ b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Ćwiczenie 5

a) Ramiona trapezu $ABCD$ zawierają się w prostych $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne wierzchołków A i D , a następnie oblicz pole tego trapezu.

b) Proste $y = \frac{5}{3}x + 5$ i $y = -\frac{1}{3}x - 1$ przecinają się w punkcie $(-3, 0)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY .



Ćwiczenie 5

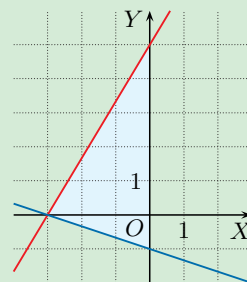
- a) $A(0, -\frac{5}{2})$, $D(0, \frac{7}{2})$

Pole trapezu: $P = \frac{1}{2} \cdot (6 + 1) \cdot 5 = 17,5$

- b) Punkty przecięcia wykresów z osią OY : $A(0, 5)$ i $B(0, -1)$

Podstawa trójkąta: $|AB| = 6$

Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$



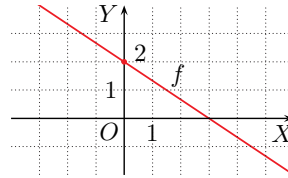
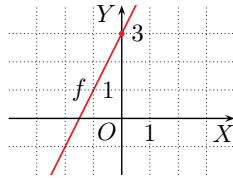
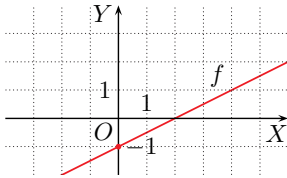
Zadania

1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \dots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0, 2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0, -1)$.

$$\begin{array}{llll} l_1: y = 3x + 2 & l_3: y = -1 & l_5: y = -2x + 2 & l_7: y = \frac{1}{2}x - 1 \\ l_2: y = 3x - 1 & l_4: y = 2 & l_6: y = -2x - 1 & l_8: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

2. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f , jeśli należy do niego punkt P .

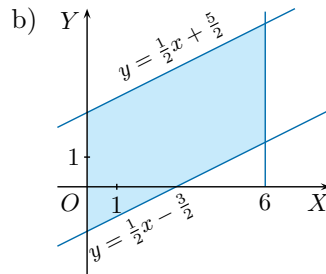
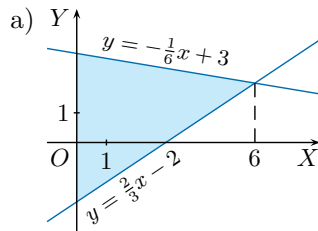
a) $P(8, 3), Q(16, 9)$ b) $P(-6, -9), Q(7, 19)$ c) $P(9, -4), Q(8, -3\frac{1}{3})$



3. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0, 4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

a) $P(2, 6)$ b) $P(-6, 1)$ c) $P(5, -11)$ d) $P(\frac{3}{4}, -2)$

4. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz pole zacieniowanej figury.



Sprawdź się

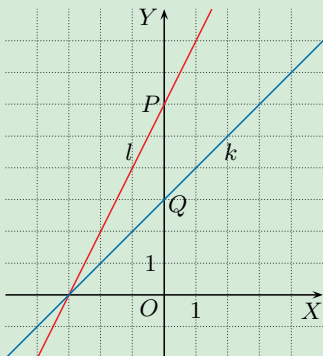
5. Prosta l przecina oś OY w punkcie P , a prosta k – w punkcie Q . Naskicuj te proste. Podaj długość odcinka PQ .

a) $l: y = 2x + 6, k: y = x + 3$ b) $l: y = -\frac{1}{4}x - 2, k: y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

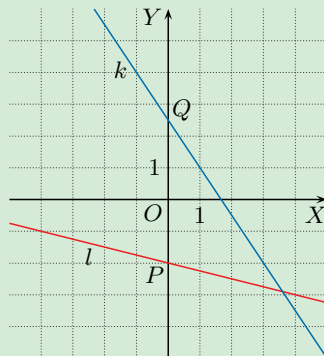
6. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych proste k_1, k_2, k_3 i k_4 . Podaj punkty, w których te proste przecinają oś rzędnych.

a) $k_1: y = \frac{1}{3}x, k_2: y = \frac{1}{3}x - 4, k_3: y = \frac{1}{3}x + 3, k_4: y = \frac{1}{3}x + 5$
 b) $k_1: y = -2x, k_2: y = -2x - 1, k_3: y = -2x + 8, k_4: y = -2x + \frac{1}{2}$

5. a) $|PQ| = 3$

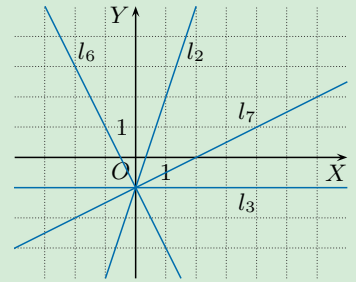
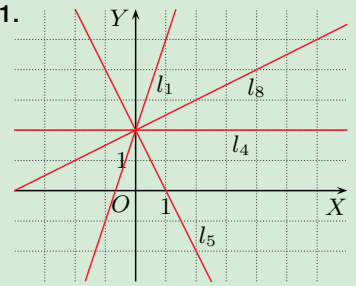


- b) $|PQ| = 4,5$



Odpowiedzi do zadań

1.



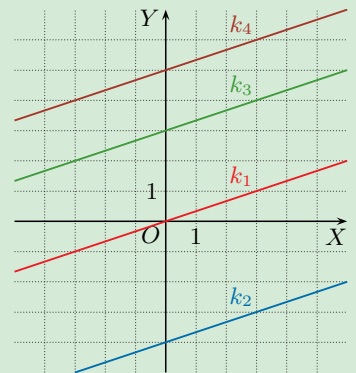
2. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1, Q$ nie należy
 b) $f(x) = 2x + 3, Q$ nie należy
 c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2, Q$ należy

3. a) $y = x + 4$ b) $y = \frac{1}{2}x + 4$
 c) $y = -3x + 4$ d) $y = -8x + 4$

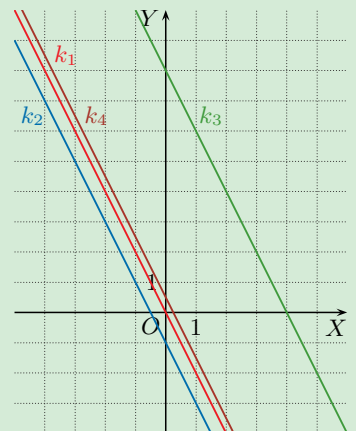
4. a) $P = \frac{1}{2} \cdot (2 + 3) \cdot 6 = 15$

b) $P = 6 \cdot (\frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = 24$

6. a) $k_1: (0, 0), k_2: (0, -4),$
 $k_3: (0, 3), k_4: (0, 5)$



- b) $k_1: (0, 0), k_2: (0, -1),$
 $k_3: (0, 8), k_4: (0, \frac{1}{2})$



Uczeń:

- wyznacza miejsce zerowe i określa monotoniczność funkcji liniowej danej wzorem,
- wyznacza współrzędne punktów, w których wykres funkcji liniowej przecina osie układu współrzędnych, oraz określa, w których ćwiartkach układu znajduje się wykres,
- określa monotoniczność funkcji liniowej w zależności od parametru,
- rozpoznaje wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}y &= ax + b \\ 0 &= ax + b \\ ax &= -b : a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x = \frac{3}{2}$
- b) $x = -\frac{4}{3}$
- c) $x = -6$
- d) $x = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) $a = 0$ i $b \neq 0$
- b) $a = b = 0$

5.3. Własności funkcji liniowej

Miejsce zerowe funkcji liniowej

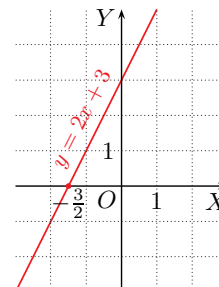
Przykład 1

Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej $y = 2x + 3$ (wykres obok).

Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji, rozwiążemy równanie:

$$\begin{aligned}2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Zatem miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$.



D Ćwiczenie 1

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

- a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a , b funkcja $f(x) = ax + b$:

- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 2

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).

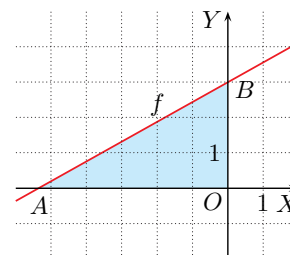
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f :

$$\frac{9}{16}x + 3 = 0 \text{ dla } x = -\frac{16}{3}. \text{ Zatem } |OA| = \frac{16}{3}.$$

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Symbolem $|OA|$ oznaczamy długość odcinka OA .

Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji f .

- a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$ d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

Ćwiczenie 4

Punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych oraz pole trójkąta:

- a) $(0, 4)$, $(-2, 0)$; $P = 4$
- b) $(0, 2)$, $(6, 0)$; $P = 6$
- c) $(0, -4)$, $(-8, 0)$; $P = 16$
- d) $(0, -5)$, $(3, 0)$; $P = 7,5$

Multibook

- Wykresy funkcji liniowych
- Monotoniczność funkcji liniowej
- Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator
testów i sprawdzianów

Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ax_1 &< ax_2 \\ax_1 + b &< ax_2 + b\end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę $a > 0$, zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.

Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.

Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX .

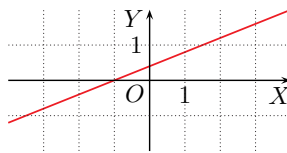
Ćwiczenie 5

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

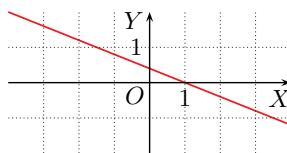
Wówczas:

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a < 0 \\ax_1 &> ax_2 \\ax_1 + b &> ax_2 + b\end{aligned}$$

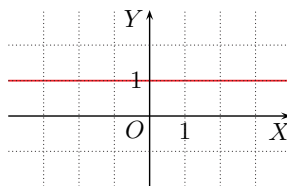
Oznacza to, że $f(x_1) > f(x_2)$, czyli f jest funkcją malejącą.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stałe tę samą wartość.

Ćwiczenie 6

- a) rosnąca
- b) malejąca
- c) rosnąca
- d) stała

Ćwiczenie 7

- a) $a < 0$ i $b > 0$
- b) $a > 0$ i $b < 0$
- c) $a < 0$ i $b < 0$

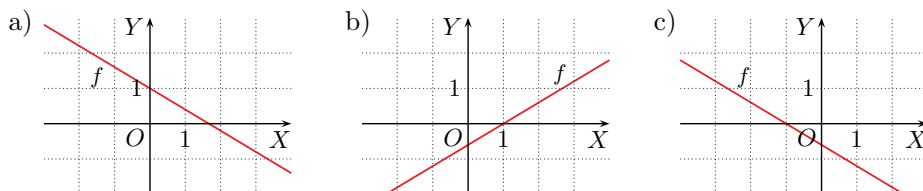
Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$
- b) $f(x) = 8 - 3x$
- c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$
- d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .

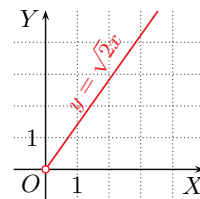


■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności** prostej.

Przykład 3

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



Ćwiczenie 8

- a) wprost proporcjonalne, $a = \frac{1}{3}Ob$
- b) odwrotnie proporcjonalne, $a = \frac{2P}{b}$
- c) wprost proporcjonalne, $Ob = 2\pi r$
- d) odwrotnie proporcjonalne, $d_1 = \frac{2P}{d_2}$

Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód.
- b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P .
- c) Obwód i promień okręgu.
- d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie uzupełnij poniższą tabelę. Naszkicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	3	6

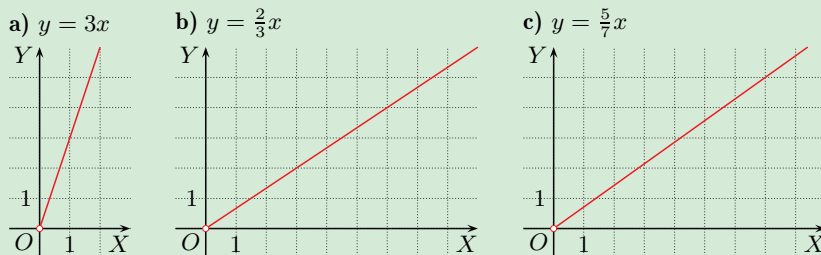
b)

x	1	1,8	3
y	$\frac{2}{3}$	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	7	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	10

Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 10

a) Samochód jedzie autostradą ze stałą prędkością. W półtorej godziny pokonał 165 km. Oblicz odległość, jaką ten samochód pokona w dwie i pół godziny.

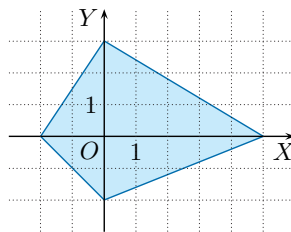
b) Samochód jadący ze stałą prędkością znalazł się 60 km od punktu początkowego o godzinie 13.00. O godzinie 15.24 był już od tego punktu oddalony o 252 km. Jak daleko od punktu początkowego był ten samochód o 16.00?

Dla ruchu ze stałą prędkością v przebyta droga s jest wprost proporcjonalna do czasu t :

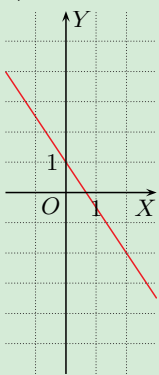
$$s = v \cdot t$$

Zadania

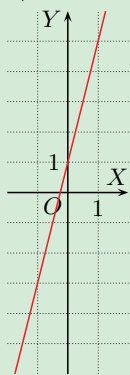
- Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta będąca wykresem funkcji f ?
 - $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$
 - $f(x) = 4x + 1$
 - $f(x) = -8x - 3$
 - $f(x) = 12x - 1$
 - $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 3$
 - $f(x) = -5$
- Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$ dla:
 - $m = \sqrt{3} - 2$,
 - $m = 5 - 2\sqrt{5}$,
 - $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
 - $f(x) = (5 - m)x$
 - $f(x) = (1 + 5m)x$
 - $f(x) = (|m| - 1)x$
- Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez podane punkty.
 - $(-8, 6)$ i $(4, 12)$
 - $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$
 - $(6, \sqrt{5})$ i $(10, \sqrt{5})$
 - $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$
 - $(-1, \frac{2}{3})$ i $(2, \frac{7}{12})$
 - $(\frac{2}{3}, -8)$ i $(\frac{3}{5}, -7)$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt:
 - $(0, 4)$ i która przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x < -6$,
 - $(0, -\frac{1}{2})$ i która przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x > 2$,
 - $(0, -2)$ i która przyjmuje wartości nieujemne tylko dla $x \leq -4$.
- Wyznacz wzory funkcji liniowych, w których wykresach zawierają się:
 - boki przedstawionego obok czworokąta,
 - boki czworokąta o wierzchołkach:
 $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.



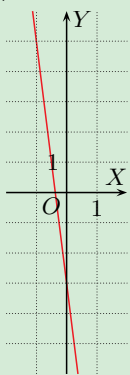
1. a) I, II, IV



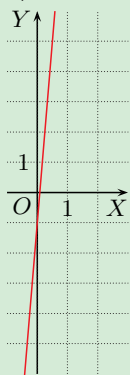
b) I, II, III



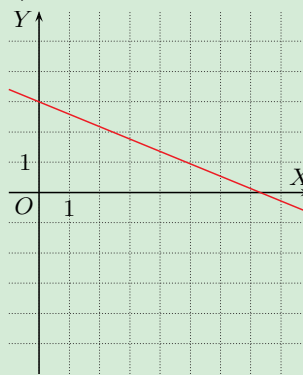
c) II, III, IV



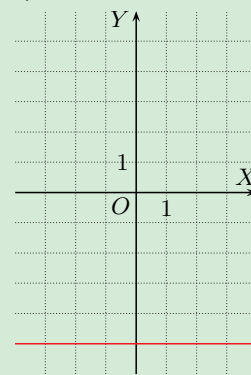
d) I, III, IV



e) I, II, IV



f) III, IV



Ćwiczenie 10

a) $v = \frac{165}{1,5} = 110$ [km/h]

Dla $t = 2,5$ h otrzymujemy
 $s = 2,5 \cdot 110 = 275$ [km].

b) $v = \frac{252 - 60}{15 \cdot \frac{24}{60} - 13} = \frac{192}{2,5} = 80$ [km/h]

Od godziny 13.00 do 16.00 samochód przejechał:

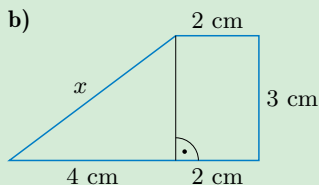
$$3 \cdot 80 = 240 \text{ [km]}$$

czyli o godzinie 16.00 był oddalony od punktu początkowego o $60 + 240 = 300$ [km].

Odpowiedzi do zadań

- malejąca
 - b), c) rosnąca
- rosnąca dla $m < 5$, stała dla $m = 5$, malejąca dla $m > 5$
 - rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$, stała dla $m = -\frac{1}{5}$, malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
 - rosnąca dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, stała dla $m \in \{-1, 1\}$, malejąca dla $m \in (-1; 1)$
- a), d) rosnąca
 - b), e), f) malejąca
 - c) stała
- a) $y = \frac{2}{3}x + 4$
 - b) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
 - c) $y = -\frac{1}{2}x - 2$
- a) $y = \frac{2}{5}x - 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 3$,
 $y = \frac{3}{2}x + 3$, $y = -x - 2$
 - b) $y = -\frac{3}{2}x - 72$, $y = 2x - 72$,
 $y = -4x + 144$, $y = 3x + 144$

7. a) $y = -x + 3$
 b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$
8. x – długość boku kwadratu
 a) Obwód kwadratu wyraża się wzorem $Ob = 4x$, więc długość boku i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi.
 b) Pole kwadratu wyraża się wzorem $P = x^2$. Iloraz $\frac{P}{x}$ nie jest stały, zatem pole kwadratu i długość jego boku nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi.
9. a) y – długość dłuższego boku działki
 $\frac{y}{6} = \frac{15}{2,5}$, stąd $y = 36$ [m]
 $Ob = 2(15 + 36) = 102$ [m]
 b)



- b) Ob_1 – obwód działki na planie,
 Ob_2 – obwód działki w rzeczywistości
 $x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ [cm]
 $Ob_1 = 6 + 3 + 2 + 5 = 16$ [cm]
 $Ob_2 = \frac{16}{2,5} \cdot 15 = 96$ [m], więc potrzeba 94 m bieżących siatki, czyli na ogrodzenie działki wystarczy 95 m bieżących siatki.
10. $\frac{x}{2000} = \frac{x+2}{3000}$, stąd:
 $3000x = 2000(x + 2)$
 $x = 4$
- Zatem:
 $k = \frac{4}{2000} = \frac{1}{500} = 1 : 500$
11. a) $(-2, 0)$, $(0, 6)$, rosnąca
 b) $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, -3)$, malejąca
 c) $(-6, 0)$, $(0, 3)$, rosnąca
 d) $(-3, 0)$, $(0, -2)$, malejąca

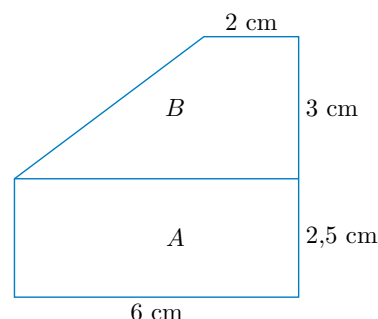
7. Wykres pewnej funkcji liniowej i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt równoramienny. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że:
 a) przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x > 3$,
 b) do jej wykresu należy punkt $(0, -4)$.

- D** 8. a) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi,
 b) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego pole nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi (mimo że wraz ze wzrostem długości boku kwadratu rośnie jego pole).

9. Przykładem wielkości wprost proporcjonalnych są odległość na mapie (planie) i odpowiadająca jej odległość w terenie. Na rysunku poniżej przedstawiono plan sąsiadujących ze sobą działek budowlanych A i B.

a) Działka A ma kształt prostokąta, którego krótszy bok ma długość 15 m. Oblicz obwód tej działki.

b) Działka B ma kształt trapezu prostokątnego. Czy na jej ogrodzenie wystarczy 95 m bieżących siatki, jeśli brama ma mieć szerokość 2 m?



Skala mapy (planu) to stosunek odległości na mapie do odpowiadających im odległości rzeczywistych.

10. Prostokątną działkę budowlaną o wymiarach $20 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ przedstawiono na planie w postaci prostokąta o wymiarach $x \text{ cm} \times (x + 2) \text{ cm}$. Wyznacz skalę tego planu.

Sprawdź się

11. Wyznacz punkty, w których prosta o podanym równaniu przecina osie układu współrzędnych. Naskicuj tę prostą i określ monotoniczność funkcji, której jest ona wykresem.
 a) $y = 3x + 6$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ d) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
12. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą:
 a) $y = -2x + 4$, b) $y = 3x - 6$, c) $y = -\frac{1}{4}x - 1$, d) $y = 6x + 3$.
13. Podaj wzór proporcjonalności prostej, do której wykresu należy punkt:
 a) $(2\frac{1}{2}, 15)$, b) $(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})$, c) $(3\frac{1}{2}, 2\frac{4}{5})$.

12. Punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych oraz pole trójkąta:

- a) $(2, 0)$, $(0, 4)$; $P = 4$
 b) $(2, 0)$, $(0, -6)$; $P = 6$
 c) $(-4, 0)$, $(0, -1)$; $P = 2$
 d) $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 3)$; $P = \frac{3}{4}$

13. a – współczynnik proporcjonalności prostej

- a) $a = \frac{15}{2\frac{1}{2}} = 6$; $y = 6x$
 b) $a = \frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$; $y = \frac{2}{3}x$
 c) $a = \frac{2\frac{4}{5}}{3\frac{1}{2}} = \frac{14}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{5}$; $y = \frac{4}{5}x$

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch różnych punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów } C \text{ i } D \\ \text{do równania } y = ax + b. \end{array}$$
$$\begin{cases} b = 2a + 1 \\ 3 = 4a + 2a + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Wyznaczamy } b \text{ z pierwszego równania} \\ \text{i podstawiamy do drugiego równania} \end{array}$$
$$\begin{cases} b = 2a + 1 \\ 6a = 2 \end{cases}$$

Stąd $a = \frac{1}{3}$ oraz $b = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, czyli równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

a) $C(-1, -5), D(3, 3)$ b) $C(-2, 4), D(8, -1)$ c) $C(-3, -3), D(6, 3)$

Przykład 2

Sprawdź, czy punkty $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$ i $C(6, 12)$ są współliniowe, czyli czy leżą na jednej prostej.

Równanie prostej AB zapisujemy w postaci $y = ax + b$ i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -1 = a \cdot (-1) + b \\ 5 = a \cdot 2 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów } A \text{ i } B \\ \text{do równania } y = ax + b. \end{array}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $a = 2$ i $b = 1$. Zatem równanie prostej AB ma postać $y = 2x + 1$. Współrzędne punktu C nie spełniają tego równania ($12 \neq 2 \cdot 6 + 1$), więc punkty A, B, C nie są współliniowe.

Uczeń:

- podaje równanie kierunkowe i ogólne prostej,
- zamienia równanie ogólne prostej, która nie jest równoległa do osi OY , na równanie w postaci kierunkowej (i odwrotnie),
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
- rysuje prostą opisaną równaniem ogólnym.

Ćwiczenie 1

- a) $y = 2x - 3$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$

Multibook

- Wykresy funkcji liniowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.4



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) Prosta AB : $y = \frac{1}{6}x + 1$
Podstawiamy współrzędne punktu C do równania prostej AB : $\frac{1}{6} \cdot 12 + 1 = 3$, czyli punkty A , B i C są współliniowe.
- b) Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x + 7$
 $-\frac{1}{2} \cdot (-2) + 7 = 8$, czyli punkty A , B i C są współliniowe.
- c) Prosta AB : $y = -2x + 2$
 $-2 \cdot 5 + 2 = -8 \neq -7$, czyli punkty A , B i C nie są współliniowe.
- d) Prosta AB : $y = 5$
 $5 \neq 2\sqrt{6}$, czyli punkty A , B i C nie są współliniowe.

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 3 i powrócić do definicji funkcji, aby ułatwić im odpowiedź na pytanie: „Dlaczego prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji?”.

Ćwiczenie 3

- a) Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 4, więc jej równanie ma postać $x = 4$. Prosta ta jest równoległa do osi OY , więc nie jest wykresem funkcji liniowej.
- b) Równanie prostej CD zapisujemy w postaci $y = ax + b$.
- $$\begin{cases} -5a + b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases}$$
- stąd $a = 1$, $b = 6$.
Prosta $y = x + 6$ jest wykresem funkcji liniowej.
- c) Równanie prostej CD : $x = \frac{1}{5}$. Prosta ta nie jest wykresem funkcji liniowej.

Ćwiczenie 2

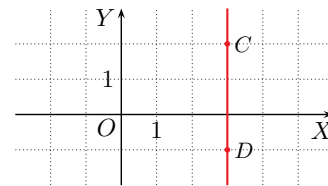
Sprawdź, czy punkty A , B , C są współliniowe.

- a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$ c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$ d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 3

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.



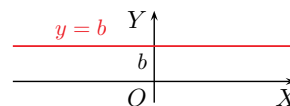
Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a) $C(4, -6)$, $D(4, 6)$ b) $C(-5, 1)$, $D(3, 9)$ c) $C(\frac{1}{5}, 9)$, $D(\frac{1}{5}, 7)$

Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 4

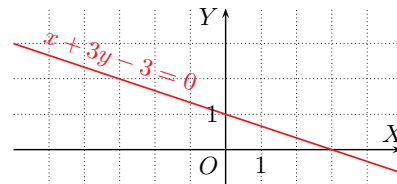
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

- a) $C(-5, -3)$, $D(7, -3)$ b) $C(4, \frac{1}{2})$, $D(8, \frac{1}{2})$ c) $C(-3, 4)$, $D(3, 6)$

Przykład 4

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Ćwiczenie 4

- a) Do prostej CD należą wszystkie punkty o drugiej współrzędnej równej -3 , więc jej równanie ma postać $y = -3$. Jest ona równoległa do osi OX .
- b) Równanie prostej CD : $y = \frac{1}{2}$.
- c) Równanie prostej CD zapisujemy w postaci $y = ax + b$.

$$\begin{cases} -3a + b = 4 \\ 3a + b = 6 \end{cases}$$

stąd $a = \frac{1}{3}$, $b = 5$. Prosta $y = \frac{1}{3}x + 5$ jest wykresem funkcji liniowej.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 5

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

a) $-x + 2y - 4 = 0$ b) $6x + 3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

I. $2x + y - 4 = 0$ II. $4x + 2y - 8 = 0$ III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

Ćwiczenie 6

Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

$l: -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$ $n: 9x - 12y + 12 = 0$ $p: 3x - 4y + 4 = 0$
 $m: -3x + 4y + 4 = 0$ $o: 6x - 8y + 12 = 0$ $r: -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

Przykład 5

Równanie kierunkowe prostej l ma postać $y = \frac{2}{3}x - 4$. Zapisz równanie ogólne tej prostej.

Równanie ogólne prostej l otrzymamy, przenosząc wszystkie wyrazy równania $y = \frac{2}{3}x - 4$ na jedną stronę:

$$\frac{2}{3}x - y - 4 = 0$$

Inne równania ogólne tej prostej to np. $-\frac{2}{3}x + y + 4 = 0$ lub $2x - 3y - 12 = 0$.

Ćwiczenie 7

Zapisz równanie prostej l w postaci ogólnej: $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C są liczbami całkowitymi.

a) $l: y = -\frac{1}{4}x + 3$ b) $l: y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$ c) $l: y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{7}$

Zadania

1. Sprawdź, czy punkt C należy do prostej AB .

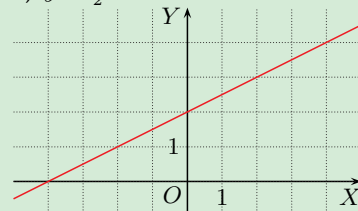
a) $A(1, 3), B(7, 4), C(13, 5)$ d) $A(-6, 3), B(4, 3), C(6, 4)$
 b) $A(9, 0), B(4, 5), C(0, 9)$ e) $A(3, 0), B(3, 7), C(3, \sqrt{6})$
 c) $A(-5, 4), B(-1, -4), C(2, 9)$ f) $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Odpowiedzi do zadań

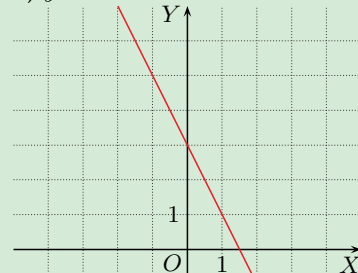
1. a) prosta $AB: y = \frac{1}{6}x + 2\frac{5}{6}$, C należy
 b) prosta $AB: y = -x + 9$, C należy
 c) prosta $AB: y = -2x - 6$, C nie należy
 d) prosta $AB: y = 3$, C nie należy
 e) prosta $AB: x = 3$, C należy
 f) prosta $AB: x = -\frac{1}{2}$, C nie należy

Ćwiczenie 5

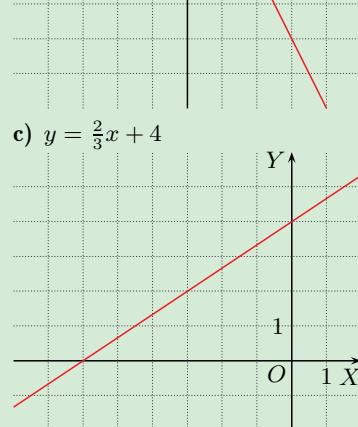
a) $y = \frac{1}{2}x + 2$



b) $y = -2x + 3$



c) $y = \frac{2}{3}x + 4$



Ćwiczenie 6

Równania: l, n, p, r opisują prostą $y = \frac{3}{4}x + 1$.

Ćwiczenie 7

a) $x + 4y - 2 = 0$
 b) $4x - 10y - 5 = 0$
 c) $35x + 21y - 6 = 0$

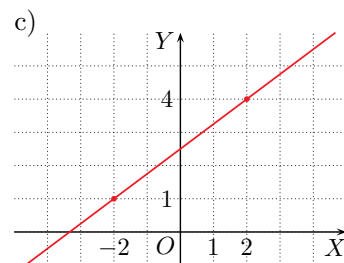
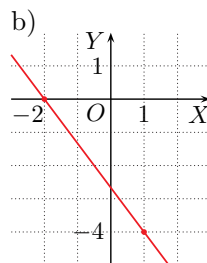
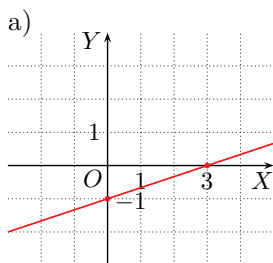
2. a) $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x - 3y - 3 = 0$,
nie należą
b) $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $4x + 3y + 8 = 0$,
nie należą
c) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$,
 $3x - 4y + 10 = 0$,
A należą, B nie należą

3. a) $(0, 2)$, $(-1, 0)$
b) $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
c) $(0, 4)$, $(-\frac{4}{3}, 0)$
d) $(0, -3)$, $(\frac{3}{2}, 0)$
e) $(0, -4)$, $(16, 0)$
f) $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
4. a) $AB: y + 1 = 0$,
 $DC: y - 2 = 0$,
 $AD: 3x - y + 5 = 0$,
 $BC: 3x - y - 10 = 0$
b) $AB: x + 2y + 2 = 0$,
 $DC: x + 2y - 4 = 0$,
 $AD: x + 2 = 0$, $BC: x - 2 = 0$
c) $AB: x - 3y - 2 = 0$,
 $DC: x - 3y + 6 = 0$,
 $AD: x + y + 2 = 0$,
 $BC: x + y - 6 = 0$

5. l , n , r oraz m , p

6. a) $2x - y - 5 = 0$
b) $3x + 4y - 24 = 0$
c) $y - 3 = 0$

2. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B(-3, \frac{8}{3})$ należą do tej prostej?



3. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $2x - y + 2 = 0$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

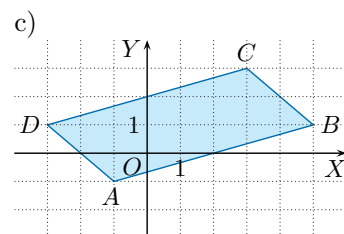
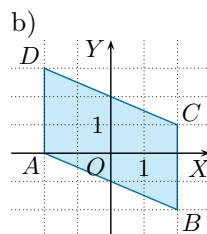
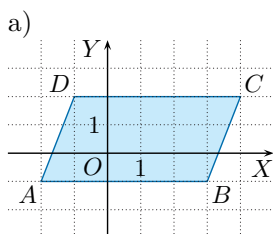
e) $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$

b) $10x + 5y - 5 = 0$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$

f) $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

4. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.



Sprawdź się

5. Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

$l: -2x + 4y + 6 = 0$

$n: x - 2y - 3 = 0$

$p: -6x - 8y + 4 = 0$

$m: 3x + 4y - 2 = 0$

$o: -2x + 4y - 6 = 0$

$r: -3x + 6y + 9 = 0$

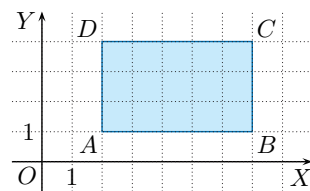
6. Zapisz w postaci ogólnej równanie prostej przechodzącej przez punkt $(4, 3)$ i przecinającej oś OY w podanym punkcie.

a) $(0, -5)$

b) $(0, 6)$

c) $(0, 3)$

7. Dany jest prostokąt $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki oraz przekątne tego prostokąta.



7. $AD: x = 2$, $BC: x = 7$, $AB: y = 1$, $DC: y = 4$,
 $AC: y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$, $BD: y = -\frac{3}{5}x + 5\frac{1}{5}$

5.5. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

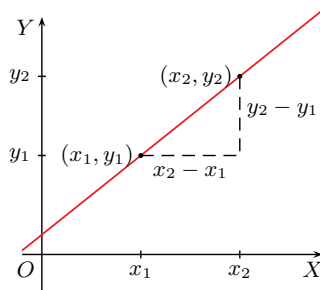
Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uwaga:
 $x_1 \neq x_2$



Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B .

- a) $A(3, 7)$, $B(9, 12)$ b) $A(3, 5)$, $B(-7, -5)$ c) $A(12, -2)$, $B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S ?

- a) $R(0, 6)$, $S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4)$, $S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2})$, $S(8, 2)$

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

Ćwiczenie 3

$$a_{AB} = \frac{1}{3} = a_{CD}, \quad a_{BC} = -2 = a_{DA}$$

Proste AB , CD oraz BC , DA są parami równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Uczeń:

- oblicza współczynnik kierunkowy prostej, mając dane współrzędne dwóch punktów należących do tej prostej,
- szkicuje prostą, wykorzystując interpretację współczynnika kierunkowego,
- odczytuje wartość współczynnika kierunkowego, mając dany wykres,
- wyprowadza wzór na współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

Ćwiczenie 1

- a) $a = \frac{12-7}{9-3} = \frac{5}{6}$
b) $a = \frac{-5-5}{-7-3} = 1$
c) $a = \frac{8+2}{6-12} = -\frac{5}{3}$

Ćwiczenie 2

- $a_{PQ} = \frac{3}{2}$
a) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest
b) $a_{RS} = 1$, nie jest
c) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest

Multibook

- Wyznaczanie współczynnika kierunkowego prostej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.5

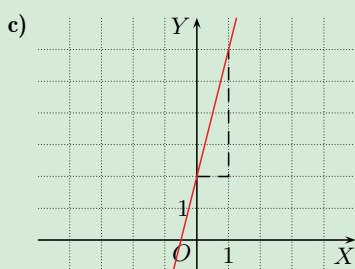
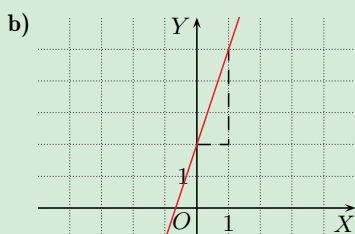
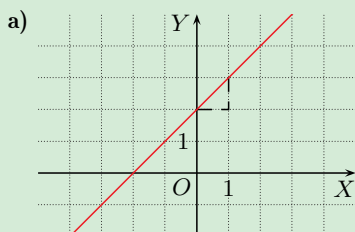
Generator
testów i sprawdzianów

Komentarz

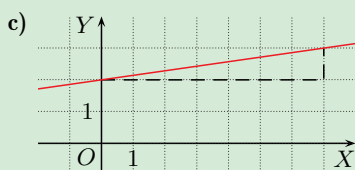
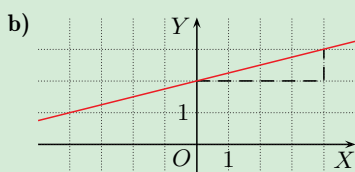
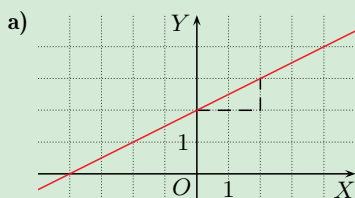
Warto uświadomić uczniom, że wykres funkcji liniowej łatwiej jest narysować, kiedy rozumie się, co oznacza współczynnik kierunkowy.

Wystarczy wtedy znać współrzędne jednego punktu należącego do wykresu (np. punktu przecięcia z osią OY).

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Interpretacja geometryczna współczynnika kierunkowego

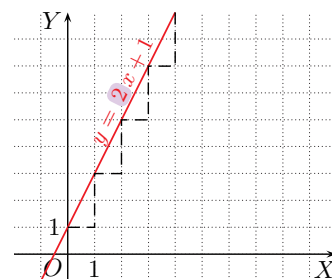
Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”.

Przykład 2

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = 2x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = x + 2$

b) $y = 3x + 2$

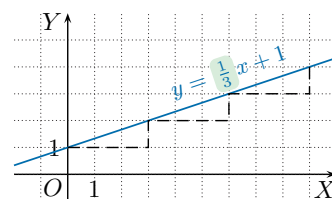
c) $y = 4x + 2$

Przykład 3

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o $\frac{1}{3}$ jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 1 jednostkę).



Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$

b) $y = \frac{1}{4}x + 2$

c) $y = \frac{1}{7}x + 2$

Przykład 4

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

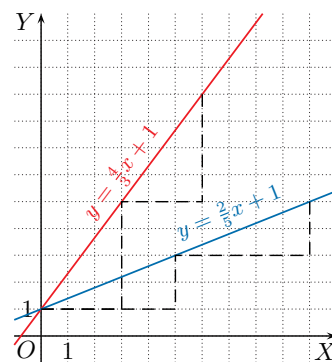
$$y = \frac{4}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o $\frac{4}{3}$ jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 4 jednostki).

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{2}{5}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 5 jednostek odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



Ćwiczenie 6

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{5}{3}x - 2$ b) $y = \frac{3}{4}x - 2$ c) $y = \frac{3}{5}x - 2$

Jeśli prosta będąca wykresem funkcji liniowej ma ujemny współczynnik kierunkowy, to ze wzrostem argumentu funkcji maleje jej wartość.

Przykład 5

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

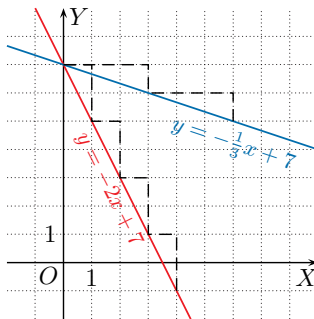
$$y = -2x + 7$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada spadek wartości funkcji o 2 jednostki.

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada spadek wartości funkcji o 1 jednostkę.



Ćwiczenie 7

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = -3x + 4$ b) $y = -4x + 4$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ d) $y = -\frac{1}{4}x + 4$

Ćwiczenie 8

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ b) $y = -\frac{2}{5}x - 3$ c) $y = -\frac{3}{7}x - 3$ d) $y = -\frac{4}{7}x - 3$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej PQ o równaniu $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

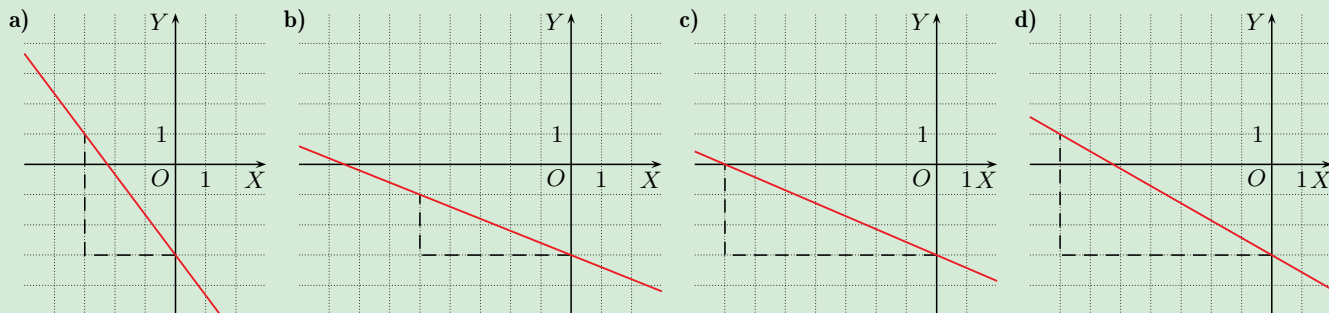
Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów P lub Q . Dla $P(3, -7)$ otrzymujemy: $-7 = -2 \cdot 3 + b$, stąd $b = -1$. Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

Ćwiczenie 9

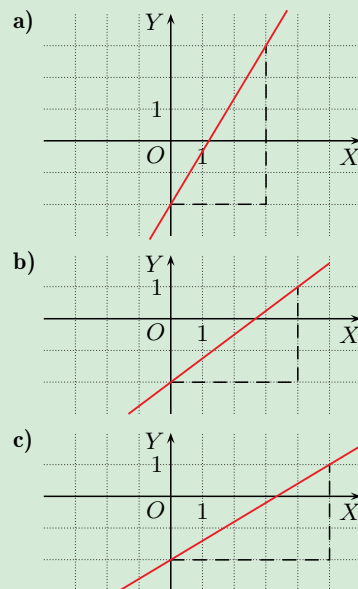
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

a) $P(4, 5), Q(-4, 9)$ b) $P(4, -13), Q(2, -7)$ c) $P(3, 3), Q(1, \frac{7}{3})$

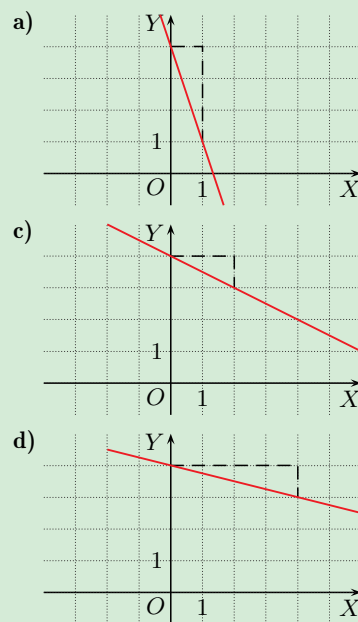
Ćwiczenie 8



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



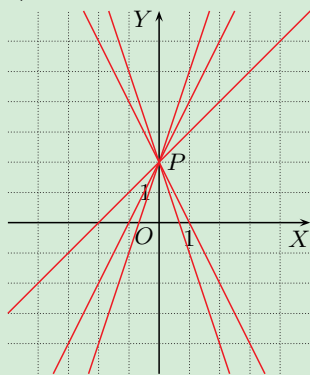
Ćwiczenie 9

a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = -3x - 1$
c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

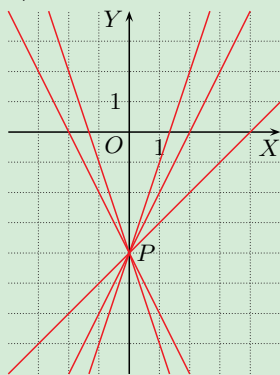
Odpowiedzi do zadań

- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: -\frac{1}{3}$, $BC: 3$, $AC: \frac{1}{2}$
- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: \frac{1}{2}$, $BC: -1$, $CD: -\frac{1}{5}$, $AD: -6$
- a) $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = -12x + 5$
d) $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
e) $y = -6$
f) $y = \sqrt{3}x + 1$
- a) $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$,
 $AD: y = 2x + 6$,
 $BC: y = 2x - 6$,
 $CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
b) $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$,
 $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7$,
 $CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
- a) $PQ \parallel RS$: $\frac{2}{3}$, QR : $-\frac{10}{3}$,
 PS : $-\frac{4}{3}$
 $PQ \parallel RS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
b) PQ : $-\frac{7}{2}$, RS : $\frac{5}{3}$,
 QR i PS : $-\frac{2}{5}$
 $QR \parallel PS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
- a) $a_{AB} = 2$, $a_{AC} = -2$,
 $a_{BC} = \frac{2}{5}$
największy: a_{AB} ,
najmniejszy: a_{AC}
b) $a_{AB} = \frac{1}{3}$, $a_{AC} = \frac{1}{2}$,
 $a_{BC} = 1$
największy: a_{BC} ,
najmniejszy: a_{AB}

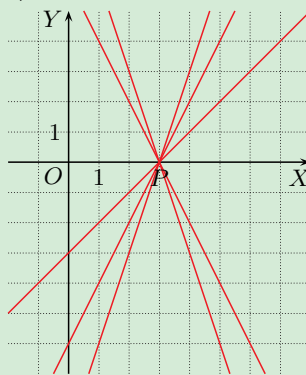
6. a)



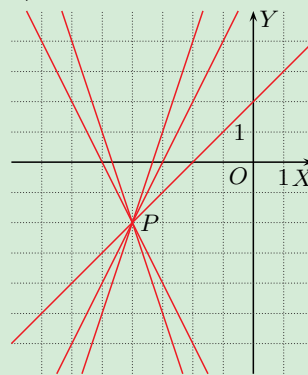
b)



c)



d)

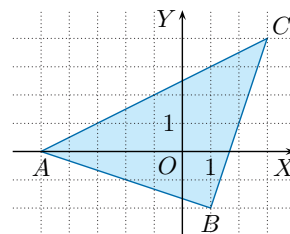


Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających jego boki.
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie $A(-4, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$, $D(-5, 4)$.
- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .
a) $P(3, 4)$, $Q(7, 6)$ c) $P(\frac{1}{3}, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, -1)$ e) $P(-2, -6)$, $Q(8, -6)$
b) $P(-2, 7)$, $Q(2, -1)$ d) $P(3, \frac{7}{3})$, $Q(2, \frac{1}{3})$ f) $P(\sqrt{3}, 4)$, $Q(3\sqrt{3}, 10)$
- Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że jest on równoległobokiem.
a)
b)
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem i nie jest równoległobokiem.
a) $P(0, -5)$, $Q(9, 1)$, $R(6, 11)$, $S(-6, 3)$
b) $P(-8, 5)$, $Q(-6, -2)$, $R(4, -6)$, $S(7, -1)$

Sprawdź się

- Naszkicuj proste o współczynnikach kierunkowych 1, 2, 3, -2 i -3, przecinające się w punkcie P .
a) $P(0, 2)$ b) $P(0, -4)$ c) $P(3, 0)$ d) $P(-4, -2)$
- Podaj, który ze współczynników kierunkowych prostych zawierających boki trójkąta ABC jest największy, a który – najmniejszy.
a) $A(0, -2)$, $B(3, 4)$, $C(-2, 2)$ b) $A(6, 3)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -1)$



Nachylenie trasy

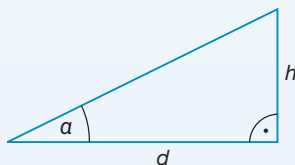
Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej nachyleniu, o tym, jak bardzo ta prosta jest „stroma”.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach.

Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45°, a nachylenie 10% – kątowi około 6°.

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38°.

- 1** Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.

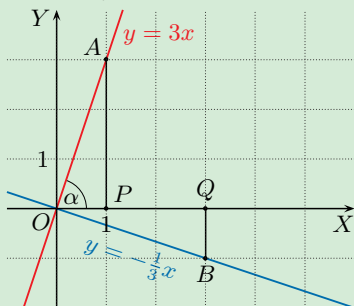


Uczeń:

- podaje warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- wyznacza równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt,
- uzasadnia warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań.

Ćwiczenie 1

a) Punkt $A(1, 3)$ należy do prostej $y = 3x$, a punkt $B(3, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{3}x$. Niech $P(1, 0)$ i $Q(3, 0)$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.



Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\begin{aligned} |\sphericalangle OBQ| &= \alpha \\ |\sphericalangle BOQ| &= 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AOB| &= \\ &= |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ \end{aligned}$$

Zatem proste $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ są prostopadłe.

Multibook

- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.6



5.6. Warunek prostopadłości prostych

Przykład 1

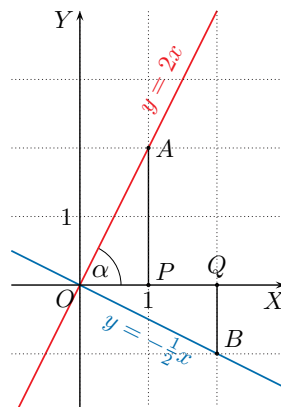
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO mamy: $|\sphericalangle OBQ| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle BOQ| = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AOB| &= |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ \end{aligned}$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Symbolem $|\sphericalangle AOB|$ oznaczamy miarę kąta AOB .

Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie 1., że podane proste są prostopadłe.

a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \quad (\text{czyli } a_1 \cdot a_2 = -1)$$

Przykład 2

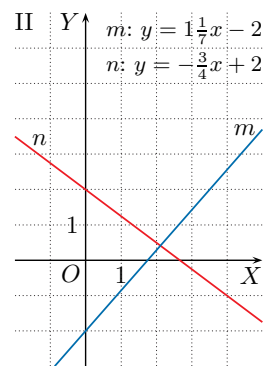
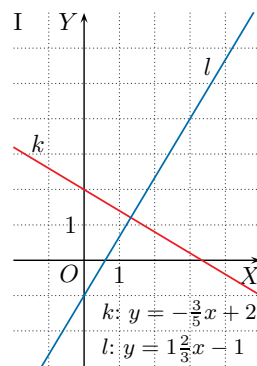
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.



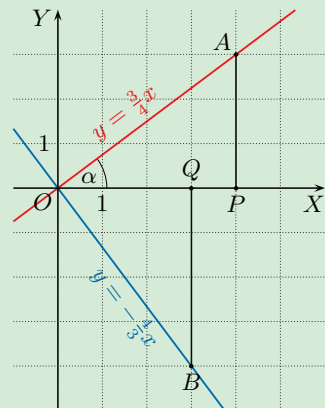
b) Punkt $A(4, 3)$ należy do prostej $y = \frac{3}{4}x$, a punkt $B(3, -4)$ do prostej $y = -\frac{4}{3}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$|\sphericalangle OBQ| = \alpha \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle BOQ| = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

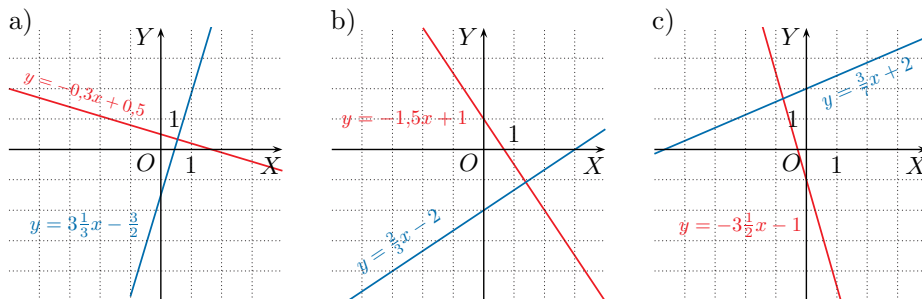
Zatem proste $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ są prostopadłe.





Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



Przykład 3

Prosta k jest prostopadła do prostej $y = \frac{2}{3}x - 4$. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k .

Oznaczmy przez a współczynnik kierunkowy prostej k . Wówczas:

$$a = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

D Ćwiczenie 4

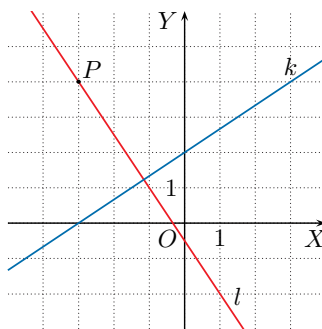
Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych liczb b_1, b_2 prostopadłe są też proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2, P(0, -1)$ b) $y = -0,1x, P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9, P(3, 2)$

Ćwiczenie 1

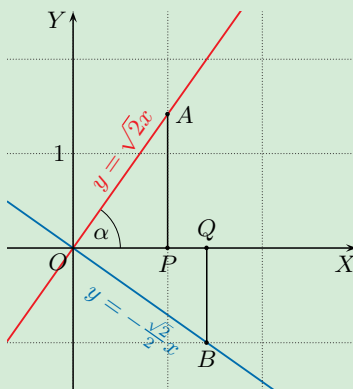
c) Punkt $A(1, \sqrt{2})$ należy do prostej $y = \sqrt{2}x$, a punkt $B(\sqrt{2}, -1)$ do prostej $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $|\angle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$|\angle OBQ| = \alpha \text{ oraz } |\angle BOQ| = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$|\angle AOB| = |\angle AOP| + |\angle BOQ| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

- a) $a_1 = -\frac{3}{10}, a_2 = \frac{10}{3}, a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3} = -1$ – proste są prostopadłe
- b) $a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$ – proste są prostopadłe
- c) $a_1 = \frac{3}{7}, a_2 = -\frac{7}{2}, a_1 \cdot a_2 = \frac{3}{7} \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{3}{2} \neq -1$ – proste nie są prostopadłe

Ćwiczenie 3

- a) -5
b) $-\frac{1}{9}$
c) $\frac{3}{7}$
d) $-3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Prostopadłość prostych uzależniona jest od współczynników kierunkowych. Z prostopadłości prostych $y = a_1x$ i $y = a_2x$ wynika, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, zatem dla dowolnych współczynników b_1, b_2 proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe.

Ćwiczenie 5

- a) $y = \frac{1}{3}x - 1$
b) $y = 10x - 1$
c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$



Przykład 5

Miejscem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l .

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 6

- a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
- b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
- c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

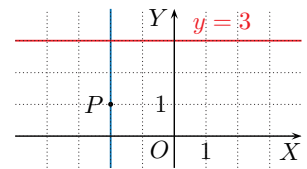
Miejscem zerowym funkcji liniowej jest liczba -2 . Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

- a) $3x + 2y + 6 = 0$
- b) $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$
- c) $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 7

- a) $x = 6$
- b) $y = -5$
- c) $y = -5$

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = -3$
- b) $x = -3$
- c) $x = -2\sqrt{3}$

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = \frac{1}{3}x - 3$
- b) $y = -\frac{3}{2}x + 7$
- c) $y = \frac{3}{4}x + 1$
- d) $y = -\frac{2}{7}x$

1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

- a) $l: y = -3x + 1, P(3, -2)$
- b) $l: y = \frac{2}{3}x - 3, P(4, 1)$
- c) $l: y = -\frac{4}{3}x + 11, P(-4, -2)$
- d) $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3, P(14, -4)$

2. Wyznacz równania prostych AB , AC i BC . Czy trójkąt ABC jest prostokątny?

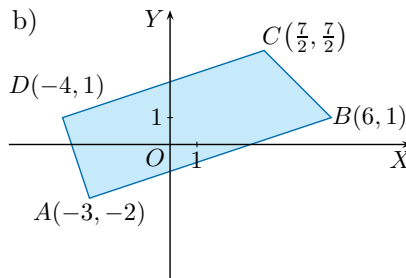
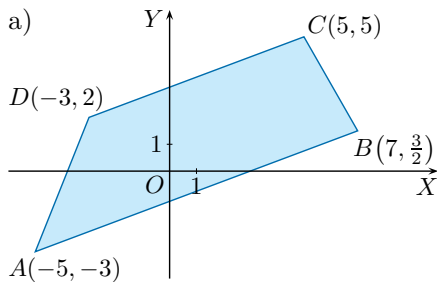
- a) $A(1, 5), B(4, 2), C(7, 5)$
- b) $A(-2, -1), B(0, -3), C(4, 5)$
- c) $A(-7, -2), B(8, -2), C(-2, 3)$
- d) $A(4\frac{1}{2}, 6), B(-2, -\frac{1}{2}), C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

3. Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.

- a) $A(-2, -6), B(5, -3), C(8, 4)$
- b) $A(-1, -2), B(6, -1), D(-6, 3)$

2. a) $AB: y = -x + 6, BC: y = x - 2, AC: y = 5$, jest
- b) $AB: y = -x - 3, BC: y = 2x - 3, AC: y = x + 1$, jest
- c) $AB: y = -2, BC: y = -\frac{1}{2}x + 2, AC: y = x + 5$, nie jest
- d) $AB: y = x + \frac{3}{2}, BC: y = -\frac{1}{2}, AC: x = 4\frac{1}{2}$, jest
3. a) $AC: y = x - 4, BD: y = -x + 2$
- b) $AC: y = 3x + 1, BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$

- D 4.** Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?



- D 5.** Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- a) $P(-5, 0)$, $Q(-1, -6)$, $R(8, 0)$, $S(4, 6)$
 b) $P(-8, -2)$, $Q(6, -8)$, $R(9, -1)$, $S(-5, 5)$

- D 6.** Punkty $A(0, 0)$ i $C(2, 8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.

7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek BC jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A tego trójkąta.

- a) $B(-2, -8)$, $C(-2, 4)$ b) $B(-6, -8)$, $C(-6, 7)$

8. Proste prostopadłe l_1 i l_2 przecinają się w punkcie $(2, 4)$, a jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6, 0)$.

- a) Wyznacz równania prostych l_1 i l_2 .
 b) O ile procent jest większe pole trójkąta ograniczonego prostymi l_1 , l_2 i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY ?

Sprawdź się

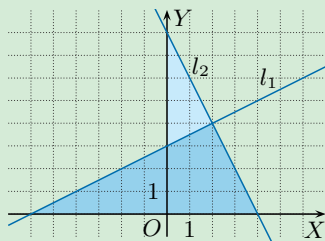
9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $P(6, -2)$.

- a) $l: y = -2x + 4$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 6$ e) $l: 3x + y - 3 = 0$
 b) $l: y = 3x - 1$ d) $l: y = 1,5x - 2,5$ f) $l: x + 2y - 3 = 0$

10. Punkty A , B , C są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz równania prostych zawierających jego boki.

- a) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, $C(6, 3)$ b) $A(-15, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(0, 3)$

8. a) $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$, $l_2: y = -2x + 8$
 b)



$$P_{OX} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

$$P_{OY} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$

$P_{OX} = 4P_{OY}$, czyli P_{OX} jest większe od P_{OY} o 300%.

9. a) $y = \frac{1}{2}x - 5$ b) $y = -\frac{1}{3}x$
 c) $y = \frac{3}{2}x - 11$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 2$
 e) $y = \frac{1}{3}x - 4$ f) $y = 2x - 14$

10. a) $AB: y = -x - 1$, $BC: y = x - 3$,
 $CD: y = -x + 9$, $AD: y = x + 3$
 b) $AB: y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$, $BC: y = 2x + 3$,
 $CD: y = -\frac{1}{2}x + 3$, $AD: y = 2x + 33$

4. a) $a_{AB} = \frac{4,5}{12} = \frac{3}{8} = a_{DC}$,
 czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 $a_{BC} = \frac{-3,5}{2} = -\frac{7}{4} \neq -\frac{8}{3}$,
 czyli trapez nie jest prostokątny.

- b) $a_{AB} = \frac{1}{3} = \frac{2,5}{7,5} = a_{DC}$,
 czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 $a_{AD} = \frac{3}{-1} = -3$, czyli trapez jest prostokątny.

5. a) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{2}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.

$a_{QR} = a_{SP} = \frac{2}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.
 $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.

Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- b) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{7}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.

$a_{QR} = a_{SP} = \frac{7}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.
 $-\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.

Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

6. Przekątna AC : $y = 4x$ jest prostopadła do przekątnej BD , zatem prostokąt $ABCD$ jest kwadratem. Niech a będzie długością jego boku.

$$|AC| = 2\sqrt{17} = a\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{34}$$

$$Ob = 4\sqrt{34}, P = 34$$

7. a) Wierzchołek C należy do przeciwprostokątnej.

Prosta BC : $x = -2$,

prosta AB : $y = -8$.

Współrzędne wierzchołka A : $(-6, -8)$.

- b) Wierzchołek B należy do przeciwprostokątnej.

Prosta BC : $x = -6$,

prosta AC : $y = 7$.

Współrzędne wierzchołka A : $(-1, 7)$.

Odpowiedzi do zadań

- a) tak
b), c), d) nie
- a) (3, 4)
b) (2, -4)
c) (-3, 2)
d) (-4, 3)
e) (3, 5)
f) (-3, -6)
- a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 / \cdot 2 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases}$$
$$\hline 0 = 14$$

b)
$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x + y = 2 / \cdot 6 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} -2x + 6y = 12 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$$
$$\hline 0 = 4$$

c)
$$\begin{cases} -4x + 9y = -12 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = -2 / \cdot 6 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} -4x + 9y = -12 \\ 4x - 9y = -12 \end{cases}$$
$$\hline 0 = -24$$
- a) np. (0, -4), (1, -1), (2, 2)
b) np. (-6, 0), (-5, 2), (0, 12)
c) np. (-3, 0), (3, 1), (9, 2)
- I.
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 / \cdot 5 \\ 2x + 5y - 8 = 0 / \cdot (-4) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 15x + 20y + 10 = 0 \\ -8x - 20y + 32 = 0 \end{cases}$$
$$\hline 7x + 42 = 0$$

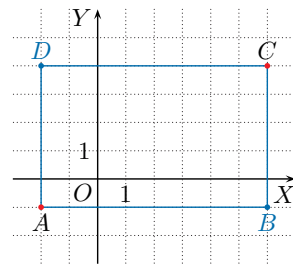
Zatem $x_1 = -6$.
II.
$$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 / \cdot 2 \\ -5x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 6x - 2y + 12 = 0 \\ -5x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\hline x + 6 = 0$$

Zatem $x_2 = -6$, czyli
 $x_1 = x_2$.

Przypomnij sobie

Układy równań

- Czy wskazana para liczb (x, y) spełnia podany układ równań?
a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + y = -5 \end{cases}, (2, 1)$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 10x - \frac{7}{2}y = 13 \end{cases}, (4, 5)$
b) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + y = 7 \\ 2x + \frac{3}{4}y = -3 \end{cases}, (-3, 4)$ d) $\begin{cases} 6x - y = 32 \\ -5x - 2y = -36 \end{cases}, (4, -8)$
- Wyznacz parę liczb (x, y) spełniającą podany układ równań.
a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4x + \frac{1}{2}y = -10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 5 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - \frac{3}{2}y + 3 = 0 \end{cases}$
- D 3. Uzasadnij, że podany układ równań jest sprzeczny.
a) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + y = 2 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4x + 9y = -12 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = -2 \end{cases}$
- D 4. Uzasadnij, że podany układ równań jest nieoznaczony. Podaj trzy pary całkowitych liczb (x, y) spełniających ten układ.
a) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -6x + 2y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ 2x - y = -12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + 2y = 1 \\ x - 6y = -3 \end{cases}$
- D 5. Para liczb (x_1, y_1) spełnia układ równań I, a para liczb (x_2, y_2) spełnia układ równań II. Uzasadnij, że $x_1 = x_2$.
I. $\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 \\ 2x + 5y - 8 = 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ -5x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$
- Para liczb (x_1, y_1) spełnia układ równań I, a para liczb (x_2, y_2) spełnia układ równań II.
I. $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ \frac{1}{2}x - y = 4 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -2x + \frac{1}{2}y = 6 \end{cases}$
Czy czworokąt, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty $A, B(x_1, y_1), C$ i $D(x_2, y_2)$, jest prostokątem?



- I.
$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ \frac{1}{2}x - y = 4 / \cdot (-2) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} x + 3y = 3 \\ -x + 2y = -8 \end{cases}$$
$$\hline 5y = -5$$

Stąd $y_1 = -1$ oraz $x_1 = 6$,
więc $B(-6, 1)$.
Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.
- II.
$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -2x + \frac{1}{2}y = 6 / \cdot (-2) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 3x + y = -2 \\ 4x - y = -12 \end{cases}$$
$$\hline 7x = -14$$

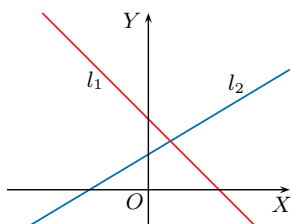
Stąd $x_2 = -2$ oraz $y_2 = 4$,
więc $D(-2, 4)$.

5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

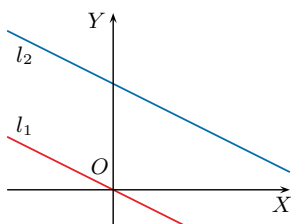
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

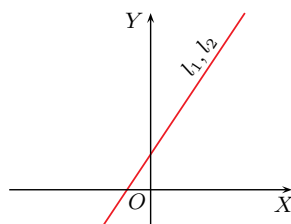
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ spreczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste się pokrywają.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań:

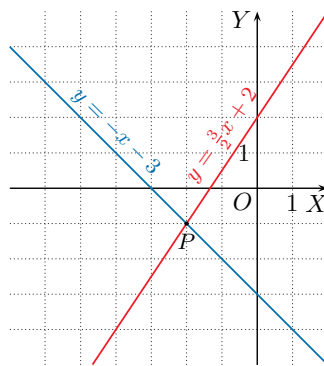
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Przekształcamy równania układu do postaci kierunkowej:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.

Rozwiązaniem układu jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).



Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

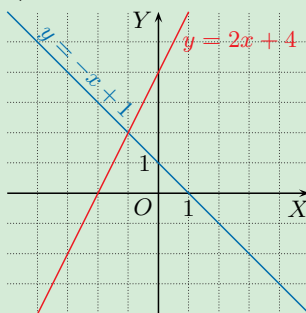
a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$

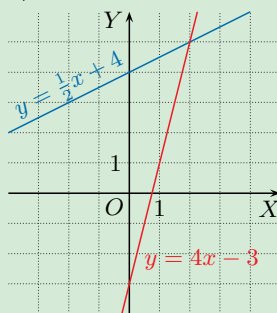
c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 1

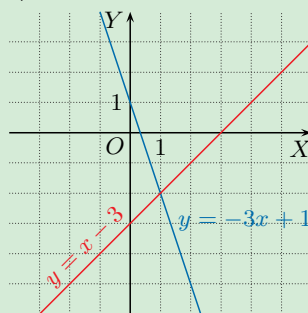
a) $x = -1$, $y = 2$



b) $x = 2$, $y = 5$



c) $x = 1$, $y = -2$



Uczeń:

- interpretuje geometrycznie układ równań,
- rozwiązuje układ równań metodą algebraiczną i graficzną,
- wyjaśnia związek między liczbą rozwiązań układu równań a położeniem prostych.

Multibook

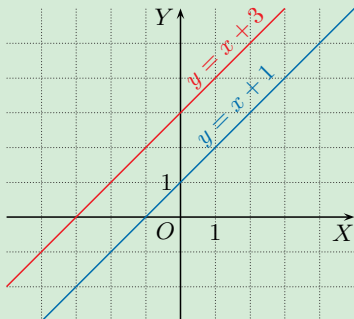
- Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

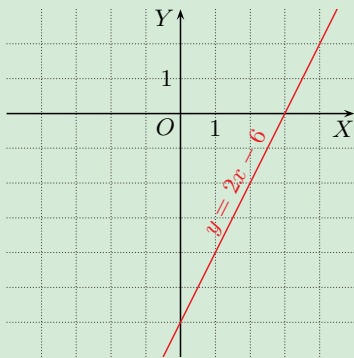
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

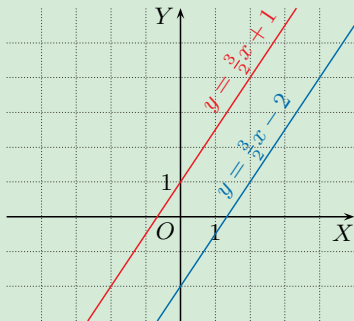
a) Układ sprzeczny



b) Układ nieoznaczony – rozwiązaniami są pary liczb postaci: $(x, 2x - 6)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.



c) Układ sprzeczny



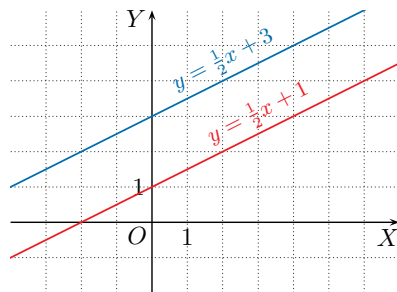
Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.



Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań:

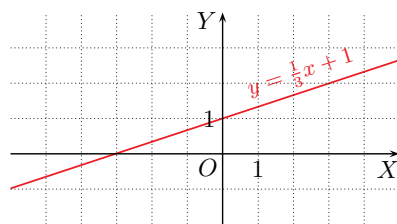
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $(x, \frac{1}{3}x + 1)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, bez rozwiązywania układu równań, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

a) sprzeczny

b) nieoznaczony

c) oznaczony

Zadania

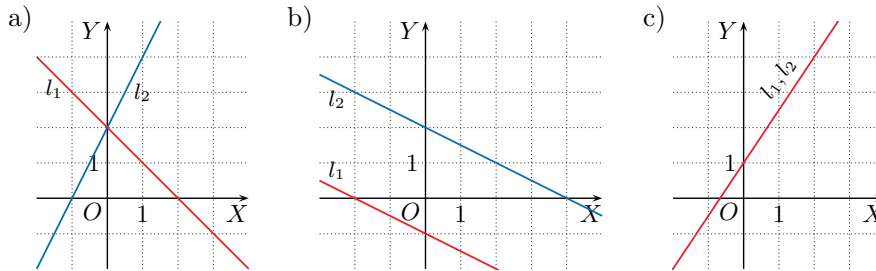
1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases} \end{array}$$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki a_1, a_2, b_1, b_2 , aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

$$\begin{array}{l} \text{a)} y = x - 2, y = x - 6, y + 3 = 0, y - 2 = 0 \\ \text{b)} y = \frac{1}{2}x + 3, y = \frac{1}{2}x - 2, y = -2x - 7, y = -2x + 8 \\ \text{c)} 3x - y = -2, 3x - y = 4, x - 2y = 6, x - 2y = -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{3. a) np. } \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases} & \text{b) np. } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases} & \text{c) np. } \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases} \end{array}$$

4. a) $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$
 b) $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$
 c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne

5. a) $A(-1, -3), B(3, -3), C(8, 2), D(4, 2)$
 b) $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$
 c) $A(-2, -4), B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}), C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5}), D(2, 8)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}$

$x = 3, y = 4$

b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\frac{3}{4}x - 3 \end{cases}$

$x = 4, y = -6$

c) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 2 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

$x = 2, y = 1$

d) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$

$x = 1, y = 6$

e) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$

Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbb{R}, y = \frac{2}{3}x - 2$

f) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 3 \\ y = -\frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$

Układ sprzeczny

2. a) $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$

$x = 3, y = 0$

b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$

$x = 3, y = 4$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$

$x = 2, y = 0$

d) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

$x = 1, y = 4$

e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ y = 6x + 3 \end{cases}$

Układ sprzeczny

f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

6. Równanie prostej zawierającej czwarty bok trapezu ma postać $y = -3x + b$ i prosta przechodzi przez wierzchołek $B(6, 0)$, czyli $y = -3x + 18$.

Punkt przecięcia prostych $y = \frac{1}{3}x - 2$ i $y = 2x + 3$:

$$A(-3, -3).$$

Punkt przecięcia prostych

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ i } y = -3x + 18:$$

$$C(5, 3).$$

Punkt przecięcia prostych

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ i } y = 2x + 3:$$

$$D(-1, 1).$$

7. a) $P(-1, 3)$,

$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

$$b) Q(3\frac{1}{2}, 0),$$

$$P_{ABQD} = P_{ABCD} - P_{CDQ} = 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 27$$

9. a) $x = -1, y = -3$

$$b) x = 1, y = 0$$

$$c) x = -1, y = 2$$

10. a) $x = -3, y = 4$

$$(-3)^2 + 4^2 = 25$$

Nie spełnia warunku.

$$b) x = 4, y = 2$$

$$4^2 + 2^2 = 20 < 25$$

Spełnia warunek.

$$c) x = -2, y = -3$$

$$(-2)^2 + (-3)^2 = 13 < 25$$

Spełnia warunek.

$$d) x = 4, y = -4$$

$$4^2 + (-4)^2 = 32 > 25$$

Nie spełnia warunku.

11. a) l_1 i l_3

$$b) l_1 \text{ i } l_2$$

12. $l_3: y = x - 3$

Rozwiązaniem jest prosta

postaci $y = x + b$,

gdzie $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

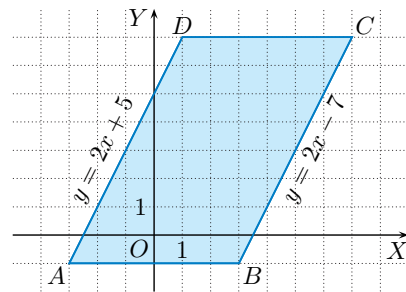
Na przykład: $y = x$.

6. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

7. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).

a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP .

b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.



8. a) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych $x + y = 0$, $x - y = 0$ i $y = 3$, ma pole równe polu trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(9,0)$.

b) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych $2x - y = 0$, $y - x - 2 = 0$ i $y + 2 = 0$, ma pole równe połowie pola równoległoboku o wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(4, -1)$, $C(6, 2)$, $D(0, 2)$.

Sprawdź się

9. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$a) \begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

10. Sprawdź, czy współrzędne punktu $P(x, y)$, który jest punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 , spełniają warunek $x^2 + y^2 < 25$.

$$a) l_1: y = -x + 1, l_2: y = \frac{1}{3}x + 5$$

$$c) l_1: y = 2x + 1, l_2: y = 4x + 5$$

$$b) l_1: y = x - 2, l_2: y = -\frac{1}{2}x + 4$$

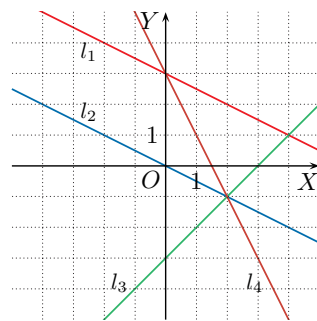
$$d) l_1: y = -\frac{1}{2}x - 2, l_2: y = -2x + 4$$

11. Która para prostych na rysunku obok przedstawia interpretację geometryczną układu równań?

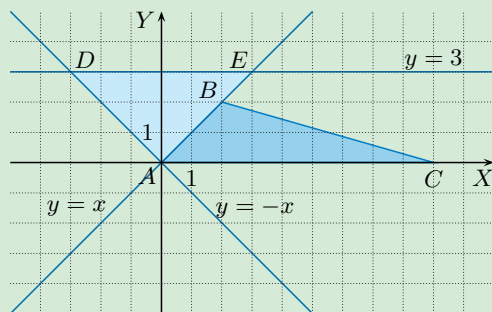
$$a) \begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$$

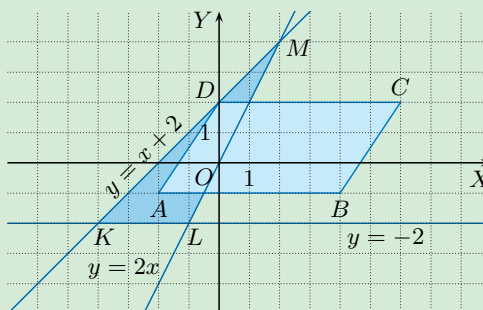
12. Podaj równanie dowolnej prostej, które wraz z równaniem prostej l_3 (rysunek obok) tworzy układ sprzeczny.



8. a) $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 = 9$, $P_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$,
czyli $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADE}$.



- b) $\frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$, $P_{\triangle KLM} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$,
czyli $\frac{1}{2}P_{ABCD} = P_{\triangle KLM}$



5.8. Funkcja liniowa – zastosowania

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 1500 + 12x$, gdzie $D_f = \mathbb{N}$, opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat, produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

a) Narysuj wykres funkcji f .

b) Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?

Dochód ze sprzedaży:

$$1800 \cdot 37 = 66\,600 \text{ [zł]}$$

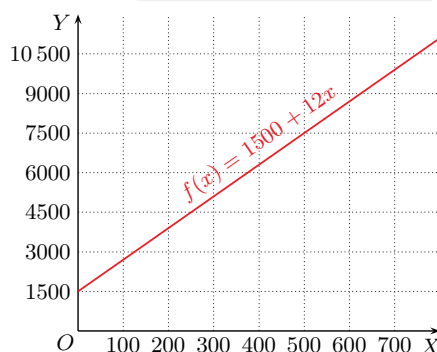
Koszty po 6 miesiącach:

$$6 \cdot 1500 + 12 \cdot 1800 = 30\,600 \text{ [zł]}$$

Półroczny zysk:

$$66\,600 - 30\,600 = 36\,000 \text{ [zł]}$$

zysk = dochód – koszty



Ćwiczenie 1

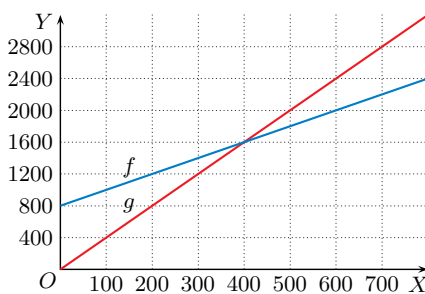
W firmie opisanej w przykładzie 1. podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, przy czym koszt wyprodukowania takiego krasnala wyniósł 20 zł (koszty stałe pozostały bez zmian). Narysuj wykres funkcji g opisującej obecne miesięczne koszty tej firmy.

Ćwiczenie 2

Funkcja $f(x) = 2x + 800$, gdzie $D_f = \mathbb{N}$, opisuje dzienne koszty, jakie ponosi firma produkująca pokarm dla kotów: 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje funkcja $g(x) = 4x$, gdzie $D_g = \mathbb{N}$, x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki.

Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

- zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),
- dzienny zysk w wysokości 400 zł,
- dzienny zysk w wysokości 1400 zł.

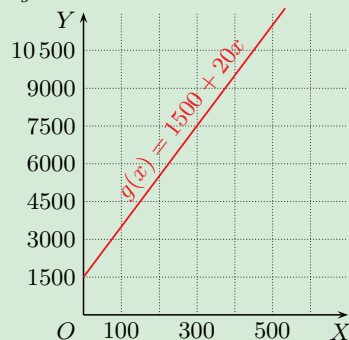


Uczeń:

- analizuje zadanie z treścią, a następnie zapisuje odpowiednie równanie, nierówność liniową lub wzór funkcji liniowej,
- rozwiązuje ułożone przez siebie równanie bądź nierówność lub analizuje własności funkcji liniowej,
- analizuje wynik i podaje odpowiedź.

Ćwiczenie 1

$D_g = \mathbb{N}$



Ćwiczenie 2

Niech x będzie liczbą wyprodukowanych puszek.

zysk = dochód – koszt, zatem dzienny zysk jest opisany wzorem:

$$4x - (2x + 800) = 2x - 800$$

- $2x + 800 = 4x$
 $x = 400$

Zerowy wynik ekonomiczny firma osiąga, gdy dzienna produkcja wynosi 400 puszek.

- 600
- 1100

Multibook

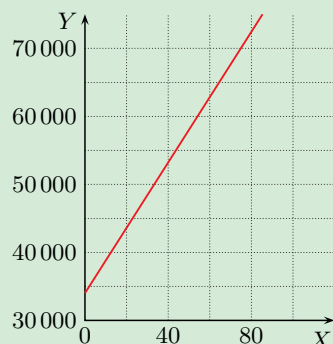
- Wykorzystanie funkcji liniowej – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.8

Generator
testów i sprawdzianów

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = 34\,000 + 480x$, gdzie x – liczba przejechanych tysięcy kilometrów, 480 – koszt (w zł) benzyny potrzebnej do przejechania 1000 km.



- b) Niech x będzie liczbą przejechanych tysięcy kilometrów.

Łączne koszty:

– dla samochodu A:

$$y = 34\,000 + 480x$$

– dla samochodu B:

$$y = 40\,000 + 360x$$

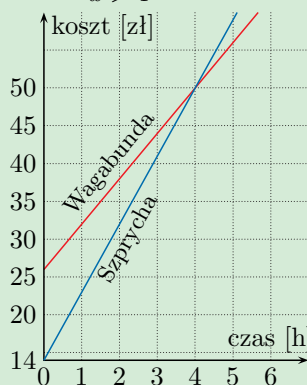
$$40\,000 + 360x \leq 34\,000 + 480x$$

$$x \geq 50$$

Różnica w cenie zwróci się po przejechaniu 50 000 km.

2. b) Korzystniej z wypożyczalni Wagabunda dla liczby godzin większej od 4.

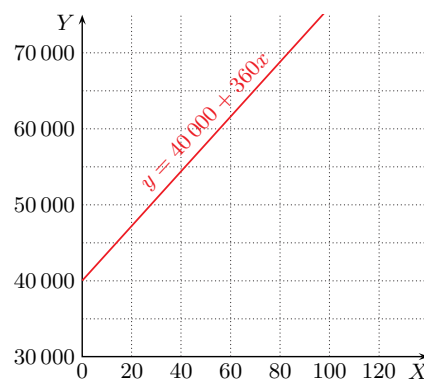
c) $26 + 6x < 14 + 9x$
 $x > 4$



Dla liczby godzin większej od 4.

Zadania

1. Samochód A kosztuje 34 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód B kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Cena benzyny wynosi średnio 6 zł za liter. Niech x oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, y – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu B.



- a) Naskicuj analogiczny wykres dla samochodu A.

- b) Jeżeli zakupiono samochód B, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?

2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (x oznacza liczbę godzin).

WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA

- Rower górski 10 zł + 2x zł
- Rower dziecięcy 6 zł + 2x zł

WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA

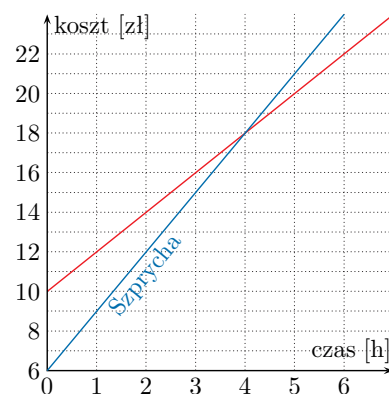
- Rower górski 6 zł + 3x zł
- Rower dziecięcy 2 zł + 3x zł

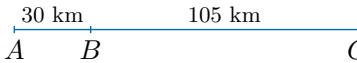
Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczenia roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.

- a) Naskicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.

- b) Odczytaj z wykresów, na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a na ile z wypożyczalni Szprycha.

- c) Trzyosobowa rodzina chce wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda?

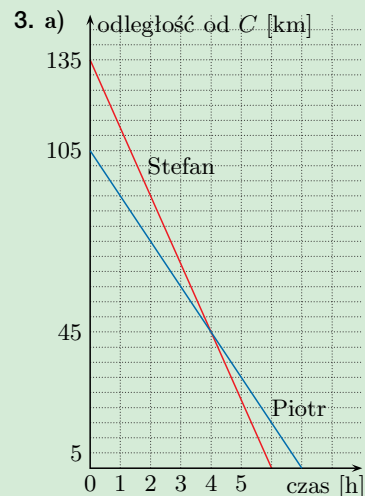
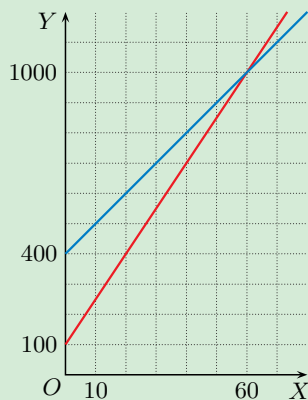


3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie.  Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h , a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą prędkością $22,5 \text{ km/h}$.
- Naszkicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.
 - Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?
 - O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C ?
4. Z miasta A o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h . Dwie godziny później z miasta A w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h . Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby kilometrów przejechanych przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:
- o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,
 - jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,
 - o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km .

Sprawdź się

5. Z miejscowości A do oddalonej o 40 km miejscowości B wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h . Jednocześnie z miejscowości B do miejscowości A wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.
- Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości A w zależności od czasu.
 - Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km ?
6. Wynajęcie lokalu A na dyskotekę kosztuje 400 zł za salę i 10 zł za każdego uczestnika. Wynajęcie lokalu B kosztuje 100 zł za salę i 15 zł za każdego uczestnika. Naszkicuj wykresy przedstawiające koszty zorganizowania dyskoteki w lokalach A i B w zależności od liczby uczestników. Dla jakiej liczby uczestników koszty te będą równe?

6. Niech x będzie liczbą uczestników. Koszty zorganizowania dyskoteki:
- w lokalu A : $y = 10x + 400$
 - w lokalu B : $y = 15x + 100$
- Zatem:
- $$10x + 400 = 15x + 100$$
- $$x = 60$$
- Koszty będą równe przy 60 uczestnikach.

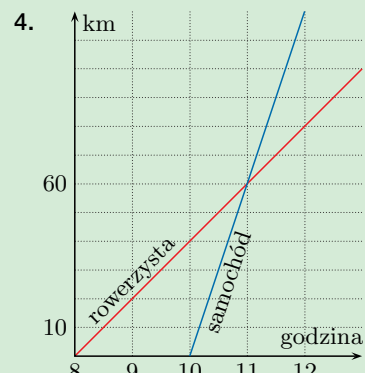


b) Stefan dogoni Piotra po 4 godzinach.

c) Niech x będzie wielkością, o jaką Piotr musi zwiększyć średnią prędkość $[\text{km/h}]$. Wzór na prędkość przekształcamy do postaci $t = \frac{s}{v}$. Wówczas:

$$\frac{105}{15+x} = \frac{135}{22,5}$$

$$x = 2,5 \text{ [km/h]}$$



a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00

5. t – czas $[\text{h}]$
- $d_1(t) = 16t$, $t \in [0; 2,5]$;
 $d_2(t) = 40 - 16t$, $t \in [0; 2,5]$
 - $d(t) = |32t - 40|$,
 $D_d = [0; 2,5]$
- Odległość między rowerzystami wyniosła 8 km po 1 h oraz po $1,5 \text{ h}$.



Powtórzenie

Zestaw I

- a) Wszystkie punkty należą do prostej l .
b) Punkty P i R należą do prostej l .
- a) ujemne dla $x < -6$,
większe od 2 dla $x > -3$
b) ujemne dla $x > \frac{5}{3}$,
większe od 2 dla $x < 1$
c) ujemne dla $x > -\frac{6}{5}$,
większe od 2 dla $x < -2$
- a) $(9, 0)$, $(0, 3)$, $P = 13,5$
b) $(14, 0)$, $(0, -8)$, $P = 56$
c) $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -\frac{15}{2})$,
 $P = 9,375$
- a) rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$,
malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$,
stała dla $m = -\frac{1}{2}$
b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9)$,
malejąca dla $m \in (9; \infty)$,
stała dla $m = 9$
- a) nie należą
b) należą, $y = -3x - 1$
c) należą, $y = -2x - 4$
d) należą, $y = \frac{1}{2}x - 1$
- a) 15
b) 12
c) 16
- a) $y = \frac{3}{4}x + 9$, rosnąca
b) $y = -\frac{1}{3}x + 7$, malejąca
c) $y = -6x + 2\frac{5}{6}$, malejąca
d) $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$, rosnąca
- a) $y = -2x - 7$
b) $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$
c) $x = -3$
d) $y = -1$
e) $y = -\frac{5}{3}x - 6$
f) $x = -3$
- Naszkicuj prostą l . Podaj, które z punktów P, Q, R należą do tej prostej.
a) $l: y = 2x - 4$, $P(5, 6)$, $Q(-3, -10)$, $R(-\frac{7}{2}, -11)$
b) $l: y = \frac{1}{2}x + 2$, $P(-8, -2)$, $Q(9, \frac{11}{2})$, $R(17, 10\frac{1}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich większe od 2?
a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ b) $f(x) = -3x + 5$ c) $f(x) = -2,5x - 3$
- Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .
a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$ c) $f(x) = -3x - 7,5$
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$
- Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.
a) $A(-4, 1)$, $B(8, 7)$, $C(11, 5)$ c) $A(-4, 4)$, $B(-2, 0)$, $C(1, -6)$
b) $A(2, -7)$, $B(3, -10)$, $C(-2, 5)$ d) $A(-4, -3)$, $B(-2, -2)$, $C(12, 5)$
- Punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$. Oblicz k .
a) $P(\frac{2}{3}, 2)$, $Q(5, k)$ b) $P(k, 6)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ c) $P(1, 8, 2, 4)$, $Q(12, k)$
- Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P . Czy ta funkcja jest malejąca?
a) $l: y = \frac{3}{4}x - 9$, $P(-8, 3)$ c) $l: y = -6x + 27$, $P(\frac{5}{12}, \frac{1}{3})$
b) $l: y = -\frac{1}{3}x + 7$, $P(6, 5)$ d) $l: y = \frac{1}{4}x - 11$, $P(-6, 1)$
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do prostej l .
a) $l: y = \frac{1}{2}x - 7$ c) $l: y = -6$ e) $l: 3x - 5y - 1 = 0$
b) $l: y = -4,5x - 5$ d) $l: x = 11$ f) $l: x - y = y + x$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.
a) $f(-2) = -4$ i $f(4) = -1$ c) $f(-8) = 6$ i $f(-3) = 4$
b) $f(-3) = 2$ i $f(3) = 6$ d) $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{2}) = 2$
- a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
c) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$
d) $f(x) = \sqrt{2}x$

Komentarz do zadania 7, str. 235

Warto przypomnieć uczniom, czym jest spodek wysokości.

Zestaw II

1. Wykresem funkcji f jest prosta l . Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

a) $l: y = 6x + 18$ b) $l: y = -\frac{5}{2}x - 10$ c) $l: \sqrt{2}x + y - 4 = 0$

2. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach A, B, C . Czy jest to trójkąt prostokątny?

a) $A(0, 0), B(8, 6), C(-6, 8)$ b) $A(-6, 0), B(1, 1), C(-3, 4)$

- D 3. Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$

5. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są zawarte w prostych l_1, l_2 i l_3 . Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.

a) $l_1: y = x + 2, l_2: y = -x + 2, l_3: y = -3x + 6$
 b) $l_1: 2x - y + 6 = 0, l_2: 3x - 4y + 4 = 0, l_3: y - 4 = 0$
 c) $l_1: x - 2y - 4 = 0, l_2: 3x + 4y - 28 = 0, l_3: x + 2 = 0$

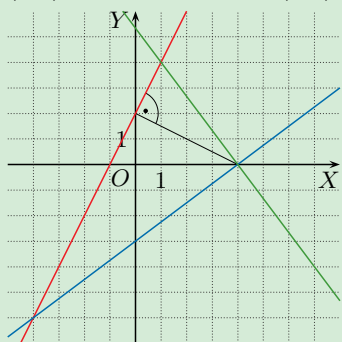
6. Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y = 10$ i $4x - 3y = 5$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.

7. Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k, l, m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.

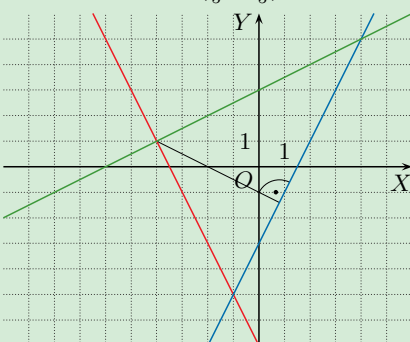
a) $k: y = 2x + 2, l: y = \frac{3}{4}x - 3, m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$
 b) $k: y = -2x - 7, l: y = 2x - 3, m: y = \frac{1}{2}x + 3$

8. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = -\frac{2}{3}x + 6$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-1, 2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.

7. a) wierzchołki: $(-4, -6), (4, 0), (1, 4)$, spodek wysokości: $(0, 2)$



- b) wierzchołki: $(-4, 1), (4, 5), (-1, -5)$, spodek wysokości: $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$



1. a) $(-\infty; -3]$
 b) $[-4; \infty)$
 c) $[2\sqrt{2}; \infty)$

2. a) $AB: y = \frac{3}{4}x,$
 $AC: y = -\frac{4}{3}x,$
 $BC: y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7},$
 $AB \perp AC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

- b) $AB: y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7},$
 $AC: y = \frac{4}{3}x + 8,$
 $BC: y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$
 $AC \perp BC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

3. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2,$
 $BC: y = -2x + 8,$
 $CD: y = \frac{1}{2}x + 3,$
 $AD: y = -2x - 7$

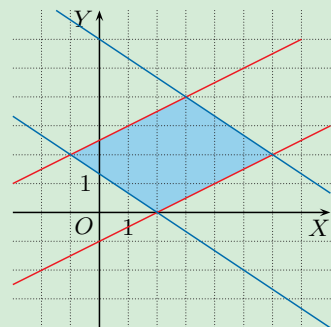
Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, gdyż: $AB \parallel CD,$
 $AD \parallel BC$ oraz $AB \perp AD$.

4. a) $x = -3, y = 2$
 b) $x = 3, y = 6$
 c) sprzeczny
 d) $x = -5, y = -1$
 e) $x = 8, y = 5$
 f) $x = -8, y = -7$

5. a) $(0, 2), (1, 3), (2, 0), P = 2$
 b) $(-4, -2), (4, 4), (-1, 4), P = 15$
 c) $(-2, -3), (-2, \frac{17}{2}), (\frac{36}{5}, \frac{8}{5}), P = 52,9$

6.
 $(-1, -3), (4, -\frac{1}{2}), (5, 5), (0, \frac{5}{2}),$
 $y = \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}, y = \frac{11}{2}x - \frac{45}{2}$

8. $(2, 0), (6, 2), (3, 4)$



**Przykład 1**

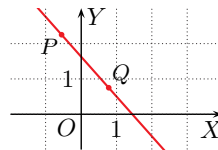
Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Dla której pary punktów P , Q współczynnik kierunkowy a jest ujemny?

- A. $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3})$, $Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$ C. $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3})$, $Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$
B. $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6})$, $Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$ D. $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4})$, $Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Zauważamy, że tylko w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

→ Zadanie 6, str. 237

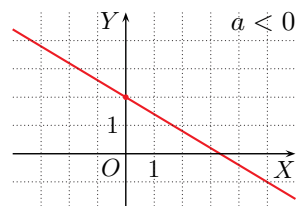
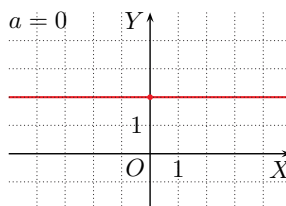
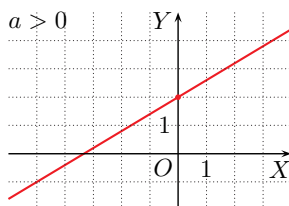
Przykład 2

Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

- A. $(-8, -5)$, $(8, 9)$ C. $(-8, -6)$, $(4, -2)$
B. $(-9, 6)$, $(9, -2)$ D. $(-10, 4)$, $(5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.
- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano tylko w przypadku C.



Odpowiedź: C

→ Zadanie 7, str. 237

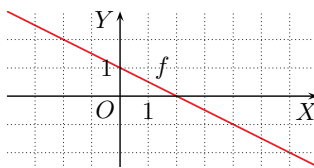


W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze

- A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
 B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$



Zadanie 2 (0–1)

Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

- A. I B. II C. III D. IV

Zadanie 3 (0–1)

Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 4 (0–1)

Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie o rzędnej

- A. 3 B. $\frac{3}{2}$ C. -3 D. -6

Zadanie 5 (0–1)

Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla

- A. $k = \frac{2}{3}$ B. $k = \frac{3}{2}$ C. $k = \frac{1}{2}$ D. $k = 7$

Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 236

Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Dla której pary punktów P, Q współczynnik kierunkowy a jest dodatni?

- A. $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2})$ C. $P(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$
 B. $P(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2}), Q(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2})$ D. $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$

Zadanie 7 (0–1) → Przykład 2, str. 236

Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x - 2)$ dla żadnej wartości parametru a ?

- A. $(4, 1), (-4, -3)$ C. $(-3, -2), (-1, 3)$
 B. $(-3, -10), (1, -2)$ D. $(1, 3), (3, -3)$

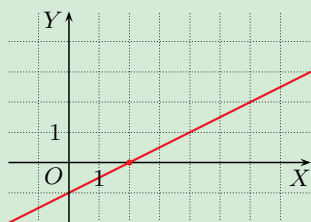
Zadanie 8 (0–1)

Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe wtedy, gdy

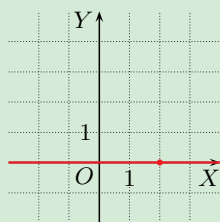
- A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. $m = -\frac{1}{3}$ D. $m = -\frac{2}{3}$

7. Prosta $y = a(x - 2)$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do II i III ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.

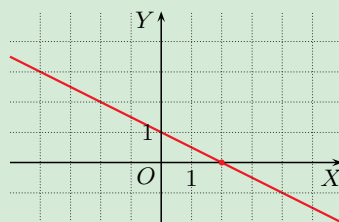
$a > 0$



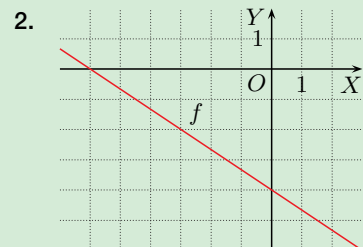
$a = 0$



$a < 0$



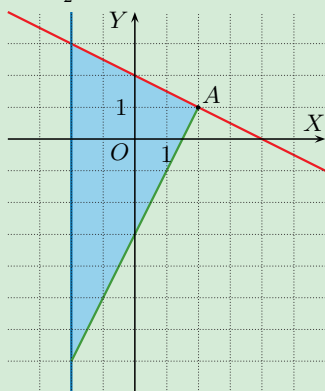
Odpowiedzi do zadań



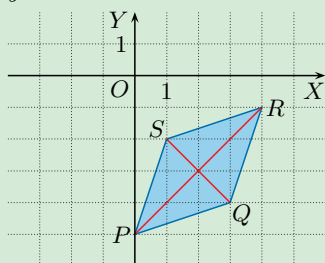
- 2.
3. $\sqrt{2}x + 4 = 0$
 $x = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$
4. $y = ax + b$
 $\begin{cases} 6 = -a + b \\ 0 = a + b \end{cases}$
 $b = 3$
5. $7 = 2 \cdot 2k + 1$
 $4k = 6$, czyli $k = \frac{3}{2}$
6. Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest dodatni, gdy funkcja $f(x) = ax + b$ jest rosnąca. Jeśli prosta ta przechodzi przez punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ takie, że $x_1 < x_2$, to zachodzi nierówność $y_1 < y_2$.
 A. $-\frac{5}{2} < \frac{11}{2}$, ale $-\frac{3}{2} > -\frac{19}{2}$
 B. $\frac{9}{2} < \frac{11}{2}$, ale $-\frac{11}{2} > -\frac{19}{2}$
 C. $\frac{9}{2} < \frac{19}{2}$ oraz $-\frac{11}{2} < -\frac{7}{2}$
8. Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$.
 $a_1 = 3, a_2 = 2m + 1$
 $3 \cdot (2m + 1) = -1$
 $6m + 3 = -1$
 $6m = -4$
 $m = -\frac{2}{3}$



9. $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$



10. Z rysunku odczytujemy – prosta PR : $y = x - 5$, prosta SQ : $y = -x - 1$.



11. Prosta k ma współczynnik kierunkowy $-\frac{3}{4}$.
Prosta do niej równoległa ma współczynnik kierunkowy $-\frac{3}{4}$, a prosta prostopadła – współczynnik kierunkowy $\frac{4}{3}$.

12.2. Prosta AC : $y = ax + b$

$$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

stąd $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, czyli

AC : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

Prosta BC : $y = cx + d$

$$\begin{cases} 3c + d = 5 \\ c + d = -1 \end{cases}$$

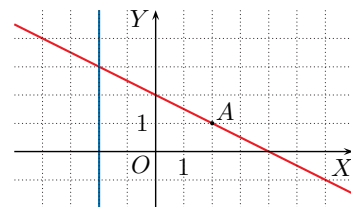
stąd $c = 3$, $d = -4$, zatem

BC : $y = 3x - 4$

Zadanie 9 (0-1)

Dwa boki trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku A są zawarte w prostych przedstawionych na rysunku obok. Pole tego trójkąta jest równe

- A. 20 B. 24 C. 28 D. 40



Zadanie 10 (0-1)

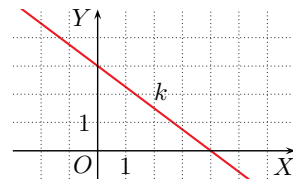
Dany jest czworokąt o kolejnych wierzchołkach $P(0, -5)$, $Q(3, -4)$, $R(4, -1)$ i $S(1, -2)$. W której prostej jest zawarta jedna z przekątnych tego czworokąta?

- A. $y = x + 5$ B. $y = -x + 5$ C. $y = x - 1$ D. $y = -x - 1$

Zadanie 11 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono prostą k .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Prosta $y = -\frac{3}{4}x + 8$ jest równoległa do prostej k .

P

F

Prosta $y = \frac{3}{4}x + 3$ jest prostopadła do prostej k .

P

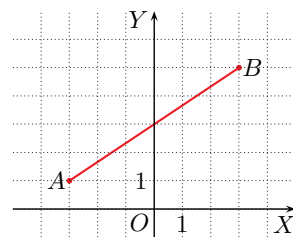
F

Zadanie 12

Na rysunku obok dany jest odcinek AB będący jednym z boków trójkąta ABC .

Zadanie 12.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym $-\frac{2}{3}$.

P

F

Jeśli wierzchołek C ma współrzędne $(9, -4)$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

P

F

Zadanie 12.2 (0-2)

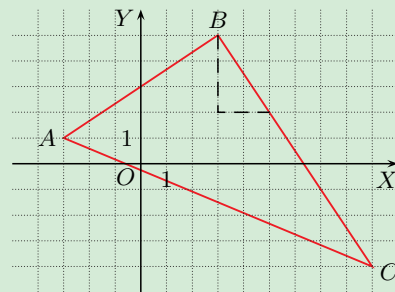
Wierzchołek C ma współrzędne $(1, -1)$. Wyznacz równania prostych zawierających boki AC i BC tego trójkąta.

- 12.1. Z rysunku odczytujemy współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = \frac{2}{3}$.

Współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C jest równy $-\frac{1}{a_{AB}} = -\frac{3}{2}$.

Jeśli $C(9, -4)$ (rysunek obok), to prosta BC ma współczynnik kierunkowy $-\frac{3}{2}$.

Zatem $AB \perp BC$, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.



**Zadanie 13 (0-2)**

Na rysunku obok przedstawiono prostą k .

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Prosta, która przecina prostą k w punkcie o obu współrzędnych całkowitych, dana jest równaniem

A. $y = -\frac{1}{3}x - 6$

E. $y = \frac{1}{3}x + 2$

B. $y = -x - 6$

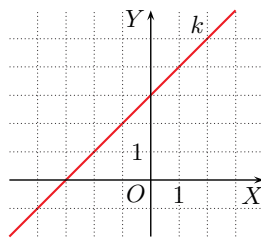
F. $y = \frac{1}{2}x + 2$

C. $y = -2x - 6$

G. $y = x + 2$

D. $y = -3x - 6$

H. $y = 3x + 2$

**Zadanie 14 (0-1)**

Punkty $K(-4, -5)$ i $M(8, 1)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $KLMN$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Przekątna LN tego rombu jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym

A.	-2,	ponieważ przekątne rombu	1.	mają równe długości.
B.	$-\frac{1}{2}$,		2.	dzielą się na połowy.
			3.	są prostopadłe.

Zadanie 15

Dany jest trapez o kolejnych wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$ oraz $D(-4, 7)$.

D Zadanie 15.1 (0-2)

Uzasadnij, że przekątne tego trapezu nie są prostopadłe.

Zadanie 15.2 (0-3)

Wyznacz punkt, w którym przecinają się proste zawierające ramiona tego trapezu.

Zadanie 16 (0-2)

Dla jakiej liczby c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

D Zadanie 17 (0-2)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0,4x - (x - 1)$ są prostopadłe.

15.2. Z rysunku można odczytać równania prostych zawierających ramiona trapezu.

Prosta AB : $y = \frac{1}{2}x - 1$, Prosta DC : $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Wyznamy punkt wspólny tych prostych: $\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 5$, skąd $x = 6$ oraz $y = \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 2$.

Proste przecinają się w punkcie $(6, 2)$.

16. -4

17. Proste w postaci kierunkowej: $y = \frac{5}{3}x - 1$ i $y = -\frac{3}{5}x + 1$.

Ponieważ $a_1 \cdot a_2 = \frac{5}{3} \cdot (-\frac{3}{5}) = -1$, więc proste są prostopadłe.

13. Prosta k : $y = x + 3$.

Najpierw sprawdzamy, czy pierwsza współrzędna punktu przecięcia prostych jest całkowita.

A. $x + 3 = -\frac{1}{3}x - 6$

$\frac{4}{3}x = -9$, czyli $x = -\frac{27}{4} \notin \mathbb{Z}$

B. $x + 3 = -x - 6$

$2x = -9$, czyli $x = -\frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$

C. $x + 3 = -2x - 6$

$3x = -9$, czyli $x = -3 \in \mathbb{Z}$.

Wyznamy drugą współrzędną: $y = -3 + 3 = 0 \in \mathbb{Z}$.

Proste przecinają się w punkcie $(-3, 0)$.

D. $x + 3 = -3x - 6$

$4x = -9$, czyli $x = -\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$

E. $x + 3 = \frac{1}{3}x + 2$

$\frac{2}{3}x = -1$, czyli $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

F. $x + 3 = \frac{1}{2}x + 2$

$\frac{1}{2}x = -1$, czyli $x = -2 \in \mathbb{Z}$.

Wyznamy drugą współrzędną: $y = -2 + 3 = 1 \in \mathbb{Z}$.

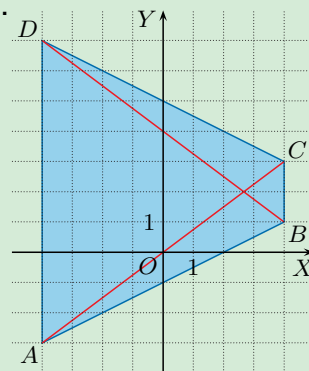
Proste przecinają się w punkcie $(-2, 1)$.

14. $a_{KM} = \frac{1+5}{8+4} = \frac{1}{2}$

Przekątne rombu są prostopadłe, więc:

$$a_{LN} = -\frac{1}{a_{KM}} = -2$$

15.1.



Wyznamy współczynnik kierunkowy prostej AC :

$$\begin{cases} -3 = a \cdot (-4) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

$$\text{stad } a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Wyznamy współczynnik kierunkowy prostej BD :

$$\begin{cases} 1 = a_1 \cdot 4 + b_1 \\ 7 = a_1 \cdot (-4) + b_1 \end{cases}$$

$$\text{stad } a_1 = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

$a \cdot a_1 \neq -1$, więc przekątne AC i BD nie są prostopadłe.



18. Punkt przecięcia z osią OX : $(-4, 0)$. Równanie prostej k : $y = -2x - 8$.

19. $\frac{3}{2}m + 9 < 0$, stąd $m < -6$
Największa liczba całkowita spełniająca nierówność: $m = -7$.

20. Punkty przecięcia prostych z osią OX : $A(-5, 0)$ i $B(1, 0)$, czyli podstawa trójkąta $|AB| = 6$. Punkt przecięcia prostych: $C(3, 4)$, czyli wysokość trójkąta $h = 4$.
Pole trójkąta:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

21. Równanie prostej PQ :
 $y = -\frac{3}{2}x - 1$
Współczynniki kierunkowe prostych PQ i $y = \frac{2}{3}x - 6$ spełniają warunek prostokątności: $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$. Zatem trójkąt jest prostokątny.

- 22.1. $a_{AB} = \frac{-3+5}{8-0} = \frac{1}{4}$,
 $a_{BC} = \frac{5+3}{4-8} = -2$,
 $a_{AB} \cdot a_{BC} = -\frac{1}{2}$, więc proste AB i BC nie są prostopadłe, co oznacza, że czworokąt $ABCD$ nie jest prostokątem.

- 22.2. $a_{AB} = \frac{1}{4}$, $a_{BC} = -2$
Równanie prostej AD , równoległej do prostej BC i przechodzącej przez punkt A :
 $y = -2x - 5$

Równanie prostej CD , równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C :
 $y = \frac{1}{4}x + 4$

23. Niech $A(-3, -5)$, $B(3, 4)$.
 $a_{AB} = \frac{3}{2}$
Równanie drugiej przyprostokątnej wychodzącej z wierzchołka B : $y = -\frac{2}{3}x + 6$.
Punkt C ma współrzędne $(-3, 8)$. Pole trójkąta:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

24. Współrzędne wierzchołków czworokąta: $A(0, 5)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -6)$, $D(4, 0)$.
Pole czworokąta jest równe sumie pól trójkątów ABC i CDA :
 $P = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 38,5$

Zadanie 18 (0-2)

Prosta k jest prostopadła do prostej l : $y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l . Wyznacz równanie prostej k .

Zadanie 19 (0-2)

Znajdź największą liczbę całkowitą m , dla której prosta $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

Zadanie 20 (0-4)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią OX oraz prostymi $2x - y - 2 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$.

D Zadanie 21 (0-4)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Wykaż, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 22

Punkty $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

D Zadanie 22.1 (0-2)

Uzasadnij, że równoległobok $ABCD$ nie jest prostokątem.

Zadanie 22.2 (0-4)

Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD .

Zadanie 23 (0-4)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 24 (0-4)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B , a prosta $y = 1,5x - 6$ – w punktach C i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 25 (0-4)

Punkty $P(-3, 0)$ i $S(-1, 4)$ są wierzchołkami prostokąta $PQRS$ oraz wierzchołek R leży na osi OX . Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego prostokąta.

Zadanie 26 (0-4)

Punkty $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$ i $C(4, 0)$ są wierzchołkami trapezu prostokątnego $ABCD$ o podstawach AD i BC . Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

25. Współczynnik kierunkowy prostej PS jest równy 2. Równanie prostej SR , prostopadłej do prostej PS i przechodzącej przez punkt S :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

Zatem $R(7, 0)$. Przekątne prostokąta dzielą się w połowie, więc punkt przecięcia przekątnych ma współrzędne $(2, 0)$.

