

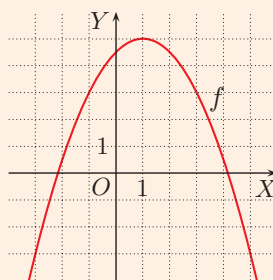


7 Funkcja kwadratowa

Liny podtrzymujące most wiszący mają kształt paraboli (na zdjęciu most Golden Gate w San Francisco).

Funkcję postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Mówimy „parabola określona równaniem $y = ax^2 + bx + c$ ” lub krótko: „parabola $y = ax^2 + bx + c$ ”.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$.

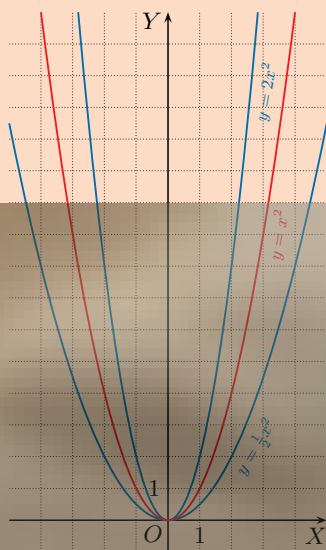


Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$,
- podaje własności funkcji $f(x) = ax^2$,
- stosuje własności funkcji $f(x) = ax^2$ do rozwiązywania zadań.

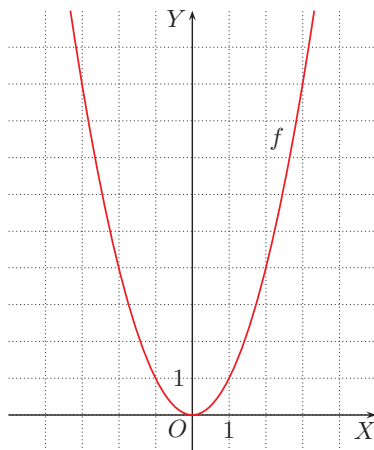
Ćwiczenie 1

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	4	1	0	1	4
$f_2(x)$	8	2	0	2	8
$f_3(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na rysunku poniżej przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $\langle 0; \infty \rangle$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:

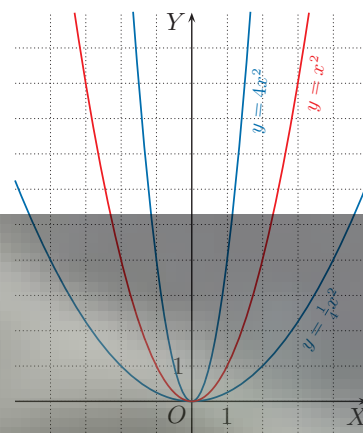


- ramiona paraboli są skierowane do góry,
- oś OY jest **osią symetrii** paraboli,
- punkt $(0,0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,
- funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0)$ i **rosnąca** w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$,
- dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,
- funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

Ćwiczenie 1

Sporządź odpowiednie tabele wartości funkcji i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion tej paraboli.



Ćwiczenie 2

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

- $P(-\frac{1}{4}, 1)$
- $P(4, 32)$
- $P(\frac{1}{2}, 1)$
- $P(-2, 16)$

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?

- $Q(1, 6)$
- $Q(2, 8)$
- $Q(-4, 8)$
- $Q(-8, 48)$

Ćwiczenie 2

- $4 \cdot (-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} \neq 1$ – nie należy
- $4 \cdot 4^2 = 64 \neq 32$ – nie należy
- $4 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 1$ – należy
- $4 \cdot (-2)^2 = 16$ – należy

Ćwiczenie 3

- $a \cdot 1^2 = 6$, zatem $a = 6$
- $a \cdot 2^2 = 8$, zatem $a = 2$
- $a \cdot (-4)^2 = 8$, zatem $a = 0,5$
- $a \cdot (-8)^2 = 48$, zatem $a = 0,75$

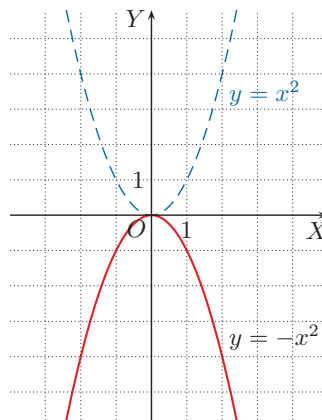
Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.1

Generator
testów i sprawdzianów

Wykres funkcji $y = -x^2$ można otrzymać, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = x^2$. Zwróć uwagę na to, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji $y = -x^2$ są skierowane w dół.



Ćwiczenie 4

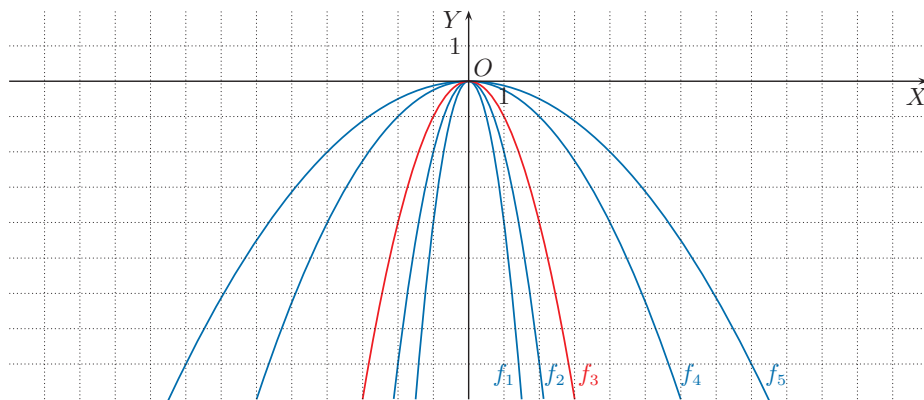
- Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.
- Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

Ćwiczenie 4

- rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $(0; \infty)$
- oś symetrii: $x = 0$, wierzchołek: $(0, 0)$

Ćwiczenie 5

Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 (rysunek poniżej) otrzymano, odbijając symetrycznie względem osi OX wykresy funkcji $y = \frac{1}{8}x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = x^2, y = 2x^2, y = 4x^2$. Podaj wzory funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .



Ćwiczenie 5

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -4x^2, \\ f_2(x) &= -2x^2, \\ f_3(x) &= -x^2, \\ f_4(x) &= -\frac{1}{4}x^2, \\ f_5(x) &= -\frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2, a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$) czy do dołu (gdy $a < 0$) oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

Ćwiczenie 6

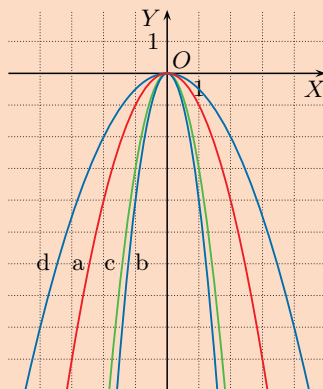
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, jeśli należy do niego punkt P . Podaj pięć punktów należących do wykresu funkcji f , których obie współrzędne są całkowite.

- $P(2, -4)$
- $P(\frac{1}{2}, -1)$
- $P(-\sqrt{2}, -6)$
- $P(-2\sqrt{2}, -4)$

Ćwiczenie 6

Wzory funkcji i przykładowe punkty:

- $f(x) = -x^2, (-2, -4), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, -4)$
- $f(x) = -4x^2, (-2, -16), (-1, -4), (0, 0), (1, -4), (2, -16)$
- $f(x) = -3x^2, (-2, -12), (-1, -3), (0, 0), (1, -3), (2, -12)$
- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, (-4, -8), (-2, -2), (0, 0), (2, -2), (4, -8)$

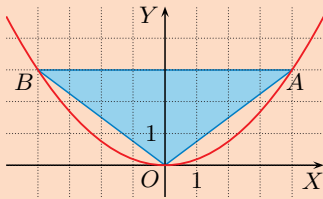


Odpowiedzi do zadań

- $f(D) = (-8; 0)$
 - $f(D) = (0; 4)$
 - $f(D) = (0; 12)$
 - $f(D) = (-8; -2)$
- $A: y = x^2, B: y = \frac{1}{2}x^2,$
 $C: y = \frac{1}{4}x^2, D: y = \frac{1}{8}x^2,$
 $E: y = \frac{1}{16}x^2$
- $y = x^2$
 - $y = \sqrt{2}x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2$
 - $y = -3x^2$
- $\frac{2}{3}$
 - 10
- Z warunków zadania:
 $A(-x, 4), B(x, 4)$
 oraz:
 $|x| = \frac{1}{2}|AB|$

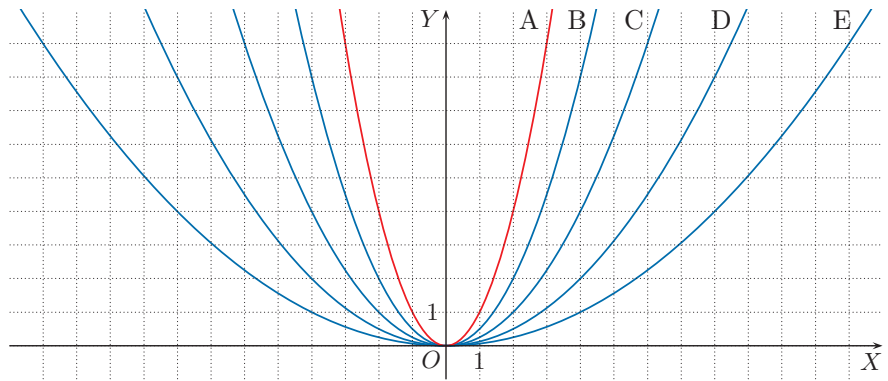
Po podstawieniu współrzędnych punktu A do równania paraboli otrzymujemy:
 $a(\frac{1}{2}|AB|)^2 = 4$
 i stąd $a = \frac{16}{|AB|^2}$.

 - $a = \frac{16}{2^2} = 4$
 - $a = \frac{16}{8^2} = \frac{1}{4}$
 - $a = \frac{16}{(\frac{1}{2})^2} = 64$
 - $a = \frac{16}{(2\sqrt{2})^2} = 2$
- $P_{AOB} = \frac{1}{2}|2x| \cdot 3 = 12$, zatem $|x| = 4$, czyli do paraboli należą punkty: $A(4, 3)$ i $B(-4, 3)$ (lub $A(-4, 3)$ i $B(4, 3)$).
 Równanie paraboli ma postać: $y = \frac{3}{16}x^2$.



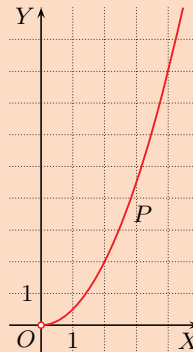
Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, D = (-2; 4)$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^2, D = (-4; 2)$
 - $f(x) = 3x^2, D = (-1; 2)$
 - $f(x) = -2x^2, D = (1; 2)$
- Które z poniższych parabol dane są równaniami: $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{8}x^2$?
 Podaj równania pozostałych parabol.

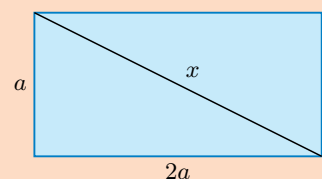


- Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do jej wykresu jest najmniejsza?
 - $y = x^2, y = 4x^2, y = -6x^2$
 - $y = \frac{3}{2}x^2, y = \sqrt{2}x^2, y = 2x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2, y = 3x^2, y = 2\sqrt{3}x^2$
 - $y = -3x^2, y = \pi x^2, y = 3,14x^2$
- Punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Oblicz odległość punktu Q od osi OX , jeśli:
 - $x_1 = 3, y_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -2,$
 - $x_1 = -2\sqrt{2}, y_1 = 20, x_2 = 2.$
- Prosta $y = 4$ przecina parabolę $y = ax^2$ w punktach A i B . Oblicz a , jeśli:
 - $|AB| = 2,$
 - $|AB| = 8,$
 - $|AB| = \frac{1}{2},$
 - $|AB| = 2\sqrt{2}.$
- Punkty: $O(0, 0), A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Naszkicuj tę parabolę, jeśli pole trójkąta AOB jest równe 12.
- Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole kwadratowej działki budowlanej w zależności od długości przekątnej x . Naszkicuj jej wykres.
 - Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole prostokątnej działki budowlanej w zależności od długości przekątnej x , jeżeli wiadomo, że działkę można podzielić na dwa kwadraty.

- Oznaczmy bok działki przez a . Wówczas:
 $x = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
 $P(x) = \frac{1}{2}x^2, D = (0; \infty)$



- Oznaczmy boki działki przez a i $2a$.



Wówczas $x^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$,
 czyli $a^2 = \frac{1}{5}x^2$.
 $P(x) = 2a^2 = \frac{2}{5}x^2, D = (0; \infty)$

7.2. Przesunięcie wykresu funkcji

$f(x) = ax^2$ o wektor

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół, czyli o wektor $\vec{u} = [0, -4]$ (rysunek obok).

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 - 3$ c) $f(x) = -2x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 1$ d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x - 3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $\vec{u} = [3, 0]$ (rysunek obok).

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = (x + 3)^2$ c) $f(x) = -2(x + 2)^2$
b) $f(x) = (x - 1)^2$ d) $f(x) = -2(x - 2)^2$

Przykład 3

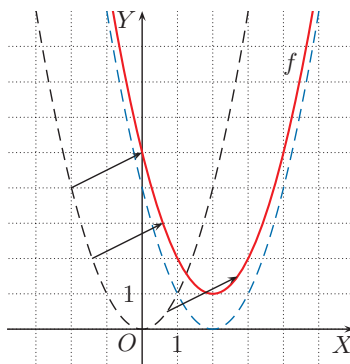
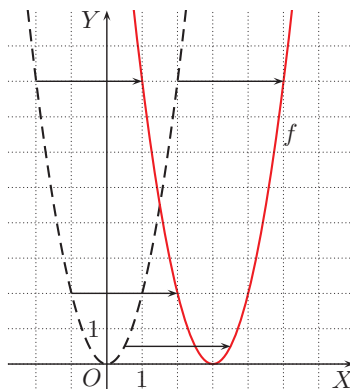
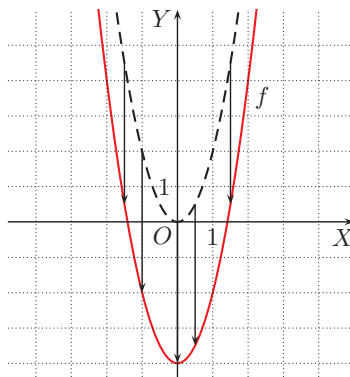
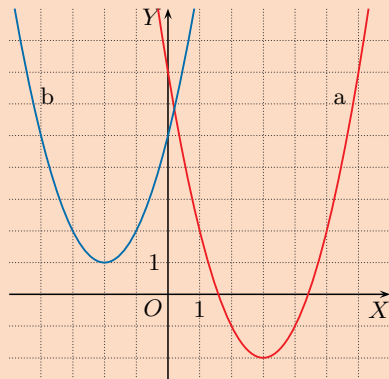
Wykres funkcji $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę, lub bezpośrednio o wektor $\vec{u} = [2, 1]$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = (x - 3)^2 - 2$
b) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$

Ćwiczenie 3

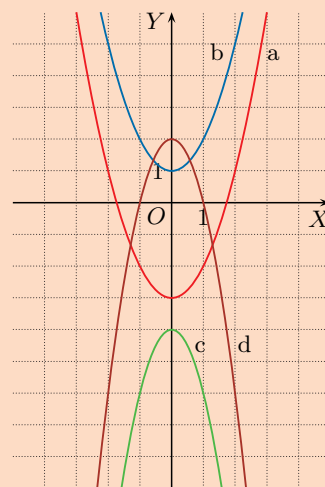


Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej otrzymanej w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor,
- szkicuje wykresy funkcji postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$ i podaje ich własności,
- stosuje własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- a) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$
b) $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
c) $f(D) = \langle -\infty; -4 \rangle$
d) $f(D) = \langle -\infty; 2 \rangle$



Ćwiczenie 2

- a) maleje w $(-\infty; -3]$, rośnie w $(-3; \infty)$
b) maleje w $(-\infty; 1]$, rośnie w $(1; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; -2]$, maleje w $(-2; \infty)$
d) rośnie w $(-\infty; 2]$, maleje w $(2; \infty)$

Multiteka

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

a) $[-6, -3]$ b) $[1, 0]$

Komentarz

Warto przypomnieć uczniom, że funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie – jest **przedziałami monotoniczna** (patrz przykład 3 ze str. 168).

Należy również podkreślić zależność między współczynnikiem p a przedziałami monotoniczności funkcji oraz między współczynnikiem q a zbiorem wartości funkcji.

Wykres funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $[p, q]$.

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Ćwiczenie 4

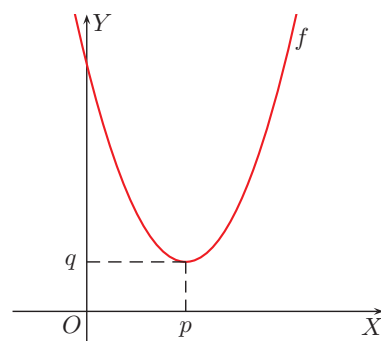
O jaki wektor należy przesunąć parabolę daną wzorem $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $f(x) = 2(x + 6)^2 - 3$,

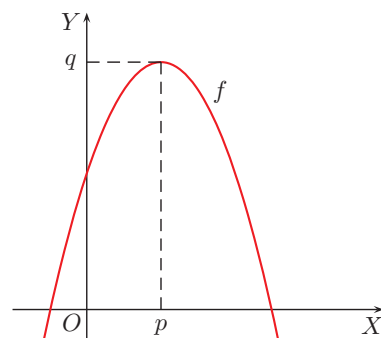
b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$?

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

$a > 0$
• ramiona paraboli są skierowane do góry • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$ • funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p)$ • funkcja rośnie w przedziale $\langle p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle q; \infty)$



$a < 0$
• ramiona paraboli są skierowane w dół • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$ • funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p)$ • funkcja maleje w przedziale $\langle p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naszkicuj tę parabolę.

a) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$

c) $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 3$

Ćwiczenie 5

a) maleje w $(-\infty; 3)$, rośnie w $\langle 3; \infty)$,
 $f(D) = \langle -4; \infty)$, $W(3, -4)$

b) maleje w $(-\infty; -2)$, rośnie w $\langle -2; \infty)$,
 $f(D) = \langle 2; \infty)$, $W(-2, 2)$

c) rośnie w $(-\infty; -4)$, maleje w $\langle -4; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; -1]$, $W(-4, -1)$

d) rośnie w $(-\infty; 1)$, maleje w $\langle 1; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 3]$, $W(1, 3)$

Zadania

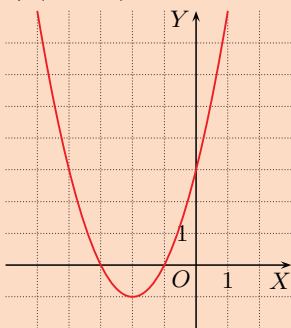
- Wykres funkcji $f(x) = x^2$ przesuń o wektor $\vec{u}$. Następnie podaj wzór otrzymanej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.
a) $\vec{u} = [1, 2]$ b) $\vec{u} = [1, -2]$ c) $\vec{u} = [-3, -2]$ d) $\vec{u} = [-2, -4]$
- Naszkicuj parabolę, którą otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ o wektor $\vec{u}$. Podaj współrzędne jej wierzchołka i równanie jej osi symetrii.
a) $\vec{u} = [-2, 4]$ b) $\vec{u} = [-3, -1]$ c) $\vec{u} = [2, 2]$ d) $\vec{u} = [3, -1]$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$ c) $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 4$
- Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Wzór funkcji f	Wektor $\vec{u}$	Wzór funkcji g
$f(x) = 5x^2 - 3$	$\vec{u} = [-1, 5]$	$g(x) = 5(x+1)^2 + 2$
$f(x) = 4x^2$	$\vec{u} = [-2, 3]$	$g(x) = 4(x+2)^2 + 3$
$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10$	$\vec{u} = [7, -3]$	$g(x) = \frac{5}{2}(x-7)^2 - 13$
$f(x) = 2(x-5)^2 + 3$	$\vec{u} = [4, -6]$	$g(x) = 2(x-9)^2 - 3$

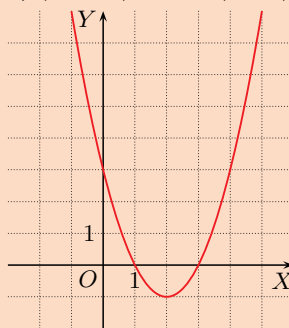
- Punkty F i G są wierzchołkami parabol będących wykresami funkcji f i g . Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{FG}$ i naszkicuj obie parabole.
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
b) $f(x) = 4 - 2(x+1)^2$, $g(x) = 2 - 2(x+3)^2$
c) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$, $g(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$
d) $f(x) = 2 - \frac{1}{2}(x+1)^2$, $g(x) = -1 - \frac{1}{2}(x-3)^2$
- Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + q$ należy punkt $P(-1, 2)$. Podaj wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że jej zbiorem wartości jest przedział:
a) $\langle 1; \infty \rangle$, b) $\langle 0; \infty \rangle$, c) $(-\infty; 3]$, d) $(-\infty; 6]$.
- Oblicz wartość współczynnika p i naszkicuj parabolę $y = (x-p)^2 - 1$, jeśli należą do niej punkty A i B .
a) $A(-4, 3)$, $B(0, 3)$ b) $A(-1, 8)$, $B(5, 8)$

- Zauważmy, że punkty A i B mają równe rzędne.

a) $(-4-p)^2 - 1 = p^2 - 1$, $p = -2$



b) $(-1-p)^2 - 1 = (5-p)^2 - 1$, $p = 2$



Odpowiedzi do zadań

- a) $y = (x-1)^2 + 2$, maleje w $(-\infty; 1)$, rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$
b) $y = (x-1)^2 - 2$, maleje w $(-\infty; 1)$, rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$
c) $y = (x+3)^2 - 2$, maleje w $(-\infty; -3]$, rośnie w $\langle -3; \infty \rangle$
d) $y = (x+2)^2 - 4$, maleje w $(-\infty; -2]$, rośnie w $\langle -2; \infty \rangle$
- a) $W(-2, 4)$, $x = -2$
b) $W(-3, -1)$, $x = -3$
c) $W(2, 2)$, $x = 2$
d) $W(3, -1)$, $x = 3$
- a) $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
b) $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
c) $f(D) = (-\infty; 2]$
d) $f(D) = (-\infty; 4]$
- a) $\overrightarrow{FG} = [4, 3]$
b) $\overrightarrow{FG} = [-2, -2]$
c) $\overrightarrow{FG} = [-3, -5]$
d) $\overrightarrow{FG} = [4, -3]$
- a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = 2x^2$
c) $f(x) = -x^2 + 3$
d) $f(x) = -4x^2 + 6$

Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej,
- oblicza wyróżnik trójkianu kwadratowego,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli, podaje równanie jej osi symetrii,
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem uzupełniania do kwadratu lub wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli) i szkicuje jej wykres,
- przekształca postać kanoniczną funkcji kwadratowej do postaci ogólnej,
- wyznacza wzór ogólny funkcji kwadratowej, mając dane współrzędne wierzchołka i innego punktu jej wykresu,
- wyprowadza wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

Ćwiczenie 1

- a) $y = -2(x^2 - 6x + 9) + 6 = -2x^2 + 12x - 12$
- b) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
- c) $y = 3(x^2 - 10x + 25) + 9 = 3x^2 - 30x + 84$

7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej

Definicja

Postać:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać:

$$y = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } a, p, q \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Uwaga. Funkcję kwadratową nazywamy też **trójkianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykład w ramce pokazujący, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$ Postać kanoniczna
 $= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 $= 3x^2 - 24x + 41$ Postać ogólna

b) $y = -4(x + \frac{1}{2})^2 + 1 =$ Postać kanoniczna
 $= -4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 =$ Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 $= -4x^2 - 4x$ Postać ogólna

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Przejdźcie od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej wymagając zastosowania uzupełniania do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 10x + 27 =$ Postać ogólna
 $= x^2 - 2 \cdot 5x + 27 =$ Współczynnik -10 zapisujemy jako $-2 \cdot 5$.
 $= x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 27 =$ Dodajemy i odejmujemy $25 = 5^2$, czyli uzupełniamy do kwadratu
 $= (x - 5)^2 - 25 + 27 =$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 $= (x - 5)^2 + 2$ Postać kanoniczna

Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.3



$$b) y = x^2 + 5x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

Postać ogólna

Współczynnik 5 zapisujemy jako $2 \cdot \frac{5}{2}$.

Dodajemy i odejmujemy $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

Korzystamy ze wzoru
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$a) y = x^2 - 8x + 6$$

$$c) y = x^2 - 6x - 2$$

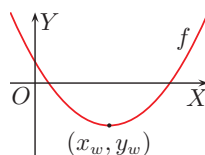
$$e) y = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$b) y = x^2 + 4x + 8$$

$$d) y = x^2 - 3x + 1$$

$$f) y = x^2 - x - 2$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w) .



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x-p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$a) y = x^2 + 3x + 1$$

$$c) y = x^2 - 4x + 4$$

$$e) y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

$$b) y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$d) y = -2x^2 + 6x - 6$$

$$f) y = 2x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

$$a) y = 4x^2 + 6x + 3$$

$$b) y = -2x^2 + 4x + 1$$

$$c) y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

Ćwiczenie 4

$$a) \Delta = -12, W\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$b) \Delta = 24, W(1, 3)$$

$$c) \Delta = -1, W\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Ćwiczenie 2

$$a) y = x^2 - 8x + 6 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 6 =$$

$$= (x - 4)^2 - 10,$$

$$W(4, -10)$$

$$b) y = x^2 + 4x + 8 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 8 =$$

$$= (x + 2)^2 + 4,$$

$$W(-2, 4)$$

$$c) y = x^2 - 6x - 2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 2 =$$

$$= (x - 3)^2 - 11,$$

$$W(3, -11)$$

$$d) y = x^2 - 3x + 1 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 =$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

$$W\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

$$e) y = x^2 + x + \frac{1}{4} =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$W\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$f) y = x^2 - x - 2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

$$W\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

Ćwiczenie 3

$$a) 5 \quad b) 8 \quad c) 0 \quad d) -12 \quad e) 12$$

$$f) 4$$

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 2, ponieważ zastosowany w nim sposób wyznaczania drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli y_w w wielu przypadkach jest dużo szybszy niż korzystanie ze wzoru:

$$y_w = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Ćwiczenie 5

- a) $W(1, 1)$ b) $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$
c) $W(2, 9)$ d) $W(-1, -13)$

Odpowiedzi do zadań

- a) $f(x) = x^2 - x - 2\frac{3}{4}$, $\Delta = 12$
b) $f(x) = -x^2 + 8x - 11$, $\Delta = 20$
c) $f(x) = 2x^2 - 12x + 4$, $\Delta = 112$
d) $f(x) = -3x^2 - 12x - 4$, $\Delta = 96$
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $\Delta = 4$
f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 3$, $\Delta = 24$
- a) $f(x) = (x+1)^2 + 2$, $W(-1, 2)$
b) $f(x) = (x-2)^2 - 6$, $W(2, -6)$
c) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$, $W(-1, 2)$
d) $f(x) = -4(x-1)^2 + 5$, $W(1, 5)$
e) $f(x) = 2(x+2)^2 - 15$, $W(-2, -15)$
f) $f(x) = -2(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{13}{2}$, $W(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$
g) $f(x) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
h) $f(x) = -2(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}$, $W(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$
i) $f(x) = 3x^2 - 8$, $W(0, -8)$
- a) $W(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2})$ b) $W(1, \frac{7}{2})$
c) $W(-1, 3)$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Przykład 2

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

Współczynniki $a = -2$, $b = 8$, więc $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$.

Współrzędna $y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7$.

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Ćwiczenie 5

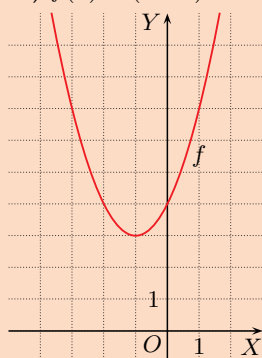
Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$
b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ d) $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

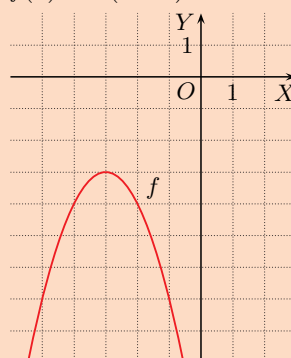
Zadania

- Przedstaw trójmian kwadratowy f w postaci ogólnej i oblicz jego wyróżnik.
a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - 3$ d) $f(x) = -3(x+2)^2 + 8$
b) $f(x) = -(x-4)^2 + 5$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$
c) $f(x) = 2(x-3)^2 - 14$ f) $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)^2 - 9$
- Korzystając ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$, wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej.
a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ d) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ g) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = x^2 - 4x - 2$ e) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ h) $f(x) = -2x^2 + 6x$
c) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ f) $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ i) $f(x) = 3x^2 - 8$
- Korzystając ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = f(x_w)$, wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ c) $f(x) = -3x^2 - 6x$
- Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej. Naskicuj wykres funkcji f , stosując odpowiednie przesunięcie paraboli $y = x^2$ lub $y = -x^2$.
a) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ b) $f(x) = -x^2 - 6x - 12$ c) $f(x) = -x^2 + 4x$

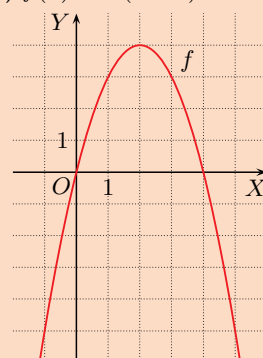
4. a) $f(x) = (x+1)^2 + 3$



b) $f(x) = -(x+3)^2 - 3$



c) $f(x) = -(x-2)^2 + 4$



5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Prosta $x = 3$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 5$. Oblicz współczynnik b .

Ośią symetrii jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2a} = 3$, skąd:

$$b = -6a = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

Prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Oblicz współczynnik b .

a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$

b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

6. Oblicz współczynnik a funkcji kwadratowej f , jeśli wiadomo, że wierzchołek paraboli będącej jej wykresem leży na prostej l . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = ax^2 + 4x - 3$, $l: x = 2$ c) $f(x) = ax^2 + 2x + 5$, $l: x = -4$

b) $f(x) = ax^2 + 6x + 2$, $l: x = 1$ d) $f(x) = ax^2 - 6x - 1$, $l: x = -\frac{3}{2}$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(3, -2)$.

Ze wzoru $x_w = -\frac{b}{2a}$ otrzymujemy:

$$-\frac{b}{2 \cdot 1} = 3, \text{ skąd } b = -6.$$

Zatem $f(x) = x^2 - 6x + c$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, -2)$ do wzoru funkcji i otrzymujemy równość:

$$-2 = 3^2 - 6 \cdot 3 + c, \text{ skąd } c = 7.$$

Szukane współczynniki: $b = -6$ i $c = 7$.

Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.

a) $W(2, 4)$ b) $W(-1, -3)$ c) $W(\frac{1}{2}, -1)$ d) $W(10, 0)$

8. Wyznacz współczynniki a i c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + 6x + c$, jeśli wiadomo, że punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem. Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

a) $W(-1, 2)$ b) $W(6, -3)$ c) $W(2, 4)$ d) $W(-\frac{3}{2}, -1)$

8. a) $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2a} = -1$, zatem $a = 3$.

$$2 = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + c, \text{ więc } c = 5.$$

$$f(x) = 3(x + 1)^2 + 2$$

b) $a = -\frac{1}{2}$, $c = -21$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 3$

c) $a = -\frac{3}{2}$, $c = -2$, $f(x) = -\frac{3}{2}(x - 2)^2 + 4$

d) $a = 2$, $c = \frac{7}{2}$, $f(x) = 2(x + \frac{3}{2})^2 - 1$

5. a) $a = 1$ oraz $-\frac{b}{2a} = 2$, zatem $b = -4$.

b) $a = -1$ oraz $-\frac{b}{2a} = 4$, zatem $b = 8$.

c) $a = 2$ oraz $-\frac{b}{2a} = -1$, zatem $b = 4$.

d) $a = -\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{b}{2a} = -6$, zatem $b = -6$.

6. a) $b = 4$ oraz $-\frac{b}{2a} = 2$, zatem $a = -1$, $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$

b) $b = 6$ oraz $-\frac{b}{2a} = 1$, zatem $a = -3$, $f(x) = -3(x - 1)^2 + 5$

c) $b = 2$ oraz $-\frac{b}{2a} = -4$, zatem $a = \frac{1}{4}$,

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 4)^2 + 1$$

d) $b = -6$ oraz $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$, zatem $a = -2$,

$$f(x) = -2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{2}$$

7. a) $b = -4$, $c = 8$

b) $b = 2$, $c = -2$

c) $b = -1$, $c = -\frac{3}{4}$

d) $b = -20$, $c = 100$

9. a) $f(x) = a(x-2)^2$

Punkt $P(0, 2)$ należy do paraboli, czyli:

$$2 = a(0-2)^2$$

skąd $a = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2,$$

zatem $b = -2$, $c = 2$.

b) $f(x) = a(x+1)^2 - 1$

Punkt $P(0, 0)$ należy do paraboli, czyli:

$$0 = a(0+1)^2 - 1$$

skąd $a = 1$.

$$f(x) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x,$$

zatem $b = 2$, $c = 0$.

c) $f(x) = ax^2 + 3$

Punkt $P(3, 1)$ należy do paraboli, czyli:

$$1 = a \cdot 3^2 + 3$$

skąd $a = -\frac{2}{9}$.

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 3,$$

zatem $b = 0$, $c = 3$.

d) $f(x) = a(x+1)^2 + 3$

Punkt $P(-2, 0)$ należy do paraboli, czyli:

$$0 = a(-2+1)^2 + 3$$

skąd $a = -3$.

$$f(x) = -3(x+1)^2 + 3 = -3x^2 - 6x,$$

zatem $b = -6$, $c = 0$.

e) $f(x) = a(x-1)^2 + 2$

$1 = a(2-1)^2 + 2$, skąd $a = -1$.

$$f(x) = -(x-1)^2 + 2 = -x^2 + 2x + 1$$

zatem $b = 2$, $c = 1$.

f) $f(x) = a(x-2)^2 + 4$

$2 = a(1-2)^2 + 4$, skąd $a = -2$.

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 4 = -2x^2 + 8x - 4$$

zatem $b = 8$, $c = -4$.

Czy wiesz, że...

Dla dowolnych dwóch punktów płaszczyzny (nie leżących na prostej pionowej) istnieje nieskończenie wiele parabol opisanych za pomocą równania $y = ax^2 + bx + c$ przechodzących przez te punkty (rysunek obok).

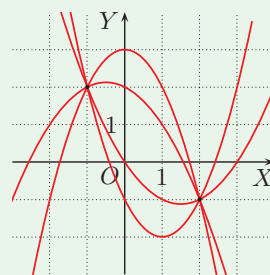
Przez trzy niewspółliniowe punkty (z których żadne dwa nie leżą na prostej pionowej) przechodzi dokładnie jedna parabola $y = ax^2 + bx + c$. Mając dane współrzędne tych punktów, możemy obliczyć współczynniki a , b i c . W tym celu rozwiązujemy odpowiedni układ równań.

Na przykład, aby wyznaczyć równanie paraboli $y = ax^2 + bx + c$ przechodzącej przez punkty: $A(-1, 0)$, $B(1, -4)$ i $C(4, 5)$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest trójka liczb: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, zatem szukana parabola jest dana równaniem $y = x^2 - 2x - 3$.

Uwaga. Jeżeli mamy dany wierzchołek paraboli, to do wyznaczenia jej równania wystarczy znajomość jeszcze jednego należącego do niej punktu.



9. Oblicz współczynniki a , b , c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W .

- a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

10. Wyznacz równanie paraboli, jeśli wiadomo, że przecina ona osie układu współrzędnych w punktach A , B i C . Naszkicuj tę parabolę.

- a) $A(0, 3)$, $B(1, 0)$, $C(3, 0)$ b) $A(0, 6)$, $B(-6, 0)$, $C(2, 0)$

11. Wyznacz równanie paraboli przechodzącej przez punkty A , B , C .

- a) $A(-3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(1, 1)$ c) $A(-5, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(1, -3)$
b) $A(-4, 1)$, $B(-3, -2)$, $C(1, -2)$ d) $A(-4, 1)$, $B(2, -2)$, $C(6, 5)$

- * 12. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać parabolę przechodzącą przez punkty $A(-2, 0)$ i $B(2, 4)$?

- a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$

10. a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

11. a) $y = -x^2 - 2x + 4$

b) $y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{19}{5}$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2}$

d) $y = \frac{9}{40}x^2 - \frac{1}{20}x - \frac{14}{5}$

12. a) $y = x^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} 0 = (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 4 = 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

$$b = 1, c = -2$$

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}, q = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

$$\text{Wektor przesunięcia: } \left[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right].$$

b) $b = 1, c = 6$,

$$p = \frac{1}{2}, q = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$$

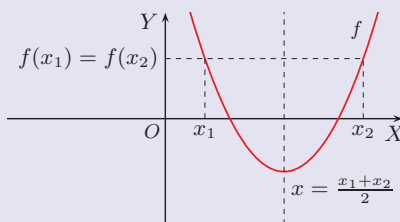
$$\text{Wektor przesunięcia: } \left[\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right].$$

Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$ i dla $x = -3$.
 a) $x^2 - 3x - 6$ b) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-3x^2 + 2x - 1$
- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$ i dla $x = \frac{1}{4}$.
 a) $4x^2 - 2x + 3$ b) $-8x^2 + 4x - 1$ c) $-2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$
- Oblicz wartości funkcji f , g , h dla argumentu $x = -2$ i uporządkuj je w kolejności rosnącej.
 a) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 10x - 5$, $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 4$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 8$, $h(x) = -\frac{17}{8}x^2 - x - 4$
- Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + c$. Oblicz współczynnik c , jeśli:
 a) $f(-2) = 9$, b) $f(4) = -2$, c) $f(-2\sqrt{2}) = -6$.
- Sprawdź, które spośród punktów:
 $A(-1, 2 - 3\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, 10 - 2\sqrt{2})$, $C(-2, 8)$,
 $D(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$, $E(\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2})$
 nie należą do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$.

Twierdzenie

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1, x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



- Sprawdź, czy $f(-3) = f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.
 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$
- Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
 a) $f(x) = x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$
 b) $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$ d) $f(x) = -6x^2 - 6x + 8$

- a) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, -\frac{3}{2})$.
 b) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, 4)$.
- a) $f(-2) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{1}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$.
 b) $f(-2) = 18$, $f(-1) = 6$, $f(1) = -6$, $f(2) = -6$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$.
 c) $f(-2) = -24$, $f(-1) = -12$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
 d) $f(-2) = -4$, $f(-1) = 8$, $f(1) = -4$, $f(2) = -28$, zatem oś symetrii: $x = -\frac{1}{2}$, a wierzchołek: $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$.

Odpowiedzi do zadań

- a) 4, 12 b) $4\frac{1}{2}$, 13
 c) -17, -34
- a) 5, $2\frac{3}{4}$ b) -5, $-\frac{1}{2}$ c) 3, $-1\frac{1}{8}$
- a) $g(-2) = -17$,
 $f(-2) = -15$,
 $h(-2) = -7$
 b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$,
 $h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$
- a) $c = 7$ b) $c = 20$
 c) $c = -5\sqrt{2}$
- A: $f(-1) = 2 - \sqrt{2} \neq 2 - 3\sqrt{2}$
 B: $f(-\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} \neq 10 - 2\sqrt{2}$
 C: $f(-2) = 8$
 D: $f(1 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$
 E: $f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} \neq 8 - 2\sqrt{2}$
 Zatem nie należą punkty:
 A, B, E.

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia oraz zasadę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do przedstawiania wyrażenia w postaci iloczynu,
- rozwiązuje równanie kwadratowe przez rozkład na czynniki,
- interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego,
- rozwiązuje równania kwadratowe z wartością bezwzględną.

Ćwiczenie 1

Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

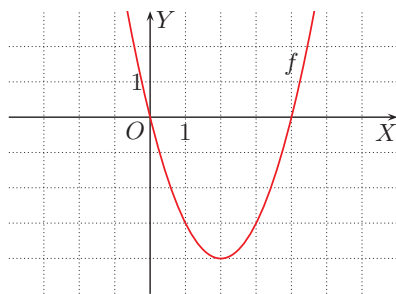
7.4. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = x^2 - 4x$

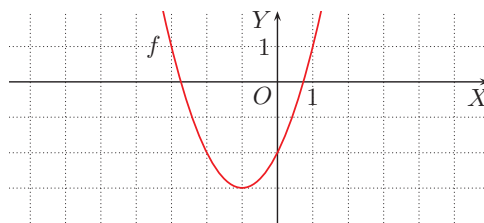
Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x - 2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: $x = 0$ i $x = 4$.

b) $y = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x + 1)^2 - 3$.

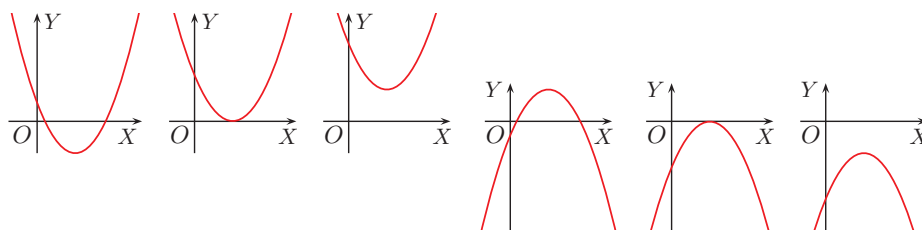


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie ich dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX . Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Uwaga. Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x , dla których równanie jest spełnione. Zbiór tych x nazywamy zbiorem rozwiązań równania. Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Multiteka

• Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x - 2) = 0$$

czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór: $\{0, 2\}$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$:

$$a \cdot b = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = 0 \text{ lub } b = 0.$$

Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $7x - 3x^2 = 0$ c) $2x^2 = 5x$ d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ lub } 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$ b) $4 - 100x^2 = 0$ c) $4x^2 - 121 = 0$ d) $\frac{9}{49}x^2 - 81 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

$$(x - 2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$
b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ f) $3x^2 + 9 = x^2 - 6\sqrt{2}x$

Ćwiczenie 4

a) $(x + 4)^2 = 0, x = -4$ e) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 / \cdot 4$ f) $2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 = 0$
b) $(x - \frac{1}{2})^2 = 0, x = \frac{1}{2}$ $x^2 - 4x + 4 = 0$ $(\sqrt{2}x + 3)^2 = 0$
c) $(2x + 1)^2 = 0, x = -\frac{1}{2}$ $(x - 2)^2 = 0$ $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $(2x - 3)^2 = 0, x = \frac{3}{2}$ $x = 2$

Ćwiczenie 2

a) $\{-2, 0\}$

b) $\{0, \frac{7}{3}\}$

c) $\{0, \frac{5}{2}\}$

d) $\{0, 16\}$

Ćwiczenie 3

a) $x = -\frac{5}{4}$ lub $x = \frac{5}{4}$

b) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$

c) $x = -\frac{11}{2}$ lub $x = \frac{11}{2}$

d) $x = -21$ lub $x = 21$

Ćwiczenie 5

- a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
b) sprzeczne
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
d) sprzeczne

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = 6$
b) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$
c) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{6}$
d) $x = -\frac{1}{9}$ lub $x = 0$
e) $x = 0$ lub $x = 2$
f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 0$
2. a) $x = -\frac{9}{10}$ lub $x = \frac{9}{10}$
b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -5$ d) $x = 8$
e) $x = 12$ f) $x = -\frac{1}{3}$
g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $x = 2$ i) $x = 6$
3. a) $(0, 0), (4, 0)$
b) $(-2, 0), (2, 0), (0, -12)$
c) $(0, 12)$, nie przecina osi OX
d) $(0, 0), (-\frac{1}{225}, 0)$
e) $(0, 4)$, nie przecina osi OX
f) $(-\frac{1}{15}, 0), (\frac{1}{15}, 0), (0, -4)$
4. a) 2 b) -4 c) 3
6. a) $x = -2$ lub $x = 2$
b) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -1$
lub $x = 1$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
d) Jeżeli $x \in (-\infty; 0)$,
to $x^2 = -x$, czyli $x = -1$.
Jeżeli $x \in \langle 0; \infty)$, to
 $x^2 = x$, czyli $x = 0$ lub
 $x = 1$.
Zatem ostatecznie: $x = -1$
lub $x = 0$ lub $x = 1$.

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $\frac{11}{3}x^2 - 7 = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{11}{3}x^2 &= 7 / \cdot \frac{3}{11} \\ x^2 &= \frac{21}{11} \\ x &= -\sqrt{\frac{21}{11}} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{\frac{21}{11}}\end{aligned}$$

b) Rozwiąż równanie $2x^2 + 9 = 0$.

Zauważmy, że $2x^2 + 9 \geq 9$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$, więc $2x^2 + 9$ nie może być równe zero.
Zatem równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $-7x^2 + 42x = 0$ c) $36x^2 = 6x$ e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ d) $2x + 18x^2 = 0$ f) $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $100x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 + 64 = 16x$ g) $x^2 = (1-x)(1+x)$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ e) $24x - x^2 = 144$ h) $\frac{1}{2}x(6-x) = 2+x$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$ f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$ i) $(x-3)(x-2) = 7x-30$

3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

- a) $y = 3x^2 - 12x$ c) $y = 3x^2 + 12$ e) $y = 900x^2 + 4$
b) $y = 3x^2 - 12$ d) $y = 900x^2 + 4x$ f) $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsca zerowe funkcji f i g .

- a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

5. Podaj zbiór rozwiązań równania.

- a) $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ c) $(16x^2 - 8x + 1)(9x^2 - 4) = 0$
b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 = (\frac{3}{2}x - 5)^2$ d) $(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9)(1 - 2x^2) = 0$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $|x^2 - 1| = 3$ b) $|4x^2 - 3| = 1$ c) $|2x^2 - 6| = 0$ d) $x^2 = |x|$

5. a) $(2x+3)^2 - (x-3)^2 = 0$

$$(2x+3-x+3)(2x+3+x-3) = 0$$

$$3x(x+6) = 0$$

$$x \in \{-6, 0\}$$

b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{3}{2}x - 5)^2 = 0$

$$(1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x + 5)(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x - 5) = 0$$

$$(6 - 2x)(x - 4) = 0$$

$$x \in \{3, 4\}$$

c) $(4x-1)^2(3x-2)(3x+2) = 0$

$$x \in \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\}$$

d) $(\frac{1}{2}x+3)^2(x^2 - \frac{1}{2}) = 0$

$$x \in \left\{-6, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

7.5. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(2x - 5)^2 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = \frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...

Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 27 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = -2$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x - 5)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 23 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = 2$$

$$2x - 5 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x - 5 = \sqrt{2}$$

$$2x = 5 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

Równanie ma dwa pierwiastki: $x = \frac{5-\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Ćwiczenie 3

a) $(x - 1)^2 = 4$

$$x - 1 = -2 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 2$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

b) $(x + 3)^2 = 1$

$$x + 3 = -1 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 1$$

$$x = -4 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

c) $(x + 3)^2 = 2$

$$x + 3 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 = \sqrt{2}$$

$$x = -3 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = -3 + \sqrt{2}$$

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia do przedstawiania wyrażenia w postaci iloczynu,
- rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych wzorów,
- interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego,
- stosuje poznane wzory przy szkicowaniu wykresu funkcji kwadratowej,
- rozwiązuje równania kwadratowe z wartością bezwzględną.

Ćwiczenie 1

a) $(3x - 2)^2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

b) $(5x + 4)^2 = 0$

$$x = -\frac{4}{5}$$

c) $(2x - 7)^2 = 0$

$$x = \frac{7}{2}$$

Ćwiczenie 2

a) $(x - 1)^2 = -1$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

b) $(x + 3)^2 = -3$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x + 3)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

c) $(2x + 1)^2 = -4$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x + 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

Multiteka

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.5



Generator
testów i sprawdzianów

Postępując tak, jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

• Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.

• Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

Ćwiczenie 4

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

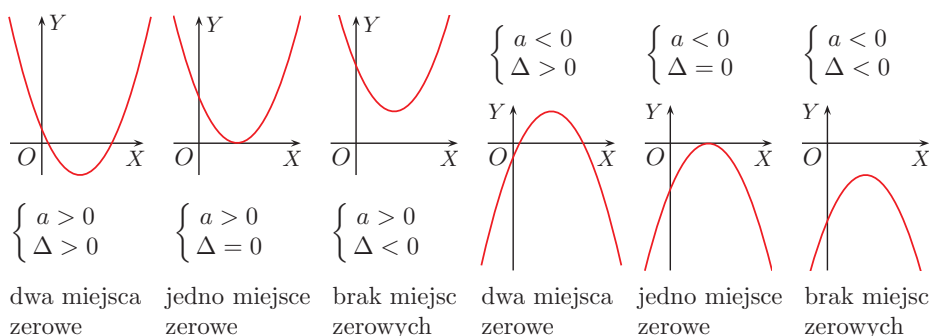
- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ | g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$ |
| b) $x^2 - 4x + 6 = 0$ | e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$ | h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |
| c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$ | f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ | i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$ |

Ćwiczenie 4

- $\Delta = 4 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = -8 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = 35 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 49 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 0$, 1 rozwiązanie
- $\Delta = -12 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = -2 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 9 > 0$, 2 rozwiązania

■ Interpretacja geometryczna

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .



W przypadku gdy funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, możemy je wyznaczyć, korzystając z podanych poprzednio wzorów.

Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$

g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $4x^2 - x - 5 = 0$

e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$

h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$

i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Ćwiczenie 5

a) $\Delta = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $\Delta = 81$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$

c) $\Delta = 49$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$

d) $\Delta = 0$, $x_0 = \frac{1}{14}$

e) $\Delta = 40$, $x_1 = 3 - \sqrt{10}$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$

f) $\Delta = 6$, $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$

g) $\Delta = -32$, brak rozwiązań

h) $\Delta = 28$, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$

i) $\Delta = -1,75$, brak rozwiązań

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 7$
 b) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 3$
 c) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$
 d) sprzeczne
 e) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$
 f) $x_0 = -\frac{3}{2}$
 g) sprzeczne
 h) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$
 i) $x_0 = \frac{2}{3}$
2. a) $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$
 c) $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
 d) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$
 e) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
 f), g) sprzeczne
 h) $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
 i) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$
3. a) $(0, -1), (-1, 0), (\frac{1}{3}, 0)$
 b) $(0, 3), (-\frac{\sqrt{3}+3}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}-3}{2}, 0)$
 c) $(0, 3), (1, 0), (-\frac{3}{4}, 0)$
 d) $(0, 12), (-6, 0)$ e) $(0, 5)$
 f) $(0, 1), (\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$
4. a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$
 c) $x_1 = 5 - \sqrt{13}, x_2 = 5 + \sqrt{13}$
 d) $x_1 = 6, x_2 = 12$
 e) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$
 f) sprzeczne
5. a) $\Delta = 12 - 8\sqrt{2} = 8(1,5 - \sqrt{2}) > 0$,
 2 rozwiązania
 b) $\Delta = \frac{13}{2} - 4\sqrt{3} = 4(\frac{13}{8} - \sqrt{3}) = 4(1,625 - \sqrt{3}) < 0$,
 brak rozwiązań
7. a) $x^2 - 2x = 1$
 lub $x^2 - 2x = -1$
 $x = 1 - \sqrt{2}$
 lub $x = 1 + \sqrt{2}$ lub $x = 1$
 b) $x = -2 - \sqrt{7}$
 lub $x = -2 + \sqrt{7}$ lub $x = -1$
 lub $x = -3$
8. a) $x^2 + x = x^2 - 2$
 lub $x^2 + x = -(x^2 - 2)$
 $x = -2$ lub $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
 lub $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$
 b) $x = 0$ lub $x = \frac{2}{3}$
 c) $x = -2$ lub $x = 1$
 d) $x = -1 - 2\sqrt{2}$
 lub $x = -1 + 2\sqrt{2}$
 lub $x = -1$ lub $x = 1$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$	d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$	g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$	e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$	h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$	f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$	i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$	d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$	g) $11(x^2 + 5) = x$
b) $x + 10 = 3x^2$	e) $5x^2 = 2 - 2x$	h) $x^2 + x = 4x + 7$
c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$	f) $5x^2 = 8x - 5$	i) $3x^2 + 1 = 7x$
3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$	d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$
b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$	e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$	f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$
4. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$	d) $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$
b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$	e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$	f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$
5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$	b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$
-------------------------------------	---
6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f , g i h .

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, $g(x) = 2(x - \frac{1}{4})^2 - 8(x - \frac{1}{4}) + 5$, $h(x) = 2(x - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 - 8(x - \frac{\sqrt{6}}{2}) + 5$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x + \frac{7}{2})^2 + 4(x + \frac{7}{2}) + 6$, $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2\sqrt{7})^2 + 4(x + 2\sqrt{7}) + 6$
7. Rozwiąż równanie.

a) $ x^2 - 2x = 1$	b) $ x^2 + 4x = 3$
---------------------	---------------------
8. Rozwiąż równanie.

a) $ x^2 + x = x^2 - 2 $	c) $ x^2 - 1 = x^2 + 2x - 3 $
b) $ x^2 - x = 2x^2 - x $	d) $ x - 3 = x^2 + x - 4 $
6. a) $f(x) = 0$ dla $x = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$
 Zauważmy, że $g(x) = f(x - \frac{1}{4})$, czyli $g(x) = 0$, gdy $f(x - \frac{1}{4}) = 0$.
 Zatem $g(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{4} + 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = \frac{1}{4} + 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.
 Zauważmy, że $h(x) = f(x - \frac{\sqrt{6}}{2})$, czyli $h(x) = 0$, gdy $f(x - \frac{\sqrt{6}}{2}) = 0$.
 Zatem $h(x) = 0$ dla $x = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = 2$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$.
 b) $f(x) = 0$ dla $x = 4 - 2\sqrt{7}$ lub $x = 4 + 2\sqrt{7}$
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{2} - 2\sqrt{7}$ lub $x = \frac{1}{2} + 2\sqrt{7}$
 $h(x) = 0$ dla $x = 4 - 4\sqrt{7}$ lub $x = 4$

Szkicowanie paraboli

Aby naszkicować parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, można wykorzystać postać kanoniczną funkcji f lub postąpić zgodnie z następującą instrukcją.

- Podaj punkt, w którym parabola przecina oś OY . Jest to punkt $(0, c)$.
- Wyznacz (jeśli istnieją) punkty, w których parabola przecina oś OX . Są to punkty $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, gdzie $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wyznacz wierzchołek paraboli $W(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.
- Aby uzyskać dokładniejszy szkic, wyznacz kilka dodatkowych punktów należących do paraboli (można wykorzystać fakt, że prosta $x = -\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii paraboli).
- Połącz otrzymane punkty krzywą.

Przykład

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.

- Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\Delta = 16, \text{ stąd } x_1 = \frac{2-4}{2} = -1, x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Parabola przecina oś OX w punktach $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

- Wyznaczamy wierzchołek paraboli.

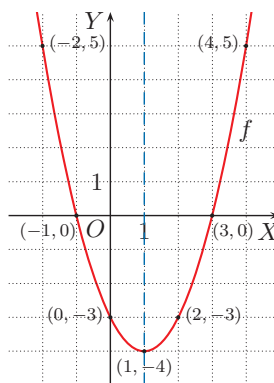
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_w = f(-\frac{b}{2a}) = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, -4)$.

- Wyznaczamy inne punkty należące do paraboli. $f(-2) = 5$, czyli do paraboli należy punkt $(-2, 5)$. Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli, więc należą do niej także punkty $(4, 5)$ i $(2, -3)$.

- Szkicujemy parabolę.



1. Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f .

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

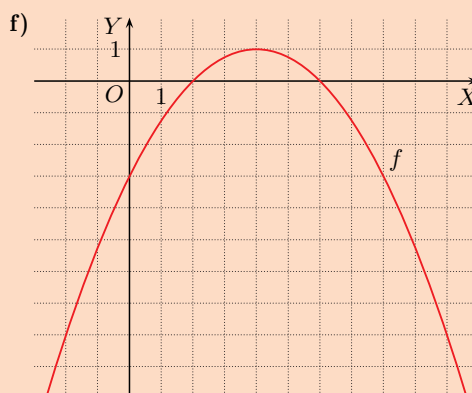
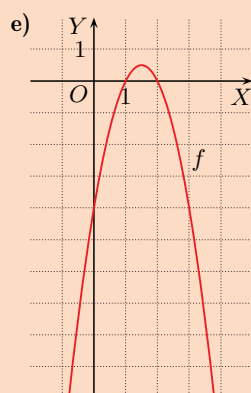
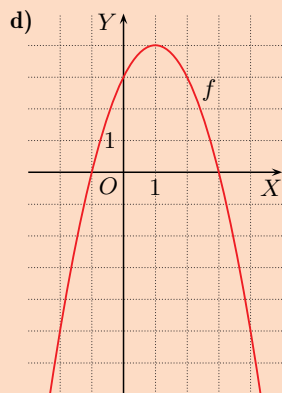
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

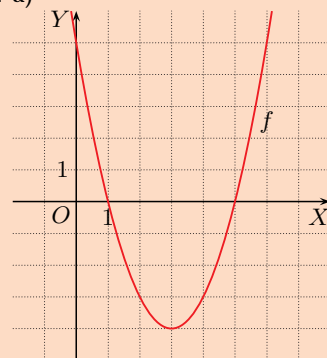
c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$

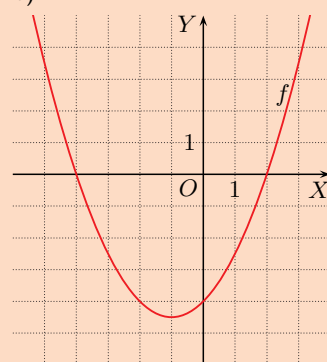


Odpowiedzi do zadań

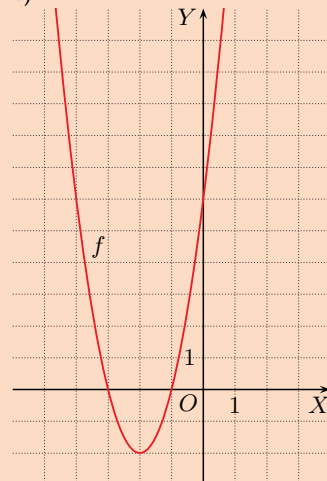
1. a)



b)



c)



Uczeń:

- definiuje postać iloczynową funkcji kwadratowej i warunek jej istnienia,
- zapisuje funkcję kwadratową w postaci iloczynowej,
- odczytuje wartości pierwiastków trójkątnu podanego w postaci iloczynowej,
- przekształca postać iloczynową funkcji kwadratowej do postaci ogólnej,
- wykorzystuje postać iloczynową funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9$
b) $y = 4x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$
c) $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x$

7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$$\begin{aligned}y &= (3x + 2)(x - 7) = && \text{Czynniki liniowe: } 3x + 2 \text{ i } x - 7 \\&= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 7) && \text{Czynniki liniowe: } x + \frac{2}{3} \text{ i } x - 7\end{aligned}$$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie.

Na przykład dla trójkątnu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójkątn kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$ b) $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ c) $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójkątnu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójkątnu kwadratowego.

a) $y = 4(x - 3)(x - 5)$ c) $y = -(x + 4)(x + 8)$ e) $y = -3(x - 2)^2$
b) $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$ d) $y = 8x(x - 9)$ f) $y = 13(x + 7)^2$

Ćwiczenie 2

- a) czynniki liniowe: $x - 3$ i $x - 5$
pierwiastki: $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$
b) czynniki liniowe: $x - 2$ i $x + 6$
pierwiastki: $x_1 = 2$ i $x_2 = -6$
c) czynniki liniowe: $x + 4$ i $x + 8$
pierwiastki: $x_1 = -4$ i $x_2 = -8$
d) czynniki liniowe: x i $x - 9$
pierwiastki: $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$
e) czynniki liniowe: $x - 2$ (podwójny)
pierwiastki: $x = 2$ (podwójny)
f) czynniki liniowe: $x + 7$ (podwójny)
pierwiastki: $x = -7$ (podwójny)

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 3

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 - 8x + 15$

d) $y = 12x^2 + 11x + 2$

g) $y = 2x^2 - 3x + 4$

b) $y = x^2 + 3x - 28$

e) $y = -2x^2 - 2x + 24$

h) $y = x^2 - 2x - 2$

c) $y = 3x^2 - 7x + 2$

f) $y = -4x^2 + 3x + 1$

i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = -(x - 3)(x - 13)$

d) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$

b) $y = 2(x - 2)(x + 5)$

e) $y = -2(x + 1)(x + 1 - \sqrt{2})$

c) $y = \frac{1}{3}(x + 15)(x + 9)$

f) $y = (x + 2 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{2})$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = 3, x_2 = 13$

b) $x_1 = 2, x_2 = -5$

c) $x_1 = -15, x_2 = -9$

d) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$

e) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$

f) $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = 4, y = (x - 3)(x - 5)$

b) $\Delta = 121, y = (x + 7)(x - 4)$

c) $\Delta = 25, y = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2)$

d) $\Delta = 25, y = 12(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4})$

e) $\Delta = 196, y = -2(x - 3)(x + 4)$

f) $\Delta = 25, y = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$

g) $\Delta = -23 < 0$. Trójmian nie ma pierwiastków i nie można zapisać go w postaci iloczynowej.

h) $\Delta = 12, y = (x + \sqrt{3} - 1)(x - \sqrt{3} - 1)$

i) $\Delta = 12, y = 2(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

2. a) $\Delta = 25$, $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
 b) $\Delta = 25$, $y = -(x - 3)(x + 2)$
 c) $\Delta = 49$, $y = 4(x - 1)(x + \frac{3}{4})$
 d) $\Delta = 13$,
 $y = 3(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{6})(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{6})$
 e) $\Delta < 0$,
 nie ma postaci iloczynowej
 f) $\Delta = 27$,
 $y = (x - \sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$
 g) $y = -2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
 h) $y = \frac{1}{3}x(x + \frac{1}{2})$
 i) nie ma postaci iloczynowej

3. a) $b = -8$, $c = 15$
 b) $b = 5$, $c = -36$
 c) $b = -7\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{3}$
 d) $b = \frac{11}{35}$, $c = -\frac{6}{35}$
 e) $b = 5$, $c = 0$
 f) $b = 0$, $c = -3$
 g) $b = -(1 + 2\sqrt{2})$, $c = 2 + \sqrt{2}$
 h) $b = -2$, $c = -6$

4. a) $x = 3$, $W(3, -9)$
 b) $x = -2$, $W(-2, -8)$
 c) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -4)$
 5. a) $(0, 0)$, $(-6, 0)$, $W(-3, 9)$
 b) $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$,
 $W(3, -4)$
 c) $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$,
 $W(-1, 2)$

6. a) $y = a(x + 1)(x - 3)$
 Obliczamy współrzędne
 wierzchołka paraboli:
 $x_w = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_w = -4$.
 Zatem $a(1 + 1)(1 - 3) = -4$,
 czyli $a = 1$.

Postać iloczynowa:
 $y = (x + 1)(x - 3)$

Postać ogólna:
 $y = x^2 - 2x - 3$

Postać kanoniczna:
 $y = (x - 1)^2 - 4$

2. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

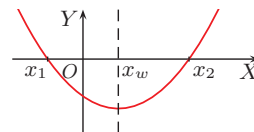
a) $y = 2x^2 - 3x - 2$ d) $y = 3x^2 - 5x + 1$ g) $y = 10 - 2x^2$
 b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = -4x^2 + 2x - 1$ h) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$
 c) $y = 4x^2 - x - 3$ f) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ i) $y = 6x^2 + 9$

3. Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$ o podanych pierwiastkach.

a) 3 i 5 c) $\frac{1}{3}$ i 7 e) -5 i 0 g) $\sqrt{2}$ i $1 + \sqrt{2}$
 b) 4 i -9 d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ f) $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$ h) $1 + \sqrt{7}$ i $1 - \sqrt{7}$

4. Przeczytaj informację w ramce.

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

a) $y = x(x - 6)$ b) $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 2)$ c) $y = (2x + 1)(2x - 3)$

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naskicuj tę parabolę.

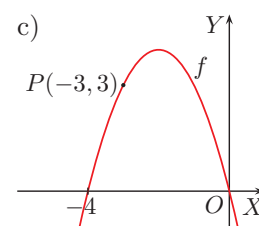
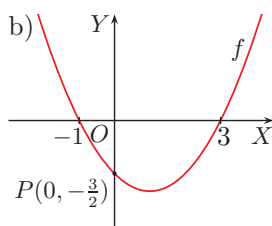
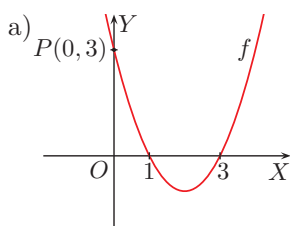
a) $y = -x(x + 6)$ b) $y = (x - 1)(x - 5)$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości W . Odpowiedź podaj w jednej z wymienionych poniżej postaci.

a) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $W = \langle -4; \infty \rangle$
 b) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $W = (-\infty; 2]$
 c) $x_1 = -8$, $x_2 = 2$, $W = (-\infty; 10]$
 d) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $W = \langle -6; \infty \rangle$

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$
 Postać kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q$
 Postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

7. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



6. b) $y = ax(x + 4)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{-4+0}{2} = -2$, $y_w = 2$.

Zatem $a(-2)(-2 + 4) = 2$, czyli $a = -\frac{1}{2}$.

Postać iloczynowa: $y = -\frac{1}{2}x(x + 4)$

Postać ogólna: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

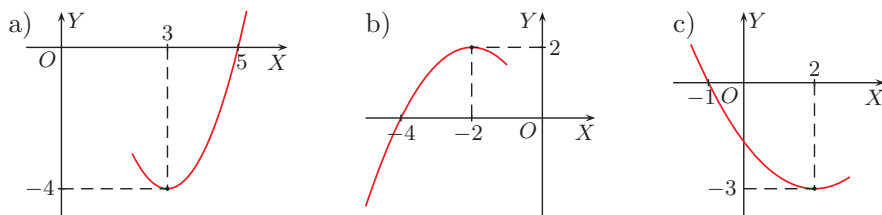
Postać kanoniczna: $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$

c) $y = -\frac{2}{5}(x + 8)(x - 2) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{32}{5} = -\frac{2}{5}(x + 3)^2 + 10$

d) $y = \frac{2}{3}x(x - 6) = \frac{2}{3}x^2 - 4x = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 6$

7. a) $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
 c) $f(x) = -x(x + 4) = -x^2 - 4x$

8. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.



9. a) Jeden pierwiastek trójkianu kwadratowego jest o dwa większy od drugiego. Wyznacz ten trójkian, jeśli wiadomo, że parabola będąca jego wykresem ma wierzchołek w punkcie $(-2, 4)$.

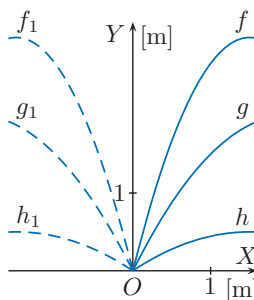
b) Jeden pierwiastek trójkianu kwadratowego jest trzy razy większy od drugiego. Wyznacz ten trójkian, jeśli wiadomo, że parabola będąca jego wykresem ma wierzchołek w punkcie $(4, 2)$.

10. Krople wody tryskające z fontanny poruszają się po torach opisanych za pomocą wzorów:

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

$$h(x) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Parabole f_1, g_1, h_1 są symetryczne odpowiednio do parabol f, g i h względem osi OY . Podaj równania parabol f_1, g_1, h_1 w postaciach kanonicznej i iloczynowej.



11. Oblicz współczynniki b i c trójkianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastki są dwukrotnie większe od pierwiastków trójkianu:

a) $y = x^2 - 4x + 3$, b) $y = x^2 - 3\sqrt{2}x + 4$, c) $y = x^2 - 4x + 2$.

12. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$, aby otrzymać wykres trójkianu kwadratowego, którego pierwiastkami są liczby:

a) 1 i 5, b) -6 i 2, c) $3 - \sqrt{2}$ i $3 + \sqrt{2}$.

- D** 13. Trójkian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$ ma postać kanoniczną:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Wykaż, że jeśli $\Delta \geq 0$, to trójkian można zapisać w postaci iloczynowej.

Uwaga. Jest to dowód twierdzenia ze s. 313.

12. a) Wzór trójkianu, którego pierwiastkami są liczby 1 i 5, ma postać:

$$y = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

Obliczamy współrzędne paraboli:

$$x_w = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_w = \frac{1}{2}(3-1)(3-5) = -2$$

Zatem wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ należy przesunąć o wektor $[3, -2]$.

b) $[-2, -8]$

c) $[3, -1]$

13. $\Delta \geq 0$, zatem trójkian kwadratowy $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ można zapisać

$$\text{w postaci: } y = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a \left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) =$$

$$= a(x-x_1)(x-x_2)$$

8. a) $x = 1$,
 $f(x) = (x-1)(x-5)$,
 $f(x) = (x-3)^2 - 4$

b) $x = 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4)$,
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

c) $x = 5$,
 $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-5)$,
 $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$

9. Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami.

a) Z założenia $x_2 = x_1 + 2$,
wówczas: $\frac{x_1 + (x_1 + 2)}{2} = -2$,
czyli $x_1 = -3$, stąd $x_2 = -1$.

Do równania

$$y = a(x+3)(x+1)$$

podstawiamy współrzędne wierzchołka i otrzymujemy $a = -4$.

Trójkian ma postać:

$$y = -4(x+3)(x+1) =$$

$$= -4x^2 - 16x - 12$$

b) $x_2 = 3x_1$, $\frac{x_1 + 3x_1}{2} = 4$,
czyli $x_1 = 2$, stąd $x_2 = 6$.

$$a(4-2)(4-6) = 2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Trójkian ma postać:

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)(x-6) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$$

10. $f_1(x) = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3 =$
 $= -\frac{4}{3}x(x+3)$,

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 =$$

$$= -\frac{1}{2}x(x+4)$$
,

$$h_1(x) = -\frac{2}{9}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{2}{9}x(x+3)$$

11. a) $y = x^2 - 4x + 3 =$
 $= (x-3)(x-1)$

Zatem szukany trójkian:

$$y = (x-6)(x-2) =$$

$$= x^2 - 8x + 12,$$

czyli $b = -8$, $c = 12$.

b) $b = -6\sqrt{2}$, $c = 16$

c) $b = -8$, $c = 8$

Rzut ukośny

Tory rzuconej piłki, ukośnie skierowanego strumienia wody czy lawy wyrzuconej z wulkanu to fragmenty paraboli (jeżeli pominie się opór powietrza).

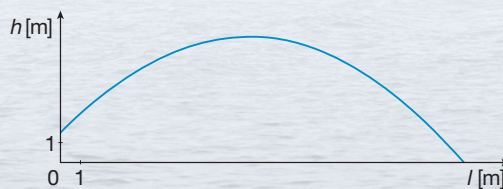


Portowa straż pożarna

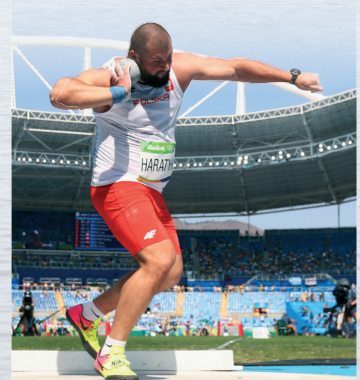
Ruch wody wystrzelianej z armatek statku gaśniczego pod dużym ciśnieniem jest przykładem rzutu ukośnego. Umożliwia to zwalczanie pożarów na jednostkach pływających i na obszarach portowo-stoczniowych z bezpiecznej odległości.

Pchnięcie kulą

Rysunek pokazuje tor lotu kuli pchniętej przez zawodnika podczas zawodów w pchnięciu kulą (h – wysokość, l – odległość). Tor lotu kuli jest fragmentem paraboli $y = ax^2 + bx + c$, której wierzchołek ma współrzędne $(10, 6\frac{1}{2})$ i która przechodzi przez punkt $(0, 1\frac{1}{2})$.



- 1 Wyznacz równanie paraboli.
- 2 Czy zawodnik uzyskał wynik powyżej 20 m?



1. $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x + \frac{3}{2}$
2. $f(20) = \frac{3}{2} > 0$, zatem zawodnik uzyskał wynik powyżej 20 m.

7.7. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

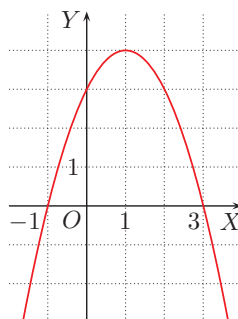
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane w górę czy w dół.



Przykład 2

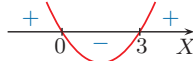
Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 6x > 0$

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$



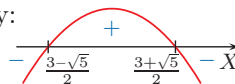
b) $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem: } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left\langle \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\rangle$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $2x^2 + x - 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

Ćwiczenie 1

a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$

b) $x \in (-1; \frac{1}{2})$

c) $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$

Uczeń:

- rozumie związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniego trójmianu kwadratowego,
- rozwiązuje nierówność kwadratową,
- wyznacza na osi liczbowej iloczyn, sumę i różnicę zbiorów rozwiązań kilku nierówności kwadratowych.

Komentarz

Dużym ułatwieniem przy odczytywaniu zbiorów rozwiązań nierówności jest zaznaczenie na szkicu wykresu znaków „+” i „-” (jak na rysunkach w przykładzie 2).

Multiteka

- Nierówność kwadratowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $x \in \mathbf{R}$
- b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$
- c) sprzeczna

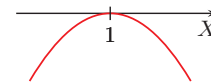
Ćwiczenie 3

- a) $\Delta = -12 < 0$, $a = 4 > 0$,
zatem $x \in \mathbf{R}$
- b) $\Delta = -11 < 0$, $a = 1 > 0$,
zatem nierówność jest sprzeczna
- c) $\Delta = -6 < 0$, $a = -2 < 0$,
zatem $x \in \mathbf{R}$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x - 1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół. Ze szkicu wykresu odczytujemy: $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ dla $x = 1$.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

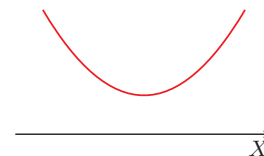
- a) $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$
- b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$
- c) $-x^2 + 2x - 1 > 0$

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

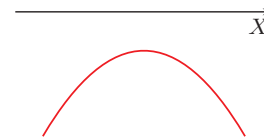
Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x , czyli $x \in \mathbf{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $4x^2 + 2x + 1 > 0$
- b) $x^2 + x + 3 < 0$
- c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

Przykład 5

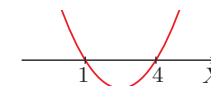
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Wykonujemy mnożenie.
Przenosimy wszystkie wyrazy
na lewą stronę nierówności.

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1; 4)$.



Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geq 6$ g) $9x + 5 \geq 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$
 b) $x^2 \leq 16$ e) $x^2 - 4 \leq 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geq \frac{1}{2}x^2$
 c) $4x^2 \geq 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leq x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność?

- a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leq x$ d) $2 - x > x^2$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ c) $x^2 + 2x + 2 > 0$ e) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
 b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$ d) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ f) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

4. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

- a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$ d) $(2x - 2)^2 \geq (3x - 2)(x - 3)$
 b) $(3x - 1)(x + 2) \geq (x - 3)(2x - 1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geq -(x - 1)^2 - 6$
 c) $(4x - 1)(4 - x) \leq (2 - 3x)(x + 1)$ f) $(2x + 3)^2 - 9 < 8 - (3 - x)^2$

6. Dane są zbiory A i B . Zaznacz na osi liczbowej zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

- a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -x^2 \leq 4x\}$
 b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + \frac{7}{2}x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0\}$

7. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4 - x^2}$
 b) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$ d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{9 - 4x^2}$

8. Boki prostokąta mają długości równe $x - 1$ i $2x + 3$. Podaj wzór funkcji P zmiennej x opisującej pole tego prostokąta i określ jej dziedzinę. Dla jakich wartości x pole tego prostokąta jest:

- a) mniejsze od 7, b) większe od 18?

9. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - 4|x| \geq 0$ b) $x^2 + 2|x| < 3$ c) $2x^2 - 5|x| \geq 3$

7. a) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$,

$$D = (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$$

b) $-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$, $D = \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$

$$c) \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \\ x \in \langle -2; 2 \rangle \end{cases}$$

$$D = \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$$

$$d) \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 9 - 4x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty \rangle \\ x \in \langle -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \rangle \end{cases}$$

$$D = \langle -\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2} \rangle$$

8. $P(x) = (x - 1)(2x + 3)$, $D = (1; \infty)$

- a) $x \in (1; 2)$ b) $x \in (3; \infty)$

9. a) Dla $x < 0$ mamy: $x^2 + 4x \geq 0$,

czyli $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 0; \infty \rangle$.

Z założenia $x < 0$, zatem $x \in (-\infty; -4)$.

Dla $x \geq 0$ mamy: $x^2 - 4x \geq 0$,

czyli $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 4; \infty \rangle$.

Z założenia $x \geq 0$, zatem $x \in \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$.

Ostatecznie: $x \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$.

b) $x \in (-1; 1)$

c) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty \rangle$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$

b) $x \in \langle -4; 4 \rangle$

c) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$

d) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty \rangle$

e) $x \in \langle -1; 4 \rangle$ f) $x \in (-1; 5)$

g) $x \in \langle -\frac{1}{2}; 5 \rangle$

h) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

i) sprzeczna

j) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$

k) $x \in \langle -2; 8 \rangle$ l) sprzeczna

2. a) $x \in \langle -6; 6 \rangle$, trzynastcie

b) $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$, nieskończenie wiele

c) $x \in \langle -2; 2\frac{1}{2} \rangle$, pięć

d) $x \in (-2; 1)$, dwie

3. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ b) $x \in \mathbf{R}$

c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$

e) sprzeczna f) $x = \frac{3}{2}$

4. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$

c) $x \in (-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

5. a) $x \in (-2; 3)$

b) $x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}) \cup \langle -6 + \sqrt{41}; \infty \rangle$

c) $x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}) \cup \langle 9 + 5\sqrt{3}; \infty \rangle$

d) $x \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left\langle \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \infty \right\rangle$

e) $x \in \mathbf{R}$ f) $x \in (-1; -\frac{1}{5})$

6. a) $A = \langle -2; 3 \rangle$,

$B = (-\infty; -4) \cup \langle 0; \infty \rangle$,

$A \cup B = (-\infty; -4) \cup \langle -2; \infty \rangle$,

$A \cap B = \langle 0; 3 \rangle$, $A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle$

b) $A = (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$,

$B = \{\frac{1}{2}\}$,

$A \cup B = (-\infty; -4) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$,

$A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$

7.8. Zagadnienia uzupełniające

■ Spadek swobodny i ruch pionowy w górę

Jeśli pominiemy opór powietrza, to drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało możemy opisać za pomocą wzoru $s = \frac{gt^2}{2}$, gdzie t jest czasem, a g – przyspieszeniem ziemskim. Dla $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ mamy $s \approx 4,9t^2$.

Galileusz w *Rozmowach i dowodzeniach matematycznych...* z 1638 roku analizował funkcję opisującą ruch spadającego ciała. Znał jego doświadczenie, podczas którego z wieży w Pizie, z wysokości 49 metrów, zrzucił metalowe kule.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $-4,9t^2 + 49 \geq 0, t \geq 0$

$$4,9t^2 \leq 49$$

$$t^2 \leq 10$$

$$t \in \langle -\sqrt{10}; \sqrt{10} \rangle, t \geq 0$$

Dziedzina funkcji h jest zbiór $\langle 0; \sqrt{10} \rangle$.

$$h(t) = 0 \text{ dla } t = \sqrt{10}$$

b) 1 sekundę przed końcem spadania kula była na wysokości:

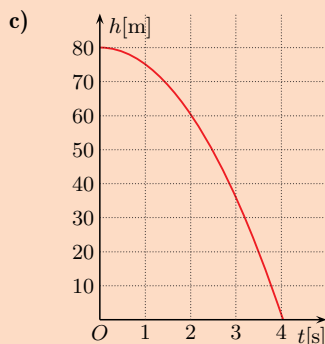
$$h(\sqrt{10} - 1) =$$

$$= -4,9(\sqrt{10} - 1)^2 + 49 =$$

$$= -4,9(11 - 2\sqrt{10}) + 49 =$$

$$= 9,8\sqrt{10} - 4,9 \approx 26$$

W ostatniej sekundzie kula przebyła około 26 m.



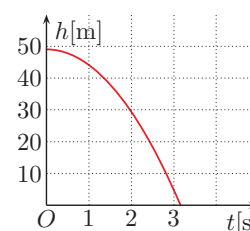
1. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość h od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 49 m, w zależności od czasu t , można opisać za pomocą wzoru $h(t) = -4,9t^2 + 49$.

a) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i uzupełnij ją. Znajdź miejsca zerowe i określ dziedzinę tej funkcji.

$t[s]$	0	1	2	3
$h[m]$	49	44,1	29,4	4,9

b) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji h będący fragmentem paraboli. Ile metrów przebyła kula w ostatniej sekundzie?

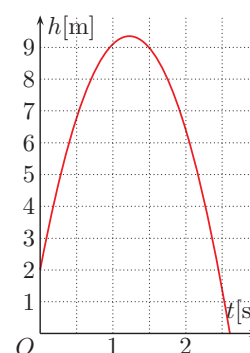
c) Naszkicuj wykres funkcji $k(t) = -4,9t^2 + 80$ opisującej odległość k od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 80 m.



2. Wysokość nad ziemią piłki wyrzuconej pionowo w górę z prędkością 12 m/s (ręka osoby rzucającej piłkę była wzniesiona w momencie rzutu 2 m nad ziemię) dana jest wzorem $h(t) = -4,9t^2 + 12t + 2$. Wykres funkcji h przedstawiono na rysunku.

a) Odczytaj z wykresu przybliżoną wysokość, jaką osiągnęła piłka. Jaka jest długość drogi, którą przebyła piłka?

b) Jak sądzisz, kiedy piłka poruszała się z większą prędkością – w chwili $t = 1$ s czy $t = 2$ s?



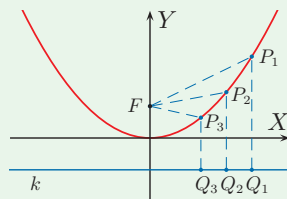
2. a) $h \approx 9,3$ m, około 16,6 m

b) Prędkość piłki od momentu rzucenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości malała aż do wartości 0, po czym zaczęła rosnąć. Na danej wysokości prędkości w czasie wznoszenia i w czasie opadania były równe co do wartości (ale przeciwnie skierowane). Dlatego dla $t = 2$ s piłka poruszała się z większą prędkością.

■ Parabola

Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (zwanej **kierownicą**) i ustalonego punktu F (zwanego **ogniskiem**). Na rysunku obok mamy:

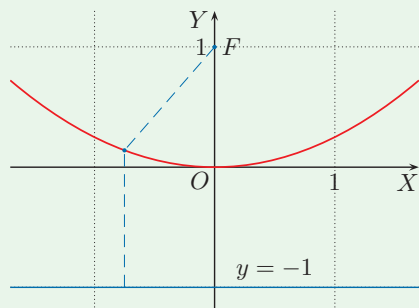
$$|P_1F| = |P_1Q_1|, |P_2F| = |P_2Q_2|, |P_3F| = |P_3Q_3|$$



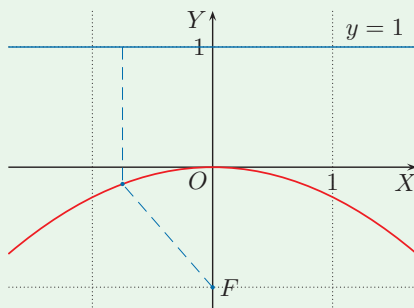
Parabola, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej $y = -p$ i punktu $F(0, p)$, jest określona za pomocą równania $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Przykład 1

Parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -1$ i ognisko $F(0, 1)$.



Parabola $y = -\frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = 1$ i ognisko $F(0, -1)$.



Parabola $y = x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -\frac{1}{4}$ i ognisko $F(0, \frac{1}{4})$.

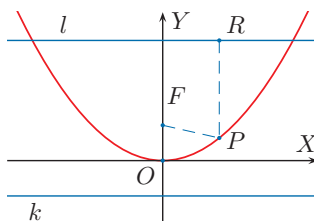
3. Podaj równanie paraboli, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej k i punktu F .

a) $k: y = -\frac{1}{2}, F(0, \frac{1}{2})$ b) $k: y = \frac{1}{2}, F(0, -\frac{1}{2})$ c) $k: y = -\frac{1}{6}, F(0, \frac{1}{6})$

4. Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli:

a) $y = -x^2$, b) $y = 2x^2$, c) $y = -2x^2$, d) $y = \frac{1}{8}x^2$.

- D** 5. Dana jest parabola o ognisku F i kierownicy k . Prosta l jest równoległa do kierownicy i leży powyżej wierzchołka paraboli. Uzasadnij, że dla dowolnego punktu P należącego do paraboli suma odległości tego punktu od ogniska i prostej l jest stała.



5. Niech P' będzie rzutem punktu P na prostą k . Wówczas:

$$|PR| = |P'R| - |PP'|$$

Zatem:

$$|PF| + |PR| = |PF| + |P'R| - |PP'| = |P'R|$$

ponieważ $|PF| = |PP'|$.

Czyli suma odległości punktu P od ogniska i prostej l jest równa odległości między prostymi k i l , więc jest stała.

3. a) $y = \frac{1}{2}x^2$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2$

c) $y = \frac{3}{2}x^2$

4. a) $y = \frac{1}{4}, F(0, -\frac{1}{4})$

b) $y = -\frac{1}{8}, F(0, \frac{1}{8})$

c) $y = \frac{1}{8}, F(0, -\frac{1}{8})$

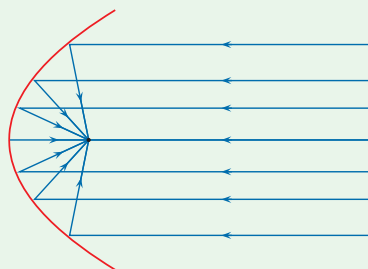
d) $y = -2, F(0, 2)$

6. Skonstruuj parabolę zgodnie z podanym niżej opisem.

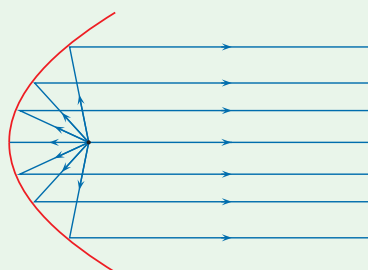
- Narysuj kierownicę i prostą do niej prostopadłą – oś symetrii paraboli.
- Na osi symetrii wybierz punkt F – ognisko paraboli i zaznacz wierzchołek paraboli w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą.
- Po tej samej stronie wierzchołka, po której znajduje się ognisko, narysuj kilka prostych równoległych do kierownicy.
- Odmierz cyrklem odległość każdej z narysowanych prostych od kierownicy, a następnie narysuj łuk okręgu o środku w punkcie F i promieniu równym tej odległości – punkty przecięcia łuku z daną prostą należą do paraboli.

Czy wiesz, że...

Promienie równoległe padające na zwierciadło o parabolicznym kształcie po odbiciu skupiają się w jednym punkcie zwanym ogniskiem paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się w telewizyjnych antenach satelitarnych i radioteleskopach, w których odbiornik umieszcza się w ognisku, aby uzyskać silny sygnał.



Natomiast promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego po odbiciu są równoległe. Zjawisko to jest wykorzystywane na przykład w reflektorach samochodowych.



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f .
a) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$ c) $f(x) = x^2 - 8x + 7$ e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$
b) $f(x) = -x^2 + 6x$ d) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ f) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x$
- Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naskicuj tę parabolę.
a) $y = x^2 - 4x$ c) $y = -x^2 + 2x + 8$ e) $y = 2x^2 - 5x + 2$
b) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = x^2 + 6x + 8$ f) $y = -2x^2 + 8x - 6$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ c) $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$ e) $3x^2 + 5x + 1 = 0$
b) $-6x^2 - 7x + 5 = 0$ d) $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$ f) $2x^2 - 3x - 1 = 0$
- Rozwiąż równanie.
a) $49x^2 + 140x + 100 = 0$ e) $(2x-4)(x-10) = (x+6)(x-10)$
b) $x^2 + 6x + 9 = (2x-1)^2$ f) $x(3-x) = (2x+1)(x+2) - 1$
c) $3x^2 + 2x + 1 = 3x + 4x^2 - 3$ g) $(x-1)(x+2) = (2x-3)(x+4)$
d) $4 - \frac{1}{4}x^2 - 3x = x^2 + 2x + 9$ h) $(2x-1)^2 = (3-x)(x-6)$
- Rozwiąż nierówność.
a) $3x^2 - 1 \geq 0$ e) $x^2 - 3x(x-1) \leq 2(x-1)(x+1) - 4x$
b) $-4x^2 \leq 12x$ f) $7 - x(5x+2) > 3 - x(4-x)$
c) $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 7 < 0$ g) $2x^4 + x^2 - 3 \geq (1-2x^2)(3-x^2)$
d) $6x^2 + 3 > 2x$ h) $(2-3x)^2 - 6(3x-1) \leq -(1-4x)(2x-1)$
- Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Wyznacz współczynniki b i c oraz zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
a) $W(0, 1)$ b) $W(1, 3)$ c) $W(-2, 2)$ d) $W(4, -1)$
- Wyznacz współczynnik b tak, aby podany przedział był zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + 1$.
a) $\langle -1; \infty \rangle$ b) $\langle 0; \infty \rangle$ c) $\langle 2; \infty \rangle$ d) $\langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$

- a) $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$
b) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 0; \infty \rangle$
c) $x \in (10 - 6\sqrt{2}; 10 + 6\sqrt{2})$
d) $x \in \mathbf{R}$
e) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \langle 2; \infty \rangle$
f) $x \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$
g) $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$
h) $x \in \langle 12 - 3\sqrt{15}; 12 + 3\sqrt{15} \rangle$
- a) $b = 0, c = 1, f(x) = x^2 + 1$
b) $b = -2, c = 4, f(x) = (x-1)^2 + 3$
c) $b = 4, c = 6, f(x) = (x+2)^2 + 2$
d) $b = -8, c = 15, f(x) = (x-4)^2 - 1$
- Wyznaczamy drugą współrzędną wierzchołka: $\Delta = b^2 - 8$ i wtedy $y_w = \frac{8-b^2}{8}$.
a) $\frac{8-b^2}{8} = -1$, czyli $b = -4$ lub $b = 4$.
b) $\frac{8-b^2}{8} = 0$, czyli $b = -2\sqrt{2}$ lub $b = 2\sqrt{2}$.
c) $\frac{8-b^2}{8} = 2$, czyli $b^2 = -8$, zatem nie ma takiego b .
d) $\frac{8-b^2}{8} = \frac{1}{2}$, czyli $b = -2$ lub $b = 2$.

Odpowiedzi do zadań

- a) $f(D) = \langle -\sqrt{2}; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 0)$,
rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$
b) $f(D) = (-\infty; 9)$,
rośnie w $(-\infty; 3)$,
maleje w $\langle 3; \infty \rangle$
c) $f(D) = \langle -9; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 4)$,
rośnie w $\langle 4; \infty \rangle$
d) $f(D) = (-\infty; 9)$,
rośnie w $(-\infty; 2)$,
maleje w $\langle 2; \infty \rangle$
e) $f(D) = (-\infty; 3)$,
rośnie w $(-\infty; 3)$,
maleje w $\langle 3; \infty \rangle$
f) $f(D) = \langle -\frac{3}{32}; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; -\frac{3}{4})$,
rośnie w $\langle -\frac{3}{4}; \infty \rangle$
- a) $(0, 0), (4, 0), W(2, -4)$
b) $(0, 0), (2, 0), W(1, 1)$
c) $(0, 8), (-2, 0), (4, 0), W(1, 9)$
d) $(0, 8), (-2, 0), (-4, 0), W(-3, -1)$
e) $(0, 2), (\frac{1}{2}, 0), (2, 0), W(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8})$
f) $(0, -6), (3, 0), (1, 0), W(2, 2)$
- a) $x_1 = -7, x_2 = 3$
b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$
c) $x_0 = \frac{8}{3}$ d) sprzeczne
e) $x_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$
f) $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
- a) $x_0 = -\frac{10}{7}$
b) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 4$
c) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
d) $x_0 = -2$ e) $x_0 = 10$
f) sprzeczne
g) $x_1 = -2 - \sqrt{14}, x_2 = -2 + \sqrt{14}$
h) sprzeczne



Zestaw II

1. a) $x_w = 1$

Podstawiamy $W(1, 2)$ do równania $y = a(x+1)(x-3)$ i otrzymujemy $a = -\frac{1}{2}$.

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{5}(x+3)(x-7) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{21}{5}$$

$$\text{c) } f(x) = 5(x-3)^2 = 5x^2 - 30x + 45$$

2. a) $y = -(x-2)^2 + 4$

b) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 4$

c) $y = \frac{3}{8}(x-2)^2 + 4$

3. a) $x = 7$ b) $x = -9$

c) $x = -2$ d) $x = -\frac{1}{2}$

4. a) $x_1 = -2, x_2 = 3$

b) $x_1 = -2, x_2 = 3$

c) $x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{3}$

d) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{5}$

e) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$

f) $x_1 = -2, x_2 = -1$

5. a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; \infty)$

i $x \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$,

czyli $x \in \langle -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \rangle$

b) $x \in \langle \frac{5-\sqrt{97}}{6}; \frac{5+\sqrt{97}}{6} \rangle$

i $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; \infty)$,

czyli $x \in (\frac{5}{3}; \frac{5+\sqrt{97}}{6})$

6. a) $a = -2, b = 0, c = 2$,

$y = -2(x-1)(x+1)$

b) $a = -1, b = 0, c = 4$,

$y = -(x-2)(x+2)$

c) $a = 4, b = -24, c = 36$,

$y = 4(x-3)^2$

d) $a = -2, b = 8, c = -4$,

$y = -2(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f , jeśli wiadomo, że:

a) przyjmuje ona największą wartość równą 2, a jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3 ,

b) jej zbiorem wartości jest przedział $(-5; \infty)$, a miejscami zerowymi są liczby -3 i 7 ,

c) przyjmuje ona najmniejszą wartość równą 0, a do jej wykresu należą punkty $(2, 5)$ i $(4, 5)$.

2. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(2, 4)$ przechodząca przez punkt P .

a) $P(4, 0)$

b) $P(-1, 7)$

c) $P(6, 10)$

3. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej f . Wyznacz drugie miejsce zerowe funkcji f , jeśli wiadomo, że punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji.

a) $W(5, 4)$

b) $W(-3, -6)$

c) $W(\frac{1}{2}, 2)$

d) $W(\frac{5}{4}, 6)$

4. Rozwiąż równanie.

a) $(x-3)^2 = (2x-1)(x-3)$

d) $9x^2 - (2x-1)^2 = 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)(3x-4)$

e) $4x^2 = (1-x)^2$

c) $16 - (3x-1)^2 = 0$

f) $(2x+1)^2 = (4x+5)^2$

5. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} (3x+1)(x-2) > 0 \\ 4x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(2-3x) \geq -3(x+2) \\ 25 - 9x^2 < 0 \end{cases}$

6. Wyznacz współczynniki a, b, c trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$, jeśli do jego wykresu należą punkty:

a) $A(0, 2), B(1, 0), C(-1, 0)$,

c) $A(3, 0), B(2, 4), C(4, 4)$,

b) $A(0, 4), B(1, 3), C(2, 0)$,

d) $A(1, 2), B(3, 2), C(4, -4)$.

Przedstaw ten trójmian w postaci iloczynowej.

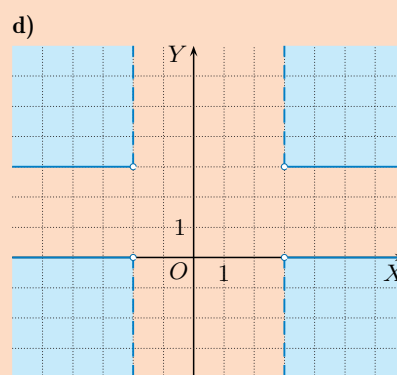
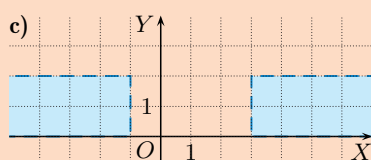
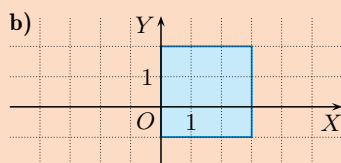
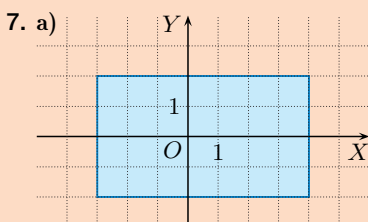
7. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) spełniających warunki:

a) $x^2 \leq x + 12$ i $y^2 \leq 4$,

c) $x^2 - 2x > 3$ i $y^2 < 2y$,

b) $x^2 \leq 3x$ i $y^2 - y \leq 2$,

d) $x^2 - x > 6$ i $y^2 \geq 3y$.

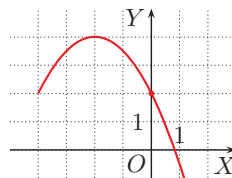




Jeśli w zadaniu mamy do wyznaczenia wzór funkcji kwadratowej, ale nie jest powiedziane, czy chodzi o postać ogólną, kanoniczną czy iloczynową, możemy wybrać taką, która jest dla nas najwygodniejsza.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(-2, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f . Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2$?



Wzór funkcji f zapisujemy w postaci kanonicznej. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-2, 4)$, więc:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Do wykresu funkcji f należy punkt $(0, 2)$, zatem $2 = a(0 + 2)^2 + 4$ i stąd $a = -\frac{1}{2}$, czyli $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$-\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4 \geq \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 8 \leq -x - 4$$

$$x^2 + 5x \leq 0$$

$$x(x + 5) \leq 0$$

Zatem $x \in \langle -5; 0 \rangle$, czyli nierówność tę spełnia sześć liczb całkowitych.

Odpowiedź: $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$, sześć liczb

Przykład 2

Obwód prostokąta jest równy 14, a jeden z jego boków ma długość x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że jeśli prostokąt ten nie jest kwadratem, to jego pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

Długość drugiego boku prostokąta oznaczmy przez y . Wtedy $2x + 2y = 14$, czyli $y = 7 - x$. Zatem pole tego prostokąta opisuje funkcja:

$$P(x) = x \cdot (7 - x) = -x^2 + 7x, \text{ gdzie } x \in (0; 7)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie o odciętej $x_w = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$.

Rzędna wierzchołka:

$$P\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{-49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

Funkcja P przyjmuje wartość $12\frac{1}{4}$ dla $x = y = \frac{7}{2}$, czyli gdy prostokąt jest kwadratem. Zatem dla prostokąta niebędącego kwadratem pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

dlaNauczyciela.pl | Klasówka 7

dlaNauczyciela.pl | Sprawdzian II

dlaNauczyciela.pl | Sprawdzian
na koniec roku

Generator
testów i sprawdzianów



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. A. $f(x_w) = 1 \neq -10$
B. $f(x_w) = -8 \neq 0$
C. $f(x_w) = -10$

2. $x_w - \frac{b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, czyli $b = -4$

4. A. $\Delta = 12 - 8\sqrt{3} = \sqrt{144} - \sqrt{192} < 0$
B. $\Delta = 12 - 8\sqrt{3} < 0$
C. $\Delta = 18 - 8\sqrt{3} = \sqrt{324} - \sqrt{192} > 0$

9. A. $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{11}{2}; \infty \rangle$
B. $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{9}{2}; \infty \rangle$
C. $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{7}{2}; \infty \rangle$
D. $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{5}{2}; \infty \rangle$

1. Przedział $(-10; \infty)$ jest zbiorem wartości funkcji:

- A. $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$,
B. $f(x) = 4x^2 - 12x + 1$,
C. $f(x) = 4x^2 - 12x - 1$,
D. $f(x) = 4x^2 - 12x - 10$.

2. Prosta $x = \sqrt{2}$ jest osią symetrii wykresu funkcji:

- A. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x - 1$,
B. $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2x + 1$,
C. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x - 1$,
D. $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x + 1$.

3. Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku położonym nad osią OX , gdy:

- A. $f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6$,
B. $f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6x$,
C. $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 6$,
D. $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 6x$.

4. Dwa różne pierwiastki ma równanie:

- A. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$,
B. $2x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$,
C. $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$,
D. $2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{3} = 0$.

5. Miejscami zerowymi funkcji $y = 4x^2 + bx + c$ są liczby 5 i -3, zatem:

- A. $b = -8$ i $c = -60$,
B. $b = -2$ i $c = -15$,
C. $b = 2$ i $c = -8$,
D. $b = 4$ i $c = -30$.

6. Wierzchołkiem paraboli danej równaniem $y = (2x + 8)(3x + 6)$ jest punkt:

- A. $(-3, -6)$,
B. $(-3, 6)$,
C. $(3, -6)$,
D. $(3, 6)$.

7. Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności:

- A. $5x^2 + 4x \geq 0$,
B. $-4x^2 - 1 < 0$,
C. $9x^2 + 30x - 25 \geq 0$,
D. $-2x^2 + 24x - 48 < 0$.

8. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x^2 > 3$ jest:

- A. $(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2})$,
B. $(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty)$,
C. $(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty)$,
D. $(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}) \cup (\frac{3\sqrt{6}}{2}; \infty)$.

9. Liczba π należy do zbioru rozwiązań nierówności:

- A. $2x^2 - 9x - 11 \geq 0$,
B. $2x^2 - 7x - 9 \geq 0$,
C. $2x^2 - 5x - 7 \geq 0$,
D. $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $3x(x+3) = (x+3)^2$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $2x^2 + 7x \geq 4$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $(x+1)(2x+3) \leq (x+1)(5-x)$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -6x + x^2$.

Zadanie 5 (2 pkt)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x+3)(x-5)$.

Zadanie 6 (2 pkt)

Zapisz w postaci iloczynowej trójmian kwadratowy $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 7 (4 pkt)

Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ o trzy jednostki w lewo. Naskicuj wykres funkcji g i odczytaj z niego najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle -5; 1 \rangle$.

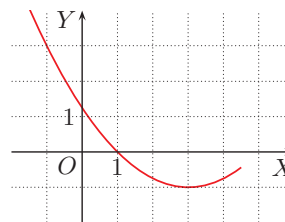
Zadanie 8 (4 pkt)

Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie obie nierówności:

$$x^2 + 4x \leq 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 4 > 0$$

D Zadanie 9 (5 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(3, -1)$. Wyznacz wzór funkcji f i uzasadnij, że żadna liczba niewymierna nie spełnia nierówności $f(x) \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.



D Zadanie 10 (6 pkt)

Jedna z przekątnych rombu ma długość x , a suma długości obu przekątnych jest równa $10\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego rombu w zależności od x . Podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że dla dowolnej całkowitej wartości x należącej do dziedziny funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

10. Przekątne rombu mają długości: x i $10\frac{1}{2} - x$.

Stąd pole rombu jest opisane wzorem $P(x) = \frac{1}{2}x(10\frac{1}{2} - x)$.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji: $x > 0$ oraz $10\frac{1}{2} - x > 0$, czyli $D = (0; 10\frac{1}{2})$.

Ramiona paraboli $P(x)$ skierowane są ku dołowi, czyli wartość największa osiągnięta jest w wierzchołku.

$$x_w = \frac{0 + 10\frac{1}{2}}{2} = 5\frac{1}{4}$$

$$P(5\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} (10\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4}) = \frac{21}{8} \cdot \frac{21}{4} = \frac{441}{32}$$

Wartość największa $\frac{441}{32}$ przyjmowana jest tylko dla x_w . Zatem dla dowolnej całkowitej wartości x należącej do dziedziny funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

$$1. x = -3, x = \frac{3}{2}$$

$$2. x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$$

$$3. (x+1)(3x-2) \leq 0 \\ x \in \langle -1; \frac{2}{3} \rangle$$

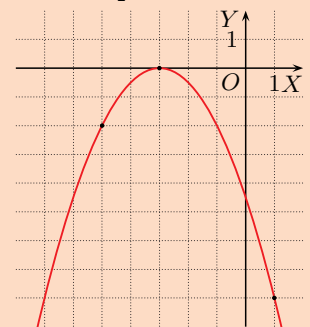
$$4. f(x) = x^2 - 6x = x(x-6), \\ x_w = 3$$

Funkcja f maleje w $(-\infty; 3)$, rośnie w $\langle 3; \infty)$.

$$5. x_w = \frac{-3+5}{2} = 1, f(1) = -32$$

$$6. y = \frac{1}{4}(x-4)^2$$

$$7. g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2$$



Wartość największa: 0, wartość najmniejsza: -8.

$$8. x^2 + 4x \leq 0 \text{ dla } x \in \langle -4; 0 \rangle \\ x^2 - 4 > 0 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$

Stąd $x \in \langle -4; -2 \rangle$.

Liczby całkowite spełniające jednocześnie obie nierówności to -4 i -3.

9. Podstawiamy współrzędne punktu $(1, 0)$ do wzoru $f(x) = a(x-3)^2 - 1$.

Otrzymujemy $a = \frac{1}{4}$,

czyli $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$.

$$\frac{1}{4}(x-3)^2 - 1 \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

$x^2 \leq 0$, więc jedyną liczbą spełniającą nierówność jest liczba wymierna $x = 0$.



Odpowiedzi do zadań

1. Pierwiastki równania:

$$\frac{-7-\sqrt{17}}{4}, -2, \frac{-7+\sqrt{17}}{4}, 13$$

$$\left| \frac{-7-\sqrt{17}}{4} \right| \approx 2,781$$

Należy zakodować: 278

2. $x^2 - 14x - 32 > 0$

$$\text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (16; \infty)$$

$$x^2 - 23x \leq 0 \text{ dla } x \in \langle 0; 23 \rangle$$

$$\text{Stąd } x \in (16; 23)$$

$$S = 17 + 18 + 19 + \dots + 23 = 140$$

Należy zakodować: 140

3. $y = (x-2)^2 + 7$

$$f(x) = (x-2-\sqrt{3})^2 + 7 - 2\sqrt{3}$$

Najmniejsza wartość funkcji f :

$$7 - 2\sqrt{3} \approx 3,536$$

Należy zakodować: 353

4. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 1$

$$g(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 1 + p$$

$$0 = -\frac{1}{4}(4+3)^2 + 1 + p$$

$$p = \frac{45}{4} = 11,25$$

Należy zakodować: 125

5. Miejsca zerowe funkcji f :

$$\frac{5}{2} \text{ i } 3.$$

$$g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)(x-3) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{2}$$

$$b = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}, c = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

6. Dla $x^2 - 2x - 3 < 0$,

$$\text{czyli dla } x \in (-1; 3)$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

$$\text{Dla } x^2 - 2x - 3 \geq 0, \text{ czyli dla } x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 3 \text{ dla } x \in \langle 0; 2 \rangle$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 3 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \sqrt{7}) \cup \langle 1 + \sqrt{7}; \infty)$$

$$\text{Zatem } f(x) \geq 3 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \sqrt{7}) \cup \langle 0; 2 \rangle \cup$$

$$\cup \langle 1 + \sqrt{7}; \infty)$$

7. $g(x) = ax^2 + bx - 1 = a(x+1)^2 - 2$, stąd $a = 1$ oraz $b = 2$, czyli $g(x) = x^2 + 2x - 1$.Miejsca zerowe funkcji $f(x)$: $-1, 3$.Miejsca zerowe funkcji $g(x)$: $-1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2}$.

Iloczyn dwóch wartości jest ujemny, jeżeli jedna z nich jest ujemna, a druga dodatnia. Zatem na podstawie rysunku:

$$f(x) \cdot g(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup \cup (-1; -1 + \sqrt{2}) \cup (3; \infty).$$

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $|x_1|$, gdzie x_1 jest najmniejszym pierwiastkiem równania:

$$(x^2 - 11x - 26)(2x^2 + 7x + 4) = 0$$

Zadanie 2 (2 pkt)

Niech S oznacza sumę wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówności $x^2 - 14x - 32 > 0$ i $x^2 - 23x \leq 0$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby S .

Zadanie 3 (2 pkt)

Wykres funkcji f otrzymujemy, przesuwając parabolę $y = x^2 - 4x + 11$ o wektor $[\sqrt{3}, -2\sqrt{3}]$. Znajdź najmniejszą wartość funkcji f . Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku tej liczby.

Zadanie 4 (2 pkt)

Liczba -5 jest jednym z miejsc zerowych funkcji f , której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-3, 1)$. Po przesunięciu wykresu f o wektor $[0, p]$ otrzymujemy wykres funkcji g , dla której jednym z miejsc zerowych jest liczba 4. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby p .

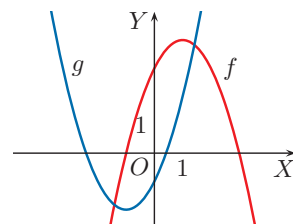
Zadanie 5 (4 pkt)

Funkcje $f(x) = 2x^2 - 11x + 15$ i $g(x) = x^2 + bx + c$ mają te same miejsca zerowe. Oblicz wartości współczynników b i c .

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 3$.

Zadanie 7 (4 pkt)

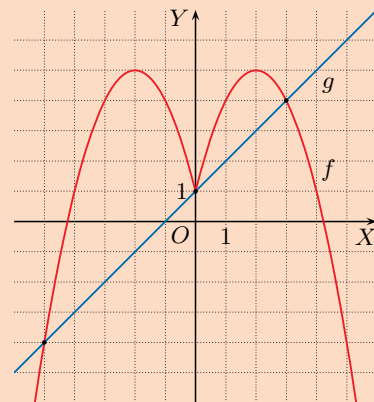
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ i $g(x) = ax^2 + bx - 1$. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie $(-1, -2)$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \cdot g(x) < 0$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Dane są funkcje $f(x) = -x^2 + 4|x| + 1$ i $g(x) = x + 1$. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leq g(x)$.

$$8. f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 1 & \text{dla } x < 0 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ dla } x \in (-\infty; -5) \cup \{0\} \cup \langle 3; \infty)$$



Indeks

- algorytm Euklidesa 13
- alternatywa zdań 106
- Archimedes 194
- argumenty funkcji 153

- barycentrum trójkąta 257
- błąd przybliżenia 24
- Briggs Henry 43

- Cantor Georg 76
- cechy
 - podobieństwa trójkątów 270–271
 - podzielności liczb 14
 - przystawiania trójkątów 258–259

- diagramy Venna 67
- Dirichlet Peter G.L. 163
- dopełnienie zbioru 66
- dowód przez sprowadzenie do sprzeczności 19
- dowód twierdzenia Talesa 265
- dwusieczna
 - kąta – konstrukcja 282
 - kąta 255, 257, 280
- działania na potęgach 35, 41
- dziedzina funkcji 153, 170
- dzielnik 10, 15

- element zbioru 62
- Euklides 11
- Euler Leonhard 53, 163

- Fermat Pierre de 53
- figury podobne 266
- figury przystające 258
- fraktale 279
- funkcja 152, 153
 - kwadratowa 291
 - liczbowa 157
 - liniowa 208
 - logarytmiczna 200
 - malejąca 166, 214
 - monotoniczna 168
 - niemalejąca 167
 - nierosnąca 167
 - przedziałami monotoniczna 168
 - rosnąca 166, 214
 - stała 167, 214
 - wykładnicza 198

- Gauss Carl Friedrich 53
- googol 39

- hiperbola 165

- iloczyn
 - kartezjański zbiorów 69
 - zbiorów 64
- implikacja zdań 107

- Kartezjusz (René Descartes) 69
- kąt zewnętrzny trójkąta 256
- kąty przyległe 256
- kierownica paraboli 321
- Koch Helge von 279
- koniunkcja zdań 106
- krzywa Kocha 279
- kwadrat
 - różnicy 90
 - sumy 90

- liczba
 - π 23, 26
 - logarytmowana 43, 44
- liczby
 - całkowite 15, 20
 - Fermata 53
 - kwadratowe 97
 - Mersenne’a 52
 - naturalne 10, 20
 - nieparzyste 10
 - niewymierne 18
 - parzyste 10
 - pierwsze 11, 52
 - pięciokątne 97
 - rzeczywiste 20
 - trójkątne 97
 - wielokątne 97
 - wymierne 15, 20
 - względnie pierwsze 15
 - złożone 11
- logarytm 43
 - dziesiętny 43
 - iloczynu 44
 - ilorazu 44
 - potęgi 44
- logika matematyczna 105

- macierz 143
- metoda
 - eliminacji Gaussa 143
 - podstawiania 119, 128
 - przeciwnych współczynników 125, 128
 - wyznacznikowa 141
- miejsce zerowe 155
 - funkcji liniowej 213
- mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian 81

- najmniejsza wspólna wielokrotność 12
- największy wspólny dzielnik 12
- Napier John 43
- następnik implikacji 107
- nazwy wielkich liczb 39
- negacja zdania 105
- nierówności
 - nieostre 77
 - ostre 77
 - równoważne 77, 78
- nierówność
 - sprzeczna 94
 - tożsamościowa 94
 - trójkąta 260
- notacja wykładnicza 37
- obraz figury 184
- ognisko paraboli 321
- ortocentrum trójkąta 257
- oś symetrii paraboli 296, 314
- parabola 165, 291, 292, 311, 321
- pęk prostych 211
- pierwiastek
 - iloczynu 28, 31
 - ilorazu 28, 31
- pierwiastek
 - kwadratowy (drugiego stopnia) 27
 - n -tego stopnia 32
 - podwójny równania kwadratowego 308
 - sześcienny (trzeciego stopnia) 30, 31
- pierwiastki równania kwadratowego 304, 308
- przestrzeń w trójwymiarowym układzie współrzędnych 244
- podstawa
 - logarytmu 43, 44
 - potęgi 34
- podzbiór zbioru 62
- podzielność liczb 10
- pole trójkąta 233
- poprzednik implikacji 107
- postać
 - dziesiętna liczby 22
 - iloczynowa funkcji kwadratowej 312, 313
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 296, 298
 - ogólna funkcji kwadratowej 298
 - parametryczna równania prostej 245, 246
- potęga 34
 - o wykładniku całkowitym ujemnym 35
 - o wykładniku wymiernym 40
- półprzestrzeń
 - domknięta 234
 - otwarta 234
- prawa
 - De Morgana 66, 108
 - rachunku zdań 108
- procent 47
- programowanie liniowe 237
- promil 47
- proporcjonalność
 - odwrotna 194
 - prosta 215
- prosta 208
 - prostopadła – konstrukcja 283
 - równoległa – konstrukcja 283
- proste
 - prostopadłe 226, 229, 248
 - równoległe 220, 248
- przechodność 80
- przeciwdziedzina 153
- przedział
 - domknięty 71
 - lewostronnie domknięty 71
 - lewostronnie otwarty 71
 - obustronnie domknięty 70
 - otwarty 70, 71
 - prawostronnie domknięty 71
 - prawostronnie otwarty 71
- przekątna pięciokąta foremnego 19
- przesunięcie wykresu funkcji 178, 180, 185
- przybliżenie
 - z nadmiarem 24
 - z niedomiarem 24
- punkt
 - procentowy 50
 - zaczepienia wektora 182
- punkty kratowe 69
- reguła zaokrąglania 23
- rozkład
 - liczby na czynniki pierwsze 12
 - na czynniki liniowe funkcji kwadratowej 312
- rozwiązania równania kwadratowego 304
- rozwiązanie układu równań 117
- rozwiniecie dziesiętne liczby 22
- równanie
 - kierunkowe prostej 217
 - odcinkowe prostej 220
 - ogólne prostej 218
 - sprzeczne 94
 - tożsamościowe (tożsamość) 94
 - z dwiema niewiadomymi 116
- równoważne układy równań 120
- równoważność zdań 107
- różnica
 - kwadratów 91
 - zbiorów 66
- ruch pionowy w górę 320
- Sierpiński Wacław 279
- sito Eratostenesa 52

skala
 logarytmiczna 46
 pH 46
 podobieństwa 267
 Richtera 46
 solanka 136
 spadek swobodny 320
 spirala Teodorosa 29
 sposoby przedstawiania funkcji 158
 stężenie procentowe 136
 stosunek pól figur podobnych 276
 suma zbiorów 65
 symetralna odcinka 257
 konstrukcja 282
 symetryczne odbicie wykresu funkcji 187, 189
 sześciokąt foremny – konstrukcja 284

 śnieżynka Kocha 279
 środek
 ciężkości trójkąta 257
 pęku prostych 211
 środkowa trójkąta 257

 trójkąt 254
 ostrokatny 254
 prostokatny 254
 rozwartokatny 254
 Sierpińskiego 279
 trójmian kwadratowy 291, 298
 trychotomia 80
 twierdzenie
 odwrotne do twierdzenia Talesa 263
 Picka 69
 Pitagorasa 18
 Talesa 262

 układ
 dwóch równań z dwiema niewiadomymi 117
 nieoznaczony 123, 230
 oznaczony 123, 230
 równań liniowych 123, 230
 sprzeczny 123, 230
 trzech równań z trzema niewiadomymi 131
 ułamek
 dziesiętny 22
 nieskracalny 15, 24
 ułamki egipskie 17

 Venn John 67

 wartość
 bezwzględna liczby 98, 102, 103
 interpretacja geometryczna 98
 funkcji 153
 Weierstrass Karl 98
 wektor 182
 przeciwny 183
 swobodny 183
 zaczepiony 183
 wielkie twierdzenie Fermata 53
 wielokąt
 podobne 266
 przystające 258
 wielokrotność 10
 wierzchołek paraboli 296, 311
 współczynnik
 kierunkowy prostej 209, 221
 interpretacja 222
 proporcjonalności 194, 215
 współrzędne
 wektora 183
 wierzchołka paraboli 296, 299, 300
 wykładnik potęgi 34
 wykres funkcji 157
 wyróżnik trójmianu kwadratowego 299
 wysokość trójkąta 257
 wzory Cramera 141
 wzór
 funkcji 158
 Leibniza 26
 Wallisa 26
 wzrost wykładniczy 199

 zbiory
 rozłączne 65
 równe 62
 zbiór
 liczb całkowitych 15
 liczb naturalnych 10
 liczb rzeczywistych 20
 liczb wymiernych 15
 nieskończony 62
 pusty 62
 skończony 62
 wartości funkcji 170, 171
 złota liczba 25, 61, 95
 złoty stosunek 61
 zwierciadło paraboliczne 322