



5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest niezwykle istotny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę przy ustalaniu stopnia trudności trasy narciarskiej.

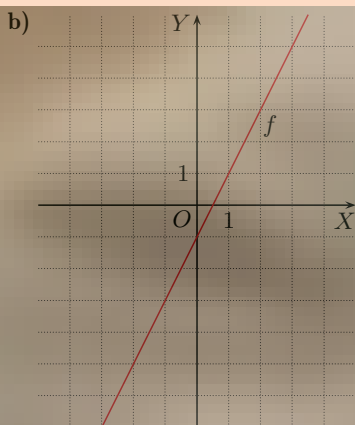
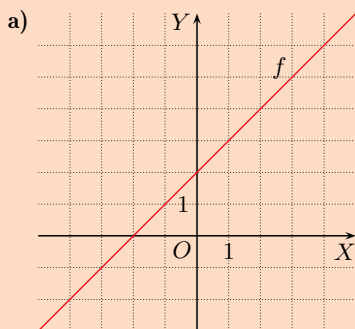
Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a .

Uczeń:

- rozpoznaje funkcję liniową, mając dany jej wzór, oraz szkicuje jej wykres,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji liniowej,
- wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia podane warunki, np. jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez dany punkt,
- stosuje własności funkcji liniowej do obliczania pól wielokątów.

Ćwiczenie 1



Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1



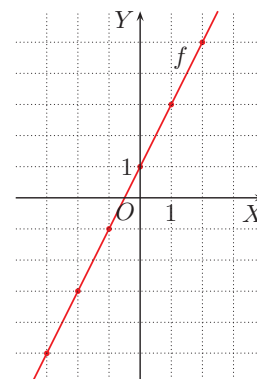
5.1. Wykres funkcji liniowej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5



Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f , jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Uwaga. Stała oznacza ustaloną liczbę rzeczywistą.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$. Powiemy też krótko: prosta $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

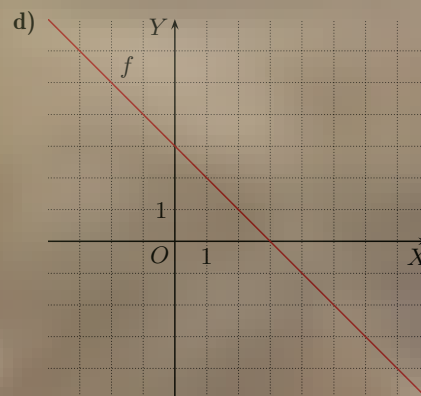
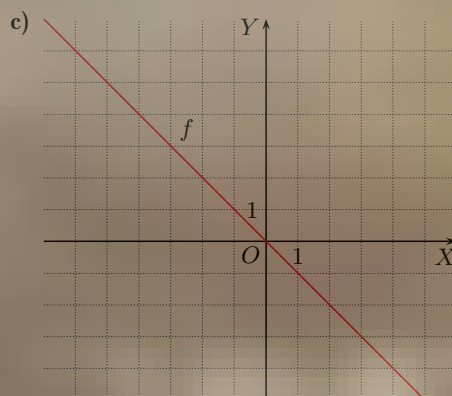
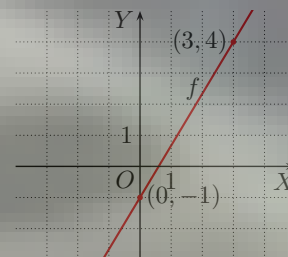
Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f .



Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f . Naskicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

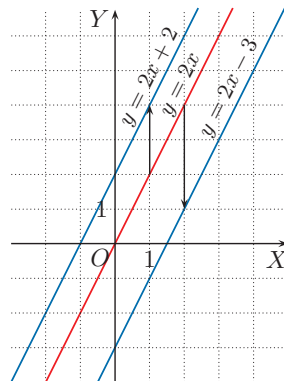
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY .

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$.

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.



Ćwiczenie 3

Naskicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f .

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Twierdzenie

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Podane powyżej twierdzenie można też sformułować następująco:

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$ $l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$ $l_7: y = 1 - 2x$
 $l_2: y = 2x - 3$ $l_4: y = 4 + 2x$ $l_6: y = 2x - \sqrt{3}$ $l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

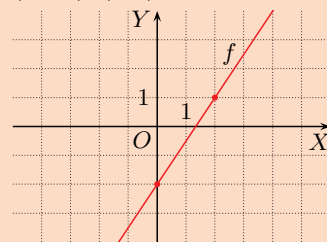
Uwaga. Zapis „ $l: y = ax + b$ ” czytamy „prosta l o równaniu $y = ax + b$ ”.

Ćwiczenie 4

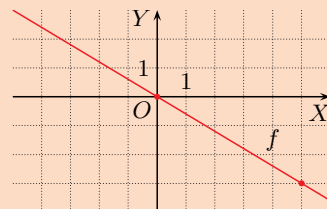
$l_2 \parallel l_4 \parallel l_6, l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$

Ćwiczenie 2

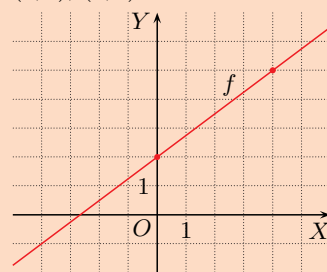
a) $(0, -2), (2, 1)$



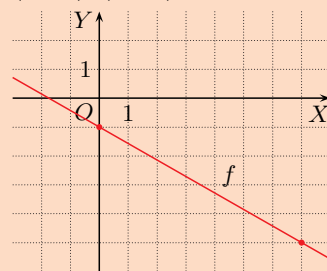
b) $(0, 0), (5, -3)$



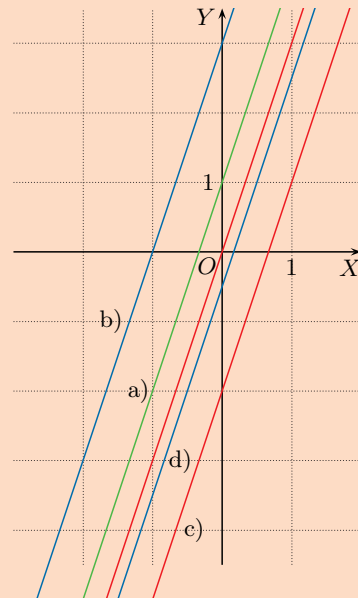
c) $(0, 2), (4, 5)$



d) $(0, -1), (7, -5)$



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 5

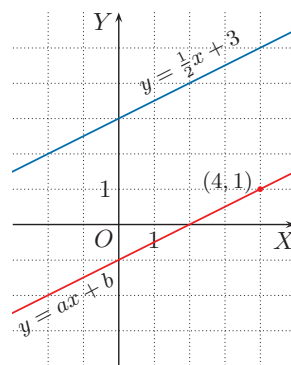
- a) $y = 2x + 1$
b) $y = -\frac{2}{3}x - 2$

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4, 1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$. Aby wyznaczyć współczynnik b , podstawiamy współrzędne punktu $P(4, 1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Ćwiczenie 5

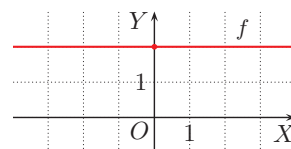
Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P .

- a) $l: y = 2x - 4$, $P(3, 7)$ b) $l: y = -\frac{2}{3}x + 3$, $P(3, -4)$

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 5

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbb{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$, jeśli wiadomo, że:

- a) $a = 0$, $b = 1$, b) $a = 0$, $b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0$, $b = 0$.

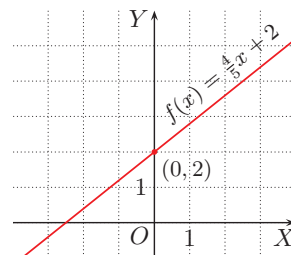
Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY .

Przykład 6

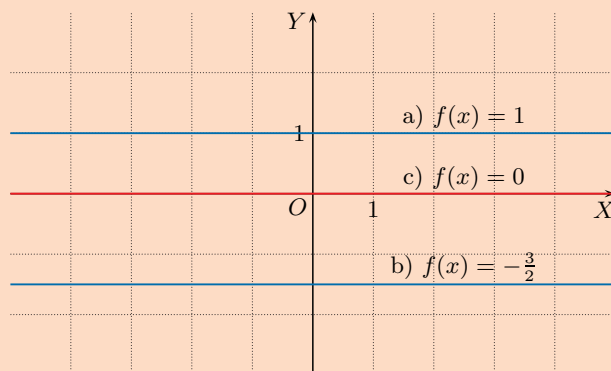
Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY . Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.

Uwaga. Odcięta punktu to jego pierwsza współrzędna, rzędna – to druga współrzędna.



Ćwiczenie 6



Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Ćwiczenie 7

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P .

a) $l: y = 3x - 4$, $P(0, 6)$

b) $l: y = -\frac{3}{4}x + 1$, $P(0, -\frac{3}{2})$

Ćwiczenie 8

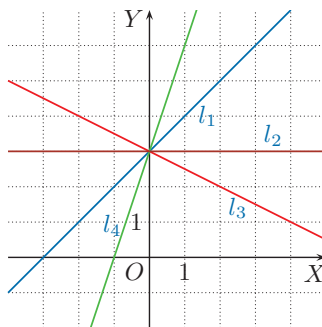
Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$$f_1(x) = x + 3, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$f_2(x) = 3, \quad f_4(x) = 3x + 3.$$

a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



Ćwiczenie 7

a) $y = 3x + 6$

b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 8

a) $f_1(1) = 4$, $f_2(1) = 3$,
 $f_3(1) = 2\frac{1}{2}$, $f_4(1) = 6$

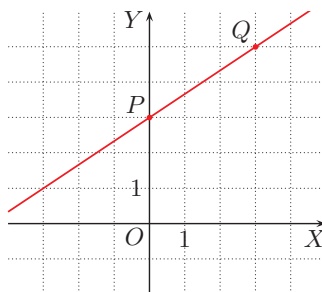
b) f_1 – niebieski, f_2 – brązowy,
 f_3 – czerwony, f_4 – zielony

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

Przykład 7

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.

Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a , podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i otrzymujemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji: $y = \frac{2}{3}x + 3$.



Ćwiczenie 9

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q . Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$

b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Ćwiczenie 9

a) $2 = 4a + 5$, czyli $a = -\frac{3}{4}$.

$$y = -\frac{3}{4}x + 5$$

$$-\frac{3}{4} \cdot 8 + 5 = -1$$

Punkt R należy do wykresu funkcji.

b) $-9 = -3a - 4$, czyli $a = \frac{5}{3}$.

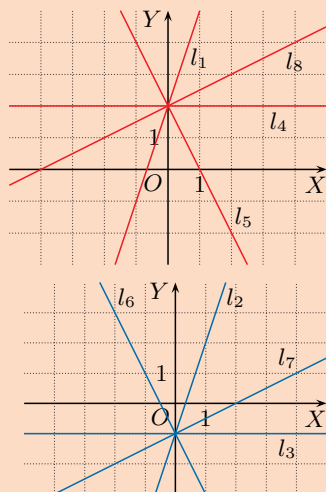
$$y = \frac{5}{3}x - 4$$

$$\frac{5}{3} \cdot 6 - 4 = 6 \neq 5$$

Punkt R nie należy do wykresu funkcji.

Odpowiedzi do zadań

1.



2. a) $y = 4x + 5$
 b) $y = -3x + 11$
 c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$
 d) $y = \sqrt{3}x$
3. a), b) nie należy c) należy
4. a) $y = x + 4$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 4$
 c) $y = -3x + 4$
 d) $y = -8x + 4$
5. a) $P = \frac{1}{2}(2 + 3) \cdot 6 = 15$
 b) $P = 6\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = 24$

6. Jeżeli $x \in \mathbb{Q}$ i $x \neq 0$, to:

$$\sqrt{2}x \notin \mathbb{Q}$$

Jeżeli $x = 0$, to $\sqrt{2}x = 0$.

Zatem $(0, 0)$ jest jedynym punktem o obu współrzędnych wymiernych należącym do wykresu tej funkcji.

Zadania

1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \dots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0, 2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0, -1)$.

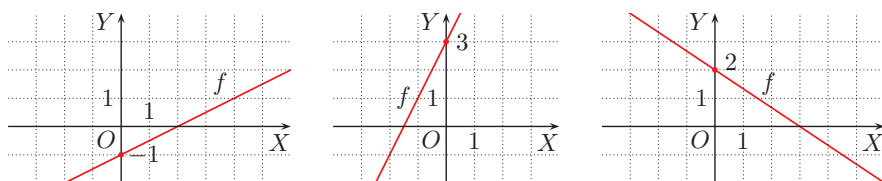
$$\begin{array}{llll} l_1: y = 3x + 2 & l_3: y = -1 & l_5: y = -2x + 2 & l_7: y = \frac{1}{2}x - 1 \\ l_2: y = 3x - 1 & l_4: y = 2 & l_6: y = -2x - 1 & l_8: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

2. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym wzorze i przechodząca przez punkt P .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 4x - 2, P(0, 5) & \text{c) } y = -\frac{4}{3}x + 6, P(-6, 5) \\ \text{b) } y = -3x + 4, P(1, 8) & \text{d) } y = \sqrt{3}x - 3, P(2\sqrt{3}, 6) \end{array}$$

3. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f , jeśli należy do niego punkt P .

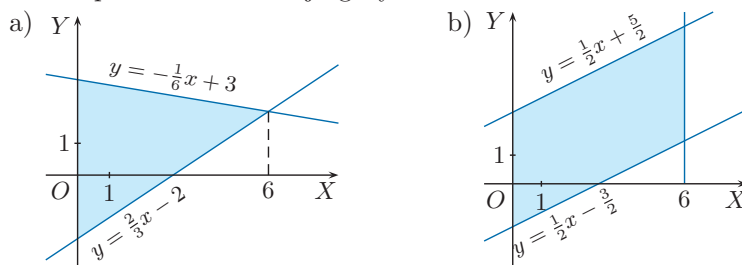
$$\text{a) } P(8, 3), Q(16, 9) \quad \text{b) } P(-6, -9), Q(7, 19) \quad \text{c) } P(9, -4), Q(8, -3\frac{1}{3})$$



4. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0, 4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

$$\text{a) } P(2, 6) \quad \text{b) } P(-6, 1) \quad \text{c) } P(5, -11) \quad \text{d) } P(\frac{3}{4}, -2)$$

5. Oblicz pole zacieniowanej figury.



D 6. Wykaż, że punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem o obu współrzędnych wymiernych należącym do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x$.

D 7. Wykaż, że do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ nie należy żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

Wskazówka. Przeprowadź dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

7. Załóżmy przeciwnie, że istnieją liczby wymierne w_1 i w_2 takie, że punkt (w_1, w_2) należy do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt{2}w_1 - \sqrt{3} \quad /^2 \\ w_2^2 &= 2w_1^2 - 2\sqrt{6}w_1 + 3 \\ 2\sqrt{6}w_1 &= 2w_1^2 - w_2^2 + 3 \\ \sqrt{6} &= \frac{2w_1^2 - w_2^2 + 3}{2w_1} \end{aligned}$$

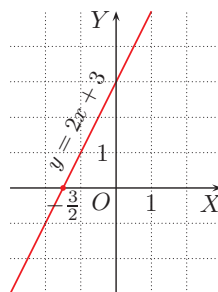
Lewa strona powyższej równości jest liczbą niewymierną, a prawa wymierną. Otrzymana sprzeczność oznacza, że założenie było fałszywe, czyli do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ nie należy żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

5.2. Własności funkcji liniowej

■ Miejsce zerowe funkcji liniowej

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2x + 3$. Jej miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$. Można je wyznaczyć, rozwiązując równanie $2x + 3 = 0$.

Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.



D Ćwiczenie 1

Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

- a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a, b funkcja $f(x) = ax + b$:

- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 1

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).

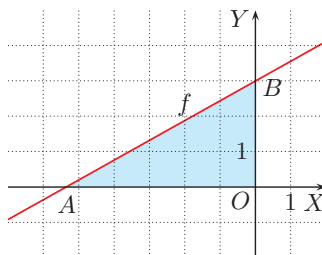
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f :

$\frac{9}{16}x + 3 = 0$ dla $x = -\frac{16}{3}$. Zatem $|OA| = \frac{16}{3}$.

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = 2x + 4$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

Ćwiczenie 4

Punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych oraz pole trójkąta:

- a) $(0, 4)$, $(-2, 0)$; $P = 4$
b) $(0, 2)$, $(6, 0)$; $P = 6$
c) $(0, -4)$, $(-8, 0)$; $P = 16$
d) $(0, -5)$, $(3, 0)$; $P = 7,5$

Uczeń:

- wyznacza miejsce zerowe i określa monotoniczność funkcji liniowej danej wzorem,
- wyznacza współrzędne punktów, w których wykres funkcji liniowej przecina osie układu współrzędnych, oraz określa, w których ćwiartkach układu znajduje się wykres,
- określa monotoniczność funkcji liniowej w zależności od parametru,
- rozpoznaje wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ 0 &= ax + b \\ ax &= -b \quad / : a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x = \frac{3}{2}$
b) $x = -\frac{4}{3}$
c) $x = -6$
d) $x = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) $a = 0$ i $b \neq 0$
b) $a = b = 0$

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Monotoniczność funkcji liniowej
- Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

■ Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \quad / \cdot a && \text{Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę } a > 0, \\ ax_1 &< ax_2 && \text{zatem nie zmieniamy jej zwrotu.} \\ ax_1 + b &< ax_2 + b \end{aligned}$$

Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.

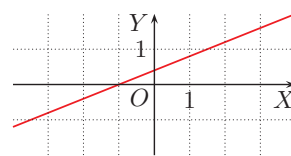
Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX .

Ćwiczenie 5

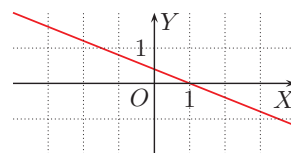
Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \quad / \cdot a < 0 \\ ax_1 &> ax_2 \\ ax_1 + b &> ax_2 + b \end{aligned}$$

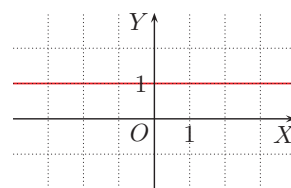
Oznacza to, że $f(x_1) > f(x_2)$, czyli f jest funkcją malejącą.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stale tę samą wartość.

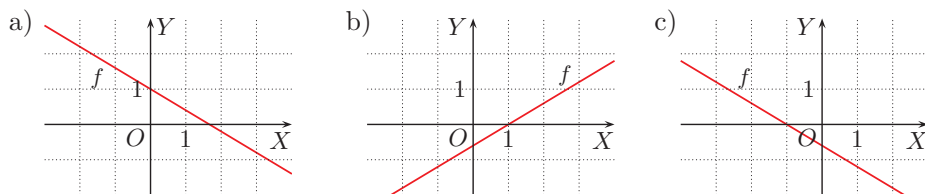
Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$ b) $f(x) = 8 - 3x$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$ d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .

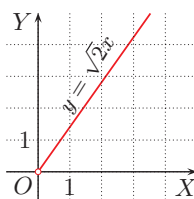


■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a > 0$ jest stałą, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Przykład 2

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku kwadratu i jego obwód.
 b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P .
 c) Obwód i promień okręgu.
 d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie przerysuj do zeszytu i uzupełnij poniższą tabelę. Naskicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	3	6

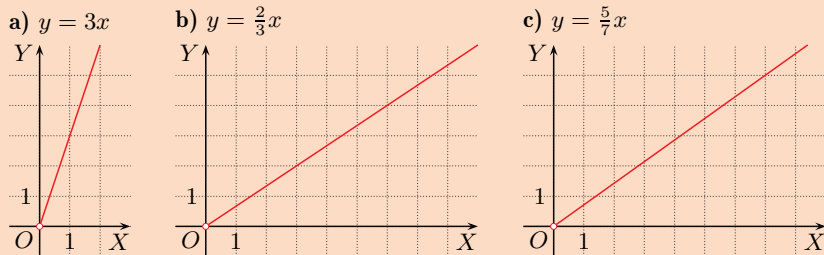
b)

x	1	1,8	3
y	$\frac{2}{3}$	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	7	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	10

Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 6

- a) rosnąca
 b) malejąca
 c) rosnąca
 d) stała

Ćwiczenie 7

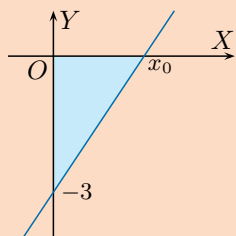
- a) $a < 0$ i $b > 0$
 b) $a > 0$ i $b < 0$
 c) $a < 0$ i $b < 0$

Ćwiczenie 8

- a) wprost proporcjonalne,
 $a = \frac{1}{4}Ob$
 b) odwrotnie proporcjonalne,
 $a = \frac{2P}{b}$
 c) wprost proporcjonalne,
 $Ob = 2\pi r$
 d) odwrotnie proporcjonalne,
 $d_1 = \frac{2P}{d_2}$

Odpowiedzi do zadań

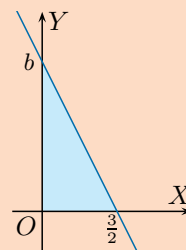
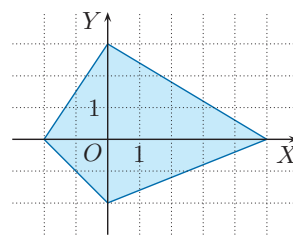
- a) I, II, IV b) I, II, III
c) II, III, IV d) I, III, IV
e) I, II, IV f) III, IV
- a) malejąca
b), c) rosnąca
- a) rosnąca dla $m < 5$,
stała dla $m = 5$,
malejąca dla $m > 5$
b) rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$,
stała dla $m = -\frac{1}{5}$,
malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
c) rosnąca dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
stała dla $m \in \{-1, 1\}$,
malejąca dla $m \in (-1; 1)$
- a) malejąca b) rosnąca
c) malejąca
- a) $y = \frac{2}{3}x + 4$
b) $y = -\frac{1}{2}x - 2$
- a) $y = \frac{2}{5}x - 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 3$,
 $y = \frac{3}{2}x + 3$, $y = -x - 2$
b) $y = -\frac{3}{2}x - 72$, $y = 2x - 72$,
 $y = -4x + 144$, $y = 3x + 144$
- a) $y = -x + 3$
b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$
- Miejszem zerowym funkcji
 $y = ax - 3$ jest liczba $x_0 = \frac{3}{a}$,
zatem pole trójkąta $P = \frac{9}{2|a|}$.



- a) $6 = \frac{9}{2|a|}$, stąd $a = -\frac{3}{4}$
lub $a = \frac{3}{4}$, czyli szukana
prosta ma równanie:
 $y = -\frac{3}{4}x - 3$ lub $y = \frac{3}{4}x - 3$
b) $y = -\frac{3}{7}x - 3$ lub $y = \frac{3}{7}x - 3$
c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$ lub
 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$

Zadania

- Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta:
a) $y = -\frac{3}{2}x + 1$, c) $y = -8x - 3$, e) $y = (1 - \sqrt{2})x + 3$,
b) $y = 4x + 1$, d) $y = 12x - 1$, f) $y = -5$?
- Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$, gdy:
a) $m = \sqrt{3} - 2$, b) $m = 5 - 2\sqrt{5}$, c) $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (5 - m)x$ b) $f(x) = (1 + 5m)x$ c) $f(x) = (|m| - 1)x$
- Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty:
a) $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$, b) $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$, c) $(\frac{2}{3}, -8)$ i $(\frac{3}{5}, -7)$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli:
a) do jej wykresu należy punkt $(0, 4)$ i przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x < -6$,
b) do jej wykresu należy punkt $(0, -2)$ i przyjmuje ona wartości nieujemne tylko dla $x \leq -4$.
- Wyznacz równania prostych, w których zawierają się:
a) boki przedstawionego obok czworokąta,
b) boki czworokąta o wierzchołkach:
 $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli trójkąt ograniczony jej wykresem i osiami układu współrzędnych jest równoramienny oraz:
a) funkcja ta przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 3$,
b) do wykresu tej funkcji należy punkt $(0, -4)$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu równym: a) 6, b) $10\frac{1}{2}$, c) $9\sqrt{2}$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu równym:
a) 6, b) $4\frac{1}{2}$, c) $3\sqrt{2}$.
- Pole trójkąta jest równe: $P = \frac{3}{4}|b|$, gdzie $(0, b)$ jest punktem przecięcia wykresu funkcji z osią OY .
a) $\frac{3}{4}|b| = 6$, stąd $b = -8$ lub $b = 8$.
Po podstawieniu współrzędnych punktu $(\frac{3}{2}, 0)$ do wzorów funkcji: $y = ax - 8$ i $y = ax + 8$ otrzymujemy: $y = \frac{16}{3}x - 8$ lub $y = -\frac{16}{3}x + 8$.
b) $y = -4x + 6$ lub $y = 4x - 6$
c) $y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + 4\sqrt{2}$ lub $y = \frac{8\sqrt{2}}{3}x - 4\sqrt{2}$



5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów} \\ \text{C i D do równania } y = ax + b. \end{array}$$

Powyższy układ spełniony jest przez parę liczb $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.
Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

- a) $C(-1, -5)$, $D(3, 3)$ b) $C(-2, 4)$, $D(8, -1)$ c) $C(-3, -3)$, $D(6, 3)$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy punkty A, B, C są współliniowe.

- a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$ c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$ d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.

Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

Ćwiczenie 2

- a) Prosta AB : $y = \frac{1}{6}x + 1$
Podstawiamy współrzędne punktu C do równania prostej AB :
 $\frac{1}{6} \cdot 12 + 1 = 3$, czyli punkty A, B i C są współliniowe.
b) Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x + 7$
 $-\frac{1}{2} \cdot (-2) + 7 = 8$, czyli punkty A, B i C są współliniowe.
c) Prosta AB : $y = -2x + 2$
 $-2 \cdot 5 + 2 = -8 \neq -7$, czyli punkty A, B i C nie są współliniowe.
d) Prosta AB : $y = 5$
 $5 \neq 2\sqrt{6}$, czyli punkty A, B i C nie są współliniowe.

Uczeń:

- podaje równanie kierunkowe i ogólne prostej,
- zamienia równanie ogólne prostej, która nie jest równoległa do osi OY , na równanie w postaci kierunkowej (i odwrotnie),
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
- rysuje prostą opisaną równaniem ogólnym,
- wyznacza wartości parametrów, dla których prosta spełnia określone warunki,
- wyznacza wartości parametrów, dla których proste dane równaniem w postaci ogólnej są równoległe.

Ćwiczenie 1

- a) $y = 2x - 3$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 2 i powrócić do definicji funkcji, aby ułatwić im odpowiedź na pytanie:

„Dlaczego prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji?”

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

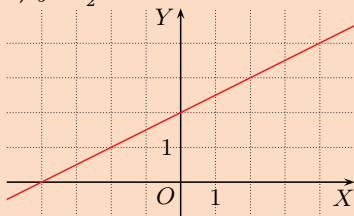
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

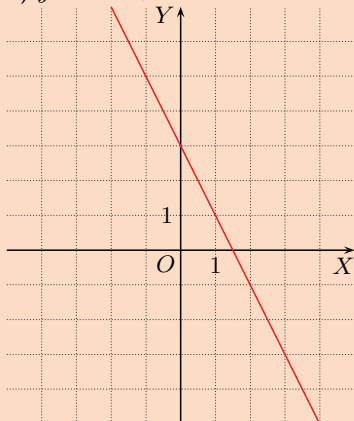
- a) $x = -3$, nie jest
- b) $y = -3$, jest
- c) $x = 8$, nie jest

Ćwiczenie 4

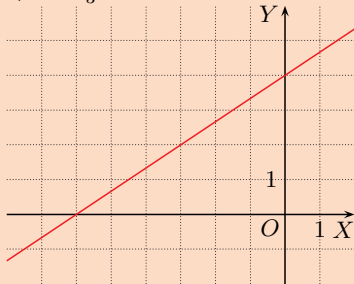
a) $y = \frac{1}{2}x + 2$



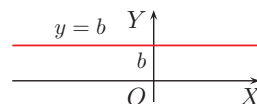
b) $y = -2x + 3$



c) $y = \frac{2}{3}x + 4$



Uwaga. Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 3

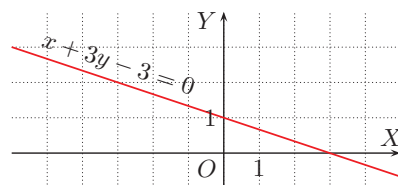
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a) $C(-3, 4)$, $D(-3, 6)$ b) $C(-5, -3)$, $D(7, -3)$ c) $C(8, -2)$, $D(8, 6)$

Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

- a) $-x + 2y - 4 = 0$ b) $6x + 3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

- I. $2x + y - 4 = 0$ II. $4x + 2y - 8 = 0$ III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

Ćwiczenie 5

Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

- $l: -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$ $n: 9x - 12y + 12 = 0$ $p: 3x - 4y + 4 = 0$
 $m: -3x + 4y + 4 = 0$ $o: 6x - 8y + 12 = 0$ $r: -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

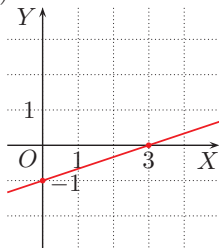
Ćwiczenie 5

Równania: l, n, p, r opisują prostą $y = \frac{3}{4}x + 1$.

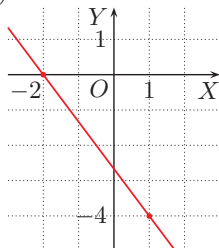
Zadania

1. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B(-3, \frac{8}{3})$ należy do tej prostej?

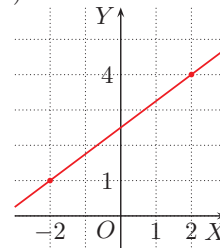
a)



b)



c)



2. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $2x - y + 2 = 0$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

e) $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$

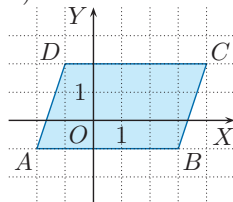
b) $10x + 5y - 5 = 0$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$

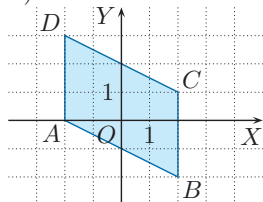
f) $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

3. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.

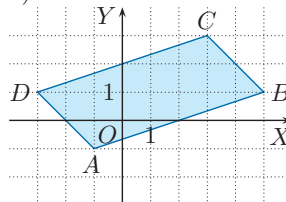
a)



b)



c)



4. Dla jakiej wartości parametru m prosta o podanym równaniu jest równoległa do prostej $4x + 3y + 7 = 0$?

a) $mx + 6y - 1 = 0$

c) $(m - \frac{1}{2})x - \frac{1}{2}y = 0$

e) $x + my + 9 = 0$

b) $(2m + 1)x - y = 0$

d) $\frac{m}{6}x - \frac{3}{4}y + 3 = 0$

f) $\frac{1}{3}x - 2my = 0$

- D** 5. Uzasadnij podane poniżej twierdzenie.

Jeśli równania ogólne $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ opisują tę samą prostą oraz A_2 , B_2 i C_2 są różne od zera, to $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

3. a) $AB: y + 1 = 0$, $DC: y - 2 = 0$, $AD: 3x - y + 5 = 0$, $BC: 3x - y - 10 = 0$
 b) $AB: x + 2y + 2 = 0$, $BC: x - 2 = 0$, $CD: x + 2y - 4 = 0$, $AD: x + 2 = 0$
 c) $AB: x - 3y - 2 = 0$, $BC: x + y - 6 = 0$, $CD: x - 3y + 6 = 0$, $AD: x + y + 2 = 0$

5. Przekształcamy równania ogólne do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \text{ oraz } y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

Równania opisują tę samą prostą, zatem:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \text{ oraz } -\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ oraz } \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Ostatecznie otrzymujemy $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x - 3y - 3 = 0$,
nie należą

b) $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $4x + 3y + 8 = 0$,

nie należą

c) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$,
 $3x - 4y + 10 = 0$,

A należy, B nie należy

2. a) $(0, 2)$, $(-1, 0)$

b) $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

c) $(0, 4)$, $(-\frac{4}{3}, 0)$

d) $(0, -3)$, $(\frac{9}{2}, 0)$

e) $(0, -4)$, $(16, 0)$

f) $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

4. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

a) $m = 8$

b) $m = -\frac{7}{6}$

c) $m = -\frac{1}{6}$

d) $m = -6$

e) $m = \frac{3}{4}$

f) $m = -\frac{1}{8}$

6. a) $m = -\frac{3}{5}$
 b) $m = -3$ lub $m = 3$
7. a) Równanie prostej AB :
 $y = -2x - 4$
 Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej AB z prostą $y = 2x + m$:
 $2x + m = -2x - 4$
 $x = -\frac{1}{4}m - 1$
 Musi zachodzić warunek:
 $x \in \langle -2; 0 \rangle$
 czyli:
 $-2 \leq -\frac{1}{4}m - 1 \leq 0$
 Zatem $m \in \langle -4; 4 \rangle$.
 b) Równanie prostej AB :
 $y = 2$
 Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej AB z prostą $y = 2x + m$:
 $2x + m = 2$
 $x = 1 - \frac{1}{2}m$
 Musi zachodzić warunek:
 $x \in \langle 0; 6 \rangle$
 czyli:
 $0 \leq 1 - \frac{1}{2}m \leq 6$
 Zatem $m \in \langle -10; 2 \rangle$.
9. Zauważmy, że $ax = \frac{x}{\frac{1}{a}}$, czyli:
 $y = \frac{x}{\frac{1}{a}} + b$
 Przekształcamy powyższe równanie:
 $-\frac{x}{\frac{1}{a}} + y = b : b$
 $-\frac{x}{\frac{1}{a}} + \frac{y}{b} = 1$
10. a) $(8, 0)$, $(0, 6)$, $y = -\frac{3}{4}x + 6$
 b) $(5, 0)$, $(0, -3)$, $y = \frac{3}{5}x - 3$
 c) $(-1, 0)$, $(0, 4)$, $y = 4x + 4$
11. a) $y = -3x + 9$, malejąca
 b) $y = \frac{1}{2}x + 2$, rosnąca
 c) $y = \frac{1}{4}x - 2$, rosnąca
12. a) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$
 b) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$
 c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

6. Podstawy trapezu są zawarte w prostych l_1 i l_2 . Korzystając z informacji podanej w ramce, wyznacz wartości parametru m .

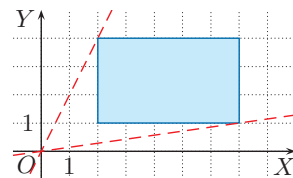
a) $l_1 : -6x + 4y + 3 = 0$,
 $l_2 : mx + (m + 1)y - 4 = 0$
 b) $l_1 : 9x + 8y + 1 = 0$,
 $l_2 : -m^2x + (1 - m^2)y + 4 = 0$

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe $\Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$.

7. Dla jakich wartości parametru m prosta $2x - y + m = 0$ ma punkt wspólny z odcinkiem AB , jeśli:

a) $A(-2, 0)$, $B(0, -4)$, b) $A(0, 2)$, $B(6, 2)$?

8. Ile punktów wspólnych, w zależności od parametru m , ma prosta $mx - y = 0$ z bokami narysowanego obok prostokąta?



- D 9. Uzasadnij, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to równanie prostej $y = ax + b$ można zapisać w postaci:

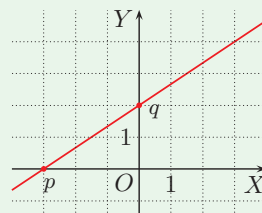
$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$$

Czy wiesz, że...

Równanie prostej przecinającej oś OX w punkcie $(p, 0)$, gdzie $p \neq 0$, i oś OY w punkcie $(0, q)$, gdzie $q \neq 0$, można zapisać w postaci:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Jest to **równanie odcinkowe prostej**.



10. Wyznacz punkty, w których prosta o danym równaniu odcinkowym przecina osie układu współrzędnych. Narysuj tę prostą w układzie współrzędnych i podaj jej równanie kierunkowe.
- a) $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$ b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$ c) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$
11. Dane jest równanie prostej w postaci odcinkowej. Zapisz to równanie w postaci $y = ax + b$ i określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest ta prosta.
- a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ b) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$ c) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} = 1$
12. Wyznacz równanie odcinkowe prostej:
- a) $y = 2x + 6$, b) $y = \frac{2}{3}x - 4$, c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

8. Prosta $y = mx$ przechodzi przez punkt $(2, 4)$ dla $m = 2$ ($y = 2x$), a przez punkt $(7, 1)$ dla $m = \frac{1}{7}$ ($y = \frac{1}{7}x$). Zatem ta prosta ma:
- 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty; \frac{1}{7}) \cup (2; \infty)$,
 - 1 punkt wspólny dla $m \in \{\frac{1}{7}, 2\}$,
 - 2 punkty wspólne dla $m \in (\frac{1}{7}; 2)$.

5.4. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

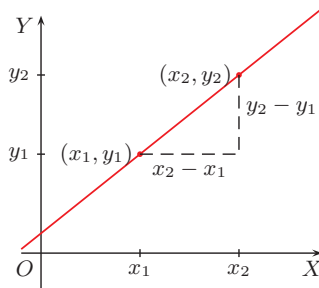
Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uwaga:
 $x_1 \neq x_2$.



Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B .

- a) $A(3, 7)$, $B(9, 12)$ b) $A(3, 5)$, $B(-7, -5)$ c) $A(12, -2)$, $B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S ?

- a) $R(0, 6)$, $S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4)$, $S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2})$, $S(8, 2)$

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

Ćwiczenie 3

$$a_{AB} = \frac{1}{3} = a_{CD}, \quad a_{BC} = -2 = a_{DA}$$

Proste AB , CD oraz BC , DA są parami równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Uczeń:

- oblicza współczynnik kierunkowy prostej, mając dane współrzędne dwóch punktów należących do tej prostej,
- szkicuje prostą, wykorzystując interpretację współczynnika kierunkowego,
- odczytuje wartość współczynnika kierunkowego, mając dany wykres; w przypadku wykresu zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnym podaje wartość prędkości,
- wyprowadza równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym przechodzącej przez dany punkt.

Ćwiczenie 1

- a) $a = \frac{12-7}{9-3} = \frac{5}{6}$
b) $a = \frac{-5-5}{-7-3} = 1$
c) $a = \frac{8+2}{6-12} = -\frac{5}{3}$

Ćwiczenie 2

- $a_{PQ} = \frac{3}{2}$
a) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest
b) $a_{RS} = 1$, nie jest
c) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Wyznaczanie współczynnika kierunkowego prostej
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

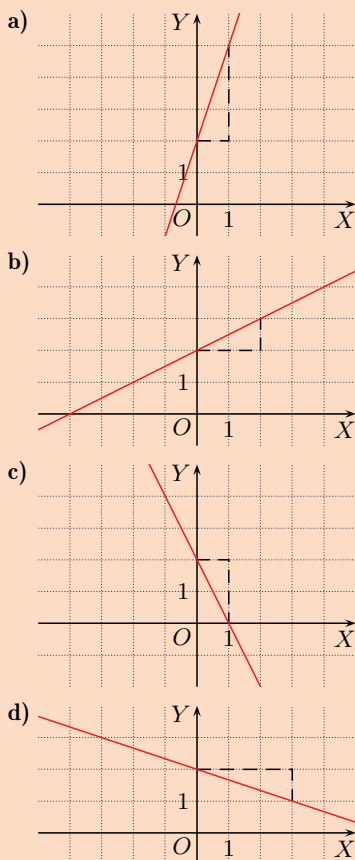
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

Generator
testów i sprawdzianów

Komentarz

Warto uświadomić uczniom, że wykres funkcji liniowej łatwiej jest narysować, kiedy rozumie się, co oznacza współczynnik kierunkowy. Wystarczy wtedy znać współrzędne jednego punktu należącego do wykresu (np. punktu przecięcia z osią OY).

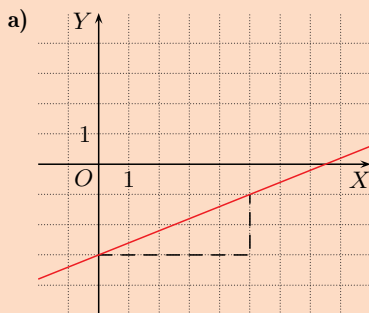
Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 6

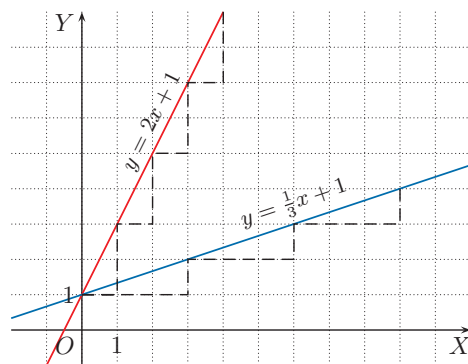
- a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$
b) $y = -3x - 1$
c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

Ćwiczenie 5



Interpretacja współczynnika kierunkowego

Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”. Na przykład dla prostej $y = 2x + 1$ wzrostowi argumentu o jedną jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o dwie jednostki, a dla prostej $y = \frac{1}{3}x + 1$ wzrostowi argumentu o trzy jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o jedną jednostkę.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

- a) $y = 3x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + 2$ c) $y = -2x + 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

- a) $y = \frac{2}{5}x - 3$ b) $y = \frac{4}{3}x - 3$ c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ d) $y = -\frac{2}{5}x - 3$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów: P lub Q .

Dla punktu $P(3, -7)$ otrzymujemy:

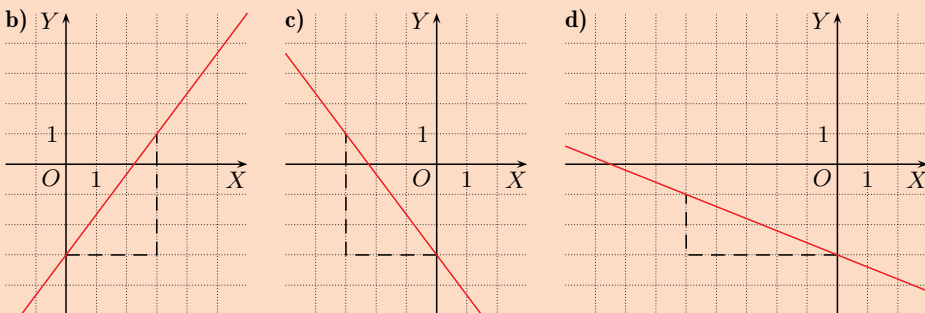
$$-7 = -2 \cdot 3 + b, \text{ stąd } b = -1.$$

Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

Ćwiczenie 6

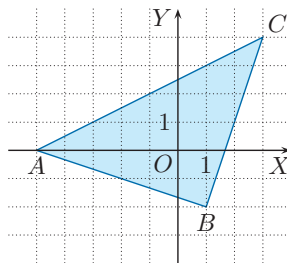
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

- a) $P(4, 5), Q(-4, 9)$ b) $P(4, -13), Q(2, -7)$ c) $P(3, 3), Q(1, \frac{7}{3})$



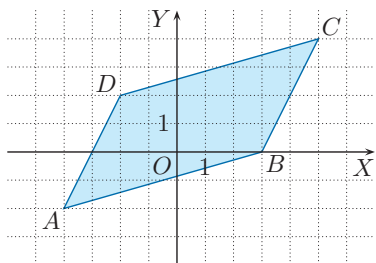
Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki tego trójkąta.
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie: $A(-4, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$, $D(-5, 4)$.
- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .
 - $P(3, 4)$, $Q(7, 6)$
 - $P(-2, 7)$, $Q(2, -1)$
 - $P(\frac{1}{3}, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, -1)$
 - $P(3, \frac{7}{3})$, $Q(2, \frac{1}{3})$
 - $P(-2, -6)$, $Q(8, -6)$
 - $P(\sqrt{3}, 4)$, $Q(3\sqrt{3}, 10)$

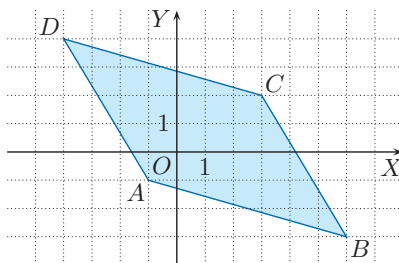


- D** 4. Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest równoległokiem.

a)



b)



- D** 5. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem.
- $P(0, -5)$, $Q(9, 1)$, $R(6, 11)$, $S(-6, 3)$
 - $P(-8, 5)$, $Q(-6, -2)$, $R(4, -6)$, $S(7, -1)$
- Dane są punkty A , B , C i D . Wyznacz wartość parametru m , wiedząc, że proste AB i CD są równoległe.
 - $A(-1, -3)$, $B(9, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, m)$
 - $A(9, m)$, $B(4, -m)$, $C(9, 2)$, $D(3, 6)$
 - Dane są punkty $K(-4, 5)$, $L(4, -1)$, $M(0, 8)$, $N(m, \frac{1}{4}m)$. Wyznacz wartość parametru m , dla którego proste KL i MN są równoległe.

Odpowiedzi do zadań

- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: -\frac{1}{3}$, $BC: 3$, $AC: \frac{1}{2}$
- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: \frac{1}{2}$, $BC: -1$, $CD: -\frac{1}{5}$, $AD: -6$
- $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
 - $y = -2x + 3$
 - $y = -12x + 5$
 - $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
 - $y = -6$
 - $y = \sqrt{3}x + 1$
- $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$,
 $AD: y = 2x + 6$,
 $BC: y = 2x - 6$,
 $CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
 zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległokiem.
 - $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$,
 $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7$,
 $CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
 zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległokiem.
- PQ i $RS: \frac{2}{3}$, $QR: -\frac{10}{3}$,
 $PS: -\frac{4}{3}$
 $PQ \parallel RS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
 - $PQ: -\frac{7}{2}$, $RS: \frac{5}{3}$,
 QR i $PS: -\frac{2}{5}$
 $QR \parallel PS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
- $a_{AB} = \frac{1}{2} = \frac{m-4}{-4} = a_{CD}$
 $m = 2$
 - $a_{AB} = \frac{2m}{5} = \frac{2}{-3} = a_{CD}$
 $m = -\frac{5}{3}$
- $a_{KL} = \frac{-3}{4} = \frac{\frac{1}{4}m-8}{m} = a_{MN}$
 $m = 8$

$$8. a_{AC} = \frac{-3-m^2}{6}, a_{BD} = 2$$

$$\frac{-3-m^2}{6} = -2$$

$$m = -3 \text{ lub } m = 3$$

9. Punkt (x_1, y_1) należy do prostej $y = ax + b$, zatem:

$$y_1 = ax_1 + b$$

czyli:

$$b = y_1 - ax_1$$

Podstawiamy b do równania prostej i otrzymujemy:

$$y = ax + y_1 - ax_1$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

10. a) $y - 1 = 2(x - 2)$

b) $y + 5 = 7(x + 3)$

c) $y + 9 = -\frac{7}{3}(x - 2)$

d) $y - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$

8. Dany jest czworokąt o wierzchołkach $A(-2, 4)$, $B(-3, -2)$, $C(4, 1 - m^2)$ i $D(0, 4)$. Wyznacz wartość parametru m , wiedząc, że współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się przekątne czworokąta $ABCD$, są liczbami przeciwnymi.

D 9. Udowodnij poniższe twierdzenie.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) można zapisać w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$.

10. Zapisz w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$ równanie prostej równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

a) $l: y = 2x + 8, P(2, 1)$

c) $l: y = -\frac{7}{3}x + 8, P(2, -9)$

b) $l: y = 7x - \frac{1}{4}, P(-3, -5)$

d) $l: y = \sqrt{2}x - 7, P(-1, \sqrt{2})$

D 11. Uzasadnij, że jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY , to jej równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

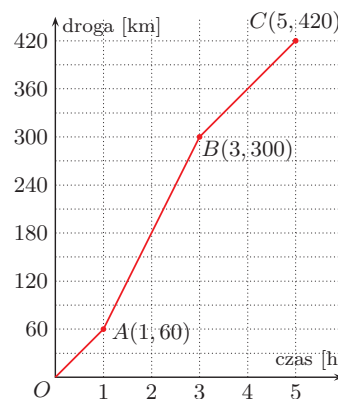
gdzie (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są różnymi punktami należącymi do tej prostej.

12. Przeczytaj podaną w ramce informację.

Na wykresie przedstawiono, jak zmieniła się droga podczas pięciogodzinnej jazdy samochodem. Punkty A i B wykresu odpowiadają początkowi i końcowi jazdy autostradą. Aby obliczyć, z jaką prędkością jechał wtedy samochód, korzystamy ze wzoru $v = \frac{s}{t}$:

$$v = \frac{300 - 60}{3 - 1} = 120 \text{ [km/h]}$$

Zwróć uwagę na to, że prędkość v jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej AB .



a) Oblicz współczynniki kierunkowe prostych OA i BC . Z jaką średnią prędkością jechał samochód w ciągu pierwszej godziny jazdy, a z jaką w ciągu dwóch ostatnich godzin?

b) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej OC i podaj jego interpretację.

11. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa różne punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) wyraża się wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Na podstawie twierdzenia z zadania 9. prostą możemy zapisać w postaci:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

czyli $a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ dla $x \neq x_1$.

Zatem $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (przy czym punkt (x_1, y_1) nie spełnia tego równania).

12. a) $a_{OA} = \frac{60 - 0}{1 - 0} = 60 \text{ [km/h]}$

$a_{BC} = \frac{420 - 300}{5 - 3} = 60 \text{ [km/h]}$

b) $a_{OC} = \frac{420}{5} = 84 \text{ [km/h]}$

Średnia prędkość samochodu podczas całej trasy wynosiła 84 km/h.

Nachylenie trasy

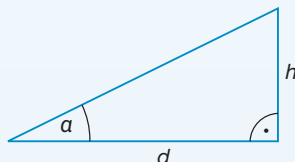
Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej stromości, czyli o jej nachyleniu do poziomu.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach.

Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45°, a nachylenie 10% – kątowi około 6°.

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38°.

- 1 Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.

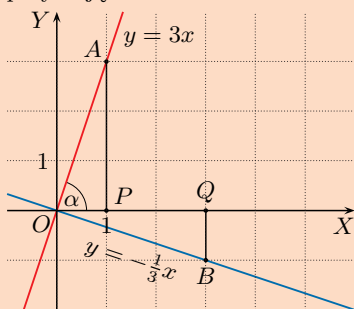


Uczeń:

- podaje warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- wyznacza równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt,
- uzasadnia warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań,
- bada, czy proste dane równaniem w postaci ogólnej są prostopadłe, wyznacza wartości parametrów, dla których takie proste są prostopadłe.

Ćwiczenie 1

a) Punkt $A(1, 3)$ należy do prostej $y = 3x$, a punkt $B(3, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{3}x$. Niech $P(1, 0)$ i $Q(3, 0)$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.



Przyjmijmy, że $\angle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\angle OBQ = \alpha$$

$$\angle BOQ = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ są prostopadłe.

Multiteka

- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.5



5.5. Warunek prostopadłości prostych

Przykład 1

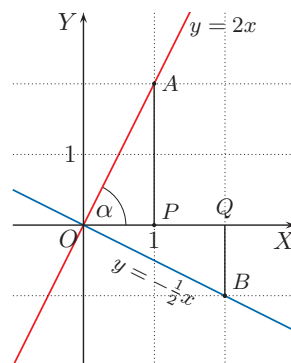
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $\angle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO : $\angle OBQ = \alpha$ oraz $\angle BOQ = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie, że proste są prostopadłe.

a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ (czyli $a_1 \cdot a_2 = -1$).

Przykład 2

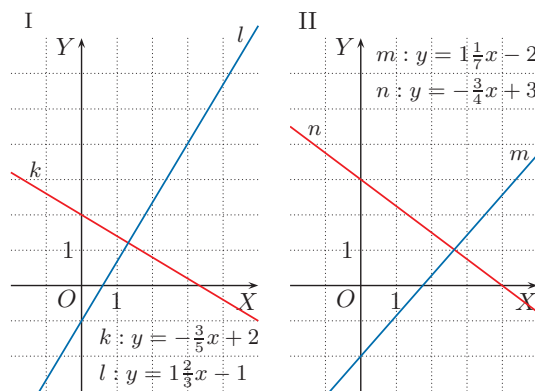
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.



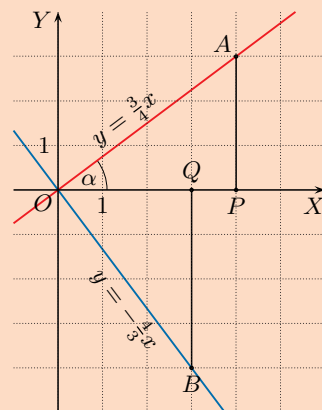
b) Punkt $A(4, 3)$ należy do prostej $y = \frac{3}{4}x$, a punkt $B(3, -4)$ do prostej $y = -\frac{4}{3}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $\angle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\angle OBQ = \alpha \text{ oraz } \angle BOQ = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

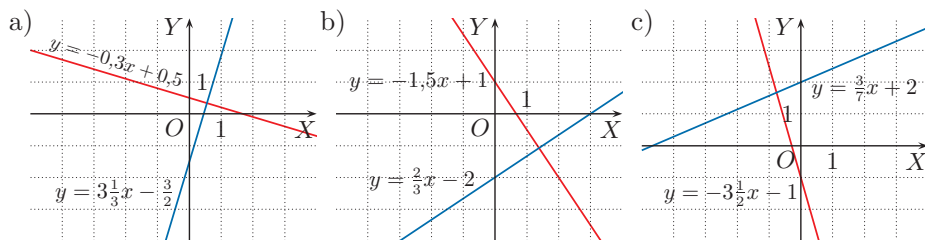
$$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



Przykład 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k , jeśli jest ona prostopadła do prostej $y = \frac{3}{8}x - 4$.

Oznaczmy przez a_1 współczynnik kierunkowy prostej k . Wówczas:

$$a_1 = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

D Ćwiczenie 4

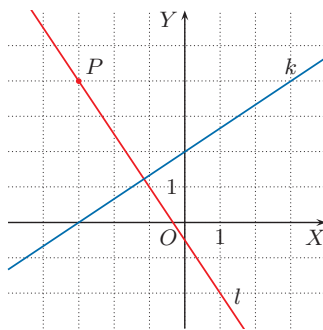
Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych współczynników b_1, b_2 prostopadłe są również proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0.1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

Ćwiczenie 1

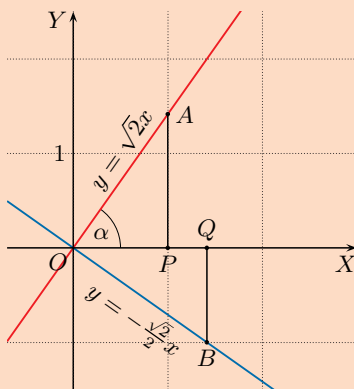
c) Punkt $A(1, \sqrt{2})$ należy do prostej $y = \sqrt{2}x$, a punkt $B(\sqrt{2}, -1)$ do prostej $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $\angle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\angle OBQ = \alpha \text{ oraz } \angle BOQ = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

a) $a_1 = -\frac{3}{10}$, $a_2 = \frac{10}{3}$,

$a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3} = -1$ – proste są prostopadłe

b) $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$,

$a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$ – proste są prostopadłe

c) $a_1 = \frac{3}{7}$, $a_2 = -\frac{7}{2}$,

$a_1 \cdot a_2 = \frac{3}{7} \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{3}{2} \neq -1$ – proste nie są prostopadłe

Ćwiczenie 3

- a) -5 b) $-\frac{1}{9}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $-3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Prostopadłość prostych uzależniona jest od współczynników kierunkowych. Z prostopadłości prostych $y = a_1x$ i $y = a_2x$ wynika, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, zatem dla dowolnych współczynników b_1, b_2 proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe.

Ćwiczenie 5

a) $y = \frac{1}{3}x - 1$

b) $y = 10x - 1$

c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$

Ćwiczenie 6

- a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
- b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
- c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

Ćwiczenie 7

- a) $x = 6$
- b) $y = -5$
- c) $y = -5$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) $y = \frac{1}{3}x - 3$
- b) $y = -\frac{3}{2}x + 7$
- c) $y = \frac{3}{4}x + 1$
- d) $y = -\frac{2}{7}x$

Przykład 5

Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l .

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.

Równanie prostej l ma zatem postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Ćwiczenie 6

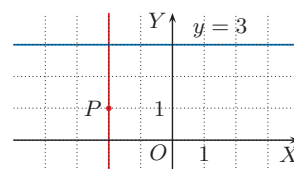
Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba -2 . Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

- a) $3x + 2y + 6 = 0$
- b) $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$
- c) $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.



Ćwiczenie 7

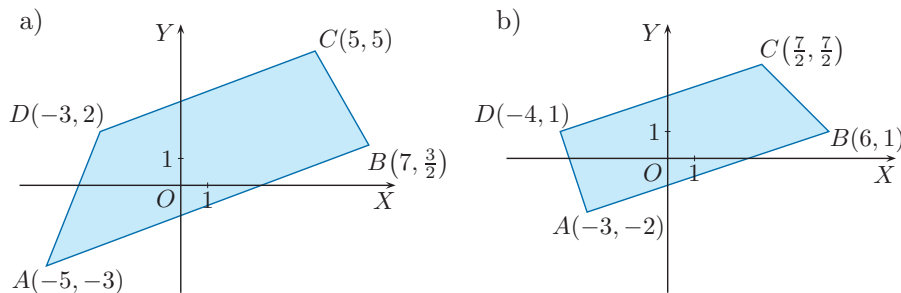
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do prostej:

- a) $y = -3$,
- b) $x = -3$,
- c) $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

- 1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .
 - a) $l: y = -3x + 1, P(3, -2)$
 - b) $l: y = \frac{2}{3}x - 3, P(4, 1)$
 - c) $l: y = -\frac{4}{3}x + 11, P(-4, -2)$
 - d) $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3, P(14, -4)$
 - 2. Wyznacz równania prostych: AB , AC i BC . Czy trójkąt ABC jest prostokątny?
 - a) $A(1, 5), B(4, 2), C(7, 5)$
 - b) $A(-2, -1), B(0, -3), C(4, 5)$
 - c) $A(-7, -2), B(8, -2), C(-2, 3)$
 - d) $A(4\frac{1}{2}, 6), B(-2, -\frac{1}{2}), C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
 - 3. Punkty: A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.
 - a) $A(-2, -6), B(5, -3), C(8, 4)$
 - b) $A(-1, -2), B(6, -1), D(-6, 3)$
-
- 2. a) $AB: y = -x + 6, BC: y = x - 2, AC: y = 5$, jest
 - b) $AB: y = -x - 3, BC: y = 2x - 3, AC: y = x + 1$, jest
 - c) $AB: y = -2, BC: y = -\frac{1}{2}x + 2, AC: y = x + 5$, nie jest
 - d) $AB: y = x + \frac{3}{2}, BC: y = -\frac{1}{2}, AC: x = 4\frac{1}{2}$, jest
- 3. a) $AC: y = x - 4, BD: y = -x + 2$
 - b) $AC: y = 3x + 1, BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$

- D 4.** Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?



- D 5.** Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- a) $P(-5, 0)$, $Q(-1, -6)$, $R(8, 0)$, $S(4, 6)$
 b) $P(-8, -2)$, $Q(6, -8)$, $R(9, -1)$, $S(-5, 5)$

- D 6.** Punkty $A(0, 0)$ i $C(2, 8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.

7. a) Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek o końcach $B(-5, -5)$, $C(3, -1)$ jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A .

- b) Punkty $A(-5, 4)$ i $C(4, -3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Wyznacz współrzędne wierzchołka B , jeśli bok AB jest równoległy do osi OY oraz prosta $y = -3x - 11$ zawiera jedną z wysokości tego trójkąta.

8. Wyznacz równania prostych prostopadłych l_1 , l_2 przecinających się w punkcie $(2, 4)$, jeśli jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6, 0)$. O ile procent większe jest pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY ?

9. Korzystając z podanej obok informacji, sprawdź, czy proste k i l są prostopadłe.

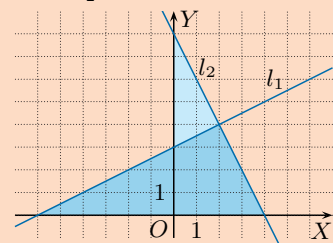
- a) $k: 3x - 4y + 9 = 0$, $l: \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0$
 b) $k: 4x + 6y - 3 = 0$, $l: \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = 0$

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

10. Dla jakich wartości parametru m proste l_1 , l_2 są prostopadłe?

- a) $l_1: x + my - 9 = 0$, $l_2: 0,1x - 0,02y + 3 = 0$
 b) $l_1: 4x - 9y - 7 = 0$, $l_2: (4m^2 - 4)x - m^2y + 17 = 0$

8. $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$, $l_2: y = -2x + 8$



$$P_{OX} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

$$P_{OY} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$

$P_{OX} = 4P_{OY}$, czyli P_{OX} jest większe od P_{OY} o 300%.

9. a) $3 \cdot \frac{2}{3} + (-4) \cdot \frac{1}{2} = 0$, czyli $k \perp l$.

- b) $4 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot (-\frac{2}{3}) = -1$, czyli proste nie są prostopadłe.

10. Korzystamy z twierdzenia podanego przy zadaniu 9.

- a) $0,1 - 0,02m = 0 \quad / \cdot 50$
 $5 - m = 0$
 $m = 5$

- b) $4(4m^2 - 4) + 9m^2 = 0$
 $25m^2 = 16$
 $m = -\frac{4}{5}$ lub $m = \frac{4}{5}$

4. a) $a_{AB} = \frac{4,5}{12} = \frac{3}{8} = a_{DC}$, czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

$a_{BC} = \frac{-3,5}{2} = -\frac{7}{4} \neq -\frac{8}{3}$, czyli trapez nie jest prostokątny.

- b) $a_{AB} = \frac{1}{3} = \frac{2,5}{7,5} = a_{DC}$, czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

$a_{AD} = \frac{3}{-1} = -3$, czyli trapez jest prostokątny.

5. a) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{2}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.

$a_{QR} = a_{SP} = \frac{2}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.

$-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.

Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- b) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{7}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.

$a_{QR} = a_{SP} = \frac{7}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.

$-\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.

Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

6. Przekątna AC : $y = 4x$ jest prostopadła do przekątnej BD , zatem prostokąt $ABCD$ jest kwadratem. Niech a będzie długością jego boku.

$$|AC| = 2\sqrt{17} = a\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{34}$$

$$Ob = 4\sqrt{34}, P = 34$$

7. a) Punkt B leży na prostej $y = 3x + 10$.

$a_{BC} = \frac{1}{2}$, czyli prosta AC ma postać $y = -2x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu C i wyznaczamy b : $b = 5$.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x + 10 \end{cases}$$

Współrzędne wierzchołka A : $(-1, 7)$.

- b) Prosta AB : $x = -5$. Prosta BC jest prostopadła do podanej wysokości, czyli ma postać $y = \frac{1}{3}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu C i wyznaczamy b : $b = -4\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{1}{3}x - 4\frac{1}{3} \end{cases}$$

Współrzędne wierzchołka A : $(-5, -6)$

Uczeń:

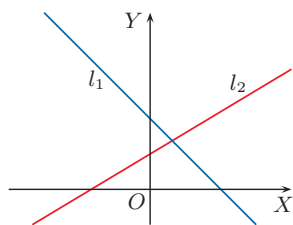
- interpretuje geometrycznie układ równań,
- rozwiązuje układ równań metodą algebraiczną i graficzną,
- wyjaśnia związek między liczbą rozwiązań układu równań a położeniem prostych,
- rozwiązuje układ równań z parametrem oraz określa jego typ w zależności od wartości parametru.

5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

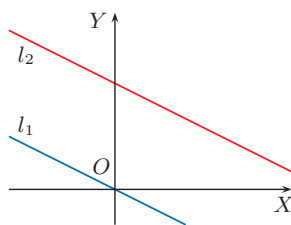
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

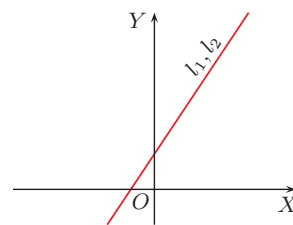
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ spreczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



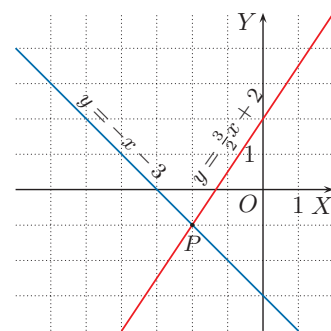
Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste pokrywają się.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Pierwsze równanie po przekształceniu do postaci kierunkowej ma postać $y = -x - 3$, a drugie $y = \frac{3}{2}x + 2$. Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.



Rozwiązaniem układu równań jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

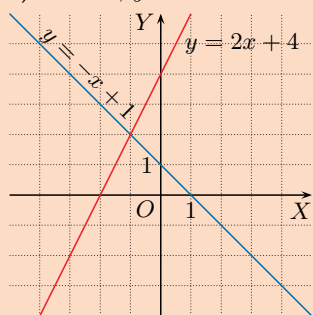
a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$

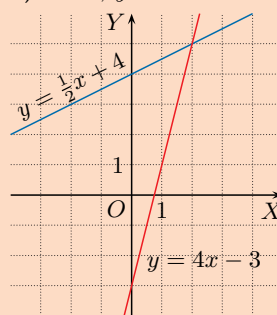
c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 1

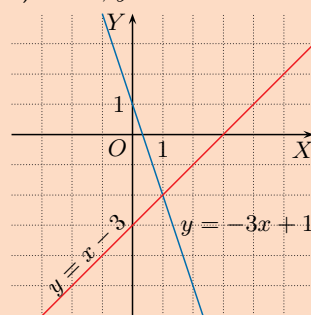
a) $x = -1$, $y = 2$



b) $x = 2$, $y = 5$



c) $x = 1$, $y = -2$



Multiteka

- Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych
- Układy równań liniowych – interpretacja geometryczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.6

Generator
testów i sprawdzianów

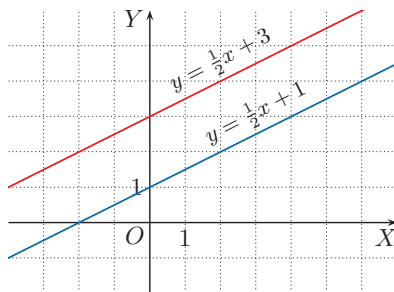
Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań
$$\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.



Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań.

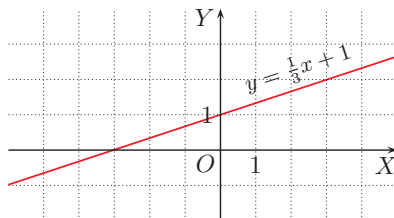
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $(x, \frac{1}{3}x + 1)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

a)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$$

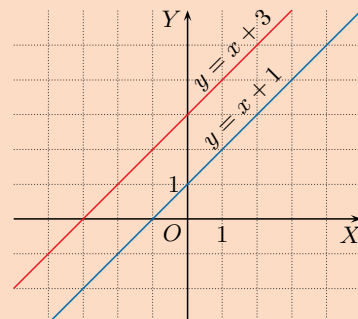
c)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$$

Ćwiczenie 3

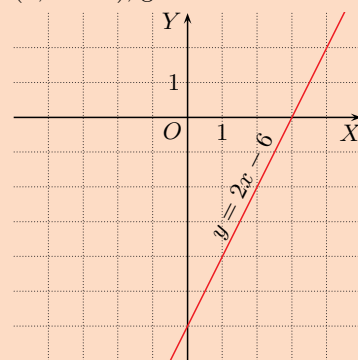
a) sprzeczny b) nieoznaczony c) oznaczony

Ćwiczenie 2

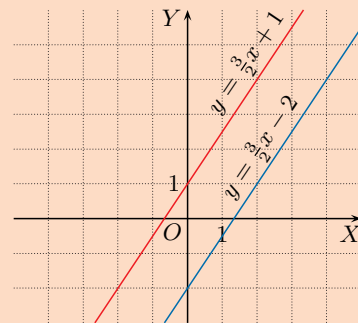
a) Układ sprzeczny



b) Układ nieoznaczony – rozwiązaniami są pary liczb postaci: $(x, 2x - 6)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.



c) Układ sprzeczny



Odpowiedzi do zadań

1. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}$
 $x = 3, y = 4$
 b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\frac{3}{4}x - 3 \end{cases}$
 $x = 4, y = -6$
 c) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 2 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$
 $x = 2, y = 1$
 d) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$
 $x = 1, y = 6$
 e) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$
 Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbf{R}, y = \frac{2}{3}x - 2$
 f) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 3 \\ y = -\frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$
 Układ sprzeczny
2. a) $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$
 $x = 3, y = 0$
 b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$
 $x = 3, y = 4$
 c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$
 $x = 2, y = 0$
 d) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$
 $x = 1, y = 4$
 e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ y = 6x + 3 \end{cases}$
 Układ sprzeczny
 f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$
 Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbf{R}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Zadania

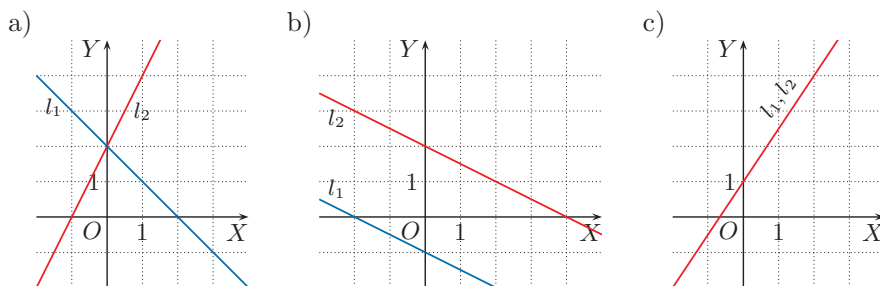
1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases}$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki: a_1, a_2, b_1, b_2 , aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Dla jakich wartości parametru k układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny?

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ kx + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + ky = 4k \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y = -1 \\ x - k^2y = \frac{k}{2} \end{cases}$

3. a) np. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$

4. a) $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$
 b) $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$
 c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne

5. a) oznaczony dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, sprzeczny dla $k = -2$
 b) oznaczony dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, nieoznaczony dla $k = \frac{1}{2}$
 c) oznaczony dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, nieoznaczony dla $k = -\frac{1}{2}$, sprzeczny dla $k = \frac{1}{2}$

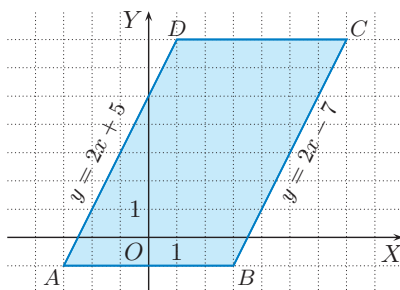
6. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

- a) $y = x - 2$, $y = x - 6$, $y + 3 = 0$, $y - 2 = 0$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = -2x - 7$, $y = -2x + 8$
 c) $3x - y = -2$, $3x - y = 4$, $x - 2y = 6$, $x - 2y = -14$

7. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych: $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

8. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).

- a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP .
 b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.



9. Wierzchołki B i C trójkąta prostokątnego ABC są punktami przecięcia prostej $y = -\frac{3}{4}x + 3$ z osiami układu współrzędnych. Narysuj ten trójkąt i odczytaj współrzędne wierzchołka A , jeśli przeciwprostokątna AB jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x - 2$.

10. Prosta AC dana jest równaniem $y = \frac{3}{4}x - 1$, a wierzchołek B kwadratu $ABCD$ ma współrzędne $(-1, -8)$. Naskicuj proste zawierające przekątne kwadratu i odczytaj współrzędne ich punktu przecięcia. Uzasadnij, że dwa wierzchołki tego kwadratu należą do osi układu współrzędnych.

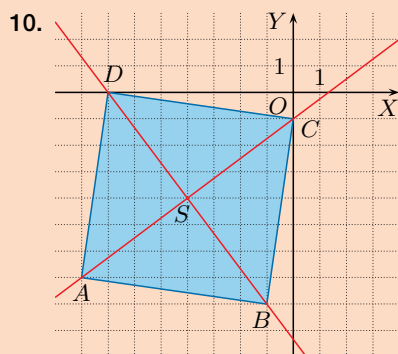
Czy wiesz, że...

Pole trójkąta o wierzchołkach: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

11. Narysuj trójkąt, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta. Oblicz jego pole, korzystając z podanego powyżej wzoru.

- a) $y = x + 4$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = -2x + 10$
 b) $y = \frac{2}{3}x + 5$, $y = 3x - 2$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$



Punkt przecięcia przekątnych kwadratu: $S(-4, -4)$.

Przekątne kwadratu dzielą się na połowy, zatem:

$$|SA| = |SC| = |SD| = |SB| = 5$$

Punkty A i C mają współrzędne postaci $(x, \frac{3}{4}x - 1)$, czyli:

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(x+4)^2 + (\frac{3}{4}x - 1 + 4)^2} = 5$$

Stąd otrzymujemy: $A(-8, -7)$ i $C(0, -1)$.

Prosta BD ma równanie $y = -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3}$, zatem $D(x, -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3})$, czyli:

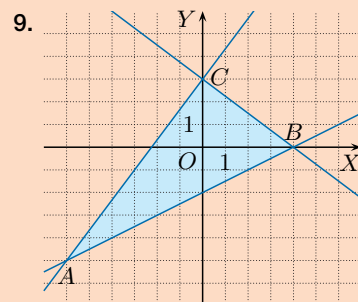
$$|SD| = |SB| = \sqrt{(x+4)^2 + (-1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3} + 4)^2} = 5$$

Stąd otrzymujemy: $D(-7, 0)$ i $B(-1, -8)$.

6. a) $A(-1, -3)$, $B(3, -3)$, $C(8, 2)$, $D(4, 2)$
 b) $A(-2, -3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(-4, 1)$
 c) $A(-2, -4)$, $B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5})$, $C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5})$, $D(2, 8)$

7. $A(-3, -3)$, $B(6, 0)$, $C(5, 3)$, $D(-1, 1)$

8. a) 12 b) 27



Prosta AC jest prostopadła do prostej $y = -\frac{3}{4}x + 3$ i przechodzi przez punkt $C(0, 3)$, ma więc równanie $y = \frac{4}{3}x + 3$.

Współrzędne punktu A spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

Zatem $A(-6, -5)$.

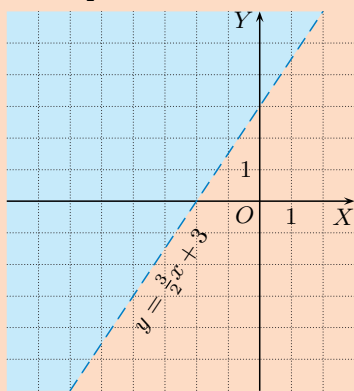
11. a) Wierzchołki: $(-2, 2)$, $(2, 6)$, $(6, -2)$, pole: $P = 24$
 b) Wierzchołki: $(-6, 1)$, $(0, -2)$, $(3, 7)$, pole: $P = 31,5$

Uczeń:

- interpretuje geometrycznie nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi oraz pojęcie półpłaszczyzny otwartej i domkniętej,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi,
- zapisuje układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawionych w układzie współrzędnych,
- rozwiązuje graficznie układ kilku nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi,
- wyznacza w układzie współrzędnych iloczyn, sumę i różnicę zbiorów punktów opisanych nierównościami liniowymi z dwiema niewiadomymi.

Ćwiczenie 1

a) $y > \frac{3}{2}x + 3$

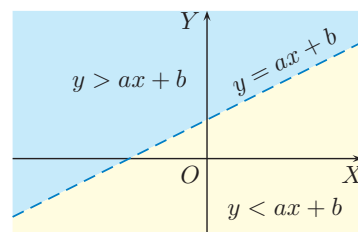


*5.7. Układy nierówności liniowych

Każdą z dwóch części płaszczyzny, na które dzieli ją prosta, nazywamy **półpłaszczyzną**. Prosta ta jest **krawędzią** obu półpłaszczyzn. Półpłaszczyznę zawierającą swoją krawędź nazywamy **półpłaszczyzną domkniętą**. Półpłaszczyznę, do której nie należy żaden punkt z jej krawędzi, nazywamy **półpłaszczyzną otwartą**.

Prosta $l: y = ax + b$ wyznacza dwie półpłaszczyzny otwarte:

- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } y < ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą poniżej prostej l ,
- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } y > ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą powyżej tej prostej.



Przykład 1

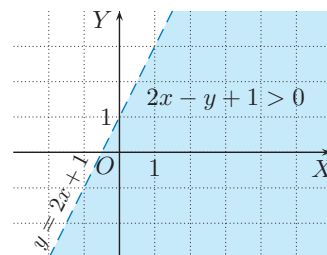
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $2x - y + 1 > 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y < 2x + 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną otwartą leżącą poniżej prostej $y = 2x + 1$.

Współrzędne punktów tej prostej nie spełniają nierówności $y < 2x + 1$, więc tę prostą rysujemy linią przerywaną.



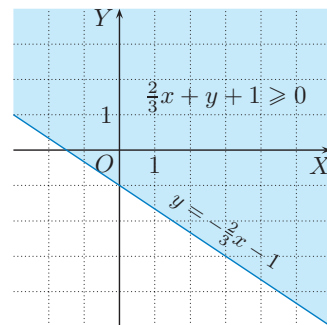
Przykład 2

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $\frac{2}{3}x + y + 1 \geq 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y \geq -\frac{2}{3}x - 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną domkniętą ograniczoną przez prostą $y = -\frac{2}{3}x - 1$. Współrzędne punktów tej prostej spełniają nierówność $y \geq -\frac{2}{3}x - 1$, więc tę prostą rysujemy linią ciągłą.

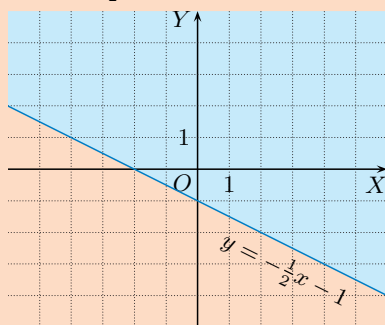


Ćwiczenie 1

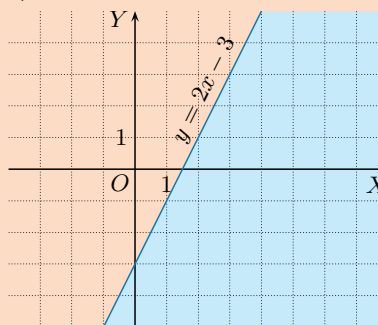
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność:

a) $-3x + 2y - 6 > 0$, b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$, c) $y - 2x \leq -3$.

b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$



c) $y \leq 2x - 3$



Multiteka

- Nierówność liniowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

Generator
testów i sprawdzianów

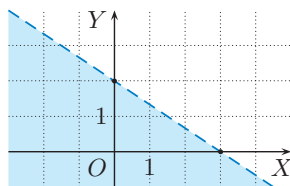
Przykład 3

Podaj nierówność opisującą zaznaczoną na rysunku obok półpłaszczyznę.

Wyznaczamy równanie prostej będącej krawędzią półpłaszczyzny:

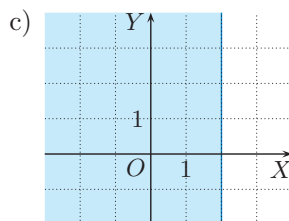
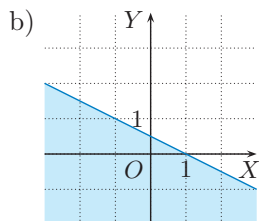
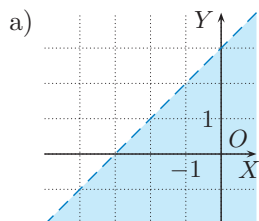
$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Półpłaszczyzna jest otwarta, jej punkty leżą poniżej prostej $y = -\frac{2}{3}x + 2$, więc szukana nierówność ma postać $y < -\frac{2}{3}x + 2$.



Ćwiczenie 2

Podaj nierówność opisującą zaznaczoną półpłaszczyznę.



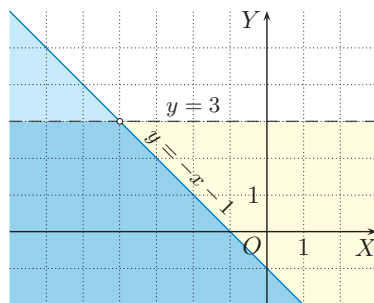
Przykład 4

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

$$\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ y < 3 \end{cases}$$

Zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta $y = -x - 1$. Dla drugiej nierówności zaznaczamy półpłaszczyznę otwartą ograniczoną z góry prostą $y = 3$. Część wspólna obu półpłaszczyzn jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności.

Zauważ, że punkt $(-4, 3)$ nie należy do części wspólnej obu półpłaszczyzn.

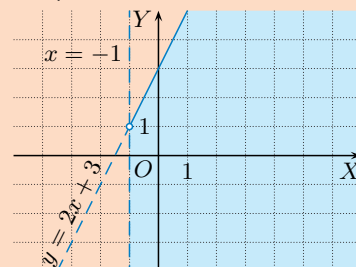


Ćwiczenie 2

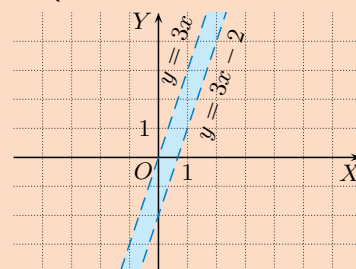
- a) $y < x + 3$
b) $y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
c) $x \leq 2$

Ćwiczenie 3

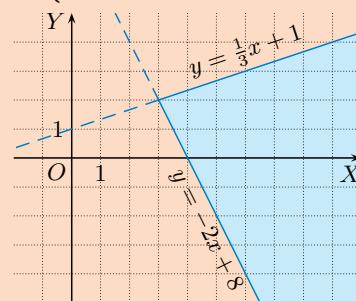
- a) $\begin{cases} y \leq 2x + 3 \\ x > -1 \end{cases}$



- b) $\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y < 3x \end{cases}$



- c) $\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq -2x + 8 \end{cases}$



Ćwiczenie 3

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

a) $\begin{cases} -2x + y - 3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y - 2 < 0 \\ -6x + 2y < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) P, R b) żaden c) R

2. a)
$$\begin{cases} y \leq -x + 4 \\ y \geq -4x + 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y < -x + 2 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

3. a)
$$\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y > -x + 3 \\ x < 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y > -x + 1 \\ y > x + 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

4. a) $(-1, -1), (-1, 7), (3, 3)$

b) $(-4, -3), (5, -3), (2, 6)$

c) $(1, -4), (5, 4), (-3, 0)$

5. a)
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ y \leq -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} \\ y \geq -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 2 \\ y \geq -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y \leq \frac{3}{5}x + \frac{6}{5} \\ y \geq \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \\ y \geq 3x - 6 \\ y \leq 3x + 6 \end{cases}$$

Zadania

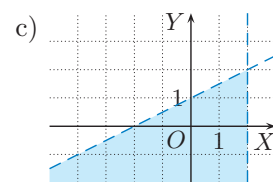
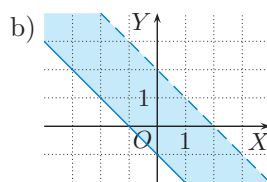
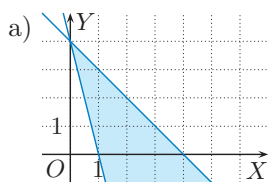
1. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności. Które z punktów $P(6, 1)$, $Q(-3, 5)$, $R(8, -3)$ należą do otrzymanego zbioru?

a)
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x - y - 5 < 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 7 < 0 \end{cases}$$

2. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na poniższym rysunku.



3. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz trójkąta ABC , jeśli: a) $A(1, 2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$, b) $A(-6, 7)$, $B(0, 1)$, $C(2, 3)$.

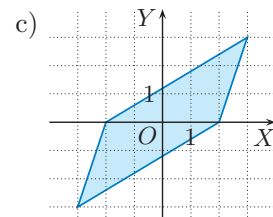
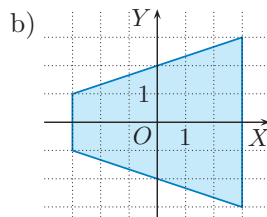
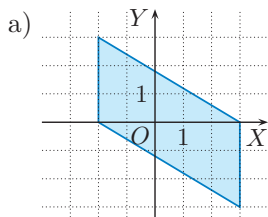
4. Pewien trójkąt został opisany przez podany układ nierówności. Naskicuj ten trójkąt i podaj współrzędne jego wierzchołków.

a)
$$\begin{cases} y - x \geq 0 \\ y + x \leq 6 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + y - 12 \leq 0 \\ 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y + 3 \geq 0 \\ 2x - y - 6 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

5. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na poniższym rysunku.



6. Dane są zbiory: $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 2\}$,
 $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y > 6\}$,
 $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -x + y - 2 < 0\}$.

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór:

a) $A \cap B \cap C$,

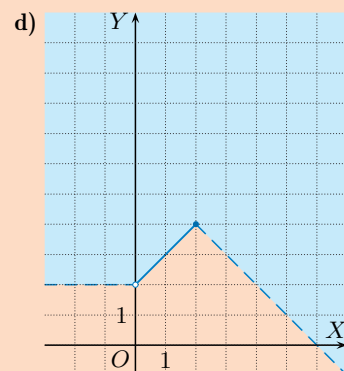
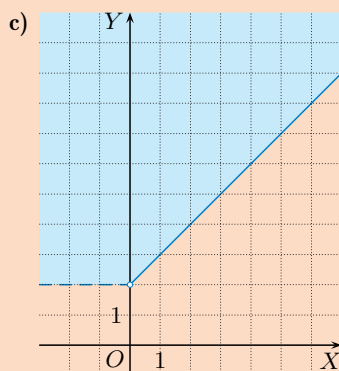
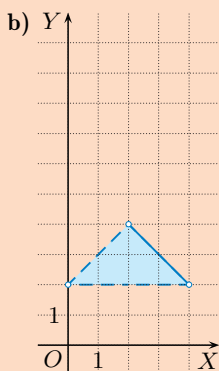
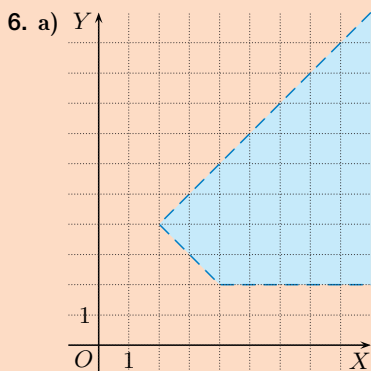
c) $(A \cup B) \setminus C$,

b) $(A \cap C) \setminus B$,

d) $(A \setminus C) \cup B$.

Symbol $\mathbf{R}^2$ oznacza zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej, czyli płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych.

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R}\}$$



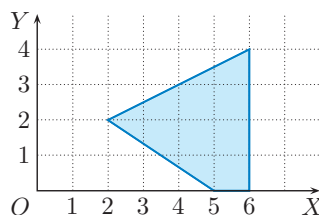
Programowanie liniowe

Przykład

Chcemy wyznaczyć największą i najmniejszą wartość sumy $x+y$ dla punktów (x, y) należących do wielokąta opisanego za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Wielokąt ten przedstawiono na rysunku obok.



Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że wartość największa oraz wartość najmniejsza sumy $x+y$ jest osiągana w którymś z wierzchołków (lub na całym boku) danego wielokąta.

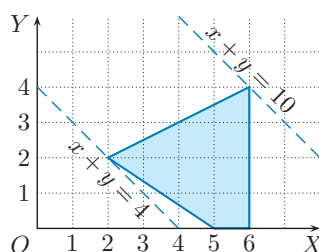
Wierzchołkami wielokąta są punkty: $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$ i $(2, 2)$. Obliczamy dla nich wartości sumy $x+y$:

$$(5, 0): x + y = 5 + 0 = 5$$

$$(6, 0): x + y = 6 + 0 = 6$$

$$(6, 4): x + y = 6 + 4 = 10$$

$$(2, 2): x + y = 2 + 2 = 4$$



Zatem największą wartością sumy $x+y$ jest 10, a najmniejszą 4.

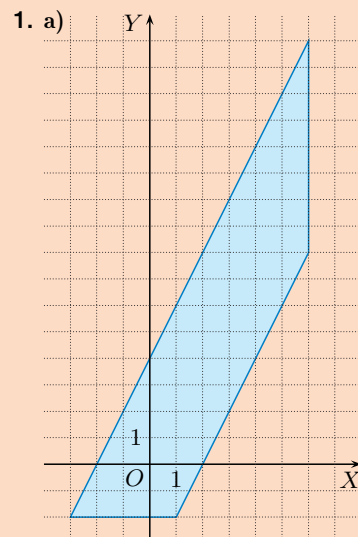
W powyższym przykładzie przedstawiono proste zagadnienie z działy matematyki zwanego **programowaniem liniowym**. Dział ten zajmuje się zagadnieniami optymalizacyjnymi, czyli szukaniem najlepszego rozwiązania wśród wszystkich możliwych (np. maksymalizacji zysków lub minimalizacji kosztów). Programowanie liniowe było intensywnie rozwijane podczas II wojny światowej, kiedy wykorzystywano je w logistyce.

1. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą sumy $x+y$ dla wielokąta opisanego układem nierówności.

a)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 4 \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq -2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 9 \\ y \geq 2x - 6 \\ y \geq -x - 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 7 \leq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$$



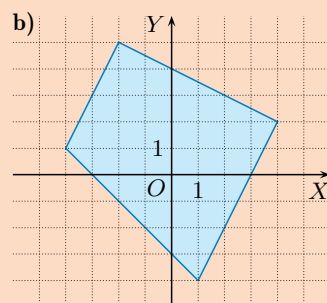
$$(-3, -2): x + y = -5$$

$$(1, -2): x + y = -1$$

$$(6, 8): x + y = 14$$

$$(6, 16): x + y = 22$$

Największą wartością sumy jest 22, a najmniejszą -5.



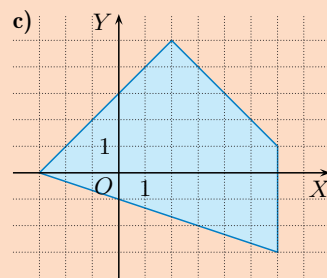
$$(-4, 1): x + y = -3$$

$$(1, -4): x + y = -3$$

$$(4, 2): x + y = 6$$

$$(-2, 5): x + y = 3$$

Największą wartością sumy jest 6, a najmniejszą -3.



$$(-3, 0): x + y = -3$$

$$(6, -3): x + y = 3$$

$$(6, 1): x + y = 7$$

$$(2, 5): x + y = 7$$

Największą wartością sumy jest 7, a najmniejszą -3.

Uczeń:

- wyznacza współczynniki we wzorze funkcji liniowej tak, aby spełniała podane warunki,
- przeprowadza analizę liczby rozwiązań równania liniowego w zależności od wartości danego parametru.

*5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami

Przykład 1

Rozwiąż równanie $a^2x - 3 = a - x$ z niewiadomą x w zależności od parametru a . Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = -1$ i $a = 3$.

$$a^2x - 3 = a - x$$

$$a^2x + x = a + 3$$

$$(a^2 + 1)x = a + 3 \quad / : (a^2 + 1)$$

$$x = \frac{a+3}{a^2+1}$$

Zauważ, że $a^2 + 1 \neq 0$ dla $a \in \mathbf{R}$.

Otrzymane rozwiązanie równania zależy od parametru a .

Dla $a = -1$ otrzymujemy $x = 1$, natomiast dla $a = 3$ otrzymujemy $x = \frac{3}{5}$.

Uwaga. Zazwyczaj przyjmujemy, że x jest niewiadomą, chyba że wyraźnie zaznaczono inaczej.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $a^2x - 3 = a + 9x$ w zależności od parametru a .

$$a^2x - 3 = a + 9x$$

$$a^2x - 9x = a + 3$$

$$(a^2 - 9)x = a + 3$$

Zauważ, że wyrażenie $a^2 - 9$ może przyjmować wartość 0.

- Dla $a = -3$ otrzymujemy równanie **tożsamościowe** (spełnione przez dowolną liczbę): $0x = 0$.
- Dla $a = 3$ otrzymujemy równanie **sprzeczne**: $0x = 6$.
- Dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ mamy $a^2 - 9 \neq 0$. Równanie **ma jedno rozwiązanie** postaci: $x = \frac{a+3}{a^2-9} = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, dla jakich wartości parametru a podane równanie: jest sprzeczne, jest tożsamościowe, ma jedno rozwiązanie – znajdź to rozwiązanie.

a) $\frac{1}{2}ax - 4a = x + a$ b) $(a - 1)x + 4 = 3x + a$ c) $4a^2x + \frac{1}{2} = a + x$

Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax + b = 0$ jest tożsamościowe, sprzeczne, ma jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 1

- a) sprzeczne dla $a = 2$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 2$: $x = \frac{10a}{a-2}$
 b) tożsamościowe dla $a = 4$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 4$: $x = 1$
 c) tożsamościowe dla $a = \frac{1}{2}$,
 sprzeczne dla $a = -\frac{1}{2}$, jedno rozwiązanie dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$: $x = \frac{1}{4a+2}$

Ćwiczenie 2

Równanie jest tożsamościowe dla $a = b = 0$, sprzeczne dla $a = 0$ i $b \neq 0$, ma jedno rozwiązanie dla $a \neq 0$.

Przykład 3

Sprawdź, dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax + 4 = 2a + 2bx$ jest: tożsamościowe, sprzeczne, ma jedno rozwiązanie – znajdź to rozwiązanie. Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = 5$ i $b = 1$.

$$ax + 4 = 2a + 2bx$$

$$ax - 2bx = 2a - 4$$

$$(a - 2b)x = 2a - 4$$

- Dla $a - 2b = 0$ i $2a - 4 = 0$ (czyli $a = 2$ i $b = 1$) równanie jest tożsamościowe.
- Dla $a - 2b = 0$ i $2a - 4 \neq 0$ (czyli $a \neq 2$ i $b = \frac{1}{2}a$) równanie jest sprzeczne.
- Dla $a - 2b \neq 0$ (czyli $b \neq \frac{1}{2}a$) równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{2a-4}{a-2b}$.

Po podstawieniu $a = 5$ i $b = 1$ otrzymujemy $x = 2$.

Ćwiczenie 3

Przeprowadź analizę liczby rozwiązań równania ze względu na wartości parametrów a i b . Wyznacz rozwiązanie tego równania dla $a = 2$ i $b = -1$.

a) $2ax - 1 = a^2 + bx$

d) $ax - b = 2 - bx$

b) $a^2x + 2 = b - b^2x$

e) $3ax - 9 = 2bx + 3b$

c) $6ax + 3a = 2bx + b$

f) $ax + a = 3bx + b$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m miejsce zerowe funkcji $f(x) = (m + 1)x + 2$ jest liczbą dodatnią?

1. Zauważmy, że dla $m = -1$ funkcja f nie ma miejsca zerowego – jest funkcją stałą $f(x) = 2$.
2. Dla $m \neq -1$ wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f .

$$(m + 1)x + 2 = 0$$

$$(m + 1)x = -2$$

$$x = \frac{-2}{m+1}$$

Nierówność $\frac{-2}{m+1} > 0$ jest spełniona, gdy $m + 1 < 0$, czyli dla $m < -1$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru m miejsce zerowe funkcji f jest liczbą ujemną?

a) $f(x) = (m - 2)x - 4$

c) $f(x) = (m^2 + 1)x + m$

b) $f(x) = (2m + 3)x + 1$

d) $f(x) = -m^2x + 3 - m$

Ćwiczenie 4

a) $m < 2$ b) $m > -\frac{3}{2}$ c) $m > 0$ d) $m > 3$

Ćwiczenie 3

a) sprzeczne dla $a = \frac{1}{2}b$, jedno rozwiązanie dla $a \neq \frac{1}{2}b$:

$$x = \frac{a^2+1}{2a-b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = 1$

b) sprzeczne dla $a = b = 0$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 0$ lub $b \neq 0$:

$$x = \frac{b-2}{a^2+b^2},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{3}{5}$

c) tożsamościowe dla $b = 3a$, jedno rozwiązanie dla $b \neq 3a$:

$$x = -\frac{1}{2}$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{1}{2}$

d) tożsamościowe dla $a = 2$

i $b = -2$,

sprzeczne dla $a = -b$ i $b \neq -2$, jedno rozwiązanie dla $a \neq -b$:

$$x = \frac{b+2}{a+b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = 1$

e) tożsamościowe dla $a = -2$ i $b = -3$,

sprzeczne dla $a = \frac{2}{3}b$ i $b \neq -3$, jedno rozwiązanie dla $a \neq \frac{2}{3}b$:

$$x = \frac{3b+9}{3a-2b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = \frac{3}{4}$

f) tożsamościowe dla $a = b = 0$,

sprzeczne dla $a = 3b$ i $a \neq 0$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 3b$:

$$x = \frac{b-a}{a-3b},$$

dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{3}{5}$

Ćwiczenie 5

- a) $k - 3 > 0$ i $\frac{-2}{k-3} = -2$,
czyli $k = 4$.
b) $k + 1 < 0$ i $\frac{-6}{k+1} = 3$,
czyli $k = -3$.
c) $k - 4 > 0$ i $\frac{-3}{k-4} = 1$,
czyli nie ma takiego k .
d) $2 - k < 0$ i $\frac{2}{2-k} = -4$,
czyli $k = \frac{5}{2}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \frac{5}{2}m + 6 > 0$, gdy
 $m > -\frac{12}{5}$.
b) $x = \frac{1}{2}m > 0$, gdy $m > 0$.
c) $x = \frac{3}{m-2} > 0$, gdy
 $m - 2 > 0$, czyli $m > 2$.
2. a) 0 dla $m = 2$, 1 dla $m \neq 2$
b) 0 dla $m = -3$, 1 dla
 $m \neq -3$
c) 1 dla $m \neq -1$, nieskończe-
nie wiele dla $m = -1$
d) 1 dla $m \neq \frac{1}{2}$, nieskończenie
wiele dla $m = \frac{1}{2}$
e) 0 dla $m = 1$,
1 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, nie-
skończenie wiele dla $m = -1$
f) 0 dla $m = 0$,
1 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, nie-
skończenie wiele dla $m = -2$

Przykład 5

Dla jakiej wartości parametru k zbiorem rozwiązań nierówności $(k+1)x - 2 \leq 0$ jest przedział $(-\infty; 1)$?

Rozpatrzmy pomocniczą funkcję $f(x) = (k+1)x - 2$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$ jest przedział $(-\infty; 1)$, gdy jest to funkcja rosnąca, której miejscem zerowym jest 1.

- Funkcja f jest rosnąca, gdy $k+1 > 0$, czyli dla $k > -1$.
- Miejsce zerowe funkcji f jest równe 1, gdy $\frac{2}{k+1} = 1$, czyli $k = 1$.

Zatem warunki zadania są spełnione dla $k = 1$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz wartość parametru k , dla której zbiorem rozwiązań nierówności jest podany przedział.

- a) $(k-3)x + 2 \leq 0$, $(-\infty; -2)$ c) $kx + 3 \geq 4x$, $(1; \infty)$
b) $(k+1)x + 6 > 0$, $(-\infty; 3)$ d) $2x < kx + 2$, $(-4; \infty)$

Zadania

1. Dla jakich wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie będące liczbą dodatnią?
a) $\frac{x-m}{3} = \frac{m+4}{2}$ b) $\frac{mx-m}{2} = \frac{1-2m}{4}$ c) $\frac{mx-1}{2} = 1+x$
2. Określ liczbę rozwiązań równania ze względu na parametr m .
a) $2x - 2 = 4 + mx$ d) $(1 - 2m)x = m^2 - \frac{1}{4}$
b) $mx + 2 = m - 3x$ e) $(m^2 - 1)x = m^2 + m$
c) $(m+1)x = m^2 - 1$ f) $(m^2 + 2m)x = m^2 - 4$
3. Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametrów p i q .
a) $2px - qx = p - 4$ d) $p^2x + q = p + q^2x$
b) $px + 2 = 3x + q$ e) $(x-p)(x-q) = x^2 + pq$
c) $px + q^2 = p^2 - qx$ f) $(x-p)^2 = x^2 - qx$
4. Rozwiąż równanie $ax - 2x = 4a - 1$:
a) z niewiadomą x i parametrem a , b) z niewiadomą a i parametrem x .
5. Dla jakich wartości parametru k miejsce zerowe funkcji f należy do przedziału $\langle -2; 2 \rangle$?
a) $f(x) = -3x + 1 - 6k$ b) $f(x) = (x-k)^2 - (x+k)^2 + k^2$, $k \neq 0$

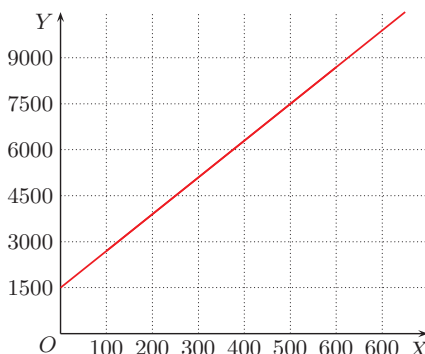
3. a) 0 dla $2p = q$ i $p \neq 4$, 1 dla $2p \neq q$, nieskończenie wiele dla $p = 4$ i $q = 8$
b) 0 dla $p = 3$ i $q \neq 2$, 1 dla $p \neq 3$, nieskończenie wiele dla $p = 3$ i $q = 2$
c) 1 dla $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = -q$
d) 0 dla $p = -q \neq 0$, 1 dla $p \neq q$ i $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = q$
e) 1 dla $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = -q$
f) 0 dla $p \neq 0$ i $p = \frac{1}{2}q$, 1 dla $p \neq \frac{1}{2}q$, nieskończenie wiele dla $p = q = 0$
4. a) dla $a = 2$ sprzeczne, dla $a \neq 2$: $x = \frac{4a-1}{a-2}$
b) dla $x = 4$ sprzeczne, dla $x \neq 4$: $a = \frac{2x-1}{x-4}$
5. a) $-2 \leq \frac{1-6k}{3} \leq 2$, czyli $k \in \langle -\frac{5}{6}; \frac{7}{6} \rangle$
b) $f(x) = -4kx + k^2$, $-2 \leq \frac{k}{4} \leq 2$, czyli $k \in \langle -8; 0 \rangle \cup (0; 8)$

5.9. Funkcja liniowa – zastosowania

Ćwiczenie 1

Funkcja $y = 1500 + 12x$ opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

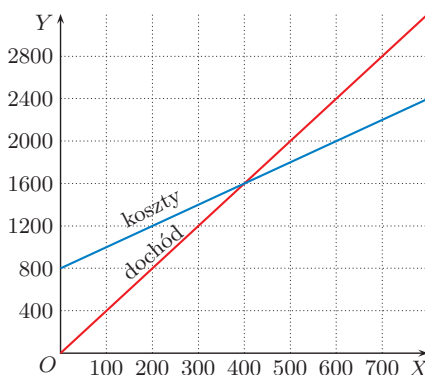
- Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?
- Naszkicuj wykres funkcji opisującej miesięczne koszty firmy, jeśli podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, a koszt wyprodukowania jednego wyniesie 18 zł (koszt stały bez zmian).



Ćwiczenie 2

Firma produkująca pokarm dla kotów ponosi koszty dzienne opisane za pomocą wzoru $y = 2x + 800$, gdzie 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje wzór $y = 4x$, gdzie x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki. Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

- zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),
- dzienny zysk w wysokości 400 zł,
- dzienny zysk w wysokości 1400 zł.



Ćwiczenie 3

Wynajęcie lokalu A na dyskotekę kosztuje 400 zł za salę i 10 zł za każdego uczestnika. Wynajęcie lokalu B kosztuje 100 zł za salę i 15 zł za każdego uczestnika. Naszkicuj wykresy przedstawiające koszty zorganizowania dyskoteki w lokalach A i B w zależności od liczby uczestników. Dla jakiej liczby uczestników koszty te będą równe?

3. Niech x będzie liczbą uczestników.

Koszty zorganizowania dyskoteki:

– w lokalu A: $y = 10x + 400$

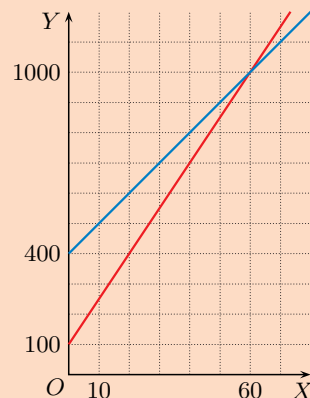
– w lokalu B: $y = 15x + 100$

Zatem:

$$10x + 400 = 15x + 100$$

$$x = 60$$

Koszty będą równe przy 60 uczestnikach.



Uczeń:

- analizuje zadanie z treścią, a następnie zapisuje odpowiednie równanie, nierówność liniową lub wzór funkcji liniowej,
- rozwiązuje ułożone przez siebie równanie bądź nierówność lub analizuje własności funkcji liniowej,
- analizuje wynik i podaje odpowiedź.

Ćwiczenie 1

- a) zysk = dochód – koszt

Niech x będzie liczbą sprzedanych krasnali.

Koszty po 6 miesiącach:

$$6 \cdot 1500 + 12x =$$

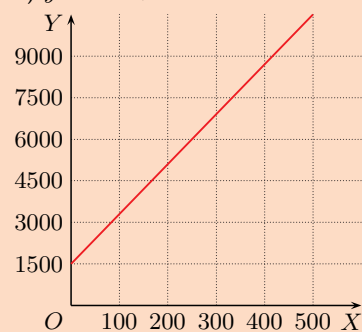
$$= 9000 + 12 \cdot 1800 = 30600 \text{ [zł]}$$

Zysk po 6 miesiącach:

$$37x - 30600 =$$

$$= 37 \cdot 1800 - 30600 = 36000 \text{ [zł]}$$

- b) $y = 18x + 1500$



Ćwiczenie 2

Niech x będzie liczbą wyprodukowanych puszek.

zysk = dochód – koszt, zatem dzienny zysk jest opisany wzorem:

$$4x - (2x + 800) = 2x - 800$$

- a) $2x + 800 = 4x$

$$x = 400$$

Zerowy wynik ekonomiczny firma osiąga, gdy dzienna produkcja wynosi 400 puszek.

- b) 600 c) 1100

Multiteka

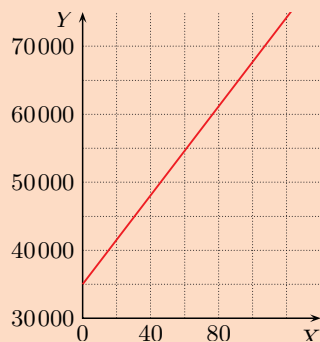
- Wykorzystanie funkcji liniowej – rozwiązanie zadania

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 5.9

Generator
testów i sprawdzianów

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = 35000 + 320x$, gdzie x – liczba przejechanych tysięcy kilometrów, 320 – koszt (w zł) benzyny potrzebnej do przejechania 1000 km.



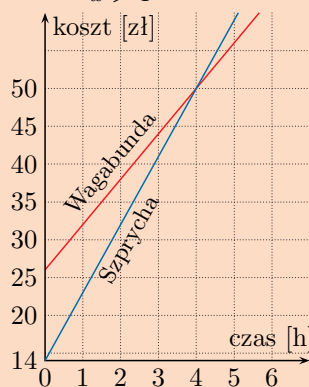
- b) Niech x będzie liczbą przejechanych tysięcy kilometrów. Łączne koszty:

– dla samochodu A:
 $y = 35000 + 320x$
 – dla samochodu B:
 $y = 40000 + 240x$
 $40000 + 240x \leq 35000 + 320x$
 $x \geq 62,5$

Różnica w cenie zwróci się po przejechaniu 62500 km.

2. b) Korzystniej z wypożyczalni Wagabunda dla liczby godzin większej od 4.

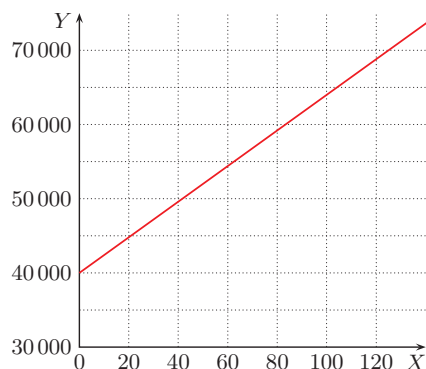
c) $26 + 6x < 14 + 9x$
 $x > 4$



Dla liczby godzin większej od 4.

Zadania

1. Samochód A kosztuje 35 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód B kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Niech x oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, y – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu B, jeśli cena benzyny wynosi średnio 4 zł za liter.



- a) Naszkicuj analogiczny wykres dla samochodu A.
 b) Jeżeli zakupiono samochód B, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?
2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (x oznacza liczbę godzin).

WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA

- Rower górski $10 \text{ zł} + 2x \text{ zł}$
- Rower dziecięcy $6 \text{ zł} + 2x \text{ zł}$

WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA

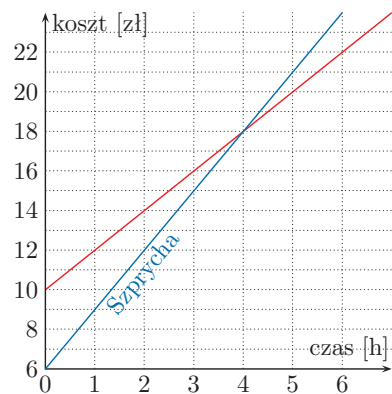
- Rower górski $6 \text{ zł} + 3x \text{ zł}$
- Rower dziecięcy $2 \text{ zł} + 3x \text{ zł}$

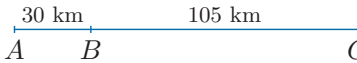
Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.

- a) Naszkicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.

- b) Odczytaj z wykresów, dla jakiej liczby godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a dla jakiej z wypożyczalni Szprycha.

- c) Chcemy wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Dla jakiej liczby godzin korzystniejsza jest oferta wypożyczalni Wagabunda?



3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie.  Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h , a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą prędkością $22,5 \text{ km/h}$.

a) Naskicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.

b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?

c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C ?

4. Z miasta A o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h . Dwie godziny później z miasta A w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h . Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby przejechanych kilometrów przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:

a) o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,

b) jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,

c) o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km .

5. Z Kartuz do odległych o 15 km Ostrzyc wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Ostrzyc do Kartuz wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Kartuzach kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Ostrzyc po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Oblicz, ile czasu zajęła turystę droga z Kartuz do Ostrzyc. Przyjmij, że turysta szedł całą drogę w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z taką samą stałą prędkością.

6. Z miejscowości A do oddalonej o 40 km miejscowości B wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h . Jednocześnie z miejscowości B do miejscowości A wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.

a) Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości A w zależności od czasu.

b) Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km ?

5. Niech x oznacza odległość w km , jaką przeszedł turysta po $1 \text{ h } 15 \text{ min}$, czyli do momentu pierwszego spotkania z kierowcą, a y – odległość w km , jaką przeszedł turysta przez kolejne 50 min , czyli między pierwszym i drugim spotkaniem z kierowcą. Korzystamy ze wzoru na prędkość: $v = \frac{s}{t}$.

Turysta szedł w stałym tempie, czyli $\frac{x}{\frac{3}{4}} = \frac{y}{\frac{5}{6}}$. Stąd $x = 1,5y$.

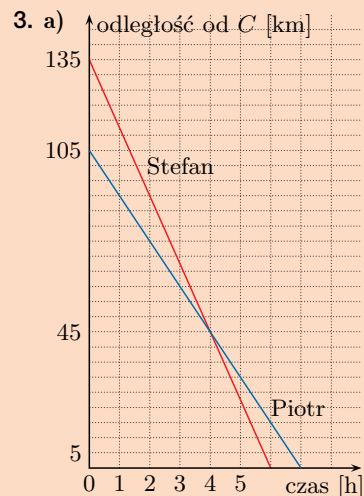
Kierowca jechał ze stałą prędkością, czyli $\frac{15-x}{\frac{1}{4}} = \frac{2x+y}{\frac{2}{3}}$. Stąd $10x + 3y = 60$.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x = 1,5y \\ 10x + 3y = 60 \end{cases}$$

i otrzymujemy $x = 5$, $y = \frac{10}{3}$.

Turysta przeszedł 5 km w ciągu $\frac{5}{4} \text{ h}$, zatem 15 km pokonał w czasie $3 \text{ h } 45 \text{ min}$.



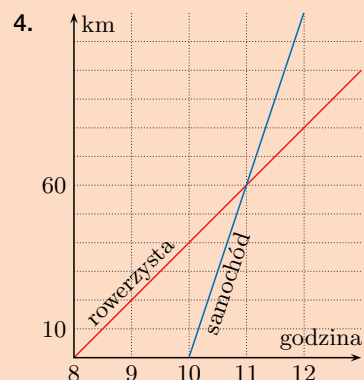
b) Stefan dogonił Piotra po 4 godzinach.

c) Niech x będzie wielkością, o jaką Piotr musi zwiększyć średnią prędkość $[\text{km/h}]$.

Wzór na prędkość przekształcamy do postaci $t = \frac{s}{v}$. Wówczas:

$$\frac{105}{15+x} = \frac{135}{22,5}$$

$$x = 2,5 \text{ [km/h]}$$



a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00

6. t – czas $[\text{h}]$

a) $d_1(t) = 16t$, $t \in \langle 0; 2,5 \rangle$;

$d_2(t) = 40 - 16t$, $t \in \langle 0; 2,5 \rangle$

b) $d(t) = |32t - 40|$,

$D_d = \langle 0; 2,5 \rangle$

Odległość między rowerzystami wyniosła 8 km po 1 h oraz po $1,5 \text{ h}$.

Komentarz

Równanie płaszczyzny w trójwymiarowym układzie współrzędnych możemy zapisać w postaci ogólnej:

$$Ax + By + Cz = 1$$

1. a) $(1, 2, 4)$

b) $(-2, 5, -1)$

2. Równanie płaszczyzny zapisujemy w postaci ogólnej

$$ax + by + cz = 1$$

Podstawiamy współrzędne punktów i otrzymujemy układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b - 2c = 1 \\ a + c = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}.$$

Równanie płaszczyzny:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 1$$

$$2x + y + z = 3$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ a + 3b + 5c = 1 \\ 3a + 2b + 9c = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

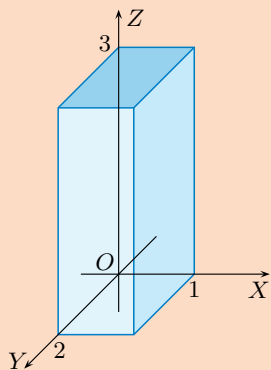
$$a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{4}$$

Równanie płaszczyzny:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z = 1$$

$$3x + 2y - z = 4$$

3.



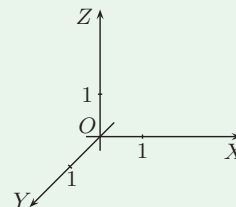
Równania płaszczyzn: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

5.10. Zagadnienia uzupełniające

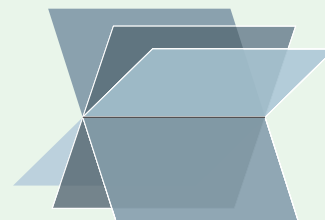
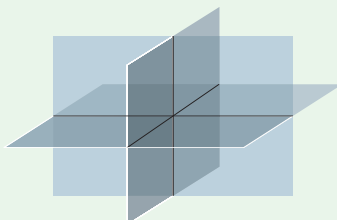
■ Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych

Równanie $ax + by + cz = d$, gdzie a, b, c, d są stałymi oraz a, b, c nie są wszystkie jednocześnie równe zero, opisuje płaszczyznę w przestrzeni z trójwymiarowym układem współrzędnych.

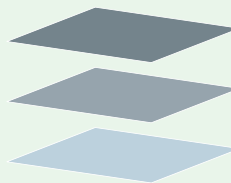
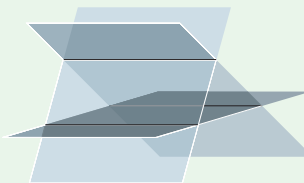
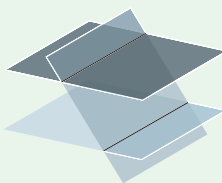
Rozwiązując układ trzech takich równań, szukamy punktów wspólnych trzech płaszczyzn.



Na pierwszym rysunku przedstawiono przypadek, gdy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, na drugim – gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a płaszczyzny nie pokrywają się.



Na poniższych rysunkach przedstawiono przykładowe sytuacje, gdy układ równań jest sprzeczny.



1. Wyznacz punkt wspólny płaszczyzn P_1 , P_2 i P_3 .

a) $P_1: 2x - y + z = 4$, $P_2: 4x + y - z = 2$, $P_3: 3x - 3y + z = 1$

b) $P_1: x + 2y + z = 7$, $P_2: 2x + y - z = 2$, $P_3: x + 2y - z = 9$

2. Napisz równanie płaszczyzny, do której należą punkty A , B i C .

a) $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, $C(1, 0, 1)$ b) $A(2, 0, 2)$, $B(1, 3, 5)$, $C(3, 2, 9)$

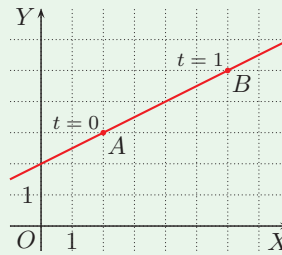
3. Napisz równania płaszczyzn, w których są zawarte ściany prostopadłościanu o wierzchołkach: $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 0, 3)$, $(1, 2, 3)$.

■ Postać parametryczna równania prostej

Innym sposobem opisu prostej jest postać parametryczna. Na przykład układ równań z parametrem t :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

jest parametrycznym przedstawieniem prostej AB (rysunek obok). Opisuje on ruch punktu po prostej AB . Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $A(2, 3)$, a dla $t = 1$ – punkt $B(6, 5)$.



4. Naszkicuj prostą opisaną parametrycznie.

a) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$

b) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$

Przykład 1

Podaj równanie kierunkowe prostej przedstawionej parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy t : $t = 2x - 2$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$y = 3 - 2t = 3 - 2(2x - 2)$$

skąd otrzymujemy $y = -4x + 7$.

D 5. Uzasadnij, że układy równań: I, II i III, gdzie $t \in \mathbf{R}$, opisują tę samą prostą.

I. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

II. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$

III. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

6. Prosta l dana jest w postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Podaj wartość parametru t , dla którego punkt A należy do prostej l .

a) $A(-10, 12)$

b) $A(11, -2)$

c) $A(\frac{3}{2}, \frac{13}{3})$

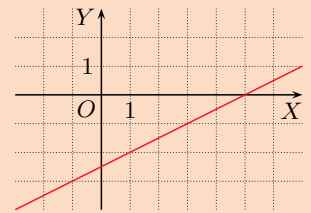
Czy punkty $P(-1, 2)$ i $Q(8, 4)$ leżą na prostej l ?

6. a) $t = 4$ b) $t = -3$ c) $t = \frac{1}{6}$

Punkty P i Q nie leżą na prostej l .

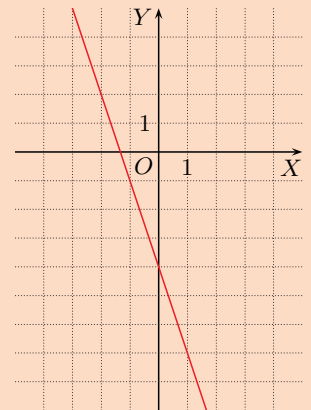
4. a) Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $(-1, -3)$, a dla $t = 1$ – punkt $(1, -2)$, zatem prosta ma równanie:

$$y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$



b) Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $(-2, 2)$, a dla $t = 1$ – punkt $(-1, -1)$, zatem prosta ma równanie:

$$y = -3x - 4$$



5. I. $y = 3x + 1$

II. $2t = x + 1$, po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy:

$$y = -2 + 3(x + 1) = 3x + 1$$

III. $t = 1 - x$, po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy:

$$y = 4 - 3(1 - x) = 3x + 1$$

Wszystkie układy równań przedstawiają tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = 3x + 1$.

7. a) I sposób

Wyznaczamy równania kierunkowe prostych:

– dla S_1 : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$,
 $x \geq 3$,

– dla S_2 : $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x \geq 0$.

Te proste przecinają się w punkcie $(9, 2)$.

Ślimak S_1 będzie w tym punkcie dla:

$$t = \frac{1}{2}(9 - 3) = 3$$

a ślimak S_2 dla:

$$t = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

zatem ślimaki się spotkają.

II sposób

$$3 + 2t = 3t \text{ dla } t = 3.$$

Wtedy:

$$5 - t = 2$$

oraz:

$$-1 + t = 2$$

zatem ślimaki spotkają się dla $t = 3$.

b) I sposób

Wyznaczamy równania kierunkowe prostych:

– dla S_1 : $y = -\frac{1}{3}x + 8$, $x \geq 0$,

– dla S_2 : $y = \frac{2}{3}x - 4$, $x \geq 0$.

Te proste przecinają się w punkcie $(12, 4)$.

Ślimak S_1 będzie w tym punkcie dla:

$$t = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

a ślimak S_2 dla:

$$t = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

zatem ślimaki się nie spotkają.

II sposób

$$6t = 3t \text{ dla } t = 0. \text{ Wtedy:}$$

$$8 - 2t = 8$$

oraz:

$$-4 + 2t = -4$$

zatem ślimaki się nie spotkają.

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

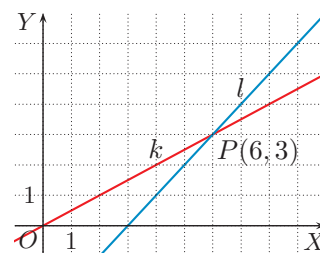
Ruch kuli K_1 toczącej się po prostej k opisują równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Ruch kuli K_2 toczącej się po prostej l opisują równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Czy kule K_1 i K_2 się zderzą?



Wyznaczmy równania kierunkowe prostych k : $y = \frac{1}{2}x$ i l : $y = x - 3$. Proste k i l przecinają się w punkcie $P(6, 3)$. Zderzenie jednak nie nastąpi, gdyż kula K_1 będzie w punkcie P dla $t = 3$, zaś kula K_2 dopiero dla $t = 6$.

Przemieszczanie się ślimaków S_1 i S_2 opisują podane równania parametryczne. Czy ślimaki te się spotkają ($t \geq 0$)?

$$\text{a) } S_1 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{b) } S_1 : \begin{cases} x = 6t \\ y = 8 - 2t \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$$

Równanie prostej w trójwymiarowym układzie współrzędnych możemy przedstawić w postaci parametrycznej. Na przykład prosta opisana równaniami:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

przechodzi przez punkty $A(3, 2, 4)$ dla $t = 0$ oraz $B(4, 1, 6)$ dla $t = 1$.

8. Które spośród punktów $P(3, 1, 2)$, $Q(9, 0, 6)$, $R(-3, 7, 2)$ należą do podanej prostej przedstawionej w postaci parametrycznej?

$$\text{a) } \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \\ z = 4 - t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

8. a) Q dla $t = -2$ b) R dla $t = 3$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$ c) $f(x) = -3x - 7,5$

2. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .

a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$

3. Sprawdź, czy punkty: A , B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.

a) $A(-4, 1)$, $B(8, 7)$, $C(11, 5)$ b) $A(2, -7)$, $B(3, -10)$, $C(-2, 5)$

4. Oblicz k , jeśli punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$.

a) $P(\frac{2}{3}, 2)$, $Q(5, k)$ c) $P(1, 8)$, $Q(12, k)$

b) $P(k, 6)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ d) $P(\sqrt{6}, k)$, $Q(\sqrt{2}, 2)$

5. Wyznacz punkty przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych, jeśli jest ona równoległa do prostej k i przechodzi przez punkt P .

a) $k: x - 2y + 2 = 0$, $P(4, -1)$ b) $k: 5x + 3y + 6 = 0$, $P(-3, 1)$

- D** 6. Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest trapezem.

a) $P(-5, -4)$, $Q(7, 4)$, $R(1, 4)$, $S(-5, 0)$

b) $P(-4, -\frac{5}{2})$, $Q(0, -\frac{7}{2})$, $R(3, -\frac{5}{2})$, $S(-9, \frac{1}{2})$

7. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do podanej prostej.

a) $y = -4,5x - 5$ b) $3x - 5y - 1 = 0$

8. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach: A , B , C . Czy jest to trójkąt prostokątny?

a) $A(0, 0)$, $B(8, 6)$, $C(-6, 8)$ b) $A(-6, 0)$, $B(1, 1)$, $C(-3, 4)$

- D** 9. Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach: $A(-2, -3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.

10. Rozwiąż równanie z niewiadomą x w zależności od parametru m .

a) $m(x - 6) = 2x - 12$ b) $m(mx - 1) = 9x + 3$

9. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2$, $BC: y = -2x + 8$, $CD: y = \frac{1}{2}x + 3$, $AD: y = -2x - 7$
Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, gdyż: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ oraz $AB \perp AD$.

10. a) dla $m = 2$ nieskończenie wiele rozwiązań, dla $m \neq 2$ jedno rozwiązanie: $x = 6$
b) dla $m = 3$ sprzeczne, dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ jedno rozwiązanie: $x = \frac{1}{m-3}$, dla $m = -3$ nieskończenie wiele rozwiązań

1. a) $(9, 0)$, $(0, 3)$, $P = 13,5$

b) $(14, 0)$, $(0, -8)$, $P = 56$

c) $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -\frac{15}{2})$,
 $P = 9,375$

2. a) rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$,
malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$,
stała dla $m = -\frac{1}{2}$

b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9)$,
malejąca dla $m \in (9; \infty)$,
stała dla $m = 9$

3. a) prosta $AB: y = \frac{1}{2}x + 3$
Punkt C nie należy do prostej AB .

b) prosta $AB: y = -3x - 1$
Punkt C należy do prostej AB .

4. a) 15 b) 12 c) 16 d) $2\sqrt{3}$

5. a) $y = \frac{1}{2}x - 3$; $(0, -3)$, $(6, 0)$

b) $y = -\frac{5}{3}x - 4$; $(0, -4)$,
 $(-\frac{12}{5}, 0)$

6. a) Współczynniki kierunkowe
 $a_{PQ} = a_{RS} = \frac{2}{3}$, czyli proste
 PQ i RS są równoległe, zatem
czworokąt $PQRS$ jest trapezem.

b) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{1}{4}$, czyli
proste PQ i RS są równoległe, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.

7. a) $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}$

b) $y = -\frac{5}{3}x - 6$

8. a) $AB: y = \frac{3}{4}x$,

$AC: y = -\frac{4}{3}x$,

$BC: y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7}$,

$AB \perp AC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

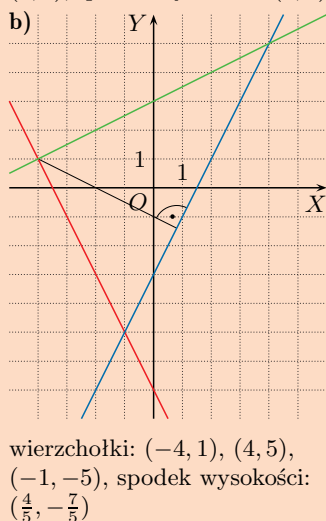
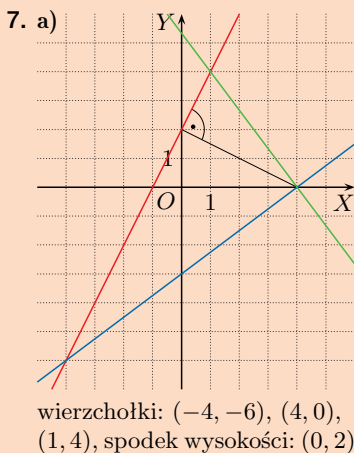
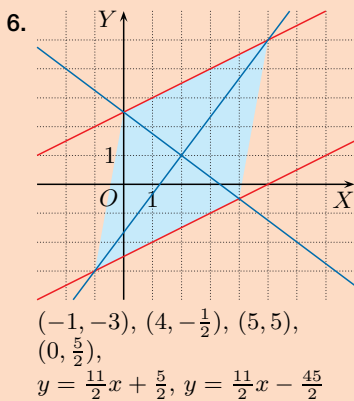
b) $AB: y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$,

$AC: y = \frac{4}{3}x + 8$,

$BC: y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$

$AC \perp BC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

1. a) $t = 6$ b) $t = 4$
2. a) $a_{AB} = \frac{2-k}{2}$, $a_{CD} = \frac{2k-1}{2}$,
 $k = -1$
b) $a_{AB} = \frac{4-3k}{2}$, $a_{CD} = 1 - k$,
 $k = \frac{6}{5}$
3. a) $m = 9$ b) $m = 1$
4. a) $m = -\frac{5}{6}$ b) $m = -2$
5. a) $x = -3$, $y = 2$
b) $x = 3$, $y = 6$
c) sprzeczny
d) $x = -5$, $y = -1$
e) $x = 8$, $y = 5$
f) $x = -8$, $y = -7$



Zestaw II

1. Wyznacz t , wiedząc, że punkty: A , B , C należą do tej samej prostej.
a) $A(t, 0)$, $B(-2, -6)$, $C(2, -3)$ b) $A(-4, -5)$, $B(5, t)$, $C(2, 1)$
2. Dla jakiej wartości parametru k współczynniki kierunkowe prostych AB i CD są liczbami przeciwnymi?
a) $A(3, 2)$, $B(1, k)$, $C(6, 2k)$, $D(4, 1)$ b) $A(4, 4)$, $B(2, 3k)$, $C(3, k)$, $D(4, 1)$
3. Dla jakiej wartości parametru m prosta $3x + 2y = 0$ jest równoległa do prostej:
a) $mx + 6y + 7 = 0$,
b) $3mx + (m^2 + 1)y - 5 = 0$

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:

- równoległe, wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
- prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

4. Dla jakiej wartości parametru m prosta $x + 4y - 9 = 0$ jest prostopadła do prostej:
a) $(6m + 1)x + y - 8 = 0$, b) $16mx + (m^2 + 4)y + 13 = 0$
5. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$
6. Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y - 10 = 0$ i $4x - 3y - 5 = 0$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.
7. Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k , l , m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.
a) $k : y = 2x + 2$, $l : y = \frac{3}{4}x - 3$, $m : y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$
b) $k : y = -2x - 7$, $l : y = 2x - 3$, $m : y = \frac{1}{2}x + 3$
8. Punkty $A(1, 4)$, $B(-2, -2)$, $C(2, -4)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu prostokątnego $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D , jeśli wiadomo, że leży on na osi OX (rozpatrz dwie możliwości).

8. Równania prostych AB : $y = 2x + 2$, BC :
 $y = -\frac{1}{2}x - 3$. Proste te są prostopadłe, więc
 $|\angle ABC| = 90^\circ$.

I przypadek: $AB \parallel CD$

Wówczas prosta CD ma równanie:

$$y = 2x - 8$$

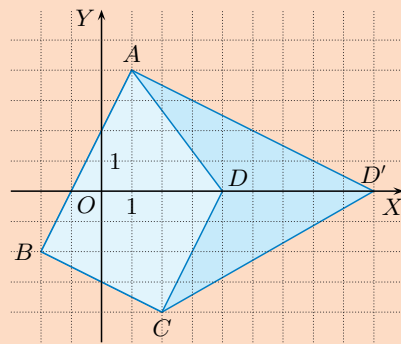
czyli wierzchołek D ma współrzędne $(4, 0)$.

II przypadek: $AD \parallel BC$

Wówczas prosta AD ma równanie:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$$

czyli wierzchołek D ma współrzędne $(9, 0)$.



**Przykład 1**

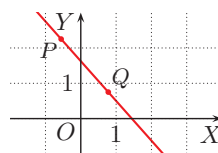
Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Współczynnik a jest ujemny, gdy:

- A. $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}), Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$,
 B. $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}), Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$,
 C. $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}), Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$,
 D. $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}), Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Można zauważyć, że w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

Przykład 2

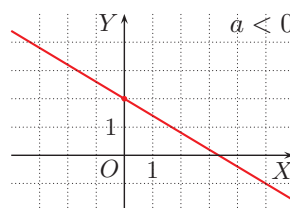
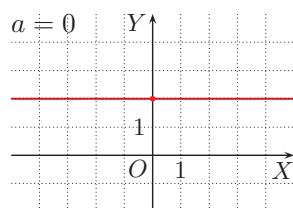
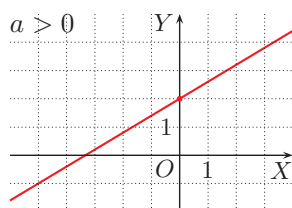
Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

- A. $(-8, -5), (8, 9)$
 B. $(-9, 6), (9, -2)$
 C. $(-8, -6), (4, -2)$
 D. $(-10, 4), (5, 1)$

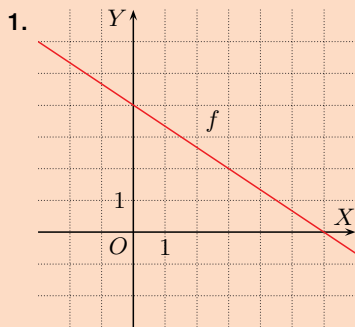
Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.



Odpowiedź: C



2. A. $f(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$
 B. $f(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{6}$
 C. $f(\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{6}$
 D. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{6} - 3$
3. $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

6. A. Dla $m = 2$ otrzymujemy prostą $y = 2$ – jest to funkcja stała.

B. Dla $m = \sqrt{2}$ otrzymujemy równanie:

$$2x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$$

czyli:

$$y = \frac{2}{(\sqrt{2}-1)}x + \sqrt{2} + 2$$

Współczynnik kierunkowy tej prostej jest dodatni – jest to funkcja rosnąca.

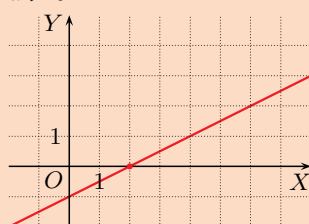
8. Równania przekątnych:
 $y = -3x + 1$ i $y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

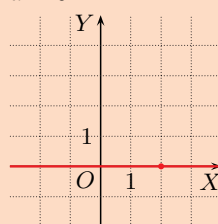
1. Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$?
 A. I B. II **C. III** D. IV
2. Prosta przechodząca przez punkt $(3, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej równej -1 przecina oś OY w punkcie:
 A. $(0, \frac{3}{2})$, B. $(0, 3)$, C. $(0, -3)$, D. $(0, -6)$.
3. Do wykresu funkcji $f(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 1$ nie należy punkt:
 A. $(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 0)$, **C. $(\sqrt{3}, 3 - \sqrt{6})$,**
 B. $(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{6})$, D. $(\sqrt{2}, \sqrt{6} - 3)$.
4. Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x - 2)$ dla żadnej wartości współczynnika a ?
 A. $(4, 1)$, $(-4, -3)$ **C. $(-3, -2)$, $(-1, 3)$**
 B. $(-3, -10)$, $(1, -2)$ D. $(1, 3)$, $(3, -3)$
5. Prosta $y = (\sqrt{2} - 1)x - 1$ jest prostopadła do prostej o współczynniku kierunkowym równym:
 A. $-1 - \sqrt{2}$, B. $-1 + \sqrt{2}$, C. $1 + \sqrt{2}$, D. $1 - \sqrt{2}$.
6. Prosta $(4 - m^2)x + (1 - m)y + m = 0$ jest wykresem funkcji rosnącej dla:
 A. $m = 2$, **B. $m = \sqrt{2}$,** C. $m = 1$, D. $m = -2$.
7. Proste $y = mx + \frac{1}{2}x$ i $y = mx - \frac{1}{2}x$:
 A. są prostopadłe dla $m = 0$, C. są prostopadłe dla $m = -1$,
 B. są prostopadłe dla $m = 1$, **D. nigdy nie są prostopadłe.**
8. Przekątne czworokąta o wierzchołkach $(-3, -5)$, $(2, -5)$, $(5, 1)$, $(-2, 7)$ przecinają się w punkcie:
 A. $(1, -2)$, B. $(1, -1)$, C. $(-2, -1)$, D. $(-2, -2)$.
9. Ile punktów (x, y) o obu współrzędnych całkowitych dodatnich należy do półpłaszczyzny opisanej nierównością $y \leq -\frac{1}{2}(x - 8)$?
 A. 9 **B. 12** C. 16 D. 18

4. Prosta $y = a(x - 2)$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do II i III ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.

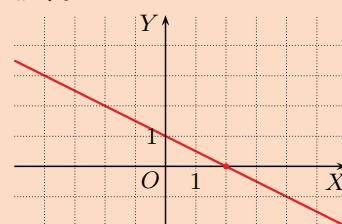
$a > 0$



$a = 0$



$a < 0$





■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dla jakiej wartości współczynnika c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą $y = \frac{1}{2}x + 3$ i osiami układu współrzędnych.

D Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0,4x - (x - 1)$ są prostopadłe.

Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz równanie prostej k , jeśli wiadomo, że jest ona prostopadła do prostej l : $y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l .

Zadanie 5 (2 pkt)

Znajdź największą liczbę całkowitą m , dla której prosta $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

D Zadanie 6 (4 pkt)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Uzasadnij, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 7 (4 pkt)

Punkty: $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD .

Zadanie 8 (4 pkt)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B , a prosta $y = 1,5x - 6$ – w punktach C i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

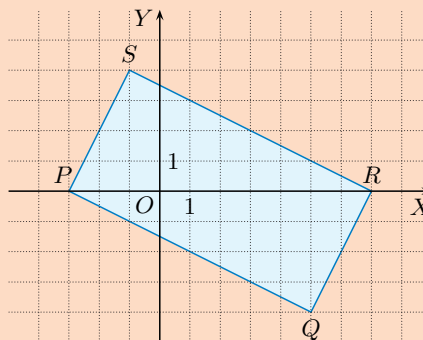
Zadanie 10 (6 pkt)

Wyznacz punkt przecięcia przekątnych prostokąta $PQRS$, jeśli wiadomo, że $P(-3, 0)$, $S(-1, 4)$, a punkt R leży na osi OX .

10. Współczynnik kierunkowy prostej PS jest równy 2. Równanie prostej SR , prostopadłej do prostej PS i przechodzącej przez punkt S :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

Zatem $R(7, 0)$. Przekątne prostokąta dzielą się w połowie, więc punkt przecięcia przekątnych ma współrzędne $(2, 0)$.



1. $c = -4$

2. Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych: $(-6, 0)$, $(0, 3)$.
Pole trójkąta: $P = 9$.

3. Proste w postaci kierunkowej: $y = \frac{5}{3}x - 1$ i $y = -\frac{3}{5}x + 1$. Ponieważ $a_1 \cdot a_2 = \frac{5}{3} \cdot (-\frac{3}{5}) = -1$, więc proste są prostopadłe.

4. Punkt przecięcia z osią OX : $(-4, 0)$. Równanie prostej k : $y = -2x - 8$.

5. $\frac{3}{2}m + 9 < 0$, stąd $m < -6$.
Największa liczba całkowita spełniająca nierówność: $m = -7$.

6. Równanie prostej PQ :
 $y = -\frac{3}{2}x - 1$

Współczynniki kierunkowe prostych PQ i $y = \frac{2}{3}x - 6$ spełniają warunek prostopadłości: $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$. Zatem trójkąt jest prostokątny.

7. $a_{AB} = \frac{1}{4}$, $a_{BC} = -2$
Równanie prostej AD , równoległej do prostej BC i przechodzącej przez punkt A :

$$y = -2x - 5$$

Równanie prostej CD , równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C :

$$y = \frac{1}{4}x + 4$$

8. Niech $A(-3, -5)$, $B(3, 4)$.
 $a_{AB} = \frac{3}{2}$

Równanie drugiej przyprostokątnej wychodzącej z wierzchołka B : $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

Punkt C ma współrzędne $(-3, 8)$. Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39.$$

9. Współrzędne wierzchołków czworokąta: $A(0, 5)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -6)$, $D(4, 0)$.

Pole czworokąta jest równe sumie pól trójkątów ABC i CDA :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 38,5$$



1. $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 8$

$$a + b \approx 7,423$$

Należy zakodować: 742

2. Współczynnik kierunkowy

prostej AB : $a = 3$

Prosta CD : $y = 3x - 14$

$$x_0 = \frac{14}{3} \approx 4,667$$

Należy zakodować: 466

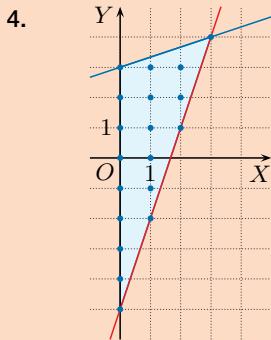
3.
$$\begin{cases} x = m - 240 \\ y = m - 310 \end{cases}$$

$$m - 240 > 0 \text{ i } m - 310 > 0,$$

$$\text{czyli } m > 310$$

$$\text{Zatem } m = 311.$$

Należy zakodować: 311



$$n = 19, n^2 = 361$$

Należy zakodować: 361

5. Przekształcamy układ równań

$$\begin{cases} y = m^2x + 2x \\ y = -n^2x - x - 2 \end{cases}$$

do postaci

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{m^2 + n^2 + 3} \\ y = \frac{-2(m^2 + 2)}{m^2 + n^2 + 3} \end{cases}$$

$m^2 + n^2 + 3 > 0$ dla dowolnych wartości parametrów m i n .

Stąd $x < 0$, $y < 0$.

Zatem punkt przecięcia prostych należy do III ćwiartki dla dowolnych wartości parametrów m i n .

6. Dla $x = 0$ mamy $y = -1$.

Założmy, że punkt (p, q) , gdzie $p, q \in \mathbb{Q}$ oraz $p \neq 0$, należy do wykresu funkcji $y = \sqrt{6}x - 1$. Wówczas:

$$q = \sqrt{6}p - 1$$

$$q^2 = 6p^2 - 2\sqrt{6}p + 1$$

$$\sqrt{6} = \frac{6p^2 - q^2 + 1}{2p}$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą niewymierną, a prawa wymierną. Otrzymana sprzeczność oznacza, że założenie jest fałszywe.

W zadaniach 1–4 odpowiedź jest zakodowana: ma formę trzech cyfr opisanych w poleceniu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Prosta $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej $y = \sqrt{3}x + 4$ i przechodzi przez punkt $P(\sqrt{3}, 7)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $a + b$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Punkty $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(4, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Bok CD tego równoległoboku zawiera się w prostej przecinającej oś OX w punkcie $(x_0, 0)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby x_0 .

Zadanie 3 (3 pkt)

Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności najmniejszej liczby całkowitej $m \neq 0$, dla której rozwiązaniem poniższego układu równań jest para liczb dodatnich.

$$\begin{cases} 2x - y = m - 170 \\ mx + my = 2m^2 - 550m \end{cases}$$

Zadanie 4 (3 pkt)

Oznaczmy przez n liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do trójkąta, którego boki zawierają się w prostych $x = 0$, $x - 3y + 9 = 0$ i $3x - y - 5 = 0$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby n^2 .

D Zadanie 5 (4 pkt)

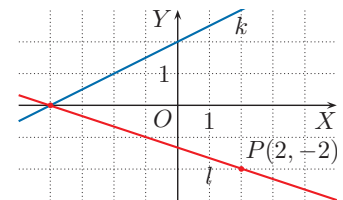
Udowodnij, że proste dane równaniami $y = m^2x + 2x$ i $y = -n^2x - x - 2$ przecinają się w punkcie należącym do III ćwiartki układu współrzędnych dla dowolnych wartości parametrów m i n .

D Zadanie 6 (4 pkt)

Udowodnij, że do prostej $y = \sqrt{6}x - 1$ należy tylko jeden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

D Zadanie 7 (5 pkt)

Dwa boki trójkąta prostokątnego są zawarte w prostych k i l , a trzeci bok jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt P (rysunek obok). Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe 10 lub 20.



7. Trójkąt będzie prostokątny w dwóch przypadkach:

I przypadek – trzeci bok jest prostopadły do prostej k .

Równanie prostej k : $y = \frac{1}{2}x + 2$, czyli trzeci bok zawarty jest w prostej $y = -2x + 2$.

Wówczas pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10$.

II przypadek – trzeci bok jest prostopadły do prostej l .

Równanie prostej l : $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$, czyli trzeci bok zawarty jest w prostej $y = 3x - 8$. Punkt przecięcia trzeciego boku z prostą k : $(4, 4)$. Wówczas pole trójkąta jest równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 20.$$

