



4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.

Elektrokardiogram wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca

Uczeń:

- stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, miejsca zerowe funkcji,
- rozpoznaje wśród danych przyporządkowań te, które opisują funkcje,
- podaje miejsca zerowe funkcji,
- opisuje funkcję różnymi sposobami: za pomocą grafu, tabeli, opisu słownego,
- odczytuje wartość funkcji dla danego argumentu,
- odczytuje argumenty, dla których funkcja przyjmuje określoną wartość.

4.1. Pojęcie funkcji

Przykład 1

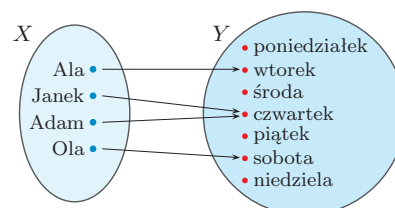
W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn A, B, C, D i E . Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów – wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

Drużyna	A	B	C	D	E
Zdobyte punkty	3	7	8	1	8



Przykład 2

Na grafie obok każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą X , a zbiór dni tygodnia – literą Y .

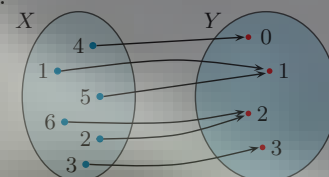


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez X i Y , oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą Y . Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

Liczba	1	2	3	4	5	6
Reszta	1	2	3	0	1	2

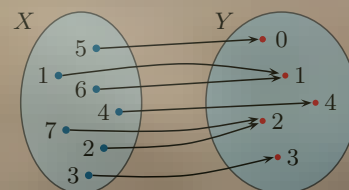


Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowano liczbę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

Ćwiczenie 1

Liczba	1	2	3	4	5	6	7
Reszta	1	2	3	4	0	1	2



Multiteka

- Czy podane przyporządkowanie jest funkcją
- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dla.nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

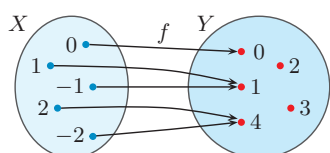
Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedzina** funkcji. Jeśli element zbioru Y jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru X , to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład: f, g, h .

Mówiąc o funkcji f ze zbioru X w zbiór Y , używamy zapisu $f: X \rightarrow Y$, a wartość, którą funkcja f przyjmuje dla argumentu x , oznaczamy przez $f(x)$.

Przykład 4

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcję f ze zbioru X w zbiór Y , która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, przedstawiono za pomocą grafu i tabeli.



Argument x	-2	-1	0	1	2
Wartość funkcji $f(x)$	4	1	0	1	4

Zwróć uwagę, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji f , ale nie są wartościami tej funkcji.

Funkcja f dla argumentu $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 4$, co zapisujemy „ $f(2) = 4$ ” i czytamy: „ f od 2 jest równe 4”.

Wartość $y = 4$ funkcja f przyjmuje również dla argumentu $x = -2$, zatem $f(-2) = 4$.

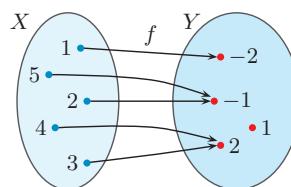
Ćwiczenie 2

Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$ przedstawiona za pomocą grafu.

a) Podaj wartości funkcji f dla argumentów parzystych.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?

c) Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.



Ćwiczenie 2

a) $f(2) = -1, f(4) = 2$

b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{3, 4\}$

Nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.

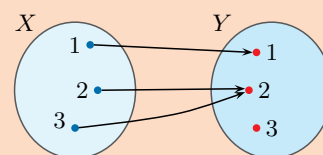
c)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-1	2	2	-1

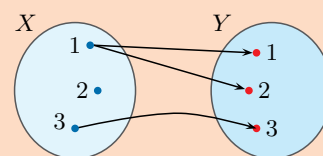
Komentarz

Ponieważ uczniom trudno jest zrozumieć definicję funkcji, należy poświęcić odpowiednią ilość czasu na jej dokładne wytłumaczenie. Warto podać uczniom kilka przykładów funkcji z życia codziennego, a także wskazać relacje, które nie są funkcjami.

Szczególnie ważne jest podkreślenie faktu, że **każdemu** argumentowi przyporządkowana jest **dokładnie jedna** wartość.



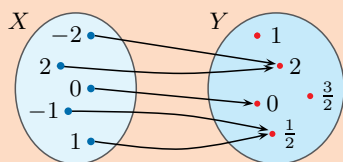
To przyporządkowanie jest funkcją.



To przyporządkowanie nie jest funkcją.

Przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami omawiamy w przykładzie 5.

Ćwiczenie 3



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Wartościami funkcji nie są 1 i $\frac{3}{2}$.
Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów: $\frac{1}{2}$ i 2.

Ćwiczenie 4

- $x = 3$
- $x \in \{0, 1, 5\}$
- $x = 2$
- dla żadnych

Ćwiczenie 3

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1	-2	0	2	1	3	3	3	4

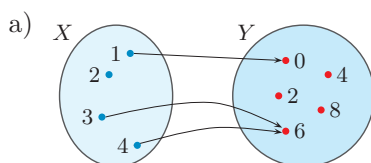
Dla których argumentów zachodzi równość:

- $f(x) = 0$,
- $f(x) = 1$,
- $f(x) = -2$,
- $f(x) = -1$?

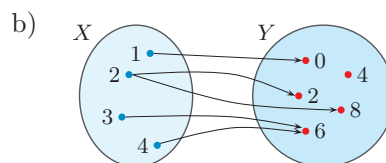
Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , gdy **każdemu** elementowi zbioru X przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru Y .

Przykład 5

Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



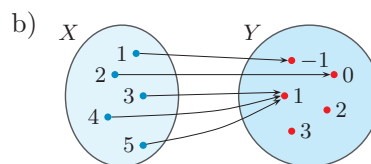
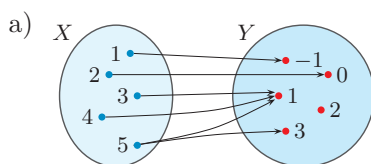
Liczbę 2 należącą do zbioru X nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



Liczbę 2 należącą do zbioru X przyporządkowano dwa elementy zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .

Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru X w zbiór Y ? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.



Ćwiczenie 5

- Nie, liczbę 5 przyporządkowano dwa elementy ze zbioru Y .
- Tak, funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu 2.

Definicja

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 6

Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe: -1 i 2 .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	4	3	0

Ćwiczenie 6

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję f i podaj jej miejsca zerowe, jeśli każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje ona:

- a) liczbę o 2 mniejszą, c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,
b) liczbę o 3 większą, d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Zadania

1. Funkcję $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	0	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

2. Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

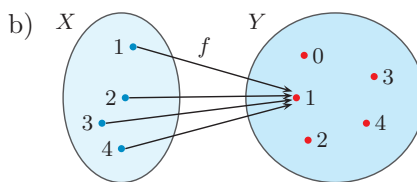
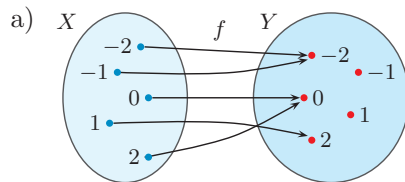
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	1	2	3

3. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.



2. a) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje liczbę o 2 większą. Funkcja przyjmuje wartości nieparzyste dla trzech argumentów.
b) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej wartość bezwzględną. Funkcja przyjmuje wartości nieparzyste dla trzech argumentów.

3. a) Miejsca zerowe: 0 i 2.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-2	0	2	0

- b) Nie ma miejsc zerowych.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	1	1	1

Ćwiczenie 6

- a) Miejsce zerowe: 2.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1

- b) Nie ma miejsc zerowych.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	3	4	5	6

- c) Miejsca zerowe: -1 i 1 .

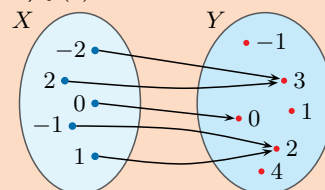
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-1	0	3	8

- d) Miejsce zerowe: 2.

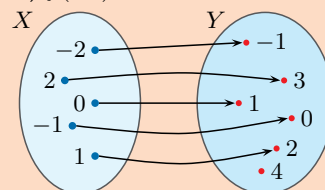
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-8	-7	0	19

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(0) = 0$



- b) $f(-1) = 0$



4. a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

b) Wartościami funkcji f nie są: 2, 3, 5.

1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.

5. a) Dziedzina funkcji f :

$$X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje liczbę o 3 mniejszą. Wartości dodatnie przyjmuje ona dla jednego argumentu.

b) Dziedzina funkcji f :

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną. Wartości dodatnie przyjmuje ona dla trzech argumentów.

6. wartości ujemne dla: -1, 0, 1, dwa miejsca zerowe: -2, 2

7. a) Pierwiastek kwadratowy z liczby 2 nie jest liczbą wymierną, czyli liczbie 2 nie jest przyporządkowana żadna wartość ze zbioru Y . Zatem to przyporządkowanie nie jest funkcją.

b) Pierwiastek kwadratowy z liczby -1 nie jest liczbą rzeczywistą, czyli liczbie -1 nie jest przyporządkowana żadna wartość ze zbioru Y . Zatem to przyporządkowanie nie jest funkcją.

4. Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.

b) Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja f została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

6. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

D 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że przyporządkowanie to nie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , jeśli:

a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbf{Q}$, b) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbf{R}$.

8. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez n . Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 5$ d) $n = 10$

9. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(24) = 6$.

a) Podaj zbiór wartości funkcji f .
b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7?

10. Funkcja f każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(234) = 9$.

a) Podaj zbiór wartości funkcji f .
b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich 3?

11. Funkcja f każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje iloczyn jej cyfr, np. $f(213) = 6$.

a) Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?
b) Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 8?

8. a) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 2 ma postać $m = 2k$, gdzie $5 \leq k \leq 49$, zatem jest 45 takich liczb.

b) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 4 ma postać $m = 4k$, gdzie $3 \leq k \leq 24$, zatem są 22 takie liczby.

c) 18 d) 9

9. a) $\{n \in \mathbf{N} : 1 \leq n \leq 18\}$

b) $f(x) = 3$ dla $x \in \{12, 21, 30\}$, $f(x) = 7$ dla $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$

10. a) $\{n \in \mathbf{N} : 1 \leq n \leq 27\}$

b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{101, 110, 200\}$, $f(x) = 3$ dla $x \in \{102, 111, 120, 201, 210, 300\}$

11. a) 171

b) $f(x) = 8$ dla $x \in \{118, 124, 142, 181, 222, 214, 241, 412, 421, 811\}$, zatem funkcja f przyjmuje wartość 8 dla dziesięciu argumentów.

4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

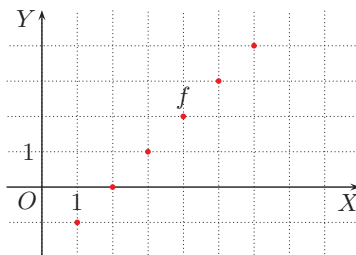
Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. Jednym ze sposobów przedstawienia takiej funkcji jest wykres.

Przykład 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3	4

Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem, a y – wartością funkcji. Są to punkty: $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ i $(6, 4)$.



Definicja

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

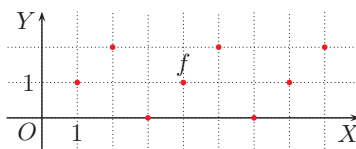
Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

Przykład 2

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

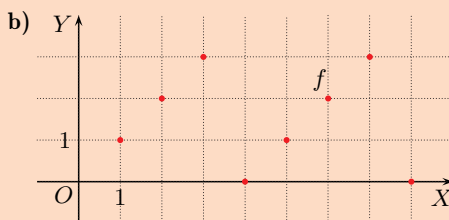
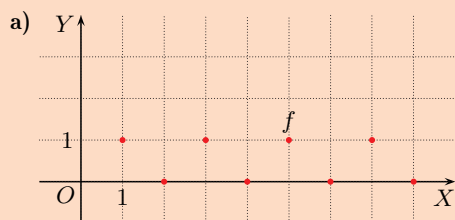
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Ćwiczenie 2

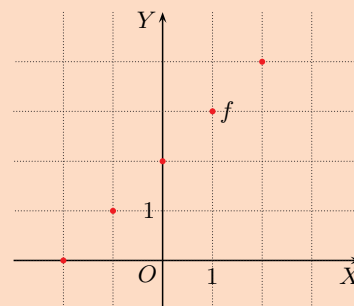


Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji o podanej dziedzinie,
- przedstawia funkcję za pomocą wzoru,
- szkicuje wykres funkcji określonej nieskomplikowanym wzorem, w tym prostą,
- oblicza wartość funkcji dla danego argumentu.

Ćwiczenie 1

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	3	4



Multiteka

- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

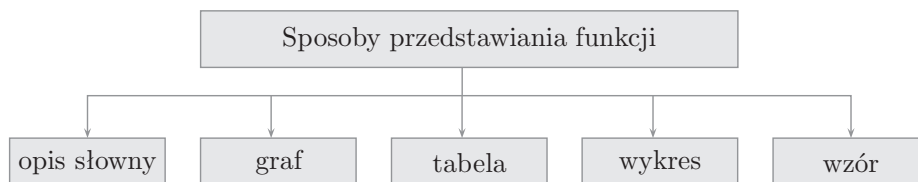
Generator
testów i sprawdzianów

Często możliwe jest określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

Opis słowny	Wzór
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x liczbę o 3 większą	$f(x) = x + 3$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego połowę	$f(x) = \frac{1}{2}x$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego kwadrat	$f(x) = x^2$

Uwaga. Wzór funkcji $f(x) = x + 3$ możemy zapisać też w postaci $y = x + 3$.

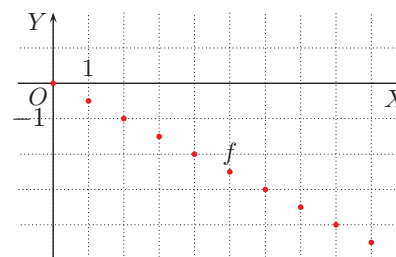
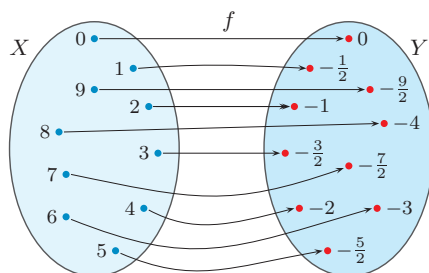
W zależności od sytuacji korzystamy z jednego lub kilku sposobów przedstawiania funkcji.



Przykład 3

Funkcja f każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$



Funkcję f można opisać wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$ (lub $y = -\frac{1}{2}x$).

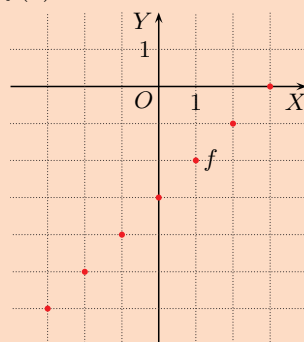
Ćwiczenie 3

Naszkiej wykres oraz podaj wzór funkcji f , która każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

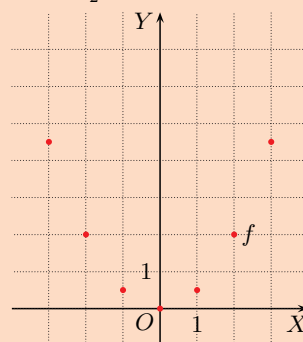
- a) liczbę o 3 mniejszą, b) połowę kwadratu tej liczby.

Ćwiczenie 3

a) $f(x) = x - 3$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$



Przed naszkicowaniem wykresu funkcji, należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

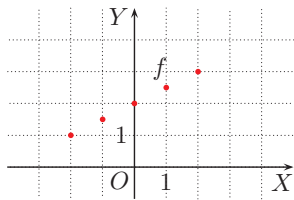
Przykład 4

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

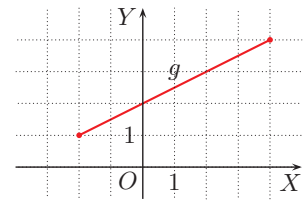
II. przedział $\langle -2; 4 \rangle$

III. przedział $(-2; 4)$



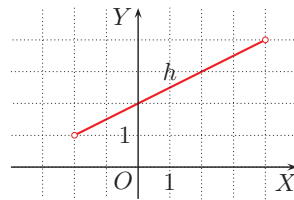
$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$g: \langle -2; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$h: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

- Wykresem funkcji g (rysunek II) jest odcinek łączący punkty $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.
- Na rysunku III puste kółka w punktach $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji h (ponieważ liczby -2 i 4 nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji $f(x) = ax + b$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami, jest przedział domknięty $\langle x_1; x_2 \rangle$, to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, należy obliczyć wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

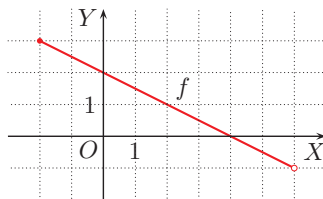
Obliczamy wartość funkcji dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x + 2$ dla $x = 6$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, jeśli:

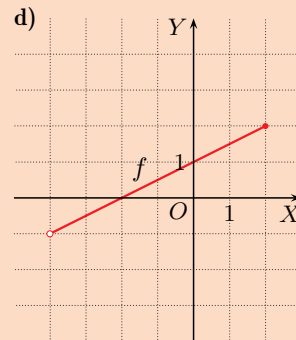
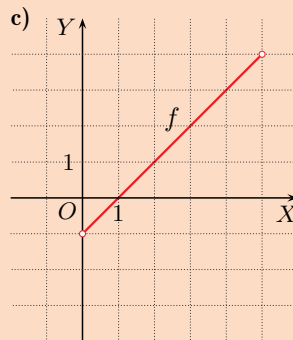
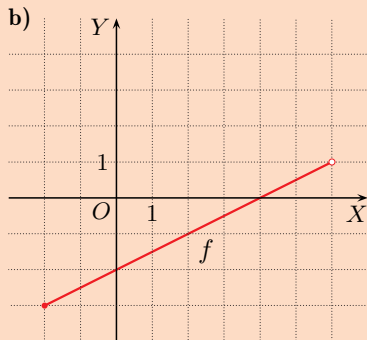
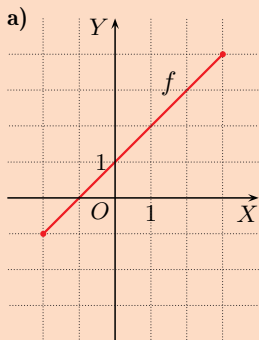
a) $D = \langle -2; 3 \rangle$, $f(x) = x + 1$,

c) $D = (0; 5)$, $f(x) = x - 1$,

b) $D = \langle -2; 6 \rangle$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$,

d) $D = (-4; 2)$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

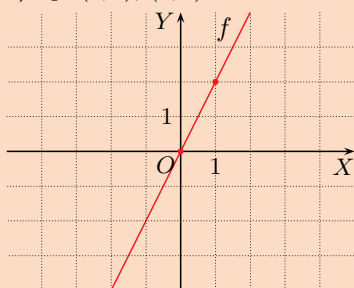
Ćwiczenie 4



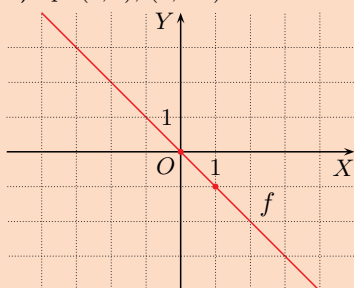
Przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

Ćwiczenie 5

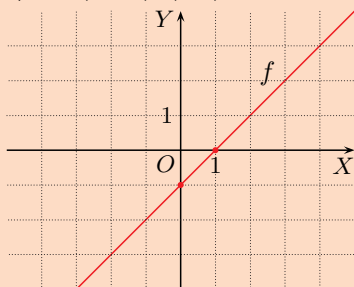
a) np. $(0, 0)$, $(1, 2)$



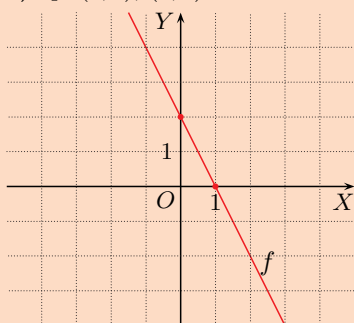
b) np. $(0, 0)$, $(1, -1)$



c) np. $(0, -1)$, $(1, 0)$



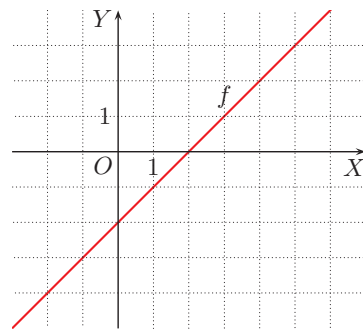
d) np. $(0, 2)$, $(1, 0)$



Dla dowolnych liczb a , b wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 2$.

Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych różnych argumentów (dlaczego?).

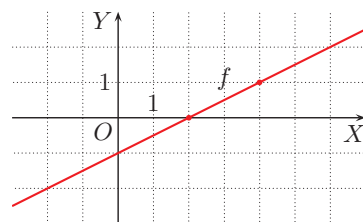


Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Obliczamy wartości funkcji f dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla $x = 2$ i $x = 4$: $f(2) = 0$, $f(4) = 1$.

Do wykresu funkcji f należą punkty: $(2, 0)$ oraz $(4, 1)$. Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.



Ćwiczenie 5

Wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest prosta. Wyznacz dwa różne punkty należące do tego wykresu i go naszkicuj.

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -x$

c) $f(x) = x - 1$

d) $f(x) = -2x + 2$

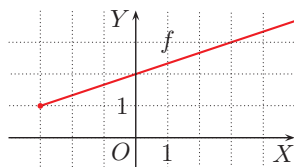
Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

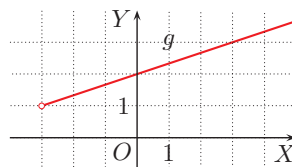
I. przedział $\langle -3; \infty \rangle$

II. przedział $(-3; \infty)$

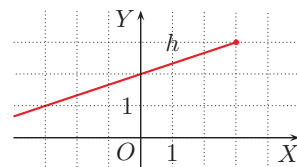
III. przedział $(-\infty; 3)$



$f: \langle -3; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$
 $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$



$g: (-3; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$
 $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$



$h: (-\infty; 3) \rightarrow \mathbf{R}$
 $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Wykresami funkcji f i h są półproste domknięte (zawierają swój początek). Wykresem funkcji g jest półprosta otwarta (bez początku).

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbf{R}$, która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:

- a) liczbę o 1 mniejszą, c) jej wartość bezwzględną,
b) liczbę przeciwną, d) jej kwadrat.

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = -|x|$

3. Funkcja f podana została za pomocą tabeli. Naskicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0

c)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	4	3	2	1

b)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4

d)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3

4. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -2x - 5$.

5. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x + 1$, jeśli jej dziedziną jest przedział:

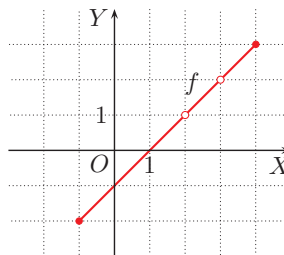
- a) $\langle 0; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 3 \rangle$, c) $\langle 1; \infty \rangle$, d) $(-\infty; 2)$.

6. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -x + 3$, jeśli jej dziedziną jest przedział:

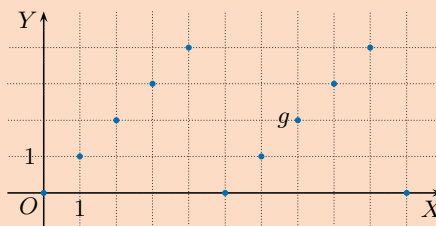
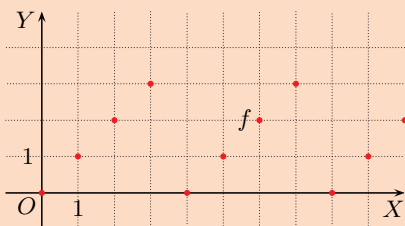
- a) $(0; 4)$, b) $(-3; 2)$, c) $(0; \infty)$, d) $(-\infty; -1)$.

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 1$, gdzie $D = \langle -1; 4 \rangle \setminus \{2, 3\}$. Naskicuj wykres funkcji określonej tym samym wzorem, jeśli jej dziedziną jest zbiór:

- a) $D = \langle -3; 0 \rangle \cup (2; 4)$, c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$,
b) $D = (-2; 5) \setminus \{4\}$, d) $D = (0; \infty) \setminus \{3\}$.

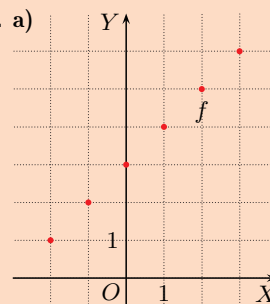


8. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4, a funkcja g jej resztę z dzielenia przez 5. Naskicuj wykresy tych funkcji. Dla ilu liczb naturalnych mniejszych od 25 funkcje f i g przyjmują te same wartości?

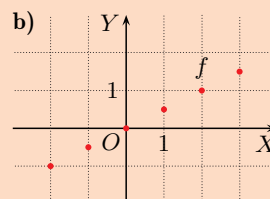


Odpowiedzi do zadań

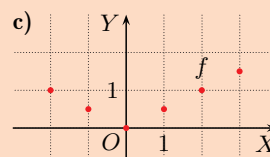
2. a)



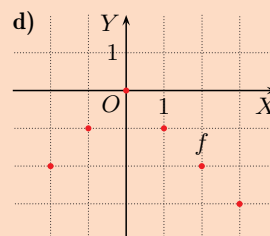
b)



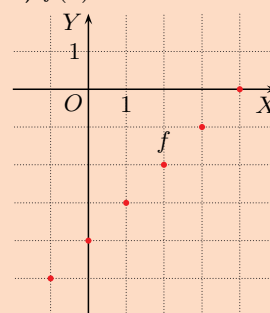
c)



d)



3. a) $f(x) = x - 4$



b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = -x + 4$

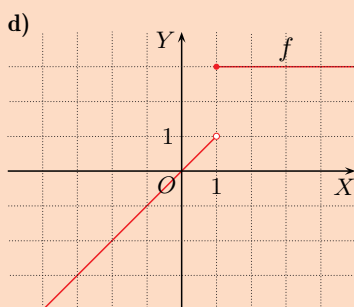
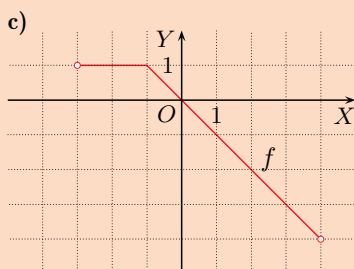
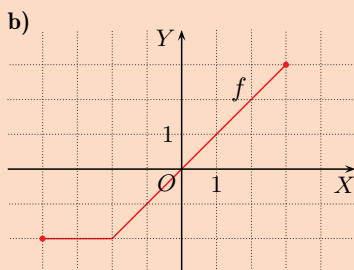
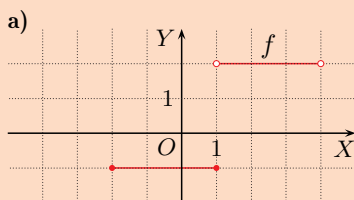
d) $f(x) = 2x - 1$

8. Jeśli $x < 25$, to $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 1, 2, 3, 20, 21, 22, 23\}$, zatem zachodzi to dla ośmiu argumentów.

Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji określonej nieskomplikowanym wzorem, w tym parabolę, hiperbolę,
- szkicuje wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach,
- sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu funkcji,
- określa, czy dana krzywa jest wykresem funkcji,
- oblicza wartość funkcji dla danego argumentu.

Ćwiczenie 1

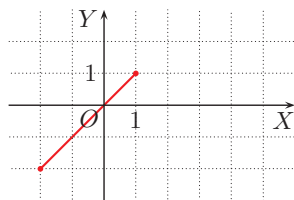


4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

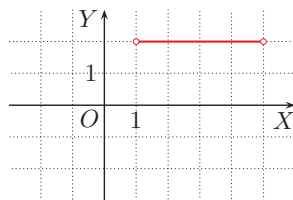
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$

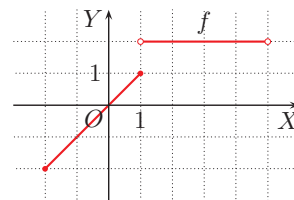
Zauważ, że dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 5 \rangle$.



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in \langle -2; 1 \rangle$



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in (1; 5)$



Wykres funkcji f

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1; 4 \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

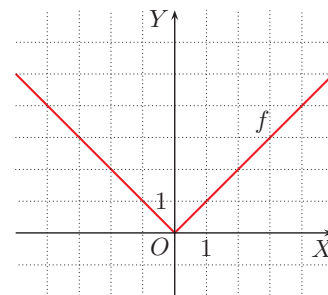
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. W tabeli podano wartości funkcji f dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3

Tabelę taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.

Wzór tej funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$



Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dla całkowitych argumentów x , takich że $|x| \leq 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |3x|$

c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$

d) $f(x) = -|x|$

Ćwiczenie 2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	4	2	0	2	4	6

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	3	0	3	6	9

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

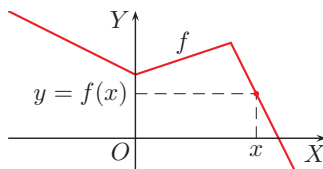
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu x istnieje dokładnie jedna wartość y taka, że punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f .

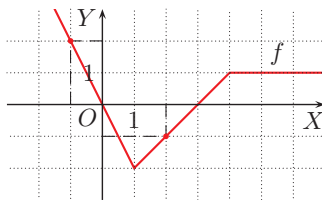


Przykład 3

Z podanego obok wykresu funkcji f odczytaj jej wartości dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 2$.

Dla $x = -1$ odczytujemy $f(-1) = 2$.

Dla $x = 2$ odczytujemy $f(2) = -1$.



Ćwiczenie 3

Wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest prosta przechodząca przez punkty A i B . Naskicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 7$.

a) $A(-3, -1)$, $B(5, 3)$

b) $A(3, 0)$, $B(5, -3)$

Dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe. Wartość funkcji dla danego argumentu jesteśmy w stanie wyznaczyć, gdy znamy jej wzór.

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 5x^2 - 6x$ i $h(x) = x^3 - 1$ dla argumentu $x = 2$. Czy punkt $P(2, 7)$ należy do wykresu której z tych funkcji?

Obliczamy wartości tych funkcji dla $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8$$

$$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio w miejsca x i y do wzoru funkcji otrzymamy równość.

Zatem punkt P należy do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji h .

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $P(-2, -11)$

b) $f(x) = -2x^2 - x$, $P(-\frac{1}{2}, 0)$

Czy wiesz, że...

Szwajcarski matematyk Leonhard Euler [czyt. ojler] (1707–1783) jako pierwszy do opisu wartości funkcji używał oznaczenia $f(x)$. Podana przez nas definicja funkcji została sformułowana dopiero w połowie XIX wieku przez niemieckiego matematyka Petera G.L. Dirichleta (1805–1859).

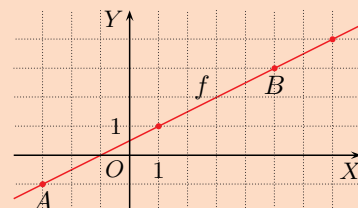
Ćwiczenie 4

a) $f(-2) = 3(-2)^2 + 1 = 13 \neq -11$, nie należy

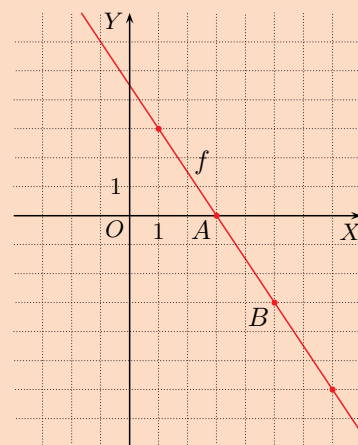
b) $f(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) = 0$, należy

Ćwiczenie 3

a) $f(1) = 1$, $f(7) = 4$



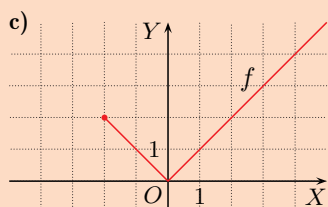
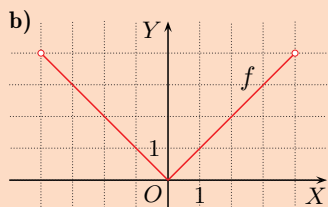
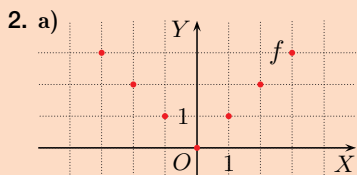
b) $f(1) = 3$, $f(7) = -6$



Odpowiedzi do zadań

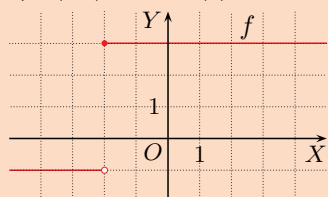
1. a), c) Nie, gdyż istnieją proste równoległe do osi OY (np. $x = 1$), które przecinają krzywą w dwóch punktach.

b) Tak. Każda prosta równoległa do osi OY przecina wykres tylko w jednym punkcie.

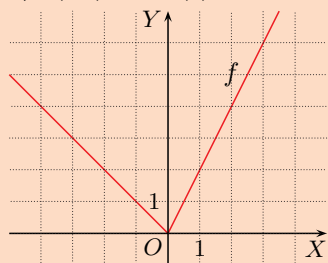


3. a) Q b) P c) P

4. a) $f(-4) = -1$, $f(4) = 3$



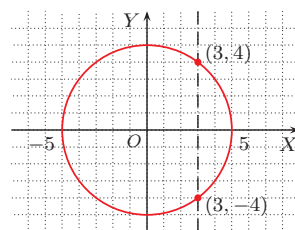
b) $f(-4) = 4$, $f(4) = 8$



Funkcja każdemu argumentowi x przyporządkowuje tylko jedną wartość y , więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

Przykład 5

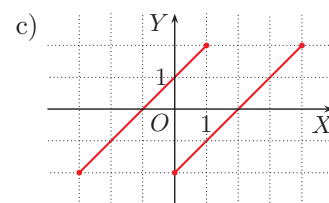
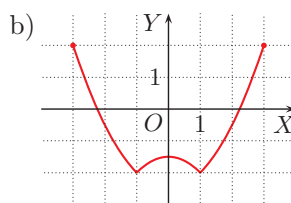
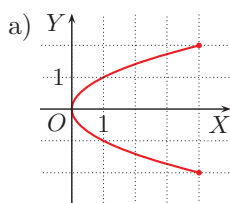
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby x , którym odpowiadają dwie różne wartości y_1, y_2 , np. dla $x = 3$ mamy $y_1 = -4$ i $y_2 = 4$. Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi OY) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Zadania

D 1. Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



2. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = |x|$ o podanej dziedzinie D .

a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = \langle -2; \infty \rangle$

3. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Który z punktów $P(-1, -5)$, $Q(2, -9)$ należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $f(x) = -4x^2 + x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2$

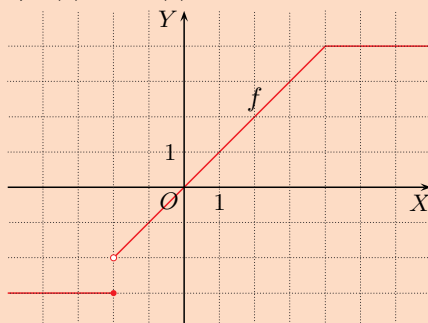
4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -4$ oraz dla $x = 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -2; \infty \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$

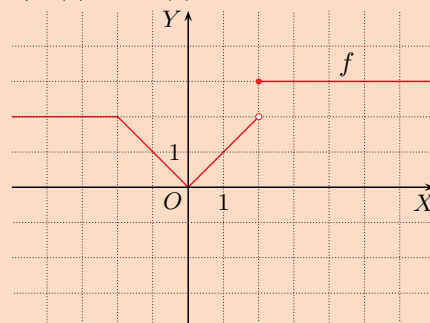
5. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = 1$ oraz $x = 3$.

a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

5. a) $f(1) = 1$, $f(3) = 3$



b) $f(1) = 1$, $f(3) = 3$



Inne przykłady wykresów funkcji

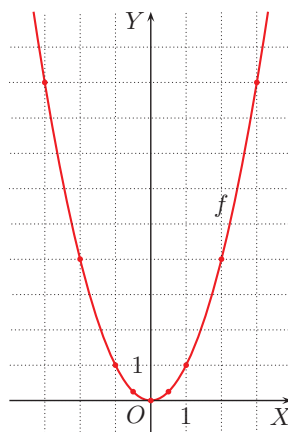
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f . Wykres ten nazywamy **parabolą**.



1. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^2$ o podanej dziedzinie D . Skorzystaj z wykresu z przykładu 1.

a) $D = \langle -2; 2 \rangle$

b) $D = \langle 1; 3 \rangle$

c) $D = \langle 0; \infty \rangle$

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu, a następnie narysuj jej wykres.

a) $f(x) = -x^2$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

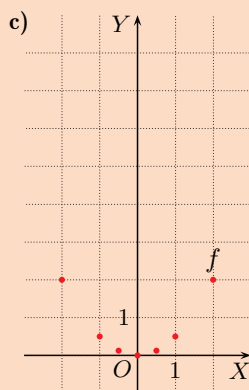
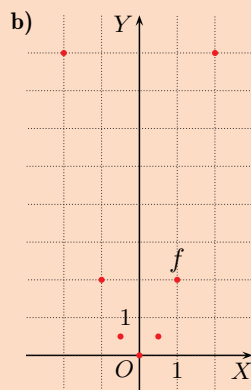
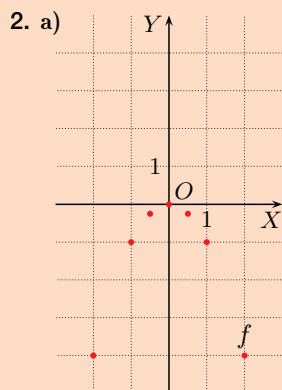
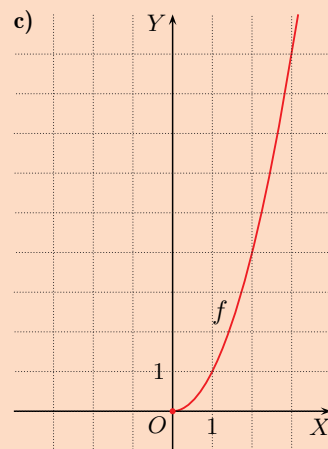
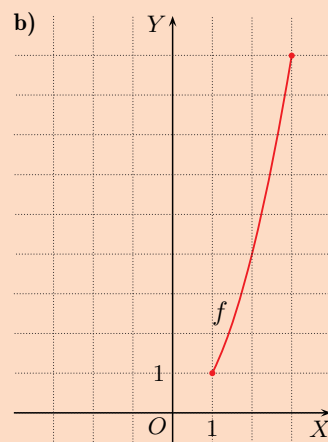
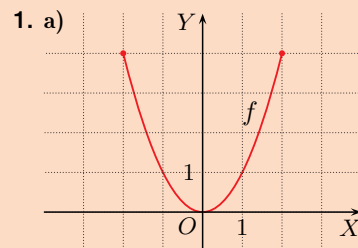
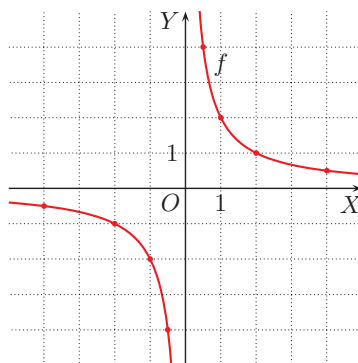
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{x}$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów (zwróć uwagę na to, że liczba 0 nie należy do dziedziny funkcji, ani nie jest wartością dla żadnego argumentu).

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i odpowiednio je łączymy – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f (składa się on z dwóch osobnych gałęzi). Wykres ten nazywamy **hiperbolą**.



Uczeń:

- stosuje pojęcie funkcji monotonicznej (rosnącej, malejącej, stałej, nierosnącej, niemalejącej),
- na podstawie wykresu funkcji określa jej monotoniczność,
- rysuje wykres funkcji o podanych kryteriach monotoniczności,
- bada na podstawie definicji monotoniczność funkcji określonej wzorem.

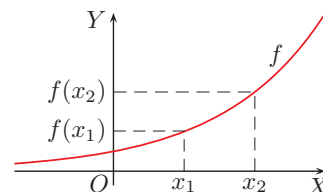
4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ jest rosnąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 &< \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - 4 &< \frac{1}{2}x_2 - 4 \end{aligned}$$

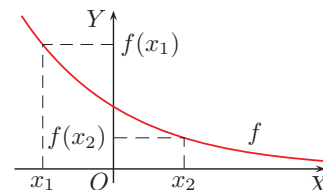
Zatem $f(x_1) < f(x_2)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest rosnąca.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ jest malejąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} 4x_1 &< 4x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2 \\ \frac{4}{x_2} &< \frac{4}{x_1} \end{aligned}$$

Dzielenie obu stron nierówności przez $x_1 \cdot x_2$ nie zmienia zwrotu nierówności, gdyż $x_1 \cdot x_2 > 0$.

Zatem $f(x_2) < f(x_1)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in (0; \infty)$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest malejąca.

Multiteka

- Monotoniczność funkcji liniowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

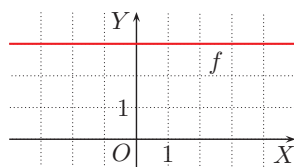
Uzasadnij, że:

- funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -2x + 6$ jest malejąca,
- funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ jest rosnąca,
- funkcja $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ jest rosnąca.

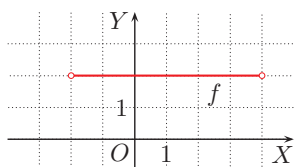
Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

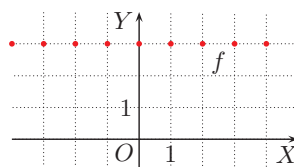
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$$



$$f: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2$$

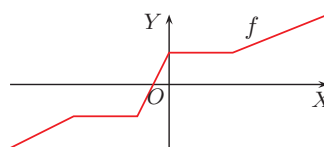


$$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

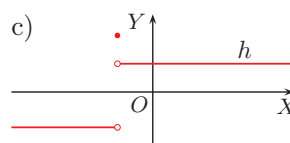
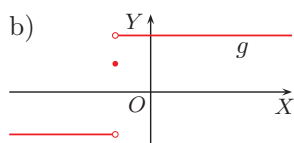
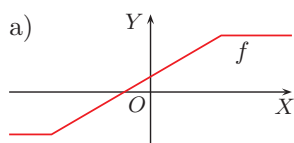
$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



Przykład funkcji niemalejącej

Ćwiczenie 2

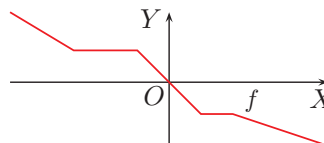
Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji niemalejącej?



Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$



Przykład funkcji nierosnącej

Ćwiczenie 1

a) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \\ -2x_1 &> -2x_2 \\ -2x_1 + 6 &> -2x_2 + 6 \end{aligned}$$

Zatem $f(x_1) > f(x_2)$, czyli funkcja jest malejąca.

b) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$-4x_1 > -4x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$-\frac{4}{x_2} > -\frac{4}{x_1}$$

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

c) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$-2x_1 > -2x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$:

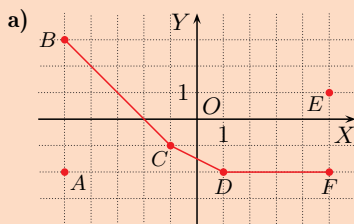
$$-\frac{2}{x_2} > -\frac{2}{x_1}$$

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

Ćwiczenie 2

a) tak b) tak c) nie

Ćwiczenie 3

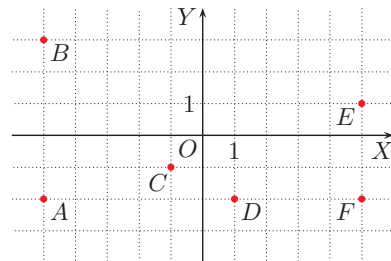


b) nie

Ćwiczenie 3

a) Naskicuj wykres funkcji nierosnącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$.

b) Czy można naskicować wykres funkcji niemalejącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$?



Uwaga. Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą. Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą jak i nierosnącą.

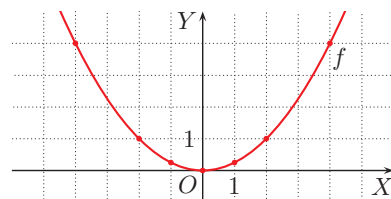
Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.



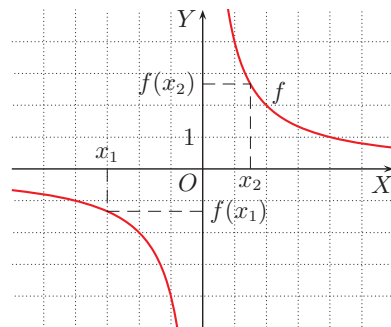
W przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja f maleje, a w przedziale $(0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

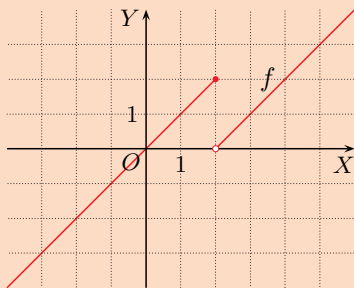
Jednak funkcja f nie jest funkcją malejącą w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Na przykład dla pary argumentów x_1, x_2 , mamy:

$$x_1 < x_2 \text{ i } f(x_1) < f(x_2)$$



Ćwiczenie 4

Przykładowa odpowiedź.

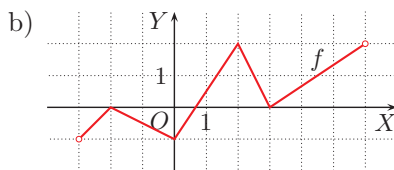
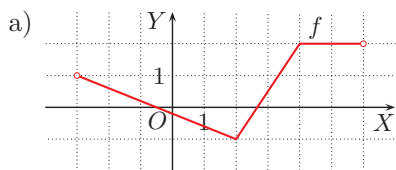


Ćwiczenie 4

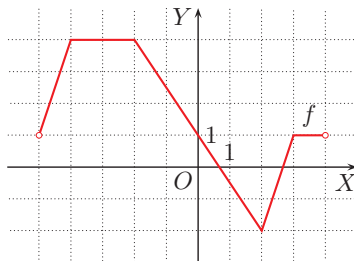
Naskicuj wykres dowolnej funkcji, która jest przedziałami rosnąca, ale nie jest funkcją monotoniczną.

Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-5; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

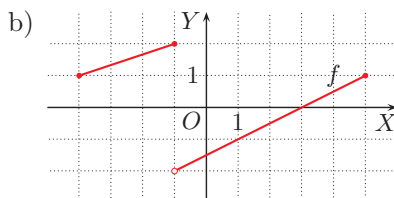
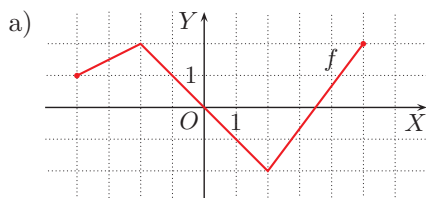


- A. Funkcja f jest nierosnąca w $\langle -4; 2 \rangle$.
B. Funkcja f jest niemalejąca w $(-5; -2)$.
C. Funkcja f jest niemalejąca w $\langle 2; 4 \rangle$.

3. Naskicuj wykres funkcji $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbf{R}$ spełniającej warunki:

- a) f rośnie w $(-5; -1)$ i w $\langle 3; 6 \rangle$ oraz maleje w $\langle -1; 3 \rangle$,
b) f jest stała w $\langle 0; 4 \rangle$, rośnie w $\langle 4; 5 \rangle$, maleje w $(-5; 0)$ i w $\langle 5; 6 \rangle$.

- D** 4. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



- D** 5. Przeczytaj podany w ramce przykład. Wykaż, że funkcja:

- a) $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = 6x^2 + 1$ jest malejąca,
b) $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2$ jest rosnąca,
c) $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -8x^2 + 6$ jest malejąca.

Wykaż, że funkcja $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ jest rosnąca.

Niech $x_1, x_2 \in \langle 0; \infty \rangle$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$ i $x_2 + x_1 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$. Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

5. a) Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = 6x_2^2 + 1 - 6x_1^2 - 1 = 6(x_2^2 - x_1^2) = 6(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$ i $x_2 + x_1 < 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, czyli $f(x_2) < f(x_1)$.

Oznacza to, że funkcja f jest malejąca.

- b) Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2^2} - 2 - \frac{3}{x_1^2} + 2 = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_2^2 x_1^2} = \frac{3}{(x_2 x_1)^2} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$(x_1 x_2)^2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$ i $x_2 + x_1 < 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$.

Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

- c) Niech $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = -8x_2^2 + 6 + 8x_1^2 - 6 = 8(x_1^2 - x_2^2) = 8(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$x_1 - x_2 < 0$ i $x_2 + x_1 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, czyli $f(x_2) < f(x_1)$.

Oznacza to, że funkcja f jest malejąca.

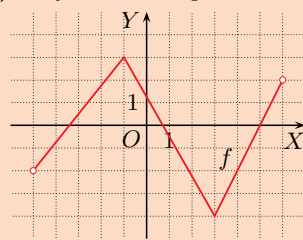
Odpowiedzi do zadań

1. a) Funkcja f maleje w $(-3; 2)$, jest stała w $\langle 4; 6 \rangle$, rośnie w $\langle 2; 4 \rangle$.

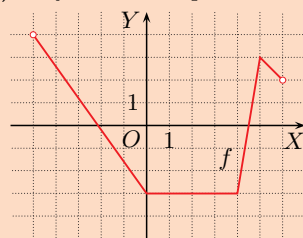
- b) Funkcja f maleje w $\langle -2; 0 \rangle$ i w $\langle 2; 3 \rangle$, rośnie w $(-3; -2)$, $\langle 0; 2 \rangle$ i w $\langle 3; 6 \rangle$.

2. Funkcja f maleje w $\langle -2; 2 \rangle$, jest stała w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 3; 4 \rangle$, rośnie w $(-5; -4)$ i w $\langle 2; 3 \rangle$. Wszystkie zdania są prawdziwe.

3. a) Przykładowa odpowiedź.



- b) Przykładowa odpowiedź.



4. a) Funkcja f maleje w $\langle -2; 2 \rangle$, rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 2; 5 \rangle$, nie jest więc monotoniczna.

- b) Funkcja f rośnie w $\langle -4; -1 \rangle$ i w $(-1; 5)$, ale nie jest funkcją rosnącą, gdyż dla pary argumentów $-1, 1$ mamy: $-1 < 1$ oraz $f(-1) > f(1)$.

Uczeń:

- stosuje pojęcia: zbiór wartości funkcji, największa i najmniejsza wartość funkcji,
- odczytuje z wykresu funkcji jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, maksymalne przedziały monotoniczności funkcji, najmniejszą i największą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Ćwiczenie 1

- a) $D = (-5; 1) \cup (2; 6)$
b) $D = (-5; -3) \cup (-3; 5)$

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

■ Odczytywanie dziedziny funkcji

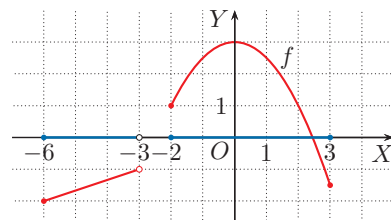
Dziedzina funkcji $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Jej dziedziną jest zbiór:

$$D = \langle -6; -3 \rangle \cup \langle -2; 3 \rangle$$

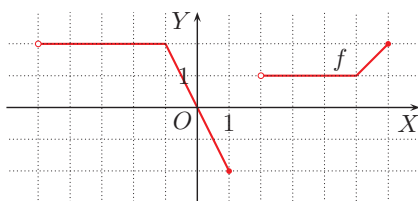
Na rysunku został on zaznaczony na osi OX kolorem niebieskim.



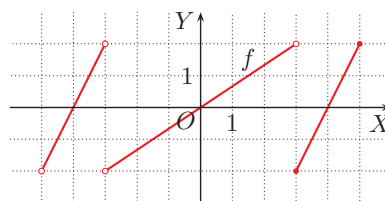
Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę.

a)



b)



■ Odczytywanie zbioru wartości funkcji

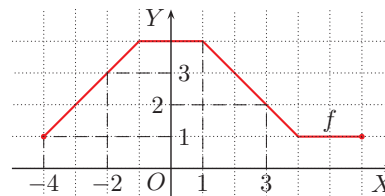
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, ale także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji:
 $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leq y \leq 4$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1; 4 \rangle$.



Definicja

Zbiór wartości funkcji $f: D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

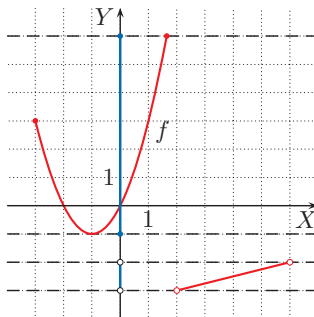
Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

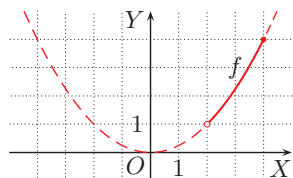
Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup \langle -1; 6 \rangle$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.



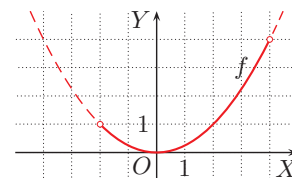
Ćwiczenie 2

Linia ciągłą narysowano wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

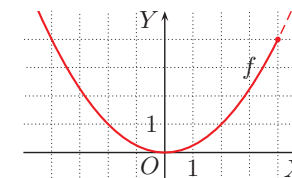
a) $D = (2; 4)$



b) $D = (-2; 4)$

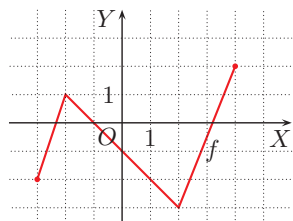


c) $D = (-\infty; 4)$

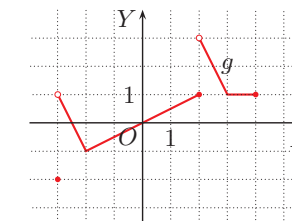


Ćwiczenie 3

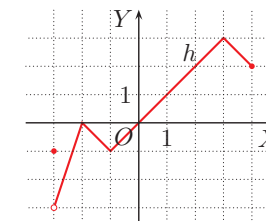
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f , g i h określonych w przedziale $\langle -3; 4 \rangle$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3 . Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2 . Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.



Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

Ćwiczenie 2

- a) $f(D) = (1; 4)$
- b) $f(D) = \langle 0; 4 \rangle$
- c) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$

Ćwiczenie 3

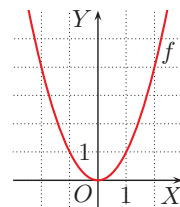
Funkcja f przyjmuje największą wartość 2 dla $x = 4$.
Funkcja g nie przyjmuje wartości największej.
Funkcja h przyjmuje największą wartość 3 dla $x = 3$.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dziedzinie $D = \mathbf{R}$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$.

Najmniejsza wartość funkcji f równa 0 jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

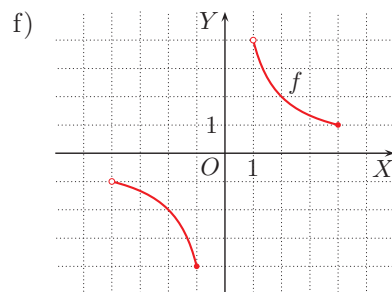
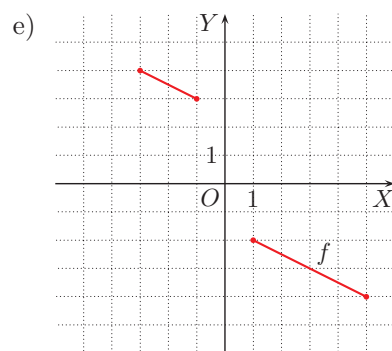
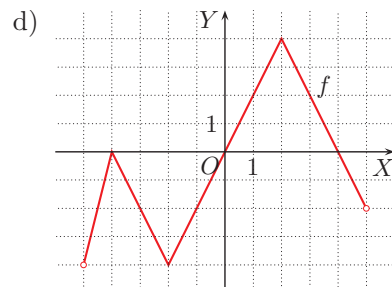
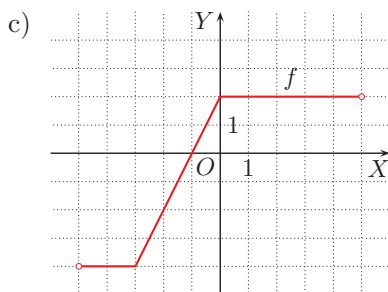
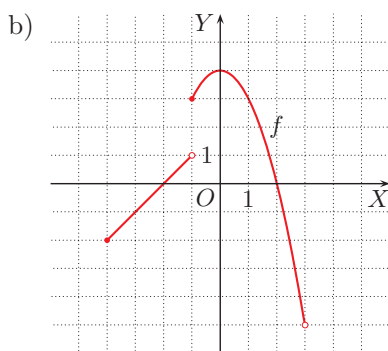
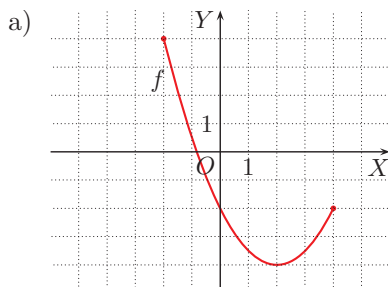


Odpowiedzi do zadań

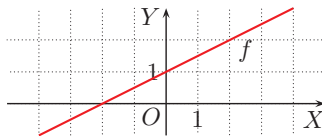
1. a) $D = \langle -2; 4 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -2$
b) $D = \langle -4; 3 \rangle$,
 $f(D) = \langle -5; 4 \rangle$,
nie przyjmuje wartości
najmniejszej,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 0$
c) $D = (-5; 5)$,
 $f(D) = \langle -4; 2 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x \in (-5; -3)$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x \in \langle 0; 5 \rangle$
d) $D = (-5; 5)$,
 $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 2$
e) $D = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 5$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -3$
f) $D = (-4; -1) \cup \langle 1; 4 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -1$,
nie przyjmuje wartości
największej

Zadania

1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Podaj zbiór wartości funkcji danej tym samym wzorem, jeśli jej dziedziną jest zbiór D .



- a) $D = \langle -4; 4 \rangle$ b) $D = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 4 \rangle$ c) $D = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$

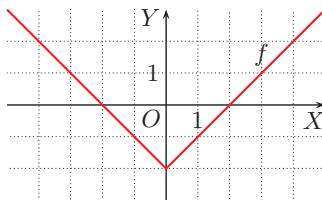
3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.

- a) $D = \langle -4; 6 \rangle$ b) $D = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$ c) $D = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$

4. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = 2x - 4$. Podaj jej dziedzinę, jeśli zbiór wartości jest równy:

- a) $\langle -3; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$, c) $\langle 0; 2 \rangle \cup \{3\}$, d) $\{0, 2, 3\}$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Dla funkcji g danej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane, jeśli dziedziną tej funkcji jest zbiór:



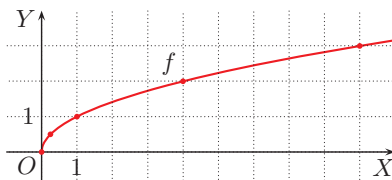
- a) $D = \langle -4; -1 \rangle$, b) $D = \langle -3; 4 \rangle$, c) $D = \langle -2; \infty \rangle$.

6. Naskicuj wykres dowolnej funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, której zbiór wartości jest równy:

- a) $\langle -2; 6 \rangle$, b) $\langle -4; 0 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$, c) $\langle -2; 3 \rangle \cup \{5\}$, d) $\{0, 4\}$.

7. Aby naskicować wykres funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$, sporządzono tabelę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3



Odczytaj z wykresu, jakie wartości funkcja f przyjmuje dla:

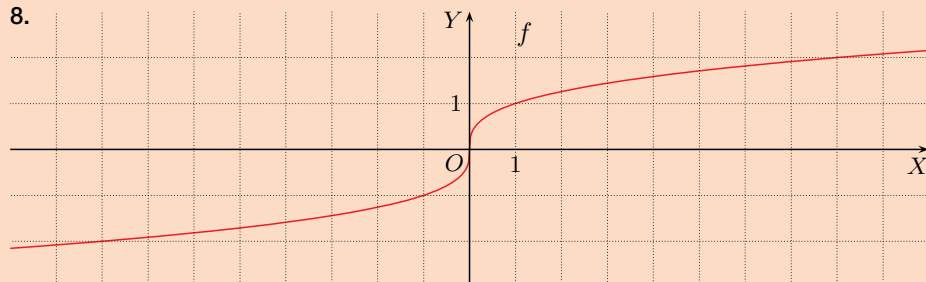
- a) $x \in (0; \frac{1}{4})$, b) $x \in (\frac{1}{4}; 1)$, c) $x \in \langle 4; 9 \rangle$, d) $x \in \langle 2\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4} \rangle$.

8. Na podstawie odpowiedniej tabeli wartości funkcji naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Jakie wartości funkcja f przyjmuje dla argumentów z przedziału:

- a) $\langle 0; 1 \rangle$, b) $(0; 8)$, c) $\langle -8; 1 \rangle$, d) $(-8; \infty)$?

7. a) $(0; \frac{1}{2})$ b) $(\frac{1}{2}; 1)$ c) $\langle 2; 3 \rangle$ d) $\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \rangle$

8.



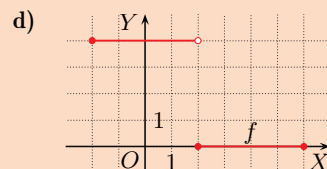
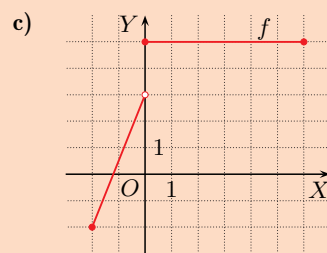
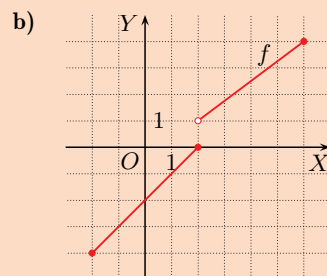
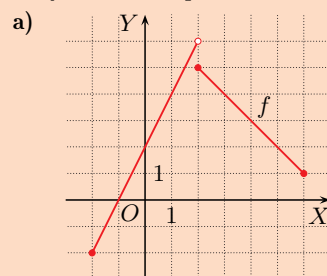
- a) $\langle 0; 1 \rangle$ b) $(0; 2)$ c) $\langle -2; 1 \rangle$ d) $(-2; \infty)$

2. a) $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$
b) $f(D) = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$
c) $f(D) = \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$
3. a) $f(D) = \langle 1; 6 \rangle$
b) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$
c) $f(D) = \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 5; 6 \rangle$

4. a) $D = (\frac{1}{2}; 4)$
b) $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$
c) $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$
d) $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$

5. a) $f_{\min} = -1$ dla $x = -1$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x = -4$
b) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
nie przyjmuje wartości największej
c) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
nie przyjmuje wartości największej

6. Przykładowe odpowiedzi.

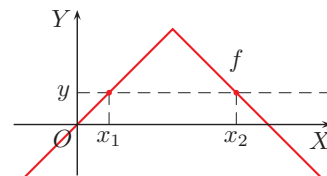


Uczeń:

- odczytuje z wykresu rozwiązanie równań i nierówności.

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

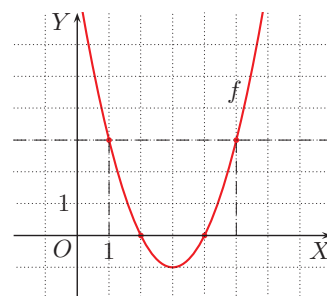
Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę, że funkcja f , której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2 .

**Przykład 1**

Dany jest wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.

Rysujemy prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$. Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

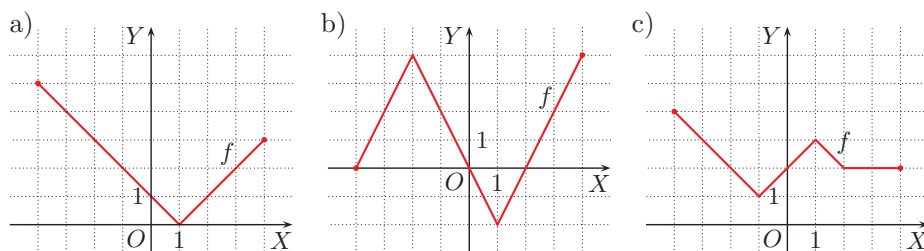
Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.

**Ćwiczenie 1**

- a) $f(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 3\}$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 2\}$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-3, -1, 3\}$
 c) brak miejsc zerowych,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 0\} \cup (2; 4)$

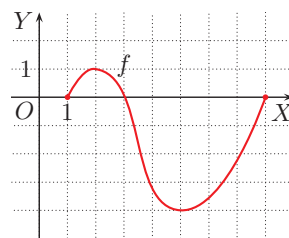
Ćwiczenie 1

Na podstawie wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty x , dla których spełnione jest równanie $f(x) = 2$.

**Przykład 2**

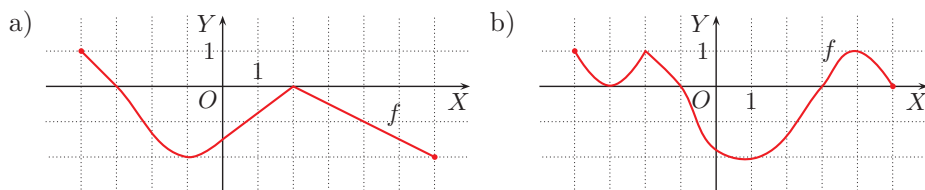
Dany jest wykres funkcji $f: \langle 1; 8 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytujemy z niego:

- równanie $f(x) = 0$ jest spełnione dla $x = 1$,
 $x = 3$, $x = 8$,
- nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1; 3)$,
- nierówność $f(x) \leq 0$ zachodzi dla $x \in \{1\} \cup \langle 3; 8 \rangle$.



Ćwiczenie 2

Z wykresu funkcji f odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leq 0$.

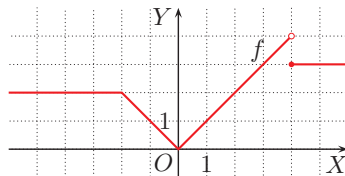


Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -2; 4) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$

Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz nierówności $f(x) \geq 2$.



Nierówność $f(x) > 2$ jest spełniona dla $x \in (2; \infty)$, a nierówność $f(x) \geq 2$ zachodzi dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego rozwiązanie równania:

- $f(x) = 3$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 3$,
- $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -5; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -1; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

Przykład 4

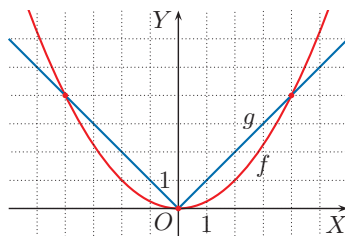
Rozwiąż graficznie równanie $\frac{1}{4}x^2 = |x|$ oraz nierówność $\frac{1}{4}x^2 < |x|$.

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$.

Z wykresów odczytujemy:

$$\frac{1}{4}x^2 = |x| \text{ dla } x = -4, x = 0, x = 4$$

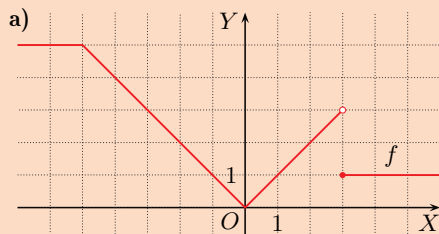
$$\frac{1}{4}x^2 < |x| \text{ dla } x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$$



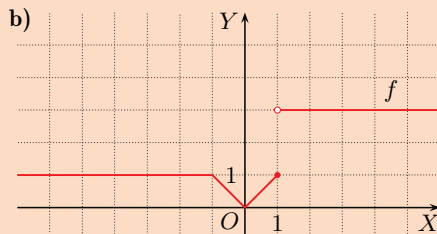
Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$ z przykładu 4 rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4}x^2 \geq |x|$.

Ćwiczenie 3



$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \text{ dla } x = -3, \\ f(x) &> 3 \text{ dla } x \in (-\infty; -3), \\ f(x) &= 1 \text{ dla } x \in \{-1, 1\} \cup \langle 3; \infty), \\ f(x) &\leq 1 \text{ dla } x \in \langle -1; 1) \cup \langle 3; \infty) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \text{ dla } x \in (1; \infty), \\ &\text{nie przyjmuje wartości większych od 3,} \\ f(x) &= 1 \text{ dla } x \in (-\infty; -1) \cup \{1\}, \\ f(x) &\leq 1 \text{ dla } x \in (-\infty; 1) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 0 \text{ dla } x \in \{-3, 2\}, \\ f(x) &> 0 \text{ dla } x \in \langle -4; -3), \\ f(x) &\leq 0 \text{ dla } x \in \langle -3; 6) \end{aligned}$$

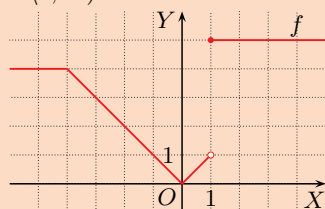
$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= 0 \text{ dla } \\ x &\in \{-3, -1, 3, 5\}, \\ f(x) &> 0 \text{ dla } x \in \langle -4; -3) \cup \\ &\cup (-3; -1) \cup (3; 5), \\ f(x) &\leq 0 \text{ dla } x \in \langle -1; 3) \cup \\ &\cup \{-3, 5\} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

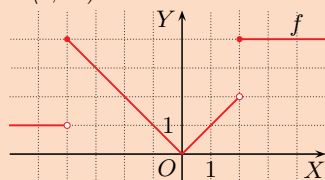
$$x \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \langle 4; \infty)$$

Odpowiedzi do zadań

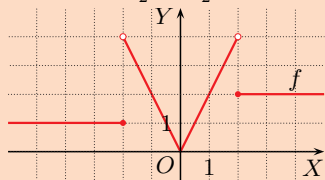
1. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup$
 $\cup \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup$
 $\cup \langle 3; 4 \rangle$
 b) $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup$
 $\cup \langle 2; 3 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup$
 $\cup \langle 2; 3 \rangle$
 c) $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup$
 $\cup \langle -2; 0 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup$
 $\cup \{2, 4\}$
 2. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 1, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup$
 $\cup \langle 1; 4 \rangle$
 b) $f(x) = 2$ dla $x = 2$,
 $f(x) \geq 2$ dla $x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup$
 $\cup \{2\}$
 c) $f(x) = 3$ dla $x \in \langle -\infty; -2 \rangle$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in \mathbf{R}$
 3. a) $f(x) = 1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup$
 $\cup \langle 1; \infty \rangle$



- b) $f(x) = 1$ dla
 $x \in \langle -\infty; -4 \rangle \cup \{-1, 1\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup$
 $\cup \langle 1; \infty \rangle$



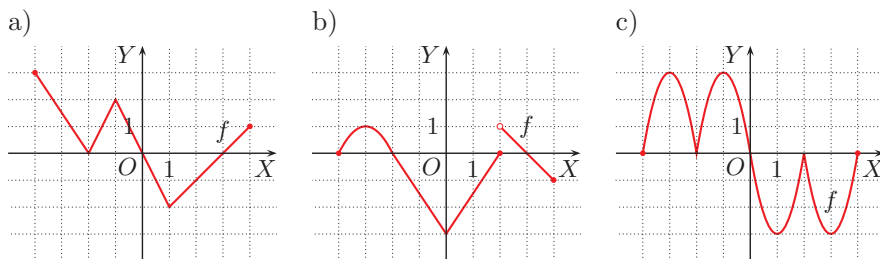
- c) $f(x) = 1$ dla
 $x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla
 $x \in \langle -\infty; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



- d) $f(x) = 1$ dla
 $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup \langle 1; \infty \rangle$,
 $f(x) \geq 1$ dla
 $x \in \langle -2; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$

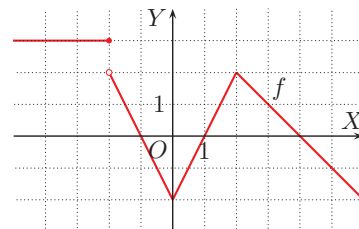
Zadania

1. Z wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) \geq 0$.



2. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania:

- a) $f(x) = 0$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$,
 b) $f(x) = 2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 2$,
 c) $f(x) = 3$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$.

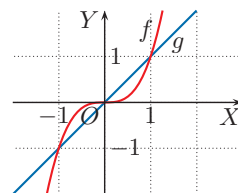


3. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in \langle -\infty; -4 \rangle \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 1 \rangle \\ 5 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \langle -\infty; -2 \rangle \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \langle -\infty; -4 \rangle \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \langle -\infty; -2 \rangle \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = x$. Odczytaj z wykresów:

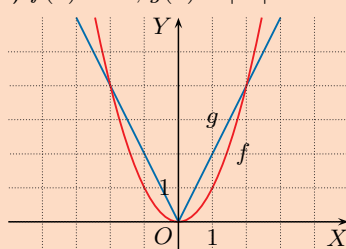
- a) rozwiązanie równania $x^3 = x$,
 b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < g(x)$,
 c) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.



- * 5. a) Rozwiąż graficznie równanie $x^2 = |2x|$ i nierówność $x^2 < |2x|$.
 b) Rozwiąż graficznie równanie $x^2 = 2 - x$ i nierówność $x^2 \geq 2 - x$.

4. a) $x \in \{-1, 0, 1\}$ b) $x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$ c) $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$

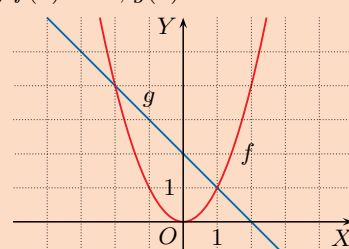
5. a) $f(x) = x^2$, $g(x) = |2x|$



$$x^2 = |2x| \text{ dla } x \in \{-2, 0, 2\},$$

$$x^2 < |2x| \text{ dla } x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 0; 2 \rangle$$

- b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$



$$x^2 = 2 - x \text{ dla } x \in \{-2, 1\},$$

$$x^2 \geq 2 - x \text{ dla } x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$$

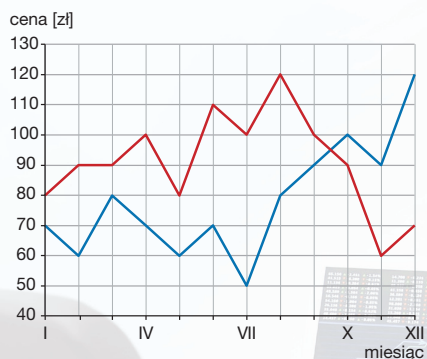
Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 grudnia 2017 r. Taki wykres składa się z bardzo wielu punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.



1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki X (kolor czerwony) i spółki Y (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2018 roku.

- Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?
- Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?



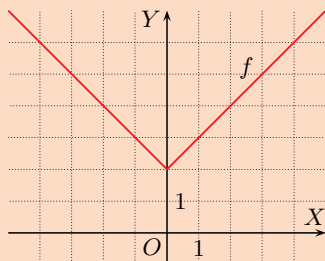
- Spółka X – zysk od maja do sierpnia: $120 - 80 = 40$ [zł]
Spółka Y – zysk od lipca do października: $100 - 50 = 50$ [zł]
- Spółka X – strata od czerwca do listopada: $110 - 60 = 50$ [zł]
Spółka Y – strata od lutego do lipca: $60 - 50 = 10$ [zł]

Uczeń:

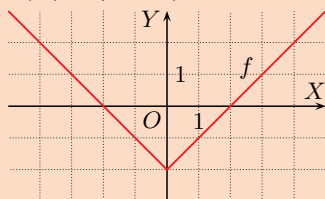
- rysuje wykresy funkcji:
 $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ oraz
 $y = f(x) - q$ dla $q > 0$.

Ćwiczenie 1

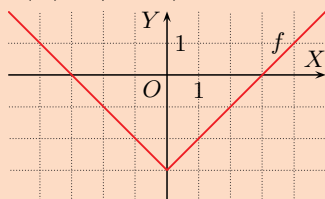
a) $f(D) = \langle 2; \infty \rangle$



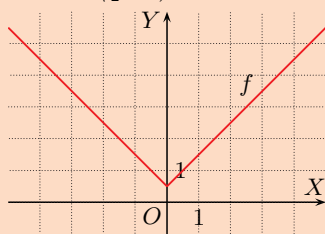
b) $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$



c) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$



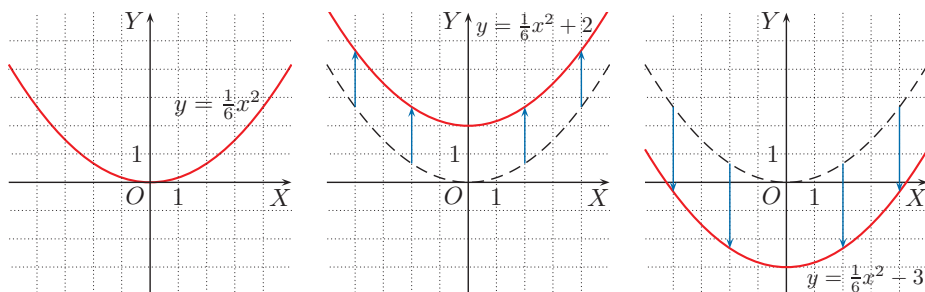
d) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

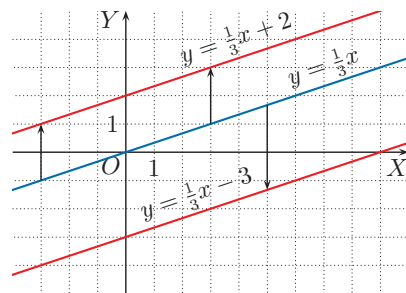
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

- a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.

Multiteka

- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.7

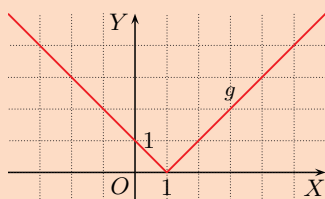
Generator
testów i sprawdzianów

Uczeń:

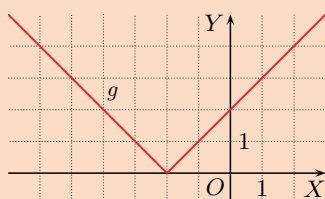
- rysuje wykresy funkcji:
 $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ oraz
 $y = f(x + p)$ dla $p > 0$.

Ćwiczenie 1

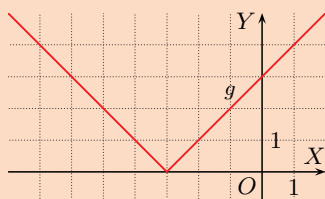
a) $x = 1$



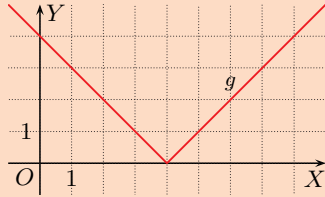
b) $x = -2$



c) $x = -3$



d) $x = 4$



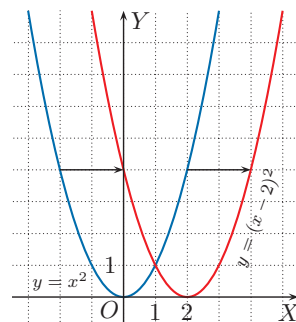
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$, a poniżej tabelę wartości tych funkcji wykorzystane do ich naszkicowania.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9



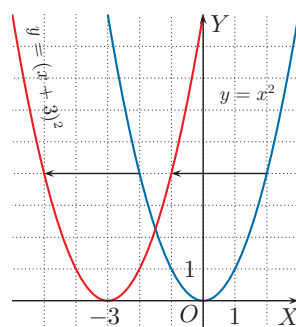
Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$, a poniżej tabelę wartości funkcji $y = (x + 3)^2$.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9

Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.



Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g .

- a) $g(x) = |x - 1|$ b) $g(x) = |x + 2|$ c) $g(x) = |x + 3|$ d) $g(x) = |x - 4|$

Multiteka

- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX

dla nauczyciel.pl | Kartkówka 4.8

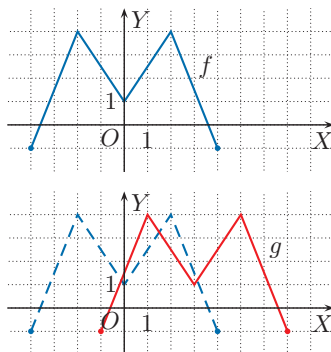
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$ i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -1; 7 \rangle$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g .

- a) $g(x) = f(x-2)$ b) $g(x) = f(x+3)$ c) $g(x) = f(x+4)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj jej miejsce zerowe.

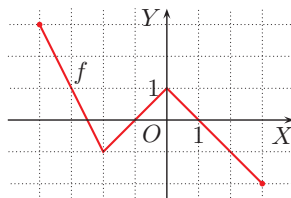
- a) $g(x) = (x-1)^2$ b) $g(x) = (x+1)^2$ c) $g(x) = (x+2)^2$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g .

- a) $g(x) = |2(x-3)|$ b) $g(x) = |2x-4|$ c) $g(x) = |2x+6|$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.

- a) $g(x) = f(x-2)$ c) $g(x) = f(x+1)$
b) $g(x) = f(x-3)$ d) $g(x) = f(x+2)$



4. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^3 - 4x$ są liczby: $-2, 0, 2$. Podaj miejsca zerowe funkcji g .

- a) $g(x) = (x-3)^3 - 4(x-3)$ b) $g(x) = (x+5)^3 - 4(x+5)$

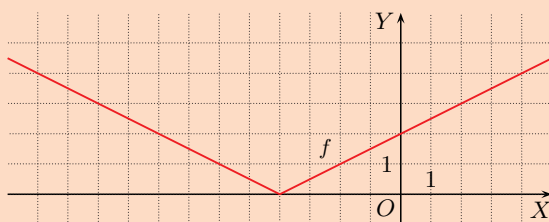
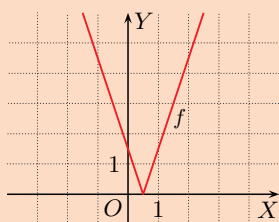
5. Dla jakiej wartości współczynnika a liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji f ? Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = |3x+a|$, $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = |\frac{1}{2}x+a|$, $x_0 = -4$

4. Aby otrzymać wykres funkcji g , przesuwamy wykres funkcji f :

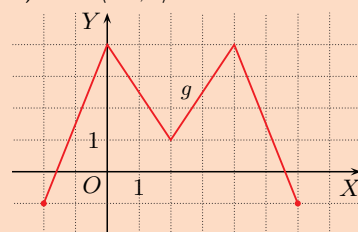
- a) o 3 jednostki w prawo, zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: 1, 3, 5.
b) o 5 jednostek w lewo, zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: $-7, -5, -3$.

5. a) $f(\frac{1}{2}) = 0$, skąd: $a = -\frac{3}{2}$, $f(x) = |3x - \frac{3}{2}| = 3|x - \frac{1}{2}|$.
b) $f(-4) = 0$, czyli $|\frac{1}{2} \cdot (-4) + a| = 0$ i stąd $a = 2$,
 $f(x) = |\frac{1}{2}x + 2| = \frac{1}{2}|x + 4|$.

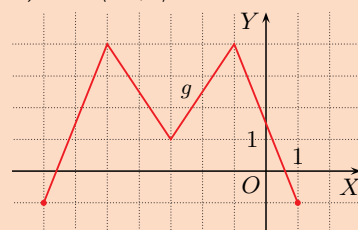


Ćwiczenie 2

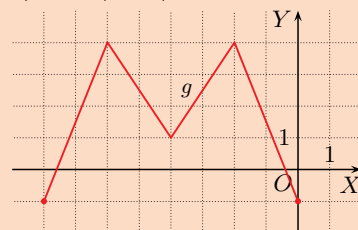
- a) $D = \langle -2; 6 \rangle$



- b) $D = \langle -7; 1 \rangle$

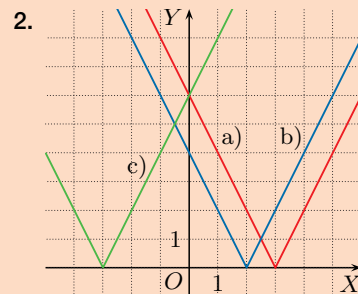


- c) $D = \langle -8; 0 \rangle$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $g(1) = 0$
b) $g(-1) = 0$
c) $g(-2) = 0$

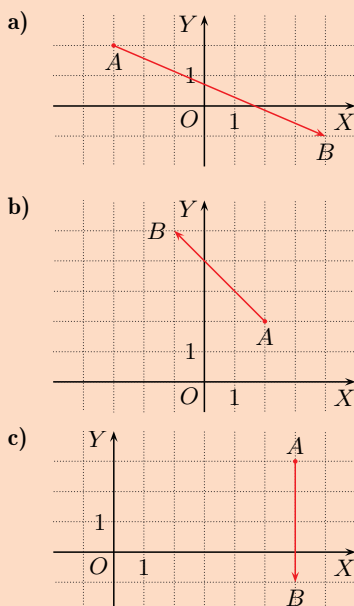


3. a) $\langle -2; 5 \rangle$ b) $\langle -1; 6 \rangle$
c) $\langle -5; 2 \rangle$ d) $\langle -6; 1 \rangle$

Uczeń:

- posługuje się pojęciem wektora i wektora przeciwnego,
- oblicza współrzędne wektora,
- wyznacza współrzędne początku lub końca wektora, mając dane współrzędne wektora i współrzędne jednego z punktów,
- znajduje obraz figury w przesunięciu o dany wektor.

Ćwiczenie 1

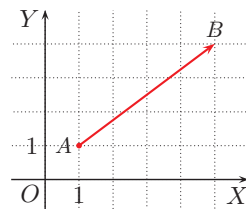


4.9. Wektory w układzie współrzędnych

Intuicyjnie **wektor** to odcinek z wyróżnionym **początkiem** i **końcem**, często rysowany jako strzałka. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.

Wektor $\overrightarrow{AB}$ (rysunek obok) możemy określić, podając współrzędne początku wektora $A(1, 1)$ i współrzędne końca $B(5, 4)$.

Punkt A będący początkiem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy też **punktem zaczepienia** wektora, a o wektorze $\overrightarrow{AB}$ mówimy, że jest zaczepiony w punkcie A .

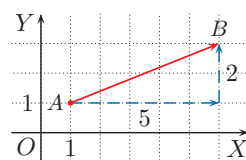


Ćwiczenie 1

Narysuj wektor $\overrightarrow{AB}$.

- a) $A(-3, 2)$, $B(4, -1)$ b) $A(2, 2)$, $B(-1, 5)$ c) $A(6, 3)$, $B(6, -1)$

Wektory są wygodnym sposobem opisu przesunięcia w układzie współrzędnych. Zauważmy, że przesunięcie o wektor $\overrightarrow{AB}$ (rysunek obok) oznacza przesunięcie o 5 jednostek w prawo i 2 jednostki w górę. Zapisujemy to następująco: $\overrightarrow{AB} = [5, 2]$.



Twierdzenie

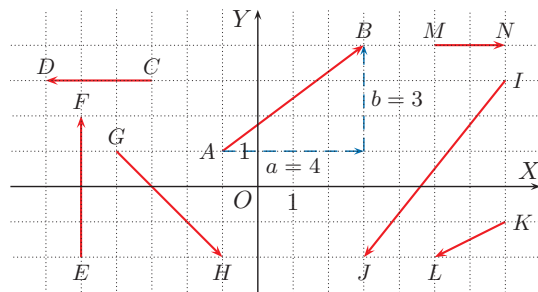
Dowolny wektor w układzie współrzędnych zapisujemy jako parę liczb $[a, b]$. W przesunięciu o wektor $[a, b]$:

- współrzędna a określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w poziomie (wzdłuż osi OX) **w prawo**, jeśli $a > 0$, lub **w lewo**, jeśli $a < 0$;
- współrzędna b określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w pionie (wzdłuż osi OY) **w górę**, jeśli $b > 0$, lub **w dół**, jeśli $b < 0$.

Przykład 1

Na rysunku obok:

$$\overrightarrow{AB} = [4, 3], \quad \overrightarrow{CD} = [-3, 0], \\ \overrightarrow{EF} = [0, 4], \quad \overrightarrow{KL} = [-2, -1].$$



Ćwiczenie 2

Korzystając z rysunku obok, podaj współrzędne wektora:

- a) $\overrightarrow{GH}$, b) $\overrightarrow{IJ}$, c) $\overrightarrow{MN}$.

Ćwiczenie 2

- a) $\overrightarrow{GH} = [3, -3]$ b) $\overrightarrow{IJ} = [-4, -5]$ c) $\overrightarrow{MN} = [2, 0]$

Ćwiczenie 3

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A(-2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(6, 3)$, $D(3, 1)$, $E(-2, -2)$. Podaj współrzędne wektorów:

- a) $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BE}$, b) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AE}$, c) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, d) $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{DA}$.

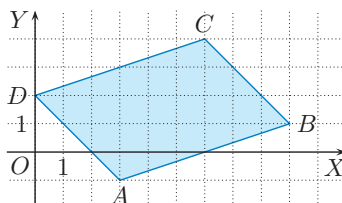
Dane są punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Ćwiczenie 4

Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Podaj współrzędne wektorów:

- a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$,
b) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.



Zauważ, że jeśli wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[a, b]$, to wektor $\overrightarrow{BA}$ ma współrzędne $[-a, -b]$. Zapisujemy to: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$.

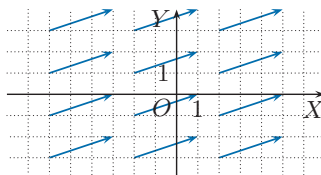
Ćwiczenie 5

Podaj współrzędne wektora przeciwnego do wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli:

- a) $A(2, 1)$ i $B(3, 7)$, b) $A(5\frac{1}{4}, -2)$ i $B(-3\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3})$.

Aby określić **wektor zaczepiony**, podajemy współrzędne jego początku i końca. Rozważamy również **wektor swobodny**, dla którego podajemy wyłącznie jego współrzędne $[a, b]$. Wektory swobodne oznaczamy zwykle: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

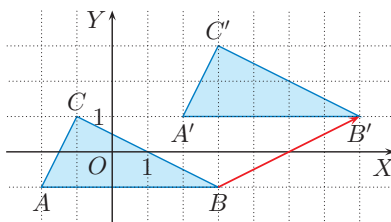
Uwaga. Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, zamiast: „wektor swobodny” czy „wektor zaczepiony” mówimy po prostu: „wektor”.



Wszystkie wektory na rysunku odpowiadają wektorowi swobodnemu $\vec{u} = [3, 1]$.

Przykład 2

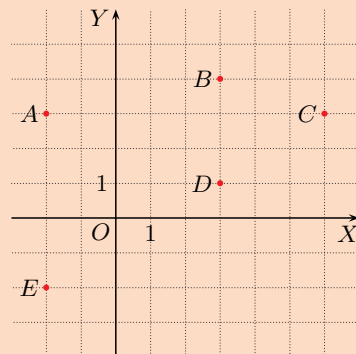
Trójkąt $A'B'C'$ (rysunek obok) otrzymano przez przesunięcie trójkąta ABC o wektor $\vec{v} = [4, 2]$. Zauważ, że jeśli znamy współrzędne punktów A, B, C i wektor $\vec{v}$, możemy wyznaczyć współrzędne punktów A', B', C' .



Ćwiczenie 5

- a) $\overrightarrow{AB} = [1, 6]$, wektor przeciwny $\overrightarrow{BA} = [-1, -6]$
b) $\overrightarrow{AB} = [-8\frac{3}{4}, 8\frac{2}{3}]$, wektor przeciwny $\overrightarrow{BA} = [8\frac{3}{4}, -8\frac{2}{3}]$

Ćwiczenie 3



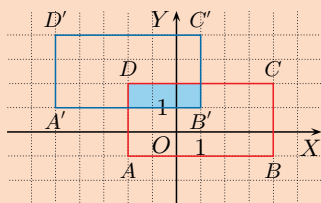
- a) $\overrightarrow{BC} = [3, -1]$, $\overrightarrow{BE} = [-5, -6]$
b) $\overrightarrow{AC} = [8, 0]$, $\overrightarrow{AE} = [0, -5]$
c) $\overrightarrow{AB} = [5, 1]$, $\overrightarrow{BA} = [-5, -1]$
d) $\overrightarrow{BD} = [0, -3]$, $\overrightarrow{DA} = [-5, 2]$

Ćwiczenie 4

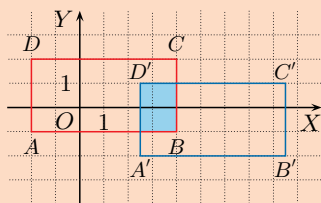
- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [6, 2]$,
 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = [-6, -2]$
b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [-3, 3]$,
 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = [3, -3]$

Ćwiczenie 6

a) $P = 3$

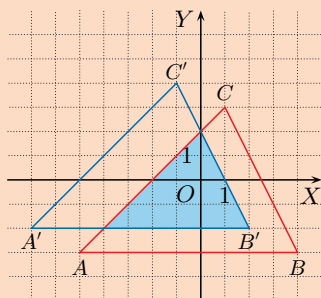


b) $P = 3$

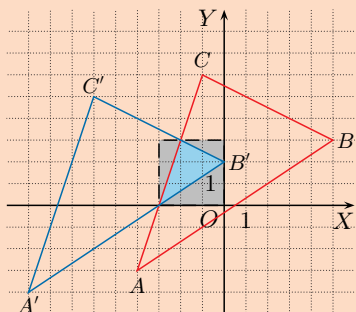


Odpowiedzi do zadań

1. a) $B(6, 5)$ b) $B(-3, 0)$
c) $B(5\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ d) $B(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
2. a) $A(-3, 0)$ b) $A(1, 1)$
c) $A(-15, 17)$ d) $A(23, 32)$
3. a) $\vec{u} = -\vec{AB}$ b) $\vec{u} = -\vec{CD}$
4. a) $[5, 1]$
5. a) $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$



$$b) P = 3 \cdot 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\right) = 3\frac{1}{2}$$

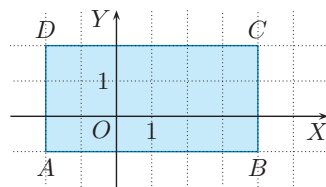


Figurę F' otrzymaną w wyniku przesunięcia figury F o wektor $\vec{v}$ nazywamy **obrazem** figury F w przesunięciu o wektor $\vec{v}$.

Ćwiczenie 6

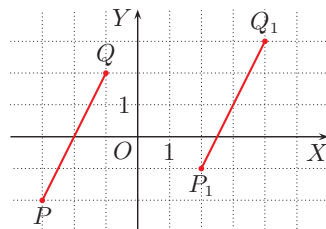
Prostokąt $ABCD$ (rysunek obok) przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano prostokąt $A'B'C'D'$. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a) $\vec{v} = [-3, 2]$ b) $\vec{v} = [4\frac{1}{2}, -1]$



Zadania

1. Wyznacz współrzędne punktu B , mając dane punkt A i wektor $\vec{AB}$.
a) $A(-3, 5)$, $\vec{AB} = [9, 0]$ c) $A(\frac{5}{2}, 2)$, $\vec{AB} = [3, -\frac{3}{2}]$
b) $A(2, 2)$, $\vec{AB} = [-5, -2]$ d) $A(4, -1)$, $\vec{AB} = [-5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
2. Wyznacz współrzędne punktu A , mając dane punkt B i wektor $\vec{AB}$.
a) $B(0, 4)$, $\vec{AB} = [3, 4]$ c) $B(-1, 2)$, $\vec{AB} = [14, -15]$
b) $B(-2, 3)$, $\vec{AB} = [-3, 2]$ d) $B(1, 4)$, $\vec{AB} = [-22, -28]$
3. Sprawdź, czy wektor $\vec{u}$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\vec{AB}$ lub wektora $\vec{CD}$.
a) $\vec{u} = [7\frac{1}{2}, 6]$, $A(8, 4)$, $B(\frac{1}{2}, -2)$, $C(3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$, $D(-4, 3\frac{3}{4})$
b) $\vec{u} = [-3, 2\frac{1}{6}]$, $A(-2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{2})$, $B(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3})$, $C(\sqrt{3}, 2\frac{1}{6})$, $D(\frac{-6}{3-\sqrt{3}}, 0)$
4. a) O jaki wektor należy przesunąć odcinek PQ , aby otrzymać odcinek P_1Q_1 ?
b) Narysuj obraz odcinka PQ w przesunięciu o wektor $[2, -2]$.
c) Narysuj obraz odcinka PQ w przesunięciu o wektor $[-2, 1]$.
5. Trójkąt $A_1B_1C_1$ otrzymujemy, przesuwając trójkąt ABC o wektor $\vec{v}$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów, jeśli:
a) $A(-5, -3)$, $B(4, -3)$, $C(1, 3)$, $\vec{v} = [-2, 1]$,
b) $A(-4, -3)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$, $\vec{v} = [-5, -1]$.
6. Dany jest równoległobok $ABCD$ taki, że $\vec{BC} = [-4, 4]$, $\vec{DC} = [9, 3]$ oraz $C(2, 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków: A , B i D . Oblicz pole części wspólnej równoległoboku $ABCD$ i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [3, 1]$.



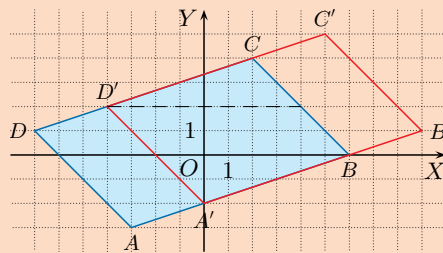
6. $\vec{BC} = [-4, 4]$ oraz $C(2, 4)$, zatem punkt B ma współrzędne $(2 + 4, 4 - 4) = (6, 0)$.
 $\vec{DC} = [9, 3]$ oraz $C(2, 4)$, zatem punkt D ma współrzędne $(2 - 9, 4 - 3) = (-7, 1)$.
 $\vec{AD} = \vec{BC} = [-4, 4]$, zatem punkt A ma współrzędne $(-7 + 4, 1 - 4) = (-3, -3)$.

Częścią wspólną obu równoległoboków jest równoległobok $A'BCD'$.

Równoległobok ten możemy podzielić na dwa trójkąty o podstawie 8 i wysokości 2 oraz równoległobok o podstawie 8 i wysokości 2. Zatem jego pole:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 32$$

Uwaga. Pole to można też obliczyć ze wzoru Picka (s. 69): $P = 27 + \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 32$

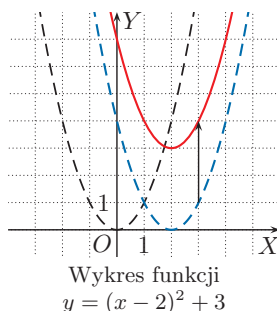
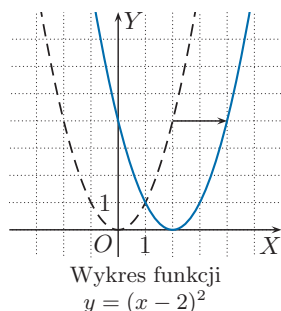
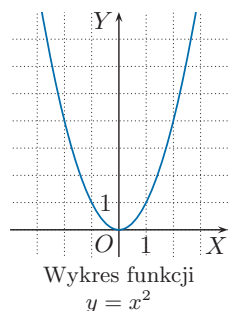


4.10. Przesuwanie wykresu o wektor

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$.

Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY .



Zauważ, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$ możemy otrzymać, przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ jednocześnie o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w górę (rysunek obok). Mówimy, że wykres funkcji został przesunięty o wektor $[2, 3]$ – wektor ten nazywamy **wektorem przesunięcia**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = x^2$, g i h . O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji h ?

a) $g(x) = (x - 1)^2$, $h(x) = (x - 1)^2 - 2$ b) $g(x) = (x + 3)^2$, $h(x) = (x + 3)^2 + 2$

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

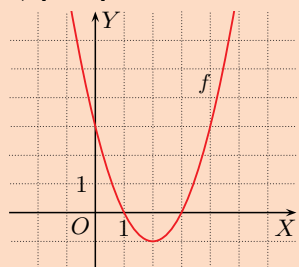
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f , przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ o odpowiedni wektor. Podaj ten wektor.

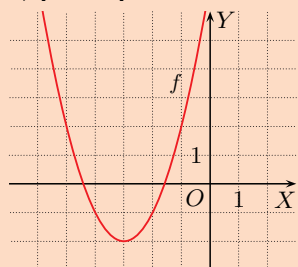
a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$ c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Ćwiczenie 2

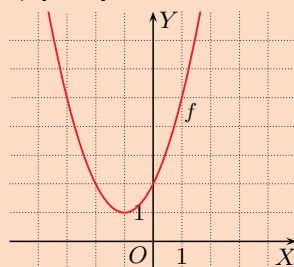
a) $[2, -1]$



b) $[-3, -2]$



c) $[-1, 1]$

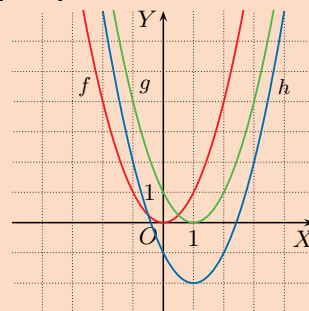


Uczeń:

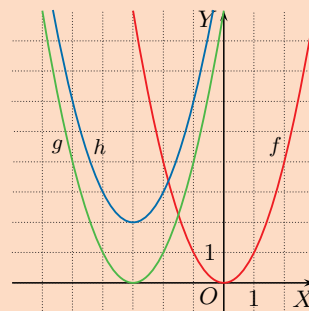
- szkicuje wykres funkcji $y = f(x - p) + q$,
- zapisuje wzór funkcji otrzymanej w wyniku danego przesunięcia.

Ćwiczenie 1

a) $[1, -2]$

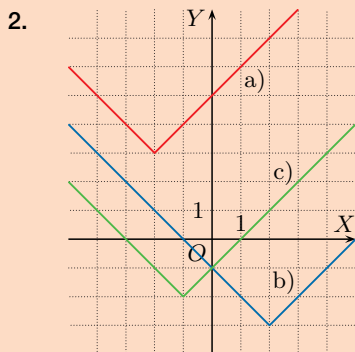


b) $[-3, 2]$



Odpowiedzi do zadań

- $f(x) = (x-2)^2 - 2$, $[2, -2]$
 - $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $[1, 2]$
 - $f(x) = (x+2)^2 - 1$, $[-2, -1]$



- brak miejsc zerowych,
 $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
- $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 5\}$,
 $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$
- $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$,
 $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$

- a) Pole trójkąta AEF:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

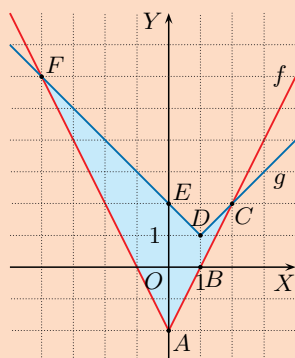
Pole trapezu ABDE:

$$P_2 = \frac{1}{2}(1+4) \cdot 1 = 2,5$$

Pole trójkąta BCD:

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 11$$



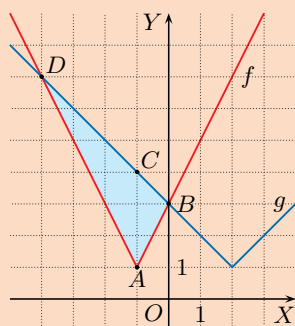
- Pole trójkąta ABC:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$$

Pole trójkąta ACD:

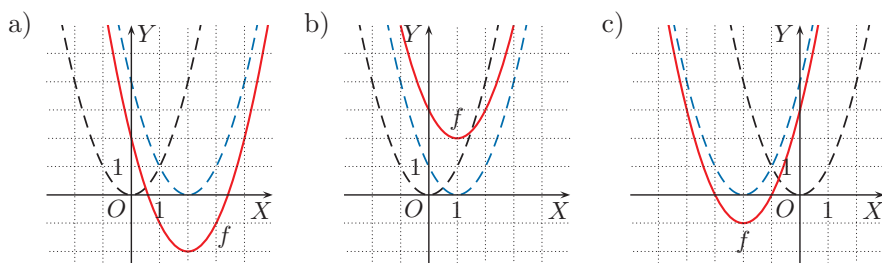
$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$$

$$P = P_1 + P_2 = 6$$



Zadania

- Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$. Podaj wzór funkcji f oraz wektor przesunięcia.



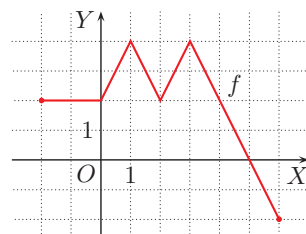
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

- $f(x) = |x+2| + 3$
- $f(x) = |x-2| - 3$
- $f(x) = |x+1| - 2$

- Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g .

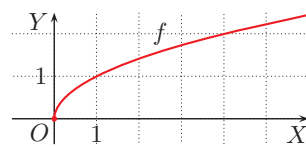
- $f(x) = |2x| - 2$ i $g(x) = |x-1| + 1$
- $f(x) = |2x+2| + 1$ i $g(x) = |x-2| + 1$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g , odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.



- $g(x) = f(x+2) - 2$
- $g(x) = f(x-1) + 2$
- $g(x) = f(x-2) - 4$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



- $g(x) = \sqrt{x-1} + 3$
- $g(x) = \sqrt{x+4} - 2$
- $g(x) = \sqrt{x+1} - 1$

- Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -7; -1 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle 5; 8 \rangle$. Wykres funkcji g powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{v}$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .

- $\vec{v} = [2, 3]$
- $\vec{v} = [-3, -5]$
- $\vec{v} = [-6\frac{1}{3}, 13\frac{2}{3}]$

- Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = |x+2| - 3$. Wyznacz wektor przesunięcia, jeśli:

- $g(x) = |x-3|$,
- $g(x) = |x| + 1$,
- $g(x) = |x+3| - 4$.

- $D_g = \langle -4; 4 \rangle$, $g(D_g) = \langle -4; 2 \rangle$, $g(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \{0\} \cup \langle 2; 4 \rangle$
 - $D_g = \langle -1; 7 \rangle$, $g(D_g) = \langle 0; 6 \rangle$, $g(x) \leq 0$ dla $x = 7$
 - $D_g = \langle 0; 8 \rangle$, $g(D_g) = \langle -6; 0 \rangle$, $g(x) \leq 0$ dla $x \in \langle 0; 8 \rangle$
- $D_g = \langle 1; \infty \rangle$, $g(D_g) = \langle 3; \infty \rangle$
 - $D_g = \langle -4; \infty \rangle$, $g(D_g) = \langle -2; \infty \rangle$
 - $D_g = \langle -1; \infty \rangle$, $g(D_g) = \langle -1; \infty \rangle$
- $D_g = \langle -5; 1 \rangle$, $g(D_g) = \langle 8; 11 \rangle$
 - $D_g = \langle -10; -4 \rangle$, $g(D_g) = \langle 0; 3 \rangle$
 - $D_g = \langle -13\frac{1}{3}; -7\frac{1}{3} \rangle$, $g(D_g) = \langle 18\frac{2}{3}; 21\frac{2}{3} \rangle$
- $g(x) = f(x-5) + 3$, zatem wektor przesunięcia: $[5, 3]$
 - $g(x) = f(x-2) + 4$, zatem wektor przesunięcia: $[2, 4]$
 - $g(x) = f(x+1) - 1$, zatem wektor przesunięcia: $[-1, -1]$

4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych

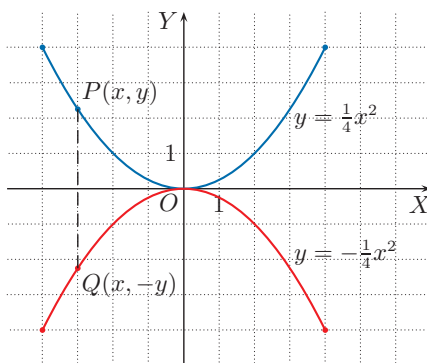
Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ określonych dla $x \in \langle -4; 4 \rangle$.

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ są symetryczne względem osi OX (jeden jest lustrzanym odbiciem drugiego) – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.

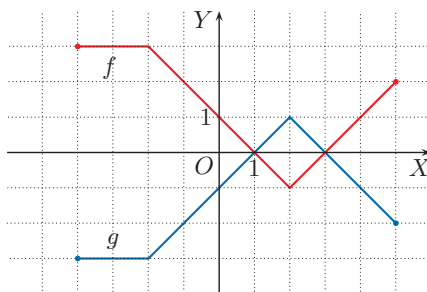


Twierdzenie

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości każdej z tych funkcji.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz podaj ich zbiory wartości.

a) $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x|$

b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$

Ćwiczenie 1

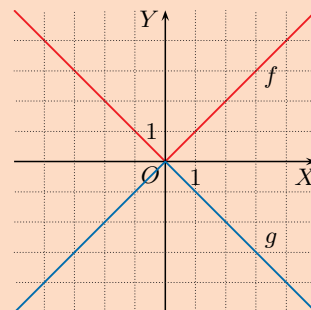
$f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$, $g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$

Uczeń:

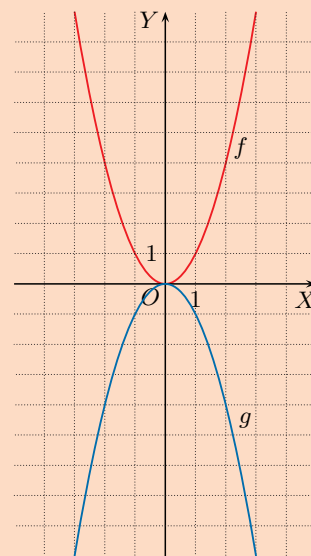
- szkicuje wykres funkcji $y = -f(x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$,
- szkicuje wykres funkcji $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$.

Ćwiczenie 2

a) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
 $g(D) = \langle -\infty; 0 \rangle$



b) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
 $g(D) = \langle -\infty; 0 \rangle$



Multiteka

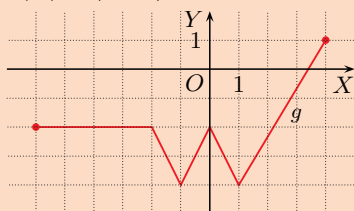
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OX
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OY

dla nauczyciel.pl | Kartkówka 4.11

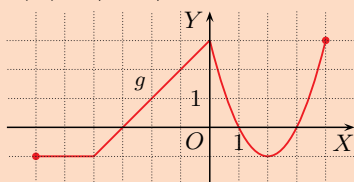
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

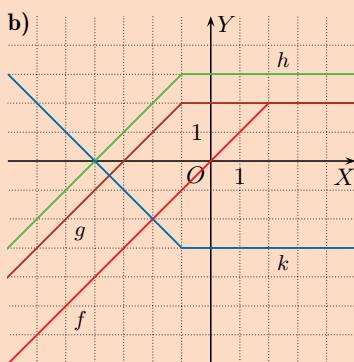
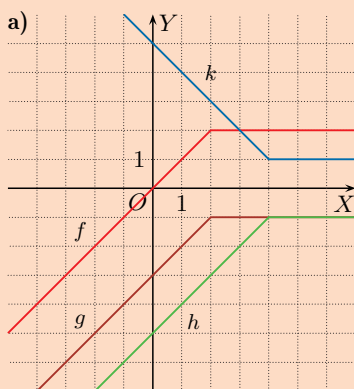
- a) $f(D) = \langle -1; 4 \rangle$,
 $g(D) = \langle -4; 1 \rangle$



- b) $f(D) = \langle -3; 1 \rangle$,
 $g(D) = \langle -1; 3 \rangle$

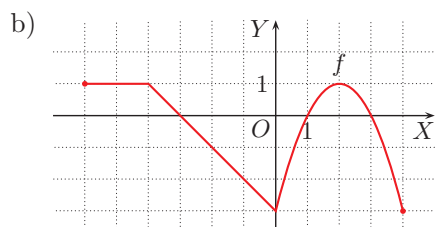
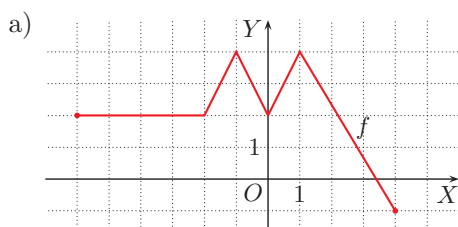


Ćwiczenie 4



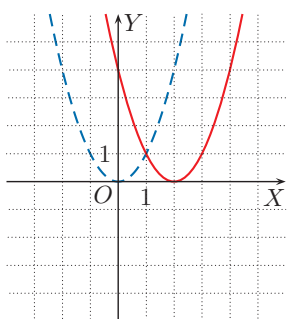
Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 4 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .

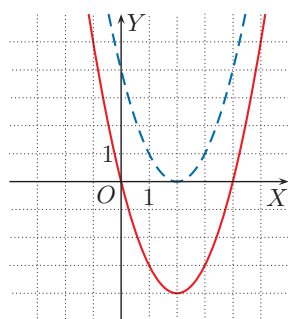


Przykład 2

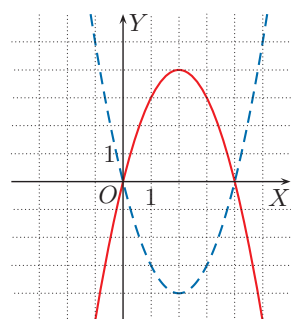
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie kolejno wykresy funkcji: $g(x) = f(x - 2)$, $h(x) = f(x - 2) - 4$, $k(x) = -[f(x - 2) - 4]$.



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $f(x) = x^2$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $g(x) = (x - 2)^2$



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $g(x) = (x - 2)^2$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $h(x) = (x - 2)^2 - 4$



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $h(x) = (x - 2)^2 - 4$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $k(x) = -[(x - 2)^2 - 4]$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \end{cases}$, a następnie kolejno wykresy funkcji:

a) $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x - 2) - 3$, $k(x) = -[f(x - 2) - 3]$,

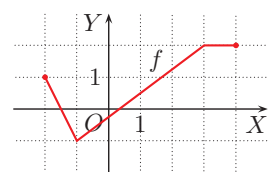
b) $g(x) = f(x + 3)$, $h(x) = f(x + 3) + 1$, $k(x) = -[f(x + 3) + 1]$.

Ćwiczenie 5

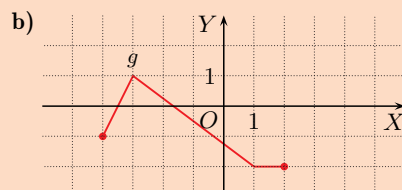
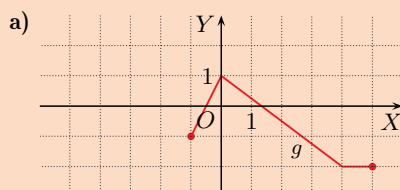
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = -f(x - 1)$

b) $g(x) = -f(x + 2)$



Ćwiczenie 5



Przykład 3

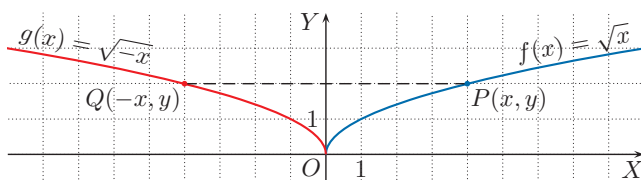
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $g(x) = \sqrt{-x}$.

Zauważmy, że:

$$g(-4) = f(4) = 2$$

$$g(-1) = f(1) = 1$$

$$g(-\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x, y)$ należącemu do wykresu funkcji f odpowiada punkt $Q(-x, y)$ należący do wykresu funkcji g .

Twierdzenie

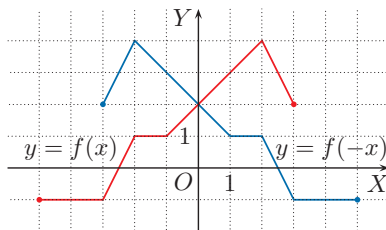
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .

Przykład 4

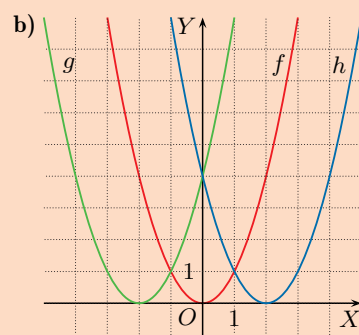
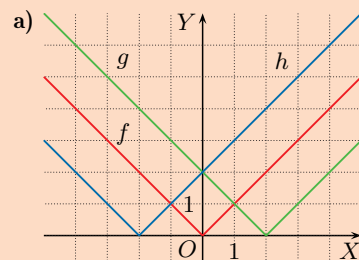
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ (kolor czerwony) oraz wykres funkcji $y = f(-x)$ (kolor niebieski).

Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -5; 3 \rangle$, a dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$.

Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają takie same zbiory wartości.



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie kolejno wykresy funkcji g i h .

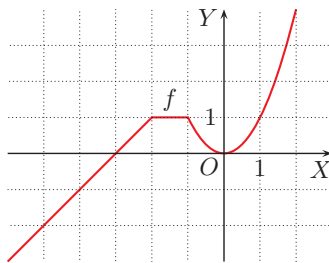
a) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x-2)$, $h(x) = f(-x-2)$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x+2)$, $h(x) = f(-x+2)$

Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

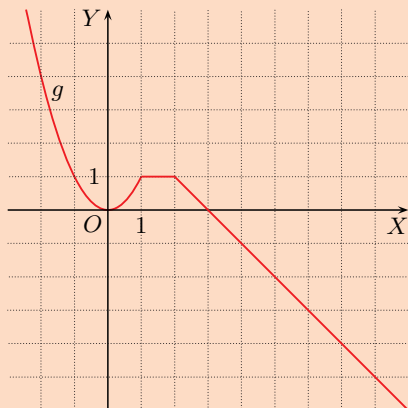
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle -2; -1 \rangle \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$



Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ i podaj jej wzór.

Ćwiczenie 7

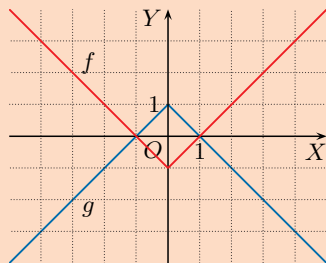
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; 2 \rangle \\ -x+3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



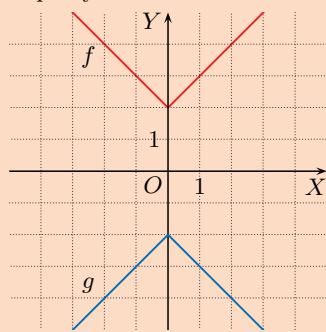
Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$
 b) $f(D_f) = \langle -2; 4 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -4; 2 \rangle$
 c) $f(D_f) = \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -1; 2 \rangle$

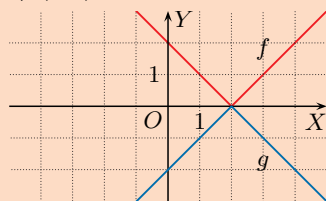
2. a) $(-1, 0), (1, 0)$



b) Nie mają punktów wspólnych.



- c) $(2, 0)$

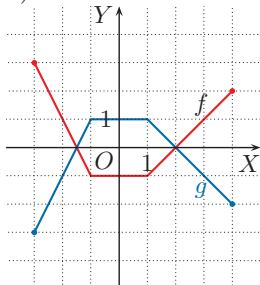


3. a) $D_f = \langle -4; 3 \rangle$, $D_g = \langle -3; 4 \rangle$
 b) $D_f = \langle -4; 3 \rangle$, $D_g = \langle -3; 4 \rangle$
 c) $D_f = \langle -3; 4 \rangle$, $D_g = \langle -4; 3 \rangle$

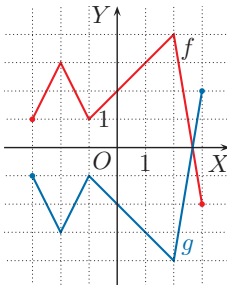
Zadania

1. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g .

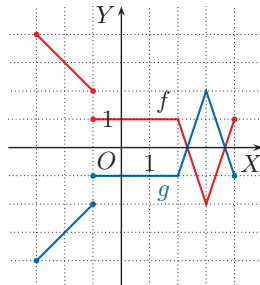
a)



b)



c)



2. Naszkicuj wykresy funkcji f i $g(x) = -f(x)$. Podaj punkty wspólne tych wykresów.

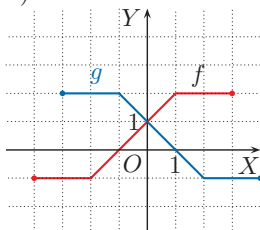
a) $f(x) = |x| - 1$

b) $f(x) = |x| + 2$

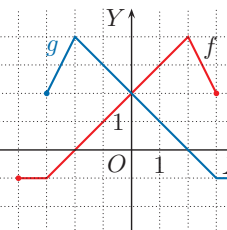
c) $f(x) = |x - 2|$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj dziedziny funkcji f i g .

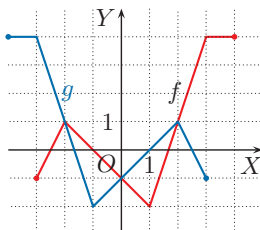
a)



b)



c)



4. Naszkicuj wykresy funkcji f oraz funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = -f(-x)$. Podaj wzory funkcji g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } -2 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x < -1 \\ |x| & \text{dla } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

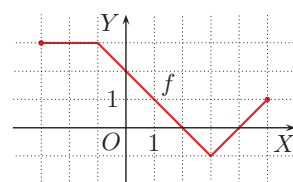
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = f(-x-2)+1$

b) $g(x) = f(-x+2)$

d) $g(x) = -f(-x+1)$



4. a) $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -2; 3 \rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -|x| & \text{dla } x \in \langle -1; 2 \rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ x & \text{dla } x \in \langle -3; 2 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -|x| & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

5. a) $D_g = \langle -5; 3 \rangle$, $g(D_g) = \langle -1; 3 \rangle$

b) $D_g = \langle -3; 5 \rangle$, $g(D_g) = \langle -1; 3 \rangle$

c) $D_g = \langle -7; 1 \rangle$, $g(D_g) = \langle 0; 4 \rangle$

d) $D_g = \langle -4; 4 \rangle$, $g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$

Warto zauważyć, że w zadaniu 5. mamy złożenie symetrii i przesunięcia:

b) $g(x) = f(-x+2) = f(-(x-2))$

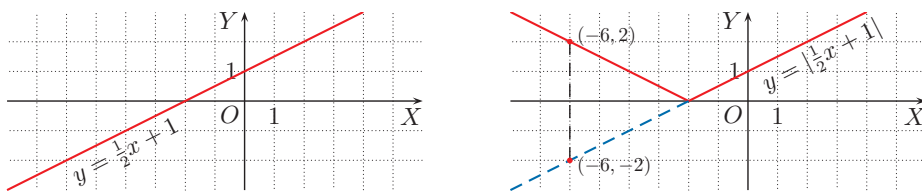
c) $g(x) = f(-x-2)+1 = f(-(x+2))+1$

d) $g(x) = -f(-x+1) = -f(-(x-1))$

*4.12. Inne przekształcenia wykresu

Przykład 1

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x + 1$ i $y = |\frac{1}{2}x + 1|$.



Zwróć uwagę, że punktowi $(-6, -2)$ należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x + 1$ odpowiada położony symetrycznie względem osi OX punkt $(-6, 2)$ należący do wykresu funkcji $y = |\frac{1}{2}x + 1|$.

Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie względem osi OX tej części wykresu funkcji f , która znajduje się pod osią OX , pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.

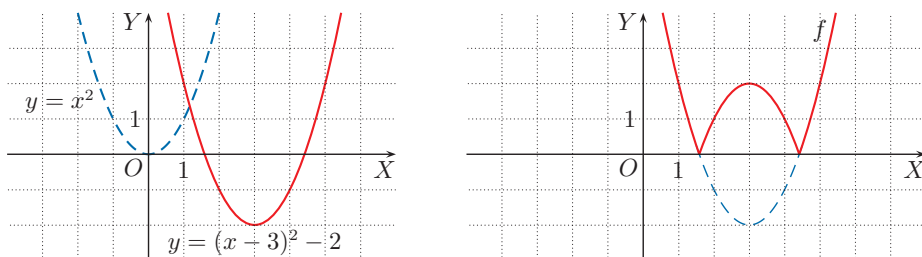
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$.

- a) $f(x) = x - 2$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$.



Po przesunięciu wykresu funkcji $y = x^2$ o wektor $[3, -2]$ otrzymamy wykres funkcji $y = (x - 3)^2 - 2$.

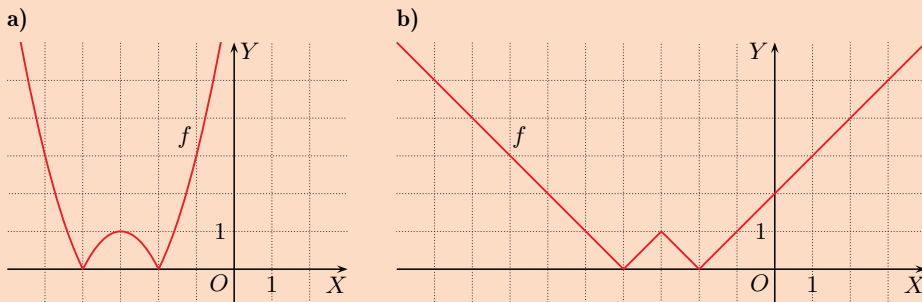
Następnie odbijamy symetrycznie względem osi OX fragment wykresu funkcji $y = (x - 3)^2 - 2$, który znajduje się pod osią OX , i otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = |(x + 3)^2 - 1|$ b) $f(x) = ||x + 3| - 1|$ c) $f(x) = ||x| - 2|$

Ćwiczenie 2

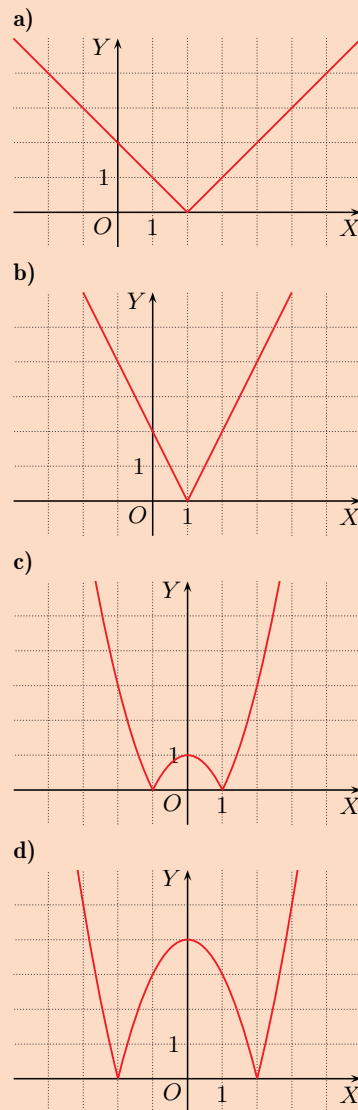


Uczeń:

- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$ i $y = f(|x|)$,
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykres funkcji będący efektem wykonania kilku operacji.

Ćwiczenie 1

wykresy $y = |f(x)|$



Multiteka

- Przekształcenia wykresów funkcji z wartością bezwzględną

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.12

Generator
testów i sprawdzianów

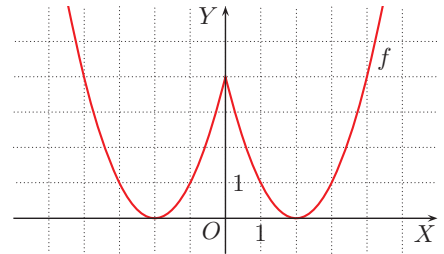
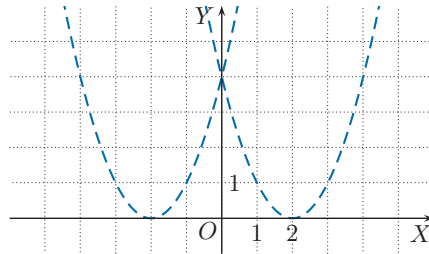
Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$.

Skorzystamy z tego, że:

$$(|x| - 2)^2 = \begin{cases} (-x - 2)^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ (x - 2)^2 & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \end{cases}$$

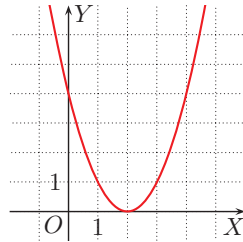
Zauważ, że $(-x - 2)^2 = (x + 2)^2$.



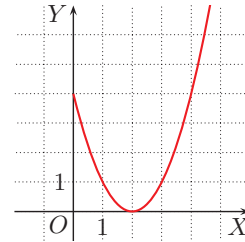
W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $y = (x + 2)^2$ oraz $y = (x - 2)^2$.

Odpowiednie fragmenty tych wykresów tworzą wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$.

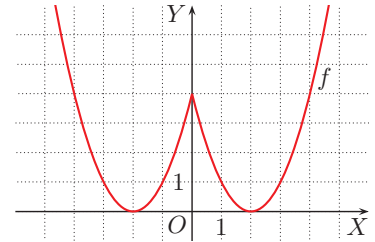
Zauważmy, że wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$ możemy też otrzymać w opisany poniżej sposób.



Szkicujemy wykres funkcji $y = (x - 2)^2$.



Dla $x \geq 0$ wykresy funkcji f i $y = (x - 2)^2$ się pokrywają.



Wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$ jest symetryczny względem osi OY .

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji f , korzystając z tego, że:

- dla $x \geq 0$ (należących do dziedziny) zachodzi równość $f(|x|) = f(x)$,
- wykres funkcji $y = f(|x|)$ jest symetryczny względem osi OY .

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f .

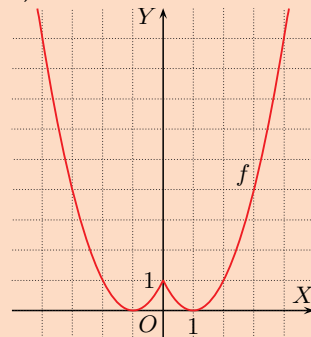
a) $f(x) = (|x| - 1)^2$

b) $f(x) = (|x| + 1)^2$

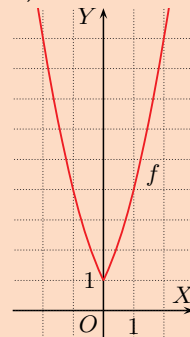
c) $f(x) = (|x| - 3)^2$

Ćwiczenie 3

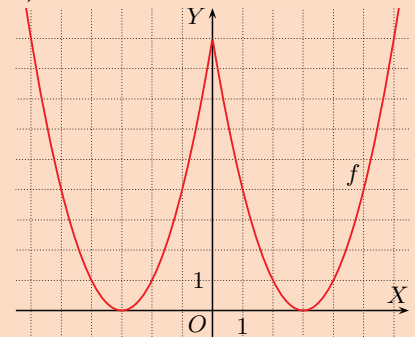
a)



b)



c)



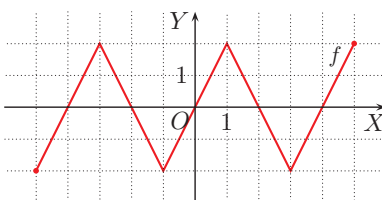
Zadania

1. Naskicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ b) $f(x) = 2|x| - 2$ c) $f(x) = -2|x| + 2$

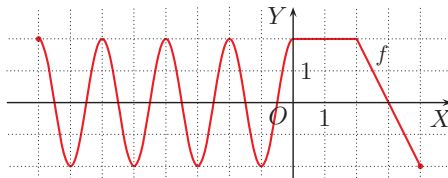
2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = 1$.

a) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(-|x|)$
b) $g(x) = f(|x|)$



3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -8; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji:

a) $y = f(|x|)$, b) $y = |f(|x|)|$.

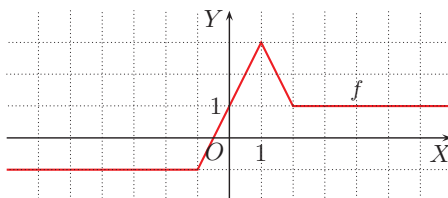


4. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = (|x| - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = (|x| + 2)^2$ c) $f(x) = (1 - |x|)^2 - 4$

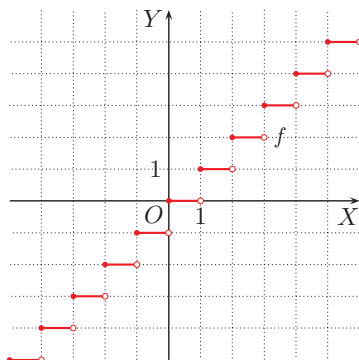
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = |f(x - 1) - 2|$
b) $g(x) = f(|x| - 1) - 2$



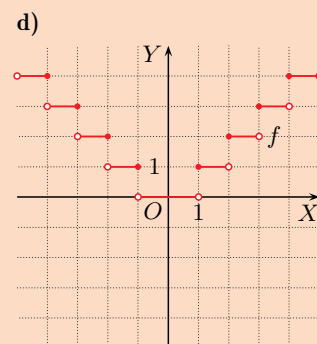
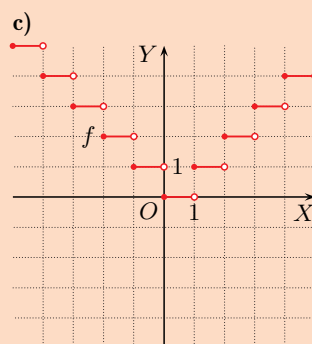
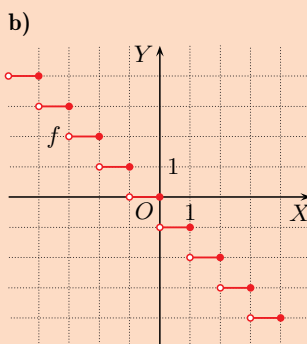
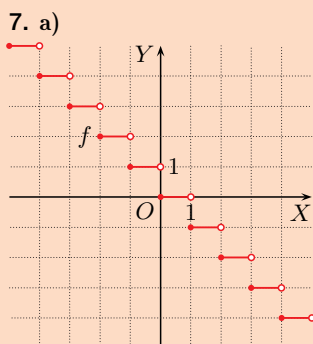
6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x (np. $[-3\frac{1}{2}] = -4$, $[-3] = -3$, $[0,22] = 0$, $[3,7] = 3$).

- a) Naskicuj wykres funkcji $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $g(x) = x - [x]$.
b) Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $g(|x|) = g(x)$?



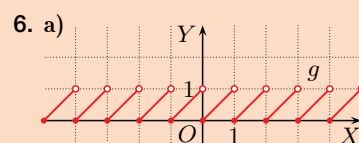
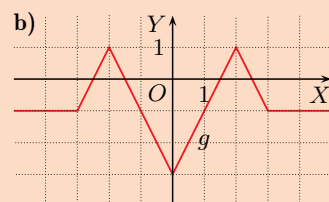
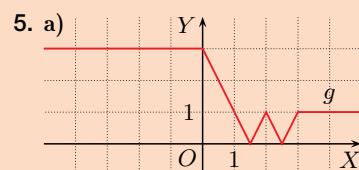
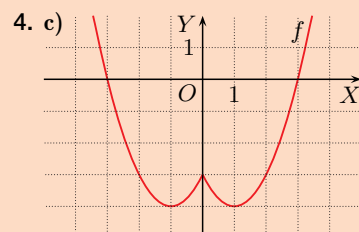
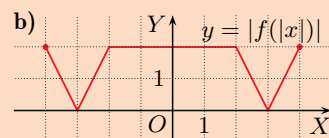
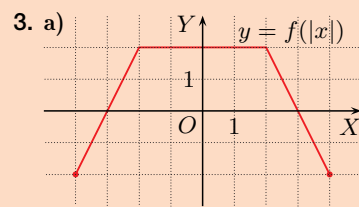
7. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = -[x]$ b) $f(x) = [-x]$ c) $f(x) = |[x]|$ d) $f(x) = [[x]]$



Odpowiedzi do zadań

2. a) 10 b) 6 c) 4



b) $x \in \{ \frac{1}{2}k : k \in \mathbf{Z}_- \} \cup \langle 0; \infty \rangle$

$\mathbf{Z}_-$ - zbiór liczb całkowitych ujemnych. Warto upewnić się, że uczniowie dobrze rozumieją ten zapis.

Uczeń:

- wyznacza współczynnik proporcjonalności odwrotnej,
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ i $x > 0$,
- stosuje proporcjonalność odwrotną do rozwiązywania zadań dotyczących np. drogi, prędkości i czasu.

Ćwiczenie 1

f : (1, 1),

g : (1, 4), (2, 2), (4, 1),

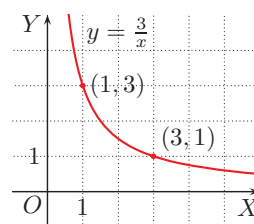
h : (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)

4.13. Proporcjonalność odwrotna

Przykład 1

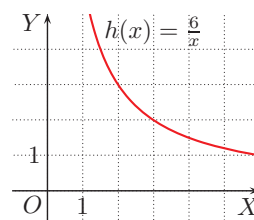
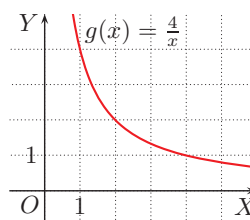
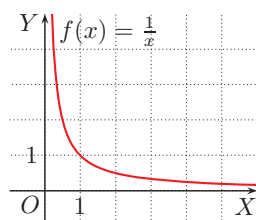
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x > 0$. Zwróć uwagę, że jeśli punkt (x, y) należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność $x \cdot y = 3$.

Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty (1, 3) i (3, 1).



Ćwiczenie 1

Funkcje f , g i h , których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla $x > 0$. Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.



Definicja

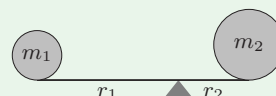
Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci $x \cdot y = a$.

Czy wiesz, że...

Dwie masy m_1 i m_2 umieszczone na równoważni w odległościach r_1 i r_2 od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

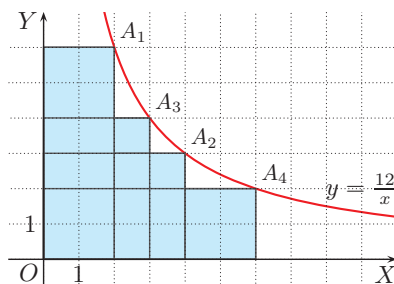


Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).

Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości x i y boków prostokąta o ustalonym polu P . Zachodzi wówczas zależność $x \cdot y = P$.

Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach x , y zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki A_1 , A_2 , A_3 i A_4 tych prostokątów należą do wykresu funkcji $y = \frac{12}{x}$. Ich współrzędne (x, y) spełniają zależność: $x \cdot y = 12$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, gdzie $x > 0$, i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji f ?

Zauważ, że jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich proporcjonalnie maleje druga.

Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

x – cena [zł]	4	5	6	8	12
y – liczba [kg]	6	4,8	4	3	2

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram x proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron y , które możemy kupić.

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne: $y = \frac{24}{x}$.

Ćwiczenie 3

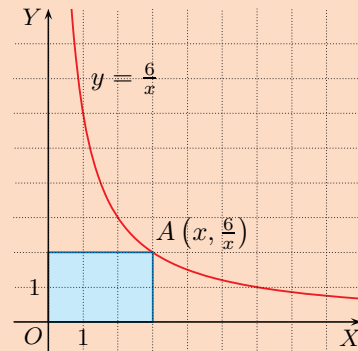
Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech x oznacza cenę za kilogram, a y – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

x [zł]	1,5	2	3	4,5	6
y [kg]	6	4,5	3	2	1,5

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{9}{x}$, gdzie $x > 0$, i zaznacz na nim punkty odpowiadające wartościom z tabeli.

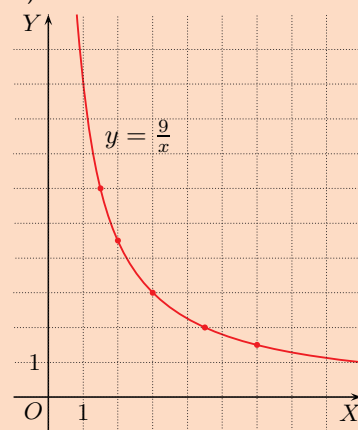
Ćwiczenie 2



Pole prostokąta $P = x \cdot \frac{6}{x} = 6$, czyli pole jest stałe i nie zależy od wyboru wierzchołka.

Ćwiczenie 3

b)



Odpowiedzi do zadań

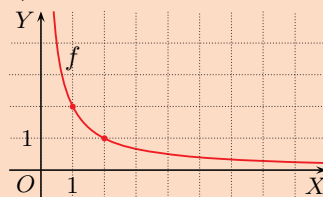
1. a) $y = \frac{8}{x}, x > 0$
b) $y = \frac{10}{x}, x > 0$

2. a) $k = 15$

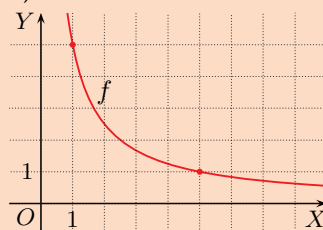
b)

x	1	2	3	4	5	6
y	15	7,5	5	3,75	3	2,5

3. a) 2



- b) 2



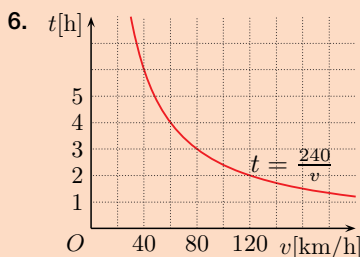
- c) 4 d) 6

5. a) 4 h

b) 3 h 20 min

c) 2,5 h

d) 2 h 24 min



Zadania

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naszkicuj jej wykres.

a)

x	1	2	2,5	4	5
y	8	4	3,2	2	1,6

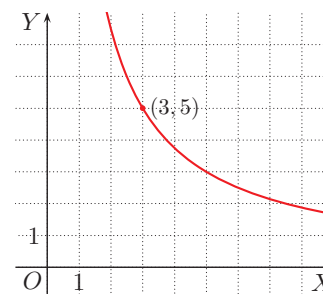
b)

x	1	2	2,5	4	5
y	10	5	4	2,5	2

2. Pewną stałą kwotę k zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną x w złotych za kilogram a liczbą kilogramów y , które można w tej cenie kupić.

a) Podaj wartość k .

b) Przedstaw za pomocą tabeli zależność między x i y dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



3. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x > 0$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = \frac{5}{x}$

c) $f(x) = \frac{8}{x}$

d) $f(x) = \frac{18}{x}$

4. Rozważmy n -kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku n -kąta od liczby boków dla $n \leq 12$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

Zależność między czasem t potrzebnym do przebycia drogi s ze średnią prędkością v wyraża się wzorem $t = \frac{s}{v}$.

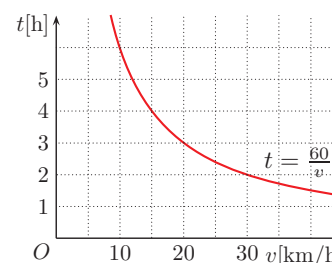
5. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:

a) 15 km/h,

c) 24 km/h,

b) 18 km/h,

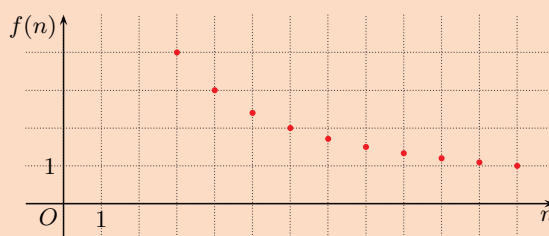
d) 25 km/h?



6. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na osiach układu współrzędnych i naszkicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.

4. n – liczba boków, $f(n)$ – długość boku, $D = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 12\}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	4	3	2,4	2	$\frac{12}{7}$	1,5	$\frac{4}{3}$	1,2	$\frac{12}{11}$	1



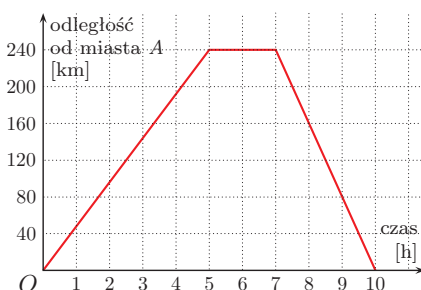
4.14. Zagadnienia uzupełniające

Odpowiedzi do zadań

■ Prędkość, droga, czas

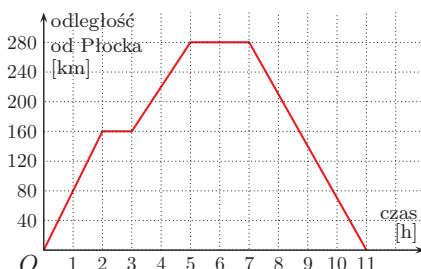
1. Przejazd samochodem z miasta *A* do odległego o 240 km miasta *B* i z powrotem zajął (razem z dwugodzinnym postojem) 10 godzin. Korzystając z wykresu, podaj średnią prędkość przejazdu:

- a) z miasta *B* do miasta *A*,
b) całej trasy bez postoju.



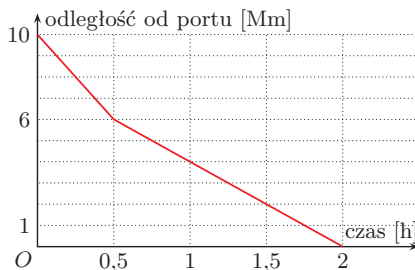
2. Na wykresie poniżej przedstawiono, jak zmieniała się odległość samochodu od Płocka podczas jazdy na trasie Płock–Gdańsk–Płock.

- a) Oblicz średnią prędkość samochodu bez uwzględniania postojów.
b) Jaka byłaby średnia prędkość na trasie z Gdańska do Płocka, gdyby postój w Gdańsku przedłużył się o godzinę, a cała wyprawa trwałaby $11\frac{1}{2}$ godzin?

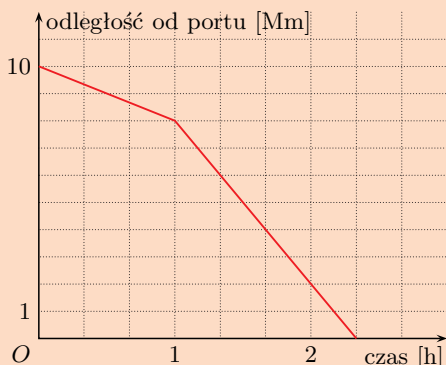


3. Jacht znajdujący się w odległości 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku z prędkością 8 węzłów. Po półgodzinie wiatr osłabł, a prędkość jachtu spadła o połowę. Na wykresie pokazano, jak zmieniała się odległość jachtu od portu w zależności od czasu.

Inny jacht, będący 10 mil morskich od portu, płynął w jego kierunku przez godzinę z prędkością 2 węzłów, a następnie – z prędkością 6 węzłów. Naszkicuj wykres przedstawiający zmiany odległości tego jachtu od portu w zależności od czasu. Po jakim czasie dotarł on do portu?



3. Jacht dotarł do portu po 2 godzinach 20 minutach.



1. a) $240 : 3 = 80$ [km/h]

b) $2 \cdot 240 : (5 + 3) = 60$ [km/h]

2. a) Długość całej drogi:

$2 \cdot 280 = 560$ [km]

Czas: $2 + 2 + 4 = 8$ [h]

Średnia prędkość:

$560 : 8 = 70$ [km/h]

b) Czas:

$11\frac{1}{2} - 3 - 1 - 2 - 2 = 3\frac{1}{2}$ [h]

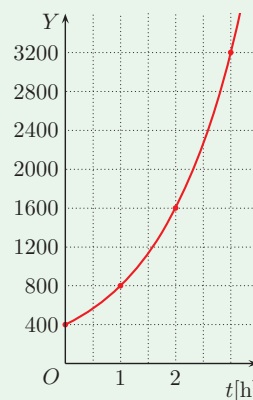
Średnia prędkość:

$280 : 3\frac{1}{2} = 80$ [km/h]

■ Wzrost wykładniczy i funkcja wykładnicza

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 400 bakterii, następnie stwierdzono, że ich liczba podwajała się w ciągu godziny. Funkcja $y = 400 \cdot 2^t$ (wykres obok) opisuje liczbę bakterii po upływie czasu t mierzonego w godzinach. Na przykład po 2 godzinach liczba bakterii wynosiła $400 \cdot 2^2 = 1600$, a po upływie 2 godzin i 30 minut liczba bakterii wzrosła do $400 \cdot 2^{2,5} \approx 2263$. W tabeli podano wartości funkcji $y = 400 \cdot 2^t$ dla wybranych argumentów.



t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y = 400 \cdot 2^t$	800	1131	1600	2263	3200	4525

W opisie doświadczenia wykorzystana została funkcja $f(t) = 2^t$. Funkcje opisane wzorem $y = a^x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in \mathbf{R}$, noszą nazwę **funkcji wykładniczych**.

4. Liczba bakterii podwaja się w ciągu pół godziny, czyli w ciągu godziny zwiększa się czterokrotnie. Zatem:

$$y = 600 \cdot 4^t$$

5. $24000 = 1500 \cdot a^8$
 $a^8 = 16$
 $a = \sqrt[4]{2}$
 $96000 = 1500 \cdot (\sqrt[4]{2})^t$
 $2^{\frac{1}{4}t} = 64$
 $t = 12$

Liczebność kolonii bakterii będzie równa 90000 po 12 godzinach.

- D** 4. Podczas pewnego doświadczenia liczba bakterii, których początkowo było 600, podwajała się w ciągu pół godziny. Uzasadnij, że funkcja $y = 600 \cdot 4^t$ opisuje liczbę bakterii w zależności od czasu t mierzonego w godzinach i uzupełnij tabelę.

Czas t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Liczba bakterii y	2400	4800	9600	19 200	38 400	76 800	153 600	307 200

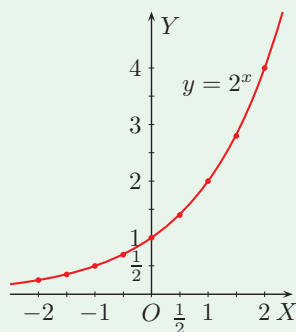
5. W pewnym doświadczeniu badano liczebność kolonii bakterii. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Wyznacz stałą a , jeśli początkowo było 1500 bakterii, a po 8 godzinach ich liczba wzrosła do 24 000. Po jakim czasie liczebność kolonii bakterii będzie równa 96 000?

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$. Zaznaczone zostały punkty odpowiadające danym z tabeli (wartości funkcji podano z dokładnością do 0,01), które połączono krzywą, jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
2^x	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

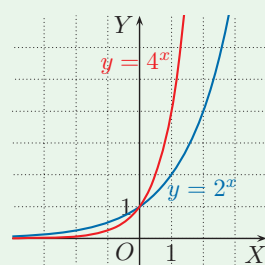


6. Podaj wartość funkcji $y = 2^x$ dla argumentu:

- a) 3, b) 4, c) 10, d) -10.

Wykresy funkcji $y = 2^x$ i $y = 4^x$ dla porównania umieszczono w tym samym układzie współrzędnych.

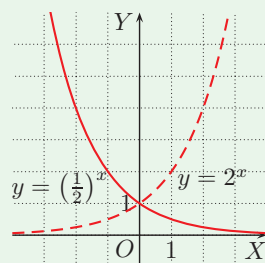
Zauważmy, że dowolna funkcja określona wzorem $y = a^x$, gdzie $a > 1$, jest funkcją rosnącą. W przypadku zjawisk opisywanych za pomocą takich funkcji mówimy o **wzroście wykładniczym**.



 7. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = 3^x$, a następnie naszkicuj jej wykres.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $y = (\frac{1}{2})^x$. Funkcja ta jest funkcją malejącą. Jej wykres możemy otrzymać przez symetryczne odbicie względem osi OY wykresu funkcji $y = 2^x$ (uzasadnij).

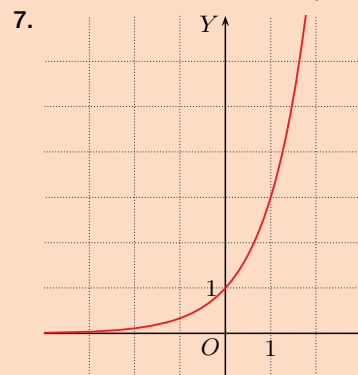
Funkcja $y = (\frac{1}{2})^x$ wykorzystywana jest przy opisie zjawiska rozpadu promieniotwórczego.



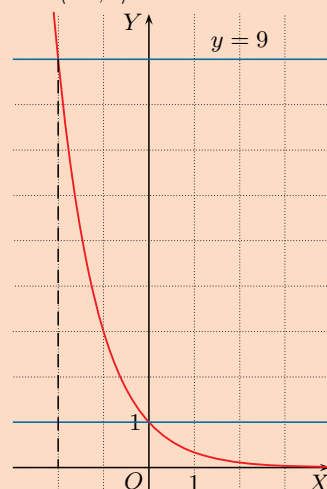
8. a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $1 \leq f(x) \leq 9$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 4$.

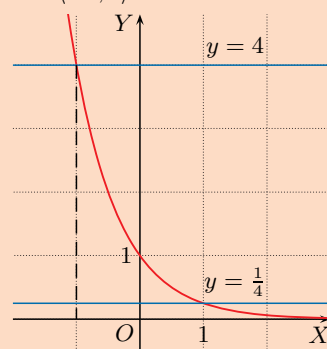
6. a) 8 b) 16 c) 1024 d) $\frac{1}{1024}$



8. a) $1 \leq f(x) \leq 9$ dla $x \in \langle -2; 0 \rangle$



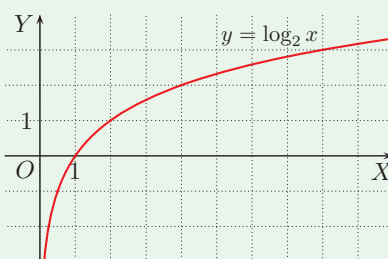
b) $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 4$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$



■ Funkcja logarytmiczna

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji opisanej wzorem $y = \log_2 x$. Zaznaczone punkty odpowiadają wartościom z tabeli.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3



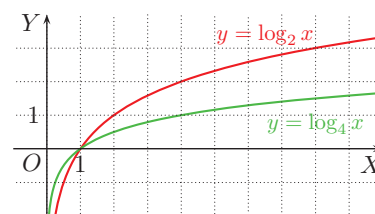
Funkcje opisane wzorem $y = \log_a x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in (0; \infty)$, noszą nazwę **funkcji logarytmicznych**.

9. a) 16 b) 32 c) 1024 d) $\sqrt{2}$

10. $y = \log_2 x$: np. (1, 0), (4, 2), (8, 3), (16, 4);
 $y = \log_4 x$: np. (1, 0), (16, 2), (64, 3), (256, 4)

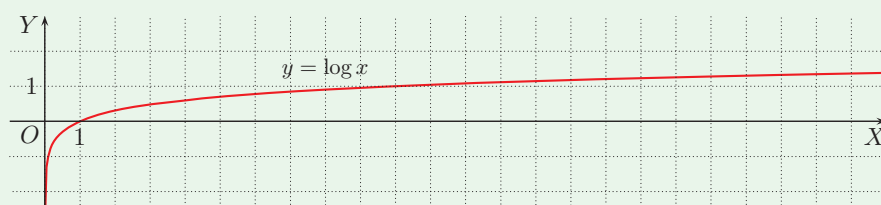
9. Dla jakiego argumentu x funkcja $y = \log_2 x$ przyjmuje wartość równą:
 a) 4, b) 5, c) 10, d) $\frac{1}{2}$?

10. Wykresy funkcji $y = \log_2 x$ i $y = \log_4 x$ umieszczono dla porównania w tym samym układzie współrzędnych (rysunek obok). Podaj po cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z tych funkcji.



11. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = \log_3 x$, a następnie naskicuj jej wykres.

Poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = \log x$.



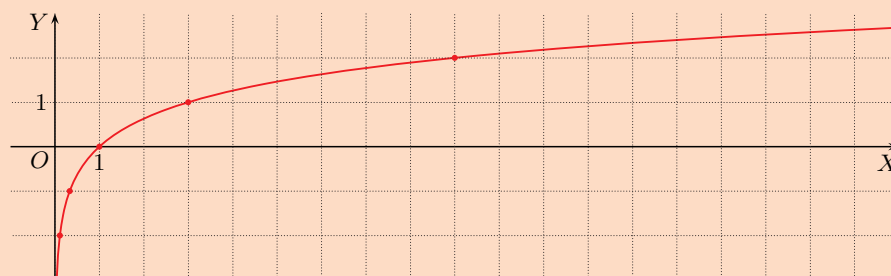
Zauważ, że funkcja $y = \log x$ (oraz dowolna funkcja $y = \log_a x$, gdzie $a > 1$) jest funkcją rosnącą. Jednak jest to wzrost bardzo powolny.

12. a) $x > 100$
 b) $x > 1000$
 c) $x > 10^6$
 d) $x > 10^{10}$

12. Dla jakich argumentów x funkcja $y = \log x$ osiąga wartości większe od:
 a) 2, b) 3, c) 6, d) 10?

11.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2



Zestawy powtórzeniowe

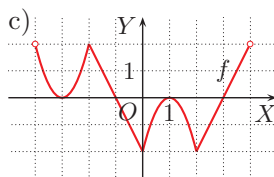
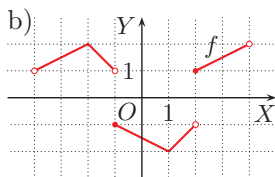
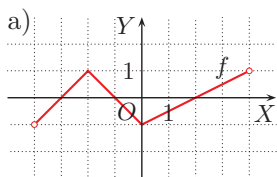
Zestaw I

- Funkcja f przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej iloczyn jej cyfr.
 - Jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość funkcji f ?
 - Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 12, a dla ilu 16?
 - Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartości parzyste?

- Naszkicuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = |x| - 1$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

a) $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ b) $X = (-\infty; 2)$ c) $X = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$

- Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności, miejsca zerowe i zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



- Naszkicuj wykres funkcji f , przesuwając wykres funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$ o wektor.

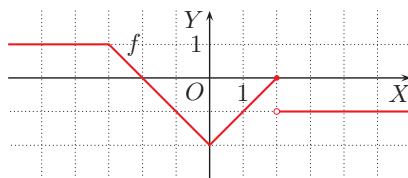
a) $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}|x + 3| + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}|x + 1| - 3$

- Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g .

a) $f(x) = |2x| - 1$, $g(x) = |x + 2|$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$, $g(x) = |x + 3| - 6$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem:

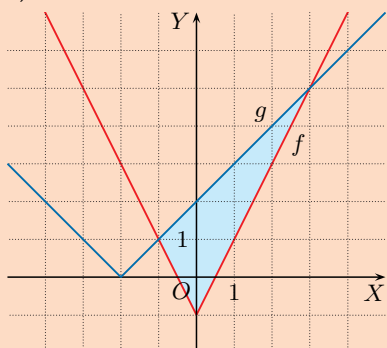
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| - 2 & \text{dla } x \in \langle -3; 2 \rangle \\ -1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



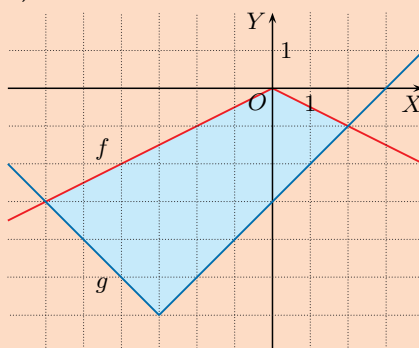
Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej wzór, a następnie odczytaj z wykresu rozwiązanie:

- równania $g(x) = 0$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$,
- równania $g(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 1$,
- równania $g(x) = -1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq -1$.

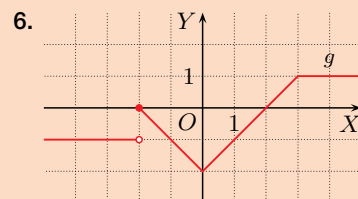
- a) $P = 6$



- b) $P = 21$



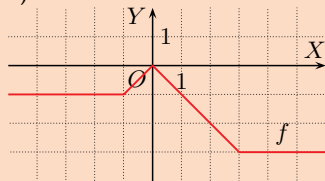
- a) $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 81$
b) 12 dla 4 argumentów, 16 dla 3 argumentów
c) 65
- a) $f(X) = \{-1, 0, 2, 3\}$
b) $f(X) = \langle -1; \infty \rangle$
c) $f(X) = \langle 0; 3 \rangle$
- a) f rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 0; 4 \rangle$, maleje w $\langle -2; 0 \rangle$, $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$, $f(x) > 0$ dla $x \in (-3; -1) \cup \langle 2; 4 \rangle$
b) f rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 1; 4 \rangle$, maleje w $\langle -2; 1 \rangle$, f nie przyjmuje wartości 0, $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -1) \cup \langle 2; 4 \rangle$
c) f rośnie w $\langle -3; -2 \rangle$, w $\langle 0; 1 \rangle$ i w $\langle 2; 4 \rangle$, maleje w $(-4; -3)$, w $\langle -2; 0 \rangle$ i w $\langle 1; 2 \rangle$, $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$, $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -3) \cup \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$
- Wektor przesunięcia:
a) $[2, -1]$ b) $[-3, 2]$
c) $[-1, -3]$



- $g(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$, $g(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -2; 2 \rangle$
- $g(x) = 1$ dla $x \in (3; \infty)$, $g(x) \leq 1$ dla $x \in \mathbf{R}$
- $g(x) = -1$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1, 1\}$, $g(x) \leq -1$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 1 \rangle$

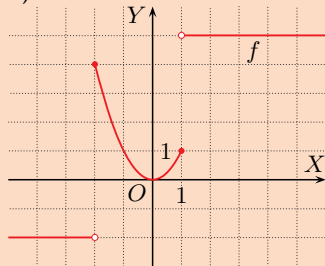
1. a) $D_g = (-2; 5)$
 b) $D_g = \langle 0; 7 \rangle$
 c) $D_g = (-7; 0)$
 d) $D_g = \langle -1; 6 \rangle$

2. a)



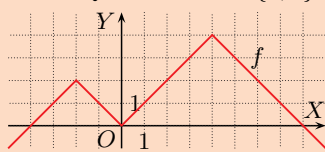
$g(D_g) = \langle -3; 0 \rangle$,
 stała w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$,
 rośnie w $\langle -1; 0 \rangle$,
 maleje w $\langle 0; 3 \rangle$

b)

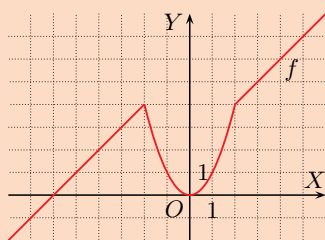


$g(D_g) = \{-2\} \cup \langle 0; 4 \rangle \cup \{5\}$,
 stała w $(-\infty; -2)$ i w $(1; \infty)$,
 rośnie w $\langle 0; 1 \rangle$,
 maleje w $\langle -2; 0 \rangle$

3. a) $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$,
 miejsca zerowe: $-3, \frac{1}{2}, 1$
 b) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$,
 miejsca zerowe: $-2, -\frac{3}{2}, 2$
 c) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$,
 miejsca zerowe: $-2, \frac{3}{2}, 2$
4. a) Miejsca zerowe: $-4, 2, 5$
 b) Miejsca zerowe: $-5, -2, 4$
5. a) 1 rozwiązanie dla $m = 4$,
 3 rozwiązania dla $m \in \{0, 2\}$



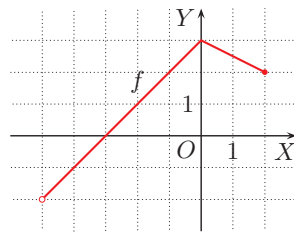
- b) 1 rozwiązanie dla
 $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$,
 3 rozwiązania dla $m \in (0; 4)$



Zestaw II

1. Dziedziną funkcji f (rysunek obok) jest przedział $(-5; 2)$. Podaj dziedzinę i naskicuj wykres funkcji g .

- a) $g(x) = f(x - 3)$ c) $g(x) = -f(x + 2)$
 b) $g(x) = f(2 - x)$ d) $g(x) = -f(1 - x)$



2. Podaj wzór i naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g .

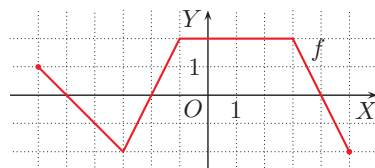
- a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -1; 3 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ -5 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

3. Liczby: $-1, -\frac{1}{2}, 3$ są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$. Podaj wzór i miejsca zerowe funkcji g .

- a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x + 1)$ c) $g(x) = f(1 - x)$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej miejsca zerowe.

- a) $g(x) = -f(-x)$ b) $g(x) = -|f(x)|$

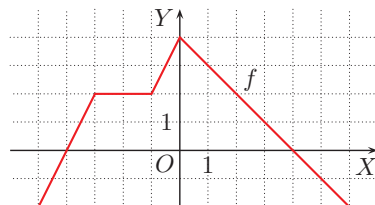


5. Naskicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie, a dla jakich – trzy rozwiązania?

- a) $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x < -2 \\ |x| & \text{dla } -2 \leq x \leq 4 \\ 8 - x & \text{dla } x > 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 & \text{dla } -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

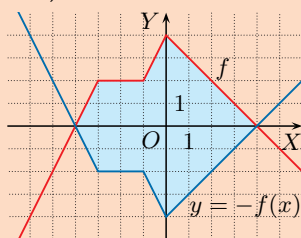
6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji:

- a) $y = f(x)$ i $y = -f(x)$,
 b) $y = f(-x)$ i $y = |x|$.

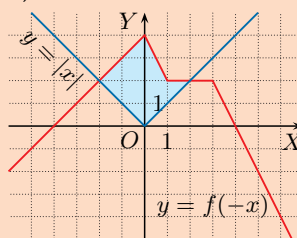


7. Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $(0, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$. Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji $y = \frac{4}{x}$. Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru a .

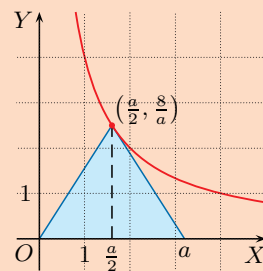
6. a) $P = 32$



- b) $P = 7$



7. Pierwsza współrzędna wierzchołka: $x = \frac{a}{2}$, druga współrzędna: $y = \frac{4}{\frac{a}{2}} = \frac{8}{a}$.
 Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{8}{a} = 4$, zatem pole jest stałe i nie zależy od wyboru parametru a .



**Przykład 1**

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Miejsca zerowe funkcji f możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$$-2x - 2 = 0, \text{ skąd } x = -1, \text{ ale } -1 \notin (-\infty; -2)$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 0, \text{ skąd } x = -6, \text{ ale } -6 \notin \langle -2; 2)$$

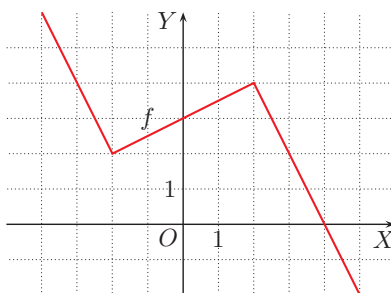
$$-2x + 8 = 0, \text{ skąd } x = 4 \in \langle 2; \infty)$$

Liczby -1 i -6 nie są miejscami zerowymi funkcji f , jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4 .

Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

- Możemy też naszkicować wykres funkcji f i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

Odpowiedź: B

**Przykład 2**

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Suma miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x)$ jest równa:

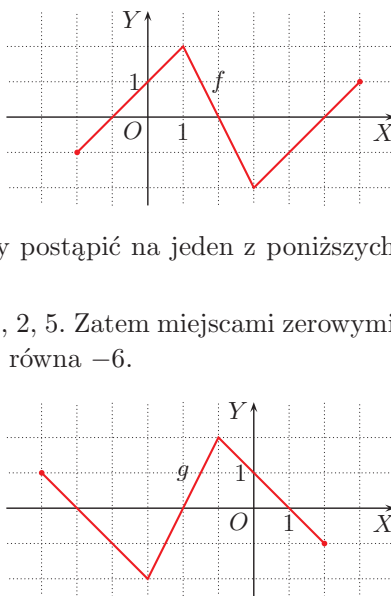
A. -2 , B. -4 , C. -6 , D. -8 .

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -1 , 2 , 5 . Zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: 1 , -2 , -5 . Ich suma jest równa -6 .

- Możemy też naszkicować wykres funkcji g i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby: -5 , -2 i 1 . Ich suma jest równa -6 .

Odpowiedź: C





Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. $f(129) = f(4 \cdot 32 + 1) = 1$

- A. $f(29) = 1$
B. $f(59) = 3$
C. $f(89) = 1$
D. $f(149) = 1$

4. $f(x) = x + |x|$

- A. $f(-2) = 0$
B. $f(4) = 8 \neq 6$
C. $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$
D. $f(-4) = 0 \neq -8$

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech $a = f(129)$. Wówczas:

- A. $a > f(29)$, B. $a = f(59)$, C. $a < f(89)$, D. $a = f(149)$.

2. Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji:

- A. $y = x^2 + \frac{9}{4}$, B. $y = x^3 - \frac{27}{8}$, C. $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$, D. $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$.

3. Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem:

- A. $y = \sqrt{x+2}$, B. $y = x^2 - 2$, C. $y = x^3 + 8$, D. $y = \frac{2}{x} + 1$.

4. Do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ należy punkt:

- A. $A(-2, 0)$, B. $B(4, 6)$, C. $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, D. $D(-4, -8)$.

5. Do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$ należy punkt:

- A. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$, C. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$,
B. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$, D. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$.

6. Jeśli $D_f = \langle -5; 3 \rangle$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(-x+1)$ jest zbiór:

- A. $\langle -2; 6 \rangle$, B. $\langle -3; 5 \rangle$, C. $\langle -4; 4 \rangle$, D. $\langle -6; 2 \rangle$.

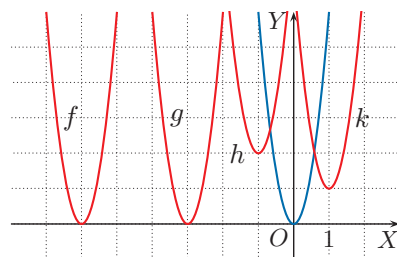
7. Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases}$$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. Wykresy funkcji: f , g , h , k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$. Zatem:

- A. $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$,
B. $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$,
C. $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$,
D. $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$.



9. Funkcja f ma pięć miejsc zerowych: $-5, -3, -1, 0, 2$. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji $y = -f(-x)$ jest równa:

- A. -9 , B. -7 , C. 7 , D. 9 .

5. $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

- A. $f(-2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} + 12 \neq -13\sqrt{3}$
B. $f(2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12 \neq 13\sqrt{3}$
C. $f(-2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} + 12 \neq -13\sqrt{3} + 12$
D. $f(2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12$

7. $|x| - 2 = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$

$\frac{1}{2}x + 2 = 0$ dla $x = -4 \notin \langle 4; \infty \rangle$

8. A. $f(x) = 6(x+6)^2 = 6(x^2 + 12x + 36)$

B. $g(x) = 6(x+3)^2 = 6(x^2 + 6x + 9)$

C. $h(x) = 6(x+1)^2 + 2 = 6(x^2 + 2x + 1) + 2$

D. $k(x) = 6(x-1)^2 + 1 = 6(x^2 - 2x + 1) + 1$

9. Miejsca zerowe: $-2, 0, 1, 3, 5$.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

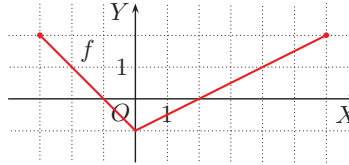
Wyznacz miejsca zerowe funkcji f danej wzorem $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

Zadanie 2 (2 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty: $(-6, 4)$, $(-3, 2)$, $(1, 2)$ i $(4, -5)$ należą do jej wykresu. Wyznacz wartość $f(-2\sqrt{2})$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -3; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres.



Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -3 , 2 i 4 . Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x + 6)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

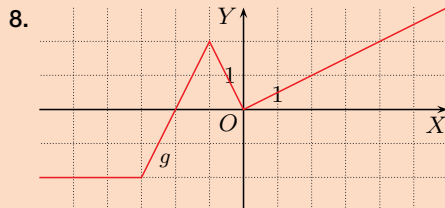
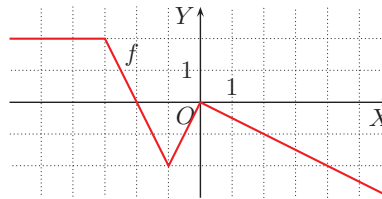
Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 2$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(x - 4)$. Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresami funkcji g i h .

Zadanie 7 (4 pkt)

Zbiór X jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 1$ i podaj jej miejsca zerowe.

Zadanie 8 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.



Funkcja g :

jest stała w $(-\infty; -3)$,

rośnie w $\langle -3; -1 \rangle$ i w $\langle 0; \infty \rangle$,

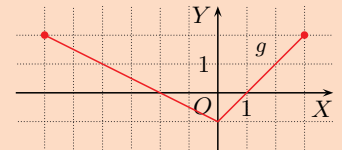
maleje w $\langle -1; 0 \rangle$,

$g(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \{0\}$

1. $-3x + 5 = 0$ dla $x = \frac{5}{3} \in (-\infty; 2)$
 $-5x + 3 = 0$ dla $x = \frac{3}{5} \notin (2; \infty)$
 Miejsca zerowe funkcji: $x = \frac{5}{3}$.

2. $f(x) = 2$ dla $x \in \langle -3; 1 \rangle$
 $-2\sqrt{2} \approx -2,83 \in \langle -3; 1 \rangle$,
 więc $f(-2\sqrt{2}) = 2$.

3. $D = \langle -6; 3 \rangle$



4. $-x - 2 = 0$ dla $x = -2 \in (-\infty; -1)$
 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ dla $x = 1 \in \langle -1; 3 \rangle$
 $x - 2 = 0$ dla $x = 2 \notin (3; \infty)$
 Miejsca zerowe funkcji: $-2, 1$.

5. Miejsca zerowe funkcji g :

$-x + 6 = -3$, $x = 9$,

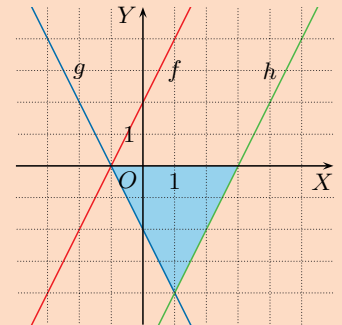
$-x + 6 = 2$, $x = 4$,

$-x + 6 = 4$, $x = 2$.

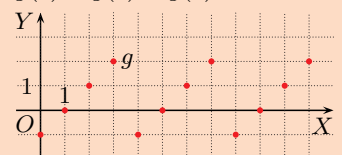
Suma miejsc zerowych:

$9 + 4 + 2 = 15$.

6. $P = 8$



7. $g(1) = g(5) = g(9) = 0$



1. Miejsca zerowe funkcji g :

$$-2 + 3\sqrt{2} \text{ i } 3\sqrt{2}$$

Suma miejsc zerowych:

$$6\sqrt{2} - 2 \approx 6,485$$

Należy zakodować: 648

2. $g(x) = |x - 2| - 6 + \sqrt{3}$

Miejsca zerowe funkcji g :

$$-4 + \sqrt{3} \text{ i } 8 - \sqrt{3}$$

$$8 - \sqrt{3} \approx 6,268$$

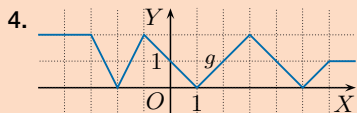
Należy zakodować: 626

3. $x - a + 9 = x - 8 \text{ i } -12 + b = 7$

$$a = 17 \text{ i } b = 19$$

$$a \cdot b = 323$$

Należy zakodować: 323



$$g(x) \geq 2 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup \{-1, 3\}$$

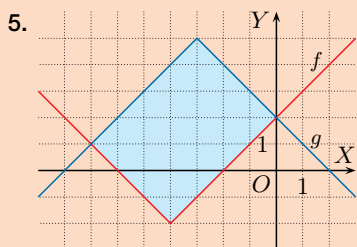
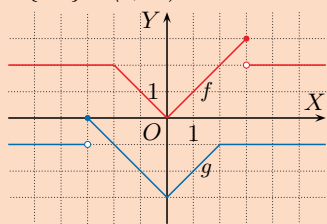


Figura ograniczona wykresami funkcji f i g jest prostokątem o bokach długości: $3\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$. Pole tego prostokąta: $P = 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 24$.

6. $g(x) = -1$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup \{-2\} \cup (2; \infty)$



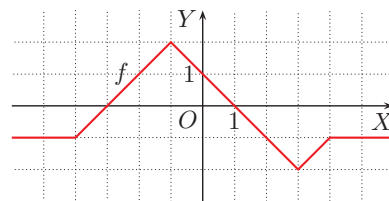
W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji:

$$g(x) = f(x - 3\sqrt{2}) - 1$$

Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku sumy liczb x_1 i x_2 .



Zadanie 2 (2 pkt)

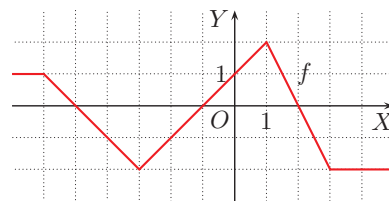
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = |x - 2| - 6$ o wektor $\vec{v} = [0, \sqrt{3}]$. Funkcja g ma dwa miejsca zerowe. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku większego spośród miejsc zerowych funkcji g .

Zadanie 3 (2 pkt)

Wykres funkcji $g(x) = 6(x - 8)^2 + 7$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = 6(x + 9)^2 - 12$ o wektor $[a, b]$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby $a \cdot b$.

Zadanie 4 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(-x)|$. Podaj rozwiązanie nierówności $g(x) \geq 2$.



Zadanie 5 (3 pkt)

W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji:

$$f(x) = |x + 4| - 2 \text{ i } g(x) = -|x + 3| + 5$$

Oblicz pole figury ograniczonej tymi wykresami.

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji f oraz $g(x) = f(-x) - 3$. Podaj rozwiązanie równania $g(x) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in \langle -2; 3 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty) \end{cases}$$

Zadanie 7 (4 pkt)

W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 2|x| - 2$ i $g(x) = (|x| - 1)^2$. Podaj rozwiązanie nierówności $2|x| - 2 \leq (|x| - 1)^2$.

7. $x \in (-\infty; -3) \cup \langle -1; 1 \rangle \cup (3; \infty)$

