



2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższym budynkiem na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosh wieży (342 m) wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony,
- wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące,
- opisuje słownie i symbolicznie dany zbiór,
- określa relację zawierania zbiorów,
- wypisuje podzbiory danego zbioru.

Komentarz 1

W matematyce zbiór jest pojęciem pierwotnym, tzn. takim, którego nie definiujemy. Intuicyjnie opisujemy zbiór jako grupę nieuporządkowanych obiektów.

Inne pojęcia pierwotne to na przykład: punkt i prosta.

Komentarz 2

Zbiór pusty jest zbiorem skończonym.

Ćwiczenie 1

- a) jest
- b) nie jest
- c) jest
- d) nie jest
- e) nie jest
- f) jest

Ćwiczenie 2

- a) są równe,
 $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- b) nie są równe,
 $B = \{0, 1, 2, 3\}$

2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

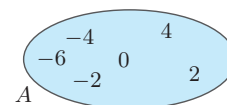
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbf{N}$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono sześćelementowy zbiór A . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- a) $2 \in A$
- b) $1 \in A$
- c) $\sqrt{16} \in A$
- d) $\sqrt{9} \in A$
- e) $-6 \notin A$
- f) $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisania zbioru jest podanie warunku, który muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leq 16\}$ oznacza, że $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ćwiczenie 2

Czy zbiory A i B są równe?

- a) $A = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leq 27\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leq 30\}$
- b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leq 9\}$

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Zapisujemy to: $A \subset B$. Mówimy również, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B . Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B (zbiór A nie jest zawarty w zbiorze B).

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zawierania: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

Multiteka

- Zbiory liczbowe
- Różnica zbiorów – rozwiązanie zadania
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)
- Działania na zbiorach – rozwiązanie zadania

dla^{nauczy}ciela.pl | Kartkówka 2.1

Generator
testów i sprawdzianów

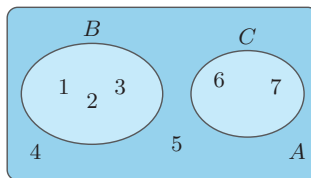
Przykład 1

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{6, 7\}.$$

Miedzy tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$



Ćwiczenie 3

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

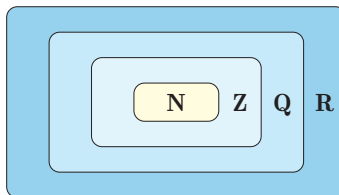
a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 \leq 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 = 12\}$, $B = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych mają miejsce zawierania:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$



Zadania

1. Zapisz zbiory A i B , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

a) $A = \{x \in \mathbf{N} : x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leq 36\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{Z} : -4 \leq x \leq -2\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \leq x^2 \leq 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 = 49\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 = 49\}$

2. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów?

a) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15

b) A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48

*c) A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 2 lub przez 5, B – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 3 lub przez 4

3. Liczba podzbiorów zbioru dwuelementowego $\{1, 2\}$ jest równa 2^2 . Podzbiorkami tymi są: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$. Wypisz wszystkie podzbiorki:

a) zbioru trzelementowego $\{1, 2, 3\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^3 ,

b) zbioru czteroelementowego $\{1, 2, 3, 4\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^4 .

4. Który ze zbiorów A , B ma więcej podzbiorów?

a) $A = \{n \in \mathbf{N} : 2 < n^3 < 125\}$, $B = \{n \in \mathbf{N} : n | 125\}$

b) $A = \{k \in \mathbf{Z} : 2 < k^2 < 15\}$, $B = \{k \in \mathbf{Z} : 1 < k^4 < 75\}$

3. a) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ – $8 = 2^3$ podzbiorów

b) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ – $16 = 2^4$ podzbiorów

4. a) $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 25, 125\}$, zatem zbiór B ma więcej podzbiorów.

b) $A = \{-3, -2, 2, 3\}$, $B = \{-2, 2\}$, zatem zbiór A ma więcej podzbiorów.

Ćwiczenie 3

a) $B \subset A$

b) $A \subset B$

c) $A \subset B$ i $B \subset A$,
czyli $A = B$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A \subset B$

b) $A = \{-4, -3, -2\}$,

$B = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$,

$A \subset B$

c) $A = \{-7, 7\}$, $B = \{7\}$,

$B \subset A$

2. Odpowiedź na pytanie nie zależy od tego, czy rozpatrujemy dzielniki naturalne, czy całkowite.

W obu podpunktach wypiszemy dzielniki naturalne.

a) tak, $A = \{1, 2, 3, 6\}$,

$B = \{1, 3, 5, 15\}$,

4 elementy

b) nie, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9,$

$12, 18, 36\}$, 9 elementów;

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16,$

$24, 48\}$, 10 elementów

c) nie

Liczb naturalnych mniejszych od 100 i podzielnych przez 2 jest 50, podzielnych przez 5 jest 20. Dwa razy policzyliśmy liczby podzielne przez 10, których jest 10. Zatem zbiór A ma $50 + 20 - 10 = 60$ elementów.

Liczb naturalnych mniejszych od 100 i podzielnych przez 3 jest 34, podzielnych przez 4 jest 25. Dwa razy policzyliśmy liczby podzielne przez 12, których jest 9. Zatem zbiór B ma $34 + 25 - 9 = 50$ elementów.

Uczeń:

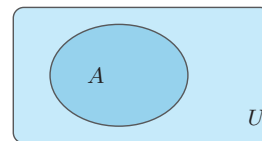
- posługuje się pojęciami: iloczyn, suma oraz różnica zbiorów,
- wyznacza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów,
- przedstawia na diagramie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach,
- wyznacza dopełnienie zbioru,
- formułuje i uzasadnia hipotezy dotyczące praw działań na zbiorach.

Komentarz

Iloczyn zbiorów jest nazywany również przekrojem zbiorów.

2.2. Działania na zbiorach

Na diagramie obok zbiór U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

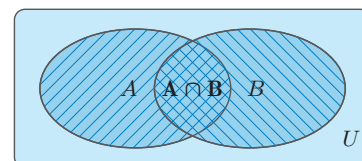


Definicja

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Na diagramie iloczyn $A \cap B$ jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany. Zauważmy, że iloczyn zbiorów jest ich częścią wspólną.



Przykład 1

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

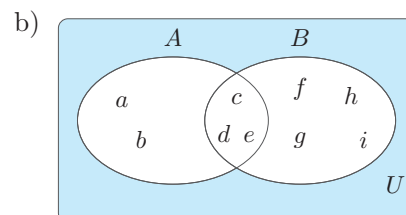
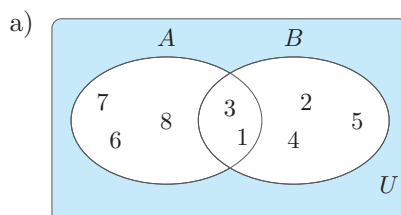
$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ćwiczenie 1

- a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cap B = \{1, 3\}$
- b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$,
 $A \cap B = \{c, d, e\}$

Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów: A , B oraz $A \cap B$.



Ćwiczenie 2

- a) $A \cap B = \{0, 6, 12, 18\}$
- b) $A \cap B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$
- c) $A \cap B = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

Ćwiczenie 2

Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .

- a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- b) $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$
- c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{\log 1, \log 10, \log 100, \log 10\,000, \log 100\,000\}$

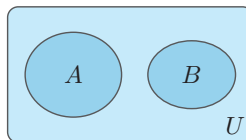
Multiteka

- Różnica zbiorów
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)
- Działania na zbiorach – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na diagramie obok przedstawiono rozłączne zbiory A i B .



Ćwiczenie 3

Czy zbiory X i Y są rozłączne?

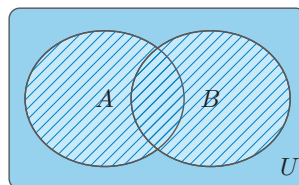
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów: A lub B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Na diagramie suma $A \cup B$ jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

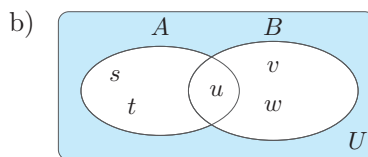
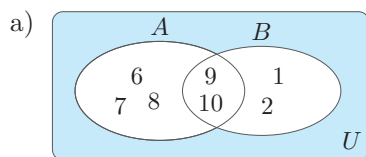


Przykład 2

Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$,
to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B .



Ćwiczenie 5

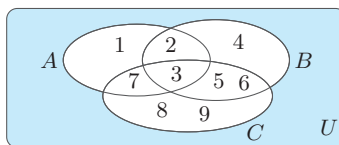
Wyznacz sumę zbiorów A i B .

- $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,
- $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.



Ćwiczenie 6

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap B = \{2, 3\}$,
 $A \cap C = \{3, 7\}$,
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}$,
 $A \cap B \cap C = \{3\}$

Ćwiczenie 3

- Zbiory X i Y są rozłączne.
- Zbiory X i Y nie są rozłączne.

Ćwiczenie 4

- $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $A \cup B = \{s, t, u, v, w\}$

Ćwiczenie 5

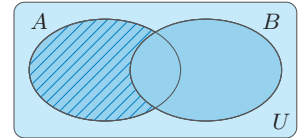
- $A \cup B = \{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
- $A = \{1, 2, 3, 6\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 8\}$,
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

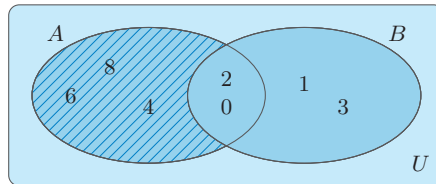
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Na diagramie różnica $A \setminus B$ jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

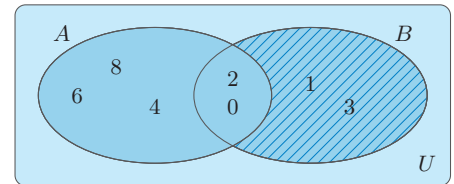


Przykład 3

Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3\}$.



$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 7

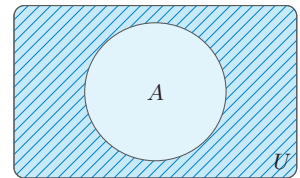
Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli:

- a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- b) $A = \{n \in \mathbb{N} : 8|n \text{ i } n \leq 50\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : 6|n \text{ i } n \leq 50\}$.

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i definiujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A :

$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A' .



Ćwiczenie 8

Rozpatrzmy zbiór $U = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ oraz jego podzbiory A i B , przy czym do zbioru A należą liczby parzyste, a do B liczby podzielne przez 3. Uzasadnij, że zachodzi równość:

$$\text{a) } (A \cap B)' = A' \cup B', \quad \text{b) } (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Podane obok równości zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B . Nazywane są **prawami De Morgana**.

Prawa De Morgana

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Ćwiczenie 7

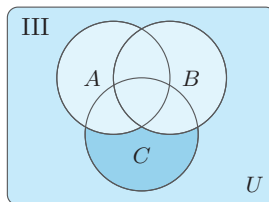
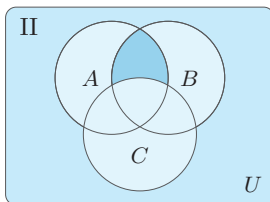
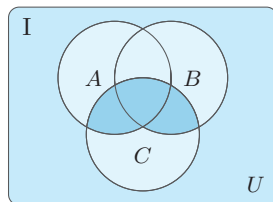
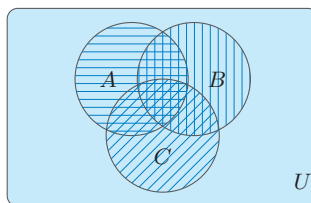
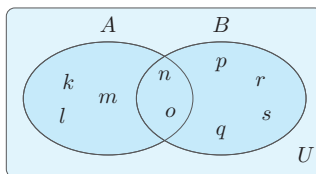
- a) $A \setminus B = \{7, 9, 11\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4, 6\}$
- b) $A = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$, $B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$,
 $A \setminus B = \{8, 16, 32, 40\}$, $B \setminus A = \{6, 12, 18, 30, 36, 42\}$

Ćwiczenie 8

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$
 $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
- a) $A \cap B = \{0, 6\}$, $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} = A' \cup B'$
- b) $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $(A \cup B)' = \{1, 5, 7\} = A' \cap B'$

Zadania

- Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
- Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy:
 - $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$,
 - $A = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{4}\}$,
 - $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}$.
- Na diagramie obok obszar potrójnie zakreślowany odpowiada zbiorowi $A \cap B \cap C$. Wyznacz ten zbiór, jeśli $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.
- A jest zbiorem spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiorem spółgłosek w słowie *geometria*, a C – zbiorem spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:
 - $A \cap B$,
 - $A \setminus B$,
 - $B \setminus A$,
 - $B \cap C$,
 - $B \setminus C$,
 - $C \setminus B$,
 - $A \cap B \cap C$,
 - $A \cup B \cup C$.
- Który z poniższych diagramów odpowiada zbiorowi:
 - $(A \cap B) \setminus C$,
 - $C \setminus (A \cup B)$,
 - $(A \cap C) \cup (B \cap C)?$



- Przyjmij, że żadne dwa spośród zbiorów: A, B, C nie są rozłączne i na oddzielnych diagramach przedstaw zbiory:
 - $A \cup (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 - $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 - $A \cap (B \setminus C)$ i $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
 - $B \setminus (A \cup C)$ i $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
 Porównaj otrzymane wyniki.

Czy wiesz, że...

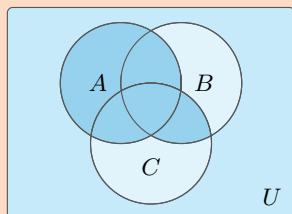
Diagramy ilustrujące zależności między zbiorami – takie jak użyte w tym temacie – noszą nazwę diagramów Venna na cześć angielskiego matematyka i filozofa Johna Venna (1834–1923).

Odpowiedzi do zadań

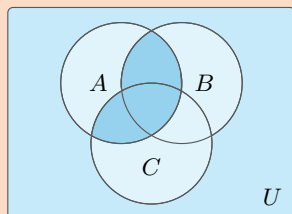
- $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$, $A \cap B = \{n, o\}$, $A \setminus B = \{k, l, m\}$, $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
- $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{-1, 1\}$, $A \setminus B = \{-2, 0, 2\}$, $B \setminus A = \{-3, 3\}$
 - $A \cup B = \{0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{\frac{1}{2}, 4\}$, $B \setminus A = \{0, \sqrt{2}\}$
 - $A \cup B = \mathbf{Z}$, $A \cap B = \mathbf{N}$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
- $A \cap B \cap C = \{5, 7\}$
- $A = \{k, m, r, t\}$, $B = \{g, m, r, t\}$, $C = \{b, g, l, r\}$
 - $A \cap B = \{m, r, t\}$
 - $A \setminus B = \{k\}$
 - $B \setminus A = \{g\}$
 - $B \cap C = \{g, r\}$
 - $B \setminus C = \{m, t\}$
 - $C \setminus B = \{b, l\}$
 - $A \cap B \cap C = \{r\}$
 - $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$
- II
 - III
 - I

- Miedzy zbiorami w poszczególnych podpunktach zachodzi równość.

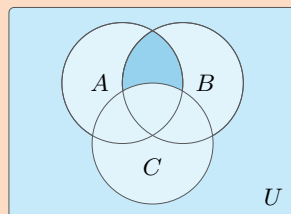
a) prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia



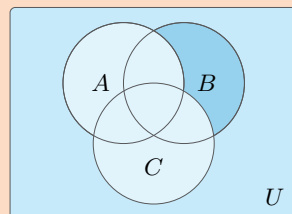
b) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania



c) prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania

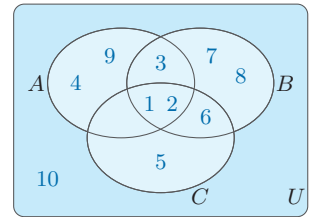


d) prawo rozdzielności odejmowania względem mnożenia



7. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$,
 $A \setminus C = \{3, 4, 9\}$,
 $B \setminus C = \{3, 7, 8\}$
b) $A \setminus (B \cap C) = \{3, 4, 9\}$,
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
c) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$,
 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 6\}$
d) $A' \cap B' = \{5, 10\}$,
 $A' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 $A' \cup B' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
8. a) 60 b) 170 c) 60

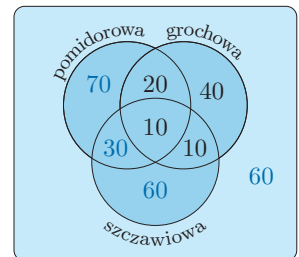
7. Dany jest zbiór $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Przerysuj przedstawiony obok diagram do zeszytu i umieść na nim liczby ze zbioru U , korzystając z podanych niżej informacji.
 $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$,
 $B \cap C = \{1, 2, 6\}$, $A \cap C = \{1, 2\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$.



Następnie wyznacz zbiory:

- a) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$,
b) $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cap C$,
c) $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$,
d) $A' \cap B'$, $A' \cup C'$, $A' \cup B' \cup C'$.
8. W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiowa i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprowadzono ankietę, której wyniki podano poniżej.

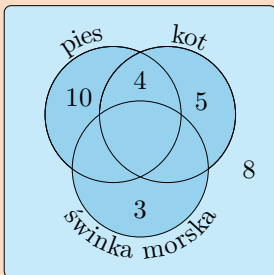
130 uczniów lubi zupę pomidorową,
110 uczniów lubi zupę szczawiową,
80 uczniów lubi zupę grochową,
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram. Podaj, ilu uczniów:

- a) nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,
b) lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę,
c) lubi dokładnie dwie zupy oferowane przez stołówkę.

9. Czterech uczniów ma psa i kota.



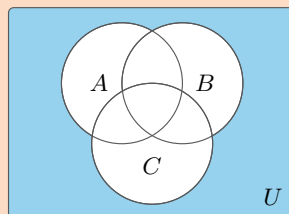
9. W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morskie, a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świnki morskie nie mają innych zwierząt. Podaj, ilu uczniów ma jednocześnie psa i kota.

10. Naszkicuj diagramy dla zbiorów:

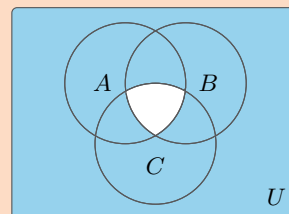
$$(A \cup B \cup C)', (A \cap B \cap C)', A' \cup B' \cup C', A' \cap B' \cap C'$$

Na ich podstawie sformułuj odpowiednie prawa rachunku zbiorów.

10. $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$



- $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$



Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe

Definicja

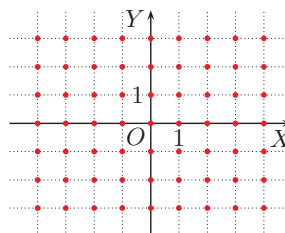
Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par (a, b) takich, że $a \in A$ oraz $b \in B$. Zbiór ten oznaczamy symbolem $A \times B$.

Nazwa „iloczyn kartezjański” upamiętnia francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes’a zwanego Kartezjuszem (1596–1650), autora sentencji „Myślę, więc jestem”. Wprowadził on do geometrii metodę współrzędnych. Obecnie stosujemy w matematyce wiele oznaczeń Kartezjusza, np. zmienne: $x, y, z, \dots$, współczynniki literowe: $a, b, c, \dots$, zapisywanie potęg w postaci: $a^7, x^2, x^4, \dots$.



Przykład 1

a) Zbiór $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ to zbiór wszystkich par (x, y) takich, że x i y są liczbami całkowitymi (rysunek obok). Nazywamy go zbiorem **punktów kratowych**.



b) Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, wówczas:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

1. Dane są zbiory: $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory: $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$.

Twierdzenie Picka

Pole wielokąta, którego wierzchołkami są punkty kratowe, można obliczyć, korzystając ze wzoru $P = \omega + \frac{b}{2} - 1$, gdzie ω jest liczbą punktów kratowych należących do wnętrza wielokąta, b – liczbą punktów kratowych należących do brzegu wielokąta.

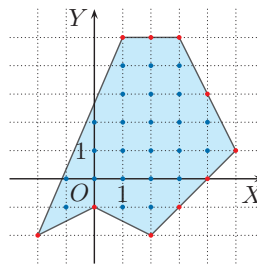
Przykład 2

Dla wielokąta przedstawionego na rysunku obok mamy: $\omega = 24$, $b = 10$, czyli pole $P = 24 + \frac{10}{2} - 1 = 28$.

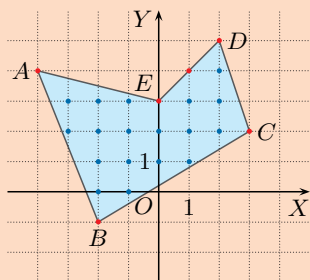
2. Korzystając z twierdzenia Picka, oblicz pole wielokąta $ABCDE$.

a) $A(-4, 4)$, $B(-2, -1)$, $C(3, 2)$, $D(2, 5)$, $E(0, 3)$

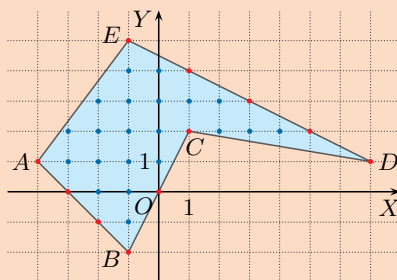
b) $A(-4, 1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, 2)$, $D(7, 1)$, $E(-1, 5)$



2. a) $\omega = 18$, $b = 6$, $P = 20$

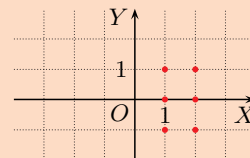


b) $\omega = 21$, $b = 11$, $P = 25,5$

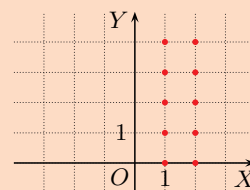


Odpowiedzi do zadań

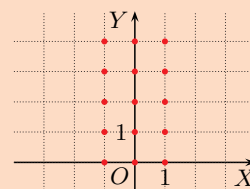
1. $A \times B$



$A \times C$



$B \times C$



Uczeń:

- rozróżnia pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, ograniczony, nieograniczony,
- zapisuje przedział i zaznacza go na osi liczbowej,
- odczytuje i zapisuje symbolem przedział zaznaczony na osi liczbowej,
- wyznacza przedział opisany podanymi nierównościami,
- wymienia liczby należące do przedziału, spełniające podane warunki.

Komentarz 1

Przedział liczbowy jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Komentarz 2

Warto uświadomić uczniom różnicę między zbiorem skończonym i ograniczonym. Przedziały liczbowe są zbiorami nieskończonymi.

Ćwiczenie 1

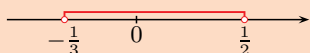
a) $-3 < x < 2$



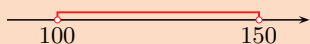
b) $0 < x < 4$



c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$



d) $100 < x < 150$



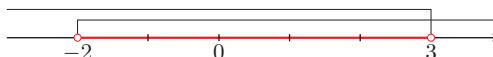
2.3. Przedziały

■ Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają jednocześnie dwa warunki (nierówności): $x > -2$ i $x < 3$.

Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3 , co zapisujemy symbolicznie: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:

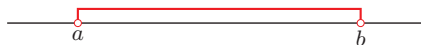


Liczby -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3 , co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczby -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

a) $(-3; 2)$ b) $(0; 4)$ c) $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $-2 \leq x \leq 3$.



Liczby -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $[-2; 3]$.

Multiteka

• Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

Generator
testów i sprawdzianów

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, zaś jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x \leq b$	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b \rangle$	$a < x \leq b$	

Długością każdego z przedziałów $(a; b)$, $\langle a; b \rangle$, $\langle a; b \rangle$, $\langle a; b \rangle$ nazywamy liczbę: $b - a$.

Ćwiczenie 2

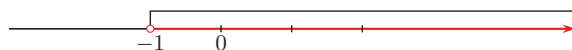
Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

- a) $\langle -1; 4 \rangle$ b) $\langle \frac{3}{2}; 5 \rangle$ c) $(-2; -\frac{1}{2})$ d) $\langle -60; 40 \rangle$

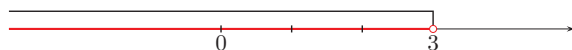
■ Przedziały nieograniczone

Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.

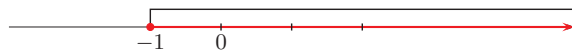


b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.



Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $\langle -1; \infty \rangle$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leq 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3 \rangle$.



Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

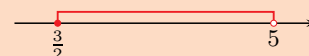
Ćwiczenie 2

a) $-1 \leq x \leq 4$



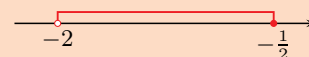
6 liczb całkowitych

b) $\frac{3}{2} \leq x < 5$



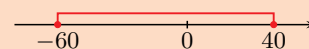
3 liczby całkowite

c) $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$



1 liczba całkowita

d) $-60 \leq x \leq 40$



101 liczb całkowitych

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; \infty)$	$x > a$	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; \infty)$	$x \geq a$	
przedział prawostronnie domknięty	$(-\infty; b]$	$x \leq b$	
przedział otwarty	$(-\infty; b)$	$x < b$	

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\langle -7; 0 \rangle$ b) $\langle \frac{1}{4}; \sqrt{2} \rangle$
c) $\langle 2\frac{1}{4}; \infty \rangle$ d) $(-\infty; -\frac{1}{3})$

2. a) $\langle -7; 2 \rangle$, $-7 < x \leq 2$
b) $\langle -50; 20 \rangle$, $-50 \leq x \leq 20$
c) $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
d) $\langle 3,14; \pi \rangle$, $3,14 \leq x < \pi$
e) $(-\infty; 10)$, $x < 10$
f) $(\sqrt{2}; \infty)$, $x > \sqrt{2}$
g) $\langle -\frac{1}{4}; \infty \rangle$, $x \geq -\frac{1}{4}$
h) $(-\infty; 2\pi)$, $x < 2\pi$

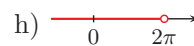
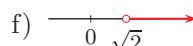
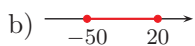
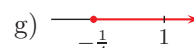
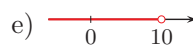
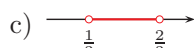
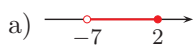
3. a) $(0; 4)$ b) $\langle -4; 0 \rangle$
c) $(2\frac{1}{2}; \infty)$ d) $(-\infty; -\sqrt{2})$

4. a) $(-1; 3)$ b) $(-4; 2)$
c) $\langle 1; 5 \rangle$ d) $\langle -\frac{7}{4}; \frac{5}{4} \rangle$

1. Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $-7 \leq x \leq 0$ b) $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$ c) $x \geq 2\frac{1}{4}$ d) $x < -\frac{1}{3}$

2. Zapisz symbolicznie poniższe przedziały i podaj warunki, które muszą spełniać należące do nich liczby.



3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:

- a) liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
b) liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
c) liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
d) liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.

4. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego:

- a) należą liczby odległe od liczby 1 o mniej niż 2,
b) należą liczby odległe od liczby -1 o mniej niż 3,
c) należą liczby odległe od liczby 3 o nie więcej niż 2,
d) należą liczby odległe od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:

a) $\langle -1; 4 \rangle$, b) $(0; 6)$, c) $\langle -\frac{2}{3}; \frac{5}{2} \rangle$, d) $\langle -\frac{25}{4}; -2 \rangle$.

5. a) $-1, 0, 1, 2, 3$ b) $1, 2, 3, 4, 5$ c) $0, 1, 2$ d) $-6, -5, -4, -3, -2$

6. Które spośród liczb: x, y, z należą do podanego przedziału?

- a) $(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3})$, $x = -\frac{8}{3}$, $y = -2\frac{3}{4}$, $z = 3\frac{2}{5}$
 b) $\langle -1; 2 \rangle$, $x = -1,01$, $y = -0,9$, $z = 1,9$

7. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?

- a) $\sqrt{x} \in \langle 1; 2 \rangle$ b) $\sqrt{x} \in \langle 2; 3 \rangle$ c) $\sqrt[3]{x} \in \langle 1; 2 \rangle$ d) $\sqrt[3]{x} \in \langle -2; 0 \rangle$

8. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.

- a) $A = (-1; 2)$, $B = \langle -1; 3 \rangle$ c) $A = (-\frac{7}{8}; \frac{15}{8})$, $B = \langle -\frac{6}{7}; \frac{13}{7} \rangle$
 b) $A = (-\infty; 7)$, $B = (2; 7)$ d) $A = (\frac{22}{7}; 7)$, $B = (\pi; \sqrt{50})$

9. Podaj najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w przedziale:

- a) $(-2\frac{1}{2}; 5)$, b) $(-\pi; 6)$, c) $\langle -3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4} \rangle$, d) $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{3} \rangle$.

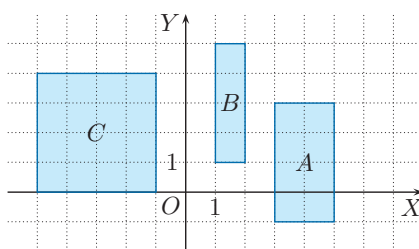
10. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:

- a) $\langle -3; 1 \rangle$, b) $\langle -2; 3 \rangle$, c) $\langle \sqrt{2}; 4\sqrt{2} \rangle$, d) $\langle 1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4} \rangle$.

11. Dla jakich wartości parametru p przedziały $\langle p; p+1 \rangle$ oraz $\langle 2p; 2p+1 \rangle$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

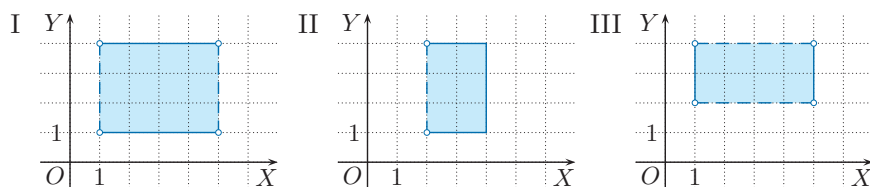
12. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in \langle 3; 5 \rangle$ i $y \in \langle -1; 3 \rangle$. Zapisz warunki, które spełniają punkty należące do:

- a) prostokąta B ,
 b) kwadratu C .



13. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono zbiór punktów (x, y) , których współrzędne spełniają warunki:

- a) $x \in (2; 4)$, $y \in \langle 1; 4 \rangle$, b) $x \in \langle 1; 5 \rangle$, $y \in (2; 4)$, c) $x \in (1; 5)$, $y \in \langle 1; 4 \rangle$?



Uwaga. Linia przerywana na rysunku oznacza, że leżące na niej punkty nie należą do zbioru.

7. a) $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$, czyli $1 \leq x \leq 4$, zatem warunek spełniają 4 liczby całkowite.
 b) $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$, czyli $4 \leq x \leq 9$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.
 c) $1 < \sqrt[3]{x} < 2$, czyli $1 < x < 8$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.
 d) $-2 \leq \sqrt[3]{x} < 0$, czyli $-8 \leq x < 0$, zatem warunek spełnia 8 liczb całkowitych.

6. a) z b) y

8. a) $A \subset B$

b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.

c) $B \subset A$ d) $A \subset B$

9. a) $\langle -2; 5 \rangle$ b) $\langle -3; 5 \rangle$

c) $\langle -3; 2 \rangle$ d) $\langle -1; 1 \rangle$

10. a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) 2

11. $p = -1$ lub $p = 1$

12. a) $x \in \langle 1; 2 \rangle$ i $y \in \langle 1; 5 \rangle$

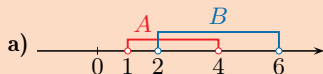
b) $x \in \langle -5; -1 \rangle$ i $y \in \langle 0; 4 \rangle$

13. a) II b) III c) I

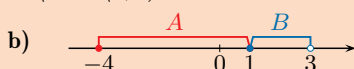
Uczeń:

- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej,
- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę różnych zbiorów liczbowych oraz zapisuje je symbolicznie.

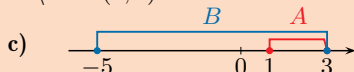
Ćwiczenie 1



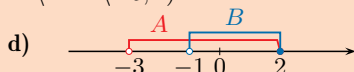
$$\begin{aligned}A \cup B &= (1; 4), \\A \cap B &= \emptyset, \\A \setminus B &= (1; 2), \\B \setminus A &= (2; 4).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A \cup B &= (-4; 3), \\A \cap B &= \{1\}, \\A \setminus B &= (-4; 1), \\B \setminus A &= (1; 3).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A \cup B &= (-5; 3), \\A \cap B &= \{1\}, \\A \setminus B &= (-5; 1), \\B \setminus A &= (1; 3).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A \cup B &= (-3; 2), \\A \cap B &= (-1; 2), \\A \setminus B &= (-3; -1), \\B \setminus A &= \emptyset.\end{aligned}$$

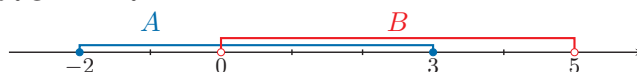
2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, można wykonywać na nich działania: $\cup, \cap, \setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -2; 3 \rangle$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



$A \cup B = \langle -2; 5 \rangle$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3]$	Ilościowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5]$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$

c) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle -5; 3 \rangle$

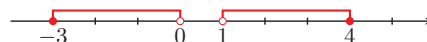
b) $A = \langle -4; 1 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$

d) $A = (-3; 2)$, $B = (-1; 2)$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $\langle -3; 0 \rangle$ i $(1; 4)$.

$$X = \langle -3; 0 \rangle \cup (1; 4)$$



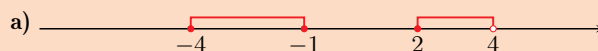
Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór X .

a) $X = \langle -4; -1 \rangle \cup (2; 4)$

b) $X = \langle -6; -5 \rangle \cup (-3; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$

Ćwiczenie 2



Multiteka

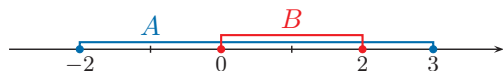
• Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$, jeżeli $A = \langle -2; 3 \rangle$ i $B = \langle 0; 2 \rangle$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

a) $A = \langle -5; 4 \rangle$, $B = \langle -3; -1 \rangle$

c) $A = \langle -3; \infty \rangle$, $B = \langle -1; 2 \rangle$

b) $A = \langle -3; 5 \rangle$, $B = \langle 2; \frac{5}{2} \rangle$

d) $A = \mathbf{R}$, $B = \langle -3; 1 \rangle$

Zadania

- Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
 - $A = \langle -3; 0 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$
 - $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$
 - $A = \langle -\infty; 2 \rangle$, $B = \langle 0; 2 \rangle$
 - $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = \langle 2; \infty \rangle$
- Ile elementów należy do zbioru X ? Wykonaj odpowiednią ilustrację graficzną.
 - $X = \langle -5; 6 \rangle \cap \mathbf{N}$
 - $X = \langle -3; 3 \rangle \cap \mathbf{Z}$
 - $X = \langle -\pi; \pi \rangle \cap \mathbf{N}$
- Niech $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = \langle -7; 4 \rangle$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:
 - $A \cup B$,
 - $A \cap B$,
 - $A \setminus B$,
 - $B \setminus A$?
- Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.
 - $X = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$
 - $X = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
 - $X = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \{3\}$
 - $X = \langle -\infty; -2 \rangle \cup \{0, 1\} \cup \langle 4; \infty \rangle$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
 - $A = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$, $B = \langle 0; 4 \rangle$
 - $A = \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$, $B = \langle 0; \infty \rangle$
 - $A = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$, $B = \langle -1; 6 \rangle$
 - $A = \langle -2; 0 \rangle$, $B = \{0\} \cup \langle 3; 5 \rangle$
 - $A = \langle 0; 7 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 8; 9 \rangle$
 - $A = \langle 1; 9 \rangle$, $B = \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 6; 9 \rangle$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B . Wyznacz zbiory: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
 - $A = \langle -5; 2 \rangle$, $B = \{1, 2\}$
 - $A = \langle 3; \infty \rangle$, $B = \{2, 3, 4\}$
 - $A = \langle -\infty; 4 \rangle$, $B = \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$
 - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\} \cup \langle 2; \infty \rangle$
- $A \cup B = \langle -3; 6 \rangle$, $A \cap B = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$, $A \setminus B = \langle -3; 0 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$, $B \setminus A = \langle 1; 3 \rangle$
 - $A \cup B = \langle -2; \infty \rangle$, $A \cap B = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$, $A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle$, $B \setminus A = \langle 1; 4 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$
 - $A \cup B = \langle -\infty; 6 \rangle$, $A \cap B = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$, $A \setminus B = \langle -\infty; -1 \rangle$, $B \setminus A = \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 5; 6 \rangle$
 - $A \cup B = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$, $A \cap B = \{0\}$, $A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle$, $B \setminus A = \langle 3; 5 \rangle$
 - $A \cup B = \langle 0; 7 \rangle \cup \langle 8; 9 \rangle$, $A \cap B = \langle 1; 3 \rangle$, $A \setminus B = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 3; 7 \rangle$, $B \setminus A = \langle 8; 9 \rangle$
 - $A \cup B = \langle 1; 9 \rangle$, $A \cap B = \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 6; 9 \rangle$, $A \setminus B = \{1\} \cup \langle 2; 6 \rangle \cup \{9\}$, $B \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus B = \langle -5; 1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$, $B \setminus A = \emptyset$
 - $A \setminus B = \langle 3; 4 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$, $B \setminus A = \{2\}$
 - $A \setminus B = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 0; 4 \rangle$, $B \setminus A = \langle 4; \infty \rangle$
 - $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \langle 2; 3 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

Ćwiczenie 3

- $A \setminus B = \langle -5; -3 \rangle \cup \langle -1; 4 \rangle$
- $A \setminus B = \langle -3; 2 \rangle \cup \langle \frac{5}{2}; 5 \rangle$
- $A \setminus B = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
- $A \setminus B = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$

Odpowiedzi do zadań

- $A \cup B = \langle -3; 4 \rangle$,
 $A \cap B = \langle -1; 0 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -3; -1 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 0; 4 \rangle$
 - $A \cup B = \langle -4; 3 \rangle$,
 $A \cap B = \langle -\frac{1}{2}; 2 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -4; -\frac{1}{2} \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 2; 3 \rangle$
 - $A \cup B = \langle -\infty; 2 \rangle$,
 $A \cap B = \langle 0; 2 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \{2\}$,
 $B \setminus A = \emptyset$
 - $A \cup B = \langle -1; \infty \rangle$,
 $A \cap B = \{2\}$,
 $A \setminus B = \langle -1; 2 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 2; \infty \rangle$
- a) 7 b) 5 c) 4
- $A \cup B = \langle -7; 4 \rangle$
10 liczb całkowitych
 - $A \cap B = \langle -5; 3 \rangle$
7 liczb całkowitych
 - $A \setminus B = \emptyset$
 - $B \setminus A = \langle -7; -5 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$
3 liczby całkowite

7. $A = \langle -4; 0 \rangle$, $B = \langle -1; 3 \rangle$,
 $C = \langle 2; \infty \rangle$

a) $\langle -4; 2 \rangle$

b) $\langle -4; -1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

c) $\langle -1; 0 \rangle$

8. a) $A' = (-\infty; -3) \cup \langle 0; \infty \rangle$,
 $B' = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup \langle 3; \infty \rangle$,
 $A' \cap B' = (-\infty; -3) \cup$
 $\cup \langle 0; \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

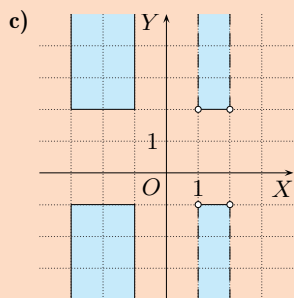
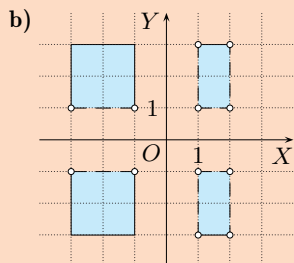
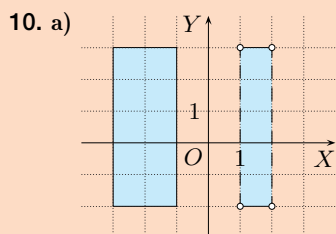
b) $A' = (-\infty; -4) \cup \langle 4; \infty \rangle$,
 $B' = (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty \rangle$,
 $A' \cap B' = (-\infty; -4) \cup \langle 4; \infty \rangle$

c) $A' = \langle 1; 3 \rangle$,
 $B' = (-\infty; -4) \cup \langle 4; \infty \rangle$,
 $A' \cap B' = \emptyset$

d) $A' = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$,
 $B' = (-\infty; -5) \cup \langle -1; \infty \rangle$,
 $A' \cap B' = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$

9. a) $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$,
 $y \in \langle 1; 3 \rangle$

b) $x \in \langle -3; 6 \rangle$,
 $y \in \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$



7. Zapisz w postaci przedziałów zbiory: $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq -4 \text{ i } x < 0\}$,
 $B = \{x \in \mathbf{R} : x > -1 \text{ i } x \leq 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 2\}$, a następnie wyznacz
zbiór:

a) $(A \cup B) \setminus C$, b) $(A \cup C) \setminus B$, c) $(A \cap B) \setminus C$.

$A' = \mathbf{R} \setminus A$

8. Wyznacz zbiory: A' , B' i $A' \cap B'$, gdy:

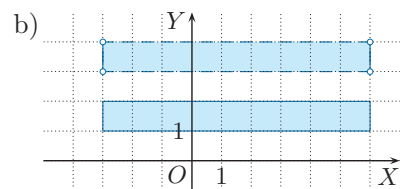
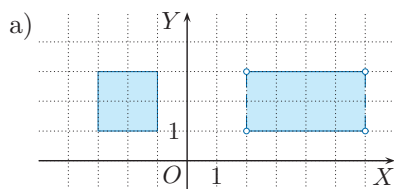
a) $A = \langle -3; 0 \rangle$, $B = \langle \frac{1}{2}; 3 \rangle$,

c) $A = (-\infty; 1) \cup \langle 3; \infty \rangle$, $B = \langle -4; 4 \rangle$,

b) $A = \langle -4; 4 \rangle$, $B = \langle 0; 2 \rangle$,

d) $A = (-\infty; 0) \cup \langle 1; 5 \rangle$, $B = \langle -5; -1 \rangle$.

9. Podaj za pomocą przedziałów, jakie warunki spełniają współrzędne punktów (x, y) należących do przedstawionego zbioru.



10. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) , jeśli spełniony jest warunek $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$ oraz:

a) $y \in \langle -2; 3 \rangle$, b) $y \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$, c) $y \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$.

Na rysunku przedstawiono początkowe etapy zaproponowanej przez Georga Cantora (1845–1918) konstrukcji pewnego zbioru. Zaczynamy od przedziału $C_0 = \langle 0; 1 \rangle$, który dzielimy na trzy części równej długości i usuwamy środkową część będącą przedziałem $\langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \rangle$. W ten sposób otrzymujemy zbiór $C_1 = \langle 0; \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}; 1 \rangle$. Następnie z każdej części zbioru C_1 usuwamy jej środkową trzecią część itd.



11. a) Zapisz zbiór C_2 w postaci sumy przedziałów. Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_2 do sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_1 ?

b) Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_4 do długości zbioru C_0 ?

11. a) $C_2 = \langle 0; \frac{1}{9} \rangle \cup \langle \frac{2}{9}; \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}; \frac{7}{9} \rangle \cup \langle \frac{8}{9}; 1 \rangle$

Stosunek sumy długości przedziałów: $\frac{2}{3}$

b) Stosunek sumy długości przedziałów: $\frac{16}{81}$

2.5. Rozwiązywanie nierówności

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Np. liczba 7 spełnia nierówność $x + 1 > 5$, bo $7 + 1 > 5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

Przykład 1

a) Rozwiąż nierówność $x + 3 > 7$.

$$x + 3 > 7$$

$$x + 3 - 3 > 7 - 3 \quad \begin{array}{l} \text{Od obu stron nierówności odejmujemy 3} \\ \text{– nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.} \end{array}$$

$$x > 4 \quad \text{Nierówność jest spełniona dla } x \in (4; \infty).$$

Nierówności $>$ i $<$ nazywamy **nierównościami ostrymi**.

b) Rozwiąż nierówność $x - 4 \leq 5$.

$$x - 4 \leq 5$$

$$x - 4 + 4 \leq 5 + 4 \quad \begin{array}{l} \text{Do obu stron nierówności dodajemy 4} \\ \text{– nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.} \end{array}$$

$$x \leq 9 \quad \text{Nierówność jest spełniona dla } x \in (-\infty; 9].$$

Nierówności $\geq$ i $\leq$ nazywamy **nierównościami nieostrymi**.

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron jest równoważne przeniesieniu tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

- a) $x + 309 < 273$ b) $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$ c) $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$ d) $2x - 3 > x + 17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

- a) $x - 13 < 56$, $x + 26 > 95$ b) $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$, $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

a) Dla pierwszej nierówności mamy $x < 69$, a dla drugiej $x > 69$, czyli nierówności nie są równoważne.

b) Dla obydwu nierówności otrzymujemy $x \geq \frac{5}{12}$, czyli są równoważne.

Uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem nierówności,
- rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym nierówności spreczne i tożsamościowe,
- zapisuje zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału,
- stosuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym,
- uzasadnia niektóre własności nierówności.

Ćwiczenie 1

- a) spełnia
b) spełnia
c) nie spełnia
d) nie spełnia

Ćwiczenie 2

- a) $x < -36$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
b) $x \geq 2\frac{5}{6}$, liczba 3
c) $x \leq -5\frac{1}{4}$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
d) $x > 20$, liczba 21

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$$6x + 5 < 17$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$$6x < 12 / : 6$$

Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$$x < 2$$

Ćwiczenie 4

a) $x \leq 9$

b) $x > \frac{16}{9}$

c) $x < -15$

d) $x \geq 6$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leq 34$ b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$ c) $0,1x + 1 < -\frac{1}{2}$ d) $5x - 7 \geq 3x + 5$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$$-\frac{1}{3}x > 5 / \cdot (-3)$$

Mnożymy obie strony nierówności przez -3 .

$$x < -15$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3) , można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leq -13$.

$$-6x - 4 \leq -13$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$$-6x \leq -9 / : (-6)$$

Dzielimy obie strony nierówności przez -6 .

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $-3x - 7 < 2$

c) $3(x - 1) \geq x + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leq 5$

d) $2(x + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}x + 4$

f) $\frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2}$

Ćwiczenie 5

a) $x > -3$

c) $x \geq 4$

e) $x < 13$

b) $x \geq -6$

d) $x > \frac{7}{3}$

f) $x \geq -\frac{1}{7}$

Ćwiczenie 6

Przeczytaj przykład w ramce. Sprawdź, czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna.

a) $3(2 - \frac{1}{6}x) \geq -0,5x + 1$

b) $-\frac{2}{3}(3x - 2) > \frac{1}{2}(3 - 4x)$

c) $\frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$

d) $\frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x / \cdot 6$

$$1 - 3x < -3x$$

$$1 < 0x \quad \text{sprzeczność}$$

Nierówność jest sprzeczna
(nie spełnia jej żadna liczba).

b) $4x - 2 \geq 4x - 10$

$$0x \geq -8$$

Nierówność jest spełniona
przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

a) $\begin{cases} x + 9 \geq 13 \\ 2x - 6 < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 6 > -9 \\ 1 - x \geq 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 3 \leq 4 \\ 5 - 4x \geq 1 \end{cases}$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

a) $2x + 20 > 8$ i $5 < 1 - x$

c) $2x + 3 < 7$ i $3 - 4x \leq 19$

b) $2x + 3 > 2$ i $4x < 3$

d) $3x + 9 > -7$ i $-3x > 4x + 21$

3. Które spośród liczb: $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$, spełniają podaną nierówność?

a) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3}$

e) $\frac{3x+2}{-5} < 3 - x$

b) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}$

d) $\frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}$

f) $-3(x+3) > \frac{x-5}{-2}$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$

d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$

b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$

e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$

c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$

f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $x > 6\sqrt{2}$ c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 6

a) spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$

b) sprzeczna

c) sprzeczna

d) sprzeczna

e) spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\langle 4; 5 \rangle$

b) $\langle -5; -2 \rangle$

c) $\langle -\frac{1}{2}; 1 \rangle$

2. a) $\langle -6; -4 \rangle$, -5

b) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \rangle$, 0

c) $\langle -4; 2 \rangle$, -4 , 1

d) $\langle -\frac{16}{3}; -3 \rangle$, -5 , -4

3. a) $x < -4\frac{2}{3}$, żadna liczba

b) $x \geq 4$, liczba c

c) $x \geq 2\frac{3}{4}$, liczba c

d) $x > \frac{4}{7}$, liczby b i c

e) $x < 8\frac{1}{2}$, liczby a , b i c

f) $x < -4\frac{3}{5}$, żadna liczba

4. a) $x > \frac{15}{8}$ b) $x \geq 2$

c) $x \leq \frac{25}{4}$ d) $x > \frac{28}{33}$

e) $x \geq \frac{11}{8}$ f) $x > \frac{19}{3}$

6. a) $0 \leq 3(2n - 11) < 21$

$5,5 \leq n < 9$

$n \in \{6, 7, 8\}$

b) $4(3k + 7) > 2$

$k > -2\frac{1}{6}$

$k \in \{-2, -1\}$

c) $\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}(m - 2) < 3$

$m < 14$

$m \in \{0, 1, 2, \dots, 13\}$

7. a) $38 < 8 \cdot 3 + 4k < 46$

$k \in \mathbb{N}_+$

$3,5 < k < 5,5$

$k \in \{4, 5\}$

b) $40 < 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3k < 68$

$k \in \mathbb{N}_+$

$1\frac{5}{6} < k < 4\frac{1}{6}$

$k \in \{2, 3, 4\}$

8. Niech x – liczba uczestników,
 $x \in \mathbb{N}$, wówczas:

$2230 < 1550 + 8x$

$x > 85$

Musi być co najmniej
86 uczestników.

9. a) $-c > 0$, więc $-ac > -bc$

b) $c^2 > 0$, więc $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$

c) $c^3 < 0$, więc $\frac{a}{c^3} < \frac{b}{c^3}$

10. a) Zdanie nie jest
prawdziwe, np.:

$-2 < -1$

oraz $(-2)^2 > (-1)^2$.

b) Zdanie nie jest
prawdziwe, np.:

$-2 < 1$

oraz $-\frac{1}{2} < 1$.

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest jedna z relacji:
 $a < b$, $a = b$ lub $a > b$. Własność ta nosi nazwę trychotomii.
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi następująca własność
(zwana przechodniością): jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n .

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k .

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m .

7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Jakie wartości całkowite może przyjmować k , jeśli:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 cm i mniejsza od 46 cm,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 cm^2 i mniejsze od 68 cm^2 ?

8. Właściciel klubu chce zaprosić na koncert jeden z dwóch zespołów rockowych. Zespół Gamma zażądał za występ 2230 zł, a zespół Kappa – 1550 zł plus 8 zł od każdego uczestnika koncertu. Dla jakiej liczby uczestników tańsze będzie zaproszenie zespołu Gamma?

9. Który symbol, $<$ czy $>$, należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać nierówność prawdziwą, jeśli $c < 0$ oraz $a > b$? Zapisz tę nierówność w zeszyście.

a) $-ac \boxed{>} -bc$

b) $\frac{a}{c^2} \boxed{>} \frac{b}{c^2}$

c) $\frac{a}{c^3} \boxed{<} \frac{b}{c^3}$

D10. Czy poniższe zdanie jest prawdziwe (odpowiedź uzasadnij)?

a) Dla dowolnych liczb p, q , jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.

b) Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q , jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$.

D11. Udowodnij.

a) Jeśli $p < q$ i $r < s$, to $p(r - s) > q(r - s)$.

* b) Jeśli $p, q, r, s > 0$ i $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, to $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$ oraz $\frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$.

11. a) Mnożymy obie strony nierówności $p < q$ przez $(r - s)$. Z założenia $r < s$, czyli $r - s < 0$, zatem nierówność zmienia zwrot:

$p(r - s) > q(r - s)$

Co było do udowodnienia.

b) Z założenia $p, q, r, s > 0$ oraz $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, zatem:

$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \quad / \cdot qs$

$ps < qr \quad / + pq$

$pq + ps < pq + qr$

$p(q + s) < q(p + r) \quad / : q(q + s)$

$\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$

Co było do udowodnienia.

$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \quad / \cdot qs$

$ps < qr \quad / + rs$

$ps + rs < qr + rs$

$s(p + r) < r(q + s) \quad / : s(q + s)$

$\frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(3x^2 + 2x - 4)x^2$

b) $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$

c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$

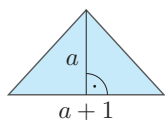
d) $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$

e) $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$

f) $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

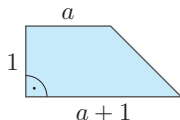
2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A.



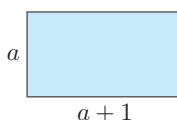
I. $2a^2 + a$

B.



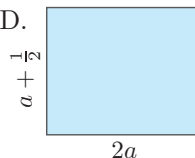
II. $a^2 + a$

C.



III. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

D.



IV. $a + \frac{1}{2}$

3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$

b) $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2}x^2 - 4x)$

c) $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$

d) $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$

e) $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$

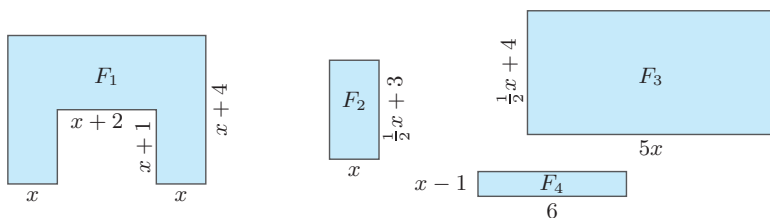
f) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

D 4. Uzasadnij, że wartość wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

a) $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$

b) $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

D 5. Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4 .



4. a) $4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 4x^4 + 6x^3 - 3x - 4x^2 + 3x + 32 = 32$

b) $2\sqrt{45}x^3 - 6\sqrt{75}x^2 - \sqrt{150}x - 6\sqrt{5}x^3 + 6\sqrt{75}x^2 + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} =$
 $= 2\sqrt{9 \cdot 5}x^3 - 6\sqrt{5 \cdot 3}x^2 - \sqrt{25 \cdot 6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = 6\sqrt{5}x^3 - 6\sqrt{5}x^3 - 5\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = -\sqrt{6}$

5. $P_1 = x(x + 4) + x(x + 4) + (x + 2)(x + 4 - x - 1) = 2x^2 + 11x + 6$

$P_2 = x(\frac{1}{2}x + 3) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$P_3 = 5x(\frac{1}{2}x + 4) = \frac{5}{2}x^2 + 20x$

$P_4 = 6(x - 1) = 6x - 6$

$P_1 + P_2 = 2x^2 + 11x + 6 + \frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$

$P_3 - P_4 = \frac{5}{2}x^2 + 20x - 6x + 6 = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$

Zatem $P_1 + P_2 = P_3 - P_4$, co należało udowodnić.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$

b) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$

c) $-2x^4y + x^3y^2$

d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$

e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$

f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$

2. A – III, B – IV, C – II, D – I

3. a) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$

b) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$

c) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$

d) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$

e) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$

f) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

Uczeń:

- wyłącza wskazany jednomian przed nawias,
- zapisuje wyrażenia algebraiczne w postaci iloczynu,
- stosuje metodę wyłączania jednomianu przed nawias do dowodzenia podzielności liczb.

Ćwiczenie 1

- a) $2 \cdot (183 + 17) = 400$
 b) $9 \cdot (27 + 23) = 450$
 c) $3 \cdot (251 + 249) = 1500$
 d) $6 \cdot (378 + 222) = 3600$
 e) $12 \cdot (228 + 172) = 4800$
 f) $19 \cdot (116 + 84) = 3800$

2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias

Jeżeli w poszczególnych wyrazach sumy rozpozna się jednakowe czynniki i wyłączy je przed nawias, łatwiej będzie wykonać obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wyłączamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 zwanej rozdzielnością mnożenia
 względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- a) $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$ c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$ e) $12 \cdot 228 + 12 \cdot 172$
 b) $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$ d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$ f) $19 \cdot 116 + 19 \cdot 84$

Również w sumach algebraicznych można wyłączyć wspólny czynnik przed nawias.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wyłącz przed nawias wspólny czynnik.

- Wyłączamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wyłączamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wyłączamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wyłączamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

To, jaki czynnik wyłączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- a) $5x + 5y$ c) $9x - 27y^2$ e) $39y^2 - 26z$ g) $-48p + 36q^2$
 b) $4b - 8a$ d) $-6x^2 + 18y^2$ f) $-11a^3 + 22b^2$ h) $75xy^3 - 125$

Ćwiczenie 2

- a) $5(x + y)$ c) $9(x - 3y^2)$ e) $13(3y^2 - 2z)$ g) $-12(4p - 3q^2)$
 b) $4(b - 2a)$ d) $-6(x^2 - 3y^2)$ f) $-11(a^3 - 2b^2)$ h) $25(3xy^3 - 5)$

Ćwiczenie 3

Wylącz wskazany jednomian przed nawias.

- a) $4x^2 + xy$, x c) $3xy - xyz$, xy e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$, a^2b
b) $2x^3 - 12xy$, $2x$ d) $6pq + 18p^2q$, $6pq$ f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$, x^2y^2

Przed nawias wylączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wylącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a) $8x^3 - 36x^2$ d) $20ax - 15ay$ g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
b) $7y^2 - 14y^4$ e) $8ab + 12bc$ h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
c) $5x^3 + 10x^2y$ f) $4xy + 6x^2y$ i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$ c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$ e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$ d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$ f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

2. Wylącz podany czynnik przed nawias.

- a) $a^2b + ab^3$, ab c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2$, $3a^2$ e) $3a^3b^2 - 6a^2b$, $3a^2b$
b) $x^3y^2 - xy^3$, xy^2 d) $4x^4y^4 + 8y^3z$, $4y^3$ f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3$, $2x^2y^3$

3. Zapisz wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu, wylączając przed nawias podany jednomian.

- a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$, xyz c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$
b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$, xyz^2 d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$, $3x^3y^2$

4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

- a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

5. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $a + b = 15$.

- a) $-3a - 3b$ b) $2(a + b) - 4a - 4b$ c) $a(a + b) + b(a + b)$

5. a) $-3(a + b) = -45$

b) $2(a + b) - 4(a + b) = -2(a + b) = -30$

c) $(a + b)(a + b) = 225$

Ćwiczenie 3

- a) $x(4x + y)$
b) $2x(x^2 - 6y)$
c) $xy(3 - z)$
d) $6pq(1 + 3p)$
e) $a^2b(1 + 3b - a)$
f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$

Ćwiczenie 4

- a) $4x^2(2x - 9)$
b) $7y^2(1 - 2y^2)$
c) $5x^2(x + 2y)$
d) $5a(4x - 3y)$
e) $4b(2a + 3c)$
f) $2xy(2 + 3x)$
g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 400 b) 4000 c) 5000
d) 3700 e) 1000 f) 300

2. a) $ab(a + b^2)$
b) $xy^2(x^2 - y)$
c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$
d) $4y^3(x^4y + 2z)$
e) $3a^2b(ab - 2)$
f) $2x^2y^3(3y + 4x)$
3. a) $xyz(x + y + z)$
b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$
4. a) $9y^2(3y^2 + 4y - 6)$
b) $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$
c) $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$

6. a) $10(6x + 9y) = 120$

b) $2(6x + 9y) = 24$

c) $\frac{1}{3}(6x + 9y) = 4$

d) $\frac{1}{6}(6x + 9y) = 2$

7. a) $x(x + 2y) =$
 $= 17,5(17,5 + 2 \cdot 6,25) =$
 $= 17,5(17,5 + 12,5) =$
 $= 17,5 \cdot 30 = 525$
 b) $x(2x - 3y) =$
 $= 14(2 \cdot 14 - 3 \cdot 6) =$
 $= 14(28 - 18) = 14 \cdot 10 = 140$

8. I – C, II – A, III – B

9. Suma kulek we wszystkich pudełkach:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) = 7x + 21 = 7(x + 3)$$

11. Rozważmy dwie liczby podzielne przez 3: $3x$ i $3y$, gdzie $x, y \in \mathbf{Z}$.

Suma S kwadratów tych liczb:

$$S = (3x)^2 + (3y)^2 = 9x^2 + 9y^2 = 9(x^2 + y^2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 9 i liczby całkowitej $x^2 + y^2$.

12. Niech x i y będą kolejno liczbą jednościami i dziesiątkami dowolnej liczby dwucyfrowej.

Wówczas liczba ta ma postać: $10y + x$, a liczba powstała z przestawienia jej cyfr:

$$10x + y$$

Suma tych liczb:

$$(10y + x) + (10x + y) = 11y + 11x = 11(x + y)$$

czyli jest to liczba podzielna przez 11.

6. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $6x + 9y = 12$.

a) $60x + 90y$

b) $12x + 18y$

c) $2x + 3y$

d) $x + \frac{3}{2}y$

7. Aby obliczyć wartość wyrażenia $a^2 - 2ab$ dla $a = 18,5$ i $b = 4,25$, można postąpić tak, jak podano poniżej.

Obliczenia będą prostsze, gdy zauważymy, że $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$.

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

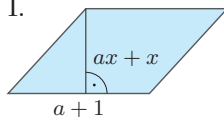
$$a(a - 2b) = 18,5(18,5 - 2 \cdot 4,25) = 18,5(18,5 - 8,5) = 18,5 \cdot 10 = 185$$

Korzystając z podanej metody, oblicz wartość wyrażenia:

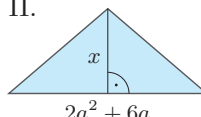
a) $x^2 + 2xy$ dla $x = 17,5$ i $y = 6,25$, b) $2x^2 - 3xy$ dla $x = 14$ i $y = 6$.

8. Dopasuj wyrażenie opisujące pole figury do odpowiedniej figury.

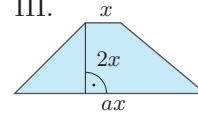
I.



II.



III.



A. $ax(a + 3)$

B. $x^2(a + 1)$

C. $x(a + 1)^2$

D 9. W pudełkach ponumerowanych od 1 do 7 znajdowały się kulki. W pierwszym z nich było x kulek, a w każdym następnym o jedną kulkę więcej niż w poprzednim. Uzasadnij, że we wszystkich było $7(x + 3)$ kulek.

D 10. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,

b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,

c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech n , $n + 1$ i $n + 2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n + 1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

D 11. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby naturalne są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

D 12. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przestawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

10. a) Niech n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ i $n + 4$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi.

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 5 i liczby naturalnej $n + 2$. Zatem S jest podzielna przez 5.

b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$, $x \in \mathbf{Z}$.

$$S = 2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 6x + 6 = 6(x + 1)$$

Suma S jest iloczynem liczby 6 i liczby całkowitej $x + 1$. Zatem S jest podzielna przez 6.

c) Rozważmy trzy kolejne liczby nieparzyste: $2x + 1$, $2x + 3$, $2x + 5$, $x \in \mathbf{Z}$.

$$S = (2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 6x + 9 = 3(2x + 3)$$

Suma S jest iloczynem liczby 3 i liczby całkowitej $2x + 3$. Zatem S jest podzielna przez 3.

2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a + b$ i $c + d$, zatem jego pole jest równe $(a + b) \cdot (c + d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

c	ac	bc
d	ad	bd
	a	b

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x + 3)(x + 5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a + 4b)(a - b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(x + 4)(x + 3)$ c) $(p + q)(q - 2p)$ e) $(a + 3b)(3a - 2b)$
 b) $(p + 6)(p - q)$ d) $(3x + 1)(2x + 6)$ f) $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x - 3)(x^2 + x - 2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Uczeń:

- mnoży sumy algebraiczne,
- przekształca wyrażenia algebraiczne, uwzględniając kolejność wykonywania działań,
- wykonuje działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wykorzystuje wyrażenia algebraiczne do opisu zależności,
- dowodzi podzielności liczb,
- rozwiązuje równania i nierówności, stosując działania na wyrażeniach algebraicznych.

Ćwiczenie 1

- a) $x^2 + 7x + 12$
 b) $p^2 - pq + 6p - 6q$
 c) $-2p^2 - pq + q^2$
 d) $6x^2 + 20x + 6$
 e) $3a^2 + 7ab - 6b^2$
 f) $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $x^3 - 3x + 2$
b) $2x^3 + 5x^2 + 9$
c) $x^2 - 4x + 4y - y^2$
d) $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$
e) $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$
f) $x^4 + x^2 + 1$

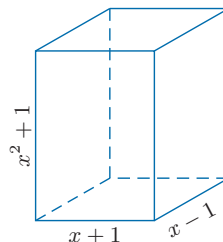
Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a) $(x-1)(x^2+x-2)$ c) $(x+y-4)(x-y)$ e) $(x-y+2)(x+y-3)$
b) $(x+3)(2x^2-x+3)$ d) $(2x-y+6)(x+3y)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Przykład 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.



Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości krawędzi jego podstawy i wysokość:

$$V = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x^2+1) &= \\&= (x^2 - x + x - 1)(x^2+1) = \\&= (x^2 - 1)(x^2+1) = \\&= x^4 + x^2 - x^2 - 1 = x^4 - 1\end{aligned}$$

Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzymanym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.

Mnożymy dwie sumy i ponownie redukujemy wyrazy podobne.

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = x^4 - 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają podane długości. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $x+2$, $x-2$, x^2+2 b) $x-2$, x^2-1 , x^2+1

Przykład 4

- a) Oblicz $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

- b) Oblicz $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\&= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$
b) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$ d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Ćwiczenie 3

- a) $V = (x+2)(x-2)(x^2+2) = x^4 - 2x^2 - 8$
b) $V = (x-2)(x^2-1)(x^2+1) = x^5 - 2x^4 - x + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $2\sqrt{2}-1$ c) $7-3\sqrt{6}$ e) $5+2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$
b) $11-5\sqrt{5}$ d) $16+7\sqrt{10}$ f) $-5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S :

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = \quad \text{Mnożymy sumy algebraiczne.}$$

$$= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = \quad \text{Redukujemy wyrazy podobne.}$$

$$= 5n^2 - 15n + 10 =$$

$$= 5(n^2 - 3n + 2) \quad \text{Wylączamy liczbę 5 przed nawias.}$$

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

a) $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,

b) $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,

c) $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x - 1)(x + 3) = x^2$.

$$(x - 1)(x + 3) = x^2$$

$$x^2 + 3x - x - 3 - x^2 = 0$$

$$2x = 3 \quad / :2$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

Mnożymy sumy algebraiczne i od obu stron równania odejmujemy x^2 (czyli przenosimy x^2 na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem). Następnie redukujemy wyrazy podobne.

b) Rozwiąż nierówność $(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$.

$$(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$$

$$4x^2 + 10x + 2x + 5 + x \leq 4x^2 + 12x - x - 3$$

$$4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x \leq -3 - 5 \quad \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem}$$

$$2x \leq -8 \quad / :2 \quad \text{wyrażenia zawierające niewiadomą}$$

$$x \leq -4 \quad \text{na lewą stronę nierówności,}$$

$$\text{a liczby na prawą stronę.}$$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż.

a) $(x + 2)(x - 5) = x^2$

d) $(x + 4)(x - 1) < x(x + 2) + 2x - 1$

b) $(x + 3)(1 - 2x) + 2x^2 = 0$

e) $(2x + 3)(3x - 1) + 4 > (6x - 2)(x + 1)$

c) $3x^2 - (x + 1)(3x + 2) = 0$

f) $(1 - x)(2x + 3) \leq -2(x + 1)(x - 2) - 2$

Ćwiczenie 5

a) $2n^2 + 8n - 3n - 12 + n^2 + 2n - 3n - 6 - n = 3n^2 + 3n - 18 = 3(n^2 + n - 6)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 3.

b) $6n^2 - 15n - 8n + 20 - 10n + 4n^2 + 5 - 2n = 10n^2 - 35n + 25 = 5(2n^2 - 7n + 5)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 5.

c) $6n^2 + 24n - 3n - 12 - 6n^2 + 3n + 4n - 2 = 28n - 14 = 7(4n - 2)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 7.

Ćwiczenie 6

a) $x^2 - 3x - 10 = x^2$,

$$x = -\frac{10}{3}$$

b) $x - 2x^2 + 3 - 6x + 2x^2 = 0$,

$$x = \frac{3}{5}$$

c) $3x^2 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$,

$$x = -\frac{2}{5}$$

d) $x^2 + 3x - 4 < x^2 + 4x - 1$,

$$x > -3$$

e) $6x^2 + 7x - 3 + 4 > 6x^2 + 4x - 2$,

$$x > -1$$

f) $3 - 2x^2 - x \leq -2x^2 + 2x + 2$,

$$x \geq \frac{1}{3}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2a^2 - 2a + ab - b$
 b) $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$
 c) $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$
 d) $-4a - 8ab - 6b - 3$
 e) $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$
 f) $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$
2. a) $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$
 b) $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$
 c) $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$
 d) $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$
 e) $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$
 f) $-16x^3 + 4xy^2$
3. a) $2a^2 - 24$
 b) $12ab + b^2$
 c) $a^2 + 2a - 3$
 d) $4y^2 - 4x^2 - 3xy$
 e) $2x^2 + 15x$
 f) $2x^2 - 6xy - 18y^2$
4. a) $x^2 - 4x - 12, -9,75$
 b) $x^3 - x^2 - 6, -6,375$
5. a) Pole prostokąta:
 $P = a(a + 2) = a^2 + 2a$
 b) Pole kwadratu:
 $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$
 Różnica pól:
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a = 1$
7. a) -20 b) -6 c) -4 d) 10
8. a) Wyrażenie można zredukować do liczby 30, zatem dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.
 b) Wyrażenie można zredukować do postaci x^2 . Kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną.

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.
 a) $(2a + b)(a - 1)$ c) $(-2a + b)(6a - 2)$ e) $(2a + b^2)(a - 2b)$
 b) $(3a - 2b)(2b + 3)$ d) $(3 + 4a)(-2b - 1)$ f) $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$
2. Wykonaj mnożenie.
 a) $(x + 2y + 3)(x - 2)$ c) $(x^2 + y)(x + y + 2)$ e) $2x(x - 2y)(3 + y)$
 b) $(2x - y + 1)(2x - 3)$ d) $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$ f) $-4x(2x - y)(2x + y)$
3. Uprość wyrażenie.
 a) $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$ d) $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$
 b) $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$ e) $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$
 c) $-4a^2 + 3a(a - 1) + (2a - 1)(a + 3)$ f) $-4x^2 - 6(y^2 - (x - 2y)(x + y))$
4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = -0,5$.
 a) $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$ b) $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$
5. Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a + 2$.
 a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
 b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.
6. a) Dany jest kwadrat o boku długości $x + 3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?
 b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a + 3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a + 4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy wysokość zwiększymy o 2?
 c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x + 4$ i $2x + 3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.
7. Oblicz.
 a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$
 b) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$
- D** 8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.
 a) $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$
 b) $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$
6. a) Pole kwadratu: $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$
 Pole prostokąta: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$
 Różnica pól: $3x + 7$
 b) Pole trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 4) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{7}{2}a + 6$
 Pole nowego trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 6) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{9}{2}a + 9$
 Różnica pól: $a + 3$
 c) Pole prostokąta: $(x + 4)(2x + 3) = 2x^2 + 11x + 12$
I przypadek:
 Pole nowego prostokąta: $(x + 6)(2x + 4) = 2x^2 + 16x + 24$, różnica pól: $5x + 12$.
II przypadek:
 Pole nowego prostokąta: $(x + 5)(2x + 5) = 2x^2 + 15x + 25$, różnica pól: $4x + 13$.
 Pole zwiększy się o $5x + 12$ lub $4x + 13$.

9. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+2)(x-3) = x^2 + 4$ d) $(x-2)(x-5) = (x+3)(x+6)$
 b) $(x-4)(x+6) = x(x-4)$ e) $(2x+1)(x+3) = (x-4)(2x-3)$
 c) $(2-x^2)(x^2-3) = x+5x^2-x^4$ f) $(2x^2+x-3)(x-4) = x^2(2x-7)$

10. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - (x+3)(x-3) \leq 6x$ c) $(2x-1)(3x-1) - (3x-2)(2x-3) \geq 0$
 b) $(4-x)(2x+3) + 2x^2 < 6$ d) $(4-6x)(2x+1) + (4x-5)(3x-1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

- a) $(3x+1)(2-x) + x(3x-5) \geq x$
 b) $2x^2 - (2x+1)(x-3) > 6x-7$
 c) $(3x+3)(2x-1) + 4x < 6(x+2)(x-1) + 9$
 d) $(x+1\frac{1}{2})(2x+1) \geq (2x+\frac{1}{2})(x-1) + 6x$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x+30)$ cm $\times$ $(x+20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x+10)$ cm $\times$ $(x+10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm². Oblicz obwody tych prostokątów.

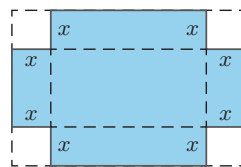
b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6-x)$ cm $\times$ $(2x-5)$ cm oraz $(x+5)$ cm $\times$ $(2x-1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm². Oblicz różnicę między polem większego i mniejszego prostokąta.

c) Dane są dwa czworokąty: kwadrat o boku $(2x+7)$ cm oraz prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm² większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

13. Wykonaj mnożenie.

- a) $(x+1)(x-1)(x^2-1)(x^4-1)$ c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$
 b) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ d) $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)$

14. a) Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 30 cm i 20 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część skleiono i otrzymano otwarte pudełko. Uzasadnij, że pojemność tego pudełka wyraża się wzorem: $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.



b) Z kwadratowego arkusza tektury o boku równym 40 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część skleiono i otrzymano otwarte pudełko. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór opisujący pojemność tego pudełka.

12. b) Pola prostokątów:

$$P_1 = (6-x)(2x-5) = -2x^2 + 17x - 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (x+5)(2x-1) = 2x^2 + 9x - 5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Suma pól:

$$P_1 + P_2 = 26x - 35 = 69, \text{ czyli } x = 4 \text{ cm, stąd } P_1 = 6 \text{ cm}^2 \text{ oraz } P_2 = 63 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Różnica pól: } P_2 - P_1 = 63 - 6 = 57 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{c) Pole kwadratu: } P_k = (2x+7)(2x+7) = 4x^2 + 28x + 49 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Pole prostokąta: } P_p = (4x+1)(x+3) = 4x^2 + 13x + 3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_k - P_p = 15x + 46 = 91, \text{ czyli } x = 3 \text{ cm, stąd } Ob_k = 52 \text{ cm oraz } Ob_p = 38 \text{ cm.}$$

$$\text{Różnica obwodów: } Ob_k - Ob_p = 52 - 38 = 14 \text{ [cm]}$$

9. a) $x = -10$ b) $x = 4$

c) $x = -6$ d) $x = -\frac{1}{2}$

e) $x = \frac{1}{2}$ f) $x = \frac{12}{7}$

10. a) $x \geq \frac{3}{2}$ b) $x < -\frac{6}{5}$

c) $x \geq \frac{5}{8}$ d) $x < \frac{1}{2}$

11. a) 3 b) 10 c) 0 d) 5

12. a) Pola prostokątów:

$$P_1 = (2x+30)(x+20) = 2x^2 + 70x + 600 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (2x+10)(x+10) = 2x^2 + 30x + 100 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_1 - P_2 = 40x + 500 = 900, \text{ czyli } x = 10 \text{ cm.}$$

Obwody prostokątów:

$$Ob_1 = 160 \text{ cm}$$

$$Ob_2 = 100 \text{ cm}$$

13. a) $x^8 - 2x^6 + 2x^2 - 1$ b) $1 - x^8$

c) $a^6 - b^6$ d) $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$

14. a) $V = (30-2x)(20-2x) \cdot x = (4x^2 - 100x + 600) \cdot x = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

b) $V = (40-2x)(40-2x) \cdot x = (4x^2 - 160x + 1600) \cdot x = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$

Uczeń:

- stosuje odpowiedni wzór skróconego mnożenia do wyznaczania kwadratu sumy lub różnicy oraz różnicy kwadratów,
- przekształca wyrażenie algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wyprowadza wzory skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia własności liczb.

Komentarz

Uczniowie czasami popełniają błąd, zapominając o podwojonym iloczynie we wzorze na kwadrat sumy lub różnicy. Należy zwrócić uwagę na to, że $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ jedynie wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- $x^2 + 2x + 1$
- $x^2 + 4x + 4$
- $x^2 - 6x + 9$
- $x^2 - 10x + 25$
- $4x^2 + 4x + 1$
- $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
- $16x^2 - 8x + 1$
- $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

2.8. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

Przykład 1

- $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
- $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$
- $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- $(x+1)^2$
- $(x+2)^2$
- $(x-3)^2$
- $(x-5)^2$
- $(2x+1)^2$
- $(\frac{1}{2}x+2)^2$
- $(4x-1)^2$
- $(2x-\frac{1}{2})^2$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- $(x+2y)^2$
- $(2x-y)^2$
- $(3x+2y)^2$
- $(3x+\frac{1}{2}y)^2$
- $(2x-\frac{1}{4}y)^2$
- $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^2$

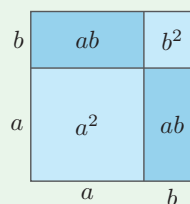
Ćwiczenie 4

Oblicz.

- $(\sqrt{7}+1)^2$
- $(\sqrt{5}-3)^2$
- $(6-\sqrt{3})^2$
- $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
- $(\sqrt{6}+\sqrt{15})^2$
- $(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{6})^2$

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- $x^2 + 4xy + 4y^2$
- $4x^2 - 4xy + y^2$
- $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- $9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2$
- $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$
- $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

Ćwiczenie 4

- $8 + 2\sqrt{7}$
- $14 - 6\sqrt{5}$
- $39 - 12\sqrt{3}$
- $5 + 2\sqrt{6}$
- $21 + 6\sqrt{10}$
- $6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{różnica kwadratów}$$

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 2

a) $(\boxed{x} - \boxed{6})(\boxed{x} + \boxed{6}) = \boxed{x}^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$
b) $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 3)(x + 3)$ c) $(2x - 4)(2x + 4)$ e) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
b) $(x + 7)(x - 7)$ d) $(6 + 5x)(5x - 6)$ f) $(\frac{1}{2}x + 3y)(3y - \frac{1}{2}x)$

Przykład 3

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) \approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = \\ = 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46$$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$ c) $(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2})(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2})$ e) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
b) $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$ d) $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2})(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2})$

Zadania

1. Uprość wyrażenie.

a) $(x - 3)(x + 3) + (2 + x)(2 - x)$ d) $(5y + 1)(1 - 5y) - (1 + 5y)^2$
b) $(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$ e) $(2x - y)(2x + y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$
c) $(2y - 3)^2 - (3y - 2)(3y + 2)$ f) $(y + 3x)(3x - y) - (x - 5y)(x + 5y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$ dla $x = \sqrt{3}$,
b) $(1 - 2x)(1 + 2x) + (1 - 3x)(1 + 3x) - (1 - 4x)(4x + 1)$ dla $x = \sqrt{5}$,
c) $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(1 + 2x) - (2x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 5

$$(a - b)(a + b) = \\ = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Komentarz

Należy zwrócić uczniom uwagę na to, że:

$$(x + y)(y - x) \neq x^2 - y^2$$

Ćwiczenie 6

a) $x^2 - 9$
b) $x^2 - 49$
c) $4x^2 - 16$
d) $25x^2 - 36$
e) $9x^2 - 16y^2$
f) $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$

Ćwiczenie 7

a) 18 b) -4
c) $-\frac{25}{18}$ d) -1
e) -1 f) 4,5

Odpowiedzi do zadań

1. a) -5 b) -2
c) $-5y^2 - 12y + 13$
d) $-50y^2 - 10y$
e) $13x^2 - 5y^2$ f) $8x^2 + 24y^2$

2. a) $x^2 + 4$; 7
b) $3x^2 + 1$; 16
c) $-4x^2 - 8x + 1$; $-7 - 8\sqrt{2}$

3. a) 6 b) $-3 + 2\sqrt{3}$
 c) $-12\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{2}$
 e) 10 f) $12 - 2\sqrt{30}$
 g) $49 - 20\sqrt{2}$
 h) $-31 - 12\sqrt{2}$

4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2

5. a) $66 + 36\sqrt{2}$
 b) $78 - 24\sqrt{3}$
 c) $48 + 24\sqrt{3}$
 6. a) 14 b) $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$
 7. a) 14 b) $2\sqrt{5} - 2$
 c) 12 d) $2\sqrt{7} - 4$
 8. a) $-18y^2 + 12xy;$
 $-18\sqrt{10} - 42$
 b) $2(x+y)(x-y); 16\sqrt{3}$
 c) $96 - 12\sqrt{5}$ d) 0

9. Niech $n \in \mathbb{N}$.

a) $(n+1)^2 - n^2 =$
 $= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
 – liczba tej postaci jest nieparzysta.

b) Iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2 =$
 $= n^2 + n + \frac{1}{4} - n^2 + n - \frac{1}{4} =$
 $= 2n$ – liczba tej postaci jest parzysta.

d) $n^3 - n = n(n^2 - 1) =$
 $= n(n-1)(n+1) =$
 $= (n-1)n(n+1)$

Otrzymaliśmy iloczyn kolejnych trzech liczb naturalnych, zatem dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. To z kolei oznacza, że cały iloczyn jest podzielny przez 6.

3. Oblicz.

a) $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ e) $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5})$
 b) $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$
 c) $(2\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2 - (2\sqrt{3} + \frac{3}{2})^2$ g) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 - (2\sqrt{5} + 1)(1 - 2\sqrt{5})$
 d) $(\frac{1}{3} + 3\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})^2$ h) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2} - 1)(1 + 5\sqrt{2})$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ c) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$
 b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ d) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a .

a) $a = 3 + \sqrt{2}$ b) $a = 2\sqrt{3} - 1$ c) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

a) $a = 4 - \sqrt{2}, b = 4 + \sqrt{2}$ b) $a = 8 + \sqrt{2}, b = 4 - 2\sqrt{2}$

7. Oblicz.

a) $(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}})^2$ c) $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2$
 b) $(\sqrt{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{5} - 2})^2$ d) $(\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}})^2$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2$ dla $x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}, y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}$,
 b) $(\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2$ dla $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}, y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$,
 c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y)$ dla $x = \sqrt{5} - 4, y = \sqrt{6}$,
 d) $(x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2$ dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

- D** 9. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

a) $(n+1)^2 - n^2$ jest nieparzysta, c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2$ jest parzysta,
 b) $(2n+1)^2$ jest nieparzysta, d) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

- D** 10. Wyprowadź wzór:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Wskazówka. Pogrupuj wyrazy i skorzystaj ze wzoru na kwadrat sumy.

- D** 11. Wykaż, że:

a) jeśli $c \neq 0$ i $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$, to $a = -b$,
 b) jeśli $b \neq 0$ i $(a - b + c)^2 = a^2 + c^2 - 2ab + 2ac$, to $b = 2c$.

11. a) $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$$

$$-2ac - 2bc = 0 \quad / : -2c \neq 0$$

$$a + b = 0$$

$$a = -b$$

- b) $(a - b + c)^2 = a^2 + c^2 - 2ab + 2ac$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc = a^2 + c^2 - 2ab + 2ac$$

$$b^2 - 2bc = 0 \quad / : b \neq 0$$

$$b - 2c = 0$$

$$b = 2c$$

2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$\frac{5}{\sqrt{2}-1} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2} + 5$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$ c) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład.

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - (2 - x)^2 = 8$
b) $(3x + 1)^2 - 9x^2 = 7$
c) $(x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) = 12$

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned}(x - 4)(x + 4) - (x - 3)^2 &= 17 \\ x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) &= 17 \\ x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 &= 17 \\ 6x - 25 &= 17 \\ 6x &= 42 \\ x &= 7\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 - (2x + 1)^2 < 3$ c) $(2x + 1)(2x - 1) > 4x^2 - 9x$
b) $(3 - x)^2 \geq x^2 + 12$ d) $2 - (2x - 1)^2 \leq (3 - 2x)(2x + 3)$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie $x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartość równą 0?

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, więc:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy:
„wtedy i tylko wtedy, gdy”.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 8x + 16$ c) $4x^2 - 4x + 1$ e) $4x^2 + 12x + 9$
b) $x^2 - 6x + 9$ d) $25x^2 + 10x + 1$ f) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

a) $(x + 4)^2 = 0$ dla $x = -4$
b) $(x - 3)^2 = 0$ dla $x = 3$
c) $(2x - 1)^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$
d) $(5x + 1)^2 = 0$ dla $x = -\frac{1}{5}$
e) $(2x + 3)^2 = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$
f) $(3x - \frac{1}{2})^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{6}$

Uczeń:

- stosuje przekształcenia algebraiczne do przekształcania równoważnego równań oraz nierówności,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{6-\sqrt{2}}{34}$
b) $\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$
c) $-4 - 3\sqrt{2}$
d) $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$

Ćwiczenie 2

a) $x = 3$
b) $x = 1$
c) $x = 5$

Ćwiczenie 3

a) $x > -1$
b) $x \leq -\frac{1}{2}$
c) $x > \frac{1}{9}$
d) $x \leq 2$

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Równanie, które nie jest spełnione przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **równaniem sprzecznym**. Podobnie taką nierówność nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 = 6x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 6x \\x^2 &= -9\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest spreczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x - 1)^2 < 4x(x - 1)$.

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\1 &< 0\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest spreczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Równanie lub nierówność spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą nazywamy **równaniem tożsamościowym** (krótko: **tożsamością**) lub **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - (x - 3)^2 &= 12x \\x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\12x &= 12x\end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x - 2)(x + 2) + 5 > 0$.

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) + 5 &> 0 \\x^2 - 4 + 5 &> 0 \\x^2 &> -1\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest większy od liczby ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub spreczne.

a) $(6 - x)^2 - (2 - x)^2 = -8x$ b) $(x - 4)^2 + 4x = (x - 2)^2 + 12$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub spreczna.

a) $(x + 1)^2 - 2 \leq (x - 1)(1 + x) + 2x$ b) $6x - (3x - 1)^2 \geq (2x + 3)^2$

Ćwiczenie 5

a) $36 - 12x + x^2 - 4 + 4x - x^2 = -8x$
 $32 = 0$

Równanie jest spreczne.

b) $x^2 - 8x + 16 + 4x = x^2 - 4x + 4 + 12$
 $0 = 0$

Równanie jest tożsamościowe.

Ćwiczenie 6

a) $x^2 + 2x + 1 - 2 \leq x^2 - 1 + 2x$
 $0 \leq 0$

Nierówność jest tożsamościowa.

b) $6x - 9x^2 + 6x - 1 \geq 4x^2 + 12x + 9$
 $-13x^2 \geq 10$
 $x^2 \leq -\frac{10}{13}$

Nierówność jest spreczna.

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0; 4)$?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \text{d)} \frac{2}{1-2\sqrt{2}} & \text{g)} \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} & \text{j)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ \text{b)} \frac{1}{3-\sqrt{2}} & \text{e)} \frac{6}{3+2\sqrt{3}} & \text{h)} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} & \text{k)} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \\ \text{c)} \frac{3}{2+\sqrt{5}} & \text{f)} \frac{8}{3\sqrt{2}-4} & \text{i)} \frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} & \text{l)} \frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \end{array}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x-5)(x+5) = x^2 - 100x & \text{d)} 4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10 \\ \text{b)} (3-x)^2 - (x+\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9} & \text{e)} (6+\frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x+6) + (\frac{1}{3}x-4)^2 = 4 \\ \text{c)} 4(\frac{1}{2}x-3)^2 = (6-x)^2 & \text{f)} (-4x-3)(4x-3) + 8(1-\sqrt{2}x)^2 = 1 \end{array}$$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geq 2 & \text{d)} -9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leq 11 \\ \text{b)} 9(\frac{2}{3}x-1)^2 > (1-2x)^2 - 8x & \text{e)} (\frac{1}{4}x+2)^2 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}x)(1+\frac{1}{2}x) \geq 0 \\ \text{c)} 2(x+2)^2 - (\sqrt{2}x-2)^2 \geq 0 & \text{f)} (\frac{\sqrt{2}}{2}x+1)(\frac{\sqrt{2}}{2}x-1) < \frac{(x-1)^2}{2} \end{array}$$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leq (5-2x)^2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geq x-6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases} \end{array}$$

5. Oblicz.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

$$\text{a)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1} \quad \text{b)} \frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad \text{c)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

D 7. Udowodnij równość: $(\sqrt{1+x^2}+x)^{-1} = \sqrt{1+x^2} - x$.

D 8. Wykaż, że jeśli $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ to złota liczba (patrz str. 61).

$$\begin{aligned} 5. & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \\ & = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} = \\ & = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{98} + \sqrt{99} - \sqrt{99} + 10 = 9 \end{aligned}$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2-x^2} = \sqrt{1+x^2} - x$$

$$\begin{aligned} 8. & \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = 1 + \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \\ & = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak b) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
c) $3\sqrt{5}-6$, tak
d) $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$, nie
e) $4\sqrt{3}-6$, tak
f) $12\sqrt{2}+16$, nie
g) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, nie
h) $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$, tak
i) $2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$, nie
j) $\sqrt{6}-2$, tak
k) $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$, nie l) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak
2. a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = 1,3$ c) $x \in \mathbf{R}$
d) równanie sprzeczne
e) $x = 18$ f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. a) $x \leq \frac{9}{4}$ b) $x \in \mathbf{R}$
c) $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ d) $x \leq \frac{4}{3}$
e) $x \geq -\frac{17}{4}$ f) $x < \frac{3}{2}$
4. a) $(0; \frac{3}{2})$ b) $(-5; 2)$
c) $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$ d) $(\frac{3}{2}; 5)$

$$\begin{aligned} 6. \text{ a)} \frac{1}{\sqrt{2}+(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}-(\sqrt{3}-1)} &= \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{2-(\sqrt{3}-1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2} = \\ &= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-4}{8} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \frac{2}{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}} &= \\ &= \frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} &= \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1. \text{ a) } 19^{16} - 9^{16} &= \\
&= (19^8 - 9^8)(19^8 + 9^8) = \\
&= (19^4 - 9^4)(19^4 + 9^4) \cdot \\
&\quad \cdot (19^8 + 9^8) = \\
&= (19^2 - 9^2)(19^2 + 9^2) \cdot \\
&\quad \cdot (19^4 + 9^4)(19^8 + 9^8) = \\
&= (361 - 81)(19^2 + 9^2) \cdot \\
&\quad \cdot (19^4 + 9^4)(19^8 + 9^8) = \\
&= 280(19^2 + 9^2)(19^4 + 9^4) \cdot \\
&\quad \cdot (19^8 + 9^8)
\end{aligned}$$

Zatem liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.

$$\begin{aligned}
\text{b) } 11^{32} - 7^{32} &= \\
&= (11^{16} - 7^{16})(11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (11^8 - 7^8)(11^8 + 7^8) \cdot \\
&\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (11^4 - 7^4)(11^4 + 7^4) \cdot \\
&\quad \cdot (11^8 + 7^8)(11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (11^2 - 7^2)(11^2 + 7^2) \cdot \\
&\quad \cdot (11^4 + 7^4)(11^8 + 7^8) \cdot \\
&\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (121 - 49)(11^2 + 7^2) \cdot \\
&\quad \cdot (11^4 + 7^4)(11^8 + 7^8) \cdot \\
&\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
&= 72(11^2 + 7^2)(11^4 + 7^4) \cdot \\
&\quad \cdot (11^8 + 7^8)(11^{16} + 7^{16})
\end{aligned}$$

Zatem liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

$$\begin{aligned}
2. \text{ a) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \\
\frac{2ab}{a+b} &\leq \frac{a+b}{2} / \cdot 2(a+b) > 0 \\
4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
0 &\leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{2ab}{a+b} \\
\frac{2ab}{a+b} &\leq \sqrt{ab} \\
2\sqrt{ab} &\leq a+b
\end{aligned}$$

Obie strony nierówności podnosimy do kwadratu:

$$\begin{aligned}
4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
0 &\leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb $a, b > 0$, zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach

Przykład 1

Uzasadnij, że liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

$$\begin{aligned}
13^8 - 7^8 &= (13^4 - 7^4)(13^4 + 7^4) = \\
&= (13^2 - 7^2)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\
&= (169 - 49)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\
&= 120(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4)
\end{aligned}$$

Zatem liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

- D** 1. a) Uzasadnij, że liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.
b) Uzasadnij, że liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

Przykład 2

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Jeśli $a + b < 0$, to nierówność jest prawdziwa (dlaczego?).

Zakładamy teraz, że $a + b \geq 0$. Obie strony nierówności są wówczas nieujemne, możemy więc podnieść je do kwadratu, nie zmieniając zwrotu nierówności (uzasadnij, dlaczego).

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} / \cdot 4 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.} \\
a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\
0 &\leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

- D** 2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi nierówność:
a) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$, b) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Przykład 3

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 \geq 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 &= x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = (x-y)^2 + (x-1)^2 \\
(x-y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-1)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
\end{aligned}$$

- D** 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:
* a) $y^2 + 2x^2 - 2xy - 6x + 9 \geq 0$, b) $5x^2 + y^2 + 4 \geq 4xy + 4x$.

3. a) Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
y^2 - 2xy + x^2 + x^2 - 6x + 9 &= (y-x)^2 + (x-3)^2 \\
(y-x)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-3)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
\end{aligned}$$

b) Przekształcamy nierówność do postaci:

$$5x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

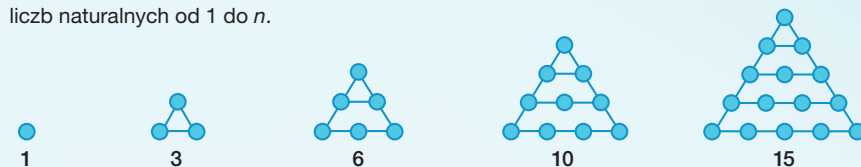
$$\begin{aligned}
4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 &= (2x-y)^2 + (x-2)^2 \\
(2x-y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-2)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
\end{aligned}$$

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

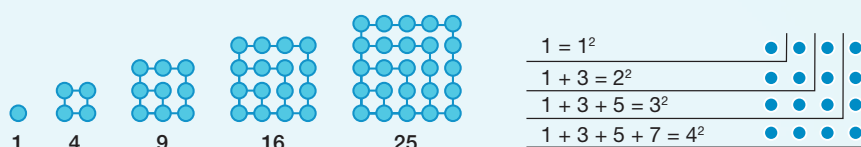
Liczby trójkątne

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n .



Wzór na n -tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

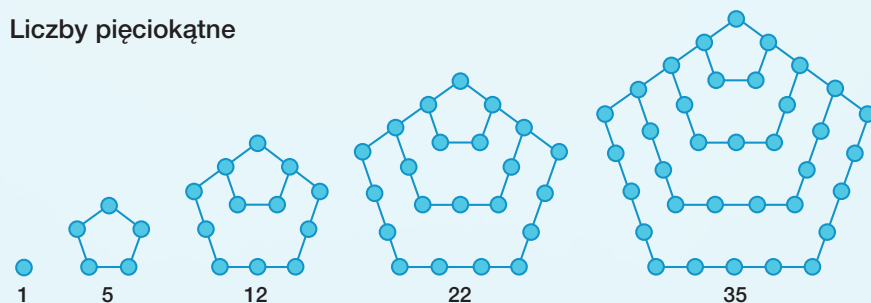
Liczby kwadratowe



1 Zauważ, że n -ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?

2 Wykaż, że dla $n > 1$ n -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne



3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.

4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

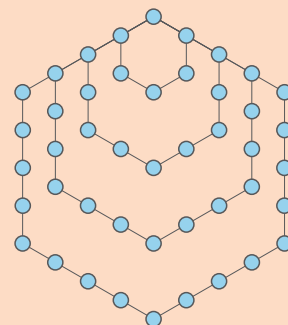
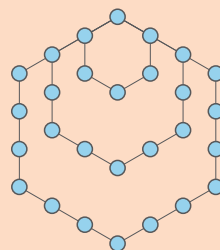
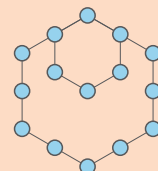
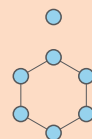
n -ta liczba r -kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

1. 400

3. 51

4. 1, 6, 15, 28, 45



2. Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2 - \text{jest to liczba kwadratowa}$$

Twierdzenie Diofantosa

Jeżeli liczbę trójkątną pomnożymy przez osiem i powiększymy o jeden, to otrzymamy liczbę kwadratową.

Dowód

Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) \cdot 8 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

– jest to liczba kwadratowa

Uczeń:

- oblicza wartość bezwzględną danej liczby,
- upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną,
- rozwiązuje elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną,
- zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają warunki zapisane za pomocą wartości bezwzględnej.

Ćwiczenie 1

- a) 5
- b) 5
- c) $\sqrt{3} - 1$
- d) $3 - \sqrt{3}$
- e) $3\sqrt{2} - 4$
- f) $5 - 2\sqrt{5}$

2.10. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass w 1841 roku.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Przykład 1

a) $|3,5| = 3,5$ b) $|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$ c) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

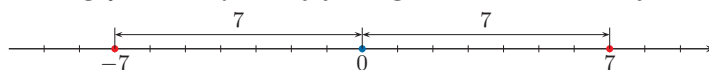
Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

a) 5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

■ Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

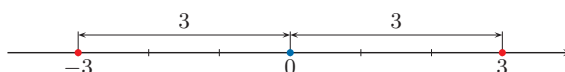
Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3 .



Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie.

a) $|x| = 2$ b) $|x| = 10$ c) $|x| = 0$ d) $|x| = -3$

Ćwiczenie 2

- a) $x = -2$ lub $x = 2$
- b) $x = -10$ lub $x = 10$
- c) $x = 0$
- d) brak rozwiązań

Ćwiczenie 3

Która z liczb x, y ma większą wartość bezwzględną?

- a) $x = 7, y = -6$ b) $x = -10, y = -12$ c) $x = -8, y = 0$

Przypomnijmy, że:

- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ dla $a < 0$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 3

- a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

- b) Rozwiąż nierówność $|x| \geq 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona dla $x \leq -2$ oraz dla $x \geq 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a) $|x| < 8$ b) $|x| \leq \sqrt{2}$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq \pi$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| \geq 0$ b) $|x| \leq 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

Ćwiczenie 6

- a) $x \in \mathbf{R}$ b) $x = 0$ c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ d) sprzeczna

Ćwiczenie 3

- a) x b) y c) x

Ćwiczenie 4

- a) $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$
b) $|4 - 2\sqrt{3}| = 4 - 2\sqrt{3}$
c) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

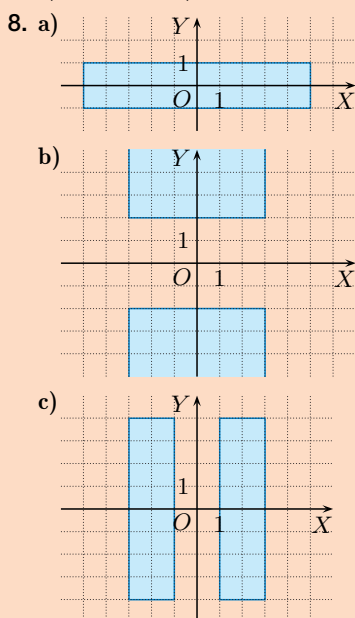
Ćwiczenie 5

- a) $x \in (-8; 8)$
b) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$
c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -\pi) \cup \langle \pi; \infty \rangle$

Odpowiedzi do zadań

- $x + |x| = 0, x - 2|x| = -9$
 - $x + |x| = 0, x - 2|x| = 12 - 6\sqrt{6}$
 - $x + |x| = 12\sqrt{2} - 16, x - 2|x| = -6\sqrt{2} + 8$
 - $x + |x| = 0, x - 2|x| = 3\pi - 6\sqrt{3}$
- $x = -4, x = 4$
 - $x = -14, x = 14$
 - $x = -6, x = 6$
 - $x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{4}$
 - $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$
 - $x = -8, x = 8$
 - $x = -1, x = 1$
 - $x = -4, x = 4$
- $|x| > -7$ dla $x \in \mathbf{R}, |x| < -7$ dla $x \in \emptyset$
 - $|x| \geq -3$ dla $x \in \mathbf{R}, |x| \leq -3$ dla $x \in \emptyset$
- $(-4; -1) \cup (1; 4), 4$
 - $(-6; 0) \cup (0; 6), 10$
 - $\langle -5; -2 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle, 8$
 - $\langle -\pi; -3 \rangle \cup \langle 3; \pi \rangle, 2$
 - $(-3; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 3), 4$
 - $\langle -6; -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}; 6 \rangle, 10$
 - $\langle -\frac{9}{2}; -\frac{5}{2} \rangle \cup \langle \frac{5}{2}; \frac{9}{2} \rangle, 4$
 - $(-5; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 5), 6$

5. a) $5 - 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2} - 1$



Zadania

- Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.
 - $x = -3$
 - $x = 4 - 2\sqrt{6}$
 - $x = 6\sqrt{2} - 8$
 - $x = \pi - 2\sqrt{3}$
- Wyznacz liczby spełniające równanie.
 - $2|x| = 8$
 - $\frac{2}{3}|x| = 4$
 - $3|x| + 6 = 7$
 - $3 - 2|x| = 1$
 - $\frac{1}{2}|x| = 7$
 - $-3|x| = -\frac{3}{4}$
 - $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$
 - $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$
- Która nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a która nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej?
 - $|x| > -7, |x| < -7$
 - $|x| \geq -3, |x| \leq -3$
- Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów. Ile liczb całkowitych należy do tego zbioru?
 - $1 < |x| < 4$
 - $2 \leq |x| \leq 5$
 - $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$
 - $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$
 - $0 < |x| < 6$
 - $3 \leq |x| \leq \pi$
 - $\sqrt{3} < |x| \leq 6$
 - $\sqrt{2} < |x| < 5$
- Oblicz.
 - $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(7 - 3\sqrt{5})^2}$
 - $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$
- Uzasadnij, że:
 - $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = |\sqrt{2} - 2|,$
 - $\sqrt{24 - 8\sqrt{5}} = |2 - 2\sqrt{5}|,$
 - $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 2|,$
 - $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = |3 - 2\sqrt{3}|.$
- Do każdego z przedstawionych zbiorów punktów płaszczyzny dopasuj warunki, które spełniają współrzędne (x, y) tych punktów.

I. $ x \geq 2$ i $ y \leq 1$	II. $ x \geq 2$ i $ y \geq 1$	III. $ x \leq 2$ i $ y \leq 1$
A	B	C
- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.
 - $|x| \leq 5$ i $|y| \leq 1$
 - $|x| \leq 3$ i $|y| \geq 2$
 - $1 \leq |x| \leq 3$ i $|y| \leq 4$
- $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = |\sqrt{3} + 2|$
 - $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 - 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2|$
 - $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{9 + 12\sqrt{2} + 8} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^2} = |3 + 2\sqrt{2}|$
 - $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = \sqrt{9 - 12\sqrt{3} + 12} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} = |3 - 2\sqrt{3}|$
- I - B, II - C, III - A

Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach

Przykład 1

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} = |2 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbf{Z}$.

Przykład 2

Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ próbujemy zapisać jako kwadrat różnicy metodą prób i błędów:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(1 - 3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3,$$

czyli dana liczba jest całkowita.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby wykazać, że liczba a jest wymierna, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy kwadrat liczby a :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ (sprawdź), czyli:

$$a = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

co oznacza, że a jest liczbą wymierną.

D 1. Wykaż, że:

$$\text{a) } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 5, \quad \text{b) } 3\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} = 10.$$

$$\begin{aligned} \text{1. a) } \sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4} + \sqrt{3 - 6\sqrt{3} + 9} &= \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} = \\ &= |\sqrt{3} + 2| + |\sqrt{3} - 3| = \sqrt{3} + 2 + 3 - \sqrt{3} = 5 \end{aligned}$$

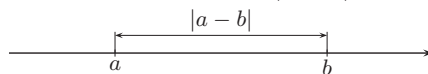
$$\begin{aligned} \text{b) } 3\sqrt{9 + 6\sqrt{2} + 2} - \sqrt{18 - 6\sqrt{2} + 1} &= 3\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3\sqrt{2} - 1)^2} = \\ &= 3|3 + \sqrt{2}| - |3\sqrt{2} - 1| = 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = 10 \end{aligned}$$

Uczeń:

- stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej,
- korzystając z własności wartości bezwzględnej, rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną,
- korzystając z własności wartości bezwzględnej, upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną.

2.11. Własności wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby a jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0. Ogólnie odległość na osi liczbowej między liczbami a i b jest równa $|a - b|$.



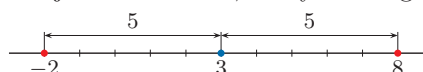
$$|a - b| = |b - a|$$

Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami b i a .

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|x - 3| = 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 3 wynosi 5.



Zatem $x = -2$ lub $x = 8$.

Sprawdzenie:

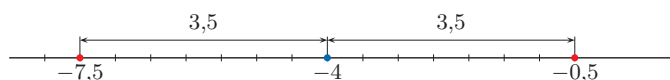
dla $x = -2$: $|-2 - 3| = |-5| = 5$,

dla $x = 8$: $|8 - 3| = |5| = 5$.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x + 4| = 3,5$.

Równanie zapisujemy w postaci: $|x - (-4)| = 3,5$ i szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od -4 wynosi $3,5$.



Zatem $x = -7,5$ lub $x = -0,5$.

Sprawdzenie:

dla $x = -7,5$: $|-7,5 + 4| = |-3,5| = 3,5$,

dla $x = -0,5$: $|-0,5 + 4| = |3,5| = 3,5$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x - 4| = -2$.

$$|a| \geq 0 \text{ dla dowolnego } a \in \mathbf{R}.$$

Równanie jest sprzeczne (nie ma rozwiązań).

Ćwiczenie 1

- a) $x = -1$ lub $x = 5$
- b) $x = 0,5$ lub $x = 7,5$
- c) $x = -8$ lub $x = -4$
- d) $x = 5$ lub $x = 7$
- e) $x = -2 - \sqrt{3}$
lub $x = -2 + \sqrt{3}$
- f) sprzeczne
- g) $x = -\frac{3}{4}$ lub $x = \frac{1}{4}$
- h) $x = -9$

Ćwiczenie 1

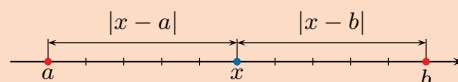
Rozwiąż równanie.

- | | | | |
|--------------------|------------------|-------------------------|--------------------------------------|
| a) $ x - 2 = 3$ | c) $ x + 6 = 2$ | e) $ 2 + x = \sqrt{3}$ | g) $ x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ |
| b) $ x - 4 = 3,5$ | d) $ 6 - x = 1$ | f) $ x + 1 = -1$ | h) $ x + 9 = 0$ |

D Ćwiczenie 2

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że liczba $\frac{a+b}{2}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $|x - a| = |x - b|$.

Ćwiczenie 2



$|x - a|$ – odległość x od a

$|x - b|$ – odległość x od b

Jeżeli $a \neq b$, to jedynym punktem równo oddalonym od a i b jest $\frac{a+b}{2}$.

Jeżeli $a = b$, to równanie jest tożsamościowe.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|x - 2| < 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 2 jest mniejsza od 5.



Zatem $-3 < x < 7$, czyli $x \in (-3; 7)$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x - 7| < 3$ c) $|x + 6| > 1$ e) $|9 - x| \leq 7$ g) $|x + \frac{1}{5}| < 0,1$
b) $|x - 3| < 7$ d) $|x + 4| \geq 4$ f) $|5 + x| > 8$ h) $|x - \sqrt{7}| \geq \sqrt{7}$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x - 3| \geq 10$.

$$\sqrt{(x - 3)^2} + |x - 3| \geq 10$$

$$|x - 3| + |x - 3| \geq 10$$

$$2|x - 3| \geq 10$$

$$|x - 3| \geq 5$$

Korzystamy ze wzoru
na kwadrat różnicy.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 3 jest większa od 5 lub równa 5.



Zatem $x \leq -2$ lub $x \geq 8$, czyli $x \in (-\infty; -2] \cup [8; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $\sqrt{(x - 7)^2} + |x - 7| \leq 5$ b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x - 2| > 3$

Przykład 6

Rozwiąż nierówność $|3x - 6| < 9$.

$$|3x - 6| = |3(x - 2)| = |3||x - 2| = 3|x - 2|,$$

zatem:

$$3|x - 2| < 9$$

$$|x - 2| < 3$$

$$x \in (-1; 5)$$



Ćwiczenie 3

- a) $x \in (4; 10)$
b) $x \in (-4; 10)$
c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -8) \cup (0; \infty)$
e) $x \in (2; 16)$
f) $x \in (-\infty; -13) \cup (3; \infty)$
g) $x \in (-\frac{3}{10}; -\frac{1}{10})$
h) $x \in (-\infty; 0) \cup (2\sqrt{7}; \infty)$

Ćwiczenie 4

- a) $x \in (4\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2})$
b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3\frac{1}{2}; \infty)$

$$1. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$2. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 2, x = 6$
 b) $x = -2, x = 1$
 c) $x = -4, x = 8$
 d) $x = -9, x = -3$
 e) $x = 6, x = 14$
 f) $x = -\frac{5}{3}, x = \frac{7}{3}$
2. a) $x \in \langle -6; 2 \rangle$
 b) $x \in (-\infty; 1) \cup \langle 5; \infty \rangle$
 c) $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$
 d) $x \in (3; 9)$
 e) $x \in (-\infty; -6) \cup \langle -2; \infty \rangle$
 f) $x \in (-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5})$
 g) $x = 2$
 h) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-11\}$
 i) $x \in \mathbf{R}$
3. a) $x = -10, x = 0$
 b) $x = 1, x = 5$
 c) $x = 0, x = 2$
 d) $x = -2, x = 1$
 e) $x = -\frac{9}{2}, x = \frac{7}{2}$
 f) $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{8}{3}$
4. a) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$
 b) $x \in \mathbf{R}$
5. a) $x \geq 3$
 b) $x \leq 2$
 c) $x \leq -\sqrt{2}$
 d) $x \geq 2$
6. a) 0 b) 3 c) 2
7. $|x - a| < |x - b|$, gdy odległość x od a jest mniejsza od odległości x od b , czyli x leży na lewo od środka przedziału o końcach a i b , co oznacza, że $x < \frac{a+b}{2}$.

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $ 2x - 8 = 4$	c) $ \frac{1}{2}x - 1 = 3$	e) $ 10 - x = 4$
b) $ 4x + 2 = 6$	d) $ \frac{2}{3}x + 4 = 2$	f) $ 1 - 3x = 6$
2. Rozwiąż nierówność.

a) $ 2x + 4 \leq 8$	d) $ 2 - \frac{1}{3}x < 1$	g) $ 2x - 4 \leq 0$
b) $ 3x - 9 \geq 6$	e) $ \frac{5}{2}x + 10 \geq 5$	h) $ x + 11 > 0$
c) $ 2x + \frac{1}{2} > 2$	f) $ 0,75 + \frac{5}{4}x < \frac{1}{4}$	i) $ x - 3 \geq -1$
3. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{(x+5)^2} = 5$	c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1$	e) $\sqrt{\frac{1}{4} + x + x^2} = 4$
b) $\sqrt{(3-x)^2} = 2$	d) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 3$	f) $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = 6$
4. Rozwiąż nierówność.

a) $ x \leq \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$
b) $ x + 1 \geq \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 2)^2}$
5. Jakie liczby x spełniają równanie?

a) $ x - 3 = x - 3$	c) $ x + \sqrt{2} = -x - \sqrt{2}$
b) $ 3x - 6 = 6 - 3x$	d) $\sqrt{(x-2)^2} = x - 2$
6. Uprość wyrażenie dla $x < 0$.

a) $\sqrt{x^2} + x$	b) $\sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{x^2}$	c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x$
---------------------	----------------------------------	------------------------------
- D 7. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że jeśli $a < b$, to zbiorem rozwiązań nierówności $|x - a| < |x - b|$ jest przedział $(-\infty; \frac{a+b}{2})$.
- D 8. Wykaż, że wyrażenie przyjmuje stałe tę samą wartość dla podanych wartości x .

a) $ -x + 2 - x - 3 - 2x $ dla $x \geq 2$
b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + -x - -2x - 6 $ dla $x \leq -3$
- D 9. Wykaż, że jeśli $0 \leq a \leq b$, to $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} - \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{a}$.

8. a) Jeżeli $x \geq 2$, to $-x < 0$ oraz $2 - x \leq 0, 3 - 2x < 0$, zatem:
 $|-x| + |2 - x| - |3 - 2x| = -(-x) - (2 - x) + (3 - 2x) = x - 2 + x + 3 - 2x = 1$
 b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$
 Jeżeli $x \leq -3$, to $x+3 \leq 0, -x > 0, -2x - 6 \geq 0$, zatem:
 $|x+3| + |-x| - |-2x-6| = -(x+3) + (-x) - (-2x-6) = -x-3-x+2x+6 = 3$

9. $\sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} - \sqrt{a - 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} =$
 $= |\sqrt{a} + \sqrt{b}| - |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b} + (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{a}$

2.12. Zagadnienia uzupełniające

■ Logika matematyczna

Sposoby budowania zdań w języku, którym porozumiewamy się na co dzień są określone przez reguły gramatyki. W matematyce podobną rolę odgrywają reguły **logiki matematycznej**. Odnoszą się one do zdań, którym można w jednoznaczny sposób przypisać wartość logiczną: **prawdy** lub **fałszu**. Stosowane są oznaczenia: 1 (prawda), 0 (fałsz).

Na przykład:

- a) $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. fałsz 0
b) Każdy prostokąt jest równoległobokiem. prawda 1
c) Każdy równoległobok jest prostokątem. fałsz 0

Uwaga. Reguły logiki można stosować również do zdań o treści niematematycznej.

Ze zdań składowych (będziemy je oznaczać literami: $p, q, r, \dots$) możemy tworzyć zdania złożone przy użyciu spójników logicznych: „nie”, „lub”, „i”, „jeżeli..., to...”, „wtedy i tylko wtedy, gdy...”.

Negacja zdania

Rozpatrzmy dwa zdania: zdanie p i jego zaprzeczenie – zdanie *Nieprawda, że p* , co zapisujemy $\sim p$. Na przykład:

- p : 7 jest liczbą ujemną. 0
 $\sim p$: Nieprawda, że 7 jest liczbą ujemną. 1

Zdanie p jest fałszywe, zdanie $\sim p$ – prawdziwe.

Zwróć uwagę, że z dwóch zdań, p i $\sim p$, zawsze jedno jest prawdziwe, a jedno fałszywe.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Jeśli zdanie p jest prawdziwe,
to zdanie $\sim p$ jest fałszywe.
Jeśli zdanie p jest fałszywe,
to zdanie $\sim p$ jest prawdziwe.

1. Jeżeli zdanie p ma postać $\sqrt{8} < 3$, to zdanie $\sim p$ ma postać $\sqrt{8} \geq 3$. Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 1 i 0.
- a) Sformułuj zdanie $\sim p$, jeżeli p ma postać $\sqrt{625} \neq 25$. Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.
- b) Sformułuj zdanie p , jeżeli $\sim p$ ma postać *100 jest liczbą nieparzystą*. Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Zdanie $\sim p$: $\sqrt{625} = 25$.
Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 0 i 1.
b) Zdanie p :
100 jest liczbą parzystą.
Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 1 i 0.

Koniunkcja zdań

Niech p oznacza zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 2*, a q zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 3*. Zdanie $p \wedge q$ (p i q) będzie brzmiało: *Liczba 12 jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3*.

Przyjmujemy, że zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe jedynie wtedy, gdy oba zdania p , q są prawdziwe.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Interpretacją fizyczną koniunkcji zdań $p \wedge q$ jest układ dwóch wyłączników połączonych szeregowo. Każdy z wyłączników może być włączony (stan 1) lub wyłączony (stan 0). Przepływ prądu nastąpi tylko wtedy, gdy oba wyłączniki są w stanie 1.



Oba wyłączniki w stanie 0



Oba wyłączniki w stanie 1

2. a) Zdania: p , q , $p \wedge q$ są prawdziwe.
 b) Zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q – fałszywe. Zdanie $p \wedge q$ jest fałszywe.
 c) Zdanie p jest fałszywe, a zdanie q – prawdziwe. Zdanie $p \wedge q$ jest fałszywe.
 d) Zdania: p , q , $p \wedge q$ są fałszywe.

2. Zapisz zdanie $p \wedge q$. Określ prawdziwość zdań p , q oraz koniunkcji $p \wedge q$.

a) $p: 2|20$, $q: 5|20$

c) $p: -2 < (-2)^3$, $q: 2 < 2^3$

b) $p: 3|39$, $q: 9|39$

d) $p: \sqrt{221} \in \mathbf{Q}$, $q: \sqrt{212} \in \mathbf{Q}$

Alternatywa zdań

Niech p oznacza zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 4*, a q zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 3*. Wtedy zdanie $p \vee q$ (p lub q) będzie brzmiało: *Liczba 92 jest podzielna przez 4 lub jest podzielna przez 3*.

Zdanie $p \vee q$ jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe co najmniej jedno ze zdań p , q .

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Interpretacją fizyczną alternatywy zdań $p \vee q$ jest układ dwóch wyłączników połączonych równolegle. Na rysunku oba wyłączniki są w stanie 0. Przepływ prądu nastąpi wtedy, gdy którykolwiek z wyłączników zostanie włączony (będzie w stanie 1).



3. Podaj wartość logiczną zdania.

a) $(-6)^2 = 36 \vee 6^2 = 36$

d) $-\sqrt{2} < -2 \vee \sqrt{2} > 2$

b) $19^2 = 361 \vee 19^2 = 381$

e) $|-a| = |a| \vee |-a| = -a$

c) $-2 > -1 \vee (-2)^2 > (-1)^2$

f) $|-a| = a \vee |-a| = -|a|$

3. a) Zdanie prawdziwe (oba zdania składowe są prawdziwe).
 b) Zdanie prawdziwe – prawdziwe jest zdanie $19^2 = 361$.
 c) Zdanie prawdziwe – prawdziwe jest zdanie $(-2)^2 > (-1)^2$.
 d) Zdanie fałszywe (oba zdania składowe są fałszywe).
 e) Zdanie prawdziwe – prawdziwe jest zdanie $|-a| = |a|$.
 f) Zdanie fałszywe (oba zdania składowe są fałszywe).

Implikacja zdań

Zdanie: *Jeśli 1035 jest liczbą podzielną przez 9, to jest liczbą podzielną przez 3* możemy zapisać symbolicznie: $9|1035 \Rightarrow 3|1035$. Jest to przykład implikacji. Zdanie p nazywamy **poprzednikiem**, a zdanie q – **następnikiem** implikacji $p \Rightarrow q$.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy prawdziwy jest jej poprzednik i fałszywy jej następnik.

Implikacja pojawia się bardzo często we wnioskowaniu matematycznym. Zwróć uwagę na dwa ostatnie wiersze tabeli: wnioskowanie rozpoczynające się od fałszywego poprzednika jest zawsze prawdziwe.

4. Podaj wartość logiczną poprzednika, następnika i implikacji.

a) $0 > 1 \Rightarrow 5 = 5$

c) $4|12 \Rightarrow 2|12$

b) $2 + 2 = 5 \Rightarrow 2 + 2 = 50$

d) $5|25 \Rightarrow 10|25$

Równoważność zdań

Równoważność zdań p i q jest to zdanie postaci: p wtedy i tylko wtedy, gdy q (sformułowanie „wtedy i tylko wtedy, gdy” oznaczamy symbolem $\Leftrightarrow$). Zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwe, gdy oba zdania p, q mają tę samą wartość logiczną. Na przykład:

a) $-3 < 2 \Leftrightarrow 2 < 3$ – równoważność jest prawdziwa,

zdanie prawdziwe zdanie prawdziwe

b) $-3 > 2 \Leftrightarrow 2 > 3$ – równoważność jest prawdziwa,

zdanie fałszywe zdanie fałszywe

c) $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^3 = 3^3$ – równoważność jest fałszywa.

zdanie prawdziwe zdanie fałszywe

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

5. Podaj wartość logiczną każdego ze zdań składowych i zdania złożonego.

a) $2 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 < 0$

c) $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^4 = 3^4$

b) $\sqrt{5^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-5)^2} = -5$

d) $(-2)^3 = 2^3 \Leftrightarrow (-2)^6 = 2^6$

5. a) Obydwa zdania fałszywe, równoważność prawdziwa.

b) Pierwsze zdanie prawdziwe, drugie fałszywe, równoważność fałszywa.

c) Obydwa zdania prawdziwe, równoważność prawdziwa.

d) Pierwsze zdanie fałszywe, drugie prawdziwe, równoważność fałszywa.

4. a) Poprzednik fałszywy, następnik prawdziwy, implikacja prawdziwa.

b) Poprzednik fałszywy, następnik fałszywy, implikacja prawdziwa.

c) Poprzednik i następnik prawdziwe, implikacja prawdziwa.

d) Poprzednik prawdziwy, następnik fałszywy, implikacja fałszywa.

Prawa rachunku zdań

Spośród zdań złożonych, które możemy zapisać za pomocą spójników: $\sim, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, szczególną rolę odgrywają zdania, których wartość logiczna zawsze jest równa 1 (są zawsze prawdziwe). Takie zdania nazywamy **prawami rachunku zdań**.

Przykład 1

Wykaż, że zdanie: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ – *zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń* – jest prawem rachunku zdań.

W tym celu sporządzamy tabelę.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W ostatniej kolumnie, bez względu na wartość logiczną zdań p i q , zawsze otrzymujemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem jest ono prawem rachunku zdań. Zdanie to jest znane jako jedno z **praw De Morgana**.

8. Dla trzech zdań: p, q i r wszystkie możliwości sprawdzamy w tabeli, której pierwsze trzy kolumny wyglądają w następujący sposób:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

a) i e) nie są prawami rachunku zdań.

- D** 6. Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q)) \quad \text{drugie z praw De Morgana}$$

- D** 7. Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

- a) $(\sim p) \vee p$ prawo wyłączonego środka
- b) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia
- c) $\sim(p \wedge \sim p)$ prawo sprzeczności
- d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ prawo odrywania
- e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo transpozycji
- f) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia implikacji

8. Sprawdź, czy podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

- a) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
- b) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
- c) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
- d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- e) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- f) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

6.

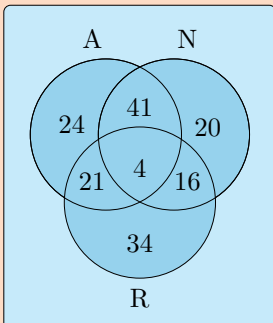
p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Wśród 180 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą znajomości języków obcych. Otrzymano następujące wyniki: 90 studentów zna język angielski, 81 – niemiecki, 75 – rosyjski, 45 – angielski i niemiecki, 25 – angielski i rosyjski, 20 – niemiecki i rosyjski, a 4 – wszystkie trzy języki. Ilu spośród ankietowanych studentów nie zna żadnego z tych języków?
- Dane są zbiory: A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 15, B – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, D – zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypisz wszystkie elementy zbioru:
 - $A \cap B$,
 - $A \setminus C$,
 - $A \cap B \cap C$,
 - $A \setminus (B \cup C)$,
 - $A \cap (D \setminus B)$,
 - $A \setminus (B \setminus D)$.
- Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
 - $A = \langle -1; 4 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$
 - $A = \langle 2; 7 \rangle$, $B = \langle 3; 5 \rangle$
 - $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 9 \rangle$
 - $A = (-\infty; 0) \cup (1; 2)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$
 - $A = (-\infty; -1) \cup \langle 3; 5 \rangle$, $B = (-2; 4)$
 - $A = (-1; 2) \cup (5; \infty)$, $B = \langle 0; 5 \rangle$
- Wykonaj mnożenie.
 - $(a + 2b + 3)(a - 2)$
 - $(2a - b + c)(2a - 3b)$
 - $(a + 2b - 3c)(2a - 3b)$
 - $-4(x^2 - 2y)(2x^2 - y)$
 - $2x(3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$
 - $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$
- Wskaż liczbę całkowitą k , dla której $x \in \langle k; k + 1 \rangle$.
 - $x = \sqrt[3]{17}$
 - $x = \sqrt[3]{-25}$
 - $x = (3 - 2\sqrt{2})^2$
 - $x = \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$
- Ile liczb naturalnych spełnia nierówność?
 - $\frac{2x+1}{2} - 2 < x - \frac{x-3}{3}$
 - $\frac{1}{2}x - \frac{6x-3}{4} \geq -2 - \frac{2x-1}{3}$
 - $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} \geq \frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{5}$
 - $\frac{2-x}{2} - \frac{1}{3}x > \frac{1-4x}{5} - \frac{3-x}{2}$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.
 - $|x| > 1$ i $|x| \leq 9$
 - $|x| \geq 2$ i $|x - 2| < 4$
 - $|x| < 4$ i $|x + 1| \geq 2$
- Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 3| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : |x + 2| \geq 3\}$ i $C = \{x \in \mathbf{R} : |x| \geq 3\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:
 - $A \cap B$,
 - $A \setminus B$,
 - $B \setminus A$,
 - $(A \cup C) \setminus B$,
 - $(A \setminus B) \cup C$.
- $a^2 + 2ab + a - 4b - 6$
 - $4a^2 - 8ab + 3b^2 + 2ac - 3bc$
 - $2a^2 + ab - 6b^2 - 6ac + 9bc$
 - $-8x^4 + 20x^2y - 8y^2$
 - $-18x^5 + 24x^3y - 8xy^2$
 - $x^4 - y^4$
- $\langle -9; -1 \rangle \cup (1; 9)$
 - $\langle 2; 6 \rangle$
 - $\langle -4; -3 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$
- $A = (-1; 7)$,
 $B = (-\infty; -5) \cup \langle 1; \infty \rangle$,
 $C = (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 - $A \cap B = \langle 1; 7 \rangle$
 - $A \setminus B = (-1; 1)$
 - $B \setminus A = (-\infty; -5) \cup \langle 7; \infty \rangle$
 - $(A \cup C) \setminus B = (-5; -3) \cup (-1; 1)$
 - $(A \setminus B) \cup C = (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup \langle 3; \infty \rangle$

Odpowiedzi do zadań

- 

Nie zna żadnego z tych języków:
 $180 - (24 + 20 + 34 + 41 + 16 + 21 + 4) = 180 - 160 = 20$ studentów.

 - $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
 - $\{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$
 - $\{3\}$
 - $\{1, 4, 8, 10, 14\}$
 - $\{1, 5, 13\}$
 - $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$
 - $A \cap B = \langle 2; 4 \rangle$,
 $A \cup B = \langle -1; 5 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -1; 2 \rangle$, $B \setminus A = \langle 4; 5 \rangle$
 - $A \cap B = \langle 3; 5 \rangle$,
 $A \cup B = \langle 2; 7 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 2; 3 \rangle \cup (5; 7)$,
 $B \setminus A = \emptyset$
 - $A \cap B = \{2\}$,
 $A \cup B = \langle -4; 9 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -4; 2 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 2; 9 \rangle$
 - $A \cap B = \{0\} \cup (1; 2)$,
 $A \cup B = (-\infty; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$,
 $B \setminus A = (0; 1) \cup \langle 2; 4 \rangle$
 - $A \cap B = (-2; -1) \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $A \cup B = (-\infty; 5)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2) \cup \langle 4; 5 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle -1; 3 \rangle$
 - $A \cap B = \langle 0; 2 \rangle$,
 $A \cup B = (-1; 5) \cup (5; \infty)$,
 $A \setminus B = (-1; 0) \cup (5; \infty)$,
 $B \setminus A = \langle 2; 5 \rangle$

1. a) $X = Z$ b) $X = Y$

c) $X = Y$

2. a) $A = (-2; 0) \cup (0; 2)$,
 $B = (-\infty; 4) \cup (6; \infty)$,
 zatem $A \subset B$.

b) $A = (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$,
 $B = (-\infty; -5) \cup (11; \infty)$,
 zatem $B \subset A$.

c) $A = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$,
 $B = (-3; 13)$,
 zatem $A \not\subset B$ i $B \not\subset A$.

3. a) $-2 + 2\sqrt{3}$ b) $8 + 7\sqrt{6}$

c) $-24 + 6\sqrt{2}$ d) $-22\sqrt{5} + 40$

e) 28 f) $24\sqrt{2}$

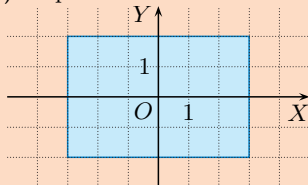
g) $4 + 4\sqrt{3}$ h) $48 - 16\sqrt{5}$

4. a) $(\frac{2}{7}; 1)$ b) $(\frac{1}{2}; \frac{9}{2})$

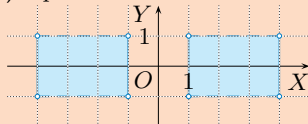
c) $(-\infty; \frac{3}{4})$ d) $\emptyset$

e) $(-\infty; \frac{1}{2})$ f) $(-\infty; 1)$

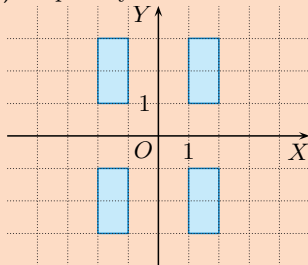
5. a) 35 punktów



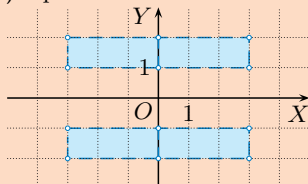
b) 8 punktów



c) 24 punkty



d) 0 punktów



6. a) Niech $p = 4x + 1$

i $q = 4y + 3$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Stąd $p^2 = 16x^2 + 8x + 1 =$

$= 4(4x^2 + 2x) + 1,$

$q^2 = 16y^2 + 24y + 9 =$

$= 4(4y^2 + 6y + 2) + 1$

Zatem reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 4 są równe 1.

Zestaw II

1. Wśród zbiorów: X, Y, T wskaż parę zbiorów równych.

a) $X = (-4; 2) \cap \mathbb{Z}$, $Y = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 4\}$, $T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $X = (2; 7) \cup \{7\}$, $Y = \langle 2; 7 \rangle \setminus \{2\}$, $T = (2; 4) \cup (4; 7)$

c) $X = \{x \in \mathbb{N} : |x| \leq 6\}$, $Y = (-7; 7) \cap \mathbb{N}$, $T = \mathbb{N} \setminus \{5; 8\}$

2. Sprawdź, czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| \geq 1\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 6| > 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 10x + 25} < 8\}$

3. Oblicz.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$

e) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - \sqrt{2})$

f) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$

c) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 6\sqrt{3})$

g) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

d) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{10})(-3\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$

h) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - x \\ (x - \frac{1}{2})^2 + 0,75x \geq x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 - x^2 - (x - 2)^2 \leq 6 - 2(x + 4)^2 \\ (4 - x)^2 - (6 - x)^2 \geq \frac{11}{4} - \frac{0,5 - \frac{1}{2}x}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2 - x)^2 \leq (x + 1)^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -4(4 - x)^2 < 8 - (4 - 2x)^2 \\ \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x+4)}{2} > 0,25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 \geq x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}+1} + 4x(1-x) > \sqrt{2}x - (1-2x)^2 \\ \frac{1-x^4}{x^2+1} - 2x \geq 2x - (3-x)^2 \end{cases}$

5. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?

a) $|x| \leq 3$ i $|y| \leq 2$

c) $1 \leq |x| \leq 2$ i $1 \leq |y| \leq 3$

b) $1 \leq |x| \leq 4$ i $|y| < 1$

d) $0 < |x| < 3$ i $1 < |y| < 2$

6. a) Liczby p i q przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio: 1 i 3. Wykaż, że reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 4 są równe.

b) Liczby p i q przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio: k i l , gdzie $k < l$, a reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 5 są równe. Wyznacz k i l .

6. b) Niech $p = 5x + k$ i $q = 5y + l$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $k < l$.

Stąd $p^2 = 25x^2 + 10kx + k^2 = 5(5x^2 + 2kx) + k^2$ i analogicznie $q^2 = 5(5y^2 + 2ly) + l^2$.

Przy dzieleniu przez 5 możemy otrzymać jedną z reszt: 0, 1, 2, 3, 4.

Z założenia $k < l$, czyli $k \in \{1, 2, 3\}$ oraz $l \in \{2, 3, 4\}$. Resztę 0 wykluczaliśmy z rozważań, ponieważ oznaczałoby to, że liczby p^2 i q^2 są podzielne przez 5, a co za tym idzie p i q również byłyby podzielne przez 5, a to jest sprzeczne z założeniem $k < l$.

$k = 1 : p^2 = 5(5x^2 + 2x) + 1$, $k = 2 : p^2 = 5(5x^2 + 4x) + 4$

$k = 3 : p^2 = 5(5x^2 + 6x) + 9 = 5(5x^2 + 6x + 1) + 4$

$l = 2 : q^2 = 5(5y^2 + 4y) + 4$, $l = 3 : q^2 = 5(5y^2 + 6y + 1) + 4$

$l = 4 : q^2 = 5(5y^2 + 8y) + 16 = 5(5y^2 + 8y + 3) + 1$

Zatem $k = 1$ i $l = 4$ lub $k = 2$ i $l = 3$.

**Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, liczbę tę przedstawiliśmy w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych. Sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S .

$$\begin{aligned} S &= (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych. Podobnie jak w przykładzie 1 sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \dots\}$
 $B = \{1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots\}$
 $B \setminus A = \{8, 27, 125, 216, \dots\}$
Do zbioru $B \setminus A$ należą trzy liczby mniejsze od 200.
2. $-x < \frac{1}{1-\sqrt{2}}$, czyli
 $x > \sqrt{2} + 1$
Jednocześnie
 $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$
3. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{ab}$
5. $(x-y)(x+y) = 48$, zatem $x-y$ i $x+y$ są naturalnymi dzielnikami 48,
 $x-y < x+y$ oraz są tej samej parzystości, czyli:
$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=24 \end{cases}$$
lub
$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=12 \end{cases}$$
lub
$$\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=8 \end{cases}$$

Stąd $x = 13, y = 11$
lub $x = 8, y = 4$
lub $x = 7, y = 1$.
10. A. $x = -8$ lub $x = 4$
B. $x = -3$ lub $x = 5$
C. $x = -3$ lub $x = 1$
D. $x = 0$ lub $x = 6$
11. A. $x \in \langle -4; 6 \rangle$
B. $x \in \langle 2; 4 \rangle$
C. $x \in (-4; -2)$
D. $x \in (-4; 8)$
1. A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześciątów.
Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?
A. 5 B. 4 **C. 3** D. 0
2. Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $-x < \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest:
A. 4, **B. 3,** C. 2, D. 0.
3. Wyrażenie $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 3 - \sqrt{2}$ jest równe:
A. $\frac{1}{7}$ B. 6, C. 9, D. $2\sqrt{2}$.
4. Liczba π należy do przedziału:
A. $(-\infty; 3,14)$, B. $(-\infty; 3,14]$, **C. $(3,14; \infty)$,** D. $(\pi; \infty)$.
5. Ile jest par liczb naturalnych (x, y) takich, że $x^2 - y^2 = 48$?
A. 3 B. 5 C. 10 D. 12
6. Jeśli liczbę $(6 - 3\sqrt{3})^2 - (5 - 2\sqrt{3})^2$ zapisano w postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$, to:
A. $b = -16$, B. $b = 16$, C. $b = -56$, D. $b = 56$.
7. Równanie $(\sqrt{2}x + 1)^2 = 2(x^2 + x + 1)$ spełnia liczba:
A. $\frac{1}{4}(\sqrt{2} + 1)$, **B. $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$,** C. $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$, D. $\frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)$.
8. Liczba $a - (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$ jest liczbą wymierną dla a równego:
A. $-6\sqrt{2}$, B. $-3\sqrt{2}$, C. $3\sqrt{2}$, D. $6\sqrt{2}$.
9. Dla $x = -4$ prawdziwa jest równość:
A. $|x - |x|| = 8$, C. $|-x - |-x|| = 8$,
B. $|x + |x|| = 4$, D. $|x - |-x|| = 0$.
10. Do przedziału $\langle -2; 6 \rangle$ należą wszystkie rozwiązania równania:
A. $|x + 2| = 6$, B. $|x - 1| = 4$, C. $|x + 1| = 2$, **D. $|x - 3| = 3$.**
11. Dokładnie trzy liczby całkowite spełniają nierówność:
A. $|x - 1| \leq 5$, **B. $|x - 3| \leq 1$,** C. $|x + 3| < 1$, D. $|x - 2| < 6$.

6. $36 - 36\sqrt{3} + 27 - (25 - 20\sqrt{3} + 12) = 26 - 16\sqrt{3}$

7. $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 2x^2 + 2x + 2$
 $(2\sqrt{2} - 2)x = 1$, czyli $x = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

8. $a - (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = a - 9 + 6\sqrt{2}$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$ dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

D Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D Zadanie 4 (2 pkt)

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b spełniona jest nierówność $a^2 \geq b(2a - b)$.

Zadanie 5 (2 pkt)

Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $(2 - \sqrt{3})^{-1} \leq |x| < 9$?

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

Dane są zbiory $A = \left\{x \in \mathbf{R}: 3 - x < \frac{1}{1-\sqrt{3}}\right\}$ oraz $B = \langle -5; 5 \rangle$. Wyznacz zbiór $B \setminus A$.

D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $\left(\frac{7}{2}; \infty\right)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

Zadanie 8 (4 pkt)

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

Zadanie 9 (5 pkt)

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x\right) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$

D Zadanie 10 (4 pkt)

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

9. $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 4\frac{1}{2} \right\rangle$

Obie nierówności spełniają cztery liczby całkowite: 1, 2, 3, 4.

10. Cztery kolejne liczby nieparzyste: $2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} S &= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 + (2n+7)^2 = \\ &= 16n^2 + 64n + 84 = 8(2n^2 + 8n + 10) + 4 \end{aligned}$$

Ponieważ $2n^2 + 8n + 10$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 8 jest równa 4.

1. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (x - 4y)^2 - (4y + x)^2 &= \\ &= -16xy \\ -16xy &= -16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. $9 - 12x + 4x^2 \leq 4x^2 - 3$

$$x \geq 1, \text{ czyli } x \in \langle 1; \infty \rangle$$

3. Rozważmy dwie kolejne liczby nieparzyste: $2n+1$ i $2n+3$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Wówczas różnica:

$$\begin{aligned} (2n+3)^2 - (2n+1)^2 &= \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 = \\ &= 8n + 8 = 8(n+1) \end{aligned}$$

jest podzielna przez 8.

4. $a^2 \geq 2ab - b^2$

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ (a - b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$.

5. $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,7$

$$x \in (-9; -2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; 9)$$

Warunek ten spełnia 10 liczb całkowitych.

6. $A = \left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$

$$B \setminus A = \left\langle -5; \frac{7+\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

7. $(2 - \sqrt{2})x \geq 2$

$$\begin{aligned} x &\geq \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = \\ &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$x \in \langle 2 + \sqrt{2}; \infty \rangle$$

$$2 + \sqrt{2} < 2 + 1,5 = \frac{7}{2}$$

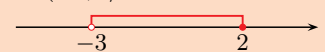
$$\left(\frac{7}{2}; \infty\right) \subset \langle 2 + \sqrt{2}; \infty \rangle$$

Zatem każda liczba:

$$x \in \left(\frac{7}{2}; \infty\right)$$

spełnia tę nierówność.

8. $x \in (-3; 2)$





1. $x > 100(1 + \sqrt{2}) \approx 241,42$

Należy zakodować: 242

2. $(A \cap B) \setminus C =$
 $= \langle -100; -8 \rangle \cup \langle 4; 36 \rangle$

Należy zakodować: 124

3. $x \in (-119; 122)$,
czyli $-119 < \sqrt{2}k < 122$,
stąd $\frac{-119\sqrt{2}}{2} < k < 61\sqrt{2}$
 $\frac{-119\sqrt{2}}{2} \approx -84,15$;
 $61\sqrt{2} \approx 86,27$
Zatem $A = \{-84, -83, \dots,$
 $84, 85, 86\}$

Szukana różnica:

$$86 - (-84) = 170$$

Należy zakodować: 170

4. $x, y \in \mathbf{Z}$ oraz $x \in \langle -27; 33 \rangle$
i $y \in \langle -62; 58 \rangle$,
stąd $m = 61 \cdot 121 = 7381$

Należy zakodować: 738

5. Z założenia $n = 3k + 1$ lub
 $n = 3k + 2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.
Wówczas $n^2 = (3k + 1)^2 =$
 $= 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
lub $n^2 = (3k + 2)^2 =$
 $= 9k^2 + 12k + 4 =$
 $= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Zatem reszta z dzielenia n^2
przez 3 jest równa 1.

6. Przekształcamy nierówność
do postaci:
 $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 - 2xy + y^2 \geq 0$
Przekształcamy równoważnie
wyrażenie po lewej stronie
nierówności:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 + x^2 - 2xy +$$

$$+ y^2 = (\sqrt{2}x - 1)^2 + (x - y)^2$$

$$(\sqrt{2}x - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{i } (x - y)^2 \geq 0,$$

więc nierówność jest praw-

dziwa.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność:

$$-0,01x < \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

Zakoduj kolejne cyfry tej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dane są zbiory: $A = (-\infty; -6) \cup \langle 4; \infty)$, $B = \langle -100; 36 \rangle$ i $C = \langle -8; 4 \rangle$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru $(A \cap B) \setminus C$? Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jednostki otrzymanej liczby.

Zadanie 3 (2 pkt)

A jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych k takich, że liczba $\sqrt{2}k$ spełnia nierówność $|2x - 3| < 241$. Oblicz różnicę między największym a najmniejszym elementem zbioru A . Zakoduj kolejne cyfry otrzymanego wyniku.

Zadanie 4 (2 pkt)

Niech m będzie liczbą punktów (x, y) o obu współrzędnych całkowitych spełniających warunki: $|x - 3| \leq 30$ i $|y + 2| \leq 60$. Zakoduj cyfry tysięcy, setek i dziesiątek liczby m .

D Zadanie 5 (3 pkt)

Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

D Zadanie 6 (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnych liczb x i y zachodzi nierówność:

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 2xy - y^2$$

D Zadanie 7 (4 pkt)

Uzasadnij, że liczba $137^8 - 119^8$ jest podzielna przez 2^{11} .

Zadanie 8 (4 pkt)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność:

$$\sqrt{12 - 4\sqrt{3}x + x^2} < \frac{3}{2\sqrt{3}-3}$$

Zadanie 9 (5 pkt)

Dane są zbiory:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R}: x \leq \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} \right\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R}: |2x + 12| \geq 2\}$$

Wyznacz zbiór $B \setminus A$.

$$7. 137^8 - 119^8 = (137^4 - 119^4)(137^4 + 119^4) = (137^2 - 119^2)(137^2 + 119^2)(137^4 + 119^4) =$$

$$= (137 - 119)(137 + 119)(137^2 + 119^2)(137^4 + 119^4) = 9 \cdot 2^9 (137^2 + 119^2)(137^4 + 119^4)$$

Kwadrat i czwarta potęga liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą. Suma liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, czyli sumy $137^2 + 119^2$ oraz $137^4 + 119^4$ są podzielne przez 2. Zatem liczba $137^8 - 119^8$ jest podzielna przez $2^9 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11}$.

$$8. \sqrt{(x - 2\sqrt{3})^2} < \frac{3}{2\sqrt{3}-3} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3}$$

$$|x - 2\sqrt{3}| < 2\sqrt{3} + 3, -3 < x < 4\sqrt{3} + 3 \approx 9,93$$

Liczby całkowite spełniające nierówność: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

$$9. x \leq \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2} = |2\sqrt{3}-1| - |2\sqrt{3}-3| = 2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+3 = 2,$$

czyli $A = (-\infty; 2)$, $B = (-\infty; -7) \cup \langle -5; \infty)$, $B \setminus A = (2; \infty)$