

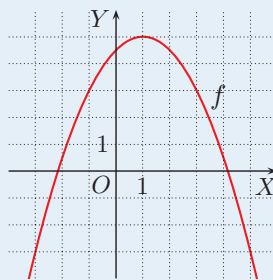


7 Wstęp do funkcji kwadratowej

Liny podtrzymujące most wiszący mają kształt paraboli (na zdjęciu most Golden Gate w San Francisco).

Funkcję postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Mówimy „parabola określona równaniem $y = ax^2 + bx + c$ ” lub krótko: „parabola $y = ax^2 + bx + c$ ”.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$.

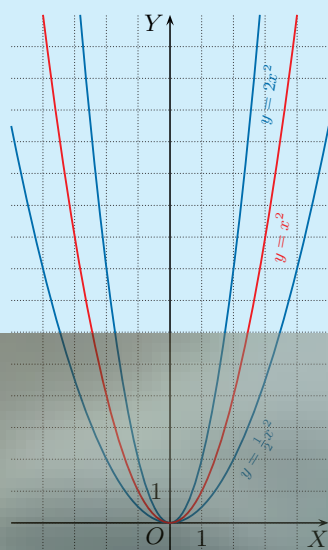


Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$,
- podaje własności funkcji $f(x) = ax^2$,
- stosuje własności funkcji $f(x) = ax^2$ do rozwiązywania zadań.

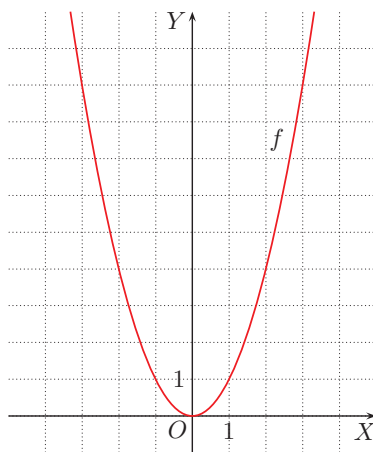
Ćwiczenie 1

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	4	1	0	1	4
$f_2(x)$	8	2	0	2	8
$f_3(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na rysunku poniżej przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $\langle 0; \infty \rangle$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:

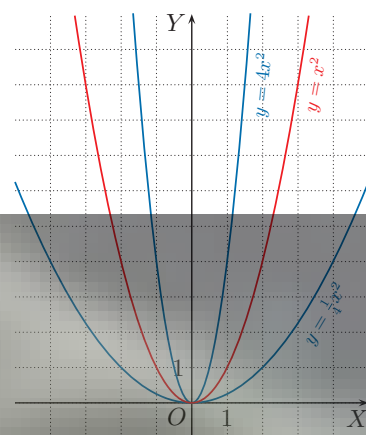


- ramiona paraboli są skierowane do góry,
- oś OY jest **osią symetrii** paraboli,
- punkt $(0,0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,
- funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0)$ i **rosnąca** w przedziale $(0; \infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,
- funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

Ćwiczenie 1

Sporządź odpowiednie tabele wartości funkcji i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion paraboli.



Ćwiczenie 2

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

- $P(-\frac{1}{4}, 1)$
- $P(4, 32)$
- $P(\frac{1}{2}, 1)$
- $P(-2, 16)$

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?

- $Q(1, 6)$
- $Q(2, 8)$
- $Q(-4, 8)$
- $Q(-8, 48)$

Ćwiczenie 2

- $4 \cdot (-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} \neq 1$ – nie należy
- $4 \cdot 4^2 = 64 \neq 32$ – nie należy
- $4 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 1$ – należy
- $4 \cdot (-2)^2 = 16$ – należy

Ćwiczenie 3

- $a \cdot 1^2 = 6$, zatem $a = 6$
- $a \cdot 2^2 = 8$, zatem $a = 2$
- $a \cdot (-4)^2 = 8$, zatem $a = 0,5$
- $a \cdot (-8)^2 = 48$, zatem $a = 0,75$

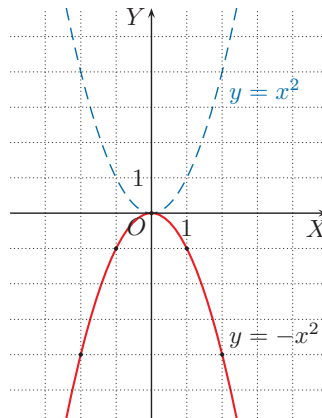
Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.1

Generator
testów i sprawdzianów

Wykres funkcji $y = -x^2$ można otrzymać, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = x^2$. Zwróć uwagę na to, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji $y = -x^2$ są skierowane w dół.



Ćwiczenie 4

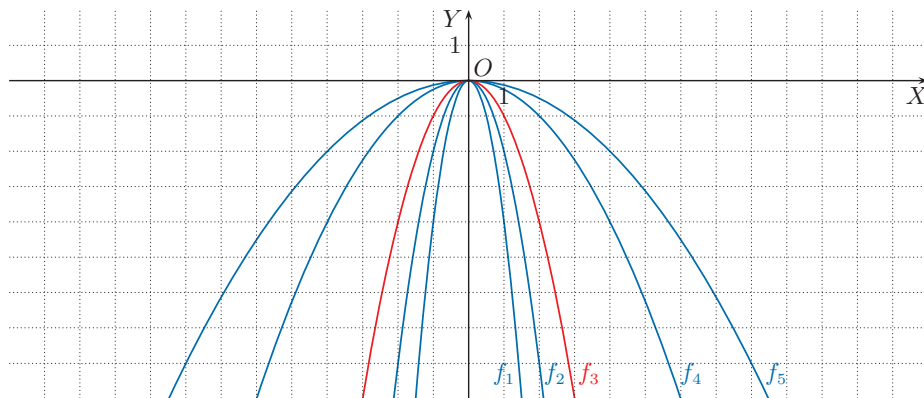
- Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.
- Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

Ćwiczenie 4

- rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $(0; \infty)$
- oś symetrii: $x = 0$, wierzchołek: $(0, 0)$

Ćwiczenie 5

Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 (rysunek poniżej) otrzymano, odbijając symetrycznie względem osi OX wykresy funkcji $y = \frac{1}{8}x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = x^2, y = 2x^2, y = 4x^2$. Podaj wzory funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .



Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2, a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$) czy do dołu (gdy $a < 0$) oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

Ćwiczenie 5

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -4x^2, \\ f_2(x) &= -2x^2, \\ f_3(x) &= -x^2, \\ f_4(x) &= -\frac{1}{4}x^2, \\ f_5(x) &= -\frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

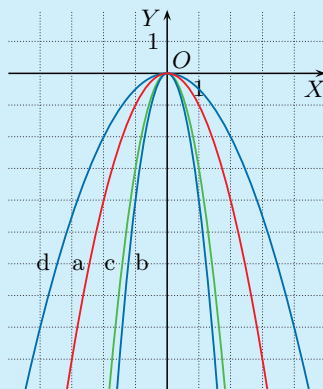
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, jeśli należy do niego punkt P . Podaj pięć punktów należących do wykresu funkcji f , których obie współrzędne są całkowite.

- $P(2, -4)$
- $P(\frac{1}{2}, -1)$
- $P(-\sqrt{2}, -6)$
- $P(-2\sqrt{2}, -4)$

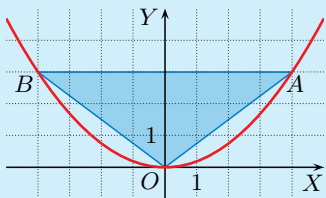
Ćwiczenie 6

Wzory funkcji i przykładowe punkty:

- $f(x) = -x^2, (-2, -4), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, -4)$
- $f(x) = -4x^2, (-2, -16), (-1, -4), (0, 0), (1, -4), (2, -16)$
- $f(x) = -3x^2, (-2, -12), (-1, -3), (0, 0), (1, -3), (2, -12)$
- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, (-4, -8), (-2, -2), (0, 0), (2, -2), (4, -8)$

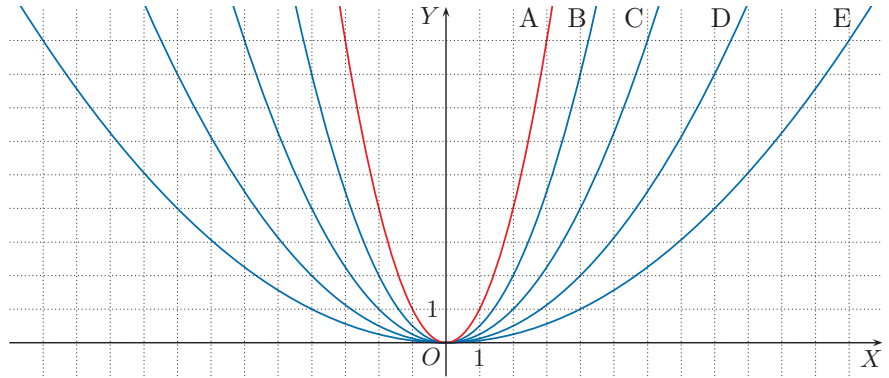


Odpowiedzi do zadań

- $f(D) = (-8; 0)$
 - $f(D) = \langle 0; 4 \rangle$
 - $f(D) = \langle 0; 12 \rangle$
 - $f(D) = (-8; -2)$
- $A: y = x^2, B: y = \frac{1}{2}x^2,$
 $C: y = \frac{1}{4}x^2, D: y = \frac{1}{8}x^2,$
 $E: y = \frac{1}{16}x^2$
- $y = x^2$
 - $y = \sqrt{2}x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2$
 - $y = -3x^2$
- $\frac{2}{3}$
 - 10
- Z warunków zadania:
 $A(-x, 4), B(x, 4)$
 oraz:
 $|x| = \frac{1}{2}|AB|$
 Po podstawieniu współrzędnych punktu A do równania paraboli otrzymujemy:
 $a(\frac{1}{2}|AB|)^2 = 4$
 i stąd $a = \frac{16}{|AB|^2}$.
 - $a = \frac{16}{2^2} = 4$
 - $a = \frac{16}{8^2} = \frac{1}{4}$
 - $a = \frac{16}{(\frac{1}{2})^2} = 64$
 - $a = \frac{16}{(2\sqrt{2})^2} = 2$
- $P_{AOB} = \frac{1}{2}|2x| \cdot 3 = 12$, zatem $|x| = 4$, czyli do paraboli należą punkty: $A(4, 3)$ i $B(-4, 3)$ (lub $A(-4, 3)$ i $B(4, 3)$).
 Równanie paraboli ma postać: $y = \frac{3}{16}x^2$.
 
- $a = 1$
 - $a = 2$
 - $a = -4$
 - $a = \frac{1}{2}$

Zadania

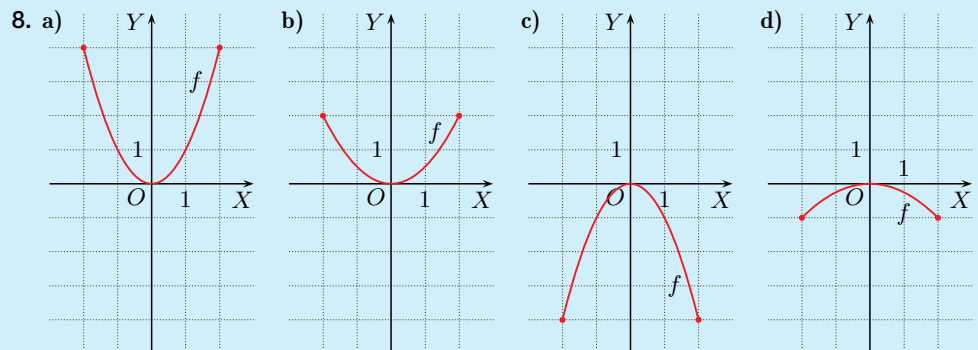
- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, D = (-2; 4)$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^2, D = \langle -4; 2 \rangle$
 - $f(x) = 3x^2, D = (-1; 2)$
 - $f(x) = -2x^2, D = \langle 1; 2 \rangle$
- Które z poniższych parabol dane są równaniami: $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{8}x^2$? Podaj równania pozostałych parabol.



- Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do jej wykresu jest najmniejsza?
 - $y = x^2, y = 4x^2, y = -6x^2$
 - $y = \frac{3}{2}x^2, y = \sqrt{2}x^2, y = 2x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2, y = 3x^2, y = 2\sqrt{3}x^2$
 - $y = -3x^2, y = \pi x^2, y = 3,14x^2$
- Punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Oblicz odległość punktu Q od osi OX , jeśli:
 - $x_1 = 3, y_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -2,$
 - $x_1 = -2\sqrt{2}, y_1 = 20, x_2 = 2.$
- Prosta $y = 4$ przecina parabolę $y = ax^2$ w punktach A i B . Oblicz a , jeśli:
 - $|AB| = 2,$
 - $|AB| = 8,$
 - $|AB| = \frac{1}{2},$
 - $|AB| = 2\sqrt{2}.$
- Punkty: $O(0, 0), A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$, należą do paraboli $y = ax^2$. Naszkicuj tę parabolę, jeśli pole trójkąta AOB jest równe 12.

Powtórzenie

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, jeśli należy do niego punkt P .
 - $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
 - $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 - $P(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$
 - $P(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie $D = \langle -2; 2 \rangle$.
 - $f(x) = x^2$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
 - $f(x) = -x^2$
 - $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

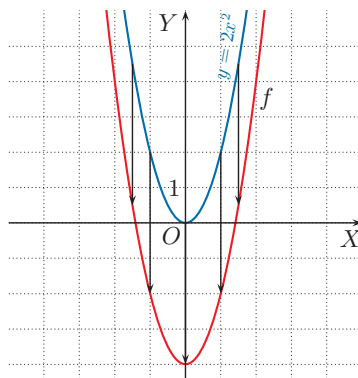


7.2. Przesunięcie wykresu funkcji

$f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół (rysunek obok).



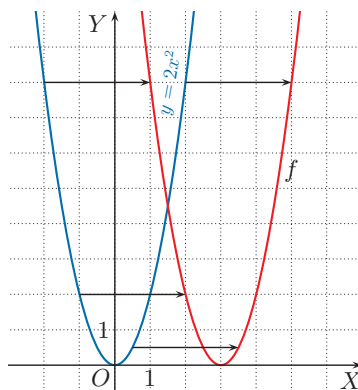
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 - 3$ c) $f(x) = -2x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 1$ d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x-3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).



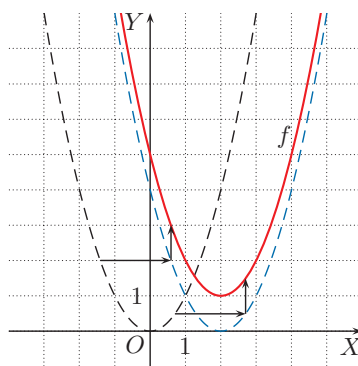
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = (x+3)^2$ c) $f(x) = -2(x+2)^2$
b) $f(x) = (x-1)^2$ d) $f(x) = -2(x-2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę (rysunek obok).



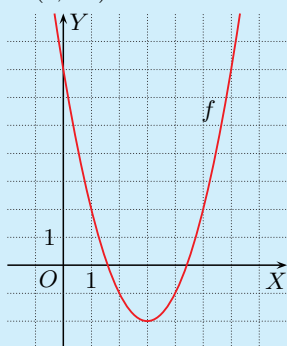
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.

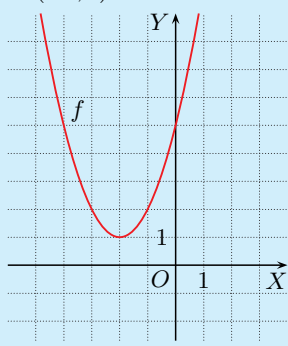
- a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$
b) $f(x) = (x+2)^2 + 1$

Ćwiczenie 3

a) $W(3, -2)$



b) $W(-2, 1)$

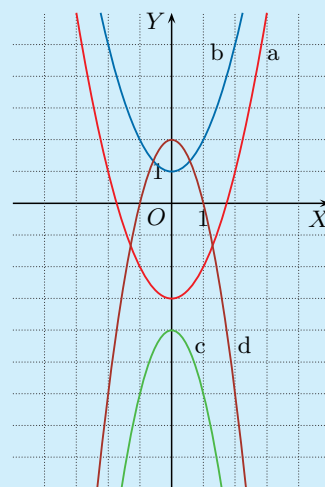


Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji:
 $f(x) = ax^2 + q$,
 $f(x) = a(x-p)^2$,
 $f(x) = a(x-p)^2 + q$
i podaje ich własności,
- stosuje własności funkcji:
 $f(x) = ax^2 + q$,
 $f(x) = a(x-p)^2$,
 $f(x) = a(x-p)^2 + q$
do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- a) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$
b) $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
c) $f(D) = (-\infty; -4]$
d) $f(D) = (-\infty; 2]$



Ćwiczenie 2

- a) maleje w $(-\infty; -3]$,
rośnie w $\langle -3; \infty \rangle$
b) maleje w $(-\infty; 1]$,
rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$
c) rośnie w $(-\infty; -2]$,
maleje w $\langle -2; \infty \rangle$
d) rośnie w $(-\infty; 2]$,
maleje w $\langle 2; \infty \rangle$

Multiteka

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

dla.nauczyciela.pl | Kartkówka 7.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

- a) $W(4, 2)$, 4 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę
b) $W(6, -1)$, 6 jednostek w prawo i 1 jednostkę w dół
c) $W(-6, -3)$, 6 jednostek w lewo i 3 jednostki w dół
d) $W(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, pół jednostki w lewo i pół jednostki w górę

Komentarz

Warto przypomnieć uczniom, że funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie – jest **przedziałami monotoniczna** (patrz przykład 3 ze str. 151).

Należy również podkreślić zależność między współczynnikiem p a przedziałami monotoniczności funkcji oraz między współczynnikiem q a zbiorem wartości funkcji.

Wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

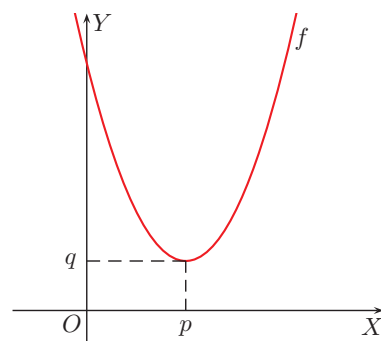
Ćwiczenie 4

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . W jaki sposób należy przesunąć parabolę daną wzorem $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji f ?

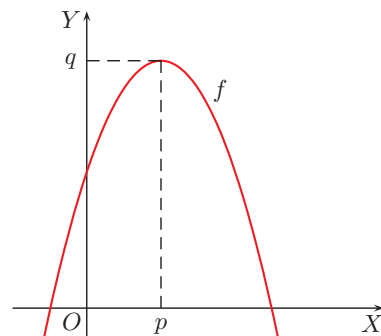
- a) $f(x) = 2(x-4)^2 + 2$ c) $f(x) = 2(x+6)^2 - 3$
b) $f(x) = 2(x-6)^2 - 1$ d) $f(x) = 2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

$a > 0$
• ramiona paraboli są skierowane do góry • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$ • funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p)$ • funkcja rośnie w przedziale $(p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle q; \infty)$



$a < 0$
• ramiona paraboli są skierowane w dół • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$ • funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p)$ • funkcja maleje w przedziale $(p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naszkicuj tę parabolę.

- a) $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$ c) $f(x) = -(x+4)^2 - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$

Ćwiczenie 5

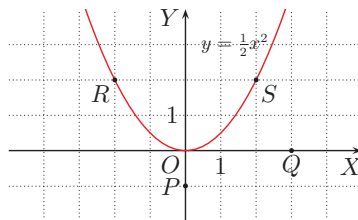
- a) maleje w $(-\infty; 3)$, rośnie w $\langle 3; \infty)$,
 $f(D) = \langle -4; \infty)$, $W(3, -4)$
b) maleje w $(-\infty; -2)$, rośnie w $\langle -2; \infty)$,
 $f(D) = \langle 2; \infty)$, $W(-2, 2)$
c) rośnie w $(-\infty; -4)$, maleje w $\langle -4; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; -1]$, $W(-4, -1)$
d) rośnie w $(-\infty; 1)$, maleje w $\langle 1; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 3]$, $W(1, 3)$

Zadania

- Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$:
a) o 3 jednostki w prawo, b) o 2 jednostki w lewo.
Podaj wzór funkcji g , jej przedziały monotoniczności i naskicuj jej wykres.
- Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = -x^2$:
a) o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę,
b) o 1 jednostkę w prawo i 2 jednostki w dół.
Podaj wzór funkcji g i naskicuj jej wykres.
- Naszkicuj parabolę daną poniższym wzorem. Podaj współrzędne jej wierzchołka oraz równanie jej osi symetrii.
a) $y = x^2 + 2$ c) $y = (x - 2)^2$ e) $y = (x - 1)^2 - 4$
b) $y = x^2 - 4$ d) $y = (x + 1)^2$ f) $y = (x + 3)^2 + 1$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = -x^2 + 4$ d) $f(x) = -2(x - 2)^2 + 1$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
b) $f(x) = -(x - 2)^2 - 1$ e) $f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$ h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
c) $f(x) = -(x + 3)^2 + 1$ f) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ i) $f(x) = 2x^2 - 4$

Powtórzenie

- Podaj zbiór wartości funkcji f , jej przedziały monotoniczności i współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.
a) $f(x) = 3x^2 - 6$ d) $f(x) = -5x^2 + 9$ g) $f(x) = (2 - x)^2 + 1$
b) $f(x) = 3(x - 4)^2$ e) $f(x) = -5(x + 8)^2$ h) $f(x) = 4 - \frac{2}{3}(x - 1)^2$
c) $f(x) = 3(x + 2)^2 + 5$ f) $f(x) = -5(x - 3)^2 - 2$ i) $f(x) = (3 + x)^2 - \sqrt{2}$
- Wykresem funkcji f jest parabola otrzymana przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ (rysunek obok). Podaj wzór funkcji f , jeśli wierzchołkiem jej wykresu jest punkt:
a) P , b) Q , c) R , d) S .
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ f) $f(x) = -2x^2 - 1$



- g) $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$, maleje w $(-\infty; 2)$, rośnie w $\langle 2; \infty \rangle$, $W(2, 1)$
h) $f(D) = (-\infty; 4)$, rośnie w $(-\infty; 1)$, maleje w $\langle 1; \infty \rangle$, $W(1, 4)$
i) $f(D) = \langle -\sqrt{2}; \infty \rangle$, maleje w $(-\infty; -3)$, rośnie w $\langle -3; \infty \rangle$, $W(-3, -\sqrt{2})$
- a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
- a) $f(D) = \langle 2; \infty \rangle$ b) $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
c) $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$ d) $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
e) $f(D) = (-\infty; 2)$ f) $f(D) = (-\infty; -1)$

Odpowiedzi do zadań

- a) $g(x) = (x - 3)^2$,
rośnie w $\langle 3; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 3)$
b) $g(x) = (x + 2)^2$,
rośnie w $\langle -2; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; -2)$
- a) $g(x) = -(x + 2)^2 + 3$
b) $g(x) = -(x - 1)^2 - 2$
- a) $W(0, 2)$, $x = 0$
b) $W(0, -4)$, $x = 0$
c) $W(2, 0)$, $x = 2$
d) $W(-1, 0)$, $x = -1$
e) $W(1, -4)$, $x = 1$
f) $W(-3, 1)$, $x = -3$
- a) $f(D) = (-\infty; 4)$
b) $f(D) = (-\infty; -1)$
c) $f(D) = (-\infty; 1)$
d) $f(D) = (-\infty; 1)$
e) $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
f) $f(D) = \langle -8; \infty \rangle$
g) $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$
h) $f(D) = (-\infty; 4)$
i) $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
- a) $f(D) = \langle -6; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 0)$,
rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$, $W(0, -6)$
b) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 4)$,
rośnie w $\langle 4; \infty \rangle$, $W(4, 0)$
c) $f(D) = \langle 5; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; -2)$,
rośnie w $\langle -2; \infty \rangle$, $W(-2, 5)$
d) $f(D) = (-\infty; 9)$,
rośnie w $(-\infty; 0)$,
maleje w $\langle 0; \infty \rangle$, $W(0, 9)$
e) $f(D) = (-\infty; 0)$,
rośnie w $(-\infty; -8)$,
maleje w $\langle -8; \infty \rangle$, $W(-8, 0)$
f) $f(D) = (-\infty; -2)$,
rośnie w $(-\infty; 3)$,
maleje w $\langle 3; \infty \rangle$, $W(3, -2)$

Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej,
- oblicza wyróżnik trójkątnu kwadratowego,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli,
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem uzupełniania do kwadratu lub wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli),
- przekształca postać kanoniczną funkcji kwadratowej do postaci ogólnej,
- wyprowadza wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

Ćwiczenie 1

a) $y = -2(x^2 - 6x + 9) + 6 =$
 $= -2x^2 + 12x - 12$

b) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} =$
 $= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$

c) $y = 3(x^2 - 10x + 25) + 9 =$
 $= 3x^2 - 30x + 84$

7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać:
 $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać:
 $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a, p, q \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Uwaga. Funkcję kwadratową nazywamy też **trójkątnem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykład w ramce pokazujący, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$ Postać kanoniczna
 $= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 $= 3x^2 - 24x + 41$ Postać ogólna

b) $y = -4(x + \frac{1}{2})^2 + 1 =$ Postać kanoniczna
 $= -4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 =$ Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 $= -4x^2 - 4x$ Postać ogólna

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Przejście od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej wymaga zastosowania uzupełniania do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 10x + 27 =$ Postać ogólna
 $= x^2 - 2 \cdot 5x + 27 =$ Współczynnik -10 zapisujemy jako $-2 \cdot 5$.
 $= x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 27 =$ Dodajemy i odejmujemy $25 = 5^2$.
 $= (x - 5)^2 - 25 + 27 =$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 $= (x - 5)^2 + 2$ Postać kanoniczna

Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.3



$$b) y = x^2 + 5x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

Postać ogólna

Współczynnik 5 zapisujemy jako $2 \cdot \frac{5}{2}$.

Dodajemy i odejmujemy $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

Korzystamy ze wzoru

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$a) y = x^2 - 8x + 6$$

$$c) y = x^2 - 6x - 2$$

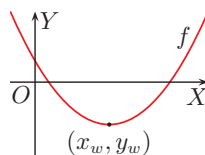
$$e) y = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$b) y = x^2 + 4x + 8$$

$$d) y = x^2 - 3x + 1$$

$$f) y = x^2 - x - 2$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w) .



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x-p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego $y = -x^2 + 5x - 2$.

Współczynniki trójmianu: $a = -1$, $b = 5$ i $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 25 - 8 = 17$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$a) y = x^2 + 3x + 1$$

$$c) y = x^2 - 4x + 4$$

$$e) y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$$

$$b) y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$d) y = -2x^2 + 6x - 6$$

$$f) y = 2x^2 - \sqrt{2}x$$

Ćwiczenie 3

$$a) \Delta = 5 \quad b) \Delta = 8$$

$$c) \Delta = 0 \quad d) \Delta = -12$$

$$e) \Delta = 8 \quad f) \Delta = 2$$

Ćwiczenie 2

$$a) y = x^2 - 8x + 6 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 6 =$$

$$= (x - 4)^2 - 10,$$

$$W(4, -10)$$

$$b) y = x^2 + 4x + 8 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 8 =$$

$$= (x + 2)^2 + 4,$$

$$W(-2, 4)$$

$$c) y = x^2 - 6x - 2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 2 =$$

$$= (x - 3)^2 - 11,$$

$$W(3, -11)$$

$$d) y = x^2 - 3x + 1 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 =$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

$$W\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

$$e) y = x^2 + x + \frac{1}{4} =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$W\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$f) y = x^2 - x - 2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

$$W\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

Ćwiczenie 4

- a) $W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $y = 4(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4}$
b) $W(1, 3)$, $y = -2(x - 1)^2 + 3$
c) $W(1, \frac{1}{2})$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = x^2 - x + 4\frac{1}{4}$
b) $y = -x^2 + 8x - 19$
c) $y = 2x^2 - 12x + 19$
d) $y = -3x^2 - 12x - 16$
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
f) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$
2. $W_f(-1, 1)$, $W_g(3, -2)$, $W_h(4, 2)$,
 $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$,
 $g(x) = 2(x - 3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16$,
 $h(x) = 2(x - 4)^2 + 2 = 2x^2 - 16x + 34$

Przykład 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 - 6x + 1$, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

Współczynniki trójmianu: $a = 2$, $b = -6$ i $c = 1$.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 36 - 8 = 28$$
$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$$

Zatem wierzchołkiem paraboli jest punkt o współrzędnych $(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$.

Postać kanoniczna: $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$.

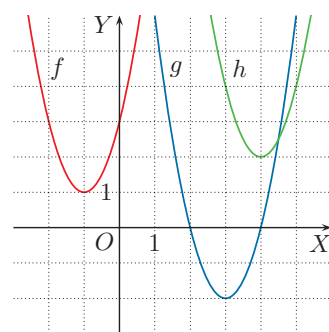
Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem podanej funkcji, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

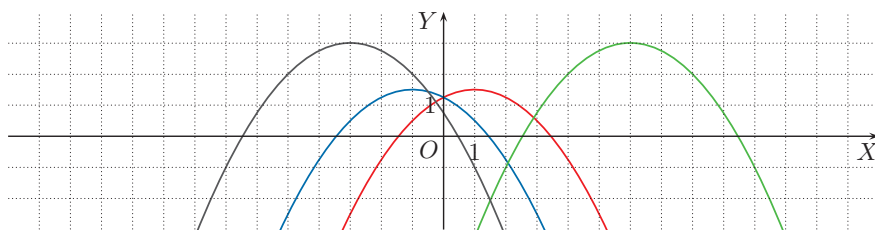
- a) $y = 4x^2 + 6x + 3$ b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Zadania

1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.
a) $y = (x - \frac{1}{2})^2 + 4$ c) $y = 2(x - 3)^2 + 1$ e) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
b) $y = -(x - 4)^2 - 3$ d) $y = -3(x + 2)^2 - 4$ f) $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$
2. Wykresy funkcji kwadratowych f , g i h (rysunek obok) otrzymano, przesuając wykres funkcji $y = 2x^2$. Odczytaj współrzędne wierzchołków otrzymanych parabol. Podaj wzory funkcji f , g i h w postaciach kanonicznych i ogólnych.
3. Zapisz w postaciach kanonicznej i ogólnej wzór funkcji g , jeśli jej wykres otrzymujemy, przesuując wykres funkcji:
a) $f(x) = 3x^2$ o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół,
b) $f(x) = -4x^2$ o 5 jednostek w lewo i 100 jednostek w górę.
4. Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.
a) $y = -2x^2 + 5x + 7$ c) $y = -2x^2 + 3x - 1$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 3$
b) $y = 2x^2 + 3x + 2$ d) $y = 4x^2 - 12x + 9$ f) $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 5$
3. a) $g(x) = 3(x - 3)^2 - 2 = 3x^2 - 18x + 25$
b) $g(x) = -4(x + 5)^2 + 100 = -4x^2 - 40x$
4. a) 81 b) -7 c) 1 d) 0 e) 42 f) -11



5. Oblicz wyróżnik trójkątnu kwadratowego. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tego trójkątnu.
- a) $y = x^2 + 4x - 3$ c) $y = 2x^2 + 4x - 5$ e) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
b) $y = -x^2 + 6x - 1$ d) $y = -3x^2 + 6x - 2$ f) $y = -\frac{3}{4}x^2 + x + 1$
6. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , a następnie przedstaw tę funkcję w postaci kanonicznej.
- a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ c) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ e) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ d) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ f) $f(x) = -2x^2 + 6x$
7. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ należy punkt P . Oblicz współczynnik c i zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
- a) $P(0, 1)$ b) $P(0, -2)$ c) $P(1, 4)$ d) $P(2, 2)$ e) $P(-2, -4)$
8. Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji:
- $$f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$$
- $$f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6, \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$
- a) Wzór każdej funkcji zapisz w postaci kanonicznej.
b) Do każdej funkcji dopasuj odpowiedni wykres.



Powtórzenie

9. Oblicz wyróżnik trójkątnu kwadratowego.
- a) $y = x^2 - 3x - 4$ b) $y = 3x^2 + 5x + 2$ c) $y = -x^2 - 4x + 1$
10. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.
- a) $y = 4x^2 - 8x + 1$ c) $y = x^2 + 6x - 10$ e) $y = x^2 + x$
b) $y = -4x^2 + 6x + 2$ d) $y = -x^2 - 3x + 2$ f) $y = -2x^2 - 3x$
11. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.
- a) $y = x^2 - 4x - 2$ c) $y = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ e) $y = 8x^2 - x$
b) $y = 2x^2 - 8x + 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ f) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$
11. a) $y = (x - 2)^2 - 6$
b) $y = 2(x - 2)^2 - 7$
c) $y = -3(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{19}{12}$
d) $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$
e) $y = 8(x - \frac{1}{16})^2 - \frac{1}{32}$
f) $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$

5. a) $\Delta = 28, W(-2, -7)$
b) $\Delta = 32, W(3, 8)$
c) $\Delta = 56, W(-1, -7)$
d) $\Delta = 12, W(1, 1)$
e) $\Delta = -2, W(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$
f) $\Delta = 4, W(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
6. a) $W(-1, 2), f(x) = (x + 1)^2 + 2$
b) $W(4, 0), f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2$
c) $W(1, 5), f(x) = -4(x - 1)^2 + 5$
d) $W(-2, -15), f(x) = 2(x + 2)^2 - 15$
e) $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
f) $W(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}), f(x) = -2(x - 1\frac{1}{2})^2 + 4\frac{1}{2}$
7. a) $c = 1, f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$
b) $c = -2, f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$
c) $c = 6, f(x) = 2(x - 1)^2 + 4$
d) $c = 2, f(x) = 2(x - 1)^2$
e) $c = -20, f(x) = 2(x - 1)^2 - 22$
8. a) $f_1(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{3}{2},$
 $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + \frac{3}{2},$
 $f_3(x) = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 3,$
 $f_4(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + 3$
b) f_1 - czerwony,
 f_2 - niebieski, f_3 - zielony,
 f_4 - czarny

9. a) 25 b) 1 c) 20

10. a) $W(1, -3)$
b) $W(\frac{3}{4}, \frac{17}{4})$
c) $W(-3, -19)$
d) $W(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$
e) $W(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
f) $W(-\frac{3}{4}, \frac{9}{8})$

Uczeń:

- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli, podaje równanie jej osi symetrii,
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem uzupełniania do kwadratu lub wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli) i szkicuje jej wykres,
- wyznacza wzór ogólny funkcji kwadratowej, mając dane współrzędne wierzchołka i innego punktu jej wykresu.

Ćwiczenie 1

- a) $W(-2, -3)$, $y = (x + 2)^2 - 3$
- b) $W(1, -2)$, $y = -(x - 1)^2 - 2$
- c) $W(-1, 0)$, $y = 2(x + 1)^2$
- d) $W(-2, 3)$, $y = -2(x + 2)^2 + 3$
- e) $W(-1, -1)$, $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$
- f) $W(-2, 5)$, $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 5$

7.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -x^2 + 6x - 5$. Naskicuj tę parabolę.

$a = -1$, $b = 6$, $c = -5$, zatem:

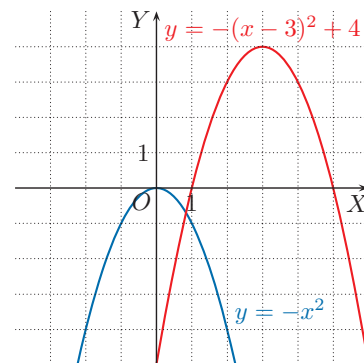
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16$$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Trójmian kwadratowy zapisujemy w postaci kanonicznej: $y = -(x - 3)^2 + 4$.

Szukaną parabolę otrzymujemy, przesuwając parabolę $y = -x^2$ o 3 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę.



Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej. Naskicuj tę parabolę.

- a) $y = x^2 + 4x + 1$
- c) $y = 2x^2 + 4x + 2$
- e) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$
- b) $y = -x^2 + 2x - 3$
- d) $y = -2x^2 - 8x - 5$
- f) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

$$a = -2, b = 8, \text{ więc } x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2.$$

$$\text{Współrzędna } y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$
- b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$
- c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$

Ćwiczenie 2

- a) $W(1, 1)$
- b) $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$
- c) $W(2, 9)$

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na ćwiczenie 2, ponieważ zastosowany w nim sposób wyznaczenia drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli y_w w wielu przykładach jest dużo szybszy niż korzystanie ze wzoru: $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.

Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Oblicz współczynnik b funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + bx - 4$, jeśli prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

Ośią symetrii paraboli jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2 \cdot 3} = 1$. Stąd $b = -6$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz współczynnik b funkcji kwadratowej f , jeśli prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

Przykład 3

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(3, -2)$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i ogólnej, jeśli wiadomo, że punkt $P(4, 1)$ należy do tej paraboli.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie punkt (p, q) jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f :

$$f(x) = a(x - 3)^2 - 2 \quad \text{Wierzchołkiem paraboli jest punkt } (3, -2).$$

Podstawiamy współrzędne punktu P do powyższego wzoru: $1 = a(4 - 3)^2 - 2$, czyli $a = 3$. Zatem otrzymujemy postać kanoniczną funkcji:

$$f(x) = 3(x - 3)^2 - 2$$

Następnie wyznaczamy postać ogólną:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x - 3)^2 - 2 = 3(x^2 - 6x + 9) - 2 = \\ &= 3x^2 - 18x + 27 - 2 = 3x^2 - 18x + 25 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i ogólnej, jeśli wiadomo, że punkt P należy do tej paraboli.

- a) $P(3, 1)$, $W(2, 2)$ b) $P(3, -2)$, $W(4, 0)$ c) $P(-2, -4)$, $W(-1, -6)$

Ćwiczenie 5

Oblicz współczynniki a , b , c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeśli do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W .

- a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

Ćwiczenie 5

a) $f(x) = a(x - 2)^2$

$a \cdot (0 - 2)^2 = 2$, więc $a = \frac{1}{2}$

postać kanoniczna: $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$,

postać ogólna: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$,

$a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$

b) $f(x) = a(x + 1)^2 - 1$

$a \cdot (0 + 1)^2 - 1 = 0$, więc $a = 1$

postać kanoniczna: $f(x) = (x + 1)^2 - 1$,

postać ogólna: $f(x) = x^2 + 2x$,

$a = 1$, $b = 2$, $c = 0$

c) $f(x) = a(x - 0)^2 + 3$

$a \cdot (3 - 0)^2 + 3 = 1$, więc $a = -\frac{2}{9}$

postać kanoniczna i ogólna:

$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 3$,

$a = -\frac{2}{9}$, $b = 0$, $c = 3$

d) $f(x) = a(x + 1)^2 + 3$

$a \cdot (-2 + 1)^2 + 3 = 0$, więc $a = -3$

postać kanoniczna:

$f(x) = -3(x + 1)^2 + 3$,

postać ogólna: $f(x) = -3x^2 - 6x$,

$a = -3$, $b = -6$, $c = 0$

e) $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$

$a \cdot (2 - 1)^2 + 2 = 1$, więc $a = -1$

postać kanoniczna:

$f(x) = -(x - 1)^2 + 2$,

postać ogólna: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$,

$a = -1$, $b = 2$, $c = 1$

f) $f(x) = a(x - 2)^2 + 4$

$a \cdot (1 - 2)^2 + 4 = 2$, więc $a = -2$

postać kanoniczna:

$f(x) = -2(x - 2)^2 + 4$,

postać ogólna: $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$,

$a = -2$, $b = 8$, $c = -4$

Ćwiczenie 3

a) $-\frac{b}{2 \cdot 1} = 2$, więc $b = -4$

b) $-\frac{b}{2 \cdot (-1)} = 4$, więc $b = 8$

c) $-\frac{b}{2 \cdot 2} = -1$, więc $b = 4$

d) $-\frac{b}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -6$, więc $b = -6$

Ćwiczenie 4

a) $f(x) = -(x - 2)^2 + 2 =$
 $= -x^2 + 4x - 2$

b) $f(x) = -2(x - 4)^2 =$
 $= -2x^2 + 16x - 32$

c) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 6 =$
 $= 2x^2 + 4x - 4$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = (x-3)^2 - 7$,
rośnie w $\langle 3; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 3)$,
 $f(D) = \langle -7; \infty \rangle$
b) $f(x) = (x+1)^2 - 4$,
maleje w $(-\infty; -1)$,
rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
c) $f(x) = 2(x+2)^2 - 4$,
rośnie w $\langle -2; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; -2)$,
 $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
d) $f(x) = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$,
rośnie w $(-\infty; \frac{1}{2})$,
maleje w $(\frac{1}{2}; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; \frac{1}{2})$
e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1$,
rośnie w $\langle 4; \infty \rangle$,
maleje w $(-\infty; 4)$,
 $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
f) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$,
rośnie w $(-\infty; -2)$,
maleje w $\langle -2; \infty \rangle$,
 $f(D) = (-\infty; 0]$
2. a) $y = (x+3)^2 - 17$
b) $y = -(x-3)^2 + 1$
c) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 26$
d) $y = -\frac{1}{4}(x-12)^2 + 28$
e) $y = -2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$
f) $y = 2(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{2}$
3. a) $b = -4, c = 8$
b) $b = 2, c = -2$
c) $b = -1, c = -\frac{3}{4}$
d) $b = 0, c = 3$
e) $b = -20, c = 100$
f) $b = 8, c = 20$
4. a) $b = -2, c = 1$,
 $f(x) = (x-1)^2$
b) $b = 8, c = 2$,
 $f(x) = (x+4)^2 - 14$
c) $b = -6, c = -6$,
 $f(x) = (x-3)^2 - 15$
d) $b = 1, c = -4$,
 $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$

Zadania

1. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naskicuj jej wykres, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.
a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 2x$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$
2. Zapisz wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2 + 6x - 8$ w postaci kanonicznej, jeśli jej wykresem jest parabola o wierzchołku, którego pierwsza współrzędna jest równa x_w .
a) $x_w = -3$ c) $x_w = -6$ e) $x_w = \frac{3}{2}$
b) $x_w = 3$ d) $x_w = 12$ f) $x_w = -\frac{3}{2}$
3. Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $y = x^2 + bx + c$, jeśli punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.
a) $W(2, 4)$ c) $W(\frac{1}{2}, -1)$ e) $W(10, 0)$
b) $W(-1, -3)$ d) $W(0, 3)$ f) $W(-4, 4)$
4. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest symetryczny względem prostej l i przecina oś OY w punkcie P . Oblicz współczynniki b i c . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
a) $l: x = 1, P(0, 1)$ c) $l: x = 3, P(0, -6)$
b) $l: x = -4, P(0, 2)$ d) $l: x = -\frac{1}{2}, P(0, -4)$
5. Punkty $A(0, -2)$ i $B(1, 1)$ należą do paraboli będącej wykresem funkcji f . Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli jej wierzchołkiem jest punkt: a) A , b) B .
- D 6. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku w punkcie (p, q) . Uzasadnij, że $b = -2p$ i $c = p^2 + q$.

Powtórzenie

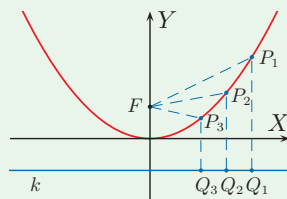
7. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej. Przesuwając odpowiednio parabolę $y = x^2$ lub parabolę $y = -x^2$, naskicuj wykres funkcji f .
a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = x^2 + 2x$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 4x$ f) $f(x) = -x^2 + 8x - 8$
8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f , jeśli do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W .
a) $P(2, 5), W(1, 4)$ b) $P(-3, 6), W(-2, 3)$ c) $P(-4, -8), W(-3, -4)$
5. a) $f(x) = 3x^2 - 2$
b) $f(x) = -3(x-1)^2 + 1$
6. $f(x) = (x-p)^2 + q = x^2 - 2px + p^2 + q$, czyli $b = -2p$ oraz $c = p^2 + q$.
7. a) $f(x) = (x+1)^2$
b) $f(x) = (x+1)^2 + 3$
c) $f(x) = (x+1)^2 - 1$
d) $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
e) $f(x) = (x-3)^2 - 1$
f) $f(x) = -(x-4)^2 + 8$
8. a) $f(x) = (x-1)^2 + 4$
b) $f(x) = 3(x+2)^2 + 3$
c) $f(x) = -4(x+3)^2 - 4$

7.5. Zagadnienia uzupełniające

■ Parabola

Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (zwanej **kierownicą**) i ustalonego punktu F (zwanego **ogniskiem**). Na rysunku obok mamy:

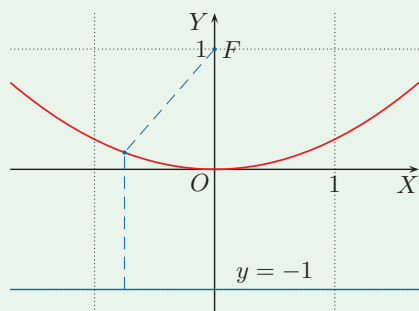
$$|P_1F| = |P_1Q_1|, |P_2F| = |P_2Q_2|, |P_3F| = |P_3Q_3|$$



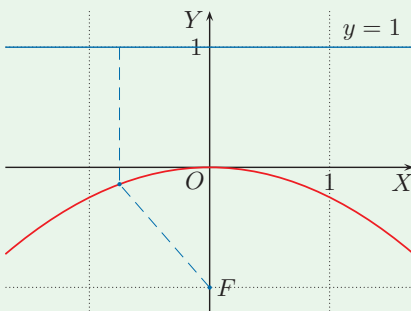
Parabola, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej $y = -p$ i punktu $F(0, p)$, jest określona za pomocą równania $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Przykład 1

Parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -1$ i ognisko $F(0, 1)$.



Parabola $y = -\frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = 1$ i ognisko $F(0, -1)$.



Parabola $y = x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -\frac{1}{4}$ i ognisko $F(0, \frac{1}{4})$.

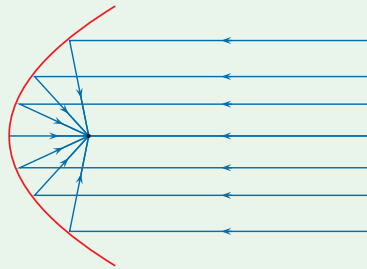
- Podaj równanie paraboli, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej k i punktu F .
 a) $k: y = -\frac{1}{2}, F(0, \frac{1}{2})$ b) $k: y = \frac{1}{2}, F(0, -\frac{1}{2})$ c) $k: y = -\frac{1}{6}, F(0, \frac{1}{6})$
- Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli danej równaniem:
 a) $y = -x^2$, b) $y = 2x^2$, c) $y = -2x^2$, d) $y = \frac{1}{8}x^2$.
- Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli:
 a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$.

- a) $y = \frac{1}{2}x^2$
 b) $y = -\frac{1}{2}x^2$
 c) $y = \frac{3}{2}x^2$
- a) $y = \frac{1}{4}, F(0, -\frac{1}{4})$
 b) $y = -\frac{1}{8}, F(0, \frac{1}{8})$
 c) $y = \frac{1}{8}, F(0, -\frac{1}{8})$
 d) $y = -2, F(0, 2)$
- a) $y = 0, F(0, 2)$
 b) $y = -3, F(0, -1)$

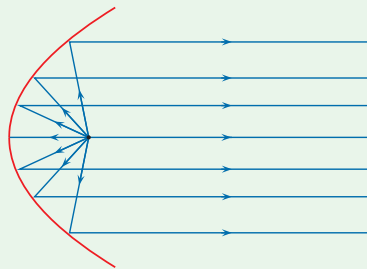
4. Przeprowadź konstrukcję paraboli zgodnie z podanym niżej opisem.
- Narysuj kierownicę i prostą do niej prostopadłą – oś symetrii paraboli.
 - Na osi symetrii wybierz punkt F – ognisko paraboli i zaznacz wierzchołek paraboli w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą.
 - Po tej samej stronie wierzchołka, po której znajduje się ognisko, narysuj kilka prostych równoległych do kierownicy.
 - Odmierz cyrklem odległość każdej z narysowanych prostych od kierownicy, a następnie narysuj łuk okręgu o środku w punkcie F i promieniu równym tej odległości – punkty przecięcia łuku z daną prostą należą do paraboli.

Czy wiesz, że...

Promienie równoległe padające na zwierciadło o parabolicznym kształcie po odbiciu skupiają się w jednym punkcie zwanym ogniskiem paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się w telewizyjnych antenach satelitarnych i radioteleskopach, w których odbiornik umieszcza się w ognisku, aby uzyskać silny sygnał.



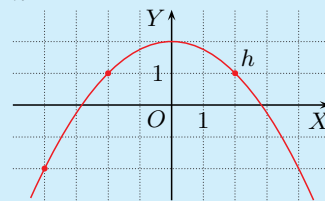
Natomiast promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego po odbiciu są równoległe. Zjawisko to jest wykorzystywane na przykład w reflektorach samochodowych.



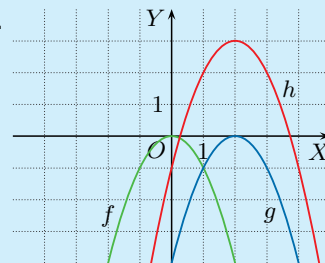
Zestaw powtórzeniowy

- Dane są funkcje $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$. Do wykresu której spośród tych funkcji należą punkty $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$, $C(-4, -2)$? Naskicuj wykres tej funkcji.
- Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x-2)^2$ i $h(x) = -(x-2)^2 + 3$.
- Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f .
 - $f(x) = x^2 - 7$
 - $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$
 - $f(x) = -2x^2 - 12x + 1$
- Przedstaw funkcję kwadratową f w postaci kanonicznej oraz podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Przesuwając odpowiednio parabolę $y = x^2$ lub parabolę $y = -x^2$, naskicuj wykres funkcji f .
 - $f(x) = x^2 - 4x$
 - $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
 - $f(x) = x^2 + 10x + 26$
 - $f(x) = -x^2 + 8x - 17$
- Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Wyznacz współczynniki b i c oraz zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
 - $W(0, 1)$
 - $W(1, 3)$
 - $W(-2, 2)$
 - $W(4, -1)$
- Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + q$ należy punkt $P(-1, 2)$. Podaj wzór tej funkcji, jeśli jej zbiorem wartości jest przedział:
 - $\langle 1; \infty \rangle$,
 - $\langle 0; \infty \rangle$,
 - $(-\infty; 3]$,
 - $(-\infty; 6]$.
- Wykres funkcji f przecina oś rzędnych w punkcie P . Wyznacz współczynnik a oraz przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f . Naskicuj parabolę będącą jej wykresem.
 - $f(x) = a(x-2)^2 - 1$, $P(0, 1)$
 - $f(x) = a(x-4)^2 + 3$, $P(0, -5)$
 - $f(x) = a(x+1)^2 - 4$, $P(0, -2)$
 - $f(x) = a(x+2)^2 + 5$, $P(0, -3)$
- W prostokącie, którego dłuższy bok ma długość x , stosunek długości boków jest równy $1 : 4$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta. Podaj jej dziedzinę, jeśli obwód prostokąta jest mniejszy od 15. Naskicuj wykres tej funkcji.
- Dany jest kwadrat o obwodzie nie większym niż $8\sqrt{2}$ i przekątnej o długości x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego kwadratu w zależności od długości przekątnej. Podaj dziedzinę tej funkcji i naskicuj jej wykres.
 - $a = \frac{1}{2}$, f maleje w $(-\infty; 2]$, rośnie w $\langle 2; \infty \rangle$, $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$
 - $a = -\frac{1}{2}$, f rośnie w $(-\infty; 4]$, maleje w $\langle 4; \infty \rangle$, $f(D) = (-\infty; 3]$
 - $a = 2$, f maleje w $(-\infty; -1]$, rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$, $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
 - $a = -2$, f rośnie w $(-\infty; -2]$, maleje w $\langle -2; \infty \rangle$, $f(D) = (-\infty; 5]$
- Niech $x, \frac{1}{4}x$ – długości boków prostokąta, $P(x) = \frac{1}{4}x^2$. Obwód prostokąta $2,5x < 15$, czyli $x < 6$, zatem $D = (0; 6)$.
- Niech $\frac{x}{\sqrt{2}}$ – długość boku kwadratu, $P(x) = \frac{1}{2}x^2$. Obwód kwadratu $4 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 8\sqrt{2}$, czyli $x \leq 4$, zatem $D = (0; 4]$.

1. h



2.



- $f(D) = \langle -7; \infty \rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$, maleje w $(-\infty; 0]$
 - $f(D) = \langle -5; \infty \rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$, maleje w $(-\infty; -1]$
 - $f(D) = (-\infty; 19]$, rośnie w $(-\infty; -3]$, maleje w $\langle -3; \infty \rangle$
- $f(x) = (x-2)^2 - 4$, $W(2, -4)$
 - $f(x) = -(x-1)^2 - 2$, $W(1, -2)$
 - $f(x) = (x+5)^2 + 1$, $W(-5, 1)$
 - $f(x) = -(x-4)^2 - 1$, $W(4, -1)$
- $b = 0$, $c = 1$, $f(x) = x^2 + 1$
 - $b = -2$, $c = 4$, $f(x) = (x-1)^2 + 3$
 - $b = 4$, $c = 6$, $f(x) = (x+2)^2 + 2$
 - $b = -8$, $c = 15$, $f(x) = (x-4)^2 - 1$
- $f(x) = x^2 + 1$
 - $f(x) = 2x^2$
 - $f(x) = -x^2 + 3$
 - $f(x) = -4x^2 + 6$

dlaNauczyciela.pl | Klasówka 7

dlaNauczyciela.pl | Sprawdzian II

dlaNauczyciela.pl | Sprawdzian na koniec roku

Generator
testów i sprawdzianów

Indeks

argumenty funkcji 135

barycentrum trójkąta 227

błąd przybliżenia 23

cechy

podobieństwa trójkątów 241, 242

podzielności liczb 14

przystawania trójkątów 228, 229

przystawania wielokątów 232

długość okresu 21

dopełnienie zbioru 61

dowód twierdzenia Talesa 236

dwusieczna kąta 225, 227, 251

konstrukcja 253

dziedzina funkcji 135

dzielnik 10, 15

element zbioru 56

Euklides 11

figury przystające 228

fraktale 250

funkcja 134, 135

kwadratowa 261

liczbowa 140

liniowa 186

logarytmiczna 178

malejąca 149, 194

monotoniczna 151

niemalejąca 150

nierosnąca 150

przedziałami monotoniczna 151

rosnąca 149, 194

stała 150, 194

wykładnicza 176

googol 39

hiperbola 148

iloczyn zbiorów 59

kartezjański układ współrzędnych 139

Kartezjusz (René Descartes) 139

kąt zewnętrzny trójkąta 226

kąty przyległe 226

kierownica paraboli 275

krzywa Kocha 250

kwadrat różnicy 83

kwadrat sumy 83

liczba logarytmowana 40, 41

liczby

całkowite 15, 19

czworokątne 86

naturalne 10, 19

nieparzyste 10

niewymierne 18, 19

parzyste 10

pierwsze 11

pięciokątne 86

trójkątne 86

wielokątne 86

liczby

wymierne 15, 19

względnie pierwsze 15

złożone 11

logarytm 40

dziesiętny 40

iloczynu 41

ilorazu 41

potęgi 41

metoda

podstawiania 105, 114

przeciwnych współczynników 111, 114

miejsce zerowe funkcji 137

liniowej 193

mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian 74

najmniejsza wspólna wielokrotność 12

największy wspólny dzielnik 12

nazwy wielkich liczb 39

nierówności równoważne 70, 71

nierówność

nieostra 70

ostra 70

sprzeczna 88

tożsamościowa 88

trójkąta 230

notacja wykładnicza 47

odbicie symetryczne funkcji 167, 170

ognisko paraboli 275

ortocentrum trójkąta 227

oś

odciętych 139

rzędnych 139

symetrii paraboli 266

parabola 148, 261, 262

pęk prostych 191

pierwiastek

iloczynu 27, 30

ilorazu 27, 30

kwadratowy (drugiego stopnia) 26

n -tego stopnia 31

sześcienny (trzeciego stopnia) 29, 30

podstawa

logarytmu 40, 41

potęgi 33

podzbiór zbioru 57

podzielność liczb 10

postać

dziesiętna liczby 21

kanoniczna funkcji kwadratowej 268

ogólna funkcji kwadratowej 268

potęga 33

o wykładniku całkowitym ujemnym 34

o wykładniku wymiernym 36

półpłaszczyzna

domknięta 215

otwarta 215

procent 44

programowanie liniowe 217

promil 44
 proporcjonalność
 odwrotna 172
 prosta 195
 prosta prostopadła – konstrukcja 254
 prosta równoległa – konstrukcja 254
 proste
 prostopadłe 204
 równoległe 187
 prostokątny układ współrzędnych 139
 przechodniość 73
 przeciwdziedzina funkcji 135
 przedział
 lewostronnie domknięty 64
 obustronnie domknięty 63
 otwarty 63, 64
 prawostronnie domknięty 64
 przekątna pięciokąta 18
 przesunięcie wykresu funkcji 163
 przybliżenie
 z nadmiarem 23
 z niedomiarem 23
 punkty kratowe 139

 reguła zaokrąglania 22
 rozkład liczby na czynniki pierwsze 12
 rozwiązanie układu równań 103
 rozwinięcie dziesiętne liczby 21
 równanie
 kierunkowe prostej 197
 ogólne prostej 198
 sprzeczne 88
 tożsamościowe 88
 z dwiema niewiadomymi 102
 równoważne układy równań 106
 różnica
 kwadratów 84
 zbiorów 61

 skala
 logarytmiczna 43
 pH 43
 podobieństwa 238
 Richtera 43
 solanka 121
 sposoby przedstawiania funkcji 141
 stężenie procentowe 121
 stosunek pól figur podobnych 247
 suma zbiorów 60
 symetralna odcinka 227
 konstrukcja 253
 sześciokąt foremny – konstrukcja 255

 śnieżynka Kocha 250
 środek ciężkości trójkąta 227
 środek pęku prostych 191
 środkowa trójkąta 227

 trójkąt 224
 ostrokatny 224
 prostokątny 224
 rozwartokątny 224
 Sierpińskiego 250

 trójmian kwadratowy 261, 268
 trychotomia 73
 twierdzenie
 odwrotne do twierdzenia Talesa 234
 Pitagorasa 18
 Talesa 233

 układ
 dwóch równań z dwiema niewiadomymi 103
 nieoznaczony 109, 208
 oznaczony 109, 208
 równań liniowych 109
 sprzeczny 109, 208
 trzech równań z trzema niewiadomymi 126
 ułamek nieskracalny 15, 24
 ułamki
 dziesiętne 21
 egipskie 17

 wartość
 bezwzględna liczby 91
 interpretacja geometryczna 91
 funkcji 135
 wielkości
 odwrotnie proporcjonalne 172
 wprost proporcjonalne 195
 wielokąty
 podobne 237
 przystające 228
 wielokrotność 10
 współczynnik
 kierunkowy prostej 187, 200
 interpretacja 201
 proporcjonalności 172, 195
 współrzędne
 punktu 139
 wierzchołka paraboli 266, 269
 wykładnik potęgi 33
 wykres funkcji 140
 liniowej 186
 wyróżnik trójmianu kwadratowego 269
 wysokość trójkąta 227
 wzór Leibniza 25
 wzór Wallisa 25
 wzrost wykładniczy 177

 zbiory
 rozłączne 60
 równe 57
 zbiór
 liczb całkowitych 15
 liczb naturalnych 10
 liczb niewymiernych 19
 liczb rzeczywistych 19
 liczb wymiernych 15
 nieskończony 56
 pusty 56
 skończony 56
 wartości funkcji 153, 154
 złota liczba 55, 240
 złoty stosunek 55
 zwierciadło paraboliczne 276