



4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.

Elektrokardiogram wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca

Uczeń:

- stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, miejsca zerowe funkcji,
- rozpoznaje wśród danych przyporządkowań te, które opisują funkcje,
- podaje miejsca zerowe funkcji,
- opisuje funkcję różnymi sposobami: za pomocą grafu, tabeli, opisu słownego,
- odczytuje wartość funkcji dla danego argumentu,
- odczytuje argumenty, dla których funkcja przyjmuje określoną wartość.

4.1. Pojęcie funkcji

Przykład 1

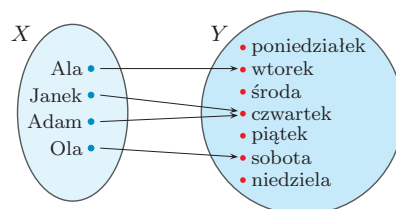
W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn A, B, C, D i E . Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów – wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

Drużyna	A	B	C	D	E
Zdobyte punkty	3	7	8	1	8



Przykład 2

Na przedstawionym obok grafie każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą X , a zbiór dni tygodnia – literą Y .

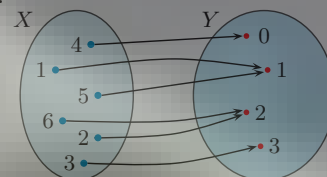


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez X i Y , oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą Y . Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

Liczba	1	2	3	4	5	6
Reszta	1	2	3	0	1	2

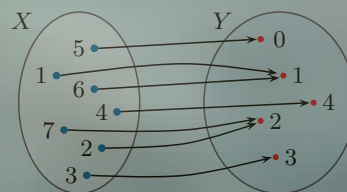


Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowano liczbę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

Ćwiczenie 1

Liczba	1	2	3	4	5	6	7
Reszta	1	2	3	4	0	1	2



Multiteka

- Czy podane przyporządkowanie jest funkcją
- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

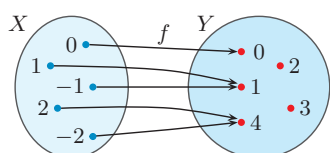
Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedzina** funkcji. Jeśli element zbioru Y jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru X , to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład: f, g, h .

Mówiąc o funkcji f ze zbioru X w zbiór Y , używamy zapisu $f: X \rightarrow Y$, a wartość, którą funkcja f przyjmuje dla argumentu x , oznaczamy przez $f(x)$.

Przykład 4

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcję f ze zbioru X w zbiór Y , która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, przedstawiono za pomocą grafu i tabeli.



Argument x	-2	-1	0	1	2
Wartość funkcji $f(x)$	4	1	0	1	4

Zwróć uwagę, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji f , ale nie są wartościami tej funkcji.

Funkcja f dla argumentu $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 4$, co zapisujemy „ $f(2) = 4$ ” i czytamy: „ f od 2 jest równe 4”.

Wartość $y = 4$ funkcja f przyjmuje również dla argumentu $x = -2$, zatem $f(-2) = 4$.

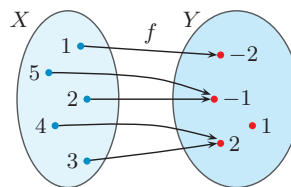
Ćwiczenie 2

Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$ przedstawiona za pomocą grafu.

a) Podaj wartości funkcji f dla argumentów parzystych.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?

c) Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.



Ćwiczenie 2

a) $f(2) = -1, f(4) = 2$

b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{3, 4\}$. Nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.

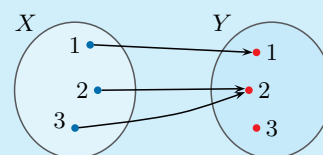
c)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-1	2	2	-1

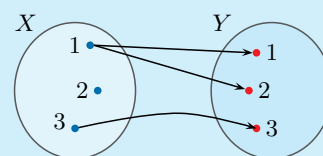
Komentarz

Ponieważ uczniom trudno jest zrozumieć definicję funkcji, należy poświęcić odpowiednią ilość czasu na jej dokładne wytłumaczenie.

Warto podać uczniom kilka przykładów funkcji z życia codziennego, a także wskazać relacje, które nie są funkcjami. Szczególnie ważne jest podkreślenie faktu, że **każdemu** argumentowi przyporządkowana jest **dokładnie jedna** wartość.



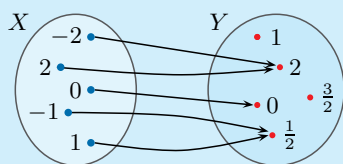
To przyporządkowanie jest funkcją.



To przyporządkowanie nie jest funkcją.

Przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami omawiamy w przykładzie 5.

Ćwiczenie 3



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Wartościami funkcji nie są 1 i $\frac{3}{2}$.
Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów: $\frac{1}{2}$ i 2.

Ćwiczenie 4

- $x = 3$
- $x \in \{0, 1, 5\}$
- $x = 2$
- dla żadnych

Ćwiczenie 3

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1	-2	0	2	1	3	3	3	4

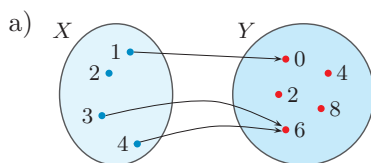
Dla których argumentów zachodzi równość:

- $f(x) = 0$,
- $f(x) = 1$,
- $f(x) = -2$,
- $f(x) = -1$?

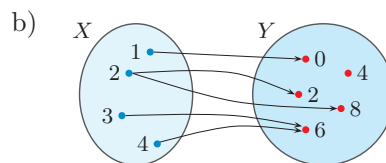
Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , gdy **każdemu** elementowi zbioru X przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru Y .

Przykład 5

Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



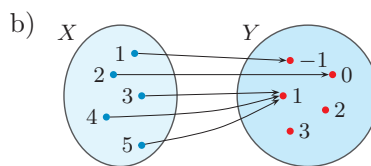
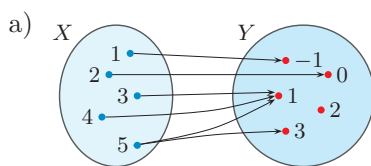
Liczbie 2 należącej do zbioru X nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



Liczbę 2 należącej do zbioru X przyporządkowano dwa elementy zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .

Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru X w zbiór Y ? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.



Ćwiczenie 5

- Nie, liczbę 5 przyporządkowano dwa elementy ze zbioru Y .
- Tak, funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu 2.

Definicja

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 6

Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe: -1 i 2 .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	4	3	0

Ćwiczenie 6

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję f i podaj jej miejsca zerowe, jeśli każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje ona:

- a) liczbę o 2 mniejszą, c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,
b) liczbę o 3 większą, d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Zadania

1. Funkcję $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	0	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

2. Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

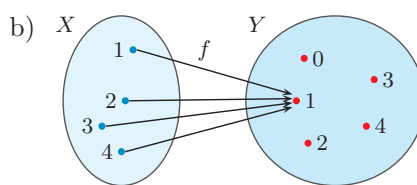
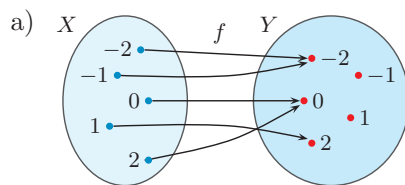
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	1	2	3

3. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.



2. a) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje liczbę o 2 większą. Funkcja przyjmuje wartości nieparzyste dla trzech argumentów.
b) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej wartość bezwzględną. Funkcja przyjmuje wartości nieparzyste dla trzech argumentów.

3. a) Miejsca zerowe: 0 i 2.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-2	0	2	0

- b) Nie ma miejsc zerowych.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	1	1	1

Ćwiczenie 6

- a) Miejsca zerowe: 2.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1

- b) Nie ma miejsc zerowych.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	3	4	5	6

- c) Miejsca zerowe: -1 i 1 .

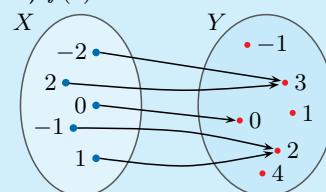
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-1	0	3	8

- d) Miejsca zerowe: 2.

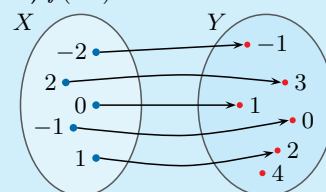
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-8	-7	0	19

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(0) = 0$



- b) $f(-1) = 0$



4. a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

b) Wartościami funkcji f nie są: 2, 3, 5.

1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.

5. a) Dziedzina funkcji f :

$$X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje liczbę o 3 mniejszą. Wartości dodatnie przyjmuje ona dla jednego argumentu.

b) Dziedzina funkcji f :

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną. Wartości dodatnie przyjmuje ona dla trzech argumentów.

6. wartości ujemne dla: -1, 0, 1, dwa miejsca zerowe: -2, 2

7. a) Pierwiastek kwadratowy z liczby 2 nie jest liczbą wymierną, czyli liczbie 2 nie jest przyporządkowana żadna wartość ze zbioru Y . Zatem to przyporządkowanie nie jest funkcją.

b) Pierwiastek kwadratowy z liczby -1 nie jest liczbą rzeczywistą, czyli liczbie -1 nie jest przyporządkowana żadna wartość ze zbioru Y . Zatem to przyporządkowanie nie jest funkcją.

8. $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 18\}$,
 $f(x) = 3$ dla
 $x \in \{12, 21, 30\}$,
 $f(x) = 7$ dla
 $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$

9. a), b) $f(x) = x$ dla dwóch argumentów.

4. Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.

b) Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja f została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

6. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

D 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że przyporządkowanie to nie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , jeśli:

a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbf{Q}$,

b) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbf{R}$.

8. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(24) = 6$. Podaj zbiór wartości funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7?

Powtórzenie

9. Funkcję $f: \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu. Dla ilu argumentów zachodzi równość $f(x) = x$?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	-1	2	0	2

b)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	1	-2	2	1

10. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartość większą od -2?

11. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez n . Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

a) $n = 2$

b) $n = 4$

c) $n = 5$

d) $n = 10$

10. $f(x) > -2$ dla trzech argumentów: -1, 0, 1.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4	-9

11. a) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 2 ma postać $m = 2k$, gdzie $5 \leq k \leq 49$, zatem jest 45 takich liczb.

b) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 4 ma postać $m = 4k$, gdzie $3 \leq k \leq 24$, zatem są 22 takie liczby.

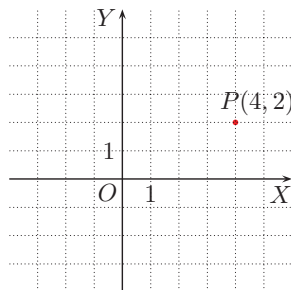
c) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 5 ma postać $m = 5k$, gdzie $2 \leq k \leq 19$, zatem jest 18 takich liczb.

d) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 10 ma postać $m = 10k$, gdzie $1 \leq k \leq 9$, zatem jest 9 takich liczb.

Układ współrzędnych

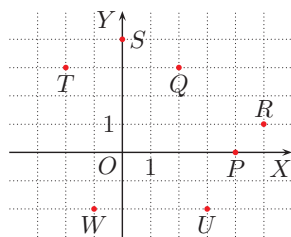
Prostokątny układ współrzędnych to układ dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma nazywana jest osią OX lub **osią odciętych**, a oś pionowa to oś OY lub inaczej **oś rzędnych**.

Każdy punkt płaszczyzny jest w układzie współrzędnych jednoznacznie określony przez parę liczb zwanych **współrzędnymi**. Na przykład punktowi P na rysunku obok odpowiadają współrzędne $(4, 2)$.



Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest również **kartezjańskim układem współrzędnych** na cześć francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a (1596–1650) zwanego w Polsce Kartezjuszem.

1. Odczytaj współrzędne punktów: P , Q , R , S , T , U , W (rysunek obok).



2. Podaj, w której ćwiartce układu współrzędnych położony jest punkt:

- a) $A(-3, 6)$, c) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$,
- b) $B(4, -11)$, d) $D(-50, -60)$.

3. Naszkicuj układ współrzędnych, a następnie zaznacz w nim punkty: $A(0, 5)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -4)$, $D(6, 1\frac{1}{2})$, $E(-2, 0)$, $F(3, -3)$.

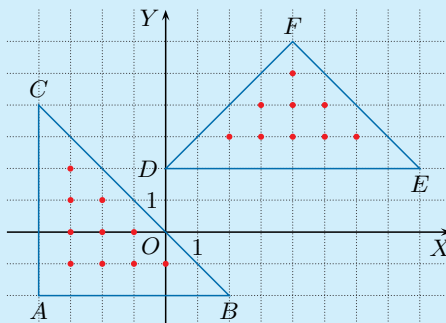
Definicja

Punktami kratowymi nazywamy punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

4. Naszkicuj prostokąt $ABCD$. Ile punktów kratowych leży wewnątrz tego prostokąta?

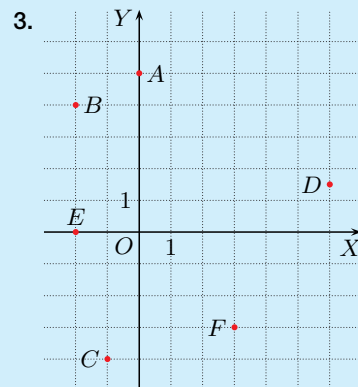
- a) $A(1, -1)$, $B(4, -1)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$
- b) $A(-4, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$, $D(-4, 4)$

5. Dany jest trójkąt T_1 o wierzchołkach: $A(-4, -2)$, $B(2, -2)$ i $C(-4, 4)$ oraz trójkąt T_2 o wierzchołkach: $D(0, 2)$, $E(8, 2)$ i $F(4, 6)$. Do wnętrza którego z tych trójkątów należy więcej punktów kratowych i o ile?

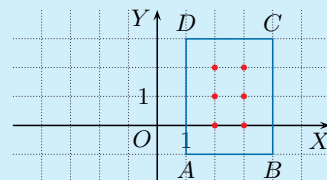


1. $P(4, 0)$, $Q(2, 3)$, $R(5, 1)$, $S(0, 4)$, $T(-2, 3)$, $U(3, -2)$, $W(-1, -2)$

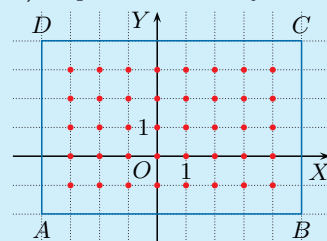
2. a) II b) IV c) I d) III



4. a) 6 punktów kratowych



- b) 40 punktów kratowych



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji o podanej dziedzinie,
- przedstawia funkcję za pomocą wzoru,
- szkicuje wykres funkcji określonej nieskomplikowanym wzorem (w tym prostą),
- oblicza wartość funkcji dla danego argumentu.

4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

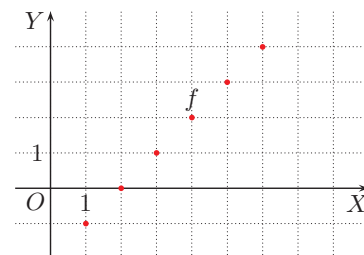
Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. Jednym ze sposobów przedstawienia takiej funkcji jest wykres.

Przykład 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3	4

Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem, a y – wartością funkcji. Są to punkty: $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ i $(6, 4)$.

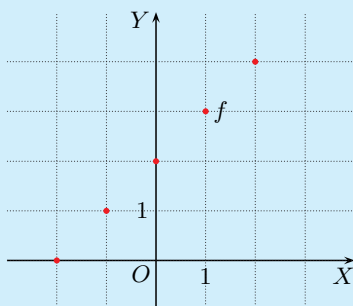


Definicja

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

Ćwiczenie 1

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	3	4



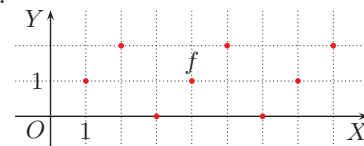
Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

Przykład 2

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

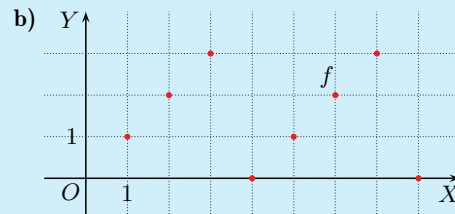
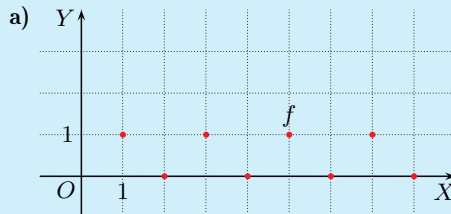
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Ćwiczenie 2



Multiteka

- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

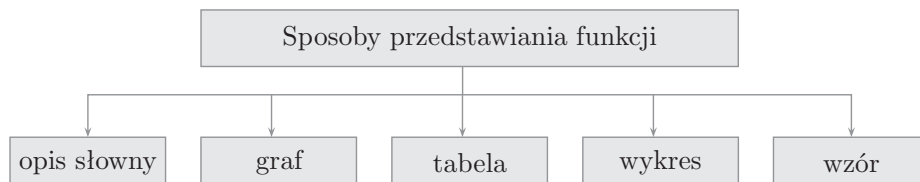
Generator
testów i sprawdzianów

Często możliwe jest określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

Opis słowny	Wzór
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x liczbę o 3 większą	$f(x) = x + 3$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego połowę	$f(x) = \frac{1}{2}x$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego kwadrat	$f(x) = x^2$

Uwaga. Wzór funkcji $f(x) = x + 3$ możemy zapisać też w postaci $y = x + 3$.

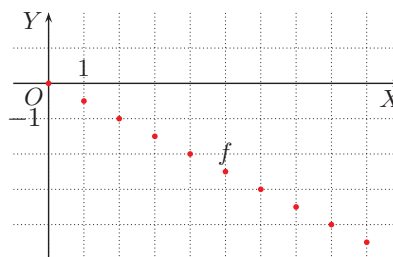
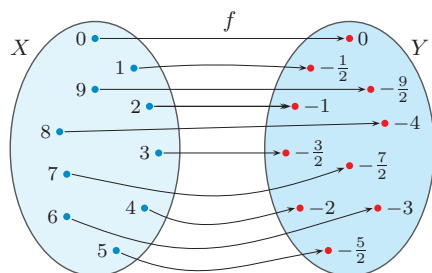
W zależności od zagadnienia korzystamy z jednego lub kilku sposobów przedstawiania funkcji.



Przykład 3

Funkcja f każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$



Funkcję f można opisać wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$ (lub $y = -\frac{1}{2}x$).

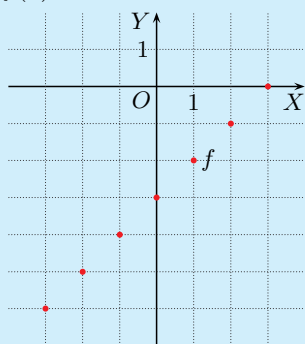
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres oraz podaj wzór funkcji f , która każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

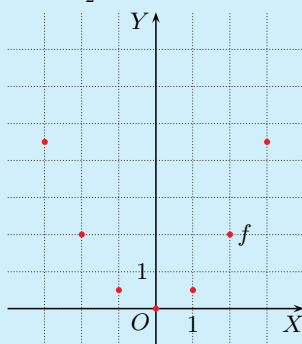
- a) liczbę o 3 mniejszą, b) połowę kwadratu tej liczby.

Ćwiczenie 3

a) $f(x) = x - 3$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$



Przed naszkicowaniem wykresu funkcji, należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

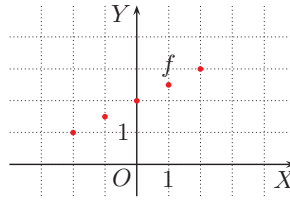
Przykład 4

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

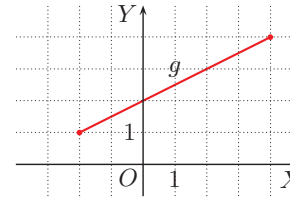
II. przedział $\langle -2; 4 \rangle$

III. przedział $(-2; 4)$



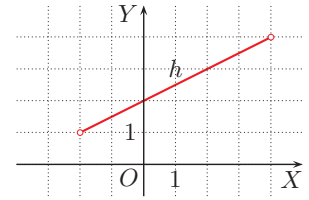
$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$g: \langle -2; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$h: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

• Wykresem funkcji g (rysunek II) jest odcinek łączący punkty $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.

• Na rysunku III puste kółka w punktach $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji h (ponieważ liczby -2 i 4 nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji $f(x) = ax + b$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami, jest przedział domknięty $\langle x_1; x_2 \rangle$, to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, należy obliczyć wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

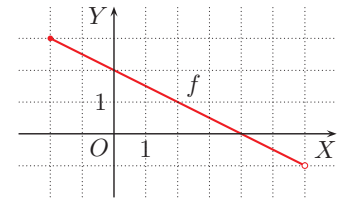
Obliczamy wartość wyrażenia dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x + 2$ dla $x = 6$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, jeśli:

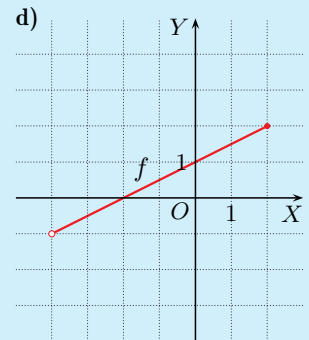
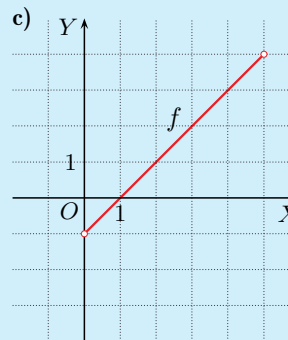
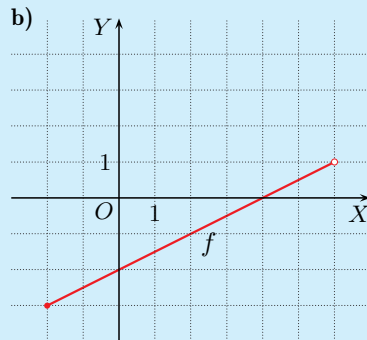
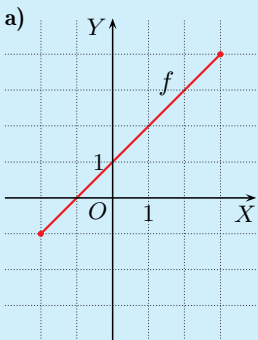
a) $D = \langle -2; 3 \rangle$, $f(x) = x + 1$,

c) $D = (0; 5)$, $f(x) = x - 1$,

b) $D = \langle -2; 6 \rangle$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$,

d) $D = (-4; 2)$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

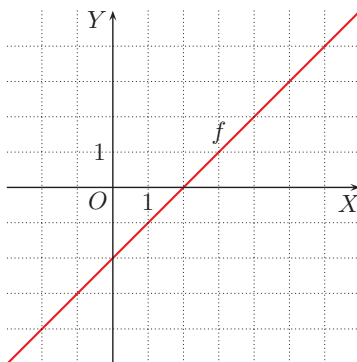
Ćwiczenie 4



Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 2$.

Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych argumentów (dlaczego?), zaznaczyć odpowiednie punkty i poprowadzić przez nie prostą.

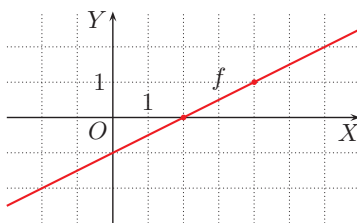


Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Obliczamy wartości funkcji f dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla $x = 2$ i $x = 4$: $f(2) = 0$, $f(4) = 1$.

Do wykresu funkcji f należą punkty: $(2, 0)$ oraz $(4, 1)$. Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.



Ćwiczenie 5

Wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest prosta. Wyznacz dwa punkty należące do tego wykresu i go naszkicuj.

- a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = -x$ c) $f(x) = x - 1$ d) $f(x) = -2x + 2$

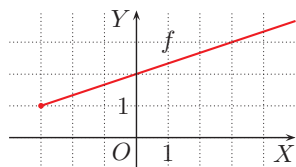
Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

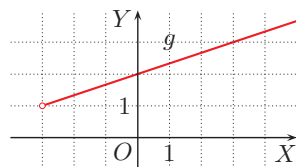
I. przedział $\langle -3; \infty \rangle$

II. przedział $(-3; \infty)$

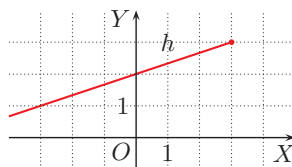
III. przedział $(-\infty; 3)$



$f: \langle -3; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$
 $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$



$g: (-3; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$
 $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$



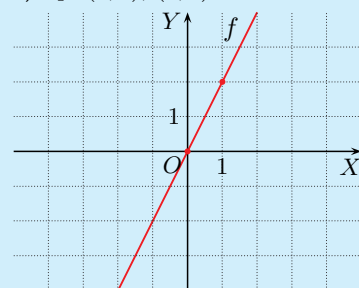
$h: (-\infty; 3) \rightarrow \mathbf{R}$
 $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Wykresami funkcji f i h są półproste domknięte (zawierające swój początek). Wykresem funkcji g jest półprosta otwarta (bez początku).

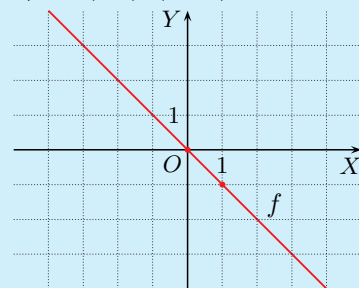
Przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

Ćwiczenie 5

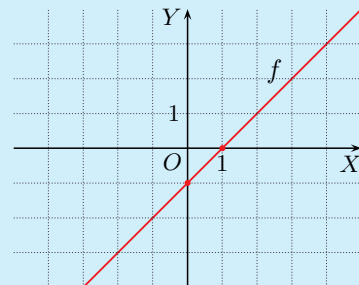
a) np. $(0, 0)$, $(1, 2)$



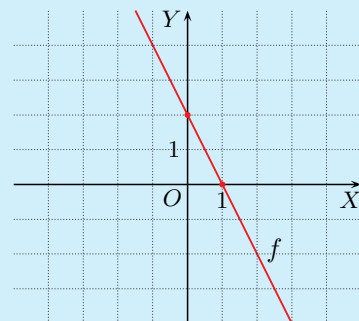
b) np. $(0, 0)$, $(1, -1)$



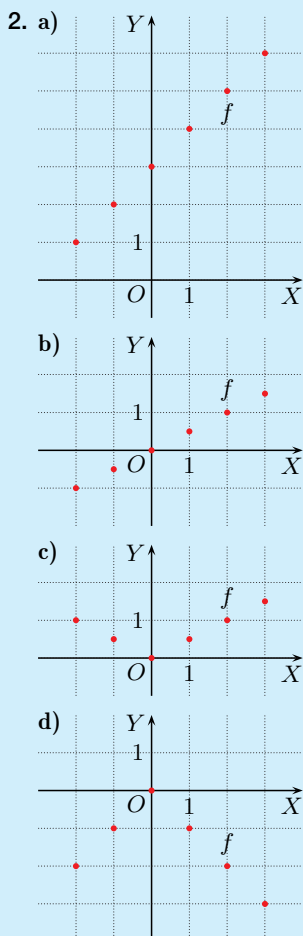
c) np. $(0, -1)$, $(1, 0)$



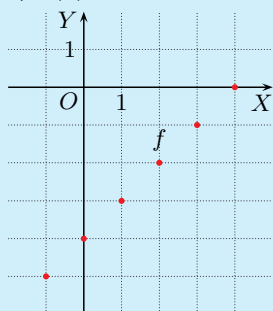
d) np. $(0, 2)$, $(1, 0)$



Odpowiedzi do zadań



3. a) $f(x) = x - 4$



b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = -x + 4$

d) $f(x) = 2x - 1$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbf{R}$, która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:

a) liczbę o 1 mniejszą,

c) jej wartość bezwzględną,

b) liczbę przeciwną,

d) jej kwadrat.

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naskicuj jej wykres.

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$

d) $f(x) = -|x|$

3. Funkcja f podana została za pomocą tabeli. Naskicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0

c)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	4	3	2	1

b)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4

d)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3

4. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x + 1$, jeśli jej dziedziną jest przedział:

a) $\langle 0; 4 \rangle$,

b) $\langle -2; 3 \rangle$,

c) $\langle 1; \infty \rangle$,

d) $(-\infty; 2]$.

Powtórzenie

5. Funkcję $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i wykresu.

a)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	-1	2	1

b)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	3	-1	-2	0

6. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x - 2$

c) $f(x) = x + 3$

7. Naskicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, jeśli:

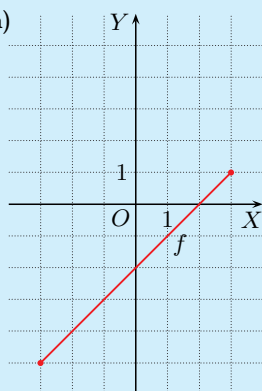
a) $D = \langle -3; 3 \rangle$, $f(x) = x - 2$

c) $D = \langle -2; \infty \rangle$, $f(x) = x + 3$

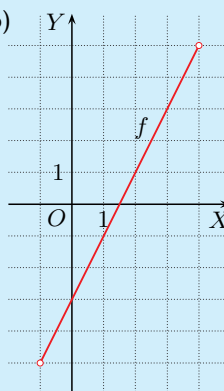
b) $D = (-1; 4)$, $f(x) = 2x - 3$

d) $D = (0; \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

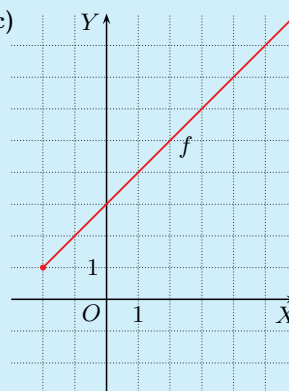
7. a)



b)



c)

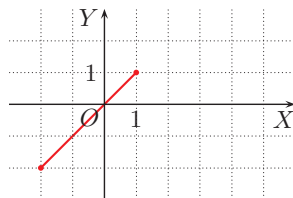


4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

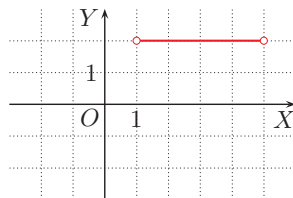
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$

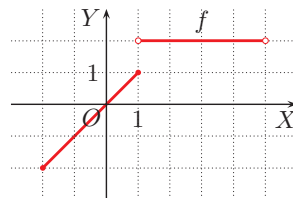
Zauważ, że dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 5 \rangle$.



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in \langle -2; 1 \rangle$



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in (1; 5)$



Wykres funkcji f

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1; 4 \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3) \end{cases}$

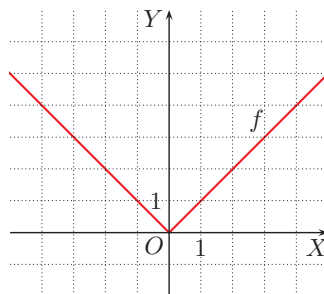
d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. W tabeli podano wartości funkcji f dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3

Tabelę taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.



Wzór tej funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dla całkowitych argumentów x , takich że $|x| \leq 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = |3x|$ c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = -|x|$

Ćwiczenie 2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	4	2	0	2	4	6

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	3	0	3	6	9

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

d)

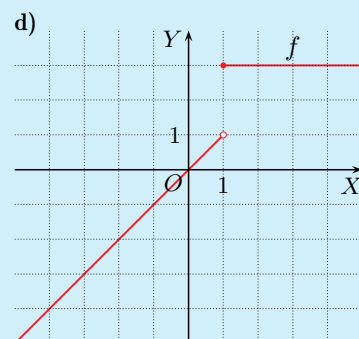
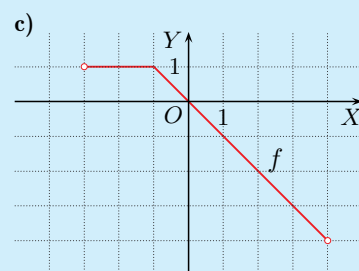
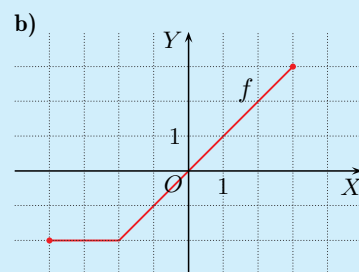
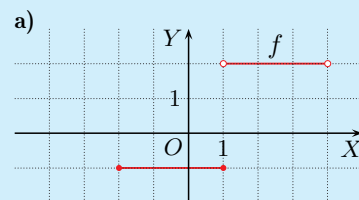
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$$

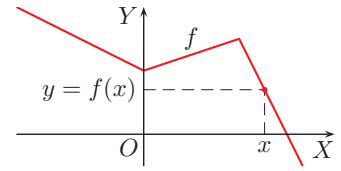
Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji określonej nieskomplikowanym wzorem (w tym parabolę, hiperbolę),
- szkicuje wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach,
- sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu funkcji,
- określa, czy dana krzywa jest wykresem funkcji,
- oblicza wartość funkcji dla danego argumentu.

Ćwiczenie 1



Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu x istnieje dokładnie jedna wartość y taka, że punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f .

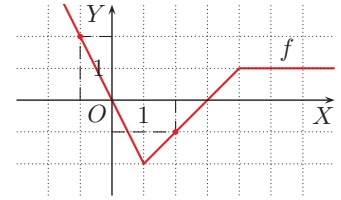


Przykład 3

Z podanego obok wykresu funkcji f odczytaj jej wartości dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 2$.

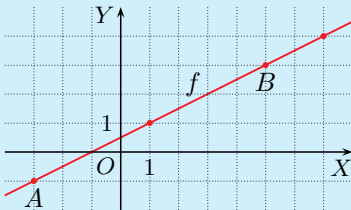
Dla $x = -1$ odczytujemy $f(-1) = 2$.

Dla $x = 2$ odczytujemy $f(2) = -1$.

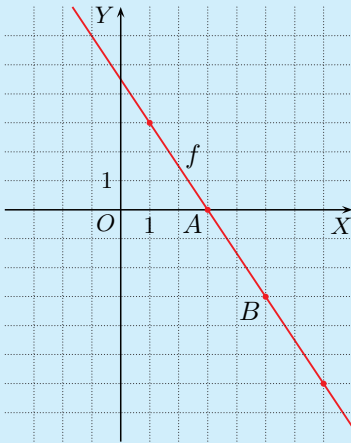


Ćwiczenie 3

a) $f(1) = 1, f(7) = 4$



b) $f(1) = 3, f(7) = -6$



Ćwiczenie 5

a) $f(-2) = 13 \neq -11$, nie należy

b) $f(-\frac{1}{2}) = 0$, należy

Ćwiczenie 3

Wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest prosta przechodząca przez punkty A i B . Naszkicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 7$.

a) $A(-3, -1), B(5, 3)$

b) $A(3, 0), B(5, -3)$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = 1$ oraz $x = 3$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$$

Dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe. Wartości funkcji jesteśmy w stanie wyznaczyć, gdy znamy jej wzór.

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 5x^2 - 6x$ i $h(x) = x^3 - 1$ dla argumentu $x = 2$. Czy punkt $P(2, 7)$ należy do wykresu którejś z tych funkcji?

Obliczamy wartości funkcji dla $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8$$

$$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio w miejsca x i y do wzoru funkcji otrzymamy równość.

Zatem punkt P należy do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji h .

Ćwiczenie 4

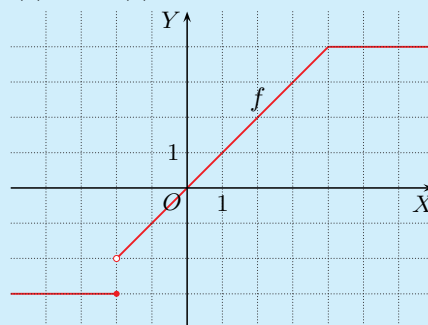
Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

a) $f(x) = 3x^2 + 1, P(-2, -11)$

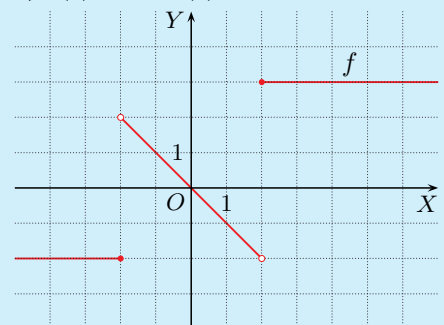
b) $f(x) = -2x^2 - x, P(-\frac{1}{2}, 0)$

Ćwiczenie 4

a) $f(1) = 1, f(3) = 3$



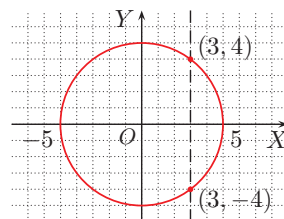
b) $f(1) = -1, f(3) = 3$



Funkcja każdemu argumentowi x przyporządkowuje tylko jedną wartość y , więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

Przykład 5

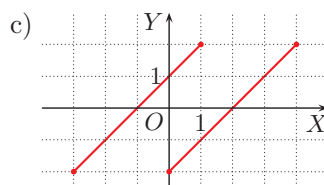
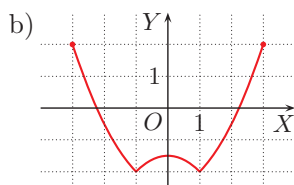
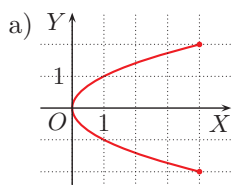
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby x , którym odpowiadają dwie różne wartości y_1, y_2 , np. dla $x = 3$ mamy $y_1 = -4$ i $y_2 = 4$. Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi OY) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Zadania

D 1. Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



2. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = |x|$ o podanej dziedzinie D .

a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = \langle -2; \infty \rangle$

3. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Który z punktów $P(-1, -5)$, $Q(2, -9)$ należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $f(x) = -4x^2 + x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -3$ oraz dla $x = 2$.

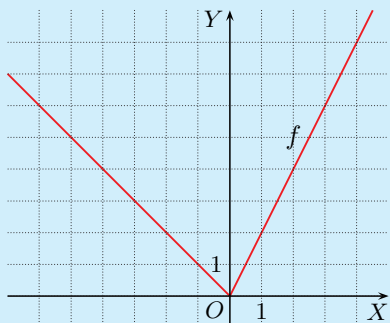
a) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 2x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

Powtórzenie

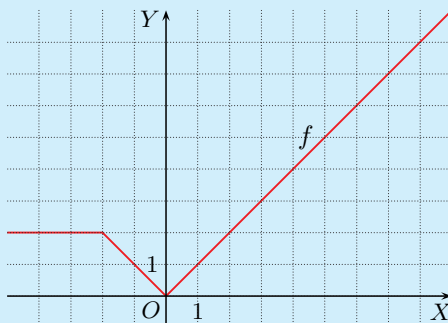
5. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -4$ oraz dla $x = 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -2; \infty \rangle \end{cases}$

5. a) $f(-4) = 4, f(4) = 8$



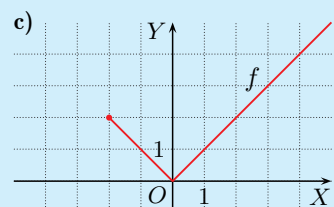
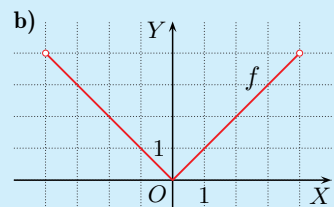
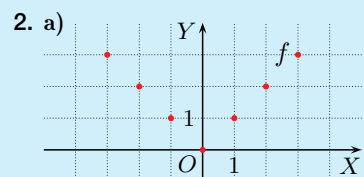
b) $f(-4) = 2, f(4) = 4$



Odpowiedzi do zadań

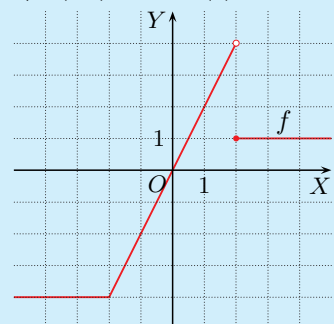
1. a), c) Nie, gdyż istnieją proste równoległe do osi OY (np. $x = 1$), które przecinają krzywą w dwóch punktach.

b) Tak. Każda prosta równoległa do osi OY przecina wykres tylko w jednym punkcie.

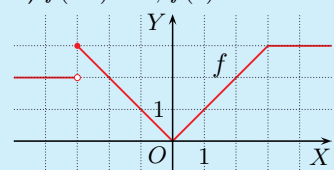


3. a) Q b) P c) P

4. a) $f(-3) = -4, f(2) = 1$



b) $f(-3) = 3, f(2) = 2$



Inne przykłady wykresów funkcji

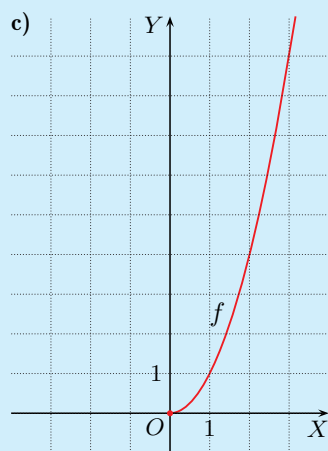
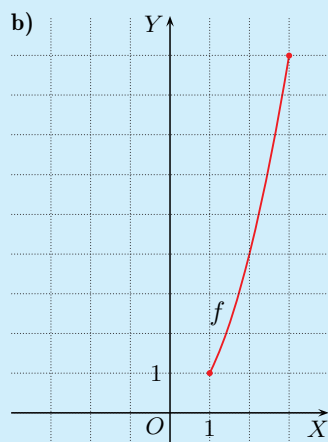
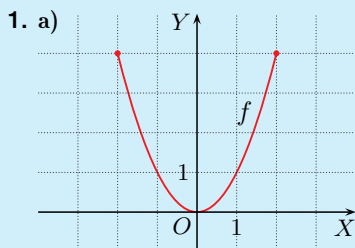
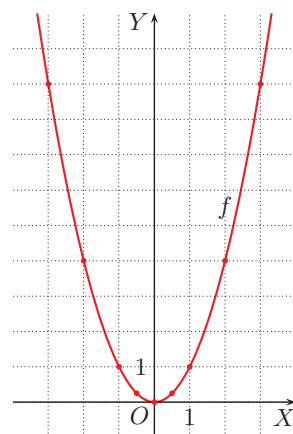
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f . Wykres ten nazywamy **parabolą**.



1. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^2$ o podanej dziedzinie D .

a) $D = \langle -2; 2 \rangle$

b) $D = \langle 1; 3 \rangle$

c) $D = \langle 0; \infty \rangle$

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu, a następnie narysuj jej wykres.

a) $f(x) = -x^2$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

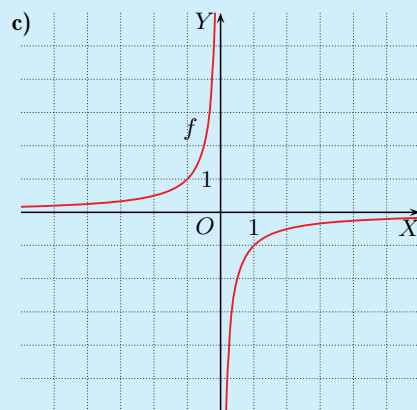
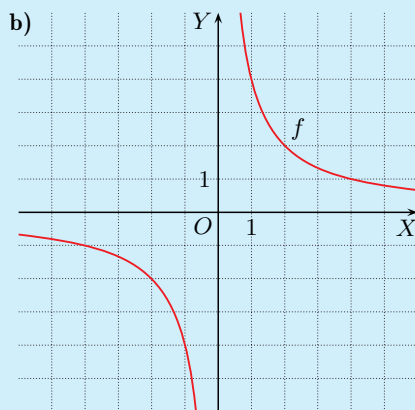
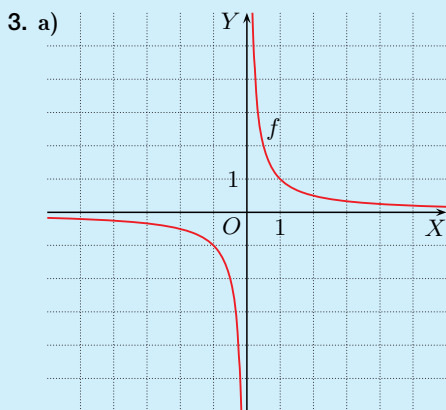
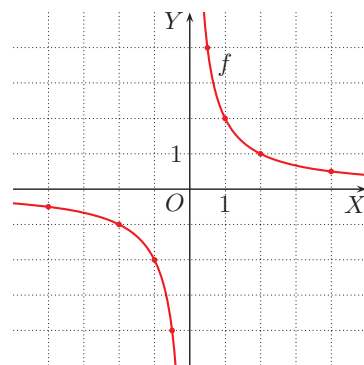
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{x}$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów (zwróć uwagę, że liczba 0 nie należy do dziedziny funkcji).

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i odpowiednio je łączymy – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f (składa się on z dwóch osobnych gałęzi). Wykres ten nazywamy **hiperbolą**.



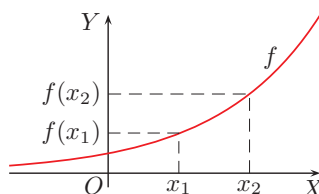
4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ jest rosnąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 &< \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - 4 &< \frac{1}{2}x_2 - 4 \end{aligned}$$

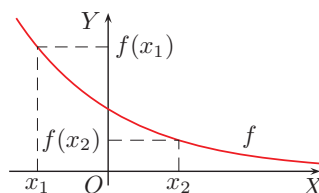
Zatem $f(x_1) < f(x_2)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest rosnąca.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ jest malejąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} 4x_1 &< 4x_2 \quad /: x_1 \cdot x_2 \\ \frac{4}{x_2} &< \frac{4}{x_1} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Dzielenie obu stron nierówności przez } x_1 \cdot x_2 \text{ nie} \\ \text{zmienia zwrotu nierówności, gdyż } x_1 \cdot x_2 > 0. \end{array}$$

Zatem $f(x_2) < f(x_1)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in (0; \infty)$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest malejąca.

Uczeń:

- stosuje pojęcie funkcji monotonicznej (rosnącej, malejącej, nierosnącej, niemalejącej, stałej),
- na podstawie wykresu funkcji określa jej monotoniczność,
- rysuje wykres funkcji o podanych kryteriach monotoniczności,
- bada na podstawie definicji monotoniczność funkcji określonej wzorem.

Multiteka

- Monotoniczność funkcji liniowej

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

a) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \\ -2x_1 &> -2x_2 \\ -2x_1 + 6 &> -2x_2 + 6 \end{aligned}$$

Zatem $f(x_1) > f(x_2)$, czyli funkcja jest malejąca.

b) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$-4x_1 > -4x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$-\frac{4}{x_2} > -\frac{4}{x_1}$$

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

c) Zakładamy, że

$x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ oraz $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$-2x_1 > -2x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$-\frac{2}{x_2} > -\frac{2}{x_1}$$

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że:

a) funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -2x + 6$ jest malejąca,

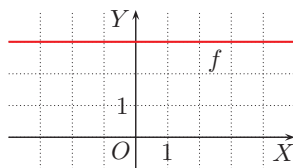
b) funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ jest rosnąca,

c) funkcja $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ jest rosnąca.

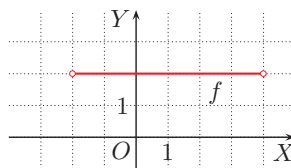
Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

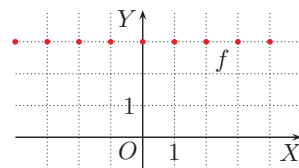
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$



$f: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2$

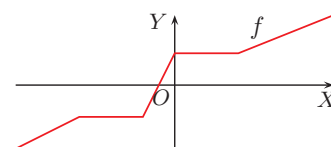


$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



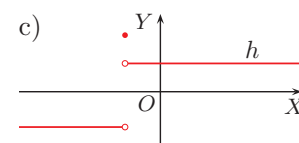
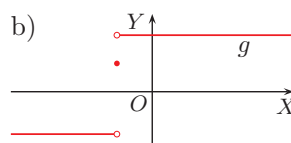
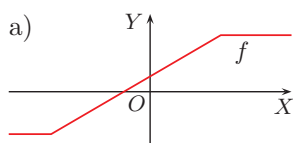
Przykład funkcji niemalejącej

Ćwiczenie 2

a) tak b) tak c) nie

Ćwiczenie 2

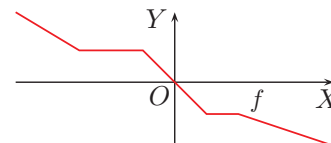
Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji niemalejącej?



Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$



Przykład funkcji nierosnącej

Ćwiczenie 3

a) Naskicuj wykres funkcji nierosnącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$.

b) Czy można naskicować wykres funkcji niemalejącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$?

Uwaga. Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą. Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą, jak i nierosnącą.

Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$. Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.

W przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja f maleje, a w przedziale $\langle 0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

Przykład 4

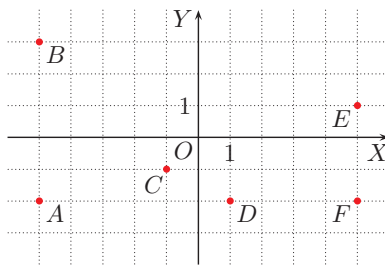
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Jednak funkcja f nie jest funkcją malejącą w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Na przykład dla pary argumentów x_1, x_2 , mamy:

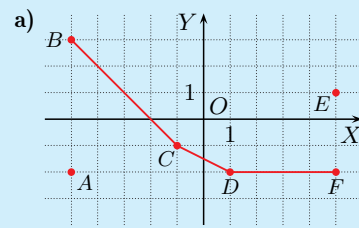
$$x_1 < x_2 \text{ i } f(x_1) < f(x_2)$$

Ćwiczenie 4

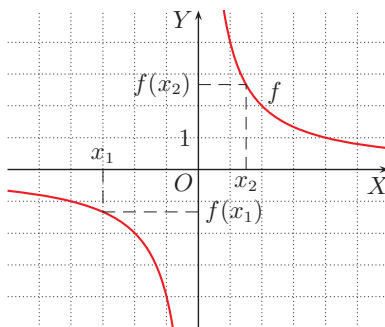
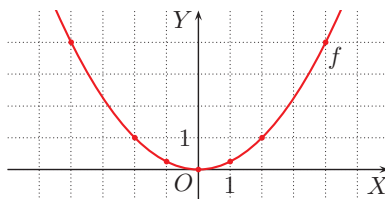
Naskicuj wykres dowolnej funkcji, która jest przedziałami rosnąca, ale nie jest funkcją monotoniczną.



Ćwiczenie 3

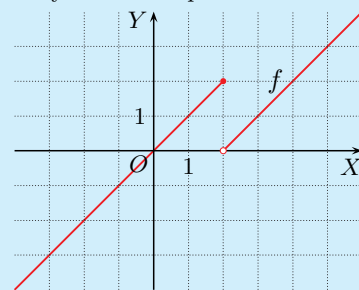


b) nie



Ćwiczenie 4

Przykładowa odpowiedź.



Odpowiedzi do zadań

1. a) Funkcja f maleje w $\langle -3; 2 \rangle$, jest stała w $\langle 4; 6 \rangle$, rośnie w $\langle 2; 4 \rangle$.

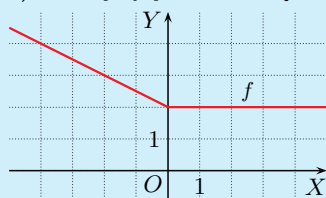
b) Funkcja f maleje w $\langle -2; 0 \rangle$ i w $\langle 2; 3 \rangle$, rośnie w $\langle -3; -2 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$ i w $\langle 3; 6 \rangle$.

2. Funkcja f maleje w $\langle -2; 2 \rangle$, jest stała w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 3; 4 \rangle$, rośnie w $\langle -5; -4 \rangle$ i w $\langle 2; 3 \rangle$. Wszystkie zdania są prawdziwe.

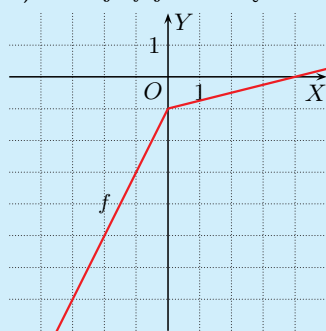
3. a) Funkcja f maleje w $\langle -2; 2 \rangle$, rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 2; 5 \rangle$, nie jest więc monotoniczna.

b) Funkcja f rośnie w $\langle -4; -1 \rangle$ i w $\langle -1; 5 \rangle$, ale nie jest funkcją rosnącą, gdyż dla pary argumentów $-1, 1$ mamy: $-1 < 1$ oraz $f(-1) > f(1)$.

4. a) Funkcja f jest nierosnąca.

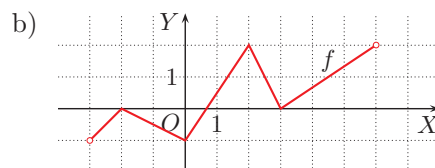
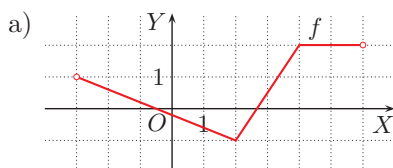


b) Funkcja f jest rosnąca.



Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

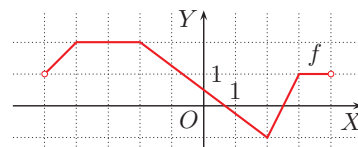


2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-5; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

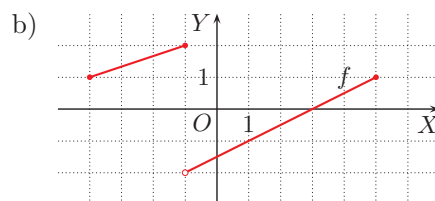
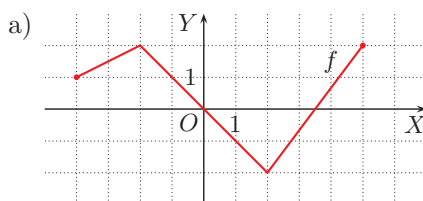
A. Funkcja f jest nierosnąca w $\langle -4; 2 \rangle$.

B. Funkcja f jest niemalejąca w $\langle -5; -2 \rangle$.

C. Funkcja f jest niemalejąca w $\langle 2; 4 \rangle$.



D 3. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



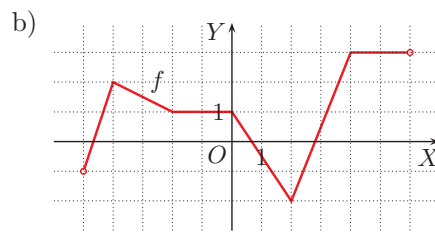
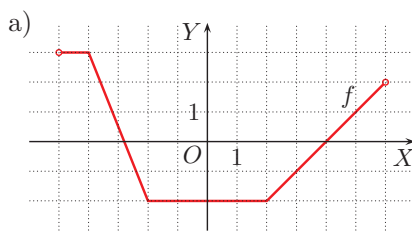
Powtórzenie

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Czy jest to funkcja monotoniczna?

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

5. Odczytaj z wykresu funkcji $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbf{R}$ przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, jest niemalejąca.



5. a) Funkcja f rośnie w $\langle 2; 6 \rangle$, maleje w $\langle -4; -2 \rangle$, jest niemalejąca w $\langle -5; -4 \rangle$ i w $\langle -2; 6 \rangle$.

b) Funkcja f rośnie w $\langle -5; -4 \rangle$ i w $\langle 2; 4 \rangle$, maleje w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 0; 2 \rangle$, jest niemalejąca w $\langle -5; -4 \rangle$, w $\langle -2; 0 \rangle$ i w $\langle 2; 6 \rangle$.

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

■ Odczytywanie dziedziny funkcji

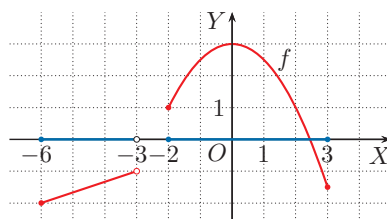
Dziedzina funkcji $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Jej dziedziną jest zbiór:

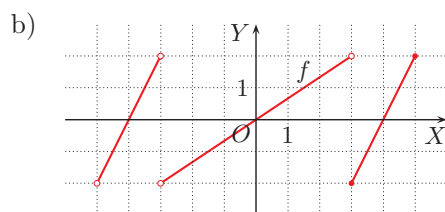
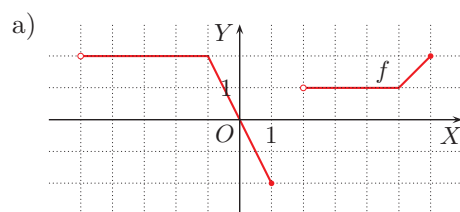
$$D = \langle -6; -3 \rangle \cup \langle -2; 3 \rangle$$

Na rysunku został on zaznaczony na osi OX kolorem niebieskim.



Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę.



■ Odczytywanie zbioru wartości funkcji

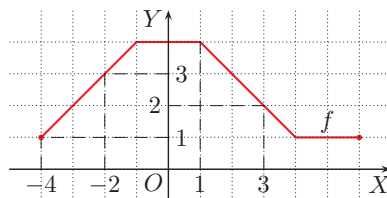
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, ale także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji: $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leq y \leq 4$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1; 4 \rangle$.



Uczeń:

- stosuje pojęcia: zbiór wartości funkcji, największa i najmniejsza wartość funkcji,
- odczytuje z wykresu funkcji jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, maksymalne przedziały monotoniczności funkcji, najmniejszą i największą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Ćwiczenie 1

- a) $D = (-5; 1) \cup (2; 6)$
b) $D = (-5; -3) \cup (-3; 5)$

Definicja

Zbiór wartości funkcji $f: D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

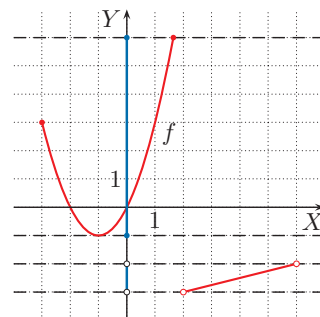
Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup \langle -1; 6 \rangle$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.



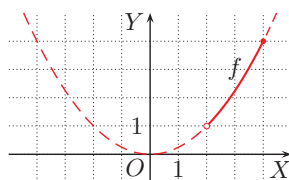
Ćwiczenie 2

- a) $f(D) = (1; 4)$
- b) $f(D) = \langle 0; 4 \rangle$
- c) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$

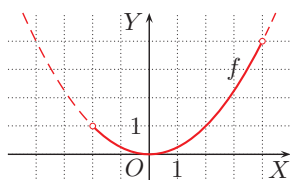
Ćwiczenie 2

Linia ciągłą narysowano wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

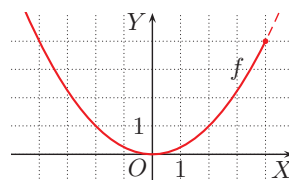
a) $D = (2; 4)$



b) $D = (-2; 4)$



c) $D = (-\infty; 4)$

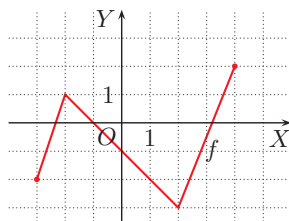


Ćwiczenie 3

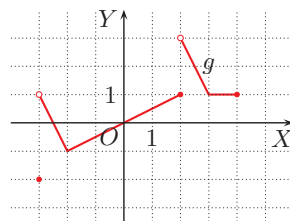
Funkcja f przyjmuje największą wartość 2 dla $x = 4$.
Funkcja g nie przyjmuje wartości największej.
Funkcja h przyjmuje największą wartość 3 dla $x = 3$.

Ćwiczenie 3

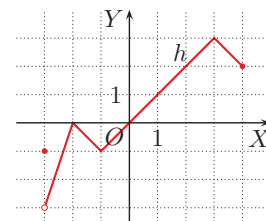
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f , g i h określonych w przedziale $\langle -3; 4 \rangle$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3 . Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2 . Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.



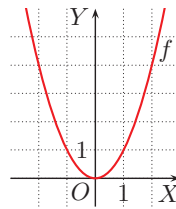
Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dziedzinie $D = \mathbf{R}$.

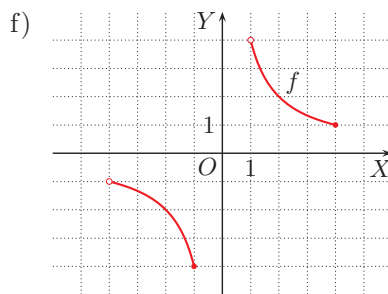
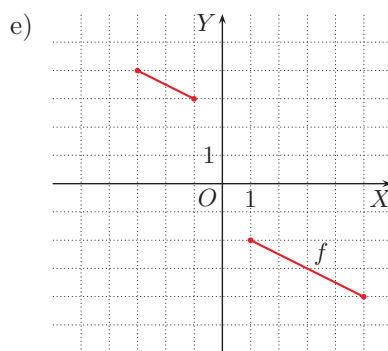
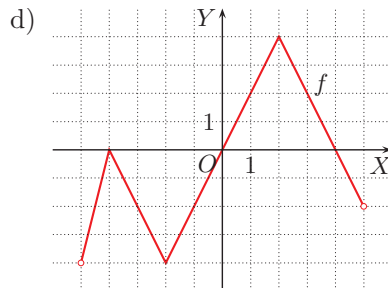
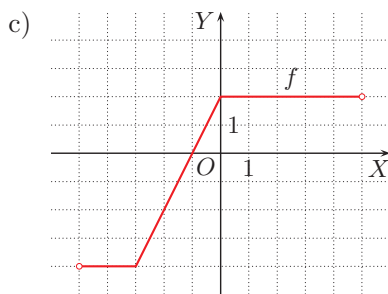
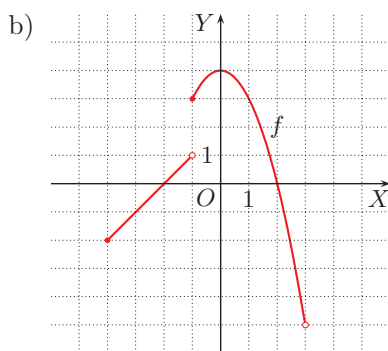
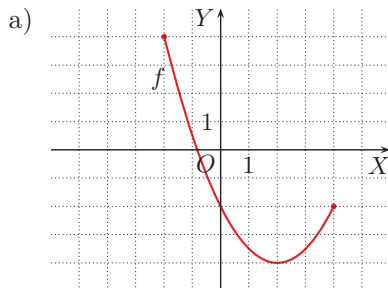
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$.

Najmniejsza wartość funkcji f równa 0 jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.



Zadania

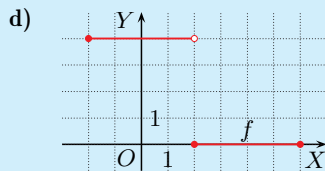
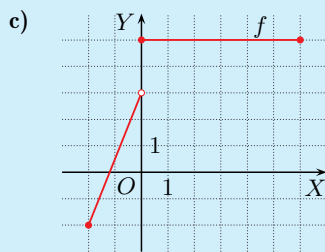
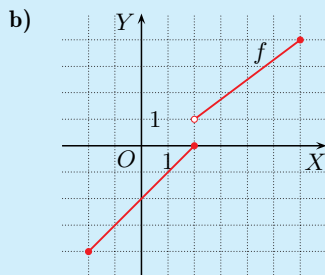
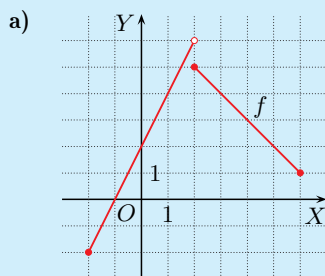
1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



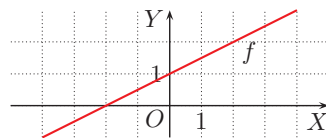
Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = \langle -2; 4 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -2$
b) $D = \langle -4; 3 \rangle$,
 $f(D) = \langle -5; 4 \rangle$,
nie przyjmuje wartości najmniejszej,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 0$
c) $D = \langle -5; 5 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; 2 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x \in \langle -5; -3 \rangle$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x \in \langle 0; 5 \rangle$
d) $D = \langle -5; 5 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 2$
e) $D = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 5$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -3$
f) $D = \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -1$,
nie przyjmuje wartości największej

2. a) $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$
 b) $f(D) = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$
 c) $f(D) = \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$
3. a) $f(D) = \langle 1; 6 \rangle$
 b) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$
 c) $f(D) = \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 5; 6 \rangle$
4. a) $D = \langle \frac{1}{2}; 4 \rangle$
 b) $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$
 c) $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$
 d) $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$
5. a) $f_{\min} = -1$ dla $x = -1$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x = -4$
 b) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
 nie przyjmuje wartości
 największej
 c) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
 nie przyjmuje wartości
 największej
6. Przykładowe odpowiedzi.

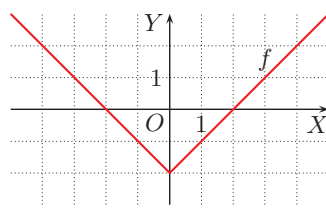


2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Podaj zbiór wartości funkcji danej tym samym wzorem, jeśli jej dziedziną jest zbiór D .



- a) $D = \langle -4; 4 \rangle$ b) $D = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 4 \rangle$ c) $D = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$
3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.
- a) $D = \langle -4; 6 \rangle$ b) $D = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$ c) $D = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$
4. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = 2x - 4$. Podaj jej dziedzinę, jeśli zbiór wartości jest równy:
- a) $\langle -3; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$, c) $\langle 0; 2 \rangle \cup \{3\}$, d) $\{0, 2, 3\}$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Dla funkcji g danej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane, jeśli dziedziną tej funkcji jest zbiór:



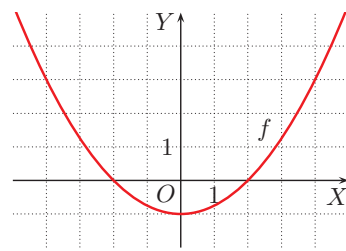
- a) $D = \langle -4; -1 \rangle$, b) $D = \langle -3; 4 \rangle$, c) $D = \langle -2; \infty \rangle$.
6. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, której zbiór wartości jest równy:
- a) $\langle -2; 6 \rangle$, b) $\langle -4; 0 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$, c) $\langle -2; 3 \rangle \cup \{5\}$, d) $\{0, 4\}$.

Powtórzenie

7. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.

- a) $D = \langle 0; 4 \rangle$ b) $D = (-1; 2)$ c) $D = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$

8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, której dziedziną jest przedział:

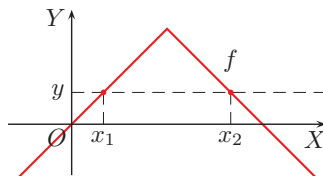


- a) $\langle 2; 4 \rangle$, c) $\langle -4; 2 \rangle$,
 b) $\langle -2; 0 \rangle$, d) $\langle -\infty; 4 \rangle$.

7. a) $f(D) = \langle -4; -2 \rangle$
 b) $f(D) = \langle -3; -\frac{3}{2} \rangle$
 c) $f(D) = \langle -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2} \rangle \cup \langle -2; -\frac{3}{2} \rangle$
8. a) $g(D) = \langle 0; 3 \rangle$
 b) $g(D) = \langle -1; 0 \rangle$
 c) $g(D) = \langle -1; 3 \rangle$
 d) $g(D) = \langle -1; \infty \rangle$

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę, że funkcja f , której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2 .

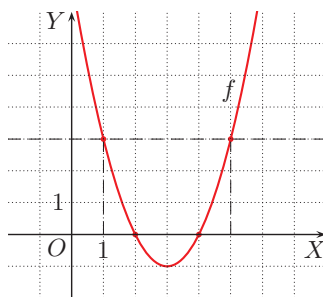


Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.

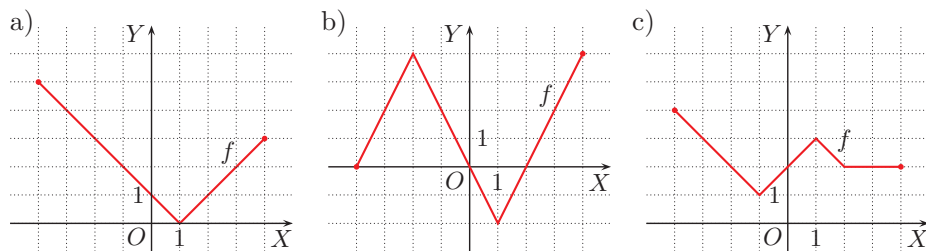
Rysujemy prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$. Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.



Ćwiczenie 1

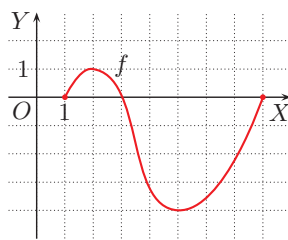
Na podstawie wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty x , dla których spełnione jest równanie $f(x) = 2$.



Przykład 2

Dany jest wykres funkcji $f: \langle 1; 8 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytujemy z niego:

- równanie $f(x) = 0$ jest spełnione dla $x = 1$, $x = 3$, $x = 8$,
- nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1; 3)$,
- nierówność $f(x) \leq 0$ zachodzi dla $x \in \{1\} \cup \langle 3; 8 \rangle$.



Uczeń:

- odczytuje z wykresu rozwiązania równań i nierówności.

Ćwiczenie 1

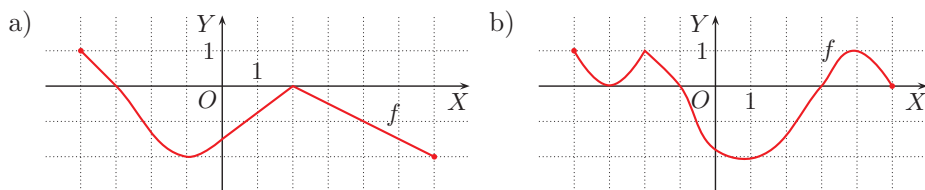
- a) $f(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 3\}$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 2\}$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-3, -1, 3\}$
c) brak miejsc zerowych,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 0\} \cup \langle 2; 4 \rangle$

Ćwiczenie 2

- a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -3; 6 \rangle$
- b) $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup$
 $\cup \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -1; 3 \rangle \cup$
 $\cup \{-3, 5\}$

Ćwiczenie 2

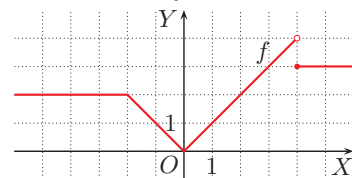
Z wykresu funkcji f odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leq 0$.



Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -2; 4 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases}$$



Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz nierówności $f(x) \geq 2$.

Nierówność $f(x) > 2$ jest spełniona dla $x \in (2; \infty)$, a nierówność $f(x) \geq 2$ zachodzi dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty \rangle$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego rozwiązanie równania:

- $f(x) = 3$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 3$,
- $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -5; 3 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

Przykład 4

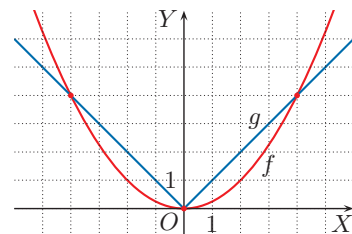
Rozwiąż graficznie równanie $\frac{1}{4}x^2 = |x|$ oraz nierówność $\frac{1}{4}x^2 < |x|$.

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$.

Z wykresów odczytujemy:

$$\frac{1}{4}x^2 = |x| \text{ dla } x = -4, x = 0, x = 4$$

$$\frac{1}{4}x^2 < |x| \text{ dla } x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$$



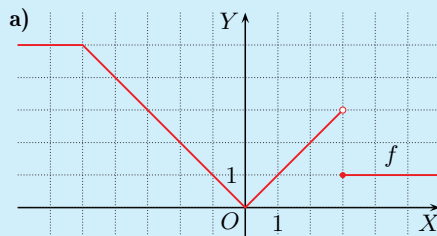
Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$ z przykładu 4 rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4}x^2 \geq |x|$.

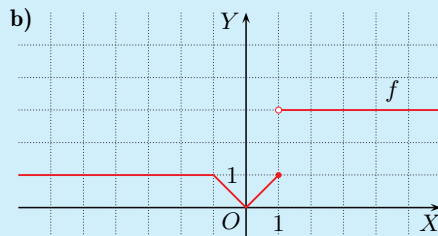
Ćwiczenie 4

$$x \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$$

Ćwiczenie 3



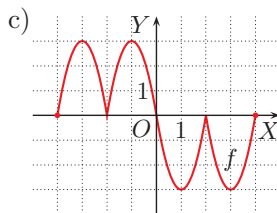
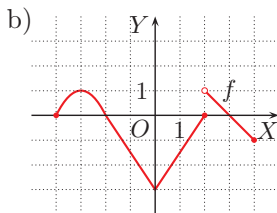
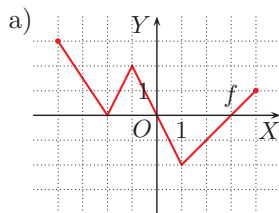
$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \text{ dla } x = -3, \\ f(x) &> 3 \text{ dla } x \in (-\infty; -3), \\ f(x) &= 1 \text{ dla } x \in \{-1, 1\} \cup \langle 3; \infty \rangle, \\ f(x) &\leq 1 \text{ dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \text{ dla } x \in (1; \infty), \\ &\text{nie przyjmuje wartości większych od 3,} \\ f(x) &= 1 \text{ dla } x \in (-\infty; -1) \cup \{1\}, \\ f(x) &\leq 1 \text{ dla } x \in (-\infty; 1) \end{aligned}$$

Zadania

1. Z wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) \geq 0$.



2. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -x - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

3. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 1 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

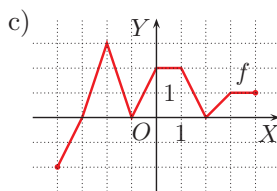
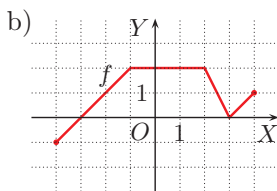
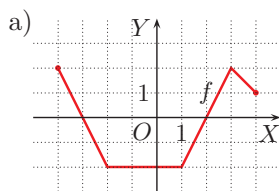
c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

Powtórzenie

4. Odczytaj z wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ i $f(x) \leq 0$.



5. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

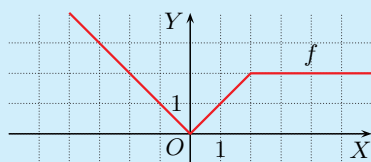
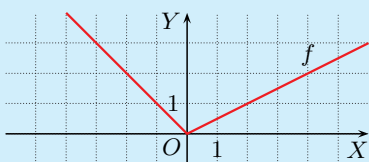
4. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 2)$, $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -3; 2 \rangle$

b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 3\}$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \{3\}$

c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \{-1, 2\}$

5. a) $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 4\}$,
 $f(x) < 1$ dla $x \in (-1; 2)$

b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2\} \cup \langle 2; \infty \rangle$,
 $f(x) < 1$ dla $x \in (-1; 1)$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$

- b) $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$

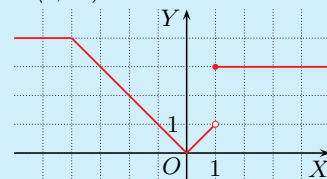
- c) $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -2; 0 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup \{2, 4\}$

2. a) $f(x) = -1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in (-\infty; 1)$

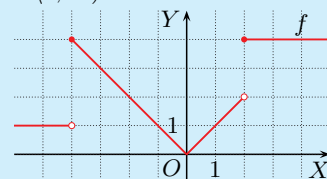
b) $f(x) = -1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in \langle -5; \infty \rangle$

c) $f(x) = -1$ dla $x = -4$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in (-\infty; 4)$

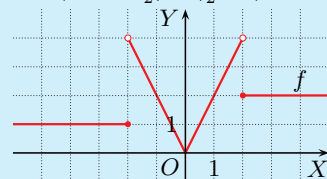
3. a) $f(x) = 1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$



- b) $f(x) = 1$ dla
 $x \in (-\infty; -4) \cup \{-1, 1\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$



- c) $f(x) = 1$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla
 $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



- d) $f(x) = 1$ dla
 $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup \langle 1; \infty \rangle$,
 $f(x) \geq 1$ dla
 $x \in \langle -2; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$

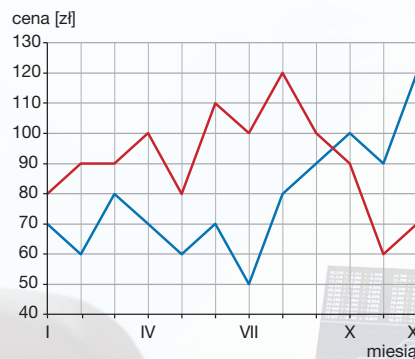
Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 grudnia 2017 r. Taki wykres składa się z bardzo wielu punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.



1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki X (kolor czerwony) i spółki Y (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2018 roku.

- Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaki – spółki Y?
- Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?



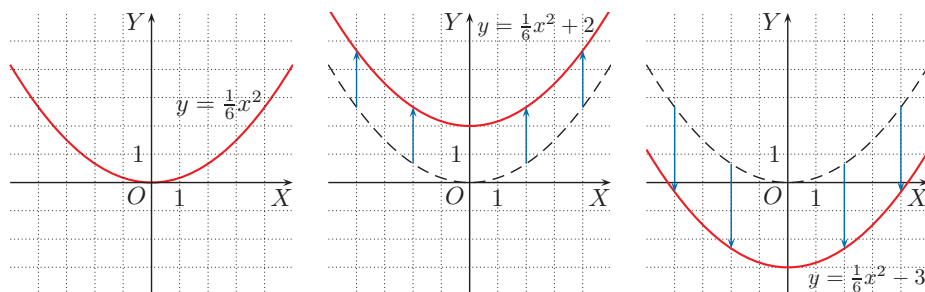
- Spółka X – zysk od maja do sierpnia: $120 - 80 = 40$ [zł]
Spółka Y – zysk od lipca do października: $100 - 50 = 50$ [zł]
 - Spółka X – strata od czerwca do listopada: $110 - 60 = 50$ [zł]
Spółka Y – strata od lutego do lipca: $60 - 50 = 10$ [zł]



4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

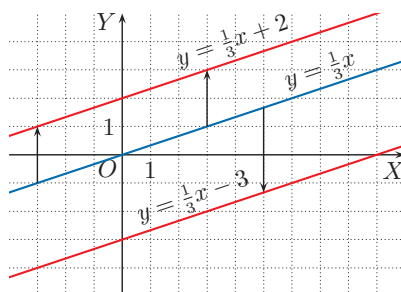
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

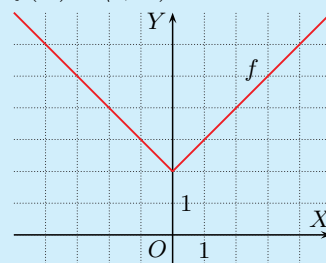
- a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.

Uczeń:

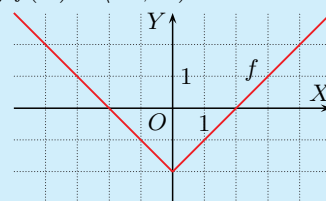
- rysuje wykresy funkcji:
 $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ oraz
 $y = f(x) - q$ dla $q > 0$.

Ćwiczenie 1

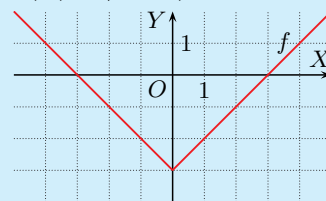
- a) $f(D) = \langle 2; \infty \rangle$



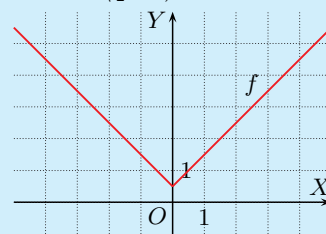
- b) $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$



- c) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$



- d) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



Multiteka

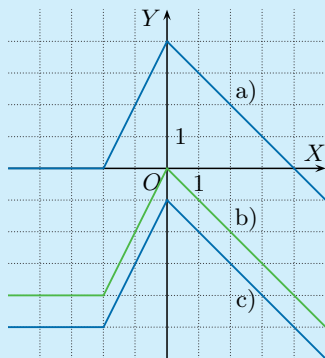
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.7

Generator
testów i sprawdzianów

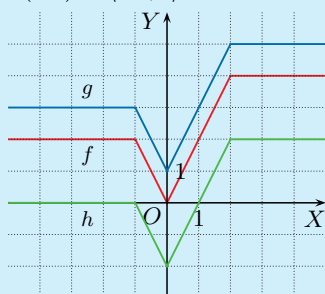
Odpowiedzi do zadań

1.

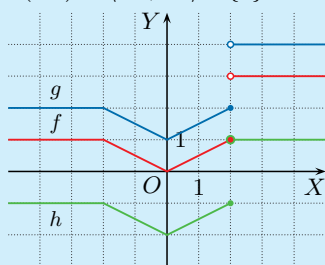


- a) $g(D) = (-\infty; 4)$
 b) $g(D) = (-\infty; 0)$
 c) $g(D) = (-\infty; -1)$

2. a) $f(D_f) = \langle 0; 4 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle 1; 5 \rangle$,
 $h(D_h) = \langle -2; 2 \rangle$



- b) $f(D_f) = \langle 0; 1 \rangle \cup \{3\}$,
 $g(D_g) = \langle 1; 2 \rangle \cup \{4\}$,
 $h(D_h) = \langle -2; -1 \rangle \cup \{1\}$

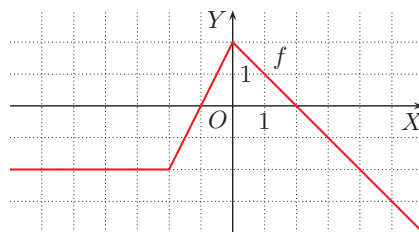


3. a) $a = 1$
 b) $a = -4$
 4. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 4$

Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.
 Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości.

- a) $g(x) = f(x) + 2$
 b) $g(x) = f(x) - 2$
 c) $g(x) = f(x) - 3$



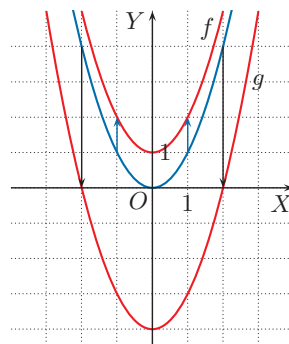
2. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f , g i h .

- a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -1; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |\frac{1}{2}x| & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$, a następnie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x| + a$ oraz podaj wartość parametru a , jeśli:

- a) zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\langle 1; \infty \rangle$,
 b) miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i 4 .

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^2$ (kolor niebieski) oraz wykresy funkcji f i g (kolor czerwony). Podaj wzory funkcji f i g .



5. Naszkicuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla $m \in \{-3, -1, 2\}$.

- a) $f(x) = x^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 - 3$
 b) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 9$

Powtórzenie

6. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x$, a następnie wykres funkcji:

- a) $y = \frac{1}{2}x + 5$, b) $y = \frac{1}{2}x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x - 6$, d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

7. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}|x|$, a następnie wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 3$

5. a) 0 dla $m \in \{-3, -1\}$, 1 dla $m = 2$
 b) 0 dla $m = -3$, 1 dla $m = -1$, 2 dla $m = 2$
 c) 1 dla $m = -3$, 2 dla $m \in \{-1, 2\}$
 d) 2 dla $m \in \{-3, -1, 2\}$
 7. a) $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
 b) $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$
 c) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$

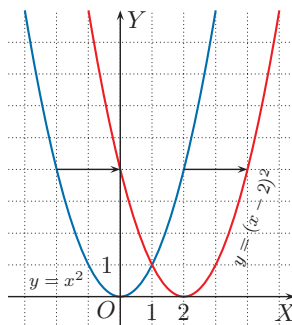
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

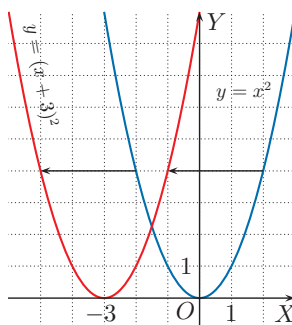


Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g .

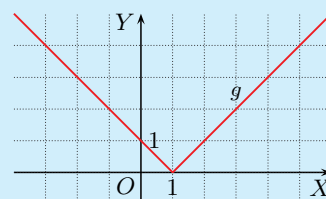
a) $g(x) = |x - 1|$ b) $g(x) = |x + 2|$ c) $g(x) = |x + 3|$ d) $g(x) = |x - 4|$

Uczeń:

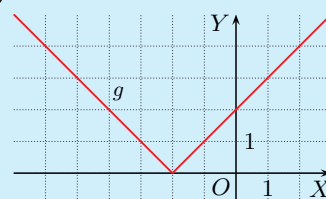
- rysuje wykresy funkcji:
 $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ oraz
 $y = f(x + p)$ dla $p > 0$.

Ćwiczenie 1

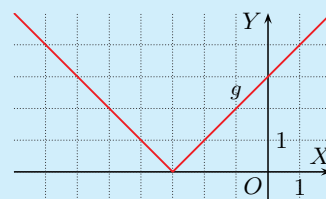
a) $x = 1$



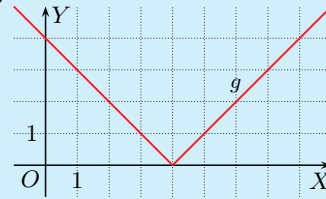
b) $x = -2$



c) $x = -3$



d) $x = 4$



Multiteka

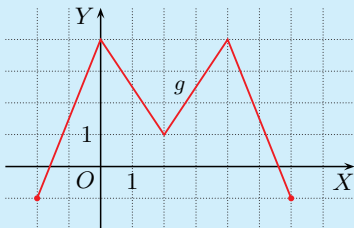
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.8

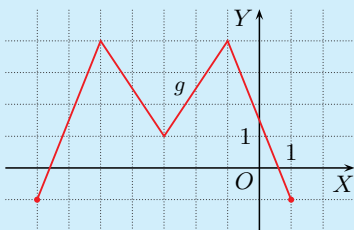
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

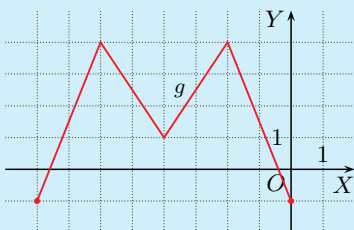
a) $D = \langle -2; 6 \rangle$



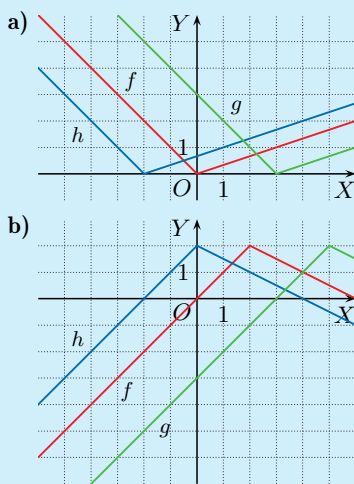
b) $D = \langle -7; 1 \rangle$



c) $D = \langle -8; 0 \rangle$



Ćwiczenie 3

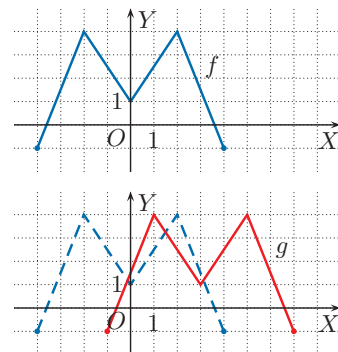


Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -1; 7 \rangle$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g .

a) $g(x) = f(x - 2)$

b) $g(x) = f(x + 3)$

c) $g(x) = f(x + 4)$

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i $h(x) = f(x + 2)$.

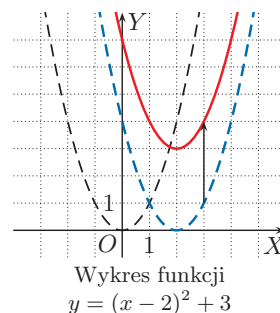
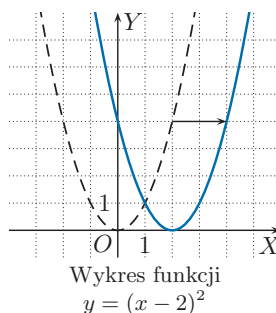
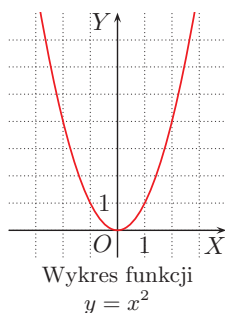
a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$.

Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY .



Ćwiczenie 4

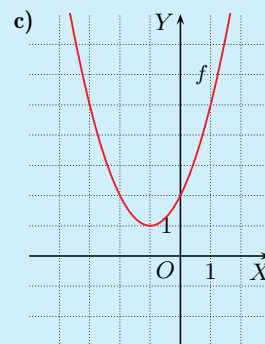
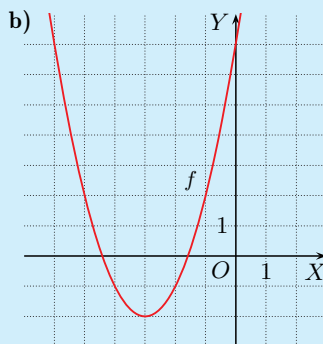
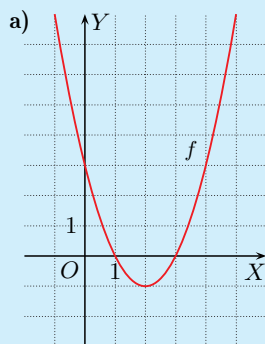
Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$

b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$

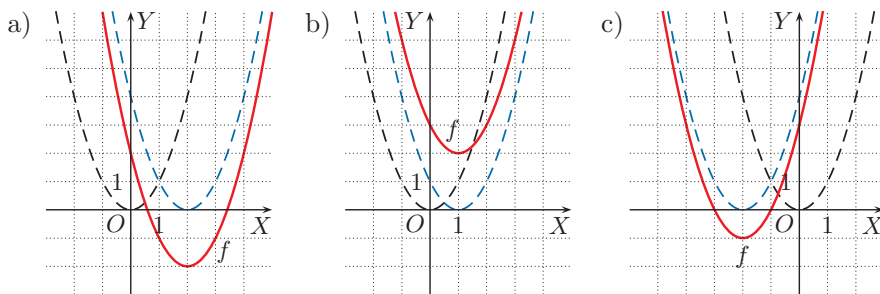
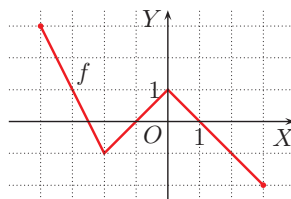
c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Ćwiczenie 4



Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj jej miejsce zerowe.
 - $g(x) = (x - 1)^2$
 - $g(x) = (x + 1)^2$
 - $g(x) = (x + 2)^2$
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g .
 - $g(x) = |2(x - 3)|$
 - $g(x) = |2(x - 2)|$
 - $g(x) = |2(x + 2)|$
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |3x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g .
 - $g(x) = |3(x - 1)|$
 - $g(x) = |3x + 3|$
 - $g(x) = |3x + 12|$
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.
 - $g(x) = f(x - 2)$
 - $g(x) = f(x - 3)$
 - $g(x) = f(x + 1)$
 - $g(x) = f(x + 2)$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.
 - $f(x) = |x + 2| + 3$
 - $f(x) = |x - 2| - 3$
 - $f(x) = |x + 1| - 2$
- Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$:
 - o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę,
 - o 4 jednostki w lewo i 3 jednostki w dół,
 - o 1 jednostkę w lewo i 2 jednostki w górę.
 Podaj wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.
- Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$. Podaj wzór funkcji f .



- $g(x) = |x - 3| + 2$
 - $g(x) = |x + 4| - 3$
 - $g(x) = |x + 1| + 2$
- $f(x) = (x - 2)^2 - 2$
 - $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
 - $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

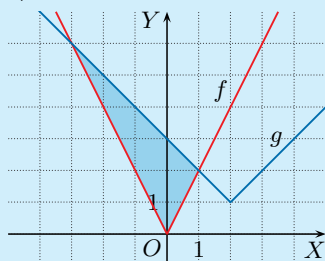
Odpowiedzi do zadań

- $g(1) = 0$
 - $g(-1) = 0$
 - $g(-2) = 0$
-
-
- $\langle -2; 5 \rangle$
 - $\langle -1; 6 \rangle$
 - $\langle -5; 2 \rangle$
 - $\langle -6; 1 \rangle$
- brak miejsc zerowych, $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
 - $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 5\}$, $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$
 - $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$, $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$

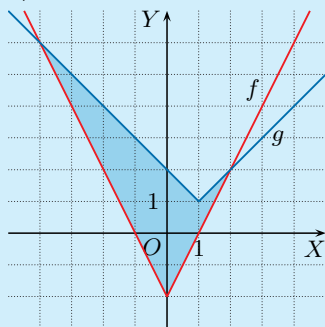
8. a) $D_g = \langle -4; 4 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -1; 5 \rangle$
 b) $D_g = \langle -6; 2 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -4; 2 \rangle$
 c) $D_g = \langle -1; 7 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle 0; 6 \rangle$
 d) $D_g = \langle 0; 8 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -6; 0 \rangle$

9. a) 4 b) 16

10. a) 6



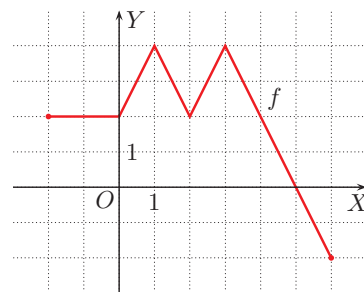
b) 11



11. a) $D_g = \langle 0; 8 \rangle$,
 $g(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3, 7\}$
 b) $D_g = \langle -5; 3 \rangle$,
 $g(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2\}$
12. a) $g(D_g) = \langle 0; \infty \rangle$,
 $g(x) = 0$ dla $x = -1$,
 $h(D_h) = \langle -1; \infty \rangle$,
 $h(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$
 b) $g(D_g) = \langle 0; \infty \rangle$,
 $g(x) = 0$ dla $x = 4$,
 $h(D_h) = \langle -2; \infty \rangle$,
 $h(x) = 0$ dla $x = 3, x = 5$

8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji g , odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

- a) $g(x) = f(x+2) + 1$
 b) $g(x) = f(x+4) - 2$
 c) $g(x) = f(x-1) + 2$
 d) $g(x) = f(x-2) - 4$



9. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i osią OX .

- a) $f(x) = |x-3| - 2$ b) $f(x) = |x+1| - 4$

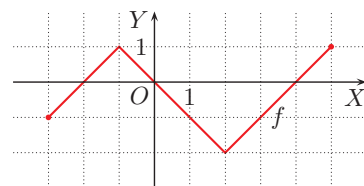
10. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i g .

- a) $f(x) = |2x|$ i $g(x) = |x-2| + 1$
 b) $f(x) = |2x| - 2$ i $g(x) = |x-1| + 1$

Powtórzenie

11. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -3; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g .

- a) $g(x) = f(x-3)$
 b) $g(x) = f(x+2)$



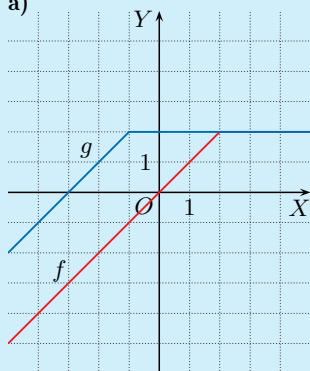
12. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie wykresy funkcji g i h . Podaj zbiory wartości oraz miejsca zerowe funkcji g i h .

- a) $g(x) = |2(x+1)|$, $h(x) = |2(x+1)| - 1$
 b) $g(x) = |2(x-4)|$, $h(x) = |2(x-4)| - 2$

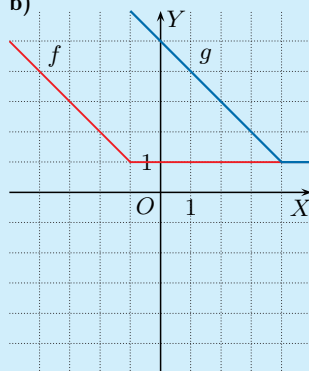
13. Naskicuj wykresy funkcji f i g .

- a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x+3)$
 b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle -1; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x-5)$
 c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x & \text{dla } x \in \langle -1; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x-2) + 4$
 d) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ -x & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x+3) + 1$

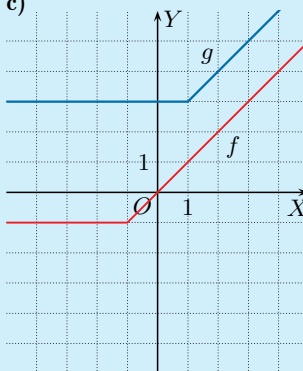
13. a)



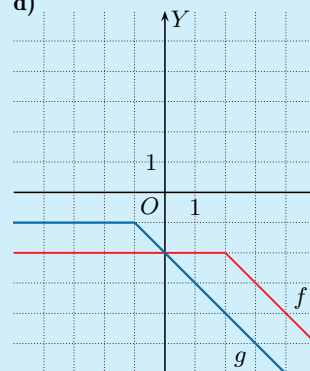
b)



c)



d)



4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX

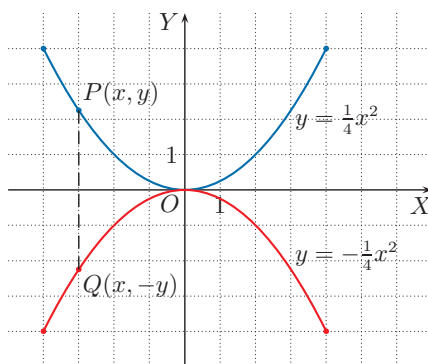
Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ określonych dla $x \in \langle -4; 4 \rangle$.

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ są symetryczne względem osi OX – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.

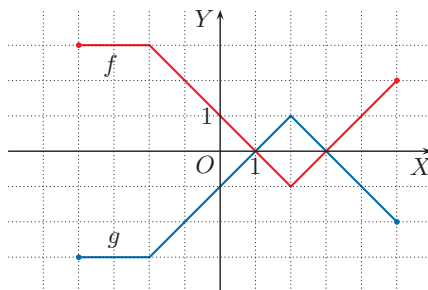


Twierdzenie

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości każdej z tych funkcji.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz podaj ich zbiory wartości.

a) $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x|$

b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$

Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $y = -f(x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$,
- szkicuje wykres funkcji $y = -[f(x - p) + q]$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$.

Ćwiczenie 1

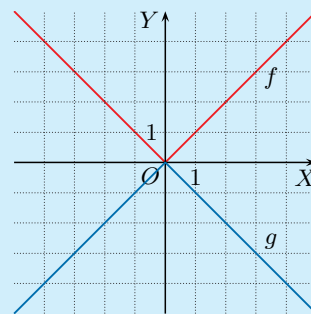
$f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$,

$g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$

Ćwiczenie 2

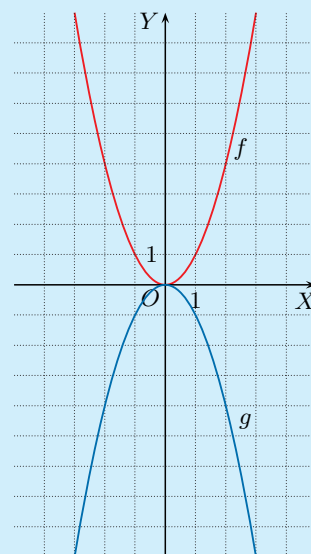
a) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,

$g(D) = (-\infty; 0]$



b) $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$,

$g(D) = (-\infty; 0]$



Multiteka

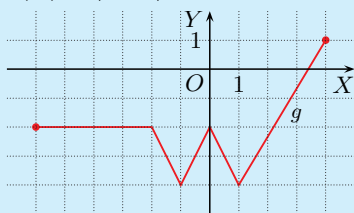
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OX

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.9

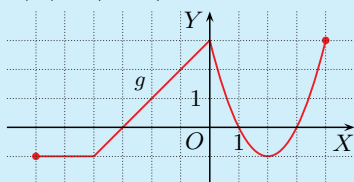
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

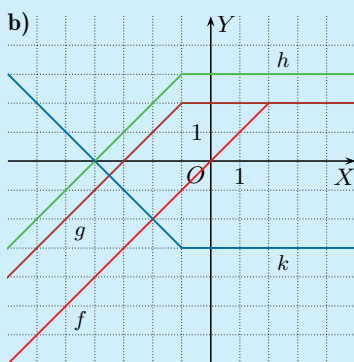
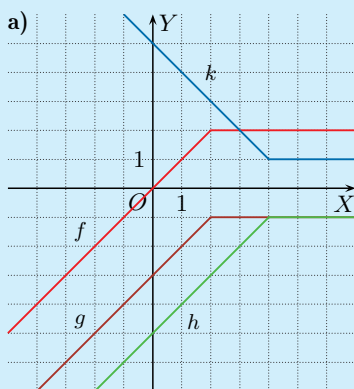
- a) $f(D) = \langle -1; 4 \rangle$,
 $g(D) = \langle -4; 1 \rangle$



- b) $f(D) = \langle -3; 1 \rangle$,
 $g(D) = \langle -1; 3 \rangle$

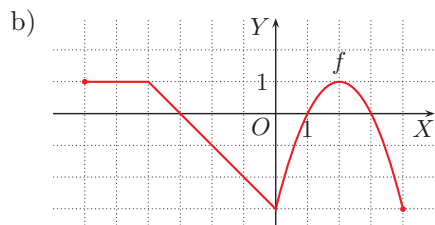
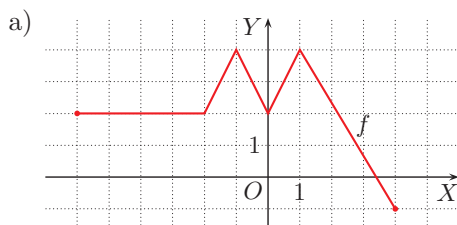


Ćwiczenie 4



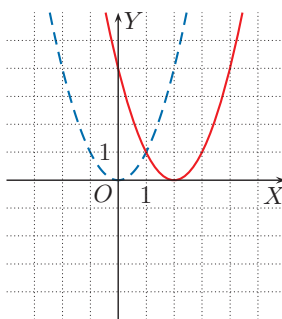
Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .

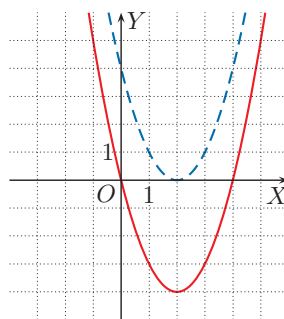


Przykład 2

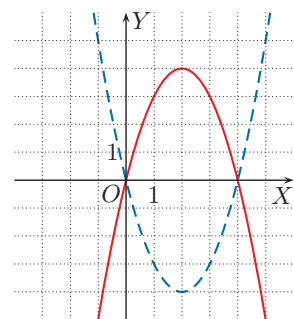
Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie kolejno wykresy funkcji: $g(x) = f(x - 2)$, $h(x) = f(x - 2) - 4$, $k(x) = -[f(x - 2) - 4]$.



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $f(x) = x^2$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $g(x) = (x - 2)^2$



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $g(x) = (x - 2)^2$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $h(x) = (x - 2)^2 - 4$



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $h(x) = (x - 2)^2 - 4$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $k(x) = -[(x - 2)^2 - 4]$

Ćwiczenie 4

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$, a następnie kolejno wykresy funkcji:

a) $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x - 2) - 3$, $k(x) = -[f(x - 2) - 3]$,

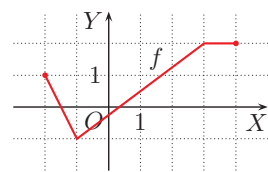
b) $g(x) = f(x + 3)$, $h(x) = f(x + 3) + 1$, $k(x) = -[f(x + 3) + 1]$.

Ćwiczenie 5

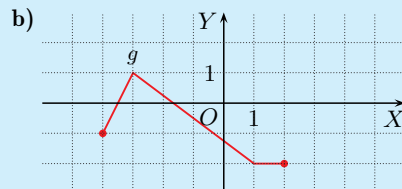
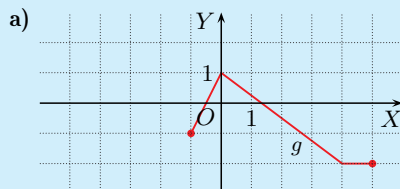
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = -f(x - 1)$

b) $g(x) = -f(x + 2)$

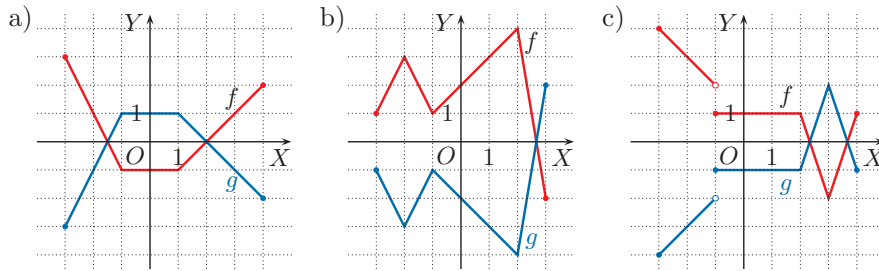


Ćwiczenie 5



Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g .



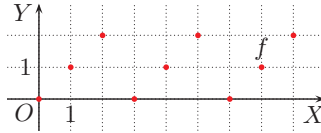
2. Naszkicuj wykresy funkcji f i $g(x) = -f(x)$. Podaj punkty wspólne tych wykresów.

a) $f(x) = |x| - 1$ b) $f(x) = |x| + 2$ c) $f(x) = |x - 2|$

3. Naszkicuj wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f i g .

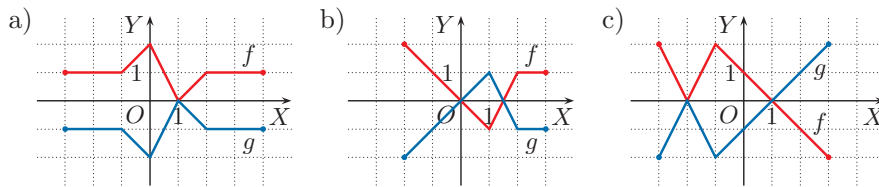
a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq -2 \\ -x & \text{dla } -2 < x \leq 3 \\ -3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \leq -2 \\ -2x & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ x-3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f , która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez 3. Naszkicuj wykres funkcji $g(n) = -f(n)$.



Powtórzenie

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości funkcji g oraz jej przedziały monotoniczności.



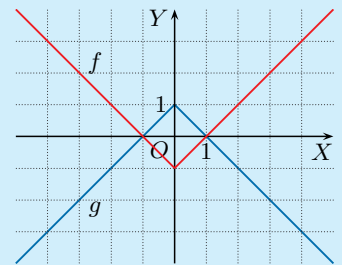
3. a) f rośnie w $(-\infty; 0)$, stała w $\langle 0; \infty \rangle$,
 g maleje w $(-\infty; 0)$, stała w $\langle 0; \infty \rangle$
 b) f maleje w $\langle -2; 3 \rangle$,
 stała w $(-\infty; -2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$,
 g rośnie w $\langle -2; 3 \rangle$,
 stała w $(-\infty; -2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$
 c) f maleje w $(-\infty; 0)$, rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$,
 g rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $\langle 0; \infty \rangle$
 d) f maleje w $\langle -2; 1 \rangle$,
 stała w $(-\infty; -2)$,
 rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$,
 g rośnie w $\langle -2; 1 \rangle$, stała w $(-\infty; -2)$,
 maleje w $\langle 1; \infty \rangle$

4.
 5. a) $g(D) = \langle -2; 0 \rangle$,
 g stała w $\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$,
 maleje w $\langle -1; 0 \rangle$ i w $\langle 1; 2 \rangle$, rośnie w $\langle 0; 1 \rangle$
 b) $g(D) = \langle -2; 1 \rangle$, g stała w $\langle 2; 3 \rangle$,
 maleje w $\langle 1; 2 \rangle$, rośnie w $\langle -2; 1 \rangle$
 c) $g(D) = \langle -2; 2 \rangle$, g maleje w $\langle -2; -1 \rangle$,
 rośnie w $\langle -3; -2 \rangle$ i w $\langle -1; 3 \rangle$

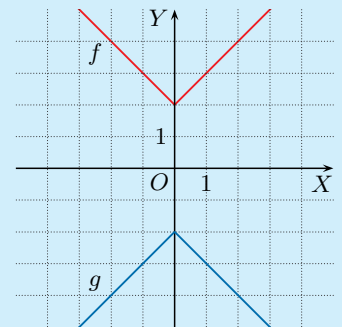
Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$
 b) $f(D_f) = \langle -2; 4 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -4; 2 \rangle$
 c) $f(D_f) = \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -1; 2 \rangle$

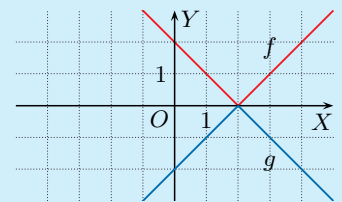
2. a) $(-1, 0)$, $(1, 0)$



- b) Nie mają punktów wspólnych.



- c) $(2, 0)$



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$.

4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY

Przykład 1

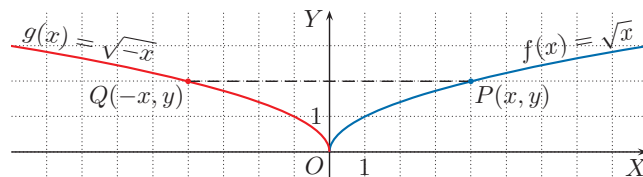
Naszkicuj wykres funkcji $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{-x}$.

Zauważmy, że:

$$g(-4) = f(4) = 2$$

$$g(-1) = f(1) = 1$$

$$g(-\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x, y)$ należącemu do wykresu funkcji f odpowiada punkt $Q(-x, y)$ należący do wykresu funkcji g .

Twierdzenie

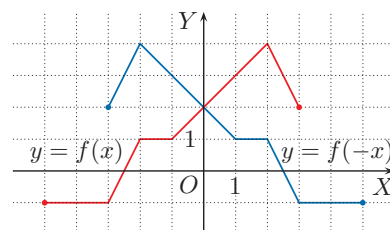
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ (kolor czerwony) oraz wykres funkcji $y = f(-x)$ (kolor niebieski).

Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -5; 3 \rangle$, a dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$.

Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają takie same zbiory wartości.

**Ćwiczenie 1**

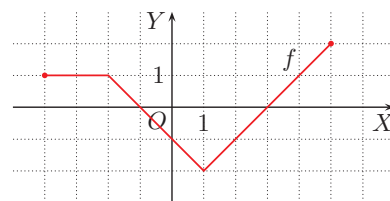
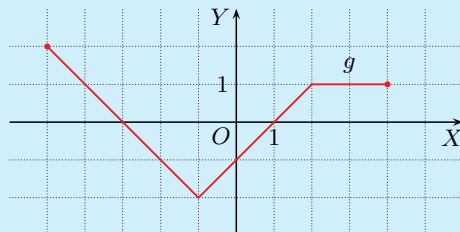
$D = \langle -6; 2 \rangle$,
miejsca zerowe: $-5, -3, 0, 1$

Ćwiczenie 1

Dana jest funkcja $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, której miejscami zerowymi są liczby: $-1, 0, 3$ i 5 . Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(-x)$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji f i g .

**Ćwiczenie 2**

$D = \langle -5; 4 \rangle$, $g(x) = 0$ dla $x \in \{-5, -3, 1, 5\}$,
 f stała w $\langle -4; -2 \rangle$, maleje w $\langle -2; 1 \rangle$, rośnie w $\langle 1; 5 \rangle$,
 g stała w $\langle 2; 4 \rangle$, rośnie w $\langle -1; 2 \rangle$, maleje w $\langle -5; -1 \rangle$

Multiteka

- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OY

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.10

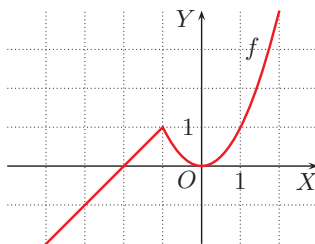
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

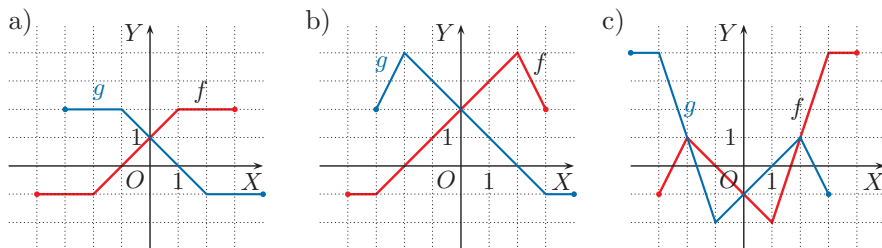
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ i podaj jej wzór.



Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj dziedziny funkcji f i g



2. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj jej wzór.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in \langle -5; -3 \rangle \\ x & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ -x & \text{dla } x \in \langle -2; 6 \rangle \end{cases}$$

3. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie kolejno wykresy funkcji g i h .

$$\text{a) } f(x) = |x|, \quad g(x) = f(x-2), \quad h(x) = f(-x-2) \\ \text{b) } f(x) = x^2, \quad g(x) = f(x+2), \quad h(x) = f(-x+2)$$

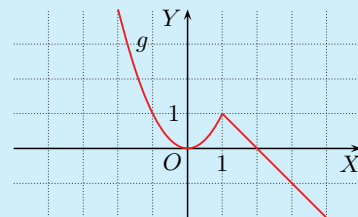
Powtórzenie

4. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ i $h(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f , g i h .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x & \text{dla } x \in \langle 2; 3 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty \rangle \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1; 4 \rangle \\ -4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases}$$

4. a) f rośnie w $(-\infty; 4)$, stała w $\langle 4; \infty \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -4)$, maleje w $\langle -4; \infty \rangle$,
 h maleje w $(-\infty; 4)$, stała w $\langle 4; \infty \rangle$
 b) f stała w $(-\infty; 2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$, rośnie w $\langle 2; 3 \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -3)$ i w $\langle -2; \infty \rangle$, maleje w $\langle -3; -2 \rangle$,
 h stała w $(-\infty; 2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$, maleje w $\langle 2; 3 \rangle$
 c) f maleje w $(-\infty; 1)$, stała w $\langle 1; \infty \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -1)$, rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$,
 h rośnie w $(-\infty; 1)$, stała w $\langle 1; \infty \rangle$
 d) f stała w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 4; \infty \rangle$, maleje w $\langle -1; 4 \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -4)$ i w $\langle 1; \infty \rangle$, rośnie w $\langle -4; 1 \rangle$,
 h stała w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 4; \infty \rangle$, rośnie w $\langle -1; 4 \rangle$

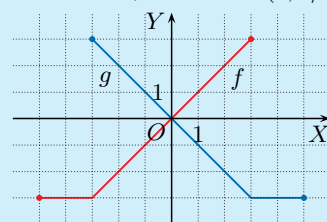
Ćwiczenie 3



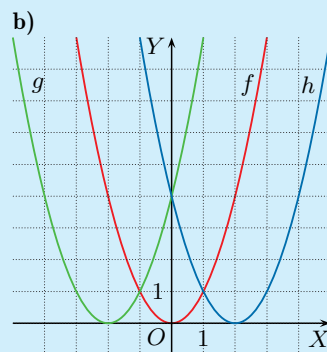
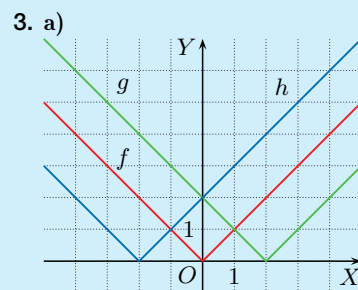
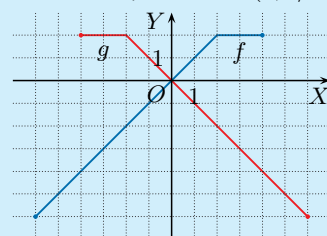
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 1 \\ -x+2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $D_f = \langle -4; 3 \rangle$,
 $D_g = \langle -3; 4 \rangle$
 b) $D_f = \langle -4; 3 \rangle$,
 $D_g = \langle -3; 4 \rangle$
 c) $D_f = \langle -3; 4 \rangle$,
 $D_g = \langle -4; 3 \rangle$
 2. a) $g(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (3; 5) \end{cases}$



$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -6; 2 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$$



Uczeń:

- wyznacza współczynnik proporcjonalności odwrotnej,
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ i $x > 0$,
- stosuje proporcjonalność odwrotną do rozwiązywania zadań dotyczących np. drogi, prędkości i czasu.

Ćwiczenie 1

f : (1, 1),

g : (1, 4), (2, 2), (4, 1),

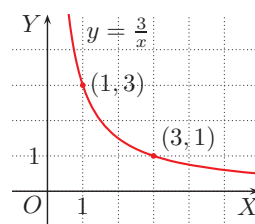
h : (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)

4.11. Proporcjonalność odwrotna

Przykład 1

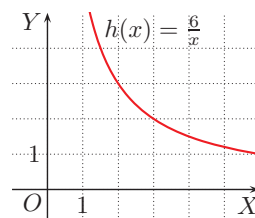
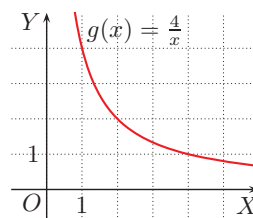
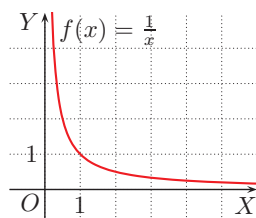
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x > 0$. Zwróć uwagę, że jeśli punkt (x, y) należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność $x \cdot y = 3$.

Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty (1, 3) i (3, 1).



Ćwiczenie 1

Funkcje f , g i h , których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla $x > 0$. Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.



Definicja

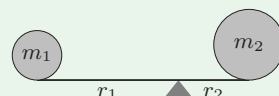
Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci $x \cdot y = a$.

Czy wiesz, że...

Dwie masy m_1 i m_2 umieszczone na równoważni w odległościach r_1 i r_2 od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

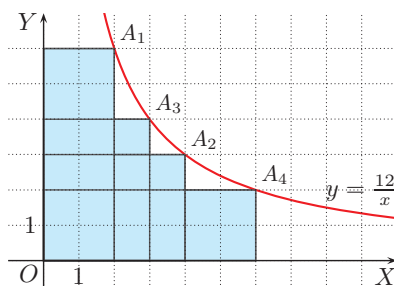


Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).

Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości x i y boków prostokąta o ustalonym polu P . Zachodzi wówczas zależność $x \cdot y = P$.

Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach x , y zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki A_1 , A_2 , A_3 i A_4 tych prostokątów należą do wykresu funkcji $y = \frac{12}{x}$. Ich współrzędne (x, y) spełniają zależność: $x \cdot y = 12$.



Ćwiczenie 2

Naszkiej wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, gdzie $x > 0$, i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji f ?

Zauważ, że jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich proporcjonalnie maleje druga.

Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

x – cena [zł]	4	5	6	8	12
y – liczba [kg]	6	4,8	4	3	2

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram x proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron y , które możemy kupić.

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne: $y = \frac{24}{x}$.

Ćwiczenie 3

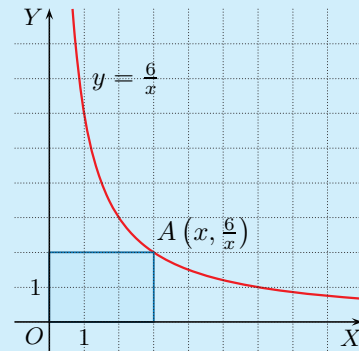
Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech x oznacza cenę za kilogram, a y – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

x [zł]	1,5	2	3	4,5	6
y [kg]	6	4,5	3	2	1,5

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{9}{x}$, gdzie $x > 0$, i zaznacz na nim punkty odpowiadające wartościom z tabeli.

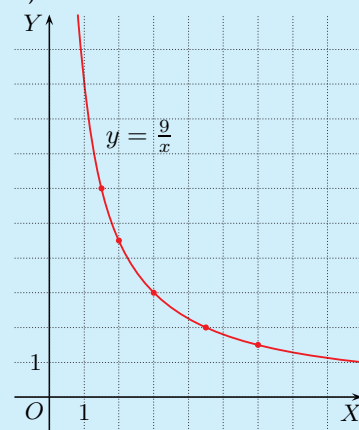
Ćwiczenie 2



Pole prostokąta $P = x \cdot \frac{6}{x} = 6$, czyli pole jest stałe i nie zależy od wyboru wierzchołka.

Ćwiczenie 3

b)



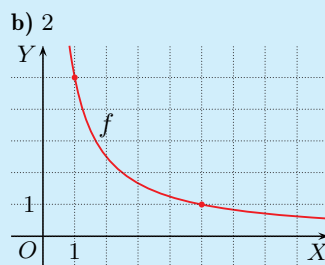
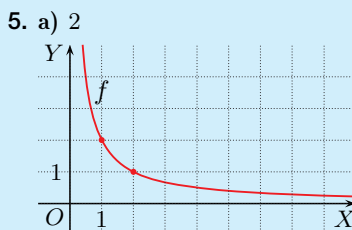
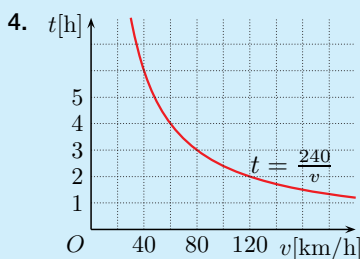
Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = \frac{8}{x}, x > 0$
b) $y = \frac{10}{x}, x > 0$

2. $k = 15$

x	1	2	3	4	5	6
y	15	7,5	5	3,75	3	2,5

3. a) 4 h
b) 3 h 20 min
c) 2,5 h
d) 2 h 24 min



c) 4 d) 6

Zadania

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naskicuj jej wykres.

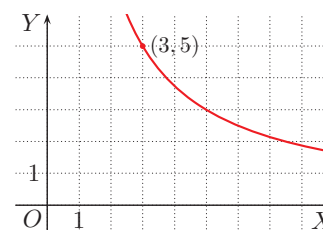
a)

x	1	2	2,5	4	5
y	8	4	3,2	2	1,6

b)

x	1	2	2,5	4	5
y	10	5	4	2,5	2

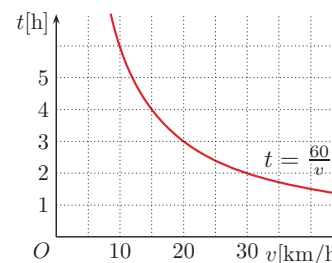
2. Pewną stałą kwotę k zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną x w złotych za kilogram a liczbą kilogramów y , które można w tej cenie kupić. Podaj wartość k i przedstaw za pomocą tabeli zależność między x i y dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Zależność między czasem t potrzebnym do przebycia drogi s ze średnią prędkością v wyraża się wzorem $t = \frac{s}{v}$.

3. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:

- a) 15 km/h, c) 24 km/h,
b) 18 km/h, d) 25 km/h?



4. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na osiach układu współrzędnych i naskicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.

Powtórzenie

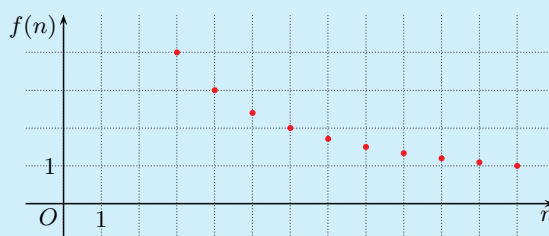
5. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x > 0$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?

- a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{5}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$ d) $f(x) = \frac{18}{x}$

6. Rozważmy n -kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naskicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku n -kąta od liczby boków dla $n \leq 12$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

6. n – liczba boków, $f(n)$ – długość boku, $D = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 12\}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	4	3	2,4	2	$\frac{12}{7}$	1,5	$\frac{4}{3}$	1,2	$\frac{12}{11}$	1

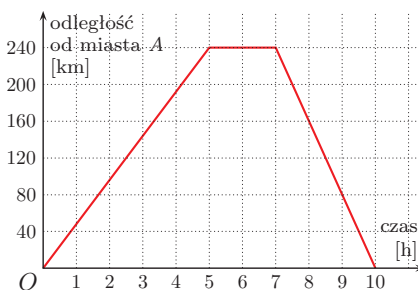


4.12. Zagadnienia uzupełniające

■ Prędkość, droga, czas

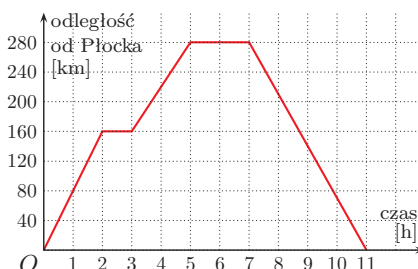
1. Przejazd samochodem z miasta *A* do odległego o 240 km miasta *B* i z powrotem zajął (razem z dwugodzinnym postojem) 10 godzin. Korzystając z wykresu, podaj średnią prędkość przejazdu:

- a) z miasta *B* do miasta *A*,
b) całej trasy bez postoju.



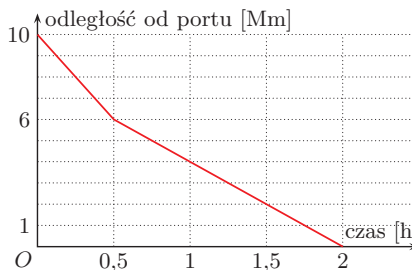
2. Na wykresie poniżej przedstawiono, jak zmieniała się odległość samochodu od Płocka podczas jazdy na trasie Płock–Gdańsk–Płock.

- a) Oblicz średnią prędkość samochodu bez uwzględniania postojów.
b) Jaka byłaby średnia prędkość na trasie z Gdańska do Płocka, gdyby postój w Gdańsku przedłużył się o godzinę, a cała wyprawa trwałaby $11\frac{1}{2}$ godzin?

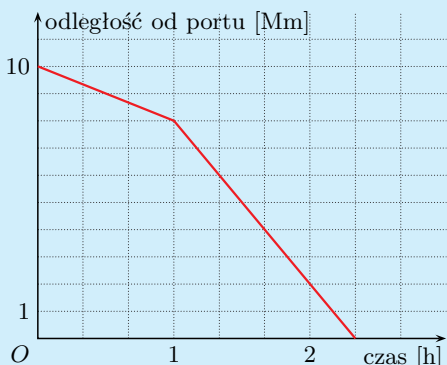


3. Jacht znajdujący się w odległości 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku z prędkością 8 węzłów. Po półgodzinie wiatr osłabł, a prędkość jachtu spadła o połowę. Na wykresie pokazano, jak zmieniała się odległość jachtu od portu w zależności od czasu.

Naszkicuj wykres przedstawiający zmiany odległości jachtu od portu w zależności od czasu, jeśli jacht będący 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku przez godzinę z prędkością 2 węzłów, a następnie jego prędkość wzrosła do 6 węzłów. Po jakim czasie jacht dotarł do portu?



3. Jacht dotarł do portu po 2 godzinach 20 minutach.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $240 : 3 = 80$ [km/h]

b) $2 \cdot 240 : (5 + 3) = 60$ [km/h]

2. a) Długość całej drogi:

$2 \cdot 280 = 560$ [km]

Czas: $2 + 2 + 4 = 8$ [h]

Średnia prędkość:

$560 : 8 = 70$ [km/h]

b) Czas:

$11\frac{1}{2} - 3 - 1 - 2 - 2 = 3\frac{1}{2}$ [h]

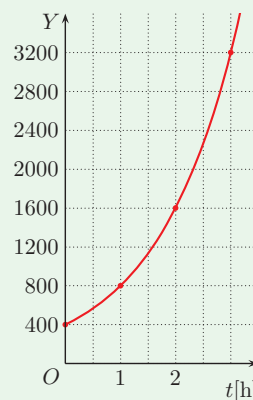
Średnia prędkość:

$280 : 3\frac{1}{2} = 80$ [km/h]

■ Wzrost wykładniczy i funkcja wykładnicza

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 400 bakterii, następnie stwierdzono, że ich liczba podwajała się w ciągu godziny. Funkcja $y = 400 \cdot 2^t$ (wykres obok) opisuje liczbę bakterii po upływie czasu t mierzonego w godzinach. Na przykład po 2 godzinach liczba bakterii wynosiła $400 \cdot 2^2 = 1600$, a po upływie 2 godzin i 30 minut liczba bakterii wzrosła do $400 \cdot 2^{2,5} \approx 2263$. W tabeli podano wartości funkcji $y = 400 \cdot 2^t$ dla wybranych argumentów.



t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y = 400 \cdot 2^t$	800	1131	1600	2263	3200	4525

W opisie doświadczenia wykorzystana została funkcja $f(t) = 2^t$. Funkcje opisane wzorem $y = a^x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in \mathbf{R}$, noszą nazwę **funkcji wykładniczych**.

4. Liczba bakterii podwaja się w ciągu pół godziny, czyli w ciągu godziny zwiększa się czterokrotnie. Zatem:

$$y = 600 \cdot 4^t$$

5. $24000 = 1500 \cdot a^8$
 $a^8 = 16$
 $a = \sqrt[4]{2}$
 $96000 = 1500 \cdot (\sqrt[4]{2})^t$
 $2^{\frac{1}{4}t} = 64$
 $t = 12$

Liczebność kolonii bakterii będzie równa 90000 po 12 godzinach.

- D** 4. Podczas pewnego doświadczenia liczba bakterii, których początkowo było 600, podwajała się w ciągu pół godziny. Uzasadnij, że funkcja $y = 600 \cdot 4^t$ opisuje liczbę bakterii w zależności od czasu t mierzonego w godzinach i uzupełnij tabelę.

Czas t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Liczba bakterii y	2400	4800	9600	19 200	38 400	76 800	153 600	307 200

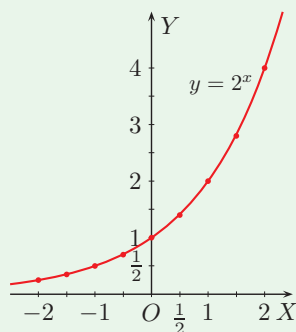
5. W pewnym doświadczeniu badano liczebność kolonii bakterii. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Wyznacz stałą a , jeśli początkowo było 1500 bakterii, a po 8 godzinach ich liczba wzrosła do 24 000. Po jakim czasie liczebność kolonii bakterii będzie równa 96 000?

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$. Zaznaczone zostały punkty odpowiadające danym z tabeli (wartości funkcji podano z dokładnością do 0,01), które połączono krzywą, jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
2^x	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

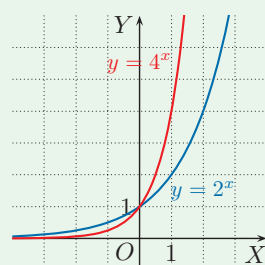


6. Podaj wartość funkcji $y = 2^x$ dla argumentu:

- a) 3, b) 4, c) 10, d) -10.

Wykresy funkcji $y = 2^x$ i $y = 4^x$ dla porównania umieszczono w tym samym układzie współrzędnych.

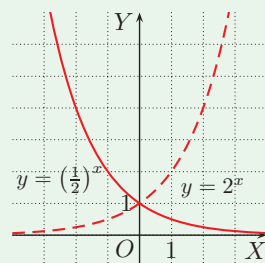
Zauważmy, że dowolna funkcja określona wzorem $y = a^x$, gdzie $a > 1$, jest funkcją rosnącą. W przypadku zjawisk opisywanych za pomocą takich funkcji mówimy o **wzroście wykładniczym**.



 7. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = 3^x$, a następnie naszkicuj jej wykres.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $y = (\frac{1}{2})^x$. Funkcja ta jest funkcją malejącą. Jej wykres możemy otrzymać przez symetryczne odbicie względem osi OY wykresu funkcji $y = 2^x$ (uzasadnij).

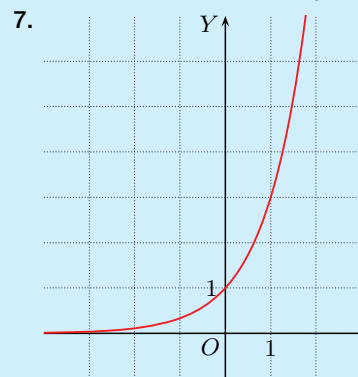
Funkcja $y = (\frac{1}{2})^x$ wykorzystywana jest przy opisie zjawiska rozpadu promieniotwórczego.



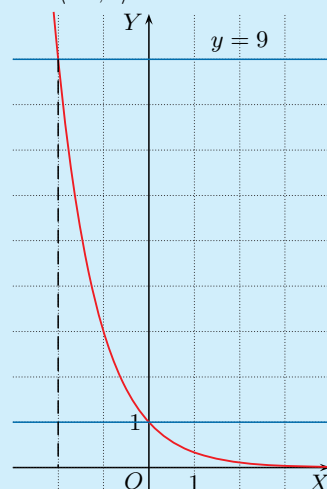
8. a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $1 \leq f(x) \leq 9$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 4$.

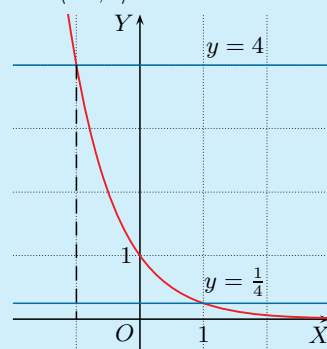
6. a) 8 b) 16 c) 1024 d) $\frac{1}{1024}$



8. a) $1 \leq f(x) \leq 9$ dla $x \in \langle -2; 0 \rangle$



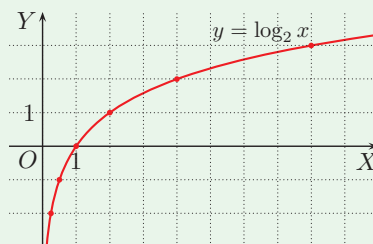
b) $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 4$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$



■ Funkcja logarytmiczna

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji opisanej wzorem $y = \log_2 x$. Zaznaczone punkty odpowiadają wartościom z tabeli.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3



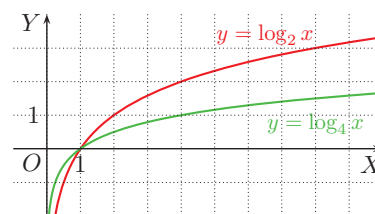
Funkcje opisane wzorem $y = \log_a x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in (0; \infty)$, noszą nazwę **funkcji logarytmicznych**.

9. a) 16 b) 32 c) 1024 d) $\sqrt{2}$

10. $y = \log_2 x$: np. (1, 0), (4, 2), (8, 3), (16, 4);
 $y = \log_4 x$: np. (1, 0), (16, 2), (64, 3), (256, 4)

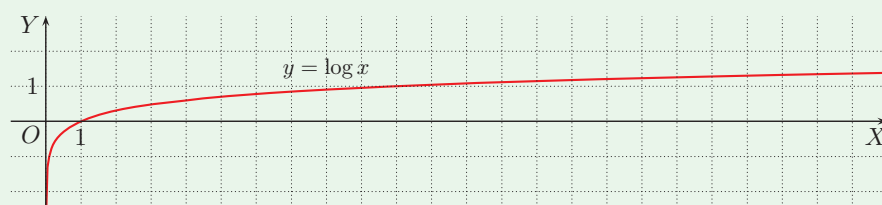
9. Dla jakiego argumentu x funkcja $y = \log_2 x$ przyjmuje wartość równą:
 a) 4, b) 5, c) 10, d) $\frac{1}{2}$?

10. Wykresy funkcji $y = \log_2 x$ i $y = \log_4 x$ umieszczono dla porównania w tym samym układzie współrzędnych (rysunek obok). Podaj po cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z tych funkcji.



11. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = \log_3 x$, a następnie naskicuj jej wykres.

Poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = \log x$.



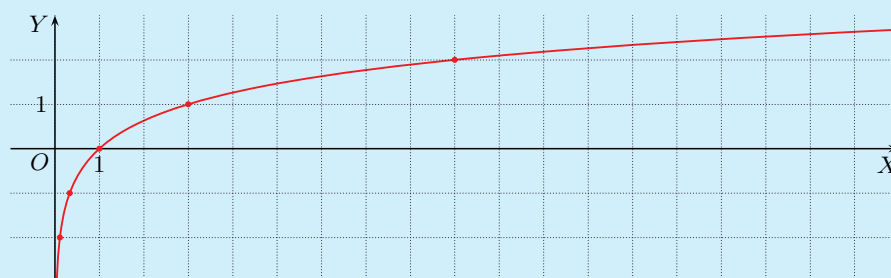
Zauważ, że funkcja $y = \log x$ (oraz dowolna funkcja $y = \log_a x$, gdzie $a > 1$) jest funkcją rosnącą. Jednak jest to wzrost bardzo powolny.

12. a) $x > 100$
 b) $x > 1000$
 c) $x > 10^6$
 d) $x > 10^{10}$

12. Dla jakich argumentów x funkcja $y = \log x$ osiąga wartości większe od:
 a) 2, b) 3, c) 6, d) 10?

11.

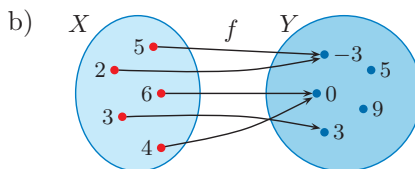
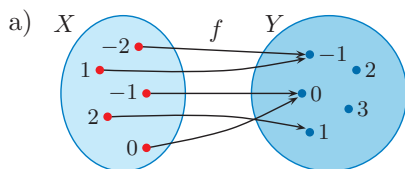
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

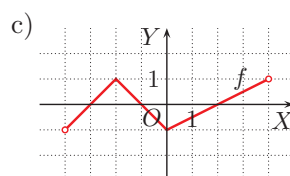
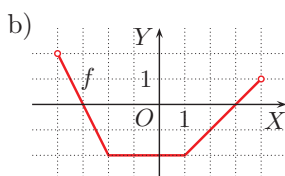
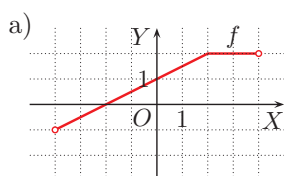
1. Funkcję f przedstawiono w postaci grafu. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz wartość najmniejszą i wartość największą. Sporządź tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .



2. Naszkicuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

a) $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ b) $X = \langle -4; 4 \rangle$ c) $X = \langle -2; \infty \rangle$

3. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności i miejsca zerowe oraz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



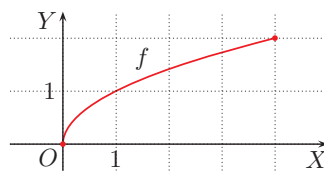
4. Naszkicuj wykres funkcji f , korzystając z wykresu funkcji $y = |x|$.

a) $f(x) = |x| - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = |x - 5|$ e) $f(x) = |x + 3| - 2$
 b) $f(x) = |x| + 4$ d) $f(x) = |x + \frac{5}{2}|$ f) $f(x) = |x - 2| + 3$

5. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 3$ i $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -3; 1 \rangle \\ -1 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-4; -2) \\ 2x & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \end{cases}$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: (0; 4) \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$. Podaj dziedziny funkcji $g(x) = f(x+2)$ i $h(x) = f(x-3)$ oraz naszkicuj ich wykresy.



1. a) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$,
 miejsca zerowe: $-1, 0$,
 $f_{\min} = -1, f_{\max} = 1$

b) $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $f(D) = \{-3, 0, 3\}$,
 miejsca zerowe: $4, 6$,
 $f_{\min} = -3, f_{\max} = 3$

2. a) $f(X) = \{0, 1, 3, 4\}$

b) $f(X) = \langle 0; 4 \rangle$

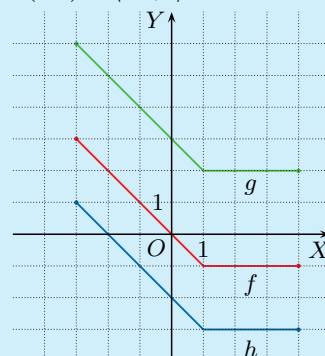
c) $f(X) = \langle 0; \infty \rangle$

3. a) rośnie w $\langle -4; 2 \rangle$,
 stała w $\langle 2; 4 \rangle$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -2; 4 \rangle$

b) rośnie w $\langle 1; 4 \rangle$,
 maleje w $\langle -4; -2 \rangle$,
 stała w $\langle -2; 1 \rangle$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup (3; 4)$

c) rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 0; 4 \rangle$,
 maleje w $\langle -2; 0 \rangle$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup (2; 4)$

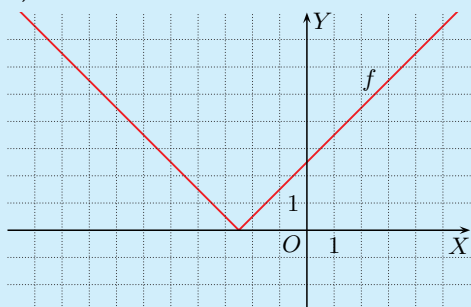
5. a) $g(D_g) = \langle 2; 6 \rangle$,
 $h(D_h) = \langle -3; 1 \rangle$



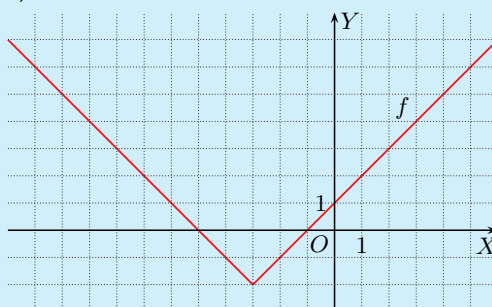
b) $g(D_g) = \langle -1; 7 \rangle$,
 $h(D_h) = \langle -6; 2 \rangle$

6. $D_g = \langle -2; 2 \rangle, D_h = \langle 3; 7 \rangle$

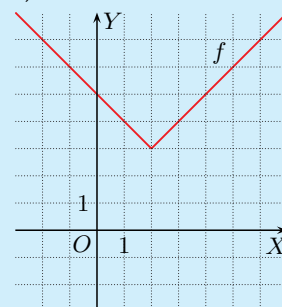
4. d)



e)



f)



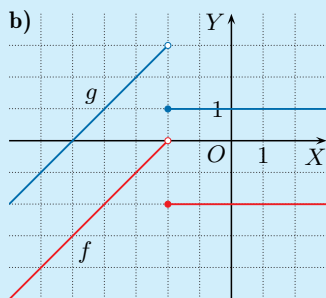
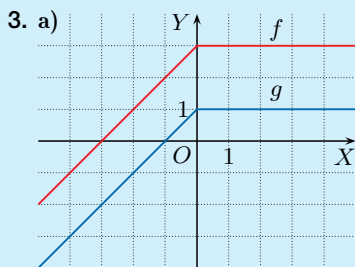
7. a) $g(x) = -x + 2$,
 $f(D_f) = \langle -4; -1 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle 1; 4 \rangle$
 b) $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$,
 $f(D_f) = \langle -1; 2 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -2; 1 \rangle$

8. a) $D_g = \langle -3; -1 \rangle$,
 $g(x) = -x - 1$,
 $g_{\min} = 0$, $g_{\max} = 2$
 b) $D_g = \langle -2; 4 \rangle$,
 $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,
 $g_{\min} = 0$, $g_{\max} = 3$

9. Funkcja przyporządkowuje każdemu argumentowi x dokładnie jedną wartość y . Argumentowi $x = 2$ przyporządkowano dwie różne wartości y , co jest sprzeczne z definicją funkcji. Zatem nie istnieje funkcja, do której wykresu należałyby jednocześnie punkty $(-2, -1)$ i $(-2, -2)$.

Zestaw II

1. a) $f(3\sqrt{2}) = 1$,
 $f(\sqrt{2} - 6) = -3$
 b) $f(3\sqrt{2}) = 4$, $f(\sqrt{2} - 6) = 1$
 2. a) $f(x) = -2$ dla $x \in \{-2, 1\}$,
 $f(x) < 0$ dla
 $x \in (-3; -1) \cup (-1; 3)$
 b) $f(x) = -2$ dla $x = 1$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$
 c) $f(x) = -2$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla
 $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$



7. Dziedzina funkcji f jest zbiór D . Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj wzór funkcji g oraz zbiory wartości funkcji f i g .

a) $f(x) = x - 2$, $D = \langle -2; 1 \rangle$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $D = \langle -2; 4 \rangle$

8. Dziedzina funkcji f jest zbiór D . Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedzinę i wzór funkcji g oraz jej wartość najmniejszą i wartość największą.

a) $f(x) = x - 1$, $D = \langle 1; 3 \rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $D = \langle -4; 2 \rangle$

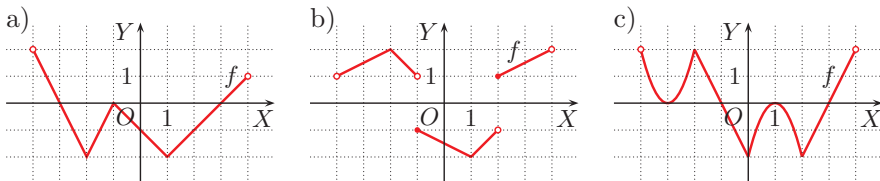
9. Uzasadnij, że nie istnieje funkcja, do której wykresu należą punkty: $(-5, 1)$, $(-2, -1)$, $(-2, -2)$, $(0, -3)$, $(4, 1)$.

Zestaw II

1. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj wartości $f(3\sqrt{2})$ i $f(\sqrt{2} - 6)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x < -4 \\ x + 1 & \text{dla } -4 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ -x & \text{dla } -3 < x < 3 \\ 4 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

2. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = -2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.



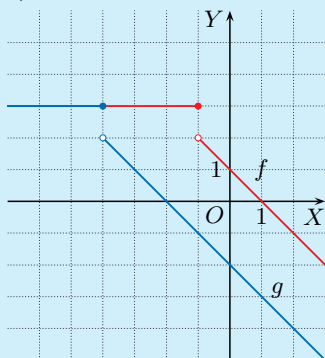
3. Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $(0, 1)$. Wykres ten można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OY . Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < -2 \\ -2 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$

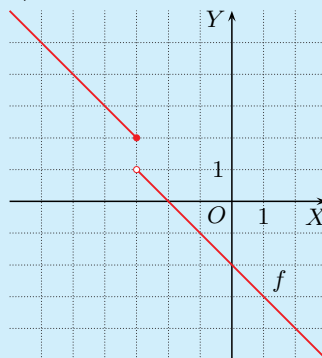
4. Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $(-2, 0)$. Wykres ten można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX . Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ -x - 2 & \text{dla } x > -3 \end{cases}$

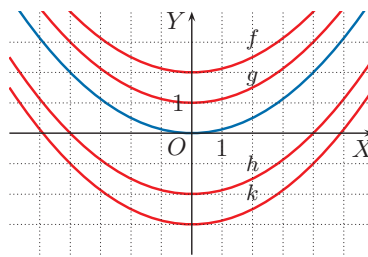
4. a)



b) $f = g$

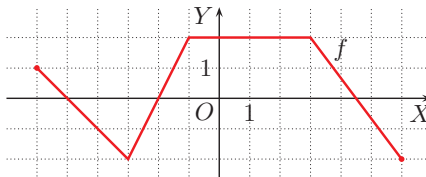


5. Przedstawione na rysunku obok wykresy funkcji: f , g , h , k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = \frac{1}{8}x^2$ zaznaczonej kolorem niebieskim.



- a) Podaj wzory funkcji: f , g , h , k .
b) Do którego wykresu należą poszczególne punkty: $P(8, 6)$, $Q(-4, 3)$, $R(2, 2\frac{1}{2})$?

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji:



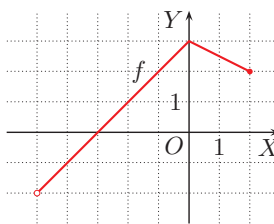
- a) $y = -f(x)$, b) $y = f(-x)$.

7. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(-x)$. Podaj zbiory wartości funkcji: f , g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x < 1 \\ 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

8. Dziedziną funkcji f (rysunek obok) jest przedział $(-5; 2)$. Podaj dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji g .



- a) $g(x) = f(x-3)$ c) $g(x) = -f(x+2)$
b) $g(x) = f(2-x)$ d) $g(x) = -f(1-x)$

9. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ jej kwadrat pomniejszony o podwójną wartość tej liczby. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

10. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości obu funkcji, jeśli funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej:

- a) jej resztę z dzielenia przez 3 powiększoną o 1,
b) jej resztę z dzielenia przez 4 pomniejszoną o 4,
c) połowę jej reszty z dzielenia przez 5.

- D** 11. Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $(0, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$. Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji $y = \frac{4}{x}$. Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru a .

11. Pierwsza współrzędna wierzchołka:

$$x = \frac{a}{2}$$

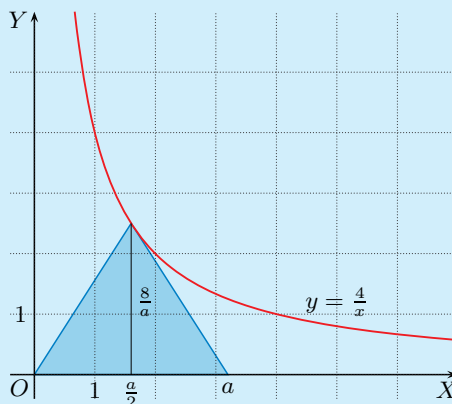
druga współrzędna:

$$y = \frac{4}{\frac{a}{2}} = \frac{8}{a}$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{8}{a} = 4$$

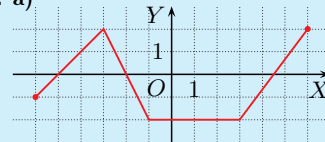
zatem pole jest stałe i nie zależy od wyboru parametru a .



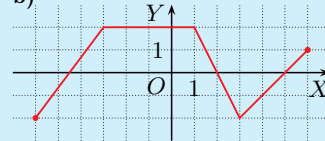
5. a) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2$,
 $g(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$,
 $h(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$,
 $k(x) = \frac{1}{8}x^2 - 3$

b) P należy do wykresu funkcji h ,
 Q – do wykresu funkcji g ,
 R – do wykresu funkcji f

6. a)



- b)



7. a) $f(D_f) = \langle -2; \infty \rangle$,
 $g(D_g) = (-\infty; 2]$,
 $h(D_h) = \langle -2; \infty \rangle$

- b) $f(D_f) = (-\infty; 3]$,
 $g(D_g) = \langle -3; \infty \rangle$,
 $h(D_h) = (-\infty; 3]$

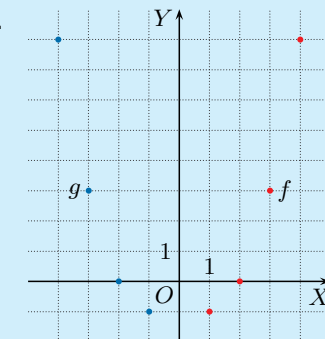
8. a) $D_g = (-2; 5)$

- b) $D_g = \langle 0; 7 \rangle$

- c) $D_g = (-7; 0)$

- d) $D_g = \langle -1; 6 \rangle$

- 9.



10. a) $f(D_f) = \{1, 2, 3\}$,
 $g(D_g) = \{-3, -2, -1\}$
b) $f(D_f) = \{-4, -3, -2, -1\}$,
 $g(D_g) = \{1, 2, 3, 4\}$
c) $f(D_f) = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$,
 $g(D_g) = \{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\}$



Przykład 1

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Miejsca zerowe funkcji f możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$$-2x - 2 = 0, \text{ skąd } x = -1, \text{ ale } -1 \notin (-\infty; -2)$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 0, \text{ skąd } x = -6, \text{ ale } -6 \notin \langle -2; 2)$$

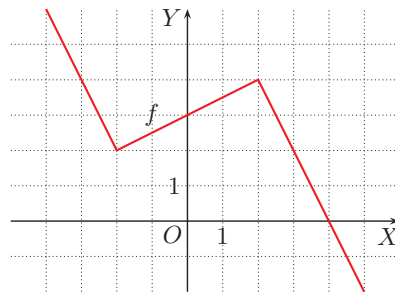
$$-2x + 8 = 0, \text{ skąd } x = 4 \in \langle 2; \infty)$$

Liczby -1 i -6 nie są miejscami zerowymi funkcji f , jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4 .

Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

- Możemy też naszkicować wykres funkcji f i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

Odpowiedź: B



Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Suma miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x)$ jest równa:

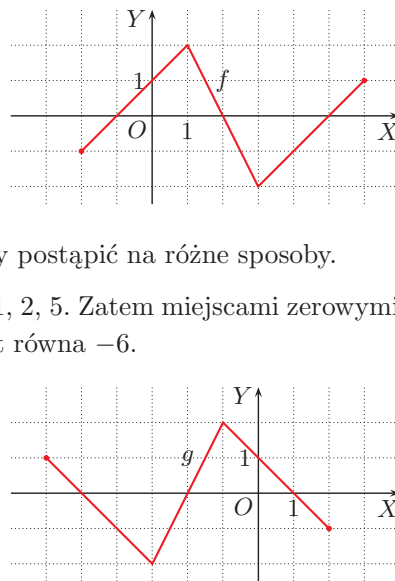
A. -2 ,B. -4 ,C. -6 ,D. -8 .

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $-1, 2, 5$. Zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: $1, -2, -5$. Ich suma jest równa -6 .

- Możemy też naszkicować wykres funkcji g i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby: $-5, -2$ i 1 . Ich suma jest równa -6 .

Odpowiedź: C





Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech $a = f(129)$. Wówczas:

A. $a > f(29)$, B. $a = f(59)$, C. $a < f(89)$, D. $a = f(149)$.

2. Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji:

A. $y = x^2 + \frac{9}{4}$, B. $y = x^3 - \frac{27}{8}$, C. $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$, D. $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$.

3. Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem:

A. $y = \sqrt{x+2}$, B. $y = x^2 - 2$, C. $y = x^3 + 8$, D. $y = \frac{2}{x} + 1$.

4. Do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ należy punkt:

A. $A(-2, 0)$, B. $B(4, 6)$, C. $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, D. $D(-4, -8)$.

5. Do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$ należy punkt:

A. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$, B. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$,
C. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$, D. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$.

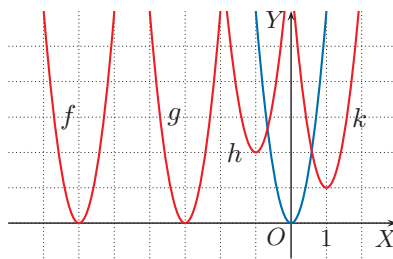
6. Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \end{cases}$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. Wykresy funkcji: f, g, h, k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$. Zatem:

A. $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$,
B. $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$,
C. $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$,
D. $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$.



8. Jeśli $D_f = \langle -5; 3 \rangle$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(-x+1)$ jest zbiór:

A. $\langle -2; 6 \rangle$, B. $\langle -3; 5 \rangle$, C. $\langle -4; 4 \rangle$, D. $\langle -6; 2 \rangle$.

9. Funkcja f ma pięć miejsc zerowych: $-5, -3, -1, 0, 2$. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji $y = -f(-x)$ jest równa:

A. -9 , B. -7 , C. 7 , D. 9 .

5. $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

A. $f(-2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} + 12 \neq -13\sqrt{3}$
B. $f(2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12 \neq 13\sqrt{3}$
C. $f(-2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} + 12 \neq -13\sqrt{3} + 12$
D. $f(2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12$

7. A. $f(x) = 6(x+6)^2 = 6(x^2 + 12x + 36)$

B. $g(x) = 6(x+3)^2 = 6(x^2 + 6x + 9)$
C. $h(x) = 6(x+1)^2 + 2 = 6(x^2 + 2x + 1) + 2$
D. $k(x) = 6(x-1)^2 + 1 = 6(x^2 - 2x + 1) + 1$

9. Miejsca zerowe: $-2, 0, 1, 3, 5$.

1. $f(129) = f(4 \cdot 32 + 1) = 1$

A. $f(29) = 1$
B. $f(59) = 3$
C. $f(89) = 1$
D. $f(149) = 1$

4. $f(x) = x + |x|$

A. $f(-2) = 0$
B. $f(4) = 8 \neq 6$
C. $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$
D. $f(-4) = 0 \neq -8$

6. $|x| - 2 = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$

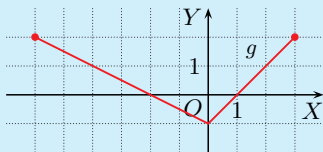
$\frac{1}{2}x + 2 = 0$ dla
 $x = -4 \notin \langle 4; \infty \rangle$



1. $-3x + 5 = 0$ dla
 $x = \frac{5}{3} \in (-\infty; 2)$
 $-5x + 3 = 0$ dla
 $x = \frac{3}{5} \notin (2; \infty)$
 Miejsca zerowe funkcji: $x = \frac{5}{3}$.

2. $f(x) = 2$ dla $x \in \langle -3; 1 \rangle$
 $-2\sqrt{2} \approx -2,83 \in \langle -3; 1 \rangle$,
 więc $f(-2\sqrt{2}) = 2$.

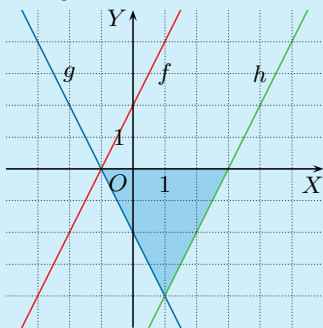
3. $D = \langle -6; 3 \rangle$



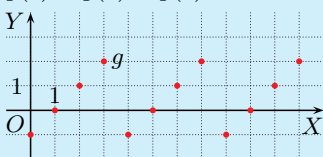
4. $-x - 2 = 0$ dla
 $x = -2 \in (-\infty; -1)$
 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ dla $x = 1 \in \langle -1; 3 \rangle$
 $x - 2 = 0$ dla $x = 2 \notin (3; \infty)$
 Miejsca zerowe funkcji: $-2, 1$.

5. Miejsca zerowe funkcji g :
 $-x + 6 = -3, x = 9$,
 $-x + 6 = 2, x = 4$,
 $-x + 6 = 4, x = 2$.
 Suma miejsc zerowych:
 $9 + 4 + 2 = 15$.

6. $P = 8$



7. $g(1) = g(5) = g(9) = 0$



Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

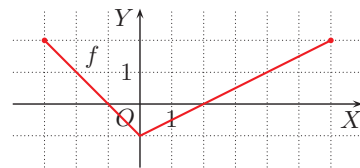
Wyznacz miejsca zerowe funkcji f danej wzorem $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

Zadanie 2 (2 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty: $(-6, 4)$, $(-3, 2)$, $(1, 2)$ i $(4, -5)$ należą do jej wykresu. Wyznacz wartość $f(-2\sqrt{2})$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -3; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres.



Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $-3, 2$ i 4 . Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x + 6)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

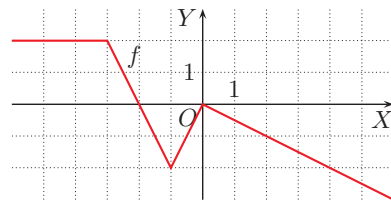
Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 2$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(x - 4)$. Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresami funkcji g i h .

Zadanie 7 (4 pkt)

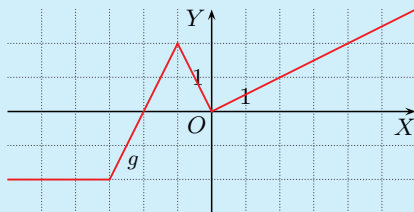
Zbiór X jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 1$ i podaj jej miejsca zerowe.

Zadanie 8 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.



8.



Funkcja g :
 jest stała w $(-\infty; -3)$,
 rośnie w $\langle -3; -1 \rangle$ i w $\langle 0; \infty \rangle$,
 maleje w $\langle -1; 0 \rangle$,
 $g(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \{0\}$