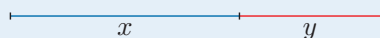




2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższym budynkiem na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m) wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony,
- wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące,
- opisuje słownie i symbolicznie dany zbiór,
- określa relację zawierania zbiorów,
- wypisuje podzbiory danego zbioru.

Komentarz 1

W matematyce zbiór jest pojęciem pierwotnym, tzn. takim, którego nie definiujemy. Intuicyjnie opisujemy zbiór jako grupę nieuporządkowanych obiektów.

Inne pojęcia pierwotne to na przykład: punkt i prosta.

Komentarz 2

Zbiór pusty jest zbiorem skończonym.

Ćwiczenie 1

- a) jest
- b) nie jest
- c) jest
- d) nie jest
- e) nie jest
- f) jest

2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

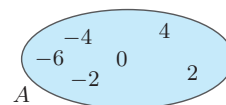
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbf{N}$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono sześćelementowy zbiór A . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- a) $2 \in A$
- b) $1 \in A$
- c) $\sqrt{16} \in A$
- d) $\sqrt{9} \in A$
- e) $-6 \notin A$
- f) $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisanie zbioru jest podanie warunku, który muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $A = \{n \in \mathbf{N} : x^2 \leq 16\}$ oznacza, że $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Przykład 1

Opis zbioru	Zapis symboliczny
A jest zbiorem tych liczb całkowitych, których kwadraty są równe 4.	$A = \{-2, 2\}$
B jest zbiorem tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 30.	$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Ćwiczenie 2

Wypisz wszystkie elementy zbiorów: D , E i F .

D – zbiór tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 5

E – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 5

F – zbiór tych liczb rzeczywistych, których kwadraty są równe 5

Ćwiczenie 2

$D = \{0, 1, 2\}$,

$E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$F = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

Multiteka

- Zbiory liczbowe
- Różnica zbiorów – rozwiązanie zadania
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)
- Działania na zbiorach – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.1

Generator
testów i sprawdzianów

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Ćwiczenie 3

Które spośród zbiorów A , B i C są równe?

- a) $A = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$, $B = \{-6, -3, 0, 3, 6, 8\}$, $C = \{0, 3, -3, 6, -6\}$
b) $A = \{-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, C – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 10

Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą. Mówimy, że zbiór liczb naturalnych jest **podzbiorem** zbioru liczb całkowitych.

Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Zapisujemy to: $A \subset B$. Mówimy również, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B .

Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B .

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zawierania: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

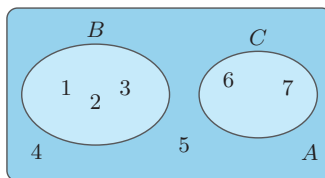
Przykład 2

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{6, 7\}$.

Miedzy tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$



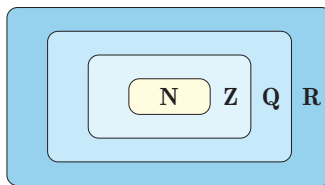
Ćwiczenie 4

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, B – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 20
c) A – zbiór dzielników liczby 40, B – zbiór dzielników liczby 60

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych zachodzą zawierania:

$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R}$$



Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że: a) $\mathbf{Z \not\subset N}$, b) $\mathbf{R \not\subset Q}$.

Ćwiczenie 4

- a) $B \subset A$
b) $A \subset B$, bo $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
c) Odpowiedź nie zależy od tego, czy rozpatrujemy dzielniki naturalne, czy całkowite. Rozpatrzmy dzielniki naturalne.
 $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$,
żadna zależność $A \subset B$ i $B \subset A$ nie jest prawdziwa.

Ćwiczenie 5

- a) Ujemne liczby całkowite nie należą do zbioru liczb naturalnych.
b) Nie wszystkie liczby rzeczywiste należą do zbioru liczb wymiernych, np. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Ćwiczenie 3

- a) $A = C$
b) $B = C$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
 $A \subset B$
b) $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$,
 $B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, nie
2. a) $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$
b) $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$
c) $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$,
 $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$
3. $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$,
 $\{a, b, d, e\}$, $\{a, c, d, e\}$,
 $\{b, c, d, e\}$
4. a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$

Zadania

1. Określ zbiory A i B , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
a) A – zbiór dzielników liczby 12, B – zbiór dzielników liczby 24
b) A – zbiór dzielników liczby 42, B – zbiór dzielników liczby 45
2. Wypisz wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru A .
a) $A = \{0, 1, 2\}$ b) $A = \{a, b, c\}$ c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
3. Wypisz wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru $\{a, b, c, d, e\}$.
4. Zbiór X jest podzbiorem zbioru nieparzystych liczb naturalnych. Wypisz jego elementy, jeśli są nimi liczby, których:
a) kwadrat jest mniejszy od 180, b) pierwiastek jest mniejszy od 5.

Czy wiesz, że...

W języku potocznym słowo „zbiór” jest używane w wielu sytuacjach. Na przykład „zbiorami” nazywa się różnorodne kolekcje gromadzone przez hobbystów czy też kolekcje dzieł sztuki. *Wazon z irysami na żółtym tle* – obraz Vincenta van Gogha, należy do zbiorów Muzeum van Gogha w Amsterdamie.

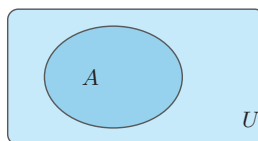


Powtórzenie

- D** 5. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów? Uzasadnij, że $A \not\subset B$.
- a) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15
 - b) A – zbiór dzielników liczby 18, B – zbiór dzielników liczby 30
 - c) A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48
6. Wypisz wszystkie trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$.
7. Wypisz trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, dla których:
- a) suma wszystkich elementów jest większa od 7,
 - b) iloczyn wszystkich elementów jest równy zero.
5. Odpowiedź na pytanie nie zależy od tego, czy rozpatrujemy dzielniki naturalne, czy całkowite. We wszystkich podpunktach wypiszemy dzielniki naturalne.
- a) tak, $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 15\}$, 4 elementy
 - b) nie, $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, 6 elementów, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, 8 elementów
 - c) nie, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, 9 elementów,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$, 10 elementów
6. $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$
7. a) $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$
b) $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 3, 4\}$

2.2. Działania na zbiorach

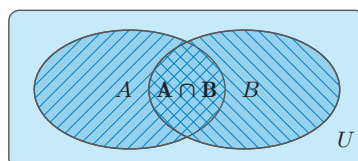
Na diagramie obok zbiór U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.



Definicja

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy: $A \cap B$.

Na diagramie iloczyn $A \cap B$ jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany. Zauważmy, że iloczyn zbiorów jest ich częścią wspólną.



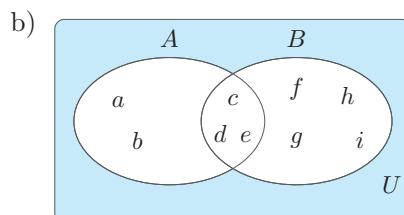
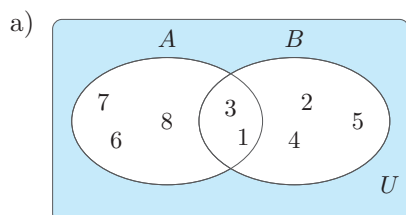
Przykład 1

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów: A , B oraz $A \cap B$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .

- a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
c) $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: iloczyn, suma oraz różnica zbiorów,
- wyznacza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów,
- przedstawia na diagramie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach,
- wyznacza dopełnienie zbioru.

Komentarz

Iloczyn zbiorów jest nazywany również przekrojem zbiorów.

Ćwiczenie 1

- a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cap B = \{1, 3\}$
b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$,
 $A \cap B = \{c, d, e\}$

Ćwiczenie 2

- a) $\{3, 5\}$
b) $\{0, 6, 12, 18\}$
c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$

Multiteka

- Różnica zbiorów
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)
- Działania na zbiorach – rozwiązanie zadania

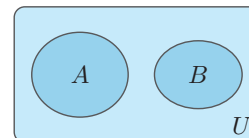
dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) Zbiory X i Y są rozłączne.
b) Zbiory X i Y nie są rozłączne.

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na diagramie obok przedstawiono rozłączne zbiory A i B .



Ćwiczenie 3

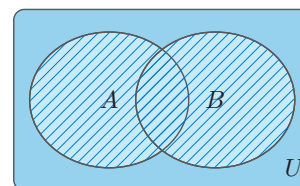
Czy zbiory X i Y są rozłączne?

- a) X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych
b) X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów: A lub B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy: $A \cup B$.

Na diagramie suma $A \cup B$ jest przedstawiona jako obszar zakresowany.



Przykład 2

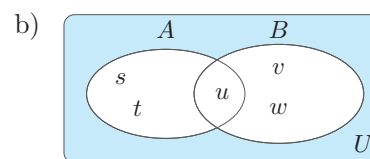
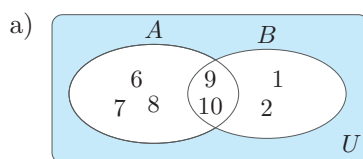
Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$,
to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ćwiczenie 4

- a) $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) $A \cup B = \{s, t, u, v, w\}$

Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B .



Ćwiczenie 5

- a) $A \cup B = \{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
b) $A = \{1, 2, 3, 6\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 8\}$,
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
c) $A \cup B = \mathbb{N}$

Ćwiczenie 5

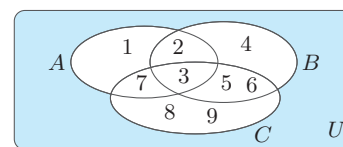
Wyznacz sumę zbiorów A i B .

- a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
b) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8
c) A – zbiór liczb parzystych, B – zbiór liczb nieparzystych

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- a) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,
b) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.



Ćwiczenie 6

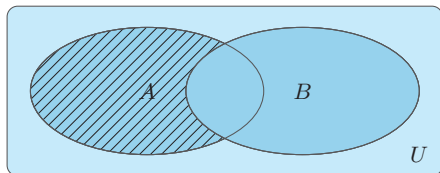
- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $A \cap B = \{2, 3\}$,
 $A \cap C = \{3, 7\}$,
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}$,
 $A \cap B \cap C = \{3\}$

Definicja

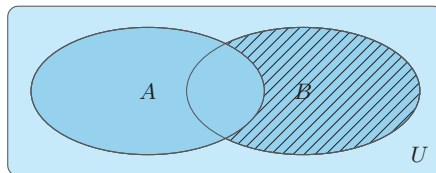
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

Obszary zakreskowane na poniższych diagramach przedstawiają:

zbiór $A \setminus B$,

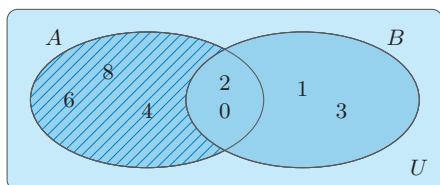


zbiór $B \setminus A$.

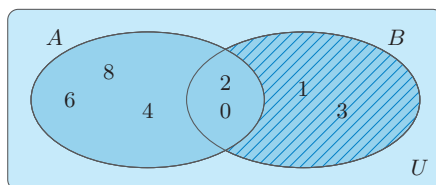


Przykład 3

Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3\}$.



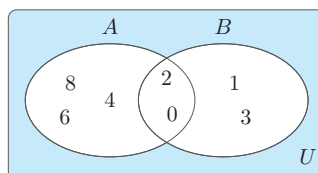
$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 7

Dane są zbiory: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ – zbiór liczb parzystych mniejszych od 9 i $B = \{0, 1, 2, 3\}$ – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 4. Wyznacz zbiory: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.



Ćwiczenie 8

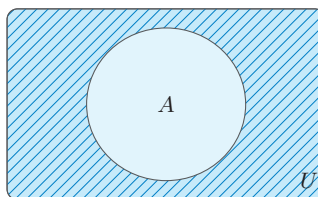
Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli:

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i definiujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A :

$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A' .



Ćwiczenie 7

$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}, \quad B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 8

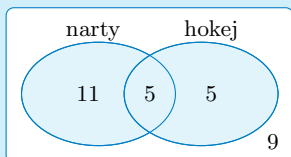
a) $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$

b) $A \setminus B = \{7\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4\}$

Odpowiedzi do zadań

1. $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$, $A \cap B = \{n, o\}$,
 $A \setminus B = \{k, l, m\}$,
 $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
2. a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$,
 $A \cap B = \{e, g\}$, $A \setminus B = \{a, c\}$,
 $B \setminus A = \{d, f\}$
b) $A \cup B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cap B = \{5, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 9\}$,
 $B \setminus A = \{4, 6, 8\}$

3.



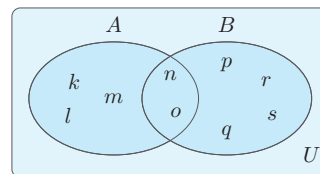
Dziewięciu uczniów nie uprawia żadnego z wymienionych sportów.

4. a) II b) III c) I

5. a) $A \cap B$, $B \setminus A$
b) $A \setminus B$, $B \setminus A$

Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



2. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jeśli:

- a) $A = \{a, c, e, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$,
- b) $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

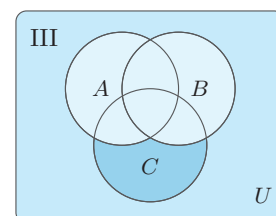
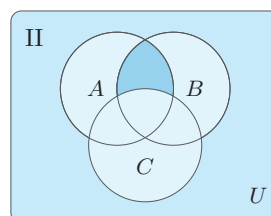
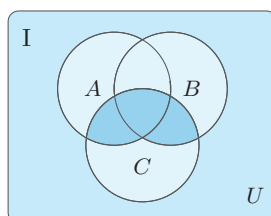
3. W pewnej 30-osobowej klasie 16 uczniów jeździ na nartach, a 10 – gra w hokeja. Ilu uczniów nie uprawia żadnego z wymienionych sportów, jeśli połowa uczniów grających w hokeja jeździ na nartach?

4. Który z poniższych diagramów odpowiada zbiorowi:

a) $(A \cap B) \setminus C$,

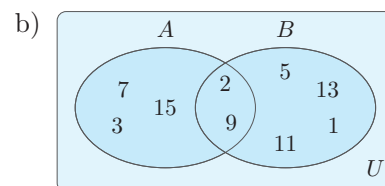
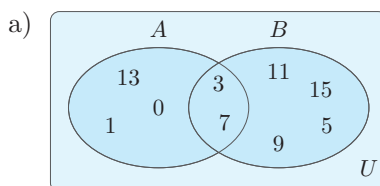
b) $C \setminus (A \cup B)$,

c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?



Powtórzenie

5. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Do których ze zbiorów: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, należą tylko liczby nieparzyste?



6. A jest zbiorem spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiorem spółgłosek w słowie *geometria*, a C – zbiorem spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

- a) $A \cap B$,
- b) $A \setminus B$,
- c) $B \setminus A$,
- d) $B \cap C$,
- e) $B \setminus C$,
- f) $C \setminus B$,
- g) $A \cap B \cap C$,
- h) $A \cup B \cup C$.

6. $A = \{k, m, r, t\}$, $B = \{g, m, r, t\}$, $C = \{b, g, l, r\}$

- a) $A \cap B = \{m, r, t\}$
- b) $A \setminus B = \{k\}$
- c) $B \setminus A = \{g\}$
- d) $B \cap C = \{g, r\}$
- e) $B \setminus C = \{m, t\}$
- f) $C \setminus B = \{b, l\}$
- g) $A \cap B \cap C = \{r\}$
- h) $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$

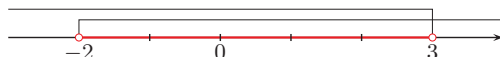
2.3. Przedziały

■ Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają jednocześnie nierówności: $x > -2$ i $x < 3$.

Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3 , co zapisujemy symbolicznie: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:



Liczby -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3 , co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczby -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



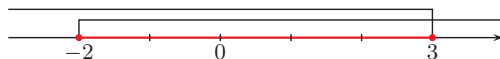
Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

- a) $(-3; 2)$ b) $(0; 4)$ c) $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $-2 \leq x \leq 3$.



Liczby -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $[-2; 3]$.

Uczeń:

- rozróżnia pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, ograniczony, nieograniczony,
- zapisuje przedział i zaznacza go na osi liczbowej,
- odczytuje i zapisuje symbolem przedział zaznaczony na osi liczbowej,
- wyznacza przedział opisany podanymi nierównościami,
- wymienia liczby należące do przedziału, spełniające podane warunki.

Komentarz 1

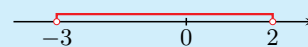
Przedział liczbowy jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Komentarz 2

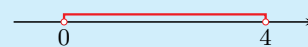
Warto uświadomić uczniom różnicę między zbiorem skończonym i ograniczonym. Przedziały liczbowe są zbiorami nieskończonymi.

Ćwiczenie 1

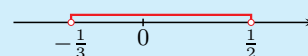
- a) $-3 < x < 2$



- b) $0 < x < 4$



- c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$



- d) $100 < x < 150$



Multiteka

- Działania na przedziałach

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

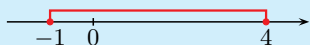
Generator
testów i sprawdzianów

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, zaś jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x \leq b$	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b \rangle$	$a < x \leq b$	

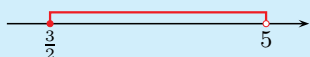
Ćwiczenie 2

a) $-1 \leq x \leq 4$



6 liczb całkowitych

b) $\frac{3}{2} \leq x < 5$



3 liczby całkowite

c) $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$



1 liczba całkowita

d) $-60 \leq x \leq 40$



101 liczb całkowitych

Ćwiczenie 2

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

a) $\langle -1; 4 \rangle$

b) $\langle \frac{3}{2}; 5 \rangle$

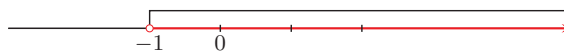
c) $(-2; -\frac{1}{2})$

d) $\langle -60; 40 \rangle$

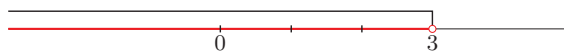
■ Przedziały nieograniczone

Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.



Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $\langle -1; \infty \rangle$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leq 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3 \rangle$.



Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; \infty)$	$x > a$	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; \infty)$	$x \geq a$	
przedział prawostronnie domknięty	$(-\infty; b]$	$x \leq b$	
przedział otwarty	$(-\infty; b)$	$x < b$	

Zadania

- Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.
 - $-7 \leq x \leq 0$
 - $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$
 - $x \geq 2\frac{1}{4}$
 - $x \leq -\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{2} < x < 9$
 - $-\frac{13}{3} < x \leq 5$
 - $x > -3$
 - $x \leq 27$
- Zapisz symbolicznie poniższe przedziały i podaj warunki, które muszą spełniać należące do nich liczby.
 -
 -
 -
 -
 -
 -
 -
 -
- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:
 - liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
 - liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
 - liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
 - liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.
- Zapisz przedział, do którego należą liczby:
 - odległe od liczby 1 o mniej niż 2,
 - odległe od liczby -1 o mniej niż 3,
 - odległe od liczby 3 o nie więcej niż 2,
 - odległe od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

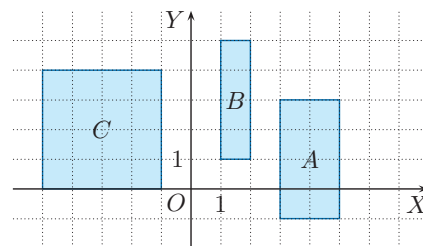
- $(-1; 3)$
 - $(-4; 2)$
 - $\langle 1; 5 \rangle$
 - $\langle -\frac{7}{4}; \frac{5}{4} \rangle$

Odpowiedzi do zadań

- $\langle -7; 0 \rangle$
 - $(\frac{1}{2}; 9)$
 - $\langle \frac{1}{4}; \sqrt{2} \rangle$
 - $(-\frac{13}{3}; 5)$
 - $\langle 2\frac{1}{4}; \infty \rangle$
 - $(-3; \infty)$
 - $(-\infty; -\frac{1}{3})$
 - $(-\infty; 27]$
- $(-7; 2], -7 < x \leq 2$
 - $\langle -50; 20 \rangle, -50 \leq x \leq 20$
 - $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}), \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
 - $\langle 3,14; \pi \rangle, 3,14 \leq x < \pi$
 - $(-\infty; 10), x < 10$
 - $(\sqrt{2}; \infty), x > \sqrt{2}$
 - $\langle -\frac{1}{4}; \infty \rangle, x \geq -\frac{1}{4}$
 - $(-\infty; 2\pi), x < 2\pi$
- $(0; 4)$
 - $\langle -4; 0 \rangle$
 - $(2\frac{1}{2}; \infty)$
 - $(-\infty; -\sqrt{2})$

5. a) $-1, 0, 1, 2, 3$
 b) $1, 2, 3, 4, 5$
 c) $0, 1, 2$
 d) $-6, -5, -4, -3, -2$
6. a) $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$, czyli $1 \leq x \leq 4$, zatem warunek spełniają 4 liczby całkowite.
 b) $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$, czyli $4 \leq x \leq 9$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.
 c) $1 < \sqrt[3]{x} < 2$, czyli $1 < x < 8$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.
 d) $-2 \leq \sqrt[3]{x} < 0$, czyli $-8 \leq x < 0$, zatem warunek spełnia 8 liczb całkowitych.
7. a) $A \subset B$
 b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.
 c) $B \subset A$
 d) $A \subset B$
8. a) $\langle -2; 5 \rangle$ b) $\langle -3; 5 \rangle$
 c) $\langle -3; 2 \rangle$ d) $\langle -1; 1 \rangle$
9. a) $\frac{-3+1}{2} = -1$
 b) $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$
 c) $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
 d) $\frac{1\frac{1}{4}+2\frac{3}{4}}{2} = 2$
10. $p+1 = 2p$ lub $2p+1 = p$,
 czyli $p = -1$ lub $p = 1$
11. a) $x \in \langle 1; 2 \rangle$ i $y \in \langle 1; 5 \rangle$
 b) $x \in \langle -5; -1 \rangle$ i $y \in \langle 0; 4 \rangle$
13. a) $-3 \leq x \leq 5; 3$
 b) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}; 1$
 c) $-\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; 1$
 d) $-\pi < x < 2\pi; 4$
14. a) $3\frac{2}{5}, \pi$ b) $-\frac{8}{3}, \pi$
 c) żadna d) π

5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:
 a) $\langle -1; 4 \rangle$, b) $(0; 6)$, c) $\langle -\frac{2}{3}; \frac{5}{2} \rangle$, d) $\langle -\frac{25}{4}; -2 \rangle$.
6. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?
 a) $\sqrt{x} \in \langle 1; 2 \rangle$ b) $\sqrt{x} \in \langle 2; 3 \rangle$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in \langle -2; 0 \rangle$
7. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B, B \subset A$.
 a) $A = \langle -1; 2 \rangle, B = \langle -1; 3 \rangle$ c) $A = \langle -\frac{7}{8}; \frac{15}{8} \rangle, B = \langle -\frac{6}{7}; \frac{13}{7} \rangle$
 b) $A = \langle -\infty; 7 \rangle, B = \langle 2; 7 \rangle$ d) $A = \langle \frac{22}{7}; 7 \rangle, B = \langle \pi; \sqrt{50} \rangle$
8. Podaj najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w przedziale:
 a) $\langle -2\frac{1}{2}; 5 \rangle$, b) $\langle -\pi; 6 \rangle$, c) $\langle -3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4} \rangle$, d) $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{3} \rangle$.
9. Wskaż liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:
 a) $\langle -3; 1 \rangle$, b) $\langle -2; 3 \rangle$, c) $\langle \sqrt{2}; 4\sqrt{2} \rangle$, d) $\langle 1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4} \rangle$.
10. Dla jakich wartości parametru p przedziały $\langle p; p+1 \rangle$ oraz $\langle 2p; 2p+1 \rangle$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?
11. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in \langle 3; 5 \rangle$ i $y \in \langle -1; 3 \rangle$. Zapisz warunki, które spełniają punkty należące do:
 a) prostokąta B ,
 b) kwadratu C .



Powtórzenie

12. Zaznacz na osi liczbowej podany przedział. Ile liczb całkowitych należy do tego przedziału?
 a) $\langle -3; 2 \rangle$ b) $\langle -1; 6 \rangle$ c) $\langle -1\frac{1}{2}; 4 \rangle$ d) $\langle -2\frac{1}{3}; 5 \rangle$
13. Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby x należące do podanego przedziału. Ile liczb całkowitych podzielnych przez 3 należy do tego przedziału?
 a) $\langle -3; 5 \rangle$ b) $\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$ c) $\langle -\frac{7}{3}; \frac{4}{3} \rangle$ d) $\langle -\pi; 2\pi \rangle$
14. Które spośród liczb: $-\frac{8}{3}, -2\frac{3}{4}, 3\frac{2}{5}, \pi$, należą do podanego przedziału?
 a) $\langle -2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3} \rangle$ b) $\langle -2\frac{2}{3}; 3,4 \rangle$ c) $\langle -2; 3,14 \rangle$ d) $\langle -2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4} \rangle$
12. a) Do przedziału należy 6 liczb całkowitych.
 b) Do przedziału należy 6 liczb całkowitych.
 c) Do przedziału należy 5 liczb całkowitych.
 d) Do przedziału należy 8 liczb całkowitych.

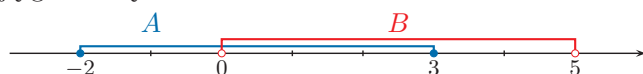
2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Można wykonywać na nich działania: $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -2; 3 \rangle$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



$A \cup B = \langle -2; 5 \rangle$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3)$	Iloczynowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

- a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$ c) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle -5; 3 \rangle$
 b) $A = \langle -4; 1 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$ d) $A = (-3; 2)$, $B = (-1; 2)$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $\langle -3; 0 \rangle$ i $(1; 4)$.

$$X = \langle -3; 0 \rangle \cup (1; 4)$$

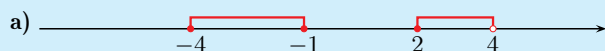


Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór X .

- a) $X = \langle -4; -1 \rangle \cup (2; 4)$ b) $X = \langle -6; -5 \rangle \cup (-3; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$

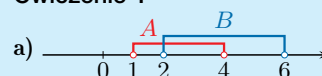
Ćwiczenie 2



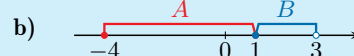
Uczeń:

- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej,
- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę różnych zbiorów liczbowych oraz zapisuje je symbolicznie.

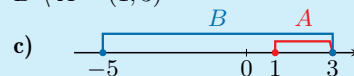
Ćwiczenie 1



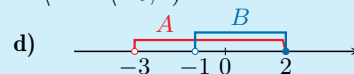
$$\begin{aligned} A \cup B &= (1; 6), \\ A \cap B &= (2; 4), \\ A \setminus B &= (1; 2), \\ B \setminus A &= (4; 6) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= \langle -4; 3 \rangle, \\ A \cap B &= \{1\}, \\ A \setminus B &= \langle -4; 1 \rangle, \\ B \setminus A &= (1; 3) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= \langle -5; 3 \rangle, \\ A \cap B &= \langle 1; 3 \rangle, \\ A \setminus B &= \emptyset, \\ B \setminus A &= \langle -5; 1 \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= (-3; 2), \\ A \cap B &= (-1; 2), \\ A \setminus B &= (-3; -1), \\ B \setminus A &= \emptyset \end{aligned}$$

Multiteka

- Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $A \setminus B = \langle -5; -3 \rangle \cup \langle -1; 4 \rangle$
 b) $A \setminus B = \langle -3; 2 \rangle \cup \langle \frac{5}{2}; 5 \rangle$
 c) $A \setminus B = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
 d) $A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

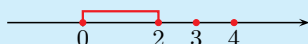
Odpowiedzi do zadań

1. a) $A \cup B = \langle -3; 4 \rangle$,
 $A \cap B = \langle -1; 0 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -3; -1 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 0; 4 \rangle$
 b) $A \cup B = \langle -4; 3 \rangle$,
 $A \cap B = \langle -\frac{1}{2}; 2 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -4; -\frac{1}{2} \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 2; 3 \rangle$
 c) $A \cup B = \langle -5; 4 \rangle$,
 $A \cap B = \langle -2; 0 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -5; -2 \rangle \cup \langle 0; 4 \rangle$,
 $B \setminus A = \emptyset$
 d) $A \cup B = (-\infty; 2)$,
 $A \cap B = \langle 0; 2 \rangle$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$,
 $B \setminus A = \emptyset$
 e) $A \cup B = \langle -1; \infty \rangle$,
 $A \cap B = \{2\}$,
 $A \setminus B = \langle -1; 2 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 2; \infty \rangle$
 f) $A \cup B = \mathbf{R}$,
 $A \cap B = \langle -3; 6 \rangle$,
 $A \setminus B = (-\infty; -3)$,
 $B \setminus A = \langle 6; \infty \rangle$

2. a)



b)



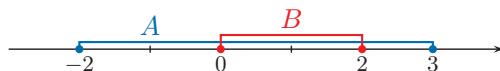
c)



3. a) $(-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 b) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
 c) $(-\infty; 0) \cup \langle 10; \infty \rangle$
 d) $(-\infty; \sqrt{2})$
 4. a) $A \cup B = \langle -3; 6 \rangle$,
 $A \cap B = (0; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -3; 0 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 1; 3 \rangle$
 b) $A \cup B = \langle 0; 7 \rangle \cup \langle 8; 9 \rangle$,
 $A \cap B = (1; 3)$,
 $A \setminus B = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 3; 7 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 8; 9 \rangle$

Przykład 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$, jeżeli $A = \langle -2; 3 \rangle$ i $B = \langle 0; 2 \rangle$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

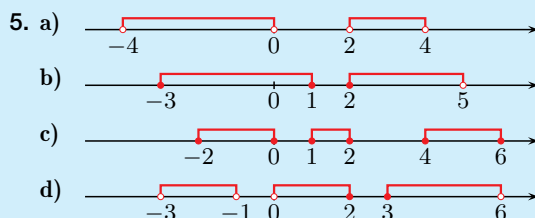
- a) $A = \langle -5; 4 \rangle$, $B = \langle -3; -1 \rangle$ c) $A = \langle -3; \infty \rangle$, $B = \langle -1; 2 \rangle$
 b) $A = \langle -3; 5 \rangle$, $B = \langle 2; \frac{5}{2} \rangle$ d) $A = \mathbf{R}$, $B = \langle -3; 1 \rangle$

Zadania

1. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
 a) $A = \langle -3; 0 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$ d) $A = (-\infty; 2)$, $B = \langle 0; 2 \rangle$
 b) $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$ e) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = \langle 2; \infty \rangle$
 c) $A = \langle -5; 4 \rangle$, $B = \langle -2; 0 \rangle$ f) $A = (-\infty; 6)$, $B = \langle -3; \infty \rangle$
 2. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.
 a) $X = (-1; 3) \cup \{5\}$ b) $X = \langle 0; 2 \rangle \cup \{3, 4\}$ c) $X = \{1\} \cup \langle 3; 5 \rangle$
 3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów zbiór:
 a) $\mathbf{R} \setminus (-2; 3)$, b) $\mathbf{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$, c) $\mathbf{R} \setminus (0; 10)$, d) $\mathbf{R} \setminus \langle \sqrt{2}; \infty \rangle$.
 4. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
 a) $A = (-3; 1) \cup \langle 3; 6 \rangle$, $B = (0; 4)$ b) $A = \langle 0; 7 \rangle$, $B = (1; 3) \cup \langle 8; 9 \rangle$

Powtórzenie

5. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.
 a) $X = (-4; 0) \cup \langle 2; 4 \rangle$ c) $X = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$
 b) $X = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$ d) $X = (-3; -1) \cup (0; 2) \cup \langle 3; 6 \rangle$
 6. Niech $A = (-5; 3)$, $B = (-7; 4)$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:
 a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \setminus B$, d) $B \setminus A$?
 7. Który ze zbiorów: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jest zbiorem pustym?
 a) $A = \langle 0; 4 \rangle$, $B = (0; 4)$ b) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle 3; 6 \rangle$



6. a) $A \cup B = (-7; 4)$
 10 liczb całkowitych
 b) $A \cap B = (-5; 3)$
 7 liczb całkowitych
 c) $A \setminus B = \emptyset$
 d) $B \setminus A = (-7; -5) \cup \langle 3; 4 \rangle$
 3 liczby całkowite
 7. a) $B \setminus A$ b) $A \cap B$

Rozwiązanie równań

1. Sprawdź, czy liczba p spełnia podane równanie.

a) $20 - 5x = 4 - 13x$, $p = -2$

c) $3x - (1 + 5x) = \frac{1}{2}x + 14$, $p = -5$

b) $6x - 9 = x - (6 - 2x)$, $p = 1$

d) $\frac{2}{3}x - 3(1 - \frac{2}{9}x) = -2(x - \frac{7}{2})$, $p = 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x + 4 = 9$

c) $4x + 3 = 2x - 9$

e) $2x + \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} - 2x$

b) $-3x + 6 = 7$

d) $x - 6 = 5x - 2$

f) $\frac{1}{2} - 3x = 6,5 + \frac{1}{2}x$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x-1}{3} = 5$

c) $\frac{6x+1}{5} = x$

e) $\frac{2x-1}{2} = \frac{1-x}{4}$

b) $\frac{2-3x}{4} = 1$

d) $3 - x = \frac{2x-3}{2}$

f) $\frac{x-3}{2} = \frac{x-2}{3}$

4. Liczba x jest rozwiązaniem poniższego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do x .

a) $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{3x+5}{6}$

c) $\frac{x+4}{2} - \frac{-2x-5}{6} = \frac{0,5x+2,5}{3}$

b) $\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$

d) $\frac{5-4x}{4} - \frac{6x-1}{3} = \frac{4x-1}{12}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $3(2x - 7) - (7x - 13) = -10$

d) $3x = x - (1 - (x - 3))$

b) $-2(-27 - 3x) = -3(2x - 10)$

e) $5x - (2x + (3 - x)) = 11$

c) $6 - 2(2x - \frac{1}{2}) = 4x - 2(\frac{3}{4} - 3x)$

f) $1 - (x - (x - (x - 1))) = 0$

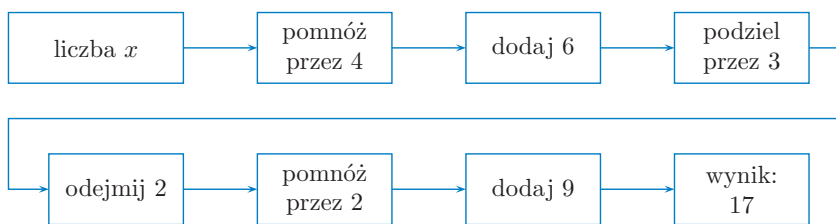
6. Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe (spełnione dla każdej liczby rzeczywistej), czy sprzeczne.

a) $3x - 6 = 1 - (7 - 3x)$

c) $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6)$

b) $4 - (3 + 2x) = 5 - (2x + 6)$

d) $\frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}x) = 4 - \frac{1}{4}x$

7. Począwszy od liczby x , wykonano kolejno ciąg operacji. Wyznacz liczbę x .6. a) $3x - 6 = 1 - 7 + 3x$

$$3x - 3x = -6 + 6$$

$$0 = 0$$

Zatem jest to równanie tożsamościowe.

b) $4 - 3 - 2x = 5 - 2x - 6$

$$-2x + 2x = -1 - 1$$

$$0 = -2$$

Zatem jest to równanie sprzeczne.

7. $((4x + 6) : 3 - 2) \cdot 2 + 9 = 17$

$$x = 3$$

c) $6x - 9 = 6x - 4$

$$6x - 6x = -4 + 9$$

$$0 = 5$$

Zatem jest to równanie sprzeczne.

d) $4 - \frac{1}{4}x = 4 - \frac{1}{4}x$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x = 4 - 4$$

$$0 = 0$$

Zatem jest to równanie tożsamościowe.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $20 - 5 \cdot (-2) =$

$$= 4 - 13 \cdot (-2)$$

$$20 + 10 = 4 + 26$$

$$30 = 30$$

Zatem $p = -2$ spełnia podane równanie.b) $6 \cdot 1 - 9 = 1 - (6 - 2 \cdot 1)$

$$6 - 9 = 1 - 4$$

$$-3 = -3$$

Zatem $p = 1$ spełnia podane równanie.c) $3 \cdot (-5) - (1 + 5 \cdot (-5)) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-5) + 14$$

$$-15 - (-24) = -2,5 + 14$$

$$9 \neq 11,5$$

Zatem $p = -5$ nie spełnia podanego równania.d) $\frac{2}{3} \cdot 3 - 3(1 - \frac{2}{9} \cdot 3) =$

$$= -2(3 - \frac{7}{2})$$

$$2 - 3 \cdot (\frac{1}{3}) = -2 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$1 = 1$$

Zatem $p = 3$ spełnia podane równanie.2. a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = -\frac{1}{3}$ c) $x = -6$ d) $x = -1$ e) $x = \frac{1}{3}$ f) $x = -\frac{12}{7}$ 3. a) $x = 4$ b) $x = -\frac{2}{3}$ c) $x = -1$ d) $x = \frac{9}{4}$ e) $x = \frac{3}{5}$ f) $x = 5$ 4. a) $x = \frac{1}{3}$; $-x + \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3}$ b) $x = -\frac{1}{4}$; $-x + \frac{1}{x} = -3\frac{3}{4}$ c) $x = -3$; $-x + \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3}$ d) $x = \frac{1}{2}$; $-x + \frac{1}{x} = 1\frac{1}{2}$ 5. a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{17}{28}$ d) $x = -4$ e) $x = \frac{7}{2}$ f) $x = 2$

Uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem nierówności,
- rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym nierówności sprzeczne i tożsamościowe,
- zapisuje zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału,
- stosuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Ćwiczenie 1

- spełnia
- spełnia
- nie spełnia
- nie spełnia

Ćwiczenie 2

- $x < -36$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
- $x \geq 2\frac{5}{6}$, liczba 3
- $x \leq -5\frac{1}{4}$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
- $x > 20$, liczba 21

2.5. Rozwiązywanie nierówności

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Np. liczba 7 spełnia nierówność $x + 1 > 5$, bo $7 + 1 > 5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

- 2
- 4
- 6
- 8

Przykład 1

- Rozwiąż nierówność $x + 3 > 7$.

$$x + 3 > 7$$

$$x + 3 - 3 > 7 - 3$$

$$x > 4$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 3

– nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.

Nierówność jest spełniona dla $x \in (4; \infty)$.

Nierówności $>$ i $<$ nazywamy **nierównościami ostrymi**.

- Rozwiąż nierówność $x - 4 \leq 5$.

$$x - 4 \leq 5$$

$$x - 4 + 4 \leq 5 + 4$$

$$x \leq 9$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4

– nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.

Nierówność jest spełniona dla $x \in (-\infty; 9]$.

Nierówności $\geq$ i $\leq$ nazywamy **nierównościami nieostrymi**.

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron jest równoważne przeniesieniu tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

- $x + 309 < 273$
- $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$
- $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$
- $2x - 3 > x + 17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

- $x - 13 < 56$, $x + 26 > 95$
- $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$, $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

- Dla pierwszej nierówności mamy $x < 69$, a dla drugiej $x > 69$, czyli nierówności nie są równoważne.

- Dla obydwu nierówności otrzymujemy $x \geq \frac{5}{12}$, czyli są równoważne.

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$$6x + 5 < 17$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$$6x < 12 / : 6$$

Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$$x < 2$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leq 34$ b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$ c) $0,1x + 1 < -\frac{1}{2}$ d) $5x - 7 \geq 3x + 5$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$$-\frac{1}{3}x > 5 / \cdot (-3)$$

Mnożymy obie strony nierówności przez -3 .

$$x < -15$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leq -13$.

$$-6x - 4 \leq -13$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$$-6x \leq -9 / : (-6)$$

Dzielimy obie strony nierówności przez -6 .

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $-3x - 7 < 2$

c) $3(x - 1) \geq x + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leq 5$

d) $2(x + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}x + 4$

f) $\frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2}$

Ćwiczenie 4

a) $x \leq 9$

b) $x > \frac{16}{9}$

c) $x < -15$

d) $x \geq 6$

Ćwiczenie 5

a) $x > -3$



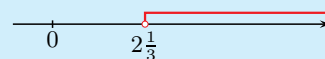
b) $x \geq -6$



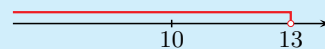
c) $x \geq 4$



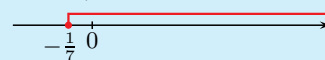
d) $x > 2\frac{1}{3}$



e) $x < 13$



f) $x \geq -\frac{1}{7}$



Ćwiczenie 6

- a) spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$
b) sprzeczna
c) sprzeczna
d) sprzeczna
e) spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$

Ćwiczenie 6

Przeczytaj przykład w ramce. Sprawdź, czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna.

- a) $3(2 - \frac{1}{6}x) \geq -0,5x + 1$
b) $-\frac{2}{3}(3x - 2) > \frac{1}{2}(3 - 4x)$
c) $\frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$
d) $\frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5$
e) $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x / \cdot 6$
 $1 - 3x < -3x$

$1 < 0x$ **sprzeczność**

Nierówność jest sprzeczna (nie spełnia jej żadna liczba).

b) $4x - 2 \geq 4x - 10$
 $0x \geq -8$

Nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\langle 4; 5 \rangle$
b) $\langle -5; -2 \rangle$
c) $\langle -\frac{1}{2}; 1 \rangle$
2. a) $\langle -6; -4 \rangle, -5$
b) $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}), 0$
c) $\langle -4; 2 \rangle, -4, 1$
d) $(-\frac{16}{3}; -3), -5, -4$
3. a) $x < -4\frac{2}{3}$, żadna liczba
b) $x \geq 4$, liczba c
c) $x \geq 2\frac{3}{4}$, liczba c
d) $x > \frac{4}{7}$, liczby b i c
e) $x < 8\frac{1}{2}$, liczby a, b i c
f) $x < -4\frac{3}{5}$, żadna liczba
4. a) $x > \frac{15}{8}$ b) $x \geq 2$
c) $x \leq \frac{25}{4}$ d) $x > \frac{28}{33}$
e) $x \geq \frac{11}{8}$ f) $x > \frac{19}{3}$

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności.
- a) $\begin{cases} x + 9 \geq 13 \\ 2x - 6 < 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 6 > -9 \\ 1 - x \geq 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3 \leq 4 \\ 5 - 4x \geq 1 \end{cases}$
2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.
- a) $2x + 20 > 8$ i $5 < 1 - x$ c) $2x + 3 < 7$ i $3 - 4x \leq 19$
b) $2x + 3 > 2$ i $4x < 3$ d) $3x + 9 > -7$ i $-3x > 4x + 21$
3. Które spośród liczb: $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$, spełniają podaną nierówność?
- a) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2}$ c) $\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3}$ e) $\frac{3x+2}{-5} < 3 - x$
b) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}$ d) $\frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}$ f) $-3(x+3) > \frac{x-5}{-2}$
4. Rozwiąż nierówność.
- a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$ d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$
b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$ e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$
c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$ f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$
5. Rozwiąż nierówność.
- a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$
5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $x > 6\sqrt{2}$ c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Czy wiesz, że...

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest jedna z relacji: $a < b$, $a = b$ lub $a > b$. Własność ta nosi nazwę trychotomii.
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi następująca własność (zwana przechodniością): jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n .
- b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k .
- c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m .
7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Jakie wartości całkowite może przyjmować k , jeśli:
- a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 cm i mniejsza od 46 cm,
- b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 cm^2 i mniejsze od 68 cm^2 ?
- D** 8. Czy poniższe zdanie jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.
- a) Dla dowolnych liczb p, q , jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.
- b) Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q , jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$.

Powtórzenie

9. Rozwiąż nierówność.
- a) $3 - x < 4$ c) $3 + \frac{1}{2}x > \frac{3}{2}x - 1$ e) $\frac{2}{3}x + 1 \geq \frac{1}{2}x - 2$
b) $6x \geq 1 + 8x$ d) $1 - \frac{2}{3}x \leq 8 + \frac{5}{3}x$ f) $2,5x - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}x + 1$
10. Które liczby ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ spełniają nierówność?
- a) $x - (2x - 3) < 2(x - 1,5)$
b) $1 - (0,6 - 0,3x) \leq x - 0,1(4x + 5)$
c) $2(x - 1) - 3(2x + 1) > -x - \frac{1}{2}(6 - 4x)$
9. a) $x > -1$ b) $x \leq -\frac{1}{2}$ c) $x < 4$ d) $x \geq -3$ e) $x \geq -18$ f) $x < \frac{5}{7}$
10. a) 3, 4 b) 3, 4 c) -4, -3, -2, -1

6. a) $0 \leq 3(2n - 11) < 21$
 $5,5 \leq n < 9$
 $n \in \{6, 7, 8\}$
b) $4(3k + 7) > 2$
 $k > -2\frac{1}{6}$
 $k \in \{-2, -1\}$
c) $\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}(m - 2) < 3$
 $m < 14$
 $m \in \{0, 1, 2, \dots, 13\}$
7. a) $38 < 8 \cdot 3 + 4k < 46$
 $k \in \mathbb{N}_+$
 $3,5 < k < 5,5$
 $k \in \{4, 5\}$
b) $40 < 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3k < 68$
 $k \in \mathbb{N}_+$
 $1\frac{5}{6} < k < 4\frac{1}{6}$
 $k \in \{2, 3, 4\}$
8. a) Zdanie nie jest prawdziwe, np.:
 $-2 < -1$
oraz $(-2)^2 > (-1)^2$.
b) Zdanie nie jest prawdziwe, np.:
 $-2 < 1$
oraz $-\frac{1}{2} < 1$.

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

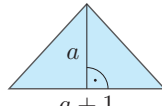
Odpowiedzi do zadań

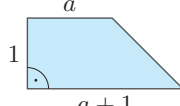
1. a) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$
 b) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$
 c) $-2x^4y + x^3y^2$
 d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$
 e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$
 f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$
2. A – III, B – IV, C – II, D – I

1. Wykonaj mnożenie.

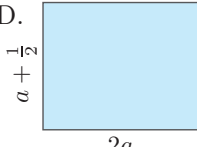
- a) $(3x^2 + 2x - 4)x^2$ d) $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$
 b) $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$ e) $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$
 c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$ f) $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A.  I. $2a^2 + a$

B.  II. $a^2 + a$

C.  III. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

D.  IV. $a + \frac{1}{2}$

3. a) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$
 b) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$
 c) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$
 d) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$
 e) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$
 f) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

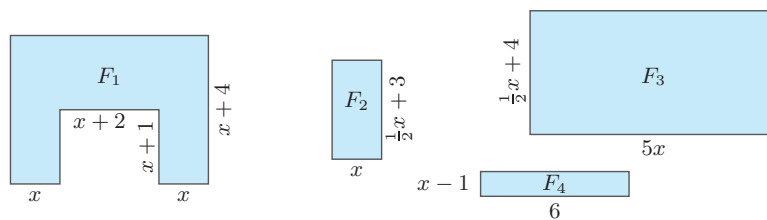
3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$
 b) $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2}x^2 - 4x)$
 c) $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$
 d) $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$
 e) $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$
 f) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

- ☒ 4. Uzasadnij, że wartość wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

- a) $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$
 b) $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

- ☒ 5. Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4 .



4. a) $4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 4x^4 + 6x^3 - 3x - 4x^2 + 3x + 32 = 32$
 b) $2\sqrt{45}x^3 - 6\sqrt{75}x^2 - \sqrt{150}x - 6\sqrt{5}x^3 + 6\sqrt{75}x^2 + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} =$
 $= 2\sqrt{9 \cdot 5}x^3 - 6\sqrt{5 \cdot 3}x^2 - \sqrt{25 \cdot 6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} =$
 $= 6\sqrt{5}x^3 - 6\sqrt{5}x^2 - 5\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = -\sqrt{6}$
5. $P_1 = x(x+4) + x(x+4) + (x+2)(x+4-x-1) = 2x^2 + 11x + 6$
 $P_2 = x(\frac{1}{2}x + 3) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$
 $P_3 = 5x(\frac{1}{2}x + 4) = \frac{5}{2}x^2 + 20x$
 $P_4 = 6(x-1) = 6x - 6$
 $P_1 + P_2 = 2x^2 + 11x + 6 + \frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$
 $P_3 - P_4 = \frac{5}{2}x^2 + 20x - 6x + 6 = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$
 Zatem $P_1 + P_2 = P_3 - P_4$, co należało udowodnić.

2.6. Wylączenie jednomianu przed nawias

Jeżeli w poszczególnych wyrazach sumy rozpozna się jednakowe czynniki i wylączy je przed nawias, łatwiej będzie wykonać obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wylączyamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
zwanej rozdzielnością mnożenia
względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$ | c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$ | e) $12 \cdot 228 + 12 \cdot 172$ |
| b) $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$ | d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$ | f) $19 \cdot 116 + 19 \cdot 84$ |

Również w sumach algebraicznych można wylączyć wspólny czynnik przed nawias.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wylączy przed nawias wspólny czynnik.

- Wylączyamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wylączyamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wylączyamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wylączyamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2(\frac{1}{2}x + 1)$

To, jaki czynnik wylączyliśmy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wylączenie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wylączy wspólny czynnik przed nawias.

- | | | | |
|--------------|--------------------|---------------------|-------------------|
| a) $5x + 5y$ | c) $9x - 27y^2$ | e) $39y^2 - 26z$ | g) $-48p + 36q^2$ |
| b) $4b - 8a$ | d) $-6x^2 + 18y^2$ | f) $-11a^3 + 22b^2$ | h) $75xy^3 - 125$ |

Ćwiczenie 2

- | | | | |
|----------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| a) $5(x + y)$ | c) $9(x - 3y^2)$ | e) $13(3y^2 - 2z)$ | g) $-12(4p - 3q^2)$ |
| b) $4(b - 2a)$ | d) $-6(x^2 - 3y^2)$ | f) $-11(a^3 - 2b^2)$ | h) $25(3xy^3 - 5)$ |

Uczeń:

- wylączy wskazany jednomian przed nawias,
- zapisuje wyrażenia algebraiczne w postaci iloczynu,
- stosuje metodę wylączenia jednomianu przed nawias do dowodzenia podzielności liczb.

Ćwiczenie 1

- a) $2 \cdot (183 + 17) = 400$
b) $9 \cdot (27 + 23) = 450$
c) $3 \cdot (251 + 249) = 1500$
d) $6 \cdot (378 + 222) = 3600$
e) $12 \cdot (228 + 172) = 4800$
f) $19 \cdot (116 + 84) = 3800$

Ćwiczenie 3

- a) $x(4x + y)$
- b) $2x(x^2 - 6y)$
- c) $xy(3 - z)$
- d) $6pq(1 + 3p)$
- e) $a^2b(1 + 3b - a)$
- f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$

Ćwiczenie 4

- a) $4x^2(2x - 9)$
- b) $7y^2(1 - 2y^2)$
- c) $5x^2(x + 2y)$
- d) $5a(4x - 3y)$
- e) $4b(2a + 3c)$
- f) $2xy(2 + 3x)$
- g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
- h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
- i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) 400 b) 4000 c) 5000
d) 3700 e) 1000 f) 300
- 2. a) $ab(a + b^2)$
b) $xy^2(x^2 - y)$
c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$
d) $4y^3(x^4y + 2z)$
e) $3a^2b(ab - 2)$
f) $2x^2y^3(3y + 4x)$
- 3. a) $xyz(x + y + z)$
b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$
- 4. a) $4y - 6$
b) $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$
c) $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$

Ćwiczenie 3

Wyłącz wskazany jednomian przed nawias.

- a) $4x^2 + xy$, x c) $3xy - xyz$, xy e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$, a^2b
- b) $2x^3 - 12xy$, $2x$ d) $6pq + 18p^2q$, $6pq$ f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$, x^2y^2

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a) $8x^3 - 36x^2$ d) $20ax - 15ay$ g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
- b) $7y^2 - 14y^4$ e) $8ab + 12bc$ h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
- c) $5x^3 + 10x^2y$ f) $4xy + 6x^2y$ i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

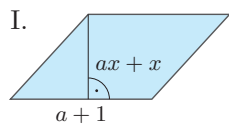
Zadania

- 1. Oblicz.
 - a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$ c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$ e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
 - b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$ d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$ f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$
- 2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.
 - a) $a^2b + ab^3$, ab c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2$, $3a^2$ e) $3a^3b^2 - 6a^2b$, $3a^2b$
 - b) $x^3y^2 - xy^3$, xy^2 d) $4x^4y^4 + 8y^3z$, $4y^3$ f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3$, $2x^2y^3$
- 3. Zapisz wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias podany jednomian.
 - a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$, xyz c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$
 - b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$, xyz^2 d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$, $3x^3y^2$
- 4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.
 - a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
 - b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
 - c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$
- 5. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $a + b = 15$.
 - a) $-3a - 3b$ b) $2(a + b) - 4a - 4b$ c) $a(a + b) + b(a + b)$
- 5. a) $-3(a + b) = -45$
b) $2(a + b) - 4(a + b) = -2(a + b) = -30$
c) $(a + b)(a + b) = 225$

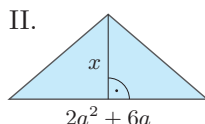
6. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $6x + 9y = 12$.

- a) $60x + 90y$ b) $12x + 18y$ c) $2x + 3y$ d) $x + \frac{3}{2}y$

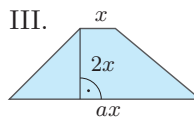
7. Dopasuj wyrażenie opisujące pole figury do odpowiedniej figury.



A. $ax(a+3)$



B. $x^2(a+1)$



C. $x(a+1)^2$

D 8. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

- a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,
b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,
c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech $n, n+1$ i $n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$$

Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n+1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

D 9. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

D 10. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przedstawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

Powtórzenie

11. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz zmienną x w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^3 - 6x^2 + 15x$ b) $18x^4 + 24x^3 - 12x^2$ c) $8x^5 - 16x^4 + 12x^6$

12. Wyłącz przed nawias czynnik $3x^2$ lub $2xy^2$.

- a) $9x^3 + 3x^2y^2$ c) $6x^2y^2 - 2xy^2$ e) $6x^3y^3 - 6x^4y^4 + 12xy^2$
b) $3x^4y^2 - 6x^2y$ d) $8xy^5 + 12x^2y^4$ f) $6x^4y^2 + 6x^3y^2 - 18x^4y$

13. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^4y^3 - 12y^5$ b) $8a^2b^2 + 4a^3b^4$ c) $8p^3q^3 + 4p^4q^4 - 6p^2q^3$

8. a) Niech $n, n+1, n+2, n+3$ i $n+4$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi.

$$S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 5 i liczby naturalnej $n+2$. Zatem S jest podzielna przez 5.

b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2x, 2x+2, 2x+4, x \in \mathbb{Z}$.

$$S = 2x + (2x+2) + (2x+4) = 6x+6 = 6(x+1)$$

Suma S jest iloczynem liczby 6 i liczby całkowitej $x+1$. Zatem S jest podzielna przez 6.

c) Rozważmy trzy kolejne liczby nieparzyste: $2x+1, 2x+3, 2x+5, x \in \mathbb{Z}$.

$$S = (2x+1) + (2x+3) + (2x+5) = 6x+9 = 3(2x+3)$$

Suma S jest iloczynem liczby 3 i liczby całkowitej $2x+3$. Zatem S jest podzielna przez 3.

6. a) $10(6x + 9y) = 120$

b) $2(6x + 9y) = 24$

c) $\frac{1}{3}(6x + 9y) = 4$

d) $\frac{1}{6}(6x + 9y) = 2$

7. I – C, II – A, III – B

9. Rozważmy dwie liczby podzielne przez 3: $3x$ i $3y$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Suma S kwadratów tych liczb:

$$S = (3x)^2 + (3y)^2 = 9x^2 + 9y^2 = 9(x^2 + y^2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 9 i liczby całkowitej $x^2 + y^2$.

10. Niech x i y będą kolejno liczbą jedności i dziesiątek dowolnej liczby dwucyfrowej.

Wówczas liczba ta ma postać: $10y + x$, a liczba powstała z przestawienia jej cyfr:

$$10x + y$$

Suma tych liczb:

$$(10y + x) + (10x + y) = 11y + 11x = 11(x + y)$$

czyli jest to liczba podzielna przez 11.

11. a) $3x(3x^2 - 2x + 5)$

b) $6x^2(3x^2 + 4x - 2)$

c) $4x^4(2x - 4 + 3x^2)$

12. a) $3x^2(3x + y^2)$

b) $3x^2(x^2y^2 - 2y)$

c) $2xy^2(3x - 1)$

d) $2xy^2(4y^3 + 6xy^2)$

e) $2xy^2(3x^2y - 3x^3y^2 + 6)$

f) $3x^2(2x^2y^2 + 2xy^2 - 6x^2y)$

13. a) $3y^3(3x^4 - 4y^2)$

b) $4a^2b^2(2 + ab^2)$

c) $2p^2q^3(4p + 2p^2q - 3)$

Uczeń:

- mnoży sumy algebraiczne,
- przekształca wyrażenia algebraiczne, uwzględniając kolejność wykonywania działań,
- wykonuje działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wykorzystuje wyrażenia algebraiczne do opisu zależności,
- dowodzi podzielności liczb,
- rozwiązuje równania i nierówności.

2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a + b$ i $c + d$, zatem jego pole jest równe $(a + b) \cdot (c + d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

c	ac	bc
d	ad	bd
	a	b

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x + 3)(x + 5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a + 4b)(a - b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x + 4)(x + 3)$

c) $(p + q)(q - 2p)$

e) $(a + 3b)(3a - 2b)$

b) $(p + 6)(p - q)$

d) $(3x + 1)(2x + 6)$

f) $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x - 3)(x^2 + x - 2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Ćwiczenie 1

a) $x^2 + 7x + 12$

b) $p^2 - pq + 6p - 6q$

c) $-2p^2 - pq + q^2$

d) $6x^2 + 20x + 6$

e) $3a^2 + 7ab - 6b^2$

f) $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a) $(x-1)(x^2+x-2)$ c) $(x+y-4)(x-y)$ e) $(x-y+2)(x+y-3)$
b) $(x+3)(2x^2-x+3)$ d) $(2x-y+6)(x+3y)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Przykład 3

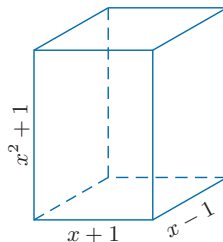
Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości krawędzi jego podstawy i wysokość:

$$V = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x^2+1) &= && \text{Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzy-} \\ &= (x^2-x+x-1)(x^2+1) = && \text{manym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= (x^2-1)(x^2+1) = && \text{Mnożymy dwie sumy i ponownie} \\ &= x^4+x^2-x^2-1 = x^4-1 && \text{redukujemy wyrazy podobne.}\end{aligned}$$

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = x^4 - 1$.



Ćwiczenie 2

- a) $x^3 - 3x + 2$
b) $2x^3 + 5x^2 + 9$
c) $x^2 - 4x + 4y - y^2$
d) $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$
e) $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$
f) $x^4 + x^2 + 1$

Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają podane długości. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $x+2$, $x-2$, x^2+2 b) $x-2$, x^2-1 , x^2+1

Przykład 4

- a) Oblicz $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

- b) Oblicz $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\ &= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$
b) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$ d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Ćwiczenie 3

- a) $V = (x+2)(x-2)(x^2+2) = x^4 - 2x^2 - 8$
b) $V = (x-2)(x^2-1)(x^2+1) = x^5 - 2x^4 - x + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $2\sqrt{2}-1$ c) $7-3\sqrt{6}$ e) $5+2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$
b) $11-5\sqrt{5}$ d) $16+7\sqrt{10}$ f) $-5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S :

$$\begin{aligned} S &= (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = && \text{Mnożymy sumy algebraiczne.} \\ &= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= 5n^2 - 15n + 10 = \\ &= 5(n^2 - 3n + 2) && \text{Wylączamy liczbę 5 przed nawias.} \end{aligned}$$

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

- a) $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,
- b) $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,
- c) $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x - 1)(x + 3) = x^2$.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 3) &= x^2 && \text{Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy } x^2 \\ x^2 + 3x - x - 3 &= x^2 && \text{na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.} \\ 2x - 3 &= 0 && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ 2x &= 3 && \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Rozwiąż nierówność $(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)(2x + 5) + x &\leq (4x - 1)(x + 3) \\ 4x^2 + 10x + 2x + 5 + x &\leq 4x^2 + 12x - x - 3 \\ 4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x &\leq -3 - 5 && \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem} \\ 2x &\leq -8 && \text{wyrażenia zawierające niewiadomą} \\ x &\leq -4 && \text{na lewą stronę nierówności,} \\ &&& \text{a liczby na prawą stronę.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż.

- a) $(x + 2)(x - 5) = x^2$
- d) $(x + 4)(x - 1) < x(x + 2) + 2x - 1$
- b) $(x + 3)(1 - 2x) + 2x^2 = 0$
- e) $(2x + 3)(3x - 1) + 4 > (6x - 2)(x + 1)$
- c) $3x^2 - (x + 1)(3x + 2) = 0$
- f) $(1 - x)(2x + 3) \leq -2(x + 1)(x - 2) - 2$

Ćwiczenie 6

- a) $x^2 - 3x - 10 = x^2$,
 $x = -\frac{10}{3}$
- b) $x - 2x^2 + 3 - 6x + 2x^2 = 0$,
 $x = \frac{3}{5}$
- c) $3x^2 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$,
 $x = -\frac{2}{5}$
- d) $x^2 + 3x - 4 < x^2 + 4x - 1$,
 $x > -3$
- e) $6x^2 + 7x - 3 + 4 > 6x^2 + 4x - 2$,
 $x > -1$
- f) $3 - 2x^2 - x \leq -2x^2 + 2x + 2$,
 $x \geq \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 5

- a) $2n^2 + 8n - 3n - 12 + n^2 + 2n - 3n - 6 - n = 3n^2 + 3n - 18 = 3(n^2 + n - 6)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 3.
- b) $6n^2 - 15n - 8n + 20 - 10n + 4n^2 + 5 - 2n = 10n^2 - 35n + 25 = 5(2n^2 - 7n + 5)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 5.
- c) $6n^2 + 24n - 3n - 12 - 6n^2 + 3n + 4n - 2 = 28n - 14 = 7(4n - 2)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 7.

Zadania

- Wykonaj mnożenie.
a) $(2a + b)(a - 1)$ c) $(-2a + b)(6a - 2)$ e) $(2a + b^2)(a - 2b)$
b) $(3a - 2b)(2b + 3)$ d) $(3 + 4a)(-2b - 1)$ f) $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$
 - Wykonaj mnożenie.
a) $(x + 2y + 3)(x - 2)$ c) $(x^2 + y)(x + y + 2)$ e) $2x(x - 2y)(3 + y)$
b) $(2x - y + 1)(2x - 3)$ d) $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$ f) $-4x(2x - y)(2x + y)$
 - Uprość wyrażenie.
a) $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$ c) $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$
b) $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$ d) $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$
 - Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = -0,5$.
a) $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$ b) $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$
 - Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a + 2$.
a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.
 - a) Dany jest kwadrat o boku długości $x + 3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?
b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a + 3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a + 4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy wysokość zwiększymy o 2?
c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x + 4$ i $2x + 3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.
 - Oblicz.
a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$
b) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$
- D** 8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.
- a) $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$
b) $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$

6. a) Pole kwadratu: $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$
Pole prostokąta: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$
Różnica pól: $3x + 7$
b) Pole trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 4) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{7}{2}a + 6$
Pole nowego trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 6) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{9}{2}a + 9$
Różnica pól: $a + 3$
c) Pole prostokąta: $(x + 4)(2x + 3) = 2x^2 + 11x + 12$

I przypadek:

Pole nowego prostokąta: $(x + 6)(2x + 4) = 2x^2 + 16x + 24$, różnica pól: $5x + 12$.

II przypadek:

Pole nowego prostokąta: $(x + 5)(2x + 5) = 2x^2 + 15x + 25$, różnica pól: $4x + 13$.

Pole zwiększy się o $5x + 12$ lub $4x + 13$.

Odpowiedzi do zadań

- a) $2a^2 - 2a + ab - b$
b) $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$
c) $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$
d) $-4a - 8ab - 6b - 3$
e) $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$
f) $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$
- a) $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$
b) $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$
c) $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$
d) $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$
e) $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$
f) $-16x^3 + 4xy^2$
- a) $2a^2 - 24$
b) $12ab + b^2$
c) $4y^2 - 4x^2 - 3xy$
d) $2x^2 + 15x$
- a) $x^2 - 4x - 12, -9,75$
b) $x^3 - x^2 - 6, -6,375$
- a) Pole prostokąta:
 $P = a(a + 2) = a^2 + 2a$
b) Pole kwadratu:
 $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$
Różnica pól:
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a = 1$
- a) -20 b) -6 c) -4 d) 10
- a) $12x^2 - 6x - 24x + 12 + -(12x^2 - 36x + 6x - 18) = 30 \geq 0$
b) $6x^2 - 3x - 4x + 2 + -(5x^2 - 5x - 2x + 2) = x^2 \geq 0$
dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$

9. a) $x = -10$ b) $x = 4$
c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{2}$

10. a) $x \geq \frac{3}{2}$ b) $x < -\frac{6}{5}$
c) $x \geq \frac{5}{8}$ d) $x < \frac{1}{2}$

11. a) 3 b) 10 c) 0

12. a) Pola prostokątów:

$$P_1 = (2x + 30)(x + 20) = 2x^2 + 70x + 600 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (2x + 10)(x + 10) = 2x^2 + 30x + 100 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_1 - P_2 = 40x + 500 = 900, \text{ czyli } x = 10 \text{ cm.}$$

Obwody prostokątów:

$$Ob_1 = 160 \text{ cm}$$

$$Ob_2 = 100 \text{ cm}$$

- b) Pola prostokątów:

$$P_1 = (6 - x)(2x - 5) = -2x^2 + 17x - 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (x + 5)(2x - 1) = 2x^2 + 9x - 5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Suma pól:

$$P_1 + P_2 = 26x - 35 = 69,$$

czyli $x = 4$ cm, stąd

$$P_1 = 6 \text{ cm}^2 \text{ oraz } P_2 = 63 \text{ cm}^2.$$

Różnica pól:

$$P_2 - P_1 = 63 - 6 = 57 \text{ [cm}^2\text{]}$$

9. Rozwiąż równanie.

a) $(x + 2)(x - 3) = x^2 + 4$

c) $(x - 2)(x - 5) = (x + 3)(x + 6)$

b) $(x - 4)(x + 6) = x(x - 4)$

d) $(2x + 1)(x + 3) = (x - 4)(2x - 3)$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - (x + 3)(x - 3) \leq 6x$

c) $(2x - 1)(3x - 1) - (3x - 2)(2x - 3) \geq 0$

b) $(4 - x)(2x + 3) + 2x^2 < 6$

d) $(4 - 6x)(2x + 1) + (4x - 5)(3x - 1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

a) $(3x + 1)(2 - x) + x(3x - 5) \geq x$

b) $2x^2 - (2x + 1)(x - 3) > 6x - 7$

c) $(3x + 3)(2x - 1) + 4x < 6(x + 2)(x - 1) + 9$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x + 30)$ cm $\times$ $(x + 20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x + 10)$ cm $\times$ $(x + 10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm^2 . Oblicz obwody tych prostokątów.

- b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6 - x)$ cm $\times$ $(2x - 5)$ cm oraz $(x + 5)$ cm $\times$ $(2x - 1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm^2 . Oblicz różnicę między polem większego i mniejszego prostokąta.

13. Dane są prostokąt o wymiarach $(4x + 1)$ cm $\times$ $(x + 3)$ cm oraz kwadrat o boku $(2x + 7)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm^2 większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

Powtórzenie

14. Uprość wyrażenie.

a) $(3k + 5)(4k - 2) + 2(5 - 7k)$

c) $(2k - l)(5k + l) - (4k + l)(k - l)$

b) $(3 - l)(4 - l) - (6 - l)(1 - l)$

d) $3k(8k - 2l) - (6k + l)(4k - l)$

15. Rozwiąż.

a) $(3x - 4)(2x - 1) = (6x + 2)(x - 1)$

b) $(9x + 1)(2x - 1) = (1 - 6x)(1 - 3x)$

c) $9x^2 - (3 - 4x)(3 - 2x) < x(x - 9)$

d) $(x + 1\frac{1}{2})(2x + 1) \geq (2x + \frac{1}{2})(x - 1) + 6x$

- D**16. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba postaci:

a) $(3n + 2)(1 - 2n) + (2 - 5n)(2n - 3) - 2n$ jest podzielna przez 4,

b) $(5n - 8)(4n + 1) - (2n - 5)(9n - 2) + n(4n + 2)$ jest podzielna przez 6.

13. Pole kwadratu: $P_k = (2x + 7)(2x + 7) = 4x^2 + 28x + 49 \text{ [cm}^2\text{]}$

Pole prostokąta: $P_p = (4x + 1)(x + 3) = 4x^2 + 13x + 3 \text{ [cm}^2\text{]}$

Różnica pól:

$$P_k - P_p = 15x + 46 = 91, \text{ czyli } x = 3 \text{ cm, stąd } Ob_k = 52 \text{ cm oraz } Ob_p = 38 \text{ cm.}$$

$$\text{Różnica obwodów: } Ob_k - Ob_p = 52 - 38 = 14 \text{ [cm]}$$

14. a) $12k^2$ b) 6 c) $6k^2$ d) $l^2 - 4kl$

15. a) $x = \frac{6}{7}$ b) $x = 1$ c) $x < \frac{1}{3}$ d) $x \leq 4$

16. a) $(3n + 2)(1 - 2n) + (2 - 5n)(2n - 3) - 2n = -16n^2 + 16n - 4 = 4(-4n^2 + 4n - 1)$

b) $(5n - 8)(4n + 1) - (2n - 5)(9n - 2) + n(4n + 2) = 6n^2 + 24n - 18 = 6(n^2 + 4n - 3)$

2.8. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$

Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

Przykład 1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (x + 5)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25 \\ \text{b)} \quad (3x + 2)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4 \\ \text{c)} \quad (2x - 3y)^2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (x + 1)^2 & \quad \text{c)} \quad (x - 3)^2 & \quad \text{e)} \quad (2x + 1)^2 & \quad \text{g)} \quad (4x - 1)^2 \\ \text{b)} \quad (x + 2)^2 & \quad \text{d)} \quad (x - 5)^2 & \quad \text{f)} \quad \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 & \quad \text{h)} \quad \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (x + 2y)^2 & \quad \text{d)} \quad \left(3x + \frac{1}{2}y\right)^2 \\ \text{b)} \quad (2x - y)^2 & \quad \text{e)} \quad \left(2x - \frac{1}{4}y\right)^2 \\ \text{c)} \quad (3x + 2y)^2 & \quad \text{f)} \quad \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2 \end{aligned}$$

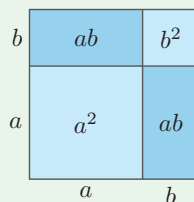
Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (\sqrt{7} + 1)^2 & \quad \text{d)} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \\ \text{b)} \quad (\sqrt{5} - 3)^2 & \quad \text{e)} \quad (\sqrt{6} + \sqrt{15})^2 \\ \text{c)} \quad (6 - \sqrt{3})^2 & \quad \text{f)} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}\right)^2 \end{aligned}$$

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Uczeń:

- stosuje odpowiedni wzór skróconego mnożenia do wyznaczania kwadratu sumy lub różnicy oraz różnicy kwadratów,
- przekształca wyrażenie algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wyprowadza wzory skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia własności liczb.

Komentarz

Uczniowie czasami popełniają błąd, zapominając o podwojonym iloczynie we wzorze na kwadrat sumy lub różnicy. Należy zwrócić uwagę na to, że $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ jedynie wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + 2x + 1 & \\ \text{b)} \quad x^2 + 4x + 4 & \\ \text{c)} \quad x^2 - 6x + 9 & \\ \text{d)} \quad x^2 - 10x + 25 & \\ \text{e)} \quad 4x^2 + 4x + 1 & \\ \text{f)} \quad \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 & \\ \text{g)} \quad 16x^2 - 8x + 1 & \\ \text{h)} \quad 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} & \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + 4xy + 4y^2 & \\ \text{b)} \quad 4x^2 - 4xy + y^2 & \\ \text{c)} \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2 & \\ \text{d)} \quad 9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2 & \\ \text{e)} \quad 4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2 & \\ \text{f)} \quad \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2 & \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 8 + 2\sqrt{7} & \\ \text{b)} \quad 14 - 6\sqrt{5} & \\ \text{c)} \quad 39 - 12\sqrt{3} & \\ \text{d)} \quad 5 + 2\sqrt{6} & \\ \text{e)} \quad 21 + 6\sqrt{10} & \\ \text{f)} \quad 6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3} & \end{aligned}$$

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dlaanuczyciela.pl | Kartkówka 2.8

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 5

$$(a-b)(a+b) = \\ = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Komentarz

Należy zwrócić uczniom uwagę na to, że:

$$(x+y)(y-x) \neq x^2 - y^2$$

Ćwiczenie 6

- a) $x^2 - 9$
b) $x^2 - 49$
c) $4x^2 - 16$
d) $25x^2 - 36$
e) $9x^2 - 16y^2$
f) $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$

Ćwiczenie 7

- a) 18 b) -4
c) $-\frac{25}{18}$ d) -1
e) -1 f) 4,5

Odpowiedzi do zadań

1. a) -5 b) -2
c) $-5y^2 - 12y + 13$
d) $-50y^2 - 10y$
e) $13x^2 - 5y^2$
f) $8x^2 + 24y^2$
2. a) $x^2 + 4$; 7
b) $3x^2 + 1$; 16
c) $-4x^2 - 8x + 1$; $-7 - 8\sqrt{2}$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

różnica kwadratów

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 2

- a) $(\boxed{x} - \boxed{6})(\boxed{x} + \boxed{6}) = \boxed{x}^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$
b) $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x-3)(x+3)$ c) $(2x-4)(2x+4)$ e) $(3x-4y)(3x+4y)$
b) $(x+7)(x-7)$ d) $(6+5x)(5x-6)$ f) $(\frac{1}{2}x+3y)(3y-\frac{1}{2}x)$

Przykład 3

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) \approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = \\ = 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46$$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

- a) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$ c) $(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2})(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2})$ e) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
b) $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$ d) $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2})(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2})$

Zadania

1. Uprość wyrażenie:

- a) $(x-3)(x+3) + (2+x)(2-x)$, d) $(5y+1)(1-5y) - (1+5y)^2$,
b) $(x+\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2}) - (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$, e) $(2x-y)(2x+y) + (3x+2y)(3x-2y)$,
c) $(2y-3)^2 - (3y-2)(3y+2)$, f) $(y+3x)(3x-y) - (x-5y)(x+5y)$.

2. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x+1)(x-1) + (x+2)(x-2) - (x+3)(x-3)$ dla $x = \sqrt{3}$,
b) $(1-2x)(1+2x) + (1-3x)(1+3x) - (1-4x)(4x+1)$ dla $x = \sqrt{5}$,
c) $(2x-1)^2 - (2x-1)(1+2x) - (2x+1)^2$ dla $x = \sqrt{2}$.

3. Oblicz.
- a) $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ d) $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5})$
 b) $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$
 c) $(2\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2 - (2\sqrt{3} + \frac{3}{2})^2$ f) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 - (2\sqrt{5} + 1)(1 - 2\sqrt{5})$
4. Oblicz.
- a) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ c) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$
 b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ d) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a .
- a) $a = 3 + \sqrt{2}$ b) $a = 2\sqrt{3} - 1$ c) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .
- a) $a = 4 - \sqrt{2}$, $b = 4 + \sqrt{2}$ b) $a = 8 + \sqrt{2}$, $b = 4 - 2\sqrt{2}$
7. Oblicz wartość wyrażenia:
- a) $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2$ dla $x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}$, $y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}$,
 b) $(\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2$ dla $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.
 c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y)$ dla $x = \sqrt{5} - 4$, $y = \sqrt{6}$,
 d) $(x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2$ dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.
- D** 8. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:
- a) $(n + 1)^2 - n^2$ jest nieparzysta, c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2$ jest parzysta,
 b) $(2n + 1)^2$ jest nieparzysta, d) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Powtórzenie

9. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
- a) $(7 - x)^2$ c) $(2x + 4)^2$ e) $(\frac{1}{4}x + 8)^2$ g) $(0,5x + 0,4)^2$
 b) $(x + \frac{1}{2})^2$ d) $(3x + 8)^2$ f) $(\frac{2}{3}x - 6)^2$ h) $(0,1x - 2,5)^2$
10. Oblicz.
- a) $(3 + \sqrt{2})^2$ c) $(4 - 3\sqrt{2})^2$ e) $(2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ g) $(\sqrt{8} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$
 b) $(1 - \sqrt{5})^2$ d) $(2\sqrt{7} + 3)^2$ f) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$ h) $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3})^2$
11. Oblicz.
- a) $(\sqrt{7} - 1)(1 + \sqrt{7})$ b) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$ c) $(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})$
10. a) $11 + 6\sqrt{2}$ b) $6 - 2\sqrt{5}$ c) $34 - 24\sqrt{2}$ d) $37 + 12\sqrt{7}$
 e) $23 + 4\sqrt{15}$ f) $18 - 12\sqrt{2}$ g) $4,5$ h) $3,5 + \sqrt{6}$
11. a) 6 b) 6 c) -4

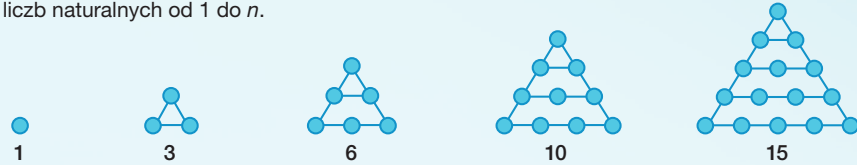
3. a) 6 b) $-3 + 2\sqrt{3}$
 c) $-12\sqrt{3}$ d) 10
 e) $12 - 2\sqrt{30}$
 f) $49 - 20\sqrt{2}$
4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2
5. a) $66 + 36\sqrt{2}$
 b) $78 - 24\sqrt{3}$
 c) $48 + 24\sqrt{3}$
6. a) 14 b) $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$
7. a) $-18y^2 + 12xy$;
 $-18\sqrt{10} - 42$
 b) $2(x + y)(x - y)$; $16\sqrt{3}$
 c) $96 - 12\sqrt{5}$ d) 0
8. Niech $n \in \mathbb{N}$.
- a) $(n + 1)^2 - n^2 =$
 $= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
 - liczba tej postaci jest nieparzysta.
 b) Iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
 c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2 =$
 $= n^2 + n + \frac{1}{4} - n^2 + n - \frac{1}{4} =$
 $= 2n$ - liczba tej postaci jest parzysta.
 d) $n^3 - n = n(n^2 - 1) =$
 $= n(n - 1)(n + 1) =$
 $= (n - 1)n(n + 1)$
 Otrzymaliśmy iloczyn kolejnych trzech liczb naturalnych, zatem dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. To z kolei oznacza, że cały iloczyn jest podzielny przez 6.
9. a) $49 - 14x + x^2$ b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
 c) $4x^2 + 16x + 16$
 d) $9x^2 + 48x + 64$
 e) $\frac{1}{16}x^2 + 4x + 64$
 f) $\frac{4}{9}x^2 - 8x + 36$
 g) $0,25x^2 + 0,4x + 0,16$
 h) $0,01x^2 - 0,5x + 6,25$

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

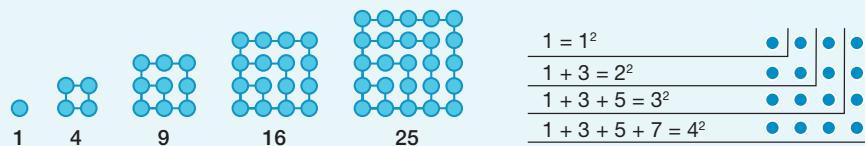
Liczby trójkątne

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n .



Wzór na n -tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

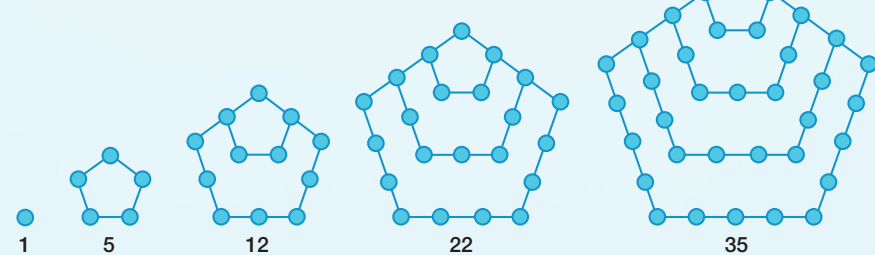
Liczby kwadratowe



1 Zauważ, że n -ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?

2 Wykaż, że dla $n > 1$ n -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne



3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.

4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

n -ta liczba r -kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2 \text{ – jest to liczba kwadratowa}$$

Twierdzenie Diofantosa

Jeżeli liczbę trójkątną pomnożymy przez osiem i powiększymy o jeden, to otrzymamy liczbę kwadratową.

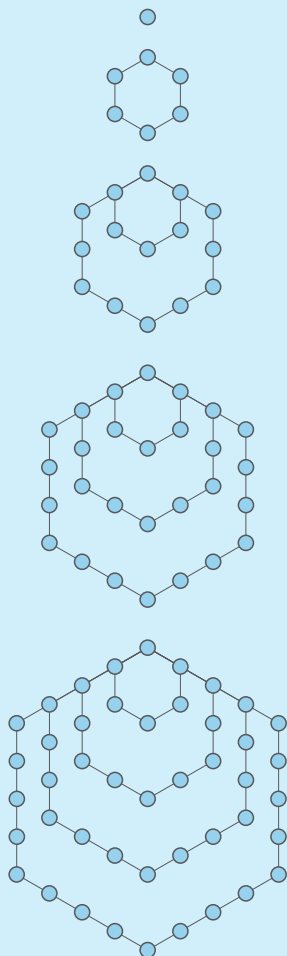
Dowód

Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) \cdot 8 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

– jest to liczba kwadratowa

1. 400
3. 51
4. 1, 6, 15, 28, 45



2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$\frac{5}{\sqrt{2}-1} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2} + 5$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$ c) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład.
Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - (2 - x)^2 = 8$
b) $(3x + 1)^2 - 9x^2 = 7$
c) $(x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) = 12$

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned}(x - 4)(x + 4) - (x - 3)^2 &= 17 \\ x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) &= 17 \\ x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 &= 17 \\ 6x - 25 &= 17 \\ 6x &= 42 \\ x &= 7\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 - (2x + 1)^2 < 3$ c) $(2x + 1)(2x - 1) > 4x^2 - 9x$
b) $(3 - x)^2 \geq x^2 + 12$ d) $2 - (2x - 1)^2 \leq (3 - 2x)(2x + 3)$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie $x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartość równą 0?

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, więc:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy:
„wtedy i tylko wtedy, gdy”.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 8x + 16$ c) $4x^2 - 4x + 1$ e) $4x^2 + 12x + 9$
b) $x^2 - 6x + 9$ d) $25x^2 + 10x + 1$ f) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

a) $(x + 4)^2 = 0$ dla $x = -4$
b) $(x - 3)^2 = 0$ dla $x = 3$
c) $(2x - 1)^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$
d) $(5x + 1)^2 = 0$ dla $x = -\frac{1}{5}$
e) $(2x + 3)^2 = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$
f) $(3x - \frac{1}{2})^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{6}$

Uczeń:

- stosuje przekształcenia algebraiczne do rozwiązywania równań oraz nierówności,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{6-\sqrt{2}}{34}$
b) $\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$
c) $-4 - 3\sqrt{2}$
d) $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$

Ćwiczenie 2

a) $x = 3$
b) $x = 1$
c) $x = 5$

Ćwiczenie 3

a) $x > -1$
b) $x \leq -\frac{1}{2}$
c) $x > \frac{1}{9}$
d) $x \leq 2$

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Równanie, które nie jest spełnione przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **równaniem sprzecznym**. Podobnie taką nierówność nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 = 6x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 6x \\x^2 &= -9\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest spreczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x - 1)^2 < 4x(x - 1)$.

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\1 &< 0\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest spreczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Równanie lub nierówność spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą nazywamy **równaniem tożsamościowym** (krótko: **tożsamością**) lub **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - (x - 3)^2 &= 12x \\x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\12x &= 12x\end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x - 2)(x + 2) + 5 > 0$.

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) + 5 &> 0 \\x^2 - 4 + 5 &> 0 \\x^2 &> -1\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest większy od liczby ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub spreczne.

a) $(6 - x)^2 - (2 - x)^2 = -8x$ b) $(x - 4)^2 + 4x = (x - 2)^2 + 12$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub spreczna.

a) $(x + 1)^2 - 2 \leq (x - 1)(1 + x) + 2x$ b) $6x - (3x - 1)^2 \geq (2x + 3)^2$

Ćwiczenie 5

a) $36 - 12x + x^2 - 4 + 4x - x^2 = -8x$
 $32 = 0$

Równanie jest spreczne.

b) $x^2 - 8x + 16 + 4x = x^2 - 4x + 4 + 12$
 $0 = 0$

Równanie jest tożsamościowe.

Ćwiczenie 6

a) $x^2 + 2x + 1 - 2 \leq x^2 - 1 + 2x$
 $0 \leq 0$

Nierówność jest tożsamościowa.

b) $6x - 9x^2 + 6x - 1 \geq 4x^2 + 12x + 9$
 $-13x^2 \geq 10$
 $x^2 \leq -\frac{10}{13}$

Nierówność jest spreczna.

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0; 4)$?

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ d) $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ e) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}$ h) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$
c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$ f) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$ i) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ l) $\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $(x-5)(x+5) = x^2 - 100x$ d) $4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10$
b) $(3-x)^2 - (x+\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$ e) $(6+\frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x+6) + (\frac{1}{3}x-4)^2 = 4$
c) $4(\frac{1}{2}x-3)^2 = (6-x)^2$ f) $(-4x-3)(4x-3) + 8(1-\sqrt{2}x)^2 = 1$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geq 2$ c) $-9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leq 11$
b) $9(\frac{2}{3}x-1)^2 > (1-2x)^2 - 8x$ d) $(\frac{1}{4}x+2)^2 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}x)(1+\frac{1}{2}x) \geq 0$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leq (5-2x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geq x-6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases}$

Powtórzenie

5. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$

6. Rozwiąż równanie.

a) $(x-1)^2 - (x+2)^2 = 6$ c) $x^2 - (x-4)(4+x) = 2$
b) $(3-x)^2 + (2x+1)^2 = 5x^2$ d) $(\frac{x}{2}+3)(\frac{x}{2}-3) = (\frac{x}{2}-1)^2$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $(x+3)^2 - (x+2)^2 \leq 0$ c) $9x^2 + (2+3x)(2-3x) \geq 6x$
b) $(4-x)^2 + (2+x)^2 > 2x^2$ d) $(\frac{3}{2}x-4)(\frac{3}{2}x+4) < (\frac{3}{2}x-1)^2$

5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2 + \sqrt{3}$ c) $4 + 2\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ e) $7 + 4\sqrt{3}$

6. a) $x = -\frac{3}{2}$ b) $x = 5$ c) sprzeczne d) $x = 10$

7. a) $x \leq -\frac{5}{2}$ b) $x < 5$ c) $x \leq \frac{2}{3}$ d) $x < \frac{17}{3}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak
b) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
c) $3\sqrt{5}-6$, tak
d) $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$, nie
e) $4\sqrt{3}-6$, tak
f) $12\sqrt{2}+16$, nie
g) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, nie
h) $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$, tak
i) $2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$, nie
j) $\sqrt{6}-2$, tak
k) $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$, nie
l) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak
2. a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = 1,3$ c) $x \in \mathbf{R}$
d) równanie sprzeczne
e) $x = 18$ f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. a) $x \leq \frac{9}{4}$ b) $x \in \mathbf{R}$
c) $x \leq \frac{4}{3}$ d) $x \geq -\frac{17}{4}$
4. a) $(0; \frac{3}{2})$ b) $(-5; 2)$
c) $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$ d) $(\frac{3}{2}; 5)$

Odpowiedzi do zadań

$$\begin{aligned}
1. \text{ a) } 19^{16} - 9^{16} &= \\
&= (19^8 - 9^8)(19^8 + 9^8) = \\
&= (19^4 - 9^4)(19^4 + 9^4) \cdot \\
&\quad \cdot (19^8 + 9^8) = \\
&= (19^2 - 9^2)(19^2 + 9^2) \cdot \\
&\quad \cdot (19^4 + 9^4)(19^8 + 9^8) = \\
&= (361 - 81)(19^2 + 9^2) \cdot \\
&\quad \cdot (19^4 + 9^4)(19^8 + 9^8) = \\
&= 280(19^2 + 9^2)(19^4 + 9^4) \cdot \\
&\quad \cdot (19^8 + 9^8)
\end{aligned}$$

Zatem liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.

$$\begin{aligned}
\text{b) } 11^{32} - 7^{32} &= \\
&= (11^{16} - 7^{16})(11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (11^8 - 7^8)(11^8 + 7^8) \cdot \\
&\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (11^4 - 7^4)(11^4 + 7^4) \cdot \\
&\quad \cdot (11^8 + 7^8)(11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (11^2 - 7^2)(11^2 + 7^2) \cdot \\
&\quad \cdot (11^4 + 7^4)(11^8 + 7^8) \cdot \\
&\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
&= (121 - 49)(11^2 + 7^2) \cdot \\
&\quad \cdot (11^4 + 7^4)(11^8 + 7^8) \cdot \\
&\quad \cdot (11^{16} + 7^{16}) = \\
&= 72(11^2 + 7^2)(11^4 + 7^4) \cdot \\
&\quad \cdot (11^8 + 7^8)(11^{16} + 7^{16})
\end{aligned}$$

Zatem liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

$$\begin{aligned}
2. \text{ a) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \\
\frac{2ab}{a+b} &\leq \frac{a+b}{2} / \cdot 2(a+b) > 0 \\
4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
0 &\leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{2ab}{a+b} \\
\frac{2ab}{a+b} &\leq \sqrt{ab} \\
2\sqrt{ab} &\leq a+b
\end{aligned}$$

Obie strony nierówności podnosimy do kwadratu:

$$\begin{aligned}
4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
0 &\leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb $a, b > 0$, zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach

Przykład 1

Uzasadnij, że liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

$$\begin{aligned}
13^8 - 7^8 &= (13^4 - 7^4)(13^4 + 7^4) = \\
&= (13^2 - 7^2)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\
&= (169 - 49)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\
&= 120(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4)
\end{aligned}$$

Zatem liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

- D** 1. a) Uzasadnij, że liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.
b) Uzasadnij, że liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

Przykład 2

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Jeśli $a + b < 0$, to nierówność jest prawdziwa (dlaczego?).

Zakładamy teraz, że $a + b \geq 0$. Obie strony nierówności są wówczas nieujemne, możemy więc podnieść je do kwadratu, nie zmieniając zwrotu nierówności.

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} / \cdot 4 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.} \\
a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\
0 &\leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

- D** 2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi nierówność:
a) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$, b) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Przykład 3

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 \geq 0$$

Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 &= x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = (x-y)^2 + (x-1)^2 \\
(x-y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-1)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
\end{aligned}$$

- D** 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:
* a) $y^2 + 2x^2 - 2xy - 6x + 9 \geq 0$, b) $5x^2 + y^2 + 4 \geq 4xy + 4x$.

3. a) Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
y^2 - 2xy + x^2 + x^2 - 6x + 9 &= (y-x)^2 + (x-3)^2 \\
(y-x)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-3)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
\end{aligned}$$

b) Przekształcamy nierówność do postaci:

$$5x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 &= (2x-y)^2 + (x-2)^2 \\
(2x-y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x-2)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.}
\end{aligned}$$

2.10. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass w 1841 roku.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Uczeń:

- oblicza wartość bezwzględną danej liczby,
- upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną,
- rozwiązuje elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną.

Przykład 1

a) $|3,5| = 3,5$ b) $|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$ c) $|0| = 0$ d) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Przykład 2

a) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, gdyż $\sqrt{5} - 2 > 0$

b) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, gdyż $1 - \sqrt{2} < 0$

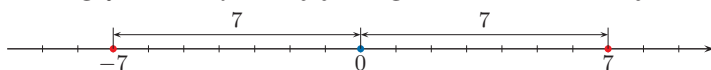
Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

a) 5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

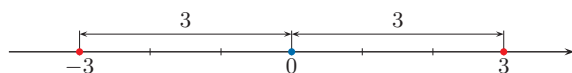
Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3 .



Ćwiczenie 1

- a) 5
b) 5
c) $\sqrt{3} - 1$
d) $3 - \sqrt{3}$
e) $3\sqrt{2} - 4$
f) $5 - 2\sqrt{5}$

Ćwiczenie 2

- a) $x = -2$ lub $x = 2$
b) $x = -10$ lub $x = 10$
c) $x = 0$
d) brak rozwiązań

Ćwiczenie 3

- a) x b) y c) x

Ćwiczenie 4

- a) $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$
b) $|4 - 2\sqrt{3}| = 4 - 2\sqrt{3}$
c) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie:

- a) $|x| = 2$, b) $|x| = 10$, c) $|x| = 0$, d) $|x| = -3$.

Ćwiczenie 3

Która z liczb x , y ma większą wartość bezwzględną?

- a) $x = 7$, $y = -6$ b) $x = -10$, $y = -12$ c) $x = -8$, $y = 0$

Przypomnijmy, że:

- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ dla $a < 0$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 4

- a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

- b) Rozwiąż nierówność $|x| \geq 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona dla $x \leq -2$ oraz dla $x \geq 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a) $|x| < 8$ b) $|x| \leq 4$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

- a) $x \in (-8; 8)$
b) $x \in \langle -4; 4 \rangle$
c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| \geq 0$ b) $|x| \leq 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $|2\frac{1}{2}| + |-2\frac{1}{2}|$ c) $|-0,5| + |-0,25| - |0,75|$ e) $1 + |1 - \sqrt{2}|$
b) $|7\frac{1}{4}| - |-7\frac{1}{4}|$ d) $2|-\frac{3}{4}| - 3|\frac{1}{8}| + 4|-\frac{5}{16}|$ f) $\sqrt{3} - |2 - \sqrt{3}|$

2. Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.

- a) $x = 5$ b) $x = -3$ c) $x = 2 - \sqrt{6}$ d) $x = 3\sqrt{2} - 4$

3. Wyznacz liczby spełniające równanie.

- a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$
b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

4. Która nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a która nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej?

- a) $|x| > -7$, $|x| < -7$ b) $|x| \geq -3$, $|x| \leq -3$

5. Które spośród liczb: -3 , 3 , $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, spełniają warunek:

- a) $|x| < 3$, b) $|x| < 2$, c) $|x| \geq 1$, d) $|x| \geq 3$?

6. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów zbiór liczb x , które spełniają obie nierówności:

- a) $|x| \leq 3$ i $|x| \geq 1$, b) $|x| < 5$ i $|x| > 2$, c) $|x| \leq 4$ i $|x| > 3\frac{1}{2}$.

Powtórzenie

7. Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$ c) $\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $3|x| = 2$ b) $-\frac{3}{2}|x| = -6$ c) $\frac{1}{4}|x| - \frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$ d) $|x| + 2 = 1, (9)$

9. Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów.

- a) $1 < |x| < 4$ b) $2 \leq |x| \leq 5$ c) $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$ d) $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$

9. a) $(-4; -1) \cup (1; 4)$
b) $(-5; -2) \cup (2; 5)$
c) $(-3; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 3)$
d) $(-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \frac{9}{2})$

Ćwiczenie 6

a) $x \in \mathbf{R}$ b) $x = 0$

c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ d) sprzeczna

Odpowiedzi do zadań

1. a) 5 b) 0 c) 0 d) $\frac{19}{8}$

e) $\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{3} - 2$

2. a) $x + |x| = 10$, $x - 2|x| = -5$

b) $x + |x| = 0$, $x - 2|x| = -9$

c) $x + |x| = 0$,

$x - 2|x| = 6 - 3\sqrt{6}$

d) $x + |x| = 6\sqrt{2} - 8$,

$x - 2|x| = 4 - 3\sqrt{2}$

3. a) $x = -4$, $x = 4$

b) $x = -14$, $x = 14$

c) $x = -6$, $x = 6$

d) $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$

e) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$

f) $x = -8$, $x = 8$

g) $x = -1$, $x = 1$

h) $x = -4$, $x = 4$

4. a) $|x| > -7$ dla $x \in \mathbf{R}$,

$|x| < -7$ dla $x \in \emptyset$

b) $|x| \geq -3$ dla $x \in \mathbf{R}$,

$|x| \leq -3$ dla $x \in \emptyset$

5. a) $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$

b) $1 - \sqrt{2}$

c) -3 , $1 + \sqrt{2}$, 3

d) -3 , 3

6. a) $\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$

b) $(-5; -2) \cup (2; 5)$

c) $\langle -4; -3\frac{1}{2} \rangle \cup (3\frac{1}{2}; 4)$

7. a) $|\sqrt{7} - 3| = 3 - \sqrt{7}$

b) $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$

c) $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$

8. a) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$

b) $x = -4$, $x = 4$

c) $x = -13$, $x = 13$

d) $x = 0$

Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach

Przykład 1

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} = |2 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbf{Z}$.

Przykład 2

Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ próbujemy zapisać jako kwadrat różnicy:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(1 - 3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3,$$

czyli dana liczba jest całkowita.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy kwadrat liczby a :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$, czyli:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2, \\ &\text{co oznacza, że } a \text{ jest liczbą wymierną.} \end{aligned}$$

D 1. Wykaż, że:

- a) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 5$, c) $3\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} = 10$,
b) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 1$, d) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

Odpowiedzi do zadań

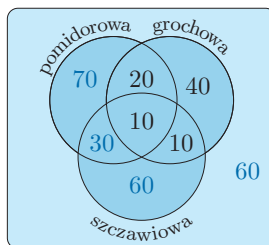
1. a) $\sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4} + \sqrt{3 - 6\sqrt{3} + 9} = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} =$
 $= |\sqrt{3} + 2| + |\sqrt{3} - 3| = \sqrt{3} + 2 + 3 - \sqrt{3} = 5$
 b) $\sqrt{1 - 2\sqrt{5} + 5} - \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} =$
 $= |1 - \sqrt{5}| - |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1 - (\sqrt{5} - 2) = 1$
 c) $3\sqrt{9 + 6\sqrt{2} + 2} - \sqrt{18 - 6\sqrt{2} + 1} = 3\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3\sqrt{2} - 1)^2} =$
 $= 3|3 + \sqrt{2}| - |3\sqrt{2} - 1| = 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = 10$
 d) $\sqrt{3 + 2\sqrt{6} + 2} + \sqrt{3 - 2\sqrt{6} + 2} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} =$
 $= |\sqrt{3} + \sqrt{2}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

2.11. Zagadnienia uzupełniające

■ Działania na zbiorach

- Wyznacz zbiory: $(A \cup B) \setminus C$, $(A \cup C) \setminus B$, $(A \cap B) \setminus C$, $(A \cap C) \setminus B$, gdy:
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 6\}$,
 - $A = \langle -4; 0 \rangle$, $B = \langle -1; 3 \rangle$, $C = \langle 2; \infty \rangle$.
- Dla zawodników szkolnej drużyny piłki nożnej przygotowano koszulki z numerami od 1 do 11. Niech: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ilu uczniów otrzyma koszulki z numerami należącymi do zbioru:
 - $(A \setminus C) \cup B$,
 - $(A \cap C) \cup (B \setminus C)$,
 - $C \setminus (A \cup B)$?
- Niech A_2 , A_3 i A_5 będą zbiorami liczb dwucyfrowych podzielnych odpowiednio przez 2, 3 i 5. Ile elementów należy do zbioru:
 - $(A_2 \cup A_3 \cup A_5) \setminus (A_2 \cap A_3 \cap A_5)$,
 - $(A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_5)$?
- W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiowa i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprowadzono ankietę, której wyniki podano poniżej.

130 uczniów lubi zupę pomidorową,
110 uczniów lubi zupę szczawiową,
80 uczniów lubi zupę grochową,
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



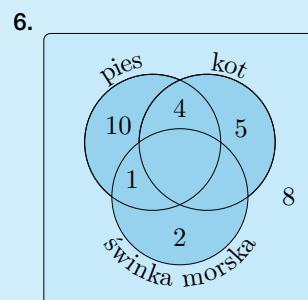
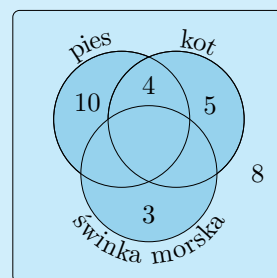
Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram, a następnie podaj, ilu uczniów:

- nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,
 - lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę.
- W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morskie, a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świnki morskie nie mają innych zwierząt. Ilu uczniów ma jednocześnie psa i kota?
 - Jeden z uczniów z poprzedniego zadania mający świnkę morską dostał na urodziny psa. Jaki procent uczniów w klasie nie ma teraz ani psa, ani kota?

- $(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$ jest zbiorem wszystkich liczb dwucyfrowych z wykluczeniem liczb: $\{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97\}$, czyli jest ich $90 - 24 = 66$.
 $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = \{30, 60, 90\}$
Ostatecznie zbiór zawiera $66 - 3 = 63$ elementy.
 - $(A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_5) = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \cup \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\} \cup \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} = \{10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 66, 70, 72, 75, 78, 80, 84, 90, 96\}$, czyli zbiór zawiera 24 elementy.

Odpowiedzi do zadań

- $(A \cup B) \setminus C = \{1, 3, 5\}$,
 $(A \cup C) \setminus B = \{1, 2\}$,
 $(A \cap B) \setminus C = \{3\}$,
 $(A \cap C) \setminus B = \{2\}$
 - $(A \cup B) \setminus C = \langle -4; 2 \rangle$,
 $(A \cup C) \setminus B = \langle -4; -1 \rangle \cup (3; \infty)$,
 $(A \cap B) \setminus C = \langle -1; 0 \rangle$,
 $(A \cap C) \setminus B = \emptyset$
- $(A \setminus C) \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$
– 7 uczniów
 - $(A \cap C) \cup (B \setminus C) = \{2, 3, 5, 6, 8, 10\}$
– 6 uczniów
 - $C \setminus (A \cup B) = \{1\}$ – 1 uczeń
- a) 60 b) 170
- Czterech uczniów ma psa i kota.



Dziesięciu uczniów nie ma ani psa, ani kota, co stanowi $33\frac{1}{3}\%$ wszystkich uczniów.

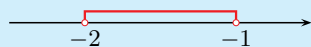


Zestawy powtórzeniowe

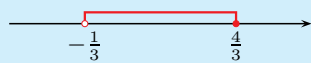
Zestaw I

Odpowiedzi do zadań

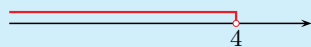
1. a) $(-2; -1)$



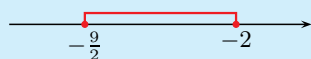
b) $(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$



c) $(-\infty; 4)$



d) $(-\frac{9}{2}; -2)$



2. a) $x \leq 3\frac{1}{3}$ b) $x > -1$

c) $x > -5$ d) $x < \frac{1}{3}$

e) $x \leq 5$ f) $x < 6$

3. a) $2x^2 + 6x + 5$

b) $2x^2 + 2x + 13$

c) $-16x$ d) $-4x + 8$

e) $8x^2 - 16x + 10$

f) $-5x^2 + 10x$

4. a) $2x^2 - 29$ b) 15

c) $5x^2 + 9$ d) -6

5. a) $2 - 2x; -2\sqrt{3}$

b) $12x - 12; 12\sqrt{3}$

6. a) 22 b) $8\sqrt{3}$

c) $6 - 8\sqrt{3}$ d) 26

7. a) $2 + 2\sqrt{3}$ b) $4 + 2\sqrt{3}$

c) $-2 - \sqrt{3}$ d) $3 - \sqrt{3}$

8. a) -1 b) $-9 + 4\sqrt{5}$ c) 18

9. a) $(x+5)^2, x = -5$

b) $(x-8)^2, x = 8$

c) $(3x-1)^2, x = \frac{1}{3}$

d) $(4x+1)^2, x = -\frac{1}{4}$

e) $(3x+2)^2, x = -\frac{2}{3}$

f) $(\frac{1}{2}x+1)^2, x = -2$

1. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako przedział zbiór liczb jednocześnie spełniających obie nierówności.

a) $3x + 14 > 8$ i $5 < 1 - 4x$

c) $4x + 3 < 19$ i $21 - 2x \geq 7$

b) $3x + 2 > 1$ i $3x \leq 4$

d) $2x + 7 \geq -2$ i $-4x \geq 3x + 14$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{4}x \leq \frac{5}{2}$

c) $\frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2}$

e) $x - \frac{4x-2}{3} \geq x - 6$

b) $\frac{1-x}{2} < 1$

d) $\frac{x}{3} - \frac{1-x}{6} < 0$

f) $\frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1$

3. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^2 + (x+2)^2$

c) $(x-4)^2 - (x+4)^2$

e) $(2x-1)^2 + (2x-3)^2$

b) $(x+3)^2 + (x-2)^2$

d) $(x-3)^2 - (x-1)^2$

f) $(2x+1)^2 - (3x-1)^2$

4. Uprość wyrażenie.

a) $(x-2)(x+2) + (x+5)(x-5)$

c) $(5-2x)(5+2x) - (3x+4)(4-3x)$

b) $(x-1)(x+1) - (x-4)(x+4)$

d) $(\frac{1}{2}-x)(x+\frac{1}{2}) + (x+\frac{5}{2})(x-\frac{5}{2})$

5. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = \sqrt{3} + 1$.

a) $(x-1)^2 - (x-1)(x+1)$

b) $(x+3)^2 - (x-3)^2 - 12$

6. Oblicz.

a) $(\sqrt{2}+3)^2 + (\sqrt{2}-3)^2$

c) $(2\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}+2)^2$

b) $(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2$

d) $(2\sqrt{3}-1)^2 + (2\sqrt{3}+1)^2$

7. Zapisz liczbę w postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi.

a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3}-4}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

8. Dla liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 2 + \sqrt{5}$ oblicz:

a) iloczyn x i y ,

b) iloraz x i y ,

c) sumę kwadratów x i y .

9. Zapisz wyrażenie jako kwadrat sumy lub kwadrat różnicy. Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 10x + 25$

c) $9x^2 - 6x + 1$

e) $9x^2 + 12x + 4$

b) $x^2 - 16x + 64$

d) $16x^2 + 8x + 1$

f) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

Zestaw II



- Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
 - $A = \langle -1; 4 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$
 - $A = \langle 2; 7 \rangle$, $B = \langle 3; 5 \rangle$
 - $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 9 \rangle$
 - $A = (-\infty; 0)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$
 - $A = (-\infty; -1)$, $B = (-2; 4)$
 - $A = (2; \infty)$, $B = \langle 0; 5 \rangle$
- Ile liczb całkowitych spełnia jednocześnie obie nierówności?
 - $\begin{cases} 2x + 3 \geq 4x - 5 \\ 2 - x \leq -(1 - 2x) \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 < \frac{1}{3}x + 2 \\ -\frac{2}{3}x - 1 > \frac{1}{3} - x \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} \leq 1 \\ \frac{1}{6}x > -1 - \frac{x}{3} \end{cases}$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x+2)(2-x) = 6x - x^2$
 - $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = (\frac{1}{2}x - 4)(\frac{1}{2}x + 4)$
 - $(x+3)^2 = (x-5)(x+5)$
 - $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - \frac{1}{2}$
- Wyznacz liczbę całkowitą n tak, aby rozwiązanie równania należało do przedziału $(n; n+2)$.
 - $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 56$
 - $(x-3)^2 - (4-x)^2 = 13$
 - $(x-3)(x+3) + (4-x)(4+x) = 2x$
 - $(2x-1)(1+2x) - (2x-1)^2 = 6$
- Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.
 - $9(x+1)^2 - (3x-1)^2 \geq -4$
 - $4(\frac{1}{2}x - 2)^2 < (1-x)^2 + 7$
 - $4(3+x)^2 - (2x-1)(2x+1) \leq 13$
 - $(2-3x)(3x+2) > 3 - (3x-1)^2$
- Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.
 - $(x-1)^2 - (x+1)^2 \leq 28$
 - $(x+2)^2 - (3-x)^2 > 5$
 - $(x-2)(2+x) + (4-x)(4+x) \leq 3x$
 - $(3x-1)^2 - (3x+1)(3x-1) < 20$
- Sprawdź, czy liczba p jest liczbą wymierną.
 - $p = (3 - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 3)^2$
 - $p = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$
- Uzasadnij, że liczba q jest liczbą wymierną.
 - $q = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$
 - $q = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$
 - $q = \frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{5}{5-\sqrt{5}}$
- Podaj wszystkie liczby całkowite x spełniające warunek:
 - $|x| \leq 4$,
 - $0 < |x| < 3$,
 - $2 \leq |x| \leq 4$.
- Dla $x = -2\frac{1}{2}$ oblicz wartość wyrażenia:
 - $||x| - 3| - \frac{1}{2}$,
 - $|1 - |x|| + \frac{1}{2}$,
 - $||x| - 6| - |x|$.
- $q = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{2+1} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1 = -2$
 - $q = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} + \frac{6\sqrt{3}-18}{3-9} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 = 5$
 - $q = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} + \frac{5(5+\sqrt{5})}{25-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} + \frac{5+\sqrt{5}}{4} = 2$
- $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
 - $-2, -1, 1, 2$
 - $-4, -3, -2, 2, 3, 4$
- a) 0 b) 2 c) 1
- $A \cap B = \langle 2; 4 \rangle$,
 $A \cup B = \langle -1; 5 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -1; 2 \rangle$, $B \setminus A = \langle 4; 5 \rangle$
 - $A \cap B = \langle 3; 5 \rangle$,
 $A \cup B = \langle 2; 7 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 2; 3 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$, $B \setminus A = \emptyset$
 - $A \cap B = \{2\}$,
 $A \cup B = \langle -4; 9 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -4; 2 \rangle$, $B \setminus A = \langle 2; 9 \rangle$
 - $A \cap B = \{0\}$,
 $A \cup B = (-\infty; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$,
 $B \setminus A = (0; 4)$
 - $A \cap B = (-2; -1)$,
 $A \cup B = (-\infty; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2)$,
 $B \setminus A = \langle -1; 4 \rangle$
 - $A \cap B = (2; 5)$,
 $A \cup B = \langle 0; \infty \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 5; \infty \rangle$, $B \setminus A = \langle 0; 2 \rangle$
- $x \in \langle 1; 4 \rangle$, 4
 - $x \in (4; 6)$, 1
 - $x \in (-2; 1\frac{2}{3})$, 3
- $x = \frac{2}{3}$
 - $x = 7$
 - $x = -\frac{17}{3}$
 - $x = \frac{3}{4}$
- $x = 7$, $n = 6$
 - $x = 10$, $n = 9$
 - $x = 3\frac{1}{2}$, $n = 2$ lub $n = 3$
 - $x = 2$, $n = 1$
- $x \geq -\frac{1}{2}$
 - $x > \frac{4}{3}$
 - $x \leq -1$
 - $x < \frac{1}{3}$
- a) -7 b) 2 c) 4 d) -2
- $p = 28 - 18\sqrt{2}$, nie jest
 - $p = 16$, jest

**Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, liczbę tę przedstawiliśmy w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych. Sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S .

$$\begin{aligned} S &= (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych. Podobnie jak w przykładzie 1 sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześciątów. Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 0
 2. Liczba $|\sqrt{3} - 4|$ należy do przedziału:
 A. $(-\infty; 0)$, B. $\langle 0; 2,3 \rangle$, C. $\langle 2,3; 4 \rangle$, D. $\langle 4; \infty \rangle$.
 3. $A = (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cap \mathbf{Z}$ jest zbiorem:
 A. siedmioelementowym, C. czteroelementowym,
 B. sześćelementowym, D. pustym.
 4. Zbiór $\mathbf{R} \setminus (-1; 1)$ można zapisać w postaci:
 A. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$, C. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$,
 B. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, D. $\{-1, 1\}$.
 5. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3}$ jest przedział:
 A. $(-\infty; 12)$, B. $(-\infty; -12)$, C. $(-12; \infty)$, D. $(12; \infty)$.
 6. Zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie nierówności $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$ można zapisać w postaci przedziału:
 A. $(-5; -1]$, B. $(-5; -1)$, C. $\langle -5; -1 \rangle$, D. $(-\infty; -5)$.
 7. Dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość:
 A. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4b^2$, C. $(a - 2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$,
 B. $(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2$, D. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$.
 8. Dla dowolnej liczby x wyrażenie $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$ jest równe:
 A. $(-\frac{x}{3} + 1)^2$, B. $(-\frac{x}{3} - 1)^2$, C. $(-\frac{x}{3} - 3)^2$, D. $(\frac{2}{3}x - 1)^2$.
 9. Ułamek $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ jest równy:
 A. $1 + \sqrt{2}$, B. $-1 - \sqrt{2}$, C. $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$, D. $\frac{1 + \sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{2}}$.
 10. Niech $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. Wówczas a jest równe:
 A. 2, B. $4 + 2\sqrt{3}$, C. $4 - 2\sqrt{3}$, D. $\sqrt{10}$.
1. $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \dots\}$
 $B = \{1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots\}$
 $B \setminus A = \{8, 27, 125, 216, \dots\}$
 Do zbioru $B \setminus A$ należą trzy liczby mniejsze od 200.
 2. $|\sqrt{3} - 4| \approx 2,27$
 3. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 5. $3x + 12 < 2x$
 $x < -12$
 $x \in (-\infty; -12)$
 6. $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$
 $-x \geq 1$ i $2x > -10$
 $x \leq -1$ i $x > -5$
 $x \in (-5; -1]$
 9. $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$
 10. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3}) \cdot (4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

1. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(x - 4y)^2 - (4y + x)^2 &= \\ &= -16xy \\ -16xy &= -16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

2. $9 - 12x + 4x^2 \leq 4x^2 - 3$

$$x \geq 1, \text{ czyli } x \in \langle 1; \infty \rangle$$

3. Rozważmy dwie kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1$ i $2n + 3$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Wówczas różnica:

$$\begin{aligned}(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 &= \\ = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 &= \\ = 8n + 8 = 8(n + 1) &\end{aligned}$$

jest podzielna przez 8.

4. $a^2 \geq 2ab - b^2$

$$\begin{aligned}a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ (a - b)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$.

5. $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,7$

$$x \in (-9; -2 - \sqrt{3}) \cup \langle 2 + \sqrt{3}; 9 \rangle$$

Warunek ten spełnia 10 liczb całkowitych.

6. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{a-b}{(a-b)ab} = \frac{1}{ab}$$

$$\frac{1}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{1}{7}$$

7. $(2 - \sqrt{2})x \geq 2$

$$\begin{aligned}x &\geq \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = \\ &= 2 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$x \in \langle 2 + \sqrt{2}; \infty \rangle$$

$$2 + \sqrt{2} < 2 + 1, 5 = \frac{7}{2}$$

$$\left(\frac{7}{2}; \infty\right) \subset \langle 2 + \sqrt{2}; \infty \rangle$$

Zatem każda liczba:

$$x \in \left(\frac{7}{2}; \infty\right)$$

spełnia tę nierówność.

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$ dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

D Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D Zadanie 4 (2 pkt)

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b spełniona jest nierówność $a^2 \geq b(2a - b)$.

Zadanie 5 (2 pkt)

Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \leq |x| < 9$?

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 3 - \sqrt{2}$.

D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $\left(\frac{7}{2}; \infty\right)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

Zadanie 8 (4 pkt)

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

Zadanie 9 (5 pkt)

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x\right) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$

D Zadanie 10 (4 pkt)

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

8. $x \in (-3; 2)$



9. $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 4\frac{1}{2} \right\rangle$

Obie nierówności spełniają cztery liczby całkowite: 1, 2, 3, 4.

10. Cztery kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, $2n + 7$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

$$S = (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 + (2n + 7)^2 =$$

$$= 16n^2 + 64n + 84 = 8(2n^2 + 8n + 10) + 4$$

Ponieważ $2n^2 + 8n + 10$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 8 jest równa 4.