

Spis treści

1. Liczby rzeczywiste

1.1. Liczby naturalne	10
Cechy podzielności liczb – warto powtórzyć	14
1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne	15
1.3. Liczby niewymierne	18
1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistej	21
Długość okręgu. Liczba π – warto wiedzieć	25
1.5. Pierwiastek kwadratowy	26
1.6. Pierwiastek sześcienny	29
1.7. Potęga o wykładniku całkowitym	33
1.8. Potęga o wykładniku wymiernym	36
1.9. Logarytm i jego własności	40
Skala logarymiczna – warto wiedzieć	43
1.10. Procenty	44
1.11. Zagadnienia uzupełniające	47
Zestawy powtórzeniowe	49
Sposób na zadanie	52
Zadania testowe	53
Przed obowiązkową maturą z matematyki	54

2. Język matematyki

2.1. Zbiory	56
2.2. Działania na zbiorach	59
2.3. Przedziały	63
2.4. Działania na przedziałach	67
Rozwiązywanie równań – warto powtórzyć	69
2.5. Rozwiązywanie nierówności	70
Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian – warto powtórzyć	74
2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias	75
2.7. Mnożenie sum algebraicznych	78
2.8. Wzory skróconego mnożenia	83
2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych	87
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach – warto wiedzieć	90
2.10. Wartość bezwzględna	91
Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach – warto wiedzieć	94
2.11. Zagadnienia uzupełniające	95
Zestawy powtórzeniowe	96

Sposób na zadanie	98
Zadania testowe	99
Przed obowiązkową maturą z matematyki	100

3. Układy równań

3.1. Co to jest układ równań	102
3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania	105
3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników	111
3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)	117
3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)	121
3.6. Zagadnienia uzupełniające	126
Zestawy powtórzeniowe	128
Sposób na zadanie	130
Zadania testowe	131
Przed obowiązkową maturą z matematyki	132

4. Funkcje

4.1. Pojęcie funkcji	134
Układ współrzędnych – warto powtórzyć	139
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)	140
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)	145
Inne przykłady wykresów funkcji – warto wiedzieć	148
4.4. Monotoniczność funkcji	149
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)	153
4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)	157
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY	161
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX	163
4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX	167
4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY	170
4.11. Proporcjonalność odwrotna	172
4.12. Zagadnienia uzupełniające	175
Zestawy powtórzeniowe	179
Sposób na zadanie	182
Zadania testowe	183
Przed obowiązkową maturą z matematyki	184

5. Funkcja liniowa

5.1. Wykres funkcji liniowej (1)	186
5.2. Wykres funkcji liniowej (2)	190
5.3. Własności funkcji liniowej	193

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie	197
5.5. Współczynnik kierunkowy prostej	200
5.6. Warunek prostopadłości prostych	204
5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	208
5.8. Funkcja liniowa – zastosowania	212
5.9. Zagadnienia uzupełniające	215
Zestawy powtórzeniowe	218
Sposób na zadanie	220
Zadania testowe	221
Przed obowiązkową maturą z matematyki	222

6. Planimetria

6.1. Miary kątów w trójkącie	224
Punkty specjalne w trójkącie – warto wiedzieć	227
6.2. Trójkąty przystające	228
6.3. Twierdzenie Talesa	233
6.4. Wielokąty podobne	237
6.5. Trójkąty podobne	241
Proste i odcinki pomocnicze – warto wiedzieć	245
6.6. Pola wielokątów podobnych	246
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie	251
6.8. Zagadnienia uzupełniające	253
Zestawy powtórzeniowe	256
Sposób na zadanie	258
Zadania testowe	259
Przed obowiązkową maturą z matematyki	260

7. Wstęp do funkcji kwadratowej

7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	262
7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY	265
7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)	268
7.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)	272
7.5. Zagadnienia uzupełniające	275
Zestaw powtórzeniowy	277
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	278
Indeks	310

 Oznaczenie zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane statku pilotowego przedstawionego na zdjęciu: długość 15 m, szerokość 5 m, zanurzenie 2,3 m, prędkość maksymalna 10 węzłów.

Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to długość łuku południka wyznaczonego przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia). Zatem:

$$1 \text{ Mm} = \frac{40\,000 \text{ km}}{360 \cdot 60} \approx 1,851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$.

Uczeń:

- podaje przykłady liczb pierwszych, liczb parzystych i nieparzystych,
- podaje dzielniki danej liczby naturalnej,
- przedstawia liczbę naturalną w postaci iloczynu liczb pierwszych,
- oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych,
- przeprowadza proste dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb.

Komentarz

Czasem przyjmuje się, że najmniejszą liczbą naturalną jest liczba 1. Warto zwrócić uwagę na to, że jest to kwestia umowy.

Ćwiczenie 1

- a) 1, 2, 3, 4, 6, 12
- b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
- c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
- d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: $0, 1, 2, 3, \dots$ jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n+1$ jest następna (większa o 1), i tak po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.

Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbf{N}$.

Definicja

Niech $m \neq 0$ i n będą liczbami naturalnymi. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , gdy istnieje taka liczba naturalna k , że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n , to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m .

Zauważ, że:

- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

- a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:

- zapis $3|n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Niech n będzie liczbą naturalną.

Jeśli $2|n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.

Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, a liczbę nieparzystą – w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Multiteka

- Dzielenie z resztą
- Spirala Ulama
- Algorytm Euklidesa
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Czy prawdziwe jest stwierdzenie?

- a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy powiedzieć, że liczba 45 dzieli się przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

Dzieląc 47 przez 3, otrzymujemy 15 i resztę 2. $47 : 3 = 15$ reszta 2

Oznacza to, że liczbę 47 można przedstawić w postaci: $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci: $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**. Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

- a) parzyste,
b) mniejsze od 20,
c) większe od 20 i mniejsze od 50,
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczy pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Ćwiczenie 5

- a) 2
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Ćwiczenie 2

a) Tak, suma cyfr tej liczby jest równa 15, więc jest ona podzielna przez 3.

b) Nie, $111 = 11 \cdot 10 + 1$.

c) Tak, liczba jest podzielna przez 5, ale suma cyfr tej liczby wynosi 14, więc liczba nie jest podzielna przez 3, a tym samym nie jest podzielna przez 15.

d) Nie, $4949 : 7 = 707$.

Komentarz

Cechy podzielności przez 2, 3, 5 i 9 przypominane są na s. 14.

Ćwiczenie 3

- a) $26 = 3 \cdot 8 + 2$
b) $76 = 3 \cdot 25 + 1$
c) $108 = 3 \cdot 36$
d) $127 = 3 \cdot 42 + 1$
e) $713 = 3 \cdot 237 + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $3 = 4 \cdot 0 + 3$
b) $49 = 4 \cdot 12 + 1$
c) $79 = 4 \cdot 19 + 3$
d) $126 = 4 \cdot 31 + 2$
e) $492 = 4 \cdot 123$

Miedzy liczbami 1 i 100 jest 25 liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że liczba 2 jest jedyną parzystą liczbą pierwszą.

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest **rozkładem na czynniki pierwsze**.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki będące liczbami pierwszymi. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

150	3
50	2
25	5
5	5
1	

Ćwiczenie 6

$$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb: 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$$\text{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$$

$$\text{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$$

120	2	54	2
60	2	27	3
30	2	9	3
15	3	3	3
5	5	1	
1			

Ćwiczenie 7

a) $\text{NWD}(18, 30) = 6,$
 $\text{NWW}(18, 30) = 90$

b) $\text{NWD}(15, 50) = 5,$
 $\text{NWW}(15, 50) = 150$

c) $\text{NWD}(24, 72) = 24,$
 $\text{NWW}(24, 72) = 72$

d) $\text{NWD}(144, 192) = 48,$
 $\text{NWW}(144, 192) = 576$

e) $\text{NWD}(84, 105) = 21,$
 $\text{NWW}(84, 105) = 420$

f) $\text{NWD}(196, 420) = 28,$
 $\text{NWW}(196, 420) = 2940$

Ćwiczenie 7

Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18, y = 30$

c) $x = 24, y = 72$

e) $x = 84, y = 105$

b) $x = 15, y = 50$

d) $x = 144, y = 192$

f) $x = 196, y = 420$

Ćwiczenie 8

Ile wynosi $\text{NWD}(x, y)$ i $\text{NWW}(x, y)$, jeśli żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby y ?

Ćwiczenie 8

$$\text{NWD}(x, y) = 1, \quad \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$$

Komentarz

Liczby, o których jest mowa w ćwiczeniu 8 nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**.

Dla $x, y, a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzą następujące własności:

1) $\text{NWD}(x, y) = \text{NWD}(y, x)$

2) $\text{NWW}(x, y) = \text{NWW}(y, x)$

3) $\text{NWD}(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot \text{NWD}(x, y)$

4) $\text{NWD}(x, y) \cdot \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$

Zadania

1. Które spośród liczb: 2, 3, 4, 6, 9, 12, są dzielnikami podanej liczby?
a) 256 b) 294 c) 405 d) 588 e) 648
2. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:
a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?
3. Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4.
a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$
4. Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb: 1, 2, 3?
a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$
5. Podaj sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest:
a) $2n + 1$, b) $2n - 1$, c) $2n - 5$, d) $4n + 3$.
- D** 6. Uzasadnij, że suma:
a) trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9,
b) czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8,
c) pięciu kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 10.
- D** 7. Uzasadnij, że iloczyn:
a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,
c) czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

Powtórzenie

8. Ile dzielników ma liczba n ?
a) $n = 12$ b) $n = 27$ c) $n = 29$ d) $n = 36$ e) $n = 60$
9. Wykonaj dzielenie z resztą.
a) $75 : 8$ b) $75 : 3$ c) $109 : 6$ d) $738 : 4$ e) $3241 : 6$
10. Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.
a) $x = 24, y = 40$ c) $x = 48, y = 72$ e) $x = 112, y = 144$
b) $x = 36, y = 45$ d) $x = 54, y = 96$ f) $x = 105, y = 150$

7. a) Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli jest podzielna jednocześnie przez 2 i 3. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych dokładnie jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez 6.

b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2n, 2n+2, 2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$2n(2n+2)(2n+4) = 8 \cdot n(n+1)(n+2)$$

Wyrażenie $n(n+1)(n+2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych. Iloczyn ten jest podzielny przez 6 (co wykazaliśmy w punkcie a). Zatem liczba $2n(2n+2)(2n+4)$ jest podzielna przez $8 \cdot 6 = 48$, co było do uzasadnienia.

c) Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych:

- co najmniej jedna jest podzielna przez 3,
 - dokładnie dwie są parzyste, przy czym jedna z nich jest podzielna przez 4.
- Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2, 4 b) 2, 3, 6 c) 3, 9
d) 2, 3, 4, 6, 12
e) 2, 3, 4, 6, 9, 12
2. a) 41 b) 26 c) 23 d) 19
3. a) $5 \cdot 7 + 4$ b) $5 \cdot 12 + 2$
c) $5 \cdot 31 + 1$ d) $5 \cdot 55 + 0$
4. a) nie, $46 = 6 \cdot 7 + 4$
b) tak, $74 = 6 \cdot 12 + 2$
c) tak, $147 = 6 \cdot 24 + 3$
d) nie, $276 = 6 \cdot 46$
5. a) $6n + 9$ b) $6n + 3$
c) $6n - 9$ d) $12n + 15$
6. a) Rozważmy trzy kolejne liczby naturalne podzielne przez 3: $3n, 3n + 3, 3n + 6$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:
 $3n + (3n + 3) + (3n + 6) = 9n + 9 = 9(n + 1)$
czyli jest to liczba podzielna przez 9.
b) Rozważmy cztery kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:
 $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) = 8n + 16 = 8(n + 2)$
czyli jest to liczba podzielna przez 8.
8. a) 6 b) 4 c) 2 d) 9 e) 12
9. a) 9 reszta 3 b) 25 reszta 0
c) 18 reszta 1 d) 184 reszta 2
e) 540 reszta 1
10. a) $\text{NWD}(24, 40) = 8$,
 $\text{NWW}(24, 40) = 120$
b) $\text{NWD}(36, 45) = 9$,
 $\text{NWW}(36, 45) = 180$
c) $\text{NWD}(48, 72) = 24$,
 $\text{NWW}(48, 72) = 144$
d) $\text{NWD}(54, 96) = 6$,
 $\text{NWW}(54, 96) = 864$
e) $\text{NWD}(112, 144) = 16$,
 $\text{NWW}(112, 144) = 1008$
f) $\text{NWD}(105, 150) = 15$,
 $\text{NWW}(105, 150) = 1050$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3, 5 b) 2, 3, 9
c) 2, 5 d) 2, 3
2. Liczba naturalna jest podzielna przez 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.
Liczba naturalna jest podzielna przez 8, gdy jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8.
a) 4 – tak, 8 – tak
b) 4 – tak, 8 – nie
c) 4 – nie, 8 – nie
d) 4 – tak, 8 – tak
3. Liczba naturalna jest podzielna przez 6, gdy jest podzielna przez 3 i 2, czyli gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, a jej ostatnią cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8.
Liczba naturalna jest podzielna przez 12, gdy jest podzielna przez 3 i 4.
Liczba naturalna jest podzielna przez 15, gdy jest podzielna przez 3 i 5.
a) 6, 12 b) 6, 15
c) przez żadną d) 6
4. a) 3150576
b) 3150570 lub 3150576
c) 3150572 lub 3150576
d) 3150576

Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb: 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:
a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?
2. Podaj cechy podzielności liczby naturalnej przez 4 oraz przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 4? Czy jest podzielna przez 8?
a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$
3. Przez którą z liczb: 6, 12, 15 jest podzielna liczba:
a) 775 584, b) 868 470, c) 894 665, d) 501 474?
4. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez:
a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.
5. Nie wykonując dzielenia, podaj, które spośród liczb: 15, 45, 75, są dzielnikami danej liczby.
a) 1155 b) 9825 c) 5165 d) 8235

Czy wiesz, że...

Dana jest liczba naturalna x . Niech s_n oznacza sumę cyfr tej liczby znajdujących się w jej zapisie na miejscach nieparzystych, a s_p – na miejscach parzystych. Liczba x jest podzielna przez 11, gdy liczba $s_n - s_p$ jest podzielna przez 11. Na przykład dla liczby $x = 6\,291\,978$ mamy:

$$s_n = 6 + 9 + 9 + 8 = 32, \quad s_p = 2 + 1 + 7 = 10$$

Liczba $s_n - s_p = 22$ jest podzielna przez 11, więc liczba x też jest podzielna przez 11.

6. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 11. Skorzystaj z podanej cechy podzielności.
a) $x = 9\,191\,809$ b) $x = 13\,602\,479$ c) $x = 8\,354\,311$
5. Liczba naturalna jest podzielna przez 45, gdy jest podzielna przez 5 i 9.
Liczba naturalna jest podzielna przez 75, gdy jest podzielna przez 3 i 25, czyli gdy suma cyfr jest podzielna przez 3, a jej ostatnimi cyframi są: 00 lub 25, lub 50, lub 75.
a) 15 b) 15, 75 c) żadna d) 15, 45
6. a) tak b) tak c) nie

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \dots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \dots$ oraz liczba 0 . Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą **Z**.

Każda liczba całkowita jest albo parzysta, albo nieparzysta.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie oś liczbową z zerem i liczbami ujemnymi widzimy w zwykłym termometrze, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.



Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci. Wynik zapisz w zeszycie.

- a) $42 - 78$ c) $-240 \cdot (-3)$ e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
b) $-47 - (-63)$ d) $-342 + (-139)$ f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w przypadku dzielenia, gdyż same liczby całkowite już nie wystarczają. Na przykład w wyniku dzielenia $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ otrzymujemy ułamek.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.

Zwróć uwagę, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^1}{48 \cdot \cancel{10}^1} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^1}{8 \cdot \cancel{6}^1} = \frac{3}{8} \quad \text{Ułamek } \frac{3}{8} \text{ jest nieskracalny.}$$

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Uczeń:

- rozpoznaje liczby całkowite i liczby wymierne wśród podanych liczb,
- podaje przykłady liczb całkowitych i wymiernych,
- odczytuje z osi liczbowej współrzędną danego punktu oraz zaznacza punkt o podanej współrzędnej na osi liczbowej,
- wykonuje działania na liczbach wymiernych.

Komentarz

Zgodnie z zaleceniem MEN liczby całkowite będziemy oznaczać literą **Z** (wcześniej **C**), a wymierne – **Q** (wcześniej **W**).

Ćwiczenie 1

- a) -36 b) 16 c) 720
d) -481 e) -58 f) 26

Multiteka

- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $x = y = \frac{3}{8}$
b) $x = y = \frac{5}{9}$
c) $x = \frac{21}{39}, y = \frac{21}{41}, x \neq y$

Ćwiczenie 3

- a) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{90}{12 \cdot 18} - \frac{84}{12 \cdot 18} = \frac{6}{12 \cdot 18} = \frac{1}{36}$
b) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{15}{36} - \frac{14}{36} = \frac{1}{36}$

Ćwiczenie 4

- a) $-2\frac{13}{24}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $3\frac{13}{18}$ d) $2\frac{55}{72}$

Ćwiczenie 5

- a) $2\frac{1}{4}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-2\frac{7}{9}$ d) 5

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = 10\frac{1}{5}, B = 11\frac{4}{5}, C = 12\frac{1}{5}$
b) $D = -3\frac{3}{7}, E = -1\frac{5}{7}, F = \frac{6}{7}$
c) $G = 2\frac{1}{15}, H = 6\frac{1}{15}, I = 8\frac{11}{15}$
d) $J = -\frac{8}{11}, K = \frac{4}{11}, L = 2\frac{6}{11}$
2. a) $-\frac{17}{30}$ b) $6\frac{5}{24}$ c) 1
d) $-1\frac{5}{12}$ e) $3\frac{2}{15}$ f) $-\frac{31}{48}$
g) $4\frac{1}{24}$ h) $-2\frac{3}{5}$ i) $\frac{7}{60}$
3. a) $2\frac{1}{4}$ b) 5 c) $-2\frac{7}{9}$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

- a) $x = \frac{27}{72}, y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}, y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}, y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę ułamków $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik:

- a) iloczyn liczb 12 i 18, b) NWW(12, 18).

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$
b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

- a) $-2\frac{1}{3} \cdot (-\frac{27}{28})$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$
b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : (-2\frac{1}{9})$

Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

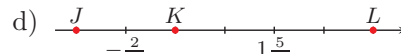
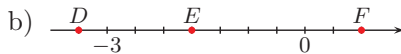
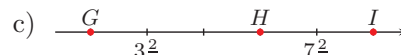
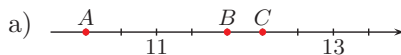
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Zadania

1. Jakim liczbom odpowiadają punkty zaznaczone na osi?



2. Oblicz.

- a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + (-\frac{5}{4} - \frac{4}{3})$ g) $1\frac{5}{8} - (-2\frac{2}{3} + 0,25)$
b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $-(-2\frac{2}{3}) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - 0,125$
c) $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{6} - \frac{1}{3})$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$

3. Oblicz.

- a) $-2\frac{1}{3} \cdot (-\frac{27}{28})$ b) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : (-2\frac{1}{9})$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$

4. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{2\frac{1}{6}}{1\frac{4}{9}} & \text{c)} \frac{1\frac{5}{12}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} & \text{e)} \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}} & \text{g)} \frac{2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}} \\ \text{b)} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} & \text{d)} \frac{2 - \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{2}} & \text{f)} \frac{\frac{1}{2} - 1\frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}} & \text{h)} \frac{3\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2} \end{array}$$

5. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{8}$.

$$\text{a)} \frac{x-y}{y-z} \quad \text{b)} \frac{x+y-z}{y+z} \quad \text{c)} \frac{x-y+2z}{x+y+3z}$$

6. Uporządkuj liczby: a , b , c w kolejności rosnącej.

$$a = \frac{1 - 0,125 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{3}{4}}, \quad b = 1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right), \quad c = \frac{2}{11} \cdot 1,5 \cdot 2,75 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$$

D 7. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

$$\text{a)} x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{b)} x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}, \quad y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}, \quad z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$$

8. Ułamki postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią, nazywamy **ułamkami egipskimi**. Przeczytaj informację obok i przedstaw ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

$$\text{a)} \frac{2}{11} \quad \text{b)} \frac{2}{17} \quad \text{c)} \frac{2}{31}$$

Czy wiesz, że...

Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{dla:} \quad a = \frac{n+1}{2}, \quad b = \frac{n(n+1)}{2}$$

Powtórzenie

9. Podaj liczbę odwrotną do liczby x .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} & \text{c)} x = \frac{5}{6} + \frac{7}{8} & \text{e)} x = \frac{1}{2} + 13 - \frac{1}{4} \\ \text{b)} x = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} & \text{d)} x = \frac{8}{15} - \frac{4}{9} & \text{f)} x = \frac{2}{3} - 34 + \frac{1}{6} \end{array}$$

10. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7}\right) \cdot 5\frac{5}{13} & \text{c)} (0,4 + 1\frac{2}{3}) \cdot (-2)^2 & \text{e)} \left(2\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 \\ \text{b)} 1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7} \cdot 5\frac{5}{13} & \text{d)} (2\frac{3}{4} - 3,5) \cdot (-2)^2 & \text{f)} \left(0,75 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 \end{array}$$

11. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}} & \text{b)} \frac{\frac{9}{5} : \frac{3}{7} - 3\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7}} & \text{c)} \frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1,5}{0,25 \cdot (-2)^2 - 3\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{11}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{4. a)} 1\frac{1}{2} & \text{b)} 1\frac{2}{3} & \text{c)} 8\frac{1}{2} & \text{d)} 1\frac{1}{9} \\ \text{e)} 1\frac{2}{5} & \text{f)} 1\frac{2}{7} & \text{g)} -2 & \text{h)} -2 \end{array}$$

$$\text{5. a)} 14 \quad \text{b)} -2\frac{3}{5} \quad \text{c)} 8$$

6. $a = 7\frac{1}{2}$, $b = -5$, $c = -1$,
zatem $b < c < a$.

7. Nierówność trójkąta: z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli suma długości krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$$\begin{array}{l} \text{a)} x = \frac{5}{24} = \frac{30}{144}, \\ y = \frac{5}{12} = \frac{60}{144}, \\ z = \frac{5}{144} \\ x + z = \frac{35}{144} < \frac{60}{144} = y \end{array}$$

Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

$$\begin{array}{l} \text{b)} x = 2\frac{1}{2}, \\ y = \frac{13}{15} < 1, \\ z = \frac{22}{23} < 1 \\ y + z < 2 < 2,5 = x \end{array}$$

Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

$$\begin{array}{l} \text{8. a)} \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} \\ \text{b)} \frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153} \\ \text{c)} \frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{9. a)} 1\frac{1}{11} & \text{b)} 2\frac{2}{3} & \text{c)} \frac{24}{41} \\ \text{d)} 11\frac{1}{4} & \text{e)} \frac{4}{53} & \text{f)} -\frac{6}{199} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{10. a)} -8 & \text{b)} -15\frac{58}{65} & \text{c)} 8\frac{4}{15} \\ \text{d)} 3 & \text{e)} 6\frac{1}{4} & \text{f)} \frac{9}{256} \end{array}$$

$$\text{11. a)} 1\frac{3}{7} \quad \text{b)} 1\frac{1}{5} \quad \text{c)} -2\frac{3}{4}$$

Uczeń:

- wskazuje liczby niewymierne wśród podanych liczb,
- konstruuje odcinki o długościach niewymiernych,
- zaznacza na osi liczbowej punkt odpowiadający liczbie niewymiernej,
- szacuje wartości liczb niewymiernych,
- wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie muszą być liczbami niewymiernymi.

Ćwiczenie 1

- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$
b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$

Multiteka

- Dowody twierdzenia Pitagorasa
- Zastosowania twierdzenia Pitagorasa
- Odległość do widnokregu – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- Obalenie twierdzenia przez podanie kontrprzykładu
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej
- Spirala Teodorosa

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciel.pl) | Kartkówka 1.3

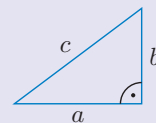
Generator
testów i sprawdzianów

1.3. Liczby niewymierne

W VI wieku p.n.e. Grecy sformułowali twierdzenie znane obecnie jako **twierdzenie Pitagorasa**.

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

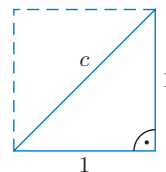
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1.

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).

Można udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.



Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułaskowi $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Tam, gdzie jest to potrzebne, korzysta się z odpowiednio dokładnych przybliżeń.

Innymi przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$.

Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną (np. $\sqrt{82}$). Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1

Wśród poniższych liczb wskaż liczby niewymierne.

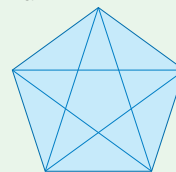
- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$$3 + \sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$$

są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

- a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ c) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ e) $x = \sqrt[3]{9} - 1$
b) $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$ d) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$ f) $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

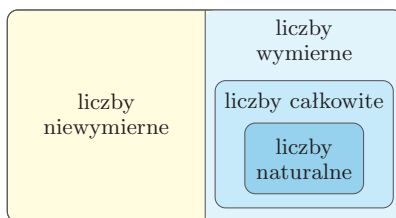
Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

- a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π .

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych** i oznaczamy literą **R**. Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami **IQ**.

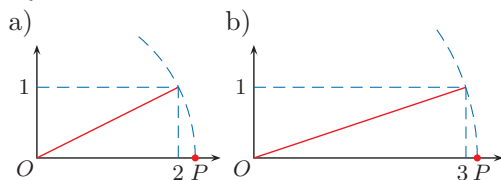


Zadania

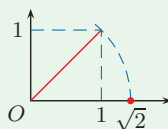
1. Wśród poniższych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

- a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$ c) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$ e) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{64}$
b) $\sqrt{9}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{286}$ f) $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{216}$

2. Jakiej liczbie odpowiada punkt P zaznaczony na osi liczbowej? Czy jest to liczba wymierna?



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu odpowiadającego liczbie $\sqrt{2}$



3. Dany jest prostokąt o bokach x i y . Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

- a) $x = 2$, $y = 4$ c) $x = 6$, $y = 8$ e) $x = 5$, $y = 12$
b) $x = 3$, $y = 4$ d) $x = 8$, $y = 10$ f) $x = 7$, $y = 24$

Ćwiczenie 2

- a) jest
b) nie jest, $x = 12$
c) jest, $x = 4 + 2\sqrt{14}$
d) nie jest, $x = -10$
e) jest
f) nie jest, $x = 33$

Ćwiczenie 3

- a) np. $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$
b) np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sqrt{164}$ b) $\sqrt{29}$
c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt{286}$
e) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{81}$

2. a) $\sqrt{5}$, nie
b) $\sqrt{10}$, nie

3. Niech d oznacza długość przekątnej.
a) $d = 2\sqrt{5}$, nie
b) $d = 5$, tak
c) $d = 10$, tak
d) $d = 2\sqrt{41}$, nie
e) $d = 13$, tak
f) $d = 25$, tak

4. a), c), e) jest
b), d), f) nie jest

5. a) 11 b) 8 c) 4

6. Obwód trójkąta: $6\sqrt{2}$,
obwód kwadratu: $4\sqrt{6}$,
obwód sześciokąta: 18 – liczba
wymierna

7. a) $p + q = 3$ lub $p + r = -4$
b) $q - r = 7$
c) $qs = 42$
d) $\frac{q}{s} = \frac{2}{7}$ lub $\frac{s}{q} = \frac{7}{2}$

8. a) tak, $d = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
b) nie, $d = \sqrt{169} = 13$

9. a) $0, \sqrt{4}, \sqrt[3]{125}$
b) $-\frac{12}{3}, -3, 0, \sqrt{4}, \sqrt[3]{125}$
c) $-\frac{12}{3}, -3, 0, 0,1, \sqrt{4}, \sqrt[3]{125}, 121\frac{1}{3}$
d) $-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{2}$

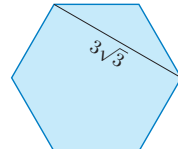
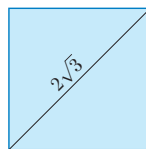
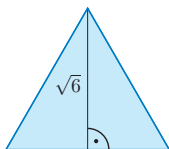
4. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1,414$
 $\sqrt{3} \approx 1,732$
 $\sqrt{5} \approx 2,236$

5. Podaj największą liczbę naturalną n spełniającą nierówność ($\pi \approx 3,14$):
a) $n < 2\pi + 5$, b) $n < \pi^2 - 1$, c) $n^2 < 10\pi - 7$.

6. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?



7. Dane są liczby niewymierne: p, q, r, s .

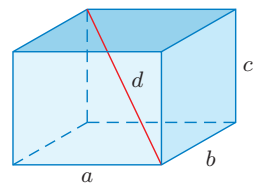
$p = 3 - 2\sqrt{3}$ $q = 2\sqrt{3}$ $r = 2\sqrt{3} - 7$ $s = 7\sqrt{3}$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

- a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.

8. Długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach a, b, c wyraża się wzorem: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Czy długość przekątnej prostopadłościanu o podanych krawędziach jest liczbą niewymierną?

- a) $a = 6, b = 8, c = 10$ b) $a = 3, b = 4, c = 12$



Powtórzenie

9. Wśród poniższych liczb wskaż liczby:

- a) naturalne, b) całkowite, c) wymierne, d) niewymierne.
 $-3, 0,1, 0, \sqrt{4}, -\frac{12}{3}, \sqrt[3]{125}, -\sqrt{3}, 121\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}$

10. Podaj liczbę naturalną n spełniającą nierówności:

- a) $n < \sqrt{35} < n + 1$, b) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$, c) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$.

11. Czy długość przekątnej prostokąta o bokach a, b jest liczbą wymierną?

- a) $a = 5, b = 12$ b) $a = 6, b = 10$ c) $a = 7, b = 24$

10. a) $5 = \sqrt{25} < \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6$, zatem $n = 5$.

- b) $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ i $3 = \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16} = 4$, zatem $n = 3$.

- c) $5\sqrt{5} = \sqrt{125}$ i $11 = \sqrt{121} < \sqrt{125} < \sqrt{144} = 12$, zatem $n = 12$.

11. a) tak, $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

- b) nie, $\sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136}$

- c) tak, $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach: 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0,15$; $\frac{37}{1000} = 0,037$; $5\frac{7}{10} = 5,7$.

Zapis po prawej stronie nazywamy **postacią dziesiętną** lub **rozwinięciem dziesiętnym** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25.$$

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0,16666666 \dots$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

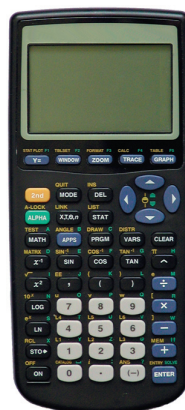
$$\frac{1}{6} = 0,1(6).$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0,571428\,571428\,571428 \dots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0,(571428)$.

W rozwinięciu dziesiętnym nawias oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\frac{7}{20}$ | c) $\frac{52}{25}$ | e) $\frac{4}{125}$ |
| b) $\frac{11}{25}$ | d) $\frac{143}{50}$ | f) $\frac{17}{250}$ |

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0,24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

- | | | | |
|-------------|------------|-------------|---------------|
| a) 0,(1234) | b) 5,(732) | c) 2,6(435) | d) 0,32(1410) |
|-------------|------------|-------------|---------------|

Ćwiczenie 2

- a) dziesiąte miejsce: 2, dwudzieste miejsce: 4
b) dziesiąte miejsce: 7, dwudzieste miejsce: 3
c) dziesiąte miejsce: 5, dwudzieste miejsce: 4
d) dziesiąte miejsce: 0, dwudzieste miejsce: 4

Uczeń:

- wskazuje liczby wymierne oraz niewymierne wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej,
- wyznacza rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych,
- wyznacza wskazaną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym okresowym danej liczby,
- zamienia skończone rozwinięcia dziesiętne na ułamki zwykłe,
- przedstawia ułamki dziesiętne okresowe w postaci ułamków zwykłych,
- zaokrągla liczbę z podaną dokładnością,
- oblicza błąd przybliżenia danej liczby oraz ocenia, czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem.

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że liczbę w postaci dziesiętnej okresowej można zapisać na kilka sposobów, np.:

$$\begin{aligned} 1,393939 \dots &= 1,(39) = \\ &= 1,3(93) = \\ &= 1,(3939) \end{aligned}$$

Jednak zwykle taką liczbę zapisujemy z jak najkrótszym okresem.

Ćwiczenie 1

- a) 0,35 b) 0,44 c) 2,08
d) 2,86 e) 0,032 f) 0,068

Multiteka

• Liczba π

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

$0,8(3)$, długość okresu: 1;
 $0,(428571)$, długość okresu: 6;
 $0,(27)$, długość okresu: 2;
 $0,(185)$, długość okresu: 3

Ćwiczenie 4

Rozwinięcia skończone mają liczby: $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{8}$

Rozwinięcia nieskończone mają liczby: $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}$.

Ćwiczenie 5

a) $\sqrt{8}, \sqrt{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{16}$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie i podaj długości okresów nieskończonych rozwinięć dziesiętnych liczb: $\frac{5}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{27}$.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub okresowej.

Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. $0,101001000100001\dots$

Ćwiczenie 4

Które z podanych liczb wymiernych mają rozwinięcie skończone, a które nie: $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}$?

Ćwiczenie 5

Które z podanych niżej liczb mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

a) $\sqrt{8}, \sqrt{16}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{16}{9}}$

b) $\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}, \sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

W 2002 roku Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

```
3,141592653589793238462643383279502884
19716939937510582097494459230781640628
62089986280348253421170679821480865132
82306647093844609550582231725359408128
48111745028410270193852110555964462294
89549303819644288109756659334461284756
48233786783165271201909145648566923460
34861045432664821339360726024914127372
```

Reguła zaokrąglania

Do przybliżenia liczby w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami:

- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987, do dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99, a do liczby całkowitej – liczba 7.

Ćwiczenie 6

Zaokrąglaj do liczby całkowitej.

- a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast gdy przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Ćwiczenie 7

Podaj przybliżoną wartość π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

- a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Błąd przybliżenia jest równy różnicy liczby i jej przybliżenia.

Ćwiczenie 8

Zaokrąglaj liczbę do dwóch miejsc po przecinku. Podaj błąd przybliżenia.

- a) 6,7824 b) 8,4653 c) 7,8951 d) 9,9962 e) 5,9039

Zadania

- Znajdź postać dziesiętną liczby (nie korzystaj z kalkulatora):
a) $\frac{5}{4}$, b) $-\frac{27}{4}$, c) $-\frac{1}{8}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{5}{8}$, f) $\frac{11}{8}$, g) $\frac{3}{80}$, h) $\frac{7}{80}$.
- Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby:
a) $\frac{7}{9}$, c) $\frac{1}{300}$, e) $\frac{11}{30}$,
b) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{5}{900}$, f) $\frac{17}{90}$.

$\frac{1}{3} = 0,33333333 \dots$
 $\frac{1}{6} = 0,16666666 \dots$
 $\frac{1}{9} = 0,11111111 \dots$
- Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglj tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.
a) 1,(046) b) 0,3(25) c) 7,0(037) d) 9,(3486) e) 2,86(345)
- Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{7}$?
- Znajdź cyfry a i b liczby o rozwinięciu okresowym $7,19(1ab693)$, jeśli w tej liczbie na jedenastym miejscu po przecinku występuje cyfra 3, a na dwudziestym drugim cyfra 6.

4. a) $\frac{2}{7} = 0,(285714)$, na 24. miejscu: 4, na 100. miejscu: 7
b) $\frac{5}{7} = 0,(714285)$, na 24. miejscu: 5, na 100. miejscu: 2
5. $a = 6$, $b = 3$

Ćwiczenie 6

- a) 21 b) 20 c) 0 d) 1 e) 2

Ćwiczenie 7

- a) 3,141593; z nadmiarem
b) 3,14159; z niedomiarem
c) 3,1416; z nadmiarem
d) 3,142; z nadmiarem
e) 3,14; z niedomiarem

Ćwiczenie 8

- a) 6,78; błąd przybliżenia: 0,0024
b) 8,47; błąd przybliżenia: -0,0047
c) 7,90; błąd przybliżenia: -0,0049
d) 10,00; błąd przybliżenia: -0,0038
e) 5,90; błąd przybliżenia: 0,0039

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1,25 b) -6,75
c) -0,125 d) 0,375
e) 0,625 f) 1,375
g) 0,0375 h) 0,0875
2. a) 0,(7) b) 0,01(6)
c) 0,00(3) d) 0,00(5)
e) 0,3(6) f) 0,1(8)
3. a) na 12. miejscu: 6,
na 25. miejscu: 0; 1,046
b) na 12. miejscu: 2,
na 25. miejscu: 5; 0,325
c) na 12. miejscu: 3,
na 25. miejscu: 7; 7,004
d) na 12. miejscu: 6,
na 25. miejscu: 3; 9,349
e) na 12. miejscu: 3,
na 25. miejscu: 4; 2,863

6. Długość okresu wynosi 5 oraz:
 $22 = 4 \cdot 5 + 2$
 $23 = 4 \cdot 5 + 3$
 $24 = 4 \cdot 5 + 4$
 Zatem na miejscach: 22., 23. i 24. znajdują się odpowiednio cyfry: x , 2 , y .
 Stąd $2 = 2x$ oraz $2 = \frac{1}{3}y$, czyli $x = 1$ i $y = 6$.

7. Wszystkie podane ułamki są nieskracalne.
 a) $320 = 2^6 \cdot 5$, zatem rozwinięcie jest skończone.
 b) $480 = 3 \cdot 160$, zatem rozwinięcie jest okresowe.
 c) $22400 = 7 \cdot 3200$, zatem rozwinięcie jest okresowe.
 d) $51200 = 2^{11} \cdot 5^2$, zatem rozwinięcie jest skończone.
 8. a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{41}{11}$ c) $-\frac{206}{33}$
 d) 1 e) $\frac{209}{5}$ f) $\frac{2131}{990}$

9. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{48}{11}$, $x + y = 5\frac{1}{33}$,
 $x^2 - y = -3\frac{91}{99}$, $x + \frac{1}{y} = \frac{43}{48}$

10. a) 4,75 b) 0,175
 c) 0,0375 d) $-7,375$
 e) 3,125 f) 8,(6)
 g) 2,(3) h) $-6,(4)$
 i) 0,(2) j) 0,0625
 11. a) 5 b) 3 c) 6 d) 6 e) 5
 12. a) 2,2360680
 b) 2,23607 c) 2,2

6. Wyznacz cyfry x i y liczby o rozwinięciu okresowym $0,(1x2y3)$, jeśli cyfra znajdująca się na miejscu dwudziestym trzecim po przecinku jest dwukrotnie większa od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym drugim i trzykrotnie mniejsza od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym czwartym.
7. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie ułamka jest skończone czy okresowe.
 a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22400}$ d) $\frac{11111}{51200}$
8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy liczbę n można zapisać w postaci $2^k \cdot 5^l$.

Przedstaw liczbę $0,(12)$ w postaci ułamka zwykłego.

$$x = 0,121212 \dots$$

$$100x = 12,121212 \dots \quad \text{Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.}$$

$$100x = 12 + x$$

$$99x = 12$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

- a) 0,(36) b) 3,(72) c) $-6,(24)$ d) 0,(9) e) 41,7(9) f) 2,1(52)

9. Liczby $x = 0,(6)$ i $y = 4,(36)$ przedstaw w postaci ułamka zwykłego, a następnie oblicz: $x + y$, $x^2 - y$, $x + \frac{1}{y}$.

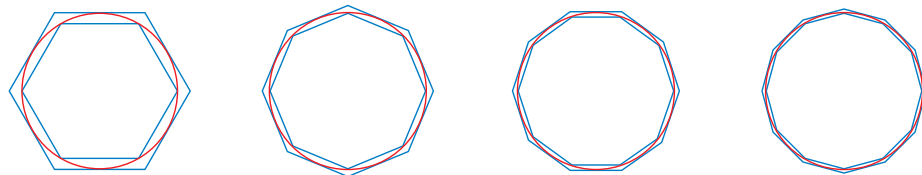
Powtórzenie

10. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej (nie korzystaj z kalkulatora).
 a) $\frac{19}{4}$ c) $\frac{15}{400}$ e) $\frac{25}{8}$ g) $\frac{7}{3}$ i) $\frac{2}{9}$
 b) $\frac{7}{40}$ d) $-\frac{59}{8}$ f) $\frac{26}{3}$ h) $-\frac{58}{9}$ j) $\frac{5}{80}$
11. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby (nie korzystaj z kalkulatora)?
 a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{19}{60}$ e) $\frac{7}{27}$
12. Podaj przybliżoną wartość $\sqrt{5}$ z dokładnością do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 7$, b) $n = 5$, c) $n = 1$.

$$\sqrt{5} \approx 2,23606798$$

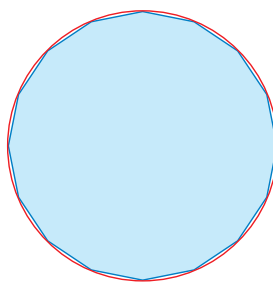
Długość okręgu. Liczba π

Już Archimedes wiedział, że długość okręgu można wyznaczyć z dowolną dokładnością, rozpatrując wielokąty foremne wpisane w okrąg oraz na nim opisane. Wraz ze wzrostem liczby boków wielokątów foremnych ich obwody dają coraz dokładniejsze przybliżenia długości okręgu.



1. W tabeli podano długości boków wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1. Dla każdego wielokąta podaj długość jego boku oraz połowę obwodu z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Dla którego z tych wielokątów długość połowy obwodu różni się od liczby π o mniej niż 0,01?

Wielokąt foremny	Długość boku
kwadrat	$\sqrt{2}$
8-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
16-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
32-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
64-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$



Istnieje wiele wzorów, za pomocą których można otrzymać przybliżenie liczby π . Oto dwa z nich:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \quad \text{wzór Wallisa}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \dots \quad \text{wzór Leibniza}$$

Powyższe wzory są jednak mało praktyczne – np. aby otrzymać cztery cyfry po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π , korzystając ze wzoru Leibniza, należy zsumować ponad 100 000 składników.

2. Znajdź informacje na temat innych wzorów pozwalających otrzymać przybliżenie liczby π .

$$2. \frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \quad \text{wzór Viète'a}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}} \quad \text{wzór Brouckera}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{9} + \dots \quad \text{wzór Maclaurina}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{7} \left(1 + \frac{4}{9} \left(1 + \dots \right) \right) \right) \right) \quad \text{wzór Newtona}$$

Inne wzory na stronie <http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html>

Odpowiedzi do zadań

1. kwadrat: 1,4142; 2,8284;
8-kąt: 0,7654; 3,0615;
16-kąt: 0,3902; 3,1214;
32-kąt: 0,1960; 3,1365;
64-kąt: 0,0981; 3,1403;
dla 32-kąta i 64-kąta

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka kwadratowego,
- włącza czynnik pod znak pierwiastka kwadratowego,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki kwadratowe, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika, gdy w mianowniku występuje wyrażenie $a\sqrt{b}$, oraz szacuje przybliżoną wartość takich wyrażeń.

Komentarz

Warto zadać uczniom następujące pytanie:

Wiemy, że $\sqrt{a} \geq 0$ dla dowolnej liczby nieujemnej a . Czy może być prawdziwa równość:

$$\sqrt{9x^2} = -3x?$$

Odpowiedź: tak, dla $x \leq 0$.

Ćwiczenie 1

- a) 12 b) 15 c) 18
d) 25 e) 50 f) 90
g) 1,1 h) 1,9 i) 2,1

Ćwiczenie 2

- a) 3 b) 3 c) 9 d) 1,2 e) $\sqrt{3}$

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Przykład 1

$$\sqrt{36} = 6, \text{ bo } 6^2 = 36$$

$$\sqrt{0,16} = 0,4, \text{ bo } (0,4)^2 = 0,16$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ bo } 0^2 = 0$$

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6 , chociaż $(-6)^2 = 36$, ponieważ w definicji założyliśmy, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{625}$ g) $\sqrt{1,21}$
b) $\sqrt{225}$ e) $\sqrt{2500}$ h) $\sqrt{3,61}$
c) $\sqrt{324}$ f) $\sqrt{8100}$ i) $\sqrt{4,41}$

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geq 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Ćwiczenie 2

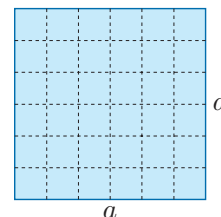
Oblicz.

- a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-9)^2}$ d) $\sqrt{(-1,2)^2}$ e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).

Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3,24 \text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2 .



Ćwiczenie 3

- a) bok kwadratu: 1,8 cm, obwód: 7,2 cm
b) bok kwadratu: 32 cm, obwód: 128 cm

Multiteka

• Spirala Teodorosa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Przykład 2

$$a) \sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$$

$$b) \sqrt{12,5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12,5 \cdot 2} = \sqrt{25} = 5$$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Założenia do wzorów:

– dla pierwiastka iloczynu:

$$a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

– dla pierwiastka ilorazu:

$$a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$a) \sqrt{4 \cdot 81}, \sqrt{25 \cdot 0,36}, \sqrt{0,09 \cdot 361}$$

$$c) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,5}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$$

$$b) \sqrt{\frac{121}{144}}, \sqrt{\frac{361}{400}}, \sqrt{\frac{576}{625}}$$

$$d) \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$$

Zadania

1. Oblicz.

$$a) \sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$$

$$d) \sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$$

$$b) \sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$$

$$e) \sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$c) \sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$$

$$f) \sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$$

D 2. Uzasadnij, że:

$$a) \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}, \quad b) \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad c) \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne leżące między podanymi liczbami.

$$a) \sqrt{2} \text{ i } \sqrt{33}$$

$$b) \sqrt{10} \text{ i } \sqrt{140}$$

$$c) \sqrt{80} \text{ i } \sqrt{300}$$

4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

$$a) \sqrt{18}$$

$$c) \sqrt{48}$$

$$e) \sqrt{108}$$

$$g) \sqrt{392}$$

$$b) \sqrt{24}$$

$$d) \sqrt{96}$$

$$f) \sqrt{252}$$

$$h) \sqrt{450}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{80} &= \sqrt{16 \cdot 5} = \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

5. Doprowadź do postaci $a\sqrt{2}$.

$$a) 4\sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$c) \sqrt{18} + \sqrt{98}$$

$$e) \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$$

$$b) \sqrt{32} - 3\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{200} - \sqrt{50}$$

$$f) \sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$$

6. Doprowadź do postaci $a\sqrt{b}$.

$$a) 7\sqrt{5} + \sqrt{20}$$

$$c) \sqrt{12} + \sqrt{75}$$

$$e) 0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,3\sqrt{32}$$

$$b) \sqrt{48} - \sqrt{27}$$

$$d) \sqrt{45} - \sqrt{125}$$

$$f) 3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$$

$$2. a) \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}, \quad \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \neq \frac{5}{4}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}.$$

$$b) \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

$$c) \sqrt{4\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{37}{9}}, \quad \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}} \neq \sqrt{\frac{37}{9}}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

Ćwiczenie 4

$$a) 18; 3; 5,7$$

$$b) \frac{11}{12}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}$$

$$c) 4, 3, 10$$

$$d) 3, \frac{1}{2}, 2$$

Odpowiedzi do zadań

$$1. a) 3 \quad b) -11 \quad c) 4,2 \quad d) 0,5 \\ e) -\frac{17}{20} \quad f) 1\frac{19}{30}$$

$$3. a) 2, 3, 4, 5$$

$$b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

$$c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$$

$$4. a) 3\sqrt{2} \quad b) 2\sqrt{6} \quad c) 4\sqrt{3}$$

$$d) 4\sqrt{6} \quad e) 6\sqrt{3} \quad f) 6\sqrt{7}$$

$$g) 14\sqrt{2} \quad h) 15\sqrt{2}$$

$$5. a) 6\sqrt{2} \quad b) \sqrt{2} \quad c) 10\sqrt{2}$$

$$d) 5\sqrt{2} \quad e) 20\sqrt{2} \quad f) 22\sqrt{2}$$

$$6. a) 9\sqrt{5} \quad b) \sqrt{3} \quad c) 7\sqrt{3}$$

$$d) -2\sqrt{5} \quad e) 4,6\sqrt{2}$$

$$f) -25\sqrt{5}$$

7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{25}$

8. a) $4\sqrt{2} + 1 \approx 6,6$
b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,6$
c) $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$

9. a) 6 b) 16 c) 20 d) 30
e) 42 f) 30 g) 120 h) 120

10. a) 30 b) $\frac{35}{4}\sqrt{6}$ c) 2,2 d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. a) $6 + 18\sqrt{2}$
b) $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$

12. a) 15 b) $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ c) 16

13. a) 14 b) 1,5 c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{30}$

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak, jak w przykładzie.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,4$).

a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$
b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

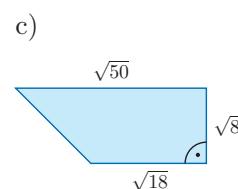
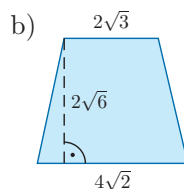
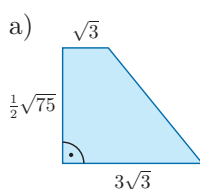
10. Oblicz.

a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

a) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

12. Oblicz pole trapezu.



Powtórzenie

13. Oblicz.

a) $\sqrt{81} + \sqrt{25}$ b) $\sqrt{0,49} + \sqrt{0,64}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{100}}$

14. Figurę przedstawioną na rysunku obok można rozciąć na dwa kwadraty o polach 6,25 i 4,41. Oblicz obwód tej figury.



15. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $5\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $13\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$

16. Prostokąt o polu P można rozciąć na dwa kwadraty. Oblicz obwód tego prostokąta.

a) $P = 98 \text{ cm}^2$ b) $P = 6,48 \text{ cm}^2$ c) $P = \frac{1}{8} \text{ m}^2$ d) $P = \frac{1}{72} \text{ m}^2$

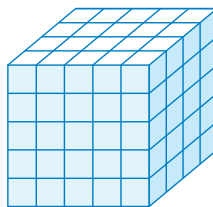
14. Bok większego kwadratu ma długość 2,5, a mniejszego – 2,1, zatem obwód figury:
 $3 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,1 + (2,5 - 2,1) = 14,2$

15. a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{147}$ c) $\sqrt{162}$ d) $\sqrt{338}$ e) $\sqrt{3}$

16. a) 42 cm b) 10,8 cm c) 1,5 m d) 0,5 m

1.6. Pierwiastek sześcienny

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V . Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125 \text{ cm}^3$ jest równa 5 cm. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, bo $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$

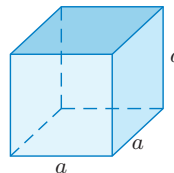
b) $\sqrt[3]{0} = 0$, bo $0^3 = 0$

d) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, bo $0,6^3 = 0,216$

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3 , więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V .

a) $V = 1$

b) $V = 64$

c) $V = 216$

d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając z informacji podanych obok.

a) $\sqrt[3]{512}$

c) $\sqrt[3]{1331}$

e) $\sqrt[3]{1,331}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$11^3 = 1331$$

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka trzeciego stopnia z liczby nieujemnej,
- oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka,
- włącza czynnik pod znak pierwiastka,
- porównuje liczby zapisane za pomocą pierwiastków,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka, gdy w mianowniku występuje $\sqrt[3]{a}$.

Ćwiczenie 1

a) 1 b) 4 c) 6 d) 20

Ćwiczenie 2

a) 8 b) $\frac{1}{9}$ c) 11

d) $\frac{2}{9}$ e) 1,1 f) $\frac{9}{11}$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.

Na przykład $\sqrt[3]{(11)^3} = 11$ oraz $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$.

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego.

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7$

b) $\sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

a) 6 b) 5

c) $\sqrt[3]{4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 49} = 2 \cdot 7 = 14$

d) 2 e) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{12}$ f) $2\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 4

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$

c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$

e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj podany przykład. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego, definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.

Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-27}$

b) $\sqrt[3]{-64}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Ćwiczenie 5

a) -3 b) -4 c) -5 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{10}$

Ogólnie dla pierwiastka n -tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

- a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0,0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$ g) $\sqrt[8]{256}$ i) $\sqrt[10]{1024}$
 b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0,00001}$ f) $\sqrt[7]{-1}$ h) $\sqrt[7]{-128}$ j) $\sqrt[9]{-512}$

Zadania

1. Podaj wartość pierwiastka.

- a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$
 b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

- a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{0,001}$
 b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0,027} + \sqrt[3]{0,008}$

3. Wylącz czynnik przed pierwiastek.

- a) $\sqrt[3]{32}$ b) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[3]{135}$ d) $\sqrt[3]{375}$ e) $\sqrt[3]{108}$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $6\sqrt[3]{2}$ d) $4\sqrt[3]{10}$ e) $6\sqrt[3]{5}$

5. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość.

- a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2,25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0,08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y ?

- a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}, y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}, y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$
 b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}, y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0,064}}{\sqrt[3]{0,125}}, y = \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{0,192}}$

7. Porównaj liczby.

- a) $4\sqrt[3]{2}$ i $2\sqrt[3]{4}$ b) $3\sqrt[3]{5}$ i $2\sqrt[3]{15}$ c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ i $\frac{4}{5}\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

6. a) $x = \frac{5}{4} < y = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

b) $x = y$

c) $x = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} < y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

d) $x = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5} = 0,8 > y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = 0,75$

7. a) $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}, 2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32}$, zatem $4\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{4}$

b) $3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{135}, 2\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$, zatem $3\sqrt[3]{5} > 2\sqrt[3]{15}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64} \cdot \frac{64}{27}} = 1, \frac{4}{5}\sqrt[3]{1\frac{61}{64}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125} \cdot \frac{125}{64}} = 1$, zatem liczby te są równe.

Ćwiczenie 6

- a) 3 b) -2 c) 0,2 d) -0,1
 e) 3 f) -1 g) 2 h) -2
 i) 2 j) -2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$
 e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{4}{3}$ h) $\frac{7}{3}$

2. a) 7 b) 1 c) 13 d) 2
 e) 0,6 f) 0,5

3. a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $5\sqrt[3]{2}$ c) $3\sqrt[3]{5}$
 d) $5\sqrt[3]{3}$ e) $3\sqrt[3]{4}$

4. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[3]{432}$
 d) $\sqrt[3]{640}$ e) $\sqrt[3]{1080}$

5. Wszystkie równości są prawdziwe.

$$\text{a) } \frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 2}{8 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2,25}$$

$$\text{b) } \frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 5}{125 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} = \sqrt[3]{0,08}$$

$$\text{c) } \frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{125 \cdot 3}{27 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$$

8. a) 8 cm b) 20 cm

9. V – objętość sześcianu,
 $h = 3\sqrt[3]{V}$ – wysokość wieży

a) $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 16 =$
 $= 2 \cdot 4^3 \text{ [cm}^3\text{]}$

$h = 3 \cdot 4\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2} \text{ [cm]}$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 25 \cdot 7,5 \cdot 8 =$
 $= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = 5^3 \text{ [cm}^3\text{]}$

$h = 15 \text{ cm}$

10. a) $\sqrt[4]{162}$ b) $\sqrt[4]{2500}$ c) $\sqrt[5]{2048}$
d) $\sqrt[6]{10000}$ e) $\sqrt[10]{5120}$

11. a) 14 b) 9 c) -10
d) 0,6 e) 2,1 f) $1\frac{1}{4}$

12. a) -20 b) -0,1
c) $-\frac{5}{4}$ d) -1,5

13. a) 1 b) 0,3 c) $\frac{14}{15}$ d) -1
e) -2,4 f) 4

14. $xyz = 0$, gdyż:

a) $z = 0$,

b) $z = 0$.

15. a) 6 b) -1 c) -0,2
d) 0,3 e) 3,1 f) 1,8

8. Objętość prostopadłościanu o wymiarach $x \text{ cm} \times y \text{ cm} \times z \text{ cm}$ jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

a) $x = 4, y = 4, z = 32$

b) $x = 16, y = 20, z = 25$

9. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Oblicz wysokość wieży, jeśli jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o wymiarach:

a) $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$,

b) $6,25 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$.

10. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $3\sqrt[4]{2}$

b) $5\sqrt[4]{4}$

c) $4\sqrt[5]{2}$

d) $10\sqrt[6]{0,01}$

e) $2\sqrt[10]{5}$

11. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$

b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10000}$

e) $6\sqrt[4]{0,0625} - 3\sqrt[4]{0,0081}$

c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0,001}} - \sqrt[5]{32}$

f) $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

12. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8000}$

b) $\sqrt[3]{-0,001}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$

d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

13. Oblicz.

a) $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$

b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0,125}$

d) $\frac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}} + \frac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[9]{-1}}$

D14. Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

a) $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16}, y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1}, z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$

b) $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81}, y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81}, z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

Powtórzenie

15. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}$

c) $\sqrt[3]{-0,216} + \sqrt[3]{0,064}$

e) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{0,0001}$

b) $-\sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{216}$

d) $\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[3]{-0,008}$

f) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{0,0016}$

16. Która spośród liczb: a, b, c, d , jest najmniejsza, a która – największa?

a) $a = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18}, b = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}, c = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81}, d = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{-27}$

b) $a = \sqrt{\frac{27}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, b = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}, c = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}, d = \sqrt[3]{-\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{25}{2}}$

16. a) $a = 12, b = 4, c = 6, d = 15$, zatem najmniejsza jest liczba b , a największa – d .

b) $a = 4\frac{1}{2}, b = 5, c = 2, d = 2\frac{1}{2}$, zatem najmniejsza jest liczba c , a największa – b .

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

Przykład 1

Założmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

↑
podstawa potęgi

↖
wykładnik potęgi

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Uwaga. Nie definiujemy wartości 0^0 .

Przykład 2

a) $(-\frac{2}{3})^3 = (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27}$

b) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $(-3)^1 = -3$

d) $345^0 = 1$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $9^2, 9^3, 9^4$

b) $(\frac{3}{4})^2, (\frac{3}{4})^3, (\frac{3}{4})^4$

c) $(-\frac{2}{5})^2, (-\frac{2}{5})^3, (-\frac{2}{5})^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0, (-2)^4, (-2)^9, (-3)^4, (-3)^9$$

Ćwiczenie 1

a) 81, 729, 6561 b) $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$ c) $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$

Ćwiczenie 2

$$(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Uczeń:

- oblicza wartość potęgi liczby o wykładniku naturalnym i całkowitym ujemnym,
- porządkuje liczby zapisane w postaci potęg, korzystając z własności potęg,
- stosuje prawa działań na potęgach do obliczania wartości wyrażeń,
- stosuje prawa działań na potęgach do upraszczania wyrażeń algebraicznych,
- porównuje liczby zapisane w postaci potęg.

Komentarz

Aby ułatwić uczniom zrozumienie potęg o wykładniku 0 zapisujemy potęgę a^n jako iloczyn liczby 1 i n czynników równych liczbie a . Wówczas:

$$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

W szczególności:

$$a^3 = 1 \cdot a \cdot a \cdot a,$$

$$a^2 = 1 \cdot a \cdot a,$$

$$a^1 = 1 \cdot a = a,$$

$$a^0 = 1, \text{ gdy } a \neq 0.$$

Dla $n \neq 0$ mamy $0^n = 0$.

Gdyby w powyższych przykładach nie istniały założenia: $n \neq 0$ i $a \neq 0$, wówczas $0^0 = 1$ i $0^0 = 0$ jednocześnie, co prowadzi do sprzeczności. Zatem wartość 0^0 nie jest definiowana.

Możemy również określić potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 3

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Ćwiczenie 3

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{27}$

e) 4 f) 32 g) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{81}{16}$

i) 25 j) -125

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) 4^{-2}

c) $(-3)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

i) $0,2^{-2}$

b) 4^{-3}

d) $(-3)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$

j) $(-0,2)^{-3}$

Ćwiczenie 4

Czy podane liczby są równe?

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^3$

b) $\left(-\frac{4}{9}\right)^6$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-6}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^5$

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których występują potęgi, możemy wykorzystywać prawa działań na potęgach.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Ćwiczenie 5

a) 27 b) $\frac{1}{1024}$ c) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{1}{256}$

e) 25 f) 1024 g) 32 h) 1024

i) $\frac{27}{4}$ j) 400

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $3^9 \cdot 3^{-6}$

c) $(2^5)^{-2}$

e) $5^{-9} : 5^{-11}$

g) $6^5 : 3^5$

i) $6^3 \cdot 2^{-5}$

b) $0,5^3 \cdot 0,5^7$

d) $(0,25^{-1})^{-4}$

f) $4 : 4^{-4}$

h) $10^{10} : 5^{10}$

j) $10^4 \cdot 5^{-2}$

Ćwiczenie 6

Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $(x^2 \cdot x^6) : x^4$

b) $(x^7 : x^2) : x^{-1}$

c) $(x^2 y)^{-1} \cdot x^3$

d) $(x^{-2} y^3)^{-2} : y^{-3}$

Ćwiczenie 6

a) x^4 , $x \neq 0$ b) x^6 , $x \neq 0$ c) $\frac{x}{y}$, $x, y \neq 0$ d) $\frac{x^4}{y^3}$, $x, y \neq 0$

Zadania

- Oblicz.
a) $(-2)^5$, $(-2)^{-5}$, 2^{-5} c) $(\sqrt{3})^4$, $(\sqrt{3})^{-2}$, $(\sqrt{3})^{-6}$
b) $(\frac{1}{3})^{-2}$, $(-\frac{1}{3})^{-3}$, $(-\frac{1}{3})^{-4}$ d) $(\sqrt{2})^6$, $(\sqrt{2})^7$, $(\sqrt{2})^{-8}$
- Zapisz liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.
a) $2^3 \cdot 4^6$ b) $4^{-5} \cdot 8^2$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$
- Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.
a) 16 , $\frac{1}{64}$, 8^3 , $(\sqrt{2})^4$, 1024^2 c) $0,001$, 100^5 , $(\frac{1}{100})^{-4}$, $(\frac{1}{0,1})^{-6}$
b) $\frac{1}{81}$, 27 , 9^{-2} , $(\sqrt{3})^6$, 81^{-5} d) 25^{-3} , $(\frac{1}{5})^{-2}$, $(\frac{1}{125})^4$, 625^{-5}
- Oblicz.
a) $(-2\sqrt{3})^{-3}$ b) $(\frac{3}{\sqrt{2}})^{-4}$ c) $(-\frac{\sqrt{5}}{10})^{-3}$ d) $((-3\sqrt{2})^{-1})^{-2}$
- Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.
a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$ c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$ e) $(a^{-1} \cdot a^6)^{-2} \cdot (a^{-3})^2$
b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$ d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$ f) $(a^5 : a^{-4})^2 : (a^{-4})^{-1}$
- Która z liczb jest większa: x czy y ?
a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}$, $y = 4^{-4} : 8^{-2}$ b) $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}$, $y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$
- Oblicz.
a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot (\frac{4}{9})^2$ c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$ e) $(0,5 \cdot 8^6 - 2 \cdot 16^4) : 7^3$
b) $((\frac{2}{3})^{-2})^{-2}$ d) $((\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^{-5}) : 6^{-2}$ f) $((\frac{5}{2})^3 : (\frac{2}{5})^2) \cdot (\frac{5}{2})^{-4}$

Powtórzenie

- Oblicz.
a) 8^{-2} , $(-8)^2$, -8^{-2} , $-(-\frac{1}{8})^2$ c) $(\frac{1}{3})^{-4}$, $(-\frac{1}{3})^4$, $-(-\frac{1}{3})^{-4}$
b) 4^3 , $(-4)^{-3}$, -4^{-3} , $-(-\frac{1}{4})^{-3}$ d) $(\sqrt{2})^{-6}$, $(-\sqrt{2})^6$, $-(-\sqrt{2})^{-6}$
- Oblicz.
a) $6^{-3} \cdot 6^5$ d) $(\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^{-5}$ g) $(\frac{3}{4})^{-5} : (\frac{3}{4})^{-3}$ j) $(6^{-2})^5 \cdot 6^8$
b) $4^{-8} \cdot 4^6$ e) $5^7 : 5^{10}$ h) $(\frac{3}{8})^7 : (\frac{3}{8})^8$ k) $(4^{-3})^{-4} : 4^9$
c) $0,5^{-4} \cdot 0,5^{-1}$ f) $7^{-4} : 7^{-6}$ i) $(3^6)^{-2} \cdot 3^{10}$ l) $(8^4)^{-2} : 8^{-10}$
- a) 36 b) $\frac{1}{16}$ c) 32 d) $\frac{27}{8}$
e) $\frac{1}{125}$ f) 49 g) $\frac{16}{9}$ h) $\frac{8}{3}$
i) $\frac{1}{9}$ j) $\frac{1}{36}$ k) 64 l) 64

Odpowiedzi do zadań

- a) -32 , $-\frac{1}{32}$, $\frac{1}{32}$
b) 9, -27 , 81
c) 9, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{27}$
d) 8, $8\sqrt{2}$, $\frac{1}{16}$
- a) 2^{15} b) 2^{-4} c) 2^{27} d) 2^{20}
- a) 2^4 , 2^{-6} , 2^9 , 2^2 , 2^{20}
b) 3^{-4} , 3^3 , 3^{-4} , 3^3 , 3^{-20}
c) 10^{-3} , 10^{10} , 10^8 , 10^{-6}
d) 5^{-6} , 5^2 , 5^{-12} , 5^{-20}
- a) $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ b) $\frac{4}{81}$
c) $-40\sqrt{5}$ d) 18
- a) $a \neq 0$ a) a^2 b) a^3 c) a^2
d) a^{13} e) a^{-16} f) a^{14}
- a) $x = 2^0$, $y = 2^{-2}$,
zatem $x > y$.
b) $x = 2^{-2}$, $y = 2^7$,
zatem $y > x$.
- a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{16}{81}$ c) 6 d) $3\frac{3}{8}$
e) 0 f) $2\frac{1}{2}$
- a) $\frac{1}{64}$, 64, $-\frac{1}{64}$, $-\frac{1}{64}$
b) 64, $-\frac{1}{64}$, $-\frac{1}{64}$, 64
c) 81, $\frac{1}{81}$, -81
d) $\frac{1}{8}$, 8, $-\frac{1}{8}$

Uczeń:

- zapisuje pierwiastek n -tego stopnia w postaci potęgi o wykładniku $\frac{1}{n}$,
- oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych,
- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym,
- upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach.

Ćwiczenie 1

a) 2 b) 4 c) 9 d) 2 e) 3 f) 3

Ćwiczenie 2a) 8 b) 9 c) 16 d) 8 e) 729
f) 32 g) $\frac{1}{25}$ h) 27 i) 32 j) $\frac{9}{4}$

1.8. Potęga o wykładniku wymiernym

DefinicjaDla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$

b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{1}{2}}$

c) $81^{\frac{1}{2}}$

d) $8^{\frac{1}{3}}$

e) $27^{\frac{1}{3}}$

f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęgę o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:**Definicja**Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

b) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$

c) $8^{\frac{4}{3}}$

e) $81^{1,5}$

g) $125^{-\frac{2}{3}}$

i) $(\frac{1}{4})^{-2,5}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$

d) $32^{\frac{3}{5}}$

f) $4^{2,5}$

h) $(\frac{1}{81})^{-\frac{3}{4}}$

j) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$

D Ćwiczenie 3Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.**Ćwiczenie 4**

Oblicz.

a) $(\sqrt{10})^6$

c) $\sqrt[3]{125^2}$

e) $(\sqrt[8]{625})^2$

g) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$

i) $(\sqrt[3]{\sqrt{49}})^3$

b) $\sqrt{4^{10}}$

d) $\sqrt[5]{32^3}$

f) $\sqrt{\sqrt{81}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Ćwiczenie 3

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{[(\sqrt[n]{a})^n]^m} = \sqrt[n]{[(\sqrt[n]{a})^m]^n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ćwiczenie 4

a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8

e) 5 f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4

Prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładniku całkowitym.

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Dla liczb wymiernych x, y i liczb rzeczywistych $a > 0, b > 0$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$ d) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ e) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{2,5}\right)^{0,6}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładniku wymiernym, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$$10^{0,3} \approx 1,995262315$$

$$10^{0,45} \approx 2,818382931$$

$$10^{0,625} \approx 4,216965034$$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

Ćwiczenie 8

a) $10^2 \cdot 10^{0,3} \approx 199,5262$

b) $10^3 \cdot 10^{0,45} \approx 2818,3829$

c) $10^1 \cdot 10^{0,625} \approx 42,1697$

d) $10^{0,3} : 10^2 \approx 0,0200$

Ćwiczenie 5

a) 4 b) 125 c) 16 d) 32 e) $\sqrt[3]{3}$

Ćwiczenie 6

a) $36^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{36})^3 = 216$

b) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot 3 = 12$

d) $(3^2)^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^2 \cdot (\sqrt[3]{8})^{-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

e) $125^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 5 \cdot 3 = 15$

Ćwiczenie 7

a) $9^2 = 81$

b) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{16}$

d) $125^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $2^{\frac{2}{3}}$
 e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$ g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$
2. a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{1}{2}}$ d) $7^{-\frac{1}{3}}$
 e) $7^{-\frac{3}{2}}$ f) $7^{-\frac{3}{5}}$ g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$
3. a) 27 b) 25 c) $\frac{1}{16}$
 d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{12}$ f) 8
 g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09
 d) 125 e) 32 f) 0,008
 g) $411\frac{127}{243}$ h) 0,008
5. a) $2^2 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 \cdot 2^2 = 16$
 b) $3^3 \cdot (3^3)^{-\frac{4}{3}} = 3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 c) $0,2 \cdot 5 = 1$
 d) $0,4^3 \cdot 10^3 = 4^3 = 64$
6. a) 7 b) 5 c) 1 d) $\frac{8}{3}$
7. a) 32 b) 16 c) $\frac{1}{32}$
 d) $\frac{1}{125}$ e) $\frac{1}{27}$

W dalszym toku nauki rozszerzymy pojęcie potęgi na potęgę o wykładniku rzeczywistym, czyli także niewymiernym, np. $2^{\sqrt{3}}$, $10^{\sqrt{2}}$.

W tabeli obok przedstawiono kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $10^{\sqrt{2}}$.

Uwaga. $\sqrt{2} \approx 1,414213562$

$10^{1,4}$	$\approx 25,118864315$
$10^{1,41}$	$\approx 25,703957828$
$10^{1,414}$	$\approx 25,941793621$
$10^{1,414213562}$	$\approx 25,954553497$
$10^{\sqrt{2}}$	$\approx 25,954553519$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.
 a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{0,5}$ e) $\sqrt{512}$ g) $2\sqrt{2}$
 b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ h) $2\sqrt[3]{2}$
2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.
 a) $\sqrt{7^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$
 b) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ h) $7 \cdot \sqrt[5]{7}$
3. Oblicz.
 a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $144^{-0,5}$ g) $10\,000^{0,25}$
 b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $16^{0,75}$ h) $81^{-0,125}$
4. Oblicz.
 a) $0,04^{\frac{3}{2}}$ c) $0,027^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0,0081^{-1,25}$
 b) $0,16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,000\,32^{\frac{3}{5}}$ h) $0,000\,002\,56^{0,375}$
5. Oblicz.
 a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ b) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ c) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ d) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$

Powtórzenie

6. Oblicz.
 a) $25^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}$ b) $32^{\frac{1}{5}} + 81^{\frac{1}{4}}$ c) $4^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}}$ d) $(\frac{9}{16})^{-\frac{1}{2}} + (\frac{27}{64})^{-\frac{1}{3}}$
7. Oblicz.
 a) $16^{\frac{5}{4}}$ b) $64^{\frac{2}{3}}$ c) $8^{-\frac{5}{3}}$ d) $25^{-\frac{3}{2}}$ e) $81^{-\frac{3}{4}}$
8. Oblicz.
 a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}$ b) $49^{\frac{1}{2}} : 49^{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{7^5} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$ d) $9^{-\frac{3}{4}} : 27^{-\frac{3}{2}}$
8. a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$
 b) $49^{\frac{1}{4}} = (49^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$
 c) $7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{-\frac{3}{2}} = 7^1 = 7$
 d) $(3^2)^{-\frac{3}{4}} : (3^3)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}} : 3^{-\frac{9}{2}} = 3^3 = 27$

Nazwy wielkich liczb

Bilion amerykański czy bilion europejski

Dlaczego europejski miliard to amerykański bilion,
a europejski bilion to amerykański trylion?

Amerykańskie nazewnictwo wielkich liczb odnosi się do zapisu 10^{3n+3} i łączy łacińskie przedrostki: *bi-* ($n = 2$), *tri-* ($n = 3$) itd., z końcówką *-lion*.

Europejskie nazewnictwo pokazuje wielokrotność miliona lub miliarda i do łacińskiego przedrostka dodaje, odpowiednio: *-lion* lub *-liard*.

Amerykański matematyk Edward Kasner wprowadził nazwę googol, oznaczająca 10^{100} .

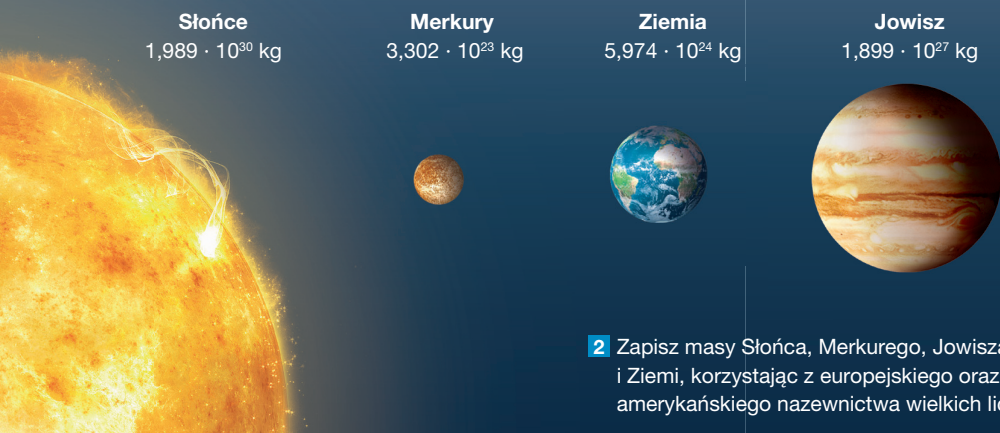
1 googol = 10 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000

- 1** Wyszukaj w internecie informacje o liczbach googol i googolplex.

Potęga 10	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
9	miliard	bilion
12	bilion	trylion
15	biliard	kwadrylion
18	trylion	kwintylion
21	tryliard	seksstylion
24	kwadrylion	septylion
27	kwadryliard	oktylion
30	kwintylion	nonylion
33	kwintyliard	decylio
36	seksstylion	undecylio
39	seksstyliard	duodecylio
42	septylion	tridecylio
45	septyliard	kwatuordecylio
48	oktylion	kwindecylio
51	oktyliard	seksdecylio
54	nonylion	septendecylio

Słońce i planety

Poniżej podano masy: najmniejszej z planet w naszym systemie planetarnym – Merkurego, największej – Jowisza, a także Ziemi i Słońca (na rysunku nie zachowano skali). Masa Słońca stanowi 99,89% masy Układu Słonecznego.



- 2** Zapisz masy Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

2. Nazewnictwo europejskie:
Słońce – 1,989 kwintylionów kg,
Merkury – 330,2 tryliardów kg,
Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,
Ziemia – 5,974 kwadrylionów kg

- Nazewnictwo amerykańskie:
Słońce – 1,989 nonylijonów kg,
Merkury – 330,2 sekstylijonów kg,
Jowisz – 1,899 oktylijonów kg,
Ziemia – 5,974 septylijonów kg

Uczeń:

- oblicza logarytm danej liczby,
- stosuje równości wynikające z definicji logarytmu do obliczeń,
- wyznacza podstawę logarytmu, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
- stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
- uzasadnia podstawowe własności logarytmów.

Ćwiczenie 1

a) 1 b) 2 c) 5 d) -2 e) $\frac{1}{3}$

1.9. Logarytm i jego własności

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on wielocyfrowe tablice takich logarytmów.

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

- a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$
b) $\log 0,1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0,1$
c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Pytanie o wartość $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0,01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatrywane są też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z liczby b jest taka liczba x , że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

- a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$
b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$
c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Pytanie o wartość $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Ćwiczenie 2

a) 4 b) 10 c) -1 d) -3 e) $\frac{1}{2}$

Multiteka

- Wykres funkcji logarytmicznej
- Logarytmy

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Przykład 3

- a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$
b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

W obliczeniach wykorzystywane są następujące własności logarytmów (ich dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \text{logarytm iloczynu}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{logarytm ilorazu}$$

$$\log_a b^p = p \log_a b \quad \text{logarytm potęgi}$$

Przykład 4

- a) $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$
b) $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

- a) $\log_2(64 \cdot 256)$ b) $\log_5(125 \cdot 625)$ c) $\log_5 5\sqrt{5}$ d) $\log_2 8\sqrt[3]{2}$ e) $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5

- a) $\log_2 \frac{0,25}{32} = \log_2 0,25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$
b) $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

- a) $\log_2 \frac{0,5}{64}$ b) $\log_2 \frac{1024}{0,125}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$ e) $\log_3 \frac{243}{\sqrt[3]{3}}$

Ćwiczenie 5

- a) $\log_2 64 + \log_2 256 = 6 + 8 = 14$
b) $\log_5 125 + \log_5 625 = 3 + 4 = 7$
c) $\log_5 5 + \log_5 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
d) $\log_2 8 + \log_2 \sqrt[3]{2} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$
e) $\log_3 9 + \log_3 \sqrt[4]{3} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 6

- a) $\log_2 0,5 - \log_2 64 = -1 - 6 = -7$
b) $\log_2 1024 - \log_2 \frac{1}{8} = 10 - (-3) = 13$
c) $\log_2 \sqrt{2} - \log_2 8 = \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{2}$
d) $\log_5 625 - \log_5 \sqrt{5} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
e) $\log_3 243 - \log_3 \sqrt[4]{3} = 5 - \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 3

- a) 1 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -2 f) $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

Dla dowolnej liczby dodatniej $a \neq 1$:
 $a^0 = 1$, zatem z definicji logarytmu $\log_a 1 = 0$,
 $a^1 = a$, zatem z definicji logarytmu $\log_a a = 1$.

Ćwiczenie 7

a) 20 b) 20 c) 12 d) -16

Odpowiedzi do zadań

1. a) 9 b) 1 c) -5 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{2}$

2. a) 0 b) 5 c) -1 d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$

3. a) -1 b) 2 c) 4 d) 3 e) $\frac{1}{2}$

4. a) 2 b) 4 c) 16 d) 256
e) $\frac{1}{16}$ f) $\frac{1}{4}$

5. a) $2 + 4 = 6$
b) $3 - 2 = 1$
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

6. a) $3 - 1 = 2$
b) $4 - 2 = 2$
c) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

7. a) $\log 10 = 1$
b) $\log 1000 = 3$
c) $\log 100 = 2$

8. a) 2 b) 3 c) -2 d) 4
e) -1 f) 1

9. a) 32 b) 2 c) 9 d) 1 e) 8
f) $\frac{1}{8}$ g) 1000000 h) $\frac{1}{8}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\begin{aligned}\log_2 8^5 &= 5 \log_2 8 = \\ &= 5 \cdot 3 = \\ &= 15\end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

4. Podaj podstawę logarytmu.

a) $\log_a 16 = 4$ c) $\log_a 16 = 1$ e) $\log_a 16 = -1$
b) $\log_a 16 = 2$ d) $\log_a 16 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a 16 = -2$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y .

a) $x = 4, y = 16$ b) $x = 8, y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$

6. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y .

a) $x = 27, y = 3$ b) $x = 81, y = 9$ c) $x = 3, y = \sqrt{3}$

7. Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log 2 + \log 5$ b) $\log 8 + \log 125$ c) $\log 250 + \log \frac{2}{5}$

Powtórzenie

8. Oblicz.

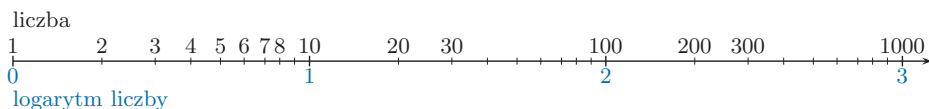
a) $\log_2 1 + \frac{1}{2} \log_2 16$ c) $\log_4 4 - \log_4 64$ e) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}} 3$
b) $\log_3 27 - \log_4 1$ d) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$ f) $\log_4 2 + \log_9 3$

9. Dla jakiej liczby b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{10} b = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_8 b = -1$

Skala logarytmiczna

Czasami, zamiast porównywać dane wielkości, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. Stosuje się wówczas tak zwaną **skalę logarytmiczną**. Jest nią np. **skala Richtera**, określająca siłę trzęsienia ziemi. Wykorzystuje się w niej logarytm dziesiętny. Każdy kolejny stopień tej skali oznacza 10-krotnie większą siłę trzęsienia. Na rysunku poniżej pokazano, jak skonstruować skalę logarytmiczną wykorzystującą logarytm dziesiętny.

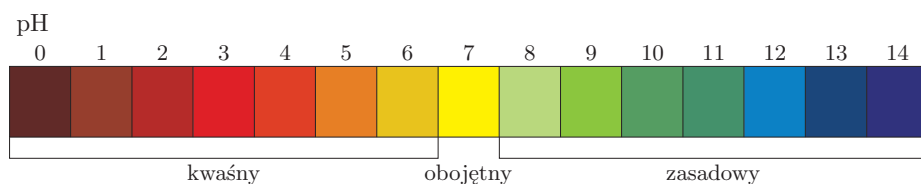


Liczby na górze takiej skali nie są położone równomiernie, ale zgodnie z wartościami ich logarytmów:

$\log 2 \approx 0,30$	$\log 4 \approx 0,60$	$\log 6 \approx 0,78$	$\log 8 \approx 0,90$
$\log 3 \approx 0,48$	$\log 5 \approx 0,70$	$\log 7 \approx 0,85$	$\log 9 \approx 0,95$

- Korzystając z tego, że $\log 10x = 1 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 40, 90.
 - Korzystając z tego, że $\log 100x = 2 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 400, 900.
- Przyjmując jako jednostkę 1 cm, naszkicuj skalę logarytmiczną i zaznacz na niej liczby $a = 10$, $b = 10^4$, $c = 10^6$, $d = 10^{-4}$, $e = 10^{-6}$.

Innym przykładem wykorzystania skali logarytmicznej jest stosowana w chemii skala pH, opisująca odczyn roztworu.



Każdą z liczb od 0 do 14 z powyższej skali otrzymujemy, mnożąc logarytm dziesiętny odpowiedniego stężenia jonów wodorowych przez -1 .

Na przykład dla wody stężenie to wynosi 10^{-7} mol/dm³.

Zatem pH wody obliczamy następująco: $\text{pH}(\text{wody}) = -\log 10^{-7} = 7$.

Dla wody morskiej pH wynosi od 7,5 do 8,4, dla kawy od 5 do 5,9, a dla soku pomarańczowego 3,5.

- $\log 40 = \log(10 \cdot 4) = 1 + \log 4 \approx 1,6$,
 $\log 90 = \log(10 \cdot 9) = 1 + \log 9 \approx 1,95$
 - $\log 400 = 2 + \log 4 \approx 2,6$,
 $\log 900 = 2 + \log 9 \approx 2,95$

Uczeń:

- oblicza procent danej liczby,
- oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba,
- wyznacza liczbę, gdy dany jest jej procent,
- zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent,
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych.

Ćwiczenie 1

Czapka – 27 zł, rękawice – 39 zł, razem 66 zł.

Ćwiczenie 2

Cena nart po obniżce:

marcowej –

$$0,8 \cdot 0,7 \cdot 825 = 462 \text{ [zł]},$$

$$\text{o } 50\% - 0,5 \cdot 825 = 412,5 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Cena kajaka po dwóch zmianach:
 $1,15 \cdot 1,2 \cdot 1000 = 1380 \text{ [zł]}.$

Cena wzrosła o 38% w stosunku do ceny początkowej.

Ćwiczenie 4

Niech c oznacza cenę towaru przed obniżką.

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot c = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot c$$

$$\text{a) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{36}{100}$$

$$p = 20$$

$$\text{b) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{51}{100}$$

$$p = 30$$

1.10. Procenty

■ Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$$1\%w = \frac{1}{100}w = 0,01w; \quad 15\%w = \frac{15}{100}w = 0,15w;$$

$$4,5\%w = \frac{4,5}{100}w = 0,045w$$

1% (1 procent) danej wielkości to 0,01 tej wielkości.

Ćwiczenie 1

Oblicz, ile zapłacimy, jeżeli kupimy czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki).

	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Ćwiczenie 2

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Ćwiczenie 3

Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

Ćwiczenie 4

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p , jeśli: a) $x = 36$, b) $x = 51$.

W niektórych zagadnieniach rozpatruje się dziesiątą część procentu, czyli **promil**.

1‰ (1 promil) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 5

Oblicz.

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) 8‰ liczby 300 | c) 50‰ liczby 100 | e) 0,2‰ liczby 180 |
| b) 22‰ liczby 1400 | d) 5‰ liczby 1000 | f) 5,5‰ liczby 180 |

Ćwiczenie 5

- a) 2,4 b) 30,8 c) 5 d) 5 e) 0,036 f) 0,99

Multiteka

- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca”
- Obliczanie wysokości odsetek na lokacie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

 **Generator**
testów i sprawdzianów

■ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 1

Za jedną akcję firmy X tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2,25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 6

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy Y i firmy Z w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,3 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 7

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x .

- a) $x = 100, y = 50$ b) $x = 50, y = 40$ c) $x = 10, y = 16$

■ Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 2

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% z x , czyli:

$$\frac{85}{100}x = 272 \text{ i stąd } x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320 \text{ [zł]}.$$

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Ćwiczenie 8

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli przed obniżką, korzystając z danych z przykładu 2.

Zadania

- Oblicz.
a) 401% liczby 40 b) 15‰ liczby 300 c) 2‰ liczby 2
- Cenę sukni ślubnej obniżono o $p\%$. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo co przed obniżką?
a) $p = 50$ b) $p = 20$ c) $p = 36$
- Niech c oznacza cenę wyjściową sukni, a x – liczbę procent, o jaką należałoby podnieść cenę.
a) $0,5c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 100$
b) $0,8c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 150$
c) $0,64c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 56,25$

Ćwiczenie 6

Firma Y : o 35%,
firma Z : o 12,5%.

Ćwiczenie 7

- a) $y = 50\%x, x = 200\%y$
b) $y = 80\%x, x = 125\%y$
c) $y = 160\%x, x = 62,5\%y$

Ćwiczenie 8

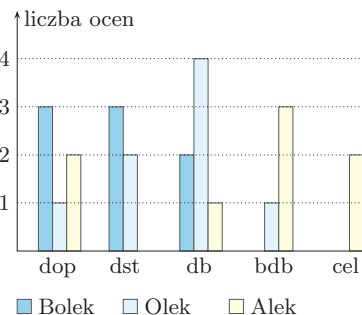
Cena średniego zestawu: 250 zł,
cena małego zestawu: 125 zł.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 160,4 b) 4,5 c) 0,004

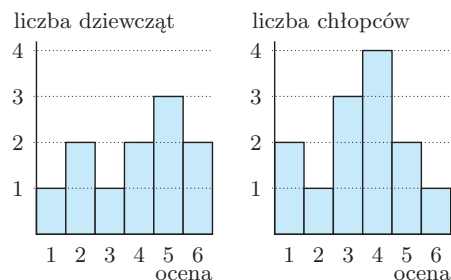
3. Niech c – cena wyjściowa towaru, x – liczba procent, o jaki należałoby obniżyć cenę.
- a) $1,25 \cdot 1,25c \left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
 $x = 36$
- b) $1,5 \cdot 1,5c \left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
 $x = 55,5$
4. a) $0,55 \cdot 200 = 110$
 b) $0,12 \cdot 50 = 6$
 c) $0,002 \cdot 2500 = 5$
5. a) $y = 81; 162$
 b) $y = \frac{4}{25}; 0,8$
 c) $y = \frac{1}{8}; 1$
6. a) $1,1 \cdot 0,9 \cdot 1200 = 1188$ [zł]
 b) $0,75 \cdot 1,25 \cdot 1200 = 1125$ [zł]
 c) $0,75 \cdot 1,2 \cdot 1200 = 1080$ [zł]
7. a) $\frac{5}{8} \cdot 100\% = 62,5\%$
 b) $\frac{18}{24} \cdot 100\% = 75\%$

3. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o $p\%$. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, by kosztował tyle, co na początku?
- a) $p = 25$ b) $p = 50$
4. Oblicz $p\%$ liczby x .
- a) $x = 2^3 \cdot 5^2, p = 55$ b) $x = \sqrt[4]{16} \cdot 5^2, p = 12$ c) $x = \sqrt[3]{64} \cdot 5^4, p = 0,2$
5. Wyznacz liczbę, której $p\%$ jest równe y .
- a) $y = 2^0 \cdot 3^4, p = 50$ b) $y = 2^2 \cdot 5^{-2}, p = 20$ c) $y = 2^{-1} : 2^2, p = 12,5$
6. Wycieczka do Londynu kosztuje 1200 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:
- a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,
 b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
 c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?
7. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.
- a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?
 b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?



Powtórzenie

8. Na diagramach przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopcy). Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ocenę dobrą, a ile procent – ocenę pozytywną.



9. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ? O ile procent liczba y jest mniejsza od liczby x ?
- a) $x = 32, y = 20$ c) $x = 8, y = 6$ e) $x = 22, y = 4,4$
 b) $x = 60, y = 48$ d) $x = 2,4, y = 0,6$ f) $x = 80, y = 25$
8. W klasie jest 24 uczniów. Ocenę dobrą otrzymało 6 uczniów, czyli 25%. Ocenę pozytywną otrzymało 21 uczniów, czyli 87,5%.
9. x większe od y o:
 a) 60% b) 25% c) $33\frac{1}{3}\%$ d) 300% e) 400% f) 220%
- y mniejsze od x o:
 a) 37,5% b) 20% c) 25% d) 75% e) 80% f) 68,75%

6. a) $2 \cdot 10^4 = 20000$
 b) $9 \cdot 10^{10} = 90000000000$
 c) $3 \cdot 10^{12} = 3000000000000$
 d) $1,6 \cdot 10^{11} = 160000000000$
7. a) $9,6 \cdot 10^9$ b) $6 \cdot 10^{-13}$
 c) $1,02 \cdot 10^0$ d) $1,2 \cdot 10^0$

6. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.
 a) $2\,100\,000\,000 : 105\,000$ c) $51\,000\,000\,000 : 0,017$
 b) $243\,000\,000\,000 : 2,7$ d) $102\,400\,000\,000 : 0,64$
7. Oblicz. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.
 a) $\frac{(3,2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1,2 \cdot 10^4)}{4 \cdot 10^{-18}}$ c) $\frac{(3,4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7,5 \cdot 10^{-16})}{2,5 \cdot 10^{-30}}$
 b) $\frac{(5,2 \cdot 10^8) \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})}{1,3 \cdot 10^{18}}$ d) $\frac{(4,8 \cdot 10^{18}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,2 \cdot 10^{16})}$
8. W tabeli podano wybrane szybkości, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	0,000 000 004 6	$4,6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,001 94	$1,94 \cdot 10^{-3}$
Sprinter	10	$1 \cdot 10^1$
Ziemia wokół Słońca	29 600	$2,96 \cdot 10^4$
Światło w próżni	299 792 458	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8$

9. Prędkość światła wynosi w przybliżeniu 300 000 km/s. Odległość, którą przebywa światło w ciągu roku (365 dni), nazywamy rokiem świetlnym. Oblicz, ile kilometrów ma rok świetlny i przedstaw podane niżej wielkości w kilometrach. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

Odległość z Ziemi wyrażona w jednostkach świetlnych		w kilometrach
Księżyc	1,3 sekundy świetlnej	$3,9 \cdot 10^5$
Słońce	8 minut 19 sekund świetlnych	$1,5 \cdot 10^8$
Pluton	5,5 godziny świetlnej	$5,9 \cdot 10^9$
Gwiazda Polarna	około 430 lat świetlnych	$4,1 \cdot 10^{15}$
środek Galaktyki	około 28 000 lat świetlnych	$2,6 \cdot 10^{17}$
najbliższe kwazary	około 1,5 mld lat świetlnych	$1,4 \cdot 10^{22}$

10. Największą prędkość, z jaką kiedykolwiek podróżował człowiek, osiągnęła załoga misji Apollo 10 – wynosiła ona niemal 40 000 km/h. Oblicz, ile czasu zajęłoby pokonanie z tą prędkością odległości dzielącej nas od Gwiazdy Polarnej. Odpowiedź podaj, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą.

9. $1 \text{ rok świetlny} = 300000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ [km]}$

10. $\frac{430 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}}{40000 \text{ km/h}} = 101703600000 \text{ h} \approx 1,017 \cdot 10^{11} \text{ h}$
 $\frac{430 \cdot 300000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{40000} : (24 \cdot 365) = 11771250 \text{ [lat]} \approx 1,17 \cdot 10^7 \text{ [lat]}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Podaj wszystkie dzielniki liczby:
a) 18, b) 38, c) 40, d) 58, e) 68.
- Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:
a) 5, b) 6, c) 7, d) 15?
- Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.
a) $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$ c) $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$ e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$
b) $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$ f) $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$
- Podaj liczbę przeciwną do liczby x i liczbę odwrotną do liczby y .
a) $x = (3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})$, $y = (2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}$
b) $x = (1\frac{1}{6} - \frac{1}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$, $y = (\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{1}{3} : (-1\frac{1}{2})$
c) $x = -48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 54 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}$, $y = 1\frac{1}{3} \cdot (-3\frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}) \cdot 0,5$
d) $x = 0,3(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75$, $y = (\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}$
- Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.
a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$ c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$
- Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.
a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$ e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$ g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$ f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$ h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$
- a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 4 - \sqrt{5}$ przez ich różnicę.
b) Oblicz sześćian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0, (9) - \sqrt[3]{3}$.
c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0, (2) \cdot \sqrt{3}$.

D 8. Uzasadnij, że podana liczba jest wymierna.

- $\log_3 6 + \log_3 1,5$ c) $\log 625 + \log 16$ e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3}$
b) $\log_2 6 - \log_2 0,75$ d) $\log 175 - \log 1\frac{3}{4}$ f) $\log_2 \sqrt{18} - \log_2 3$
- a) $\frac{2 - \sqrt{5} + 4 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5} - (4 - \sqrt{5})} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{-2} = -3 + \sqrt{5}$
b) $(1 - 6\sqrt[3]{3} - (1 - \sqrt[3]{3}))^3 = (-5\sqrt[3]{3})^3 = -375$
c) $(\frac{9}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{9}{2\sqrt{3}})^2 = \frac{81}{2} - \frac{81}{12} = \frac{135}{4} = 33\frac{3}{4}$
- a) $\log_3 6 + \log_3 1,5 = \log_3 9 = 2 \in \mathbb{Q}$
b) $\log_2 6 - \log_2 0,75 = \log_2 8 = 3 \in \mathbb{Q}$
c) $\log 625 + \log 16 = \log 10000 = 4 \in \mathbb{Q}$
d) $\log 175 - \log \frac{7}{4} = \log 100 = 2 \in \mathbb{Q}$
e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3} = \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
f) $\log_2 3\sqrt{2} - \log_2 3 = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

Odpowiedzi do zadań

- a) 1, 2, 3, 6, 9, 18
b) 1, 2, 19, 38
c) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40
d) 1, 2, 29, 58
e) 1, 2, 4, 17, 34, 68
- a) 995 b) 996 c) 994 d) 990
- a) $4\frac{1}{3}$ b) 8 c) $-\frac{1}{15}$
d) 40,9 e) $-13\frac{1}{3}$ f) $3\frac{1}{2}$
- a) $-x = 3\frac{9}{32}$, $\frac{1}{y} = -\frac{4}{7}$
b) $-x = -\frac{19}{21}$, $\frac{1}{y} = 1\frac{8}{37}$
c) $-x = -8,4$, $\frac{1}{y} = -\frac{30}{169}$
d) $-x = \frac{37}{60}$, $\frac{1}{y} = \frac{15}{16}$
- a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, 2
b) $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, 1
c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$, 13
d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$, 8
- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{15}$ e) 2
f) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{8}{9}$

9. a) Zmniejszyło się o 36%.

b) Zmniejszyło się o 1%.

10. Niech x – liczba członków klubu 3 lata temu, wówczas:

$1,2x$ – liczba członków 2 lata temu,

$1,2 \cdot 1,2x = 1,44x$ – liczba członków rok temu.

$$1,44x = 216$$

$$x = 150$$

Trzy lata temu w klubie było 150 członków.

11. a) $0,8 \cdot 1\frac{7}{8} = 1\frac{1}{2}$

b) $0,8 \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

c) $0,8 \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{25}$

d) $0,8 \cdot \frac{55}{64} = \frac{11}{16}$

Zestaw II

1. a) 16, 17, 18

b) 26, 28, 30, 32

2. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$

a) $3\frac{3}{4}$ b) $9\frac{9}{16}$

c) $4\frac{7}{9}$ d) $-\frac{65}{144}$

4. a) $a = 3\sqrt{3}$

b) $a = \frac{5\sqrt{5}}{8}$

c) $a = \frac{16}{9}$

d) $a = \frac{1}{4}$

e) $a = 144$

f) $a = 324$

9. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, jeśli:

a) oba boki skrócono o 20%,

b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

10. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu, jeśli rok temu należało do niego 216 osób?

11. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

a) $\frac{(3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})}{(2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$

c) $\frac{-48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) + (\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}) \cdot 0,5}$

b) $\frac{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{2}{3} : (-2\frac{1}{2})}$

d) $\frac{0,3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75}{(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}}$

Zestaw II

1. a) Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest o 15 większa od podwojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

b) Suma czterech kolejnych liczb parzystych jest o 20 większa od potrojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

2. Liczby $x = 0,(3)$ i $y = 1,(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,

b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$,

c) $\frac{1}{x} + y^2$,

d) $x^2 - \frac{1}{y^2}$.

3. Oblicz sumę oraz iloczyn liczb x i y .

a) $x = \sqrt{1\frac{9}{16}}, y = \sqrt{5\frac{4}{9}}$

c) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{125}}, y = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

b) $x = \sqrt{\frac{28}{63}}, y = \sqrt{\frac{75}{48}}$

d) $x = \sqrt[3]{-8}, y = \sqrt[3]{-\frac{270}{640}}$

4. Wyznacz liczbę a .

a) $\sqrt{3} = \sqrt[3]{a}$

c) $\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{a}$

e) $2\sqrt{3} = \sqrt[4]{a}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{a}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{a}$

f) $3\sqrt{2} = \sqrt[4]{a}$

5. Oblicz $x - \frac{1}{x}$.

a) $x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$

c) $x = (\sqrt{169} - \sqrt{196})^2$

e) $x = \sqrt{88 + \sqrt{144}}$

b) $x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$

d) $x = ((\sqrt{225} - 10)^2)^2$

f) $x = \sqrt{\sqrt{6,25} - 0,25}$

3. a) $x = \frac{5}{4}, y = \frac{7}{3}, x + y = \frac{43}{12}, xy = \frac{35}{12}$

b) $x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{4}, x + y = \frac{23}{12}, xy = \frac{5}{6}$

c) $x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{2}, x + y = 1,7, xy = 0,3$

d) $x = -2, y = -0,75, x + y = -2,75, xy = 1,5$

5. a) $x = -\frac{2}{5}, x - \frac{1}{x} = 2,1$

b) $x = -\frac{4}{3}, x - \frac{1}{x} = -\frac{7}{12}$

c) $x = 1, x - \frac{1}{x} = 0$

d) $x = 625, x - \frac{1}{x} = 624\frac{624}{625}$

e) $x = 10, x - \frac{1}{x} = 9,9$

f) $x = \frac{3}{2}, x - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$



6. Oblicz wartość wyrażenia $2m - 3n$.

a) $3^m = 81$, $0,5^n = 0,125$

c) $0,5^m = 64$, $(\frac{2}{3})^n = 3,375$

b) $6^m = 216$, $0,4^n = 2,5$

d) $(-\frac{1}{3})^m = -27$, $(-\frac{2}{5})^n = -15,625$

7. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{8}{9}$.

a) $\frac{(ab)^{-1}}{b^{-2}a^{-2}}$

c) $\frac{ab^2 \cdot (ab)^{-3}}{(a^0b^{-1})^{-1}}$

e) $\frac{(a^{-1}b^2)^{-3}a^{-2}b^5}{a^2 : (ab)^3}$

b) $\frac{a^5b^{-2}}{(b^{-1}a)^3}$

d) $\frac{(a^7b^{-2}) : b^3}{(a^8 : a^{-3}) \cdot (b^{-2})^2}$

f) $\frac{(a^{-2}b) \cdot (a^3b^4)^{-1}}{(a^2b^{-3}) : (a^5b^{-1})}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^{12}}{x^9} = 64$

c) $\frac{x^5 \cdot x^4}{(x^2)^3} = 27$

e) $\frac{(x^2)^{-3} \cdot x}{(x^{-2})^2} = \frac{2}{7}$

b) $\frac{x^7}{x^{-3}} = 1024$

d) $\frac{x^7 \cdot x^{-3}}{x^{-1}} = 32$

f) $\frac{x^{-4} \cdot x^{-7}}{(x^2)^{-4}} = \frac{1}{8}$

9. Oblicz.

a) $\frac{18^{\frac{2}{5}}}{6^{\frac{7}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}$

b) $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{4}{3}}}$

c) $\frac{14^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$

d) $\frac{20^{1,2} \cdot 24^{0,3}}{6^{1,3} \cdot 25^{0,1}}$

10. Uporządkuj liczby a , b , c i d w kolejności rosnącej.

a) $a = \log_2 64$, $b = \log_3 81$, $c = \log_4 1024$, $d = \log_5 125$

b) $a = \log_2 2\sqrt{2}$, $b = \log_3 9\sqrt[3]{3}$, $c = \log_4 32$, $d = \log_5 0,04$

11. Oblicz 125% liczby x , jeśli:

a) $9 - \frac{3}{2}x = 6$,

b) $3x - 7 = \frac{1}{2}x + 8$,

c) $\frac{x-3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{x-2}{3}$.

12. Oblicz:

a) 6‰ liczby 400,

c) 0,5‰ liczby 64,

b) 15‰ liczby 120,

d) 20,5‰ liczby 8.

13. Wyznacz liczbę:

a) o 2‰ większą od 100,

b) o 1,6‰ większą od 500.

D 14. Uzasadnij, że jeśli $x, y, z \neq 0$ oraz $x + y^{-1} - z^{-2} = 0$, to:

a) $x = \frac{y-z^2}{yz^2}$, b) $y = \frac{z^2}{1-xz^2}$, $xz^2 \neq 1$, c) $z^2 = \frac{y}{1+xy}$, $xy \neq -1$.

D 15. Uzasadnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3,

b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6.

15. a) Rozważmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n+1$, $n+2$. Wówczas:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 3.

b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2n$, $2n+2$, $2n+4$. Wówczas:

$$2n + (2n+2) + (2n+4) = 6n + 6 = 6(n+1)$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 6.

6. a) $m = 4$, $n = 3$,

$$2m - 3n = -1$$

b) $m = 3$, $n = -1$,

$$2m - 3n = 9$$

c) $m = -6$, $n = -3$,

$$2m - 3n = -3$$

d) $m = -3$, $n = -3$,

$$2m - 3n = 3$$

7. a) $ab = \frac{2}{3}$

b) $a^2b = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{(ab)^2} = \frac{9}{4}$

d) $\frac{1}{a^4b} = \frac{32}{9}$

e) $(ab)^2 = \frac{4}{9}$

f) $\frac{1}{a^2b} = 2$

8. a) $x^3 = 64$

$$x = 4$$

b) $x^{10} = 1024$

$$x = -2, x = 2$$

c) $x^3 = 27$

$$x = 3$$

d) $x^5 = 32$

$$x = 2$$

e) $x^{-1} = \frac{2}{7}$

$$x = \frac{7}{2}$$

f) $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{8}$

$$x = 2$$

9. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ d) $\frac{20}{3}$

10. a) $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 3$

zatem $d < b < c < a$

b) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 2\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{2}$,

$$d = -2$$

zatem $d < a < b < c$

11. a) $x = 2$, 125% $x = 2,5$

b) $x = 6$, 125% $x = 7,5$

c) $x = 6$, 125% $x = 7,5$

12. a) 2,4 b) 1,8 c) 0,032

d) 0,164

13. a) 100,2 b) 500,8

14. a) $x = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{y} = \frac{y-z^2}{yz^2}$

b) $y^{-1} = \frac{1}{z^2} - x = \frac{1-xz^2}{z^2}$

Zatem: $y = \frac{z^2}{1-xz^2}$.

c) $z^{-2} = x + y^{-1} = \frac{xy+1}{y}$

Zatem: $z^2 = \frac{y}{1+xy}$.

**Przykład 1**

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci: $7n + 3$, gdzie $1 \leq n \leq 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, by je wszystkie wypisać.

$$1005 = 67 \cdot 15, 1020 = 68 \cdot 15, 1035 = 69 \cdot 15, \dots, 9990 = 666 \cdot 15$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leq n \leq 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 66 = 600$.

Odpowiedź: 600

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci: $100 + 5n$, gdzie $0 \leq n \leq 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci: $102 + 6n$, gdzie $0 \leq n \leq 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci: $120 + 30n$, gdzie $0 \leq n \leq 29$, zatem takich liczb jest 30.

Liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszyte. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

- Przez 15 podzielna jest liczba:
A. 9 720 279, B. 2 220 205, C. 22 222 220, **D. 23 420 340.**
- Liczbą odwrotną do $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3}$ jest:
A. 6, B. 4, C. -4, D. -6.
- Najmniejszą liczbą całkowitą większą od $6 - 2\pi$ jest:
A. -1, **B. 0,** C. 1, D. -2.
- Liczbą wymierną jest:
A. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2}$, B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, C. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, **D. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}}$.**
- Ułamek $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$ jest równy:
A. $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$, B. $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$, **C. -4,** D. 4.
- Ułamek $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2}$ jest równy:
A. 5^6 , B. $15 + 2 \cdot 5^5$, **C. 25,** D. 5^7 .
- Suma $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$ jest równa:
A. 2^{60} , B. 8^{15} , C. 2^{18} , **D. 2^{17} .**
- Która z poniższych liczb jest równa 24?
A. $12 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ B. $8 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ **C. $6 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$** D. $3 \cdot \sqrt{6} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$
- Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić:
A. 84 zł, **B. 100 zł,** C. 360 zł, D. 36 zł.
- Liczba $\log_8 4$ jest równa:
A. $\frac{1}{2}$, B. $\frac{1}{3}$, **C. $\frac{2}{3}$,** D. $\frac{3}{2}$.
- Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło:
A. o 20%, **B. o 25%,** C. o 40%, D. o 75%.

- $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3} = \frac{0,25 - \frac{3}{4}}{-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{6}$
- A. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2} = \sqrt{6} - 2 \notin \mathbb{Q}$
B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1 \notin \mathbb{Q}$
C. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1 \notin \mathbb{Q}$
D. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{6}{54}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
- $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}} = \sqrt[3]{4 \cdot (-16)} = -4$
- $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2} = \frac{5^5 \cdot 5}{5^4} = \frac{5^6}{5^4} = 5^2 = 25$
- $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} = 4 \cdot 2^{15} = 2^2 \cdot 2^{15} = 2^{17}$
- A. $12 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 12 \cdot 2^{\frac{13}{12}} \neq 24$
B. $8 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 8 \cdot 3^2 \neq 24$
C. $6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 6 \cdot 2^2 = 24$
- Niech x – cena normalnego karnetu na basen.
 $0,6x = 60$ [zł]
Zatem $x = 100$ zł.

- A. $8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$
B. $8^{\frac{1}{3}} = 2$
C. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4$

11. $\frac{0,05 - 0,04}{0,04} \cdot 100\% = 25\%$



1. Jest 15 takich liczb: 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98.

$$2. a = \frac{13}{2} - 2, (5) = 2,6 - 2, (5) > 0$$

$$b = \sqrt{2} - 1, (4) < 0$$

Zatem $ab < 0$.

3. Przyprostokątne: $6\sqrt{3}$, $8\sqrt{3}$, przeciwprostokątna: $10\sqrt{3}$, obwód: $24\sqrt{3}$.

$$4. (\sqrt{5})^x = 125\sqrt{5} = 5^3\sqrt{5} = (\sqrt{5})^6 \sqrt{5} = (\sqrt{5})^7,$$

wiec $x = 7$.

$$(\sqrt{2})^y = 1024 = 2^{10} = (\sqrt{2})^{20}, \text{ więc } y = 20.$$

Zatem $3x - y = 1$.

5. Cena netto:
 $307,50 : 1,23 = 250$ [zł]
 Cena netto po obniżce:
 $51,75 : 0,23 = 225$ [zł]
 $250 - 225 = 25$ [zł]

6. Niech x – wyjściowa cena,
 $0,4x$ – cena po obniżce o 60%.
 $(1 + \frac{p}{100}) \cdot 0,4x$ – cena po podwyżce o $p\%$

$$x \cdot 0,4 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = x$$

$$1 + \frac{p}{100} = 2,5$$

$$\frac{p}{100} = 1,5$$

$$p = 150$$

7. Liczby podzielne przez 4:
 100, 104, 108, ..., 996.
 Czyli jest ich 225.

Liczby podzielne przez 5:
 100, 105, 110, ..., 995.
 Czyli jest ich 180.

Liczby podzielne przez 20:
 100, 120, 140, ..., 980.
 Czyli jest ich 45.

Zatem liczb trzycyfrowych podzielnych przez 4 lub przez 5 jest:
 $225 + 180 - 45 = 360$

8. $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{32}{27}$
I sposób: $\frac{\frac{4}{3} - \frac{32}{27}}{\frac{32}{27}} = 0,125$
 Liczba x jest o 12,5% większa od liczby y .
II sposób:
 $x = \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{32}{27} = \frac{9}{8}y = 1,125y$,
 zatem liczba x jest o 12,5% większa od liczby y .

■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Ile jest liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 2 (2 pkt)

Określ znak iloczynu liczb: $a = \frac{13}{5} - 2, (5)$, $b = \sqrt{2} - 1, (4)$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Wiedząc, że $(\sqrt{5})^x = 125\sqrt{5}$ oraz $(\sqrt{2})^y = 1024$, oblicz $3x - y$.

Zadanie 5 (2 pkt)

Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki, jeśli po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł?

Zadanie 6 (2 pkt)

Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$. Wyznacz p , jeśli w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 7 (4 pkt)

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 8 (4 pkt)

O ile procent liczba x jest większa od liczby y , jeżeli $x = (\frac{3}{5} - \frac{2}{15}) : (\frac{11}{20} - 0,2)$, $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$?

Zadanie 9 (4 pkt)

Woda płynąca z kranów: A , B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C ?

D Zadanie 10 (4 pkt)

Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.

9. Oznaczmy przez b objętość wody w pełnym basenie, a przez x – liczbę godzin potrzebnych do napełnienia basenu wodą z kranu C . Wówczas ilość wody wlanej do basenu w ciągu jednej godziny:

- z kranu A jest równa $\frac{1}{10}b$,
- z kranu B jest równa $\frac{1}{12}b$,
- z kranu C jest równa $\frac{1}{x}b$.

Zatem:

$$\frac{b}{10} + \frac{b}{12} + \frac{b}{x} = \frac{b}{4}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15}{60} - \frac{6}{60} - \frac{5}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

$$x = 15 \text{ h}$$

Czyli napełnienie basenu wodą tylko z kranu C trwałoby 15 h.

10. $b = 12 - 5\sqrt{5}$, $c = 7\sqrt{5} - 12$, $b + c = 2\sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt{a}}{b+c} = \frac{\sqrt{45}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \text{ zatem jest to liczba wymierna.}$$