

NOWA **matura**

z matematyki

PODSTAWA
PROGRAMOWA
2024

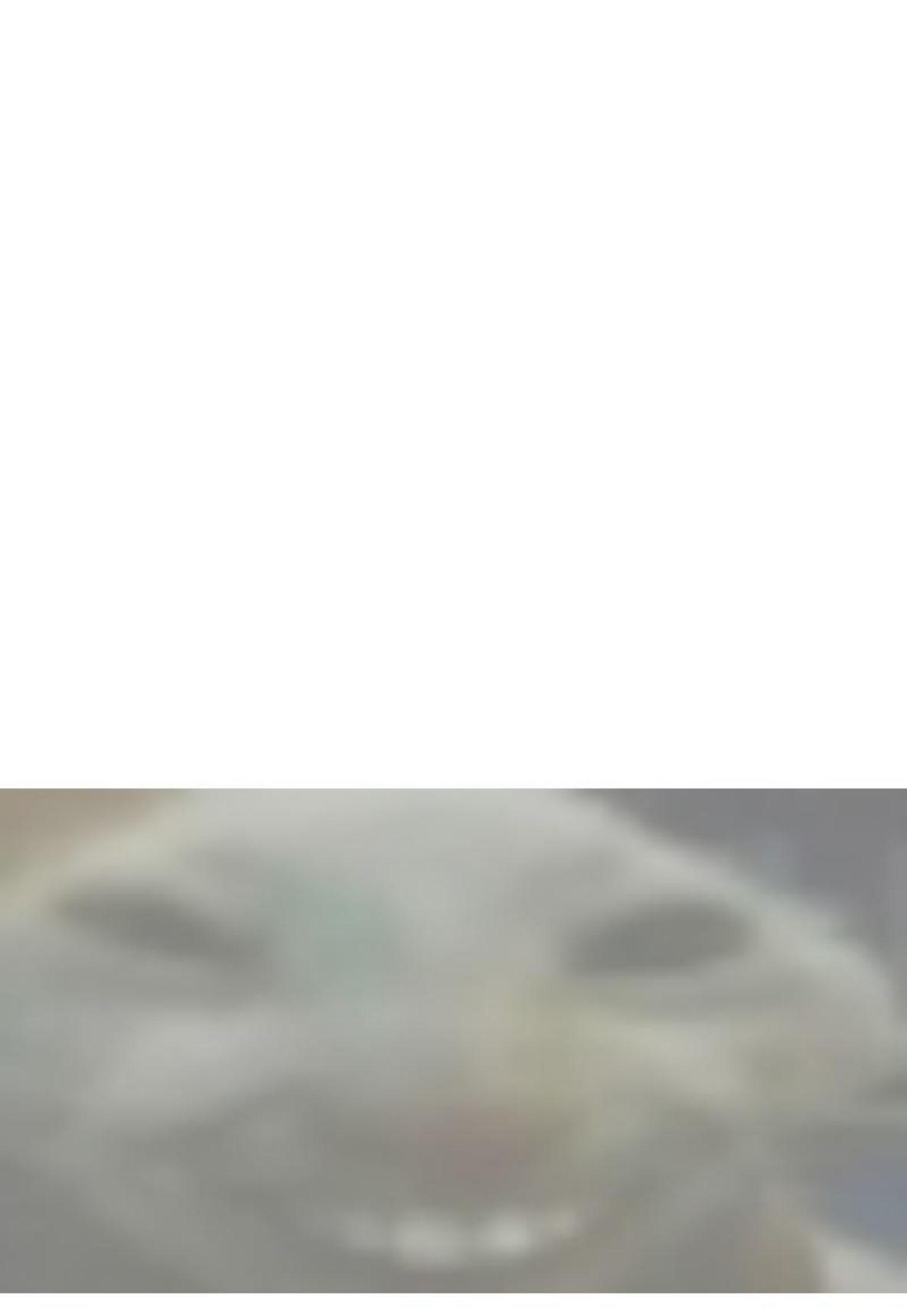
Arkusze

wersja 1

**Zakres podstawowy
i rozszerzony**

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe





Alina Popiołek
Jerzy Radzewicz
Adam Wojacek

NOWA mATURA

z matematyki

Arkusze

Zakres podstawowy
i rozszerzony



Redakcja: *Anna Płońska*

Korekta merytoryczna: *Maria Hoffmann, Bogumiła Kamut, Mirosława Nawrot, Anna Sajko*

Korekta językowa: *Anna Maria Sarmiento*

Okładka: *Jarosław Zakrzewski*

Projekt graficzny i rysunki: *Sławomir Kilian*

Skład (T_EX): *Maria Chojnicka, Łukasz Sitko*

ISBN 978-83-8118-705-3

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2024. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Normex, Gdańsk

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl

lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80

tel. 801 643 917, 58 340 63 63

fax 58 340 63 61, 58 340 63 66

<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

Wstęp	4
Przykładowe arkusze egzaminacyjne (zakres podstawowy)	5
Arkusz egzaminacyjny nr 1*	6
Arkusz egzaminacyjny nr 2*	15
Arkusz egzaminacyjny nr 3	24
Arkusz egzaminacyjny nr 4	33
Arkusz egzaminacyjny nr 5	42
Arkusz egzaminacyjny nr 6	51
Arkusz egzaminacyjny nr 7	60
Arkusz egzaminacyjny nr 8	69
Arkusz egzaminacyjny nr 9	79
Arkusz egzaminacyjny nr 10	88
Przykładowe arkusze egzaminacyjne (zakres rozszerzony)	97
Arkusz egzaminacyjny nr 11	98
Arkusz egzaminacyjny nr 12	107
Arkusz egzaminacyjny nr 13	114
Arkusz egzaminacyjny nr 14	121
Arkusz egzaminacyjny nr 15	129
Schematy rozwiązań zadań otwartych (zakres podstawowy)	137
Schematy rozwiązań zadań (zakres rozszerzony)	171
Odpowiedzi	207

* Arkusz bez zadań z geometrii analitycznej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa

WSTĘP

Drodzy Maturzyści!

Proponujemy Wam książkę, która pomoże solidnie powtórzyć materiał z matematyki i jak najlepiej przygotować się do egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Dzięki niej zapoznacie się z nową strukturą arkuszy egzaminacyjnych oraz sprawdzicie stopień opanowania wiadomości i umiejętności wymaganych na egzaminie.

Główna część publikacji to 15 przykładowych arkuszy egzaminacyjnych wzorowanych na zadaniach egzaminacyjnych CKE. Zostały one uporządkowane w taki sposób, że 10 początkowych arkuszy to zestawy z zakresu podstawowego, a 5 kolejnych – z zakresu rozszerzonego. W dwóch początkowych arkuszach z zakresu podstawowego pominięto treści dotyczące geometrii analitycznej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Możecie po te arkusze sięgnąć nawet wtedy, gdy w szkole nie omówiliście jeszcze tych zagadnień.

Rozwiązanie każdego arkusza egzaminacyjnego powinno trwać nie dłużej niż 180 minut. Warto więc sprawdzić, jak długo pracujecie nad zadaniami z danego zestawu. Istotne jest nabranie wprawy w rozplanowaniu czasu, tak aby wystarczyło go zarówno na rozwiązanie wszystkich zadań, jak i ich sprawdzenie.

W książce, po przykładowych arkuszach egzaminacyjnych, umieściliśmy schematy rozwiązań wszystkich zadań otwartych. Możecie skorzystać z nich, gdy nie macie pomysłu na rozwiązanie zadania. Na końcu publikacji znajdują się odpowiedzi do wszystkich zadań.

Mamy nadzieję, że dzięki tej książce do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpicie pewni siebie i bez zbędnego stresu.

Autorzy

Drodzy Nauczyciele!

Niniejsza książka powstała z myślą o uczniach przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym od roku szkolnego 2024/2025. Może być polecana do samodzielnej pracy ucznia. Można ją też wykorzystać jako pomoc do powtórzenia materiału na lekcji lub sprawdzenia poziomu wiedzy i umiejętności uczniów (do przeprowadzenia próbnej matury). W książce umieszczono 15 przykładowych arkuszy egzaminacyjnych (10 z zakresu podstawowego, 5 z zakresu rozszerzonego) wraz z zasadami oceniania. Zarówno arkusze, jak i zasady oceniania zostały przygotowane na podstawie aktualnych wytycznych CKE.

W zestawach zawarliśmy różnorodne zadania, tak pod względem zakresu materiału, typów zadań, jak i skali trudności.

Mamy nadzieję, że nasza publikacja pomoże Państwu uczniom nabrać wprawy w rozwiązywaniu zadań egzaminacyjnych i w rezultacie dobrze przygotować się do egzaminu maturalnego z matematyki.

Autorzy

PRZYKŁADOWE ARKUSZE EGZAMINACYJNE

(zakres podstawowy)

Zadanie 1. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{\log 1234 - \log 1,234}{\log 123,4 - \log 12,34}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

Zadanie 2. (0-1)



Wskaż liczbę, której odwrotność jest liczbą całkowitą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{-64}}{\sqrt{0,64}}$ B. $\frac{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[4]{625}}{\sqrt{25}}$ C. $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{343}} \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{0,49}}$ D. $\frac{\sqrt[5]{100\,000} : \sqrt[3]{-1\,000\,000}}{\sqrt[4]{0,0001}}$

Zadanie 3. (0-1)



Ile procent liczby $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3-\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3+\sqrt{2}}$ stanowi liczba $y = 4^{2-\sqrt{3}} \cdot 4^{2+\sqrt{3}}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 6,25% B. 12,5% C. 16% D. 25%

Zadanie 4. (0-2)

Dany jest zestaw czterech liczb:

$$w = 9^{-\frac{5}{2}} \quad x = 81^{\frac{3}{4}} \quad y = 27^{-\frac{4}{3}} \quad z = (\sqrt{3})^4$$

Z tego zestawu usunięto jedną liczbę i okazało się, że iloczyn trzech pozostałych jest równy 1.

Ustal, którą liczbę usunięto. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-1)



Wskaż przedział, do którego należy liczba a spełniająca warunek $\log_2 a = 1 + \log_2 5$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $(-\infty; 4)$ B. $[4; 8)$ C. $[8; 16)$ D. $[16; +\infty)$

Zadanie 6. (0-2)

Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych nie jest podzielna przez 3.

Zadanie 7. (0-1)



Dane są cztery wyrażenia:

$$P(x) = 4x^2 + 3x$$

$$Q(x) = 10x^2 - 6$$

$$R(x) = 7x^2 + 9x$$

$$S(x) = 16x^2 - 12$$

Jedno z tych wyrażeń pominięto i obliczono sumę pozostałych wyrażeń. Ta suma jest równa $T(x) = 27x^2 + 12x - 12$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przy obliczaniu tej sumy pominięto wyrażenie:

- A. $P(x)$ B. $O(x)$ C. $R(x)$ D. $S(x)$

Zadanie 8. (0-2)

Wartość wyrażenia $x^5 + 2x^3 - 1000x^2$ dla pewnej liczby dodatniej k jest równa 2000, a wartość wyrażenia $x^3 + 2x - 1000$ dla tej samej liczby k jest równa 20.

Oblicz wartość wyrażenia $x^4 + 2x^2 - 1000x$ dla liczby k . Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-1)



Dane są dwa równania:

$$I. \frac{x-1}{x+2} = \frac{x-2}{x}$$

$$\text{II. } \frac{2x-1}{x} = \frac{5}{3}$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Równanie I ma więcej pierwiastków niż równanie II.	P	F
Nie istnieje liczba, która jest jednocześnie pierwiastkiem równania I i równania II.	P	F

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

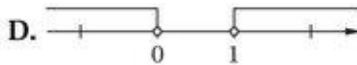
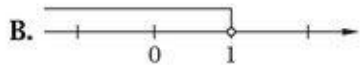
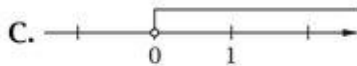
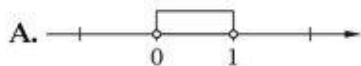
Suma wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność $\frac{6-x}{2} > \frac{2-x}{6}$ jest równa:

- A. 28 B. 21 C. 15 D. 10

Zadanie 11. (0-1)

Wskaż rysunek, na którym na osi liczbowej zaznaczono zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność $x^2 < x$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Zadanie 12. (0-1)**

Wskaż układ równań, który spełnia więcej niż jedna para liczb.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ -3x + 2y = -6 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 6y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 6x - y = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

Zadanie 13. (0-3)

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + px + q$, dla którego $W(2) = 3^2$ i $W(3) = 2^3$.

Wyznacz wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = -1$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1)

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = mx^2 - x + \frac{1}{4}$, gdzie $m \neq 0$. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba m jest równa:

- A. 4 B. 1,5 C. 1 D. 0,5

Zadanie 15. (0-1)

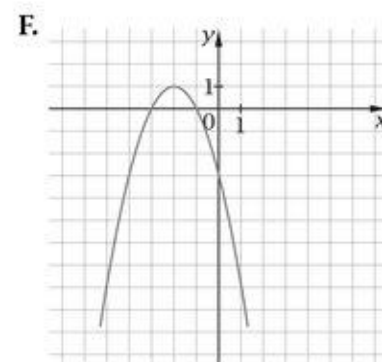
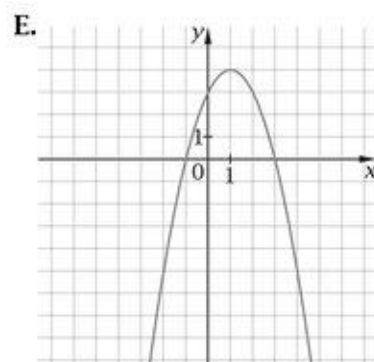
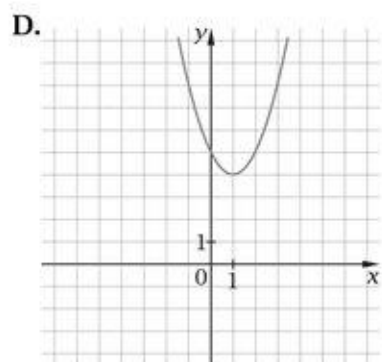
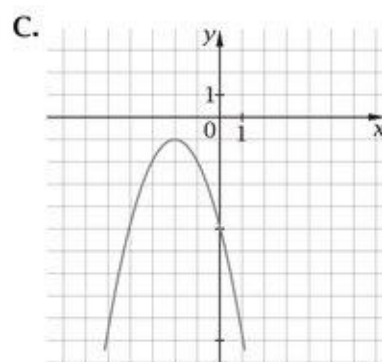
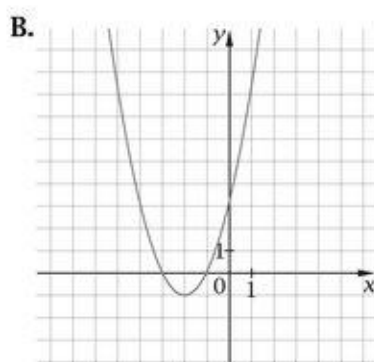
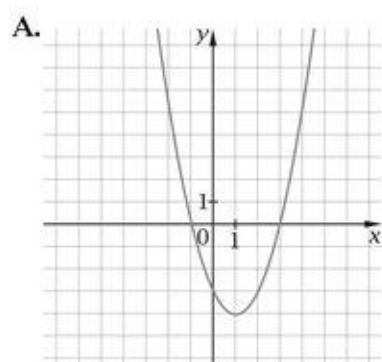
Dane są funkcje f i g określone wzorami: $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$, $g(x) = -3x + 11$. Wiadomo, że wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie P .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Punkt P ma współrzędne

Zadanie 16. (0-2)


Na rysunkach A-F przedstawiono fragmenty wykresów funkcji kwadratowych, w tym fragmenty wykresów funkcji $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ i $g(x) = x^2 + 4x + 3$.



Każdej z funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ przyporządkuj fragment jej wykresu. Wpisz obok symbolu funkcji w tabeli poniżej właściwą odpowiedź wybraną spośród A-F.

Numer zadania	Funkcja	Rysunek
16.1.	$y = f(x)$	
16.2.	$y = g(x)$	

Zadanie 21. (0-3)

Liczby 6, 12, 18, 27 wypisane w tej kolejności nie tworzą ciągu geometrycznego, ale można zmienić jedną z nich tak, aby otrzymać cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) .

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest liczbą dodatnią.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- | | |
|---|---|
| A. $\sin 120^\circ - \cos 120^\circ$ | C. $\sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ$ |
| B. $\operatorname{tg} 130^\circ + \cos 130^\circ$ | D. $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \sin 150^\circ$ |

Zadanie 23. (0-2)

Bok rombu o polu równym 24 ma długość 5.

Oblicz tangens kąta rozwartego tego rombu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-2)

Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długości 1 cm i 2 cm. Sinus kąta między tymi bokami jest równy $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Pole tego trójkąta jest równe:

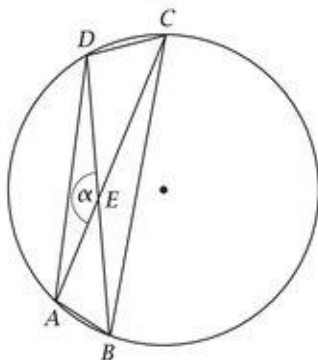
- | | | | |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| A. $4\sqrt{15} \text{ cm}^2$ | B. $2\sqrt{15} \text{ cm}^2$ | C. $\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}^2$ | D. $\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$ |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

2. Obwód tego trójkąta jest równy:

- | | | | |
|------|---------------------------|--------------------|------|
| E. 4 | F. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ | G. $2 + \sqrt{15}$ | H. 5 |
|------|---------------------------|--------------------|------|

Zadanie 25. (0-1)

Przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek). Kąt wpisany ACB opiera się na łuku, który stanowi $\frac{1}{15}$ całego okręgu, a kąt CBD opiera się na łuku, który stanowi $\frac{1}{12}$ całego okręgu.



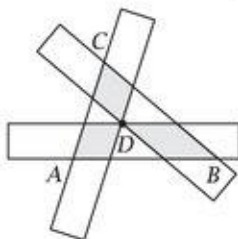
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta rozwartego AED jest równa:

- A. 126° B. 132° C. 153° D. 155°

Zadanie 26. (0-1)

Trzy paski folii o jednakowej szerokości naklejono tak, jak na rysunku.



Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta różnobocznego ABC i każdy z tych punktów leży na brzegu dwóch pasków.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W punkcie D , który leży na brzegu wszystkich trzech pasków przecinają się:

- A. dwusieczne trzech kątów wewnętrznych tego trójkąta
B. środkowe tego trójkąta
C. symetralne trzech boków tego trójkąta
D. proste zawierające wysokości tego trójkąta

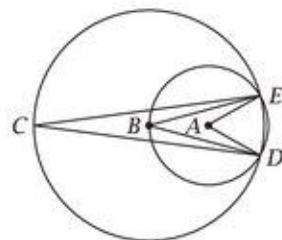
Zadanie 27. (0-1)

Punkt B jest środkiem okręgu O_1 i należy do okręgu O_2 o środku A . Okręgi te przecinają się w punktach D i E , a punkt C należy do okręgu O_1 (zobacz rysunek). Suma miar kątów DAE, DBE, DCE jest równa 98° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszy spośród kątów DAE, DBE, DCE ma miarę:

- A. 35° B. 21° C. 15° D. 14°



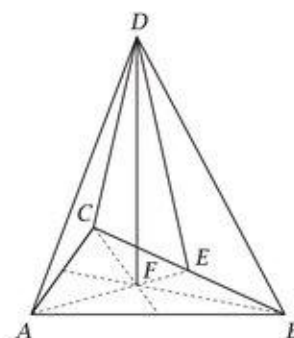
Zadanie 28. (0-2)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 5$, $|AC| = 12$ oraz $\cos \sphericalangle CAB = -0,6$.

Wyznacz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 29.**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCD$ punkt D jest wierzchołkiem ostrosłupa, a punkt F — spodem jego wysokości. Wysokość DE ściany bocznej jest dwa razy dłuższa niż odcinek EF (zobacz rysunek).

**Zadanie 29.1. (0-1)**

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Miara kąta DEF jest równa stopni.

**Zadanie 29.2. (0-1)**

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości ostrosłupa jest równy



Zadanie 1. (0-1)



Wskaż liczbę równą wartości wyrażenia $\frac{(10^5)^3}{10^6 \cdot 10^7 \cdot 10^8}$.

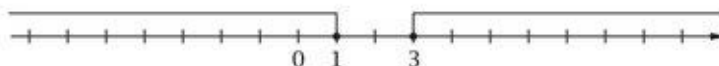
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 0,00001 B. 10^{-6} C. $\frac{1}{100^2}$ D. $0,001^{-2}$

Zadanie 2. (0-1)



Wskaż równanie, którego wszystkie rozwiązania należą do zbioru przedstawionego na osi liczbowej (zobacz rysunek).



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $|x - \frac{1}{2}| = 1\frac{1}{2}$ B. $|x - 2\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ C. $|x - 2| = 1$ D. $|x + 1| = 3$

Zadanie 3. (0-1)



Dane są liczby:

$$a = \log_{64} 8 \quad b = \log_8 8 \quad c = \log_2 8 \quad d = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

Wskaż nierówność prawdziwą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $a < bcd$ C. $c < abd$
B. $b < acd$ D. $d < abc$

Zadanie 4. (0-1)



Jurek wypisał od najmniejszej do największej wszystkie liczby dwucyfrowe, w zapisie których występują jedynie cyfry 1, 2 lub 3.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Piąta z kolei liczba w zapisie Jurka ma sumę cyfr równą 4.	P	F
Suma wszystkich liczb wypisanych przez Jurka jest mniejsza od 200.	P	F

Zadanie 5. (0-1)



Dane jest równanie z niewiadomą x :

$$(2\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} + 3) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą liczbą x , która spełnia to równanie jest:

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

Zadanie 6. (0-1)

Dane jest wyrażenie:

$$W(x) = (x + \sqrt{2}y)^2 - (x - \sqrt{2}y)^2$$

Wartość wyrażenia $W(x)$ dla pewnych liczb rzeczywistych x, y jest równa 24.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn xy jest równy:

- A. 12 B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. $3\sqrt{2}$

Zadanie 7. (0-1)

Dane są dwa wyrażenia:

$$P(x) = |x - 2| - 2 \quad Q(x) = x - 4$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dla każdej liczby $x \in [-2; +\infty)$ wartości obu wyrażeń są równe.	P	F
Dla każdej liczby ujemnej x zachodzi $P(x) \cdot Q(x) < 0$.	P	F

Zadanie 8. (0-1)

Dane jest równanie $\frac{(x-2)(x^2-1)}{(8-4x)(1+x)} = 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań tego równania jest:

- A. $\{1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-1, 2\}$ D. $\{-2, -1\}$

Zadanie 9. (0-3)

W każde pole szachownicy o n wierszach i n kolumnach, gdzie $n > 1$, wpisano liczbę określającą, z iloma polami sąsiaduje ono wzdłuż boku. Suma wszystkich tych liczb jest równa 22 200.

Wyznacz liczbę n . Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-2)

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Równanie $x + 2y = 1$ tworzy układ sprzeczny wraz z równaniem:

A. $2x - 4y = 2$

C. $-x + 2y = 1$

E. $-x - 2y = 2$

G. $x - 2y = 1$

B. $x + 2y = 1$

D. $2x + 4y = 1$

F. $-2x + 4y = 2$

Zadanie 11. (0-3)

Wojciech ma 20 lat. Osiem lat temu wiek Joanny stanowił 160% średniej arytmetycznej ówczesnego wieku Wojciecha i Katarzyny. Za osiem lat wiek Katarzyny będzie stanowił 80% średniej arytmetycznej wieku, który wówczas osiągną Joanna i Wojciech.

Oblicz, jakim procentem obecnej średniej arytmetycznej wieku Joanny i Katarzyny jest obecny wiek Wojciecha. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ -1,5x + 3 & \text{dla } x \in (-2; 2] \\ 0,5x - 3 & \text{dla } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscem zerowym funkcji f nie jest liczba:

A. -4

B. 2

C. 3

D. 6

Zadanie 13. (0-2)

Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 + kx + 6$ należy punkt $P = (-1, 4)$, gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1)

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje liczbę o 8 od niej mniejszą.

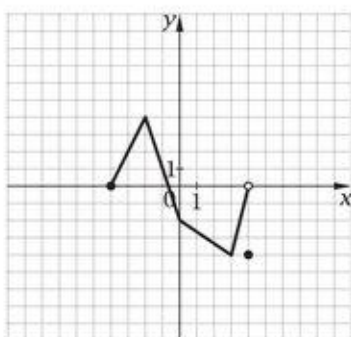
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miejszem zerowym funkcji f jest liczba (-8) .	P	F
Funkcja f przyjmuje wartości ujemne jedynie dla argumentów ujemnych.	P	F

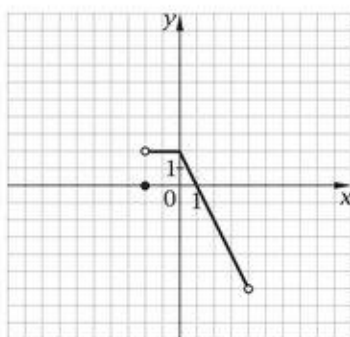
Zadanie 15. (0-2)

Na rysunkach A-F przedstawiono wykresy różnych funkcji. Wśród nich jest wykres funkcji $y = f(x)$ o dziedzinie $[-6; 2]$ i przyjmującej dla każdego argumentu mniejszego od -2 wartość mniejszą od -2 oraz wykres funkcji $y = g(x)$, której zbiorem wartości jest $[-4; 4]$, a liczba -2 jest jej miejscem zerowym.

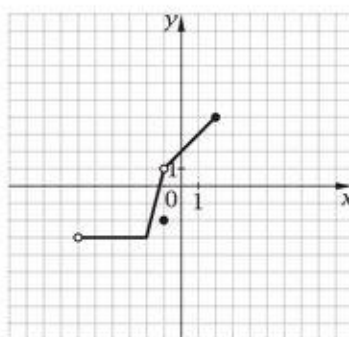
A.



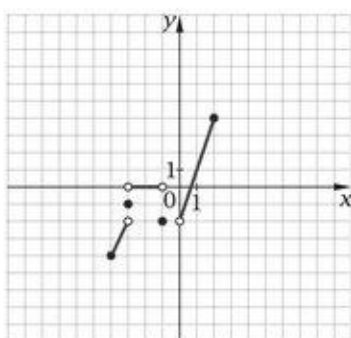
B.



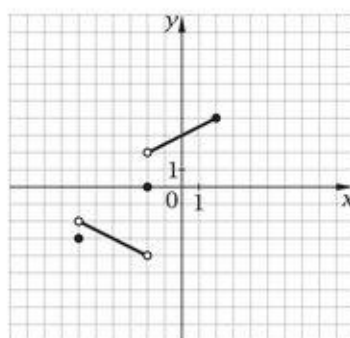
C.



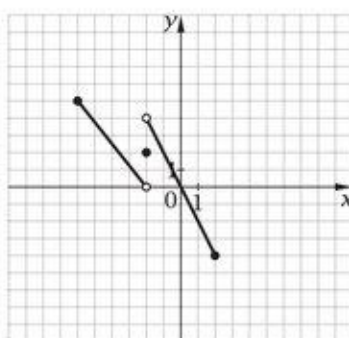
D.



E.



F.

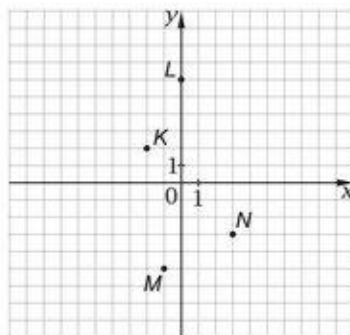


Każdej z funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ przyporządkuj rysunek, na którym przedstawiono jej wykres. Wpisz obok symbolu funkcji w tabeli poniżej właściwą odpowiedź wybraną spośród A-F.

Numer zadania	Funkcja	Rysunek
15.1.	$y = f(x)$	
15.2.	$y = g(x)$	

Zadanie 16. (0-1)

Dziedzinę funkcji $f(x) = 6 - x^2$ tworzą wszystkie liczby rzeczywiste. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty K, L, M, N .



Jeden z nich nie należy do wykresu funkcji f . Który to punkt?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. K B. L C. M D. N

Zadanie 17. (0-1)

Dla pewnej liczby rzeczywistej x ciąg $2, x, 8$ jest geometryczny, a ciąg $12, x, -20$ jest arytmetyczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz ciągu geometrycznego jest równy:

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

Zadanie 18. (0-1)

Wszystkie wyrazy malejącego ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie. Wskaż wyrażenie, które ma najmniejszą wartość.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{a_7}{a_2}$ B. $\frac{a_{14}}{a_{12}}$ C. $\frac{a_8}{a_{11}}$ D. $\frac{a_{10}}{a_{14}}$

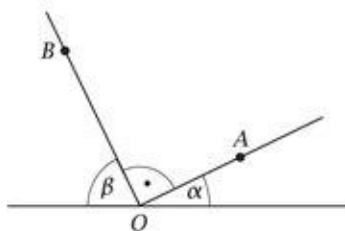
Zadanie 19. (0-2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = 2n + 8$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wyznacz pięć kolejnych wyrazów ciągu (a_n) , których suma jest równa 180. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-2)

Półproste OA i OB są prostopadłe, a tangens kąta α jest równy $\frac{1}{2}$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Sinus kąta α jest równy:

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. Tangens kąta β jest równy:

- E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ F. $\frac{1}{2}$ G. $\sqrt{2}$ H. 2

Zadanie 21. (0-2)

Dla kąta ostrego α określono wyrażenie:

$$W = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$$

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Obliczono wartość wyrażenia W dla każdego $\alpha \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$. Największą wartość otrzymano dla:

- A. $\alpha = 0^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 60^\circ$

2. Dla każdej wartości $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ wyrażenie W jest równe:

- E. $\frac{1}{\sin \alpha}$ F. $\frac{1}{\cos \alpha}$ G. $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ H. 1

Zadanie 22. (0-4)

W trójkącie prostokątnym ABC , w którym przyprostokątne mają długości: $|AC| = 1$ i $|AB| = 7$, obrano na boku AB punkt D taki, że $\frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = 1,75$.

Wyznacz iloraz $\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ACD}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 23. (0-1)

Na okręgu o promieniu 6 zaznaczono łuk AB o długości $1,5\pi$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Kąt środkowy opierający się na łuku AB stanowi $\frac{1}{8}$ kąta pełnego.	P	F
Łuk AB jest 7 razy krótszy od pozostałej części okręgu.	P	F

Zadanie 24.

W okrąg o środku S i promieniu 10 wpisano wielokąt foremny W_1 , który ma dokładnie 12 osi symetrii. Punkty A, B, C są kolejnymi wierzchołkami tego wielokąta. Ponadto co drugi wierzchołek wielokąta W_1 połączono odcinkami, otrzymując w ten sposób wielokąt W_2 .

Zadanie 24.1. (0-3)

Oblicz pole czworokąta $ABCS$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24.2. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Pole wielokąta W_2 jest równe

Zadanie 25.

Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AB| = 10$, $|AC| = 12$, $|BC| = 14$ oraz $\sin \sphericalangle ACB = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Zadanie 25.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Trójkąt ABC jest trójkątem:

A.	prostokątnym,	ponieważ	1.	$\cos \sphericalangle ABC > 0$.
B.	ostrokątnym,		2.	$\cos \sphericalangle BAC > 0$.
C.	rozwartokątnym,		3.	$\sin \sphericalangle ACB > \frac{1}{2}$.

Zadanie 25.2. (0-3)

Wykaż, że suma wysokości trójkąta ABC jest większa od $12\sqrt{6}$.

**Zadanie 26. (0-1)**

Pole rombu o boku długości 5 jest równe 15.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta ostrego tego rombu jest równy:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

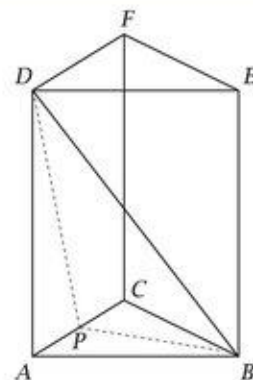
Zadanie 27. (0-1)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCDEF$ poprowadzono odcinek DP , gdzie P jest środkiem krawędzi AC (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt BDP , to kąt nachylenia:

- A. odcinka AB do ściany $ABED$
 B. odcinka BD do ściany ABC
 C. odcinka BP do ściany $ACFD$
 D. odcinka BD do ściany $ACFD$



Zadanie 28. (0-1)

W pewnym ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między dwiema krawędziami bocznymi ma miarę dwukrotnie mniejszą niż kąt między dwiema krawędziami podstawy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równa:

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

Zadanie 29. (0-2)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12. Tangens kąta między krawędzią boczną a podstawą jest równy $2\sqrt{2}$.

Wyznacz objętość ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30.

Do zestawu liczb: 2, 3, 7, 15, 23 dołączono jeszcze średnią arytmetyczną wszystkich liczb tworzących ten zestaw i otrzymano zestaw powiększony Z_p .

Zadanie 30.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Mediana zestawu Z_p jest równa

Zadanie 30.2. (0-1)

Znajdź taką liczbę, która wraz z liczbami zestawu Z_p utworzy zestaw o średniej arytmetycznej równej 11. Zapisz obliczenia.

Zadanie 1. (0-1)



O ile liczba $a = 2 \log_3 3\sqrt{10}$ jest większa od liczby $b = 2 \log_3 \sqrt{10}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. o $2\sqrt{10}$ B. o 3 C. o 2 D. o 9

Zadanie 2. (0-1)



Jaki procent liczby $z = \frac{(16^3 \cdot (0,25)^5)^4}{(0,5)^{-5}}$ stanowi liczba $t = \frac{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt[6]{243}}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 112,5% B. $88\frac{8}{9}\%$ C. 12,5% D. $11\frac{1}{9}\%$

Zadanie 3. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

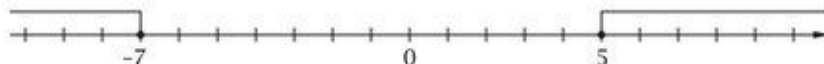
Niech liczba naturalna n daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3. Wówczas wartość wyrażenia $3n^2 + 2n$ dla tej liczby n daje przy dzieleniu przez 4 resztę:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 4. (0-1)



Na osi liczbowej przedstawiono zbiór A (zobacz rysunek).



Wskaż liczbę, która nie należy do zbioru A .

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $|\sqrt{26}|$ B. $-2 \cdot \left| -3\frac{1}{2} \right|$ C. $-|10 - \sqrt{7}|$ D. $|3\sqrt{3} - 1|$

Zadanie 5. (0-2)

Wiadomo, że liczby a i b są dodatnie oraz $a^2 + b^2 = 14ab$.

Wykaż, że dla każdej liczby a i b prawdziwa jest równość:

$$2 \log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$$



Zadanie 6. (0-1)

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + mx^2 + mx + 3$, gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Dla jakiej wartości m jest spełniony warunek $W(-2) + W(0) = -8$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. dla $m = -3$ B. dla $m = -2,5$ C. dla $m = 4$ D. dla $m = 5$

Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedzina wyrażenia wymiernego $\frac{4x}{(x^2+1)(4x+3)}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}, 0\right\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{3}{4}\right\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{3}{4}, 1\right\}$

Zadanie 8. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równość $\frac{x}{y} = \sqrt{7} + 1$ spełnia para liczb:

- A. $x = \sqrt{7} + 2$ i $y = 2$ C. $x = 6$ i $y = \sqrt{7} - 1$
B. $x = 2\sqrt{7} + 1$ i $y = 2$ D. $x = 2$ i $y = \sqrt{7} - 1$

Zadanie 9. (0-1)

Dla jakiej wartości parametru m równanie $m^2x - 5 = 25x + m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. dla $m = 5$ B. dla $m = -5$ C. dla $m = 0$ D. dla $m = 25$

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie:

$$\frac{3x+4}{2x-1} = \frac{3}{2}$$

w zbiorze liczb rzeczywistych:

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie C. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie dwa rozwiązania D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zadanie 11. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

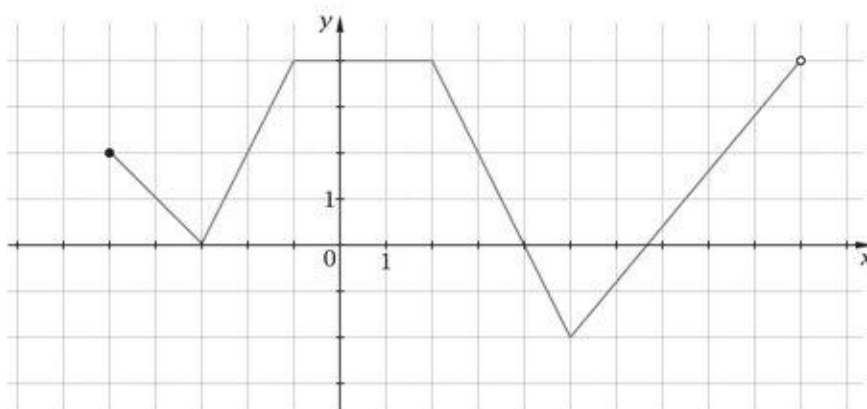
Układ równań zapisany w ramce:

- A. jest nieoznaczony C. jest sprzeczny
B. jest oznaczony D. ma dokładnie dwa rozwiązania

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{x-1}{2} = 4 \\ \frac{y-4}{2} - \frac{x-y}{3} = 5 \end{cases}$$

Zadanie 12.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.

**Zadanie 12.1. (0-1)**

Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .

**Zadanie 12.2. (0-1)**

Oblicz różnicę między największą a najmniejszą wartością funkcji f .

**Zadanie 12.3. (0-1)**

Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .



Zadanie 13.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$ oraz funkcja liniowa g , której wykres przecina oś y układu współrzędnych w tym samym punkcie co wykres funkcji f oraz funkcja g przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Zadanie 13.1. (0-1)

Wyznacz wzór funkcji g . Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.2. (0-2)

Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcje f i g jednocześnie przyjmują wartości ujemne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1)

Dla jakiej wartości a do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt $(-2, 16)$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych:

A. $a = \frac{1}{4}$

B. $a = \frac{1}{8}$

C. $a = 4$

D. $a = -8$

Zadanie 15. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przesuwając wykres funkcji $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ o pięć jednostek w lewo i siedem jednostek w dół otrzymamy wykres funkcji g określonej wzorem:

A. $g(x) = (x + 4)^2 - 5$

C. $g(x) = (x - 4)^2 - 7$

B. $g(x) = (x - 6)^2 - 5$

D. $g(x) = (x - 8)^2 - 3$

Zadanie 16. (0-3)

Wykres funkcji kwadratowej f ma z prostą $y = -2$ jeden punkt wspólny, a prostą $y = 6$ przecina w punktach o współrzędnych $(-5, 6)$ i $(11, 6)$.

Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ dla liczb naturalnych $n \geq 1$ jest:

A.	malejący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	1.	$-\frac{2n-1}{2n+1} < 0$.
B.	stały,		2.	$a_{n+1} - a_n > 0$.
C.	rosnący,		3.	$\frac{2n}{2n} = 1$ i $\frac{-1}{1} = -1$.

Zadanie 18. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5^{n+1} + 5^n + 5^{n-1}$ dla liczb naturalnych $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) można zapisać w postaci $a_n = 5^{3n}$.	P	F
Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 5$ i $a_1 = 31$.	P	F

Zadanie 19. (0-1)

Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_6 + a_{13} + a_{15} + a_{19} + a_{22} = 120$. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 24?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. a_{15} B. a_{17} C. a_{18} D. a_{14}

Zadanie 20. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α jest rozwarty i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$. Wynika stąd, że:

- A. $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ C. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ D. $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$

Zadanie 21. (0-1)

Ile jest równe pole kwadratu, którego przekątna jest o 3 dłuższa od jego boku?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $27 - 18\sqrt{2}$ B. $9 + 6\sqrt{2}$ C. $27 + 18\sqrt{2}$ D. 27

Zadanie 22. (0-1)

W trójkącie prostokątnym o bokach długości 2, $2\sqrt{3}$, 4, poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach:

- A. 2 i 2 C. $\frac{1}{2}$ i $3\frac{1}{2}$
B. 1 i 3 D. $2 - \sqrt{3}$ i $2 + \sqrt{3}$

Zadanie 23. (0-2)

W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długości 9 i 5, cosinus kąta ostrego jest równy $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Oblicz wysokość trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-1)

Trójkąt ABC podzielono na dwie figury: trójkąt T_1 i trapez T_2 prostą przechodzącą przez środki boków AC i BC .

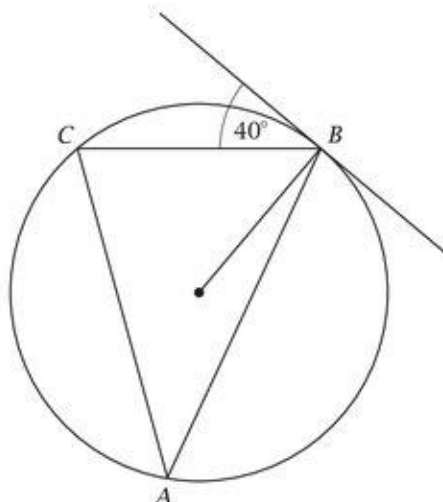
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek pola trójkąta T_1 do pola trapezu T_2 jest równy:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{3}$

Zadanie 25. (0-1)

Na trójkącie ABC opisano okrąg. Styczna do okręgu w wierzchołku B tworzy z bokiem BC kąt 40° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

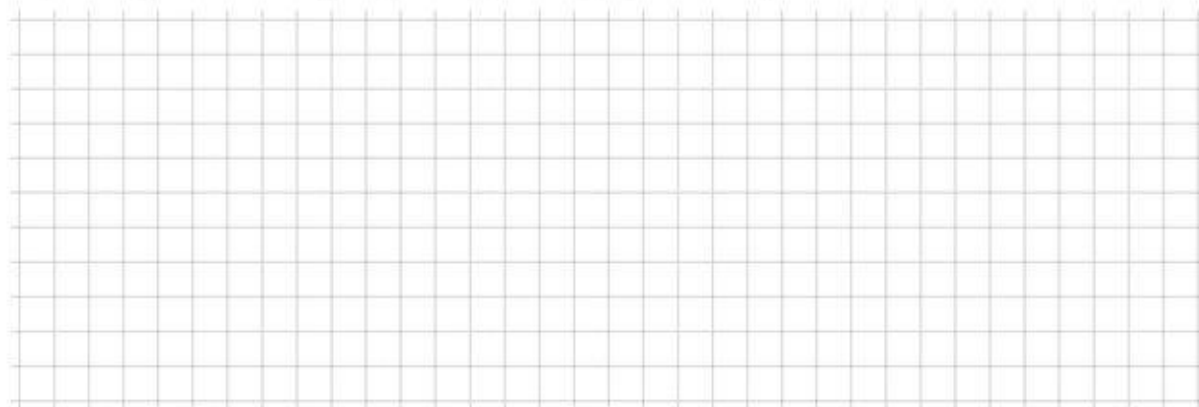
Miara kąta BAC trójkąta ABC jest równa:

- A. 80° B. 40° C. 50° D. 20°

Zadanie 26. (0-3)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ i $|BC| = 5$.

Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 27. (0-2)**

Punkty $A = (0, -3)$ i $C = (4, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $ABCD$, którego pole jest równe 60.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Długość przekątnej BD rombu $ABCD$ jest równa:

- A. $6\sqrt{5}$ B. $20\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{5}$ D. 10

2. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie o współrzędnych:

- E. (2, 1) F. (2, -1) G. (-2, 1) H. (2, 4)

Zadanie 28. (0-1)

Dane są punkty $K = (4\sqrt{3}, 0)$, $L = (6, 2\sqrt{3} - 4)$ i $M = (2\sqrt{3}, -2)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Prosta przechodząca przez punkty K i M ma równanie $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$.	P	F
Punkty K , L i M są współliniowe.	P	F

Zadanie 29. (0-2)

Średnica okręgu jest odcinek AB o końcach $A = (-2, 3)$ i $B = (6, -1)$.

Wyznacz równanie tego okręgu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30.

Podstawą pewnego ostrosłupa prostego P jest sześciokąt foremny F , którego bok ma długość $6\sqrt{3}$. Wysokość tego ostrosłupa jest dwa razy krótsza od krawędzi bocznej.

Zadanie 30.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Kąt między wysokością ostrosłupa P a jego krawędzią boczną ma miarę stopni.

Zadanie 30.2. (0-2)

Wysokość pewnego stożka ma taką samą długość jak wysokość ostrosłupa P , a podstawa tego stożka jest kołem wyznaczonym przez okrąg, w który można wpisać sześciokąt F .

Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 31. (0-1)

Spośród wierzchołków ośmiokąta foremnego losowo wybieramy dwa.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo, że wybrane losowo dwa wierzchołki wyznaczają przekątną ośmiokąta jest równe:

- A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{5}{14}$

Zadanie 32. (0-1)

W tabeli przedstawiono zestawienie liczby goli zdobytych przez pewną drużynę hokejową w poszczególnych meczach całego sezonu:

Liczba goli	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba meczów	7	4	5	1	6	3	3	2	2	1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Mediana liczby goli zdobytych przez tę drużynę w jednym meczu jest równa:

- A. 1,5 B. 2,5 C. 3,5 D. 4,5

Zadanie 33. (0-4)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 30° . Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa 56.

Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa o największym polu powierzchni całkowitej. Znajdź to największe pole. Zapisz obliczenia.



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(-2)^{-6} < 2^{-7}$ B. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} < \left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-6} < 5^4$ D. $(-0,1)^{-2} < 0,1^{-6}$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $3 \log_7 4 - 2 \log_7 5$ jest równa:

A. $\log_7 \frac{4}{5}$ B. $\log_7 \frac{6}{5}$ C. $\log_7 \frac{64}{25}$ D. $\log_7 \frac{81}{32}$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby $a = \log(0,01)^{\frac{1}{3}}$, $b = \log \frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{10}}{100}$, $c = 2 \log \sqrt[5]{0,001}$ uporządkowane w kolejności od największej do najmniejszej, to:

A. a, b, c B. b, a, c C. c, a, b D. c, b, a

Cenę wycieczki obniżono o 100 zł, a następnie nową cenę obniżono o 20%. Po tych dwóch obniżkach za wycieczkę trzeba zapłacić 1200 zł.

Dokończ zadanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cena wycieczki przed obniżkami była równa:

A. 1625 zł B. 1600 zł C. 1540 zł D. 1560 zł

Zadanie 5. (0-2)

Ustal, ile liczb pierwszych należy do zbioru rozwiązań nierówności $x - \frac{x-1}{4} \geq \frac{3x-7}{2}$.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-2)

Niech a, b, c będą trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, które nie są podzielne przez 4.

Udowodnij, że liczba $(a + b + c)^2$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 7. (0-1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{(5x-10)(x+3)}{5x(2x+6)}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić do postaci $\frac{x-2}{2x}$.	P	F
Dziedziną wyrażenia $W(x)$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.	P	F

Zadanie 8. (0-1)

Wskaż wielomian, dla którego $W(-1) = 0$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $15x^7 - 5x - 10$ C. $x^9 - 1$
 B. $x^6 - 5x^4 - x^3 + 2x^2 - x$ D. $x^5 + x$

Zadanie 9. (0-2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -2(x+3)(x-7)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Funkcja f jest rosnąca w przedziale:

- A. $(-\infty; 4]$ B. $[2; \infty)$ C. $(-\infty; 3)$ D. $(-\infty; 2]$

2. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f ma współrzędne:

- E. (2, 18) F. (2, 50) G. (18, -2) H. (50, 2)

Zadanie 10. (0-2)

Dana jest funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = \sqrt{5}(x - 1) + m$, gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Do wykresu funkcji f należy punkt $(1, -10)$.

Wyznacz miejsce zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja $f(x) = 4^x$ przyjmuje wartość 12 dla argumentu:

A. $x = 3$

B. $x = \frac{1}{3}$

C. $x = \log_4 12$

D. $x = \log_{12} 4$

Zadanie 12. (0-1)

Spośród funkcji f , g , h i p wybierz takie dwie, które są opisane takim samym wzorem:

$f(x) = 3^{x+2}$

$g(x) = 9 + 3^x$

$h(x) = 9 \cdot 3^x$

$p(x) = 3^{3x}$

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. f i g

B. f i h

C. h i p

D. g i p

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedzina funkcji $f(x) = \sqrt{5-x} + \frac{1}{x-1}$ jest zbiór:

A. $(1; 5]$

B. $(-\infty; 1) \cup (1; 5]$

C. $(-\infty; 5]$

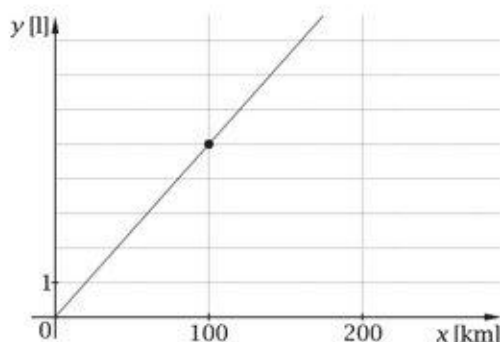
D. $[-5; 1) \cup (1; \infty)$

Zadanie 14. (0-1)

Na wykresie przedstawiono zależność zużycia paliwa y w litrach od pokonanej drogi x w kilometrach.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednie informacje, tak aby zdanie było prawdziwe.

Zależność wielkości y od wielkości x , przedstawioną na wykresie można opisać za pomocą wzoru $y = \dots\dots\dots$.



.....

Zadanie 15. (0-2)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Wartość wyrażenia $\sqrt{a_7 - a_5}$ jest równa:

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{2}$

2. Liczba ujemnych wyrazów ciągu (a_n) jest równa:

- E. 10 F. 9 G. 6 H. 5

Zadanie 16. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby $\sqrt{5} + 2$, $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$, $\sqrt{5} - 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Różnica tego ciągu jest równa:

- A. -4 B. $\sqrt{5}$ C. 4 D. $\sqrt{5} - 2$

Zadanie 17. (0-1)

Na konto oszczędnościowe, którego oprocentowanie w skali roku jest równe 2%, wpłacono 9000 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli właściciel konta nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat przed upływem czterech lat, to stan konta po czterech latach (bez uwzględnienia podatku) będzie równy:

- A. $9000 \cdot 1,02 \cdot 4$ B. $9000 \cdot (1,02)^4$ C. $9000 \cdot 1,08$ D. $9000 \cdot 1,16$

Zadanie 18. (0-3)

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy 3, a różnica między trzecim i drugim wyrazem jest równa 60.

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 19.

Dla każdego kąta ostrego α jest określone wyrażenie $W(\alpha)$:

$$W(\alpha) = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Zadanie 19.1. (0-1)

Wykaż, że $W(\alpha) = \sin^3 \alpha$.

Zadanie 19.2. (0-1)

Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt[3]{W(\alpha)}$ dla $\alpha = 50^\circ$. Wynik podaj w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: Przyjmij, że wyrażenie $W(\alpha)$ można przedstawić w postaci $\sin^3 \alpha$.

Zadanie 24. (0-1)

Wskaż równanie okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-2, -5)$, $B = (4, -5)$, $C = (4, 3)$, $D = (-2, 3)$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

C. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$

B. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

D. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

Zadanie 25. (0-2)

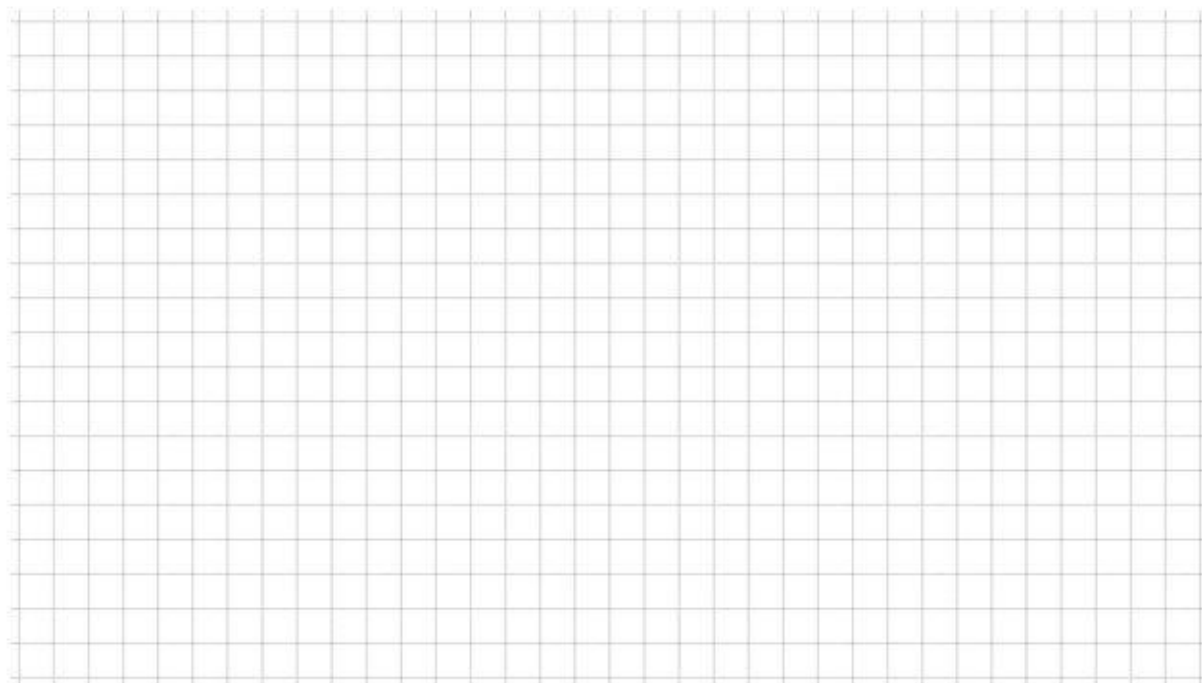
Dana jest prosta k o równaniu $y = -\frac{3}{4}x - 13$ oraz prosta l o równaniu $y = \frac{4}{3}x$. Prosta m jest równoległa do prostej l i przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 12)$.

Wyznacz punkt przecięcia prostych k i m . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 26. (0-2)**

Dana jest prosta k opisana równaniem $y = \frac{1}{3}x + 7$ oraz punkty $A = (-2, 3)$ i $B = (4, 1)$. Punkt P należy do prostej k i jest jednakowo odległy od punktów A i B .

Wyznacz współrzędne punktu P . Zapisz obliczenia.



Zadanie 27. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość czworościanu foremnego, w którym krawędź ma długość 12, jest równa:

- A. $6\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{33}$

Zadanie 28. (0-1)

Powierzchnia boczna stożka, którego wysokość jest równa 8, po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 10. Jaką miarę ma kąt środkowy tego wycinka koła?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 288° B. 72° C. 144° D. 216°

Zadanie 29. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek objętości dwóch sześcianów jest równy $\frac{9}{64}$. Stosunek pól powierzchni całkowitych tych sześcianów jest równy:

- A. $\frac{3}{16}\sqrt[3]{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{9}$ D. $\frac{9}{16}$

Zadanie 30. (0-3)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej ma długość $4\sqrt{6}$ i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt o mierze 45° .

Wyznacz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 31. (0-2)

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 200\}$ losujemy jedną liczbę.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej podzielnej przez 5 jest równe:

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{19}{200}$

2. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej mniejszej od 50 jest równe:

E. $\frac{2}{25}$ F. $\frac{3}{40}$ G. $\frac{1}{8}$ H. $\frac{3}{25}$

Zadanie 32. (0-1)

Dla zestawu liczb: 7, 9, 2, 2, 4, 7, 8, 8, 5, 4, 3, 7 obliczono średnią arytmetyczną (s), medianę (m) i dominantę (d). Wskaż prawdziwą zależność.

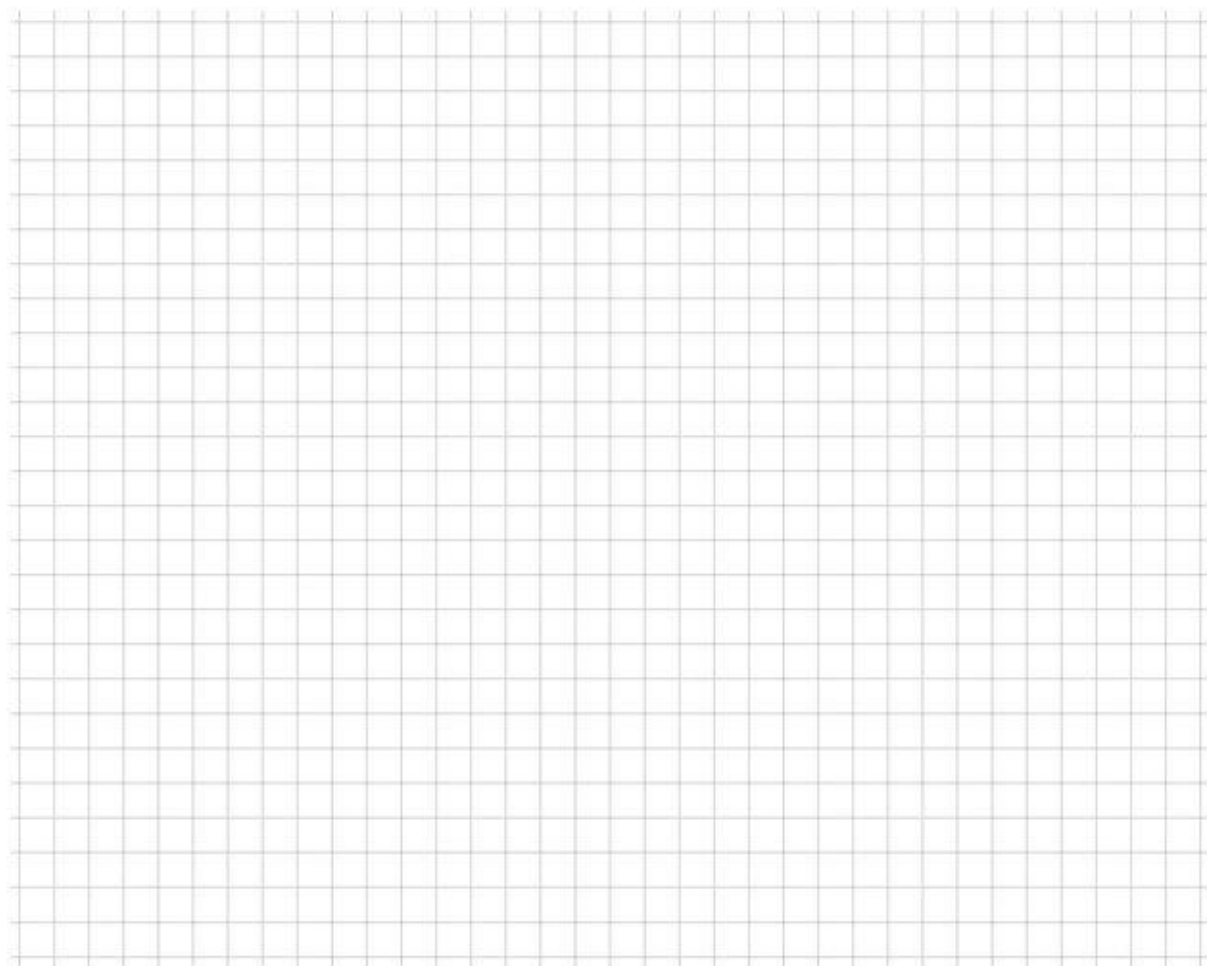
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $s < m < d$ B. $m < d < s$ C. $d < s < m$ D. $d < m < s$

Zadanie 33. (0-4)

W trójkąt równoramienny ABC , którego podstawa AB ma długość 18, a wysokość poprowadzona do tej podstawy jest równa 12, wpisywano prostokąty w ten sposób, że jeden bok prostokąta zawiera się w podstawie, a dwa pozostałe wierzchołki należą do ramion trójkąta.

Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{100^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{8}}$ jest równa:

- A. $10^{\frac{1}{4}}$ B. $10^{\frac{1}{2}}$ C. $10^{\frac{5}{3}}$ D. $10^{\frac{5}{6}}$

Zadanie 2. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cena towaru z 23% podatkiem VAT jest równa 196,80 zł. Cena tego towaru bez podatku VAT wynosi:

- A. 150 zł B. 168 zł C. 160 zł D. 242,06 zł

Zadanie 3. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_{0,2} 75$ jest od liczby $\log_{0,2} 3$:

- A. o 72 większa B. o 2 mniejsza C. o 2 większa D. o 5 mniejsza

Zadanie 4. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma rozwiązań równania $\left| \frac{5}{4} + x \right| = \frac{3}{4}$ jest liczbą należącą do zbioru:

- A. $(-3; -\sqrt{5})$ C. $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$
B. $(-2\frac{1}{2}; -2]$ D. $[-2; -\frac{1}{2}]$

Zadanie 5. (0-1)



Liczby a i b spełniają równość $\frac{7b}{a+b} = 5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

Zadanie 6. (0-1)



Ile różnych rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych ma równanie $3x(x^2 - 16x) = 0$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 7. (0-1)


Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{6x^3}{x^2-1} : \frac{3x^2}{x+1}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dziedziną wyrażenia $W(x)$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.	P	F
Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić do postaci $\frac{2x}{x-1}$.	P	F

Zadanie 8. (0-1)


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiór, który przedstawiono na osi liczbowej

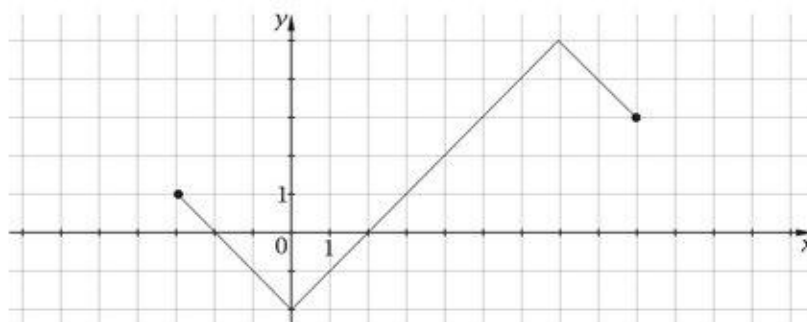


jest rozwiązaniem nierówności:

- A. $-x^2 + 7x \geq 0$ C. $x^2 - 7x \geq 0$
 B. $x^2 + 7x \leq 0$ D. $-x^2 - 7x \leq 0$

Zadanie 9. (0-1)


Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Zbiorem wartości funkcji $g(x) = f(x+3)$ jest przedział $[1; 8]$.	P	F
2.	Maksymalny przedział, w którym funkcja $g(x) = f(x+3)$ jest rosnąca, to $[-3; 4]$.	P	F

Zadanie 10. (0-1)


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

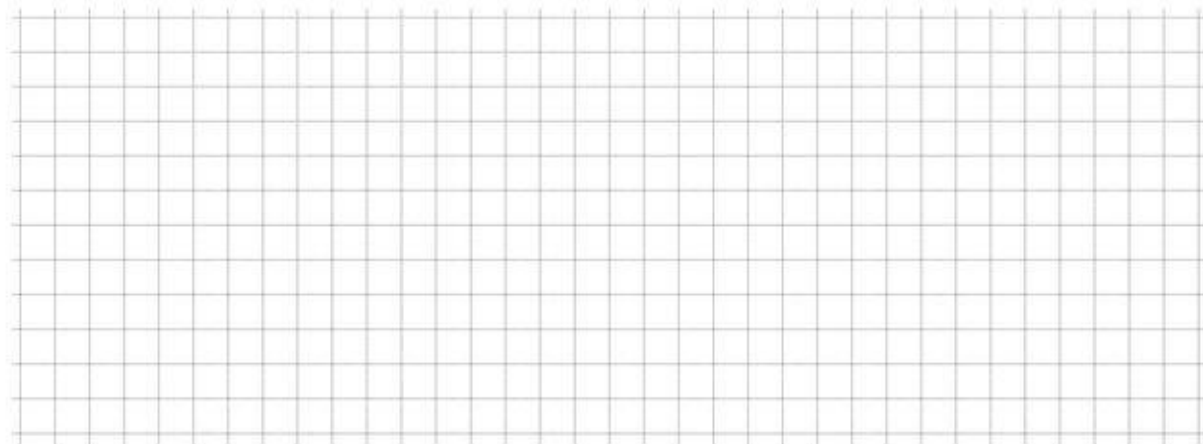
Funkcje liniowe $f(x) = 3x + 5$ oraz $g(x) = ax - 1$ mają to samo miejsce zerowe dla liczby a równej:

- A. $\frac{5}{3}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

Zadanie 11. (0-2)

Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -12$ i $x_2 = 2$, a jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 7]$. Ponadto dana jest prosta k opisana równaniem $y = -\frac{3}{5}x + 4$.

Sprawdź, czy wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , należy do prostej k . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 12. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ należy punkt:

- A. $\left(-1, -\frac{3}{5}\right)$ B. $\left(0, \frac{3}{5}\right)$ C. $\left(2, \frac{9}{5}\right)$ D. $\left(-2, \frac{25}{9}\right)$

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \log_a x$, której wykres przechodzi przez punkt $\left(\frac{1}{16}, -8\right)$. Wynika stąd, że:

- A. $a = \sqrt{2}$ B. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $a = 2$ D. $a = \frac{1}{2}$

Zadanie 14. (0-2)

Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 50, a suma pięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 40.

Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.



Zadanie 20. (0-1)

Wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ACB , podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki AD i DB odpowiednio o długościach $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Wysokość CD ma długość:

A.	$2\sqrt{5}$,	ponieważ	1.	$\frac{8\sqrt{5}}{5} : \frac{2\sqrt{5}}{5} = 4$.
B.	4,		2.	$\frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{16}{5}$ oraz $\sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.
C.	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$,		3.	$\frac{8\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

Zadanie 21. (0-1)

W trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej AB wpisano okrąg o środku S .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wypukłego ASB jest równa:

- A. 90° B. 135° C. $112,5^\circ$ D. $67,5^\circ$

Zadanie 22. (0-2)

W trapezie $ABCD$ o podstawach długości $|AB| = 6$ i $|CD| = 4$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P , którego odległość od krótszej podstawy jest równa 2.

Wyznacz pola trójkątów APD i BPC . Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prosta $y = (2m - 1)x + 1$ jest równoległa do prostej $y = \frac{2}{3}x - 3$ dla wartości m równej:

- A. $\frac{5}{6}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{5}{4}$

Zadanie 24. (0-1)

Punkty A' i B' są odpowiednio obrazami punktów $A = (-4, -5)$ i $B = (8, 4)$ w symetrii środkowej względem punktu $O = (0, 0)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Środek odcinka $A'B'$ ma współrzędne:

- A. $(-2, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 6)$ C. $(2, \frac{1}{2})$ D. $(-2, -\frac{1}{2})$

Zadanie 25.

Okrąg O o środku w punkcie $S = (5, -2)$ jest styczny do osi y układu współrzędnych w punkcie A . Punkt $B = (9, 1)$ należy do okręgu O .

Zadanie 25.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg O można opisać równaniem:

- A. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4$ C. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 5$
B. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ D. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Zadanie 25.2. (0-2)

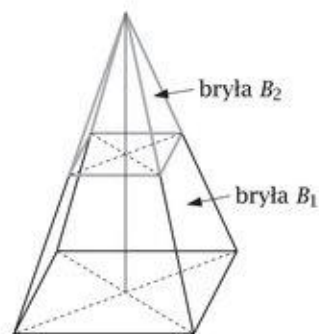
Oblicz stosunek pola koła ograniczonego przez okrąg O do pola trójkąta ASB . Zapisz obliczenia.

Zadanie 25.3. (0-1)

Oblicz tangens kąta między prostą przechodzącą przez punkty B i S a osią x układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 26. (0-1)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości 56 podzielono płaszczyzną na dwie bryły B_1 i B_2 , z których bryła B_1 nie jest ostrosłupem. Płaszczyzna ta przechodzi przez środek wysokości ostrosłupa i jest równoległa do jego podstawy (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek objętości bryły B_1 do bryły B_2 jest równy:

- A. 28 B. 7 C. 8 D. 49

Zadanie 27. (0-2)

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem, którego bok ma długość 6.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Objętość tego walca jest równa:

- A. 216π B. 432π C. $\frac{54}{\pi}$ D. $\frac{108}{\pi}$

2. Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe:

- E. $72\pi + 36$ F. $18\pi + 36$ G. $\frac{36}{\pi} + 36$ H. $\frac{18}{\pi} + 36$

Zadanie 28. (0-3)

Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego boki mają długość $4\sqrt{2}$ i 7. Krótsza przekątna graniastosłupa ma długość 10 i jest nachylona do podstawy pod kątem 60° .

Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 29. (0–3)

W parku miniatur postawiono model piramidy Cheopsa wykonany w skali 1:50. Jest on w całości zrobiony z betonu — łącznie z wnętrzem. Do jego budowy użyto betonu o gęstości $2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Przyjęto, że oryginalna piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 150 m, którego ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 52° .

Oblicz masę tego modelu. Wynik podaj w tonach w zaokrągleniu do całości.

Zadanie 30. (0–1)

Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych wybrano losowo jedną liczbę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 5 jest równe:

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{10}$

D. $\frac{7}{10}$

Zadanie 31. (0–3)

W dwóch pudełkach znajdują się kule białe i czarne. W pierwszym pudełku jest 8 kul białych i 2 kule czarne, a w drugim 2 kule białe i n czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania jednej kuli czarnej z pierwszego pudełka jest o 0,2 mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania jednej kuli białej z drugiego pudełka.

Wyznacz liczbę n . Zapisz obliczenia.

Najmniejszą liczbą całkowitą, która nie należy do przedziału $(-\infty; -2]$ jest:

-

Dane są liczby $x = 5,2 \cdot 10^{11}$ oraz $y = 2,5 \cdot 10^{-8}$. Iloczyn $x \cdot y$ jest równy:

- Dane są liczby $a = 1 - 4\sqrt{2}$ oraz $b = 3 + 2\sqrt{2}$.

Oblicz wartość bezwzględną iloczynu liczb a oraz b . Wynik zapisz w postaci wyrażenia $x + y\sqrt{2}$, gdzie x i y są liczbami całkowitymi. Zapisz obliczenia.

Dziedziną wyrażenia $W(x) = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 4)(x^2 - 25)}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 2, 5\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 3, 5\}$

Zadanie 10. (0-1)

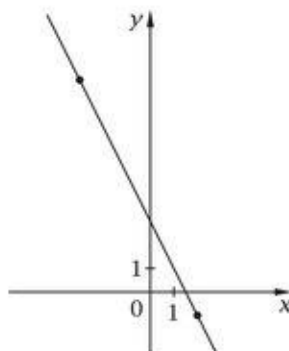
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ jest para liczb:

- A. ujemnych
B. dodatnich
C. o przeciwnych znakach
D. o iloczynie równym 0

Zadanie 11.

Dana jest funkcja liniowa f , dla której spełnione są warunki: $f(-3) = 9$ oraz $f(2) = -1$ (zobacz rysunek). Wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem osi y układu współrzędnych i otrzymano w ten sposób wykres funkcji g .



Zadanie 11.1. (0-2)

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Funkcja f jest:

- A. rosnąca i $f(0) > 0$
B. rosnąca i $f(0) < 0$
C. malejąca i $f(0) < 0$
D. malejąca i $f(0) > 0$

2. Funkcja q jest określona wzorem:

- E.** $q(x) = 2x - 3$ **F.** $q(x) = 2x + 3$ **G.** $q(x) = -2x - 3$ **H.** $q(x) = -2x + 3$

Zadanie 11.2. (0-2)

Wyznacz miejsce zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -3(x + 2)^2 + 4$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Istnieją dokładnie dwa argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $2\sqrt{3}$.	P	F
Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .	P	F

Zadanie 13. (0-3)

Dane są funkcje f i g określone wzorami $f(x) = (2x + 2)^2$ i $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Ustal, dla jakiego argumentu funkcja $h(x) = f(x) - g(x) + 3\frac{1}{4}$ osiąga w przedziale $[-2; 2]$ najmniejszą wartość. Wyznacz tę najmniejszą wartość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1)

W rosnącym ciągu geometrycznym (b_n) dane są wyrazy: $b_4 = 6$ oraz $b_6 = 12$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Piąty wyraz ciągu (b_n) jest równy:

- A. 9 B. $6\sqrt{2}$ C. -9 D. $-6\sqrt{2}$

Zadanie 15. (0-2)

Wzór $S_n = n^2 - \frac{3}{2}n$ jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) .

Oblicz wartość iloczynu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$. Zapisz obliczenia.

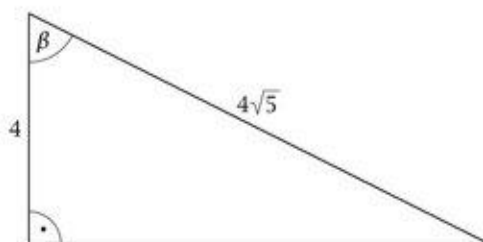
Zadanie 16. (0–4)

O godzinie 4:20 ślimak rozpoczął wielogodziną wędrówkę. W ciągu pierwszego kwadransa wędrówki pokonał dystans o długości 0,9 m. W każdym kolejnym kwadransie pokonywał drogę o 1,5 cm krótszą od drogi z poprzedniego kwadransa. Przebył w ten sposób drogę o łącznej długości 2257,5 cm.

Wyznacz godzinę, o której ślimak zakończył wędrówkę. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0–2)

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny i podano długości dwóch jego boków.



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A–D oraz spośród E–H.

1. Cosinus kąta β jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

2. Wyrażenie $\sin^2 \beta - \operatorname{tg} \beta$ przyjmuje wartość:

- E. $-\frac{9}{5}$ F. $-\frac{6}{5}$ G. $-\frac{3}{10}$ H. $-\frac{1}{10}$

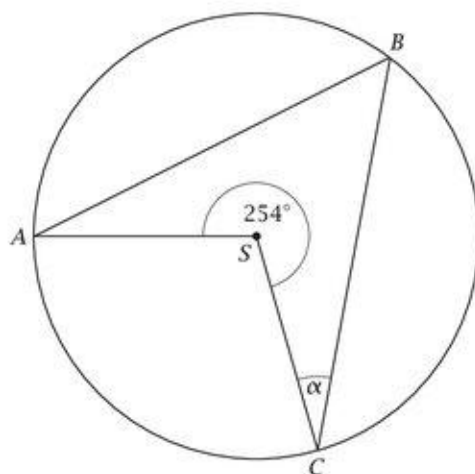
Zadanie 18. (0-1)

Na rysunku punkt S jest środkiem przedstawionego okręgu, a cięciwy AB i BC są równe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α ma miarę należącą do przedziału:

- A. $(0^\circ; 15^\circ)$
- B. $(15^\circ; 20^\circ)$
- C. $(20^\circ; 25^\circ)$
- D. $(25^\circ; 40^\circ)$

**Zadanie 19. (0-1)**

Promień okręgu opisanego na pewnym kwadracie ma długość 2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

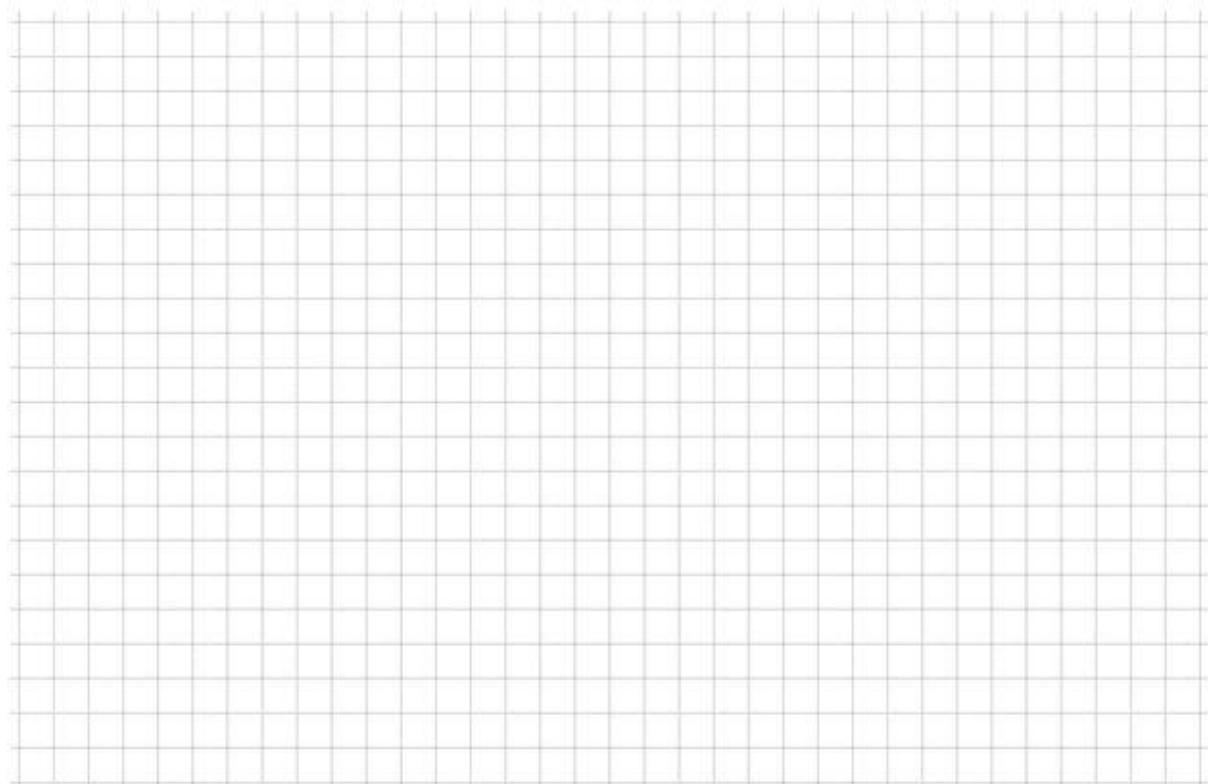
Promień okręgu wpisanego w ten kwadrat ma długość:

- A. $\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 1
- D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 20. (0-3)

Działka ma kształt trapezu prostokątnego, w którym różnica między długościami podstaw wynosi 20 m, a wysokość stanowi 75% dłuższej podstawy. Powierzchnia działki wynosi 22,5 ara.

Oblicz, ile co najmniej metrów siatki ogrodzeniowej należy zakupić, by ogrodzić tę działkę. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych metra. Zapisz obliczenia.



Zadanie 21. (0-2)

W trapezie $ABCD$, w którym $C = (4, 3\frac{1}{2})$, podstawa AB zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{3}{8}x - 5$.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Wierzchołek D tego trapezu może mieć współrzędne:

- A. (8, 6) C. (0, 2) E. (8, -2) G. $(-8, -\frac{1}{2})$
B. (6, 5) D. (0, -5) F. (-16, -4)

Zadanie 22. (0-1)

Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = (-6, 3)$, $B = (-2, 6)$, $C = (-5, 10)$ oraz okrąg F o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 25$. Wskaż zdanie prawdziwe.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Środek okręgu F jest jednocześnie punktem przecięcia się przekątnych kwadratu $ABCD$.
B. Punkt D ma współrzędne $(-9, 6)$.
C. Długość boku kwadratu $ABCD$ jest równa promieniowi okręgu F .
D. Jeden z wierzchołków kwadratu $ABCD$ należy do okręgu F .

Zadanie 23.

Prostokąt o bokach 8 i 10 jest podstawą ostrosłupa O , w którym wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość. Objętość tego ostrosłupa wynosi 160, a jego podstawa jest ścianą boczną pewnego graniastoslupa prawidłowego czworokątnego G .

Zadanie 23.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wysokość ostrosłupa O jest równa

Zadanie 23.2. (0-1)

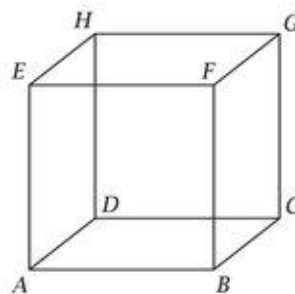
Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Graniastosłup G ma objętość równą lub

Zadanie 24. (0-3)

Pole powierzchni całkowitej sześcianu $ABCDEFGH$ przedstawionego na rysunku jest równe 12 cm^2 . Sześcian ten przecięto płaszczyzną zawierającą krawędzie BF oraz DH i otrzymano dwa jednakowe graniastosłupy.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej jednego z dwóch otrzymanych w ten sposób graniastosłupów. Zapisz obliczenia.



Grid area for calculations.

Zadanie 25. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb czterocyfrowych nieparzystych, w zapisie których występują tylko cyfry 3, 4, 5 jest:

- A. 36 B. 81 C. 54 D. 27

Zadanie 26. (0-1)

W sześciokącie foremnym, którego bok ma długość 2 wybrano losowo dwa różne wierzchołki.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że odległość między wylosowanymi wierzchołkami jest mniejsza niż 4 wynosi:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

Zadanie 1.

Dane są trzy liczby dodatnie a , b oraz c takie, że $3a = 4b$ i $2c = 3b$.

Zadanie 1.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Spośród liczb a , b oraz c największą jest liczba c .	P	F
Suma liczb b oraz c stanowi 175% liczby b .	P	F

Zadanie 1.2. (0-1)

Wskaż zdanie prawdziwe.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Liczba a jest o 25% większa od b .
- B. Liczba b jest o 25% mniejsza od c .
- C. Liczba c jest o 12,5% większa od a .
- D. Liczba a jest o 12,5% mniejsza od c .

Zadanie 2. (0-1)

Wiadomo, że $\log 5 \approx 0,7$ oraz $\log 16 \approx 1,2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log \frac{25}{16}$ jest równa:

- A. około 0,2
- B. około -0,71
- C. około 2,6
- D. około 0,4

Zadanie 3. (0-2)

Dane są liczby $x = 4^{20}$ i $y = 5^{10}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Połowa liczby x jest równa:

- A. 4^{10}
- B. 4^{19}
- C. 2^{20}
- D. 2^{39}

2. Iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy:

- E. 80^{10}
- F. $(3,2)^{10}$
- G. $(0,8)^{10}$
- H. $(4\sqrt{5})^{20}$

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole kwadratu, którego bok ma długość $5 - 2\sqrt{3}$ jest równe:

- A. $37 - 20\sqrt{3}$
- B. $10 - 4\sqrt{3}$
- C. 13
- D. $20 - 8\sqrt{3}$

Zadanie 5. (0-2)

Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita k przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to kwadrat liczby k przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1.

Zadanie 6. (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{2}{3}|x - 5| - 3 = 9\frac{1}{2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-1)

Dane są dwa wyrażenia:

$$W(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$V(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x \neq -2$ oraz $x \neq 1$ iloczyn wyrażeń $W(x)$ i $V(x)$ jest równy:

- A. x B. $x - 1$ C. $\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$ D. $\frac{1}{x-1}$

Zadanie 17. (0-1)


Dany jest trójkąt równoramienny, w którym boki mają długości 8, 8 i 6.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

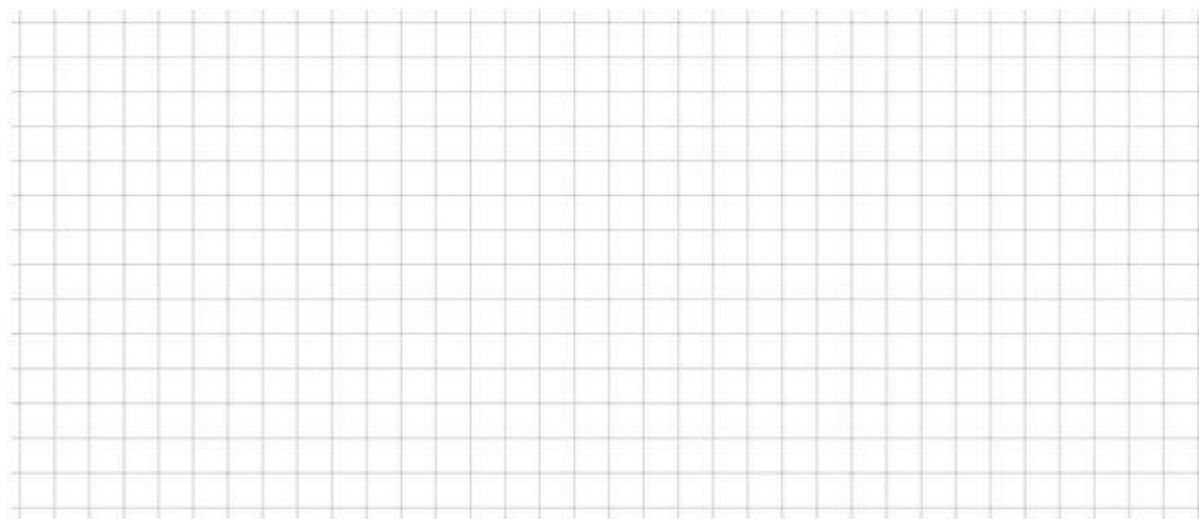
Tangens kąta zawartego między ramieniem a podstawą tego trójkąta jest równy:

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{\sqrt{55}}{8}$ C. $\frac{3}{\sqrt{55}}$ D. $\frac{\sqrt{55}}{3}$

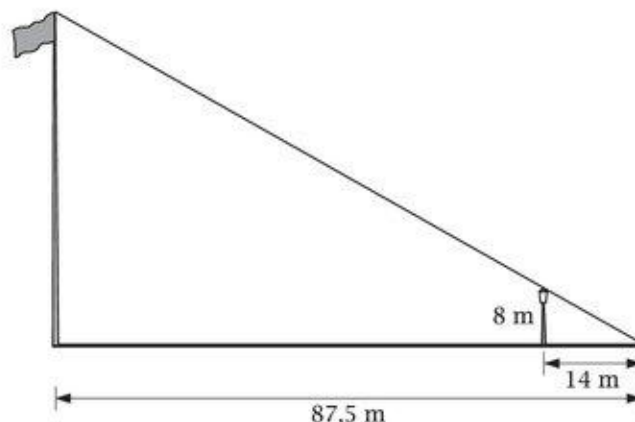
Zadanie 18. (0-2)

W kole o średnicy 60 cm zaznaczono kąt środkowy α , który wyznaczył pewien wycinek tego koła. Pole tego wycinka jest równe $360\pi \text{ cm}^2$.

Oblicz $\cos \alpha$. Wynik podaj w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.


Zadanie 19. (0-1)


Latarnia uliczna o wysokości 8 m rzuca cień o długości 14 m. W tym samym czasie i w tej samej miejscowości zmierzono, że maszt flagowy utworzył cień o długości 87,5 m (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Maszt flagowy ma wysokość 50 m.	P	F
W momencie pomiarów promienie słoneczne padały na podłoże pod kątem około 60° .	P	F

Zadanie 20. (0-3)

Na trójkącie prostokątnym równoramiennym opisano koło, a następnie w ten sam trójkąt wpisano koło.

Wyznacz stosunek pola koła opisanego do pola koła wpisanego w ten trójkąt. Wynik zapisz w postaci wyrażenia $m + n\sqrt{2}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi. Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-2)

Punkty $A = (-4, 7)$ oraz $C = (2, 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Bok kwadratu $ABCD$ ma długość:

- A. $2\sqrt{13}$ B. $4\sqrt{13}$ C. $\sqrt{26}$ D. 6

2. Środek okręgu wpisanego w kwadrat $ABCD$ ma współrzędne:

- E. (2, 7) F. (-1, 4) G. (0, 5) H. (-1, 5)

Zadanie 22. (0-2)

Punkty $A = (-3, -6)$, $B = (6, 0)$ oraz $C = (5, k)$, gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą, są współliniowe.

Wyznacz wartość k . Zapisz obliczenia.

Zadanie 1. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odwrotnością liczby $0,(12)$ jest:

- A. 8,25 B. $-\frac{4}{33}$ C. $0,(21)$ D. $-0,(12)$

Zadanie 2. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby z ramki zapisane w kolejności rosnącej tworzą następujący ciąg liczb:

- A. c, d, b, a C. b, c, d, a
B. b, c, a, d D. c, b, d, a

$$\begin{aligned} a &= (-3)^2 \\ b &= -3^2 \\ c &= -3^{-2} \\ d &= (-3)^{-2} \end{aligned}$$

Zadanie 3. (0-1)



Dana jest liczba $x = 2^{0,5} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$. Wskaż liczbę, która stanowi połowę liczby x .

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\sqrt[6]{2}$ B. $2^{0,5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ C. $4^{\frac{1}{3}}$ D. $\frac{8^{\frac{1}{3}}}{2}$

Zadanie 4. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma rozwiązań równania $|x + 7| = 1$ jest równa:

- A. -14 B. 7 C. 13 D. 14

Zadanie 5. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma trzech liczb: $\log_4 \frac{1}{5}$, $\log_2 \sqrt{2}$ oraz $\log_4 1,25$ jest równa:

- A. $\frac{1}{2} + \log_4 6,25$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $2 + \log_4 6,25$ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 6. (0-2)

Wykaż, że liczba $2^{40} + 4^{21} + 8^{13}$ jest podzielna przez 88.



Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $W(x) = 4x^2 - 10$ można przedstawić w postaci:

A. $W(x) = (2x - 5)(2x + 5)$

C. $W(x) = (2x - \sqrt{10})(2x + \sqrt{10})$

B. $W(x) = (2x - \sqrt{10})^2$

D. $W(x) = (2x - 5)(2x + 2)$

Zadanie 8. (0-2)

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. O wielomianie $W(x)$ wiadomo, że $W(-2) = W(1) = 0$.

Oblicz wartości współczynników a i b . Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-1)

Dane są wielomiany $W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ oraz $V(x) = x^2 - 5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn wielomianów $W(x)$ i $V(x)$ jest wielomianem stopnia:

A. szóstego

C. trzeciego

B. piątego

D. pierwszego

Zadanie 10. (0-1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dziedziną wyrażenia $W(x)$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.	P	F
Wyrażenie $W(x)$ można przedstawić w postaci ilorazu $\frac{x-2}{x-3}$.	P	F

Zadanie 11. (0-1)

Wskaż równanie, które nie ma rozwiązań.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $3x^2 - 7 = 0$ C. $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$
B. $\frac{5x^2+6x}{2} = 3x$ D. $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$

Zadanie 12. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $x(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$ jest:

- A. dodatnia liczba niewymierna C. ujemna liczba wymierna
B. ujemna liczba niewymierna D. dodatnia liczba wymierna

Zadanie 13. (0-2)

Wyznacz zbiór wszystkich liczb całkowitych x , które spełniają nierówność:

$$(2x - \sqrt{17})(3x + 7) < 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1)

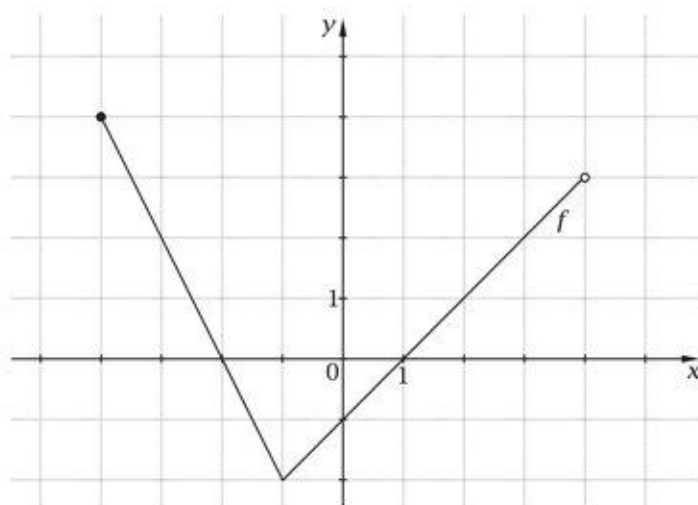
Wskaż układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + \frac{3}{2}y = 2 \end{cases}$
B. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2y - 3x = -4 \end{cases}$

Zadanie 15.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Wykres funkcji f przesunięto tak, że otrzymano wykres funkcji g określonej $g(x) = f(x + 3) + 2$.

**Zadanie 15.1. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji $y = g(x)$ należy punkt:

- A. $A = (2, 0)$ C. $C = (2, -4)$
 B. $B = (-4, -4)$ D. $D = (-4, 0)$

Zadanie 15.2. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Funkcja g ma dokładnie jedno miejsce zerowe.	P	F
Dziedziną funkcji g jest przedział $[-1; 7]$.	P	F

Zadanie 16. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f w przedziale $[-2; 2]$ osiąga najmniejszą wartość równą:

- A. $2\sqrt{2} - 1$ B. -3 C. -4 D. $\sqrt{2}$

Zadanie 17. (0-1)

Liczba bakterii w pewnej kolonii bakterii o godzinie 15:30 była równa 400. Liczbę $b(x)$ bakterii w tej kolonii po upływie x godzin od godziny 15:30 określa wzór $b(x) = 400 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

O godzinie 18:30 liczba bakterii w tej kolonii będzie równa około:

- A. 3200 B. 1130 C. 2260 D. 6400

Zadanie 18.

Funkcja kwadratowa h określona jest wzorem $h(t) = -4t^2 + 12t$.

Zadanie 18.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Funkcja h osiąga największą wartość równą

Zadanie 18.2. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Miejscami zerowymi funkcji h są liczby

Zadanie 19. (0-3)

O funkcji liniowej f wiadomo, że dla każdego argumentu x spełnia warunek $f(x+2) - f(x) = 3$ oraz $f(-4) = 1$.

Podaj wzór funkcji f oraz wyznacz zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-1)

Suma trzech początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa (-18) . Czwarty wyraz tego ciągu jest 5 razy większy od trzeciego wyrazu.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) można przedstawić za pomocą wzoru $a_n = 8n - 22$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.	P	F
Drugi i trzeci wyraz ciągu (a_n) są liczbami przeciwnymi.	P	F

Zadanie 21. (0-1)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2}{9} \cdot (-3)^n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wskaż zdanie prawdziwe. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym.
- B. Ciąg (a_n) jest rosnącym ciągiem geometrycznym.
- C. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, który nie jest ani rosnący, ani malejący.
- D. Ciąg (a_n) nie jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 22. (0-2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n - 3 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-1)

Sinus kąta rozwartego α jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta α jest równy:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

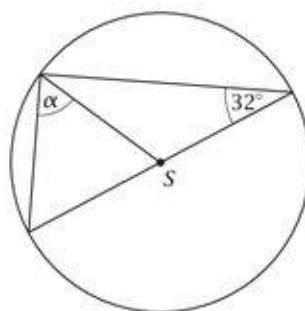
Zadanie 24. (0-1)

Dany jest okrąg o środku w punkcie S (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

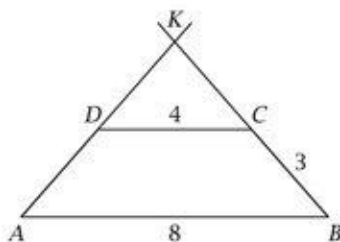
Kąt α ma miarę:

- A. 32° B. 64° C. 60° D. 58°



Zadanie 25. (0-2)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Półproste AD oraz BC przecinają się w punkcie K (zobacz rysunek).



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-G.

1. Obwód trójkąta ABK jest równy:

- A. 20 B. 10 C. 18 D. 24

2. Pole trójkąta ACD jest:

- E. takie samo jak pole trójkąta ABD .
F. dwa razy mniejsze od pola trójkąta ABD .
G. trzy razy mniejsze od pola trójkąta ABD .
H. cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABD .

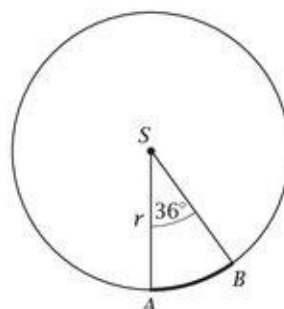
Zadanie 26. (0-1)

Dany jest okrąg o środku S i promieniu $r = 5$, w którym zaznaczono kąt środkowy o mierze 36° oparty na łuku AB (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

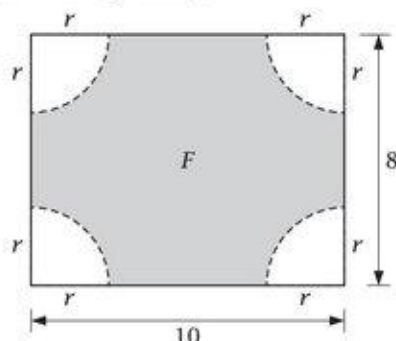
Łuk AB ma długość:

- A. 5π B. 2π C. π D. $\frac{5\pi}{2}$



Zadanie 27. (0-2)

Z prostokąta przy wierzchołkach wycięto 4 jednakowe wycinki koła o promieniu r , otrzymując w ten sposób figurę F (zobacz rysunek).

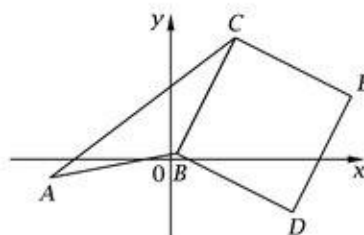


Wyznacz promień r tak, aby pole figury F stanowiło 75% pola prostokąta. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 28. (0-3)**

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $A = (-6, -1)$ i $C = (4, 7)$. Kąt ABC między ramionami tego trójkąta ma miarę 150° . Na ramieniu BC trójkąta ABC zbudowano kwadrat $BDEC$ (zobacz rysunek).

Wykaż, że pole kwadratu $BDEC$ jest równe $164(2 - \sqrt{3})$.



Zadanie 29. (0-4)

Dana jest prosta k o równaniu $y = 2x + 2$ oraz prosta l o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 7$. Punkt A jest punktem przecięcia się prostych k i l , a punkt $B = (-4, 9)$ należy do prostej l . Na prostej k wybrano taki punkt C , że $|AB| = |AC|$.

Wyznacz współrzędne punktu C . Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-1)


Michalina zakupiła formę do pieczenia ciasta. Forma ta ma kształt graniastoslupa prostego, którego podstawą jest trapez równoramienny. Wewnętrzne wymiary tej formy przedstawiono na rysunku.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

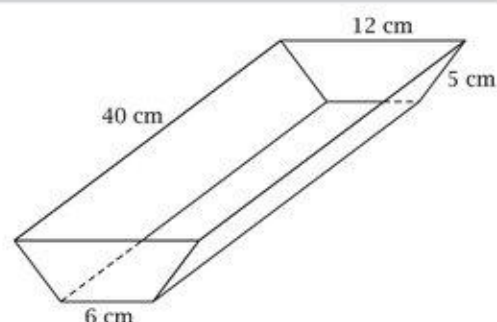
Pojemność formy zakupionej przez Michalinę jest równa:

A. 1,44 litra

B. 2,88 litra

C. 1,8 litra

D. 1,2 litra


Zadanie 31. (0-2)

Ściany boczne pewnego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Kąt α jest kątem nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy, a kąt β to kąt między krawędzią boczną a podstawą.

Wykaż, że $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Zadanie 1. (0-1)



Cenę telewizora podniesiono najpierw o 10%. Następnie nową cenę podniesiono jeszcze o 5%. Po obu tych podwyżkach telewizor kosztuje 6468 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przed podwyżkami telewizor kosztował:

- A. 5624,30 zł B. 5600 zł C. 6160 zł D. 5880 zł

Zadanie 2. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $|4 - 3\sqrt{2}| - |3 - 2\sqrt{2}|$ jest równa:

- A. $5\sqrt{2} - 7$ B. $1 - \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} - 7$ D. $1 - 5\sqrt{2}$

Zadanie 3. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba o 2 większa od liczby $\log_5 10$ jest równa:

- A. 4 B. $\log_5 12$ C. $\log_5 250$ D. $\log_5 20$

Zadanie 4. (0-1)



Pan Władysław wpłacił do banku kwotę 8000 zł na lokatę z rocznym oprocentowaniem w wysokości 4% i kwartalną kapitalizacją odsetek.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po roku oszczędzania pan Władysław zgromadzi na koncie:

- A. 8320 zł B. około 9359 zł C. około 8325 zł D. 8080 zł

Zadanie 5. (0-1)



Dane jest wyrażenie $W = (2x - y)^2 - (2x + y)^2$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie W można przekształcić do postaci $(-8xy)$.	P	F
Dla $x = 2 + \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{3} - 2$ wyrażenie W przyjmuje wartość 8.	P	F

Zadanie 6. (0-1)



Wskaż wielomian $W(x)$, dla którego $W(-1) \neq 0$. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $W(x) = (2x - 3)(x + 1)(x - 3)^2$ C. $W(x) = (x + 3)(2x + 3)(x + 1)^2$
 B. $W(x) = (2x + 3)(x + 3)(x + 1)^2$ D. $W(x) = (2x + 3)(x - 3)(x + 3)^2$

Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x \neq 0$ i $x \neq -2$ iloczyn wyrażeń $V(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+2}$ oraz $W(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ jest równy:

- A. $(x^2 - 5)(x - 2)$ B. $(x - 5)(x - 2)$ C. $\frac{x^3 - 5x^2}{(x+2)(x^2 - 4)}$ D. $\frac{(x^2 - 5)(x^2 - 4)}{2x}$

Zadanie 8. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przedział $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

- A. $\frac{2+3x}{4} > 0$ B. $\frac{-2-3x}{4} \geq 0$ C. $\frac{-2-3x}{4} \leq 0$ D. $\frac{2-3x}{4} \leq 0$

Zadanie 9. (0-1)

Wskaż równanie, którego rozwiązaniem są dwie liczby wymierne.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $-2x^2 + 3 = 0$ C. $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$
 B. $\frac{5x^2 + 6x}{2} = 3x - 2$ D. $\sqrt{3}x^2 + \frac{9}{2\sqrt{3}}x - \sqrt{3} = 0$

Zadanie 10. (0-1)

Dane są funkcje f i g . Funkcja f określona jest za pomocą tabelki, a funkcja g — wzorem $g(x) = f(x+2)$.

x	-4	-3	-1	0	2	4	6
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{7}{5}$	$\sqrt{15}$	5	$2\sqrt{15}$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Funkcja f jest rosnąca.	P	F
Do wykresu funkcji g należy punkt $A = (4, \sqrt{15})$.	P	F

Zadanie 11. (0-1)

Osiem kombajnów pracujących z jednakową wydajnością rozpoczęło o godzinie 15:00 koszenie zboża na pewnym polu. Obliczono, że praca ta zajmie im 3 godziny. Jednak o godzinie 16:00 dwa spośród pracujących kombajnów z powodu awarii musiały zaprzestać koszenia. Wszystkie pozostałe kombajny pracowały dalej zgodnie z planem i z taką samą wydajnością co na początku.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pozostałe na polu kombajny zakończą pracę o godzinie:

- A. 18:00 B. 18:20 C. 18:30 D. 18:40

Zadanie 12.

Dane są funkcje g i h określone wzorami $g(x) = -2x - \frac{4}{3}$ i $h(x) = \frac{1}{2}x - 3$ oraz funkcja liniowa f , której wykres jest równoległy do wykresu funkcji h i przecina oś y układu współrzędnych w tym samym punkcie, co wykres funkcji g .

Zadanie 12.1. (0-2)

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcje g i h przyjmują jednocześnie wartości ujemne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.2. (0-2)

Wyznacz miejsce zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-2)



Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 5)(x - 19)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt:

- A. $W = (7, 96)$ B. $W = \left(7, -\frac{104}{3}\right)$ C. $W = (6, 96)$ D. $W = \left(8, \frac{286}{3}\right)$

2. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wyłącznie dla:

- E. $x \in (-19; 5)$ G. $x \in (-5; 19)$
 F. $x \in [-5; 19]$ H. $x \in (-\infty; -5) \cup (19; +\infty)$

Zadanie 14.

O godzinie 9:00 rowerzysta wyruszył na przejażdżkę. Najpierw jechał przez półtorej godziny ze średnią prędkością 24 km/h. Po godzinnym postoju kontynuował wyprawę poruszając się tym razem ze średnią prędkością 18 km/h. Do punktu docelowego dotarł o godzinie 14:00.

Zadanie 14.1. (0-2)

Wyznacz wzór funkcji opisującej drogę rowerzysty w zależności od czasu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14.2. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Przed przerwą rowerzysta pokonał krótszy odcinek niż po przerwie.	P	F
Średnia prędkość jazdy rowerem, bez uwzględniania przerwy na postój, była równa 21 km/h.	P	P

Zadanie 14.3. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Podczas wyprawy rowerzysta pokonał łączny dystans km.

Zadanie 15. (0-1)

Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = 2n - 1$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wskaż trzywyrazowy ciąg geometryczny.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. (a_2, a_{20}, a_{200})

B. (a_1, a_6, a_{11})

C. (a_2, a_5, a_{14})

D. (a_1, a_7, a_{16})

Zadanie 16. (0–4)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 170. Trzeci, czwarty i ósmy wyraz tego ciągu tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny (b_n) . Wyznacz iloraz ciągu (b_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0–1)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków: $|AC| = |BC| = 10$ oraz $|AB| = 8$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta CAB jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Zadanie 18. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ jest równe:

- A. 1 B. $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$ C. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ D. $\frac{2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

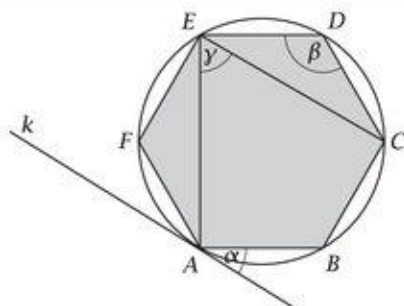
Zadanie 19. (0–3)

W ciągu dnia dokonano dwukrotnie pomiaru długości cienia pewnego drzewa. Za pierwszym razem promienie słoneczne padały na podłoże pod kątem 60° , a za drugim razem — pod kątem 30° . Podczas drugiego pomiaru okazało się, że cień wydłużył się o 10 metrów w stosunku do pierwszego pomiaru.

Wyznacz wysokość drzewa. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych metra. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-1)

Sześciokąt foremny $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Prosta k jest styczną do tego okręgu i tworzy z cięciwą AB kąt o mierze α . Ponadto kąt EDC ma miarę β , a kąt AEC — miarę γ (zobacz rysunek).



Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość sumy $\alpha + \beta + \gamma$ jest równa stopni.

**Zadanie 21. (0-1)**

Trójkąt równoboczny ABC o boku 8 wpisany jest w okrąg (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

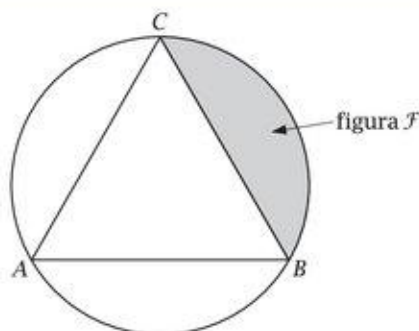
Pole figury $\mathcal{F}$ jest równe:

A. $\frac{64\pi - 48\sqrt{3}}{9}$

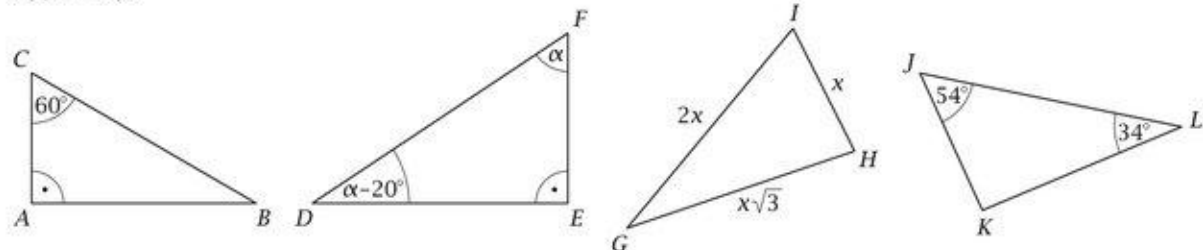
C. $\frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{9}$

B. $\frac{64\pi - 48\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{64\pi}{3}$

**Zadanie 22. (0-2)**

Dane są cztery trójkąty (zobacz rysunek). Wiadomo, że obwód trójkąta GHI jest równy $3(\sqrt{3} + 1)$.



Wskaż dwa zdania prawdziwe.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Trójkąt DEF jest podobny do trójkąta JKL .
- B. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta GHI .
- C. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF .
- D. Trójkąt GHI jest podobny do trójkąta JKL .
- E. Najmniejszy kąt trójkąta DEF ma miarę 25° .
- F. Najdłuższy bok trójkąta GHI ma długość $2\sqrt{3}$.

Zadanie 23. (0-3)

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 120° , a obwód jest równy $18 + 12\sqrt{3}$.

Wyznacz pole tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-1)

Dana jest prosta k określona wzorem $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ oraz punkt $A = (-3, 2)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Prosta równoległa do prostej k i przechodząca przez punkt A ma równanie $y = -\frac{4}{3}x - 2$.	P	F
Prosta k nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu $4x + 3y = 0$.	P	F

Zadanie 25. (0-1)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna ma długość 4, a kąt między krawędzią boczną a podstawą ma miarę 30° .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Objętość tego ostrosłupa jest równa

Zadanie 1. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbę $9^{17} + 9^{18}$ można przedstawić w postaci:

- A. 9^{35} B. 18^{35} C. $10 \cdot 9^{17}$ D. $9 \cdot 9^{19}$

Zadanie 2. (0-1)



Dane są liczby $x = 4 - 3\sqrt{2}$ oraz $y = 3 - 2\sqrt{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Iloczyn liczb x i y jest liczbą dodatnią.	P	F
Kwadrat sumy liczb x i y jest równy $99 - 70\sqrt{2}$.	P	F

Zadanie 3. (0-2)

Dane są liczby a , b i c :

$$a = 4|2 - \sqrt{5}| \quad b = |5 - 3\sqrt{2}| \quad c = |2\sqrt{3} - 4|$$

Uporządkuj liczby a , b i c w kolejności rosnącej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla dodatnich liczb a i b spełniających warunek $4 \log a - \log \frac{a}{b} = 2$, prawdziwa jest równość:

- A. $\log b = 2 - \log a^3$ C. $\log b = \log a^3 - 2$
 B. $\log a = \frac{1}{3}(2 + \log b)$ D. $\log a = 2 - \frac{1}{3} \log b$

Zadanie 5. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $(5x - 2)^2 - 9$ jest równe:

- A. $(5x - 3)^2$ B. $(5x + 1)(5x - 5)$ C. $25x^2 - 13$ D. $(5x + 5)(5x - 1)$

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x \neq -1$ i $x \neq 0$ iloraz $\frac{x+1}{x} : \frac{(x+1)^2}{2x}$ jest równy:

- A. $\frac{2}{x+1}$ B. $\frac{(x+1)^3}{2x^2}$ C. $\frac{x+1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 7.

Dany jest wielomian $W(x) = (2x^2 + 1)(4x^2 - 1)(x^3 - 1)$.

Zadanie 7.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Różnica $W\left(\frac{1}{2}\right) - W(1)$ jest równa 0.	P	F
Równanie $W(x) = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.	P	F

Zadanie 7.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich rozwiązań równania $W(x) = 0$ jest równa:

- A. 1 B. $1\frac{1}{2}$ C. -1 D. 0

Zadanie 8. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $x(3 + \sqrt{2}) = -3\sqrt{2} - 2$ jest liczba:

- A. wymierna większa od (-1) C. wymierna mniejsza od (-1)
B. niewymierna większa od (-1) D. niewymierna mniejsza od (-1)

Zadanie 9. (0-1)

Rozwiązaniem nierówności $x^2 + bx + 9 \leq 0$ jest dokładnie jedna liczba rzeczywista dodatnia.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba b jest równa:

- A. -6 B. -3 C. 0 D. -9

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $27x^3 + 8 = 0$:

- A. nie ma rozwiązań
B. ma jedno rozwiązanie będące liczbą wymierną
C. ma jedno rozwiązanie będące liczbą niewymierną
D. ma trzy rozwiązania

Zadanie 11. (0-2)

Dane jest równanie $\left|x + \frac{1}{6}\right| = \frac{11}{6}$.

Wykaż, że wszystkie rozwiązania tego równania należą do przedziału $(-\sqrt{5}; 1,6]$.

Zadanie 12. (0-1)

Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + q$, należy punkt $A = (-3, 5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

- A. $[1; +\infty)$ B. $[5; +\infty)$ C. $(-\infty; -3]$ D. $[-3; \infty)$

Zadanie 13. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$. Wykres funkcji f przesunięto o 4 jednostki w górę wzdłuż osi y układu współrzędnych i otrzymano wykres funkcji g .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja g jest określona wzorem:

- A. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ B. $g(x) = 2^x + 2$ C. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$ D. $g(x) = -2^x + 2$

Zadanie 14. (0-1)

W pewnej korporacji taksówkowej pasażerowie za skorzystanie z taksówki płacą pewną opłatę stałą oraz opłatę za każdy kilometr przejechanej trasy. Ania przejechała taksówką z tej korporacji trasę 5 km i zapłaciła 33,50 zł, a Michał za przejechanie 8 km zapłacił 50 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Za przejechanie taksówką z tej korporacji trasy o długości 13 km zapłacimy:

- A. 83,50 zł B. 77,50 zł C. 89,50 zł D. 70 zł

Zadanie 15. (0-2)

Prosta o równaniu $x = 3$ jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = -2x^2 + bx - 1$.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-1)

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{50-3n}{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.	P	F
Ciąg (a_n) ma dokładnie 16 dodatnich wyrazów.	P	F

Zadanie 17. (0-2)

Oblicz sumę wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-1)

Piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy (-12) , a drugi wyraz tego ciągu jest równy $3\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. 3 B. -6 C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. -3

Zadanie 19. (0-2)

W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC jest 3 razy dłuższa od przyprostokątnej AC , a kąt ACB ma miarę α .

Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{\sin^2 \alpha + 1\frac{8}{9}}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-1)

Która z podanych liczb jest ujemna?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\cos 120^\circ + \cos 60^\circ$ C. $\cos 120^\circ - \sin 150^\circ$
B. $\cos 60^\circ - \cos 120^\circ$ D. $\cos 120^\circ + \sin 150^\circ$

Zadanie 21. (0-1)

Uzasadnij, że dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + 1)(1 - \sin \alpha)$ można zapisać w postaci wyrażenia $\cos^2 \alpha$.

Zadanie 22. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i $5\sqrt{3}$ jest podobny do trójkąta o bokach:

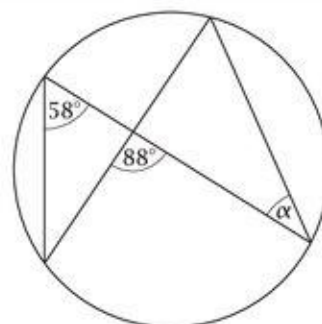
- A. 10, $10\sqrt{3}$, 15 B. 3, 4, 5 C. $7\sqrt{3}$, 21, $14\sqrt{3}$ D. 8, $8\sqrt{3}$, $8\sqrt{2}$

Zadanie 23. (0-1)

Jaką miarę ma kąt α zaznaczony na rysunku?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

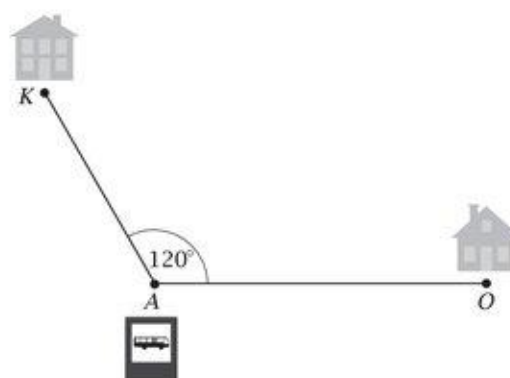
- A. 29° C. 44°
B. 58° D. 30°



Zadanie 24. (0-3)

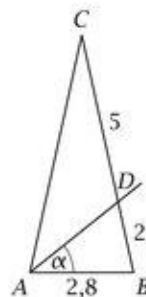
Kasia i Olga wysiadły razem na przystanku oznaczonym na rysunku literą A i od razu ruszyły do swoich domów. Dom Kasi oznaczono na rysunku literą K, a dom Olgi — literą O. Wiadomo, że Kasia porusza się ze średnią prędkością $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Olga — $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Obie dziewczyny dotarły do swoich domów 10 minut po wyjściu z autobusu.

Wyznacz odległość w linii prostej między domami obu dziewczyn. Wynik zaokrąglij do części dziesiątych kilometra. Zapisz obliczenia.



Zadanie 25.

Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$ (zobacz rysunek).

**Zadanie 25.1. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C ma długość:

- A. $\frac{7\sqrt{26}}{5}$ B. $\frac{7\sqrt{21}}{5}$ C. 7 D. $\frac{14\sqrt{6}}{5}$

Zadanie 25.2. (0-1)

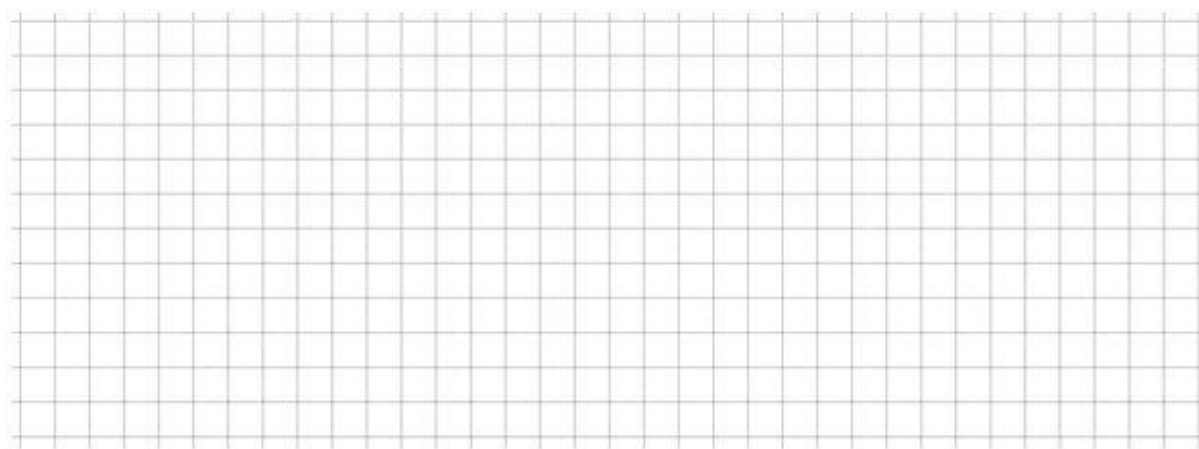
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Kąt ADC ma miarę 3α .	P	F
Stosunek pola trójkąta ACD do pola trójkąta ABD jest równy $\frac{5}{2}$.	P	F

Zadanie 26. (0-2)

Punkty $A = (-4, 2)$ i $C = (2, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Oblicz pole koła wpisanego w kwadrat $ABCD$. Zapisz obliczenia.

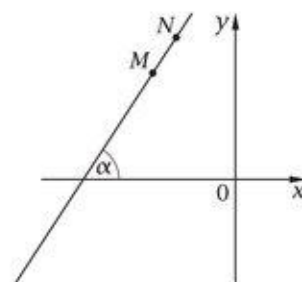
**Zadanie 27. (0-1)**

Prosta przechodzi przez punkty $M = (-7, 9)$ i $N = (-5, 12)$ (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{\sqrt{13}}$



Zadanie 28. (0-4)

Dana jest prosta k o równaniu $y = -x + 1$. Przez punkty $A = (-1, 9)$ i $B = (2, 3)$ poprowadzono prostą l , która przecina prostą k w punkcie P .

Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek BP . Zapisz obliczenia.


Zadanie 29. (0-2)


Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4. Dłuższa przekątna w tym graniastosłupie tworzy z podstawą kąt o mierze 45° .

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Objętość tego graniastosłupa jest równa:

- A. $64\sqrt{3}$ B. $96\sqrt{3}$ C. $192\sqrt{3}$ D. $192\sqrt{6}$

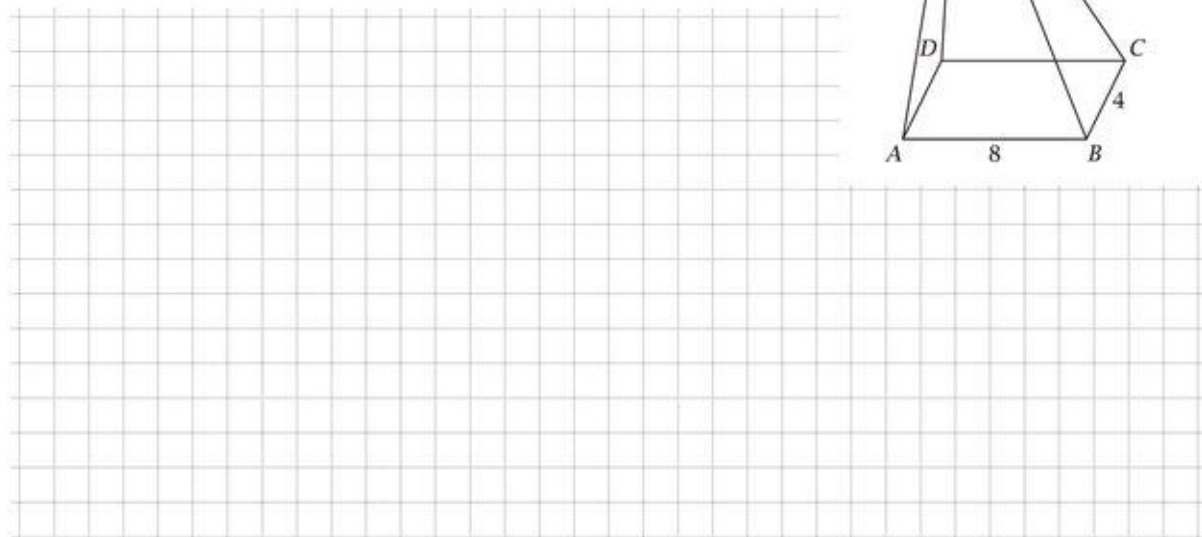
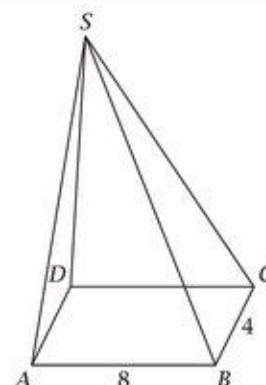
2. Tangens kąta między krótszą przekątną tego graniastosłupa a jego podstawą jest równy:

- E. 1 F. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ G. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ H. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

Zadanie 30. (0-2)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$ (zobacz rysunek)). Krawędź SD jest prostopadła do podstawy, a objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{160}{3}$.

Wyznacz długość najdłuższej krawędzi bocznej ostrosłupa $ABCDS$. Zapisz obliczenia.



PRZYKŁADOWE ARKUSZE EGZAMINACYJNE

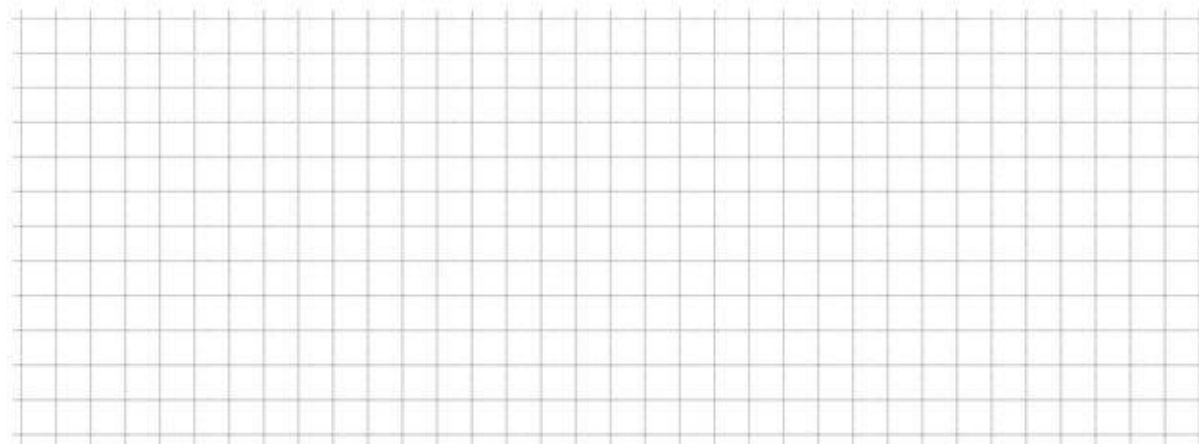
(zakres rozszerzony)

Zadanie 1. (0-3)

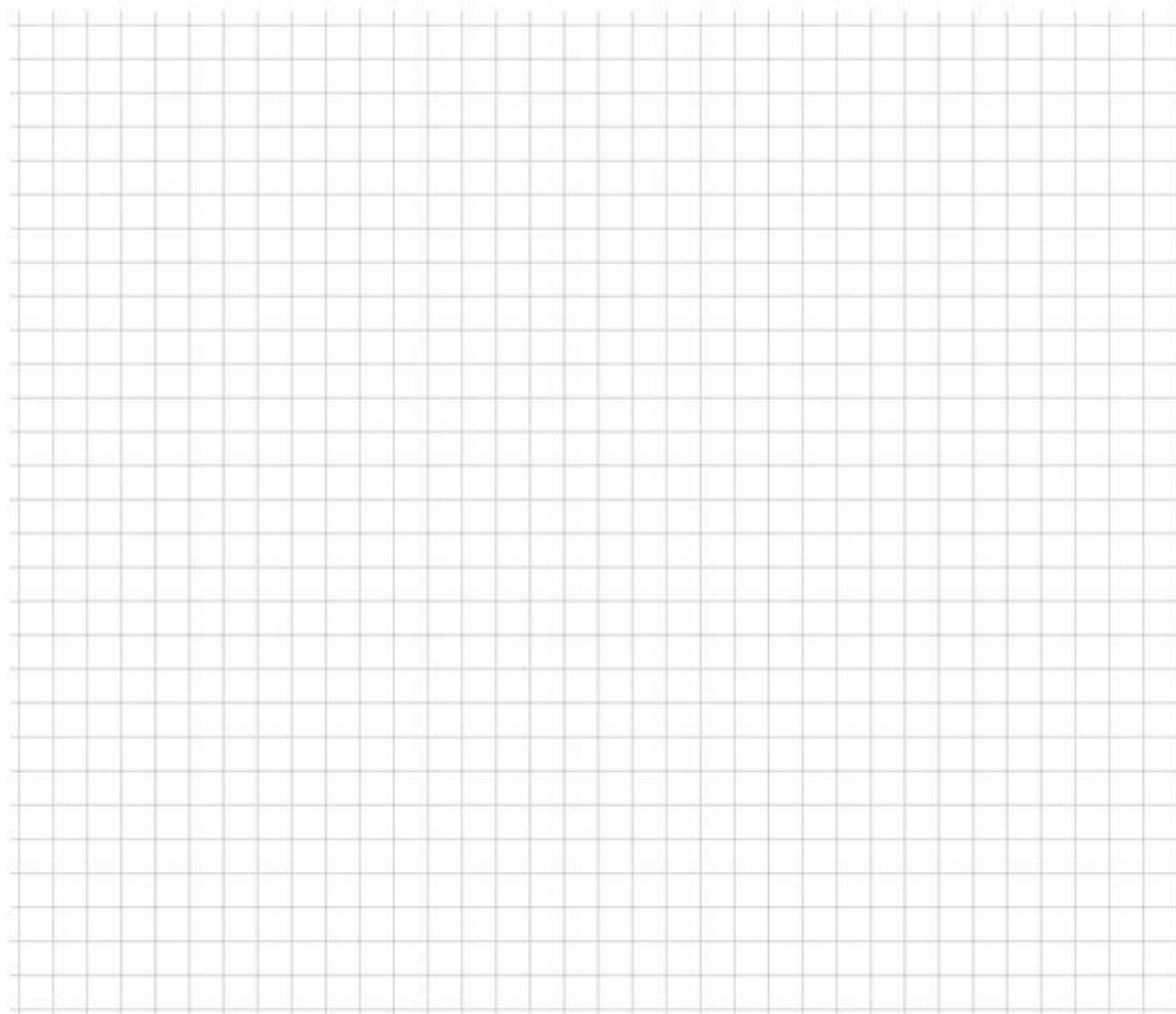
Dane są liczby a i b :

$$a = \left(\frac{9^{-18} + 9^{-16}}{82} \right)^{\frac{1}{9}} \quad b = \log_9 64 - \log_{27} 64$$

Wyznacz wartość potęgi a^b . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 2. (0-4)**

Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$. Zapisz obliczenia.

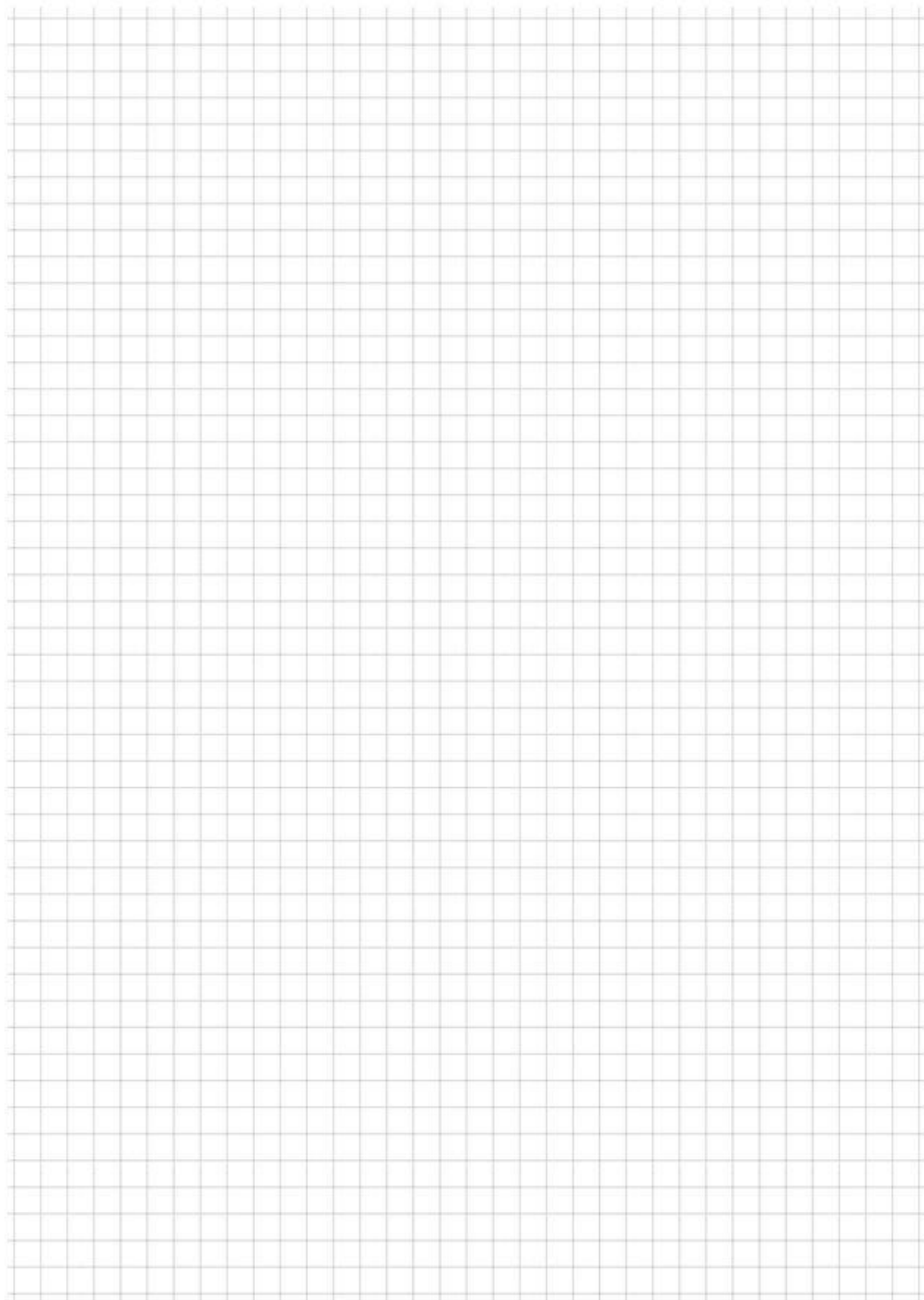


Zadanie 3. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie:

$$(m - 1)x^2 - (4m - 8)x + m - 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania, z których jedno jest mniejsze od 1, a drugie większe od 1. Zapisz obliczenia.

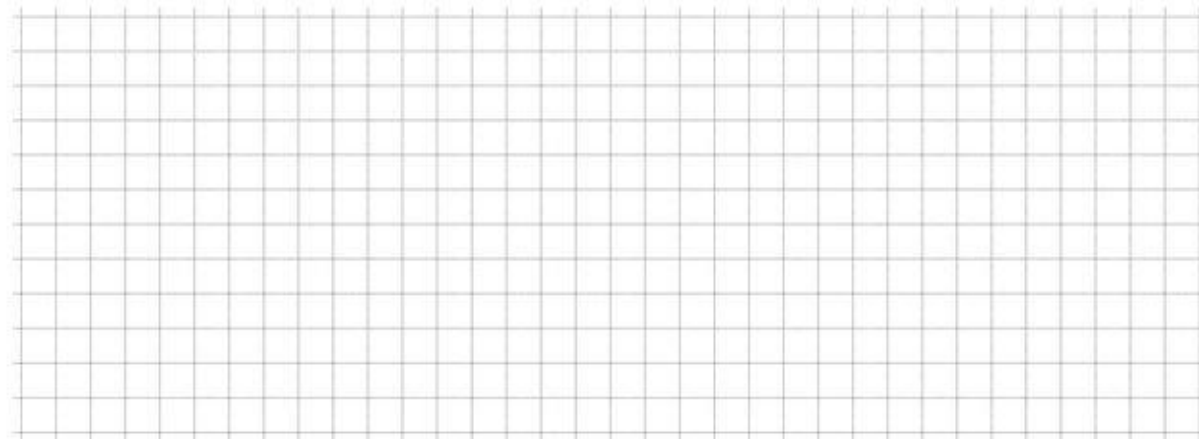


Zadanie 4. (0–2)

Dana jest funkcja określona wzorem:

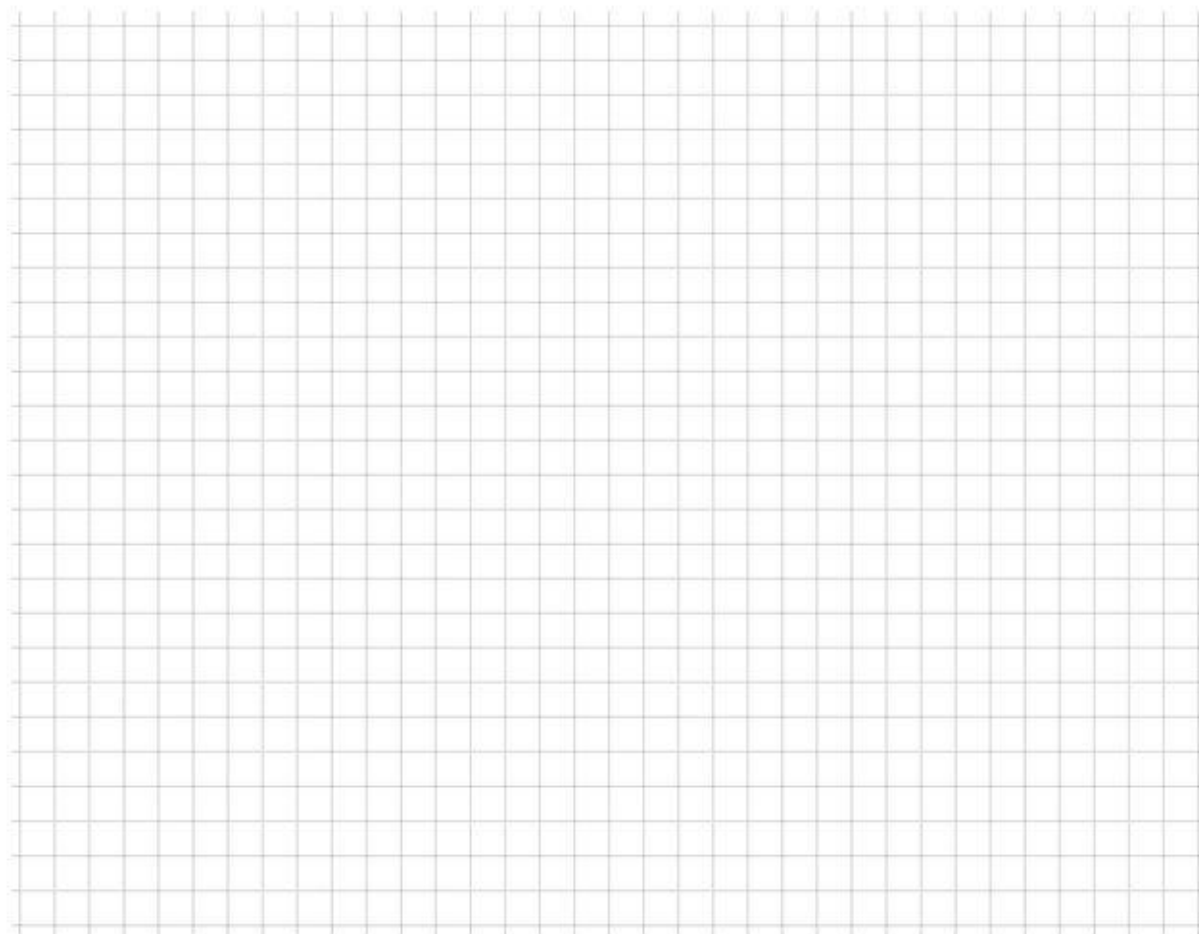
$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)} + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Wyznacz dziedzinę funkcji f . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 5. (0–4)**

Nieskończony ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym zbieżnym. Suma dwóch początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 6, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 8.

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n , która należy do zbioru rozwiązań nierówności $|S_n - S| < \frac{1}{512}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , a S — sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Zapisz obliczenia.



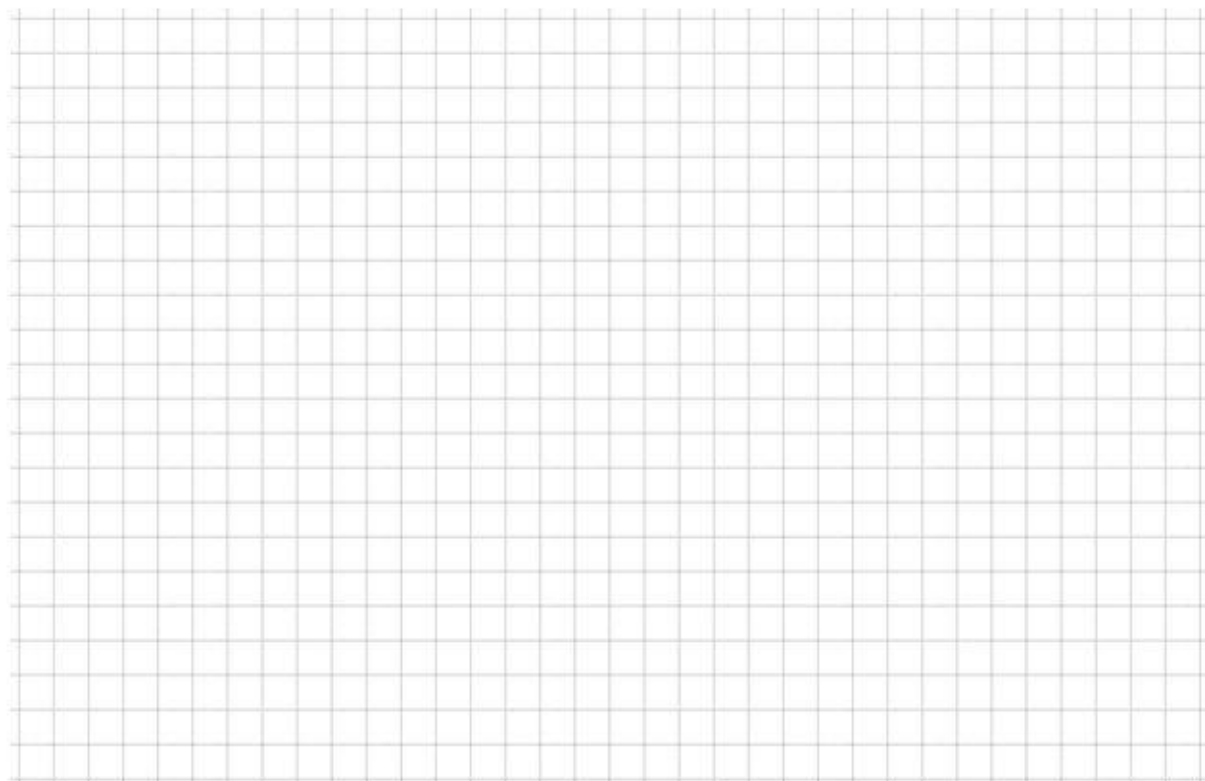
Zadanie 6. (0-3)

Znajdź wszystkie rozwiązania równania $4 \cos 4x \cos x = 2 \cos 5x + \sqrt{3}$ należące do przedziału $[-\pi; \pi]$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 7. (0-3)**

W trapez, którego podstawy mają długości 36 i 12, można wpisać okrąg i na tym trapezie można opisać okrąg.

Wykaż, że średnica okręgu opisanego na tym trapezie jest równa $8\sqrt{21}$.

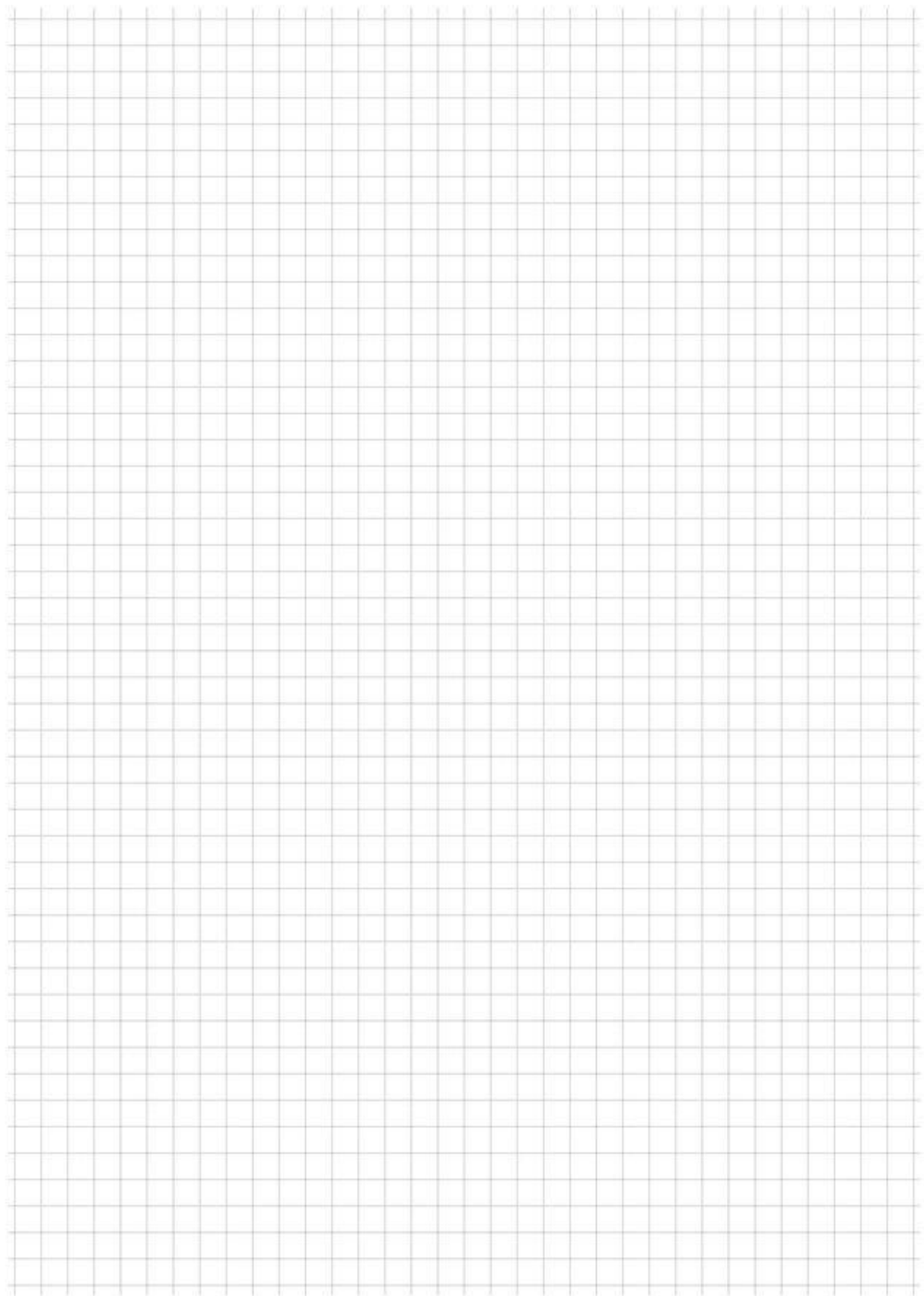


Zadanie 8. (0–4)

Dane są proste o równaniach:

$$x + my - m - 2 = 0 \qquad mx + y - m = 0$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których iloczyn współrzędnych punktu przecięcia tych prostych jest liczbą nieujemną. Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0–4)

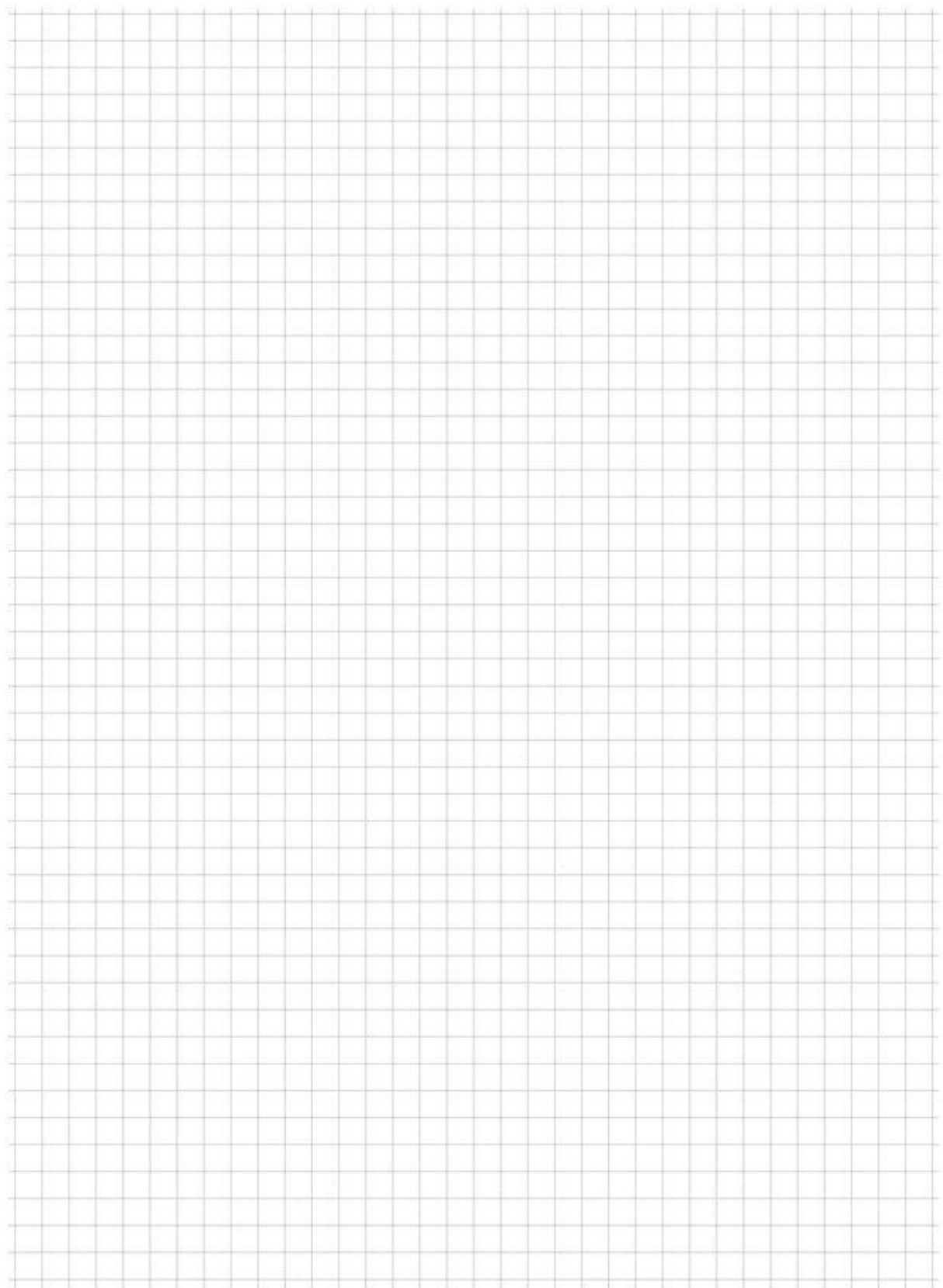
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są dwa okręgi opisane równaniami:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$$

Okręgi te przecinają się w dwóch punktach.

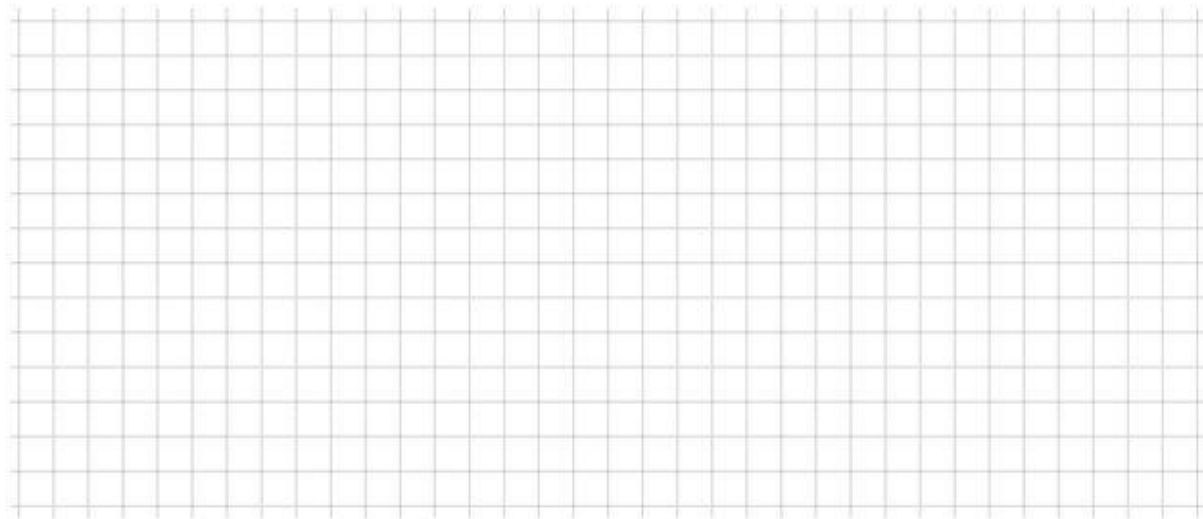
Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów oraz ich punkty przecięcia. Zapisz obliczenia.



Zadanie 10. (0–3)

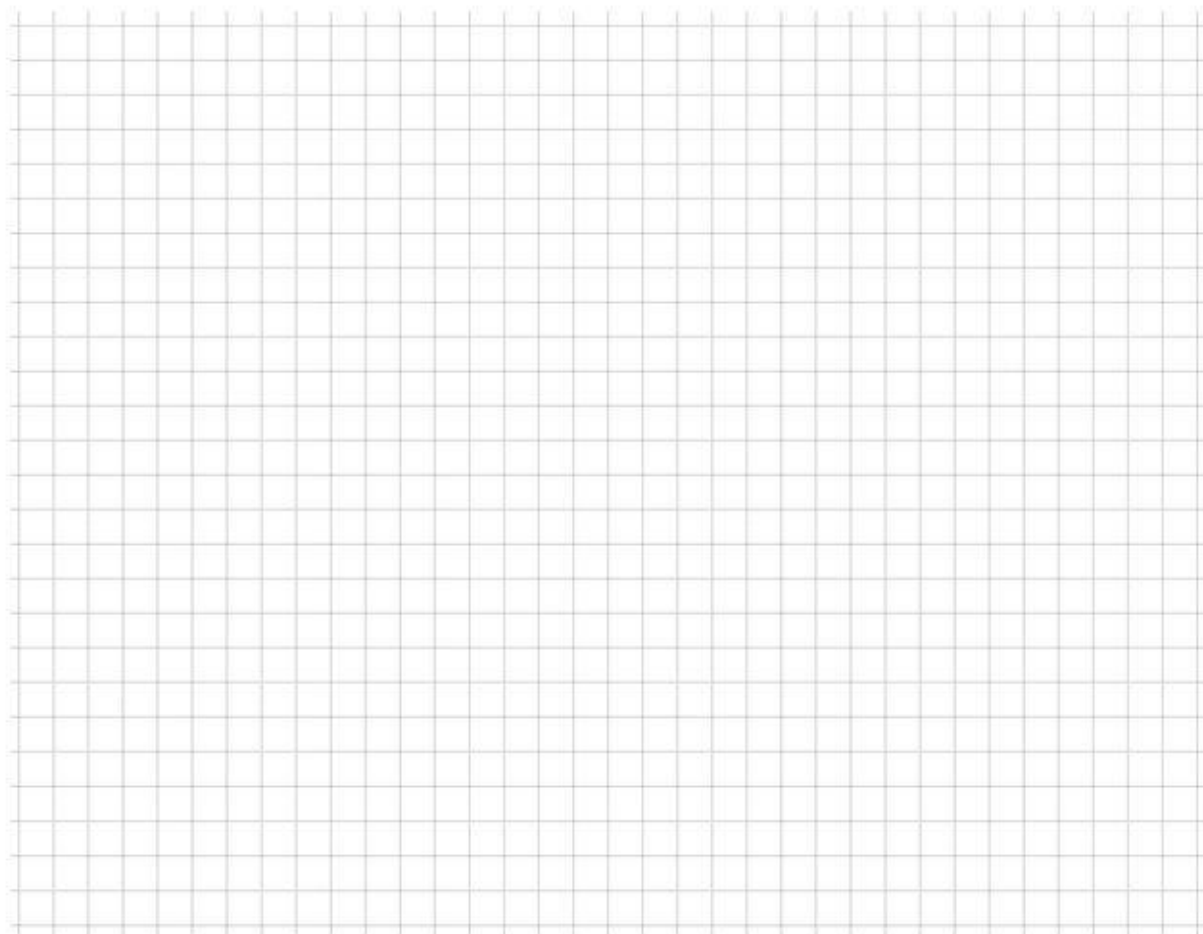
O równoległoboku $ABCD$ wiadomo, że $\overrightarrow{AC} = [20, 10]$ i $\overrightarrow{BD} = [-4, 2]$.

Oblicz cosinus kąta ostrego między przekątnymi równoległoboku $ABCD$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 11. (0–4)**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $12\sqrt{2}$, a długość krawędzi bocznej jest równa 12. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wysokość podstawy i środek krawędzi bocznej.

Wyznacz obwód otrzymanego przekroju. Zapisz obliczenia.



Zadanie 12. (0-3)

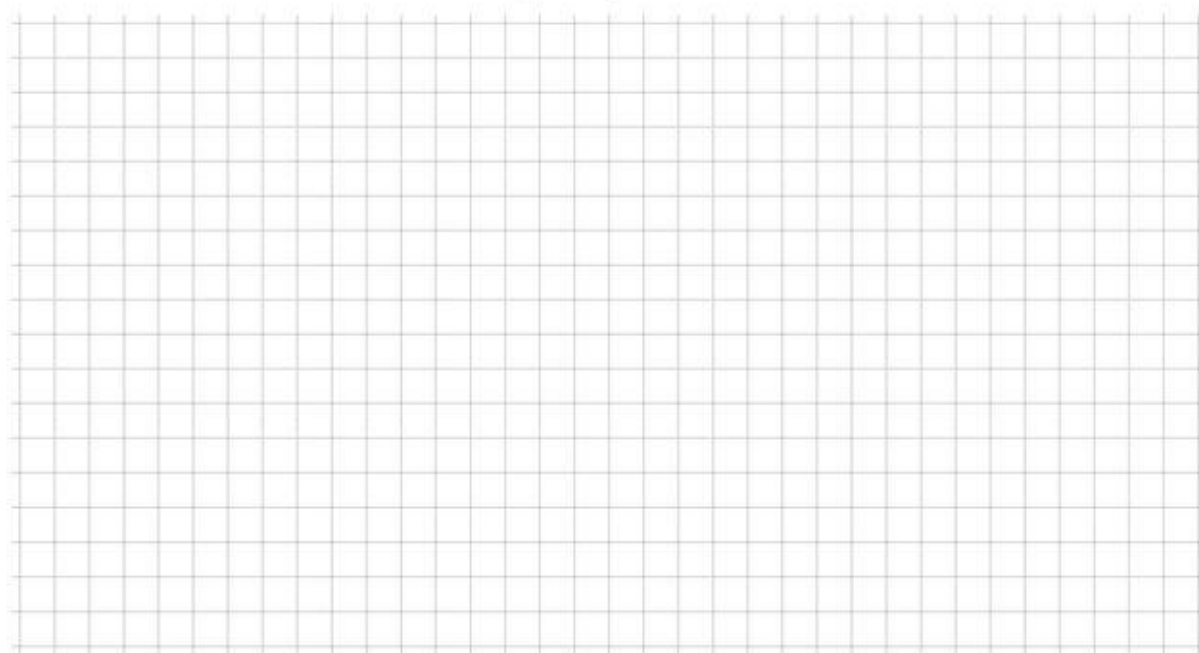
Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 55\}$ losujemy jednocześnie dwie liczby.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch takich liczb, że ich iloczyn jest liczbą parzystą. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 13. (0-2)**

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 4^x - x^5 + 3x^3 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

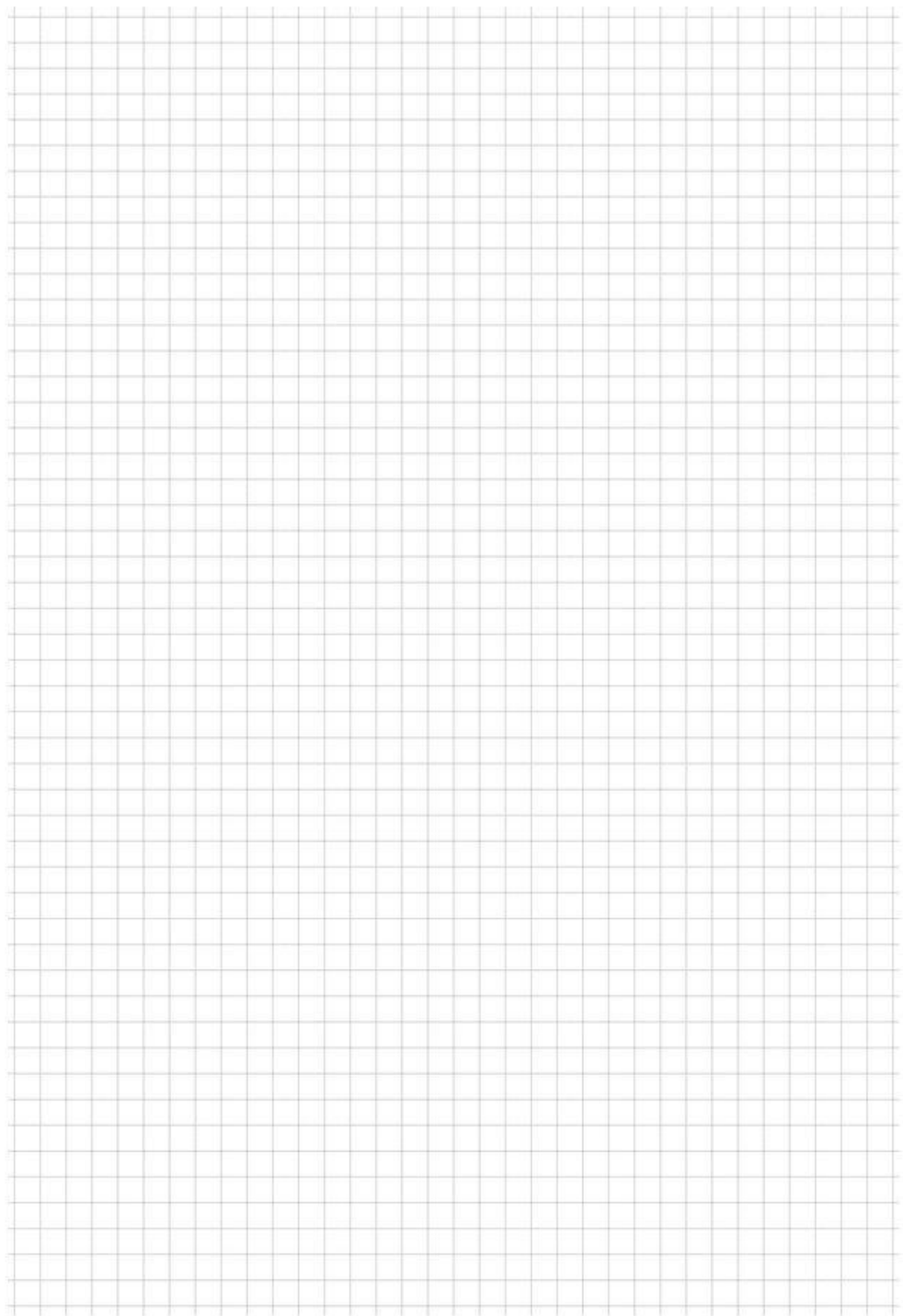
Wykaż, że funkcja f ma w przedziale $[-1; 2]$ co najmniej jedno miejsce zerowe.



Zadanie 14. (0–6)

Rozpatrujemy walce, których suma długości średnicy podstawy i wysokości jest równa 12.

Oblicz promień podstawy i wysokość tego spośród walców, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-2)

Dane są liczby a , b oraz c :

$$a = \frac{1}{\log_8 4} \quad b = \frac{1}{\log_{24} 4} \quad c = \frac{1}{\log_{48} 4}$$

Wyznacz wartość wyrażenia $a + c - b$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-2)

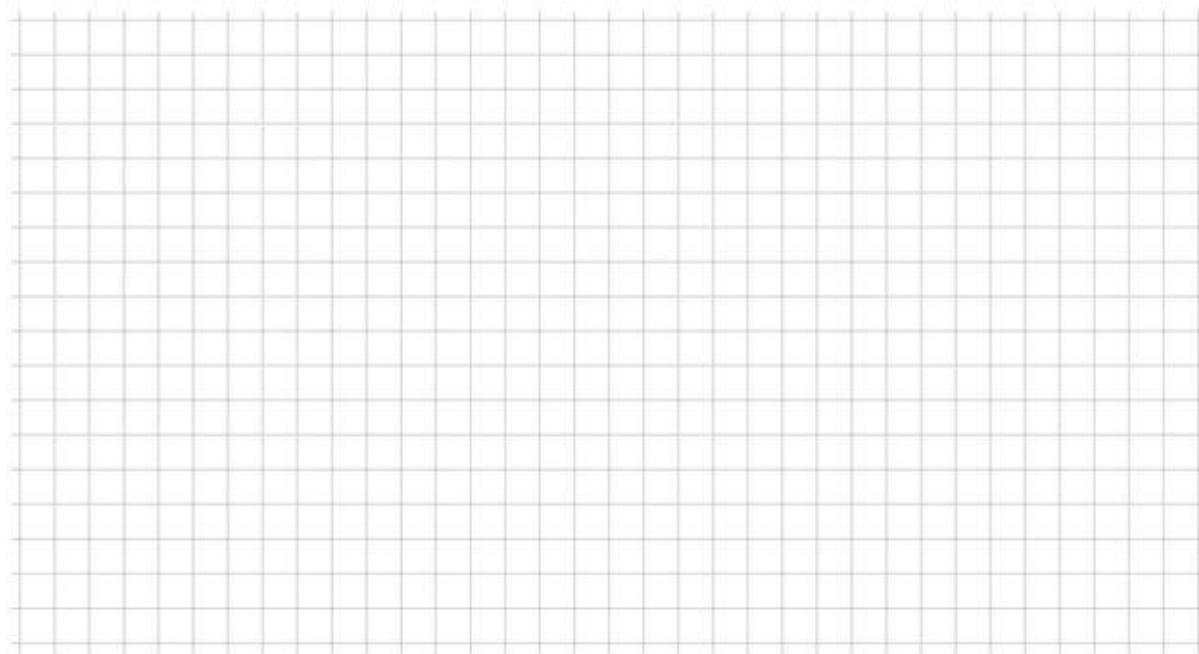
Udowodnij, że dla różnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $x + y \geq 0$, prawdziwa jest nierówność $x^3 - x^2y \geq xy^2 - y^3$.

Zadanie 3. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+4) & \text{dla } x \in (-4; -3] \\ -\log_{\frac{1}{2}}(x+4) & \text{dla } x \in (-3; +\infty) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji f i wyznacz zbiór tych wartości, które ta funkcja przyjmuje dla argumentów należących do przedziału $[-3; 12]$.

**Zadanie 4. (0-2)**

W pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) suma m początkowych wyrazów jest równa sumie k początkowych wyrazów, gdzie $m \neq k$.

Oblicz sumę $(m+k)$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

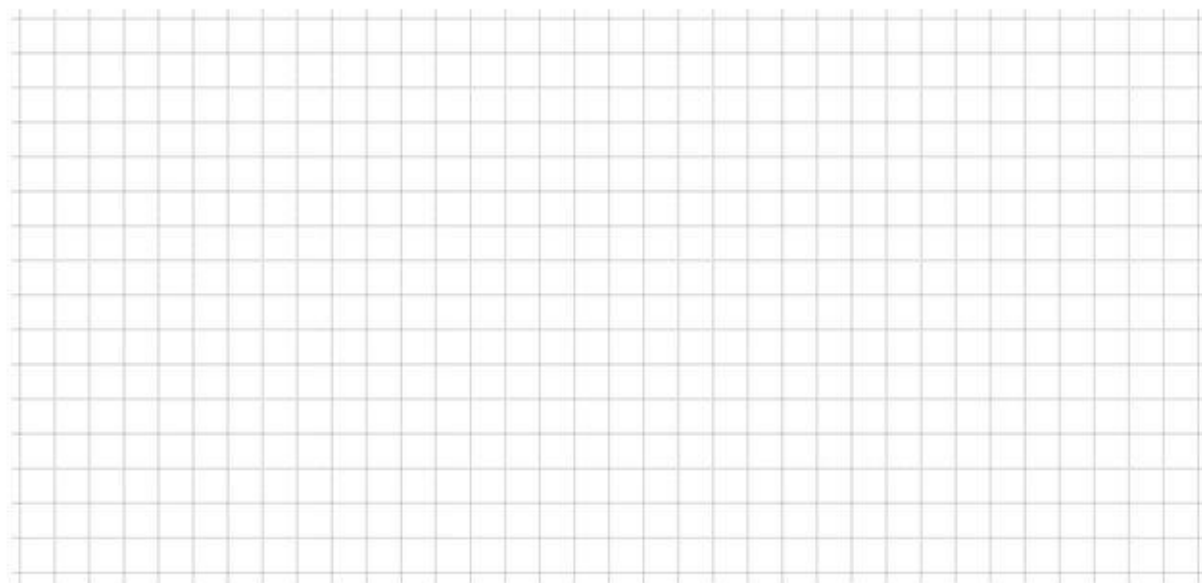


Zadanie 5. (0-3)

Ciąg (a_n) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest określony wzorem:

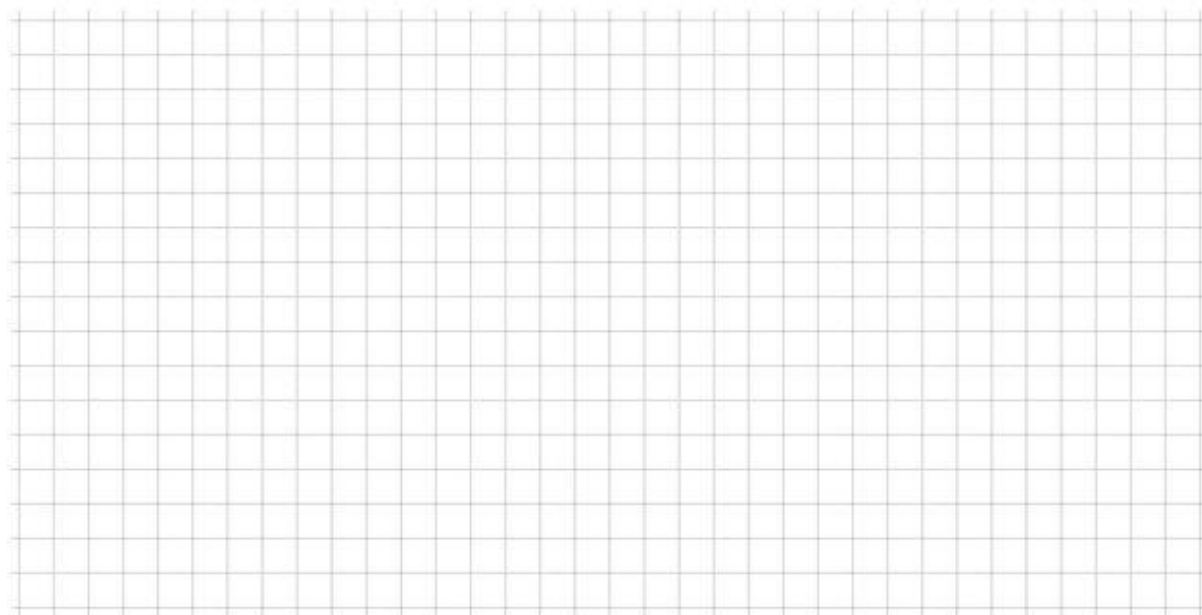
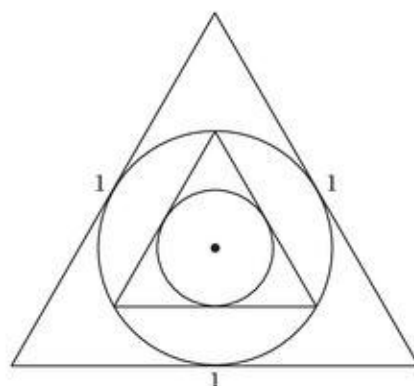
$$a_n = \frac{k^3 n + 2}{n + 6} - \frac{3k^2 n + 12kn + 1}{3n + 5}$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -4$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 6. (0-5)**

W trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 1, wpisano okrąg. W ten okrąg wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów wpisano okrąg (zobacz rysunek).

Oblicz, ile razy suma obwodów wszystkich trójkątów równobocznych będzie większa od sumy długości wszystkich okręgów wpisanych w te trójkąty, jeżeli opisany powyżej schemat rysowania figur będziemy powtarzać w nieskończoność. Zapisz obliczenia.



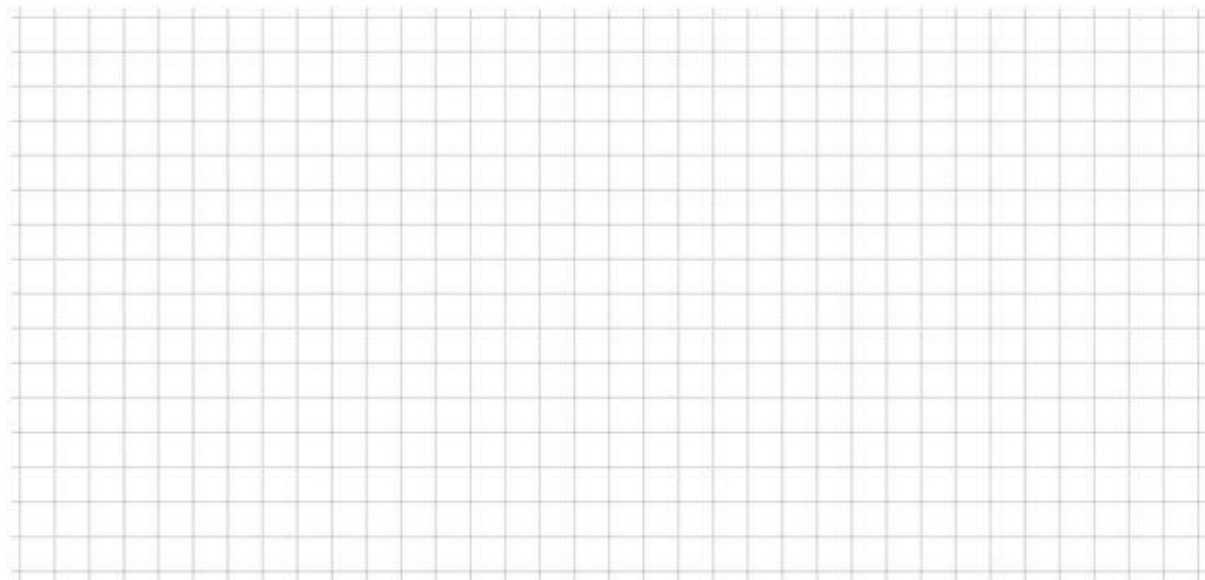
Zadanie 7. (0-4)

Rozwiąż równanie: $\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 8. (0-3)**

Kąty trójkąta mają miary α , β , γ oraz $1 - \cos \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta$.

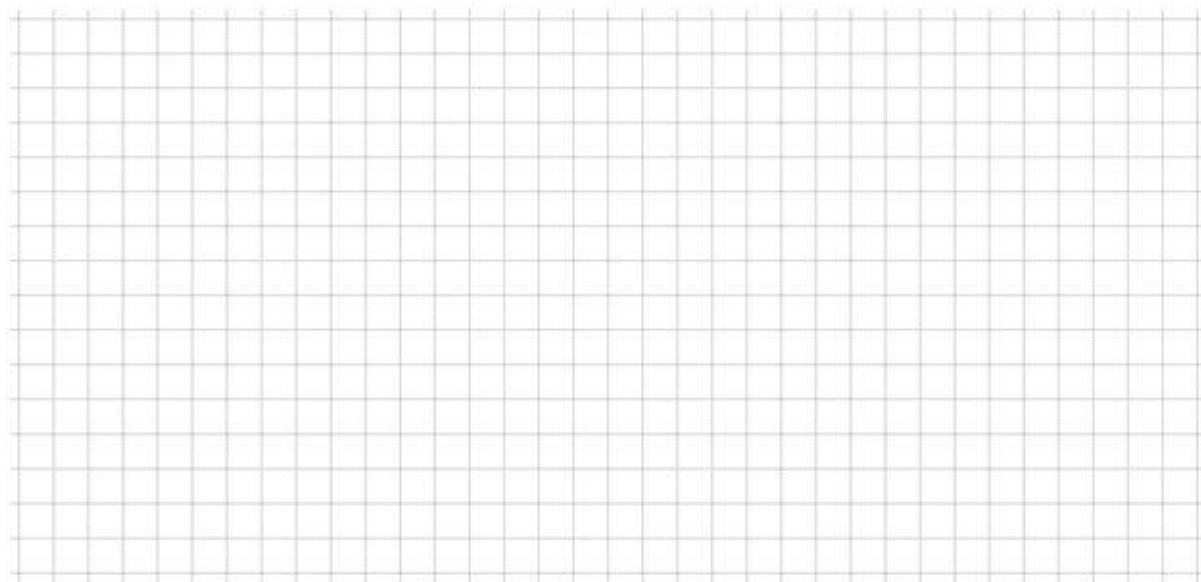
Wykaż, że ten trójkąt jest równoramienny.



Zadanie 9. (0–4)

W trójkącie ABC środki przecinają się w punkcie $S = (3, 2)$. Ponadto dane są: $C = (5, 8)$ i $\overrightarrow{AC} = [9, 11]$.

Oblicz współrzędne wierzchołków A i B trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 10. (0–5)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 20, a ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

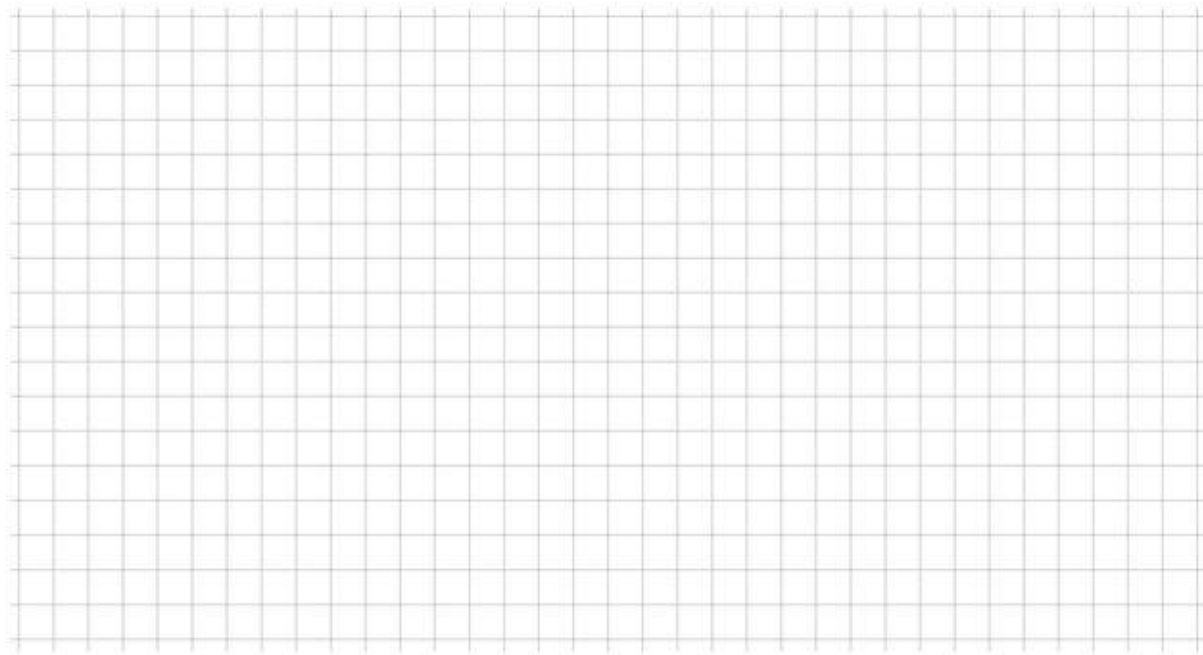
Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i prostopadłą do przeciwległej ściany bocznej. Zapisz obliczenia.



Zadanie 11. (0–4)

Doświadczenie polega na dwunastokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry.

Oblicz prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wypadło 6 oczek, jeżeli wiadomo, że w dwunastu rzutach 6 oczek wypadło cztery razy. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 12. (0–4)**

Funkcja f jest określona wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (k - m - 1)x^2 + (2m - k - 2)x + 7$$

Wyznacz wszystkie wartości parametrów k i m , dla których funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1]$ oraz $[5; \infty)$ i malejąca w przedziale $[1; 5]$. Zapisz obliczenia.

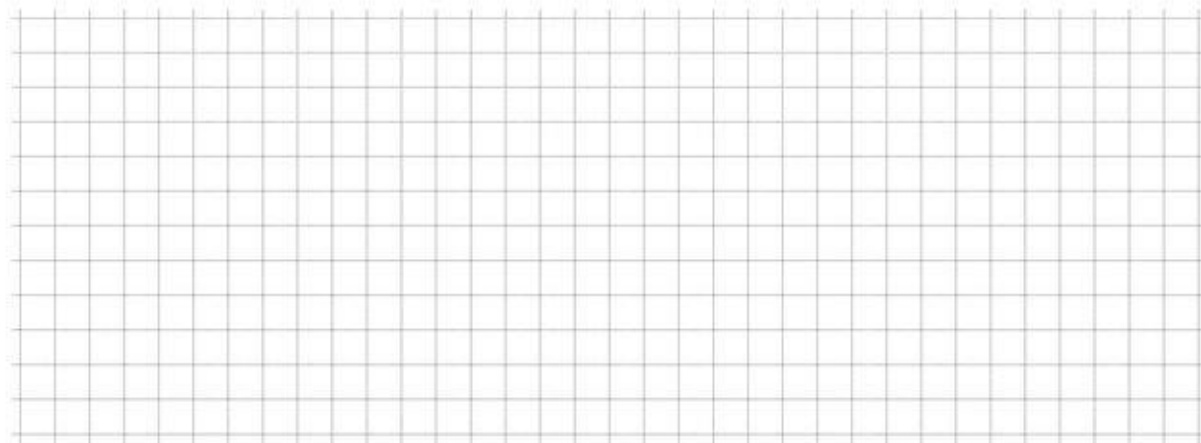


Zadanie 13. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem:

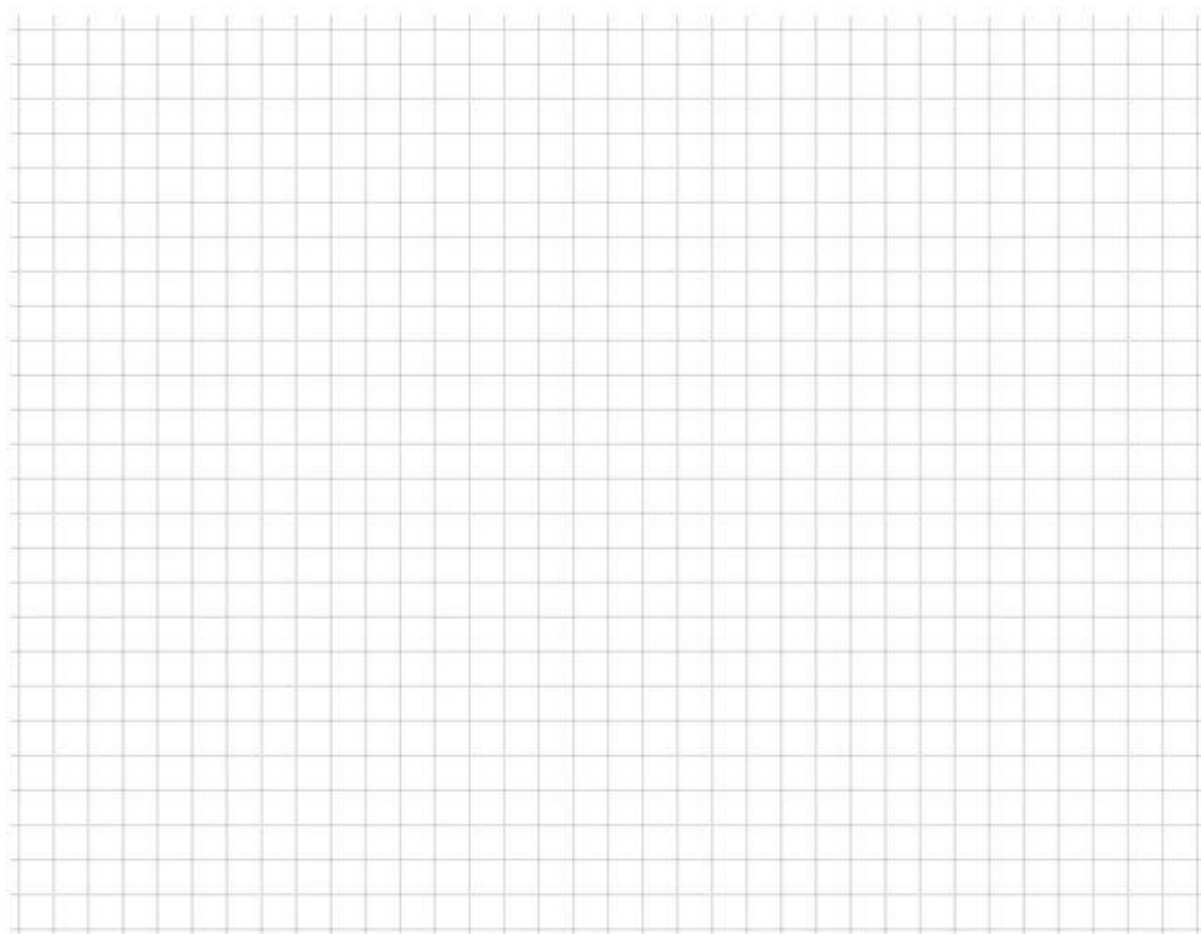
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{3x + 2}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-4, -2)$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 14. (0-6)**

Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 + 4$. Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki należą do paraboli, a dwa pozostałe należą do odcinka KL , gdzie K i L są punktami przecięcia prostej o równaniu $y = -5$ z parabolą.

Oblicz długości boków tego z prostokątów, którego pole jest największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-4)

Dane są liczby x , y oraz z :

$$x = \log_{a\sqrt{a}}(a+1) \quad y = \log_{a^2+a} a \quad z = \log_{a^3+a^2} \sqrt{a}$$

gdzie a jest liczbą dodatnią i spełnia warunek $a^2 = a + 1$.

Oblicz różnicę między największą i najmniejszą z liczb x , y oraz z . Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-4)

Dany jest wielomian określony wzorem:

$$W(x) = (x^2 - 66x + a^2 + a - 26)(x + 2) + (3a^2 - a)(x + 2)x$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci sześciianu pewnego dwumianu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–4)

Dane jest równanie z niewiadomą x :

$$x^2 + 2mx + 2 = 0$$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite m , dla których równanie ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 , spełniające warunek $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 16$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 4. (0–2)**

Funkcja liniowa f spełnia warunek:

$$f(6) = \frac{7+f(7)}{7} = \frac{5+f(5)}{5}$$

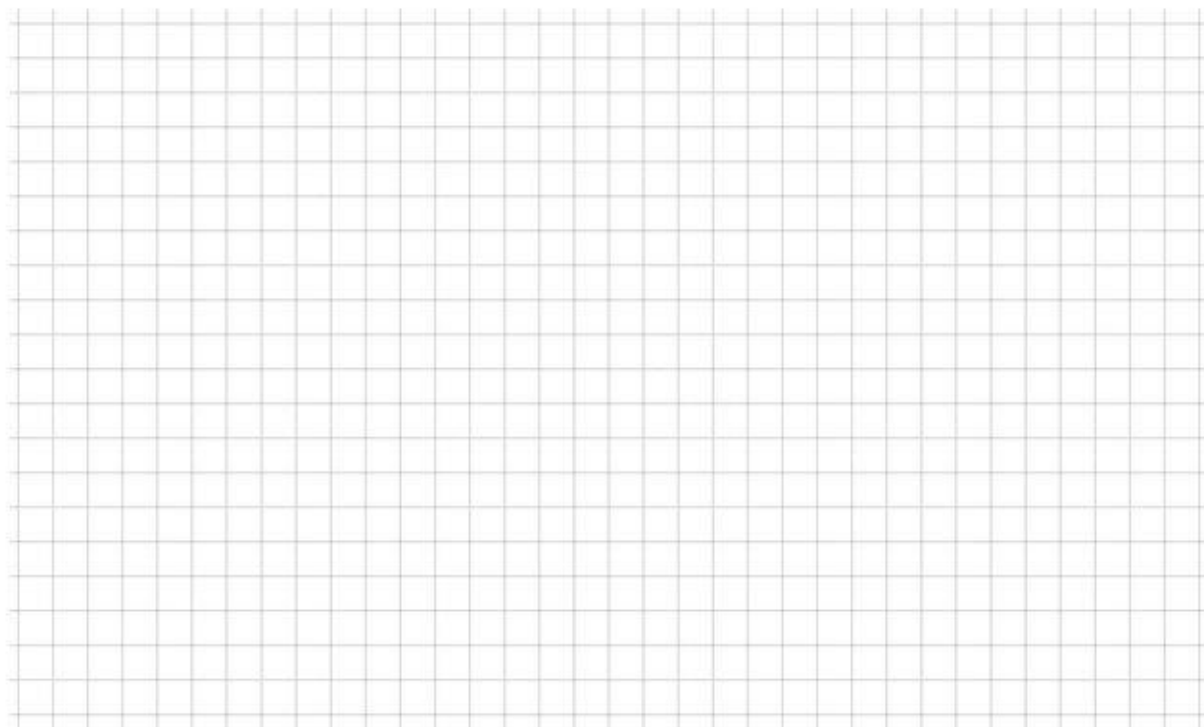
Wyznacz wzór funkcji f . Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–3)

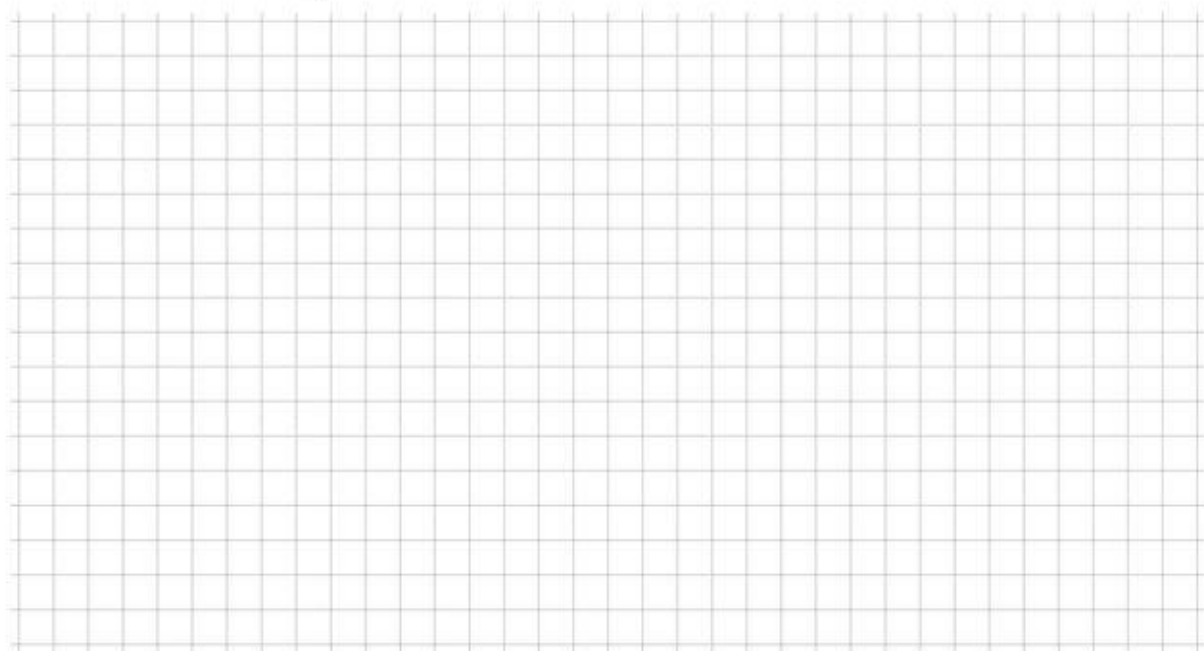
W pewnym skończonym ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy $1\frac{1}{2}$, a ostatni 96. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $190\frac{1}{2}$.

Wyznacz iloraz ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 6. (0–4)**

Trzy odcinki mają długości: $n-1$, n , $n+1$, gdzie n jest liczbą naturalną i $n > 2$. Odcinki te mają wspólny środek i każde dwa przecinają się pod kątem 60° , a ich końce są wierzchołkami sześciokąta, którego pole oznaczamy symbolem P_n . Ponadto symbol S_n oznacza pole sześciokąta foremnego, którego bok ma długość n .

Wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{P_n}$. Zapisz obliczenia.



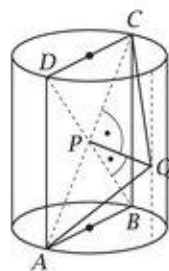
Zadanie 9. (0-2)

Wykaż, że każdy punkt należący do paraboli o równaniu $y = 2x^2$ jest jednakowo odległy od punktu $F = (0, \frac{1}{8})$ i od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$.

**Zadanie 10. (0-4)**

Przekątne prostokąta $ABCD$ który jest przekrojem osiowym walca, przecinają się w punkcie P . Odcinek PQ jest prostopadły do płaszczyzny $ABCD$ oraz punkt Q należy do powierzchni bocznej walca (zobacz rysunek). Ponadto cosinus kąta AQC jest równy $-0,8$.

Oblicz cosinus kąta między przekątną przekroju osiowego a podstawą tego walca. Zapisz obliczenia.



Zadanie 11. (0–3)

W pudełku były czekoladki — każda o innym smaku. Z tego pudełka można było wyjąć trzy czekoladki na pewną liczbę sposobów. Po wzięciu trzech czekoladek z pudełka, liczba tych sposobów zmniejszyła się o 136.

Oblicz, ile czekoladek było początkowo w tym pudełku. Zapisz obliczenia.

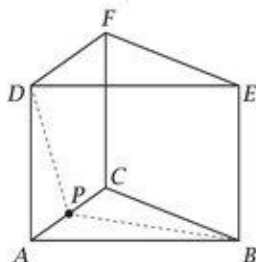
Zadanie 12. (0–4)

W laboratorium znajduje się 100 próbek wody pobranych z trzech rzek: R_1 , R_2 , R_3 . Próbek z R_2 jest o 4 więcej niż z R_1 , a próbek z R_3 jest 4 razy więcej niż z R_1 . Probki te przebadano na obecność w nich substancji X i wykryto ją: w 50% próbek z R_1 , w 20% próbek z R_2 i w 25% próbek z R_3 . Z zestawu wszystkich tych 100 próbek wybrano w sposób losowy jedną. Okazało się, że nie zawiera ona substancji X.

Oblicz prawdopodobieństwo, że badana próbka wody pochodzi z rzeki R_3 . Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Punkt P jest środkiem krawędzi podstawy AC graniastosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$. Suma długości odcinków PB i PD jest równa 1 (zobacz rysunek).

**Zadanie 13.1. (0-2)**

Wykaż, że objętość graniastosłupa $ABCDEF$ wyraża się wzorem:

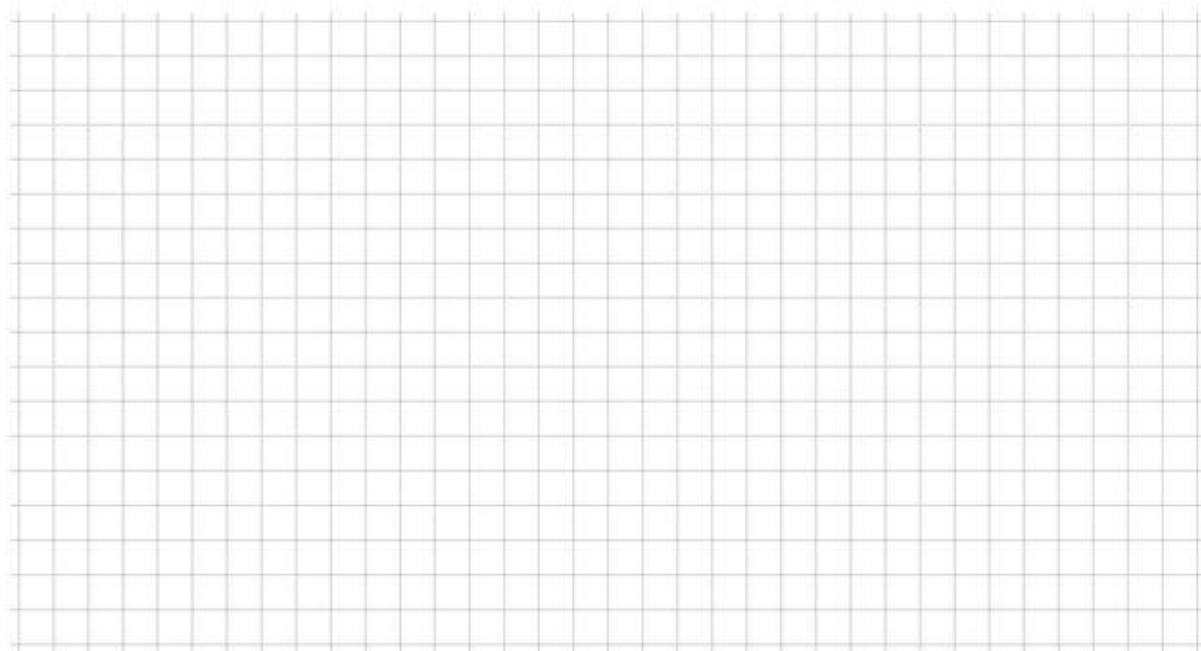
$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}, \text{ gdzie } x \text{ oznacza długość odcinka } PB$$

**Zadanie 13.2. (0-4)**

Objętość V graniastosłupa $ABCDEF$ w zależności od długości x odcinka PB jest określona wzorem:

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}$$

Wyznacz taką wartość x , dla której graniastosłup $ABCDEF$ ma największą objętość. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-3)

Dane jest wyrażenie:

$$W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \log_{\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}}} (xy^3) + \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}$$

Wykaż, że dla dodatnich liczb x i y spełniających warunek $x^3 \neq y^2$ wyrażenie W przyjmuje stałą wartość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3)

Prosta o równaniu $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + 1$.

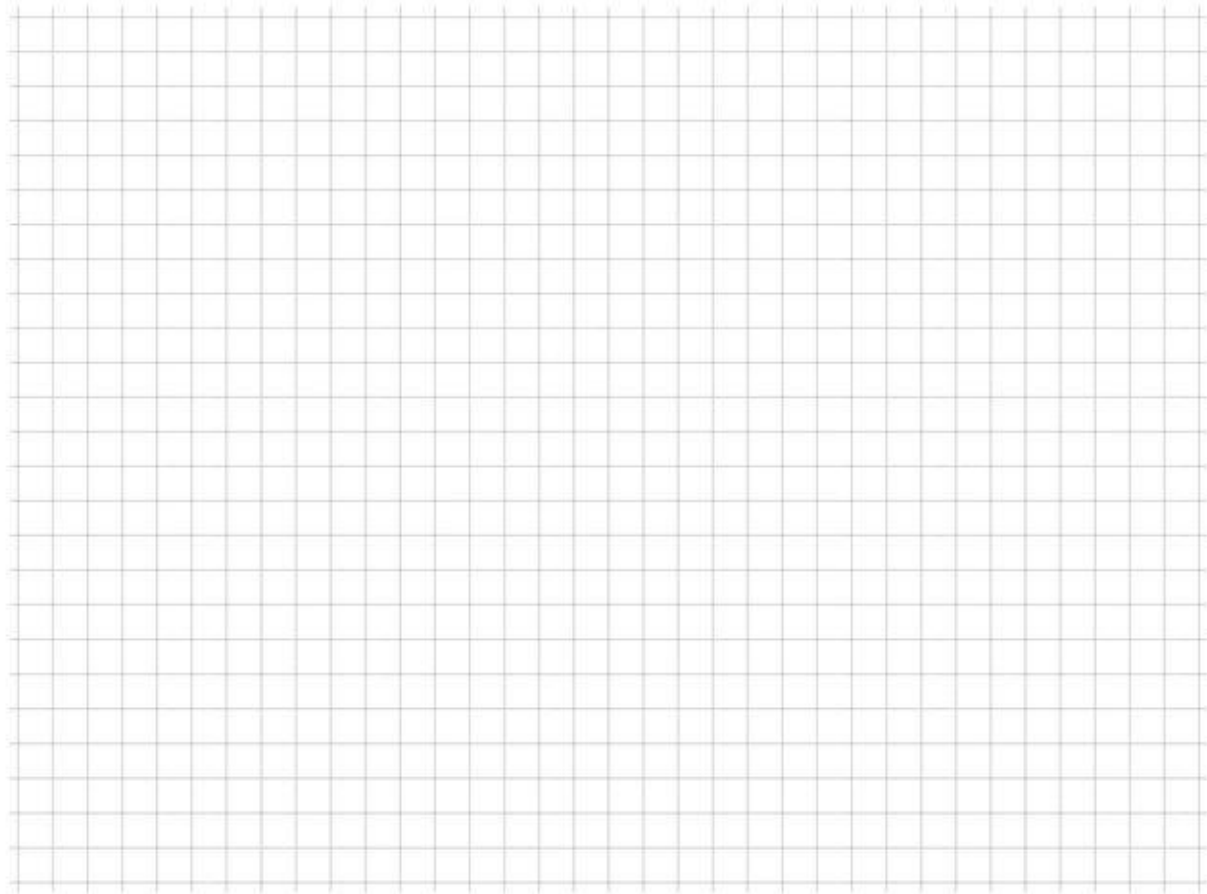
Rozwiąż nierówność $f(x) < 1 - x^3$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–5)

Dane jest równanie z niewiadomą x :

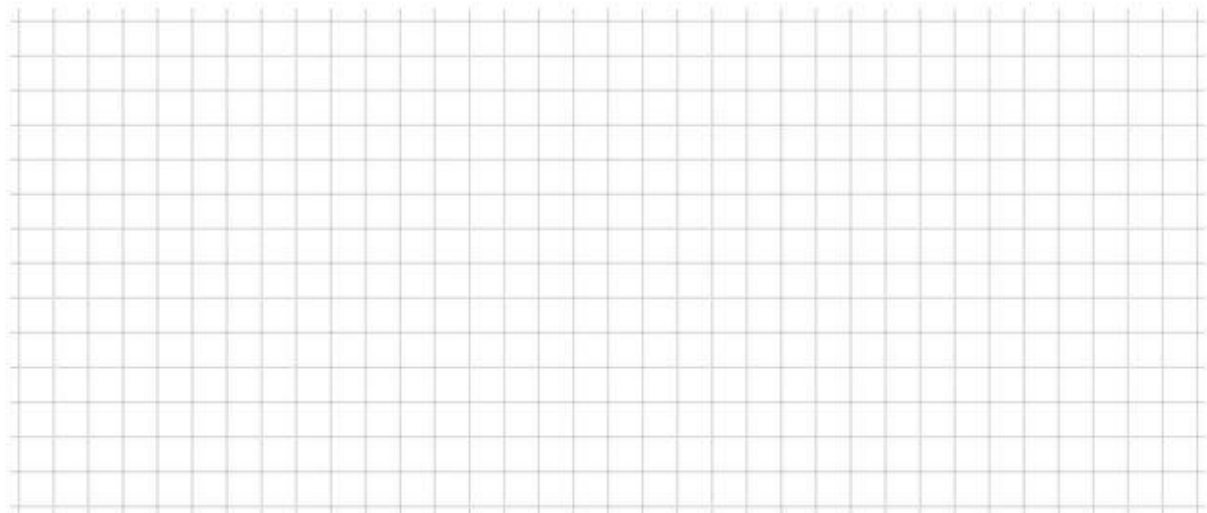
$$x^2 + mx + m - 2 = 0$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których to równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 takie, że wyrażenie $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ przyjmuje najmniejszą wartość. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 4. (0–4)**

Suma wszystkich wyrazów pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 9, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $16\frac{1}{3}$.

Oblicz sumę sześciątów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

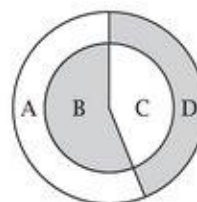


Zadanie 5. (0–3)

Rozwiąż równanie $\sin^2 2x = \cos 2x + 1$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 6. (0–4)**

W figurze przedstawionej na rysunku stosunek promienia większego okręgu do promienia mniejszego okręgu jest równy $\frac{3}{2}$. Figury B i D (zaznaczone kolorem szarym) mają równe pola.



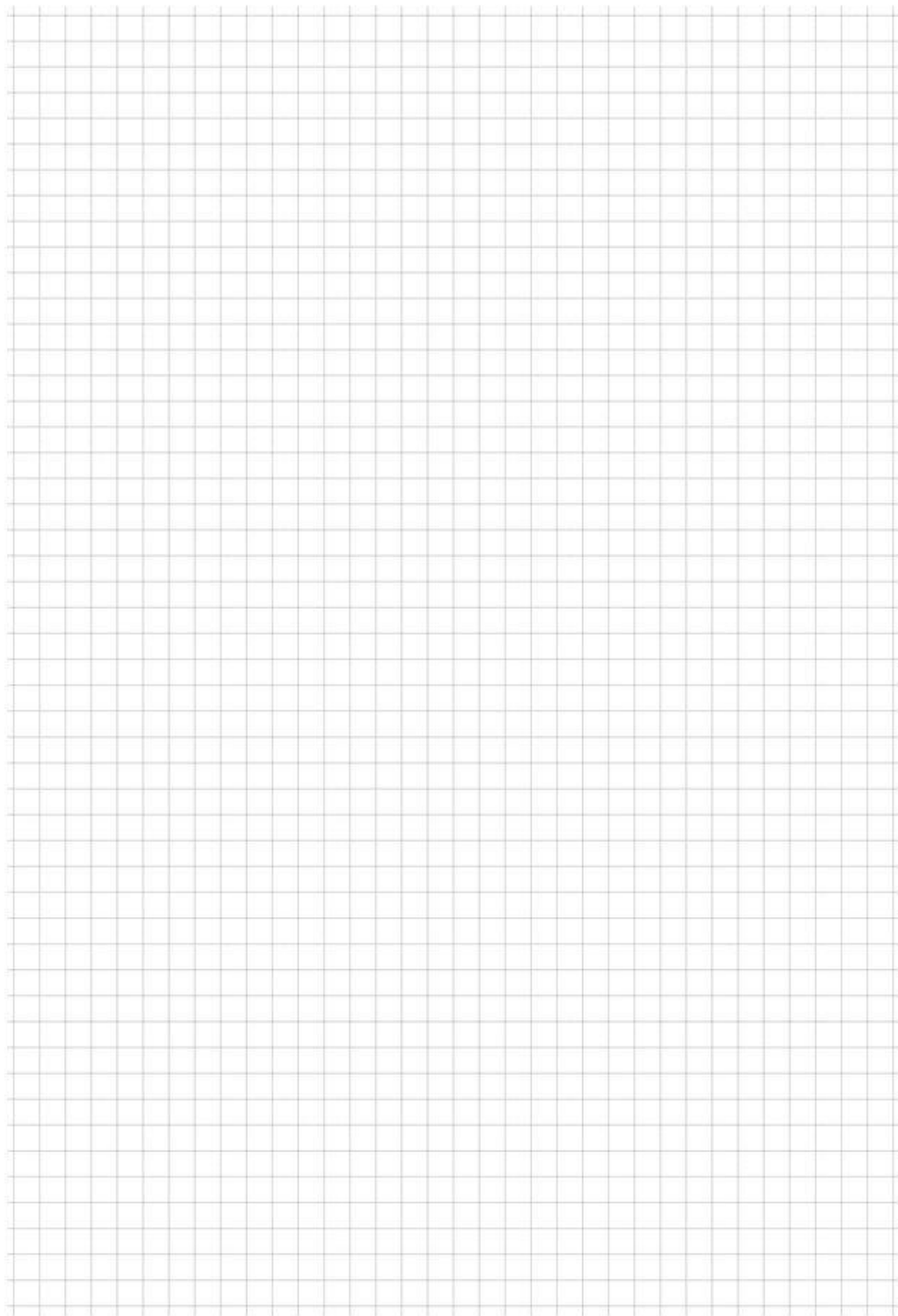
Oblicz stosunek pola figury A do pola figury C. Zapisz obliczenia.



Zadanie 7. (0-5)

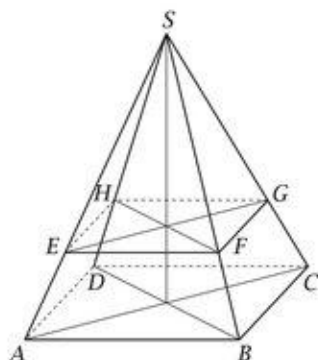
Punkt $A = (-2, 16)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Wiadomo, że punkt $P = (6, 12)$ jest środkiem boku AB , a punkt $Q = (-5, 5)$ jest środkiem odcinka CP .

Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC . Zapisz obliczenia.

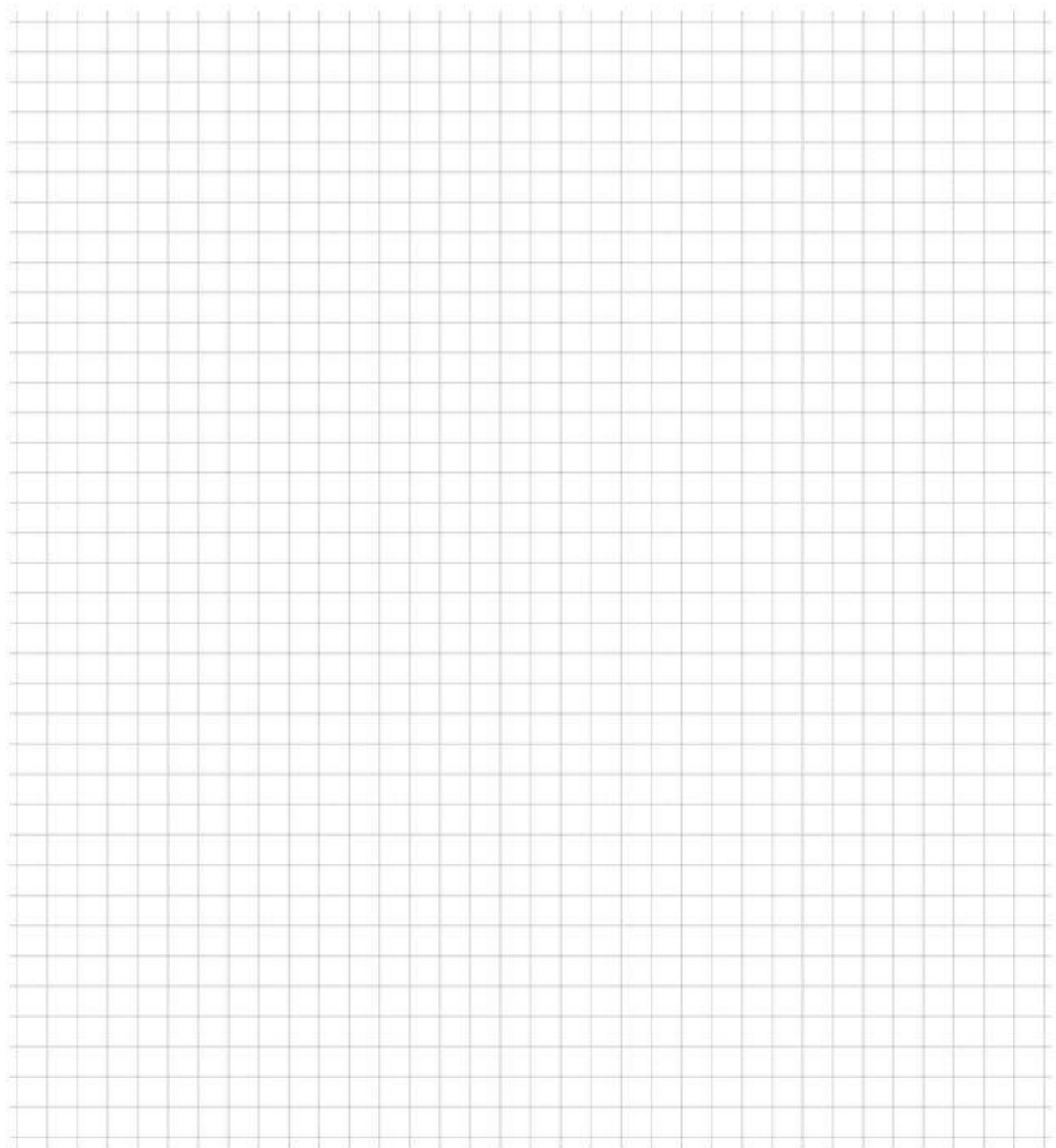


Zadanie 8. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ ściana boczna i podstawa mają równe pola. Płaszczyzną równoległą do podstawy odcięto mniejszy ostrosłup $EFGH S$ w taki sposób, że pole czworokąta $EFGH$ jest równe polu czworokąta $ABFE$ (zobacz rysunek).



Oblicz stosunek objętości ostrosłupa $ABCD S$ do objętości ostrosłupa $EFGH S$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0–3)

W pewnej grupie jest dwukrotnie więcej dziewcząt niż chłopców. Obliczono, że liczba możliwości wybrania trzech chłopców z tej grupy stanowi $\frac{20}{11}\%$ liczby wszystkich możliwości wyboru trzech osób.

Oblicz, ile osób jest w tej grupie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

W trzech kopertach są banknoty 10-złotowe i 20-złotowe. Liczby banknotów w poszczególnych kopertach przedstawiono w tabeli.

Nominał banknotu \ Nr koperty	Nr koperty		
	I	II	III
10 zł	7	8	5
20 zł	3	2	11

Z losowo wybranej koperty należy wylosować dwa banknoty. O wyborze koperty decyduje trzykrotny rzut symetryczną monetą. Jeśli orzeł wypadnie trzy razy, banknoty są losowane z pierwszej koperty, jeśli dokładnie dwa razy — z drugiej koperty. W pozostałych wypadkach odbędzie się losowanie z trzeciej koperty.

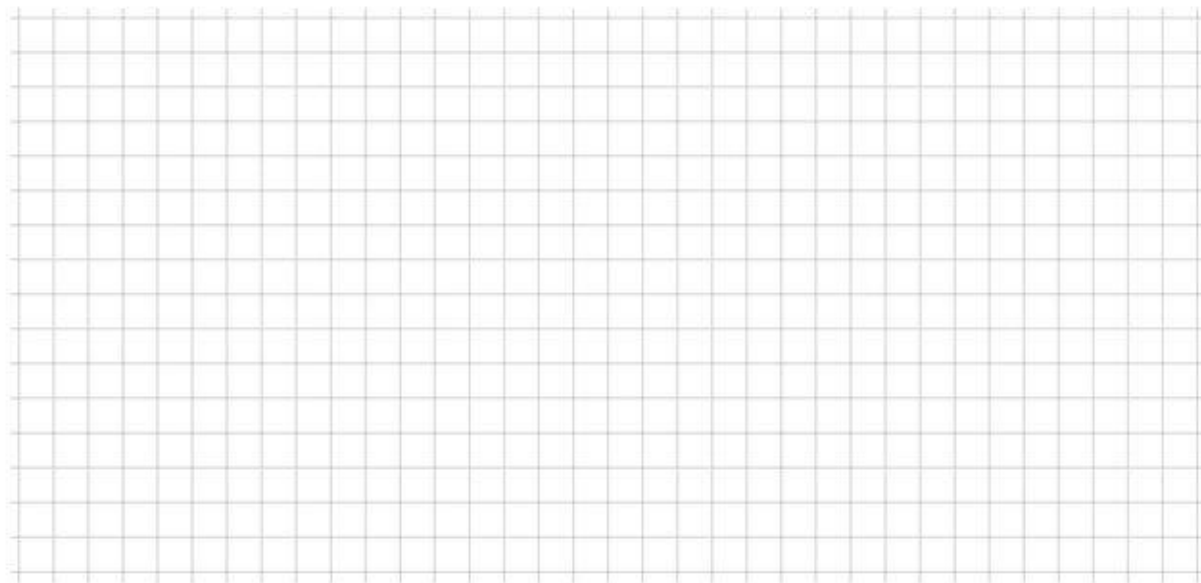
Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana kwota pieniędzy będzie większa niż 20 zł. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11.

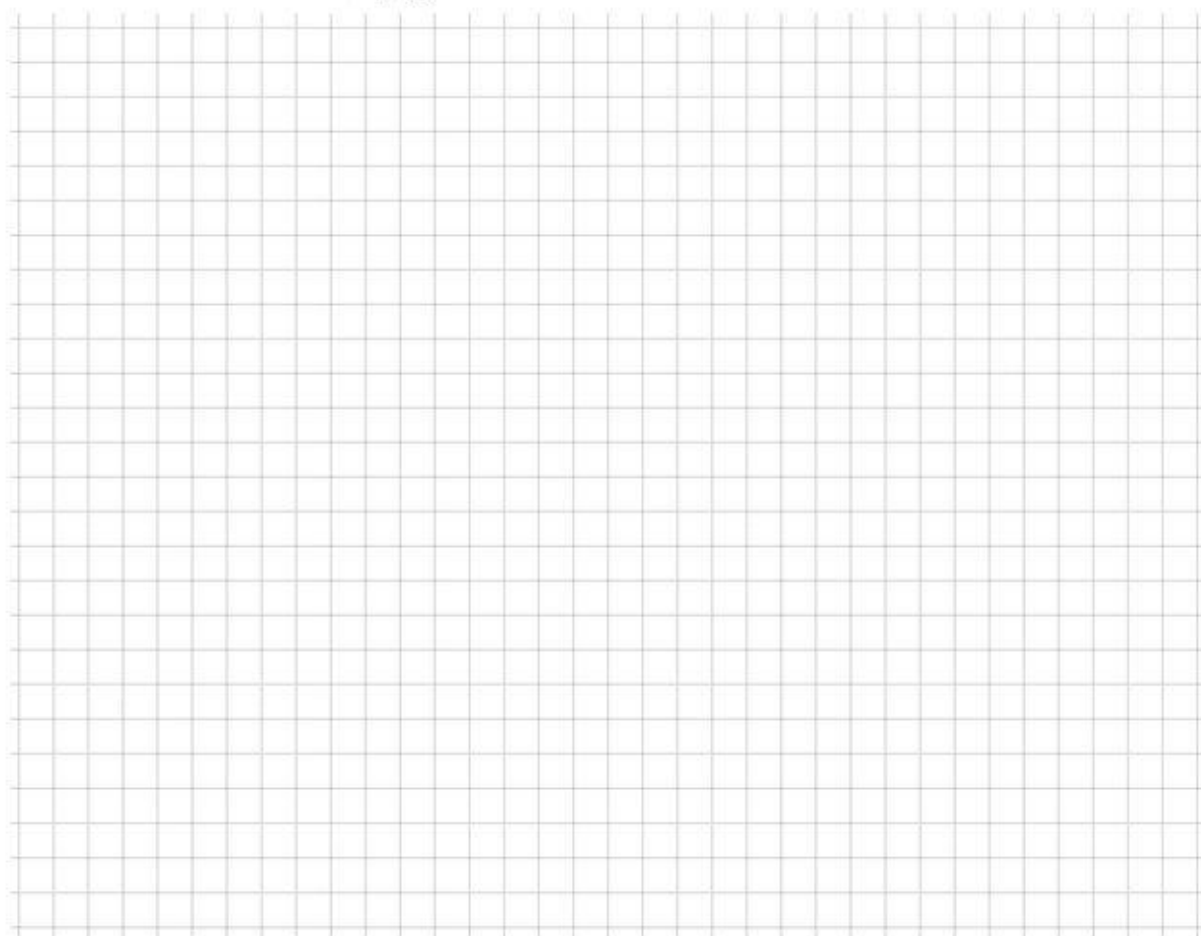
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + (p+1)x + p^2 + p + 1}$, gdzie liczba rzeczywista p jest parametrem.

Zadanie 11.1. (0-3)

Wykaż, że dla każdej wartości parametru p dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$.

**Zadanie 11.2. (0-3)**

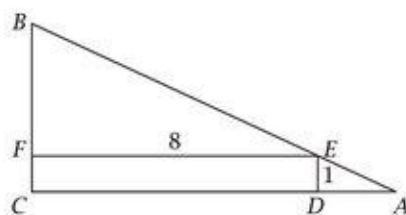
Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których wykres pochodnej funkcji f przechodzi przez punkt $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 12.

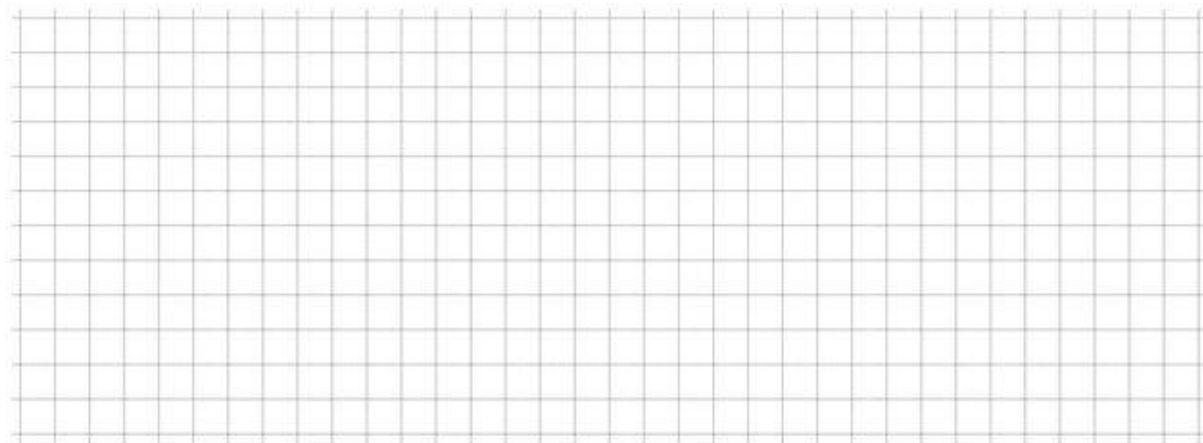
Na prostokącie $CDEF$ o wymiarach 8×1 opisano trójkąt prostokątny ABC w sposób przedstawiony na rysunku.

Dwa sąsiednie boki prostokąta $CDEF$ zawierają się w przyprostokątnych trójkąta ABC , a wierzchołek nienależący do tych boków leży na przeciwprostokątnej.

**Zadanie 12.1. (0-2)**

Wykaż, że długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC wyraża się wzorem:

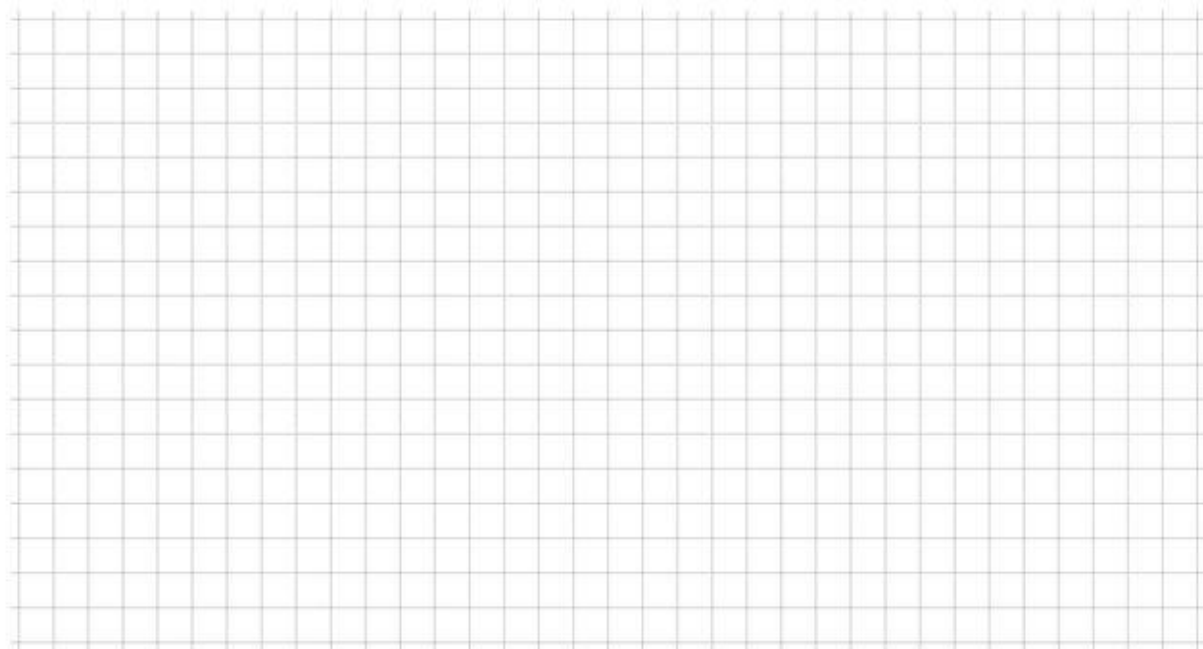
$$c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}, \text{ gdzie } x \text{ oznacza długość odcinka } BF$$

**Zadanie 12.2. (0-4)**

Długość c przeciwprostokątnej trójkąta ABC w zależności od długości x odcinka BF wyraża się wzorem:

$$c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}$$

Wyznacz najmniejszą długość, jaką może mieć przeciwprostokątna trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-2)

Wartość wyrażenia $(\sqrt{2})^{2024} \cdot (\sqrt[3]{5})^{3015}$ jest liczbą naturalną.

Ustal, ile cyfr ma zapis dziesiętny tej liczby. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-5)

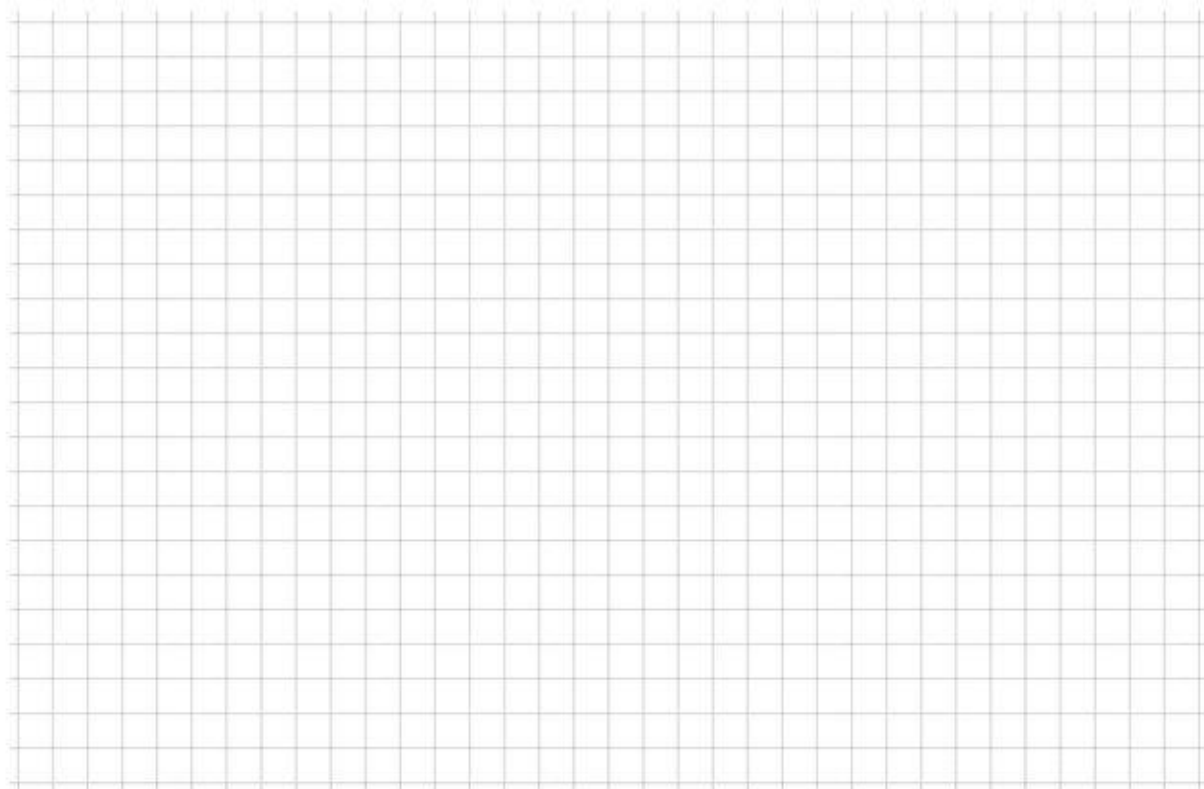
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \log_{7\sqrt{7}} |x - 42|$. Ponadto zbiór A jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-24 \leq (x - 1)(x + 4)(x + 6) \leq 0$.

Zapisz zbiór A za pomocą sumy przedziałów oraz wyznacz wartość funkcji f dla najmniejszej liczby należącej do zbioru A . Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–5)

Funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 - 13x + k$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1 i x_2 . Miejscami zerowymi funkcji g określonej wzorem $g(x) = x^2 + px + q$ są liczby $\sqrt{x_1}$ i $\sqrt{x_2}$.

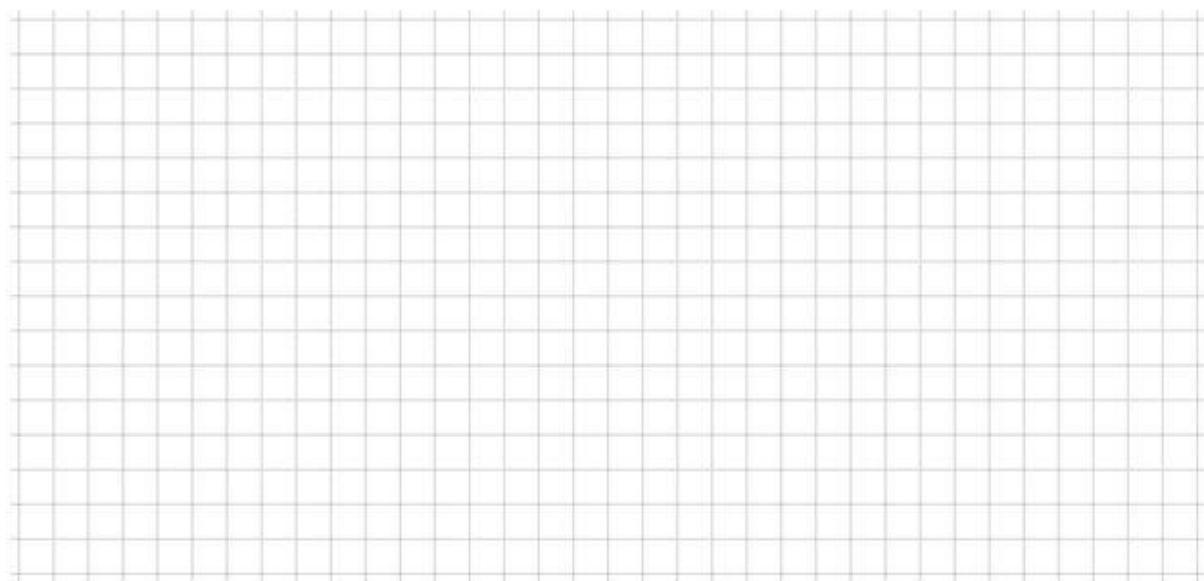
Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których zachodzi związek $p^2 + 2q = 37$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 4. (0–3)**

Dany jest układ równań z niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - 1 = 0 \\ x + |y| = 3 \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie pary liczb x i y , które spełniają ten układ równań. Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–3)

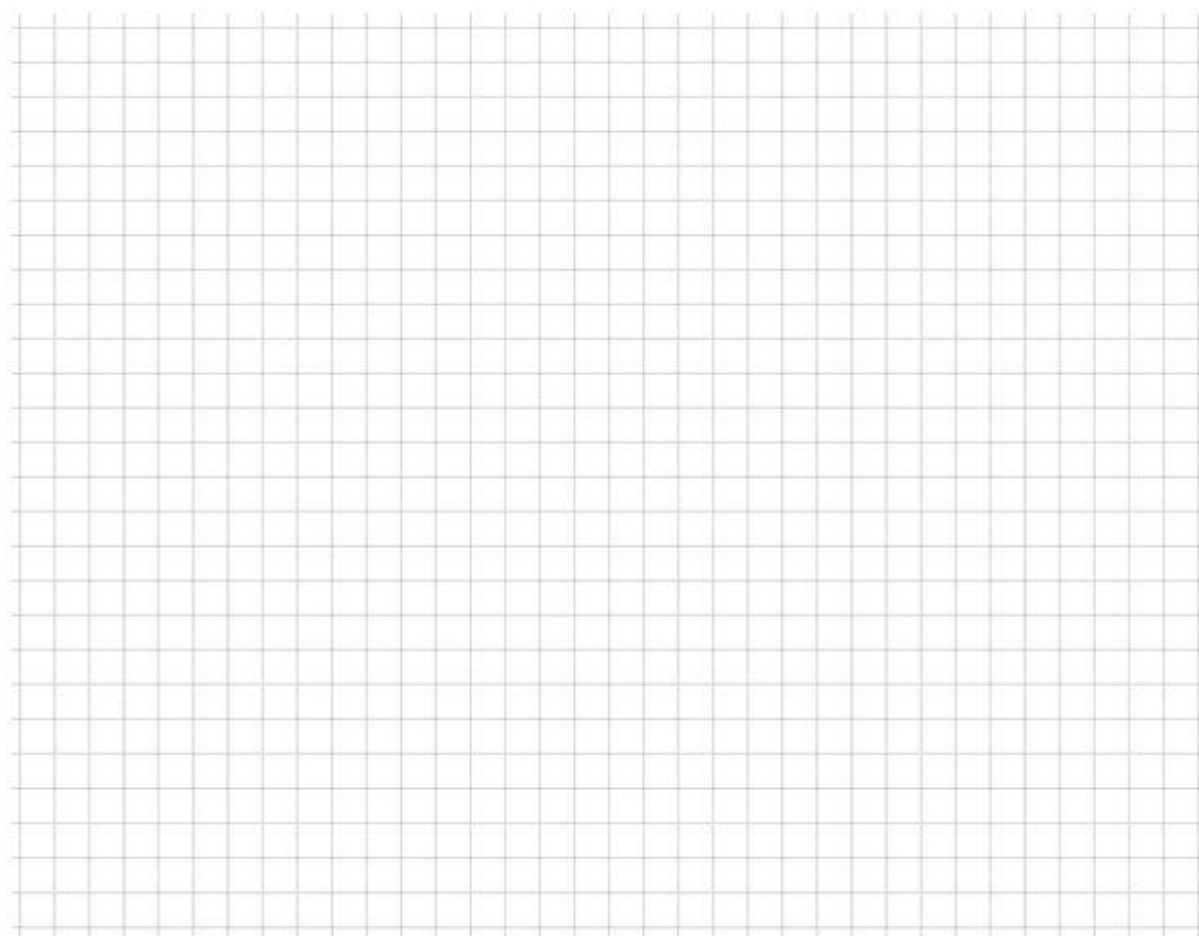
Kładąc obok siebie dwa jednakowe prostokątne kartoniki P , które nie są kwadratami, można na dwa sposoby ułożyć nowy prostokąt. Przekątna jednego z otrzymanych w ten sposób prostokątów ma długość $2\sqrt{13}$, a drugiego — $\sqrt{73}$.

Oblicz, jaką długość ma przekątna prostokąta P . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 6. (0–5)**

Na paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ zaznaczono trzy punkty A , B i C o pierwszych współrzędnych odpowiednio równych 2, m oraz 6, gdzie $m \in (2; 6)$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których pole trójkąta ABC jest mniejsze od 4. Zapisz obliczenia.



Zadanie 7. (0-3)

Określ przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 5$ w zbiorze, w którym funkcja g określona wzorem $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ przyjmuje wartości nieujemne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 5\sqrt{4x^2 + 3}$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. O ciągu (b_n) wiadomo, że $b_n = \sqrt[n]{a^n + 9^n}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ oraz a jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, 10)$ należącym do I ćwiartki układu współrzędnych.

Wykaż, że granicą ciągu (b_n) jest liczba 9.

Zadanie 9. (0-2)

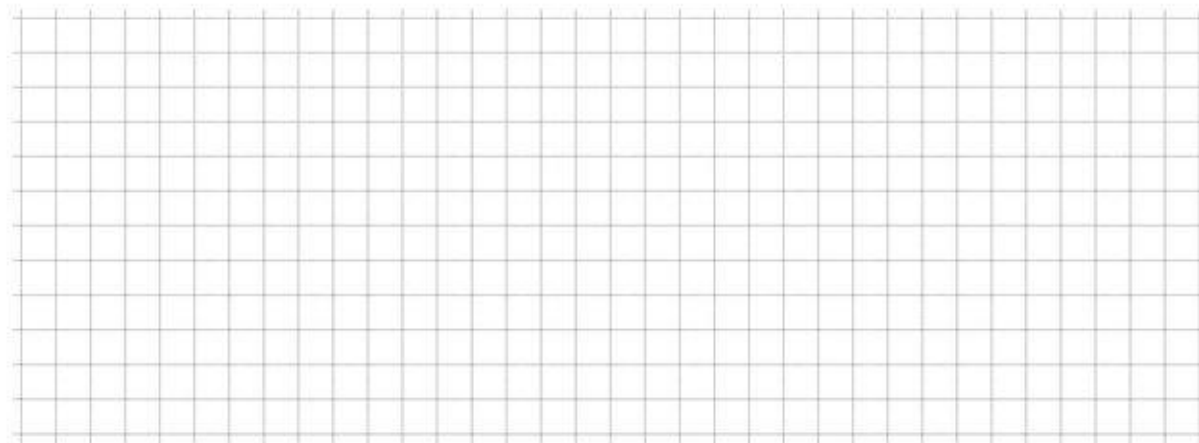
Wykaż, że dla każdego kąta ostrego α zachodzi nierówność:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 > 6$$

Zadanie 10. (0-3)

Prostopadłościan o wymiarach $8 \times a \times b$, gdzie $8 \leq a \leq b$, ma objętość równą 1728. Ściany, dla których krawędź o długości a jest wspólna, są prostokątami podobnymi.

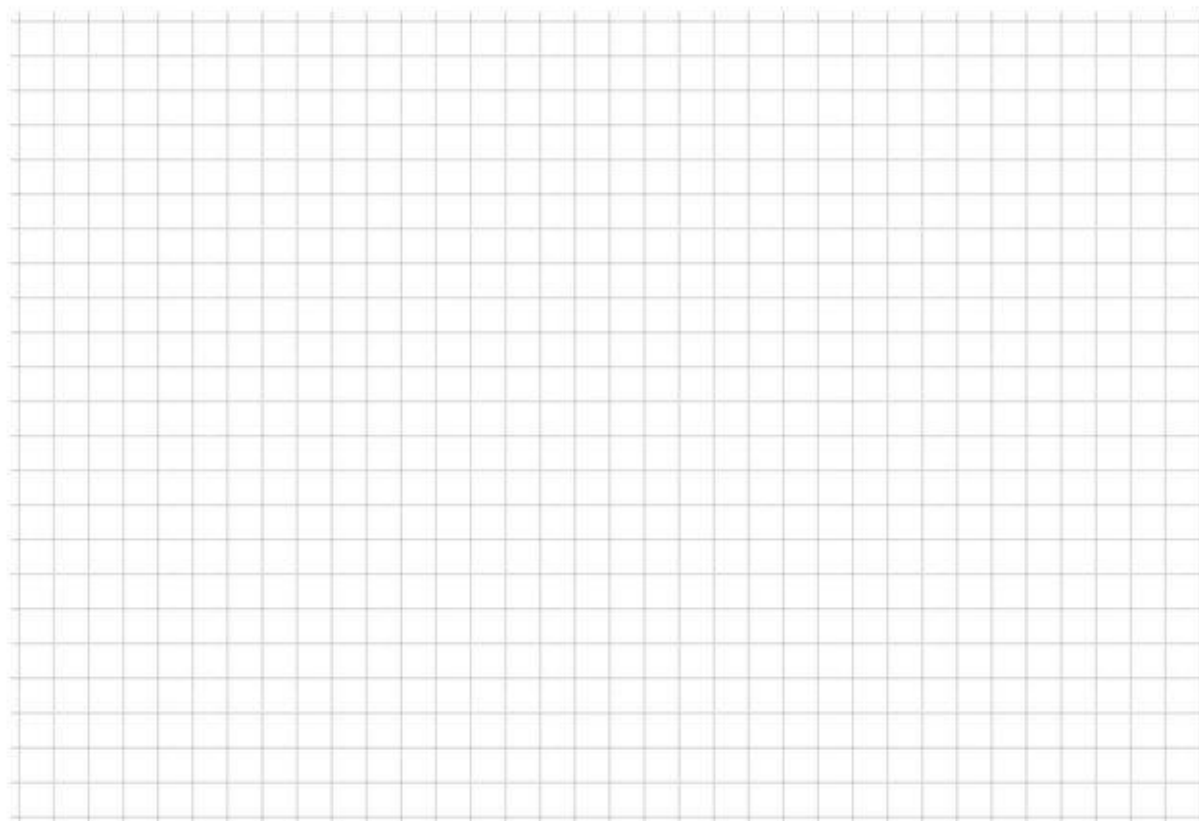
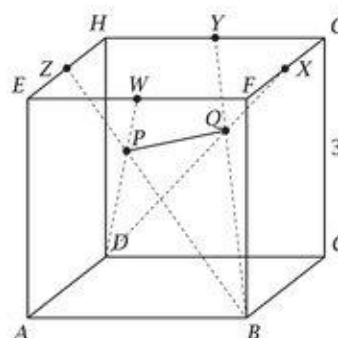
Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Zapisz obliczenia.


Zadanie 11. (0-4)

Punkty W, X, Y, Z są środkami odpowiednio krawędzi EF, FG, GH, HE sześcianu $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 3 (zobacz rysunek).

Odcinki BZ i DW przecinają się w punkcie P , a odcinki BY i DX przecinają się w punkcie Q .

Wykaż, że odcinek PQ ma długość $\sqrt{2}$.



Zadanie 12. (0–2)

Na ławce jest 7 miejsc dla zawodników rezerwowych. Podczas meczu zasiądzie na niej siedmiu zawodników wśród których są: rezerwowy bramkarz i kapitan zespołu.

Oblicz, na ile sposobów siedmiu zawodników może zająć te miejsca, jeśli rezerwowy bramkarz i kapitan nie mogą siedzieć obok siebie. Zapisz obliczenia.

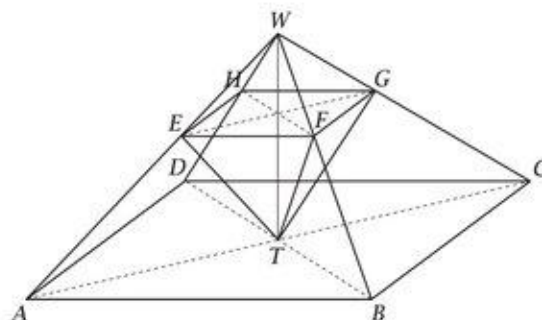
Zadanie 13. (0–4)

W pojemniku są kule białe i czarne, przy czym czarnych jest dwa razy więcej niż białych. Z tego pojemnika są losowane kolejno, bez zwracania, dwie kule. Obliczono, że prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli czarnej pod warunkiem, że za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jest równe 0,7.

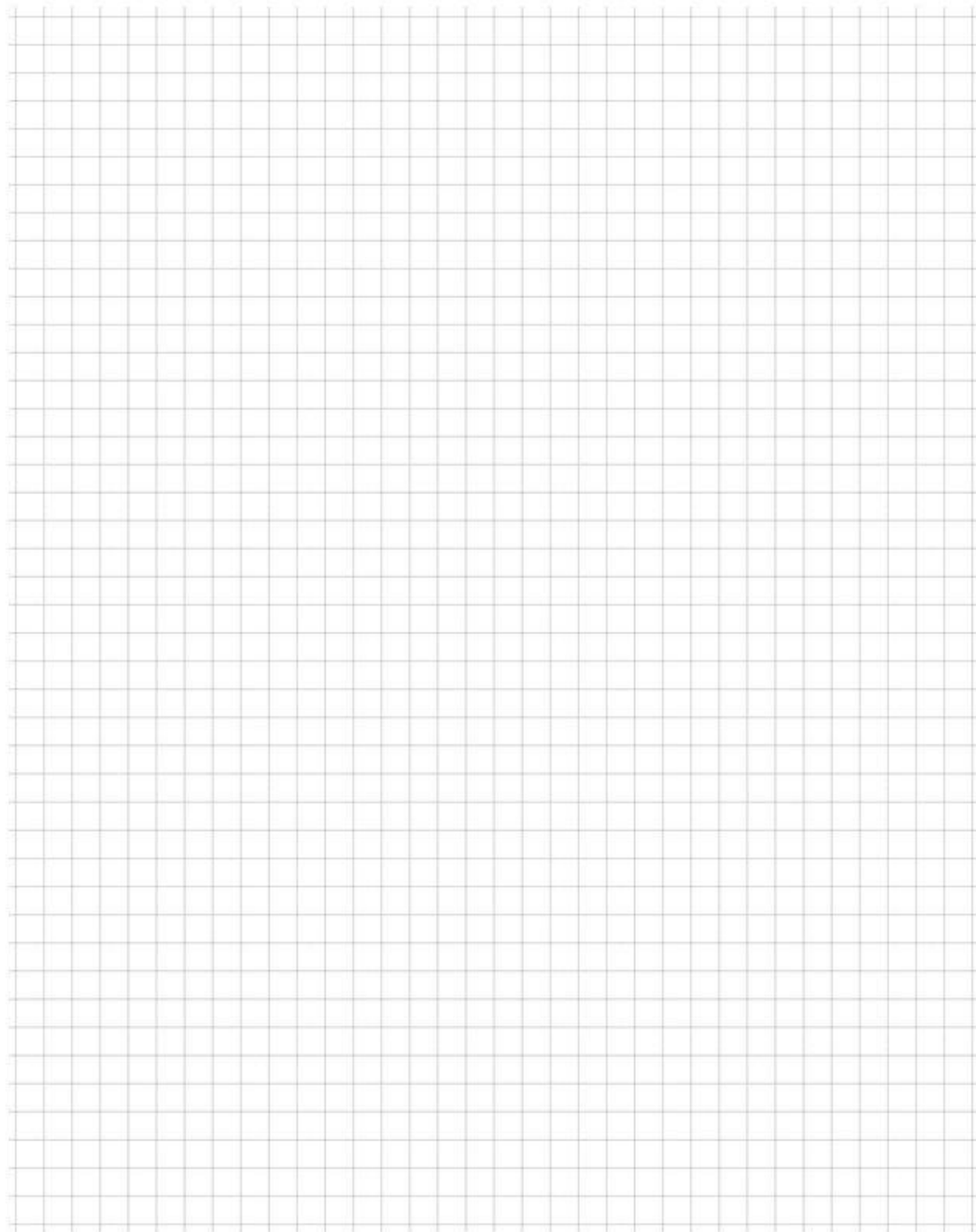
Oblicz, ile wszystkich kul jest w tym pojemniku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-6)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDW$ wszystkie krawędzie mają długość 6. W ostrosłupie tym umieszczono ostrosłup prawidłowy czworokątny $EFGHT$ tak, że każdy wierzchołek jego podstawy leży na innej krawędzi bocznej ostrosłupa $ABCDW$, a jego wierzchołek T jest punktem przecięcia przekątnych podstawy ostrosłupa $ABCDW$ (zobacz rysunek).



Wyznacz największą objętość, jaką może mieć ostrosłup $EFGHT$. Zapisz obliczenia.



SCHEMATY ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OTWARTYCH

(zakres podstawowy)

Arkusz egzaminacyjny nr 1

Zadanie 4. (0-2)

$$w = 9^{-\frac{5}{2}} = (3^2)^{-\frac{5}{2}} = 3^{-5}$$

$$x = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3$$

$$y = 27^{-\frac{4}{3}} = (3^3)^{-\frac{4}{3}} = 3^{-4}$$

$$z = (\sqrt{3})^4 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^2$$

Aby iloczyn trzech potęg liczby 3 był równy 1, suma wykładników tych potęg powinna być równa 0.

$$w \cdot x \cdot z = 3^{-5} \cdot 3^3 \cdot 3^2 = 3^0 = 1$$

Zatem z zestawu usunięto liczbę y .

Zasady oceniania:

2 p. — ustalenie, którą liczbę z zestawu należy usunąć: y

1 p. — zapisanie liczb w , x , y i z w postaci potęg liczby 3: $w = 3^{-5}$, $x = 3^3$, $y = 3^{-4}$, $z = 3^2$

Zadanie 6. (0-2)

n — dowolna liczba naturalna, $n \geq 1$

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$$

Liczba n^2 jest naturalna, czyli $3n^2$ jest liczbą naturalną podzielną przez 3.

Liczba 2 jest niepodzielna przez 3.

Suma liczby podzielnej przez 3 i niepodzielnej przez 3 jest liczbą niepodzielną przez 3, więc $3n^2 + 2$ nie dzieli się przez 3.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych w postaci równoważnej wyrażeniu $3n^2 + 2$

Zadanie 8. (0-2)

$$k^5 + 2k^3 - 1000k^2 = 2000, \text{ czyli } k^2(k^3 + 2k - 1000) = 2000$$

Skoro $k^3 + 2k - 1000 = 20$, więc $k^2 \cdot 20 = 2000$, stąd $k^2 = 100$

Liczba $k > 0$, więc $k = 10$.

Obliczamy wartość wyrażenia $x^4 + 2x^2 - 1000x$ dla $x = 10$:

$$10^4 + 2 \cdot 10^2 - 1000 \cdot 10 = 2 \cdot 10^2 = 200$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie wartości wyrażenia $x^4 + 2x^2 - 1000x$ dla liczby k : 200

1 p. — wyznaczenie liczby k : 10

Zadanie 13. (0-3)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 8 + 2p + q = 9 \\ 27 + 3p + q = 8 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} p = -20 \\ q = 41 \end{cases}$$

$$W(x) = x^3 - 20x + 41$$

$$W(-1) = (-1)^3 - 20 \cdot (-1) + 41 = 60$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości wielomianu dla $x = -1$: $W(-1) = 60$

2 p. — wyznaczenie wartości p i q : $p = -20$, $q = 41$

1 p. — zapisanie układu równań $\begin{cases} 8 + 2p + q = 9 \\ 27 + 3p + q = 8 \end{cases}$

Zadanie 15. (0-1)

Odpowiedź: (3, 2)

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 19. (0-2)

$a_n > 0$, czyli $-2(n-3)(n+5) > 0$

Dzieląc obie strony nierówności $-2(n-3)(n+5) > 0$ przez wyrażenie $-2(n+5)$, które dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ przyjmuje ujemną wartość, otrzymujemy:

$$n-3 < 0, \text{ stąd } n < 3$$

Zatem ciąg (a_n) ma tylko dwa dodatnie wyrazy, a są to: a_1 i a_2 .

Obliczamy sumę $a_1 + a_2$:

$$a_1 + a_2 = (-2)(1-3)(1+5) + (-2)(2-3)(2+5) = 24 + 14 = 38$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie sumy wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) : 38

1 p. — ustalenie, które wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie: a_1 i a_2

Zadanie 21. (0-3)

Sprawdzamy ilorazy sąsiednich liczb:

$$\frac{12}{6} = 2 \qquad \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \qquad \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

Druga, trzecia i czwarta liczba są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{3}{2}$.

$$a_1 \cdot \frac{3}{2} = 12, \text{ stąd } a_1 = 8$$

Zatem liczbę 6 należy zamienić na liczbę 8.

Wzór ogólny ciągu (a_n) to: $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (a_n) : $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

2 p. — wyznaczenie pierwszego wyrazu ciągu (a_n) : $a_1 = 8$

1 p. — wyznaczenie ilorazu ciągu (a_n) : $q = \frac{3}{2}$

Zadanie 23. (0-2)

α — kąt rozwarty rombu

$$5^2 \cdot \sin \alpha = 24, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{24}{25}$$

Z jedynki trygonometrycznej wynika, że:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \text{ stąd } \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2, \text{ czyli } \cos^2 \alpha = \frac{49}{625}$$

Skoro kąt α jest rozwarty, więc $\cos \alpha < 0$, zatem $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$.

Obliczamy tangens kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ stąd } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}, \text{ czyli } \operatorname{tg} \alpha = -3\frac{3}{7}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie tangensa kąta rozwartego rombu: $-3\frac{3}{7}$

1 p. — obliczenie sinusa kąta rozwartego rombu: $\frac{24}{25}$

Zadanie 28. (0-2)

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = 0,8, \text{ gdzie } \alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 0,8 = 24$$

Zasady oceniania:2 p. — obliczenie pola trójkąta: $P = 24$ 1 p. — obliczenie sinusa kąta α : $\sin \alpha = 0,8$ **Zadanie 29. (0-2)****Odpowiedź:** 60, 2**Zasady oceniania:**

2 p. — podanie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 p. — podanie jednej poprawnej odpowiedzi

Zadanie 33. (0-4) $P(x)$ — pole figury F (w cm^2)

$$P(x) = 60^2 - 2x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (60 - x)(60 - x) = -3x^2 + 120x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 30)$.Wykres funkcji kwadratowej $y = -3x^2 + 120x$ ma ramiona skierowane w dół, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla $x = \frac{-120}{2 \cdot (-3)} = 20$.Ponieważ $20 \in (0; 30)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 30)$ przyjmuje największą wartość dla $x = 20$ i jest ona równa $P(20) = 1200$.Największe pole, jakie może mieć figura F , to 1200 cm^2 .**Zasady oceniania:**4 p. — obliczenie możliwie największego pola figury F : $P = 1200 \text{ cm}^2$ 3 p. — wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja P osiąga największą wartość: $x = 20$ 2 p. — zapisanie wzoru funkcji P i wyznaczenie jej dziedziny1 p. — zapisanie wzoru funkcji P : $P(x) = -3x^2 + 120x$ **Arkusz egzaminacyjny nr 2****Zadanie 9. (0-3)**

Ustalamy, że:

- pól z wpisaną liczbą 4 jest $(n - 2)^2$,
- pól z wpisaną liczbą 3 jest $4(n - 2)$,
- są 4 pola z wpisaną liczbą 2.

Rozwiązujemy równanie:

$$4 \cdot (n - 2)^2 + 3 \cdot 4(n - 2) + 4 \cdot 2 = 22\,200$$

$$4n^2 - 4n - 22\,200 = 0$$

 $n = 75$ lub $n = -74$ ($n = -74$ nie spełnia warunków zadania, bo n jest liczbą naturalną i $n > 1$).**Zasady oceniania:**3 p. — obliczenie wartości n : $n = 75$ 2 p. — zapisanie równania z niewiadomą n w postaci $4n^2 - 4n - 22\,200 = 0$

1 p. — ustalenie, ile jest pól z liczbą 4, 3 i 2

Zadanie 11. (0-3)

J — obecny wiek Joanny

K — obecny wiek Katarzyny

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} J - 8 = 1,6 \cdot \frac{12 + K - 8}{2} \\ K + 8 = 0,8 \cdot \frac{28 + J + 8}{2} \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} J = 24 \\ K = 16 \end{cases}$$

Obliczamy, jakim procentem obecnej średniej arytmetycznej wieku Joanny i Katarzyny jest obecny wiek Wojciecha:

$$\frac{20}{\frac{24+16}{2}} \cdot 100\% = 100\%$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie, jakim procentem obecnej średniej arytmetycznej wieku Joanny i Katarzyny jest obecny wiek Wojciecha: 100%

2 p. — obliczenie obecnego wieku Joanny i Katarzyny: 24 i 16

1 p. — zapisanie układu dwóch równań, w którym niewiadome to obecny wiek Joanny i obecny wiek Katarzyny

Zadanie 13. (0-2)

$W = (p, q)$ — wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f

$$4 = (-1)^2 + k \cdot (-1) + 6, \text{ stąd } k = 3$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 6$$

$$p = -\frac{3}{2 \cdot 1}, \text{ czyli } p = -1\frac{1}{2}$$

$$q = f\left(-1\frac{1}{2}\right), \text{ czyli } q = \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) + 6, \text{ stąd } q = 3\frac{3}{4}$$

Zatem wierzchołek W ma współrzędne $\left(-1\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}\right)$.

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f : $\left(-1\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}\right)$

1 p. — obliczenie wartości współczynnika k : 3

Zadanie 19. (0-2)

$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ — pięć kolejnych wyrazów ciągu, których suma jest równa 180, gdzie $n \geq 1$
W ciągu arytmetycznym (a_n) : $a_1 = 10, a_2 = 12$, więc $r = 2$.

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 180$$

$$(2n + 8) + (2n + 10) + (2n + 12) + (2n + 14) + (2n + 16) = 180$$

$$10n + 60 = 180, \text{ stąd } n = 12$$

Szukane wyrazy ciągu to:

$$a_{12} = 32 \quad a_{13} = 34 \quad a_{14} = 36 \quad a_{15} = 38 \quad a_{16} = 40$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie pięciu szukanych wyrazów ciągu: $a_{12} = 32, a_{13} = 34, a_{14} = 36, a_{15} = 38, a_{16} = 40$

1 p. — zapisanie równania z niewiadomą n

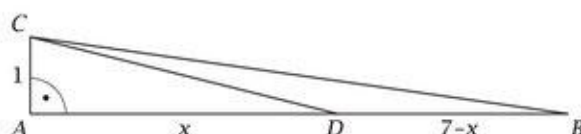
Zadanie 22. (0-4)

$$\frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = \frac{7}{x} \quad \text{ i } \quad \frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = 1,75$$

$$\frac{7}{x} = 1,75, \text{ czyli } x = 4$$

$$|BC| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|CD| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$



$$\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ACD} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{7\sqrt{34}}{40}$$

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie wartości wyrażenia $\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ACD}$: $\frac{7\sqrt{34}}{40}$

3 p. — wyznaczenie długości odcinków BC , AD i CD : $5\sqrt{2}$, 4 , $\sqrt{17}$

2 p. — wyznaczenie długości odcinka AD : 4

1 p. — zapisanie zależności $\frac{\tan \angle ACB}{\tan \angle ACD} = \frac{7}{|AD|}$

LUB

— wyznaczenie długości odcinka BC : $5\sqrt{2}$

Zadanie 24.1. (0-3)

h_S — wysokość trójkąta ACS opuszczona na bok AC

h_B — wysokość trójkąta ACB opuszczona na bok AC

P_{ABCS} — pole wielokąta $ABCS$

$h_S + h_B = 10$

Wielokąt foremny, który ma 12 osi symetrii jest dwunastokątem.

$$|\angle ASC| = 2 \cdot \frac{360^\circ}{12} = 60^\circ$$

Trójkąt ACS jest trójkątem równoramiennym, w którym kąt między ramionami ma miarę 60° . Zatem trójkąt ACS jest trójkątem równobocznym, a wobec tego $|AC| = 10$.

Obliczamy pole czworokąta $ABCS$:

$$P_{ABCS} = \frac{|AC| \cdot h_S}{2} + \frac{|AC| \cdot h_B}{2} = \frac{|AC| \cdot (h_S + h_B)}{2}, \text{ stąd } P_{ABCS} = \frac{10 \cdot 10}{2}, \text{ czyli } P_{ABCS} = 50$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie pola czworokąta $ABCS$: 50

2 p. — obliczenie długości odcinka AC : 10

1 p. — obliczenie miary kąta ASC : 60°

Zadanie 24.2. (0-1)

Odpowiedź: $150\sqrt{3}$

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 25.2. (0-3)

h_A — wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A

h_B — wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka B

h_C — wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin \angle ACB, \text{ stąd } P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7}, \text{ czyli } P_{\Delta ABC} = 24\sqrt{6}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h_A, \text{ stąd } 24\sqrt{6} = 7h_A, \text{ czyli } h_A = \frac{24\sqrt{6}}{7}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_B, \text{ stąd } 24\sqrt{6} = 6h_B, \text{ czyli } h_B = \frac{24\sqrt{6}}{6}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C, \text{ stąd } 24\sqrt{6} = 5h_C, \text{ czyli } h_C = \frac{24\sqrt{6}}{5}$$

$$h_A + h_B + h_C = \frac{24\sqrt{6}}{7} + \frac{24\sqrt{6}}{6} + \frac{24\sqrt{6}}{5} = 24\sqrt{6} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right) = 24\sqrt{6} \cdot \frac{107}{210} > 24\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 12\sqrt{6}$$

Zatem $h_A + h_B + h_C > 12\sqrt{6}$

Zasady oceniania:

3 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

2 p. — obliczenie jednej z trzech wysokości trójkąta ABC : $\frac{24\sqrt{6}}{7}$, $\frac{24\sqrt{6}}{6}$ lub $\frac{24\sqrt{6}}{5}$

1 p. — obliczenie pola trójkąta ABC : $24\sqrt{6}$

Zadanie 29. (0-2)

a — krawędź podstawy ostrosłupa

α — kąt między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{a\sqrt{2}}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$, czyli $\frac{24}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, stąd $a = 6$

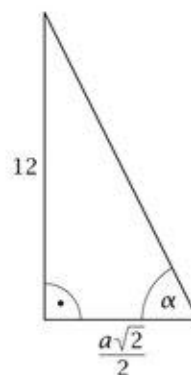
$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 12 = 144$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 144$

1 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 6$
LUB

— obliczenie długości przekątnej podstawy: $6\sqrt{2}$



Zadanie 30.1. (0-1)

Odpowiedź: $8\frac{1}{2}$

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 30.2. (0-1)

Powiększony zestaw liczb: 2, 3, 7, 10, 15, 23

x — liczba, którą dopisujemy do powiększonego zestawu

$$\frac{2+3+7+10+15+23+x}{7} = 11, \text{ stąd } \frac{60+x}{7} = 11, \text{ czyli } x = 17$$

Zasady oceniania:

1 p. — wyznaczenie liczby x : 17

Arkusz egzaminacyjny nr 3

Zadanie 5. (0-2)

Z założenia wynika, że $(a+b)^2 = 16ab$.

Zatem:

$$2 \log \frac{a+b}{4} = \log \frac{(a+b)^2}{16} = \log \frac{16ab}{16} = \log(ab) = \log a + \log b$$

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie lewej strony równości w postaci $\log \frac{(a+b)^2}{16}$ i przekształcenie założenia do postaci $(a+b)^2 = 16ab$

LUB

— zapisanie prawej strony równości w postaci $\log ab$ i przekształcenie założenia do postaci $(a+b)^2 = 16ab$

Zadanie 12.1. (0-1)

Odpowiedź: $x \in [-5; 10)$, $y \in [-2; 4]$

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 12.2. (0-1)**Odpowiedź:** 6**Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 12.3. (0-1)**Odpowiedź:** Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $[-3; -1]$, $[5; 10]$, malejąca w każdym z przedziałów: $[-5; -3]$, $[2; 5]$, stała w przedziale $[-1; 2]$.**Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 13.1. (0-1)Do wykresu funkcji $g(x) = ax + b$ należą punkty $(\frac{2}{3}, 0)$ i $(0, -2)$.Zatem $a = \frac{0+2}{\frac{2}{3}-0} = 3$ i $b = -2$. Stąd $g(x) = 3x - 2$.**Zasady oceniania:**1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji g : $g(x) = 3x - 2$ **Zadanie 13.2. (0-2)**Skoro $g(x) > 0$ dla $x \in (\frac{2}{3}; +\infty)$, to $g(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$. $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x - 2 < 0$, czyli $x \in (-3; +\infty)$

Zatem:

$$x \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cap (-3; +\infty), \text{ czyli } x \in (-3; \frac{2}{3})$$

Zasady oceniania:2 p. — wyznaczenie zbioru argumentów, dla których wartości funkcji f i g są jednocześnie ujemne:

$$-3 < x < \frac{2}{3}$$

1 p. — wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: $x > -3$
LUB— wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości ujemne: $x < \frac{2}{3}$ **Zadanie 16. (0-3)**Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji f określonej wzorem kanonicznym

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

jest punkt $W = (p, q)$.Skoro wykres funkcji f ma jeden punkt wspólny z prostą $y = -2$, więc $q = -2$.Do wykresu funkcji f należą punkty $(-5, 6)$ i $(11, 6)$, więc $p = \frac{-5+11}{2}$, czyli $p = 3$.Po podstawieniu współrzędnych wierzchołka W i współrzędnych punktu $(-5, 6)$, otrzymujemy:

$$6 = a(-5 - 3)^2 - 2, \text{ stąd } a = \frac{1}{8}$$

Wzór kanoniczny funkcji f : $f(x) = \frac{1}{8}(x - 3)^2 - 2$.**Zasady oceniania:**3 p. — wyznaczenie wzoru kanonicznego funkcji f : $f(x) = \frac{1}{8}(x - 3)^2 - 2$ 2 p. — wyznaczenie współczynnika a we wzorze funkcji f : $a = \frac{1}{8}$ 1 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f : $W = (3, -2)$

Zadanie 23. (0-2)

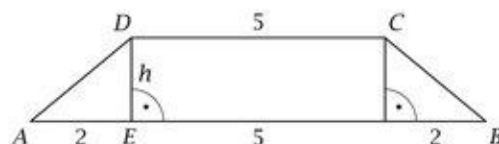
h — wysokość trapezu $ABCD$

$$|AE| = 2$$

$$\cos \angle EAD = \frac{|AE|}{|AD|}, \text{ stąd } \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2}{|AD|}, \text{ czyli } |AD| = 4\sqrt{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED wynika:

$$h^2 = (4\sqrt{2})^2 - 2^2, \text{ stąd } h^2 = 28, \text{ czyli } h = 2\sqrt{7}$$



Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie wysokości trapezu $ABCD$: $2\sqrt{7}$

1 p. — obliczenie długości boku AD : $4\sqrt{2}$

LUB

— wyznaczenie tangensa kąta ostrego trapezu $ABCD$: $\sqrt{7}$

Zadanie 26. (0-3)

$$\text{Z twierdzenia cosinusów: } \cos \angle BAC = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}.$$

$$\text{Z jedynki trygonometrycznej: } \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

$$\text{Pole trójkąta } ABC \text{ jest równe: } P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równy:

$$r = \frac{2P_{\triangle ABC}}{|AB| + |BC| + |AC|} = \frac{\frac{15\sqrt{7}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC : $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

2 p. — obliczenie pola trójkąta ABC : $P_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

1 p. — obliczenie cosinusa jednego z kątów trójkąta ABC : $\cos \angle BAC = \frac{9}{16}$ lub $\cos \angle ACB = \frac{1}{8}$ lub $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$

Zadanie 29. (0-2)

$S = (a, b)$ — współrzędne środka okręgu

r — promień okręgu

Środek S okręgu jest środkiem odcinka AB , stąd: $a = \frac{-2+6}{2}$ i $b = \frac{3-1}{2}$, stąd $a = 2$ i $b = 1$

Zatem $S = (2, 1)$.

Promień r okręgu jest równy długości odcinka AS , zatem: $r = \sqrt{(2+2)^2 + (1-3)^2}$, stąd $r = 2\sqrt{5}$

Równanie okręgu ma postać: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie równania okręgu: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$

1 p. — obliczenie współrzędnych środka okręgu: $S = (2, 1)$

LUB

— obliczenie długości promienia okręgu: $r = 2\sqrt{5}$

Zadanie 30.1. (0-1)

Odpowiedź: 60°

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 30.2. (0-2)

r — promień podstawy stożka

S — środek okręgu opisanego na sześciokącie F

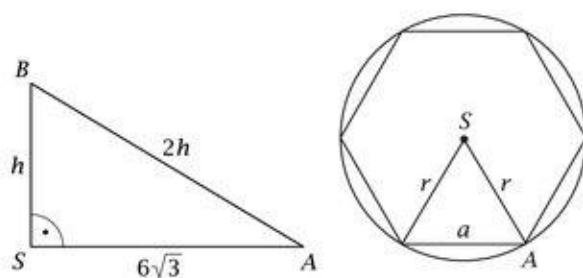
h — wysokość stożka

V — objętość stożka

a — krawędź podstawy ostrosłupa ($a = 6\sqrt{3}$)

B — wierzchołek stożka

$r = a$, czyli $r = 6\sqrt{3}$



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABS , wynika:

$$h^2 + (6\sqrt{3})^2 = 4h^2, \text{ stąd } 3h^2 = 108, \text{ czyli } h = 6$$

Obliczamy objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 216\pi$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie objętości stożka: 216π

1 p. — obliczenie wysokości stożka: 6

Zadanie 33. (0-4)

$P(x)$ — pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

x — krawędź podstawy

H — wysokość graniastosłupa

$$4H + 8x = 56, \text{ czyli } H = -2x + 14$$

$$P(x) = 2x^2 \cdot \sin 30^\circ + 4x(-2x + 14) = -7x^2 + 56x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 7)$.

Wykres funkcji kwadratowej $y = -7x^2 + 56x$ ma ramiona skierowane w dół, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla $x = \frac{-56}{2 \cdot (-7)} = 4$.

Ponieważ $4 \in (0; 7)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 7)$ przyjmuje największą wartość dla $x = 4$. Wówczas $H = 6$, a największe pole powierzchni całkowitej to $P(4) = 112$.

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości graniastosłupa o największym polu powierzchni całkowitej oraz wyznaczenie największego pola powierzchni całkowitej graniastosłupa: $x = 4$, $H = 6$, $P = 112$

3 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy o największym polu powierzchni całkowitej: $x = 4$
LUB

— obliczenie wysokości graniastosłupa o największym polu powierzchni całkowitej: $H = 6$

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastosłupa od długości krawędzi podstawy i zapisanie dziedziny funkcji: $P(x) = -7x^2 + 56x$, $x \in (0; 7)$

LUB

— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastosłupa od wysokości graniastosłupa i zapisanie dziedziny funkcji: $P(H) = -\frac{7}{4}H^2 + 21H + 49$, $H \in (0; 14)$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastosłupa od długości krawędzi podstawy: $P(x) = -7x^2 + 56x$

LUB

— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastosłupa od wysokości graniastosłupa: $P(H) = -\frac{7}{4}H^2 + 21H + 49$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 7)$ lub $H \in (0; 14)$

Arkusz egzaminacyjny nr 4

Zadanie 5. (0-2)

$4x - x + 1 \geq 6x - 14$, stąd $-3x \geq -15$, czyli $x \leq 5$

Liczby pierwsze, które należą do przedziału $(-\infty; 5]$ to: 2, 3 i 5.

Zatem są trzy liczby pierwsze spełniające nierówność $x - \frac{x-1}{4} \geq \frac{3x-7}{2}$.

Zasady oceniania:

2 p. — ustalenie, ile liczb pierwszych należy do zbioru rozwiązań nierówności: 3

1 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty; 5]$

Zadanie 6. (0-2)

$a = 4n + 1$, $b = 4n + 2$, $c = 4n + 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b + c)^2 = (12n + 6)^2 = 36(4n^2 + 4n + 1)$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ wartość wyrażenia $4n^2 + 4n + 1$ jest liczbą naturalną, czyli liczba $36(4n^2 + 4n + 1)$ jest podzielna przez 36.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie liczby $(a + b + c)^2$ w postaci $144n^2 + 144n + 36$

Zadanie 10. (0-2)

Do wykresu funkcji f należy punkt $(1, -10)$, więc:

$$\sqrt{5}(1 - 1) + m = -10, \text{ stąd } m = -10$$

Obliczamy miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{5}(x - 1) - 10$:

$$\sqrt{5}(x - 1) - 10 = 0, \text{ stąd } \sqrt{5}x = \sqrt{5} + 10, \text{ czyli } x = 2\sqrt{5} + 1$$

Miejscem zerowym funkcji f jest $x = 2\sqrt{5} + 1$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie miejsca zerowego funkcji f : $x = 2\sqrt{5} + 1$

1 p. — wyznaczenie liczby m : -10

Zadanie 14. (0-1)

Odpowiedź: $y = \frac{1}{20}x$

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 18. (0-3)

$$a_3 - a_2 = 60 \text{ i } a_1 = 3$$

Z równania $3q^2 - 3q - 60 = 0$ wynika, że $q = 5$ lub $q = -4$ ($q = -4$ nie spełnia warunków zadania, bo ciąg (a_n) jest rosnący).

Wzór ogólny ciągu (a_n) to $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu a_n : $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

2 p. — rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą q : $q = 5$ lub $q = -4$

1 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą q : np. $3q^2 - 3q = 60$

Zadanie 19.1. (0-1)

$$W(\alpha) = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$W(\alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$W(\alpha) = \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$W(\alpha) = \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$W(\alpha) = \sin^3 \alpha$$

Zasady oceniania:

1 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

Zadanie 19.2. (0-1)

$$\sqrt[3]{W(\alpha)} = \sqrt[3]{\sin^3 \alpha} = \sin \alpha$$

$$\sin 50^\circ \approx 0,77$$

Zasady oceniania:1 p. — obliczenie przybliżonej wartości wyrażenia dla $\alpha = 50^\circ$: około 0,77**Zadanie 23. (0-2)**

$$\text{Z twierdzenia cosinusów: } \cos \sphericalangle ABC = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Z jedynki trygonometrycznej: } \sin \sphericalangle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

 h — wysokość trójkąta ABC poprowadzona na bok BC Kąt ABC jest ostry, ponieważ $\cos \sphericalangle ABC > 0$.

$$\sin \sphericalangle ABC = \frac{h}{|AB|}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{h}{7}, \text{ czyli } h = 2\sqrt{6}$$

Zasady oceniania:2 p. — wyznaczenie wysokości trójkąta ABC poprowadzonej na bok BC : $h = 2\sqrt{6}$ 1 p. — obliczenie cosinusa kąta ABC lub cosinusa kąta ACB : $\cos \sphericalangle ABC = \frac{5}{7}$ lub $\cos \sphericalangle ACB = \frac{1}{5}$ **Zadanie 25. (0-2)**Prosta m ma równanie: $y = \frac{4}{3}x + 12$.Wyznaczamy punkt przecięcia prostych o równaniach $y = -\frac{3}{4}x - 13$ i $y = \frac{4}{3}x + 12$:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - 13 \\ y = \frac{4}{3}x + 12 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = -12 \\ y = -4 \end{cases}$$

Zatem punkt przecięcia prostych k i m ma współrzędne $(-12, -4)$.**Zasady oceniania:**2 p. — wyznaczenie punktu przecięcia prostych k i m : $(-12, -4)$ 1 p. — wyznaczenie wzoru prostej m : $y = \frac{4}{3}x + 12$ **Zadanie 26. (0-2)****I sposób**

Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $a = \frac{1-3}{4+2} = -\frac{1}{3}$, a więc symetralna odcinka AB ma równanie $l: y = 3x + b$. Do prostej l należy punkt $S = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, 2)$.

Zatem $2 = 3 \cdot 1 + b$, a wobec tego $b = -1$.

Rozwiązujemy układ równań, w celu wyznaczenia współrzędnych punktu P :

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 7 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}, \text{ czyli } P = (3, 8)$$

II sposób

$$P = \left(x, \frac{1}{3}x + 7\right)$$

$$\text{Zatem } |AP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 20} \text{ i } |BP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - 4x + 52}.$$

Z równości $|AP| = |BP|$ otrzymujemy równanie: $\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 20 = \frac{10}{9}x^2 - 4x + 52$, z którego wynika, że $x = 3$.

Druga współrzędna punktu P to $y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 7 = 8$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu P : $P = (3, 8)$

1 p. — (I sposób) wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = 3x - 1$

LUB

— (II sposób) zapisanie długości odcinków AP i BP w zależności od pierwszej współrzędnej punktu P : $|AP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 20}$ i $|BP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - 4x + 52}$

Zadanie 30. (0-3)

a — krawędź podstawy

H — wysokość graniastosłupa

Ze wzoru na przekątną kwadratu:

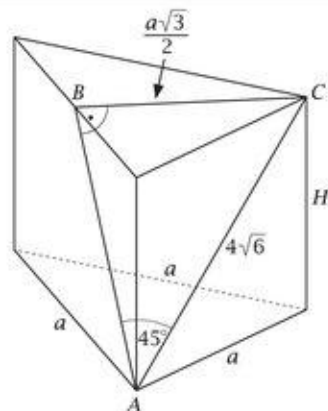
$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{6}, \text{ czyli } a = 8$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = (4\sqrt{6})^2 - 8^2 = 32, \text{ czyli } H = 4\sqrt{2}$$

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa to:

$$6a + 3H = 48 + 12\sqrt{2}$$



Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie sumy długości wszystkich krawędzi graniastosłupa: $48 + 12\sqrt{2}$

2 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 8$

1 p. — wskazanie trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC (zobacz rysunek) i stwierdzenie, że jego przeciwprostokątna ma długość $4\sqrt{6}$, a długość przyprostokątnych można opisać wyrażeniem $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 33. (0-4)

P — pole prostokąta

x — długość boku prostokąta zawartego w podstawie AB trójkąta

z — długość boku prostokąta prostopadłego do podstawy AB trójkąta

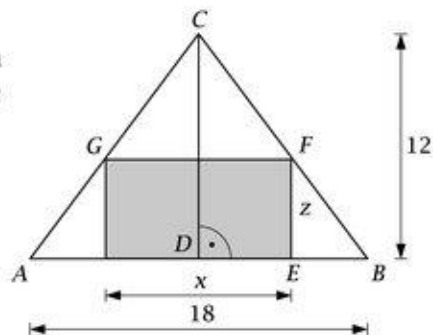
Z podobieństwa trójkątów GFC i ABC (cecha kkk) wynika:

$$\frac{x}{18} = \frac{12-z}{12}, \text{ stąd } z = 12 - \frac{2}{3}x.$$

$$P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 12x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 18)$.

Wykres funkcji kwadratowej $y = -\frac{2}{3}x^2 + 12x$ ma ramiona skierowane w dół, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla $x = \frac{-12}{2 \cdot (-\frac{2}{3})} = 9$.



Ponieważ $9 \in (0; 18)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 18)$ przyjmuje swoją największą wartość dla $x = 9$. Wówczas $z = 6$, a największe pole prostokąta to $P(9) = 54$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — obliczenie długości boków prostokąta o największym polu oraz wyznaczenie największego pola prostokąta: $x = 9$, $z = 6$, $P = 54$
- 3 p. — obliczenie długości jednego z boków prostokąta o największym polu: $x = 9$ lub $z = 6$
- 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola prostokąta w zależności od boku zawartego w podstawie AB trójkąta wraz z dziedziną: $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 12x$, $x \in (0; 18)$
LUB
— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola prostokąta w zależności od boku prostopadłego do podstawy AB trójkąta wraz z dziedziną: $P(z) = -\frac{3}{2}z^2 + 18z$, $z \in (0; 12)$
- 1 p. — wyznaczenie zależności między długościami boków prostokąta: $z = 12 - \frac{2}{3}x$ lub $x = 18 - \frac{3}{2}z$
LUB
— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 18)$ lub $z \in (0; 12)$

Arkusz egzaminacyjny nr 5

Zadanie 11. (0-2)

(p, q) — wierzchołek paraboli

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-12 + 2}{2} = -5$$

Skoro zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 7]$, więc $q = 7$.

Równość $7 = -\frac{3}{5} \cdot (-5) + 4$ jest prawdziwa, więc punkt $(-5, 7)$ należy do prostej k .

Zasady oceniania:

- 2 p. — ustalenie, że wierzchołek paraboli należy do prostej k
- 1 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $(-5, 7)$

Zadanie 14. (0-2)

$$S_{20} = 50 \text{ i } a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 40$$

Zatem rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{2a_1 + 19r}{2} \cdot 20 = 50 \\ 5a_1 + 20r = 40 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} a_1 = 12 \\ r = -1 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — obliczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n) : $a_1 = 12$ i $r = -1$
- 1 p. — zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n)

Zadanie 18. (0-2)

$$W(\alpha) = \frac{-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Zatem:

$$W(\alpha) = -1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -1 + 1 = 0$$

Dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia W jest równa 0, czyli nie zależy ona od miary tego kąta.

Zasady oceniania:

- 2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu
- 1 p. — doprowadzenie wyrażenia W do postaci, w której występują tylko wyrażenia $\sin^2 \alpha$ i $\cos^2 \alpha$

Zadanie 22. (0-2)

Z podobieństwa trójkątów ABP i DCP (cecha kkk) wynika:

$$\frac{h}{2} = \frac{6}{4}, \text{ stąd } h = 3$$

$$P_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

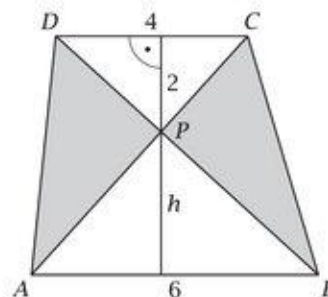
$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (2 + 3) = 15$$

$$P_{\triangle APD} = P_{\triangle BPC} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABP} = 6$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie pól trójkątów APD i BPC : $P_{\triangle APD} = P_{\triangle BPC} = 6$

1 p. — obliczenie wysokości trójkąta ABP poprowadzonej na bok AB : $h = 3$


Zadanie 25.2. (0-2)

r — promień okręgu O

h — wysokość trójkąta ASB poprowadzona z wierzchołka B

P_O — pole koła ograniczonego przez okrąg O

$$P_O = \pi r^2 = 25\pi$$

$$P_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot h = \frac{15}{2}$$

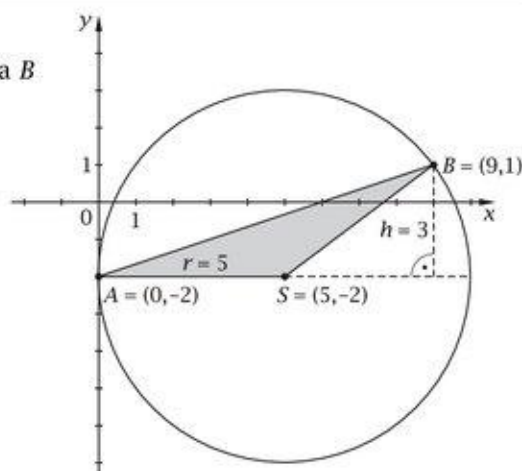
$$\frac{P_O}{P_{\triangle ASB}} = \frac{25\pi}{\frac{15}{2}} = 25\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{10\pi}{3}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie stosunku pól: $\frac{10\pi}{3}$

1 p. — obliczenie pola trójkąta ASB : $\frac{15}{2}$
LUB

— obliczenie pola koła ograniczonego przez okrąg O : 25π


Zadanie 25.3. (0-1)

a — współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $B = (9, 1)$ i $S = (5, -2)$

α — kąt między prostą przechodzącą przez punkty $B = (9, 1)$ i $S = (5, -2)$ a osią x

$$a = \frac{1+2}{9-5} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a, \text{ czyli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Zasady oceniania:

1 p. — wyznaczenie tangensa kąta α : $\frac{3}{4}$

Zadanie 28. (0-3)

H — wysokość graniastoslupa

d — długość krótszej przekątnej równoległoboku będącego podstawą graniastoslupa

α — kąt ostry równoległoboku będącego podstawą graniastoslupa

P_c — pole powierzchni całkowitej graniastoslupa

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{10}, \text{ stąd } H = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{d}{10}, \text{ stąd } d = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$\cos \alpha = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ$$

Zatem:

$$P_c = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 56 + 70\sqrt{3} + 40\sqrt{6}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c = 56 + 70\sqrt{3} + 40\sqrt{6}$

2 p. — obliczenie wysokości graniastosłupa i cosinusa kąta ostrego równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa: $H = 5\sqrt{3}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1 p. — obliczenie wysokości graniastosłupa i długości krótszej przekątnej równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa: $H = 5\sqrt{3}$ i $d = 5$

LUB

— obliczenie cosinusa kąta ostrego równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 29. (0-3)

ostrośłup $ABCD S$ — model piramidy

a — krawędź podstawy ostrosłupa $ABCD S$

h — wysokość ostrosłupa $ABCD S$

V — objętość ostrosłupa $ABCD S$

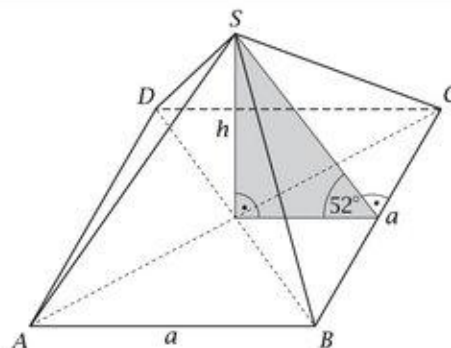
m — masa modelu piramidy

ρ — gęstość betonu ($\rho = 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

$$m = V \cdot \rho$$

$$h = \frac{150}{50} = 3 \text{ [m]}$$

$$\text{tg } 52^\circ = \frac{3}{a} \text{ stąd } a = \frac{3}{\text{tg } 52^\circ}, \text{ czyli } a \approx 4,69 \text{ [m]}$$



Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} \cdot 4,69^2 \cdot 3 = 21,9961 \text{ [m}^3\text{]}$$

Korzystając ze wzoru $m = V \cdot \rho$, otrzymujemy:

$$m = 21,9961 \cdot 2200 = 48\,391,42 \text{ [kg]} \approx 48\,000 \text{ [kg]}$$

Zatem masa modelu to 48 ton.

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie przybliżonej masy modelu w tonach: 48 t

2 p. — obliczenie przybliżonej wartości objętości ostrosłupa $ABCD S$: 22 m³

1 p. — obliczenie wysokości ostrosłupa $ABCD S$: 3 m

LUB

— zapisanie zależności między wysokością ostrosłupa $ABCD S$ a krawędzią jego podstawy:

$$\text{np. } a = \frac{2h}{\text{tg } 52^\circ}$$

Zadanie 31. (0-3)

A — Wylosowano jedną kulę czarną z pierwszego pudełka.

B — Wylosowano jedną kulę białą z drugiego pudełka.

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{n+2}, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}$$

$$P(A) = P(B) - 0,2$$

Rozwiązujemy równanie: $\frac{1}{5} = \frac{2}{n+2} - 0,2$, z którego wynika, że $n = 3$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości n : $n = 3$

2 p. — zapisanie równania prowadzącego do obliczenia n : $\frac{1}{5} = \frac{2}{n+2} - 0,2$

1 p. — wyznaczenie prawdopodobieństw zdarzeń A i B: $P(A) = \frac{1}{5}$, i $P(B) = \frac{2}{n+2}$

Zadanie 32. (0-1)**Odpowiedź:** $a = 7$ i $b = 4$ **Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 33. (0-4)**I sposób** $P(x)$ — pole trójkąta KLM Trójkąty KBL , MLC i AKM są przystające (cecha bkb).

$$P_{\Delta KBL} = P_{\Delta MLC} = P_{\Delta AKM} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (8 - x) \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (8x - x^2)$$

$$P_{\Delta ABC} = 16\sqrt{3}, \text{ czyli } P(x) = 16\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} (8x - x^2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 8)$.Wykres funkcji kwadratowej $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$ ma ramiona skierowane w górę, więc funkcja ta osiąga najmniejszą wartość dla $x = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}} = 4$.Ponieważ $4 \in (0; 8)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 8)$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = 4$. Wówczas najmniejsze pole trójkąta to $P(4) = 4\sqrt{3}$.**II sposób** $P(x)$ — pole trójkąta KLM Trójkąty KBL , MLC i AKM są przystające (cecha bkb), więc trójkąt KLM jest równoboczny. a — długość boku trójkąta KLM

Z twierdzenie cosinusów wynika:

$$a^2 = x^2 + (8 - x)^2 - 2x \cdot (8 - x) \cdot \cos 60^\circ, \text{ czyli } a^2 = 3x^2 - 24x + 64$$

$$\text{Zatem } P(x) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}.$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 8)$.Wykres funkcji kwadratowej $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$ ma ramiona skierowane w górę, więc funkcja ta osiąga najmniejszą wartość dla $x = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}} = 4$. Ponieważ $4 \in (0; 8)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 8)$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = 4$. Wówczas najmniejsze pole trójkąta to $P(4) = 4\sqrt{3}$.**Zasady oceniania:**4 p. — wyznaczenie wartości x , dla której pole trójkąta KLM jest najmniejsze oraz obliczenie możliwie najmniejszego pola trójkąta KLM : $x = 4$, $P = 4\sqrt{3}$ 3 p. — wyznaczenie wartości x , dla której pole trójkąta KLM jest najmniejsze: $x = 4$ 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej pole trójkąta KLM w zależności od wielkości x wraz z dziedziną $P(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$, $x \in (0; 8)$ 1 p. — (I sposób) wyznaczenie wzoru na pola trójkątów KBL , MLC i AKM w zależności od wielkości x :

$$P_{\Delta KBL} = P_{\Delta MLC} = P_{\Delta AKM} = \frac{\sqrt{3}}{4} (8x - x^2)$$

LUB

— (II sposób) wyznaczenie wzoru na kwadrat boku trójkąta KLM w zależności od wielkości x :

$$a^2 = 3x^2 - 24x + 64$$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 8)$

Arkusz egzaminacyjny nr 6

Zadanie 3.2. (0-2)

$$a \cdot b = (1 - 4\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} - 8 \cdot 2 - 12\sqrt{2} = -13 - 10\sqrt{2}$$

$$\text{Skoro } a \cdot b < 0, \text{ to: } |a \cdot b| = |-13 - 10\sqrt{2}| = 13 + 10\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:2 p. — obliczenie wartości bezwzględnej iloczynu liczb a i b : $13 + 10\sqrt{2}$ 1 p. — obliczenie iloczynu a i b : $-13 - 10\sqrt{2}$

LUB

— zapisanie wartości bezwzględnej iloczynu liczb a i b w postaci $(4\sqrt{2} - 1)(3 + 2\sqrt{2})$ **Zadanie 5. (0-2)**

$$G(x) = (7x - 3)^2 - 4(10x^2 - 3x + 2) = 49x^2 - 42x + 9 - 40x^2 + 12x - 8 = 9x^2 - 30x + 1$$

Zatem: $a = 9$, $b = -30$ i $c = 1$.**Zasady oceniania:**2 p. — wyznaczenie wartości współczynników a , b i c : $a = 9$, $b = -30$ i $c = 1$ 1 p. — zapisanie wielomianu $G(x)$ w postaci sumy algebraicznej: np. $49x^2 - 42x + 9 - 40x^2 + 12x - 8$ **Zadanie 11.2. (0-2)**Współczynniki a i b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wyznaczamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 9 = -3a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases}, \text{ z którego wynika } \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Miejsce zerowe funkcji f jest rozwiązaniem równania $-2x + 3 = 0$. Zatem $x = 1,5$.**Zasady oceniania:**2 p. — wyznaczenie miejsca zerowego funkcji f : $x = 1,5$ 1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = -2x + 3$ **Zadanie 13. (0-3)**

$$f(x) - g(x) + 3\frac{1}{4} = 4x^2 + 8x + 4 - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 3\frac{1}{4} = 3x^2 + 9x + 7$$

Wzór funkcji h : $h(x) = 3x^2 + 9x + 7$.Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji h : $x_w = -\frac{3}{2} \in [-2; 2]$.

$$h\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 7 = \frac{1}{4}$$

Parabola, która jest wykresem funkcji h , ma ramiona skierowane w górę, więc funkcja h osiąga w przedziale $[-2; 2]$ najmniejszą wartość równą $\frac{1}{4}$ dla argumentu $x = -\frac{3}{2}$.**Zasady oceniania:**3 p. — ustalenie, dla jakiego argumentu funkcja h osiąga w przedziale $[-2; 2]$ najmniejszą wartość oraz obliczenie tej najmniejszej wartości: $h\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 2 p. — wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji h oraz stwierdzenie, że ta liczba należy do przedziału $[-2; 2]$: $x_w = -\frac{3}{2} \in [-2; 2]$ 1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji h : $h(x) = 3x^2 + 9x + 7$ **Zadanie 15. (0-2)**

$$a_1 = S_1 = 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \qquad a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 - \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 2$, więc $a_3 = 3\frac{1}{2}$.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = -\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = -2\frac{5}{8}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie wartości iloczynu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$: $-2\frac{5}{8}$

1 p. — obliczenie a_1 i a_2 : $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1\frac{1}{2}$

Zadanie 16. (0-4)

n — liczba kwadransów, podczas których ślimak pokonywał dystans

Sytuacja przedstawiona w treści zadania może być opisana za pomocą ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazach dodatnich w którym:

$$a_1 = 90 \text{ cm} \quad r = -1,5 \text{ cm} \quad S_n = 2257,5 \text{ cm}$$

Wykorzystujemy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie:

$$\frac{180 + (n-1) \cdot (-1,5)}{2} \cdot n = 2257,5, \text{ stąd } n^2 - 121n + 3010 = 0$$

Zatem $n = 35$ lub $n = 86$.

Drugie rozwiązanie należy odrzucić, ponieważ $a_{86} = 90 + 85 \cdot (-1,5) = -37,5 < 0$. Ślimak szedł więc 35 kwadransów, czyli 8 godzin i 45 minut, a wędrówkę zakończył o godzinie 13:05.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie godziny, o której ślimak zakończył wędrówkę: 13:05

3 p. — rozwiązanie równania kwadratowego $n^2 - 121n + 3010 = 0$ i wybranie rozwiązania spełniającego warunki zadania: $n = 35$

2 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą n w postaci ogólnej: np. $n^2 - 121n + 3010 = 0$

1 p. — podstawienie do wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego odpowiednich wartości za a_1 , r oraz S_n : np. $\frac{180 + (n-1) \cdot (-1,5)}{2} \cdot n = 2257,5$

Zadanie 20. (0-3)

Ze wzoru na pole trapezu wynika: $\frac{(a+a-20) \cdot 0,75a}{2} = 2250$, a wobec tego rozwiązujemy równanie $a^2 - 10a - 3000 = 0$. Zatem $a = 60$ lub $a = -50$. Drugie rozwiązanie należy odrzucić, ponieważ $a \in (20; +\infty)$. Dla $a = 60$ otrzymujemy:

$$|AB| = 60 \text{ m}, |CD| = 40 \text{ m}, |AD| = 45 \text{ m}$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$|BC| = \sqrt{20^2 + 45^2} = 5\sqrt{97} \approx 49,2 \text{ m}$$

Zatem obwód trapezu (działki) jest równy:

$$|AB| + |AD| + |CD| + |BC| = 145 + 5\sqrt{97} \approx 194,2 \text{ m}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie obwodu trapezu (działki) w przybliżeniu do części dziesiątych metra: 194,2 m

2 p. — wyznaczenie długości dłuższej podstawy trapezu: 60 m

LUB

— wyznaczenie długości krótszej podstawy trapezu: 40 m

LUB

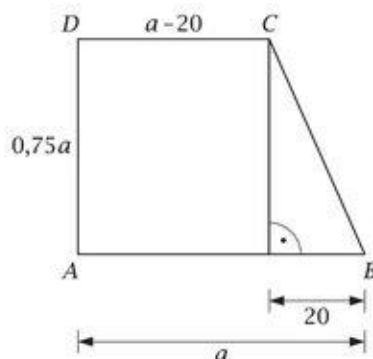
— wyznaczenie długości dłuższego ramienia trapezu: $5\sqrt{97}$ m

LUB

— wyznaczenie długości krótszego ramienia trapezu: 45 m

1 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest długość jednego z boków trapezu: np.

$$\frac{(2a-20) \cdot 0,75a}{2} = 2250$$



Zadanie 23.1. (0-1)**Odpowiedź:** 6**Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 23.2. (0-1)**Odpowiedź:** 640, 800**Zasady oceniania:**

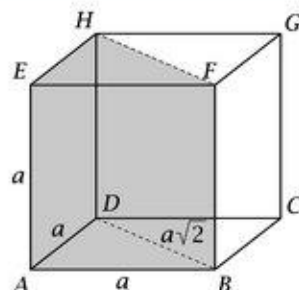
1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 24. (0-3) a — krawędź sześcianu $ABCDEFGH$ P_c — pole powierzchni całkowitej graniastosłupa $ABDEFH$ V — objętość graniastosłupa $ABDEFH$

$$6a^2 = 12, \text{ stąd } a = \sqrt{2} \text{ [cm]}$$

$$P_c = 3a^2 + a \cdot a\sqrt{2} = a^2(3 + \sqrt{2}) = 2(3 + \sqrt{2}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot a^3 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$$

**Zasady oceniania:**3 p. — obliczenie pola powierzchni całkowitej i objętości graniastosłupa $ABDEFH$: $2(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$, $\sqrt{2} \text{ cm}^3$ 2 p. — obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa $ABDEFH$: $2(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$

LUB

— obliczenie objętości graniastosłupa $ABDEFH$: $\sqrt{2} \text{ cm}^3$ 1 p. — obliczenie długości krawędzi sześcianu $ABCDEFGH$: $\sqrt{2} \text{ cm}$ **Zadanie 28. (0-2)** A — iloraz liczby x przez liczbę y jest liczbą całkowitą.Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest równa: $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.Zaznaczamy w tabeli symbolem $\checkmark$ zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A :

$\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$	-3	-2	1	2	3	4
-3	$\checkmark$				$\checkmark$	
-2		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$
1	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
2		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$
3	$\checkmark$				$\checkmark$	
4						$\checkmark$

Liczba wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A jest równa: $|A| = 17$.

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{17}{36}.$$

Zasady oceniania:2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{17}{36}$

1 p. — wypisanie wszystkich wyników doświadczenia

LUB

— podanie liczby wszystkich wyników doświadczenia: $|\Omega| = 36$

LUB

— wypisanie wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A

LUB

— podanie liczby wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 17$

Arkusz egzaminacyjny nr 7

Zadanie 5. (0-2)

$k = 4z + 3$, gdzie $z \in \mathbb{Z}$

Zatem $k^2 = 16z^2 + 24z + 9 = 8(2z^2 + 3z + 1) + 1$.

Dla $z \in \mathbb{Z}$ liczba $2z^2 + 3z + 1$ też jest liczbą całkowitą, a więc $k^2 = 8w + 1$, gdzie $w \in \mathbb{Z}$.

Zatem liczba k^2 przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie liczby k^2 w postaci $16z^2 + 24z + 9$

Zadanie 6. (0-2)

$$\frac{2}{3}|x-5| - 3 = 9\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}|x-5| = 3 + 3$$

$$|x-5| = 9 \text{ stąd } x-5 = 9 \text{ lub } x-5 = -9, \text{ czyli } x \in \{-4, 14\}$$

Zasady oceniania:

2 p. — rozwiązanie równania: $x \in \{-4, 14\}$

1 p. — przekształcenie równania do postaci $|x-5| = 9$

Zadanie 8.1. (0-1)

Odpowiedź: 10

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 8.2. (0-1)

$$0 = x(2x^2 + 5x - 3), \text{ stąd } 0 = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$$

Zatem rozwiązaniami równania $W(x) = 0$ są liczby: 0, $\frac{1}{2}$ i -3.

Zasady oceniania:

1 p. — wyznaczenie wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$: $x \in \left\{-3, 0, \frac{1}{2}\right\}$

Zadanie 11. (0-2)

Przekształcamy nierówność do postaci $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ i wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 + 3x - 4$:

$$f(x) = 0 \text{ dla } x \in \{-4, 1\}$$

Na podstawie schematycznego wykresu funkcji f odczytujemy zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne:

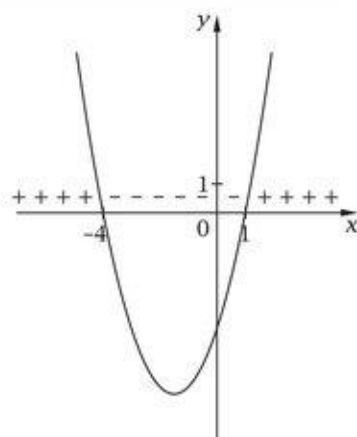
$$f(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

1 p. — przekształcenie nierówności do postaci $f(x) \geq 0$ i wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f : $x \in \{-4, 1\}$



Zadanie 16.2. (0-2)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy:

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8}$$

Zatem:

$$S_{16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - (\sqrt{2})^{16}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{255(1 + \sqrt{2})}{8} \approx 77$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie sumy szesnastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) w zaokrągleniu do całości: $S_{16} \approx 77$

1 p. — zapisanie sumy szesnastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) w postaci wyrażenia z pierwiastkiem w dowolnej postaci: np. $S_{16} = \frac{255(1 + \sqrt{2})}{8}$

Zadanie 18. (0-2)

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 30^2 = 360\pi, \text{ stąd } \alpha = 144^\circ$$

$$\cos 144^\circ = \cos(180^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ \approx -0,81$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie $\cos \alpha$: około $-0,81$

1 p. — wyznaczenie miary kąta α : 144°

Zadanie 20. (0-3)

a — przyprostokątna trójkąta

Promień R koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie przeciwprostokątnej tego trójkąta, zatem:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Promień r koła wpisanego w trójkąt to iloraz pola trójkąta przez połowę jego obwodu, zatem:

$$r = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}a(2 + \sqrt{2})} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$

Stosunek pola koła opisanego do pola wpisanego w trójkąt jest więc równy:

$$\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2}} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie stosunku pól kół: $3 + 2\sqrt{2}$

2 p. — wyznaczenie pól obu kół w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta: $\frac{\pi a^2}{2}, \frac{\pi a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2}$
LUB

— wyznaczenie pól obu kół w zależności od długości przeciwprostokątnej trójkąta:

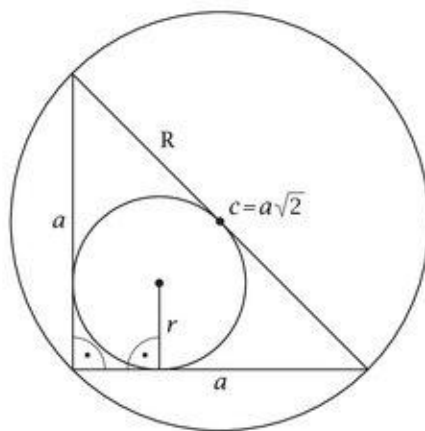
$$\frac{\pi c^2}{4}, \frac{\pi c^2(3 - 2\sqrt{2})}{4}$$

1 p. — wyznaczenie pola koła opisanego na trójkącie w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta: $\frac{\pi a^2}{2}$
LUB

— wyznaczenie pola koła opisanego na trójkącie w zależności od długości przeciwprostokątnej trójkąta: $\frac{\pi c^2}{4}$
LUB

— wyznaczenie pola koła wpisanego w trójkąt w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta: $\frac{\pi a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2}$
LUB

— wyznaczenie pola koła wpisanego w trójkąt w zależności od długości przeciwprostokątnej trójkąta: $\frac{\pi c^2(3 - 2\sqrt{2})}{4}$



Zadanie 22. (0-2)

l — prosta przechodząca przez punkty A i B

Prostą l można opisać równaniem $y = ax + b$, gdzie $a = \frac{-6-0}{-3-6} = \frac{2}{3}$.

Do prostej l należy punkt $B = (6, 0)$, więc:

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 6 + b, \text{ stąd } b = -4$$

Zatem prosta l ma równanie $y = \frac{2}{3}x - 4$.

Ponieważ punkty A , B i C są współliniowe, więc $C = (5, k)$ też należy do prostej l , zatem:

$$k = \frac{2}{3} \cdot 5 - 4, \text{ stąd } k = -\frac{2}{3}$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie wartości k : $-\frac{2}{3}$

1 p. — wyznaczenie równania prostej l : $y = \frac{2}{3}x - 4$

Zadanie 24. (0-2)

H — wysokość graniastosłupa

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{9}, \text{ czyli } H = 9 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{3}$$

Zatem objętość graniastosłupa jest równa: $V = P_p \cdot H = \frac{4 \cdot 9}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie objętości graniastosłupa: $V = 54\sqrt{3}$

1 p. — wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $H = 3\sqrt{3}$

Zadanie 26. (0-2)

A — Wypadło tyle samo orłów co reszek.

$$|\Omega| = 2^4 = 16$$

$$A = \{OORR, RROO, ROOR, ORRO, RORO, OROR\}$$

$$|A| = 6$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{3}{8}$

1 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 16$

LUB

— wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 6$

Zadanie 28. (0-4)

P — pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

$x, 2x$ — długości krawędzi podstawy prostopadłościanu

h — wysokość prostopadłościanu

$$12x + 4h = 240, \text{ stąd } h = 60 - 3x$$

$$P(x) = -14x^2 + 360x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 20)$.

Wykres funkcji kwadratowej $y = -14x^2 + 360x$ ma ramiona skierowane w dół, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla $x = \frac{-360}{2 \cdot (-14)} = \frac{90}{7}$.

Ponieważ $\frac{90}{7} \in (0; 20)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 20)$ przyjmuje największą wartość dla $x = \frac{90}{7}$. Zatem prostopadłościan o największym polu powierzchni całkowitej ma wymiary $\frac{90}{7} \text{ cm} \times \frac{180}{7} \text{ cm} \times \frac{150}{7} \text{ cm}$, a jego pole powierzchni całkowitej to $P = \frac{16200}{7} \text{ cm}^2$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — obliczenie wymiarów prostopadłościanu o największym polu powierzchni całkowitej oraz wyznaczenie pola powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu: $\frac{90}{7} \text{ cm} \times \frac{180}{7} \text{ cm} \times \frac{150}{7} \text{ cm}$,
 $P = \frac{16200}{7} \text{ cm}^2$
- 3 p. — obliczenie długości jednej z krawędzi prostopadłościanu o największym polu powierzchni całkowitej: $\frac{90}{7} \text{ cm}$ lub $\frac{180}{7} \text{ cm}$ lub $\frac{150}{7} \text{ cm}$
- 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu od długości jednej z krawędzi podstawy wraz z dziedziną: np.: $P(x) = -14x^2 + 360x$,
 $x \in (0; 20)$
 LUB
 — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu od wysokości prostopadłościanu wraz z dziedziną: $P(h) = -\frac{14}{9}h^2 + \frac{200}{3}h + 1600$,
 $h \in (0; 60)$
- 1 p. — wyznaczenie zależności między długościami krawędzi prostopadłościanu: $h = 60 - 3x$ lub
 $x = 20 - \frac{1}{3}h$
 LUB
 — wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 20)$ lub $h \in (0; 60)$

Arkusz egzaminacyjny nr 8**Zadanie 6. (0-2)**

$$2^{40} + 4^{21} + 8^{13} = 2^{39} (1 + 2 + 2^3) = 2^{39} \cdot 11 = 2^{36} \cdot 88$$

Z faktu, że 2^{36} jest liczbą naturalną wynika, że liczba $2^{36} \cdot 88$ jest podzielna przez 88.

Zasady oceniania:

- 2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu
- 1 p. — zapisanie liczby $2^{40} + 4^{21} + 8^{13}$ w postaci iloczynu, w którym jeden czynnik jest potęgą liczby 2

Zadanie 8. (0-2)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 2 = 0 \\ 2 \cdot (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 2 = 0 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a + b = 0 \\ 4a - 2b = 18 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

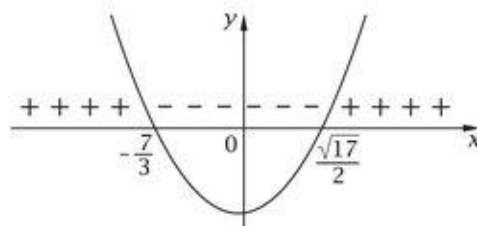
- 2 p. — obliczenie wartości współczynników a i b : $a = 3$, $b = -3$
- 1 p. — zapisanie układu prowadzącego do obliczenia wartości współczynników a i b : np. $\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a - 2b = 18 \end{cases}$

Zadanie 13. (0-2)

$$(2x - \sqrt{17})(3x + 7) = 0 \text{ dla } x \in \left\{ -\frac{7}{3}, \frac{\sqrt{17}}{2} \right\}$$

$$(2x - \sqrt{17})(3x + 7) < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{7}{3}; \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$$

Liczby całkowite należące do przedziału $\left(-\frac{7}{3}; \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$ tworzą zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

**Zasady oceniania:**

- 2 p. — rozwiązanie nierówności w zbiorze liczb całkowitych:
 $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- 1 p. — rozwiązanie nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych: $x \in \left(-\frac{7}{3}; \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$

Zadanie 18.1. (0-1)**Odpowiedź:** 9**Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 18.2. (0-1)**Odpowiedź:** 0 i 3**Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 19. (0-3)

$$f(x) = ax + b$$

Z warunku $f(x+2) - f(x) = 3$ wynika: $a(x+2) + b - ax - b = 3$, czyli $a = \frac{3}{2}$ Skoro $f(-4) = 1$, to $1 = \frac{3}{2} \cdot (-4) + b$, czyli $b = 7$.Funkcja f określona jest więc wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x + 7$.Wartości funkcji f są nieujemne dla x spełniających nierówność $\frac{3}{2}x + 7 \geq 0$, stąd $x \in \left[-\frac{14}{3}; +\infty\right)$.**Zasady oceniania:**3 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f oraz zbioru argumentów, dla których $f(x) \geq 0$: $f(x) = \frac{3}{2}x + 7$,
 $x \in \left[-\frac{14}{3}; +\infty\right)$ 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = \frac{3}{2}x + 7$ 1 p. — obliczenie wartości współczynnika a : $a = \frac{3}{2}$
LUB
— obliczenie wartości współczynnika b : $b = 7$ **Zadanie 22. (0-2)**

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 - 3 = -1 - 1 = -2$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 - 3 = -2 + 1 = -1$$

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 - 3 = -1 + 3 = 2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -2$$

Zasady oceniania:2 p. — obliczenie sumy czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) : -2 1 p. — wyznaczenie a_2 i a_3 : $a_2 = -2$, $a_3 = -1$ **Zadanie 27. (0-2)**Łączne pole odciętych czterech wycinków kół jest równe $\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 8 = 20$.Zatem $\pi r^2 = 20$, czyli $r = \sqrt{\frac{20}{\pi}} \approx 2,5$.**Zasady oceniania:**2 p. — wyznaczenie promienia r z dokładnością do części dziesiętnych: $r \approx 2,5$ 1 p. — obliczenie łącznego pola czterech odciętych wycinków kół: 20
LUB— zapisanie równania z niewiadomą r : np. $80 - \pi r^2 = \frac{3}{4} \cdot 80$

Zadanie 28. (0-3)

a — długość ramion trójkąta ABC oraz długość boku kwadratu $BDEC$

P_{BDEC} — pole kwadratu $BDEC$

$$P_{BDEC} = a^2$$

$$|AC| = \sqrt{(4+6)^2 + (7+1)^2}, \text{ stąd } |AC| = 2\sqrt{41}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC wynika:

$$(2\sqrt{41})^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ stąd } 164 = a^2(2 + \sqrt{3}), \text{ czyli } a^2 = \frac{164}{2 + \sqrt{3}}$$

Po usunięciu niewymierności z mianownika otrzymujemy:

$$a^2 = \frac{164 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 164(2 - \sqrt{3})$$

Zatem pole kwadratu $BDEC$ jest równe $164(2 - \sqrt{3})$.

Zasady oceniania:

3 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

2 p. — zapisanie równania pozwalającego na wyznaczenie pola kwadratu $BDEC$:

$$\text{np. } (2\sqrt{41})^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1 p. — obliczenie długości odcinka AC : $2\sqrt{41}$

LUB

$$\text{— obliczenie } \cos 150^\circ: -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 29. (0-4)

I sposób

W celu wyznaczenia współrzędnych punktu A , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}, \text{ czyli } A = (2, 6)$$

Punkt C należy do prostej k , czyli $C = (x, 2x + 2)$.

Zatem:

$$|AB| = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (9 - 6)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{(x - 2)^2 + (2x - 4)^2}$$

Z równości $|AB| = |AC|$ wynika:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{(x - 2)^2 + (2x - 4)^2}, \text{ a wobec tego } x^2 - 4x - 5 = 0, \text{ czyli } x \in \{-1, 5\}$$

Punkt C może więc mieć współrzędne $(-1, 0)$ lub $(5, 12)$.

II sposób (metoda wykorzystuje umiejętności z zakresu rozszerzonego)

Proste k i l są prostopadłe, ponieważ $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Długość odcinka AB jest równa odległości punktu $B = (-4, 9)$ od prostej k : $-2x + y - 2 = 0$. Zatem:

$$|AB| = \frac{|(-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 9 - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 3\sqrt{5}$$

Długość odcinka AC jest równa odległości punktu $C = (x, 2x + 2)$ od prostej l : $x + 2y - 14 = 0$. Zatem:

$$|AC| = \frac{|x + 2(2x + 2) - 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5x - 10|}{\sqrt{5}}$$

Z równości $|AB| = |AC|$ wynika:

$$3\sqrt{5} = \frac{|5x - 10|}{\sqrt{5}}, \text{ a wobec tego } |5x - 10| = 15, \text{ czyli } x \in \{-1, 5\}$$

Punkt C może więc mieć współrzędne $(-1, 0)$ lub $(5, 12)$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (-1, 0)$ lub $C = (5, 12)$
- 3 p. — zapisanie równania kwadratowego w postaci $ax^2 + bx + c = 0$, w którym niewiadomą jest jedna ze współrzędnych punktu C : np. $x^2 - 4x - 5 = 0$
LUB
— zapisanie równania z wartością bezwzględną w postaci $|ax + b| = c$, w którym niewiadomą jest jedna ze współrzędnych punktu C : np. $|5x - 10| = 15$
- 2 p. — wyznaczenie długości odcinka AB : $|AB| = 3\sqrt{5}$
LUB
— zapisanie długości odcinka AC w postaci wyrażenia, w którym zmienną jest jedna ze współrzędnych punktu C : np. $|AC| = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2}$ lub $|AC| = \frac{|x+2(2x+2)-14|}{\sqrt{5}}$
- 1 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu A : $A = (2, 6)$
LUB
— wykorzystanie równania prostej k do zapisu współrzędnych punktu C : $C = (x, 2x+2)$
LUB
— uzasadnienie, że proste k i l są prostopadłe

Zadanie 31. (0-2)

a — krawędź podstawy ostrosłupa

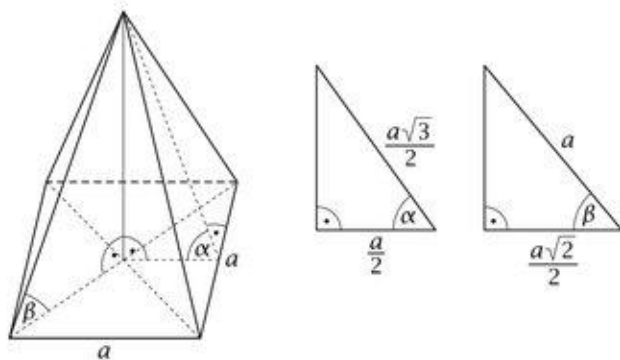
$$\cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}, \text{ stąd } \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu
- 1 p. — obliczenie $\cos \alpha$: $\frac{\sqrt{3}}{3}$
LUB
— obliczenie $\cos \beta$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$


Zadanie 34. (0-2)

C — Wybrana para skarpet jest czarna.

NC — Wybrana para skarpet nie jest czarna.

D — Wybrana para skarpet jest dziurawa.

A — Wybrana para skarpet nie jest ani czarna, ani dziurawa.

$$|\Omega| = 20, |C| = 14, |NC| = 6, |D| = 5$$

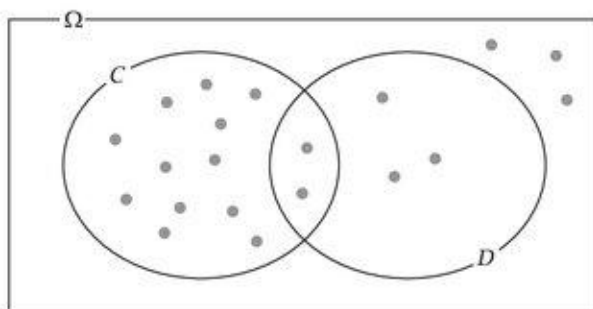
Zatem:

$$|C \cap D| = 2$$

$$|NC \cap D| = |D| - |C \cap D| = 5 - 2 = 3$$

$$|A| = |NC| - |NC \cap D| = 6 - 3 = 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{20}$$


Zasady oceniania:

- 2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{3}{20}$
- 1 p. — obliczenie liczby par skarpet, które nie są ani czarne, ani dziurawe: $|A| = 3$

Arkusz egzaminacyjny nr 9

Zadanie 12.1. (0-2)

Rozwiązujemy układ nierówności:

$$\begin{cases} -2x - \frac{4}{3} < 0 \\ \frac{1}{2}x - 3 < 0 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x < 6 \end{cases}$$

Zatem $g(x) < 0$ i $h(x) < 0$ dla $x \in \left(-\frac{2}{3}; 6\right)$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcje g i h przyjmują jednocześnie wartości ujemne: $x \in \left(-\frac{2}{3}; 6\right)$

1 p. — wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości ujemne: $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$
LUB
— wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcja h przyjmuje wartości ujemne: $x \in \left(-\infty; 6\right)$

Zadanie 12.2. (0-2)

Wzór funkcji f : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$

$f(x) = 0$, stąd $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} = 0$, czyli $x = 2\frac{2}{3}$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie miejsca zerowego funkcji f : $x = 2\frac{2}{3}$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$

Zadanie 14.1. (0-2)

$$\text{Odpowiedź: } s(t) = \begin{cases} 24t & \text{dla } t \in [0; 1,5] \\ 0 & \text{dla } t \in (1,5; 2,5] \\ 18t & \text{dla } t \in (2,5; 5] \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej drogę rowerzysty w zależności od czasu

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej drogę rowerzysty przed postojem w zależności od czasu: $y = 24t$
LUB

— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej drogę rowerzysty po postoju w zależności od czasu: $y = 18t$

Zadanie 14.3. (0-1)

Odpowiedź: 81

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 16. (0-4)

Skoro $S_{10} = 170$, to $2a_1 + 9r = 34$, czyli $a_1 = 17 - \frac{9}{2}r$.

Zatem: $b_1 = a_3 = 17 - \frac{5}{2}r$, $b_2 = a_4 = 17 - \frac{3}{2}r$, $b_3 = a_8 = 17 + \frac{5}{2}r$.

Ciąg (b_n) jest geometryczny, więc:

$$\left(17 - \frac{3}{2}r\right)^2 = \left(17 - \frac{5}{2}r\right)\left(17 + \frac{5}{2}r\right), \text{ stąd } r(r-6) = 0, \text{ czyli } r \in \{0, 6\}$$

Dla $r = 0$ otrzymujemy: $a_1 = b_1 = b_2 = b_3 = 17$, czyli $q = \frac{b_2}{b_1} = 1$.

Dla $r = 6$ otrzymujemy: $a_1 = -10$, $b_1 = 2$, $b_2 = 8$, $b_3 = 32$, czyli $q = \frac{b_2}{b_1} = 4$.

Zasady oceniania:

 4 p. — wyznaczenie ilorazu ciągu (b_n): $q \in \{1, 4\}$

 3 p. — wyznaczenie a_1 : $a_1 \in \{-10, 17\}$

LUB

 — wyznaczenie r : $r \in \{0, 6\}$

 2 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą a_1 lub r :

$$\text{np. } \left(17 - \frac{3}{2}r\right)^2 = \left(17 - \frac{5}{2}r\right) \left(17 + \frac{5}{2}r\right)$$

 1 p. — zapisanie w dowolnej postaci równania z niewiadomymi a_1 i r , wynikającego z podanej sumy ciągu (a_n): np. $2a_1 + 9r = 34$

LUB

 — zapisanie w dowolnej postaci równania z niewiadomymi a_1 i r , wynikającego z faktu, że ciąg (b_n) jest geometryczny: np. $5r^2 + 3a_1r = 0$
Zadanie 19. (0-3)
 x — wysokość drzewa (w metrach)

 y — długość cienia drzewa podczas pierwszego pomiaru (w metrach)

 Z trójkąta prostokątnego BCD wynika: $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

 Z trójkąta prostokątnego ACD wynika: $y = x\sqrt{3} - 10$.

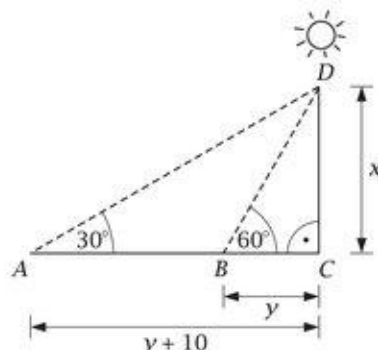
Zatem:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3} - 10, \text{ czyli } x = 5\sqrt{3} \approx 8,7 \text{ m}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie wysokości drzewa z dokładnością do części dziesiętnych metra: około 8,7 m

 2 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest wysokość drzewa lub długość jego cienia: np. $\frac{x\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3} - 10$ lub $3y = y + 10$

 1 p. — zapisanie jednej zależności między wysokością drzewa, a długością jego cienia: np. $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ lub $y = x\sqrt{3} - 10$

Zadanie 20. (0-1)
Odpowiedź: 210

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 23. (0-3)

 Jeżeli $|AD| = |CD| = x$, to:

$$|AB| = |BC| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Zatem:

$$|AD| + |CD| + |AC| = 2x + x\sqrt{3}$$

Zatem:

$$x\sqrt{3} + 2x = 18 + 12\sqrt{3}, \text{ stąd } x = 6\sqrt{3}$$

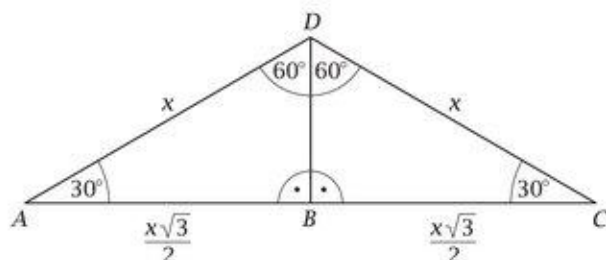
 Pole trójkąta ACD jest więc równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

Zasady oceniania:

 3 p. — obliczenie pola trójkąta ACD : $P = 27\sqrt{3}$

 2 p. — obliczenie długości jednego z boków trójkąta ACD : $|AD| = 6\sqrt{3}$ lub $|AC| = 18$

 1 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest długość boku trójkąta ACD : np. $x\sqrt{3} + 2x = 18 + 12\sqrt{3}$


Zadanie 25. (0-1)**Odpowiedź:** $6\sqrt{3}$ **Zasady oceniania:**

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 26. (0-2)

Obliczamy objętość prostopadłościanu, który zostanie wypełniony ziemią:

$$V = 50 \cdot 50 \cdot 55 = 137\,500 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Masa ziemi, która zmieści się do donicy to:

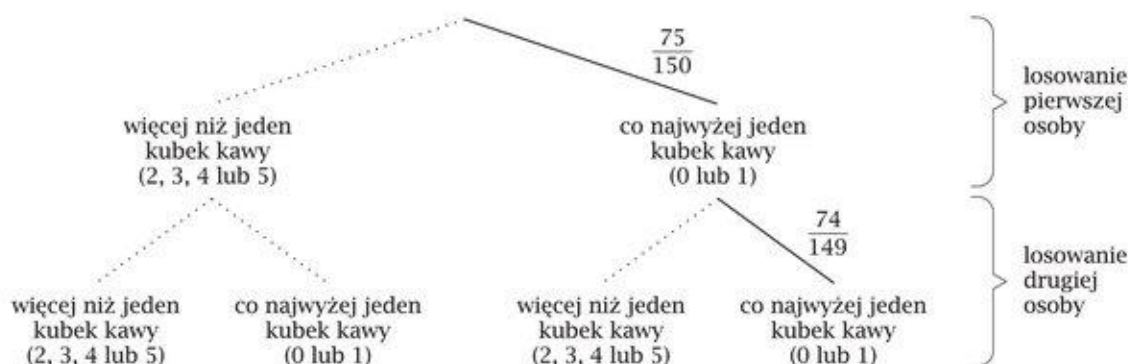
$$137\,500 \cdot 0,4 = 55\,000 \text{ [g]} = 55 \text{ [kg]}$$

Skoro $55 : 10 = 5,5$, zatem trzeba zakupić co najmniej 6 pełnych worków ziemi.**Zasady oceniania:**

2 p. — obliczenie liczby worków ziemi: co najmniej 6 pełnych worków

1 p. — obliczenie objętości prostopadłościanu, który zostanie wypełniony ziemią: $V = 137\,500 \text{ cm}^3$ **Zadanie 29.2. (0-2)**

Sporządzamy drzewko:



A — Wylosowano dwie osoby, które w dniu poprzedzającym ankietę wypily co najwyżej jeden kubek kawy.

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{75}{150} \cdot \frac{74}{149} = \frac{37}{149}.$$

Zasady oceniania:2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{37}{149}$

1 p. — sporządzenie drzewka z zaznaczonymi istotnymi gałęziami i odpowiadającymi im prawdopodobieństwami.

LUB

— obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 5550$ — obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 22\,350$ **Zadanie 30. (0-2)**

Zaznaczamy w tabeli możliwe do uzyskania sumy punktów, a kolorem szarym wyróżniamy te sumy, które dają Tomkowi wygraną.

A — Tomek wyrzucił dwa razy liczbę pierwszą (12 punktów).

B — Tomek wyrzucił raz liczbę 1, a raz liczbę złożoną (5 punktów).

C — Tomek wyrzucił raz liczbę 1, a raz liczbę pierwszą (1 punkt).

D — Końcowy wynik gry Tomka mieści się w przedziale $[1; 12]$ (Tomek wygrywa).

+	6	10	-5
6	12	16	1
10	16	20	5
-5	1	5	-10

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$$|A| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$|B| = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$|C| = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$|D| = |A| + |B| + |C| = 19$$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{19}{36}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia D : $P(D) = \frac{19}{36}$

1 p. — sporządzenie drzewka z zaznaczonymi istotnymi gałęziami i odpowiadającymi im prawdopodobieństwami

LUB

— obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu D : $|D| = 19$

— obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 36$

Arkusz egzaminacyjny nr 10

Zadanie 3. (0-2)

$$a = 4|2 - \sqrt{5}| = 4(-2 + \sqrt{5}) = -8 + 4\sqrt{5} \approx 0,94$$

$$b = |5 - 3\sqrt{2}| = 5 - 3\sqrt{2} \approx 0,76$$

$$c = |2\sqrt{3} - 4| = -2\sqrt{3} + 4 \approx 0,54$$

Zatem $c < b < a$

Zasady oceniania:

2 p. — uporządkowanie liczb a , b i c w kolejności rosnącej: $c < b < a$

1 p. — zapisanie liczb a , b i c bez użycia wartości bezwzględnej: $a = -8 + 4\sqrt{5}$, $b = 5 - 3\sqrt{2}$, $c = -2\sqrt{3} + 4$

Zadanie 11. (0-2)

Rozwiązujemy alternatywę dwóch równań:

$$x + \frac{1}{6} = -\frac{11}{6} \quad \text{lub} \quad x + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}, \quad \text{czyli} \quad x \in \left\{-2, 1\frac{2}{3}\right\}$$

Ponieważ $-\sqrt{5} \approx -2,24$ oraz $1, (6) = 1\frac{2}{3}$, więc każda liczba ze zbioru $\left\{-2, 1\frac{2}{3}\right\}$ należy do przedziału $(-\sqrt{5}; 1, (6)]$.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\left|x + \frac{1}{6}\right| = \frac{11}{6}$: $x \in \left\{-2, 1\frac{2}{3}\right\}$

Zadanie 15. (0-2)

Prosta $x = 3$ przechodzi przez wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f , a więc:

$$\frac{b}{4} = 3, \quad \text{czyli} \quad b = 12.$$

Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = -2x^2 + 12x - 1$ są liczby: $x_1 = \frac{6 - \sqrt{34}}{2}$, $x_2 = \frac{6 + \sqrt{34}}{2}$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f : $x_1 = \frac{6 - \sqrt{34}}{2}$, $x_2 = \frac{6 + \sqrt{34}}{2}$

1 p. — wyznaczenie współczynnika b we wzorze funkcji f : $b = 12$

Zadanie 17. (0-2)

Wszystkie liczby nieparzyste dwucyfrowe tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o kolejnych wyrazach: 11, 13, 15, ..., 99.

$$a_1 = 11, r = 2$$

$$a_n = 99, \text{ stąd } 11 + (n-1) \cdot 2 = 99, \text{ czyli } n = 45$$

Obliczamy sumę S_{45} wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych:

$$S_{45} = \frac{a_1 + a_{45}}{2} \cdot 45, \text{ stąd } S_{45} = \frac{11+99}{2} \cdot 45, \text{ czyli } S_{45} = 2475$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie sumy wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych: 2475

1 p. — wyznaczenie liczby wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych: 45

Zadanie 19. (0-2)

$$|AC| = a$$

$$|BC| = 3a$$

I sposób

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC wynika:

$$|AB|^2 = (3a)^2 - a^2, \text{ stąd } |AB|^2 = 8a^2, \text{ czyli } |AB| = 2\sqrt{2}a$$

$$\sin \alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2\sqrt{2}a}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\sqrt{\sin^2 \alpha + 1\frac{8}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 1\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

II sposób

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

Z jedynki trygonometrycznej wynika, że $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, więc:

$$\sqrt{\sin^2 \alpha + 1\frac{8}{9}} = \sqrt{2\frac{8}{9} - \cos^2 \alpha}$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\sqrt{2\frac{8}{9} - \cos^2 \alpha} = \sqrt{2\frac{8}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{5}{3}$

1 p. — obliczenie $\sin \alpha$: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
LUB

— zapisanie wyrażenia z użyciem $\cos \alpha$ oraz obliczenie $\cos \alpha$: np. $\sqrt{2\frac{8}{9} - \cos^2 \alpha}$, gdzie $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

Zadanie 21. (0-1)

$$(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + 1)(1 - \sin \alpha) = (\sin \alpha + 1)(1 - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

Zasady oceniania:

1 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

Zadanie 24. (0-3)

$$|AO| = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \text{ [km]}$$

$$|AK| = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ [km]}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta OAK wynika:

$$|OK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos 120^\circ = \frac{37}{36}$$

Zatem $|OK| = \frac{\sqrt{37}}{6} \text{ km} \approx 1 \text{ km}$.

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie odległości między punktem O a punktem K z dokładnością do części dziesiątych kilometra: 1 km

2 p. — obliczenie kwadratu długości odcinka OK : $|OK|^2 = \frac{37}{36}$

1 p. — obliczenie długości odcinków AO i AK : $|AO| = \frac{2}{3} \text{ km}$, $|AK| = \frac{1}{2} \text{ km}$

Zadanie 26. (0-2)

a — długość boku kwadratu $ABCD$

r — promień koła wpisanego w kwadrat $ABCD$

P — pole koła wpisanego w kwadrat $ABCD$

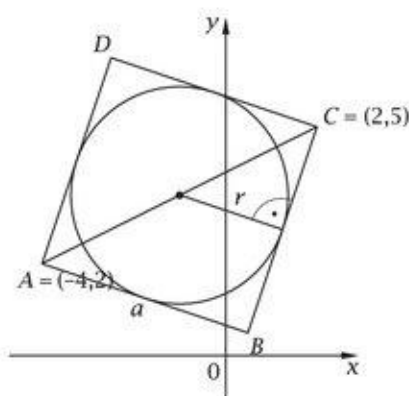
$|AC| = \sqrt{(2+4)^2 + (5-2)^2}$, stąd $|AC| = 3\sqrt{5}$

$|AC| = a\sqrt{2}$, stąd $3\sqrt{5} = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$r = \frac{1}{2}a$, czyli $r = \frac{3\sqrt{10}}{4}$

Obliczamy pole koła wpisanego w kwadrat $ABCD$:

$$P = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{45}{8}\pi$$



Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie pola koła wpisanego w kwadrat $ABCD$: $\frac{45}{8}\pi$

1 p. — obliczenie długości boku kwadratu $ABCD$: $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Zadanie 28. (0-4)

O — okrąg o średnicy BP

S — środek okręgu O

r — promień okręgu O

Prostą l można opisać równaniem $y = ax + b$, gdzie $a = \frac{9-3}{-1-2} = -2$.

Do prostej l należy punkt $B = (2, 3)$, więc: $3 = (-2) \cdot 2 + b$, stąd $b = 7$

Zatem prosta l ma równanie $y = -2x + 7$.

Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} x = 6 \\ y = -5 \end{cases}$, czyli $P = (6, -5)$.

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu O :

$$S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (4, -1)$$

Wyznaczamy promień okręgu O :

$$r = \frac{1}{2}|BP| = \frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2 + (-5-3)^2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Okrąg O ma równanie $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 20$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie równania okręgu o średnicy BP : $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 20$

3 p. — wyznaczenie współrzędnych środka okręgu o średnicy BP : $(4, -1)$
LUB

— wyznaczenie promienia okręgu o średnicy BP : $2\sqrt{5}$

2 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu P : $(6, -5)$

1 p. — wyznaczenie równania prostej l : $y = -2x + 7$

Zadanie 30. (0-2)

H — długość krawędzi SD w ostrosłupie (wysokość ostrosłupa)

x — długość krawędzi SB w ostrosłupie (najdłuższa krawędź boczna ostrosłupa)

$$\frac{1}{3} \cdot 32 \cdot H = \frac{160}{3}, \text{ czyli } H = 5$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD wynika:

$$|DB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBS wynika:

$$x = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{5})^2} = \sqrt{105}$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie długości krawędzi SB : $|SB| = \sqrt{105}$

1 p. — wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = 5$

LUB

— wyznaczenie wysokości ostrosłupa w zależności od długości krawędzi SB : $H = \sqrt{x^2 - 80}$

Zadanie 33. (0-3)

Mediana zestawu danych przedstawionych w tabeli jest równa 4, a więc 6 uczniów klasy 4A uzyskało ocenę wyższą niż mediana.

Ocena	2	3	4	5	6
Liczba ocen	3	7	9	5	1

A — Wybranie dwóch uczniów klasy 4A z ocenami wyższymi niż 4.

$$|\Omega| = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

$$|A| = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{20}.$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{20}$

2 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|\Omega| = 300$, $|A| = 15$

LUB

— sporządzenie drzewka z zaznaczonymi istotnymi gałęziami i odpowiadającymi im prawdopodobieństwami

1 p. — wyznaczenie liczby uczniów z oceną wyższą niż mediana: 6

LUB

— wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 300$

SCHEMATY ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

(zakres rozszerzony)

Arkusz egzaminacyjny nr 11

Zadanie 1. (0-3)

$$a = \left(\frac{9^{-18} + 9^{-16}}{82} \right)^{\frac{1}{9}} = \left(\frac{9^{-18} \cdot (1 + 9^2)}{82} \right)^{\frac{1}{9}} = (9^{-18})^{\frac{1}{9}} = 9^{-2}$$

$$b = \log_9 64 - \log_{27} 64 = \log_9 64 - \frac{\log_9 64}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \log_9 64 = \log_9 64^{\frac{1}{3}} = \log_9 4$$

$$a^b = 9^{-2 \log_9 4} = 9^{\log_9 \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości potęgi a^b : $\frac{1}{16}$ 2 p. — zapisanie liczby a w postaci potęgi i liczby b w postaci logarytmu: np. $a = 9^{-2}$ i $b = \log_9 4$ 1 p. — zapisanie liczby a w postaci potęgi: np. $a = 9^{-2}$

LUB

— zapisanie liczby b w postaci logarytmu: np. $b = \log_9 4$

Zadanie 2. (0-4)

Z nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ wynika:

$$\begin{cases} x < -2 \\ -2x - 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 2x + 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x + 4 + x - 1 \leq 12 \end{cases}$$

Rozwiązujemy każdy układ nierówności:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}, \text{ czyli: } x \in [-5; -2) \cup [-2; 1) \cup [1; 3]$$

Zatem $x \in [-5; 3]$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$: $x \in [-5; 3]$ 3 p. — rozwiązanie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $[-2; 1)$, $[1; +\infty)$: $x \in [-5; -2)$, $x \in [-2; 1)$, $x \in [1; 3]$ 2 p. — rozwiązanie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ w dwóch spośród trzech przedziałów $(-\infty; -2)$, $[-2; 1)$, $[1; +\infty)$

LUB

— przekształcenie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ do postaci:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

1 p. — rozwiązanie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ w jednym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $[-2; 1)$, $[1; +\infty)$

LUB

— przekształcenie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ do postaci alternatywy trzech układów nierówności:

$$\begin{cases} x < -2 \\ -2x - 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 2x + 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x + 4 + x - 1 \leq 12 \end{cases}$$

Zadanie 3. (0-5)

Ustalamy warunki, jakie powinien spełniać parametr m :

$$\begin{cases} a \neq 0 & (1) \\ \Delta > 0 & (2) \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 & (3) \end{cases}$$

Z warunków (1) i (2) otrzymujemy:

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 12m^2 - 56m + 60 > 0 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} m \neq 1 \\ m \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$

Z warunku (3) otrzymujemy:

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0, \quad \text{stąd} \quad \frac{6-2m}{m-1} < 0, \quad \text{czyli} \quad m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

Podsumowanie:

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3; +\infty), \quad \text{czyli} \quad m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$

Zasady oceniania:

5 p. — wyznaczenie zbioru, do którego należą wartości parametru m : $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

4 p. — rozpatrzenie wszystkich warunków, które musi spełniać parametr m : $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \end{cases}$

3 p. — ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m oraz rozpatrzenie warunku (3)

LUB

— rozpatrzenie warunków (1) i (2) oraz przekształcenie warunku (3) do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a

2 p. — rozpatrzenie warunku (3): $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

LUB

— ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m i rozpatrzenie warunków (1) i (2)

LUB

— ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m oraz przekształcenie warunku (3) do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a

1 p. — ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m

LUB

— rozpatrzenie warunków (1) i (2): $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3; +\infty) \end{cases}$

LUB

— przekształcenie warunku (3) do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a:

np. $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$

Zadanie 4. (0-2)

Argumenty funkcji f spełniają warunki:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 & (1) \\ (x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Z warunku (1) wynika: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Z warunku (2) wynika: $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; 1] \cup [2; +\infty)$.

Podsumowanie:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ x \in (-\infty; -4] \cup [-2; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases}$$

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór: $(-\infty; -4] \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty)$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie dziedziny funkcji f : $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty)$

1 p. — zapisanie warunków, jakie spełniają argumenty funkcji f : $x^2 - 1 \neq 0$ i $(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \geq 0$

LUB

— wyznaczenie rozwiązań nierówności $(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \geq 0$:

$x \in (-\infty; -4] \cup [-2; 1] \cup [2; +\infty)$

Zadanie 5. (0-4)

Rozwiązujemy układ równań, przy założeniu $q \in (0; 1)$:

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 6 \\ \frac{a_1}{1-q} = 8 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \in (0; 1) \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 12 \\ q = -\frac{1}{2} \notin (0; 1) \end{cases}$$

Skoro $S_n = 4 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, więc rozwiązujemy nierówność:

$$\left| -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| < \frac{1}{512}, \text{ a wobec tego } \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^{12}, \text{ czyli } n > 12$$

Najmniejsza liczba naturalna spełniająca podaną nierówność to 13.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie najmniejszej liczby naturalnej spełniającej nierówność: 13

3 p. — zapisanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $S_n = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

2 p. — wyznaczenie a_1 i q z uwzględnieniem monotoniczności ciągu (a_n) : $a_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$

1 p. — ustalenie warunków, jakie spełniają a_1 i q : $a_1(1+q) = 6$, $\frac{a_1}{1-q} = 8$

Zadanie 6. (0-3)

$$4 \cos 4x \cos x = 2 \cos 5x + \sqrt{3} \text{ i } x \in [-\pi; \pi]$$

$$4 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x \cos x - 2 \sin 4x \sin x + \sqrt{3}$$

$$2 \cos 4x \cos x + 2 \sin 4x \sin x = \sqrt{3}$$

$$2 \cos(4x - x) = \sqrt{3}$$

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \text{ lub } x = -\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Skoro } x \in [-\pi; \pi], \text{ to } x \in \left\{-\frac{13}{18}\pi, -\frac{11}{18}\pi, -\frac{1}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi\right\}.$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie rozwiązań równania w przedziale $[-\pi; \pi]$:

$$x \in \left\{-\frac{13}{18}\pi, -\frac{11}{18}\pi, -\frac{1}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi\right\}$$

2 p. — wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania: $x \in \left\{-\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

1 p. — przekształcenie równania do postaci $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 7. (0-3)

R — promień okręgu opisanego na trapezie i jednocześnie na trójkącie ABD

Jeśli na trapezie można opisać okrąg, to jest on równoramienny, czyli $|AD| = |BC|$ oraz $|AE| = |FB| = 12$.

Jeśli w ten trapez można wpisać okrąg, to:

$$|AD| + |BC| = 12 + 36, \text{ czyli } |AD| = |BC| = 24$$

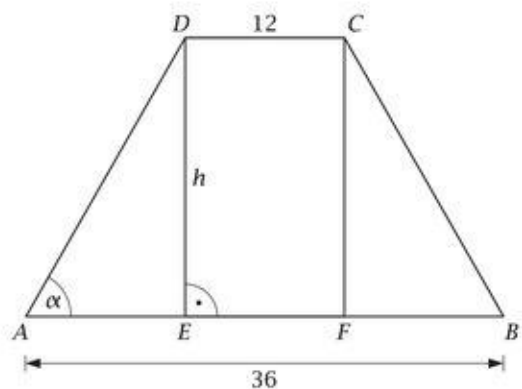
$$\cos \alpha = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{1}{2}, \text{ wobec tego } \alpha = 60^\circ, \text{ czyli } h = 12\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika:

$$|DB| = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 24^2}, \text{ czyli } |DB| = 12\sqrt{7}$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABD wynika:

$$2R = \frac{|DB|}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{21}$$



Zasady oceniania:

 3 p. — obliczenie długości średnicy okręgu opisanego na trapezie: $8\sqrt{21}$

 2 p. — obliczenie wysokości trapezu: $12\sqrt{3}$

1 p. — obliczenie długości ramion trapezu: 24

Zadanie 8. (0–4)

Rozwiązujemy układ równań, którego rozwiązaniem są współrzędne punktu przecięcia prostych:

$$\begin{cases} x + my - m - 2 = 0 \\ mx + y - m = 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = \frac{m-2}{m-1} \\ y = \frac{m}{m-1} \end{cases}, \text{ gdzie } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

 Jeżeli $x \cdot y \geq 0$, to $\frac{m(m-2)}{(m-1)^2} \geq 0$ i $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

 Zatem $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$.

Zasady oceniania:

 4 p. — wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których $x \cdot y \geq 0$:

$$m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$$

 3 p. — zapisanie warunku $x \cdot y \geq 0$ w postaci nierówności $\frac{m(m-2)}{(m-1)^2} \geq 0$ wraz z założeniem:

$$m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

 2 p. — wyznaczenie x i y w zależności od parametru m wraz z założeniem:

$$\begin{cases} x = \frac{m-2}{m-1} \\ y = \frac{m}{m-1} \end{cases}, \text{ gdzie } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

 1 p. — zapisanie równania z parametrem m i niewiadomą x : np. $x(m^2 - 1) = m^2 - m - 2$
LUB

 — zapisanie równania z parametrem m i niewiadomą y : np. $y(m^2 - 1) = m^2 + m$
Zadanie 9. (0–4)
 S_1, S_2 — środki okręgów

 A, B — punkty przecięcia okręgów

 $P_{S_1AS_2B}$ — pole czworokąta S_1AS_2B

 Środki okręgów to punkty: $S_1 = (-1, -2)$ i $S_2 = (2, 4)$.

Rozwiązujemy układ równań prowadzący do wyznaczenia punktów przecięcia okręgów:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0 \end{cases}$$

 Po odjęciu tych równań stronami otrzymujemy równanie $6x + 12y = 30$, stąd $x = 5 - 2y$. Zatem:

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y \in \{1, 3\} \end{cases}$$

 Punkty przecięcia okręgów to: $A = (3, 1)$ i $B = (-1, 3)$.

 Obliczamy długości boków czworokąta S_1AS_2B :

$$|S_1A| = \sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2} = 5$$

$$|AS_2| = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$|S_2B| = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

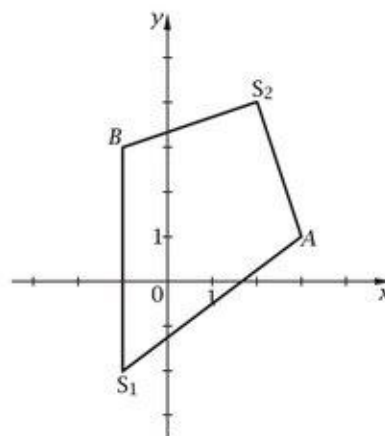
$$|BS_1| = \sqrt{(-1+1)^2 + (-2-3)^2} = 5$$

 Ponieważ $|S_1A| = |BS_1|$ oraz $|AS_2| = |S_2B|$, więc czworokąt S_1AS_2B jest deltoidem.

 Obliczamy długości przekątnych deltoidu S_1AS_2B :

$$|AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|S_1S_2| = \sqrt{(2+1)^2 + (4+2)^2} = 3\sqrt{5}$$



Obliczamy pole deltoidu S_1AS_2B :

$$P_{S_1AS_2B} = \frac{|AB| \cdot |S_1S_2|}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{2} = 15$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie pola czworokąta S_1AS_2B : 15

3 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołków czworokąta S_1AS_2B : $S_1 = (-1, -2)$, $A = (3, 1)$, $S_2 = (2, 4)$, $B = (-1, 3)$

2 p. — wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia okręgów: $A = (3, 1)$, $B = (-1, 3)$

LUB

— wyznaczenie współrzędnych środków okręgów oraz uzyskanie równania kwadratowego, w którym jedyną niewiadomą jest współrzędna x lub y punktu przecięcia okręgów: $S_1 = (-1, -2)$, $S_2 = (2, 4)$ oraz np. $y^2 - 4y + 3 = 0$

1 p. — wyznaczenie współrzędnych środków okręgów: $S_1 = (-1, -2)$, $S_2 = (2, 4)$

LUB

— uzyskanie równania kwadratowego, w którym jedyną niewiadomą jest współrzędna x albo y punktu przecięcia okręgów: np. $y^2 - 4y + 3 = 0$

Zadanie 10. (0-3)

S — punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [10, 5], \text{ czyli } |AS| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = [-2, 1], \text{ czyli } |SD| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = [8, 6], \text{ czyli } |AD| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ASD wynika:

$$\cos \sphericalangle ASD = \frac{(\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{5})^2 - 10^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie cosinusa kąta ASD : $\cos \sphericalangle ASD = \frac{3}{5}$

2 p. — obliczenie długości odcinków AS , SD i AD : $|AS| = 5\sqrt{5}$, $|SD| = \sqrt{5}$, $|AD| = 10$

1 p. — obliczenie długości odcinków AS i SD : $|AS| = 5\sqrt{5}$, $|SD| = \sqrt{5}$

LUB

— obliczenie długości odcinka AD : $|AD| = 10$

Zadanie 11. (0-4)

α — kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

$$|DB| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6}$$

$$|DE| = \frac{1}{2}|AS| = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|AS|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ stąd } \alpha = 45^\circ, \text{ więc } \sphericalangle CSB = 90^\circ$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ESB wynika:

$$|BE| = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$

Zatem obwód trójkąta DBE jest równy: $|DE| + |BE| + |DB| = 6(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$.

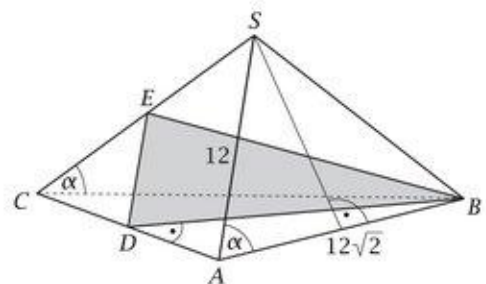
Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie obwodu przekroju: $6(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$

3 p. — obliczenie długości trzech boków trójkąta DBE : $6, 6\sqrt{5}, 6\sqrt{6}$

2 p. — obliczenie długości dwóch boków trójkąta DBE

1 p. — obliczenie długości jednego boku trójkąta DBE



Zadanie 12. (0-3)

A — Wylosowano dwie liczby, których iloczyn jest liczbą parzystą

$$|\Omega| = \binom{55}{2} = 27 \cdot 55$$

$$|A| = \binom{27}{2} + \binom{27}{1} \cdot \binom{28}{1} = 27 \cdot 41$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{41}{55}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{41}{55}$

2 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|\Omega| = 1485$, $|A| = 1107$

1 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 1485$

LUB

— wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 1107$

Zadanie 13. (0-2)

W przedziale $[-1; 2]$ funkcja $g(x) = 4^x$ oraz funkcja $h(x) = -x^5 + 3x^3 + 1$ są określone i ciągłe, zatem funkcja f określona wzorem $f(x) = g(x) + h(x)$ też jest ciągła w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy wartości funkcji f na krańcach przedziału $[-1; 2]$:

$$f(-1) = 4^{-1} - (-1)^5 + 3 \cdot (-1)^3 + 1 = -\frac{3}{4}$$

$$f(2) = 4^2 - 2^5 + 3 \cdot 2^3 + 1 = 9$$

Funkcja f jest ciągła w przedziale $[-1; 2]$ i $f(-1) \neq f(2)$, więc na podstawie twierdzenia Darboux dla argumentów należących do przedziału $(-1; 2)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(-\frac{3}{4}; 9)$. Istnieje zatem co najmniej jeden argument $x_0 \in (-1; 2)$, dla którego $f(x_0) = 0$.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — uzasadnienie, że funkcja f jest ciągła oraz obliczenie wartości funkcji f na krańcach przedziału $[-1; 2]$: $f(-1) = -\frac{3}{4}$, $f(2) = 9$

Zadanie 14. (0-6)

r — promień podstawy walca

H — wysokość walca

V — objętość walca

$$2r + H = 12, \text{ czyli } H = 12 - 2r$$

$$V(r) = \pi(12r^2 - 2r^3)$$

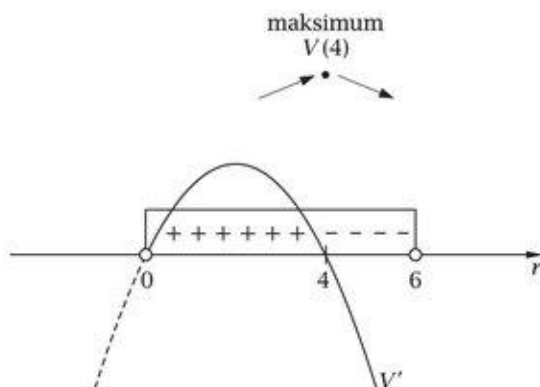
Dziedzina funkcji V : $r \in (0; 6)$

$$V'(r) = \pi(24r - 6r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ lub } r = 4$$

Funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0; 4]$, a malejąca w przedziale $[4; 6)$. Zatem funkcja V osiąga w punkcie $r = 4$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Wówczas $H = 4$, a największa objętość to $V(4) = 64\pi$.



Zasady oceniania:

- 6 p. — obliczenie promienia podstawy i wysokości walca o największej objętości oraz wyznaczenie objętości tego walca: $r = H = 4$, $V = 64\pi$
- 5 p. — wyznaczenie promienia podstawy walca o największej objętości wraz z uzasadnieniem: $r = 4$
LUB
— wyznaczenie wysokości walca o największej objętości wraz z uzasadnieniem: $H = 4$
- 4 p. — rozwiązanie równania $V'(r) = 0$ lub równania $V'(H) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V
- 3 p. — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji V
LUB
— rozwiązanie równania $V'(r) = 0$ lub równania $V'(H) = 0$ bez uwzględniania dziedziny funkcji V
- 2 p. — obliczenie pochodnej funkcji V : $V'(r) = \pi(24r - 6r^2)$ lub $V'(H) = \pi\left(\frac{3}{4}H^2 - 12H + 36\right)$
- 1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości walca od promienia podstawy:
 $V(r) = \pi(12r^2 - 2r^3)$
LUB
— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości walca od wysokości walca:
 $V(H) = \pi\left(\frac{1}{4}H^3 - 6H^2 + 36H\right)$
LUB
— wyznaczenie dziedziny funkcji V : $r \in (0; 6)$ lub $H \in (0; 12)$

Arkusz egzaminacyjny nr 12**Zadanie 1. (0-2)**

$$a = \log_4 8$$

$$b = \log_4 24$$

$$c = \log_4 48$$

Zatem:

$$a + c - b = \log_4 8 + \log_4 48 - \log_4 24 = \log_4 \left(\frac{8 \cdot 48}{24} \right) = \log_4 16 = 2$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — wyznaczenie wartości liczbowej wyrażenia $a + c - b$: 2
- 1 p. — zapisanie liczb a , b i c w postaci logarytmu o tej samej podstawie: np. $a = \log_4 8$, $b = \log_4 24$,
 $c = \log_4 48$

Zadanie 2. (0-2)

Przekształcamy nierówność $x^3 - x^2y \geq xy^2 - y^3$ do postaci równoważnej:

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 \geq 0$$

Skoro dla $x \neq y$ zachodzi: $x + y \geq 0$ oraz $(x - y)^2 > 0$, więc iloczyn liczby nieujemnej i liczby dodatniej jest liczbą nieujemną.

Zasady oceniania:

- 2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu
- 1 p. — przekształcenie tezy do postaci $(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$

Zadanie 3. (0-3)

$$f(-3) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

$$f(12) = -\log_{\frac{1}{2}} 16 = 4$$

Jeżeli $x \in [-3; 12]$, to $f(x) \in [0; 4]$.

Zasady oceniania:

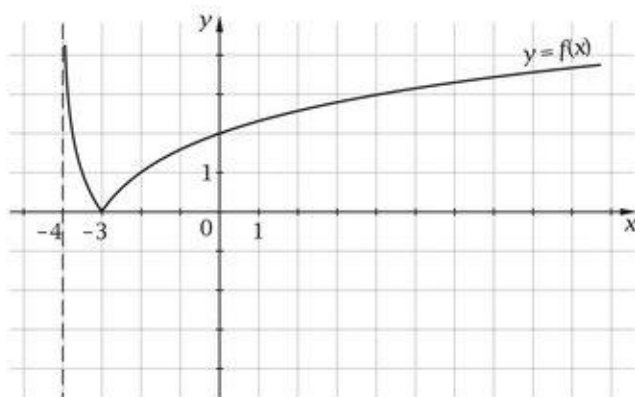
3 p. — naszkicowanie wykresu funkcji f oraz wyznaczenie zbioru wartości funkcji f dla $x \in [-3; 12]$: $f(x) \in [0; 4]$

2 p. — naszkicowanie wykresu funkcji f

1 p. — naszkicowanie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

LUB

— wyznaczenie wartości funkcji f na końcach przedziału $[-3; 12]$: $f(-3) = 0$, $f(12) = 4$


Zadanie 4. (0-2)

$$S_m = S_k, \text{ czyli } \frac{2a_1 + (m-1)r}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + (k-1)r}{2} \cdot k$$

Z poniższego równania wynika:

$$(m-k)(2a_1 + (m+k-1)r) = 0$$

Skoro $m \neq k$, więc:

$$2a_1 + (m+k-1)r = 0$$

Stąd:

$$a_{m+k} = a_1 + (m+k-1)r = -a_1$$

Zatem:

$$S_{m+k} = \frac{a_1 + a_{m+k}}{2} \cdot (m+k) = \frac{a_1 - a_1}{2} \cdot (m+k) = 0$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie sumy $(m+k)$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $S_{m+k} = 0$

1 p. — zapisanie równania $2a_1 + (m+k-1)r = 0$

Zadanie 5. (0-3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = k^3 - k^2 - 4k$$

Zatem rozwiązujemy równanie:

$$k^3 - k^2 - 4k + 4 = 0, \text{ stąd } (k-1)(k-2)(k+2) = 0, \text{ czyli } k \in \{-2, 1, 2\}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości parametru k : $k \in \{-2, 1, 2\}$

2 p. — przekształcenie wielomianu $W(k) = k^3 - k^2 - 4k + 4$ do postaci iloczynowej:

$$\text{np. } W(k) = (k-1)(k^2-4)$$

LUB

— wyznaczenie jednego z pierwiastków wielomianu $W(x)$

1 p. — zapisanie równania z niewiadomą k : np. $k^3 - k^2 - 4k = -4$

Zadanie 6. (0-5)

a_n — długość boku n -tego trójkąta równobocznego

r_n — promień okręgu wpisanego w n -ty trójkąt równoboczny

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ i } r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Promienie kolejnych okręgów tworzą nieskończony ciąg geometryczny (r_n) o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ ($|q| < 1$).
Zatem:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots = \frac{r_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Suma długości wszystkich okręgów jest równa:

$$S = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Skoro $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$, czyli $\frac{a_{n+1}\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n\sqrt{3}}{6}$, to $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

$a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Długości boków kolejnych trójkątów równobocznych tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $q' = \frac{1}{2}$ ($|q'| < 1$). Zatem:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q'} = 2$$

Suma obwodów wszystkich trójkątów równobocznych jest więc równa:

$$S' = 3(a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 6$$

$$\text{Zatem } \frac{S'}{S} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Zasady oceniania:

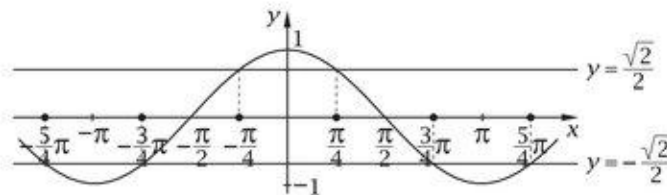
- 5 p. — wyznaczenie ilorazu sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych przez sumę długości wszystkich okręgów: $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$
- 4 p. — obliczenie sumy długości wszystkich okręgów i sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych: $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$, 6
- 3 p. — obliczenie sumy długości wszystkich okręgów i ustalenie związku między długościami boków kolejnych trójkątów równobocznych: $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
LUB
— obliczenie sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych i ustalenie związku między promieniami kolejnych okręgów: 6, $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$
- 2 p. — ustalenie związku między promieniami kolejnych okręgów i długościami boków kolejnych trójkątów równobocznych: $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$ i $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
LUB
— obliczenie sumy długości wszystkich okręgów: $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$
LUB
— obliczenie sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych: 6
- 1 p. — ustalenie związku między promieniami kolejnych okręgów: $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$
LUB
— ustalenie związku między długościami boków kolejnych trójkątów równobocznych: $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

Zadanie 7. (0–4)

$$\frac{1}{4} - \cos x + \cos^2 x = -\cos x + \frac{3}{4}, \text{ czyli } \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Z równości $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ wynika, że $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Z wykresu funkcji $y = \cos x$ odczytujemy rozwiązania alternatywy równań $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Zbiór rozwiązań równania w zbiorze liczb rzeczywistych to: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań równania w zbiorze liczb rzeczywistych: np. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

- 3 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x \in \left\{-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$
LUB
— wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$
- 2 p. — przekształcenie równania do postaci $|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
LUB
— zapisanie równania w postaci alternatywy dwóch równań: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 1 p. — przekształcenie równania do postaci, która zawiera tylko jedną funkcję trygonometryczną zmiennej x : np. $\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)^2 = -\cos x + \frac{3}{4}$

Zadanie 8. (0-3)

Ponieważ α , β i γ to miary kątów trójkąta, więc:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \text{ czyli } \cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$$

Przekształcamy równość $1 - \cos \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta$

$$1 - (-\cos(\alpha + \beta)) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta = 0$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1, \text{ gdzie } \alpha - \beta \in (-180^\circ; 180^\circ)$$

Zatem $\alpha - \beta = 0^\circ$, czyli $\alpha = \beta$.

Zasady oceniania:

- 3 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu
2 p. — przekształcenie założenia do postaci $\cos(\alpha - \beta) = 1$
1 p. — przekształcenie założenia do postaci, w której występują tylko kąty α i β :
np. $1 - (-\cos(\alpha + \beta)) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

Zadanie 9. (0-4)

$$A = (x_A, y_A)$$

$$B = (x_B, y_B)$$

D — środek odcinka AC

$$\overrightarrow{AC} = [5 - x_A, 8 - y_A] = [9, 11], \text{ stąd } x_A = -4 \text{ i } y_A = -3$$

Zatem $A = (-4, -3)$.

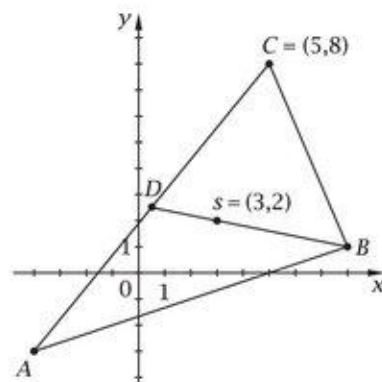
$$D = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-3+8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BD},$$

$$\text{gdzie } \overrightarrow{BS} = [3 - x_B, 2 - y_B] \text{ i } \overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B\right]$$

$$[3 - x_B, 2 - y_B] = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B\right], \text{ stąd } x_B = 8 \text{ i } y_B = 1$$

Zatem $B = (8, 1)$.



Zasady oceniania:

- 4 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołków A i B : $A = (-4, -3)$ i $B = (8, 1)$
3 p. — wyznaczenie związku między współrzędnymi wektorów $\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{BD}$ uzależnionymi od x_B i y_B :
 $[3 - x_B, 2 - y_B] = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B\right]$
2 p. — wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{BD}$ w zależności od x_B i y_B : $\overrightarrow{BS} = [3 - x_B, 2 - y_B]$
i $\overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B\right]$

1 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołka A : $A = (-4, -3)$

LUB

— wyznaczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{BD}$ w zależności od x_B i y_B : $\overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B \right]$

Zadanie 10. (0–5)

Czworokąt $BCKL$ jest trapezem równoramiennym oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

W trójkącie prostokątnym EOS zachodzi:

$$\cos \alpha = \frac{|EO|}{|ES|}, \text{ czyli } |ES| = \frac{10}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 10\sqrt{10}$$

W trójkącie prostokątnym EFH zachodzi:

$$\cos \alpha = \frac{|EH|}{|EF|}, \text{ czyli } |EH| = 2\sqrt{10}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EFH wynika:

$$|HF| = \sqrt{20^2 - (2\sqrt{10})^2} = 6\sqrt{10}$$

Z podobieństwa trójkątów LKS i ADS (cecha kkk) wynika:

$$\frac{|LK|}{|AD|} = \frac{|ES| - |EH|}{|ES|}, \text{ czyli } |LK| = 16$$

Pole trapezu $BCKL$ jest więc równe: $P = \frac{|BC| + |LK|}{2} \cdot |HF| = \frac{20 + 16}{2} \cdot 6\sqrt{10} = 108\sqrt{10}$.

Zasady oceniania:

5 p. — obliczenie pola przekroju: $P = 108\sqrt{10}$

4 p. — obliczenie długości odcinków HF i LK : $|HF| = 6\sqrt{10}$ i $|LK| = 16$

3 p. — obliczenie długości odcinków ES , EH i LK : $|ES| = 10\sqrt{10}$, $|EH| = 2\sqrt{10}$ i $|LK| = 16$

LUB

— obliczenie długości odcinków ES , EH i HF : $|ES| = 10\sqrt{10}$, $|EH| = 2\sqrt{10}$ i $|HF| = 6\sqrt{10}$

2 p. — obliczenie długości odcinka HF : $|HF| = 6\sqrt{10}$

LUB

— obliczenie długości odcinka LK : $|LK| = 16$

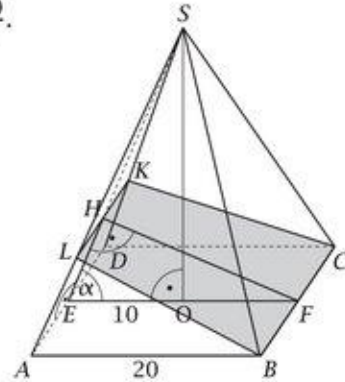
LUB

— obliczenie długości odcinków ES i EH : $|ES| = 10\sqrt{10}$ i $|EH| = 2\sqrt{10}$

1 p. — obliczenie długości odcinka ES : $|ES| = 10\sqrt{10}$

LUB

— obliczenie długości odcinka EH : $|EH| = 2\sqrt{10}$



Zadanie 11. (0–4)

Próba Bernoullego: jednokrotny rzut symetryczną sześcienną kostką do gry.

Liczba prób Bernoullego: $n = 12$.

Sukces w próbie Bernoullego: wypadło sześć oczek.

Prawdopodobieństwo sukcesu: $p = \frac{1}{6}$.

Prawdopodobieństwo porażki: $q = \frac{5}{6}$.

A — W pierwszym rzucie kostką wypadło sześć oczek.

B — W dwunastu rzutach kostką sześć oczek wypadło cztery razy.

$A \cap B$ — W pierwszym rzucie kostką wypadło sześć oczek i w pozostałych jedenastu, sześć oczek wypadło trzy razy.

$A|B$ — W pierwszym rzucie kostką wypadło sześć oczek, jeżeli wiadomo, że w dwunastu rzutach sześć oczek wypadło cztery razy.

$$P(B) = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \binom{11}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8}{495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8} = \frac{1}{3}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A|B$: $P(A|B) = \frac{1}{3}$

3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzeń B i $A \cap B$: $P(B) = 495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$
i $P(A \cap B) = 165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

LUB

— wyznaczenie liczebności zdarzeń B i $A \cap B$: $|B| = 495 \cdot 5^8$ i $|A \cap B| = 165 \cdot 5^8$

2 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B : $P(B) = 495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

LUB

— wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$: $P(A \cap B) = 165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

LUB

— wyznaczenie liczebności zdarzenia B : $|B| = 495 \cdot 5^8$

LUB

— wyznaczenie liczebności zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = 165 \cdot 5^8$

1 p. — obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki oraz wyznaczenie liczby prób w schemacie Bernoullego: $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 12$

Zadanie 12. (0–4)

$$f'(x) = x^2 + 2(k - m - 1)x + (2m - k - 2)$$

Skoro funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1]$ oraz $[5; +\infty)$ i malejąca w przedziale $[1; 5]$, to:

$$f'(x) = 0 \text{ dla } x \in \{1, 5\}$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (1; 5)$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(k - m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - k - 2 \end{cases}, \text{ gdzie } x_1 = 1 \text{ i } x_2 = 5$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2(k - m - 1) = 6 \\ 2m - k - 2 = 5 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} m = 5 \\ k = 3 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie wartości parametrów m i k : $m = 5$ i $k = 3$

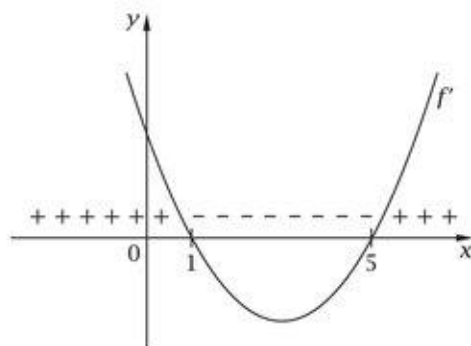
3 p. — zapisanie układu dwóch równań z niewiadomymi m i k : np. $\begin{cases} -2(k - m - 1) = 6 \\ 2m - k - 2 = 5 \end{cases}$

2 p. — obliczenie pochodnej funkcji f oraz wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f' i ustalenie znaków wartości funkcji f' w podanych przedziałach monotoniczności

1 p. — obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = x^2 + 2(k - m - 1)x + (2m - k - 2)$

LUB

— wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f' i ustalenie znaków wartości funkcji f' w podanych przedziałach monotoniczności



Zadanie 13. (0-3)

$y = ax + b$ — równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = -4$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x+2)-3(x^2-x)}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2+4x-2}{(3x+2)^2}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

$$a = f'(-4) = \frac{3 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 2}{(3 \cdot (-4) + 2)^2} = \frac{3}{10}$$

Do stycznej należy punkt $(-4, -2)$, więc spełnione jest równanie:

$$-2 = \frac{3}{10} \cdot (-4) + b, \text{ stąd } b = -\frac{4}{5}$$

Zatem styczna ma równanie: $y = \frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie równania stycznej: $y = \frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$

2 p. — wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a = \frac{3}{10}$

1 p. — obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{3x^2+4x-2}{(3x+2)^2}$

Zadanie 14. (0-6)

W celu wyznaczenia współrzędnych punktów K i L rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -5 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$$

Zatem $K = (-3, -5)$, $L = (3, -5)$.

$A = (-x, -5)$, $B = (x, -5)$, $C = (x, -x^2 + 4)$,

$D = (-x, -x^2 + 4)$, gdzie $x \in (0; 3)$

$$|AB| = |CD| = 2|x| = 2x$$

$$|BC| = |AD| = |-x^2 + 4 - (-5)| = -x^2 + 9$$

P — pole prostokąta

$$P(x) = |AB| \cdot |BC| = -2x^3 + 18x$$

Dziedzina funkcji P : $x \in (0; 3)$

$$P'(x) = -6x^2 + 18$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ lub } x = \sqrt{3}$$

Funkcja P jest rosnąca w przedziale $(0; \sqrt{3}]$, a malejąca w przedziale $[\sqrt{3}; 3)$. Zatem funkcja P osiąga w punkcie $x = \sqrt{3}$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Wówczas $|AB| = |CD| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = 6$, a największe pole to $P(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

6 p. — obliczenie długości boków prostokąta o największym polu oraz wyznaczenie pola tego prostokąta: $|AB| = |CD| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = 6$, $P = 12\sqrt{3}$

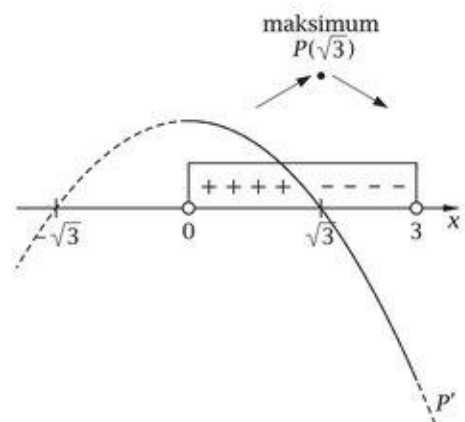
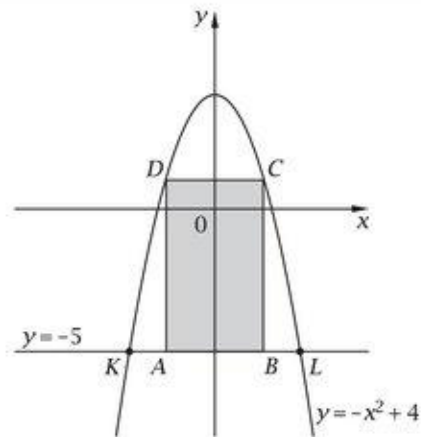
5 p. — wyznaczenie punktu, w którym funkcja P osiąga wartość największą wraz z uzasadnieniem: $x = \sqrt{3}$

4 p. — rozwiązanie równania $P'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji P : $x = \sqrt{3}$

3 p. — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji P : $x \in (0; 3)$, $P'(x) = -6x^2 + 18$

LUB

— rozwiązanie równania $P'(x) = 0$ bez uwzględniania dziedziny funkcji P



2 p. — obliczenie pochodnej funkcji P : $P'(x) = -6x^2 + 18$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola prostokąta od współrzędnych jego wierzchołków: $P(x) = -2x^3 + 18x$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 3)$

Arkusz egzaminacyjny nr 13

Zadanie 1. (0-4)

Skoro liczba dodatnia a spełnia warunek $a^2 = a + 1$, to:

$$a^2 + a = a(a + 1) = a^3 \quad \text{oraz} \quad a^3 + a^2 = a^2(a + 1) = a^4$$

Zatem:

$$x = \log_{a\sqrt{a}} a^2 = \frac{4}{3}$$

$$y = \log_{a^2+a} a = \log_{a^3} a = \frac{1}{3}$$

$$z = \log_{a^3+a^2} a^{\frac{1}{2}} = \log_{a^4} a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$z < y < x, \text{ więc } x - z = \frac{4}{3} - \frac{1}{8} = 1\frac{5}{24}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie różnicy $x - z$: $1\frac{5}{24}$

3 p. — obliczenie wartości liczb x , y i z : $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ i $z = \frac{1}{8}$

2 p. — obliczenie wartości dwóch spośród trzech liczb x , y i z

1 p. — obliczenie wartości jednej spośród trzech liczb x , y i z

Zadanie 2. (0-4)

$$W(x) = (x + 2)(x^2 + (3a^2 - a - 66)x + a^2 + a - 26) = (x + 2)^3$$

Zatem:

$$3a^2 - a - 66 = 4 \quad \text{oraz} \quad a^2 + a - 26 = 4$$

Z pierwszego równania wynika, że $a \in \{-\frac{14}{3}, 5\}$, a z drugiego — $a \in \{-6, 5\}$.

Stąd $W(x) = (x + 2)^3$ dla $a = 5$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie wartości parametru a : $a = 5$

3 p. — rozwiązanie równań $3a^2 - a - 66 = 4$ i $a^2 + a - 26 = 4$: $a \in \{-\frac{14}{3}, 5\}$ i $a \in \{-6, 5\}$

2 p. — zapisanie równań $3a^2 - a - 66 = 4$ i $a^2 + a - 26 = 4$

1 p. — przekształcenie wielomianu $W(x)$ do postaci $W(x) = (x + 2)(x^2 + (3a^2 - a - 66)x + a^2 + a - 26)$

Zadanie 3. (0-4)

Ustalamy warunki, jakie powinien spełniać parametr m :

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ x_1 \neq 0 \text{ i } x_2 \neq 0 & (2) \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 16 & (3) \\ m \in \mathbb{Z} & (4) \end{cases}$$

Z warunku (1) otrzymujemy:

$$4m^2 - 8 > 0, \text{ czyli } m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

Warunek (2) jest spełniony dla każdego $m \in \mathbb{R}$, ponieważ współczynnik $c = 2 \neq 0$.

Rozpatrujemy warunek (3):

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} < 16, \text{ stąd } \frac{(-2m)^2 - 2 \cdot 2}{2} < 16, \text{ czyli } m^2 - 9 < 0, \text{ zatem } m \in (-3; 3)$$

Podsumowanie warunków (1)–(4):

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \\ m \in (-3; 3) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ czyli } m \in \{-2, 2\}$$

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie zbioru, do którego należą wszystkie wartości parametru m : $m \in \{-2, 2\}$

3 p. — rozpatrzenie wszystkich warunków, które musi spełniać parametr m :

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \\ m \in (-3; 3) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 p. — rozpatrzenie warunku (3): $m \in (-3; 3)$

LUB

— rozpatrzenie warunków (1) i (2) oraz przekształcenie warunku (3) do postaci umożliwiającej zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ i } \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} < 16$$

1 p. — rozpatrzenie warunków (1) i (2):

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

LUB

— przekształcenie warunku (3) do postaci umożliwiającej zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\text{np. } \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} < 16$$

Zadanie 4. (0-2)

Funkcja f ma wzór $f(x) = ax + b$, więc rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 7 + 7a + b = 7(6a + b) \\ 5 + 5a + b = 5(6a + b) \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

Zatem funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = \frac{1}{5}x$

1 p. — zapisanie układu dwóch równań z niewiadomymi a i b : np. $\begin{cases} 7 + 7a + b = 7(6a + b) \\ 5 + 5a + b = 5(6a + b) \end{cases}$

Zadanie 5. (0-3)

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} 96 = 1,5q^{n-1} \\ \frac{1-q^n}{1-q} = 127 \end{cases}$, gdzie q oznacza iloraz ciągu (a_n) .

Zatem:

$$\begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ \frac{1-q \cdot q^{n-1}}{1-q} = 127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ 1 - 64q = 127(1 - q) \end{cases}, \text{ czyli } q = 2$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie ilorazu ciągu (a_n) : $q = 2$

2 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest q : np. $1 - 64q = 127(1 - q)$

1 p. — zapisanie układu równań z niewiadomymi q i n : $\begin{cases} 96 = 1,5q^{n-1} \\ \frac{1-q^n}{1-q} = 127 \end{cases}$

Zadanie 6. (0–4)

Pole sześciokąta foremnego o boku n jest równe $S_n = \frac{3n^2\sqrt{3}}{2}$.

Pole sześciokąta, utworzonego według zasady opisanej w zadaniu jest równe:

$$P_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \right) \cdot \sin 60^\circ = \frac{(3n^2-1)\sqrt{3}}{8}$$

Zatem $\frac{S_n}{P_n} = \frac{12n^2}{3n^2-1}$, czyli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{P_n} = 4$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie granicy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{P_n}$: 4

3 p. — zapisanie wzoru na $\frac{S_n}{P_n}$: $\frac{S_n}{P_n} = \frac{12n^2}{3n^2-1}$

2 p. — zapisanie wzorów na S_n i P_n : $S_n = \frac{3n^2\sqrt{3}}{2}$, $P_n = \frac{(3n^2-1)\sqrt{3}}{8}$

1 p. — zapisanie wzoru na S_n : $S_n = \frac{3n^2\sqrt{3}}{2}$

LUB

— zapisanie wzoru na P_n : $P_n = \frac{(3n^2-1)\sqrt{3}}{8}$

Zadanie 7. (0–5)

Skoro $\sin \alpha = 0,28$, więc $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0,96$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADE :

$$|AD|^2 = x^2 + (1-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot 0,96$$

$$|AD|^2 = 3,92x^2 - 3,92x + 1, \text{ gdzie } x \in (0;1)$$

Pole kwadratu $ABCD$ ma być większe od 0,02, zatem:

$$|AD|^2 > 0,02, \text{ czyli } 3,92x^2 - 3,92x + 1 > 0,02, \text{ stąd } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Po uwzględnieniu założenia $x \in (0;1)$, otrzymujemy $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$.

Zasady oceniania:

5 p. — obliczenie wartości x : $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$

4 p. — rozwiązanie nierówności $3,92x^2 - 3,92x + 1 > 0,02$: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

3 p. — zapisanie pola kwadratu $ABCD$ w postaci trójmianu kwadratowego ze zmienną x :
 $3,92x^2 - 3,92x + 1$

2 p. — zapisanie pola kwadratu $ABCD$ w postaci dowolnego wyrażenia algebraicznego ze zmienną x :
np. $x^2 + (1-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot 0,96$

1 p. — obliczenie wartości $\cos \alpha$: $\cos \alpha = 0,96$

Zadanie 8. (0–5)

Z podobieństwa trójkątów wynika:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{y^2+2}}, \text{ czyli } y = \sqrt{2}x \text{ oraz } \frac{x}{z} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{z^2+3}}, \text{ czyli } z = \sqrt{3}x$$

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β :

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ oraz } \cos \alpha = \sin \beta = \frac{x}{z} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2}, \text{ czyli } \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obliczamy wartości sinusa i cosinusa dla kąta $(\alpha - \beta)$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Zatem:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{9}$$

Zasady oceniania:

5 p. — obliczenie wartości wyrażenia $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$: $\frac{4}{9}$

4 p. — obliczenie wartości sinusa i cosinusa dla kąta $(\alpha - \beta)$: $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3 p. — obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β : $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2 p. — wyznaczenie długości dwóch boków pierwszego trójkąta w zależności od długości trzeciego boku: $y = \sqrt{2}x$, $z = \sqrt{3}x$

1 p. — zapisanie dwóch proporcji wynikających z podobieństwa trójkątów, umożliwiających wyznaczenie długości dwóch boków pierwszego trójkąta w zależności od długości trzeciego boku:

$$\text{np. } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{y^2+2}} \text{ i } \frac{x}{z} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{z^2+3}}$$

Zadanie 9. (0-2)

$A = (t, 2t^2)$ — dowolny punkt należący do paraboli o równaniu $y = 2x^2$, $t \in \mathbb{R}$

d — odległość punktu A od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$

Odległość punktu $A = (t, 2t^2)$ od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$ można opisać wzorem $d = 2t^2 + \frac{1}{8}$.

Odległość punktu $A = (t, 2t^2)$ od punktu $F = (0, \frac{1}{8})$ jest równa:

$$|FA| = \sqrt{(t-0)^2 + (2t^2 - \frac{1}{8})^2} = \sqrt{4t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64}} = \sqrt{(2t^2 + \frac{1}{8})^2} = |2t^2 + \frac{1}{8}| = 2t^2 + \frac{1}{8}$$

Zatem $d = |FA|$.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie odległości punktu A od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$ w zależności od jednej współrzędnej punktu A : $d = 2t^2 + \frac{1}{8}$

LUB

— wyznaczenie odległości punktu A od punktu F w zależności od jednej współrzędnej punktu A : $|FA| = 2t^2 + \frac{1}{8}$

Zadanie 10. (0-4)

r — promień podstawy walca

d — długość przekątnej AC

t — długość odcinków AQ i QC

α — kąt między przekątną przekroju osiowego walca a jego podstawą

$\cos \angle AQC = -0,8$

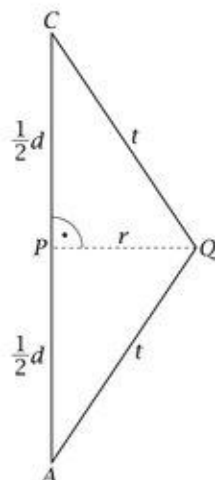
$|PQ| = r$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AQP wynika:

$$t^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2, \text{ stąd } t^2 = \frac{d^2 + 4r^2}{4}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AQC wynika:

$$d^2 = t^2 + t^2 - 2 \cdot t \cdot t \cdot \cos \angle AQC, \text{ stąd } d^2 = 2t^2 - 2t^2 \cdot (-0,8), \text{ czyli } t^2 = \frac{5}{18}d^2$$



Uzależniamy d od r :

$$\frac{5}{18}d^2 = \frac{d^2 + 4r^2}{4}, \text{ stąd } d^2 = 36r^2, \text{ czyli } d = 6r$$

Obliczamy cosinus kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{2r}{d} = \frac{2r}{6r} = \frac{1}{3}$$

Zasady oceniania:

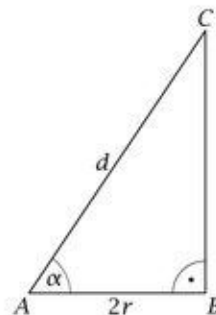
4 p. — obliczenie cosinusa kąta α : $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

3 p. — wyznaczenie związku między wielkościami r, d : np. $d = 6r$

2 p. — wyznaczenie związku między wielkościami r, d, t oraz związku między wielkościami d, t :
np. $t^2 = \frac{d^2 + 4r^2}{4}, t^2 = \frac{5}{18}d^2$

1 p. — wyznaczenie związku między wielkościami r, d, t : np. $t^2 = \frac{d^2 + 4r^2}{4}$
LUB

— wyznaczenie związku między wielkościami d, t : np. $t^2 = \frac{5}{18}d^2$



Zadanie 11. (0-3)

n — liczba czekoladek znajdujących się początkowo w pudełku, $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 6$

Rozwiązujemy równanie:

$$\binom{n}{3} - \binom{n-3}{3} = 136, \text{ stąd } n^2 - 5n - 84 = 0, \text{ czyli } n \in \{-7, 12\}$$

Skoro liczba n spełnia warunek $n \geq 6$, to $n = 12$.

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie liczby czekoladek znajdujących się początkowo w pudełku: 12

2 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą n : np. $n^2 - 5n - 84 = 0$

1 p. — zapisanie równania $\binom{n}{3} - \binom{n-3}{3} = 136$

Zadanie 12. (0-4)

A — Losowo wybrana próbka nie zawiera substancji X .

B_1 — Próbką wody pochodzi z rzeki R_1 .

B_2 — Próbką wody pochodzi z rzeki R_2 .

B_3 — Próbką wody pochodzi z rzeki R_3 .

n — liczba próbek wody pochodzącej z rzeki R_1

$$n + (n + 4) + 4n = 100, \text{ stąd } n = 16$$

$$P(B_1) = \frac{n}{100} = 0,16$$

$$P(B_2) = \frac{n+4}{100} = 0,2$$

$$P(B_3) = \frac{4n}{100} = 0,64$$

$$P(A|B_1) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(A|B_2) = 1 - 0,2 = 0,8$$

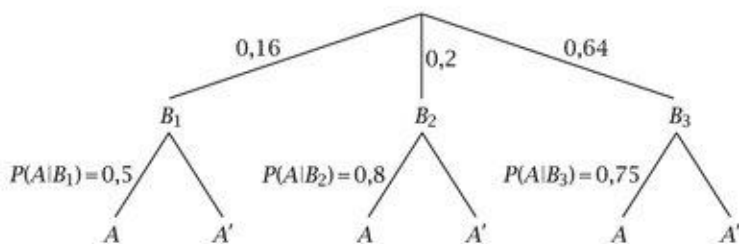
$$P(A|B_3) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Zatem:

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,16 + 0,8 \cdot 0,2 + 0,75 \cdot 0,64 = 0,72$$

Ze wzoru Bayesa wynika:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{0,75 \cdot 0,64}{0,72} = \frac{2}{3}$$



Zasady oceniania:

- 4 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B_3/A : $P(B_3/A) = \frac{2}{3}$
- 3 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = 0,72$
- 2 p. — obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń B_i i A/B_i , gdzie $i \in \{1, 2, 3\}$: $P(B_1) = 0,16$, $P(B_2) = 0,2$, $P(B_3) = 0,64$, $P(A/B_1) = 0,5$, $P(A/B_2) = 0,8$, $P(A/B_3) = 0,75$
LUB
— obliczenie dwóch spośród trzech iloczynów $P(A/B_i) \cdot P(B_i)$, gdzie $i \in \{1, 2, 3\}$
- 1 p. — obliczenie liczby próbek wody pochodzącej z rzeki R_1 , R_2 i R_3 : 16, 20, 64

Zadanie 13.1. (0-2)

a — długość krawędzi podstawy

H — wysokość graniastosłupa $ABCDEF$

$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, stąd $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$, czyli $|AP| = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta APD wynika:

$$H = \sqrt{(1-x)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2x + 1}$$

Zatem:

$$V(x) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}$$

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie wysokości graniastosłupa $ABCDEF$ w zależności od x : $H = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2x + 1}$

Zadanie 13.2. (0-4)

Wyznaczamy dziedzinę funkcji V określonej wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}, \text{ czyli } x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

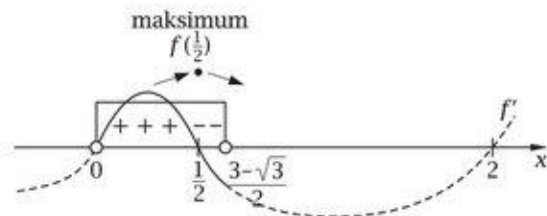
Funkcja $V(x) = a \cdot \sqrt{f(x)}$ (gdzie $a > 0$) przyjmuje największą wartość w punkcie, w którym $f(x) > 0$ i funkcja f przyjmuje największą wartość.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4 \text{ dla } x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + 4x^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, a malejąca w przedziale $\left[\frac{1}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. Zatem funkcja f osiąga w punkcie $x = \frac{1}{2}$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością funkcji f i funkcji V .

**Zasady oceniania:**

- 4 p. — wyznaczenie wartości x , dla której graniastosłup $ABCDEF$ ma największą objętość: $x = \frac{1}{2}$
- 3 p. — rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V : $x = \frac{1}{2}$
LUB
— rozwiązanie równania $V'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V : $x = \frac{1}{2}$

- 2 p. — wyznaczenie dziedziny funkcji V i pochodnej funkcji f : $x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + 4x^3$
 LUB
 — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji V : $x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2x^5 - 5x^4 + 2x^3}{\sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}}$
 LUB
 — rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji V : $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$
 LUB
 — rozwiązanie równania $V'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji V : $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$
- 1 p. — obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + 4x^3$
 LUB
 — obliczenie pochodnej funkcji V : $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2x^5 - 5x^4 + 2x^3}{\sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}}$
 LUB
 — wyznaczenie dziedziny funkcji V : $x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$

Arkusz egzaminacyjny nr 14

Zadanie 1. (0-3)

Zakładamy, że liczby x i y są dodatnie i spełniają warunek $x^3 \neq y^2$.

Ze wzoru na zamianę podstaw logarytmu wynika równość:

$$\log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} (xy^3) = -\log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} (xy^3)$$

Zatem:

$$W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}}{xy^3} = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{x^3}{y^2} = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}\right)^6 = 6$$

Wartość wyrażenia W jest równa 6, więc wyrażenie to przyjmuje stałą wartość, która nie zależy ani od x ani od y .

Zasady oceniania:

3 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

2 p. — zapisanie wyrażenia W za pomocą jednego logarytmu: np. $W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}}{xy^3}$

1 p. — zapisanie wyrażenia W w postaci sumy lub różnicy logarytmów o tych samych podstawach:

$$\text{np. } W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} (xy^3) + \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}$$

Zadanie 2. (0-3)

Skoro $-\frac{b}{2a} = 1$ i $a = 1$, więc $b = -2$. Zatem $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$x^2 - 2x + 1 < 1 - x^3, \text{ stąd } x(x+2)(x-1) < 0, \text{ czyli } x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $f(x) < 1 - x^3$: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$

2 p. — przekształcenie nierówności $f(x) < 1 - x^3$ do postaci $x(x+2)(x-1) < 0$

LUB

— wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu $x^3 + x^2 - 2x$: $x \in \{-2, 0, 1\}$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : np. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Zadanie 3. (0-5)

Sprawdzamy, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki:

$$\Delta = m^2 - 4m + 8 > 0, \text{ czyli } m \in \mathbb{R}$$

$$(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2 = 25(x_1^2 + x_2^2) = 25(x_1 + x_2)^2 - 50x_1x_2$$

Ze wzorów Viète'a wynika:

$$(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2 = 25\left(\frac{-m}{1}\right)^2 - 50\left(\frac{m-2}{1}\right) = 25m^2 - 50m + 100$$

Funkcja $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$ określona dla $m \in \mathbb{R}$ przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $m = -\frac{(-50)}{2 \cdot 25} = 1$. Zatem tylko dla $m = 1$ podane równanie spełnia warunki zadania.

Zasady oceniania:

- 5 p. — wyznaczenie takiej wartości parametru m , dla której równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ spełnia warunki zadania: $m = 1$
- 4 p. — wyznaczenie takiej wartości parametru m , dla której funkcja $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$ przyjmuje najmniejszą wartość: $m = 1$
LUB
— sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki oraz zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej m : $m \in \mathbb{R}$, $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$
- 3 p. — zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej m : $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$
LUB
— sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki oraz zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci dowolnego wyrażenia zmiennej m : np. $m \in \mathbb{R}$, $25\left(\frac{-m}{1}\right)^2 - 50\left(\frac{m-2}{1}\right)$
- 2 p. — zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci dowolnego wyrażenia zmiennej m : np. $25\left(\frac{-m}{1}\right)^2 - 50\left(\frac{m-2}{1}\right)$
LUB
— sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki oraz przekształcenie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ do postaci, dla której można zastosować wzory Viète'a: $m \in \mathbb{R}$, $25(x_1 + x_2)^2 - 50x_1x_2$
- 1 p. — sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki: $m \in \mathbb{R}$
LUB
— przekształcenie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ do postaci, dla której można zastosować wzory Viète'a: np. $25(x_1 + x_2)^2 - 50x_1x_2$

Zadanie 4. (0-4)

q — iloraz ciągu geometrycznego (a_n)

S — suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n)

S' — suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu (a_n)

S'' — suma sześciątów wszystkich wyrazów ciągu (a_n)

Zatem dla $q \in (-1; 1)$:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{oraz} \quad S' = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{a_1}{1+q} = S \cdot \frac{a_1}{1+q}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 9 = \frac{a_1}{1-q} \\ \frac{81}{5} = 9 \cdot \frac{a_1}{1+q} \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a_1 + 9q = 9 \\ 5a_1 - 9q = 9 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \frac{2}{3} \in (-1; 1) \end{cases}$$

Zatem:

$$S'' = \frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{3^3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = 38\frac{7}{19}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie sumy sześciątów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) : $38\frac{7}{19}$

3 p. — obliczenie a_1 i q : $a_1 = 3$ i $q = \frac{2}{3}$

2 p. — przekształcenie równania $\frac{81}{5} = \frac{a_1^2}{1-q^2}$ do postaci $\frac{81}{5} = 9 \cdot \frac{a_1}{1+q}$

LUB

— zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą q : $3q^2 - 5q + 2 = 0$

LUB

— zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą a_1 : $\frac{1}{5} = \frac{a_1}{18-a_1}$

1 p. — zapisanie układu równań
$$\begin{cases} 9 = \frac{a_1}{1-q} \\ \frac{81}{5} = \frac{a_1^2}{1-q^2} \end{cases}$$

Zadanie 5. (0-3)

I sposób

$$\sin^2 2x = \cos 2x + 1$$

$$4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 + 1$$

$$\cos^2 x (2 \sin^2 x - 1) = 0, \text{ stąd } \cos^2 x = 0 \text{ lub } \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

Jeżeli $\cos^2 x = 0$, to $\cos x = 0$, stąd $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, to $\sin x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, stąd $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

II sposób

$$\sin^2 2x = \cos 2x + 1$$

$$1 - \cos^2 2x = \cos 2x + 1$$

$$\cos 2x (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \text{ lub } \cos 2x = -1$$

Jeżeli $\cos 2x = 0$, to $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, stąd $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $\cos 2x = -1$, to $2x = \pi + 2k\pi$, stąd $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\sin^2 2x = \cos 2x + 1$: $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

2 p. — rozwiązanie równania $\cos^2 x = 0$ lub równania $\cos 2x = -1$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

LUB

— rozwiązanie równania $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub równania $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

1 p. — zapisanie równania $\sin^2 2x = \cos 2x + 1$ w postaci $a \cdot b = 0$: np. $\cos^2 x (2 \sin^2 x - 1) = 0$ lub $\cos 2x (1 + \cos 2x) = 0$

Zadanie 6. (0-4)

r — promień mniejszego okręgu

$1,5r$ — promień większego okręgu

α — miara kąta środkowego wycinka C (w stopniach)

P_F — pole figury F, gdzie $F \in \{A, B, C, D\}$

$$P_B = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$P_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)$$

Skoro $P_B = P_D$, więc:

$$\frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2), \text{ skąd } \alpha = 160^\circ$$

Zatem:

$$\frac{P_A}{P_C} = \frac{\frac{360^\circ - 160^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)}{\frac{160^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{25}{16}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie stosunku pól figur A i B: $\frac{25}{16}$

3 p. — obliczenie miary kąta środkowego wycinka C: 160°

LUB

— obliczenie miary kąta środkowego wycinka B: 200°

2 p. — zapisanie pola figury B i pola figury D w postaci wyrażenia o zmiennych α i r :

$$\text{np. } P_B = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2, P_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)$$

1 p. — zapisanie pola figury B w postaci wyrażenia o zmiennych α i r : np. $P_B = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$

LUB

— zapisanie pola figury D w postaci wyrażenia o zmiennych α i r :

$$\text{np. } P_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)$$

Zadanie 7. (0-5)

S_{BC} — środek odcinka BC

a_{AB} — współczynnik kierunkowy prostej AB

a_{BC} — współczynnik kierunkowy prostej BC

k — symetralna odcinka AB

l — symetralna odcinka BC

$S = (a, b)$ — środek okręgu opisanego na trójkącie ABC

r — promień okręgu opisanego na trójkącie ABC

I sposób

Wyznaczamy współrzędne wierzchołków B i C oraz współrzędne środka odcinka BC (punktu S_{BC}):

$$B = (x_B, y_B) = (2x_P - x_A, 2y_P - y_A) = (14, 8)$$

$$C = (x_C, y_C) = (2x_Q - x_P, 2y_Q - y_P) = (-16, -2)$$

$$S_{BC} = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = (-1, 3)$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie ABC jest punktem przecięcia symetralnych k i l .

Prosta k jest prostopadła do prostej AB i należy do niej punkt $P = (6, 12)$, więc:

$$k: y = -\frac{1}{a_{AB}}x + b_1, \text{ gdzie } a_{AB} = \frac{16-8}{-2-14} = -\frac{1}{2}$$

$$k: y = 2x + b_1$$

$$12 = 2 \cdot 6 + b_1, \text{ stąd } b_1 = 0, \text{ czyli } k: y = 2x$$

Prosta l jest prostopadła do prostej BC i należy do niej punkt $S_{BC} = (-1, 3)$, więc:

$$l: y = -\frac{1}{a_{BC}}x + b_2, \text{ gdzie } a_{BC} = \frac{8+2}{14+16} = \frac{1}{3}$$

$$l: y = -3x + b_2$$

$$3 = -3 \cdot (-1) + b_2, \text{ stąd } b_2 = 0, \text{ czyli } l: y = -3x$$

Proste określone równaniami $y = 2x$ i $y = -3x$ przecinają się w punkcie $S = (0, 0)$. Jest to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość:

$$r = |AS| = \sqrt{(0+2)^2 + (0-16)^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$$

Zatem okrąg opisany na trójkącie ABC ma równanie: $x^2 + y^2 = 260$.

II sposóbWyznaczamy współrzędne wierzchołków B i C :

$$B = (x_B, y_B) = (2x_P - x_A, 2y_P - y_A) = (14, 8)$$

$$C = (x_C, y_C) = (2x_Q - x_P, 2y_Q - y_P) = (-16, -2)$$

Punkty A , B i C należą do okręgu opisanego na trójkącie ABC , rozwiązujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} (-2-a)^2 + (16-b)^2 = r^2 \\ (14-a)^2 + (8-b)^2 = r^2 \\ (-16-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}, \text{ czyli } a=b=0 \text{ oraz } r^2 = (-2-0)^2 + (16-0)^2 = 260$$

Zatem okrąg opisany na trójkącie ABC ma równanie: $x^2 + y^2 = 260$.**Zasady oceniania:**5 p. — wyznaczenie równania okręgu opisanego na trójkącie ABC : $x^2 + y^2 = 260$ 4 p. — wyznaczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na trójkącie ABC : $S = (0, 0)$ 3 p. — (I sposób) wyznaczenie równań symetralnych dwóch boków trójkąta ABC : np. $y = 2x$ i $y = -3x$
LUB— (II sposób) zapisanie układu dwóch równań liniowych z niewiadomymi a i b :

$$\text{np. } \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}$$

2 p. — (I sposób) wyznaczenie równania symetralnej jednego z boków trójkąta ABC :

$$y = 2x \text{ lub } y = 3x \text{ lub } y = -\frac{7}{9}x$$

LUB

— (II sposób) zapisanie układu trzech równań z niewiadomymi a , b i r :

$$\text{np. } \begin{cases} (-2-a)^2 + (16-b)^2 = r^2 \\ (14-a)^2 + (8-b)^2 = r^2 \\ (-16-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

1 p. — wyznaczenie wierzchołków B i C trójkąta ABC : $B = (14, 8)$, $C = (-16, -2)$ **Zadanie 8. (0–4)** h — wysokość ściany bocznej ostrosłupa $ABCD$ S poprowadzona z punktu S w — wysokość ściany bocznej ostrosłupa $EFGH$ poprowadzona z punktu S a — krawędź podstawy ostrosłupa $ABCD$ S x — krawędź podstawy ostrosłupa $EFGH$ SZ równości pól ścian ostrosłupa $ABCD$ S wynika:

$$a^2 = \frac{1}{2}ah, \text{ czyli } h = 2a$$

Z podobieństwa trójkątów EFS i ABS (cecha kkk) wynika:

$$\frac{w}{x} = \frac{h}{a}, \text{ czyli } \frac{w}{x} = \frac{2a}{a}, \text{ więc } w = 2x$$

Z równości pól ścian $ABFE$ i $EFGH$ wynika: $x^2 = \frac{a+x}{2} \cdot (h-w)$.Skoro $h = 2a$ i $w = 2x$, to:

$$x^2 = a^2 - x^2, \text{ czyli } a = x\sqrt{2}$$

Ostrosłupy $ABCD$ S i $EFGH$ S są podobne, więc:

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{EFGH}} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{x}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:4 p. — obliczenie stosunku objętości ostrosłupa $ABCD$ S do objętości ostrosłupa $EFGH$ S: $2\sqrt{2}$ 3 p. — wyznaczenie związku między długościami krawędzi podstawy ostrosłupów $ABCD$ S i $EFGH$ S:
 $a = x\sqrt{2}$ 2 p. — wyznaczenie związku między wysokością ściany bocznej ostrosłupa $EFGH$ S a długością krawędzi jego podstawy: $w = 2x$ 1 p. — wyznaczenie związku między wysokością ściany bocznej ostrosłupa $ABCD$ S a długością krawędzi jego podstawy: $h = 2a$

Zadanie 9. (0-3)

n — liczba chłopców w grupie

$2n$ — liczba dziewcząt w grupie

Dla liczby naturalnej $n \geq 3$ zachodzi równość:

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{3n}{3}} \cdot 100 = \frac{20}{11}, \text{ czyli } \frac{100(n-2)(n-1)}{3(3n-2)(3n-1)} = \frac{20}{11}, \text{ stąd } n = 4$$

Liczba osób w grupie jest równa $n + 2n = 12$.

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie liczby osób w grupie: 12

2 p. — zapisanie równania bez użycia symbolu Newtona i symbolu silni, w którym niewiadomą jest liczba chłopców, liczba dziewcząt lub liczba wszystkich osób w grupie:

$$\text{np. } \frac{100(n-2)(n-1)}{3(3n-2)(3n-1)} = \frac{20}{11}$$

1 p. — zapisanie równania z użyciem symbolu Newtona, w którym niewiadomą jest liczba chłopców, liczba dziewcząt lub liczba wszystkich osób w grupie:

$$\text{np. } \frac{\binom{n}{3}}{\binom{3n}{3}} \cdot 100 = \frac{20}{11}$$

Zadanie 10. (0-4)

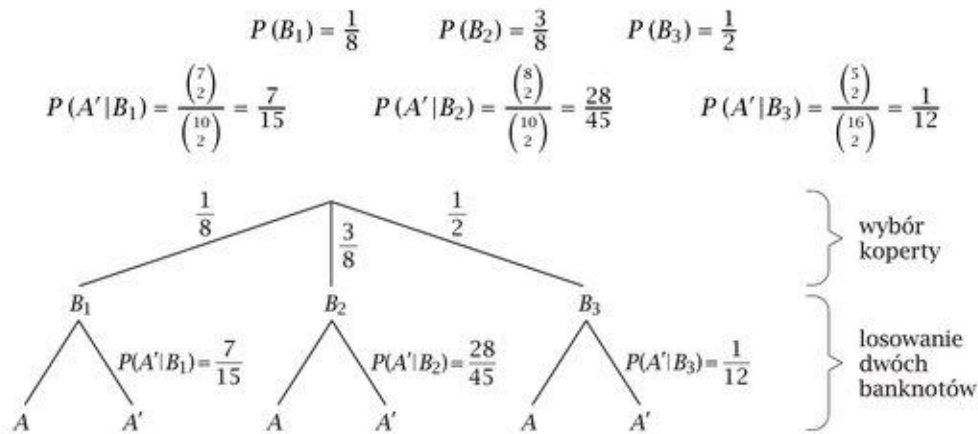
A — Wylosowana kwota pieniędzy jest większa niż 20 zł.

A' — Wylosowano dwa banknoty o nominale 10 zł.

B_1 — W trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadł trzy razy.

B_2 — W trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadł dokładnie dwa razy.

B_3 — W trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadł dokładnie raz lub ani razu.



Zatem:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{15} + \frac{3}{8} \cdot \frac{28}{45} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \right) = \frac{2}{3}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{2}{3}$

3 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń B_1, B_2 i B_3 oraz $A'|B_1, A'|B_2$ i $A'|B_3$:

$$P(B_1) = \frac{1}{8}, P(B_2) = \frac{3}{8}, P(B_3) = \frac{1}{2}, P(A'|B_1) = \frac{7}{15}, P(A'|B_2) = \frac{28}{45}, P(A'|B_3) = \frac{1}{12}$$

2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń $A'|B_1, A'|B_2$ i $A'|B_3$:

$$P(A'|B_1) = \frac{7}{15}, P(A'|B_2) = \frac{28}{45}, P(A'|B_3) = \frac{1}{12}$$

LUB

— obliczenie dwóch spośród trzech iloczynów $P(A'|B_n) \cdot P(B_n)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3\}$

1 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń B_1, B_2 i B_3 : $P(B_1) = \frac{1}{8}, P(B_2) = \frac{3}{8}, P(B_3) = \frac{1}{2}$

LUB

- zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A'|B_1$, $A'|B_2$ i $A'|B_3$ z użyciem symbolu Newtona:

$$P(A'|B_1) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}, P(A'|B_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}}, P(A'|B_3) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{16}{2}}$$

LUB

- obliczenie iloczynu $P(A'|B_1) \cdot P(B_1)$: $\frac{7}{120}$

LUB

- obliczenie iloczynu $P(A'|B_2) \cdot P(B_2)$: $\frac{7}{30}$

LUB

- obliczenie iloczynu $P(A'|B_3) \cdot P(B_3)$: $\frac{1}{24}$

Zadanie 11.1. (0-3)

Dziedzina funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność:

$$x^2 + (p+1)x + p^2 + p + 1 \geq 0$$

jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Dla funkcji $g(x) = x^2 + (p+1)x + p^2 + p + 1$:

$$\Delta = (p+1)^2 - 4(p^2 + p + 1), \text{ czyli } \Delta = -3p^2 - 2p - 3$$

Ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji g , są skierowane do góry, więc wystarczy rozpatrzyć warunek $\Delta \leq 0$.

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow -3p^2 - 2p - 3 \leq 0, \text{ stąd } p \in \mathbb{R}$$

Zasady oceniania:

3 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

2 p. — uzyskanie nierówności $-3p^2 - 2p - 3 \leq 0$ i stwierdzenie, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji g są skierowane do góry

LUB

- rozwiązanie nierówności $-3p^2 - 2p - 3 \leq 0$: $p \in \mathbb{R}$

1 p. — zapisanie Δ w postaci ogólnej trójmianu kwadratowego zmiennej p : $\Delta = -3p^2 - 2p - 3$

Zadanie 11.2. (0-3)

$f'(x) = \frac{2x+p+1}{2\sqrt{x^2+(p+1)x+p^2+p+1}}$, gdzie dziedziną funkcji f' jest zbiór $\mathbb{R}$

$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$, stąd $\frac{2 \cdot (-\frac{1}{2}) + p + 1}{2\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (p+1)(-\frac{1}{2}) + p^2 + p + 1}} = \frac{1}{3}$, czyli otrzymujemy równanie:

$$3p = 2\sqrt{p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}} \quad (*)$$

Dla $p \in (-\infty; 0)$ lewa strona równania (*) jest liczbą ujemną, a prawa dodatnią, zatem równanie (*) nie ma rozwiązania.

Dla $p \in [0; +\infty)$ obie strony równania (*) są liczbami dodatnimi, więc po podniesieniu stronami tego równania do kwadratu otrzymujemy:

$$9p^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}\right), \text{ stąd } 5p^2 - 2p - 3 = 0, \text{ czyli } p \in \left\{-\frac{3}{5}, 1\right\}$$

Ponieważ $p = -\frac{3}{5} \notin [0; +\infty)$, więc tylko dla $p = 1$ wykres funkcji f' przechodzi przez punkt A .

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie takiej wartości parametru p , dla której wykres funkcji f' przechodzi przez punkt A : $p = 1$

2 p. — zapisanie równania wynikającego z warunku $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$: np. $\frac{2 \cdot (-\frac{1}{2}) + p + 1}{2\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (p+1)(-\frac{1}{2}) + p^2 + p + 1}} = \frac{1}{3}$

1 p. — obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{2x+p+1}{2\sqrt{x^2+(p+1)x+p^2+p+1}}$

Zadanie 12.1. (0-2)

Z podobieństwa trójkątów ABC i EBF wynika:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+1}{|AC|}, \text{ czyli } |AC| = \frac{8(x+1)}{x}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC wynika:

$$|AB| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2}$$

Zatem:

$$c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}$$

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie długości przyprostokątnej AC w zależności od x : $|AC| = \frac{8(x+1)}{x}$

Zadanie 12.2. (0-4)

Funkcja $c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}$ określona jest dla $x \in (0; +\infty)$.

Niech $f(x) = (x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}$.

Funkcja $c(x) = \sqrt{f(x)}$ przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie, w którym $f(x) > 0$ i funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.

$$f(x) = (x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2} = \frac{(x+1)^2(x^2+64)}{x^2} \text{ dla } x \in (0; +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{(2(x+1)(x^2+64) + 2x(x+1)^2)x^2 - 2x(x+1)^2(x^2+64)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 4\}$$

Skoro $x^3 > 0$ dla każdego $x \in (0; +\infty)$, więc o znaku funkcji f' decyduje tylko licznik.

Funkcja f jest malejąca w przedziale $(0; 4]$, a rosnąca w przedziale $[4; +\infty)$. Zatem funkcja f osiąga w punkcie $x = 4$ minimum, które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji f i funkcji c .

Najmniejsza długość, jaką może mieć przeciwprostokątna AB to:

$$c(4) = \sqrt{(4+1)^2 + \frac{64(4+1)^2}{4^2}} = 5\sqrt{5}$$

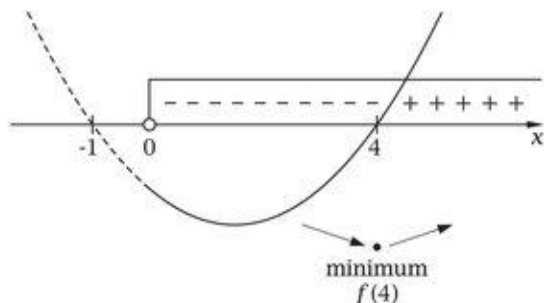
Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie możliwie najmniejszej długości przeciwprostokątnej trójkąta ABC : $5\sqrt{5}$

3 p. — rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji c : $x = 4$

LUB

— rozwiązanie równania $c'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji c : $x = 4$



- 2 p. — wyznaczenie dziedziny funkcji c i pochodnej funkcji f : $x \in (0; +\infty)$, $f'(x) = \frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$
 LUB
 — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji c : $x \in (0; +\infty)$, $c'(x) = \frac{(x+1)(x^3-64)}{x^3 \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}}$
 LUB
 — rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji c : $x \in \{-1, 4\}$
 LUB
 — rozwiązanie równania $c'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji c : $x \in \{-1, 4\}$
- 1 p. — obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$
 LUB
 — obliczenie pochodnej funkcji c : $c'(x) = \frac{(x+1)(x^3-64)}{x^3 \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}}$
 LUB
 — wyznaczenie dziedziny funkcji c : $x \in (0; +\infty)$

Arkusz egzaminacyjny nr 15

Zadanie 1. (0-2)

$$(\sqrt{2})^{2024} \cdot (\sqrt[3]{5})^{3015} = 2^{1012} \cdot 5^{1005} = 128 \cdot 10^{1005}$$

Liczba cyfr liczby $128 \cdot 10^{1005}$ wynosi: $3 + 1005 = 1008$.

Zasady oceniania:

- 2 p. — wyznaczenie liczby cyfr podanej liczby: 1008
 1 p. — zapisanie wyrażenia w postaci $128 \cdot 10^{1005}$

Zadanie 2. (0-5)

Rozwiązujemy nierówność:

$$(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0, \text{ czyli } x \in (-\infty; -6] \cup [-4; 1]$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24, \text{ stąd } x(x+2)(x+7) \geq 0, \text{ czyli } x \in [-7; -2] \cup [0; +\infty)$$

$$\text{Zatem } A = [-7; -6] \cup [-4; -2] \cup [0; 1] \text{ oraz } f(-7) = \log_{7\sqrt{7}} |-7 - 42| = \frac{4}{3}.$$

Zasady oceniania:

- 5 p. — zapisanie za pomocą sumy przedziałów zbioru A oraz obliczenie $f(-7)$:
 $A = [-7; -6] \cup [-4; -2] \cup [0; 1], f(-7) = \frac{4}{3}$
- 4 p. — zapisanie za pomocą sumy przedziałów zbioru A : $A = [-7; -6] \cup [-4; -2] \cup [0; 1]$
- 3 p. — rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$ i nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$:
 $x \in (-\infty; -6] \cup [-4; 1]$ i $x \in [-7; -2] \cup [0; +\infty)$
- 2 p. — rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$: $x \in [-7; -2] \cup [0; +\infty)$
 LUB
 — rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$ i przekształcenie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$ do postaci $x(x+2)(x+7) \geq 0$: $x \in (-\infty; -6] \cup [-4; 1]$
 LUB
 — rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$ i wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu $(x-1)(x+4)(x+6) + 24$: $x \in (-\infty; -6] \cup [-4; 1]$ i $x \in \{-7, -2, 0\}$

- 1 p. — rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$: $x \in (-\infty; -6] \cup [-4; 1]$
 LUB
 — przekształcenie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$ do postaci $x(x+2)(x+7) \geq 0$
 LUB
 — wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu $(x-1)(x+4)(x+6) + 24$: $x \in \{-7, -2, 0\}$

Zadanie 3. (0-5)

Ustalamy warunki, jakie powinien spełniać parametr k :

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 0 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Z warunku (1) otrzymujemy:

$$169 - 4k > 0, \text{ czyli } k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$$

Warunek (2) jest spełniony dla każdego $k \in \mathbb{R}$, bo $x_1 + x_2 = 13 \geq 0$.

Z warunku (3) otrzymujemy: $x_1 \cdot x_2 = k \geq 0$.

Podsumowanie warunków (1)-(3):

$$\begin{cases} k \in (-\infty; 42\frac{1}{4}) \\ k \in \mathbb{R} \\ k \in [0; +\infty) \end{cases}, \text{ czyli } k \in [0; 42\frac{1}{4})$$

Wyznaczamy sumę i iloczyn miejsc zerowych funkcji g :

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p \text{ i } \sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$$

Zatem:

$$\left(-(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2} = 37, \text{ czyli } 13 + 4\sqrt{k} = 37, \text{ stąd } k = 36 \text{ i } 36 \in [0; 42\frac{1}{4})$$

Warunki zadania są spełnione dla $k = 36$.

Zasady oceniania:

- 5 p. — wyznaczenie tych wartości parametru k , dla których spełnione są warunki zadania: $k = 36$
 4 p. — zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ i wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami nieujemnymi: $k \in [0; 42\frac{1}{4})$
 3 p. — wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami nieujemnymi i wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $k \in [0; 42\frac{1}{4})$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$
 LUB
 — zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ i wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe: $k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$
 LUB
 — zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ i wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których miejsca zerowe funkcji f są liczbami nieujemnymi: $k \in [0; +\infty)$
 LUB
 — rozwiązanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$: $k = 36$
 2 p. — wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami nieujemnymi: $k \in [0; 42\frac{1}{4})$
 LUB
 — wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe i wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$
 LUB
 — wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których miejsca zerowe funkcji f są liczbami nieujemnymi i wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $k \in [0; +\infty)$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$

- LUB
- zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$
- 1 p. – wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe: $k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$
- LUB
- wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których miejsca zerowe funkcji f są liczbami nieujemnymi: $k \in [0; +\infty)$
- LUB
- wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$

Zadanie 4. (0-3)

Równanie $|y| = 3 - x$ ma rozwiązania, jeżeli spełniony jest warunek $x \leq 3$.

Po podniesieniu równania $|y| = 3 - x$ stronami do kwadratu otrzymujemy równanie $y^2 = (3 - x)^2$.

Wyznaczamy niewiadomą x , rozwiązując równanie:

$$x^2 - (3 - x)^2 - 2x - 1 = 0, \text{ stąd } x = 2\frac{1}{2}$$

Wyznaczamy niewiadomą y , rozwiązując równanie:

$$|y| = \frac{1}{2}, \text{ czyli } y \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Rozwiązaniem układu równań są pary liczb:

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zasady oceniania:

3 p. – rozwiązanie podanego układu równań: $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

2 p. – wyznaczenie niewiadomej x : $x = 2\frac{1}{2}$

LUB

– wyznaczenie niewiadomej y : $y \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

1 p. – zapisanie równania z niewiadomą x : np. $x^2 - (3 - x)^2 - 2x - 1 = 0$

LUB

– zapisanie równania z niewiadomą y : np. $-4|y| + 2 = 0$

Zadanie 5. (0-3)

x, y – długości boków prostokąta P

d – długość przekątnej prostokąta P

Z twierdzenia Pitagorasa wynika układ równań: $\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = (2\sqrt{13})^2 \\ x^2 + (2y)^2 = (\sqrt{73})^2 \end{cases}$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy związek $x^2 + y^2 = 25$.

Zatem $d = \sqrt{x^2 + y^2} = 5$.

Zasady oceniania:

3 p. – obliczenie długości przekątnej prostokąta P : $d = 5$

2 p. – wyznaczenie sumy kwadratów długości boków prostokąta P : $x^2 + y^2 = 25$

LUB

– obliczenie długości boków prostokąta P : $x = 4, y = 3$

1 p. – zapisanie układu równań $\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = (2\sqrt{13})^2 \\ x^2 + (2y)^2 = (\sqrt{73})^2 \end{cases}$

Zadanie 6. (0-5)

$P_{\Delta ABC}$ — pole trójkąta ABC

$$A = (2, 4), B = (m, m^2), C = (6, 36)$$

$$A_0 = (2, 0), B_0 = (m, 0), C_0 = (6, 0)$$

$$P_{\Delta ABC} = P_{A_0 C_0 C A} - P_{A_0 B_0 B A} - P_{B_0 C_0 C B}$$

$$P_{A_0 C_0 C A} = \frac{(36+4) \cdot 4}{2} = 80$$

$$P_{A_0 B_0 B A} = \frac{(m^2+4)(m-2)}{2}$$

$$P_{B_0 C_0 C B} = \frac{(36+m^2)(6-m)}{2}$$

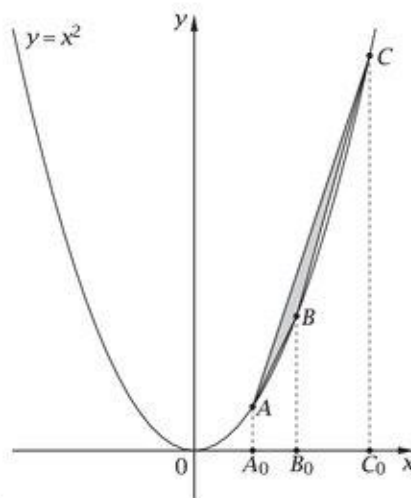
$$P_{\Delta ABC} = -2m^2 + 16m - 24 \text{ i } m \in (2; 6)$$

Skoro $P_{\Delta ABC} < 4$, to:

$$-2m^2 + 16m - 28 < 0, \text{ stąd } m \in (-\infty; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$$

Po uwzględnieniu założenia $m \in (2; 6)$, otrzymujemy:

$$m \in (2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$$



Zasady oceniania:

5 p. — wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których pole trójkąta ABC jest mniejsze od 4:

$$m \in (2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$$

4 p. — rozwiązanie nierówności $P_{\Delta ABC} < 4$ bez uwzględnienia założenia $m \in (2; 6)$:

$$m \in (-\infty; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$$

3 p. — zapisanie pola trójkąta ABC w postaci trójmianu kwadratowego o zmiennej m :

$$P_{\Delta ABC} = -2m^2 + 16m - 24$$

2 p. — zapisanie pola trójkąta ABC w postaci wyrażenia ze zmienną m :

$$\text{np. } P_{\Delta ABC} = \frac{(36+4) \cdot 4}{2} - \frac{(m^2+4)(m-2)}{2} - \frac{(36+m^2)(6-m)}{2}$$

1 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trójkąta ABC : $A = (2, 4)$, $B = (m, m^2)$, $C = (6, 36)$

Zadanie 7. (0-3)

Rozwiązujemy nierówność $g(x) \geq 0$:

$$-x^2 + 8x - 12 \geq 0, \text{ czyli } x \in [2; 6]$$

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f to:

$$x_w = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \text{ i } x_w \in [2; 6]$$

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $[2; 3]$ i rosnąca w przedziale $[3; 6]$ (zobacz rysunek).

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji f w zbiorze $[2; 6]$:

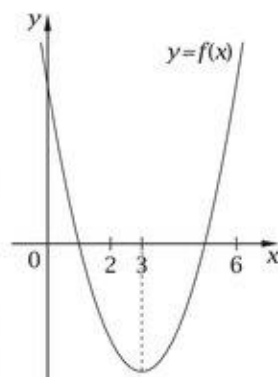
funkcja f jest malejąca w przedziale $[2; 3]$ i rosnąca w przedziale $[3; 6]$

2 p. — rozwiązanie nierówności $g(x) \geq 0$ i wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 5$: $x \in [2; 6]$, $x_w = 3$

1 p. — rozwiązanie nierówności $g(x) \geq 0$: $x \in [2; 6]$

LUB

— wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 5$: $x_w = 3$



Zadanie 8. (0-3)

 Obliczamy x_0 :

$$10 = 5\sqrt{4x_0^2 + 3} \text{ i } x_0 > 0 \text{ stąd } x_0 = \frac{1}{2}$$

 Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2+3}} \cdot 8x = \frac{20x}{\sqrt{4x^2+3}}$$

 Obliczamy wartość współczynnika a :

$$a = f'\left(\frac{1}{2}\right), \text{ stąd } a = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3}} = 5, \text{ czyli } b_n = \sqrt[n]{5^n + 9^n}$$

 Ponieważ $\sqrt[n]{9^n} < \sqrt[n]{5^n + 9^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 9^n}$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{9^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 9^n} = 9$, zatem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n + 9^n} = 9$.

Zasady oceniania:

3 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

 2 p. — obliczenie wartości współczynnika a : 5

 1 p. — obliczenie x_0 : $\frac{1}{2}$

LUB

 — wyznaczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{20x}{\sqrt{4x^2+3}}$
Zadanie 9. (0-2)

Przekształcamy lewą stronę nierówności:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 = 4 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$$

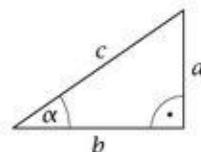
Przekształcamy nierówność:

$$4 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha > 6$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha > 1$$

 Dla każdego kąta ostrego α (zobacz rysunek) zachodzi:

 ① $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha > 0$, więc $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$

 ② $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} > 1$

 Z ① i ② wynika, że zachodzi nierówność $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha > 1$, czyli prawdziwa jest również nierówność $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 > 6$.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

 1 p. — zapisanie tezy w postaci nierówności $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha > 1$
Zadanie 10. (0-3)

Z podobieństwa prostokątów będących ścianami prostopadłościanu wynika:

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{a}, \text{ czyli } b = \frac{a^2}{8}$$

 Wyznaczamy a i b :

$$8 \cdot a \cdot b = 1728, \text{ więc } a^3 = 1728, \text{ czyli } a = 12 \text{ i } b = 18$$

Zatem pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe:

$$P_c = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 8 \cdot 18 + 12 \cdot 18) = 912$$

Zasady oceniania:

 3 p. — obliczenie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu: $P_c = 912$

 2 p. — wyznaczenie a i b : $a = 12$ i $b = 18$

 1 p. — wyznaczenie związku między a i b : np. $b = \frac{a^2}{8}$ lub $ab = 216$

Zadanie 11. (0–4)

Każdy z odcinków BD , WZ i XY jest równoległy do odcinka FH , zatem $BD \parallel WZ$ oraz $BD \parallel XY$. Wynika stąd, że trójkąt DBP jest podobny do trójkąta WZP oraz trójkąt DBQ jest podobny do trójkąta XYQ (cecha kkk), a ponieważ $2|WZ| = |FH| = |BD|$, więc skale podobieństwa tych trójkątów są równe 2.

Trójkąty BQP i BYZ mają wspólny kąt przy wierzchołku B oraz $\frac{|BP|}{|BZ|} = \frac{|BQ|}{|BY|} = \frac{2}{3}$ (cecha bkb), a więc trójkąt BQP jest podobny do trójkąta BYZ w skali $\frac{2}{3}$.

Zatem:

$$|PQ| = \frac{2}{3} |YZ| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

4 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

3 p. — uzasadnienie podobieństwa trójkątów DBP i WZP , trójkątów DBQ i XYQ oraz BQP i BYZ wraz z obliczeniem skal tych podobieństw: 2, 2, $\frac{2}{3}$

LUB

— obliczenie długości odcinka PQ bez uzasadnienia podobieństw odpowiednich trójkątów: $\sqrt{2}$

2 p. — uzasadnienie podobieństwa trójkątów DBP i WZP oraz DBQ i XYQ oraz obliczenie skal tych podobieństw: 2, 2

LUB

— obliczenie skal podobieństwa trójkątów DBP i WZP , trójkątów DBQ i XYQ oraz BQP i BYZ bez uzasadnienia tych podobieństw: 2, 2, $\frac{2}{3}$

1 p. — uzasadnienie podobieństwa trójkątów DBP i WZP oraz DBQ i XYQ

LUB

— obliczenie skal podobieństwa trójkątów DBP i WZP oraz DBQ i XYQ bez uzasadnienia tych podobieństw: 2, 2

Zadanie 12. (0–2)**I sposób**

Obliczamy, ile jest sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby (rezerwowy bramkarz i kapitan) będą siedziały obok siebie:

$$2 \cdot 6 \cdot 5! = 1440$$

Obliczamy, ile jest sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby (rezerwowy bramkarz i kapitan) nie będą siedziały obok siebie:

$$7! - 1440 = 3600$$

II sposób

Liczba wolnych miejsc między kapitanem a bramkarzem	Liczba możliwości zajęcia 7 miejsc na ławce
1	$2 \cdot 5 \cdot 5! = 1200$
2	$2 \cdot 4 \cdot 5! = 960$
3	$2 \cdot 3 \cdot 5! = 720$
4	$2 \cdot 2 \cdot 5! = 480$
5	$2 \cdot 5! = 240$

Zatem:

$$10 \cdot 5! + 8 \cdot 5! + 6 \cdot 5! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 5! = 30 \cdot 5! = 3600$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie liczby sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby nie będą siedziały obok siebie: 3600

- 1 p. — (I sposób) obliczenie liczby sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby będą siedziały obok siebie: 1440
LUB
— (II sposób) stwierdzenie, że aby dwie z góry ustalone osoby nie siedziały obok siebie może być między nimi jedno, dwa, trzy, cztery lub pięć wolnych miejsc i obliczenie liczby usadzeń przynajmniej w jednym z tych wariantów: $10 \cdot 5!$, $8 \cdot 5!$, $6 \cdot 5!$, $4 \cdot 5!$ lub $2 \cdot 5!$

Zadanie 13. (0–4)

A — Za drugim razem wylosujemy kulę czarną.

B — Za pierwszym razem wylosujemy kulę białą.

k — liczba białych kul w pojemniku

$2k$ — liczba czarnych kul w pojemniku

$$|A \cap B| = 2k^2$$

$$|B| = k(3k - 1)$$

$$\text{Zatem } P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2k}{3k - 1}.$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{2k}{3k - 1} = 0,7, \text{ stąd } k = 7 \text{ oraz } 3k = 21$$

W pojemniku jest 21 kul.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie liczby wszystkich kul w pojemniku: 21

3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A|B$ w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $P(A|B) = \frac{2k}{3k - 1}$

2 p. — wyznaczenie liczebności zdarzeń $A \cap B$ i B w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $2k^2$, $k(3k - 1)$

1 p. — wyznaczenie liczebności zdarzenia $A \cap B$ w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $2k^2$
LUB
— wyznaczenie liczebności zdarzenia B w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $k(3k - 1)$

Zadanie 14. (0–6)

h — wysokość ostrosłupa $EFGHT$

x — długość przekątnej podstawy ostrosłupa $EFGHT$

V — objętość ostrosłupa $EFGHT$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta TBW wynika:

$$|WT| = \sqrt{|BW|^2 - |TB|^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Z podobieństwa trójkątów EGW i ACW (cecha bkb) wynika:

$$\frac{x}{|AC|} = \frac{|WT| - h}{|WT|}, \text{ stąd } \frac{x}{6\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - h}{3\sqrt{2}}, \text{ czyli } x = 6\sqrt{2} - 2h$$

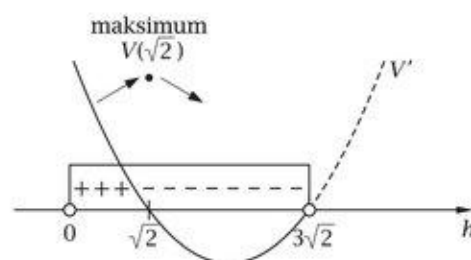
$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot h = \frac{2}{3}h^3 - 4\sqrt{2}h^2 + 12h$$

Dziedzina funkcji V : $h \in (0; 3\sqrt{2})$

$$V'(h) = 2h^2 - 8\sqrt{2}h + 12$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{2} \text{ lub } h = 3\sqrt{2}$$

Funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0; \sqrt{2}]$, a malejąca w przedziale $[\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$. Zatem funkcja V osiąga w punkcie $h = \sqrt{2}$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji. Wówczas największa objętość ostrosłupa $EFGHT$ to $V(\sqrt{2}) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.



Zasady oceniania:

6 p. — wyznaczenie największej objętości ostrosłupa *EFGHT* wraz z pełnym uzasadnieniem:

$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

5 p. — rozwiązanie równania $V'(h) = 0$ lub równania $V'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V :
 $h = \sqrt{2}$ lub $x = 4\sqrt{2}$

4 p. — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji V :

$$h \in (0; 3\sqrt{2}), V'(h) = 2h^2 - 8\sqrt{2}h + 12 \text{ lub } x \in (0; 6\sqrt{2}), V'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}x$$

LUB

— rozwiązanie równania $V'(h) = 0$ lub równania $V'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji V

3 p. — obliczenie pochodnej funkcji V : $V'(h) = 2h^2 - 8\sqrt{2}h + 12$ lub $V'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}x$

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości ostrosłupa *EFGHT* od jego wysokości: $V(h) = \frac{2}{3}h^3 - 4\sqrt{2}h^2 + 12h$

LUB

— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości ostrosłupa *EFGHT* od długości przekątnej jego podstawy: $V(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$

1 p. — ustalenie związku między wysokością ostrosłupa *EFGHT* a długością przekątnej jego podstawy: np. $x = 6\sqrt{2} - 2h$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji V : $h \in (0; 3\sqrt{2})$ lub $x \in (0; 6\sqrt{2})$

ODPOWIEDZI

Arkusz egzaminacyjny nr 1

1. D. 2. D. 3. A. 4. y. 5. C. 7. B. 8. 200. 9. FP. 10. A. 11. A. 12. A. 13. 60. 14. C. 15. (3, 2).
16. EB. 17. DG. 18. C1. 19. 38. 20. C. 21. $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. 22. A. 23. $-3\frac{3}{7}$. 24. DH. 25. C. 26. A.
27. D. 28. $P = 24$. 29. 60° ; 2. 30. B. 31. C. 32. PF. 33. $x = 20$ cm, $P = 1200$ cm².

Arkusz egzaminacyjny nr 2

1. B. 2. C. 3. D. 4. PP. 5. D. 6. D. 7. FP. 8. A. 9. $n = 75$. 10. DE. 11. 100%. 12. C. 13. $W = \left(-1\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}\right)$.
14. FF. 15. ED. 16. C. 17. B. 18. A. 19. 32, 34, 36, 38, 40. 20. CH. 21. DF. 22. $\frac{7\sqrt{34}}{40}$. 23. PP.
24. $P = 50$; $150\sqrt{3}$. 25. B2. 26. C. 27. D. 28. D. 29. $V = 144$. 30. 8,5; 17.

Arkusz egzaminacyjny nr 3

1. C. 2. A. 3. B. 4. D. 6. A. 7. C. 8. C. 9. B. 10. C. 11. B. 12. $x \in [-5; 10)$, $y \in [-2; 10]$; 6; funk-
cja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $[-3; -1]$, $[5; 10)$, malejąca w każdym z prze-
działów: $[-5; -3]$, $[2; 5]$, stała w przedziale $[-5; 2]$. 13. $g(x) = 3x - 2$; $x \in \left(-3; \frac{2}{3}\right)$. 14. A.
15. A. 16. $f(x) = \frac{1}{8}(x - 3)^2 - 2$. 17. C2. 18. FP. 19. A. 20. C. 21. C. 22. B. 23. $2\sqrt{7}$. 24. D. 25. B.
26. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$. 27. AE. 28. PP. 29. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$. 30. 60° , $V = 216\pi$. 31. A. 32. C.
33. Krawędź podstawy graniastosłupa: 4, wysokość graniastosłupa: 6, $P = 112$.

Arkusz egzaminacyjny nr 4

1. D. 2. C. 3. A. 4. B. 5. 3 liczby pierwsze. 7. PF. 8. B. 9. DF. 10. $x = 2\sqrt{5} + 1$. 11. C. 12. B. 13. B.
14. $y = \frac{1}{20}x$. 15. CH. 16. A. 17. B. 18. $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$. 19. 0,77. 20. FP. 21. A. 22. D. 23. $h = 2\sqrt{6}$.
24. C. 25. $(-12, -4)$. 26. $P = (3, 8)$. 27. C. 28. D. 29. A. 30. $48 + 12\sqrt{2}$. 31. AF. 32. A. 33. 9×6 ,
 $P = 54$.

Arkusz egzaminacyjny nr 5

1. B. 2. C. 3. B. 4. A. 5. D. 6. D. 7. FP. 8. D. 9. FP. 10. C. 11. Należy. 12. D. 13. A. 14. $a_1 = 12$,
 $r = -1$. 15. PP. 16. B. 17. C. 19. FP. 20. C2. 21. B. 22. $P_{\Delta APD} = P_{\Delta BPC} = 6$. 23. A. 24. A. 25. D;
 $\frac{10}{3}\pi$; $\frac{3}{4}$. 26. B. 27. CH. 28. $P_c = 56 + 70\sqrt{3} + 40\sqrt{6}$. 29. 48 ton. 30. A. 31. $n = 3$. 32. $a = 7$, $b = 4$.
33. $x = 4$, $P = 4\sqrt{3}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 6

1. C. 2. A. 3. CF; $13 + 10\sqrt{2}$. 4. C. 5. $a = 9$, $b = -30$, $c = 1$. 6. PF. 7. C. 8. C. 9. D. 10. B.
11. DF; $x = 1, 5$. 12. PF. 13. Najmniejsza wartość równa $\frac{1}{4}$ dla argumentu $-\frac{3}{2}$. 14. B. 15. $-2\frac{5}{8}$.
16. 13 : 05. 17. AF. 18. D. 19. A. 20. 194,2 m. 21. CF. 22. C. 23. 6; 640, 800. 24. $V = \sqrt{2}$ cm³,
 $P = 2(3 + \sqrt{2})$ cm². 25. C. 26. D. 27. BF. 28. $\frac{17}{36}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 7

1. PF; C. 2. A. 3. DE. 4. A. 6. $x \in \{-4, 14\}$. 7. B. 8. 10; $x \in \left\{-3, 0, \frac{1}{2}\right\}$. 9. A. 10. B.
11. $x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$. 12. BH. 13. C1. 14. B. 15. PP; AG. 16. A; około 77. 17. D.
18. -0,81. 19. PF. 20. $3 + 2\sqrt{2}$. 21. CH. 22. $k = -\frac{2}{3}$. 23. B; PP. 24. $V = 54\sqrt{3}$. 25. B. 26. $\frac{3}{8}$.
27. C. 28. $\frac{90}{7}$ cm $\times$ $\frac{180}{7}$ cm $\times$ $\frac{150}{7}$ cm, $P = \frac{16200}{7}$ cm².

Arkusz egzaminacyjny nr 8

1. A. 2. C. 3. A. 4. A. 5. B. 7. C. 8. $a = 3, b = -3$. 9. B. 10. FP. 11. D. 12. D. 13. $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 14. C. 15. D; PF. 16. C. 17. B. 18. 9; 0, 3. 19. $f(x) = \frac{3}{2}x + 7, x \in \left[-\frac{14}{3}; +\infty\right)$. 20. PF. 21. C. 22. -2. 23. B. 24. D. 25. AF. 26. C. 27. $r = 2, 5$. 29. $C = (5, 12)$ lub $C = (-1, 0)$. 30. A. 32. D. 33. C. 34. $\frac{3}{20}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 9

1. B. 2. A. 3. C. 4. C. 5. PP. 6. D. 7. B. 8. C. 9. D. 10. FF. 11. D. 12. $x \in \left(-\frac{2}{3}; 6\right); 2\frac{2}{3}$. 13. AG. 14. $s(t) = \begin{cases} 24t & \text{dla } t \in [0; 1,5] \\ 0 & \text{dla } t \in (1,5; 2,5] \\ 18t & \text{dla } t \in (2,5; 5] \end{cases}$; PF; 81. 15. C. 16. $q = 1$ lub $q = 4$. 17. A. 18. B. 19. 8, 7 m. 20. 210. 21. A. 22. BF. 23. $P = 27\sqrt{3}$. 24. PP. 25. $6\sqrt{3}$. 26. Co najmniej 6 worków. 27. C. 28. D. 29. AH; $\frac{37}{149}$. 30. $\frac{19}{36}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 10

1. A. 2. FP. 3. $c < b < a$. 4. A. 5. B. 6. A. 7. PP; A. 8. D. 9. A. 10. B. 12. D. 13. A. 14. B. 15. $x_1 = \frac{6-\sqrt{34}}{2}, x_2 = \frac{6+\sqrt{34}}{2}$. 16. FP. 17. 2475. 18. D. 19. $\frac{5}{3}$. 20. C. 22. C. 23. D. 24. 1 km. 25. D; PP. 26. $\frac{45\pi}{8}$. 27. B. 28. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 20$. 29. CG. 30. $|SB| = \sqrt{105}$. 31. C. 32. C. 33. $\frac{1}{20}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 11

1. $a^b = \frac{1}{16}$. 2. $x \in [-5; 3]$. 3. $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. 4. $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty)$. 5. 13. 6. $x \in \left\{-\frac{13}{18}\pi, -\frac{11}{18}\pi, -\frac{1}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi\right\}$. 8. $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$. 9. 15. 10. $\cos \angle ASD = \frac{3}{5}$. 11. $6(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$. 12. $\frac{41}{55}$. 14. $r = H = 4, V = 64\pi$.

Arkusz egzaminacyjny nr 12

1. $a + c - b = 2$. 3. $f(x) \in [0; 4]$. 4. $S_{m+k} = 0$. 5. $k \in \{-2, 1, 2\}$. 6. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ razy (około 1,65). 7. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 9. $A = (-4, -3), B = (8, 1)$. 10. $P = 108\sqrt{10}$. 11. $\frac{1}{3}$. 12. $m = 5, k = 3$. 13. $y = \frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$. 14. $|AB| = |CD| = 2\sqrt{3}, |BC| = |AD| = 6, P = 12\sqrt{3}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 13

1. $x - z = 1\frac{5}{24}$. 2. $a = 5$. 3. $m \in \{-2, 2\}$. 4. $f(x) = \frac{1}{5}x$. 5. $q = 2$. 6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{P_n} = 4$. 7. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. 8. $\frac{4}{9}$. 10. $\frac{1}{3}$. 11. 12. 12. $\frac{2}{3}$. 13. $x = \frac{1}{2}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 14

2. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$. 3. $m = 1$. 4. $38\frac{7}{19}$. 5. $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. 6. $\frac{25}{16}$. 7. $x^2 + y^2 = 260$. 8. $2\sqrt{2}$. 9. 12. 10. $\frac{2}{3}$. 11. $p = 1$. 12. $c = 5\sqrt{5}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 15

1. 1008. 2. $A = x[-7; -6] \cup [-4; -2] \cup [0; 1], f(-7) = \frac{4}{3}$. 3. $k = 36$. 4. $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$. 5. 5. 6. $m \in (2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$. 7. Funkcja f jest malejąca w przedziale $[2; 3]$ i rosnąca w przedziale $[3; 6]$. 10. 912. 12. 3600. 13. 21. 14. $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Nowa matura z matematyki. Arkusze. Wersja 1.
Zakres podstawowy i rozszerzony.

Publikacja jest przeznaczona dla uczniów przygotowujących się
do matury od roku szkolnego 2024/2025.

W książce znajdziesz:

- 10 arkuszy egzaminacyjnych dla zakresu podstawowego,
- 5 arkuszy egzaminacyjnych dla zakresu rozszerzonego,
- rozwiązania wszystkich zadań otwartych wraz ze schematami oceniania,
- odpowiedzi do wszystkich zadań.

Arkusze egzaminacyjne zamieszczone w książce zostały opracowane na podstawie wytycznych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej znajdujących się w *Informatorze o egzaminie maturalnym z matematyki* i dostosowane do zmian wprowadzonych w podstawie programowej w 2024 r.

Polecamy także:

